

Посвящается
100-летию со дня рождения
академика НАН Армении
Н.Х.АРУТЮНЯНА



ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

ՀՈԾ ՄԻՋԱՎԱՅՐԻ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԱՐԴԻ
ՊՐՈՔԼԵՄՆԵՐԸ

ՀՀ ԳԱԱ ակադեմիկոս Ն.Խ.Հարությունյանի ծննդյան 100-ամյակին նվիրված
միջազգային գիտաժողովի նյութեր

ՀԱՏՈՐ 1

ԵՐԵՎԱՆ – 2012

NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
INSTITUTE OF MECHANICS

TOPICAL PROBLEMS OF CONTINUUM MECHANICS

Proceedings of International Conference dedicated to the 100th Anniversary of
Academician Nagush Kh. Arutyunyan

VOLUME 1

YEREVAN – 2012

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ

**АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ
СПЛОШНОЙ СРЕДЫ**

труды международной конференции, посвящённой 100-летию
академика НАН Армении Н.Х.АРУТЮНЯНА
08-12 октября 2012, Цахкадзор, Армения

ТОМ 1

ИЗДАТЕЛЬСТВО ЕГУАС
ЕРЕВАН – 2012

**Министерство науки и образования Армении
Национальный комитет по теоретической и прикладной механике Армении
Российский национальный комитет по теоретической и прикладной механике
Научный совет РАН по механике деформируемого твердого тела
Институт механики НАН РА
Институт проблем механики РАН
Ереванский государственный университет
Ереванский государственный инженерный университет
Ереванский государственный университет архитектуры и строительства**

Международный научный комитет

Аветисян А.С., Агаловян Л.А., Агаян К.Л., Александров В.М., Альтенбах Г., Аннин Б.Д., Арутюнян Р.А., Асанян Д.Дж., Бабешко В.А., Багдасарян Г.Е., Багдоев А.Г., Баженов В.Г., Банцури Р.Д., Белубекян М.В., Болотник Н.Н., Буренин А.А., Ватульян А.О., Гдутос К., Гольдштейн Р.В., Горячева И.Г., Григоренко Я.М., Григорян Э.Х., Григорян С.С., Гринченко В.Т., Гузь А.Н., Гуидугли П.П., Гукасян А.А., Гупта Н., Даноян З.Н., Джаиани Дж., Жубер С., Зимин В.Н., Индейцев Д.А., Казарян К.Б., Калинин В.В., Канель Г.И., Каплунов Ю.Д., Карапетян К.А., Кашиати Ф., Киракосян Р.М., Кириллова И.В., Климов Д.М., Коссович Л.Ю., Кувыркин Г.Н., Кудиш И.И., Кукуджанов В.Н., Куликовский А.Г., Левин В.А., Липанов А.М., Липатов И.И., Локощенко А.М., Ломакин Е.В., Лурье С.А., Марзокка П., Матвеев В.П., Миннетян Л., Мовсисян Л.А., Мовчан А.А., Мруз З., Панин В.Е., Петров Ю.П., Полянин А.Д., Попов Г.Я., Радаев Ю.Н., Саркисян В.С., Саркисян С.В., Саркисян С.О., Сейранян А.П., Сильников М.В., Сосновский Л.А., Суржиков С.Т., Тамуж В.П., Токмаджян О.В., Федотов И., Филиппов В.В., Фомин В.М., Черноусько Ф.Л., Черный Г.Г., Шифрин Е.И.

Организационный комитет

Сопредседатели: академик НАН РА С.А.Амбарцумян, академик РАН Н.Ф.Морозов,
чл.-корр. НАН РА С.М.Мхитарян, д.ф.-м.н. А.В.Манжиров, д.ф.-м.н. В.Н.Акопян
Зам. председателя: д.ф.-м.н. А.В.Саакян, д.ф.-м.н. М.А.Сумбатьян
Учёные секретари: к.ф.-м.н. Л.Л.Даштоян, к.ф.-м.н. Д.А.Паршин

Ответственный редактор: д.ф.-м.н. В.Н.Акопян
Технический редактор: к.ф.-м.н. Г.З.Геворкян
Дизайн обложки: к.ф.-м.н. Д.М.Минасян
Редакторы: Ж.А.Авдалян и С.С.Овсебян

В сборник включены доклады, представленные на международную конференцию «Актуальные проблемы механики сплошной среды», посвящённой 100-летию со дня рождения академика НАН РА Нагуша Хачатуровича Арутюняна.

НАГУШ ХАЧАТУРОВИЧ АРУТЮНЯН **к 100-летию со дня рождения**

23 ноября 2012 года исполняется 100 лет со дня рождения одного из основателей армянской научной школы механики, выдающегося и заслуженного учёного, удостоившегося широкого международного признания, одного из энергичных и умелых организаторов науки и высшего образования в республике, видного государственного деятеля академика НАН Армении Нагуша Хачатуровича Арутюняна. С именем Н.Х. Арутюняна связаны формирование и дальнейший прогресс ряда научных направлений в механике деформируемого твёрдого тела, почти сороколетний процесс формирования нескольких поколений ученых-механиков в республике и вне республики, целый период развития механики вообще. Он по праву считается пионером теории ползучести в Армении, одним из основателей современной теории ползучести, создателем научного направления по контактными и смешанным задачам механики деформируемого твёрдого тела в республике, в частности, по контактными и смешанным задачам математической теории упругости.

Н.Х. Арутюнян родился в 1912 году в Ереване. Многие годы он проживал вместе со своим дедом – знаменитым историком Лео, чья огромная научная фигура внушала в юноше уважение к учёбе и науке, воспитала трудолюбие. В 1930 году Н.Х. Арутюнян поступает в один из авторитетных ВУЗ-ов страны – в Московскую военно-инженерную академию им В.В. Куйбышева. Окончив его в 1936 году и получив специальность инженера-гидростроителя, он возвращается в Армению и поступает на работу в управление Севан-Зангустрой в качестве ведущего инженера и одновременно преподаёт в Ереванском политехническом институте. В 1937 году Н.Х. Арутюнян поступает в аспирантуру Ленинградского политехнического института. Общение с крупнейшими учеными-механиками Б.Г. Галеркиным, Е.Л. Николаи, А.И. Лурье сыграло решающую роль в его дальнейшей научной судьбе и сформировало его научное кредо. Н.Х. Арутюнян всегда питал особую любовь и уважение к ленинградской школе механиков и его научные контакты с ней никогда не прерывались.

Защитив в 1941 году кандидатскую диссертацию, он отправляется на фронт. Его боевые заслуги отмечены орденами Отечественной войны I и II степени, орденом Красной звезды и медалями.

Демобилизовавшись из армии в 1945 году, Н.Х. Арутюнян возвращается в Армению и энергично возобновляет свою научную и научно-педагогическую деятельность. В 1949 году в Москве в Институте механики АН СССР он блестяще защищает докторскую диссертацию и ему присуждается учёная степень доктора технических наук, а в 1950 году присваивается звание профессора. В том же году он избирается действительным членом Академии наук Армении и членом Президиума.

В 1952-55 гг. продолжается его большая и плодотворная научная и научно-организационная деятельность в Академии наук, где он работает академиком-секретарём

Отделения технических наук. В 1955 году Н.Х. Арутюнян назначается заведующим новосозданной лабораторией по ползучести и прочности в Институте математики и механики. В 1959 году он избирается вице-президентом АН. В этой должности он энергично выполняет работы по укреплению научно-исследовательских институтов и созданию новых.

Параллельно с научной и научно-организационной работой он занимается плодотворной научно-педагогической деятельностью. В 1945-51 гг. он преподаёт в Ереванском политехническом институте, а начиная с 1951 года – в Ереванском государственном университете, где занимает должность профессора кафедры теоретической механики, а с 1958 года возглавляет по своей инициативе новосозданную кафедру теории упругости и пластичности (ныне кафедра механики сплошной среды) и руководит ею до 1978 года.

В 1961 году Н.Х. Арутюнян назначается ректором ЕрГУ. Благодаря его усилиям, в университете основываются кафедры биофизики, ядерной физики, экономической кибернетики и Объединенный вычислительный центр АН и ЕрГУ.

В 1962 году Н.Х. Арутюняну присуждается почётное звание заслуженного деятеля науки Армянской ССР. Долгие годы он был членом Национального комитета СССР по теоретической и прикладной механике и его Президиума, главным редактором журнала “Известия АН Арм.ССР, Механика” и членом редколлегии журнала “Известия АН СССР, МТТ”.

Н.Х. Арутюнян активно занимался общественно-политической и государственной деятельностью. Неоднократно он избирался депутатом Верховного Совета республики и Верховного Совета СССР, в 1962-1975 гг. был председателем Президиума Верховного Совета Арм.ССР и заместителем председателя Президиума Верховного Совета СССР. В Советском Союзе и зарубежом он достойно представлял Армению, её достижения в различных областях общественной жизни.

Научно-исследовательская деятельность Н.Х. Арутюняна развивалась, в основном, в двух направлениях: математической теории упругости и теории ползучести. Первые его работы по теории упругости посвящены кручению и изгибу призматических стержней с полигональным поперечным сечением, где он при помощи дополнительных и ортогональных функций предложил эффективный метод решения этих задач, основанный на сведении их к решению бесконечных систем алгебраических уравнений. В дальнейшем этот метод получил широкое распространение в многочисленных исследованиях и в течение времени стал классическим, вошёл в монографии и учебники. Полученные в этом направлении научные результаты обобщены и подытожены в фундаментальной книге: Н.Х. Арутюнян, Б.Л. Абрамян «Кручение упругих тел», изданной в Москве в 1963 г.

Н.Х. Арутюнян выполнил обширную научно-исследовательскую работу в области контактных и смешанных краевых задач теории упругости и для определённых классов этих задач вместе со своими учениками получил точные решения. Он развил также

научное направление контактных задач о передаче нагрузки упругим массивным телам посредством тонкостенных элементов в виде стрингеров.

Н.Х. Арутюнян наибольший научный вклад внёс в одну из важнейших областей механики деформируемого твёрдого тела – теорию ползучести. Обработав и проанализировав результаты многочисленных экспериментов, Н.Х. Арутюнян и Г.Н. Маслов пришли к заключению, что в вопросах прочности и долговечности инженерных сооружений, изготовленных, например, из бетона, пластмассы, грунтов, стеклопластиков, помимо обычных физико-механических свойств материалов необходимо также учитывать также свойства, обусловленные явлением ползучести, как старение и наследственность. Эта основополагающая идея легла в основу разработанной Н.Х. Арутюняном новой математической теории ползучести стареющих тел, которая в дальнейшем вошла в науку как теория ползучести Маслова-Арутюняна. С учётом этой теории внесены изменения в действующие нормативы расчёта прочности и долговечности многочисленных строительных сооружений и их элементов. Первостепенные результаты Н.Х. Арутюняна по теории ползучести обобщены в опубликованной в 1952 г. в Москве фундаментальной монографии: Н.Х. Арутюнян «Некоторые вопросы теории ползучести», которая была одной из первых в Советском Союзе и в мире. Эта книга в течение десятилетий была и остается настольной книгой для многих поколений научных работников и инженеров-исследователей. Она переведена и опубликована в Англии, Франции, Китае, а отдельные главы – в Германии, Польше и Румынии.

В постановках построенных линейной и нелинейной теорий ползучести Н.Х. Арутюняном исследовались контактные и многочисленные другие задачи, которые имеют теоретическое и практическое значение, в нелинейных задачах им сформулирован принцип суперпозиции обобщённых перемещений.

В последние два десятилетия своей научной деятельности Н.Х. Арутюнян существенно обобщил и развил свою первоначальную теорию ползучести, разработав теорию ползучести неоднородно-наследственно стареющих тел и создав новое научное направление: математическая теория наращиваемых деформируемых тел. Полученные научные результаты обобщены в многочисленных монографиях и научных трудах.

В 1975 году Н.Х. Арутюнян переезжает в Москву и поступает на работу в Институт проблем механики АН СССР в качестве руководителя отдела механики вязкоупругих тел. В годы проживания в Москве ничуть не ослабили его научные и человеческие связи с Арменией. Он одновременно руководил отделом теории вязкоупругости Института механики АН Армении.

Н.Х. Арутюнян, будучи одним из умелых организаторов науки и высшего образования в республике, имеет большой вклад в дело формирования и подготовки молодых учёных и специалистов. Его блестящие лекции в ЕрПИ и ЕрГУ, насыщенные новейшими достижениями науки в разных областях механики сплошной среды, проложили широкую дорогу для будущих специалистов и учёных. Он руководил работой многочисленных молодых научных работников и аспирантов, создал свою оригинальную научную школу,

удостоившись глубокого уважения со стороны многочисленных учеников и последователей. В годы работы в Москве также имел большое число учеников и последователей из разных республик Советского Союза. По его инициативе и рекомендации многочисленные выпускники ЕрПИ и ЕрГУ продолжили аспирантское обучение в известных научных центрах Советского Союза. Н.Х. Арутюнян был широко известен и имел большой авторитет среди учёных Советского Союза и зарубежных стран.

Н.Х. Арутюнян был один из высокообразованных людей своего времени, ярким представителем творческой интеллигенции.

Н.Х. Арутюнян скончался 18 января 1993 г. в Москве, до конца своей жизни оставаясь преданным науке. Он оставил большое научное наследие – семь фундаментальных монографий, около двухсот оригинальных научных работ, научную школу, многочисленных учеников и последователей в Армении, в странах СНГ и за рубежом. Его научные идеи и результаты несомненно послужат основой для новых замыслов и творческих достижений молодых учёных, широких кругов исследователей.

Труды Н.Х. Арутюняна раз и навсегда вошли в сокровищницу мировой науки по механике. Образ выдающегося и заслуженного учёного, интеллигентного и честного гражданина всегда будет воодушевлять многих представителей научной общественности на новые научные свершения.

Агаловян Л.А. Академик НАН Армении

Акопян В.Н. д.ф.м.н.

Манжиров А.В. д.ф.м.н., профессор

Мхитарян С.М. член-корр. НАН Армении

СПИСОК ТРУДОВ Н.Х.АРУТЮНЯНА

Монографии

1. Некоторые вопросы теории ползучести. М.-Л.: Гостехиздат, 1952. 323с. (перев. на кит. яз., изд. в 1961).
2. Кручение упругих тел. М.: Физматгиз, 1963. 686 с. (Совм. с Б.Л. Абрамяном).
3. Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983. 336с. (Совм. с В.Б. Колмановским).
4. Механика растущих вязкоупругопластических тел. М.: Наука, 1987. 472с. (Совм. с В.Э. Наумовым и А.Д. Дроздовым).
5. Расчёт элементов строительных конструкций с учетом ползучести. М.: Стройиздат, 1988. 275с. (Совм. с А.А. Зевиным).
6. Контактные задачи механики растущих тел. М.: Наука, 1991. 175с. (Совм. с А.В. Манжировым и В.Э. Наумовым).
7. Контактные задачи теории ползучести. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1990; Изд-во НАН РА, 1999. 320с. (Совм. с А.В. Манжировым).

Статьи

1940

1. О коэффициенте устойчивости в гидротехнических сооружениях. //Гидротехническое строительство. 1940. № 2. С.22-25.
2. О коэффициенте устойчивости в гидротехнических сооружениях. //Труды Ленинградского политехнического ин-та. 1940. Вып.1. С.62-75.

1941

3. Диффузия солей при одномерной фильтрации. //Тр. Всес. Научно-исслед. Ин-та гидротехники. 1941. Т.30. С.64-78. (Совм. с А.Н. Патрашевым).

1942

4. Приближённое решение задачи о кручении стержней полигонального поперечного сечения. //ПММ. 1942. Т.6. Вып.1. С.19-30.

1947

5. О кручении эллиптического кольцевого сектора. //ПММ. 1947. Т.11. Вып.5. С.543-546.
6. Напряжения и деформации в бетонных массивах с учётом ползучести бетона. //Докл. АН АрмССР.1947. Т.7. № 5. С.203-209.

1948

7. Приближённое решение некоторых задач о кручении анизотропных стержней. //Сообщ. Ин-та матем. и механ. АН АрмССР. 1948. Вып.2. С.41-55.
8. Решение задачи о кручении стержней с полигональным поперечным сечением. //Докл. АН АрмССР. 1948. Т.9. № 2. С.67-74.

1949

9. Решение задачи о кручении стержней с полигонального поперечного сечения. //ПММ. 1949. Т.13. Вып.1. С.107-112.
10. Напряжения и деформации в бетонных массивах с учётом ползучести бетона. //Тр. и тезисы Всес. конференции по бетону и железобетону. Ч.2. 1949. С.110-117.
11. К исследованию статически неопределимых систем с опорами, смещающимся во времени. //ПММ. 1949. Т.13. Вып.5. С.489-500.
12. Теория упругого напряжённого состояния бетона с учётом ползучести. //ПММ. 1949. Т.13. Вып.6. С.609-622.

1950

13. Некоторые задачи теории расчёта железобетонных конструкций с учётом ползучести и усадки бетона. //Тр. Ереванск. Политехн. Ин-та. 1950. № 4. С.61-138.

1951

14. Кручение призматических стержней с поперечным сечением в виде трапеции. //ПММ. 1951. Т.15. Вып.1. С.97-102. (Совм. с Б.Л. Абрамяном).
15. Некоторые вопросы теории ползучести. //Докл. АН АрмССР. 1951. Т.14. № 3. С.65-73.
16. Затухание напряжений в железобетонных элементах с предварительно натянутой арматурой под влиянием ползучести и усадки бетона. //Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-матем. наук. 1951. Т.4. № 5. С.331-372.

1952

17. Некоторые вопросы теории ползучести. М.-Л.: Гостехиздат, 1952. 323с. (перев. на кит. Ёяз. изд. в 1961).
18. Некоторые вопросы теории ползучести. //ПММ. 1952. Т.16. Вып.3. С.257-270.

1954

19. О центре изгиба некоторых призматических стержней с полигональным поперечным сечением. //ПММ. 1954. Т.18. Вып.5. С.597-618. (Совм. с Н.О. Гулканян).

1955

20. О кручении призматических стержней, составленных из различных материалов, с учётом ползучести. //Докл. АН АрмССР. 1955. Т.21. № 1. С.3-9. (Совм. с К.С. Чобаняном).
21. О температурных напряжениях в прямоугольных бетонных блоках. //Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-матем., естеств. и техн. наук. 1955. Т.8. № 4. С.25-66. (Совм. с Б.Л. Абрамяном).

1956

22. Кручение и изгиб призматических стержней, составленных из различных материалов с учётом ползучести. /В кн.: Труды и Третьего всесоюзн. Матем. Т.1. Секционные доклады. М.: 1956, 199с. (Совм. с К.С. Чобаняном).
23. О кручении призматических стержней, составленных из различных материалов, с учётом ползучести. //Изв. АН СССР. ОТН. 1956. № 6. С.16-34. (Совм. с К.С. Чобаняном).

1957

24. Об одном методе решения гиперболического уравнения, содержащего смешанную производную. //Изв.АН АрмССР. Сер. физ.-мат.наук. 1957. Т.10. №1. С.113-121. (Совм. с М.М. Джрбашяном и Р.А. Александряном).
25. Изгиб призматических стержней, составленных из различных материалов, с учётом ползучести. //Изв.АН АрмССР. Сер. физ.-мат., естеств. и техн. наук. 1957. Т.10. №5. С.59-72. (Совм. с К.С. Чобаняном).
26. Ползучесть составных цилиндрических труб. //Изв.АН АрмССР. Сер. физ.-мат. наук. 1957. Т.10. № 6. С.41-58. (Совм. с М.М. Манукяном).
27. Applications de la thirie du Fluage. Eyrolles iditeur, Paris, 1957 (франц. перев. с русск. изд.).

1958

28. Ползучесть сферического сосуда. //Докл. АН АрмССР. 1958. Т.27. № 4. С.209-216. (Совм. с М.М. Манукяном).
29. Кручение тонкостенных стержней замкнутого профиля в условиях неустановившейся ползучести. //ПММ. 1958. Т.22. Вып.6. С.766-780. (Совм. с Р.А. Александряном и М.М. Манукяном).
30. Напряжённое состояние в сжатых железобетонных элементах в условиях неустановившейся ползучести и усадкибетона. //Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-мат. наук. 1958. Т.11. № 6. С.73-86. (Совм. с М.М. Манукяном).

1959

31. Релаксационная задача об изгибе призматического стержня. //Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1959. №1. С.73-81. (Совм. с Р.А. Александряном и М.М. Манукяном).
32. Пластическое кручение конического призматического стержня. Докл. АН АрмССР, 1959, т. 29, № 1, стр. 9-16. (Совм. с М.М. Манукяном).
33. Плоская контактная задача теории пластичности со степенным упрочнением материала. //Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-мат. наук. 1959. Т.12. № 2. С.77-105.

34. Кручение тонкостенных стержней открытого профиля в условиях неустановившейся ползучести. //Изв. АН СССР. ОН. Механика и машиностроение. 1959. № 6. С.82-92. (*Совм. с М.М. Манукяном).
35. Плоская контактная задача теории ползучести. //ПММ. 1959. Т.23. Вып.5. С.901-925.

1961

36. Кручение круглых стержней переменного диаметра в условиях неустановившейся ползучести. //В сб.: Проблемы механики сплошной среды. М.: Изд-во АН СССР. 1961. С.10-28. (Совм. с М.М. Манукяном).
37. Torsion of Circular Rods of Varying Diameter under Conditions of Unsteady Creep. Problems of Continuum Mechanics. Philadelphia - New York, Pergamon Press, 1961, p. 1-20. (Совм. с М.М. Манукяном).
38. Кручение тела вращения в условиях установившейся ползучести. //Изв.АН АрмССР. Сер. физ.-мат. наук. 1961. Т.14. № 4. С.103-114. (Совм. с М.М. Манукяном).

1962

39. О вдаливании жёсткого клина в полуплоскость в условиях установившейся ползучести. //ПММ. 1962. Т.26. Вып.1. С.165-169. (Совм. с М.М. Манукяном).
40. Кручение цилиндрической оболочки с произвольным замкнутым профилем. //Изв.АН АрмССР. Сер. физ.-мат. наук. 1962. Т.15. № 2. С.101-109.

1963

41. Контактная задача теории ползучести с учетом сил трения. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5, стр. 803-820. (Совм. с М.М. Манукяном).

1964

42. The Contact Problem of Theory of Creep, Considering Friction Forces. Proc. In: Proseedings of the Conference -on Thermal Loading and Creep. London, 1964, vol. 5, p. 5-33, 5-37. (Совм. с М.М. Манукяном).
43. О сжатии упругой сферы с жесткой кольцевой облоймой. //Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-мат. наук. 1964. Т.17. № 3. С.55-63. (Совм. с Б.Л. Абрамяном и А.А. Бабляном).
44. О двух контактных задачах для упругой сферы. //ПММ. 1964. Т.28. Вып. 4. С.622-629. (Совм. с Б.Л. Абрамяном и А.А. Бабляном).
45. О вдаливании жёсткого штампа в упругую сферу. //ПММ. 1964. Т.28. Вып.6. С.1101-1105. (Совм. с Б.Л. Абрамяном).

1965

46. Some Problems in the Theory of Creep. Oxford, Pergamon Press, 1965, p. 285. (англ. перев. с русск. изд).
47. О двух динамических контактных задачах для упругой сферы. //ПММ. 1965. Т.29. Вып.3. С.526-531. (Совм. с А.А. Бабляном).

1966

48. О симметричном давлении круглого штампа на упругое полупространство при наличии сцепления. //ПММ. 1966. Т.30. Вып.1. С.143-147. (Совм. с Б.Л. Абрамяном и А.А. Бабляном).
49. Об одной контактной задаче кручения вытянутого эллипсоида вращения. //Изв. АН АрмССР. Механика. //Сб. перев., 1966. Т.19. № 4. С.3-12. (Совм. с Б.Л. Абрамяном и А.А. Бабляном).
50. О контактных задачах для полупространства с включением. //ПММ. 1966. Т.30. Вып. 6. С.1050-1056. (Совм. с А.А.Бабляном).

51. On Pressing a Rigid Punch into an Elastic Sphere. Proc. Of the XI Intern. Congr. Of Appl. Mech. Munich, 1964; Berlin, 1966, p. 510-517. (Совм. с Б.Л. Абрамяном).

1967

52. О некоторых контактных задачах для составного полупространства. //ПММ. 1967. Т.31. Вып. 6. С.1001-1008. (Совм. с Б.Л. Абрамяном).

53. Ползучесть стареющих материалов. Ползучесть бетона.// Инж. ж. МТТ. 1967. № 6. С.95-126.

54. Контактные задачи теории ползучести. //ПММ. 1967. Т.31. Вып. 5. С.897-906.

1968

55. Кручение стержней. /В справочнике: “Прочность, устойчивость и колебания”, гл.10. М.: “Машиностроение”, 1968. Т.1. С.239-286. (Совм. с Б.Л.Абрамяном).

56. Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением. //ПММ. 1968. Т.32. Вып. 4. С.632-646.

1969

57. Некоторое осесимметричные контактные задачи для полупространства и упругого слоя с вертикальным цилиндрическим отверстием. //Изв. АН АрмССР. Механика. 1969. Т.22. №2. С.3-13. (Совм. с Б.Л. Абрамяном).

58. Периодическая контактная задача для полуплоскости с упругими накладками. //ПММ. 1969. Т.33. Вып. 5. С.813-843. (Совм. с С.М. Мхитаряном).

1971

59. Some Contact Problems for a Semi-Plane with Elastic Stiffeners. Trends in Elasticity and Thermoelasticity. Witold Nowacki Anniversary Volume. Wolters-Noorhoff publishing, Groningen The Netherlands, 1971, p. 1-18. (Совм. с С.М. Мхитаряном).

1972

60. Некоторые контактные задачи для полупространства, усиленного упругими накладками. //ПММ. 1972. Т.36. Вып. 5. С.770-787. (Совм. с С.М. Мхитаряном).

61. Ползучесть стареющих материалов. Ползучесть бетона. //В сб.: Механика в СССР за 50 лет. 1972. Т.3. С.155-202.

62. Некоторые контактные задачи для полуплоскости с частично скрепленными упругими накладками. //Изв. АН АрмССР. Механика. 1972. Т.25. №2. С.15-36. (Совм. с С.М. Мхитаряном).

63. Контактные задачи для тел с упругими креплениями. //В сб.: “XIII Межд. Конгр. по теор. и прикл. мех”. Сб. аннотаций. М.: Наука, 1972. С.29-30, (англ.), 30 (рус.). (Совм. с С.М. Мхитаряном).

1973

64. Отражённые ударные волны. М.: “Машиностроение”, 1973. 376с. (Совм. с Л.В.Карчевским).

1974

65. Контактная задача для упругого бесконечного цилиндра, усиленного бесконечной цилиндрической оболочкой. //В сб.: “Избр. пробл. прикл. мех.”. М.: 1974. С.43-52. (Совм. с С.М. Мхитаряном).

1975

66. К контактной задаче о двух полубесконечных пластинках, соединённых полубесконечной упругой накладкой. //В сб.: “Мех. деф. тел и конструкций”. М.: “Машиностроение”, 1975. С.44-51.
67. Контактная задача о вдавлении штампа в упругую полуплоскость с тонким усиливающим покрытием. //ПММ. 1975. Т.39. № 5. С.857-875. (Совм. с С.М. Мхитаряном).

1976

68. О теории ползучести для неоднородно наследственно-стареющих сред. //Докл. АН СССР. 1976. Т.229. № 3. С.569-571.
69. Некоторые задачи теории ползучести для неоднородно стареющих тел. //Изв. АН СССР. 1976. № 3. С.153-164.
70. Об уравнениях состояния в нелинейной теории ползучести неоднородно стареющих тел. //Докл. АН СССР. 1976. Т.231. № 3. С.559-562.
71. Современное состояние развития теории ползучести бетона. /В кн.: Ползучесть и усадка бетона и железобетонных конструкций. М.: Стройиздат, 1976. С.5-96. (Совм. с С.В. Александровским).

1977

72. Краевая задача теории ползучести для наращиваемого тела. //ПММ. 1977. Т.41. Вып. 5. С.783–789.
73. Об одной задаче теории вязкоупругости для тел с фазовыми превращениями. //Докл. АрмССР. 1977. № 2. С.109-114.
74. Об одной задаче теории вязкоупругости для тел с фазовыми превращениями. Докл.АН АрмССР. 1977. Т.65. № 27. С.109-115. (Совм. с Ф.С. Лозовским).

1978

75. Взаимодействие движущегося упругого штампа с упругой полуплоскостью через накладку или тонкий слой идеальной жидкости. //ПММ. 1978. Т.42. Вып. 3. С.475-485. (Совм. с В.М. Александров).

1979

76. Задачи оптимизации в теории ползучести для наращиваемых тел, подверженных старению. //Изв. АН СССР. МГТ. 1979. № 1. С.100-107. (Совм. с А.А. Зевиным).
77. О принципе соответствия в нелинейной теории ползучести стареющих тел. //Изв. АН СССР. МГТ. 1979. № 6. С.51-55. (Совм. с А.А. Зевиным).
78. Об устойчивости неоднородно-стареющих вязкоупругих стержней. //ПММ. 1979. Т.43. Вып. 4. С.709-721. (Совм. с В.Б. Колмановским).
79. Задача оптимизации в теории ползучести для неоднородных балок, подверженных старению. //ПМ. 1979. Т.15. №10. С.97-106. (Совм. с В.Б. Колмановским).

1980

80. Плоская задача теории ползучести для слоя. //Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1980. Т.33. № 3. С.18-28. (Совм. с М.А. Сумбатьян).
81. О принципе соответствия в теории ползучести при конечных деформациях. //Изв. АН СССР. МГТ. 1980. № 5. С.100-105.
82. Об устойчивости неоднородно вязкоупругих стержней. //Изв. АН АрмССР. Механика. 1980. № 4. С.26-37. (Совм. с В.Б. Колмановским).

1981

83. Теория ползучести неоднородно-стареющих тел. //Препринт. Ин-т проблем механики АН СССР. М.: 1981. № 170. 76с.
84. Асимптотическое поведение решения краевой задачи теории ползучести неоднородных стареющих тел с односторонними связями. //Докл. АН СССР. 1981. Т.257. № 2. С.302-304. (Совм. с Б.А. Шойхетым).
85. Асимптотическое поведение решения краевой задачи теории ползучести неоднородных стареющих тел с односторонними связями. //Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 3. С.31-48. (Совм. с Б.А. Шойхетым).
86. Об одном классе ядер для описания ползучести стареющих сред. //Докл. АН СССР. 1981. Т.258. № 3. С.559-561. (Совм. с А.А. Зевиным).
87. Оптимальная форма наращиваемой колонны. //Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 5. С.128-132. (Совм. с А.А. Зевиным).
88. О наращивании вязкоупругого полого шара, подверженного старению. //Докл. АН АрмССР. 1981. Т.73. № 5. С.284-287. (Совм. с Б.А. Шойхетым).
89. Об устойчивости неоднородно-вязкоупругих армированных стержней. //ПММ. 1981. Т.45. Вып.6. С.1110-1120. (Совм. с В.Б.Колмановским).
90. Об устойчивости сжато-растянутых неоднородно-вязкоупругих армированных стержней. //ДАН СССР. 1981. Т.258. № 6. С.1334-1336. (Совм. с В.Б. Колмановским).
91. Устойчивость и оптимизация неоднородно-вязкоупругих стержней. /В кн.: Теоретика и приложна механика. 4-й нац. конгресс по теор. и прикл. мех., Варна: 1981. Кн.1. София: Болг. АН. 1981. С.379-380. (Совм. с В.Б. Колмановским).

1982

92. Об одном классе ядер ползучести стареющих материалов. //ПМ. 1982. Т.18. № 4. С.14-21. (Совм. с А.А. Зевиным).
93. Некоторые задачи теории ползучести для наращиваемых тел, подверженных старению. //Изв. АН АрмССР. 1982. Т.35. № 3. С.13-30. (Совм. с В.В. Метловым).
94. Некоторые задачи теории ползучести неоднородно-стареющих тел с изменяющимися границами. //Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 5. С.91-100. (Совм. с В.В. Метловым).
95. Нелинейные задачи теории ползучести неоднородно-стареющих тел с изменяющейся границей. //ДАН СССР. 1982. Т.264. № 6. С.1345-1348. (Совм. с В.В. Метловым).
96. К теории вязко-пластичности неоднородно-стареющих тел. //Изв. АН АрмССР. Механика. 1982. Т.35. № 5. С.22-26. (Совм. с Д.Д. Ивлевым).
97. Некоторые задачи теории ползучести для наращиваемых тел, подверженных старению. //Изв. АН АрмССР. Механика. 1982. Т.35. № 3. С.13-30. (Совм. с В.В. Метловым).

1983

98. Нелинейные задачи теории ползучести наращиваемых тел, подверженных старению. //Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 4. С.142-152. (Совм. с В.В. Метловым).
99. Асимптотика решения задач теории ползучести неоднородно-стареющих тел с двумерной трещиной. //Изв. АН АрмССР. Механика. 1983. Т.36. № 5. С.17-30. (Совм. С.А. Назаровым и Б.А. Шойхетом).
100. Об устойчивости растущего вязкоупругого стержня, подверженного старению. //ДАН СССР. 1983. Т.270. № 4. С.799-803. (Совм. с В.Д. Потаповым).

1984

101. Механика растущих вязкоупругих тел, подверженных старению, при конечных деформациях. //Докл. АН СССР. 1984. Т.276. № 4. С. 821-825. (Совм. с А.Д. Дроздовым).

102. Об одном методе решения краевой задачи теории ползучести для неоднородно стареющего тела. Нелинейные модели и задачи механики деформируемого твёрдого тела. М.: Наука, 1984. С.135-141. (Совм. с А.А. Зевиным).
103. Механика растущих вязкоупругих тел. /Препринт. Ин-т проблем механики АН СССР. М.: 1984. № 228. 148с. (Совм. с В.Э. Наумовым).
104. Об одном механизме формообразования растущих вязкоупругих тел. Изв. АН СССР. МТТ, 1984, № 1, стр. 57-65. (Совм. с В.Э. Наумовым).
105. Краевая задача теории вязкоупругопластичности для растущего тела, подверженного старению. //ПММ. 1984. Т.48. Вып. 1. С.17-28. (Совм. с В.Э. Наумовым).
106. Об устойчивости растущего вязкоупругого армированного стержня, подверженного старению. //Ж. прикл. мех. и техн. физ. 1984. №5. С.143-151. (Совм. с М.Н. Михайловым и В.Д. Потаповым).
107. О растущем гравитирующем вязкоупругом шаре при конечных деформациях. //Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 4. С.124-137. (Совм. с А.Д. Дроздовым).

1985

108. О контактном взаимодействии наращиваемой системы вязкоупругих накладок с однородной полуплоскостью. //Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 2. С.144-154. (Совм. с В.Э. Наумовым).
109. Механика растущих вязкоупругих тел, подверженных старению, при конечных деформациях. //Механика композитных материалов. 1985. № 4. С.591-602. (Совм. с А.Д. Дроздовым).
110. Теория вязкоупругопластичности растущих тел, подверженных старению, при конечных деформациях. //Докл. АН СССР. 1985. Т.282. № 1. С.23-27. (Совм. А.Д. Дроздовым).
111. О кручении конических труб. //Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 5. С.119-125.
112. Нарращивание стареющих вязкоупругих тел в условиях фазового перехода. //Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 6. С.136-144. (Совм. с А.Д. Дроздовым).

1986

113. Задачи механики растущих вязкоупругопластических тел в условиях старения и разгрузки. //Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 4. С.153-163. (Совм. с В.Э. Наумовым и В.О. Геогджаевым).
114. Устойчивость растущих вязкоупругих оболочек, подверженных старению. //Ж. прикл. мех. и техн. физ. 1986. № 2. С.151-160. (Совм. с М.Н. Михайловым и В.Д. Потаповым).
115. О принципе инвариантности в теории неоднородно стареющих сред. //ПММ. 1986. Т.50. Вып. 6. С.1034-1040. (Совм. с В.В. Метловым).
116. Нарращивание вязкоупругопластических тел, подверженных старению, при конечных деформациях. Мат. методы мех. деф. тв. тела. М.: Наука, 1986. С.9-17. (Совм. с А.Д. Дроздовым).
117. Фазовые переходы в упругих и вязкоупругих телах. //Механика композитных материалов. 1986. № 1. С.94-102. (Совм. с А.Д. Дроздовым).

1987

118. Фундаментальные решения задач для растущего тела в форме четверть-плоскости. //Изв. АН СССР. МТТ. 1987. №2. С.85-90.
119. Поведение решений задач теории упругости в неограниченных областях с параболаидальными и цилиндрическими включениями или полостями. //Успехи механики. 1987. Т.10. №4. (Совм. с А.Б. Мовчаном и С.А. Назаровым).
120. Упругопластическое кручение призматических стержней. //Докл. АН СССР. 1987. Т.297. №3. С.563-566. (Совм. с Ю.Н. Радаевым).
121. Оптимальные задачи упругопластического кручения. //Изв. АН СССР. МТТ. 1987. №5. С.117-125. (Совм. с Ю.Н. Радаевым).

1988

- 122.Расчёт строительных конструкций с учётом ползучести. М.: Стройиздат, 1988. 256с. (Совм. с А.А. Зевиным).
- 123.Оптимизация процесса кристаллизации сферической отливки. //Докл. АН АрмССР. 1988. Т.87. № 5. С.212-215. (Совм. с А.Д. Дроздовым).
- 124.Упругопластическое кручение призматических стержней. //Изв. АН СССР. МТТ. 1988. №4. С.123-132. (Совм. с Ю.Н. Радаевым).
- 125.Поведение решений задач теории упругости в неограниченных областях с параболоидальными и цилиндрическими включениями или полостями. //Успехи мех., 1988. Т.10. №4. С.3-91. (Совм. с А.Б. Мовчаном и С.А. Назаровым).
- 126.Механическая модель растущей ледяной сосульки. //Пластич. и разруш. тв. тела. М.: 1988. С.2-4. (Совм. с С.С. Григоряным и В.Э. Наумовым).

1989

- 127.Контактные задачи механики растущих тел. ПММ. 1989. Т.53. Вып.1. С.145-158. (Совм. с А.В. Манжировым).
- 128.Динамическое наращивание деформируемых тел. Препр. Ин-т проблем механики АН СССР. № 374. М. 1989. 44 с. (Совм. с В.Э. Наумовым и Ю.Н. Радаевым).
- 129.Волны в растущих упругих телах. М. 1989. 44 с. Препр. Ин-т проблем механики АН СССР. №405. (Совм. с В.Э. Наумовым и Ю.Н. Радаевым).
- 130.Об асимптотических интерпретациях решений задачи Лехницкого. Ж. прикл. мех. и техн. физ. 1989. № 5. С. 123-127. (Совм. с А.Б. Мовчаном и С.А. Назаровым).
- 131.Упругопластическое кручение цилиндрического стержня при конечных деформациях. ПММ, 1989. № 6. С. 1014-1022. (Совм. с Ю.Н. Радаевым).
- 132.Кручение растущего цилиндра из стареющего вязкоупругого материала. Пробл. нелинейн. теории упругости. Калининград. 1989. С. 20-27. (Совм. с А.Д. Дроздовым).
- 133.Об экстремальных задачах упругопластического кручения. Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 2. С. 139-145. (Совм. с Ю.Н. Радаевым).
- 134.Объемное отверждение неоднородно-стареющих упругих тел. Прикл. мех. Киев. 1989. Т. 25. № 5. С. 28-35. (Совм. с А.Д. Дроздовым).

1990

- 135.О некоторых контактных задачах при наличии трения и сцепления. Пробл. контакт. взаимодействия, трения и износа: Тез. докл. выезд. сес., Ростов н\Д. 19-21 июня. 1990. С. 8. (Совм. с Ю.А. Антиповым).
- 136.Кручение упругого шара с дискообразной трещиной. Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 3. С. 30-37. (Совм. с Ю.А. Антиповым).
- 137.Об условиях на границах раздела в упругопластических телах. Докл. АН АрмССР. 1990. Т. 91. № 1. (Совм. с Ю.Н. Радаевым).
- 138.Математическая модель динамически наращиваемого деформируемого тела. Ч. 1. Кинематика и меры деформации растущего тела. Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 6. С.85-98. (Совм. с В.Э. Наумовым и Ю.Н. Радаевым).

1991

- 139.Кручение составного шара с кольцевой или дискообразной трещиной. //Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 4. С.86-98. (Совм. с Ю.А. Антиповым).
- 140.Контактные задачи теории упругости при наличии трения и сцепления. //ПММ. 1991. Т.55. № 6. С.1005-1017. (Совм. с Ю.А. Антиповым).

141. Математическая модель динамически наращиваемого деформируемого тела. Ч.2. Эволюционная граничная задача теории растущих тел. //Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 1. С.72-86. (Совм. с В.Э. Наумовым и Ю.Н. Радаевым).

1992

142. Контактные задачи теории упругости для клиновидных областей в условиях трения и сцепления. //ПММ.1992. № 5. С.709-722. (Совм. с Ю.А. Антиповым).
143. Динамическое наращивание упругого слоя. Ч.1. Движение потока осаждаемых частиц с переменной скоростью. //Изв. РАН. МТТ. 1992. №5. С.6-24. (Совм. с В.Э.Наумовым и Ю.Н.Радаевым).
144. Динамическое наращивание упругого слоя. Ч.2. Случай падения приращиваемых частиц с постоянной скоростью.//Изв. РАН. МТТ. 1992. №6. С.99-112. (Совм. с В.Э. Наумовым и Ю.Н. Радаевым).

1993

145. Контактная задача для упругого слоя с накладками при наличии трения и сцепления. //ПММ. 1993. Т.57. №1. С.137-147. (Совм. с Ю.А. Антипов).
146. Некоторые вопросы теории наращиваемых деформируемых тел. //Изв. РАН. МТТ. 1993. №3. С.119-132. (Совм. с В.Э. Наумовым).
147. О взаимодействии полубесконечного стрингера с полуплоскостью и полосой при наличии трения и сцепления. //Изв. РАН. МТТ. 1993. № 4. С.184-191. (Совм. с Ю.А. Антиповым).

О НАУЧНОМ НАСЛЕДИИ АКАДЕМИКА Н.Х. АРУТЮНЯНА И РАЗВИТИИ ЕГО ИССЛЕДОВАНИЙ

Мхитарян С.М.

В статье освещаются основные идеи и результаты академика Н.Х. Арутюняна в областях кручения упругих и упруго-ползучих тел, теории ползучести, контактных и смешанных задач механики деформируемого твёрдого тела, их развитие и обобщение.

В результате своей более чем полувековой плодотворной и многогранной научной деятельности в различных областях механики деформируемого твёрдого тела Н.Х. Арутюнян оставил весомое научное наследие. Оно измеряется его многочисленными первоклассными статьями в престижных научных журналах, фундаментальными монографиями, выпущенными известными издательскими компаниями, а также его оригинальными мыслями и подходами насчёт путей развития механики, его принципами организации научного труда и формирования молодых учёных, высказанными им на научных семинарах, дискуссиях, в кругах своих учеников и последователей. Поэтому, формирующимися теперь и впредь будущим механикам–исследователям полезно ознакомиться с этим наследием, с результатами научных исследований Н.Х. Арутюняна, чтобы в промежутке интенсивного продвижения механики в течение нескольких десятилетий двадцатого столетия лучше понять внутреннюю логику развития ряда отраслей механики деформируемого тела, в дальнейшем развивать и обогатить эти результаты.

Научные исследования Н.Х. Арутюняна, в основном, велись в трёх обширных областях механики деформируемого твёрдого тела: в теории кручения упругих и упруго–ползучих тел, теории ползучести, смешанных и контактных задач. Вкратце остановимся на его идеях и результатах в этих областях, а также на их развитии.

1. Теории кручения и изгиба однородных призматических стержней (классическая задача Сен–Венана)- один из хорошо и глубоко разработанных разделов теории упругости. Эти теории с достаточной полнотой и математической строгостью изложены в фундаментальной монографии Н.И. Мухелишвили [1], где они одновременно обобщены на случай неоднородных стержней (брусьев). Здесь же введена комплексная функция кручения и для решения задач о кручении предложен метод конформных отображений, проиллюстрированный несколькими примерами. А решение задачи о кручении кусочно-однородного призматического стержня в [1], при помощи потенциала простого слоя, сведено к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода, причём предполагалось, что все рассматриваемые замкнутые контуры обладают непрерывно изменяющимися касательными и в каждой своей точке имеют ограниченную кривизну. Вместе с тем, в [1] рассмотрена задача о кручении кусочно-однородного стержня прямоугольного поперечного сечения, состоящего из двух разнородных прямоугольников. Точное решение задачи построено методом рядов Фурье.

Разработанными в последние десятилетия методами граничных интегральных уравнений можно получить эффективные решения также задач для областей с угловыми точками.

Но в расчётах на прочность разнообразных инженерных конструкций и их деталей часто возникает необходимость исследования задач о кручении стержней с поперечными сечениями сложных геометрических форм, обладающими угловыми точками. Сюда относятся задачи о кручении сплошных и полых призматических стержней с полигональными поперечными сечениями в виде неравнобокого уголка, тавра, треугольника, трапеции, двутавра, швеллера, креста, квадрата с эксцентричным квадратным отверстием, круглых цилиндрических стержней с продольными выточками, зубцами и полостями, стержней с тонкими усиливающими покрытиями, призматических стержней с удлиненными и тонкостенными профилями, задачи о кручении тел вращения переменного диаметра и др. Такие задачи стали предметом интенсивных исследований Н.Х. Арутюняна и Б.Л. Абрамяна. Результаты многолетних исследований обширных классов этих и других задач им подытожены в капитальной монографии [2], а их часть – в виде простых расчётных формул, удобных для инженерных приложений, впоследствии вошла в справочник „Прочность, устойчивость и колебания” [3]. При этом, в [2] в качестве основного математического метода решения задач применялся метод Фурье в сочетании с методами ортогональных функций и бесконечных систем линейных алгебраических уравнений.

Среди результатов Н.Х. Арутюняна по теории кручения упругих тел особое место занимает опубликованное им в 1949г. в журнале ПММ [4] точное решение задачи о кручении стержня с полигональным поперечным сечением в виде неравнобокого уголка (рис.1)

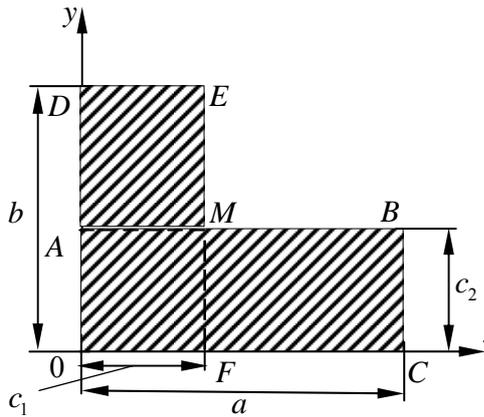


рис. 1

В этой задаче в области уголка решить следует уравнение Пуассона

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = -2 \quad (1)$$

при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} \psi(x, 0) = \psi(0, y) = \psi(x, b) = \psi(a, y) = 0 \\ \psi(c_1, y) = 0 \quad (c_2 \leq y \leq b); \quad \psi(x, c_2) = 0 \quad (c_1 \leq x \leq a) \end{aligned} \quad (2)$$

Но трудно одну функцию $\psi(x, y)$ – решение уравнения (1) подчинить столь сложным граничным условиям (2).

Поэтому функцию $\psi(x, y)$ представим в виде суммы двух вспомогательных функций:

$$\psi(x, y) = \psi_1(x, y) + \psi_2(x, y)$$

где функция $\psi_1(x, y)$ определена в прямоугольнике $OABC$, а функция $\psi_2(x, y)$ – в прямоугольнике $ODEF$. Вследствие непрерывности функции $\psi(x, y)$ в рассматриваемой области уголка функции ψ_1 и ψ_2 должны совпадать в общей области $OAME$. Такое представление даёт возможность подходящим выбором граничных условий для функции ψ_1 и ψ_2 достичь удовлетворения исходных условий (2). Поэтому потребуем, чтобы функции ψ_1 и ψ_2 удовлетворяли следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} \psi_1(0, y) = \psi_1(x, 0) = \psi_1(a, y) = 0 \\ \psi_1(x, c_2) = \begin{cases} 0, & c_1 \leq x \leq a \\ \psi_2(x, c_2), & 0 \leq x \leq c_1 \end{cases} \\ \psi_2(x, 0) = \psi_2(0, y) = \psi_2(x, b) = 0 \\ \psi_2(c_1, y) = \begin{cases} 0, & c_2 \leq y \leq b \\ \psi_1(c_1, y), & 0 \leq y \leq c_2 \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

Далее, чтобы расширить выбор вспомогательных функций с простыми граничными условиями для них, сами функции $\psi_n(x, y)$ ($n=1, 2$) представим суммой двух функций:

$$\psi_n(x, y) = \Phi_n(x, y) + \Psi_n(x, y), \quad (4)$$

где функции $\Psi_n(x, y)$ удовлетворяют уравнению Пуассона

$$\Delta\Psi_n = -2G\omega \quad (n=1, 2) \quad (5)$$

а функции $\Phi_n(x, y)$ – уравнению Лапласа

$$\Delta\Phi_n = 0 \quad (n=1, 2) \quad (6)$$

Здесь G – модуль сдвига материала стержня, а ω – угол закручивания стержня.

Теперь граничные условия (3) выразим через функции Φ_n, Ψ_n :

$$\Psi_1(0, y) + \Phi_1(0, y) = \Psi_1(x, 0) = \Psi_1(a, y) = \Psi_1(x, c_2) = 0$$

$$\Psi_2(x, 0) + \Phi_2(x, 0) = \Psi_2(x, y) = \Psi_2(x, b) = \Psi_2(c_1, y) = 0$$

$$\Phi_1(x, 0) = \Phi_1(c_1, y) = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \Big|_{x=c_1} = \Phi_1(x, c_2) - \Psi_2(x, c_2) = 0$$

$$\Phi_2(0, y) = \Phi_2(x, c_2) = \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \Big|_{y=c_2} = \Phi_2(c_1, y) - \Psi_1(c_1, y) = 0$$

При этом, для функций Φ_n принимается, что они отличны от нуля только в области $OAMF$ и на отрезках AM , MF удовлетворяют дополнительным условиям

$$\Phi_1(c_1, y) = 0, \quad \Phi_2(x, c_2) = 0; \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \Big|_{x=c_1} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \Big|_{y=c_2} = 0$$

Далее, решения уравнений Пуассона (5) представляются синус-рядами Фурье

$$\Psi_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(1)}(x) \sin\left(\frac{\pi ky}{c_2}\right), \quad \Psi_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(2)}(y) \sin\left(\frac{\pi kx}{c_1}\right)$$

где

$$f_k^{(1)} = A_k^{(1)} \operatorname{sh}\left(\frac{\pi kx}{c_2}\right) + B_k^{(1)} \operatorname{ch}\left(\frac{\pi kx}{c_2}\right) + \frac{4c_2^2}{(\pi k)^3} [1 + (-1)^{k+1}]$$

$$f_k^{(2)} = A_k^{(2)} \operatorname{sh}\left(\frac{\pi ky}{c_1}\right) + B_k^{(2)} \operatorname{ch}\left(\frac{\pi ky}{c_1}\right) + \frac{4c_1^2}{(\pi k)^3} [1 + (-1)^{k+1}]$$

Очевидно, что благодаря представлениям (9)–(10), условия $\Psi_1(x, 0) = \Psi_1(x, c_2) = \Psi_2(0, y) = \Psi_2(c_1, y) = 0$ из (7) удовлетворяются тождественно.

Решения уравнений Лапласа также представим синус-рядами Фурье

$$\Phi_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k^{(1)}(x) \sin\left(\frac{\pi ky}{c_2}\right), \quad \Phi_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k^{(2)}(y) \sin\left(\frac{\pi kx}{c_1}\right)$$

где

$$v_k^{(1)}(x) = D_k^{(1)} \operatorname{sh}\left(\frac{\pi kx}{c_2}\right) + C_k^{(1)} \operatorname{ch}\left(\frac{\pi kx}{c_2}\right) + (-1)^{k+1} \frac{2k}{\pi} \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{f_p^{(2)}(c_2) \sin\left(\frac{\pi px}{c_1}\right)}{p^2 + \left(\frac{kc_1}{c_2}\right)^2}$$

$$v_k^{(2)}(y) = D_k^{(2)} \operatorname{sh}\left(\frac{\pi ky}{c_1}\right) + C_k^{(2)} \operatorname{ch}\left(\frac{\pi ky}{c_1}\right) + (-1)^{k+1} \frac{2k}{\pi} \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{f_p^{(1)}(c_1) \sin\left(\frac{\pi py}{c_2}\right)}{p^2 + \left(\frac{kc_2}{c_1}\right)^2}$$

Теперь, исходя из (4), (9)–(10), (11)–(12), удовлетворим остальным граничным условиям (7)–(8). В результате, коэффициенты $A_k^{(n)}, C_k^{(n)}, D_k^{(n)}$ ($n=1, 2$) выразятся через коэффициенты $B_k^{(n)}$, определившиеся из бесконечной системы линейных уравнений. В [4] доказана полная регулярность этой системы, определена жёсткость кручения и найдены напряжения τ_{xz}, τ_{yz} .

Эти результаты стали началом и толчком многих исследований, вошли в известные монографии [5,6] и получили широкое признание.

2. Наиболее крупный вклад Н.Х. Арутюнян внёс в развитие одной из важных областей механики деформируемого твёрдого тела – теории ползучести, конкретнее, теории ползучести стареющих материалов, в основном, бетона. Следует отметить, что не существует единой теории ползучести, пригодной для всех материалов и, как считают многие специалисты, в том числе,

Л.М. Качанов и Ю.Н. Работнов, такой теории и не может быть, так как процессы ползучести в различных материалах протекают по-разному, со специфическими особенностями для данного материала, которыми нельзя управлять едиными адекватными законами. Таким же образом явление ползучести стареющих материалов, в частности, бетона, многосложно и многогранно, сопровождается многими факторами, в совокупности которых зачастую трудно выделить главные и второстепенные факторы. Поэтому, при построении феноменологической теории ползучести бетона, основанной на моделях механики сплошной среды в сочетании с результатами физических макроэкспериментов, существенно, чтобы исходные конституционные уравнения достаточно точно отражая основные свойства явления ползучести бетона в практически важных случаях его нагружения, одновременно приводили к постановке корректных краевых задач математической физики, допускающих эффективные решения.

Наследственная теория ползучести, основанная на принципе наследственности Л. Больцмана и развитой В. Вольтерра теории упругой наследственности посвящена нестареющим материалам, для которых имеет место условие замкнутого цикла. В этой теории учитывается свойство наследственности материала с памятью и не учитывается свойство старения материала. В теории старения, развитой в работах Ф. Дишингера, И.И. Улицкого и других (см. обзор Н.Х. Арутюняна [7]), наоборот, в зависимости между напряжениями и деформациями ядро ползучести зависит только от возраста бетона и не зависит от продолжительности нагрузки, т.е. от наследственности. Более того, теория старения не обладает достаточной общностью для описания процессов деформирования упруго-наследственного материала (бетона, в частности), свойства которого меняются во времени.

По опытным данным, полученным в лаборатории ползучести и прочности Института механики НАН РА и в других научных центрах, бетон имеет сложный механизм ползучести и своеобразный спектр релаксации. Поэтому для адекватного математического описания процессов ползучести и релаксации в бетоне необходимы соотношения между напряжениями, деформациями и временем более общие чем соответствующие соотношения наследственной теории ползучести и теории старения.

Обработывая данные многочисленных экспериментальных исследований и сопоставляя их с теоретическими предпосылками, Н.Х. Арутюнян и Г.Л. Маслов пришли к выводу, что в вопросах прочности и долговечности инженерных конструкций и сооружений, изготовленных из стареющих материалов и находящихся под действием длительных нагрузок, необходимо учитывать не только физико-механические свойства материалов, но и характерных для них процессы наследственности и старения. Таким путем они пришли к своеобразному симбиозу теорий наследственности и старения. Эта теория получила название наследственной теории старения или теории упруго-ползучего тела или же в технической литературе часто называлась теорией Маслова-Арутюняна упруго-ползучего тела. Она одновременно учитывает старение и наследственность материала, а также частичную обратимость деформаций ползучести.

Начало создания этой теории было положено в работе Г.Н. Маслова [8] (1941), а её построение как математической теории ползучести бетона дано в работах Н.Х. Арутюняна [9,10] (1947, 1952).

В рамках линейной ползучести бетона наследственная теория старения при одноосном напряжённом состоянии исходит из следующих конституционных уравнений:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^t K(t, \tau) \frac{\sigma(\tau)}{E(\tau)} d\tau \quad (13)$$

$$\sigma(t) = E(t) \left[\varepsilon(t) + \int_{\tau_1}^t \Gamma(t, \tau) \varepsilon(\tau) d\tau \right] \quad (14)$$

где $\Gamma(t, \tau)$ – резольвента ядра ползучести

$$K(t, \tau) = E(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} [\delta(t, \tau)] \quad (15)$$

интегрального уравнения (13), τ_1 – момент приложения нагрузки, а $\delta(t, \tau)$ – полная продольная относительная деформация, наблюдаемая в момент времени t и вызванная единичным

напряжением, приложенным к бетонному образцу в некотором возрасте τ . Эта деформация складывается из упруго-мгновенной деформации и деформации ползучести:

$$\delta(t, \tau) = \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \quad (16)$$

где $E(\tau)$ – переменный во времени модуль мгновенной деформации бетона, а $C(t, \tau)$ – мера ползучести бетона, которая в области линейной ползучести не зависит от величины напряжения, но зависит одновременно как от возраста бетона τ , так и продолжительности действия нагрузки $t - \tau$, причём, $C(t, \tau)$ – относительная деформация ползучести стареющего материала в момент времени t , когда единичное напряжение приложено к бетонному образцу в возрасте τ . Отметим, что соотношение (13) описывает процесс ползучести, а (14) – процесс релаксации. Ядро ползучести $K(t, \tau)$, характеризующее реакцию стареющего материала на единичный импульс, который приложен к материалу в некотором возрасте τ , часто называют наследственной функцией влияния или функцией памяти. При помощи (15)–(16) имеем

$$K(t, \tau) = -\frac{1}{E(\tau)} \frac{dE(\tau)}{d\tau} + E(\tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau}, \quad (17)$$

где первое слагаемое характеризует влияние мгновенной деформации, а второе слагаемое – влияние ползучести бетона.

Анализ данных многочисленных опытов в области линейной ползучести бетона показывает, что мера ползучести $C(t, \tau)$ должна удовлетворять следующим условиям:

а) $C(t, \tau) > 0$ при $t > \tau$ и $C(t, \tau) = 0$ при $t = \tau$; б) $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} = 0$ при $0 \leq \tau \leq t$;

в) функция $C(t, \tau)$ должна монотонно убывать с возрастом материала τ , т.е.

$\frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} < 0$ при $0 \leq \tau \leq t$, причём, таким образом, что $\lim_{t \rightarrow \infty} C(t, \tau) = \varphi(\tau)$, где $\varphi(\tau)$ –

предельное значение меры ползучести для данного возраста материала;

г) начиная с некоторого возраста τ_0 , значение $C(t, \tau)$ должно сколь угодно мало отличаться от меры ползучести $C(t - \tau)$ для старого материала, для которого имеет место условие замкнутого цикла.

Исходя из указанных соображений и принимая, что процесс старения – изменение физико-механических свойств материала во времени не зависит от процесса деформации, Н.Х. Арутюнян [9, 10] (1947, 1952) предложил представить меру ползучести стареющего материала в виде произведения двух функций, одна из которых учитывает процесс старения материала, а другая – влияние продолжительности его нагружения, т.е. в виде

$$C(t, \tau) = \varphi(\tau) f(t - \tau) \quad (18)$$

где $\varphi(\tau)$ – функция, учитывающая старение материала. Эта функция с возрастанием τ , монотонно убывая, стремится к некоторой постоянной C_0 , т.е. $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \varphi(\tau) = C_0$. При этом, для

функции $f(t - \tau)$ имеют место неравенства: $0 \leq f(t - \tau) \leq 1$ при $0 \leq t - \tau \leq \infty$ и эту функцию можно аппроксимировать суммой экспоненциальных функций вида

$$f(t - \tau) = \sum_{k=0}^n B_k e^{-\gamma_k(t-\tau)}$$

где B_k и γ_k – постоянные, обычно определяемые опытами и удовлетворяющие условиям

$$B_0 = 1, \quad \sum_{k=1}^n B_k = 0, \quad \gamma_0 = 0, \quad \gamma_k > 0 \quad (k = \overline{1, n})$$

Таким образом, для меры ползучести (18) получаем следующее представление:

$$C(t, \tau) = C(\tau, t - \tau) = \varphi(\tau) \sum_{k=0}^n B_k e^{-\gamma_k(t-\tau)} \quad (19)$$

Представление (19) наглядно отражает оба основных свойства явления ползучести материала (бетона, в частности), а именно, его старение и наследственность. По сказанному выше при больших τ имеем $C(t, \tau) \approx C_0 f(t - \tau)$ и, следовательно, придём к теории упругой наследственности с условием замкнутого цикла.

Теперь при помощи (17) и (19) для ядра $K(t, \tau)$ будем иметь

$$K(t, \tau) = \tilde{E}(\tau) + \sum_{k=0}^n g_k(\tau) e^{-\gamma_k(t-\tau)} \quad (20)$$

$$\tilde{E}(\tau) = -\frac{1}{E(\tau)} \frac{dE(\tau)}{d\tau}, \quad g_k(\tau) = B_k E(\tau) [\varphi'(\tau) + \gamma_k \varphi(\tau)]$$

Функция старения аппроксимируют одним из выражений

$$\varphi(\tau) = C_0 + \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{\tau^k}, \quad \varphi(\tau) = C_0 + \sum_{k=1}^n A_k e^{-\lambda_k \tau} \quad (21)$$

где C_0, A_k и k – константы материала.

В случае, когда в (20) и в первой формуле (21) берутся первые два члена, в [10] в явном виде построена резольвента $\Gamma(t, \tau)$, которая при $E(\tau) = E_0 = \text{const}$ выражается табулированной неполной гамма-функцией, что облегчает решение задач теории ползучести.

Впоследствии теория Маслова–Арутюняна получила дальнейшее развитие в работах С.В. Александровского, П.И. Васильева, А.А. Гвоздева, И.Я. Панарина, И.Е. Прокоповича и других исследователей и на её основе были разработаны надёжные методы расчёта элементов конструкций с учётом ползучести материала [7]. Н.Х. Арутюняном построена также нелинейная теория ползучести стареющих материалов. Впоследствии им же была развита теория ползучести неоднородно–наследственно стареющих тел.

Результаты своих многолетних теоретических изысканий и решения большого числа практически важных задач по расчёту бетонных и железобетонных сооружений, полученных в рамках построенной им наследственной теории старения, подытожены в его основополагающей монографии „Некоторые вопросы теории ползучести”, вышедшей издательством Гостехтеориздат в Москве и Ленинграде в 1952г. [11]. Эта монография – одна из первых по теории ползучести в Советском Союзе. Она была переведена и издана в Англии, Франции, Китае. Её отдельные главы опубликованы в ГДР, Польше, Румынии.

Температурные задачи в рамках теории ползучести Маслова–Арутюняна рассматривались в работах С.В. Александровского, Б.Л. Абрамяна, П.И. Васильева, М.А. Задояна, М.М. Манукяна, Н.Я. Панарина, И.Е. Прокоповича и многих других авторов [7].

Задачи кручения и изгиба составных призматических стержней и валов переменного диаметра на основе линейной теории наследственного старения исследовались в работах Н.Х. Арутюняна, М.М. Манукяна, К.С. Чобаяна, М.А. Задояна, В.С. Саркисяна и других. На основе нелинейной теории старения А.М. Симоняном исследованы задачи о релаксации напряжений в центрально сжатых бетонных и железобетонных элементах [7].

Экспериментальные исследования ползучести бетона развивались в работах К.С. Карапетяна, Р.А. Котикяна, К.А. Карапетяна и других. С.Р. Месчан развил теоретические и экспериментальные исследования по распространению теории ползучести наследственно стареющих тел на некоторые типы грунтов.

Развитие и обобщение идей и работ Н.Х. Арутюняна подробно освещено в [7,11].

3. В области смешанных и контактных задач механики деформируемого твёрдого тела исследования Н.Х. Арутюняна велись в рамках теории упругости и теории ползучести. В постановке теории упругости им совместно с Б.Л. Абрамяном и А.А. Баблюном были получены эффективные решения ряда важных в теоретическом и практическом аспектах

негерцовских контактных задач для сферы, упругого полупространства, осесимметричных контактных задач для полупространства и упругого слоя с вертикальным цилиндрическим отверстием, контактной задачи о кручении вытянутого эллипсоида вращения и других. В 1969г. Н.Х. Арутюнян в журнале ПММ [12] опубликовал решение контактной задачи о взаимодействии стрингера конечной длины с упругой полуплоскостью. Для стрингера была принята известная модель одномерного упругого континуума Мелана. Решение задачи им было сведено к решению интегродифференциального уравнения Прандтля. Последнее в свою очередь им впервые было сведено к регулярной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Результаты этой работы интенсивно развивались и обобщались в многочисленных исследованиях сотрудников Института механики НАН Армении и Ерванского госуниверситета. В итоге, в Армении формулировалась новая отрасль теории контактных задач по вопросам контактного взаимодействия массивных деформируемых тел с тонкостенными элементами в виде стрингеров и тонкостенных включений. Этими вопросами занимались также в других научных центрах бывшего Советского Союза: в Одессе, Львове, Ростове н/Д, в Тбилиси и др.

В постановке линейной теории ползучести наследственного старения Н.Х. Арутюняна рассматривались многие контактные задачи. В работе И.Е. Прокоповича [13] рассмотрена плоская контактная задача о сжатии центральными вертикальными силами двух упруго-ползучих тел различных геометрических форм и различных реологических характеристик, первоначально касающихся друг друга в одной точке. Как в классических контактных задачах теории упругости, основанных на известных гипотезах Герца, здесь также сжимаемые тела заменяются верхней и нижней полуплоскостями и с учётом ползучести определяются вертикальные перемещения граничных точек этих полуплоскостей. Далее, их выражения подставляются в известное условие контакта и, в результате, получается определяющее интегральное уравнение контактной задачи, в котором входят вольтеровский оператор по временной координате и фредгольмовский оператор по пространственной координате. Эти операторы отделяются друг от друга и, в итоге, решение исходного интегрального уравнения сводится к последовательному решению интегрального уравнения Вольтерра второго рода и решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Но, как показано в [14], такой способ решения применим лишь в случае, когда контактный участок во времени убывает. Более простые результаты в этой задаче получаются при предположении, что коэффициенты поперечного расширения при упругих деформациях и деформациях ползучести контактирующих тел постоянны и равны между собой.

В постановке линейной теории ползучести исследовалось много других контактных задач, в том числе задачи о стрингерах, а также смежные задачи в трещинах. В этом направлении укажем на работы [15–23]. Более подробная библиография таких работ до 1967г. приведена в [24].

Перейдём к важному классу нелинейных контактных задач. В работе [25] Н.Х. Арутюнян впервые поставил и решил физически нелинейную, а геометрически линейную плоскую контактную задачу в постановке нелинейной неустановившейся теории ползучести при степенном законе между напряжениями и деформациями о сжатии двух деформируемых тел с различными физико-механическими и реологическими характеристиками (рис.2).

Основная зависимость между интенсивностями деформаций $\varepsilon(t)$ и напряжений $\sigma(t)$ принята по теории пластической наследственности с учётом старения материала в виде

$$K_0 \varepsilon^\mu(t) = \sigma(t) - \int_{\tau_1}^t K(t, \tau) \sigma(\tau) d\tau; \quad K(t, \tau) = \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau}, \quad K_0 > 0, \quad 0 < \mu \leq 1 \quad (22)$$

Здесь $C(t, \tau)$ – мера ползучести, а K_0 и μ – физические константы материала, который предполагается несжимаемым. В работе [25] сначала построено точное решение обобщённой задачи Фламана о действии сосредоточенной в точке s границы полуплоскости вертикальной силы $P(t)$. Согласно этому решению, вертикальное перемещение $v^*(x, t)$ граничной точки x этой полуплоскости, следующей закону (22), будет выражаться формулой [25]

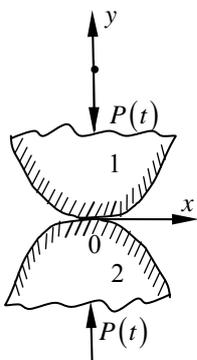


Рис. 2

$$v^*(x,t) = A[(I-L)P(t)]^m |x-s|^{1-m} + D(t), \quad (A = J/K_0^m, \quad m = 1/\mu) \quad (23)$$

где L – оператор Вольтерра с ядром ползучести $K(t, \tau)$, а J – известная постоянная, зависящая от μ . Далее, в работе [25], исходя из (23), вводится в рассмотрение обобщённое перемещение

$$\bar{v}(x,t) = [v^*(x,t) - D(t)]^\mu = A^\mu (I-L)P(t) |x-s|^{\mu-1} \quad (24)$$

линейно зависящее от силы $P(t)$.

Теперь в случае распределённых по отрезку $S = \{y=0, -a \leq x \leq a\}$ вертикальных сил интенсивности $p^*(x,t)$ обобщённые вертикальные перемещения $\bar{v}(x,t)$ согласно (24) можно найти при помощи обычного линейного принципа суперпозиции:

$$\bar{v}(x,t) = A^\mu \left[(I-L) \int_S \tilde{K}(|x-s|) p^*(s,t) ds \right]; \quad \tilde{K}(x) = |x-s|^{\mu-1} \quad (-\infty < x < \infty) \quad (25)$$

Описанный принцип называется обобщённым принципом суперпозиции перемещений (ОПСП). Составляя по (25) выражения обобщённых вертикальных перемещений граничных точек верхней и нижней полуплоскостей, которыми согласно гипотезам Герца заменяются контактирующие между собой тела 1 и 2, далее поступая совершенно аналогично случаю классических контактных задач теории упругости, решение поставленной нелинейной плоской контактной задачи в [25] сведено и последовательному решению интегрального уравнения Вольтерра второго рода и интегрального уравнения Фредгольма первого рода:

$$\omega(x,t) - \int_{\tau_1}^t K(t,\tau) \omega(x,\tau) d\tau = F(x,t); \quad \int_{-a}^a \frac{p^*(s,t) ds}{|x-s|^{1-\mu}} = \omega(x,t) \quad (26)$$

$$F(x,t) = [\gamma(t) - f_0(x)]^\mu, \quad f_0(x) = \frac{f_1(x) + f_2(x)}{A_1 + A_2}; \quad A_1 = J_1/K_{01}^m, \quad A_2 = J_2/K_{02}^m,$$

где J_1, J_2, K_{01}, K_{02} – константы материалов первого и второго тела, $\gamma(t)$ – мера взаимного сближения тел в вертикальном направлении, а $f_1(x)$ и $f_2(x)$ – функции, характеризующие геометрическую конфигурацию тел. К уравнениям (26) следует добавить условие равновесия тел

$$\int_{-a}^a p^*(s,t) ds = P(t) \quad (27)$$

Уравнение Вольтерра из (26) легко решается при ядре ползучести вида (20)–(21) (см. [24]), а второе уравнение (26) при условии (27) решается известным методом М.Г. Крейна [26].

Обсуждаемая плоская контактная задача в постановке теории пластичности со степенным упрочнением материала описанным выше методом решена в другой работе Н.Х. Арутюняна [27]. Это решение идентично решению плоской контактной задачи в постановке нелинейной теории установившейся ползучести при степенной зависимости между интенсивностями напряжений и скоростей деформаций.

На основании решения [25] М.М. Манукян [28] решил задачу о вдавлении жёсткого клина в полуплоскость в условиях установившейся ползучести, а в работе [29] рассмотрена плоская контактная задача нелинейной теории установившейся ползучести при степенном законе и при наличии сил трения в контактной области.

А.И. Кузнецов [30] на основе идей и методов, развитых в [25,27], решил задачу о вдавлении жёсткого штампа в деформирующееся по степенному закону полупространство.

Результаты исследований многих важных классов контактных задач теории ползучести изложены в монографии Н.Х. Арутюняна и А.В. Манжирова [31]. Отметим также, что контактные задачи для линейно деформируемого основания, когда модуль упругости по глубине изменяется по степенному закону [32], в основном, описываются теми же интегральными уравнениями Фредгольма первого рода, что и нелинейные контактные задачи теории ползучести в рамках ОПСП, рассмотренные Н.Х. Арутюняном.

Дальнейшее развитие идей и методов работ [25,27] приводит к необходимости построения точного решения в перемещениях или в скоростях первой граничной задачи для степенно деформирующейся полуплоскости, когда на её границе заданы распределённые по

произвольному закону вертикальные силы. Такое решение даст возможность уточнить и оценить ОПСП. Этот принцип можно оценить также сравнением решения контактной задачи по ОПСП с её точным решением, если, конечно последнее можно построить. В случае контактной задачи антиплоского сдвига для степенно деформирующегося полупространства такой шаг сделан в работе [33], где использован метод годографа в сочетании с преобразованием Лежандра. В работе [34] путём введения функции псевдонапряжений получено точное решение первой граничной задачи в перемещениях или в скоростях для степенно деформирующегося полупространства при антиплоской деформации. В [35] вновь рассмотрена плоская контактная задача нелинейной теории установившейся ползучести, при степенном законе, где осуществлено сращивание решения, эффективного во всей контактной области, за исключением окрестностей углов штампа, с решением, справедливым вблизи углов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.
2. Арутюнян Н.Х., Абрамян Б.Л. Кручение упругих тел. М.: Физматгиз, 1963. 688с.
3. Арутюнян Н.Х., Абрамян Б.Л. Кручение стержней. // В справочнике: “Прочность, устойчивость и колебания”. М.: Машиностроение. Т.1. 1968. С.239-286.
4. Арутюнян Н.Х. Решение задачи о кручении стержней с полигональным поперечным сечением.// ПММ. 1949. №13. Вып.1. С.107-112.
5. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872с.
6. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688с.
7. Арутюнян Н.Х. Ползучесть стареющих материалов. Ползучесть бетона (обзор).// В сб.: Механика в СССР за 50 лет. Т.3. М.: Наука, 1972. С.155-202.
8. Маслов Г.Н. Термонапряжённое состояние в бетонных массивах с учётом ползучести бетона. //Изв. НИИТ.1941. Т.28,
9. Арутюнян Н.Х. Напряжения и деформации в бетонных массивах с учётом ползучести бетона. //Докл.АН Арм.ССР.1947. Т.VII. № 5. С.203-209.
10. Арутюнян Н.Х. Некоторые вопросы теории ползучести.// ПММ.1952.Т.16.Вып.3. С.257–270.
11. Арутюнян Н.Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М.-Л.: Гостехтеориздат, 1952. 323 с. (перв. на кит. яз., изд. в 1961)
12. Арутюнян Н.Х. Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением. //ПММ. 1968. Т. 32. Вып.4. С.632-646.
13. Прокопович И.Е. О решении плоской контактной задачи с учётом ползучести.// ПММ.1956. Т.20. Вып.6. С.680-687.
14. Белоконь А.В., Ворович И.И. Контактные задачи линейной теории вязкоупругости без сил трения и сцепления.// Изв. СССР. МГТ.1973. №6. С.63-73.
15. Акоюн В.Н. О передаче нагрузки от упругой неоднородной полубесконечной накладки к полуплоскости, обладающей свойством ползучести. // В сб.: “Контактные и смешанные граничные задачи механики деформируемого твёрдого тела”, посвящённом 85-летию академика Н.Х. Арутюняна. Изд.-во НАН Армении, Ереван, 1999, с. 46-50.
16. Мирзоян С.Е., Мхитарян С.М. О некоторых задачах контактного взаимодействия между бесконечными стрингерами и полосами с учётом неоднородности старения материалов. //Изв.АН Арм.ССР. Механика.1981. Т.34. №5. С.27-40.
17. Давтян З.А., Мхитарян С.М. О двух контактных задачах кручения цилиндров при помощи цилиндрических оболочек с учетом их вязкоупругих свойств. // Изв.АН Арм.ССР. Механика. 1984. Т.37. №3. С.3-17.
18. Давтян З.А., Оганесян А.Н., Мхитарян С.М. О напряжённо-деформированном состоянии вязкоупругого стареющего тела в форме плоскости с прямолинейными разрезами.// В сб.: “Проблемы механики деформируемых тел”, посвящённом 90-летию академика Н.Х. Арутюняна. Ереван: Изд.-во “Гитутюн” НАН РА, 2003. С.254-264.
19. Какосимиди Н.Ф. Расчёт фундаментной полосы с учётом ползучести основания. //Изв. АН Арм.ССР, сер. физ.-мат.наук. 1960. Т.13. №6.

20. Какосимиди Н.Ф., Прокопович И.Е. Решение контактной задачи теории ползучести при линейной зависимости между напряжениями и деформациями. //ПМТФ. 1962. №1.
21. Симонян А.М. О плоской контактной задаче ортотропных тел с учётом ползучести. // Изв. АН АрмССР.Механика. 1966. Т.19. №4. С.57-68.
22. Ширинкулов Т.К. К решению плоской контактной задачи теории ползучести при наличии сил трения.// Изв. АН УзССР. Сер.техн.наук. 1963. №5.
23. Ширинкулов Т.Ш. Методы расчёта конструкций на сплошном основании с учётом ползучести. Ташкент: ФАН, 1969. 268с.
24. Арутюнян Н.Х. Контактные задачи теории ползучести. //ПММ. 1967. Т.31. Вып.5. С.897-906.
25. Арутюнян Н.Х. Плоская контактная задача теории ползучести. // ПММ. 1959. Т.23. Вып.5. С.901-924.
26. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и её предложения. М.: Наука, 1967. 508с.
27. Арутюнян Н.Х. Плоская контактная задача теории пластичности со степенным упрочнением материала.// Изв. АН Арм.ССР. Сер.физ-матем. наук. 1959. Т.12. №2. С.77-105.
28. Манукян М.М. О вдавливании жёсткого клина в полуплоскость в условиях неустановившейся ползучести. //Докл. АН АрмССР. 1963. Т.37. №2.
29. Арутюнян Н.Х., Манукян М.М. Контактная задача теории ползучести с учётом сил трения. //ПММ. 1963. Т. 27. Вып.5. С.813-820.
30. Кузнецов А.И. Вдавливание жёстких штампов в полупространство при степенном упрочнении и при нелинейной ползучести материала. //ПММ. 1962. Т.26. Вып.3. С.481-491.
31. Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В. Контактные задачи теории ползучести. Ереван: Изд.-во АН Арм. ССР, 1999. 320с.
32. Попов Г.Я. Контактные задачи для линейно-деформируемого основания. Киев–Одесса: Вища школа, 1982.168с.
33. Александров В.М., Брудный С.Р. О методе обобщённой суперпозиции в контактной задаче антиплоского сдвига. //Изв. АН СССР. МТТ. 1986. №4. С.71-78.
34. Мхитарян С.М. О решении первой граничной задачи нелинейной теории установившейся ползучести для полупространства при антиплоской деформации.// Изв. РАН. МТТ (в печати).
35. Александров В.М., Сумбатян М.А. Об одном решении контактной задачи нелинейной установившейся ползучести для полуплоскости. //Изв. АН СССР. МТТ. 1983. №1. С.107–113.

Сведения об авторе:

Мхитарян Сурен Манукович, член-корр. НАН Армении, д.ф.-м.н., профессор, зав.отделом Института механики НАН Армении

Тел.: 62 10 25, (093) 93 61 17; **E-mail:** smkhitaryan@mechins.sci.am

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ ГРУППОВОГО ПОИСКА В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Аветисян В.В.

Рассматривается задача группового поиска неподвижных точечных объектов в прямоугольной области. Предложен алгоритм разбиения прямоугольника на непересекающиеся подпрямоугольники так, чтобы каждый поисковый объект просматривал предписанный ему прямоугольник оптимальным по быстрдействию способом и при этом наименьшего значения достигал максимального из минимальных времён просмотра подпрямоугольников.

1. В прямоугольной области $D(a, b) = \{(x^{(1)}, x^{(2)}) \in R^2 : 0 \leq x^{(1)}, x^{(2)} \leq a, b\}$ рассматривается группа точечных объектов $X_i, i = 1, \dots, n$, совершающих простые управляемые движения и группа неподвижных точечных объектов $Y_j, j = 1, \dots, m$:

$$\begin{aligned} X_i : \quad \dot{x}_i = u_i, \quad x_i(t_0) = x_i^0; \quad |u_i(t)| \leq U_i, \quad x_i(t) \in D, \quad t \geq t_0, \quad u_i \in R^2 \\ x_i^0 = (0, b_{i-1}), \quad b_{i-1} < b_i, \quad i = 1, \dots, n; \quad b_0 = 0, \quad b_n = b \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} Y_j : \quad y_j(t) \equiv y_j(t_0) = y_j^0 \in D, \quad t \geq t_0 \\ y_j^0 \neq y_k^0, \quad j \neq k; \quad j, k = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (1.2)$$

Пусть объекты $X_i(1.1)$, начиная управляемые движения из граничных точек прямоугольника D , стремятся обнаружить целевые точечные объекты $Y_j(1.2)$, зная только свои текущие местоположения, прямоугольник D и не имея никакой информации о местоположениях y_j^0 и об их количестве m . С каждым объектом X_i связана так называемая информационная круговая область $G \subset D$, движущаяся вместе с вектором координат объекта X_i . Объект Y_j считается обнаруженным при попадании в круговую область $G \subset D$ некоторого объекта $X_i, 1 \leq i \leq n$:

$$y_j \in G(x_i(t)) = \{(x^{(1)}, x^{(2)}) = x : |x - x_i| \leq l\}, \quad j = 1, \dots, m, \quad 1 \leq i \leq n \quad (1.3)$$

Очевидно, что при такой информированности задача поиска или обнаружения (1.3) искомым объектам (1.2) сводится к задаче просматривания области D всеми объектами $X_i, i = 1, \dots, n$ с помощью круга обнаружения G . Скажем, что объекты $X_i, i = 1, \dots, n$ просматривают прямоугольник D за время T , если любая точка $x = (x^{(1)}, x^{(2)}) \in D$ в некоторый момент времени $t_x \in [t_0, T]$ просматривается некоторым объектом $X_i, 1 \leq i \leq n$, т.е. выполняется условие

$$\forall x = (x^{(1)}, x^{(2)}) \in D, \quad \exists t_x \in [t_0, T], \quad \exists i, \quad 1 \leq i \leq n \Rightarrow x \in G(x_i(t_x)) \quad (1.4)$$

Перейдём к построению управлений $u_i(t), t \in [t_0, T]$ объектами $X_i, i = 1, \dots, n$ (1.1), обеспечивающих просматривание (1.4) прямоугольника D за возможно минимальное время T .

Одним из естественных подходов решения такой задачи является подход, основанный на разбиении прямоугольника D на n подпрямоугольники $D_i, i = 1, \dots, n$: $\bigcup_{i=1}^n D_i = D, D_i \cap D_j = \emptyset, i \neq j$ так, чтобы каждый объект X_i просматривал отведённый ему прямоугольник $D_i \subset D$ и на построении траектории движения объекта X_i , покрывающей

прямоугольник D_i .

Пусть стороны прямоугольника D и радиус круга (1.2) удовлетворяют ограничениям $2ln \leq b$, $2l < a$. Согласно предложенному подходу, разобьём прямоугольник D на подпрямоугольники D_i , $i=1, \dots, n$ с основаниями, параллельными оси $Ox^{(1)}$ и имеющими высоту $\gamma_i = b_i - b_{i-1}$, $i=1, \dots, n$, где $b_0 = 0$, $b_n = b$, $2l \leq \gamma_i \leq b - 2(n-1)l$. Такое разбиение, зависящее от $n-1$ параметров b_1, \dots, b_{n-1} , обозначим через $\gamma = \{\gamma_i\}_{i=1}^n = \{b_1, \dots, b_{n-1}\}$. Пусть каждый объект X_i , $i=1, \dots, n$ начинает движение из точки $(0, b_{i-1})$, $i=1, \dots, n$ и просматривает прямоугольник D_i путём движения по одной из траектории семейства Λ_{D_i} [1], состоящее из всевозможных траекторий, построенных путём сочленения двух опорных покрывающих траекторий L_i^+ и L_i^- (рис. 1a,b).

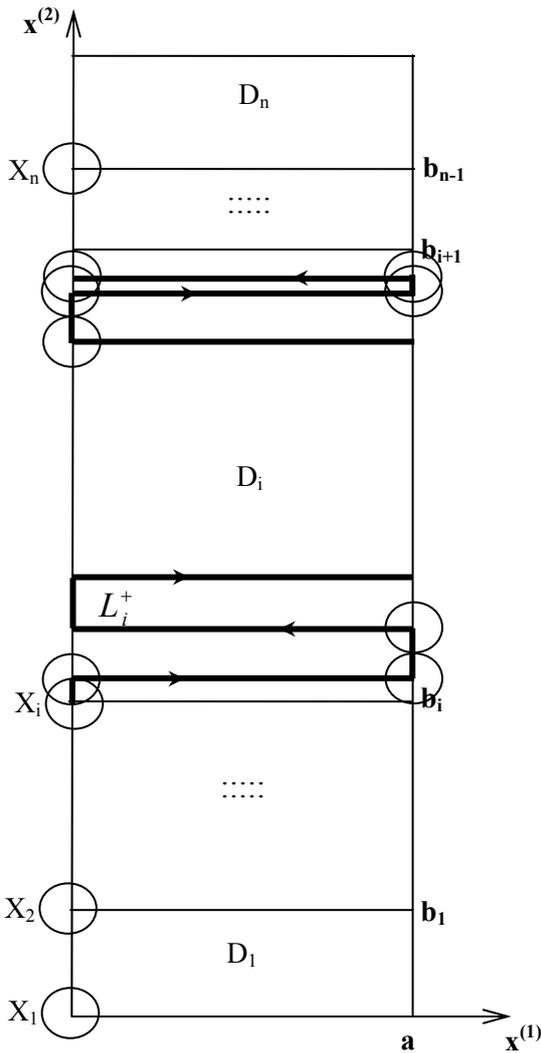


Рис. 1a

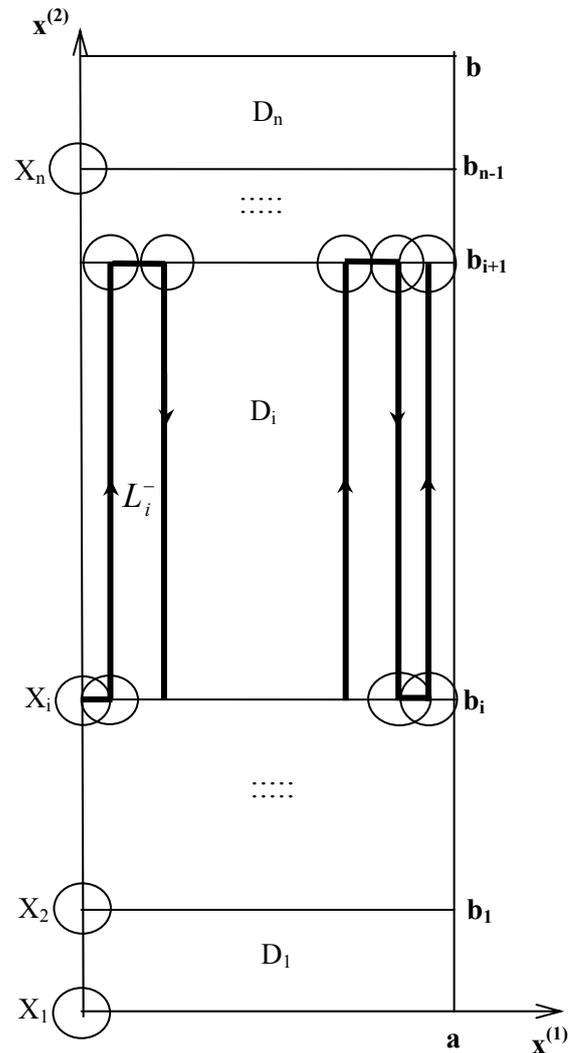


Рис. 1b

Время просмотра прямоугольника D_i при движении по траектории из семейства Λ_{D_i} обозначим через T_i . При фиксированном a , оно зависит как от разбиения $\gamma = \{\gamma_i\}_{i=1}^n$, так и от выбора траектории $L_i \in \Lambda_{D_i}$ и величины скорости движения u_{L_i} по этой траектории. С учётом этого, время просмотра прямоугольника D определяется следующим образом:

$$T(\gamma, L, u_L) = \max \{T_1(\gamma_1, L_1, u_{L_1}), \dots, T_n(\gamma_n, L_n, u_{L_n})\}, \quad (1.5)$$

где введены обозначения $\gamma = \{\gamma_i\}_{i=1}^n$, $L = \{L_i\}_{i=1}^n$, $u_L = \{u_{L_i}\}_{i=1}^n$.

Задача оптимального по наименьшему времени группового поиска формулируется следующим образом: найти допустимые траектории $L^* = \{L_i^*\}_{i=1}^n$, управляемые скорости $u_L^* = \{u_{L_i}^*\}_{i=1}^n$, а также разбиение $\gamma^* = \{\gamma_i^*\}_{i=1}^n = \{b_1^*, \dots, b_{n-1}^*\}$ и время поиска T^* , удовлетворяющие условию минимакса

$$T^* = T(\gamma^*, L^*, u_L^*) = \min_{\gamma} \min_{L_i \in \Lambda_{D_i}} \min_{u_{L_i}} \max \{T_1, \dots, T_n\} = \min_{\gamma} \max \{T_1^*, \dots, T_n^*\} \quad (1.6)$$

где

$$T_i^* = \min_{L_i \in \Lambda_{D_i}} \min_{u_{L_i}} T_i(\gamma_i) \quad (1.7)$$

2. Для отдельно взятого прямоугольника D_i в [1] было доказано, что в семействе Λ_{D_i} минимальное время просмотра, в зависимости от параметров a, γ_i прямоугольника D_i , достигается при движении с максимальной скоростью U_i по одной из траекторий L_i^+ или L_i^- :

$$T_i^*(a, \gamma_i) = \min_{L_i^+, L_i^-} (T_i^+(a, \gamma_i), T_i^-(a, \gamma_i)) \quad (2.1)$$

$$T_i^{+,-}(a, \gamma_i) = d_i^{+,-}(a, \gamma_i) / U_i, \quad \gamma_i = b_i - b_{i-1}, \quad i = 1, \dots, n; \quad b_0 = 0 \quad (2.2)$$

где $d_i^+(a, \gamma_i), d_i^-(a, \gamma_i)$ – длины траекторий L_i^+, L_i^- , вычисляемые по формулам

$$d_i^+(a, \gamma_i) = [\gamma_i / h]a + a \operatorname{sgn}(\gamma_i / h - [\gamma_i / h]) + \gamma_i - h / 2, \quad \gamma_i / h \geq [\gamma_i / h], \quad (2.3)$$

$$d_i^-(a, \gamma_i) = [a / h]\gamma_i + \gamma_i \operatorname{sgn}(a / h - [a / h]) + a - h / 2, \quad a / h \geq [a / h], \quad h = 2l$$

В (2.3) $[\cdot]$ означает целую часть действительного числа.

Для фиксированных параметров a, U_i, l , учитывая (2.1), (2.2), задачу (1.6) можно переформулировать таким образом: найти допустимые траектории L_i^+ или L_i^- , а также разбиение $\gamma^* = \{\gamma_i^*\}_{i=1}^n = \{b_1^*, \dots, b_{n-1}^*\}$ и время поиска T^* , удовлетворяющие условию минимакса

$$T^* = \min_{\gamma} T^*(\gamma) = \min_{\gamma} \max \{T_1^*(\gamma_1), \dots, T_n^*(\gamma_n)\} \quad (2.4)$$

3. Из (2.1)-(2.3) следует, что при фиксированных b_{i-1}, b_{i+1} , функции $T_i^*(\gamma_i) = T_i^*(b_{i-1}, b_i)$ и $T_{i+1}^*(\gamma_{i+1}) = T_{i+1}^*(b_i, b_{i+1})$, $i = 1, \dots, n$ из (2.4) монотонно возрастающие и убывающие кусочно линейные относительно b_i , $b_{i-1} \leq b_i \leq b_{i+1}$ функции, имеющие разрывы первого рода справа и слева, соответственно, в одних и тех же конечным числом точках $b_i = \bar{b}_i^{(j)}$, $j = 1, \dots, k < \infty$:

$$T_i^*(b_{i-1}, \bar{b}_i^{(j)}) = \lim_{b_i \rightarrow \bar{b}_i^{(j)} - 0} T_i^*(b_{i-1}, b_i), \quad T_i^*(b_{i-1}, \bar{b}_i^{(j)}) < T_i^*(b_{i-1}, \bar{b}_i^{(j)} + 0) = \lim_{b_i \rightarrow \bar{b}_i^{(j)} + 0} T_i^*(b_{i-1}, b_i) \quad (3.1)$$

$$T_{i+1}^*(\bar{b}_i^{(j)}, b_{i+1}) = \lim_{b_i \rightarrow \bar{b}_i^{(j)} + 0} T_{i+1}^*(b_i, b_{i+1}), \quad T_{i+1}^*(\bar{b}_i^{(j)}, b_{i+1}) < T_{i+1}^*(\bar{b}_i^{(j)} - 0, b_{i+1}) = \lim_{b_i \rightarrow \bar{b}_i^{(j)} - 0} T_{i+1}^*(b_i, b_{i+1})$$

Величины $T_i^*(b_{i-1}, \bar{b}_i^{(j)})$ и $T_{i+1}^*(\bar{b}_i^{(j)}, b_{i+1})$ из (3.1) в зависимости от параметров задачи могут удовлетворять одному из следующих соотношений:

$$(a) T_i^*(b_{i-1}, \bar{b}_i^{(j)}) > T_{i+1}^*(\bar{b}_i^{(j)}, b_{i+1}) \quad (b) T_i^*(b_{i-1}, \bar{b}_i^{(j)}) < T_{i+1}^*(\bar{b}_i^{(j)}, b_{i+1}) \quad (3.2)$$

$$(c) T_i^*(b_{i-1}, \bar{b}_i^{(j)}) = T_{i+1}^*(\bar{b}_i^{(j)}, b_{i+1}), \quad i = 1, \dots, n$$

Рассмотрим систему следующих уравнений относительно параметров b_1, \dots, b_{i-1}

$$F_i(b_{i-1}, b_i, b_{i+1}) = T_i^*(b_{i-1}, b_i) - T_{i+1}^*(b_i, b_{i+1}) = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.3)$$

Из свойств (3.1), (3.2)(a),(b) функций $T_i^*(b_{i-1}, b_i)$, $T_{i+1}^*(b_i, b_{i+1})$ следует, что система (3.3) не всегда разрешима. Разрешимость системы (3.3) зависит от параметров задачи a, U_i, l .

А. Пусть для некоторого набора a, U_i, l система (3.3) имеет единственное решение относительно параметров b_1, \dots, b_{i-1} . В частности, решением может служить набор точек (b_1, \dots, b_{i-1}) , разрывных для функций $T_i^*(\gamma_i) = T_i^*(b_{i-1}, b_i)$, но в которых выполняются условия (3.2)(c).

Утверждение. Для того, чтобы при разбиении $\gamma^* = \{\gamma_i^*\}_{i=1}^n$ время просмотра прямоугольника D было минимальным (2.4) среди всевозможных разбиений рассматриваемого класса $\gamma = \{\gamma_i\}_{i=1}^n$, необходимо и достаточно, чтобы

$$T_1^*(0, b_1^*) = T_2^*(b_1^*, b_2^*) = \dots = T_n^*(b_{n-1}^*, b) \quad (3.4)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть разбиение $\gamma^* = \{b_1^*, \dots, b_{n-1}^*\}$ является оптимальным в смысле (2.4), однако соотношения (3.4) не выполняются. Не нарушая общности, положим, что $T_1^*(0, b_1^*) > T_2^*(b_1^*, b_2^*) = \dots = T_n^*(b_{n-1}^*, b)$, т.е. согласно (2.4) – $T^* = T_1^*$. Из свойств функций $T_i^*(b_{i-1}, b_i)$ и $T_{i+1}^*(b_i, b_{i+1})$, следует, что можно подобрать $\varepsilon > 0$ так, чтобы при значении $b_1' = b_1^* - \varepsilon$ выполнялось равенство $T_1^*(0, b_1') = T_2^*(b_1', b_2^*)$. При этом очевидно, что $T_1'(0, b_1') < T_1^*(0, b_1^*)$ и $T_2'(b_1', b_2^*) > T_2^*(b_1^*, b_2^*)$. С учётом этих неравенств, для нового разбиения $b_1' = b_1^* - \varepsilon, b_2' = b_2^*, \dots, b_{n-1}' = b_{n-1}^*$ получим $T^* > T_1' = T_2'$, $T^* > T_i' = T_i^*, i = 3, \dots, n$. Следовательно, $T_{\gamma'} = \max\{T_1', \dots, T_n'\} < T_{\gamma^*}$. Но это противоречит тому, что разбиение γ^* оптимально.

Достаточность. Пусть при некотором разбиении $\gamma^* = \{b_1^*, \dots, b_{n-1}^*\}$ равенства (3.4) выполняются. Покажем, что тогда $T^* = T_{\gamma^*} = \min_{\gamma} T_{\gamma}$. Действительно, если указанный минимум достигается при другом разбиении $\gamma' = \{b_1', \dots, b_{i-1}'\}$, то согласно доказательству необходимости, выполняются равенства $T_1^*(0, b_1') = T_2^*(b_1', b_2') = \dots = T_n^*(b_{n-1}', b)$, т.е. набор $\gamma' = \{b_1', \dots, b_{i-1}'\}$ является решением системы (3.3). Но, поскольку по предположению система (3.3) имеет единственное решение, то $\gamma' = \{b_1', \dots, b_{i-1}'\} \equiv \{b_1^*, \dots, b_{n-1}^*\} = \gamma^*$ и, следовательно, $T_{\gamma^*} \equiv T_{\gamma'} = T^* = \min_{\gamma} T_{\gamma}$.

Б. Пусть параметры a, U_i, l задачи такие, что система (3.3) неразрешима. Не нарушая общности, положим, что неразрешимо i -ое уравнение относительно b_i . Тогда, из (3.1), (3.2)(a),(b) следует, что одна из точек разрыва $b_i^* = \bar{b}_i^{(j)}$, $b_{i-1} \leq \bar{b}_i^{(j)} \leq b_i$, $1 \leq j \leq k$ функций $T_i^*(b_{i-1}, b_i)$ и $T_{i+1}^*(b_i, b_{i+1})$ является точкой знакоизменения для функции разности $F_i(b_{i-1}, b_i, b_{i+1})$ (3.3). При прохождении переменной b_i через точку $b_i^* = \bar{b}_i^{(j)}$ функция $F_i(b_{i-1}, b_i, b_{i+1})$ меняет знак от отрицательного к положительному.

При выполнении в точке $b_i^* = \bar{b}_i^{(j)}$ одного из соотношений (3.2)(a),(b) для функций $T_i^*(b_{i-1}, \bar{b}_i^{(j)})$ и $T_{i+1}^*(\bar{b}_i^{(j)}, b_{i+1})$, в соответствии с (2.4), находим соответственно

$$\max\{T_i^*(b_{i-1}^*, b_i^*), T_{i+1}^*(b_i^*, b_{i+1}^*)\} = T_i^*(b_{i-1}^*, b_i^*) \quad (3.5)(a)$$

$$\max\{T_i^*(b_{i-1}^*, b_i^*), T_{i+1}^*(b_i^*, b_{i+1}^*)\} = T_{i+1}^*(b_i^*, b_{i+1}^*) \quad (3.5)(b)$$

По аналогии со случаем А, для достижения равенств (3.4), т.е. одновременного завершения просмотров всех прямоугольников D_i , в соответствии с (3.5)(a) или (3.5)(b), скорость объекта X_i нужно подсчитать по формулам

$$u_{i+1} = \min\{d_{i+1}^+(a, \gamma_{i+1}^*), d_{i+1}^-(a, \gamma_{i+1}^*)\} / T_i^*(b_{i-1}^*, b_i^*), \quad \gamma_{i+1}^* = b_{i-1}^* - b_i^* \quad (3.6)(a)$$

$$u_i = \min\{d_i^+(a, \gamma_i^*), d_i^-(a, \gamma_i^*)\} / T_{i+1}^*(b_i^*, b_{i+1}^*), \quad \gamma_i^* = b_i^* - b_{i-1}^* \quad (3.6)(b)$$

где величины $d_i^+(a, \gamma_i^*)$, $d_i^-(a, \gamma_i^*)$, $T_i^*(b_{i-1}^*, b_i^*)$ определяются с помощью (2.1)-(2.3).

4. Приведём пример численной реализации предлагаемого алгоритма для двух поисковых объектов в случае, когда $\dot{a} = 10$ м, $b = 15$ м, $l = 0,5$ м, $U_1 = 1$ м/сек, $U_2 = 1.2$ м/сек. Для этих параметров система (3.1) состоит из одного уравнения $F(0, b_1, 15) = T_1^*(0, b_1) - T_2^*(b_1, 15) = 0$, в котором оптимальные времена подсчитываются по формулам (2.1)-(2.3). Это уравнение не разрешимо относительно b_1 , так как знак функции разности $F(0, b_1, 15)$ меняется от отрицательного к положительному при прохождении b_1 через точку разрыва $b_1^* = 7$ м.

Используя (3.1), (2.1)-(2.3), найдем $T_1^*(0, b_1^*) \Big|_{b_1^*=7} = d_1^+ / U_1 = 76.5$ сек.,

$T_2^*(b_1^*, 15) \Big|_{b_1^*=7} = d_2^+ / U_2 = 72.9$ сек., где $d_1^+ = 76.5$ м, $d_2^+ = 87.5$ м. Таким образом,

оптимальным является разбиение $D(10, 15) = D_1(10, 7) \cup D_2(10, 8)$, а оптимальным временем поиска в прямоугольнике $D(10, 15)$ – оптимальное время просмотра прямоугольника $D_2(10, 8)$: $\dot{O}^* = T_1^* = 76.5$ сек. При этом просмотр прямоугольников $D_1(10, 7)$, $D_2(10, 8)$ объектами X_1 , X_2 осуществляется по траекториям L_1^+ , L_2^- . Так как согласно подходу пункта Б реализуется случай (3.5)(a), то для одновременного завершения просмотра прямоугольников D_1 и D_2 скорость объекта X_2 нужно подсчитать по формуле (3.6)(a) – $u_2 = d_2^+(10, 8) / T_1^*(7, 15) = 1.14$ м/сек.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аветисян В.В. Оптимальный по минимальному гарантированному времени поиск неподвижного объекта в прямоугольной области // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2002. № 1. С.62-69.

Сведение об авторе:

Аветисян Ваган Вардгесович – д. ф.-м. н., профессор кафедры теории оптимального управления и приближённых методов факультета математики и механики Ереванского государственного университета, (374 94) 44 95 60, **E –mail: vanavet@yahoo.com**

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОЙ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ С КОНЕЧНЫМ И БЕСКОНЕЧНЫМ СТРИНГЕРАМИ

Агабекян П.В.

В работе рассматривается контактная задача для полубесконечной пластины, усиленной двумя упругими стрингерами, конечной и бесконечной длины, причём, конечный стрингер расположен на границе пластины, а бесконечный стрингер находится на конечном расстоянии от края пластины и параллельно ему.

Полубесконечная пластина деформируется под действием сил, приложенных на бесконечности.

Задача сводится к решению сингулярного интегрального уравнения относительно напряжений, действующих под конечным стрингером. Далее решение сингулярного интегрального уравнения с помощью ортогональных многочленов Чебышева сводится к решению квазивполне регулярных бесконечных систем линейных алгебраических уравнений.

В работе рассматривается контактная задача для полубесконечной пластины, усиленной двумя упругими стрингерами, конечной и бесконечной длины, причём, конечный стрингер расположен на границе пластины, а бесконечный стрингер находится на конечном расстоянии от края пластины и параллельно ему.

Полубесконечная пластина со стрингерами деформируется под действием растягивающих сил с интенсивностью p , приложенных на бесконечности.

Относительно стрингеров принимается во внимание модуль контакта по линии, то есть предполагается, что тангенциальные контактные усилия сосредоточены вдоль средней линии контактного участка, и считается, что стрингеры не сопротивляются изгибу [1].

А относительно упругой полубесконечной пластины принимается, что она находится в условиях обобщённого плоского напряжённого состояния.

Задача заключается в определении распределения контактных напряжений, возникающих под стрингерами и, тем самым, определить взаимовлияние стрингеров.

Уравнения равновесия стрингеров в силу вышесказанного запишутся в виде [2–6]

$$U_1^{(1)}(x) = \frac{du_1(x)}{dx} = \frac{1}{E_1 F_1} \int_{-a}^x \tau_1(s) ds, \quad -a < x < a, \quad (1)$$

$$\frac{dU_2^{(2)}(x)}{dx} = \frac{d^2 u_2(x)}{dx^2} = \frac{\tau_2(x)}{E_2 F_2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad (2)$$

при следующих граничных условиях:

$$\left. \frac{du_1(x)}{dx} \right|_{x=\pm a} = 0, \quad \frac{du_2(x)}{dx} \rightarrow \frac{p}{E} \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty, \quad (3)$$

где u_1 – перемещения точек конечного стрингера, u_2 – перемещения точек бесконечного стрингера, $\tau_1(x)$ – интенсивность тангенциальных контактных сил, действующих под конечным стрингером, $\tau_2(x)$ – интенсивность тангенциальных сил, действующих под бесконечным стрингером, E_1 – модуль упругости конечного стрингера, E_2 – модуль упругости бесконечного стрингера, E – модуль упругости полубесконечной пластины, F_1, F_2 – площади поперечных сечений соответственно конечному и бесконечному стрингерам.

С другой стороны, при деформациях граничных точек и точек на линии, параллельных границе полубесконечной пластины, когда на границе ($y = 0$), а на линии ($y = b$) действуют тангенциальные контактные усилия с интенсивностями $\tau_1(x)$ ($-a < x < a$) и $\tau_2(x)$ ($-\infty < x < \infty$) соответственно, имеем [2–5]:

$$U_1(x) = \frac{1}{\pi l_1 H} \int_{-a}^a \frac{1}{x-t} \tau_1(t) dt + \frac{1}{\pi H} \int_{-\infty}^{\infty} \left[-d_1 \frac{x-s}{(x-s)^2 + b^2} + d_2 \frac{2b^2(x-s)}{[(x-s)^2 + b^2]^2} \right] \tau_2(s) ds + \frac{P}{E}, \quad (4)$$

$$U_2(x, b) = -\frac{1}{\pi H l_2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{x-s} - \frac{8b^2(x-s)}{[(x-s)^2 + 4b^2]^2} + d_3 \frac{x-s}{(x-s)^2 + 4b^2} + d_4 \frac{2b^2(x-s)[12b^2 - (x-s)^2]}{[(x-s)^2 + 4b^2]^3} \right] \tau_2(s) ds + \frac{1}{\pi H} \int_{-a}^a \left[-d_2 \frac{2b^2(x-t)}{[(x-t)^2 + b^2]^2} + d_1 \frac{x-t}{(x-t)^2 + b^2} \right] \tau_1(t) dt + \frac{P}{E}, \quad -\infty < x < \infty, \quad (5)$$

$$\text{где } l_1 = \frac{2\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu}, \quad l_2 = \frac{4\mu(\lambda + 2\mu)}{\lambda + 3\mu}, \quad d_1 = \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)},$$

$$d_2 = \frac{1}{2\mu}, \quad d_3 = \frac{\mu^2 + (\lambda + 2\mu)^2}{(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)}, \quad d_4 = \frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda + 3\mu},$$

λ, μ – коэффициенты Ляме, H – толщина пластины.

Условия контакта между пластиной и стрингерами будут:

$$U_1^{(1)}(x) = U_1(x), \quad -a < x < a, \quad (6)$$

$$U_2^{(2)}(x) = U_2(x, b), \quad -\infty < x < \infty, \quad (7)$$

Теперь применив к (2), (5) и (7) преобразование Фурье, после некоторых преобразований из условия контакта, для тангенциальных контактных напряжений, действующих под конечным и бесконечным стрингерами, получим следующую зависимость между напряжениями:

$$\bar{\tau}_2(\sigma) = l_2 \bar{R}(\sigma) \int_{-a}^a \tau_1(t) e^{i\sigma t} dt \quad (8)$$

$$\text{где } \bar{R}(\sigma) = \frac{\bar{K}_1(\sigma)}{\lambda_2 + \bar{K}(\sigma)}, \quad R(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{K}_1(\sigma)}{\lambda_2 + \bar{K}(\sigma)} e^{-i\sigma x} d\sigma,$$

$$\bar{K}(\sigma) = |\sigma| + (d_3 |\sigma| - b\sigma^2 + d_4 b^2 |\sigma|^3) e^{-2|\sigma|b},$$

$$\bar{K}_1(\sigma) = (d_1 |\sigma| - d_2 b\sigma^2) e^{-|\sigma|b}, \quad \lambda_2 = \frac{H l_2}{E_2 F_2} \quad (9)$$

Далее после обратного преобразования Фурье из (8) получим

$$\tau_2(x) = l_2 \int_{-a}^a R(x-t) \tau_1(t) dt, \quad -\infty < x < \infty \quad (10)$$

$$\text{при условии } \int_{-\infty}^{\infty} \tau_1(s) ds = 0$$

где $R(x-t)$ даётся по формулами (9).

А из условия (6), с помощью (1) и (4), получим еще одну зависимость между напряжениями τ_1 и τ_2 .

$$\frac{1}{\pi l_1 H} \int_{-a}^a \frac{\tau_1(t)}{x-t} dt + \frac{l_2}{\pi H} \int_{-\infty}^{\infty} A(x-s) \tau_2(s) ds + \frac{P}{E} = \frac{1}{E_1 F_1} \int_{-a}^x \tau_1(t) dt \quad (11)$$

где $A(x-s) = -d_1 \frac{x-s}{(x-s)^2 + b^2} + d_2 \frac{2b^2(x-s)}{[(x-s)^2 + b^2]^2} \dots$

Подставляя τ_2 из (10) в (11), получим сингулярное интегральное уравнение относительно напряжений, действующих под конечным стрингером

$$\int_{-a}^a \frac{\tau_1(t)}{x-t} dt + l_1 l_2 \int_{-a}^a L(x,t) \tau_1(t) dt = \pi \lambda_1 \int_{-a}^x \tau_1(t) dt - \frac{P}{E} \quad (12)$$

при условии $\int_{-a}^a \tau_1(s) ds = 0$,

где $L(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(x-s) R(x-t) ds$, $\lambda_1 = \frac{l_1 H}{E_1 F_1}$.

Так как контактные тангенциальные напряжения, действующие под конечным стрингером, на концах контактных отрезков имеют особенности в виде обычного квадратного корня [7], решения уравнения (12) ищем в следующем виде [4–6,8]:

$$\tau_1(t) = \frac{a}{\sqrt{a^2 - t^2}} \sum_{n=1}^{\infty} X_{2n-1} T_{2n-1} \left(\frac{t}{a} \right) \quad (13)$$

где $T_k(u) = \cos(k \arccos u)$, $k = 1, 2, \dots$ – многочлены Чебышева первого рода.

Подставляя выражение $\tau_1(t)$ из (13) в интегральное уравнение (12) для определения неизвестных коэффициентов, получим следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений [4–6,8]:

$$X_{2m-1} + \sum_{n=1}^{\infty} A_{nm} X_{2n-1} = q_m \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (14)$$

где коэффициенты при неизвестных и свободных членах определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned} A_{nm} &= A_{nm}^{(1)} + A_{nm}^{(2)}, \\ A_{nm}^{(1)} &= -\frac{2l_1 l_2}{a \pi^2} \int_{-a}^a \int_{-a}^a L(x,t) \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 - t^2}} T_{2n-1} \left(\frac{t}{a} \right) U_{2m-2} \left(\frac{x}{a} \right) dt dx, \\ A_{nm}^{(2)} &= \frac{2\lambda_1}{a^3 \pi} \int_{-a}^a \int_{-a}^x \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 - t^2}} T_{2n-1} \left(\frac{t}{a} \right) U_{2m-2} \left(\frac{x}{a} \right) dt dx, \\ q_m &= \frac{2P}{a^2 \pi E} \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} U_{2m-2} \left(\frac{x}{a} \right) dx = \begin{cases} \frac{P}{E}, & m = 1 \\ 0 & m \neq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$U_{k-1}(u) = \sin(k \arccos u) / \sin(\arccos u)$, $k = 1, 2, \dots$ – многочлены Чебышева второго рода.

Таким образом, решение рассматриваемой контактной задачи сведено к решению совокупности бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (14).

Исследование совокупности бесконечных систем линейных алгебраических уравнений в смысле их квазивполне регулярности можно проводить аналогично [8,9]

ЛИТЕРАТУРА

1. Муки Р., Стренберг Э. Передача нагрузки от растягиваемого поперечного стержня к полубесконечной упругой пластинке . // ПМ. Тр. Амер.общ.инж.механиков.1968. Сер. Е. №4. С.124-135.
2. Григорян Э.Х., Агаян К.Л. Полубесконечная пластина, усиленная внутренним полубесконечным стрингером, параллельным границе пластины. // Ереван: Изд. «Гитутюн» НАН Армении, 2006. С.138-143.
3. Григорян Э.Х., Оганисян Г.В. Контактная задача для упругой кусочно-однородной бесконечной пластины, усиленной двумя параллельными различными бесконечными упругими стрингерами. // Изв. НАН Армении. Механика. 2009. Т.62. №3. С.24-43.
4. Григорян Э.Х., Оганисян Г.В. Задача для упругой составной бесконечной пластины с двумя параллельными упругими конечными и бесконечными стрингерами. // Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Труды VII межд. конф. Горис–Степанакерт. 2011, с.144-152.
5. Оганисян Г.В., Агабекян П.В. Передача нагрузки от двух параллельных упругих конечных стрингеров к упругой составной бесконечной пластине. // Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Труды VII межд. конф. Горис–Степанакерт. 2011, с.320-327.
6. Агабекян П.В. Контактная задача для полубесконечной пластины, усиленной накладками различных длин. // Актуальные проблемы механики сплошной среды. Труды II межд. конф. Дилижан. 2010, с.19-22.
7. Арутюнян Н.Х. Контактная задача для полуплоскости с упругими креплениями. // ПММ. 1968. Т.32. Вып.4. С.623-646.
8. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 467с.
9. Григорян Э.Х. О динамической контактной задаче для полуплоскости усиленной упругой накладкой конечной длины. // ПММ. 1974. Т.38. №2. С.321-330.

Сведения об авторе:

Агабекян Пайкар Вараздатович – кандидат физ.–мат. наук, научный сотрудник
Института механики НАН Армении.

Адрес: Пр.Маршала Баграмяна 24^б, **тел.:** (+374 93) 24 85 47

К ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ СОСТАВНОГО УПРУТОГО КЛИНА ПРИ РАЗЛИЧНЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ

Агаларян О. Б.

Задачи для однородных тел с угловыми точками и, в частности, с трещинами по постановке теории упругости в настоящее время достаточно хорошо исследованы в [1, 2]. При этом, в этих задачах к неизвестным компонентам напряжений и перемещений добавляются такие новые механические величины, как коэффициент интенсивности напряжений, показатель особенности напряжений, скорость притока потенциальной энергии в устье трещины и связанные с ней независимые от пути интегрирования криволинейные интегралы. Определение и исследование этих величин позволяет получать необходимые и важные сведения о поведении материала в окрестности нерегулярных точек и дать оценки о несущей способности упругого тела в целом.

В настоящей статье рассматривается задача о нахождении напряжённо-деформированного состояния в окрестности вершины соединения составного тела, состоящего из трёх клиньев произвольных углов раствора, в постановке плоской теории упругости, а в случае продольного сдвига – в нелинейной постановке со степенным законом упрочнения, при различных краевых условиях.

Полученные асимптотические формулы компонентов напряжений и перемещений в окрестности вершины соединения показывают, что усложнения вида трансцендентного уравнения, характеризующего поведение напряжённого состояния как в плоском случае, так и при продольном сдвиге при фиксированном значении параметров одного клина, можно второй и третий клинья выбрать такими, при которых в составном теле более ярко выявляется явление малонапряжённости. На их основе можно построить в геометрическом пространстве поверхностей разделяющихся трёх типа областей и осуществлять прямое сопоставление соответствующих предельных кривых.

1. Пусть Ω_i ($i = 1, 2, 3$) – три бесконечных клина с углами $\alpha_1, \alpha_2, 2\alpha_3$ ($\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 \leq 2\pi$) в полярной координатной системе (r, ϑ) , начало которой находится на вершине соединения, а ось $\vartheta = 0$ направлена вдоль биссектрисы третьего среднего клина. Систему уравнения статики и неразрывности, написанного в компонентах напряжений

$$\begin{cases} r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{r\vartheta}}{\partial \vartheta} + \sigma_r - \sigma_\vartheta = 0 \\ \frac{\partial \sigma_\vartheta}{\partial \vartheta} + r \frac{\partial \tau_{r\vartheta}}{\partial r} + 2\tau_{r\vartheta} = 0 \\ \frac{\partial(\sigma_r + \sigma_\vartheta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\sigma_r + \sigma_\vartheta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2(\sigma_r + \sigma_\vartheta)}{\partial \vartheta^2} = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

необходимо решить со следующими условиями. На общих гранях имеем условия непрерывностей составляющих напряжений и перемещений, т.е.

$$\begin{cases} \sigma_\vartheta^{(1)}(r, \alpha_3) = \sigma_\vartheta^{(3)}(r, \alpha_3) \\ \tau_{r\vartheta}^{(1)}(r, \alpha_3) = \tau_{r\vartheta}^{(3)}(r, \alpha_3) \end{cases}, \quad \begin{cases} u_1(r, \alpha_3) = u_3(r, \alpha_3) \\ v_1(r, \alpha_3) = v_3(r, \alpha_3) \end{cases}, \quad (1.2)$$

и соответственно при $\vartheta = -\alpha_3$

$$\begin{cases} \sigma_\vartheta^{(2)}(r, -\alpha_3) = \sigma_\vartheta^{(3)}(r, -\alpha_3) \\ \sigma_\vartheta^{(2)}(r, -\alpha_3) = \sigma_\vartheta^{(3)}(r, -\alpha_3) \end{cases}, \quad \begin{cases} u_2(r, -\alpha_3) = u_3(r, -\alpha_3) \\ v_2(r, -\alpha_3) = v_3(r, -\alpha_3) \end{cases}, \quad (1.3)$$

На первую внешнюю грань действуют нормальные и касательные нагрузки, а вторая свободно от нагрузок или жёстко защемлена, т.е.

$$\begin{cases} \sigma_\vartheta^{(1)}(r, \alpha_1 + \alpha_3) = p_1 \delta(r - r_0) \\ \tau_{r\vartheta}^{(1)}(r, \alpha_1 + \alpha_3) = T_1 \delta(r - r_0) \end{cases}, \quad \begin{cases} \sigma_\vartheta^{(3)}(r, -(\alpha_2 + \alpha_3)) = 0 \\ \tau_{r\vartheta}^{(3)}(r, -(\alpha_2 + \alpha_3)) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} u_2(r, -(\alpha_2 + \alpha_3)) = 0 \\ v_2(r, -(\alpha_2 + \alpha_3)) = 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

Предварительно при помощи преобразования условий непрерывности компонент перемещения на общих гранях клиньев и учитывая соотношения Коши, показывается, что эти условия эквивалентны следующим условиям вдоль лучей $\vartheta = \alpha_3$ и $\vartheta = -\alpha_3$

$$\begin{cases} \varepsilon_r^{(i)}(r, \vartheta) - \varepsilon_r^{(i+1)}(r, \vartheta) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \vartheta} [\varepsilon_r^{(i)}(r, \vartheta) - \varepsilon_r^{(i+1)}(r, \vartheta)] - \frac{\partial}{\partial r} [\gamma_{r\vartheta}^{(i)}(r, \vartheta) - \gamma_{r\vartheta}^{(i+1)}(r, \vartheta)] = 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

Аналогичные условия получаются вдоль $\vartheta = -(\alpha_3 + \alpha_2)$ в случае закреплённой грани. Это позволяет решение смешанной краевой задачи свести к решению системы уравнений равновесия и условий совместности с граничными условиями, написанными только относительно компонент тензора напряжений. При помощи интегрального преобразования Меллина краевая задача приводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений с преобразованными граничными условиями [3-5]. Решая эту систему и применяя обратные преобразования, получим для компонент напряжения и перемещения интегральные выражения, при этом, характер напряжённого состояния в окрестности соединения определяется расположением корней трансцендентного уравнения, которое получается приравниванием нулю главного определителя алгебраической системы. С помощью комбинированных механических параметров [7]

$$a = \frac{\mu_2 m_3}{\mu_2 - \mu_3}, \quad b = \frac{\mu_3 m_2}{\mu_2 - \mu_3}, \quad c = \frac{\mu_1 m_3}{\mu_3 - \mu_1}, \quad d = \frac{\mu_3 m_1}{\mu_3 - \mu_1} \quad (1.6)$$

Это уравнение принимает симметричный вид при $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_0$

$$\begin{aligned} D(a, b, c, d, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = & K(s, \alpha_0)(a^2 d^2 + c^2 b^2) + K(s, 2\alpha_3) b^2 d^2 + \\ & + (K(s, 2\alpha_3 + \alpha_0) - K(s, 2\alpha_3) - K(s, \alpha_0)) b d (a d + c b) - \\ & - (K(s, 2\alpha_3 + \alpha_0) - K(s, 2(\alpha_3 + \alpha_0)) - K(s, 2\alpha_3)) a b c d + \\ & 4 \sin^2 s \alpha_0 K(s, \alpha_0)(a^2 d + b c^2) + 4 \sin^2 s \alpha_0 K(s, 2\alpha_3)(b + d) b d - \\ & - K(s, \alpha_0)(a + c) b d + 4(\sin^2 2s \alpha_0 - \sin^2 s(2\alpha_3 + \alpha_0)) K(s, \alpha_0)(b + d) a c + \\ & + 4K^2(s, \alpha_0)(a^2 + c^2) + 4K(s, \alpha_0)K(s, 2\alpha_3)(b^2 + d^2) + 4(K(s, 2\alpha_3 + \alpha_0) - \\ & - K(s, 2\alpha_3) - K(s, \alpha_0)) K(s, \alpha_0)(a b + c d) - 16 \sin^2 s \alpha_0 \sin^2 2s \alpha_3 K(s, \alpha_0)(a d + b c) - \\ & - 16 \sin^4 s \alpha_0 K(s, 2\alpha_3) b d - 8 \cos 4s \alpha_3 K^2(s, \alpha_0) a c + 16 \cos^2 2s \alpha_3 K^2(s, \alpha_0)(a + c) + \\ & + 8 \sin^2 s \alpha_0 K(s, 2\alpha_3)(b + d) + 16 K^2(s, \alpha_0) K(s, 2\alpha_3) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь

$$K(s, \alpha) = \sin^2(s\alpha) - s^2 \sin^2 \alpha$$

Подобный вид имеет определитель при $\alpha_1 \neq \alpha_2$, который из-за ограниченности объема статьи не приводится. При этом, эти механические параметры, которые связаны с известными параметрами (α, β) [3], соотношениями $\alpha = \frac{b-a}{b+a}$, $\beta = \frac{b-a+2}{b+a}$, и представлением главного определителя как функции от главного определителя соответствующего однородного клина, существенно сокращают объём вычислительной части при построении решения краевой задачи. В общем случае окончательные выражения компонент напряжения и перемещений имеют довольно сложный вид.

Рассмотрим следующий частный случай: $\alpha_1 = \pi - \varepsilon$, $\alpha_2 = \pi - \varepsilon$, $\alpha_3 = \varepsilon$, тогда уравнение $D(a, b, c, d) = 0$ примет следующий вид:

$$\sin^2 \pi s = \frac{1}{4} \frac{a^2 d^2 + b^2 c^2 + 2abcd}{abcd - a^2 d - b c^2 + abc + acd - a^2 - c^2 + 2ac - 4a - 4c} \quad (1.8)$$

Численное исследование показывает, что существует область изменения механических параметров, при которых явление осцилляции компонент напряжений отсутствует.

Целью непосредственного сравнения с результатами работы [3-5] является интерес, когда углы α_1, α_2 образуют однопараметрические семейства. Например, $\alpha_1 = \alpha_2$,

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2\pi, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \frac{3}{2}\pi, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = \pi \quad \text{при} \quad \alpha_3 = \varepsilon$$

2. Во втором случае принимается, что три клина образуют составное нелинейное по степенному закону упрочняющееся тело с произвольными величинами углов, которое находится в антиплоском напряжённо-деформированном состоянии под воздействием внешних касательных нагрузок, приложенных на краевой поверхности. Решение краевой задачи строится при помощи метода годографа, при этом нелинейная краевая задача сводится к решению линейной краевой задачи относительно вводимой функции $\Psi^{(i)} (i = 1, 2, 3)$ [6-8]

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{T(\Gamma)}{\gamma T'(\Gamma)} \frac{\partial^2 \Psi^{(i)}(\gamma, \theta)}{\partial \gamma^2} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \Psi^{(i)}(\gamma, \theta)}{\partial \gamma} + \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial \Psi^{(i)}(\gamma, \theta)}{\partial \theta^2} = 0 \\ \left. \frac{\partial \Psi^{(1)}(\gamma, \theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha_1} = 0; \quad \left. \frac{\partial \Psi^{(3)}(\gamma, \theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta = -\frac{\pi}{2} + \alpha_2 + \alpha_3} = 0 \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Характер напряжённого состояния в окрестности соединения определяется соответствующим образом расположением корня следящей системы трансцендентных уравнений относительно неизвестных величин $a_1, b_1, c_1, d_1, \lambda$.

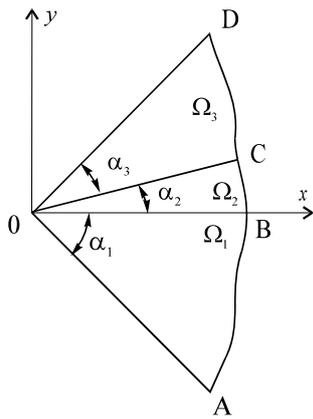


Рис. 1а

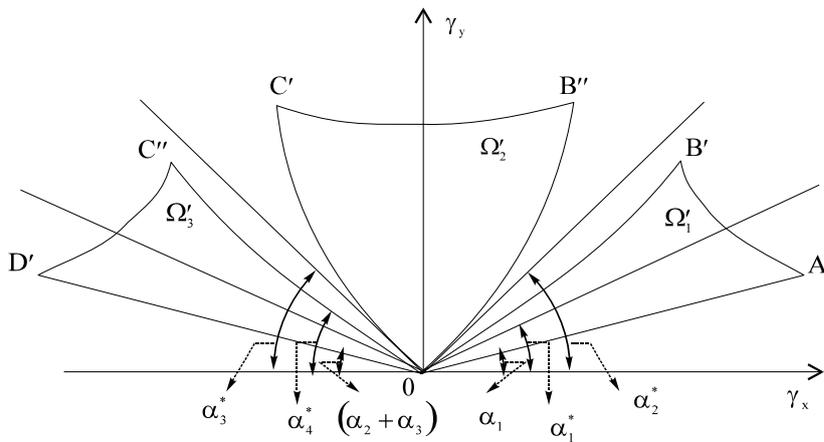


Рис.1б

$$\left\{ \begin{array}{l}
(m + \lambda) \sin[(1 - \lambda) \arctg a_1 + \lambda \alpha_1] + (m - \lambda) \sin[(1 + \lambda) \arctg a_1 - \lambda \alpha_1] = 0 \\
(m^2 - \lambda^2) \sin[\lambda(\arctg c_1 + \arctg b_1 - \pi) + \arctg c_1 - \arctg b_1 - \alpha_2] + \\
+ (m^2 - \lambda^2) \sin[\lambda(\arctg c_1 + \arctg b_1 - \pi) + \arctg c_1 - \arctg b_1 + \alpha_2] + \\
+ (m - \lambda)^2 \sin[(\lambda + 1)(\arctg c_1 + \arctg b_1 - \pi) - \alpha_2] + \\
+ (m + \lambda)^2 \sin[(\lambda - 1)(\arctg c_1 + \arctg b_1 - \pi) + \alpha_2] = 0 \\
(m - \lambda) \sin[\lambda(\arctg d_1 - \alpha_2 - \alpha_3) \arctg d_1 - \alpha_2] - \\
- (m + \lambda) \sin[\lambda(\arctg d_1 - \alpha_2 - \alpha_3) \arctg d_1 + \alpha_2] = 0 \\
a_1(1 + a_1^2)^{\frac{\beta-1}{2}} = k_{21}(1 + b_1^2)^{\frac{\beta-1}{2}} b_1 \\
k_{23}(1 + c_1^2)^{\frac{\beta-1}{2}} (c_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_2) = \left[(1 + d_1^2) \left(\frac{1 + c_1 k_2}{1 + d_1 k_2} \right)^2 \right]^{\frac{\beta-1}{2}} \left(\frac{1 + c_1 k_2}{1 + d_1 k_2} \right) (d_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_2)
\end{array} \right. \quad (2.2)$$

Здесь

$$m = \frac{1}{2} \left[1 - \nu + \sqrt{(1 - \nu)^2 - 4\lambda\nu} \right],$$

$$a_1 = \operatorname{tg} \alpha_1^*, \quad b_1 = \operatorname{tg} \alpha_2^*, \quad c_1 = \operatorname{tg} \alpha_3^*, \quad d_1 = \operatorname{tg} \alpha_4^*,$$

а α_i^* показаны на рис. 1б. Такая замена кривых линий не влияет на асимптотический характер решения, процесс упрочнения подчиняется степенному закону, т.е.

$$\tau_x^{(i)} = \frac{T(\Gamma)}{\Gamma} \gamma_x^{(i)}, \quad \tau_y^{(i)} = \frac{T(\Gamma)}{\Gamma} \gamma_y^{(i)}, \quad T = B_i \Gamma^\nu. \quad \text{В случае линейной теории упругости}$$

$B_i = G_i$, $\nu = 1$. Осуществляя предельный переход в системе, когда $\nu \rightarrow 1$, и исключая неизвестные постоянные величины, получается следующее трансцендентное уравнение относительно λ , характеризующего асимптотическое поведение компонентов напряжения для линейно-упругого тела, состоящего из трёх упругих клиньев:

$$\begin{aligned}
& k_1 k_2 \sin \frac{\lambda}{\lambda - 1} (\alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_2) - k_1 \sin \frac{\lambda}{\lambda - 1} (\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1) - \\
& - k_2 \sin \frac{\lambda}{\lambda - 1} (\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) - \sin \frac{\lambda}{\lambda - 1} (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 0
\end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь приняты обозначения: $k_1 = (k_{21} - 1)/(k_{21} + 1)$; $k_2 = (k_{23} - 1)/(k_{23} + 1)$;

$k_{12} = G_1 / G_2$, $k_{23} = G_2 / G_3$. Это уравнение можно вывести при помощи метода разделения

переменных в плоскости $[X, Y]$ без применения метода годографа. На основании

соотношения между декартовыми координатами и неизвестными функциями [8]

$$x = -\sin \vartheta \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma} - \frac{\cos \vartheta}{\gamma} \frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta}, \quad y = \cos \vartheta \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma} - \frac{\sin \vartheta}{\gamma} \frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta}, \quad (2.4)$$

для компонентов напряжений и перемещений нетрудно получить асимптотические формулы в окрестности угловой точки, обобщающие известные формулы линейной теории упругости. В частности, для первого клина в полярной координатной системе эти выражения имеют вид:

$$\left\{ \begin{aligned} W_{(r,\varphi)}^{(1)} &= K_1 \left(\frac{r}{K_1} \right)^{\frac{m_1}{m_1-1}} \left[m_1^2 \cos^2 \lambda \left(\chi_1 + \alpha - \frac{\pi}{2} + \theta_1 \right) + \lambda^2 \sin \lambda \left(\chi_1 + \alpha - \frac{\pi}{2} + \theta_1 \right) \right]^{\frac{m_1}{2(m_1-1)}} (1 - m_1) \cos(\chi_1 - \alpha) \\ \tau_{\varphi\varphi}^{(1)}(r, \varphi) &= \beta_1 \left(\frac{r}{K_1} \right)^{\frac{\beta}{m_1-1}} \left[m_1^2 \cos^2 \lambda \left(\chi_1 + \alpha - \frac{\pi}{2} + \theta_1 \right) + \lambda^2 \sin \lambda \left(\chi_1 + \alpha - \frac{\pi}{2} + \theta_1 \right) \right]^{\frac{\beta}{2(m_1-1)}} \cos(\varphi - \chi_1) \\ \tau_{r\varphi}^{(1)}(r, \varphi) &= \beta_1 \left(\frac{r}{K_1} \right)^{\frac{\beta}{m_1-1}} \left[m_1^2 \cos^2 \lambda \left(\chi_1 + \alpha - \frac{\pi}{2} + \theta_1 \right) + \lambda^2 \sin \lambda \left(\chi_1 + \alpha - \frac{\pi}{2} + \theta_1 \right) \right]^{\frac{\beta}{2(m_1-1)}} \sin(\varphi - \chi_1) \end{aligned} \right. \quad (2.5)$$

где угол χ_1 определяется из следующего уравнения:

$$\lambda \sin(\varphi - \chi_1) \sin \lambda \left(\chi_1 + \alpha - \frac{\pi}{2} + \theta_1 \right) - m_1 \cos \lambda \left(\chi_1 + \alpha - \frac{\pi}{2} + \theta_1 \right) \cos(\varphi - \chi_1) \quad (2.6)$$

Нетрудно обобщить эти уравнения для второй и смешанной краевых задач. Полученные результаты принимаются для решения более сложных упруго-пластических задач продольного сдвига или кручения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости М.: Наука, 1967. 401с.
2. Морозов Н.Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. 255с.
3. Боджи Дж. Влияние поверхностных нагрузок на систему упругих клиньев, изготовленных из различных материалов и имеющих произвольные углы раствора. //Прикладная механика. АСМЕ, 1972. Т.7.
4. Чобанян К.С. Напряжения в составных упругих телах. Ереван: Изд-во АН Арм.ССР, 1987. 338с.
5. Аксентян О.К., Лущик О.Н. Напряжённо-деформированное состояние в окрестности вершины стыкового соединения. //ПМ. 1982. Т.7. №2. С.67–73.
6. Райс Дж. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984.
7. Агаларян О.Б. К плоской задаче составного клина с радиальной трещиной конечной длины. //Изн.НАН Армении. Механика. 2007. Т.60. №3. С.7–14.
8. Агаларян О.Б. Асимптотическое поведение решения задачи продольного сдвига нелинейно-упругого тела в окрестности угловых точек //Изн. НАН Армении. Механика. 2001.Т.54. №3. С.3–14.

Сведения об авторе:

Агаларян Ованес – канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник Института механики НАН Армении

Адрес: Армения, 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24^б

О ДИНАМИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ЛИТОСФЕРНЫХ ПЛИТ ЗЕМЛИ НА ОСНОВЕ ДАННЫХ СЕЙСМОСТАНЦИЙ И GPS СИСТЕМ

Агаловян Л.А., Агаловян М.Л.

Используя данные сейсмостанций и GPS систем, решена пространственная динамическая неклассическая задача теории упругости для слоистого пакета из пластин, моделирующая, в частности, поведение Литосферных плит Земли. Определены амплитуды вынужденных колебаний, указан способ прослеживания за их изменением во времени.

1. Введение. Современная наука возникновения сильных землетрясений связывает с тектоникой Литосферных плит Земли ($\approx 95\%$ землетрясений) [1,2]. Общеизвестно, что планета Земля ($R_{\text{зем.}}=6378$ км.) слоиста и неоднородна. Она состоит из земной коры, Верхней и Нижней мантий, Внешнего и Внутреннего ядер. Отличительной чертой этих слоёв, в частности, является существенно разные скорости V_p, V_s распространения в них продольных P и поперечных S волн. Толщина (мощность) земной коры на континентах изменяется в пределах 20-70 км, в океанах 5-15 км. Земная кора отделена от Верхней мантии поверхностью раздела Мохоровичича (Мохо), т.е. сейсмической границей, на которой скорость продольных упругих волн V_p скачкообразно возрастает до значений больше 8 км/сек, тогда как в земной коре она изменяется в пределах $2,0 \leq V_p \leq 7,4$ км/сек. Земная кора также считается слоистой с основными слоями: осадочный ($2,0 \leq V_p \leq 5,0$ км/сек), гранитный ($5,5 \leq V_p \leq 6$ км/сек), базальтовый ($6,5 \leq V_p \leq 7,4$ км/сек). В пределах Верхней мантии на глубине 100-250 км существует слой (Астеносфера), где существенно понижается скорость поперечных волн V_s , а скорость V_p не возрастает с глубиной ($V_p \approx const, V_s \approx 0$), что свидетельствует о более низкой плотности вещества этого слоя по сравнению со смежными слоями, т.е. имеется жидкообразная несжимаемая среда, позволяющая выдерживать большие давления. Примечательно, что в пределах Астеносферы давление везде одинаково. На глубине 700-900 км Верхняя мантия опирается на Нижнюю мантию, где резко увеличивается скорость продольных волн ($V_p = 13,2 \div 13,7$ км/сек). Затем повторяется та же качественная картина: более сильные слои опираются на слабые и наоборот: Нижняя мантия опирается на Внешнее ядро земли, где уже $V_p = 8,1 \div 8,5$ км/сек, $V_s \approx 0$, а начиная с глубины 5100 км Внешнее ядро опирается на Внутреннее ядро и снова с резким увеличением скорости продольных волн и плотности ($V_p \approx 10,2 \div 11$ км/сек, $\rho \approx 5,61$ г/см³). Для сравнения отметим, что средняя плотность земной коры $\rho \approx 2,7 \div 3,0$ г/см³.

Земная кора и часть Верхней мантии до границы с Астеносферой составляет Литосферу. Литосфера разбита на несколько больших блоков, которые называются плитами. В плане, размеры плит изменяются от сотни до несколько тысяч км. Крупными Литосферными плитами Земли являются: Евразийская, Индо-Австралийская, Антарктидская, Филиппинская, Наска, Тихоокеанская, Южно-Американская, Северо-Американская, Африканская, Анатолийская, Аравийская и др. Установлено, что подавляющее большинство землетрясений сгруппировано в относительно узких зонах, сейсмическая и тектоническая активности в которых приписываются, в основном, взаимодействиям примыкающих друг к другу Литосферных плит, которые подвержены относительным перемещениям вдоль своих контактирующих поверхностей („сейсмические зоны”).

Выделяют связанные с землетрясением два основных типа современных тектонических движений: медленные (вековые) и быстрые (скачкообразные). Вековые движения являются квазистатическими, в результате которых в Литосферных плитах накапливаются деформации, которые при достижении критического значения порядка 10^{-4} приводят к глобальному

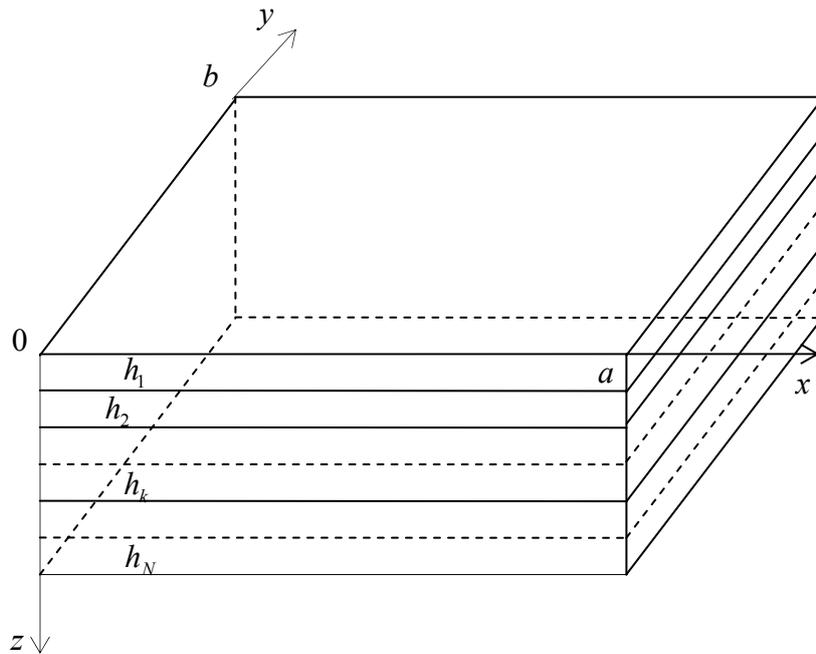
разрушению и основная часть накопленной потенциальной энергии выделяется в виде P и S , а также поверхностных волн.

Густая сеть современных сейсмостанций и GPS систем позволяют проследить весь этот процесс во времени. Здесь, по аналогии с обменом метеоданными, необходимо сотрудничество многих государств, расположенных на сейсмоопасных зонах. Используя данные сейсмостанций и GPS, становится возможным определение напряженно-деформированных состояний Литосферных плит и проследивание за их изменением во времени. Соответствующая задача теории упругости для слоистого пакета является неклассической в том плане, что граничные условия задаются лишь на лицевой поверхности пакета—соответствующие компоненты тензора напряжений равны нулю (поверхность свободна), но известны компоненты вектора перемещения точек этой поверхности как данные сейсмостанций и GPS. Одновременно считается, что геологическая структура местности и Литосферной плиты известна. Сформулированная неклассическая квазистатическая задача (время t входит как параметр) для однослойных и многослойных ортотропных пластин с учётом также влияния изменения температурного поля решена в [3,4]. В данной работе решена динамическая задача, описывающая быстрые тектонические движения Литосферных плит.

2. Постановка задачи и асимптотический метод её решения.

Пусть имеем слоистый пакет из N ортотропных пластин, который занимает область

$$D = \left\{ (x, y, z); 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq h, h = \sum_{j=1}^N h_j, \min(a, b) = l, h \ll l \right\} \text{ (фиг.1)}$$



Фиг.1

Требуется найти для пакета решение уравнений движения и соотношений упругости Гука при граничных условиях при $z = 0$

$$\begin{aligned} \sigma_{jz}(x, y, 0, t) &= 0, \quad j = x, y, z \\ u_j(x, y, 0, t) &= u_j^+(x, y) \exp(i\Omega t), \quad j = x, y, z \end{aligned} \quad (2.1)$$

и условиях полного контакта между слоями, которые для произвольного k -ого слоя записываются

$$\sigma_{jz}^{(k)}(z = H_k) = \sigma_{jz}^{(k+1)}(z = H_k), \quad H_k = \sum_{j=1}^k h_j, \quad k = 1, 2, \dots, N-1 \quad (2.2)$$

$$u_j^{(k)}(z = H_k) = u_j^{(k+1)}(z = H_k), \quad j = x, y, z$$

где Ω – частота колебаний лицевой поверхности пакета, фиксируемая сейсмостанциями и GPS. Считается, что известны упругие характеристики, толщины h_k и плотности ρ_k слоёв. Решение сформулированной задачи отыскивается в виде

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(k)}(x, y, z, t) = \sigma_{jm}^{(k)}(x, y, z) \exp i\Omega t, \quad u_\alpha^{(k)} = \bar{u}_\alpha^{(k)}(x, y, z) \exp i\Omega t \quad (2.3)$$

$\alpha, \beta = x, y, z; \quad j, m = 1, 2, 3; \quad k = 1, 2, \dots, N$

Перейдя затем к безразмерным координатам $\xi = x/l, \eta = y/l, \zeta = z/h$ и перемещениям $U^{(k)} = \bar{u}_x^{(k)}/l, V^{(k)} = \bar{u}_y^{(k)}/l, W^{(k)} = \bar{u}_z^{(k)}/l$, получим сингулярно-возмущённую малым параметром $\varepsilon = h/l$ систему. Решение внутренней задачи (в практических приложениях обычно пренебрегают пограничным слоем) имеет вид

$$U^{(k)} = \varepsilon^s U^{(k,s)}, (U, V, W); \quad \sigma_{jm}^{(k)} = \bar{\varepsilon}^{1+s} \sigma_{jm}^{(k,s)}, \quad s = \overline{0, S} \quad (2.4)$$

По обычной процедуре [3,5] получается рекуррентная система для определения $U^{(k,s)}, V^{(k,s)}, W^{(k,s)}, \sigma_{jm}^{(k,s)}$. Из этой системы напряжения выражаются через перемещения по формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(k,s)} &= -A_{23}^{(k)} \frac{\partial W^{(k,s)}}{\partial \zeta} + A_{22}^{(k)} \frac{\partial U^{(k,s-1)}}{\partial \xi} - A_{12}^{(k)} \frac{\partial V^{(k,s-1)}}{\partial \eta}, \quad (1, 2; \xi, \eta; 22, 33; U, V) \\ \sigma_{33}^{(k,s)} &= A_{11}^{(k)} \frac{\partial W^{(k,s)}}{\partial \zeta} - A_{23}^{(k)} \frac{\partial U^{(k,s-1)}}{\partial \xi} - A_{13}^{(k)} \frac{\partial V^{(k,s-1)}}{\partial \eta}, \\ \sigma_{12}^{(k,s)} &= \frac{1}{a_{66}^{(k)}} \left[\frac{\partial U^{(k,s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{(k,s-1)}}{\partial \xi} \right], \\ \sigma_{13}^{(k,s)} &= \frac{1}{a_{55}^{(k)}} \left[\frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U^{(k,s)}}{\partial \zeta} \right], \quad (\xi, \eta, 1, 2, U, V, a_{55}, a_{44}) \end{aligned} \quad (2.5)$$

где A_{jm} выражаются через a_{jm} по известным формулам [6]. Для определения функций $U^{(k,s)}, V^{(k,s)}, W^{(k,s)}$ получаются уравнения:

$$\frac{\partial^2 U^{(k,s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55}^{(k)} \rho_k \Omega_*^2 U^{(k,s)} = R_u^{(k,s)}, \quad \left(U, V, W; a_{55}, a_{44}, \frac{1}{A_{11}} \right), \quad \Omega_* = h\Omega, \quad (2.6)$$

где

$$\begin{aligned} R_u^{(k,s)} &= -\frac{\partial^2 W^{(k,s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} - a_{55}^{(k)} \left[\frac{\partial \sigma_{11}^{(k,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12}^{(k,s-1)}}{\partial \eta} \right], \quad (U, V; 1, 2; \xi, \eta; a_{55}, a_{44}) \\ R_w^{(k,s)} &= \frac{1}{A_{11}^{(k)}} \left[A_{23}^{(k)} \frac{\partial^2 U^{(k,s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} + A_{13}^{(k)} \frac{\partial^2 V^{(k,s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta} - \frac{\partial \sigma_{13}^{(k,s-1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial \sigma_{23}^{(k,s-1)}}{\partial \eta} \right], \quad Q^{(k,m)} \equiv 0 \text{ при } m < 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Решениями уравнений (2.6) являются

$$\begin{aligned} U^{(k,s)} &= C_{u1}^{(k,s)}(\xi, \eta) \sin \Omega_* \sqrt{a_{55}^{(k)} \rho_k} \zeta + C_{u2}^{(k,s)}(\xi, \eta) \cos \Omega_* \sqrt{a_{55}^{(k)} \rho_k} \zeta + \bar{u}^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta) \\ &\left(U, V, W; a_{55}^{(k)}, a_{44}^{(k)}, \frac{1}{A_{11}^{(k)}} \right), \quad \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} - \text{частные решения уравнений (2.6)} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Используя решение (2.8), по формулам (2.5) вычисляются напряжения $\sigma_{13}^{(k,s)}$, $\sigma_{23}^{(k,s)}$, $\sigma_{33}^{(k,s)}$ и удовлетворяются условия (2.1), (2.2). Сначала удовлетворяются условия (2.1), т.е. условия при $k=1$. Удовлетворение условиям (2.1) относительно $\sigma_{13}^{(1,s)}$, $u^{(1,s)}$ приводит к нахождению $C_{u1}^{(1,s)}$, $C_{u2}^{(1,s)}$, а относительно $\sigma_{23}^{(1,s)}$, $v^{(1,s)}$ – к определению $C_{v1}^{(1,s)}$, $C_{v2}^{(1,s)}$. Имеем

$$C_{u1}^{(1,s)} = -\frac{1}{\Omega_* \sqrt{a_{55}^{(1)}} \rho_1} \left(\frac{\partial W^{(1,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{u}^{(1,s)}}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=0}, \quad (u, v, \xi, \eta; a_{55}^{(1)}, a_{44}^{(1)}) \quad (2.9)$$

$$C_{u2}^{(1,s)} = u^{+(s)} - \bar{u}^{(1,s)} (\zeta = 0), \quad u^{+(0)} = u_x^+ / l, \quad u^{+(s)} = 0, \quad s \neq 0, \quad (u, v, w; u_x^+, u_y^+, u_z^+)$$

После удовлетворения условию (2.1) относительно σ_{zz} , определяется $C_{w1}^{(1,s)}$:

$$C_{w1}^{(1,s)} = -\frac{\tilde{W}^{(1,s)}}{\Omega_* \sqrt{A_{11}^{(1)}} \rho_1}, \quad \tilde{W}^{(1,s)} = \left[A_{11}^{(1)} \frac{\partial \bar{w}^{(1,s)}}{\partial \zeta} - A_{23}^{(1)} \frac{\partial U^{(1,s-1)}}{\partial \xi} - A_{13}^{(1)} \frac{\partial V^{(1,s-1)}}{\partial \eta} \right]_{\zeta=0} \quad (2.10)$$

После определения величин первого слоя, из условий контакта (2.2) при $k=1$ определяются величины второго слоя, затем при $k=2$ – величины третьего слоя и т.д. Для k -ого слоя имеем:

$$C_{u1}^{(k+1,s)} = \alpha_{1u}^{(k+1,s)} \cos \Omega_* \sqrt{\rho_{k+1} a_{55}^{(k+1)}} \zeta_k + \beta_u^{(k+1,s)} \sin \Omega_* \sqrt{\rho_{k+1} a_{55}^{(k+1)}} \zeta_k$$

$$C_{u2}^{(k+1,s)} = \beta_u^{(k+1,s)} \cos \Omega_* \sqrt{\rho_{k+1} a_{55}^{(k+1)}} \zeta_k - \alpha_{1u}^{(k+1,s)} \sin \Omega_* \sqrt{\rho_{k+1} a_{55}^{(k+1)}} \zeta_k$$

$$\alpha_{1u}^{(k+1,s)} = \sqrt{\frac{a_{55}^{(k+1)}}{\rho_{k+1}}} \left(\sigma_{13}^{(k,s)} (\zeta = \zeta_k) - \tilde{\sigma}_{13}^{(k+1,s)} (\zeta = \zeta_k) \right), \quad \beta_u^{(k+1,s)} = U^{(k,s)} (\zeta = \zeta_k) - \bar{u}^{(k+1,s)} (\zeta = \zeta_k)$$

$$\tilde{\sigma}_{13}^{(k,s)} = \frac{1}{a_{55}^{(k)}} \left(\frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{u}^{(k,s)}}{\partial \zeta} \right), \quad \zeta_k = H_k / h, \quad (u, v; 1, 2; \xi, \eta; a_{55}, a_{44})$$

$$C_{w1}^{(k+1,s)} = \alpha_w^{(k+1,s)} \cos \Omega_* \sqrt{\frac{\rho_{k+1}}{A_{11}^{(k+1)}}} \zeta_k + \beta_w^{(k+1,s)} \sin \Omega_* \sqrt{\frac{\rho_{k+1}}{A_{11}^{(k+1)}}} \zeta_k$$

$$C_{w2}^{(k+1,s)} = \beta_w^{(k+1,s)} \cos \Omega_* \sqrt{\frac{\rho_{k+1}}{A_{11}^{(k+1)}}} \zeta_k - \alpha_w^{(k+1,s)} \sin \Omega_* \sqrt{\frac{\rho_{k+1}}{A_{11}^{(k+1)}}} \zeta_k$$

$$\alpha_w^{(k+1,s)} = \frac{1}{\Omega_* \sqrt{\rho_{k+1} A_{11}^{(k+1)}}} \left[\sigma_{33}^{(k,s)} - A_{11}^{(k+1)} \frac{\partial \bar{w}^{(k+1,s)}}{\partial \zeta} - \tilde{W}^{(k,s)} \right]_{\zeta=\zeta_k}$$

$$\beta_w^{(k+1,s)} = W^{(k,s)} (\zeta = \zeta_k) - \bar{w}^{(k+1,s)} (\zeta = \zeta_k),$$

$$\tilde{W}^{(k,s)} = A_{11}^{(k,s)} \frac{\partial \bar{w}^{(k,s)}}{\partial \zeta} - A_{23}^{(k,s)} \frac{\partial U^{(k,s-1)}}{\partial \xi} - A_{13}^{(k,s)} \frac{\partial V^{(k,s-1)}}{\partial \eta}$$

$$k = 1, 2, \dots, N-1$$

Если функции u_x^+, u_y^+, u_z^+ являются многочленами от тангенциальных координат, итерационный процесс обрывается и мы получаем математически точное решение. Это сулит очевидные выгоды, ибо имея данные сейсмостанций и GPS в „n” точках, т.е. $u_x^+ (\xi_j, \eta_j, t_*)$, (x, y, z) для заданного времени измерения t_* , перемещения лицевой поверхности пакета можно представить в виде известного полинома Лагранжа

$$u_x^+(\xi, \eta, t_*) = \sum_{j=1}^n u_x^+(\xi_j, \eta_j, t_*) \frac{\prod_{i=1}^n (\xi - \xi_i)(\eta - \eta_i)}{\prod_{i=1, j \neq i}^n (\xi_j - \xi_i)(\eta_j - \eta_i)} \quad (2.12)$$

где \prod – символ умножения и получить математически точное решение, соответствующего времени $t = t_*$. Изменяя временной параметр $t = t_*$, можно составить полное представление о состоянии Литосферной плиты на заданный промежуток времени.

Работа выполнена при поддержке гранта „11-2с 462” Государственного комитета науки МОН Армении.

ЛИТЕРАТУРА

1. X. Le Pichon. J.Francheteau. J.Bonnin. Plate tectonics. Elsevier. 1973. (К. Ле Пишон, Ж.Франшто, Ж.Боннин. Тектоника плит. М.: Мир, 1977. 288 с.).
2. K.Kasahara. Earthquake Mechanics. Cambridge Univers. Press, Cambridge. 1981. (К.Касахара, Механика землетрясений. М.: Мир, 1985. 264 с.)
3. Aghalovyan L.A. On one class of three-dimensional problems of elasticity theory for plates. //Proceedings of A.Razmadze Mathematical Institute of Georgia. 2011.Vol.155, p.3-10.
4. Aghalovyan Lenser, Aghalovyan Mher. Monitoring of stress-strain state of plate-like packet of base-foundation constructions on the base of the data of seismic stations and GPS systems. //Proceedings of the 5 th European Conference on Structural Control–EACS 2012, Genoa, Italy, 18-20 June 2012. Paper № # 069, p.1-8.
5. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука-Физматлит, 1997. 414с.
6. Агаловян Л.А. Об одном классе задач о вынужденных колебаниях анизотропных пластин. Проблемы механики тонких деформируемых тел. Ереван: 2002, с.9-19.

Сведения об авторах:

Агаловян Ленсер Абгарович – академик НАН Армении, заведующий отделом Института механики НАН Армении.

Е-mail: aghal@mechins.sci.am

Агаловян Мгер Ленсерович – доктор физ.-мат.наук, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении.

Е-mail: mheraghalovyan@rambler.ru

ДИФРАКЦИЯ СДВИГОВОЙ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА КРАЕ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ТРЕЩИНЫ В СОСТАВНОМ УПРУГОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Агаян К.Л., Григорян Э.Х., Гулян К.Г.

Исследуется динамическая контактная задача о дифракции сдвиговой плоской волны в упругом кусочно-однородном пространстве с концентратором напряжений в виде полубесконечной трещины продольного сдвига. Пространство состоит из двух различных упругих полупространств, а полубесконечная трещина, параллельная линии раздела материалов, расположена в одной из полупространств. Здесь рассматривается случай, когда подающая из бесконечности сдвиговая плоская волна распространяется в сплошном полупространстве. Задача определения дифракционного волнового поля в составном пространстве при помощи обобщённого преобразования Фурье сводится к краевой задаче типа Римана на действительной оси. Получены асимптотические формулы, характеризующие поле упругих перемещений в дальних зонах каждого участка кусочно-однородного пространства, а также распределение сдвиговых напряжений около конца трещины.

1. Рассмотрим составное упругое пространство, состоящее из двух различных полупространств, ослабленное полубесконечной сквозной трещиной продольного сдвига. В декартовой системе координат $Oxyz$ полупространства занимают области $\Omega_1 (|x| < \infty, y > 0, |z| < \infty)$ и $\Omega_2 (|x| < \infty, y < 0, |z| < \infty)$, а трещина – полуплоскость $\Omega_0 (x < 0, y = -h, |z| < \infty)$. Полупространства контактируют по плоскости $y = 0$ и находятся в условиях полного контакта. В полупространстве, занимающем область Ω_1 , из бесконечности в сторону вершины трещины распространяется заданная сдвиговая плоская SH волна:

$$u_z^{(\infty)}(x, y, t) = w_\infty(x, y) e^{-i\omega t} = e^{-ik_1 x \cos \beta_1 - ik_1 y \sin \beta_1} e^{-i\omega t}$$

где $w_\infty(x, y)$ – амплитуда упругого перемещения, $\beta_1 (0 < \beta_1 < \pi/2)$ – угол скольжения падающей упругой волны, $k_1 = c_1 \omega$ – волновое число, $c_1 = \sqrt{\mu_1/\rho_1}$ – скорость распространения сдвиговых упругих волн, μ_1, ρ_1 – модуль сдвига и плотность среды в области Ω_1 , ω – частота колебаний, t – время.

Предполагая, что среда находится в условиях антиплоской деформации, требуется определить распределение дифрагированного волнового поля во всех участках составного пространства.

Для решения задачи составное пространство разделим на три части: $\Omega_1, \Omega_{21} (|x| < \infty, -h < y < 0, |z| < \infty)$ и $\Omega_{22} (|x| < \infty, y < -h, |z| < \infty)$. Гармонический множитель $e^{-i\omega t}$, как обычно опускается, т.е. задача решается в амплитудах.

Уравнения движения в амплитудах перемещений имеют вид [1]:

$$\begin{aligned} \Delta w_1 + k_1^2 w_1 &= 0 & (x, y) \in \Omega_1 \\ \Delta w_{2j} + k_2^2 w_{2j} &= 0 & (x, y) \in \Omega_{2j}, \quad j=1,2 \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $w_1(x, y), w_{2j}(x, y)$ – амплитуды перемещений в областях Ω_1 и Ω_{2j} , $k_2 = \omega \sqrt{\mu_2/\rho_2}$ – волновое число, μ_2, ρ_2 – модуль сдвига и плотность нижнего полупространства.

Берега трещины свободны от напряжений, а на поверхностях соприкосновения выполняются условия полного контакта. Тогда, граничные и контактные условия, посредством $w_1(x, y)$ и $w_{2j}(x, y)$, запишутся в виде:

$$w_1(x, +0) = w_{21}(x, -0); \quad \mu_1 \frac{\partial w_1}{\partial y} \Big|_{y=+0} = \mu_2 \frac{\partial w_{21}}{\partial y} \Big|_{y=-0}, \quad |x| < \infty \quad (1.2)$$

$$w_{21}(x, -h+0) = w_{22}(x, -h-0); \quad \mu_2 \frac{\partial w_{21}}{\partial y} \Big|_{y=-h+0} = \mu_2 \frac{\partial w_{22}}{\partial y} \Big|_{y=-h-0}, \quad x > 0 \quad (1.3)$$

$$\mu_2 \frac{\partial w_{21}}{\partial y} \Big|_{y=-h+0} = \mu_2 \frac{\partial w_{22}}{\partial y} \Big|_{y=-h-0} = 0, \quad x < 0 \quad (1.4)$$

Решение задачи должно удовлетворять также условию уходящей волны.

Перейдём к решению краевой задачи (1.1)–(1.4). Введём функции

$$w_{21}(x, -h+0) - w_{22}(x, -h-0) = 2\psi^-(x), \quad (-\infty < x < \infty) \quad (1.5)$$

$$\mu_2 \frac{\partial w_{21}}{\partial y} \Big|_{y=-h+0} = \mu_2 \frac{\partial w_{22}}{\partial y} \Big|_{y=-h-0} = \varphi^+(x), \quad (-\infty < x < \infty) \quad (1.6)$$

где $\psi^-(x) = 0$ при $x > 0$, а $\varphi^+(x) = 0$ при $x < 0$.

Применив действительное преобразование Фурье к (1.1)–(1.4) и учитывая, что в областях Ω_{21} и Ω_{22} имеются только излученные волны, решение задачи сводится к краевой задаче типа Римана на действительной оси относительно Фурье – образов неизвестных функций $\psi^-(x)$ и $\varphi^+(x)$ из (1.5) и (1.6) [2-4]

$$\mu_2^{-1} \bar{\Phi}^+(\sigma) + \bar{K}(\sigma) \gamma_2(\sigma) \bar{\Psi}^-(\sigma) = -2\pi i A_0 \delta(\sigma - k_1 \cos \beta_1) \quad (1.7)$$

где β_2 – угол преломления, $k_1 \cos \beta_1 = k_2 \cos \beta_2$

$$A_0 = \frac{2k_1 \sin \beta_1 k_2 \sin \beta_2}{k_1 \sin \beta_1 + \mu_* k_2 \sin \beta_2} e^{-ihk_2 \sin \beta_2}, \quad \mu_* = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

$$\bar{K}(\sigma) = L_1(\sigma h) e^{-\gamma_2 h} / (\gamma_1 \mu_1 + \gamma_2 \mu_2)$$

$$L_1(\sigma) = \mu_1 \gamma_1 \operatorname{ch}(\gamma_2 h) + \mu_2 \gamma_2 \operatorname{sh}(\gamma_2 h), \quad \gamma_j(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - k_j^2} \quad (j=1,2) \quad (1.8)$$

Относительно функции $\gamma_j(\sigma)$ из (1.8) принимается, что $\sqrt{\sigma^2 - k_j^2} > 0$ при $|\sigma| > k_j$, $\sqrt{\sigma^2 - k_j^2} = -i\sqrt{k_j^2 - \sigma^2}$, т.е. в (1.7) предполагается, что действительная ось обходит точки ветвления $\sigma_j = -k_j$ функции комплексного переменного $\gamma_j(\alpha) = \sqrt{\alpha^2 - k_j^2}$ сверху, а $\sigma_j = k_j$ – снизу [2].

В дальнейшем, для определённости, будем полагать $k_1 < k_2$, когда возможно появление локализованных (поверхностных) волн Лява [1,2].

Решение функционального уравнения (1.7) построено методом факторизации [2]. Оно представляется в виде

$$\bar{\Phi}^+(\sigma) = A \frac{\mu_2 \sqrt{\sigma + k_2} \bar{K}^+(\sigma)}{\sigma - k_1 \cos \beta_1 + i0}; \quad \bar{\Psi}^-(\sigma) = -\frac{A}{\sqrt{\sigma + k_2} \bar{K}^+(\sigma) (\sigma - k_1 \cos \beta_1 - i0)} \quad (1.9)$$

$$A = \frac{A_0}{\bar{K}^+(k_1 \cos \beta_1) \sqrt{k_2 (1 + \cos \beta_2)}} \quad (1.10)$$

Здесь $\bar{K}(\sigma) = \bar{K}^+(\sigma) \cdot \bar{K}^-(\sigma)$, где $\bar{K}^+(\alpha)$ ($\alpha = \sigma + i\tau$) регулярна и не имеет нулей при $\operatorname{Im}(\alpha) > 0$, а $\bar{K}^-(\alpha)$ регулярна и не имеет нулей при $\operatorname{Im}(\alpha) < 0$. При этом, $\bar{K}^\pm(\alpha) \rightarrow 1$ при $|\alpha| \rightarrow \infty$ в своих областях регулярности, а $\bar{K}^\pm(\sigma)$ определяются формулами:

$$\bar{K}^{\pm}(\sigma) = \exp(\bar{F}^{\pm}(\sigma)), \quad \bar{F}^{+}(\sigma) = \int_0^{\infty} F(x) e^{ix(\sigma+i0)} dx, \quad \bar{F}^{-}(\sigma) = \int_{-\infty}^0 F(x) e^{ix(\sigma-i0)} dx \quad (1.11)$$

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \bar{K}(\sigma) e^{-i\sigma x} d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left[1 + \frac{\gamma_1 - \mu_* \gamma_2}{2(\gamma_1 - \mu_* \gamma_2)} e^{-2\gamma_2 h} \right] e^{-i\sigma x} d\sigma \quad (1.12)$$

Имея решение функционального уравнения (1.7) в виде (1.9)–(1.12), для образов амплитуд упругих перемещений получим:

в области Ω_1 ($y > 0$)

$$\bar{w}_1(\sigma, y) = \frac{e^{\gamma_2 h - \gamma_1 y}}{\mu_2 \gamma_2} \bar{\Phi}^{+}(\sigma) + 2e^{\gamma_1 y} \operatorname{ch}(\gamma_2 h) \bar{\Psi}^{-}(\sigma) - 4\pi i \sin(k_1 y \sin \beta_1) \delta(\sigma - k_1 \cos \beta_1) \quad (1.13)$$

в области Ω_{21} ($-h < y \leq 0$)

$$\bar{w}_{21}(\sigma, y) = \frac{e^{\gamma_2(y+h)}}{\mu_2 \gamma_2} \bar{\Phi}^{+}(\sigma) + 2\operatorname{ch}(h+y) \bar{\Psi}^{-}(\sigma) \quad (1.14)$$

в области Ω_{22} ($y \leq -h$)

$$\bar{w}_{22}(\sigma, y) = \frac{e^{\gamma_2(y+h)}}{\mu_2 \gamma_2} \bar{\Phi}^{+}(\sigma) \quad (1.15)$$

В частном случае, когда трещина бесконечна ($\bar{\Phi}^{+}(\sigma) \equiv 0$), из (1.7) и (1.13) следует

$$w_1(x, y) = w_{\infty}(x, y) - w_{\text{отр}}(x, y) + \frac{2k_1 \sin \beta_1 \cos(hk_2 \sin \beta_2) e^{-ik_1 x \cos \beta_1 + ik_1 y \sin \beta_1}}{k_1 \sin \beta_1 \cos(hk_2 \sin \beta_2) - i\mu_* k_2 \sin \beta_2 \sin(hk_2 \sin \beta_2)} \quad y \geq 0 \quad (1.16)$$

где $w_{\text{отр}}(x, y) = e^{-ik_1 x \cos \beta_1 + ik_1 y \sin \beta_1}$ – амплитуда отраженной волны.

Решение (1.16) указывает, что в рассматриваемом частном случае независимо от значений k_1 и k_2 в двухслойной упругой системе локализованные (поверхностные) волны Лява не возбуждаются.

2. Исследование волнового поля проведено для всех подобластей составного пространства. Здесь из-за ограниченности объёма приводятся результаты по волновому полю только в области $\Omega_1^{(2)}$ ($x < 0, y > 0$) и на линии контакта $y = 0$. Из (1.14) после обратного преобразования Фурье, для амплитуды упругих перемещений получим:

$$w_1^{(2)}(x, y) = -\frac{A\mu_*}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{K}^{+}(\sigma) \sqrt{\sigma + k_2}}{L_1(\sigma)} \frac{e^{-\gamma_1 y} e^{-i\sigma x}}{\sigma - k_1 \cos \beta_1 + i0} d\sigma + w_{\infty}(x, y) - A_1 w_{\text{отр}}(x, y) \quad (2.1)$$

$$A_1 = \frac{k_1 \sin \beta_1 - \mu_* k_2 \sin \beta_2}{k_1 \sin \beta_1 + \mu_* k_2 \sin \beta_2}, \quad w_{\text{отр}}(x, y) = e^{-ik_1 x \cos \beta_1 + ik_1 y \sin \beta_1}$$

Следуя работам [2,4], из (2.1) для амплитуд упругих перемещений в полярных координатах (r, ϑ) получим

$$w_1^{(2)}(r, \vartheta) = \frac{A\mu_*}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \Delta_1^{(-)}(\tau) e^{-r n_-} - \Delta_1^{(+)}(\tau) e^{-r n_+} \right\} \frac{\bar{K}^{+}(i\tau) \sqrt{k_2 + i\tau}}{\Delta_1(\tau)} \frac{d\tau}{i\tau - k_1 \cos \beta} + \frac{A\mu_*}{2\pi} \int_0^{k_1} \left\{ \Delta_2^{(-)}(\sigma) e^{ir\lambda_+} - \Delta_2(\sigma) e^{ir\lambda_-} \right\} \frac{\bar{K}^{+}(\sigma) \sqrt{k_2 + \sigma}}{\Delta_2(\sigma)} \frac{d\sigma}{\sigma - k_1 \cos \beta + i0} + \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned}
& +w_\infty(r, \vartheta) - C_2 w_{\text{отр}}(r, \vartheta) - iA\mu_* w_L(r, \vartheta) \\
\Delta_1^{(\pm)}(\tau) &= \mu_* \gamma_2^{(\tau)} \sin(h\gamma_2^{(\tau)}) \pm i\gamma_1^{(\tau)} \cos(h\gamma_2^{(\tau)}), \quad \gamma_j^{(\tau)} = \sqrt{k_j^2 - \tau^2} \\
\Delta_2^{(\pm)}(\sigma) &= \mu_* \gamma_2^{(\sigma)} \sin(h\gamma_2^{(\sigma)}) \pm i\gamma_1^{(\sigma)} \cos(h\gamma_2^{(\sigma)}), \quad \gamma_j^{(\sigma)} = \sqrt{k_j^2 - \sigma^2} \\
\Delta_1(\tau) &= \Delta_1^{(+)}(\tau) \cdot \Delta_1^{(-)}(\tau) \quad \lambda_\pm = \sigma |\cos \vartheta| \pm \sqrt{k_1^2 - \sigma^2} \sin \vartheta \\
\Delta_2(\sigma) &= \Delta_2^{(+)}(\sigma) \cdot \Delta_2^{(-)}(\sigma) \quad n_\pm = \tau |\cos \vartheta| \pm \sqrt{k_1^2 - \tau^2} \sin \vartheta \\
w_L(r, \vartheta) &= \sum_{m=1}^n \frac{\mu_1 \bar{K}^+(\sigma_m) \sqrt{\sigma_m + k_2}}{(\sigma_m - k_1 \cos \beta_1) L'_1(\sigma_m)} e^{-i\sigma_m r \cos \vartheta - r \sin \vartheta \sqrt{\sigma_m^2 - k_1^2}}
\end{aligned}$$

При помощи (2.2) можно вычислить ближнее поле, что отмечается и в [8]. Асимптотические формулы, определяющие дальнее поле, были получены подходом работ [5-7]. Не останавливаясь на подробностях, приведём окончательные результаты, описывающие поведение волнового поля упругих перемещений в дальних зонах области $\Omega_1^{(2)}$ и на линии контакта при $r \rightarrow \infty$:

а) в секторе $\pi - \beta_1 < \vartheta < \pi$

$$\begin{aligned}
w_{11}^{(2)}(r, \vartheta) &= e^{irk_1 \cos(\vartheta - \beta_1)} - A_1 e^{-irk_1 \cos(\vartheta + \beta_1)} - iA\mu_* w_L(r, \vartheta) + \\
&+ \frac{A\mu_*}{\sqrt{2\pi}} B_1(\vartheta) \frac{e^{i(k_1 r - \pi/4)}}{\sqrt{kr}} + O((kr)^{-3/2}) \\
B_1(\vartheta) &= \frac{\mu_* a(\vartheta) \sin(ha(\vartheta)) - ik_1 \sin \vartheta \cos(ha(\vartheta))}{\mu_*^2 a^2(\vartheta) \sin^2(ha(\vartheta)) + k_1^2 \sin^2 \theta \cos^2(ha(\vartheta))} \frac{\sin \vartheta \bar{K}^+(k_1 \cos \beta_1)}{|\cos \vartheta| - \cos \beta} \\
a(\vartheta) &= \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \cos^2 \vartheta} \\
\text{в секторе } \pi/2 < \vartheta < \pi - \beta_1 \\
w_{12}^{(2)}(r, \vartheta) &= w_{11}^{(2)}(r, \vartheta) - iA\mu_* B_2 e^{-irk_1 \cos(\vartheta + \beta)} + O((kr)^{-3/2}) \\
B_2 &= \frac{\mu_* b_2 \sin(hb_2) - ik_1 \sin \beta_1 \cos(hb_2)}{\mu_*^2 b_2^2 \sin^2(hb_2) + k_1^2 \sin^2 \beta_1 \cos^2(hb_2)} \frac{\bar{K}^+(k \cos \beta_1)}{(\sqrt{k_2(1 + \cos \beta_2)})^{-1}}, \quad b_2 = k_2 \sin \beta_2
\end{aligned}$$

по направлению луча $\vartheta = \pi - \beta_1$

$$w_{\pi - \beta_1}(r) = e^{irk_1 \cos(2\beta_1)} - (A_1 - \mu_* AB_2) e^{irk_1} + O((kr)^{-1/2}) \quad (2.3)$$

На линии контакта $y = 0$:

при $x \rightarrow -\infty$

$$\begin{aligned}
w_1^{(2)}(x, 0) &= B_3 e^{-ik_1 x \cos \beta_1} - iA\mu_* w_L(x, 0) - B_4 e^{i(k_1 |x| - \pi/4)} (k_1 |x|)^{-3/2} + O((k_1 |x|)^{-5/2}) \\
B_3 &= \frac{k_1 \sin \beta_1}{k_1 \sin \beta_1 \cos(hb_2) - i\mu_* k_2 \sin \beta_2 \sin(hb_2)} \\
B_4 &= \frac{A}{\sqrt{2\pi k_1}} \frac{k_1 \bar{K}^+(k_1 \cos \beta) \sqrt{k_2 + k_1}}{(k_2^2 - k_1^2) \sin(h\sqrt{k_2^2 - k_1^2})} \frac{1}{1 - \cos \beta_1}
\end{aligned}$$

при $x \rightarrow +\infty$

$$w_1^{(2)}(x, 0) = \left[B_3 \frac{2\mu_* k_2 \sin \beta_2 e^{ihk_2 \sin \beta_2}}{k_1 \sin \beta_1 + \mu_* k_2 \sin \beta_2} + A_1 \right] e^{-ik_1 x \cos \beta_1} + B_5 e^{i(k_1 x - \pi/4)} (k_1 x)^{-3/2} + O((k_1 x)^{-2})$$

$$B_5 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{Ak_1}{\sqrt{k_2^2 - k_1^2}} \left[\frac{e^{ih\sqrt{k_2^2 - k_1^2}}}{\bar{K}^+(k_1)(1 + \cos \beta_1)} - i \frac{k_1 \cos(h\sqrt{k_2^2 - k_1^2})}{k_2 \bar{K}^+(k_2)(1 + \cos \beta_2)} \right]$$

Последние формулы показывают, что в секторе $\pi/2 < \vartheta < \pi$ волновое поле представляется в виде суммы падающей, отражённой и объёмной волн, а также локализованной волны Лява.

Отметим, что при $k_1 = k_2$, т.е. в однородном случае $\mu_* AB_2 = 1/2$ и формула (2.3) точно совпадает с известной формулой [2].

Распределение амплитуды сдвиговых напряжений $\tau_{z\vartheta}$ около конца трещины определяется формулой:

$$\tau_{z\vartheta}(r, \vartheta) = \frac{A\mu_* e^{-i\pi/4}}{\sqrt{\pi r}} \cos \frac{\vartheta}{2} + O(1) \quad (0 < \vartheta < 2\pi)$$

Как нетрудно заметить, при $h\sqrt{k_2^2 - k_1^2} = \pi n$, ($n = 0, 1, 2, \dots$) B_4 обращается в бесконечность и полученная асимптотика непригодна, т.е. имеет место явление типа резонанса. В этих особых случаях пересчёт асимптотических формул показывает, что амплитуда объёмной волны, подобно однородному случаю, имеет порядок убывания $O(|x|^{-1/2})$ при $x \rightarrow -\infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 782с.
2. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. М.: Мир. 1962, 294с.
3. Агаян К.Л., Григорян Э.Х., Джилаван С.А. Дифракция сдвиговой плоской волны в упругом пространстве с полубесконечным упругим включением // Изв. НАН Армении. Механика. 2003. Т.56. №4. С.3-17.
4. Агаян К.Л., Григорян Э.Х. Дифракция сдвиговой плоской электроупругой волны на полубесконечном электроде в пьезоэлектрическом пространстве с щелью // Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. №1. С.50-69.
5. Григорян Э.Х., Агаян К.Л. О новом методе определения асимптотических формул в задачах дифракции волн // Докл. НАН Армении. 2010. №3. С.261-271.
6. Григорян Э.Х., Агаян К.Л. Излучение плоской сдвиговой волны из упругого волновода в составное упругое пространство // Изв. НАН Армении. Механика. 2007. Т.60. №3. С.23-38.
7. Агаян К.Л. Дифракция электроупругих сдвиговых плоских волн на краях полубесконечных электродов в пьезоэлектрическом пространстве с щелью // Экологический вестник НЦ Черноморского экономического сотрудничества. 2011. №1. С.13-18.
8. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев. Наукова думка, 1981. 284с.

Сведения об авторах:

Агаян Каро Леренцович – доктор физ-мат.наук, ведущий научный сотрудник
Института механики НАН Армении,
E-mail: karo.aghayan@gmail.com

Григорян Эдуард Хосровович – доктор физ-мат.наук, профессор
Ереванский государственный университет

О ПЕРЕДАЧЕ НАГРУЗКИ ОТ УПРУГИХ ВКЛЮЧЕНИЙ К БЕСКОНЕЧНОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПЛАСТИНЕ С ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМ РАЗРЕЗОМ

Акопян В.Н., Амирджанян А.А.

Рассмотрено обобщённое плоско-напряжённое состояние бесконечной вязкоупругой пластинки с полубесконечным разрезом, берега которой на некоторых конечных участках спаяны друг к другу при помощи различных вязкоупругих включений. Считая, что включения находятся в одноосном напряжённом состоянии, выведена определяющая система уравнений поставленной задачи в виде системы, состоящей из сингулярного интегро-дифференциального и сингулярного интегрального уравнения относительно скачков тангенциальных напряжений, действующих на берегах включений. Изучено поведение решений системы определяющих уравнений в концевых точках (интервалов интегрирования) включений и разрезов. Решение системы построено численно-аналитическим методом дискретных особенностей.

1. Постановка задачи и вывод определяющих уравнений

Пусть бесконечная пластина, отнесённая к декартовой системе координат Oxy , на оси абсцисс $y = 0$ на интервале $(0, \infty)$ содержит полубесконечный разрез, берега которого по линии L , состоящей из совокупности конечного числа непересекающихся интервалов $[a_k, b_k]$ ($k = 1, 2, \dots, n$), спаяны конечными тонкими включениями. Будем считать, что пластина деформируется под воздействием осевых сосредоточенных нагрузок P_{a_k} и P_{b_k} , приложенных к концевым точкам включений в момент времени τ_0 .

Предположим, что материалы включений и бесконечной пластины обладают свойством ползучести, которое характеризуется неоднородностью старения [1]. При этом меру ползучести включения обозначим через $C_k(t, \tau)$ ($k = 1, 2, \dots, N$), постоянный по длине возраст – τ_k , модуль упруго-мгновенной деформации – $E_k = \text{const}$. Соответствующие характеристики для бесконечной пластины обозначим через $C_0(t, \tau)$, τ_0 и $E_0(t) = E_0 = \text{const}$. Будем считать также, что для материала пластины коэффициенты поперечного сжатия для упруго-мгновенной деформации $\nu_1(t)$ и деформации ползучести $\nu_2(t, \tau)$ одинаковы и постоянны, т.е. $\nu_2(t, \tau) = \nu_1(t) = \nu = \text{const}$. Кроме того, накладки, как обычно, будем трактовать как одномерные континуумы, которые под воздействием приложенных к ним сосредоточенных нагрузок и тангенциальных контактных напряжений находятся в одноосном напряжённом состоянии. Однако, как и в [2], изгибным эффектом накладок здесь не будем пренебрегать и будем считать, что вследствие малости толщины накладок их изменение по направлению оси абсцисс незначительно и ими можно пренебречь.

Ставится задача: определить тангенциальные и нормальные контактные напряжения, действующие на берегах включений, раскрытия возникающих при этом разрезов и коэффициент интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках разрезов.

Вследствие сделанных предположений в зонах контакта включений с бесконечной пластиной будем иметь следующие условия контакта:

$$\frac{dv(x, \pm 0, t)}{dx} = 0; \quad \frac{du(x, \pm 0, t)}{dx} = \varepsilon_k(x, t) \quad (a_k < x < b_k) \quad (1.1)$$

где $v(x, \pm 0, t)$ и $u(x, \pm 0, t)$ – соответственно вертикальные и горизонтальные смещения граничных точек верхней и нижней берегов полубесконечного разреза, а $\varepsilon_k(x, t)$ ($k = 1, 2, \dots, N$) – осевые деформации включений.

Для того, чтобы удовлетворить условиям контакта (1.1), сначала определим упругие смещения точек берегов разреза через скачки напряжений, действующих на берегах включений. С этой целью мысленно разделим бесконечную пластину на верхнюю и нижнюю полубесконечные пластины и снабдим индексами "+" и "-" компоненты тензора напряжений и смещений соответствующих полубесконечных пластин. Тогда, вводя функции скачков

$$\begin{aligned}
\sigma(x, t) &= \sigma_y^{(+)}(x, +0, t) - \sigma_y^{(-)}(x, -0, t), \\
\tau(x, t) &= \tau_{xy}^{(+)}(x, +0, t) - \tau_{xy}^{(-)}(x, -0, t), \\
U(x, t) &= U_+(x, +0, t) - U_-(x, -0, t), \\
V(x, t) &= V_+(x, +0, t) - V_-(x, -0, t),
\end{aligned} \tag{1.1}$$

используя результаты работы [3] и учитывая, что вследствие симметрии рассматриваемой задачи относительно оси Ox $\sigma(x, t) = U(x, t) \equiv 0$ ($-\infty < x < \infty$), для изотропного тела можем записать:

$$\begin{aligned}
\frac{dU_{\pm}(x, 0, t)}{dx} &= \frac{(1-\nu)}{4\pi} \int_{\bar{L}} \frac{V'(s, t)}{s-x} ds - \frac{(1+\nu)(3-\nu)}{4\pi E_0} \int_L \frac{\tau(s, t)}{s-x} ds \pm \frac{1}{2} U'(x, t), \\
\sigma_y^{(\pm)}(x, 0, t) &= \frac{E_0}{4\pi} \int_{\bar{L}} \frac{V'(s, t)}{s-x} ds + \frac{(1-\nu)}{4\pi} \int_L \frac{\tau(s, t)}{s-x} ds \pm \frac{1}{2} \sigma(x, t), \\
\tau_{xy}^{(\pm)}(x, 0, t) &\pm \frac{1}{2} \tau(x, t), \quad \frac{dV_{\pm}(x, 0, t)}{dx} = \pm \frac{1}{2} V'(x, t) \quad (-\infty < x < \infty)
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь $\bar{L} = (0, \infty) \setminus L$; $U_{\pm}(x, y, t)$ и $V_{\pm}(x, y, t)$ – горизонтальные и нормальные компоненты упругих смещений точек соответствующих полубесконечных пластин, каждая в своей области определения удовлетворяющие уравнению Ламэ, $\sigma_y^{(\pm)}(x, y, t)$, $\tau_{xy}^{(\pm)}(x, y, t)$ – компоненты тензора напряжений этих полубесконечных пластин, которые связаны с компонентами смещений по известным формулам, E_0 – модуль упругости, а ν – коэффициент Пуассона бесконечной пластины.

Из первых двух уравнений (1.2), обозначив $\sigma_y^{(+)}(x, 0, t) = -q(x, t)$ ($x \in L$), находим

$$\frac{dU_{\pm}(x, 0, t)}{dx} = -\frac{1-\nu}{E_0} q(x, t) - \frac{1}{\pi E_0} \int_L \frac{\tau(s, t)}{s-x} ds \quad (x \in L) \tag{1.3}$$

Теперь выразим производные от вертикальных смещений через контактные напряжения, действующие на берегах включений. Для этого второе уравнение из (1.2) на интервале $(0, \infty)$ запишем в следующей форме:

$$\frac{c_1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{V'(s, t)}{s-x} ds - \frac{a_1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\tau(s, t)}{s-x} ds = \begin{cases} -q(x, t) & (x \in L) \\ 0 & (x \in \bar{L}) \end{cases}$$

откуда

$$\frac{dV_{\pm}(x, 0, t)}{dx} = \pm \frac{1}{2} V'(x, t) = \pm \frac{1}{2} \left\{ -\frac{1-\nu}{E_0} \tau(x, t) + \frac{4}{\pi E_0 \sqrt{x}} \int_L \frac{\sqrt{s} q(s, t)}{s-x} ds \right\} \quad (x \in L) \tag{1.4}$$

Кроме того, осевые упругие деформации включений $\varepsilon_k^{(u)}(x, t)$, в рамках принятой модели для включений, даются следующими формулами [2]:

$$\varepsilon_k^{(u)}(x, t) = \frac{1}{E_k A_k} \left[P_{a_k} - h_k \int_{a_k}^x \tau(s, t) ds \right] \quad (a_k < x < b_k, k = 1, 2, \dots, N) \tag{1.5}$$

где E_k и A_k – соответственно модуль упругости и площадь поперечного сечения включения, находящегося на интервале $[a_k, b_k]$ ($k = 1, 2, \dots, N$), h_k – эффективная ширина включений, а функция $\tau(x, t)$ – скачок тангенциальных напряжений, действующих на берегах включений.

Теперь, используя решения соответствующих упругих задач (1.2)-(1.5), для бесконечной пластины и включений, обладающими свойством ползучести, на основании [1] можем записать:

$$\frac{dv(x, \pm 0, t)}{dx} = (1 - L_0) \frac{dV_{\pm}(x, 0, t)}{dx} = \pm \frac{1}{2E_0} (1 - L_0) \left\{ \frac{4}{\pi \sqrt{x}} \int_L \frac{\sqrt{s} q(s, t)}{s - x} ds - (1 - \nu) \tau(x, t) \right\}, \quad (1.6)$$

$$\frac{du(x, \pm 0, t)}{dx} = (1 - L_0) \frac{dU_{\pm}(x, 0, t)}{dx} = -\frac{1}{E_0} (1 - L_0) \left\{ (1 - \nu) q(x, t) + \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\tau(s, t)}{s - x} ds \right\} \quad (x \in L), \quad (1.7)$$

$$\varepsilon_k(x, t) = (1 - L_k) \varepsilon_k^{(u)}(x, t) = \frac{1}{E_k A_k} (1 - L_k) \left[P_{a_k} - h \int_{a_k}^x \tau(s, t) ds \right] \quad (a_k < x < b_k) \quad (1.8)$$

Здесь L_k ($k = 0, 1, 2, \dots, N$) – временные операторы, которые действуют на произвольную функцию $\varphi(t)$ следующим образом:

$$(1 - L_k) \varphi(t) = \varphi(t) - \int_{\tau_0}^t K_k(t + \rho_k, \tau + \rho_k) \varphi(\tau) d\tau, \quad (\rho_k = \tau_k - \tau_0; \quad k = 1, 2, \dots, n)$$

$$K_k(t, \tau) = E_k \frac{\partial C_k(t, \tau)}{\partial \tau}, \quad C_k(t, \tau) = \varphi_k(\tau) [1 - \exp(-\gamma(t - \tau))]$$

Далее, используя формулы (1.6)-(1.8), удовлетворим условиям контакта включений с бесконечной пластиной (1.1). В итоге придём к следующей ключевой системе сингулярных интегро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{E_0} (1 - L_0) \left\{ (1 - \nu) q(x, t) + \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\tau(s, t)}{s - x} ds \right\} = -\frac{1}{E_k A_k} (1 - L_k) \left[P_{a_k} - h \int_{a_k}^x \tau(s, t) ds \right] \\ \frac{1}{E_0} (1 - L_0) \left\{ \frac{1}{\pi \sqrt{x}} \int_L \frac{\sqrt{s} q(s, t)}{s - x} ds - (1 - \nu) \tau(x, t) \right\} = 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

$$(a_k < x < b_k, \quad k = 1, 2, \dots, n)$$

Полученную систему нужно рассматривать при условиях равновесия включений и непрерывности смещений в конечных точках разрезов

$$h_k \int_{a_k}^{b_k} \tau(s, t) ds = P_{a_k} + P_{b_k} = P_k, \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (1.10)$$

$$\int_{b_{k-1}}^{a_k} [v'(s, +0, t) - v'(s, -0, t)] ds = 0, \quad (b_0 = 0; \quad k = 1, 2, \dots, N) \quad (1.11)$$

Из условий (1.11), учитывая, что на \bar{L} касательные напряжения отсутствуют, найдём

$$\int_L Ln \left| \frac{(\sqrt{a_k} - \sqrt{s})(\sqrt{b_{k-1}} + \sqrt{s})}{(\sqrt{a_k} + \sqrt{s})(\sqrt{b_{k-1}} - \sqrt{s})} \right| q(s, t) ds = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (1.12)$$

Таким образом, решение поставленной задачи свелось к решению системы ключевых уравнений (1.9) при условиях (1.10) и (1.12).

После решения определяющей системы интегро-дифференциальных уравнений (1.9), несложно найти нормальные контактные напряжения и коэффициент интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках разрезов.

2. Решение определяющей системы уравнений

Приступим к решению системы определяющих уравнений (1.9) при условиях (1.10) и (1.12). Для этого второе уравнение (1.9) перепишем в виде

$$\frac{1}{E_0}(1-L_0) \left\{ -(1-\nu)\tau(x,t) + \frac{4}{\pi} \int_L \frac{q(s,t)}{s-x} ds + \frac{1}{\pi\sqrt{x}} \int_L \frac{q(s,t)}{\sqrt{s}+\sqrt{x}} ds \right\} = 0,$$

умножим на мнимую единицу i и просуммируем с первым уравнением (1.9). В итоге, вводя комплексные функции

$$\chi_m(x,t) = q(x,t) - i\tau(x,t)/2 \quad (a_m < x < b_m, m=1,2,\dots,N),$$

придём к уравнению:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{E_0}(1-L_0) \left\{ (1-\nu)\chi_k(x,t) + \frac{2i}{\pi} \sum_{m=1}^n \int_{a_m}^{b_m} \frac{\chi_m(s,t)}{s-x} ds + \frac{2i}{\pi\sqrt{x}} \sum_{m=1}^n \int_{a_m}^{b_m} \frac{\chi_m(s,t) + \bar{\chi}_m(s,t)}{\sqrt{s}+\sqrt{x}} ds \right\} = \\ & = \frac{1}{E_k A_k} (1-L_k) \left[ih \int_{a_k}^x [\chi_k(s,t) - \bar{\chi}_k(s,t)] ds - P_{a_k} \right] \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$(a_k < x < b_k, k=1,2,\dots,N)$$

Далее, при помощи замены переменных $s = v_m \xi + p_m$, $x = v_k \eta + p_k$, где $p_k = (b_k + a_k)/2$, $v_k = (b_k - a_k)/2$, запишем (2.1) на интервале $(-1,1)$ и вводя безразмерные функции

$$\varphi_k(\eta,t) = \frac{A_k E_k}{P_0 E_0} \chi_k(v_k \eta + p_k, t), \quad (k=1,2,\dots,n)$$

и обозначения

$$\begin{aligned} K_{m,k}(\xi,\eta) &= \frac{v_m}{2\sqrt{v_k \eta + p_k} [\sqrt{v_k \eta + p_k} + \sqrt{v_m \xi + p_m}]}, \\ Q_{m,k}(\xi,\eta) &= \begin{cases} K_{m,k}(\xi,\eta) + \frac{v_m}{v_m \xi + p_m - v_k \eta - p_k} & (m \neq k) \\ K_{m,k}(\xi,\eta) & (m = k) \end{cases} \end{aligned}$$

$$p_{a_k}^{(0)} = p_{a_k} / P_0, \quad P_0 = \sum_{k=1}^n P_k \neq 0, \quad \lambda_k = v_k h E_0 / A_k E_k$$

окончательно придём к следующему двумерному интегро-дифференциальному уравнению:

$$\begin{aligned} & (1-L_0) \left\{ (1-\nu)\varphi_k(\eta,t) + \frac{2i}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_k(\xi,t)}{\xi-\eta} d\xi + \frac{2i}{\pi} \sum_{m=1}^n \int_{-1}^1 Q_{m,k}(\xi,\eta) \varphi_m(\xi,t) d\xi + \right. \\ & \left. + \frac{2i}{\pi} \sum_{m=1}^n \int_{-1}^1 K_{m,k}(\xi,\eta) \bar{\varphi}_m(\xi,t) d\xi \right\} = (1-L_k) \left[i\lambda_k \int_{a_k}^x [\varphi_k(\xi,t) - \bar{\varphi}_k(\xi,t)] d\xi - P_{a_k}^{(0)} \right] \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$(a_k < x < b_k, k=1,2,\dots,N)$$

При этом, условия (1.10) и (1.12) примут вид:

$$\int_{-1}^1 [\varphi_k(\xi, t) - \bar{\varphi}_k(\xi, t)] d\xi = -iP_k / \lambda_k P_0 \quad (2.3)$$

$$\sum_{m=1}^n \int_{-1}^1 \ln \left| \frac{(\sqrt{a_k} - \sqrt{v_m \xi + p_m})(\sqrt{b_{k-1}} + \sqrt{v_m \xi + p_m})}{(\sqrt{a_k} + \sqrt{v_m \xi + p_m})(\sqrt{b_{k-1}} - \sqrt{v_m \xi + p_m})} \right| [\varphi_m(\xi, t) + \bar{\varphi}_m(\xi, t)] d\xi = 0 \quad (2.4)$$

Таким образом, решение поставленной задачи свелось к решению двумерного интегро-дифференциального уравнения (2.2) при условиях (2.3) и (2.4). Используя результаты работы [4], решения уравнения (2.2) представим в виде разложения:

$$\varphi_m(\eta, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{X_l^{(m)}(t) P_l^{(\gamma, \sigma)}(\eta)}{\omega(\eta)}, \quad (\omega(\eta) = (1+\eta)^{-\gamma} (1-\eta)^{-\sigma}) \quad (2.5)$$

$$\left(\gamma = -\frac{1}{2} + i\beta, \quad \sigma = -\frac{1}{2} - i\beta, \quad \beta = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{3-v}{1+v} \right) \right)$$

где $P_l^{(j, \sigma)}(\eta)$ ($l = 0, 1, 2, \dots$) – многочлены Якоби, а коэффициенты $X_l^{(m)}(t)$ ($m = 1, 2, \dots, n; l = 0, 1, 2, \dots$) – неизвестные функции, подлежащие определению. Подставляя значения функций $\varphi_m(\eta, t)$ ($m = 1, 2, \dots, N$) из (2.5) в (2.2), по обычной процедуре [4] для определения коэффициентов $X_l^{(m)}(t)$ ($m = 1, 2, \dots, N, l = 1, 2, \dots$) получим систему систем бесконечных интегральных уравнений Вольтерра.

На основе принципа сжатых отображений доказана разрешимость полученной системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н.Х., Колмановский В.Б. Теория ползучести неоднородных сред. М.:Наука, 1983. 336с.
2. Арутюнян Н.Х., Мхитарян С.М. К контактной задаче о двух полубесконечных пластинах, соединённых полубесконечной упругой накладкой. // В сб.: “Механика деформируемых тел и конструкций”. М.: Машиностроение, 1975. С.44-51.
3. Hakobyan V.N. Stress concentration near defects in homogeneous and compound bodies. // LAP LAMBERT Academic Publishing, Germany, 2011. 148pp.
4. Арутюнян Н.Х. Некоторые задачи ползучести для неоднородно-стареющих тел. // Изв.АН СССР. МТТ. 1976. №3. С.153-164.

Сведения об авторах:

Акопян Ваграм Наслетникович – доктор физ.-мат. наук, директор Института механики НАН РА, тел.:(37410) 52-48-90, e-mail: vhakobyan@sci.am

Амирджанян Арутюн Арменович – кандидат физ.-мат. наук, научный сотрудник Института механики НАН РА, e-mail: amirjanyan@gmail.com

О НАПРЯЖЁННОМ СОСТОЯНИИ УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ С ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМ РАЗРЕЗОМ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНО ВЫХОДЯЩИМ НА ЧАСТИЧНО ОТОРВАННОЕ ОТ МАТРИЦЫ АБСОЛЮТНО ЖЁСТКОЕ ВКЛЮЧЕНИЕ

Акопян В.Н., Даштоян Л.Л., Акопян Л.В.

Рассмотрено плоское деформированное состояние однородной упругой плоскости, ослабленной полубесконечным разрезом, перпендикулярно выходящим на середину трещины, образованной отслоением одной из длинных сторон абсолютно жёсткого тонкого включения конечной длины от матрицы. Выведена определяющая система сингулярных интегральных уравнений относительно производных функций разностей смещений точек берегов конечной трещины и скачков напряжений, действующих на берегах трещины. Решение полученной системы построено численно-аналитическим методом дискретных особенностей.

1. Пусть упругая плоскость, отнесённая к полярной системе координат $O r \varphi$, на линии $\varphi = 0.5 \pi$ ослаблена полубесконечным разрезом ($0 < r < \infty$), а на отрезках ($0 < r < a$) линий $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ усилена абсолютно жёстким тонким включением конечной длины $2a$, одна из длинных сторон которой отошла от матрицы, создавая, тем самым, физическую трещину.

Будем считать, что плоскость деформируется под воздействием одинаковых нагрузок $P(r)$, действующих на симметрично расположенных участках $[c, d]$ берегов полубесконечного разреза и симметрично распределённых нагрузок $\sigma_0(r)$, действующих на верхнем берегу трещины.

Задача заключается в определении контактных напряжений под включением, раскрытия образованной трещины и коэффициента интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках конечной трещины.

Учитывая симметричность задачи относительно оси Oy , будем рассматривать только правую полуплоскость. Поставленную задачу математически можно представить в виде следующей граничной задачи:

$$\begin{cases} \sigma_{\varphi}^{+}\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = -P(r), & \tau_{r\varphi}^{+}\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ U_{\varphi}^{-}\left(r, -\frac{\pi}{2}\right) = 0, & \tau_{r\varphi}^{-}\left(r, -\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases} \quad (0 < r < \infty) \quad (1.1a)$$

$$\begin{cases} U_{\varphi}^{+}(r, 0) = U_{\varphi}^{-}(r, 0), & U_r^{+}(r, 0) = U_r^{-}(r, 0) \\ \sigma_{\varphi}^{+}(r, 0) = \sigma_{\varphi}^{-}(r, 0), & \tau_{r\varphi}^{+}(r, 0) = \tau_{r\varphi}^{-}(r, 0) \end{cases} \quad (a < r < \infty) \quad (1.1b)$$

$$\begin{cases} \sigma_{\varphi}^{+}(r, 0) = -\sigma_0(r), & \tau_{r\varphi}^{+}(r, 0) = 0 \\ U_{\varphi}^{-}(r, 0) = \text{const}, & U_r^{-}(r, 0) = 0 \end{cases} \quad (0 < r < a) \quad (1.1b)$$

Здесь $U_{\varphi}^{\pm}(r, \varphi)$ и $U_r^{\pm}(r, \varphi)$ – угловые и радиальные компоненты смещений точек верхней и нижней четверть-плоскостей, соответственно удовлетворяющие в областях своего определения уравнениям Ламэ, а $\sigma_{\varphi}^{\pm}(r, \varphi)$ и $\tau_{r\varphi}^{\pm}(r, \varphi)$ – компоненты напряжений, действующие в этих четверть-плоскостях.

Для получения определяющих уравнений поставленной задачи введём в рассмотрение функции скачков напряжений, действующих на берегах конечной трещины и разность смещений точек этих берегов по формулам

$$\begin{cases} U_{\varphi}^{+}(r,0) - U_{\varphi}^{-}(r,0) = U(r), & U_r^{+}(r,0) = U_r^{-}(r,0) = V(r) \\ \sigma_{\varphi}^{+}(r,0) - \sigma_{\varphi}^{-}(r,0) = \sigma(r), & \tau_{r\varphi}^{+}(r,0) - \tau_{r\varphi}^{-}(r,0) = \tau(r) \end{cases} \quad (1.2)$$

и рассмотрим вспомогательную граничную задачу, состоящую из условий (1.1а), (1.1б) и (1.2). При помощи преобразования Меллина [1, 2] решим эту вспомогательную задачу и выразим компоненты напряжений $\sigma_{\varphi}^{+}(r,0)$, $\tau_{r\varphi}^{+}(r,0)$, а также производные от смещений $U_{\varphi}^{-}(r,0)$, $U_r^{-}(r,0)$ через функции скачков. Получим

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi}^{+}(r,0) = & \frac{1}{2}\sigma(r) + \frac{b_1}{2\pi} \int_0^a \frac{\tau(r_0) dr_0}{r_0 - r} + \frac{c_1}{\pi} \int_0^a \frac{U'(r_0) dr_0}{r_0 - r} + \int_0^a K_{11}(r, r_0) \sigma(r_0) dr_0 \\ & + \int_0^a K_{12}(r, r_0) \tau(r_0) dr_0 + \int_0^a K_{13}(r, r_0) U'(r_0) dr_0 + \int_0^a K_{14}(r, r_0) V'(r_0) dr_0 + f_1(r) \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \tau_{r\varphi}^{+}(r,0) = & \frac{1}{2}\tau(r) - \frac{b_1}{2\pi} \int_0^a \frac{\sigma(r_0) dr_0}{r_0 - r} + \frac{c_1}{\pi} \int_0^a \frac{V'(r_0) dr_0}{r_0 - r} + \int_0^a K_{21}(r, r_0) \sigma(r_0) dr_0 \\ & + \int_0^a K_{22}(r, r_0) \tau(r_0) dr_0 + \int_0^a K_{23}(r, r_0) U'(r_0) dr_0 + \int_0^a K_{24}(r, r_0) V'(r_0) dr_0 + f_2(r) \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{dU_{\varphi}^{-}(r,0)}{dr} = & -\frac{1}{2}U'(r) - \frac{d_1}{2\pi} \int_0^a \frac{\sigma(r_0) dr_0}{r_0 - r} - \frac{b_1}{2\pi} \int_0^a \frac{V'(r_0) dr_0}{r_0 - r} + \int_0^a K_{31}(r, r_0) \sigma(r_0) dr_0 \\ & + \int_0^a K_{32}(r, r_0) \tau(r_0) dr_0 + \int_0^a K_{33}(r, r_0) U'(r_0) dr_0 + \int_0^a K_{34}(r, r_0) V'(r_0) dr_0 + f_3(r) \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{dU_r^{-}(r,0)}{dr} = & -\frac{1}{2}V'(r) - \frac{d_1}{2\pi} \int_0^a \frac{\tau(r_0) dr_0}{r_0 - r} + \frac{b_1}{2\pi} \int_0^a \frac{U'(r_0) dr_0}{r_0 - r} + \int_0^a K_{41}(r, r_0) \sigma(r_0) dr_0 \\ & + \int_0^a K_{42}(r, r_0) \tau(r_0) dr_0 + \int_0^a K_{43}(r, r_0) U'(r_0) dr_0 + \int_0^a K_{44}(r, r_0) V'(r_0) dr_0 + f_4(r) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь введены обозначения:

$$K_{m,n}(r, r_0) = \frac{1}{\pi} \left(A_{m,n} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} + B_{m,n} \frac{d}{dr} + \frac{C_{m,n}}{r} \right) R_j(r, r_0) + \frac{D_{m,n}}{\pi(r_0 + r)},$$

$$(m, n = 1, 4 \& m, n = 2, 3; \quad j = 1); \quad (m = 1, 4 \& n = 2, 3; \quad j = 2); \quad (m = 2, 3 \& n = 1, 4; \quad j = 2)$$

$$\begin{aligned} B_{11} = D_{11} = C_{12} = B_{13} = C_{13} = B_{14} = D_{14} = D_{22} = D_{23} = C_{23} = B_{24} = C_{24} = C_{31} = D_{32} = \\ = C_{33} = D_{33} = D_{41} = B_{42} = B_{43} = D_{44} = 0; \quad A_{11} = A_{12} = A_{21} = A_{22} = A_{34} = -A_{33} = A_{43} = -A_{44} = a_1 / 2; \end{aligned}$$

$$D_{12} = D_{21} = C_{21} = B_{22} = D_{34} = D_{43} = B_{44} = b_1 / 2;$$

$$A_{14} = -A_{13} = -A_{23} = A_{24} = D_{13} = C_{14} = B_{23} = D_{24} = c_1;$$

$$B_{12} = -B_{21} = -C_{22} = C_{43} = C_{44} = 1/2; \quad C_{11} = B_{33} = -a_1 e_1 / 2;$$

$$A_{31} = A_{32} = -A_{41} = -A_{42} = a_1 / 4\mu; \quad D_{31} = B_{41} = -B_{32} = D_{42} = d_1 / 2;$$

$$C_{32} = -C_{41} = e_1 / 4\mu; \quad B_{31} = -a_1 e_1^2 / 4\mu; \quad C_{34} = \mu / 2; \quad C_{42} = 1/4\mu a_1.$$

$$f_1(r) = \frac{1}{2\pi i r} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\sin(\pi p / 2)}{\cos \pi p} p \bar{P}(p) r^{-p} dp,$$

$$f_2(r) = \frac{1}{2\pi i r} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\cos(\pi p / 2)}{\cos \pi p} (p+1) \bar{P}(p) r^{-p} dp \quad (-1 < \operatorname{Re} c < 0),$$

$$f_3(r) = \frac{1}{4\mu\pi ir} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\cos(\pi p/2)}{\cos \pi p} (p-b_1) \bar{P}(p) r^{-p} dp,$$

$$f_4(r) = -\frac{1}{4\mu\pi ir} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\sin(\pi p/2)}{\cos \pi p} (p+\mu/c_1) \bar{P}(p) r^{-p} dp,$$

$$R_1(r, r_0) = \frac{\sqrt{rr_0}}{r_0+r}, \quad R_2(r, r_0) = \frac{2rr_0}{r_0^2-r^2} - \frac{\sqrt{rr_0}}{r_0-r}, \quad R_3(r, r_0) = \frac{2r^2}{r_0^2-r^2} - \frac{\sqrt{rr_0}}{r_0-r}$$

$$a_1 = \frac{\lambda+\mu}{(\lambda+2\mu)}, \quad b_1 = \frac{\mu}{(\lambda+2\mu)}, \quad c_1 = \frac{\mu(\lambda+\mu)}{(\lambda+2\mu)}, \quad d_1 = \frac{\lambda+3\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)}, \quad e_1 = \frac{\mu}{(\lambda+\mu)}$$

а λ и μ – коэффициенты Ламэ.

Далее, введём комплексные комбинации напряжений и смещений по формулам

$$\chi(r) = \sigma(r) - i\tau(r), \quad W'(r) = V'(r) + iU'(r)$$

Удовлетворяя условиям (1.1в), предварительно продифференцировав последние два из них и записав в комплексной форме, придём к следующей системе определяющих сингулярных интегральных уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} & \chi(r) + \frac{ib_1}{\pi} \int_0^a \frac{\chi(r_0) dr_0}{r_0-r} - \frac{2ic_1}{\pi} \int_0^a \frac{W'(r_0) dr_0}{r_0-r} + \int_0^a R_{11}(r, r_0) \chi(r_0) dr_0 + \\ & + \int_0^a R_{12}(r, r_0) W'(r_0) dr_0 + \int_0^a R_{13}(r, r_0) \bar{\chi}(r_0) dr_0 + \int_0^a R_{14}(r, r_0) \bar{W}'(r_0) dr_0 = Q_1(r) \\ & W'(r) + \frac{id_1}{\pi} \int_0^a \frac{\chi(r_0) dr_0}{r_0-r} + \frac{ib_1}{\pi} \int_0^a \frac{W'(r_0) dr_0}{r_0-r} + \int_0^a R_{21}(r, r_0) \chi(r_0) dr_0 + \\ & + \int_0^a R_{22}(r, r_0) W'(r_0) dr_0 + \int_0^a R_{23}(r, r_0) \bar{\chi}(r_0) dr_0 + \int_0^a R_{24}(r, r_0) \bar{W}'(r_0) dr_0 = Q_2(r) \end{aligned} \right. \quad (1.7)$$

Здесь

$$R_{11} = K_{11} + K_{22} - i(K_{21} - K_{11}), \quad R_{13} = K_{11} - K_{22} - i(K_{21} + K_{11})$$

$$R_{12} = K_{14} - K_{23} - i(K_{13} + K_{24}), \quad R_{14} = K_{14} + K_{23} + i(K_{13} - K_{24})$$

$$R_{21} = K_{32} - K_{41} - i(K_{31} + K_{42}), \quad R_{23} = -K_{32} - K_{41} - i(K_{31} - K_{42})$$

$$R_{22} = -K_{33} - K_{44} - i(K_{34} - K_{43}), \quad R_{24} = K_{33} - K_{44} - i(K_{34} + K_{43})$$

$$Q_1(r) = -2[f_1(r) + \sigma_0(r) - if_2(r)], \quad Q_2(r) = 2[f_4(r) + if_3(r)]$$

Систему (1.7) нужно рассматривать при условиях равновесия включения и непрерывности смещений в концевых точках включения:

$$\operatorname{Re} \int_0^a \chi(\xi) d\xi = -Q_0, \quad \chi(0) < \infty, \quad W(1) = 0,$$

$$\left(\int_0^a \sigma_0(\xi) d\xi = Q_0 \right) \quad (1.8)$$

2. Систему определяющих уравнений (1.7) при условиях (1.8) решим численно-аналитическим методом дискретных особенностей. С этой целью заметим, что ядра системы интегральных уравнений (1.7) – регулярные функции на интервале $(0, a)$, кроме, быть может, точки $r = r_0 = 0$. При этом, учитывая поведение интеграла типа Коши в концевых точках интервала интегрирования [3], нетрудно установить, что искомые функции в концевой точке

$r = 0$ ограничены, а в точке $r = a$ имеют особенность типа $(a-r)^{-3/4+i\beta}$ ($\beta = \ln(3-4\nu)/2\pi$).

Теперь, чтобы построить решение системы (1.7) методом дискретных особенностей [4], сформулируем её на интервале $(-1,1)$, вводя следующие безразмерные величины:

$$x = \frac{2r}{a} - 1, \quad s = \frac{2r_0}{a} - 1, \quad \varphi_1(x) = a\chi(a(x+1)/2)/P_0$$

$$\varphi_2(x) = W'(a(x+1)/2), \quad \varphi_3(x) = \bar{\varphi}_1(x), \quad \varphi_4(x) = \bar{\varphi}_2(x)$$

$$R_{m,n}^*(t, \xi) = \alpha_{m,n} R_{m,n}(a(t+1)/2, a(\xi+1)/2) \quad (m=1-2, n=1-4),$$

$$Q_1^*(t) = aQ_1(a(t+1)/2)/P_0, \quad Q_2^*(t) = Q_2(a(t+1)/2)$$

и обозначения

$$\alpha_{m,n} = a/2 \quad (m=1, n=1,3), \quad \alpha_{m,n} = a^2/2P_0 \quad (m=1; n=2,4)$$

$$\alpha_{m,n} = P_0/2 \quad (m=2; n=1,3), \quad \alpha_{m,n} = a/2 \quad (m=2; n=2,4)$$

где P_0 – равнодействующая нагрузок $P(r)$, а чёрточки над функциями $\varphi_j(x)$ ($j=1,2$) означают комплексно-сопряжённые величины этих функций. В итоге система уравнений (1.7) запишется в виде:

$$\varphi_m(x) + \sum_{n=1}^2 \frac{\delta_{nm}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_n(s) ds}{s-x} + \sum_{n=1}^4 \int_{-1}^1 R_{m,n}^*(x,s) \varphi_n(s) ds = Q_m^*(x) \quad (2.1)$$

$$(-1 < x < 1; m=1,2)$$

Здесь

$$\delta_{11} = \delta_{22} = ib_1, \quad \delta_{12} = -2aic_1/P_0, \quad \delta_{21} = id_1P_0/a$$

Условия (1.8) при этом можно записать в виде

$$\operatorname{Re} \int_{-1}^1 \varphi_1(\xi) d\xi = -Q_0^*, \quad \varphi_1(0) < \infty, \quad \varphi_2(1) = 0 \quad (Q_0^* = 2Q_0/P_0) \quad (2.2)$$

Используя условия (2.2), для определения приведённой разности смещений берегов трещины при помощи функций $\varphi_2(x)$ можем записать формулу

$$W^*(x) = - \int_x^1 \varphi_2(x) dx \quad (2.3)$$

а последнее соотношение (2.2) примет следующий вид:

$$\int_{-1}^1 \varphi_2(x) dx = w_0^* \quad (2.4)$$

$$(W^*(x) = 2W(a(x+1)/2)/a, \quad w_0^* = 2W(0)/a)$$

Приведём также формулу для определения безразмерных коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений, действующих на линии $\varphi = 0$:

$$K_I^*(1) - iK_{II}^*(1) = \frac{a(K_I(1) - iK_{II}(1))}{P_0} = \sqrt{2\pi} \lim_{x \rightarrow 1+0} (x-1)^{3/4-i\beta} (\sigma_\varphi^*(x) - i\tau_{r\varphi}^*(x)) \quad (2.5)$$

Здесь

$$\sigma_\varphi^*(x) - i\tau_{r\varphi}^*(x) = \frac{a(\sigma_\varphi(a(x+1)/2) - i\tau_{r\varphi}(a(x+1)/2))}{P_{(0)}} =$$

$$= \sum_{n=1}^2 \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\frac{\delta_{1n}}{s-x} + R_{1,n}^*(x,s) \right] \varphi_n(s) ds - Q_1'(x) \quad (2.6)$$

$$(Q_1'(x) = Q_1^*(x) + a\sigma_0(a(x+1)/2)/P_0, \quad (x > 1))$$

Представим искомые функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ в виде

$$\varphi_j(x) = \frac{\varphi_j^*(x)}{(1-x)^{3/4+i\beta}} \quad (j=1,2) \quad (2.7)$$

где $\varphi_i^*(x)$ ($i=1,2$) – непрерывные гладкие функции, ограниченные вплоть до концов интервала $(-1, 1)$. Тогда, используя формулы (2.5) и (2.6), из (2.5) для безразмерных коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений получим:

$$K_I^*(1) - iK_{II}^*(1) = - \frac{i\sqrt{2\pi}\mu [\varphi_1^*(1) - 2a(\lambda + \mu)\varphi_2^*(1)/P_0]}{2(\lambda + 2\mu)\sin\pi(3/4 + i\beta)}$$

Методом дискретных особенностей [4] проведён численный анализ поставленной задачи в случае, когда верхний берег конечной трещины свободен от напряжений, т.е. $\sigma_0(r) = 0$, а на берега полубесконечной трещины, на некотором расстоянии r_* от вершины трещины, действуют сосредоточенные нагрузки величины P_0 . Изучены закономерности изменения раскрытия трещины и коэффициента интенсивности разрушающих напряжений в концевой точке трещины в зависимости от расстояния сосредоточенной нагрузки от начала координат и коэффициента Пуассона материала плоскости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1968. 402с.
2. Акопян В.Н., Даштоян Л.Л., Акопян Л.В. О напряжённом состоянии упругой плоскости с полубесконечным разрезом, перпендикулярно выходящим на трещину конечной длины // В сб. трудов межд. школы-конференции «Механика - 2009», Ереван 2009. С. 118-124.
3. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511с.
4. Саакян А.В. Метод дискретных особенностей в применении к решению сингулярных интегральных уравнений с неподвижной особенностью. //Изв. НАН Армении. Механика. 2000. Т.53. № 3. С.12-19.

Сведения об авторах:

Акопян Ваграм Наслетникович – доктор физ.-мат. наук, директор Института механики НАН РА, тел.: (37410) 52-48-90, e-mail: vhakobyan@sci.am

Даштоян Лилит Леоновна – кандидат физ.-мат. наук, учёный секретарь Института механики НАН Армении, тел.: (37410) 56-81-89, e-mail: Lilit_Dashtoyan@mechins.sci.am

Акопян Лусине Ваграмовна – младший научный сотрудник Института механики НАН РА, тел.: (37410) 52-48-90

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ОРТОТРОПНЫХ ТОНКИХ БАЛОК

Алваджян Ш. И.

В данной работе развит асимптотический метод интегрирования микрополярной теории упругости для ортотропного материала в случае плоского напряжённого состояния в области тонкого прямоугольника, построена прикладная–одномерная теория микрополярных ортотропных упругих тонких балок и, по существу, обосновывается модель микрополярных ортотропных балок, построенная на основе метода гипотез.

Введение. Асимптотический метод изучения краевых задач классической теории упругости в тонких областях развиты в работах [1-4 и др.]. В микрополярной теории упругости асимптотический метод развит в работах [5-7]. В работах [8-10] прикладные теории микрополярных оболочек, пластин и балок построены на основе метода гипотез. В работе [11] показана, что построенная в работе [8] прикладная–одномерная теория микрополярных упругих изотропных тонких балок является асимптотически точной теорией.

1. Построение внутреннего итерационного процесса. Основные уравнения прикладной–одномерной модели микрополярных ортотропных тонких балок. Рассмотрим микрополярный ортотропный прямоугольник постоянной толщины $2h$ ($0 \leq x_1 \leq a$, $-h \leq x_2 \leq h$). Будем исходить из основных уравнений и граничных условий плоской задачи микрополярной теории упругости для ортотропного материала с независимыми полями перемещений и вращений, приведённые в работе [12]. Будем считать, что рассмотренная область прямоугольника тонкая, т.е. $\delta = \frac{h}{a} \ll 1$; δ – основной геометрический малый параметр задачи.

Придерживаясь основополагающего принципа асимптотического метода интегрирования сингулярно-вырождающихся систем дифференциальных уравнений в тонкой области, в основу рассуждений будем полагать свойство напряжённо-деформируемого состояния (НДС), испытывающего статическое воздействие, выражаемое структурной формулой:

$$(\text{НДС})_{\text{полн}} = (\text{НДС})_{\text{вн}} + (\text{НДС})_{\text{кр}}. \quad (1.1)$$

В этом равенстве краевое НДС прямоугольника возникает вблизи боковых граней прямоугольника ($x_1 = 0$, $x_1 = a$) и быстро (экспоненциально) затухает при удалении от них вглубь двумерной области прямоугольника. Что касается внутреннего НДС, то оно в каждом асимптотическом приближении будет описываться дифференциальными уравнениями меньшей размерности (в данном случае – обыкновенными дифференциальными уравнениями).

При определении внутреннего и краевого НДС в прямоугольнике большую роль играют значения физических констант (A_{11} , A_{12} , A_{22} , A_{77} , A_{78} , A_{88} , B_{66} , B_{44}) микрополярного ортотропного материала прямоугольника. С этой точки зрения введём следующие безразмерные физические параметры:

$$\begin{aligned} & \frac{A_{11}A_{22}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}, \quad \frac{A_{11}A_{12}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}, \quad \frac{A_{11}^2}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}, \quad \frac{A_{11}A_{88}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2}, \\ & \frac{A_{11}A_{78}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2}, \quad \frac{A_{11}A_{77}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2}, \quad \frac{A_{11}a^2}{B_{66}}, \quad \frac{A_{11}a^2}{B_{44}}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Забегая вперёд, отметим, что для выполнения в работе поставленной цели будем считать, что безразмерные физические параметры (1.2) – порядка единицы.

В уравнениях плоской задачи микрополярной теории упругости перейдем к безразмерной системе координат и к безразмерным величинам по формулам [5, 12]:

$$\xi = \frac{x_1}{a}, \quad \zeta = \frac{x_2}{h}, \quad (1.3)$$

$$\bar{u}_i = \frac{u_i}{a}, \quad \bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{A_{11}}, \quad \bar{\mu}_{i3} = \frac{\mu_{i3}}{aA_{11}}. \quad (1.4)$$

В итоге получим сингулярно-возмущённую с малым параметром δ краевую задачу, решение которой складывается из суммы решений внутренней задачи (прикладной–

одномерной теории) и погранслоиных задач (около боковых граней прямоугольника $x_1 = 0, x_1 = a$).

Решение внутренней задачи представим в виде асимптотического разложения

$$Q = \delta^{-q} \sum_{s=0}^S \delta^s Q^{(s)}, \quad (1.5)$$

где Q – любое из напряжений (силовых и моментных), перемещений и поворота; q – натуральное число, которое различно для различных величин и которое определяется из условия получения непротиворечивой рекуррентной системы уравнений в асимптотических приближениях.

При изучении задачи изгиба прямоугольника, в выражениях (1.5) для q будем иметь:

$$q = 0 \text{ для } \bar{\sigma}_{11}, \bar{\sigma}_{22}, \bar{u}_1, \bar{\mu}_{23}; \quad q = 1 \text{ для } \bar{\sigma}_{21}, \bar{\sigma}_{12}, \bar{u}_2, \bar{\mu}_{13}, \omega_3. \quad (1.6)$$

В результате, получим уравнения в асимптотических приближениях, в которых легко провести интегрирование по безразмерной поперечной координате ζ (отметим, что приближения с нечётными индексами s будем считать нулевыми.).

В исходном асимптотическом приближении (при $s = 0$) получим:

$$u_2^{-(0)} = u_2^{0(0)}(\xi), \quad \omega_3^{(0)} = \omega_3^{0(0)}(\xi), \quad u_1^{-0} = \zeta \psi_1^{(0)}(\xi), \quad (1.7)$$

$$\psi_1^{(0)} = -\omega_3^{0(0)}(\xi) - \frac{A_{11}A_{78}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \sigma_{12}^{0(0)}(\xi) + \frac{A_{11}A_{77}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \sigma_{21}^{0(0)}(\xi)$$

$$\sigma_{21}^{-(0)} = \sigma_{21}^{0(0)}(\xi), \quad (1.8)$$

$$\sigma_{12}^{-(0)} = \sigma_{12}^{0(0)}(\xi) = \frac{A_{77}A_{88} - A_{78}^2}{A_{88}A_{11}} \left[\frac{d u_2^{0(0)}(\xi)}{d\xi} - \omega_3^{0(0)}(\xi) \right] + \frac{A_{78}}{A_{88}} \sigma_{21}^{0(0)}(\xi), \quad (1.9)$$

$$\sigma_{11}^{-(0)} = \zeta \sigma_{11}^{1(0)}(\xi), \text{ где } \sigma_{11}^{1(0)}(\xi) = \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{11}A_{22}} \frac{d \psi_1^{(0)}(\xi)}{d\xi} + \frac{A_{12}}{A_{11}A_{22}} \frac{Y^+ + Y^-}{2},$$

$$\sigma_{22}^{-(0)} = -\zeta \frac{d \sigma_{12}^{0(0)}(\xi)}{d\xi} = \zeta \frac{Y^+ + Y^-}{2A_{11}},$$

$$\mu_{13}^{-(0)} = \mu_{13}^{0(0)}(\xi) = \frac{B_{66}}{a^2 A_{11}} \frac{d \omega_3^{0(0)}(\xi)}{d\xi}, \quad \mu_{23}^{-(0)} = \zeta \left[-\frac{d \mu_{13}^{0(0)}(\xi)}{d\xi} - \left(\sigma_{12}^{0(0)}(\xi) - \sigma_{21}^{0(0)}(\xi) \right) \right], \quad (1.10)$$

$$\sigma_{21} = A_{11} \delta^{-1} \left\{ \sigma_{21}^{0(0)}(\xi) + \delta^2 \left(\frac{1}{6} - \frac{\zeta^2}{2} \right) \frac{d \sigma_{11}^{1(0)}(\xi)}{d\xi} \right\}. \quad (1.11)$$

Отметим, что последняя формула написана в размерном виде.

По формуле (1.7) определяется кинематика деформации тонкого микрополярного прямоугольника (прогиб и свободный поворот не зависят от поперечной координаты ζ , а тангенциальное перемещение – линейная функция по ζ).

С целью приведения двумерной задачи микрополярной теории упругости к одномерной, что уже выполнено для перемещений, свободного поворота, деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений, в модели микрополярных ортотропных упругих балок вместо компонент тензоров силовых и моментных напряжений введём статически эквивалентные им интегральные характеристики: усилия N_{12}, N_{21} и моменты M_{11}, L_{13} , по формулам:

$$N_{12} = \int_{-h}^h \sigma_{12} dx_2, \quad N_{21} = \int_{-h}^h \sigma_{21} dx_2, \quad M_{11} = \int_{-h}^h \sigma_{11} x_2 dx_2, \quad L_{13} = \int_{-h}^h \mu_{13} dx_2.$$

Имея эти результаты, на основе формул (1.7)-(1.11) получим основные уравнения (одномерные) изгиба микрополярной ортотропной балки с независимыми полями перемещений и вращений:

уравнения равновесия

$$\frac{dN_{12}}{dx_1} = -(Y^+ + Y^-), \quad N_{21} - \frac{dM_{11}}{dx_1} = h(X^+ - X^-), \quad \frac{dL_{13}}{dx_1} + N_{12} - N_{21} = -(M^+ + M^-); \quad (1.12)$$

соотношения упругости

$$N_{12} = 2h[A_{77}\Gamma_{12} + A_{78}\Gamma_{21}], \quad N_{21} = 2h[A_{88}\Gamma_{21} + A_{78}\Gamma_{12}], \quad (1.13)$$

$$M_{11} = \frac{2h^3}{3} \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}} K_{11} + \frac{h^2}{3} \frac{A_{12}}{A_{22}} (Y^+ + Y^-), \quad L_{13} = 2B_{66}hk_{13};$$

геометрические соотношения

$$\Gamma_{12} = \frac{dw}{dx_1} - \Omega_3, \quad \Gamma_{21} = \psi_1 + \Omega_3, \quad K_{11} = \frac{d\psi_1}{dx_1}, \quad k_{13} = \frac{d\Omega_3}{dx_1}. \quad (1.14)$$

2. Построение погранслоя. Сращивание асимптотических разложений внутреннего итерационного процесса и погранслоя. Получение граничных условий прикладной – одномерной модели микрополярных ортотропных балок. Обратимся к изучению краевых упругих явлений несимметричной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений в тонком прямоугольнике. Краем прямоугольника, вблизи которого будем исследовать напряжённое состояние пограничного слоя, пусть будет сторона прямоугольника $x_1 = 0$.

Введём в уравнения плоской задачи несимметричной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений преобразования растяжения

$$t = \frac{x_1}{h}, \quad \zeta = \frac{x_2}{h} \quad (2.1)$$

и перейдём к безразмерным величинам по формулам (1.4).

Решение преобразованной таким образом системы отыщем в виде асимптотического разложения:

$$R = \sum_{s=0}^S \delta^{\chi R+s} \cdot R^{(s)}, \quad (2.2)$$

где R – любая из величин рассматриваемой задачи. Так как силовые и моментные неоднородные граничные условия, заданные на лицевых сторонах прямоугольника $\zeta = \pm 1$, были удовлетворены решением внутренней задачи, то решение (2.2) должно удовлетворять однородным граничным условиям:

$$\overline{\sigma}_{21} = \overline{\sigma}_{22} = 0, \quad \overline{\mu}_{23} = 0 \quad \text{при} \quad \zeta = \pm 1. \quad (2.3)$$

После подстановки (2.2) в преобразованную систему уравнений плоской задачи микрополярной теории упругости и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях малого параметра δ в правых и левых частях, начиная с наименьшей, получим непротиворечивую систему рекуррентных уравнений относительно величин $R^{(s)}$, если

$$\overline{\sigma}_{ij} = \delta^\chi \sum_{s=0}^S \delta^s \overline{\sigma}_{ij}^{(s)}, \quad \overline{u}_i = \delta^{\chi+1} \sum_{s=0}^S \delta^s \overline{u}_i^{(s)}, \quad \overline{\mu}_{i3} = \delta^\chi \sum_{s=0}^S \delta^s \overline{\mu}_{i3}^{(s)}, \quad \overline{\omega}_3 = \delta^{\chi+1} \sum_{s=0}^S \delta^s \overline{\omega}_3^{(s)}, \quad (i, j = 1, 2), \quad (2.4)$$

где целое число χ характеризует интенсивность пограничного слоя.

В результате получим уравнения погранслоя в асимптотических приближениях s (погранслоевая задача отлична от нуля при любом s).

Легко показать, что решение погранслоевой задачи в исходном асимптотическом приближении (при $s = 0$) обладает следующими свойствами:

$$\int_{-1}^1 \bar{\sigma}_{12}^{(0)}(t=0) d\zeta = 0, \quad \int_{-1}^1 \bar{\mu}_{13}^{(0)}(t=0) d\zeta = 0, \quad \int_{-1}^1 \bar{\omega}_3^{(0)}(t=0) d\zeta = 0, \quad (2.5)$$

$$\int_{-1}^1 \zeta \bar{\sigma}_{11}^{(0)}(t=0) d\zeta + \frac{A_{77}A_{88} - A_{78}^2}{A_{78}A_{11}} \int_{-1}^1 \bar{u}_2^{(0)}(t=0) d\zeta = 0. \quad (2.6)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\partial \bar{u}_1^{(0)}}{\partial \zeta}(t=0) d\zeta = 0, \quad \int_{-1}^1 \frac{\partial \bar{u}_2^{(0)}}{\partial t}(t=0) d\zeta = 0. \quad (2.7)$$

Легко показать, что равенство (2.6) имеет место также при $s = 1$:

$$\int_{-1}^1 \zeta \bar{\sigma}_{11}^{(1)}(t=0) d\zeta + \frac{A_{77}A_{88} - A_{78}^2}{A_{78}A_{11}} \int_{-1}^1 \bar{u}_2^{(1)}(t=0) d\zeta = 0. \quad (2.8)$$

Так как равенства (2.6), (2.8) должны иметь место для любого материала, следовательно, из этих равенств будут следовать следующие отдельные равенства:

$$\int_{-1}^1 \zeta \bar{\sigma}_{11}^{(i)}(t=0) d\zeta = 0, \quad \int_{-1}^1 \bar{u}_2^{(i)}(t=0) d\zeta, \quad i = 0, 1; \quad (2.9)$$

Таким образом, построены два типа решений: решение внутренней задачи и решение для пограничной задачи. Их сумма

$$I = Q + R_p^{(1)} + R_p^{(2)} \quad (2.10)$$

является решением исходной сингулярно-возмущённой краевой задачи несимметричной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений в тонкой прямоугольной области. Здесь Q – решение внутренней задачи, $R_p^{(1)}, R_p^{(2)}$ – решения задач пограничных слоёв, построенные соответственно вблизи торцов $x_1 = 0$ и $x_1 = a$.

Рассматривая задачу сращивания внутреннего и погранслоного решения, используя условия сшивания (2.5), (2.7) и (2.9), получим граничные условия прикладной–одномерной модели микрополярных ортотропных упругих тонких балок:

а) в случае нагружённого края ($x_1 = 0$)

$$N_{12}|_{x_1=0} = \int_{-h}^h \varphi_2(x_2) dx_2, \quad L_{13}|_{x_1=0} = \int_{-h}^h \varphi_3(x_2) dx_2, \quad M_{11}|_{x_1=0} = \int_{-h}^h x_2 \varphi_1(x_2) dx_2, \quad (2.11)$$

б) в случае шарнирного опирания ($x_1 = 0$)

$$M_{11} = \int_{-h}^h x_2 \varphi_1(x_2) dx_2, \quad w = 0, \quad L_{13} = \int_{-h}^h \varphi_3(x_2) dx_2, \quad (2.12)$$

в) в случае жёсткого защемления ($x_1 = 0$)

$$\psi_1 = 0, \quad w = 0, \quad \Omega_3 = 0. \quad (2.13)$$

Таким образом, асимптотическим методом построена прикладная–одномерная модель микрополярных упругих ортотропных тонких балок: это уравнения равновесия (1.12), соотношения упругости (1.13), геометрические соотношения (1.14) и граничные условия (2.11) (либо (2.12), либо (2.13)).

3. Сравнение моделей прикладной–одномерной теории изгиба микрополярных ортотропных упругих тонких балок, построенных на основе метода гипотез и на основе асимптотического метода. В работе [12] при построении прикладной модели микрополярных упругих ортотропных тонких балок принята кинематическая гипотеза, которая полностью совпадает с кинематикой (1.7), полученной на основе асимптотического метода. Будем сравнивать основные уравнения и граничные условия прикладной–одномерной теории микрополярных ортотропных упругих тонких балок ((1.12)-(1.14), (2.11)-(2.13)) с основными уравнениями и граничными условиями той же теории, построенной на основе метода гипотез [12]. Как убедимся, разница лишь в выражении момента M_{11} . Речь идет о величине

$\frac{h^2}{3} \frac{A_{12}}{A_{22}} (Y^+ + Y^-)$, которая присутствует в формуле (1.13) и которая отсутствует в аналогичной

формуле работы [12]. Это результат того, что в формуле обобщённого закона Гука для величин ε_{11} по асимптотическому методу силовое напряжение σ_{22} не пренебрегается относительно силового напряжения σ_{11} , но по методу гипотез, как в классической теории, такое пренебрежение оправдано, что и сделано в работе [12]. Отметим, что численные результаты тоже подтверждают это пренебрежение.

Таким образом, можем констатировать, что построенная прикладная–одномерная модель микрополярных ортотропных упругих тонких балок, построенная в работе [12], представляет собой асимптотически точную модель.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ворович И.И. Некоторые результаты и проблемы асимптотической теории пластин и оболочек // В сб.: «Материалы I Всесоюзн. школы по теории и численным методам расчёта оболочек и пластин». Тбилиси: Изд-во Тбилисск. ун-та, 1975. С. 51-149.
2. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука. 1976. 510с.
3. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М: Наука, 1997. 414с.
4. Саркисян С.О. Общая двумерная теория магнитоупругости тонких оболочек. Ереван: Изд-во АН Армении, 1992. 232с.
5. Саркисян С.О. Прикладные одномерные теории балок на основе несимметричной теории упругости // Физическая мезомеханика. 2008. Т.11. №5. С. 41-54.
6. Саркисян С.О. Краевые задачи тонких пластин в несимметричной теории упругости // Прикладная математика и механика. 2008. Т.72. Вып.1. С.129-147.
7. Саркисян С.О. Теория микрополярных упругих тонких оболочек // Прикладная математика и механика. 2012. Т.76. Вып.2. С.325-343.
8. Sargsyan S.H. Effective Manifestations of Characteristics of Strength and Rigidity of Micropolar Elastic Thin Bars // Journal of Materials Science and Engineering. 2012. Vol.2. №1. P.98-108.
9. Саркисян С.О. Математическая модель микрополярных упругих тонких пластин и особенности их прочностных и жесткостных характеристик. // Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т.53. Вып.2. С.148-156.
10. Sargsyan S.H. Mathematical Models of Micropolar Elastic Thin Shells// Advanced Structured Materials. Shell-like Structures. Non-classical Theories and Applications. Springer. 2011. Vol. 15. P.91-100.
11. Саркисян С.О. Построение математической модели микрополярных упругих тонких балок асимптотическим методом. // Изв. высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2012 (в печати).
12. Алваджян Ш.И., Саркисян С.О. Прикладные модели статической деформации анизотропных микрополярных упругих тонких балок // Изв. НАН Армении. Механика. 2011. Т.64. № 4. С.39-62.

Сведения об авторе:

Алваджян Шушаник Искандаровна,

Аспирант Гюмрийского государственного педагогического института им. М. Налбандяна, Тел.:377526, г.Гюмри, ул. Паруйра Севака, д.4, **E-mail:** alvajyanshushan@mail.ru

СТАЦИОНАРНАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЯЗКОУПРУГОГО ЦИЛИНДРА

Александров В.М., Марк А. В.

Рассмотрена контактная задача о взаимодействии жёсткого банджа и вкладыша с границей вязкоупругого цилиндра. Предполагается, что бандаж движется с постоянной скоростью по указанной границе. Трением в области контакта пренебрегаем. На первом этапе определяется перемещение границы цилиндра от приложенной к ней нормальной нагрузки. Затем на втором этапе выводится интегральное уравнение собственно контактной задачи для определения контактного давления. На третьем этапе строится приближённое решение указанного интегрального уравнения модифицированным методом Мультиппа-Каландии. Приведены графики распределения контактного давления.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о движении жёсткого банджа с постоянной скоростью по границе бесконечного вязкоупругого цилиндра радиуса R . Будем считать, что бандаж имеет осесимметричное основание, тогда задача будет также осесимметричной. Процесс считаем стационарным, поэтому напряжения σ_{rr} , $\sigma_{\varphi\varphi}$, σ_{zz} , σ_{rz} , деформации ε_{rr} , $\varepsilon_{\varphi\varphi}$, ε_{zz} , ε_{rz} и перемещения u_r и u_z можно представить в форме $f(z + Vt)$. Ось Z совпадает с осью цилиндра.

Будем считать, что материал полуплоскости описывается моделью Кельвина [1]:

$$\sigma_{rr} = \frac{2G_*V}{1-2\nu}\theta + 2G_*\varepsilon_{rr}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{2G_*V}{1-2\nu}\theta + 2G_*\varepsilon_{\varphi\varphi}, \quad \sigma_{zz} = \frac{2G_*V}{1-2\nu}\theta + 2G_*\varepsilon_{zz}, \quad \sigma_{rz} = G_*\varepsilon_{rz} \quad (1.1)$$

$$G_*f(t) = G_f(f(t) - (\alpha^{-1} - \lambda^{-1}) \int_{-\infty}^t f(\tau) \exp[-(t-\tau)/\alpha] d\tau)$$

где λ , α – характерные времена ползучести и релаксации, G_f – мгновенный модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона. Уравнения равновесия и геометрические соотношения имеют стандартный вид. Граничные условия в движущейся со штампом системе координат имеют вид (как принято в линейной теории упругости, граничные условия снесены на недеформированную поверхность тела):

$$\begin{aligned} u_r(z, R) &= -\delta(z)(z \leq a) \\ \sigma_{rr}(z, R) &= 0(z > a), \\ \sigma_{rz} &= 0(-\infty < z < \infty) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Кроме того, компоненты напряжения стремятся к нулю при $z \rightarrow \infty$. Здесь a – полудлина области контакта.

Требуется определить распределение контактного давления под штампом $\sigma_{rr}(z, 0) = -q(z)$.

Данная задача является смешанной и поэтому сначала необходимо решить вспомогательную задачу о нахождении зависимости радиального перемещения границы цилиндра от действующей на неё нормальной нагрузки [2].

2. Решение вспомогательной задачи. Вспомогательная задача имеет граничное условие

$$\sigma_{rr}(z, R) = q(z)(z \leq a),$$

а также второе и третье условия (1.2). Решается данная задача с помощью принципа Вольтерра, т.е. вязкоупругий оператор в уравнении (1.1) считается постоянным, и получаются обычные уравнения теории упругости. Затем, после получения решения уравнений упругой задачи операторы расширяются по известным правилам.

Перейдём в подвижную систему координат, движущуюся вместе с бандажом, в ней перемещения, напряжения деформации в цилиндре не будут зависеть от времени. Решать упругую задачу будем с использованием преобразования Фурье по координате Z :

$$u_r(r, z) = \int_{-\infty}^{\infty} U_r(\alpha, r) e^{i\alpha z} d\alpha, \quad u_z(r, z) = \int_{-\infty}^{\infty} U_z(\alpha, r) e^{i\alpha z} d\alpha, \quad q(R, z) = \int_{-\infty}^{\infty} U_z(\alpha, r) e^{i\alpha z} d\alpha$$

В этом случае будем иметь следующую зависимость радиального перемещения границы цилиндра от приложенной к ней нормальной нагрузки в случае упругой задачи в системе координат, движущуюся вместе с бандажом:

$$u_r(R, z) = -\frac{1-\nu}{\pi G} \int_{-a}^a q(\zeta) K\left(\frac{\zeta-z}{R}\right) d\zeta, \quad K(w) = \int_0^{\infty} \frac{L(s)}{s} \cos(sw) ds \quad (2.1)$$

$$L(s) = \frac{s}{(\omega(s)^2 - 1)s^2 - 2(1-\nu)}$$

причём, $\omega(s) = I_0(s)/I_1(s)$, где $I_0(s)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Затем вспомнив, что $1/G$ – оператор и расшифровав его, будем иметь зависимость нормального перемещения границы цилиндра от приложенной нагрузки

$$u_r(R, z) = -\frac{1-\nu}{\pi G_f} \int_{-a}^a q(\zeta) \left[K\left(\frac{\zeta-z}{R}\right) + k\lambda \int_{-\infty}^0 \exp(\tau/\lambda) K\left(\frac{\zeta-z-V\tau}{R}\right) d\tau \right] d\zeta \quad k = \alpha^{-1} - \lambda^{-1} \quad (2.2)$$

3. Вывод и решение интегрального уравнения. Перейдём теперь к контактной задаче. В ней $u_r(R, z)$ известно и равно $-\delta(z)$, а неизвестно контактное давление $q(z)$.

Обезразмерим интегральное уравнение (2.2), введя следующие обозначения:

$$z' = \frac{z}{a}, \quad \zeta' = \frac{\zeta}{a}, \quad \varepsilon = \frac{R}{a}, \quad \tau' = \frac{\tau}{\lambda}, \quad \mu = \frac{\lambda V}{a}, \quad g(z) = \frac{\delta(z)}{a}, \quad \varphi(z) = \frac{q(z)(1-\nu)}{G_f}$$

интегральное уравнение после преобразования будет выглядеть следующим образом:

$$\int_{-1}^1 \varphi(\zeta) M(\zeta - z) d\zeta = \pi g(z) \quad (3.1)$$

$$M(w) = -\ln|w/\varepsilon| + F_1(w/\varepsilon) + k\lambda(F_2(w/\varepsilon) + F_3(w/\varepsilon) + E(w/\mu))$$

где

$$F_1\left(\frac{w}{\varepsilon}\right) = -\int_0^{\infty} \frac{(1-L(s)) \cos(sw/\varepsilon) - e^{-s}}{s} ds$$

$$F_2\left(\frac{w}{\varepsilon}\right) = \varepsilon^2 \int_0^{\infty} \frac{L(s) \cos(ws/\varepsilon)}{s(\varepsilon^2 + \mu s^2)} ds \quad F_3\left(\frac{w}{\varepsilon}\right) = \varepsilon \mu \int_0^{\infty} \frac{1-L(s)}{\varepsilon^2 + \mu s^2} \sin(ws/\varepsilon) ds$$

$$E\left(\frac{w}{\mu}\right) = -\frac{1}{2} (\exp(-w/\mu) \text{Ei}(w/\mu) - \exp(w/\mu) \text{Ei}(-w/\mu))$$

Ядро интегрального уравнения (2.3) имеет при $w=0$ логарифмическую особенность, функции $F_1(w/\varepsilon)$, $F_2(w/\varepsilon)$, $F_3(w/\varepsilon)$, $E(w/\mu)$ непрерывны. Здесь и далее штрихи опущены.

Решение интегрального уравнения (2.3) имеет следующую структуру:

$$\varphi(z) = \Phi(z)(1-z^2)^{-1/2}, \quad \Phi(z) \in C_0(-1, 1),$$

если $g(z)$, по крайней мере, непрерывно дифференцируема.

Рассмотрим два случая: штамп с острыми и гладкими краями. В первом случае бандаж считаем плоским, т.е.:

$$g(z) \equiv g$$

и область контакта известна. Во втором случае бандаж имеет параболическую подошву:

$$g(z) \equiv g - \frac{(z-c)^2}{2\rho}$$

и область контакта неизвестна, подлежит определению. Здесь $g = \delta/a$, где δ – величина, связанная с внедрением бандажа в вязкоупругий цилиндр, $c = b/a$, где b – величина, связанная со смещением области контакта в сторону движения, $\rho = R_b/a$, где R_b – радиус кривизны бандажа. В случае бандажа с гладкими краями давление на концах отрезка контакта равно нулю, т.е. $q(\pm a) = 0$ или $\varphi(\pm 1) = 0$. В этом случае параметры ε , μ , g , ρ неизвестны и выражаются через два параметра, для определения которых служат условия $\varphi(\pm 1) = 0$.

Решать интегральное уравнение будем методом Мультиппа-Каландии [3]. Перейдём к новым переменным по формулам $z = \cos \vartheta$, $\zeta = \cos \psi$ и запишем уравнение (3.1) в форме

$$\int_0^\pi \tilde{\Phi}(\psi) \ln \left| \frac{\cos \psi - \cos \vartheta}{\varepsilon} \right| d\psi = \pi g(\vartheta) - \int_0^\pi \tilde{\Phi}(\psi) F(\cos \psi - \cos \vartheta) d\psi, \quad \vartheta \in [0, \pi]$$

Интерполяционный полином Лагранжа имеет вид

$$\tilde{\Phi}(\vartheta) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \tilde{\Phi}(\theta_n) \left(1 + 2 \sum_{m=1}^{N-1} \cos m \theta_n \cos m \vartheta \right), \quad \tilde{\Phi}(\vartheta) \equiv \Phi(\cos(\vartheta))$$

по узлам

$$z_n = \cos \theta_n; \quad \theta_n = \pi(2n-1)/2N \quad (n=1, 2..N)$$

являются нулями полинома Чебышева.

Подставим интерполяционный полином в последнее уравнение и, воспользовавшись соотношением

$$-\int_0^\pi \cos s \psi \ln \left| \frac{\cos \psi - \cos \vartheta}{\varepsilon} \right| d\psi = \begin{cases} \pi \ln(2\varepsilon), & s = 0 \\ \pi s^{-1} \cos s \vartheta, & s \neq 0 \end{cases}$$

и квадратурной формулой Гаусса

$$\int_0^\pi \chi(\psi) d\psi = \frac{\pi}{N} \sum_{n=1}^N \chi(\vartheta_n)$$

перепишем уравнение (3.4) в виде

$$\sum_{n=1}^N \tilde{\Phi}(\theta_n) \left[\ln(2\varepsilon) + 2 \sum_{m=1}^{N-1} \frac{\cos m \theta_n \cos m \vartheta}{m} \right] = N g(\vartheta) - \sum_{n=1}^N \tilde{\Phi}(\theta_n) F(\cos \theta_n - \cos \vartheta)$$

Применим метод коллокации, т.е. приняв $\vartheta = \theta_k$, получим систему линейных алгебраических уравнений для определения $\tilde{\Phi}(\theta_n)$:

$$\sum_{n=1}^N \tilde{\Phi}(\theta_n) \left[\ln(2\varepsilon) + 2 \sum_{m=1}^{N-1} \frac{\cos m \theta_n \cos m \theta_k}{m} + F(\cos \theta_n - \cos \theta_k) \right] = N g(\vartheta_k), \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

4. Примеры. Приведём графики распределения контактного давления на поверхности цилиндра в случае бандажа с острыми краями (рис. 1) и в случае бандажа с гладкими краями (рис. 2).

Кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям скоростей V , $3V/2$, $2V$ в случае бандажа с острыми краями, а в случае бандажа с гладкими краями – V , $4V/3$, $5V/3$.
В обоих случаях штамп движется справа налево.

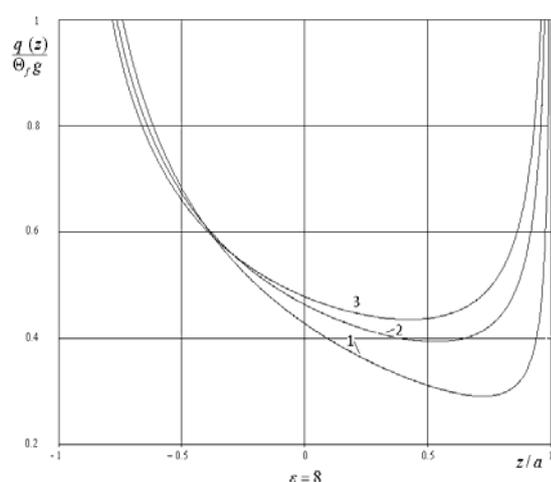


Рис.1

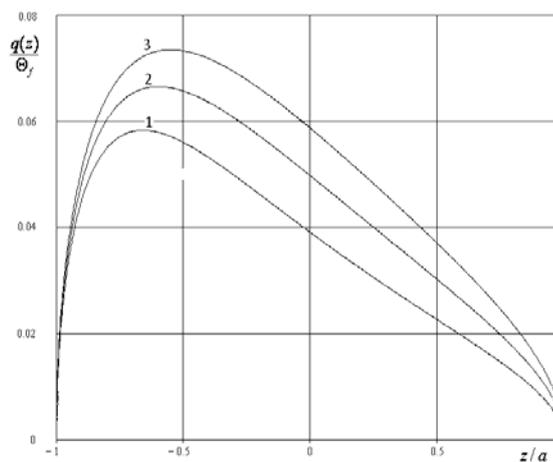


Рис.2

Из графиков видно, что при увеличении скорости движения бандажа значения контактных давлений возрастают.

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 384с.
2. Александров В.М., Коваленко Е.В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 335с.
3. Александров В.М., Ромалис Б.Л. Контактные задачи в машиностроении. М.: Машиностроение, 1986. 173с.

Сведения об авторах:

Александров Виктор Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор, Государственное бюджетное Учреждение Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, (495) 434-21-59

Марк Александр Викторович – кандидат физ.-мат. наук, Государственное бюджетное Учреждение Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, (495) 434-21-59

E-mail: alexand@ipmnet.ru, A-V-Mark@yandex.ru

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ – ОТ КЛАССИЧЕСКИХ ДО НЕКОТОРЫХ СОВРЕМЕННЫХ МОДЕЛЕЙ

Альтенбах Х.

Вопросы ползучести изучают с конца 19-го века. Первые теории были разработаны в 20-х и 30-х годах прошлого века. С этого момента теорию ползучести широко применяют в расчётной практике, когда, например, машиностроительные конструкции целиком или их элементы эксплуатируют при умеренных нагрузках (ниже предела текучести), но при повышенных температурах, примерно 0,3 - 0,4 от температуры плавления (в кельвинах) данного материала.

В последние 70 лет в этой области, в основном, исследуются вопросы формулировки определяющих соотношений. Большой вклад в развитие теории внесли ученые бывшего Советского Союза, в том числе, Ю.Н. Работнов, Н.Н. Малинин, Л.М. Качанов, Н.Х. Арутюнян и Р.А. Арутюнян. В результате их работ были предложены разные варианты уравнения состояния, которые и по структуре, так и по содержанию существенно отличаются.

В докладе обсуждаются некоторые классические и современные формулировки определяющих уравнений. Решения на их основе позволяют более детально оценить сроки службы конструкций.

1. Механика является одной из древних наук. Её понимают по-разному, в том числе, как "упражнение" для математиков или как раздел физики. На самом деле, до начала 19-ого века механика являлась некоторой математической теорией с приложениями. В 19-м веке отделилась, так называемая, техническая или инженерная механика. В рамках её решались практические проблемы. Так как соответствующие теории были незавершёнными, появлялись различные подразделы механики. К ним относятся:

- теория упругости,
- теория пластичности,
- теория ползучести и т.д.

Все перечисленные варианты сейчас можно объединить в рамках механики твёрдого деформируемого тела, а если принять аксиоматическую структуру, то эти разделы относятся к механике сплошных сред. Здесь, в дальнейшем, мы уделим внимание теории ползучести.

Для решения практических проблем в рамках теории ползучести, следует рассмотреть следующие задачи:

- формулировка геометрических соотношений, например, связь между деформациями и перемещениями;
- формулировка уравнений равновесия или динамики;
- формулировка определяющих уравнений.

Если к этому добавить граничные и начальные условия, то можно получить решения практических проблем, как правило, аналитически, полуаналитически или численно. Последний метод решения преобладает в реальных ситуациях, причём, метод конечных элементов, в настоящее время, стоит на первом месте среди множества численных методов.

Несмотря на существующие программные пакеты, которые содержат многочисленные варианты определяющих уравнений, до сих пор создание новых определяющих соотношений является важнейшей проблемой. Ниже будут обсуждены некоторые классические уравнения, а также новые подходы в обсуждаемой области.

2. Исторический обзор работ по теории ползучести дан в [1-2]. Первые систематические исследования были собраны в [3]. До сих пор на практике для описания установившейся ползучести преобладает закон Нортона, который был предложен в 1929 г. В теории упругости аналогичный закон Гука содержит только один параметр, модуль Юнга, который является определяющим для данного материала. В свою очередь, в законе Нортона таких параметров два. Закон Нортона был применён, в частности, к проблемам энергомашиностроения. Основным недостатком закона Нортона является его одноосность.

В скором времени закон Нортона удалось обобщить. Например, Одквист в 30-х годах прошлого столетия предложил трёхмерные уравнения на базе инвариантов тензора напряжений. Тензорные уравнения, в свою очередь, впервые были предложены Прагером (1945) и Рейнером (1945). Таким образом, стало возможным учесть и анизотропию материала. Однако, в связи с несоответствиями экспериментальных наблюдений и аналитических

расчётов, были предложены и другие варианты, например, Надаи (1938) или Сёдербергом (1938).

Хофф (1954, 1958) рассматривал задачи устойчивости в рамках теории ползучести и, тем самым, ввёл элементы геометрически нелинейной теории. Альтернативный подход в теории ползучести для описания вязкоупругого поведения пластмасс был предложен Работновым (1948), который базировался на использовании интегральных определяющих соотношений вместо дифференциальных.

Проблемы теории ползучести регулярно обсуждаются в рамках симпозиумов ИЮТАМа (1960 - Stanford, USA/ Стэнфорд, США [4], 1970 - Göteborg, Sweden/ Гётеборг, Швеция [5], 1980 - Leicester, UK/ Лестер, Великобритания [6], 1990 - Kraków, Poland/ Краков, Польша [7], 2000 - Nagoya, Japan/ Нагойя, Япония [8], 2012 - Paris, France/ Париж, Франция). Помимо этого, были организованы специальные конференции [9-11]. О состоянии исследований в области ползучести материалов можно найти дополнительные сведения в [1, 12-23].

Из всего вышеперечисленного можно сделать вывод, что исследования в области ползучести являются до сих пор актуальной тематикой, так как:

- теория не является завершённой на данном этапе развития науки;
- теория пока не может быть сформулирована в рамках аксиоматической механики сплошных сред;
- возникают новые практические проблемы, например, циклические режимы, увеличение уровня температурных нагрузок и т.д.

3. Определяющие уравнения в механике деформируемого твёрдого тела можно сформулировать в рамках:

- дедуктивного подхода,
- индуктивного подхода и
- метода реологических моделей.

Первый подход – от общего к частному, является главным элементом в механике сплошных сред. Сначала создают математическую структуру для определяющих уравнений в пределах, которые заданы определяющими аксиомами. После этого проверяют общие уравнения на соответствие с термодинамическими требованиями. Специальные случаи, в рамках этого подхода, не нуждаются в дополнительной проверке. Тем самым, остается только сопоставление с экспериментом (идентификация).

Индуктивный подход – от частного к общему, исходит от экспериментальных наблюдений. На базе их формируются простейшие законы. Типичная цепочка обобщения: одномерное уравнение (изотропный случай) – трёхмерное уравнение (изотропный случай) – трёхмерное уравнение (анизотропный случай) и т.д. Следует отметить, что на каждом этапе обобщения необходимо заново проверять как математическую структуру, так и термодинамическое соответствие.

Метод реологических моделей объединяет элементы дедуктивного и индуктивного подхода. С его помощью можно аппроксимировать экспериментальные кривые. Следует отметить, что нельзя дать ясную интерпретацию параметрам, число которых сильно возрастает.

Теория ползучести связана с основными решениями инженерных проблем. Из-за этого определяющие уравнения строят в рамках индуктивного подхода, а также, применяя метод реологических моделей. Важной задачей для будущих исследований является формулировка теории ползучести в соответствии с механикой сплошных сред. Далее будут обсуждены некоторые определяющие уравнения, которые применяются в инженерной практике.

При инженерном подходе базисным элементом является то, что ползучесть можно разбить на три стадии:

- первая стадия, стадия в которой преобладают процессы упрочнения;
- вторая стадия, стадия установившейся ползучести (вторичная стадия), где в равновесном состоянии появляются процессы разупрочнения (например, повреждаемость) и упрочнение;
- третья стадия, стадия при которой доминантными являются процессы разупрочнения.

Приведённые выше три стадии можно обнаружить в экспериментальных наблюдениях, но насколько они заметны, зависит от конкретных условий проведения эксперимента, а также от используемого материала. Обычно вторая стадия по времени длится гораздо дольше, чем первая и третья. Но на практике встречаются и материалы, где нет установившейся ползучести. Следует отметить, что все три стадии согласуются с микроструктурными явлениями, но, в большинстве случаев, строят чисто феноменологические модели определяющих уравнений.

4. Простейший подход при создании определяющих уравнений – следующий. Сначала рассматривают установившуюся ползучесть, т.е. когда скорость деформации является постоянной. Так как в этом случае скорость деформации является минимальной, то рассматривают сначала закон в виде:

$$\dot{\varepsilon}_{\min} = f(\sigma, T) \quad (1)$$

здесь $\dot{\varepsilon}_{\min}$ – минимальная скорость деформации ползучести, σ – напряжение, а T – температура. Обычно исследуют влияние температуры так, что принимают изотермические процессы ($T = \text{const}$) или описывают влияние температуры с помощью закона Аррениуса [24].

Исторически, первой аппроксимацией уравнения (1) был закон Нортон:

$$\dot{\varepsilon} = A\sigma^n,$$

который содержит два параметра (A, n), подлежащие экспериментальной идентификации. Показано, что и другие предложения для аппроксимации закона (1) дают удовлетворительное, а иногда и лучшее совпадение с экспериментальными данными [25]. К таким аппроксимациям относится и закон в виде гиперболического синуса.

Первую и третью стадии ползучести можно описать следующим образом. Учитывая процессы упрочнения, повреждения и т.д., можно ввести некоторые внутренние переменные. Тогда закон (1) принимает вид:

$$\dot{\varepsilon} = f(\sigma, H, \omega, T) \quad (2)$$

с дополнительным начальным условием:

$$\varepsilon_{t=0}^{cr} = 0.$$

В этом случае H, ω являются внутренними переменными (здесь H описывает упрочнение материала, а ω – повреждаемость). Следует отметить, что в (2) можно ввести больше внутренних переменных, если в материале могут происходить различные процессы, связанные с разными механизмами [26]. В любом случае, для каждой внутренней переменной следует ввести эволюционные уравнения. При рассмотрении уравнения (2) такими уравнениями являются следующие:

$$\dot{H} = g(\sigma, H, \omega, T),$$

$$\dot{\omega} = h(\sigma, H, \omega, T)$$

с начальными условиями:

$$H_{t=0} = 0, \quad \omega_{t=0} = 0.$$

Переход от одномерных к трёхмерным уравнениям не тривиален. Причиной этого является необходимость согласования одномерных экспериментальных наблюдений с трёхмерными уравнениями. Такое сопоставление возможно на основе гипотезы об эквивалентности [27].

К сожалению, не существует физический принцип, который позволяет однозначно сформулировать выражения для эквивалентного напряжения или деформации. Из-за этого, чаще всего, вводят эквивалентность по фон Мизесу. Данная аппроксимация соответствует некоторым предположениям, например, в соответствии со второй аксиомой реологии (за неупругое поведение материала отвечают только девиаторные составляющие) эквивалентность

по фон Мизесу является корректной. Но легко убедиться, что в случае разносопротивляющегося материала любая квадратичная форма не может корректно описать поведение материала. Примеры других уравнений для эквивалентного напряжения приведены в [27–30].

ЛИТЕРАТУРА

1. Odqvist, F.K.G.; Hult, J. Kriechfestigkeit metalischer Werkstoffe. – Springer: Berlin u.a., 1962
2. Odqvist, F.K.G. Historical survey of the development of creep mechanics from its beginnings in the last century to 1970. – In: Creep in Structures (Eds A.R.S. Ponter & D.R. Hayhurst), Springer, 1981. – pp. 1-12
3. da C. Andrade, E.N. On the viscous flow of metals, and allied phenomena. – In: Proc. R. Soc. Lond. A LXXXIV (1910). – pp. 1-12
4. Hoff, N.J. (Ed.) Creep in Structures, Springer: Berlin, 1962
5. Hult, J. (Ed.) Creep in Structures, Springer: Berlin, 1972
6. Ponter, A.R.S.; Hayhurst, D.R. (Eds) Creep in Structures, Springer: Berlin, 1981
7. Zyczkowski, M. (Ed.) Creep in Structures, Springer: Berlin u.a., 1991
8. Murakami, S.; Ohno, N. (Eds) IUTAM Symposium on Creep in Structures, Kluwer, Dordrecht, 2001
9. Altenbach, H.; Skrzypek, J.J. (Eds) Creep and Damage in Materials and Structures. CISM Courses and Lectures No. 399, Springer, Wien, New York, 1999
10. Skrzypek, J.J.; Ganczarski, A. (Eds) Anisotropic Behaviour of Damaged Materials, Springer, Berlin, 2003
11. Ohno, N.; Uehara, T. (Eds) Engineering Plasticity and Its Applications from Nanoscale to Macroscale, Stafa-Zürich, Trans Tech Publications Ltd., 2007
12. Hult, J.A. Creep in Engineering Structures, Blaisdell Publishing Company, Waltham, 1966
13. Rabotnov, Yu. N. Creep Problems in Structural Members, North-Holland, Amsterdam, 1969
14. Penny, R.K.; Mariott D.L. Design for Creep, Chapman & Hall, London, 1995
15. Kraus, H. Creep Analysis, Wiley & Sons, New York, 1980
16. Малинин Н.Н. Расчёты на ползучесть элементов машиностроительных конструкций. М.: Машиностроение, 1981.
17. Boyle, J.T.; Spence, J. Stress Analysis for Creep, Butterworth, London, 1983
18. Lemaitre, J.; Chaboche, J.-L. Mechanics of Solid Materials, Cambridge University Press, Cambridge, 1990
19. Skrzypek, J.J., Plasticity and Creep, CRC Press, Boca Raton, 1993
20. Skrzypek, J.J.; Gancarski, A. Modelling of Material Damage and Failure of Structures, Springer, Berlin, 1998 (Foundation of Engineering Mechanics)
21. Altenbach, H. : Creep analysis of thin-walled structures. - In: Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik 82(2002)8. - pp. 507 - 533
22. Betten, J. Creep Mechanics, Springer, Berlin, 2005
23. Naumenko, K.; Altenbach, H. Modeling of Creep for Structural Analysis, Springer, Berlin, 2007 (Foundations of Engineering Mechanics)
24. Gorash, Y.; Altenbach, H.; Lvov, G.: Modelling of high-temperature inelastic behavior of the austenitic steel AISI type 316 using CDM approach. - J Strain Analysis and Eng Des 47(2012)4. - pp. 229-243
25. Altenbach, H.; Gorash, Y.; Naumenko, K.: Steady-state creep of a pressurized thick cylinder in both the linear and the power law ranges. - In: Acta Mechanica 195(2008)1-4. - pp. 263 – 274
26. Naumenko, K.; Altenbach, H.; Kutschke, A.: A Combined Model for Hardening, Softening, and Damage Processes in Advanced Heat Resistant Steels at Elevated Temperature. - In: Int. J. Damage Mechanics (2010)
27. Altenbach, H.; Altenbach, J.; Zolochovsky, A.: Erweiterte Deformationsmodelle und Versagenskriterien der Werkstoffmechanik. Leipzig, Stuttgart: Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, 1995

28. Kolupaev, V.A.; Bolchoun, A.; Altenbach, H.: Aktuelle Trends beim Einsatz von Festigkeitshypothesen. - In: Konstruktion (2009)5. - S. 59 – 66
29. Kolupaev, V.A.; Bolchoun, A.; Altenbach, H.: Strength Hypothesis Applied to Hard Foams, Applied Mechanics and Materials. - Zürich 70(2011). - pp. 99 – 104
30. Bolchoun, A.; Kolupaev, V.A.; Altenbach, H.: Konvexe und nichtkonvexe Fließflächen. - In: Forschung im Ingenieurwesen. - Berlin 75(2011)2. - pp. 73 - 92

Сведения об авторе:

Альтенбах Хольм – заведующий кафедрой Технической Механики университета Отто фон Герике, факультет Машиностроения, г. Магдебург, Германия, (+49-391) 671 8814

E-mail: holm.altenbach@ovgu.de

ОБ ИЗГИБЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ БАЛОК НА УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Амирбекян А.Н.

По теории С.П. Тимошенко рассматривается задача об изгибе периодической системы балок на упругом основании в виде упругой полуплоскости.

Решение задачи об изгибе одинарной балки на упругой полуплоскости, по классической теории изгиба балок, методом интегральных уравнений изложено в [1]. В работе [2] эта же задача была рассмотрена по теории изгиба балки С.П. Тимошенко [3], учитывающей влияние сдвигающих сил, действующих на срединной линии балки, на её изгиб.

В настоящей работе по теории С.П. Тимошенко рассматривается контактная задача о вдавливании периодической системы изгибающихся балок в упругую полуплоскость.

1. Пусть упругая полуплоскость, находящаяся в условиях плоской деформации, с модулем упругости E_1 и с коэффициентом Пуассона ν отнесена к правой прямоугольной системе координат Oxy . Пусть далее под действием вертикальных сил интенсивности $q(x)$ периодическая с периодом $2l$ система балок, с модулями упругости E и высот h , вдоль участков

$$L = \left\{ y = 0; \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} [-a + 2kl, a + 2kl] \right\} \quad (a < l)$$

границы полуплоскости $y = 0$ вдавливается в упругую полуплоскость. Для изгиба балок примем теорию С.П. Тимошенко, учитывающую влияние касательных сдвигающих сил T , действующих на срединных линиях балок, на их изгиб. Тогда дифференциальное уравнение прогиба $v(x)$ балки, занимающей участок $(-a, a)$ границы полуплоскости, имеет вид ([3], стр. 422)

$$D \frac{d^4 v}{dx^4} + T \frac{d^2 v}{dx^2} = p(x) - q(x) \quad (-a < x < a); \quad D = Eh^3/12, \quad (1)$$

где D – жёсткость балки на изгиб, а $p(x)$ – неизвестное давление балки на упругое основание. Далее, ввиду периодичности задачи ограничимся только центральной балкой $[-a, a]$.

Так как изгибающие моменты $M(x)$ в сечениях балки $[-a, a]$ выражаются формулой

$$M(x) = M \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (-a \leq x \leq a),$$

то дифференциальное уравнение (1) можно записать также в виде

$$\frac{d^2 M}{dx^2} + k^2 M = p(x) - q(x) \quad (-a < x < a) \quad (k = \sqrt{T/D}). \quad (2)$$

Решение уравнения (2) при граничных условиях

$$M(x)|_{x=-a} = 0, \quad M(x)|_{x=a} = 0 \quad (3)$$

представляется формулой [2]

$$M(x) = [k \sin(2ka)]^{-1} \int_{-a}^a [\cos^2(ak) \sin(kx) \sin(ks) - \sin^2(ak) \cos(kx) \cos(ks)] \times \\ \times [p(s) - q(s)] ds + (2k)^{-1} \int_{-a}^a \sin(k|x-s|) [p(s) - q(s)] ds \quad (-a \leq x \leq a); \quad (4)$$

а уравнения (1) для dv/dx при тех же условиях (3) – формулой

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{2k^2} \int_{-a}^a \left\{ [1 - \cos[k(x-s)]] \operatorname{sign}(x-s) + \operatorname{ctg}(ak) [1 - \cos(kx)] \sin(ks) - \right. \\ \left. - \operatorname{tg}(ak) \sin(kx) \cos(ks) \right\} g(s) ds + C; \quad g(x) = [p(x) - q(x)]/D \quad (-a < x < a). \quad (5)$$

При этом, поперечные силы $Q(x)$ в сечении x балки $[-a, a]$ будут иметь вид [2]

$$Q(x) = \frac{1}{2} \int_{-a}^a \{ \operatorname{tg}(ak) \sin(kx) \cos(ks) + \operatorname{ctg}(ak) \cos(kx) \sin(ks) + \operatorname{sign}(x-s) \cos[k(x-s)] \} [p(s) - q(s)] ds \quad (-a \leq x \leq a). \quad (6)$$

Выведем определяющее сингулярное интегральное уравнение (СИУ) рассматриваемой задачи, откуда будет определяться контактное давление $p(x)$, а затем по формулам (5) и (6) будут определяться изгибающие моменты и поперечные силы в любых сечениях балок.

С этой целью воспользуемся известной формулой [4] для вертикальных перемещений $v_1(x)$ граничных точек нижней упругой полуплоскости от периодически с периодом $2l$ распределённых вертикальных сил интенсивности $p(x)$:

$$v_1(x) = -\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E_1} \int_{-a}^a \ln \frac{1}{2|\sin[\pi(x-s)/2l]|} p(s) ds + \operatorname{const} \quad (-a < x < a). \quad (7)$$

Теперь (5) и (7) подставим в условие контакта $dv_1/dx = dv/dx$ ($-a < x < a$). В результате, придём к следующему определяющему СИУ обсуждаемой задачи:

$$\frac{1-\nu^2}{E_1 l} \int_{-a}^a \operatorname{ctg}[\pi(s-x)/2l] p(s) ds + \frac{1}{2k^2 D} \int_{-a}^a \{ [1 - \cos k(x-s)] \operatorname{sign}(x-s) + \operatorname{ctg}(ak) \times \\ \times [1 - \cos(kx)] \sin(ks) - \operatorname{tg}(ak) \sin(kx) \cos(ks) \} [p(s) - q(s)] ds + C \quad (-a < x < a).$$

В этом уравнении введём безразмерные величины

$$\xi = \pi x/l, \quad \eta = \pi s/l; \quad \chi = ak; \quad \chi_1 = lk/\pi; \quad \lambda = 6E_1(l/h)^3/\pi^2 \chi_1^2 (1-\nu^2) E; \\ \alpha = \pi a/l; \quad \varphi(\xi) = p(l\xi/\pi)/E_1, \quad h(\xi) = q(l\xi/\pi)/E_1, \quad \gamma_0 = C/2\pi(1-\nu^2), \quad (8)$$

и обозначения

$$K(\xi, \eta) = \{ 1 - \cos[\chi_1(\xi - \eta)] \} \operatorname{sign}(\xi - \eta) + \operatorname{ctg}\chi [1 - \cos(\chi_1\xi)] \sin(\chi_1\eta) - \\ - \operatorname{tg}\chi \sin(\chi_1\xi) \cos(\chi_1\eta); \quad (9)$$

$$f(\xi) = \int_{-\alpha}^{\alpha} K(\xi, \eta) h(\eta) d\eta \quad (-\alpha < \xi, \eta < \alpha).$$

В этих величинах и обозначениях определяющее СИУ задачи примет вид

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \operatorname{ctg}\left(\frac{\eta - \xi}{2}\right) \varphi(\eta) d\eta + \frac{\lambda}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} K(\xi, \eta) \varphi(\eta) d\eta = \frac{\lambda}{\pi} f(\xi) + \gamma_0 \quad (-\alpha < \xi < \alpha). \quad (10)$$

Запишем также условия равновесия балки $[-a, a]$:

$$\int_{-a}^a p(x) dx = P, \quad P = \int_{-a}^a q(x) dx; \quad \int_{-a}^a x p(x) dx = M, \quad M = \int_{-a}^a x q(x) dx;$$

в которых также перейдём к безразмерным величинам (8). Они преобразуются в следующие:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi(\xi) d\xi = P_0, \quad \int_{-\alpha}^{\alpha} \xi \varphi(\xi) d\xi = M_0 \quad (P_0 = \pi P/lE_1, \quad M_0 = \pi^2 M/l^2 E). \quad (11)$$

Итак, решение СИУ (10) должно удовлетворять условиям (11). Отметим, что входящий в (10) параметр γ_0 неизвестен и характеризует угол поворота центрального сечения балки $x = 0$.

Далее, чтобы к СИУ (10)-(11) применить известный численно-аналитический метод решения СИУ [5,6], основанный на квадратурных формулах Гаусса для обычных и сингулярных интегралов с ядром Коши, в них от ядра Гильберта $\operatorname{ctg}(\eta - \xi)/2$ перейдём к ядру

Коши $1/(\eta - \xi)$ и от интервала $(-\alpha, \alpha)$ перейдём на интервал $(-1, 1)$. С этой целью в (10)- (11), а также в (9), от переменных ξ и η перейдём к переменным t и u , полагая

$$t = \operatorname{tg}(\xi / \eta) / \operatorname{tg}(\alpha / 2), \quad u = \operatorname{tg}(\eta / 2) / \operatorname{tg}(\alpha / 2) \quad (-1 < t, u < 1). \quad (12)$$

$$\text{Отсюда } \xi = 2 \operatorname{arctg}\left(t \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right), \quad \eta = 2 \operatorname{arctg}\left(u \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right), \quad d\eta = 2 \operatorname{tg}(\alpha / 2) du / (1 + u^2 \operatorname{tg}^2(\alpha / 2)).$$

Преобразуем ядро Гильберта:

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\eta - \xi}{2}\right) = \frac{1 + \operatorname{tg}(\xi / 2) \operatorname{tg}(\eta / 2)}{\operatorname{tg}(\eta / 2) - \operatorname{tg}(\xi / 2)} = \frac{1 + ut \operatorname{tg}^2(\alpha / 2)}{(u - t) \operatorname{tg}(\alpha / 2)} = \frac{1 + t^2 \operatorname{tg}^2(\alpha / 2)}{(u - t) \operatorname{tg}(\alpha / 2)} + t \operatorname{tg}(\alpha / 2).$$

С учётом последнего СИУ (10) преобразуется к виду

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{u - t} + \frac{t \operatorname{tg}^2(\alpha / 2)}{1 + t^2 \operatorname{tg}^2(\alpha / 2)} + \frac{\lambda \operatorname{tg}(\alpha / 2)}{1 + t^2 \operatorname{tg}^2(\alpha / 2)} L(t, u) \right] \varphi_0(u) du = \frac{\lambda}{\pi} g_0(t) + \quad (13)$$

$$+ \frac{\gamma_0 \operatorname{tg}(\alpha / 2)}{1 + t^2 \operatorname{tg}^2(\alpha / 2)} \quad (-1 < t < 1),$$

где приняты обозначения:

$$\varphi_0(t) = \frac{2 \operatorname{tg}(\alpha / 2)}{1 + t^2 \operatorname{tg}^2(\alpha / 2)} \varphi(2 \operatorname{arctg}(t \operatorname{tg}(\alpha / 2))), \quad g_0(t) = f(2 \operatorname{arctg}(t \operatorname{tg}(\alpha / 2))); \quad (14)$$

$$L(t, u) = K(2 \operatorname{arctg}(t \operatorname{tg}(\alpha / 2)), 2 \operatorname{arctg}(u \operatorname{tg}(\alpha / 2))) \quad (-1 < t, u < 1).$$

Входящие в (13) функции $\varphi(\xi)$, $f(\xi)$ и ядра $K(\xi, \eta)$ приведены в (8), (9).

При переходе к переменной t условия (11) преобразуются в условия

$$\int_{-1}^1 \varphi_0(t) dt = P_0, \quad 2 \int_{-1}^1 \operatorname{arctg}(t \operatorname{tg}(\alpha / 2)) \varphi_0(t) dt = M_0. \quad (15)$$

Таким образом, решение поставленной задачи окончательно свелось к решению СИУ (13)-(14) при условиях (15).

По цепочке формул (8) и (12) преобразуем также выражения изгибающих моментов $M(x)$ и поперечных сил $Q(x)$, выражающихся формулами (4) и (6) соответственно. Будем иметь:

$$M_0(t) = \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{\chi_1 \sin 2\chi} \left[\cos^2 \chi \sin(2\chi_1 \operatorname{arctg}(t \operatorname{tg}(\alpha / 2))) \sin(2\chi_1 \operatorname{arctg}(u \operatorname{tg}(\alpha / 2))) - \right. \right. \quad (16)$$

$$\left. \left. - \sin^2 \chi \cos(2\chi_1 \operatorname{arctg}(t \operatorname{tg}(\alpha / 2))) \cos(2\chi_1 \operatorname{arctg}(u \operatorname{tg}(\alpha / 2))) \right] + \frac{1}{2\chi_1} \times \right.$$

$$\left. \times \sin(2\chi_1 |\operatorname{arctg}(t \operatorname{tg}(\alpha / 2)) - \operatorname{arctg}(u \operatorname{tg}(\alpha / 2))| \right) \left[\varphi_0(u) - h_0(u) \right] du$$

$$Q_0(t) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left\{ \operatorname{tg} \chi \sin(2\chi_1 \operatorname{arctg}(t \operatorname{tg}(\alpha / 2))) \cos(2\chi_1 \operatorname{arctg}(u \operatorname{tg}(\alpha / 2))) + \right.$$

$$\left. + \operatorname{ctg} \chi \cos(2\chi_1 \operatorname{arctg}(t \operatorname{tg}(\alpha / 2))) \sin(2\chi_1 \operatorname{arctg}(u \operatorname{tg}(\alpha / 2))) + \operatorname{sign}(t - u) \times \right.$$

$$\left. \times \cos \left[2\chi_1 \left[\operatorname{arctg}(t \operatorname{tg}(\alpha / 2)) - \operatorname{arctg}(u \operatorname{tg}(\alpha / 2)) \right] \right] \right\} \left[\varphi_0(u) - h_0(u) \right] du.$$

Здесь введены новые обозначения:

$$M_0(t) = \pi^2 M (l\xi / \pi) / l^2 E_1, \quad \xi = 2 \operatorname{arctg}(t \operatorname{tg}(\alpha / 2));$$

$$Q_0(t) = \pi Q(l\xi / \pi) / l E_1; \quad h_0(t) = \frac{2 \operatorname{tg}(\alpha / 2)}{1 + t^2 \operatorname{tg}^2(\alpha / 2)} h(2 \operatorname{arctg}(t \operatorname{tg}(\alpha / 2))).$$

После решения СИУ (13)-(14) при условиях (15) основная характеристика задачи – контактное давление $p(x)$ ($-a < x < a$) – определится по цепочке формул (8) и (14).

Для решения СИУ (13)-(14) при условиях (15) вышеуказанным методом [5,6] искомое решение представим формулой

$$\varphi_0(t) = \Omega_0(t) / \sqrt{1-t^2} \quad (-1 < t < 1), \quad (17)$$

где $\Omega_0(t)$ – гильдеровская функция на отрезке $[-1, 1]$. Тогда по известной процедуре [5,6] это СИУ сведётся к следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{m=1}^M \frac{1}{M} \left[\frac{1}{u_m - t_r} + \frac{t_r \operatorname{tg}(\alpha / 2)}{1 + t_r^2 \operatorname{tg}^2(\alpha / 2)} + \frac{\lambda \operatorname{tg}(\alpha / 2)}{1 + t_r^2 \operatorname{tg}^2(\alpha / 2)} L(t_r, u_m) \right] \Omega_0(u_m) = \\ = \frac{\lambda}{\pi} g_0(t_r) + \frac{\gamma_0 \operatorname{tg}(\alpha / 2)}{1 + t_r^2 \operatorname{tg}^2(\alpha / 2)}, \quad (r = \overline{1, \dots, M-1}) \\ \sum_{m=1}^M \frac{\pi}{M} \Omega_0(u_m) = P_0; \quad \sum_{m=1}^M \frac{2\pi}{M} \operatorname{arctg}(u_m \operatorname{tg}(\alpha / 2)) \Omega_0(u_m) \end{cases} \quad (18)$$

Здесь $u_m = \cos\left(\frac{2m-1}{2M} \pi\right)$ ($m = \overline{1, M}$), $t_r = \cos\left(\frac{\pi r}{M}\right)$ ($r = \overline{1, M-1}$) – известные чебышевские узлы. Отметим, что система (18) состоит из $M+1$ уравнений со столько же неизвестными.

Чтобы систему линейных уравнений (18) записать в канонической форме, положим

$$a_r = \begin{cases} (\lambda/\pi) g_0(t_r) & (r = \overline{1, M-1}); \\ P_0 & (r = M); \quad M_0 & (r = M+1); \end{cases} \quad X_m = \begin{cases} \Omega_0(u_m) & (r = \overline{1, M}); \\ \gamma_0 & (r = M+1). \end{cases}$$

$$K_{rm} = \begin{cases} \frac{1}{M} \left[\frac{1}{u_m - t_r} + \frac{t_r \operatorname{tg}^2(\alpha / 2)}{1 + t_r^2 \operatorname{tg}^2(\alpha / 2)} + \frac{\lambda \operatorname{tg}(\alpha / 2)}{1 + t_r^2 \operatorname{tg}^2(\alpha / 2)} L(t_r, u_m) \right] & (m = \overline{1, M}, \quad r = \overline{1, M-1}); \\ -\frac{\operatorname{tg}(\alpha / 2)}{1 + t_r^2 \operatorname{tg}^2(\alpha / 2)} & (m = M+1, \quad r = \overline{1, M-1}); \quad \frac{\pi}{M} & (m = \overline{1, M}, \quad r = M); \\ 0 & (m = M+1, \quad r = M, M+1); \quad \frac{2\pi}{M} \operatorname{arctg}(u_m \operatorname{tg}(\alpha / 2)) & (m = \overline{1, M}, \quad r = M+1); \end{cases}$$

В результате, система (18) запишется в канонической форме:

$$\sum_{m=1}^{M+1} K_{rm} X_m = a_r \quad (r = \overline{1, M+1}). \quad (19)$$

Теперь введём следующие матрицы-столбцы:

$$a_r^{(1)} = \begin{pmatrix} (\lambda/\pi) g_0(t_1) \\ \vdots \\ (\lambda/\pi) g_0(t_{M-1}) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_r^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ M-1 \\ M \\ M+1 \end{matrix}, \quad a_r^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ M-1 \\ M \\ M+1 \end{matrix}.$$

Решение системы (19) при правой части $a_r^{(1)}$ обозначим через $X_m^{(1)}$, решение при правой части $a_r^{(2)} - X_m^{(2)}$, а решение при правой части $a_r^{(3)} - X_m^{(3)}$. Тогда решение (18) выразится формулой

$$X_m = X_m^{(1)} + P_0 X_m^{(2)} + M_0 X_m^{(3)} \quad (r = \overline{1, M+1}). \quad (20)$$

После решения системы (19), расчётная функция (17) в узлах u_m вычисляется по формуле

$$\varphi_0(u_m) = X_m / \sqrt{1 - u_m^2} \quad (r = \overline{1, M+1}),$$

а безразмерные изгибающие моменты $M_0(t)$ и поперечные силы $Q_0(t)$ в любой точке t согласно (16) будут вычисляться, соответственно, по формулам:

$$\begin{aligned} M_0(t) &= \sum_{m=1}^M \frac{1}{M} \left\{ \frac{1}{\chi_1 \sin 2\chi} \left[\cos^2 \chi \sin(2\chi_1 \arctg(t \operatorname{tg}(\alpha/2))) \sin(2\chi_1 \arctg(u_m \operatorname{tg}(\alpha/2))) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sin^2 \chi \cos(2\chi_1 \arctg(t \operatorname{tg}(\alpha/2))) \cos(2\chi_1 \arctg(u_m \operatorname{tg}(\alpha/2))) \right] + \frac{1}{2\chi_1} \times \right. \\ &\quad \left. \times \sin(2\chi_1 |\arctg(t \operatorname{tg}(\alpha/2)) - \arctg(u_m \operatorname{tg}(\alpha/2))|) \right\} \left[X_m - \sqrt{1 - u_m^2} h_0(u_m) \right] \quad (-1 < t < 1); \\ Q_0(t) &= \sum_{m=1}^M \frac{1}{2M} \left\{ \operatorname{tg} \chi \sin(2\chi_1 \arctg(t \operatorname{tg}(\alpha/2))) \cos(2\chi_1 \arctg(u_m \operatorname{tg}(\alpha/2))) + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{ctg} \chi \cos(2\chi_1 \arctg(t \operatorname{tg}(\alpha/2))) \sin(2\chi_1 \arctg(u_m \operatorname{tg}(\alpha/2))) + \operatorname{sign}(t - u_m) \times \right. \\ &\quad \left. \times \cos[2\chi_1 \arctg(t \operatorname{tg}(\alpha/2)) - \arctg(u_m \operatorname{tg}(\alpha/2))] \right\} \left[X_m - \sqrt{1 - u_m^2} h_0(u_m) \right]; \end{aligned}$$

где X_m даётся формулой (20).

Численный анализ рассмотренной здесь задачи можно провести по схеме, указанной в [2]. Работа выполнена в рамках гранта 11-2с450 Госкомитета по науке мин. обр. и науки РА.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амирбекян А.Н. Решение интегрального уравнения изгиба балки конечной длины на упругом основании. //В сб. трудов Межд. школы-конференции молодых учёных. 28 сентября – 1 октября. Агавнадзор, Армения. Ереван–2009, с.135-139.
2. Амирбекян А.Н. О контактном взаимодействии изгибающейся по теории С.П. Тимошенко балки конечной длины с упругой полуплоскостью. //В сб. научных трудов II Межд. конференции “Актуальные проблемы механики сплошной среды”, 4–8 октября, Дилижан, Армения. Т.1, Ереван–2010, с.76-80.
3. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер. Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 635с.
4. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. М.–Л.: Гостехтеориздат, 1949. 270с.
5. Erdogan F., Gupta G.D., Cook T.S. The numerical solutions of singular integral equations. Methods of Analysis an solution of crack problems, pp 368-425, Noordhoff Intern. Publ., 1973.
6. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова думка, 1976. 443с.

Сведения об авторе:

Амирбекян Аревик Норайровна – мл. н. сотр. Института механики НАН РА.

Тел.: (374 10) 52 48 90, (374 91) 63 97 58.

E-mail: mechins@sci.am

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛОСКОГО ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ МАТЕРИАЛА С УЧЁТОМ СИЛ ИНЕРЦИИ

Аннин Б. Д., Остапенко В. В., Чесноков А. А.

Рассматривается система дифференциальных уравнений, описывающая плоское пластическое течение материала вне выпуклого отверстия с учётом эффекта инерции. Показано, что система имеет два семейства кратных вещественных характеристик, каждому из которых соответствует один собственный и один присоединённый векторы. В силу этого, данная модель не является гиперболической в классическом смысле. Система уравнений преобразуется к эволюционному виду, и на её основе выполнены численные расчёты, иллюстрирующие влияние сил инерции на основные параметры течения.

1. Рассмотрим плоскую задачу об установившемся пластическом течении материала вне выпуклого отверстия, границу L которого можно представить в параметрическом виде $x_L = F'(\beta)\cos\beta + F(\beta)\sin\beta$, $y_L = F'(\beta)\sin\beta - F(\beta)\cos\beta$. Здесь x_L, y_L – декартовы координаты точки, лежащей на кривой L ; $F(\beta)$ – 2π -периодическая опорная функция кривой L ; $\beta \in [0, 2\pi)$ – угол между касательной к кривой L и осью Ox . Радиус кривизны границы L определяется функцией $\rho(\beta) = F''(\beta) + F(\beta)$; предполагается, что $\rho(\beta) > 0$. Единичные векторы, направленные по касательной и по нормали к точкам линии L , имеют вид $\mathbf{t} = (\cos\beta, \sin\beta)$ и $\mathbf{n} = (\sin\beta, -\cos\beta)$ соответственно. Следуя [1], для описания течения материала воспользуемся криволинейной системой координат (α, β) , индуцированной кривой L с опорной функцией $F(\beta)$:

$$x(\alpha, \beta) = F'(\beta)\cos\beta + (F(\beta) + \alpha)\sin\beta, \quad y(\alpha, \beta) = F'(\beta)\sin\beta - (F(\beta) + \alpha)\cos\beta,$$

откуда якобиан преобразования $D(x, y)/D(\alpha, \beta) = \rho + \alpha > 0$. Координатные линии $\alpha = \text{const} \geq 0$ представляют собой эквидистантные кривые с опорной функцией $F(\beta) + \alpha$, а координатные линии $\beta = \text{const}$ образуют семейство прямых, ортогональных L .

Проекции вектора скорости перемещений на оси криволинейной системы координат обозначим через U и V . Связь между компонентами вектора скорости в декартовых и криволинейных координатах зададим соотношением $(u, v) = U\mathbf{n} + V\mathbf{t}$. Тогда компоненты тензора скоростей деформаций в криволинейных координатах (1) запишутся как

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{\partial U}{\partial \alpha}, \quad \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial \alpha} + \frac{1}{\rho + \alpha} \left(\frac{\partial U}{\partial \beta} - V \right) \right), \quad \varepsilon_{\beta\beta} = \frac{1}{\rho + \alpha} \left(\frac{\partial V}{\partial \beta} + U \right).$$

Плоская задача пластичности с учётом сил инерции, обусловливаемых только конвективным переносом, сводится в криволинейных координатах к системе пяти уравнений для напряжений $(\sigma_{\alpha\alpha}, \sigma_{\alpha\beta}, \sigma_{\beta\beta})$ и поля скоростей (U, V) пластической среды [2, 3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{1}{\rho + \alpha} \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial \beta} + \frac{\sigma_{\alpha\alpha} - \sigma_{\beta\beta}}{\rho + \alpha} &= \gamma \left(U \frac{\partial U}{\partial \alpha} + \frac{V}{\rho + \alpha} \left(\frac{\partial U}{\partial \beta} - V \right) \right), \\ \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} + \frac{1}{\rho + \alpha} \frac{\partial \sigma_{\beta\beta}}{\partial \beta} + \frac{2\sigma_{\alpha\beta}}{\rho + \alpha} &= \gamma \left(U \frac{\partial V}{\partial \alpha} + \frac{V}{\rho + \alpha} \left(\frac{\partial V}{\partial \beta} + U \right) \right), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} + \varepsilon_{\beta\beta} = 0, \quad \frac{\sigma_{\alpha\alpha} - \sigma_{\beta\beta}}{\sigma_{\alpha\beta}} = \frac{\varepsilon_{\alpha\alpha} - \varepsilon_{\beta\beta}}{\varepsilon_{\alpha\beta}}, \quad (\sigma_{\alpha\alpha} - \sigma_{\beta\beta})^2 + 4\sigma_{\alpha\beta}^2 = 4k^2.$$

Первые два уравнения системы (1) являются уравнениями движения сплошной среды; третье уравнение выражает условие несжимаемости; четвёртое – условие совпадения главных осей тензора напряжений и тензора скоростей деформаций; замыкающее пятое уравнение выражает условие пластичности. Положительные постоянные γ и k есть плотность и предел текучести.

Воспользуемся подстановкой Леви $\sigma_{\alpha\alpha} = \sigma - k \sin 2\theta$, $\sigma_{\alpha\beta} = k \cos 2\theta$, $\sigma_{\beta\beta} = \sigma + k \sin 2\theta$ и перейдём к безразмерным переменным $(U, V) = v_*(U', V')$, $\sigma = 2k\sigma'$, где v_* — характерный

масштаб скорости. В результате, уравнения (1) принимают вид (штрихи опущены; $e = (2k)^{-1} \rho v_*^2$ — безразмерный параметр):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial \alpha} - \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} - \frac{\sin 2\theta}{\rho + \alpha} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \beta} + 1 \right) &= e \left(U \frac{\partial U}{\partial \alpha} + \frac{V}{\rho + \alpha} \left(\frac{\partial U}{\partial \beta} - V \right) \right), \\ \frac{1}{\rho + \alpha} \frac{\partial \sigma}{\partial \beta} - \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + \frac{\cos 2\theta}{\rho + \alpha} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \beta} + 1 \right) &= e \left(U \frac{\partial V}{\partial \alpha} + \frac{V}{\rho + \alpha} \left(\frac{\partial V}{\partial \beta} + U \right) \right), \\ \frac{\partial U}{\partial \alpha} + \frac{1}{\rho + \alpha} \left(\frac{\partial V}{\partial \beta} + U \right) &= 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha} + \frac{1}{\rho + \alpha} \left(\frac{\partial U}{\partial \beta} - V \right) - \frac{2 \operatorname{ctg} 2\theta}{\rho + \alpha} \left(\frac{\partial V}{\partial \beta} + U \right) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Модель плоского стационарного пластического течения материала изучена в случае $e = 0$, когда в уравнениях равновесия не учитывается эффект инерции. При этом, система уравнений (2) распадается на две подсистемы. Из первой подсистемы определяются напряжения, из второй — поле скоростей. В рассматриваемом случае $e \neq 0$, что приводит к необходимости решать полную систему из четырёх уравнений. Интересно отметить, что в обоих случаях ($e = 0$ и $e \neq 0$) система уравнений (2) имеет два семейства вещественных характеристик, задаваемых уравнениями:

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \lambda_{1,2}; \quad \lambda_1 = -\frac{\operatorname{ctg} \theta}{\rho + \alpha}, \quad \lambda_2 = \frac{\operatorname{tg} \theta}{\rho + \alpha}. \quad (3)$$

Далее будет показано, что при $e \neq 0$ каждой кратной характеристике (3) соответствует лишь один собственный вектор и при $\theta = \pi n/2$ скорости характеристик становятся бесконечными. В силу этого, система уравнений (2) не является гиперболической, что представляет дополнительные трудности при её исследовании.

2. Система уравнений пластического течения (2) представима в виде $\mathbf{A}U_\alpha + \mathbf{B}U_\beta = \mathbf{G}_1$, где $\mathbf{U} = (U, V, \theta, \sigma)^T$ — вектор-столбец искомых величин, \mathbf{A} и \mathbf{B} — матрицы, коэффициенты которых зависят от искомого вектора \mathbf{U} , вектор \mathbf{G}_1 — правая часть. Определители матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} равны $\sin 2\theta$ и $(\rho + \alpha)^{-4} \sin 2\theta$ соответственно. Вырождение матриц и обращение скоростей характеристик в бесконечность происходит при $\theta = \pi n/2$, n — целое число. Умножение векторного уравнения на матрицу \mathbf{A}^{-1} (при $\theta \neq \pi n/2$) приводит систему (2) к эволюционному виду

$$\mathbf{U}_\alpha + \mathbf{M}U_\beta = \mathbf{G}, \quad (4)$$

с матрицей $\mathbf{M} = \mathbf{M}'/(\rho + \alpha)$ (координата α играет роль времени),

$$\mathbf{M}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 \operatorname{ctg} 2\theta & 0 & 0 \\ -eU/\sin 2\theta & e(V + 2U \operatorname{ctg} 2\theta)/\sin 2\theta & -\operatorname{ctg} 2\theta & -1/\sin 2\theta \\ -e(V + U \operatorname{ctg} 2\theta) & e(U + V \operatorname{ctg} 2\theta + 2U \operatorname{ctg}^2 2\theta) & -1/\sin 2\theta & -\operatorname{ctg} 2\theta \end{pmatrix},$$

и правой частью $\mathbf{G} = \mathbf{G}'/(\rho + \alpha)$,

$$\mathbf{G}' = \begin{pmatrix} -U \\ V + 2U \operatorname{ctg} 2\theta \\ \operatorname{ctg} 2\theta - 2eU(V + U \operatorname{ctg} 2\theta)/\sin 2\theta \\ \sin 2\theta - e(U^2 + V^2) + (\cos 2\theta - 2eU(V + U \operatorname{ctg} 2\theta)) \operatorname{ctg} 2\theta \end{pmatrix}.$$

Невырожденная матрица \mathbf{M} имеет кратные вещественные собственные значения λ_1 и λ_2 , задаваемые формулой (3). Каждому собственному значению соответствует лишь один правый собственный вектор-столбец $\mathbf{h}_1 = (0, 0, 1, 1)^T$ и $\mathbf{h}_2 = (0, 0, -1, 1)^T$. Вычислим правые присоединённые собственные векторы \mathbf{p}_i , удовлетворяющие уравнениям $\mathbf{M}\mathbf{p}_i = \lambda_i \mathbf{p}_i + \mathbf{h}_i$, и

составим матрицу перехода \mathbf{R} , в которой первый и третий столбцы – собственные векторы, второй и четвертый – присоединённые собственные векторы. Подставим в (4) выражение $\mathbf{U} = \mathbf{R}\mathbf{V}$ и умножим слева на матрицу \mathbf{R}^{-1} . В результате этих преобразований система уравнений (4) принимает вид

$$\mathbf{V}_\alpha + \mathbf{J}\mathbf{V}_\beta = \mathbf{K}, \quad (5)$$

где $\mathbf{V} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{U}$ – новый искомый вектор, $\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{G} - \mathbf{R}_\alpha\mathbf{V} - \mathbf{M}\mathbf{R}_\beta\mathbf{V})$ – правая часть, $\mathbf{J} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{R}$ – Жорданова форма матрицы \mathbf{M} . Уравнения (5) представляют аналог характеристической формы системы (4), но, в отличие от классических гиперболических систем [4], имеют недиагональную матрицу \mathbf{J} . Тем не менее, задача Коши для уравнения (5) с заданными при $\alpha=0$ гладкими начальными данными (для которых собственные значения (3) ограничены) имеет единственное решение при достаточно малых значениях α .

3. Для численного решения задачи Коши, описывающей при $\alpha > 0$ пластическое течение материала на основе эволюционной системы уравнений (4) с начальными условиями $\mathbf{U}(0, \beta) = \mathbf{U}_0(\beta)$, будем использовать следующую разностную схему:

$$\begin{aligned} r_{j+1/2}^n \frac{U_{j+1/2}^{n+1} - U_{j+1/2}^n}{\tau_n} + \frac{V_{j+1}^n - V_j^n}{h} + U_{j+1/2}^{n+1} &= 0, \quad r_j^n \frac{V_j^{n+1} - V_j^n}{\tau_n} + \frac{U_{j+1/2}^{n+1} - U_{j-1/2}^{n+1}}{h} + a_{22} \frac{V_{j+1}^n - V_{j-1}^n}{2h} = g_2, \\ r_{j+1/2}^n \frac{\theta_{j+1/2}^{n+1} - \theta_{j+1/2}^n}{\tau_n} + a_{31} \frac{U_{j+3/2}^{n+1} - U_{j-1/2}^{n+1}}{2h} + a_{32} \frac{V_{j+1}^{n+1} - V_j^{n+1}}{h} + a_{33} \frac{\theta_{j+3/2}^n - \theta_{j-1/2}^n}{2h} + a_{34} \frac{\sigma_{j+1}^n - \sigma_j^n}{h} &= g_3, \quad (6) \\ r_j^n \frac{\sigma_j^{n+1} - \sigma_j^n}{\tau_n} + a_{41} \frac{U_{j+1/2}^{n+1} - U_{j-1/2}^{n+1}}{h} + a_{42} \frac{V_{j+1}^{n+1} - V_{j-1}^{n+1}}{2h} + a_{43} \frac{\theta_{j+1/2}^{n+1} - \theta_{j-1/2}^{n+1}}{h} + a_{44} \frac{\sigma_{j+1}^n - \sigma_{j-1}^n}{2h} &= g_4, \end{aligned}$$

где $r = \rho + \alpha$, а коэффициенты a_{ij} и g_i будут представлены ниже.

При записи схемы (6) использованы следующие сокращённые обозначения для сеточных функций $f_j^n = f(\alpha_n, \beta_j)$, $f_{j+1/2}^n = f(\alpha_n, \beta_{j+1/2})$, $\beta_j = jh$, $\beta_{j+1/2} = (j+1/2)h$, $\alpha_n = \sum_{m=0}^{n-1} \tau_m$, где h – постоянный шаг разностной сетки по переменной $\beta \in [0, 2\pi]$, а τ_n – переменный шаг по эволюционной переменной α , выбираемый из условия устойчивости Куранта [4]. Разностные граничные условия задаются исходя из требования 2π -периодичности функций по переменной β .

Из первого уравнения (6) найдём значения $U_{j+1/2}^{n+1}$, которыми воспользуемся во втором уравнении для вычисления V_j^{n+1} . После этого $U_{j+1/2}^{n+1}$ и V_j^{n+1} применим для определения $\theta_{j+1/2}^{n+1}$ из третьего уравнения схемы (6), а затем с помощью $U_{j+1/2}^{n+1}$, V_j^{n+1} и $\theta_{j+1/2}^{n+1}$ найдём σ_j^{n+1} из её четвертого уравнения. После этого рассчитаем элементы a_{ik} матрицы \mathbf{M}' и компоненты g_k вектора \mathbf{G}' , входящие в схему (6); значения a_{22} и g_2 во втором уравнении вычислим по известным величинам $U_{j+1/2}^{n+1}$, V_j^n и $\theta_{j+1/2}^n$; значения a_{3k} и g_3 в третьем уравнении определим через $U_{j+1/2}^{n+1}$, V_j^{n+1} и $\theta_{j+1/2}^n$; значения a_{4k} и g_4 в четвертом уравнении найдём по величинам $U_{j+1/2}^{n+1}$, V_j^{n+1} и $\theta_{j+1/2}^{n+1}$.

Разностная схема (6) имеет второй порядок аппроксимации по переменной β и первый – по эволюционной переменной α . Схема допускает явную реализацию и в линейном приближении является устойчивой при выполнении условия Куранта. Разностную схему (6) можно рассматривать как обобщение численных алгоритмов, которые применялись в работах [5, 6] для моделирования пластических течений материалов без учёта влияния сил инерции.

Приведём численные расчёты, иллюстрирующие влияние эффекта инерции при пластическом течении материала. Пусть при $\alpha=0$ на круглом отверстии ($\rho=1$) заданы значения скоростей и параметризации напряжений:

$$U = \varkappa \cos \beta, \quad V = -0,1 \sin \beta, \quad \sigma = 0,25 + 0,2 \sin \beta, \quad \theta = \pi/4 - 0,2 \cos \beta. \quad (7)$$

Безразмерные напряжения σ_{ij} вычислим с использованием подстановки Леви при $k = 1/2$. Для оценки влияния инерционных эффектов проведём численное интегрирование уравнений (4) с условиями (7) на основе схемы (6) при $e = 0$ (классическая модель) и различных значениях $e > 0$ (модель, учитывающая влияние инерции). Расчёт проведём с шагом $h = \pi/100$ до $\alpha^* = 5$; параметр \varkappa выберем равным 0,35 и 0,5. Предположим, что отверстие является круглым (кривизна $\rho = 1$).

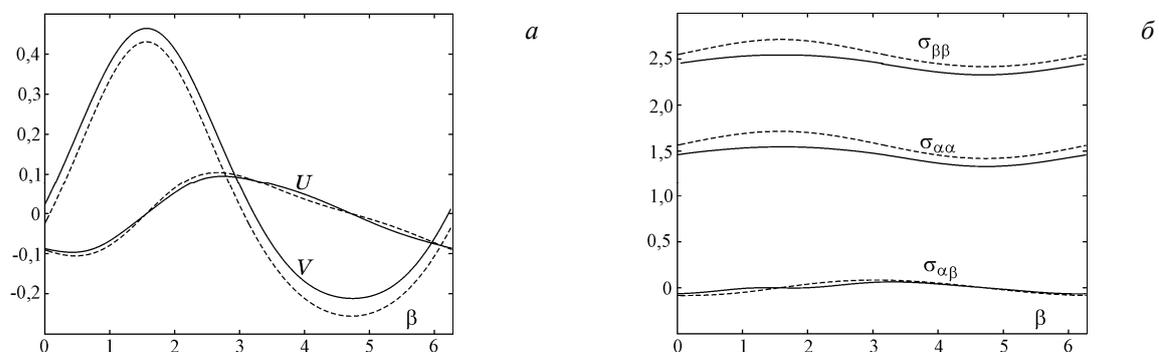


Рис. 1. Поле скоростей (а) и напряжений (б) в пластическом течении вне круга при $\alpha = 5$, $\varkappa = 0,35$. Сплошные линии соответствуют $e = 2$, пунктир – $e = 0$

Качественный характер решения, полученного при $e \neq 0$ и $e = 0$, совпадает (рис.1), но с ростом параметров \varkappa и e количественные различия усиливаются. Использование модели пластического течения с учётом эффекта инерции необходимо в случаях достаточно больших значений амплитуд скоростей в окрестности отверстия и значений параметра инерции (материал с высокой плотностью и низким пределом текучести).

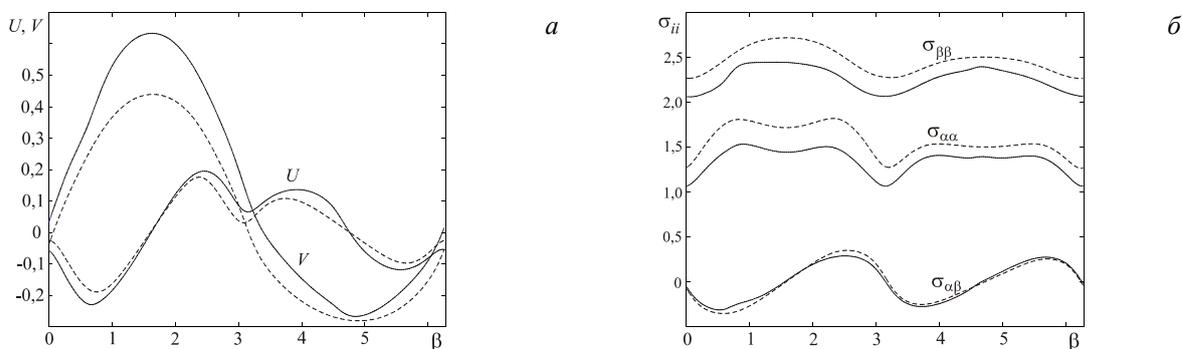


Рис. 2. Поле скоростей (а) и напряжений (б) при $\alpha = 5$, $\varkappa = 0,35$ в пластическом течении вне эллипса; сплошные линии – $e = 2$, пунктир – $e = 0$

Проведём аналогичный расчёт распространения пластического состояния от границы эллипса с полуосями a и b , что соответствует следующему выбору опорной функции:

$$F(\beta) = \sqrt{a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta}. \quad \text{При этом, входящий в расчётные формулы (6), радиус кривизны границы } L \text{ имеет вид: } \rho(\beta) = 2\sqrt{2}a^2b^2 / \left(a^2 + b^2 + (b^2 - a^2) \cos(2\beta) \right)^{3/2}.$$

Выполненные численные эксперименты свидетельствуют, что отклонение формы выпуклого отверстия от формы круга (при одних и тех же граничных условиях для скоростей и напряжений) может привести как к усилению, так и к ослаблению влияния эффекта инерции. На рис. 2 показаны результаты расчёта, соответствующие пластическому течению вне эллипса с полуосями $a = 1,5$ и $b = 0,5$ при заданных граничных условиях (7) с $\varkappa = 0,35$. Как и в

предыдущем примере, шаг $h = \pi/100$ и расчёт проводился до значения $\alpha^* = 5$. Сравнение графиков на рис. 1 и 2 позволяет сделать вывод, что изменение формы отверстия оказывает заметное влияние на основные параметры пластического течения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аннин Б.Д. Механика деформирования и оптимальное проектирование слоистых тел. Новосибирск: Изд-во ИГиЛ СО РАН, 2005. 204 с.
2. Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. 704с.
3. Наяр Е. Некоторые плоские инерционные течения пластических материалов // Механика сплошных сред: Тр. конф. – София, 1968. С. 269-277.
4. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978. 688с.
5. Алехин В.В., Аннин Б.Д., Остапенко В.В. Об одной механической аналогии в теории идеальной пластичности // ПМТФ. 2008. Т.49. № 4. С.74-80.
6. Аннин Б.Д., Алехин В.В., Остапенко В.В. Алгоритм численного решения задачи Коши для уравнений пластичности Треска // Вычисл. мех. сплош. сред. 2008. Т.1. № 1. С.5-13.

Сведения об авторах:

Аннин Борис Дмитриевич – д.ф.-м.н., академик, заведующий лабораторией ИГиЛ СО РАН

E-mail: annin@hydro.nsc.ru

Остапенко Владимир Викторович – д.ф.-м.н., главный научный сотрудник ИГиЛ СО РАН

E-mail: ostapenko_vv@ngs.ru

Чесноков Александр Александрович – д.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник, ИГиЛ СО РАН

E-mail: chesnokov@hydro.nsc.ru

ТЕРОДИНАМИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ ДЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ СТАРЕЮЩЕЙ УПРУГО-ВЯЗКОЙ СРЕДЫ

Арутюнян А.Р., Арутюнян Р.А.

Для описания процессов деформационного, климатического и радиационного старения полимерных материалов предложены упруго-вязкие уравнения, записанные в масштабе эффективного времени. Конкретизирована зависимость для параметра эффективного времени и получено аналитическое решение предложенных реологических уравнений. С учётом этих решений и первого закона термодинамики сформулирован критерий длительной прочности, основанный на концепции внутренней или скрытой энергии.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных исследований (гранты № 11-08-00763, № 12-01-31257).

В связи с массовым внедрением полимеров и композитов на их основе в различных областях современной техники и медицины актуальным становится вопрос прогнозирования работоспособности этих материалов с учётом эффектов старения. В реальных эксплуатационных условиях полимерные материалы подвергаются влиянию механических, химико-физических (агрессивные среды, радиация) факторов. Внутренние физико-химические процессы, протекающие в результате этих воздействий, приводят со временем к изменению рабочих характеристик полимеров. В совокупности эти процессы определяют старение материала. Происходит деструкция – распад основных цепей макромолекул до небольших структурных звеньев и структурирование – образование добавочных внутренних связей, выделение пластификатора и т.д. В мировой литературе основное внимание уделяется исследованиям климатического старения полимеров и старения после закалки [1-5]. Например, в работе [1] исследуются процессы старения и изменения свойств полиэтилена высокой плотности в результате климатического старения на воздухе, когда процессы старения определяются, в основном, ультрафиолетовой составляющей солнечного света. Под воздействием ультрафиолетового облучения инициируются реакции, способствующие разрыву химических связей полимерной цепи. Совместное воздействие ультрафиолетового облучения и кислорода воздуха развивают фотоокислительные реакции, которые являются важными составляющими деградации полимеров. Эти процессы приводят к значительному изменению механических характеристик, в частности, к уменьшению величины деформации в момент разрушения (охрупчиванию) и возникновению нежелательных хрупких разрушений.

Для описания процессов старения полимерных материалов будем оперировать понятием эффективного времени ω , которое вводится с помощью следующего кинетического уравнения [6]:

$$d\omega = f_1(\omega, \varepsilon, r, T, t)dt + f_2(\omega, \varepsilon, r, T, t)d\varepsilon, \quad (1)$$

где ε – величина деформации, r – доза радиации, T – температура, t – реальное время.

Согласно (1) параметр ω описывает процессы климатического, теплового, радиационного и деформационного старения. При мгновенных, активных нагружениях этот параметр соответствует деформационному времени ε . В состоянии разгрузки и стабилизации параметр ω описывает кинетику процессов старения и сводится к обычному времени t . Таким образом, параметр эффективного времени в общем случае способен описать взаимосвязанные деформационные и физико-химические процессы и их развитие в шкале деформационного и реального времени. В этом отличие данного параметра от известных температурно-временных и полимеризационных параметров, используемых в механике полимеров [7-9]. Известно, что с помощью тепловых и механических воздействий можно провести только частичную переработку полимеров. Для полной переработки необходимо дополнительно химическое воздействие [10].

При деформации полимеров, в зависимости от времени приложения нагрузки, проявляются упругие и вязкие свойства, поэтому при математическом описании их поведения используются вязко-упругие реологические модели. Упругие свойства в моделях представляют в виде пружины, а внутреннее трение – демпфером. При последовательном и параллельном соединении этих элементов в различных сочетаниях строятся соотношения, описывающие релаксационные процессы дискретным и непрерывным спектром времен релаксации (модели

Максвелла, Фойхта, Кельвина, наследственная теория Больцмана-Вольтерра и др., теория старения Арутюняна Н.Х. [11]).

Далее, в качестве рабочей модели, используется модель Максвелла

$$E\sigma + \eta\dot{\sigma} = E\eta\dot{\varepsilon}, \quad (2)$$

где E – модуль Юнга, η – коэффициент вязкости.

В классических уравнениях коэффициенты η , E в (2) считаются постоянными. Такой подход пригоден для описания поведения стабильной упруго-вязкой среды. Для описания механического поведения нестабильных, стареющих материалов эти коэффициенты являются функциями времени, и их следует определять из опытов.

Вначале рассмотрим случай, когда коэффициенты η , E являются функциями реального времени t . Воспользуемся физическим соотношением $\eta \approx E\tau$ (τ – время релаксации), тогда уравнение (2) можно записать в следующем виде:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\sigma}{E(t)} \right] + \frac{\sigma}{E(t)\tau} \quad (3)$$

Экспериментальная зависимость для модуля упругости в шкале реального времени выражается следующим соотношением [6]:

$$E = E_0 \left(1 + \left(1 - e^{-\beta t} \right) \right), \quad (4)$$

где E_0 , β – постоянные.

Решение уравнения (3) представлено в [6], где дано сравнение теоретических и экспериментальных кривых ползучести для различных полимерных материалов. Показано, что соотношения (3-4), записанные в масштабе реального времени, могут быть использованы для описания поведения полимеров в процессе климатического и теплового старения. Однако для описания деформационного старения необходимо использовать эффективное время ω . С этой целью воспользуемся следующим соотношением:

$$d\omega = kt^n dt, \quad (5)$$

где k , n – постоянные.

Уравнение (2), записанное через параметр ω , имеет вид

$$\frac{d\varepsilon}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \left(\frac{\sigma}{E(\omega)} \right) + \frac{\sigma}{\eta(\omega)} \quad (6)$$

Внося (5) в (6) и принимая $\sigma = \text{const}$, $E, \eta = \text{const}$ и начальные условия $\omega = 0$, $t = 0$, $\varepsilon = \sigma/E$, получим следующее решение уравнения (6):

$$D = \frac{\varepsilon}{\sigma} = \frac{1}{E} \left(1 + \frac{E k t^{n+1}}{\eta(n+1)} \right) \quad (7)$$

Для описания процессов деформационного старения полимерных материалов далее рассматривается следующее кинетическое соотношение для параметра эффективного времени

$$d\omega = ae^{kt} dt + b d\varepsilon \quad (8)$$

где a , k , b – постоянные.

С учётом (8) решение уравнение (6) при $\sigma = \text{const}$ и начальных условиях $\omega = 0$, $t = 0$, $\varepsilon = \sigma/E$ имеет вид

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \left[1 + \frac{a(e^{kt} - 1)}{k\tau \left(1 - \frac{\sigma b}{E\tau} \right)} \right] \quad (9)$$

В приложении к рассматриваемой проблеме деформирования и разрушения полимерных материалов в условиях ползучести первый закон термодинамики может быть сформулирован следующим образом. При переходе образца из начального состояния (начальное нагружение) в конечное состояние (разрушение образца), малое приращение внутренней энергии системы du равно сумме приращений, совершённой над системой работы δw (работа деформации), отведённого от системы тепла δq и приращения радиационной энергии δR

$$du = \delta w - \delta q + \delta R, \quad (10)$$

где $\delta w = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$ ($d\varepsilon_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij} dt$) – плотность работы сил, действующих на элемент среды, σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, $d\varepsilon_{ij}$ – компоненты тензора приращения деформаций. В законе (10) все величины отнесены к объёму элемента среды, т.е. являются удельными величинами. При этом, элементарные приращения δw , δq и δR не являются полными дифференциалами. Однако суммарно они составляют величину приращения внутренней энергии, которая является функцией состояния.

Проинтегрируем соотношение (10) от начального состояния (соответствующие величины отмечены индексом 0) до момента разрушения (соответствующие величины отмечены индексом *). Тогда из (10) имеем

$$\Delta u_* = w_* - \Delta q_* + \Delta R_*, \quad (11)$$

где

$$\Delta u_* = \int_{u_0}^{u_*} du = u_* - u_0, \quad w_* = \int_0^{w_*} \delta w, \quad \Delta q_* = \int_{q_0}^{q_*} \delta q, \quad \Delta R_* = \int_{R_0}^{R_*} \delta R \quad (12)$$

Далее введём обозначения $\Delta q_* = w_{*1}$, $\Delta u_* = w_{*2}$, $\Delta R_* = w_{*3}$, тогда закон сохранения энергии (11) запишется $w_* + w_{*3} = w_{*1} + w_{*2}$, где w_* – полная работа деформации, состоящая из тепловой w_{*1} , радиационной w_{*3} и скрытой w_{*2} [12, 13] составляющих энергии.

В случае простого растяжения $\varepsilon_{ij} = \varepsilon$, $\sigma_{ij} = \sigma$, где $\sigma = \text{const}$, энергия деформации может быть рассчитана по формуле $w_* = \sigma \varepsilon_*$, из которой следует

$$\varepsilon_* = \frac{w_*}{\sigma} = \frac{w_{*1} + w_{*2} - w_{*3}}{\sigma} \quad (13)$$

Сравнивая деформации ползучести $\varepsilon = \varepsilon_*$ в момент разрушения $t = t_p$ в соотношениях (7), (9) и (13), получим соответствующие критерии длительной прочности:

$$t_p = \left[\frac{\eta(m+1)}{kE} \left(\frac{E(w_{*1} + w_{*2} - w_{*3})}{\sigma^2} - 1 \right) \right]^{1/n+1}, \quad (14)$$

$$t_p = \frac{1}{k} \ln \left[1 + \frac{k\tau}{a} \left(\frac{E(w_{*1} + w_{*2} - w_{*3})}{\sigma^2} - 1 \right) \left(1 - \frac{b\sigma}{E\tau} \right) \right]. \quad (15)$$

Критерий (14) без учёта доли радиационной энергии w_{*3} рассматривался впервые в работе [14]. Полученные термодинамические критерии (14), (15) будут использованы для описания кривых длительной прочности полимерных материалов при температурных и радиационных воздействиях. Особое внимание будет уделено воздействию ультрафиолетовой радиации. В этом случае, в согласии с результатами опытов, предложенные критерии предсказывают интенсификацию процессов деградации и ускорение процессов разрушения полимерных материалов. Например, в наших опытах над образцами из полиуретана получены двадцатикратное и сорококатное ускорение процессов деградации материала после соответствующего климатического и деформационного старения в течение двенадцати лет.

ЛИТЕРАТУРА

1. Struik L.C.E. Physical aging in amorphous polymers and other materials. Amsterdam, Oxford, New York: Elsevier Sci. Publ. Comp. 1978. 229p.
2. Бочкарев Р.Н., Филатов И.С. Старение материалов на основе поливинилхлорида в условиях холодного климата. Новосибирск: 1990. 118с.
3. Мелкумов А.Н., Татевосьян Г.О. Старение изделий из пластмасс в климатических условиях Узбекистана. Ташкент: Узбекистан, 1975. 176с.
4. Bruijn de J.C.M. The failure behavior of high density polyethylene with an embrittled surface layer due to weathering. Delft: Delft University press. 1992. 167p.
5. Kulich D.M., Gaggar S.K. Weathering of Acrylonitrile Butadiene-Styrene Plastics: compositional effects on impact and color // Polymer durability. Advances in Chemistry. Series 249. American chemical society. Washington, DC. 1996. P. 483-501.
6. Арутюнян Р.А. Проблема деформационного старения и длительного разрушения в механике материалов. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2004. 252с.
7. Valanis K.C. On the foundation of the endochronic theory of viscoplasticity // Archiwum mechaniki stosowanej. 1975. vol. 27. № 5-6. P. 857-868.
8. Бартенев Г.М., Зуев Ю.С. Прочность и разрушение высокоэластичных материалов М.-Л.: Химия, 1964. 387с.
9. Москвитин В.В. Сопротивление вязко-упругих материалов. М.: Наука, 1972. 327с.
10. Трилор Л. Введение в науку о полимерах. М.: Мир.1973. 238с.
11. Арутюнян Н.Х. Некоторые вопросы теории ползучести М.-Л.: Гостехиздат, 1953. 324с.
12. Taylor G.I., Quinney H. The latent energy remaining in a metal after cold working // London. Proc. Roy. Soc. 1934. Ser. A. vol. 143. P. 307-326.
13. Большанина М.А., Панин В.Е. Скрытая энергия деформации // Исследование по физике твёрдого тела. Изд-во АН СССР, 1957. С.193-234.
14. Robert A. Arutyunyan. Energy consumption for creep fracture of metallic materials // Acta Mechanica Sinica. 2008. vol. 24. №4. P. 469-472.

Сведения об авторах:

Арутюнян Роберт Ашотович, доктор физ.-мат. наук, профессор,

Арутюнян Александр Робертович, кандидат физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник, Санкт-Петербургский государственный университет, математико-механический факультет, +7 (812) 4284164,

e-mail: Robert.Arutyunyan@paloma.spbu.ru

ПЛОСКИЕ ЗАДАЧИ СОСТАВНОЙ ПЛОСКОСТИ С ТРЕЩИНАМИ, ЗАКРЕПЛЁННЫМИ НА ОДНОМ КРАЕ

Арутюнян Л.А.

Рассматриваются плоские задачи теории упругости для составной плоскости, состоящей из двух полуплоскостей с различными упругими характеристиками и имеющимися между ними конечными трещинами или полубесконечными трещинами.

При помощи интегралов Фурье в биполярной системе координат через функции Папковича-Нейбера задачи решаются замкнуто.

Задачи с трещинами связаны с задачами определения напряжённо-деформированного состояния в однородных и неоднородных упругих телах, представляющих интерес в теоретических и практических вопросах прочности разнообразных конструкций, они стали предметом исследования многих авторов [2-6].

В настоящей работе рассматривается плоская задача теории упругости для составной плоскости, состоящей из двух полуплоскостей с различными упругими характеристиками и имеющимися между ними конечными трещинами или полубесконечными трещинами.

На прямоугольной декартовой системе координат при $y \geq 0$ полуплоскость имеет упругие характеристики $G_1\nu_1$, а при $y \leq 0$ – $G_2\nu_2$ (G_1, G_2 – модули сдвига материалов, ν_1, ν_2 – коэффициент Пуассона).

Для решения задачи удобно использовать биполярные системы координат. Связь прямоугольных координат (x, y) с биполярными координатами (α, β) выражается формулой [1]

$$gx = \operatorname{sh} \alpha, \quad gy = \sin \beta, \quad ag = \operatorname{ch} \alpha + \cos \beta \quad (1)$$

Координата α будет при этом изменяться от $-\infty$ до $+\infty$, в правой полуплоскости $\alpha > 0$, а в левой $\alpha < 0$, ось Oy является координатной линией $\alpha = 0$, точки $x = \pm\alpha, y = 0$ соответствуют значениям $\alpha = \pm\infty$. Координата β меняется от $-\pi$ до $+\pi$, в верхней полуплоскости $\beta > 0$, а нижней $\beta < 0$, отрезок $(-\alpha, \alpha)$ является координатной линией $\beta = 0$. Что касается отрезков оси Ox при $x < -\alpha$ и $x > \alpha$, то координата β терпит разрыв, равный 2π , а именно, на верхнем берегу $\beta = \pi$, на нижнем берегу $\beta = -\pi$.

Задачи решаются при помощи функции Папковича-Нейбера. Общее решение плоской задачи теории упругости, согласно Папковичу-Нейберу, можно представить через три гармонические функции, поскольку одна из них принимается произвольно. Пользуясь этой произвольностью, принимаем одну из функций равной тождественно нулю.

Приведём выражения перемещений и напряжений через функцию Папковича-Нейбера [1]

$$\begin{aligned} 2GU(x, y) &= -\frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial x} - y \frac{\partial \Phi_2(x, y)}{\partial x} \\ 2GV(x, y) &= (3-4\nu)\Phi_2(x, y) - \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial y} - y \frac{\partial \Phi_2(x, y)}{\partial y} \\ \sigma_y(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left[2(1-\nu)\Phi_2(x, y) - \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial y} \right] - y \frac{\partial^2 \Phi_2(x, y)}{\partial y^2} \\ \tau_{xy}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[(1-2\nu)\Phi_2(x, y) - \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial y} - y \frac{\partial \Phi_2(x, y)}{\partial y} \right] \end{aligned} \quad (2)$$

1. Пусть на участках граничной прямой $y = 0$, а именно, на отрезке $|x| < a$ имеем трещину, а на участках $|x| > a$ имеем полный контакт материалов (рис.1).

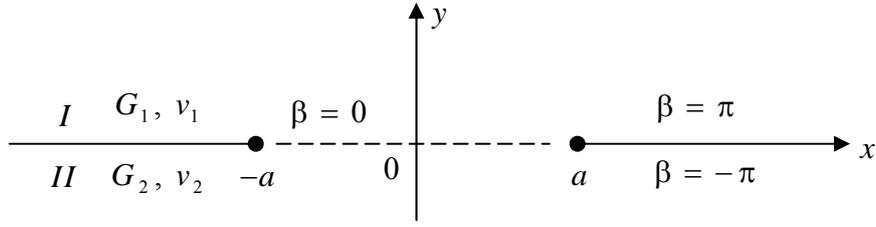


Рис.1

Рассмотрим смешанную краевую задачу, т.е. на одном берегу трещина жёстко закреплена, а на другом берегу заданы нормальные и касательные напряжения

$$\sigma_y^{(1)}(\alpha, 0) = \sigma_1(\alpha); \quad \tau_{xy}^{(1)}(\alpha, 0) = \tau_1(\alpha); \quad U_2(\alpha, 0) = V_2(\alpha, 0) = 0 \quad (3)$$

Предполагается, что функции $\sigma_1(\alpha)$ и $\tau_1(\alpha)$ удовлетворяют условиям разложимости в интеграле Фурье.

На линии контакта имеем полное сцепление материалов, т.е. нормальное и касательное перемещения и напряжения равны:

$$U_1(\alpha, \pi) = U_2(\alpha, -\pi); \quad V_1(\alpha, \pi) = V_2(\alpha, -\pi) \quad (4)$$

$$\sigma_y^{(1)}(\alpha, \pi) = \sigma_y^{(2)}(\alpha, -\pi); \quad \tau_{xy}^{(1)}(\alpha, \pi) = \tau_{xy}^{(2)}(\alpha, -\pi)$$

Подставляя в граничные условия (3) и (4) выражения (2) перемещений и напряжений через гармонические функции $\Phi_0^{(m)}(\alpha, \beta)$ и $\Phi_2^{(m)}(\alpha, \beta)$ ($m = 1, 2$) Папковича-Нейбера, мы приходим к следующей краевой задаче. При этом, следует перейти от производных x и y к производным по α и β [1]

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left[2(1 - \nu_1) \Phi_2^{(1)}(\alpha, \beta) - \Phi_3^{(1)}(\alpha, \beta) \right] \Big|_{\beta=0} = \frac{\alpha \sigma_1(\alpha)}{ch\alpha + 1}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left[(1 - 2\nu_1) \Phi_2^{(1)}(\alpha, \beta) - \Phi_3^{(1)}(\alpha, \beta) \right] \Big|_{\beta=0} = \frac{\alpha \tau_1(\alpha)}{ch\alpha + 1}$$

$$\frac{\partial \Phi_3^{(m)}(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \Big|_{\beta=0} = (3 - 4\nu_2) \Phi_2^{(2)}(\alpha, 0) - \Phi_3^{(2)}(\alpha, 0) = 0 \quad (5)$$

$$\frac{1}{G_1} \left[(3 - 4\nu_1) \Phi_2^{(1)}(\alpha, \pi) - \Phi_3^{(1)}(\alpha, \pi) \right] = \frac{1}{G_2} \left[(3 - 4\nu_1) \Phi_2^{(2)}(\alpha, -\pi) - \Phi_3^{(2)}(\alpha, -\pi) \right]$$

$$\frac{1}{G_2} \frac{\partial \Phi_3^{(2)}(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \Big|_{\beta=-\pi} = \frac{1}{G_2} \frac{\partial \Phi_3^{(2)}(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \Big|_{\beta=-\pi}$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left[2(1 - \nu_1) \Phi_2^{(1)}(\alpha, \beta) - \Phi_3^{(1)}(\alpha, \beta) \right] \Big|_{\beta=\pi} = \frac{\partial}{\partial \beta} \left[2(1 - \nu_2) \Phi_2^{(2)}(\alpha, \beta) - \Phi_3^{(2)}(\alpha, \beta) \right] \Big|_{\beta=-\pi}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left[(1 - 2\nu_1) \Phi_2^{(1)}(\alpha, \beta) - \Phi_3^{(1)}(\alpha, \beta) \right] \Big|_{\beta=\pi} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[(1 - 2\nu_2) \Phi_2^{(2)}(\alpha, \beta) - \Phi_3^{(2)}(\alpha, \beta) \right] \Big|_{\beta=-\pi}$$

где введены новые гармонические функции

$$\Phi_3^{(m)}(x, y) = \frac{\partial \Phi_0^{(m)}(x, y)}{\partial y} \quad (m = 1, 2) \quad (6)$$

Рассматриваемая краевая задача допускает замкнутое решение в биполярных координатах, если представить искомые функции $\Phi_j^{(m)}(\alpha, \beta)$ ($m=1, 2; n=2, 3$) в следующем виде интегралов Фурье:

$$\Phi_n^{(m)}(\alpha, \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[A_n^{(m)}(\lambda) \operatorname{ch}\lambda\beta + B_n^{(m)}(\lambda) \operatorname{sh}\lambda\beta \right] \frac{e^{-i\lambda\alpha}}{\lambda} d\lambda \quad (7)$$

Подставляя (7) в (5), мы приходим к системе линейных алгебраических уравнений для определения величин $A_n^{(m)}(\lambda)$ и $B_n^{(m)}(\lambda)$. После решения этих систем получаем следующие значения для неизвестных величин интегрирования:

$$\begin{aligned} A_2^{(1)}(\lambda) &= \frac{\chi_2 - 1}{2} A_2^{(2)}(\lambda) + \frac{\chi_2 + 1}{2} B_2^{(2)}(\lambda) \operatorname{cth}\lambda\pi - \bar{\sigma}_1(\lambda) \operatorname{cth}\lambda\pi - \bar{\tau}_1(\lambda); \\ A_3^{(1)}(\lambda) &= \frac{\chi_2 - 1}{2} A_2^{(1)}(\lambda) - \bar{\tau}_1(\lambda); \\ B_2^{(1)}(\lambda) &= \frac{\chi_2 + 1}{2} A_2^{(2)}(\lambda) \operatorname{cth}\lambda\pi + \frac{\chi_2 - 1}{2} B_2^{(2)}(\lambda) + \bar{\sigma}_1(\lambda) + \bar{\tau}_1(\lambda) \operatorname{cth}\lambda\pi; \\ B_3^{(1)}(\lambda) &= \frac{\chi_2 + 1}{2} B_2^{(1)}(\lambda) - \bar{\sigma}_1(\lambda); \\ A_3^{(2)}(\lambda) &= \chi_2 A_2^{(2)}(\lambda); B_3^{(2)}(\lambda) = 0; A_2^{(2)}(\lambda) = \frac{\Delta_1(\lambda)}{\Delta(\lambda)}; B_2^{(2)}(\lambda) = \frac{\Delta_2(\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= h_2^2(\lambda) - h_1^2(\lambda); \\ \Delta_1(\lambda) &= -2(\chi_1 + 1)(\bar{\tau}_1(\lambda)h_1(\lambda) + \bar{\sigma}_1(\lambda))h_2(\lambda), h_1(\lambda) = (\chi_1\chi_2 - 1)\operatorname{sh}2\lambda\pi; \\ \Delta_2(\lambda) &= 2(\chi_1 + 1)(\bar{\sigma}_1(\lambda)h_2(\lambda) + \bar{\tau}_1(\lambda)h_1(\lambda)); \\ h_2(\lambda) &= (\chi_1\chi_2 + 2\mu\chi_2 + 1)\operatorname{ch}2\lambda\pi + \chi_1 + \chi_2 - 2\mu\chi_2; \\ \bar{\sigma}_1(\lambda) &= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_1(\alpha)e^{i\lambda\alpha}}{\operatorname{ch}\alpha + 1} d\alpha; \quad \bar{\tau}_1(\lambda) = -\frac{ia}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau_1(\alpha)e^{i\lambda\alpha}}{\operatorname{ch}\alpha + 1} d\alpha; \\ \mu &= \frac{G_1}{G_2}, \quad x_m = 3 - 4\nu_m \quad (m=1, 2) \end{aligned} \quad (9)$$

2. На участках граничной прямой $y=0$, на отрезках $|x| > a$ имеем трещину, а на участках $|x| < a$ имеем полный контакт материалов (рис.2)

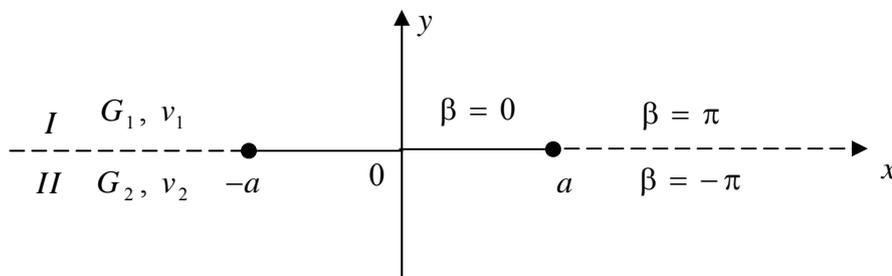


Рис.2

Граничные и контактные условия в этом случае имеют вид:

$$\sigma_y^{(1)}(\alpha, \pi) = \sigma_1(\alpha); \tau_{xy}^{(1)}(\alpha, \pi) = \tau_1(\alpha); U_2(\alpha, -\pi) = F_2(\alpha, -\pi) = 0 \quad (10)$$

$$U_1(\alpha, 0) = U_2(\alpha, 0); V_1(\alpha, 0) = V_2(\alpha, 0); \sigma_1(\alpha, 0) = \sigma_2(\alpha, 0); \tau_{xy}^{(1)}(\alpha, 0) = \tau_{xy}^{(2)}(\alpha, 0)$$

В этом случае $\Phi_n^{(1)}(\alpha, \beta)$ ($m = 1, 2; n = 2, 3$) ищем в следующем виде:

$$\Phi_n^{(m)}(\alpha, \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[A_n^{(m)}(\lambda) \operatorname{ch} \lambda (\pi + (-1)^m \beta) + B_n^{(m)}(\lambda) \operatorname{sh} \lambda (\pi + (-1)^m \beta) \right] \frac{e^{-i\lambda\alpha}}{\lambda} d\lambda \quad (11)$$

После удовлетворения краевым и контактными условиям (10), учитывая (1,2,11) для неизвестных величин $A_n^{(m)}(\lambda)$ и $B_n^{(m)}(\lambda)$, получаем опять значения (8 и 9), только в этом случае $\bar{\sigma}_1(\lambda)$ и $\bar{\tau}_1(\lambda)$ имеют следующие значения:

$$\bar{\sigma}_1(\lambda) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_1(\alpha) e^{i\lambda\alpha}}{\operatorname{ch} \alpha - 1} d\alpha; \bar{\tau}_1(\lambda) = \frac{ia}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau_1(\alpha) e^{i\lambda\alpha}}{\operatorname{ch} \alpha - 1} d\alpha \quad (12)$$

Дадим решение одной конкретной задачи, когда материал однородный $\mu = 1, \chi_1 = \chi_2 = \chi$ и усилия, приложенные к берегам трещин, сводятся к сосредоточенной силе величины P , действующей в точке $y = 0, x = b$. При этом, в первом случае $-a < b < a$ (рис.3) и во втором случае $-b < -a$ или $b > a$ (рис.4.)

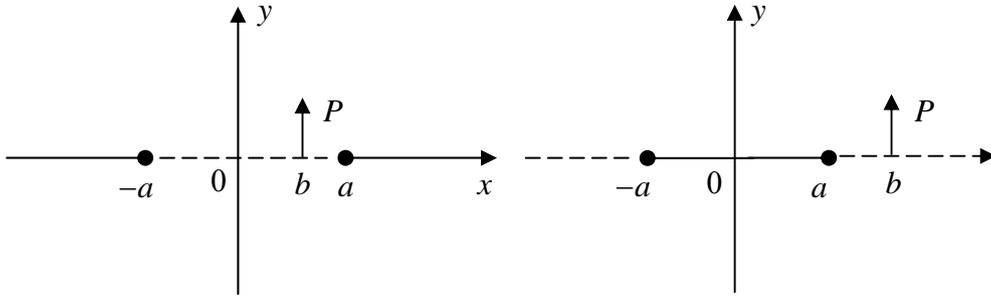


Рис.3

Рис.4

Представляет интерес распределение напряжений на берегу трещин. В первом случае получаем:

$$\sigma_y^{(2)}(\alpha, 0) = -H \cos(\alpha - \alpha_0) \theta; \tau_y^{(2)}(\alpha, 0) = H \sin(\alpha - \alpha_0) \theta, \quad (13)$$

где

$$H = \frac{(\chi+1)P\sqrt{n}}{4\pi\sqrt{\chi}} \cdot \frac{\sqrt{(a+m)(a+n)} + \sqrt{(a-m)(a-n)}}{m^{\frac{3}{2}}(m+n)} \quad (14)$$

$$m = \sqrt{a^2 - x^2}; n = \sqrt{a^2 - b^2}; \theta = \frac{1}{4\pi} \ln \chi; \alpha - \alpha_0 = \ln \left| \frac{(a+x)(a-b)}{(a-x)(a+b)} \right|$$

Во втором случае имеем следующие значения:

$$\sigma_y^{(2)}(\alpha, \pi) = H_1 \cos(\alpha - \alpha_0), \tau_{xy}^{(2)}(\alpha, -\pi) = H_1 \sin(\alpha - \alpha_0) \theta, \quad (15)$$

где

$$H_1 = -\frac{(\chi+1)P\sqrt{n_1}}{4\pi\sqrt{\chi}} \cdot \frac{\sqrt{(x+m_1)(b+n_1)} + \sqrt{(x-m_1)(b-n_1)}}{m_1^{\frac{3}{2}}(xn_1 + bm_1)} \quad (16)$$

$$m_1 = \sqrt{x^2 - a^2}; n_1 = \sqrt{b^2 - a^2}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Ленинград: Наука, 1968. 401с.
2. Попов Г.Я. Конструкция упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подключений. М.: Наука, 1982. 344с.
3. Черепанов Г.П. Механика разрушения композиционных материалов. М.: Наука, 1983. 296 с.
4. Акопян В.Н. Об одной смешанной задаче для составной плоскости, ослабленной трещиной. //Иzv.НАН Армении. Механика. 1995. Т.48. №48. С.57-65.
5. Даштоян Л.Л. Об одной смешанной задаче для составной плоскости с двумя полубесконечными трещинами. //Материалы XII республиканской конф. молодых учёных „Механика”. Ереван: 2003. С.78-82.
6. Арутюнян Л.А. Плоская задача составной плоскости с трещинами. //Межд.Науч.-техн.конф. „Архит. и строит.”. 2008. Ереван: С.34-37.

Сведения об авторе:

Арутюнян Левон Арсенович – к.ф.-м.н., Институт механики НАН Армении
Адрес: 0019, Ереван-19, пр.Маршала Баграмяна 24^б, тел.: 099-67-57-47.

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ В МОДЕЛИРОВАНИИ РАЗРАБОТКИ НЕФТЯНЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ

Астафьев В.И., Ротерс П.В.

В настоящей работе исследована возможность применения эллиптических функций при моделировании разработки нефтяного месторождения.

1. Рассмотрим плоскую нестационарную фильтрацию вязкой слабосжимаемой жидкости в замкнутом резервуаре объёмом $V=h\Delta$, где Δ – площадь резервуара, а h – его толщина. Движение жидкости описывается уравнением неразрывности и законом фильтрации Дарси [1]:

$$\frac{m}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \quad v_x = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad v_y = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (1.1)$$

где ρ и μ – плотность и вязкость жидкости, k и m – проницаемость и пористость пласта, p – давление, v_x , v_y – компоненты вектора скорости.

В случае квазистационарной фильтрации уравнение суммарного баланса жидкости в замкнутом резервуаре объёмом $V=h\Delta$ с расположенной в нем добывающей скважиной дебитом Q можно записать как

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{Q}{h\Delta} \quad (1.2)$$

Общее решение системы уравнений (1.1)-(1.2) в комплексных переменных $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$ записывается в следующем виде:

$$\bar{V} = -\frac{Q}{2\pi h} \left(\frac{1}{z} + F_0'(z) - \frac{\pi}{\Delta} \bar{z} \right); \quad (1.3)$$

$$p = p_w + \frac{Q\mu}{4\pi kh} \left(\ln \frac{z\bar{z}}{r_w^2} + F_0(z) + \overline{F_0(z)} - \frac{\pi}{\Delta} z\bar{z} \right), \quad (1.4)$$

где $\bar{V} = v_x - iv_y$ – комплексно-сопряжённая функция скорости фильтрации, $F_0(z)$ – аналитическая функция, p_w – давление p на контуре скважины r_w .

В состав общего решения (1.3)-(1.4) входит неизвестная аналитическая функция $F_0(z)$, которая находится из условия замкнутости резервуара, т.е. отсутствия притока жидкости через границу резервуара. Если уравнение границы резервуара $z=z(s)$ известно, то функция $F_0(z)$ находится из решения краевой задачи следующего вида:

$$\text{Im} F_0(s) = \frac{2\pi}{\Delta} \Sigma(s) - \theta(s). \quad (1.5)$$

где s – длина дуги точки P на границе резервуара Γ , $\theta(s)$ – полярный угол точки P , а $\Sigma(s)$ – площадь сектора с длиной дуги s .

2. Решение (1.3)-(1.5) относится к случаю, когда скважина размещена в резервуаре (области питания скважины) с заранее известной границей (контуром питания скважины). При многоскважинной системе разработки месторождения область питания и контур питания каждой из скважин, разрабатывающих нефтеносный пласт, зависят как от взаимного расположения скважин, так и от величины их дебитов (интерференция скважин [1]). Чтобы обобщить решение (1.3)-(1.4) на многоскважинную систему, рассмотрим случай, когда месторождение разрабатывается системой добывающих скважин одинаковой мощности Q , размещённых в узлах двоякопериодической решетки L (рис. 1).

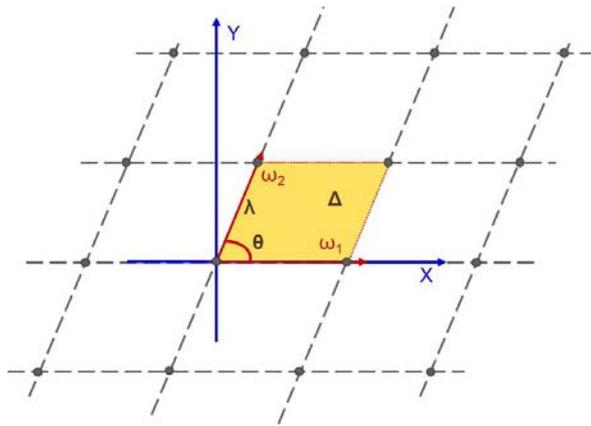


Рис.1. Двоякопериодическая решётка L и её основной параллелограмм периодов.

В этом случае решение (1.3)-(1.4) можно записать в виде [2]

$$\bar{V} = v_x + iv_y = -\frac{Q}{2\pi h} (\zeta(z) + \alpha z - \beta \bar{z}), \quad (2.1)$$

$$p = p_w + \frac{Q}{2\pi kh} [\operatorname{Re}(\ln \sigma(z) + \alpha \frac{z^2}{2}) - \beta \frac{z\bar{z}}{2} - \ln r_w]. \quad (2.2)$$

где $\zeta(z)$ и $\sigma(z)$ – дзета-функция и сигма-функция Вейерштрасса, $\beta = \pi / \Delta$, $\alpha = (\beta \bar{\omega} - 2\zeta(\omega/2)) / \omega$.

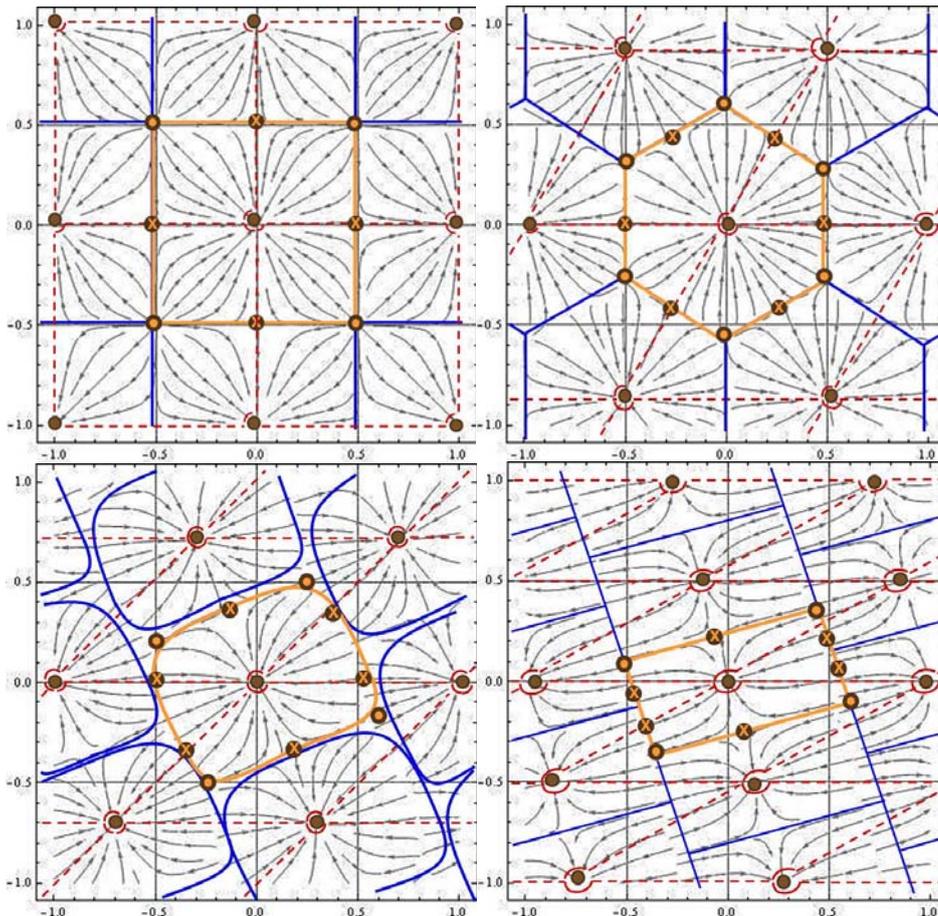


Рис.2. Характер течения жидкости в ромбических решётках. На рисунках показаны линии тока в контурах питания скважин при различных углах θ в вершине ромба, который принимал значения $\pi/2$, $\pi/3$, $\pi/4$ и $\pi/6$, соответственно.

На рис. 2 изображён характер течения жидкости (линии тока) к скважинам в их контурах питания для ромбических решёток с различным углом θ .

Используя выражение (2.2) для распределения давления, можно найти среднее давление $\bar{p}(t)$ в параллелограмме периодов [3]:

$$\bar{p} - p_w = \frac{Q\mu}{2\pi kh} (\ln R - \ln r_w), \quad (2.3)$$

где R – приведённый радиус контура питания скважины, т.е. радиус такого кругового контура питания, у которого при заданной величине депрессии давления $\bar{p}(t) - p_w$ достигается тот же дебит Q . Приведённый радиус контура питания R определяется следующим образом [3]:

$$R = \Delta^{1/2} / (4\pi^2 \operatorname{Im} \tau \left| (qq_1)^{1/6} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})^2 (1 - q_1^{2n})^2 \right|)^{1/2}, \quad (2.4)$$

где $\tau = \omega_2 / \omega_1 = \lambda e^{i\theta}$, $q = e^{i\pi\tau}$, $q_1 = e^{-i\pi/\tau}$ – параметры Якоби.

Как правило, выражение для величины депрессии давления $\bar{p}(t) - p_w$ в скважинах с различными контурами питания записывается в виде [4]:

$$\bar{p} - p_w = \frac{Q\mu}{4\pi kh} \ln \left(\frac{4\Delta}{\gamma C_A r_w^2} \right), \quad (2.5)$$

где $\gamma = 1.781$, C_A – безразмерный коэффициент формы контура питания (коэффициент Дитца), Δ – площадь контура питания. Из (2.3) и (2.5) следует зависимость между коэффициентом Дитца C_A и приведённым радиусом R :

$$\gamma C_A = 4\Delta / R^2 = 16\pi^2 \operatorname{Im} \tau \left| (qq_1)^{1/6} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})^2 (1 - q_1^{2n})^2 \right|. \quad (2.6)$$

Следует отметить, что величина C_A в работе [4] была определена численно с помощью метода «мнимых источников» только для весьма ограниченного числа контуров питания только прямоугольной и треугольной формы. Аналитическое выражение (2.4) для параметра R позволяет вычислять его значение (а, значит, и значение C_A по формуле (2.6)) для любого размещения скважин в любой двоякопериодической решётке, т.е. для произвольной формы контура питания. В частности, в случае прямоугольной решётки ($\theta = \pi/2$, $\tau = i\lambda$), формулу (2.6) можно представить в следующем виде [3]:

$$\gamma C_A = 16KK'(2kk_1)^{2/3}, \quad (2.7)$$

где $K = K(k)$ и $K' = K(k_1)$ – полные эллиптические интегралы, k и k_1 – основной и дополнительный модули этих интегралов.

Результаты вычислений C_A с использованием (2.7) изображены на рис. 3а. Из анализа зависимости $C_A(\lambda)$ видно, что квадратная решётка является наиболее оптимальной среди всех прямоугольных решёток размещения скважин, т.к. коэффициент формы такой решетки $C_A(\lambda)$ максимален. Является ли квадратная решётка размещения скважин наиболее производительной из всех возможных способов размещения скважин при разработке месторождения? Для этого рассмотрим выражение (2.6) и найдем τ , при котором величина C_A будет максимальной. На основании симметричной зависимости C_A от $q = e^{i\pi\tau}$ и $q_1 = e^{-i\pi/\tau}$ следует, что наибольшее значение величина C_A будет принимать для ромбических решёток при $\tau = e^{i\theta}$.

В этом случае формула (2.6) примет следующий вид:

$$\gamma C_A(\theta) = 16\pi^2 \sin \theta \left| q^{1/3} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})^4 \right|, \quad (2.8)$$

Результаты вычислений по формуле (2.8) характера изменения функции $C_A(\theta)$ в зависимости от величины угла θ для ромбической решетки представлены на рис 3б. Из этих результатов видно, что оптимальными по коэффициенту формы C_A являются ромбические решётки с углом $\theta = \pi/3$ и $\theta = 2\pi/3$, которые дают гексагональный контур питания скважины (рис. 2б), а квадратная решётка с углом $\theta = \pi/2$ и квадратным контуром питания (рис. 2а) даёт несколько меньшее значение C_A .

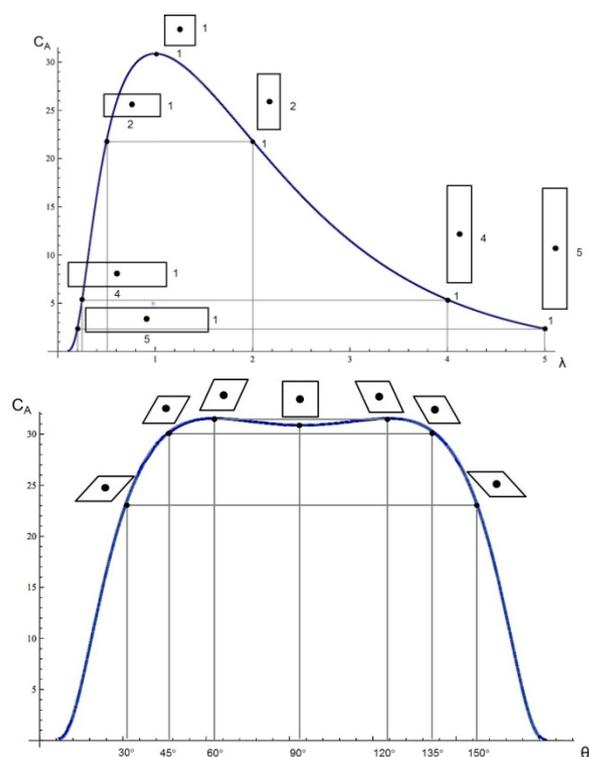


Рис.3. График зависимости коэффициента C_A от параметра λ для прямоугольных решёток (а) и от угла θ для ромбических решёток (б).

ЛИТЕРАТУРА

1. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. Москва-Ижевск: ИКИ, 2004. 640с.
2. Астафьев В.И., Ротерс П.В. Моделирование двоякопериодических систем добывающих скважин // Вестник СамГУ. 2010. № 4(78). С.5-11.
3. Астафьев В.И., Ротерс П.В. Моделирование двоякопериодических систем добывающих скважин. 2. Коэффициент продуктивности // Вестник СамГУ. 2011. № 8(89). С.118-127.
4. Dietz D.N. Determination of Average Reservoir Pressure from Build-Up Surveys // JPT. 1965. V.17. No. 8. P. 955-959.

Сведения об авторах:

Астафьев Владимир Иванович – профессор кафедры безопасности информационных систем, Самарский государственный университет, механико-математический факультет,

Тел.: +7(846)337-99-41

Е-mail: vlast@ssu.samara.ru

Ротерс Павел Вячеславович – аспирант кафедры безопасности информационных систем, Самарский государственный университет, механико-математический факультет,

Тел.: +7 (846) 337-99-41, Е-mail: roters@ssu.samara.ru

ВЫНУЖДЕННЫЕ ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПРОДОЛЬНОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ СИЛЫ

Багдасарян Г.Е., Марухян С.А.

Рассматриваются колебания частично заполненной жидкостью цилиндрической оболочки под действием продольной гармонической силы. Учтено, что под действием гидростатического давления жидкости оболочка выпучивается и вследствие этого продольная сила приобретает дополнительное свойство, как источник поперечных колебаний. Исследованы свойства основных характеристик, возбуждаемых указанным образом вынужденных колебаний (сопутствующих продольным колебаниям) в зависимости от глубины заполняющей жидкости.

1. Основные уравнения.

Рассмотрим изотропную круговую цилиндрическую оболочку с жёстким дном и постоянной толщины h , частично заполненной несжимаемой жидкостью. Будем пользоваться цилиндрическими координатами (α, r, θ) , совместив полярную ось α с осью оболочки. Пусть рассматриваемая гидроупругая система совершает колебания под действием гармонической во времени продольной силы $P(t) = P_0 + P_1 \cos \theta t$.

За основу исследования указанных колебаний принимаются следующие предположения :

- а) гипотеза Кирхгофа – Лява о недеформируемых нормалях [1];
- б) общеизвестные упрощения теории оболочек с большим показателем изменчивости [1];
- в) жидкость в оболочке совершает потенциальное движение;
- г) волновое движение на свободной поверхности жидкости слабо влияет на колебания оболочки [2,3].

Рассматриваемая задача колебания решается в линейной постановке поэтапно: сперва решается задача выпучивания оболочки под действием гидростатического давления жидкости, а затем определяется дополнительное напряжённо-деформированное состояние оболочки, вызванное силой $P(t)$, с учётом начальных перемещений (возникающих вследствие гидростатического давления) и гидродинамического давления жидкости (возникающее вследствие колебания оболочки).

1.1 Выпучивание оболочки под действием гидростатического давления. Внутреннее гидростатическое давление Z_0 определяется следующим образом:

$$Z_0 = \begin{cases} \rho_0 g (b - \alpha) & \text{при } 0 < \alpha \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 & \text{при } b < \alpha \leq l, 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \quad (1.1)$$

где ρ_0 – плотность жидкости, g – ускорение силы тяжести, l – длина оболочки, b – глубина жидкости.

Принимая, что края оболочки однородно закреплены по координате θ (в дальнейшем рассматривается случай шарнирного опирания) в силу (1.1) заключаем, что напряжённо-деформированное состояние является осесимметричным. Тогда определение прогиба W_0 оболочки этого состояния, в силу принятых предложений, сводится к решению следующего уравнения:

$$D \frac{d^4 W_0(\alpha)}{d\alpha^4} + \frac{Eh}{R^2} W_0(\alpha) = Z_0, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (1.2)$$

при условиях

$$W_0(\alpha) = 0, \quad \frac{d^2 W_0(\alpha)}{d\alpha^2} = 0, \quad \text{на торцах } \alpha = 0, \alpha = l \text{ оболочки.} \quad (1.3)$$

Здесь D – цилиндрическая жёсткость, E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона, R – радиус оболочки.

Решение задачи (1.2) - (1.3) имеет вид:

$$W_0(\alpha) = \sum_{r=1}^{\infty} F_r \sin \lambda_{0r} \alpha, \quad F_r = \frac{2\rho_0 g}{D\lambda_{0r}^4 + Eh/R^2} \frac{\lambda_{0r} b - \sin \lambda_{0r} b}{\lambda_{0r}^2 l}, \quad \lambda_{0r} = \frac{\pi r}{l}. \quad (1.4)$$

В результате образующая оболочки получает кривизну:

$$\frac{1}{k_1} = -\frac{d^2 W_0}{d\alpha^2} = \sum_{r=1}^{\infty} \lambda_{0r}^2 F_r \sin \lambda_{0r} \alpha. \quad (1.5)$$

Вместе с тем, согласно (1.4) и обобщённому закону Гука, появляются окружные усилия T_{22}^0

$$T_{22}^0 = \frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{W_0(\alpha)}{R} \quad (1.6)$$

При получении (1.6) учтено, что на торце $\alpha = 0$ точки оболочки неподвижны, а торец $\alpha = l$ в первом этапе не загружен.

1.2 Уравнения и граничные условия движения гидроупругой системы при действии продольного усилия. При составлении уравнения движения, в случае действия продольной силы $P(t)$, необходимо учитывать не только (1.4) и (1.5), а также то, что в оболочке появляется осевое усилие $T_0 = -P(t)/2\pi R$. Следовательно, должны исходить из нелинейных уравнений движения оболочки, учитывающих начальные прогибы и напряжение [4]. Указанные уравнения с учётом осесимметричности задачи после линеаризации принимают вид:

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^4} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} - T_0 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \rho h \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} = Z + T_0 \frac{d^2 W_0}{d\alpha^2} \quad (1.7)$$

$$\frac{1}{Eh} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} = 0$$

где w – дополнительный прогиб, Φ – функция напряжений, ε – коэффициент линейного затухания, ρ – плотность материала оболочки, Z – возмущённое давление жидкости.

Из интеграла Коши – Лагранжа имеем:

$$Z = -\rho_0 \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{r=R} \quad (1.8)$$

где φ – потенциальная функция возмущённого движения жидкости, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = 0 \quad (1.9)$$

в области, занятой жидкостью ($0 \leq \alpha \leq b$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq R$), и следующим краевым условиям на границе этой области:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial r} &= \frac{\partial w}{\partial t} \text{ при } r=R, \quad 0 \leq \alpha \leq b, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} &= 0 \text{ при } \alpha=0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq R \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= 0 \text{ при } \alpha=b, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq R \end{aligned} \quad (1.10)$$

Рассматривая систему уравнений (1.7) и учитывая (1.8) - (1.10), замечаем, что данная задача сведена к задаче поперечных вынужденных колебаний, частично заполненной жидкостью цилиндрической оболочки под действием давления с интенсивностью $T_0 d^2 W_0 / d\alpha^2$. А это значит, что учёт влияния гидростатического давления жидкости в случае действия продольного гармонического усилия возбуждает поперечные резонансные колебания в цилиндрической

оболочке (следовательно, и в рассматриваемой гидроупругой системе). Эти колебания сопутствуют продольным колебаниям (сопутствующие вынужденные поперечные колебания) и обусловлены исключительно гидростатическим давлением жидкости.

2. Исследование сопутствующих вынужденных поперечных колебаний.

Решение системы (1.7), удовлетворяющее известным условиям шарнирного опирания,, запишем в форме

$$w = \sum_{s=0}^{\infty} w_s(t) \sin \lambda_s \alpha, \\ \Phi = \sum_{s=0}^{\infty} \Phi_s(t) \sin \lambda_s \alpha, \quad (2.1)$$

где $\lambda_s = (m+s)\pi/l$, m – число полуволн изогнутой поверхности вдоль образующей, w_s и Φ_s – искомые функции.

Исходя из (2.1), гармоническую функцию φ представим в виде

$$\varphi = \sum_{s=0}^{\infty} B_s I_0(\lambda_s r) \sin \lambda_s \alpha + \sum_{j=1}^{\infty} (C_j \operatorname{sh} \alpha_j \alpha + D_j \operatorname{ch} \alpha_j \alpha) J_0(\alpha_j r), \quad (2.2)$$

где I_0, J_0 – функции Бесселя чисто мнимого и действительного аргумента первого рода, $B_s(t), C_j(t), D_j(t)$ – неизвестные величины, определяемые из условий (1.10), α_j – корни уравнения $J_0'(\alpha_j R) = 0$.

Подставляя (2.1) и (2.2) в граничные условия (1.10) и во второе уравнение системы (1.7), определяются величины $B_s(t), C_j(t), D_j(t)$ и $\Phi_s(t)$, выраженные через функции $w_s(t)$ (выражения указанных функций можно найти в работе [5]).

Для определения $w_s(t)$ воспользуемся первым уравнением системы (1.7). Подставляя (1.4), (2.1) и (2.2) (с учётом найденных выражений для $B_s(t), C_j(t), D_j(t)$ и $\Phi_s(t)$) в первое уравнение (1.7) и решая его методом Бубнова – Галеркина для определения $w_s(t)$, получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами:

$$\frac{d^2 w_k}{dt^2} + \varepsilon \frac{dw_k}{dt} + \Omega_k^2 (1 - 2\mu_k \cos \theta t) w_k + \sum_{s=0}^{\infty} m_{ks} \frac{d^2 w_s}{dt^2} = q_k \frac{P_0 + P_1 \cos \theta t}{P_{0k}^*} \quad (2.3)$$

$(k = 0, 1, 2, \dots)$.

Здесь

$$\Omega_k^2 = \frac{1}{\rho h} \frac{\lambda_k^2}{2\pi R} (P_{0k}^* - P_0), \quad P_{0k}^* = \frac{2\pi R}{\lambda_k^2} \left[D\lambda_k^4 + \frac{Eh}{R^2} \right], \\ q_k(t) = \frac{2g}{\lambda_k R} \frac{\rho_0}{\rho} \left(1 - \frac{\sin \lambda_k b}{\lambda_k b} \right) \frac{b}{h}, \quad \mu_k = \frac{P_1}{2(P_{0k}^* - P_0)}, \\ m_{ks} = \rho_0 \left\{ A_s^{(1)} \left[\frac{\sin(\lambda_s - \lambda_k) b}{2(\lambda_s - \lambda_k)} - \frac{\sin(\lambda_s + \lambda_k) b}{2(\lambda_s + \lambda_k)} \right] + \sum_{j=1}^{\infty} \left[A_{sj}^{(2)} \frac{\alpha_j \operatorname{ch} \alpha_j b \sin \lambda_k b - \lambda_k \operatorname{sh} \alpha_j b \cos \lambda_k b}{\lambda_k^2 + \alpha_j^2} \right. \right. \\ \left. \left. + A_{sj}^{(3)} \frac{\lambda_k + \alpha_j \operatorname{sh} \alpha_j b \sin \lambda_k b - \lambda_k \operatorname{ch} \alpha_j b \cos \lambda_k b}{\lambda_k^2 + \alpha_j^2} \right] \right\} \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2}.$$

где Ω_k – частоты собственных колебаний оболочки, нагруженной постоянной составляющей осевой силы, μ_k – коэффициенты возбуждения, m_{ks} – коэффициенты присоединённых масс, $A_s^{(1)}$, $A_{sj}^{(2)}$, $A_{sj}^{(3)}$ – известные коэффициенты, выражение которых приведены в [5].

В дальнейшем ограничимся рассмотрением случая одночленной аппроксимации ($s=0, k=0$). Заметим, что λ_k при $k=0$ зависит от m и равняется $m\pi/l$. Поэтому основные неизвестные при $s=0$ будут зависеть от m . Тогда из уравнений (2.3) имеем

$$\frac{d^2 f_m}{dt^2} + \varepsilon_m \frac{df_m}{dt} + \Omega_m^2 (1 - 2\mu_m \cos \theta t) f_m = q_m \frac{P_0 + P_1 \cos \theta t}{P_{0m}^*} \quad (2.4)$$

где введены следующие обозначения:

$$f_m = w_0(m, t), \quad M(m) = m_{00}, \quad \varepsilon_m = \frac{\varepsilon}{1 + M(m)},$$

$$\Omega_m^2 = \frac{\Omega_0^2(m)}{1 + M(m)}, \quad q_m = \frac{q_0(m)}{1 + M(m)}$$

Задавшись целью исследовать колебания системы вблизи $\theta = \Omega_m$, ищем решения (2.4) в виде [6]

$$f_m = c_m + a_m \sin \theta t + b_m \cos \theta t \quad (2.5)$$

Подставляя (2.5) в уравнение (2.4), приходим к системе неоднородных линейных алгебраических уравнений относительно c_m , a_m , b_m . Предполагая, что гидроупругая система находится вне второй области динамической неустойчивости, заключаем, что определитель указанной системы отличен от нуля. Решая эту систему, находим коэффициенты c_m , a_m , b_m и с их помощью следующие выражения для амплитуды $A_m = \sqrt{a_m^2 + b_m^2}$ вынужденных колебаний:

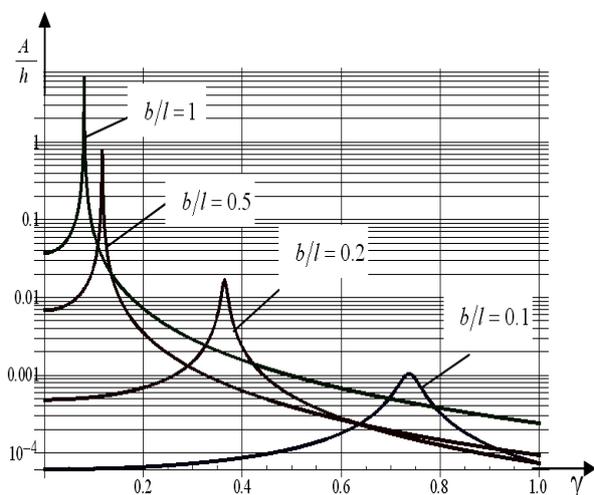
$$A_m = \frac{\sqrt{\Delta^2 \gamma^2 + (1 - \gamma^2 (1 + M(m)))^2}}{\left| (1 - \gamma^2 (1 + M(m)))^2 - 2\mu_m^2 (1 - \gamma^2 (1 + M(m))) + \Delta^2 \gamma^2 \right|} \frac{2\mu_m F_m}{1 - P_0/P_m^*}, \quad (2.6)$$

где

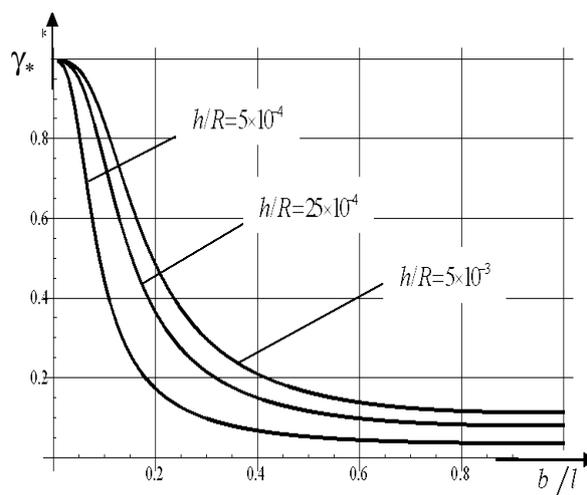
$$\Delta = \frac{\varepsilon}{\Omega_0(m)}, \quad \gamma = \frac{\theta}{\Omega_0(m)}.$$

Из (2.6) видно, что амплитуда поперечных колебаний в зависимости от частоты продольной силы γ имеет точку максимума, которая с помощью соответствующего выбора параметров задачи должна находиться вне второй области динамической неустойчивости. Значения относительной частоты γ_* , при которых амплитуда принимает максимальные значения, являются резонансными частотами вынужденных колебаний.

Проведено численное исследование основных характеристик (резонансная частота и амплитуда) сопутствующих вынужденных колебаний в зависимости от глубины заполнения жидкости. Значения A_m в зависимости от γ приведены на фиг.1, в случае «дюралюминиевая оболочка – вода» ($E = 7 \times 10^{10} \text{ н/м}^2$, $\rho/\rho_0 = 2.7$, $\nu = 0.3$), при $m=1$, $R=2m$, $l=2R$, $h=5 \times 10^{-3} m$, $P_0/P_m^* = 0.9$, $\mu_m = 0.05$, $\Delta = 0.08$ и при различных значениях b/l . При тех же значениях физико-геометрических параметров на фиг.2 приведена зависимость γ_* от b/l , при различных h/R .



Фиг. 1



Фиг. 2

Формула (2.6) и приведённые кривые показывают, что:

- резонансная частота существенно уменьшается с увеличением глубины заполняющей жидкости;
- амплитуда сопутствующих вынужденных колебаний при резонансе является монотонно возрастающей функцией от величины γ ;
- указанные влияния намного усиливаются с уменьшением относительной толщины h/R оболочки.

ЛИТЕРАТУРА

- Власов В.З. Общая теория оболочек и её приложение в технике. М.: Гостехиздат, 1949.
- Mixon John S., Herr Robert W. An investigation of the vibration characteristics of pressurized thin-walled circular cylinders partly filled with liquid. Techn. Rept. NASA, Nr. R – 145, 1962.
- Кубенко В.Д., Ковальчук П.С. Нелинейные задачи динамики упругих оболочек, частично заполненных жидкостью.// Прикладная механика. 2000. Т.36. № 4.
- Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем .М.: Наука, 1967.
- Багдасарян Г.Е., Гнуни В.Ц. Параметрические колебания цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью переменной глубины.// Прикладная механика. 1966. Т.2. №3.
- Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1956.

Сведения об авторах:

Багдасарян Геворг Ервандович – академик НАН РА, профессор, ЕГУ, факультет информатики и прикладной математики, Тел.: (374 10) 55 29 64, E-mail: Gevorgb@rau.am

Марухян Сатик Арамовна – младший научный сотрудник института механики НАН Армении, Тел.: (374 93) 37 25 04, E-mail: satineh.marukhyan@gmail.com

РЕГУЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ВЫНУЖДЕННЫХ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕЙ ПЛАСТИНКИ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н., Микилян М.А.

На основе нелинейной теории магнитоупругости тонких пластин [1], аналогично [2,3], получены уравнения и граничные условия нелинейной динамики идеально проводящей пластинки в наклонном магнитном поле. Эти уравнения кроме обычного нелинейного члена третьего порядка (характерного для классических задач упругих колебаний гибких пластинок) содержит также новый член квадратной нелинейности магнитоупругого происхождения. Появление указанного нелинейного члена обусловлено возникновением продольного усилия в срединной плоскости пластинки, как результат взаимодействия продольного составляющего индуцированного тока проводимости с поперечной составляющей внешнего магнитного поля. А это значит, что характер магнитоупругих нелинейных колебаний пластинки качественно идентичен характеру нелинейных упругих колебаний гибких оболочек. Частный случай сформулированной здесь краевой задачи (задача собственных нелинейных магнитоупругих колебаний) исследован в работах [2,3]. Получена формула для определения частоты нелинейных магнитоупругих колебаний в зависимости от амплитуды колебаний и от величины напряжённости внешнего магнитного поля. Показано, что в зависимости от ориентации внешнего магнитного поля, характер нелинейных магнитоупругих колебаний пластинок, в отличие от классического случая, может быть мягким. В данной работе получено приближённое решение поставленной задачи в случаях нелинейных вынужденных и параметрических колебаний. Исследованы влияния как ориентации, так и величины напряжённости заданного магнитного поля на характер вынужденных колебаний на величину ширины области динамической неустойчивости и на амплитуду нелинейных вынужденных и параметрических колебаний. Показано, что существование резонансных колебаний около частоты $\theta = 2\Omega$ обусловлено исключительно наличием наклонного магнитного поля ($H_{01}H_{03} \neq 0$).

1. Основные уравнения

Пусть упругая изотропная идеально проводящая пластинка постоянной толщины $2h$ отнесена к декартовой системе координат x_1, x_2, x_3 так, что срединная плоскость совпадает с координатной плоскостью x_1, x_2 . Пластинка, сжатая продольным усилием интенсивности $P(t) = p_0 + p_1 \cos \theta t$, занимает область $(0 \leq x_1 \leq a, |x_2| < \infty, |x_3| < h)$, и под действием поперечной нагрузки $Q(x_1, t)$ колеблется в вакууме при наличии внешнего постоянного магнитного поля с заданным вектором напряжённости $\vec{H}(H_{01}, 0, H_{03})$. Граничные условия на краях пластинки $x_1 = 0$ и $x_1 = a$ таковы, что пластинка колеблется по форме цилиндрической поверхности с образующими параллельными координатной линии Ox_2 (все величины не зависят от координаты x_2). Магнитная проницаемость материала пластинки считается равной единице.

Будем пользоваться основными предположениями нелинейной теории магнитоупругости гибких пластин [1], считая справедливой гипотезу недеформируемых нормалей. Будем считать также, что влиянием тангенциальных составляющих сил инерции и токов смещения на характеристики магнитоупругих колебаний пластинки можно пренебречь.

На основе принятых предположений, используя результаты работ [2,3], исследование поведения возмущений рассматриваемой пластинке, сводится к решению следующего нелинейного дифференциального уравнения относительно прогиба $w(x_1, t)$ пластинки:

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\rho h \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} + \left[P(t) - \frac{h}{2\pi} \left(H_{03}^2 + \frac{H_{01}^2}{kh} \right) - \frac{3H_{01}H_{03}}{2\pi k} \frac{\partial w}{\partial x_1} - \frac{Ehr}{a(1-\nu^2)} \int_0^a \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 dx_1 \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = Q(x_1, t). \quad (1.1)$$

при обычных условиях закрепления её краёв (условия относительно w). Уравнение (1.1) получено в предположении, что кромка пластинки $x_1 = 0$ неподвижна в своей плоскости, а кромка $x_1 = a$ жёстко заделана с упругой идеально проводящей диафрагмой, препятствующей

сближению кромок пластинки. В (1.1) кроме обычных обозначений ($D = 2Eh^3 / 3(1 - \nu^2)$ – цилиндрическая жёсткость, ρ – плотность, ε – коэффициент линейного затухания материала пластинки), введён также параметр $r = \left[1 + lE(1 - \nu_1^2)h(aE_1(1 - \nu^2)h_1)^{-1} \right]^{-1}$, характеризующий влияние упругой диафрагмы. Здесь $E_1, \nu_1, 2h_1$ и l – модуль упругости, коэффициент Пуассона, толщина и ширина диафрагмы.

Характерной особенностью уравнения (1.1) является то, что в нём, кроме обычного нелинейного члена третьего порядка (последний член в левой части (1.1)), появился новый член квадратичной нелинейности магнитоупругого происхождения (предпоследний член в левой части (1.1)). Появление указанного нелинейного члена обусловлено возникновением продольного усилия в срединной плоскости пластинки (результат взаимодействия индуцированного в направлении оси Ox_2 токи проводимости с поперечной составляющей H_{03} внешнего магнитного поля). А это значит, что магнитоупругие нелинейные колебания рассматриваемой пластинки качественно могут иметь характер упругих нелинейных колебаний цилиндрической панели [4]. В частности, как показано в [2,3], зависимость между амплитудой и частотой свободных колебаний рассматриваемой магнитоупругой системы может иметь мягкий характер, то есть с увеличением амплитуды частота колебаний может уменьшаться. Отметим [4], что в отсутствии магнитного поля характер нелинейных колебаний пластин, в отличие от случаев оболочек, исключительно жёсткого характера, то есть с увеличением амплитуды частота колебаний возрастает.

На основе уравнения (1.1) исследуем вопросы нелинейной динамики пластинки с одним заделанным ($x_1 = a$) и другим шарнирно опёртым ($x_1 = 0$) краем. С этой целью решение уравнения (1.1), удовлетворяющим указанным краевым условиям, представим в виде

$$w = f(t) \left[\left(\frac{x_1}{a} \right)^4 - \frac{3}{2} \left(\frac{x_1}{a} \right)^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{x_1}{a} \right) \right] = f(t)X(x_1) \quad (1.2)$$

Подставляя (1.2) в (1.1) и используя метод Галеркина для определения неизвестной функции $f(t)$, получим следующее нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \varepsilon \frac{d\xi}{dt} + \Omega^2 \left((1 - \delta P(t))\xi + \beta\xi^2 + \gamma\xi^3 \right) = q(t) \quad (1.3)$$

где

$$\xi = \frac{f(t)}{2h}, \quad \Omega^2 = \frac{D}{2\rho h} \frac{238.7\alpha}{a^4}, \quad \alpha = 1 + \frac{1 - \nu^2}{28E\pi} \left(\frac{a}{h} \right)^2 \left(H_{03}^2 + \frac{H_{01}^2}{kh} \right), \quad \gamma = \frac{6}{245} \frac{r}{\alpha}, \quad (1.4)$$

$$\beta = \frac{3(1 - \nu^2)}{112\pi kh} \left(\frac{a}{2h} \right) \frac{H_{01}H_{03}}{\alpha E}, \quad \delta = \frac{1 - \nu^2}{14E\alpha h} \left(\frac{a}{h} \right)^2, \quad q(t) = \frac{630}{19ah^2\rho} \int_0^a Q(x_1, t)X(x_1)dx_1,$$

Ω – собственная частота при малых магнитоупругих колебаниях.

На основе (1.3) рассмотрим нелинейные вынужденные и параметрические колебания рассматриваемой магнитоупругой системы.

2. Вынужденные нелинейные колебания

Рассмотрим задачу вынужденных колебаний ($P(t) = 0$), принимая $Q(x_1, t) = q_0 \cos \theta t$, где q_0 – заданная постоянная величина. Тогда уравнение (1.3) примет вид:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \varepsilon \frac{d\xi}{dt} + \Omega^2 \left(\xi + \beta\xi^2 + \gamma\xi^3 \right) = q \cos \theta t, \quad q = \frac{47.25}{19} \frac{q_0}{\rho h^2} \quad (2.1)$$

Из (2.1) в линейном приближении получаем уравнение

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \varepsilon \frac{d\xi}{dt} + \Omega^2\xi = q \cos \theta t, \quad (2.2)$$

решение которого имеет вид

$$\xi = A e^{-\frac{\varepsilon}{2}t} \cos(\Omega t + \beta_1) + b \cos(\theta t + \beta_2),$$

где A и β_1 – произвольные постоянные, а

$$b = q / \sqrt{(\Omega^2 - \theta^2)^2 + \varepsilon^2 \theta^2}, \quad \text{tg } \delta = \varepsilon \theta / (\theta^2 - \Omega^2). \quad (2.3)$$

В (2.2) существенным является второй член, так как первый экспоненциально убывает со временем и решение (2.4) через некоторый промежуток времени фактически имеет вид

$$\xi = b \cos(\theta t + \delta). \quad (2.4)$$

Решение уравнения (2.1) в случае $q = 0$ методом последовательных приближений найдено в [5] и имеет следующий вид:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \dots \quad (2.5)$$

$$\xi_1 = b \cos \bar{\Omega} t, \quad \xi_2 = -\frac{\beta b^2}{2} \left(1 + \frac{1}{3} \cos 2\bar{\Omega} t \right), \quad \xi_3 = -\frac{b^3}{16} \left(\frac{\beta^2}{3} - \frac{\gamma}{2} \right) \cos 3\bar{\Omega} t, \quad (2.6)$$

$$\bar{\Omega} = \Omega_0 + \Omega_1 + \Omega_2 + \dots, \quad (2.7)$$

$$\Omega_0 = \Omega, \quad \Omega_1 = 0, \quad \Omega_2 = \left(\frac{3\gamma}{8} - \frac{5\beta^2}{12} \right) \Omega b^2. \quad (2.8)$$

Вернемся к случаю вынужденных нелинейных колебаний ($q \neq 0$). Рассмотрим частный случай обычного резонанса, т.е. $\theta = \Omega + \varphi$. В формуле (2.3), заменив Ω на нелинейное значение частоты $\bar{\Omega}$, по формуле (2.8) получим [5,6]

$$b^2 \left[\left(\varphi - \varkappa b^2 \right)^2 + \frac{\varepsilon^2}{4} \right] = \frac{q^2}{4\bar{\Omega}^2}, \quad \varkappa = \Omega \left(\frac{3\gamma}{8} - \frac{5\beta^2}{12} \right). \quad (2.9)$$

Уравнение (2.9) – кубическое по отношению к b^2 , и его вещественные корни определяют амплитуду вынужденных колебаний. Начиная с определённого значения $q = q_* = \frac{8\Omega^2\varepsilon^2}{|k|}$, при каждом значении $q > q_*$ существует определённая область частот, в котором уравнение (2.9) имеет три вещественных корня [5]. Границы этой области определяются условием

$$\varphi^2 + \frac{\varepsilon^2}{4} - \varkappa \varepsilon b^2 + 3\varkappa^2 b^4 = 0. \quad (2.10)$$

Решая уравнения (2.10) и (2.9), находим точки поворота кривой (2.9) C и D (рис.1).

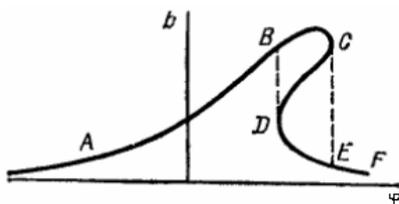


Рис.1

Отрезок CD соответствует неустойчивым колебаниям системы [7]. При постепенном увеличении частоты внешней силы амплитуда вынужденных колебаний возрастает, следуя кривой ABC . В точке C происходит “срыв” амплитуды, которая скачком падает до значения, соответствующего точке E , и затем (при дальнейшем увеличении частоты) меняется вдоль кривой EF . Если теперь уменьшить частоту, то амплитуда вынужденных колебаний будет меняться вдоль кривой FD , в точке D скачком возрастёт до точки B и затем будет уменьшаться вдоль BA [5].

Нелинейность колебаний приводит к появлению существенно новых типов резонансов, т.е. резонансов на обертонах и на кратных частотах собственных колебаний.

Следует отметить, что эти резонансы имеют автоколебательный характер и существенно отличаются от параметрически возбуждаемых колебаний, хотя и возникают на одних и тех же частотах (см. параграф 3). Случай $\theta = \Omega/2 + \varphi$ и аналогичные ему приводят к возникновению резонансов рассмотренного выше характера, но с меньшей интенсивностью [5,7].

Пусть $\theta = 2\Omega + \varphi$. Тогда в областях неустойчивости аналогичным образом, как выше, для амплитудно-частотной зависимости получается следующее представление [5]:

$$b = 0 \quad (\text{I}), \quad b^2 = \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\varphi}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta q}{6}\right)^2 - \varepsilon^2} \right] \quad (\text{II}), \quad b^2 = \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\varphi}{2} - \sqrt{\left(\frac{\beta q}{6}\right)^2 - \varepsilon^2} \right] \quad (\text{III}) \quad (2.11)$$

Зависимость b от φ изображена на рис.2. Точки B и C отвечают значениям $\varphi = \pm \sqrt{(\beta q/3)^2 - 4\varepsilon^2}$. Слева от точки возможно лишь значение $b = 0$, т.е. резонанс отсутствует и колебания не возбуждаются. В интервале между B и C имеем два корня: $b = 0$ (отрезок BC на рис.2) и выражение (2.11, II) (ветвь BE). Наконец, справа от точки C существуют все три корня (2.11). Однако, не все эти значения отвечают устойчивому колебательному режиму.

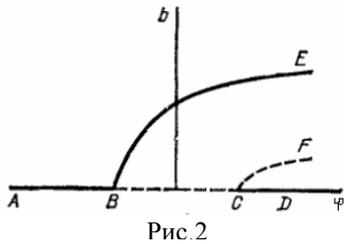


Рис.2

Значение $b = 0$ неустойчиво на участке BC и можно показать также, что всегда неустойчив режим, соответствующий корню (2.11, III) (промежуточному между двумя другими). На рис.2 неустойчивые значения изображены штриховой линией [5]. Из формул (2.14) и (2.15) видно, что существование резонансных колебаний около частоты $\theta = 2\Omega$ обусловлено исключительно наличием наклонного магнитного поля. Если магнитное поле не наклонное ($H_{01}H_{03} = 0$), то возможность возбуждения резонансных колебаний такого типа исключается.

3. Нелинейные параметрические колебания

Принимая $Q(x_1, t) \equiv 0$ и $p(t) = p_0 + p_1 \cos \theta t$, из (1.3) получим следующее дифференциальное уравнение с периодическими коэффициентами:

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + \varepsilon \frac{d \xi}{dt} + \omega^2 (\xi + \bar{\beta} \xi^2 + \bar{\gamma} \xi^3) = 2\mu \omega^2 \cos \theta t \cdot \xi, \quad (3.1)$$

$$\omega^2 = \Omega^2 \left(1 - \frac{p_0}{p_*} \right), \quad \mu = \frac{p_1}{2(p_* - p_0)}, \quad \bar{\beta} = \beta \frac{p_*}{p_* - p_0}, \quad \bar{\gamma} = \gamma \frac{p_*}{p_* - p_0}, \quad p_* = \frac{1}{\delta}$$

описывающее нелинейные параметрические колебания рассматриваемой магнитоупругой системы.

Пусть $\theta = 2\omega + \varphi$, где φ – малая величина, определяющая область резонанса, т.е. мы находимся вблизи главного параметрического резонанса.

Решение уравнения (3.1) в первом приближении представляется в виде [8]

$$\xi = C \cdot \cos \left[\left(\omega + \varphi/2 \right) t + \nu \right], \quad (3.2)$$

где C – искомая амплитуда резонансных колебаний, ν – сдвиг фазы.

Подставляя (3.2) в правую часть уравнения (3.1) и сохраняя лишь резонансный член, получим

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + \varepsilon \frac{d \xi}{dt} + \omega^2 (\xi + \bar{\beta} \xi^2 + \bar{\gamma} \xi^3) = \mu \omega^2 C \cdot \cos \left[\left(\omega + \frac{\varphi}{2} \right) t - \nu \right]. \quad (3.3)$$

(3.3) представляет собой уравнение обычного резонанса, где роль амплитуды внешней силы играет величина $\mu \omega^2 C$. Подставим вместо амплитуды внешней силы выражение $\mu \omega^2 C$ в формулу амплитуды обычных нелинейных резонансных колебаний. Тогда для амплитуд установившихся колебаний в случае главного параметрического резонанса получим выражения

$$C = 0 \quad (\text{I}), \quad C^2 = \frac{1}{\alpha} \left[\frac{\varphi}{2} \pm \sqrt{\frac{\mu^2 \omega^2}{4} - \varepsilon^2} \right] \quad (\text{II}); \quad \alpha = \omega \left(\frac{3\bar{\gamma}}{8} - \frac{5\bar{\beta}^2}{12} \right). \quad (3.4)$$

Решение (3.4, I) соответствует нерезонансному состоянию пластинки, а два других решения (3.4, II) – установившимся резонансным колебаниям. Графики этих решений аналогичны рис.2.

Количественное влияние магнитного поля на рассматриваемые колебательные процессы продемонстрированы на рис. 3 и 4, которые построены на основе (2.9) (случай вынужденных колебаний) и (3.4) (случай параметрических колебаний), соответственно. Численные расчёты произведены при $E = 7 \cdot 10^{11} \text{ дин/см}^2$, $\nu = 0.36$, $\rho = 5 \cdot 10^3 \text{ г/см}^3$, $h/a = 1/200$, $q = q_*$, $H_{01} = H_0 \cos \psi$, $H_{03} = H_0 \sin \psi$, $\psi = \pi/3$ и различных значениях напряжённости $H_0 = \alpha \cdot 10^3 \text{ Э}$ магнитного поля. Рис.3 показывает, что при наличии магнитного поля с большей интенсивностью амплитуда вынужденных колебаний увеличивается. Указанное влияние магнитного поля усиливается с уменьшением относительной толщины пластинки. Из рис.4 видно, что в случае идеально проводящих пластин при увеличении напряжённости магнитного поля ширина области динамической области уменьшается, а амплитуда параметрических колебаний увеличивается.

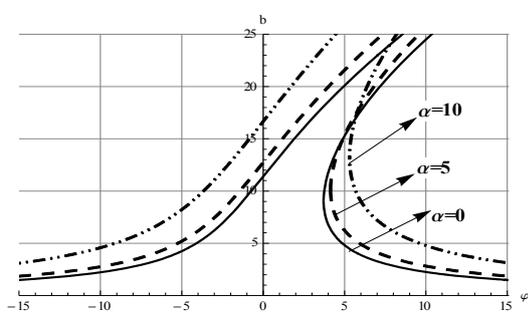


Рис.3

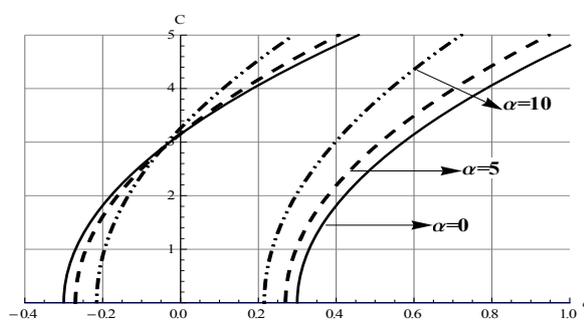


Рис.4

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н. Основные уравнения и соотношения нелинейных магнитоупругих колебаний тонких электропроводящих пластинок. //Изв. АН Арм.ССР, Механика. 1985. Т.38. №2. С.17–29.
2. Багдасарян Г.Е. Нелинейные колебания идеально проводящей пластинки в наклонном магнитном поле. //Изв. НАН Армении. Механика. 1995. Т.48. №3. С.5–14.
3. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н., Микилян М.А. Собственные и вынужденные нелинейные колебания идеально проводящей пластинки в наклонном магнитном поле.//В кн.: «Проблемы механики деформируемого твёрдого тела». Ереван: 2012. С.75–87.
4. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972.
5. Ландау Л.Л., Лифшиц Е.М. Механика. М.: ГИФМЛ, 1958.
6. Багдасарян Г.Е., Гнуни В.Ц. Резонанс в вынужденных колебаниях слоистых анизотропных оболочек. //Изв. НАН Армении. Механика. 1961. Т.XIV. №1. С.41–49.
7. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: ГИФМЛ-14, 1958.
8. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: ГИТТЛ, 1956.
9. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, Физматлит, 1977. 289с.

Сведения об авторах:

Багдасарян Геворг Ервандович – д.ф.-м.н., профессор, академик НАН Армении

E-mail: gevorgb@rau.am,

Даноян Завен Нерсесович – д.ф.-м. н., профессор; **E-mail:** zavendanoyan@gmail.com,

Микилян Марина А. – к.ф.-м., н., доцент; **E-mail:** mikilyan@rau.am,

КИНЕМАТИЧЕСКИЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ПОДХОДЫ ОПИСАНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПРОЦЕССОВ В ПОЛУПРОВОДНИКАХ, ДВИЖЕНИИ ТРАНСПОРТА И ДВИЖЕНИИ МИКРОПОР В МЕХАНИКЕ РАЗРУШЕНИЯ

Багдоев А.Г.

Универсальным феноменологическим подходом кинематических нелинейных волновых моделей с использованием аналогичных эмпирических зависимостей основных функций между собой, исследованы стохастические пространственные процессы фазовых переходов для неустойчивости Ганна в полупроводниках, движении транспорта с переходом к затору и на перекрёстках, роста и движения микропор с переходом к макроразломам.

1. Введение.

В настоящей работе предлагается ряд феноменологических моделей, использующих применение методов нелинейной волновой динамики к изучению, аналогичных по характеру фазовых переходов, стохастических пространственных процессов для полупроводников, движения транспорта, роста и движения микропор на микро-мезо-уровнях и их перехода к макроразрушению.

1) Для известной Гарсон-Твергард-Нидельмана модели, описывающей динамику микропор, в уравнении для скорости изменения пористости, вместо гауссового распределения для плотности вероятности, вводится его нелинейное обобщение [5], которое нетрудно рассчитать для разных значений коэффициента нелинейности и провести сравнение с экспериментами. Аналогичные подходы применены к транспортным задачам конфликта на перекрёстке.

2) На основе многих современных исследований по процессам, где показывается универсальность характеров этих процессов в отношении различных материалов и нагрузок [6], проводится аналогия между процессом неустойчивости Ганна в полупроводниках [1], [3], описанная одним нелинейным диффузионным уравнением для электрического поля с учетом релаксационных членов, дополненным дельта-флуктуациями, при наличии еще экспериментальной зависимости скорости электронов от напряженности электрического поля, решенная Хакеном и Накамурой методом разложения на плоские волны, и определения эффективных формул для финального стационарного устойчивого состояния после фазового перехода; процессом движения транспорта на насыщенных линиях, изученная Лайтхиллом и Уиземом простым методом нелинейных кинематических волн, где газодинамическое уравнение сохранения плотности машин [4], дополняется нами качественно тем же, как и в задаче полупроводников, графиком связи потока и плотности машин, и аналогично тому, что делается в работах известных физиков по изучению задачи движения транспорта, вплоть до фазового перехода и образования заторов, к этому нелинейному волновому уравнению добавляется диффузия, релаксация и флуктуация в полном соответствии с уравнением для полупроводников. Все указанные решения [1],[3] и [2] дополнены изучением исходных нестационарных пространственных уравнений, где стационарное решение есть уже функция координаты.

3) Все эти рассуждения переносятся на феноменологическое описание задачи о движении микропор с резким фазовым переходом к макро разрушениям с аналогичным рис.1 графиком зависимости скорости пор от корня квадратного из их длины [6], с.113 рис. 43], причём, в качестве пористости $f(x,t)$ можно с точностью до известной постоянной брать указанную величину, при этом в силу характера кривой можно использовать результаты §2, §3, описываемые той же моделью с определением вместо E', ρ' возмущённого значения f' пористости в стационарном состоянии и соответствующей вероятности.

2. Синергетические исследования неустойчивости в полупроводниках

В [1], [3] выведено уравнение для электрического поля в полупроводниках, представляющее типичное диффузионное нелинейное волновое уравнение

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -e'n_0v(E) - v(E)\frac{\partial E}{\partial x} + D\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{4\pi}{\varepsilon_0}I, \quad e' = \frac{4\pi}{\varepsilon_0}e, \quad (2.1)$$

где $I = I(t)$ – внешняя плотность тока, которая определяется после решения задачи [1], [3].

Зависимость скорости электронов $v(E)$ от поля E для эффекта Ганна в полупроводниках [1], [3], [2] считается известной экспериментально. Пусть E_0 – постоянное электрического поля, $E'(x, t) = E(x, t) - E_0$ – возмущённое поле в рассматриваемом процессе. Решение (2.1), записанного для возмущений E' , полученное в [1], [3], [2], ищется в виде разложения E' на плоские волны, без учёта свободных членов, что допустимо только при компенсации соответствующих свободных членов при подстановке указанного разложения в (2.1) выбором $I(t)$, определяемой после решения.

3. Исследование фазового перехода при движении транспорта методом плоских волн

В работе [2] проводится аналогия математической постановки задач между неустойчивостью Ганна в полупроводниках [1], [3] и кинематической нелинейной волновой теории в движении транспорта [4] на насыщенных линиях. В [4] записывается уравнение сохранения плотности машин на линии $\rho(x, t)$, $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0$, где $q = \rho v$ есть плотность потока, v – скорость.

Считается известной единая кривая $q = q(\rho)$, определяемая экспериментом.

Она приведена в [4] и здесь дана на рис. 1

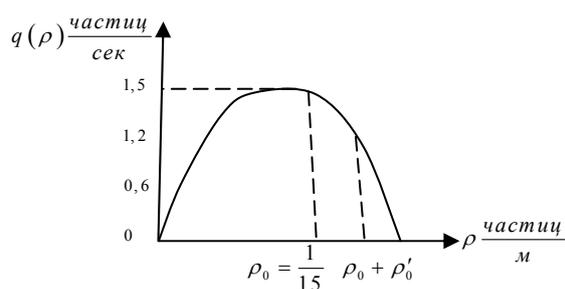


рис. 1

В [1], [3], [2] рассмотрено движение электронов в полупроводнике, скорость которых $v = v(E)$, экспериментально определяемая функция напряжённости поля E , снова даваемая качественно рис.1. Соответствующая потеря устойчивости процесса изменения $E(x, t)$ даётся нисходящей частью кривой рис.1, где следует заменять функции ρ на E , q на v . Выведенное в [1], [3], уравнение для E , кроме указанных в уравнении [4] газодинамических нелинейных

членов, содержит также вторую производную от искомой функции, дающую диффузию, и что особенно важно при получении фазовых переходов, члены с релаксацией, т.е. алгебраические слагаемые до третьего порядка по E' , $E' = E - E_0$, E_0 – начальная напряжённость поля. В соответствии с принципами системного анализа, в котором главное значение имеет сам процесс перехода, а уравнения для совершенно различных параметров для разных систем будут одинаковыми, и учитывая идентичность кривых процессов, нами обобщено вышенаписанное уравнение для ρ с добавлением аналогичных тех же членов с диффузией и релаксацией относительно возмущённой плотности ρ' , причём, $\rho(x,t) = \rho_0 + \rho'(x,t)$, $\rho_0 = \text{const}$ есть начальная точка на кривой фиг.1. Тогда получится уравнение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\lambda q(\rho) - q'(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} + D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + J(t) \quad (3.1)$$

λ – некоторая постоянная. Тогда все решения [1], [3], [2] для полупроводников, полученные разложением $E'(x,t)$ по плоским волнам, переносятся с уравнения (2.1) на уравнение (3.1), только вместо множителей $v'(E_0), v''(E_0), v'''(E_0)$ в [1], [3], [2] следует в (3.1) разложением по степеням E' до членов E'^3 брать в алгебраических слагаемых множители $q'(\rho_0), q''(\rho_0), q'''(\rho_0)$, а при производной $\frac{\partial E'}{\partial x}$ вместо $v(\rho_0), v'(\rho_0), v''(\rho_0)$ брать

эти множители при $\frac{\partial \rho'}{\partial x}$. Записывая ряд по плоским гармоникам [1]

$$\rho'(x,t) = \sum_{m \neq 0} c_m(t) e^{im(kx - kv_0 t)}, \quad v_0 = q'(\rho_0), \quad (3.2)$$

аналогично задаче §2 для полупроводников, считая скомпенсированными внешней нагрузкой свободные члены в уравнении для возмущений ρ' , что имеет место при выполнении приближенного равенства $J(t) = \lambda q'(\rho_0) + \lambda q''(\rho_0) c_1^2$ и позволяет искать решение в виде (3.2) без учета свободного члена, подставив в (3.1) и приравняв слагаемые при гармониках, можно получить систему обыкновенных уравнений для амплитуд $c(t)$, при этом, как и в теории эволюционных нелинейных уравнений, ведущим параметром в случае $q'(\rho_0) < 0$ оказывается $c_1(t)$, $c_2(t) \ll c_1(t)$ и получается уравнение

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} = -\frac{\partial \varphi}{\partial c_1}, \quad \varphi = \frac{V_1}{8} c_1^4 - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{V^2}{8V_1} \right) c_1^2 - \frac{\beta^2 V^2}{8V_1^2} / \beta + V_1 c_1^2 \quad (3.3)$$

$$\alpha = -\lambda q'(\rho_0) - Dk^2, \quad \beta = \lambda q'(\rho_0) + 4Dk^2, \quad V \approx -\lambda q''(\rho_0), \quad V \approx \lambda q'''(\rho_0) \quad (3.4)$$

где, как показано в [1], [3], [2], нелинейные члены с $\frac{\partial \rho'}{\partial x}$ в (3.1) дают вклад малости более высокого порядка в (3.4). Значение $I = I_1$, $I = c_1^2$, причём I_1 – есть корень кубического уравнения $\frac{\partial \varphi}{\partial I} = 0$, получаемого из (3.3), приближённо получится из решения квадратного уравнения [2] в виде

$$I_1 = \left\{ \frac{V^2}{\beta V_1} - 1 + \sqrt{\left(\frac{V^2}{\beta V_1} - 1 \right)^2 + \frac{12\alpha V^2}{\beta^2 V_1}} \right\} \frac{\beta^2}{3V^2}, \quad I_1 = c_1^2 \quad (3.5)$$

дающее с учётом (3.4) значение I в конечной стационарной точке I_1 , т.е. C (фиг.2. [3], [2]).

Фазовый переход первого рода дается фиг.2 и фиг. 3 из [3], [2]. Можно методом [1] записать соответствующее (3.3) уравнение для вероятности $P(c_1, t)$ Фоккера-Планка, в которое методом нелинейных волн [5], [2] добавлено в α нелинейное по вероятности P слагаемое, и для стационарной точки (3.5) получится вероятность, приведенная в [2], где также приведена таблица $P(c_1)$. Следует отметить, что в случае $J(t) = -\lambda q(\rho_0)$ в решении (3.1), разложенного по ρ' до членов ρ'^3 , удерживается и свободный член $m=0$, $c_0(t) = \bar{\rho}'(t)$, тогда вместо (3.2), удерживая члены до второй гармоники, получим

$$\rho' = \bar{\rho}'(t) + c_1 e^{ik(x-v_0t)} + c_2 e^{2ik(x-v_0t)} + c_1^* e^{ik(x-v_0t)} + c_2^* e^{-2ik(x-v_0t)}. \quad (3.6)$$

Подставляя в (3.1) разложенное по ρ' до членов ρ'^3 , приравняв свободные члены, первые и вторые гармоники можно получить приближённо с учётом порядков $c_2 \sim c_1^2$, $\bar{\rho}' \sim c_1^2$,

$$\bar{\rho}'(t) \approx -\frac{q''(0)}{q'(0)} c_1^2, \text{ уравнение для первой гармоники с учётом } \bar{\rho}' \text{ будет даваться (3.3) с}$$

добавлением члена $\frac{V^2 c_1^3}{\beta - 4Dk^2}$, а к V_1 в знаменателях добавится $\frac{3V^2}{\beta}$. При этом, прежнее

решение (3.1)-(3.5), как и в [1], [3], [2], полученное без учёта свободных членов, осуществляется при указанном регулировании $J(t)$ скорости изменения плотности машин при $x = L$. Используя кривую $q(\rho)$, даваемую рис.1, можно численно исследовать по (3.5) образование пробки и дальнейшее её рассасывание в пространственном подходе [2]. Произведен расчёт конкретной задачи по данным рис.1. Как указано во введении 3), все эти рассуждения переносятся на кинематический подход к образованию из микро- мезопор фазовым переходом макроразлома, с использованием аналога (3.1) и кривой, аналогичной рис.1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хакен Г. Синергетика. М. Мир. 1980. 405с.
2. Bagdoyev A.G., Safaryan Yu.S. The application of nonlinear wave dynamics methods to examination of stochastic processes of Benar in horizontal layers of fluid, of semiconductors, of traffic flow and micro-macro transition in fracture mechanics. In collection. Problems of Mechanics of deformable body. Devoted to 90 anniversary of academician of NAS Armenia S.A. Ambartsumyan, Yerevan.. p.101-120, 2012
3. Nakamura Ki-ichi. Statistical Dynamics of the Gunn Instability near Threshold. // Journal of the Physical Society of Japan. vol. 38, N1. p.46-50, 1975.
4. Lighthill M.J., Whitham G.B. On kinematic waves on long crowded roads. // Proceed. Roy. Soc. A. vol.229. N1178. p.150-280, 1955
5. Bagdoyev A.G., Manukyan G.A., Manukyan N.K., Kasparyan S.G. The discussion of possibilities of application of methods of linear and nonlinear wave dynamics to probabilities determination in wandering problems. // Int. Conf. of ATA and MANEB. p.31-37, 2001,
6. Ботвина Л.Р. Кинетика разрушения конструкционных материалов. М.: «Наука», 1989. 230с.

Сведения об авторе:

Багдоев Александр Георгиевич – Член-корр. НАН Армении, доктор физ.-мат. наук. профессор, главный научный сотрудник Института механики НАН РА. Ереван, 0019, пр.Маршала Баграмяна, 24^б, Институт механики НАН РА.

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ РАСТУЩЕЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Барышев А.А.

В работе исследовано напряжённо-деформированное состояние растущей по толщине упругой замкнутой круговой цилиндрической оболочки. Сформулирована начально-краевая задача по определению поля перемещений оболочки в случае малых осесимметричных деформаций. Для шарнирно опёртой по краям оболочки получено аналитическое решение на основе разложения по собственным функциям.

1. В [1] сформулирована начально-краевая задача по определению неосесимметричного напряжённо-деформированного состояния растущей по толщине упругой круговой жёстко закреплённой на краях цилиндрической оболочки в случае малых деформаций. На основе спектрального разложения по собственным функциям, предложенного в [2], получено её решение в замкнутой форме.

В данной работе рассмотрена задача о вынужденных осесимметричных колебаниях упругой изотропной круговой цилиндрической оболочки. При построении модели предполагается, что за сколь угодно малый промежуток времени dt к лицевым поверхностям присоединяется слой материала dh . В силу этого предположения толщина оболочки увеличивается непрерывно и равномерно. Тогда, следуя [1, 2], уравнения движения растущей оболочки при осесимметричной малой деформации могут быть сформулированы в виде:

$$\frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial \alpha^2} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial \dot{w}}{\partial \alpha} = 0, \quad (1.1)$$

$$B \frac{\nu}{R} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \left(\frac{B}{R^2} + D \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} \right) \dot{w} + \rho h \ddot{w} = \dot{q}.$$

Здесь α – координата на срединной поверхности, отсчитываемая вдоль образующей длины L , ρ – плотность массы, $B = \frac{Eh}{1-\nu^2}$, $D = \frac{Bh^2}{12}$ – тангенциальная и изгибная жёсткости, E и ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала, R и h – радиус и толщина оболочки, u и w – тангенциальное смещение и прогиб точек срединной поверхности, t – время, $q=q(\alpha, t)$ – интенсивность распределённой по лицевой поверхности поперечной нагрузки.

В рассматриваемой модели не учитываются тангенциальные силы инерции, что ограничивает область её применения. Однако в ней удастся **отделить пространственную переменную и время**, а в случае шарнирного опирания краёв оболочки, записать собственные значения краевой задачи в явном виде. В связи с этим полученная начально-краевая задача может быть использована в качестве модельной для построения эффективной процедуры численного решения. Учёт тангенциальной силы инерции принципиально не изменит модель, но отделение пространственной переменной и времени становится невозможным [3].

В (1.1) точкой обозначена производная по времени. Отметим, что **уравнения растущих оболочек имеют третий порядок производных по времени**, а параметр h , определяющий толщину и входящий в коэффициенты, меняется со временем $h=h(t)$. Считается, что скорость присоединяемого слоя совпадает со скоростью движения лицевых поверхностей оболочки.

Будем считать, что оболочка замкнута в окружном направлении, а её края шарнирно опёрты. В этом случае краевые условия (условия Навье) на основаниях формулируются в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = w \Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial u}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=L} = w \Big|_{\alpha=L} = \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \Big|_{\alpha=L} = 0 \quad (1.2)$$

Начальные условия определяют в начальный момент времени тангенциальное смещение u_0 и прогиб w_0 точек срединной поверхности, а также их начальные скорости \dot{u}_0, \dot{w}_0 и ускорения \ddot{u}_0, \ddot{w}_0 :

$$u \Big|_{t=0} = u_0, w \Big|_{t=0} = w_0, \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{u}_0, \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{w}_0, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{t=0} = \ddot{u}_0, \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \Big|_{t=0} = \ddot{w}_0. \quad (1.3)$$

Для построения решения сформулированной начально-краевой задачи (1.1)-(1.3) целесообразно перейти к безразмерным величинам, а именно, безразмерной координате – $x = \alpha/L$; безразмерному времени – $\tau = t\sqrt{E/(\rho(1-\nu^2))}/R$; безразмерным тангенциальным смещениям и прогибу – $\tilde{u} = u/R, \tilde{w} = w/R$. Будем использовать безразмерные параметры $\delta = R/L, \tilde{h} = h\delta/(L\sqrt{12})$.

Определим оператор L , характеризующий упругую реакцию оболочки на перемещения:

$$L[\tilde{w}] = \left(\tilde{h}^2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} + (1 - \nu^2) \right) \tilde{w} \quad (1.4)$$

область определения которого задается оператором краевых условий:

$$B[\tilde{w}] = \left(\tilde{w}|_{x=0}, \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} \Big|_{x=0}, \tilde{w}|_{x=1}, \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} \Big|_{x=1} \right). \quad (1.5)$$

Начальные условия для искомой функции \tilde{w} в принятых обозначениях примут вид:

$$\tilde{w}|_{\tau=0} = \tilde{w}_0, \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = \tilde{v}_0, \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tau^2} \Big|_{\tau=0} = \tilde{a}_0. \quad (1.6)$$

Здесь $\tilde{w}_0 = w_0/R, \tilde{v}_0 = \sqrt{\frac{\rho(1-\nu^2)}{E}} \dot{w}_0, a_0 = R \frac{\rho(1-\nu^2)}{E} \hat{w}_0$. Введём в рассмотрение

безразмерную скорость интенсивности внешней нагрузки $\tilde{q} = \frac{1-\nu^2}{Eh} R\dot{q}$.

Начально-краевая задача о вынужденных осесимметричных колебаниях для определения безразмерного прогиба растущей по толщине упругой круговой цилиндрической оболочки может быть записана в форме:

$$L[\tilde{w}] + \ddot{\tilde{w}} = \tilde{q}, B[\tilde{w}] = 0, \tilde{w}|_{\tau=0} = \tilde{w}_0, \dot{\tilde{w}}|_{\tau=0} = \tilde{v}_0, \ddot{\tilde{w}}|_{\tau=0} = \tilde{a}_0. \quad (1.7)$$

2. Решение задачи (1.7) будем искать в классе интегрируемых с квадратом функций, определённых на отрезке $[0; 1]$, в форме разложения по собственным функциям оператора L :

$$\tilde{w}(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\tau) W_n(x). \quad (2.1)$$

Следуя терминологии, принятой в [4], назовем функции $\varphi_n(\tau)$ координатными, а $W_n(x)$ – собственными функциями краевой задачи:

$$L[W] = \lambda W, B[W] = 0 \quad (2.2)$$

В силу самосопряжённости оператора L его собственные значения вещественны, а собственные функции ортогональны и определяются формулами:

$$\lambda_n = 1 - \nu^2 + (\pi n)^4 \tilde{h}^2, W_n(x) = C \sin \pi n x, \quad (2.3)$$

где постоянная $C = 1/\sqrt{2}$ определяется из условия $\|W_n\|^2 = \int_0^1 W_n^2(x) dx = 1$.

Подставим представление (2.1) в (1.7). Тогда с учётом (2.3) для определения координатных функций, как и в случае оболочки постоянного состава, приходим к бесконечной последовательности несвязанных задач Коши:

$$\varphi_n''' + \lambda_n \varphi_n' = \tilde{q}_n, \varphi_n(0) = \varphi_{n0}, \varphi_n'(0) = \psi_{n0}, \varphi_n''(0) = \varphi_{n0}. \quad (2.4)$$

Правые части уравнений и начальные условия определяются следующим образом:

$$\tilde{q}_n(\tau) = \int_0^1 W_n(x) \tilde{q}(x, \tau) dx, \varphi_{n0} = \int_0^1 W_n(x) \tilde{w}_0(x) dx, \psi_{n0} = \int_0^1 W_n(x) \tilde{v}_0(x) dx, \varphi_{n0} = \int_0^1 W_n(x) \tilde{a}_0(x) dx.$$

Интегрирование (2.4) может быть выполнено численно, например, методом Рунге-Кутты.

Однако, в ряде практически важных случаев интегралы (2.4) удается записать в явном виде в терминах специальных функций [5]. Пусть наращивание оболочки с начальной толщиной h_0 происходит с постоянной скоростью κ_0 , т.е. $\tilde{h}(\tau) = \tilde{h}_0 + \tilde{\kappa}_0 \tau$. Тогда

$$\varphi_n(\tau) = \varphi_{n0} + \int_0^\tau \left\{ c_{1n} \omega_{1n} \left(-(\tilde{h}_0 + \tilde{\kappa}_0 \xi) \right) + c_{2n} \omega_{2n} \left(\tilde{h}_0 + \tilde{\kappa}_0 \xi \right) + \int_0^\xi \frac{\omega_{2n}(\xi) \omega_{1n}(\eta) - \omega_{1n}(\xi) \omega_{2n}(\eta)}{\partial_\eta \omega_{2n}(\eta) \omega_{1n}(\eta) - \partial_\eta \omega_{1n}(\eta) \omega_{2n}(\eta)} \tilde{q}_n(\eta) d\eta \right\} d\xi, \quad (2.5)$$

$$\text{где } \omega_{1n}(\theta) = D \frac{1+i(1-\nu^2)}{2-2\kappa_0(\pi n)^2} \left(\frac{\pi n}{\sqrt{\kappa_0}} (1-i)\theta \right), \quad \omega_{2n}(\theta) = D \frac{1-i(1-\nu^2)}{2-2\kappa_0(\pi n)^2} \left(\frac{\pi n}{\sqrt{\kappa_0}} (1+i)\theta \right),$$

$$\omega_{3n}(\theta) = D \frac{1+i(1-\nu^2)}{2-2\kappa_0(\pi n)^2} \left(\frac{\pi n}{\sqrt{\kappa_0}} (1-i)\theta \right), \quad \omega_{4n}(\theta) = D \frac{1-i(1-\nu^2)}{2-2\kappa_0(\pi n)^2} \left(\frac{\pi n}{\sqrt{\kappa_0}} (1+i)\theta \right),$$

$$c_{1n} = \frac{\left(\Psi_{n0} \kappa_0 (\pi n)^2 + i \varphi_{n0} \right) \omega_{2n}(1) - (1-i) \Psi_{n0} \pi n \sqrt{\omega_{4n}(1)}}{\pi n \left(\sqrt{-2\kappa_0} \omega_{4n}(1) \omega_{1n}(-1) + \omega_{2n}(1) \left(2\pi n \tilde{h}_0 \omega_{1n}(-1) + \kappa_0 (1+i) \omega_{3n}(-1) \right) \right)},$$

$$c_{2n} = \frac{\left(\Psi_{n0} \kappa_0 (\pi n)^2 - i \varphi_{n0} \right) \omega_{1n}(-1) + (1+i) \Psi_{n0} \pi n \sqrt{\omega_{3n}(-1)}}{\pi n \left(\sqrt{-2\kappa_0} \omega_{4n}(1) \omega_{1n}(-1) + \omega_{2n}(1) \left(2\pi n \tilde{h}_0 \omega_{1n}(-1) + \kappa_0 (1+i) \omega_{3n}(-1) \right) \right)}.$$

В решениях (2.5) через $D_n(\sigma)$ обозначена функция параболического цилиндра.

Анализ полученных решений позволяет сделать вывод о том, что частоты колебаний наращиваемой оболочки увеличиваются, а их амплитуды уменьшаются.

В работе рассмотрена задача о вынужденных осесимметричных колебаниях упругой изотропной растущей по толщине круговой цилиндрической оболочки. Получено решение сформулированной начально-краевой задачи на основе спектрального разложения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (12-08-01260-а, 12-08-90806-мол_рф_нр, 12-08-09388-моб_з).

ЛИТЕРАТУРА

1. Барышев А.А., Лычев С.А., Манжиров А.В. Нестационарные колебания круговой цилиндрической оболочки // Изв. Саратов. Ун-та. 2012. С. 42-48.
2. Лычев С.А., Лычева Т.Н., Манжиров А.В. Нестационарные колебания растущей круглой пластины // МТТ. 2011. С.199-208.
3. Лычев С.А. Краевые задачи механики растущих тел и тонкостенных конструкций. /Диссер. на соиск. уч. ст. доктора. физ.-мат. наук по спец. 01.02.04. ИПМех РАН. 2012.
4. Коллац Л. Задачи на собственные значения (с техническими приложениями). М.: Наука, 1968. 504с.
5. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука, 1974. 296 с.

Сведения об авторе:

Барышев Андрей Алексеевич – доцент кафедры математической теории упругости и биомеханики. Саратовский государственный университет. Механико-математический факультет, (8452) 21 06 83, +7 904 243 08 53, +7 916 265 00 67

E-mail: BaryshevAA@gmail.com

УПРУГИЕ ВОЛНЫ В СЛОЙ-ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ПРИ УСЛОВИИ СКОЛЬЗЯЩЕГО КОНТАКТА НА ПЛОСКОСТЯХ, ОГРАНИЧИВАЮЩИХ СЛОЙ

Белубекян М.В., Давтян А.А.

Исследуется возможность появления поверхностных волн типа Рэлея в случае, когда на поверхностях слоя осуществляются условия скользящего контакта. Установлено, что появление поверхностных волн зависит как от коэффициента Пуассона, так и от отношения толщины слоя и длины волны.

Распространению поверхностных волн типа Рэлея в системе слой-полупространство посвящён ряд работ, в частности, [1-5]. Во всех известных исследованиях при различных условиях контакта между полупространством и слоем рассматривается только случай свободной внешней границы слоя. В настоящей статье исследуется вариант, когда и на внешней границе слоя, и на границе контакта слоя с полупространством имеют место условия скользящего контакта.

1. В прямоугольной декартовой системе координат (x, y, z) полупространство занимает область $(-\infty < x < \infty, 0 < y < \infty, -\infty \leq z \leq \infty)$, а слой – область $(-\infty < x < \infty, -h \leq y < 0, -\infty \leq z \leq \infty)$. На внешней границе слоя ($y = -h$) и на стыке слоя и полупространства имеют место условия скользящего контакта (рис.1). На основе задачи плоской деформации исследуется вопрос существования поверхностной волны типа Рэлея.

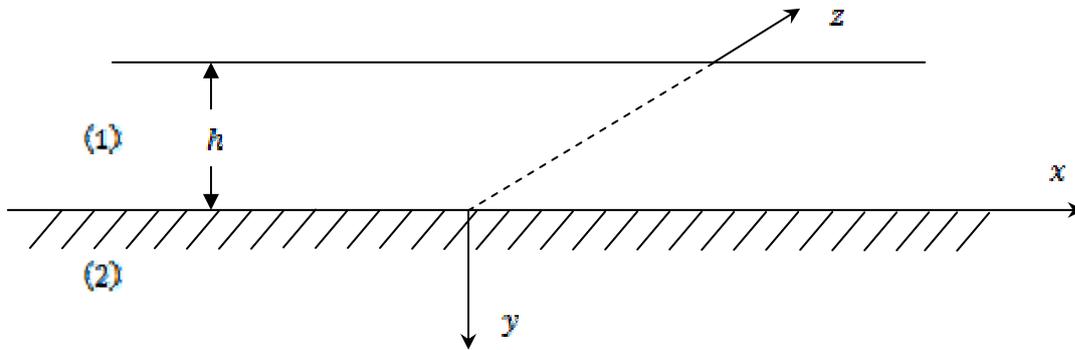


Рис.1

Уравнения задачи имеют вид:

$$c_{ii}^2 \Delta u_i + (c_{ii}^2 - c_{ii}^2) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (1.1)$$

$$c_{ii}^2 \Delta v_i + (c_{ii}^2 - c_{ii}^2) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2}, \quad (i = 1, 2).$$

где индекс (1) относится к слою, индекс (2) – к полупространству, u_i, v_i – компоненты вектора перемещения по осям x и y соответственно.

$$c_{ii}^2 = \frac{\lambda_i + \mu_i}{\rho_i}, \quad c_{ii}^2 = \frac{\mu_i}{\rho_i}, \quad (1.2)$$

λ_i, μ_i – постоянные Ламе, ρ_i – плотности материалов слоя и полупространства.

На внешней границе слоя принимаются условия скользящего контакта [6]

$$v_1 = 0, \quad \sigma_{21}^{(2)} = 0 \quad \text{при } y = -h. \quad (1.3)$$

Условия скользящего контакта на стыке имеют вид:

$$v_1 = v_2, \quad \sigma_{22}^{(1)} = \sigma_{22}^{(2)}, \quad \sigma_{21}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{21}^{(2)} = 0 \quad \text{при } y = 0. \quad (1.4)$$

Необходимо найти решения уравнений (1.1), удовлетворяющие условиям (1.3), (1.4) и условиям затухания

$$\lim_{y \rightarrow \infty} u_2 = 0, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} v_2 = 0. \quad (1.5)$$

После введения преобразований [6]

$$u_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y}, \quad v_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} - \frac{\partial \psi_i}{\partial x}, \quad (1.6)$$

постановка приведённой задачи упрощается. Уравнения (1.1) заменяются следующими уравнениями:

$$c_{ii}^2 \Delta \varphi_i = \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2}, \quad c_{ii}^2 \Delta \psi_i = \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2}. \quad (1.7)$$

Граничные условия (1.3), (1.4) приводятся к виду:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = 0, \quad \psi_1 = 0 \quad \text{при } y = -h. \quad (1.8)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \\ 2 \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x^2} &= 0, (i = 1, 2) \\ (\lambda_1 + 2\mu_1) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} + \lambda_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} - 2\mu_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y} &= (\lambda_2 + 2\mu_2) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} - 2\mu_2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

Вместо условий затухания будет иметь условия

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \varphi_2 = 0, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \psi_2 = 0. \quad (1.10)$$

2. Решения уравнений (1.7) представляются в виде

$$\varphi_i = \varphi_{0i}(y) \exp i(\omega t - kx), \quad \psi_i = \psi_{0i}(y) \exp i(\omega t - kx). \quad (2.1)$$

Подстановка φ_2, ψ_2 в соответствующие уравнения из (1.7) даёт

$$\varphi_{02}'' - k^2(1 - \theta\eta)\varphi_{02} = 0, \quad \psi_{02}'' - k^2(1 - \theta\eta)\psi_{02} = 0, \quad (2.2)$$

где

$$\eta = \frac{\omega^2}{k^2 c_{i2}^2}, \quad \theta = \frac{c_{i2}^2}{c_{i1}^2} < 0.5. \quad (2.3)$$

Уравнения (2.2) имеют решения, удовлетворяющие условиям затухания (1.10), если $0 < \eta < 1$. (2.4)

Очевидно, что решения уравнений (2.2), удовлетворяющих условию (2.4), будут

$$\varphi_{02} = A_2 e^{-k\sqrt{1-\theta\eta}y}, \quad \psi_{02} = B_2 e^{-k\sqrt{1-\eta}y}, \quad (2.5)$$

где A_2, B_2 – произвольные постоянные.

Аналогичным образом для φ_{01}, ψ_{01} получаются уравнения

$$\varphi_{01}'' + k^2(\alpha\eta - 1)\varphi_{01} = 0, \quad \psi_{01}'' + k^2(\beta\eta - 1)\psi_{01} = 0, \quad (2.6)$$

где приняты новые обозначения:

$$\alpha = \frac{c_{i2}^2}{c_{i1}^2}, \quad \beta = \frac{c_{i2}^2}{c_{i1}^2} = \frac{\mu_2 \rho_1}{\mu_1 \rho_2}. \quad (2.7)$$

Общие решения уравнений (2.6) имеют вид

$$\varphi_{01} = A_1 \cos(k\sqrt{\alpha\eta - 1}y) + C_1 \sin(k\sqrt{\alpha\eta - 1}y), \quad (2.8)$$

$$\psi_{01} = B_1 \cos(k\sqrt{\beta\eta-1}y) + D_1 \sin(k\sqrt{\beta\eta-1}y),$$

где A_1, B_1, C_1, D_1 – произвольные постоянные. Потребуем, чтобы решения (2.8), с учётом (2.1), удовлетворяли граничным условиям (1.8) на внешней границе слоя. Тогда, число произвольных постоянно уменьшается и решение (2.8) заменяется на

$$\varphi_{01} = A \cos[k\sqrt{\alpha\eta-1}(h+y)], \psi_{01} = B \sin[k\sqrt{\beta\eta-1}(h+y)], \quad (2.9)$$

где A, B – произвольные постоянные.

Таким образом, получены решения уравнений (1.7) в виде (2.6), (2.9) с учётом (2.1), которые удовлетворяют условиям затухания (1.10) и условиям на границе слоя $y = -h$. Эти решения содержат четыре произвольных постоянных.

Подставляя указанные решения в четыре граничные условия (1.9) на стыке $y = 0$, получим четыре однородных алгебраических уравнения относительно четырех произвольных постоянных A_2, B_2, A и B .

$$\begin{aligned} 2i\sqrt{1-\theta\eta}A_2 + (2-\eta)B_2 &= 0, \\ 2i\sqrt{\alpha\eta-1}A \sin(kh\sqrt{\alpha\eta-1}) + (2-\beta\eta)B \sin(kh\sqrt{\beta\eta-1}) &= 0, \\ -\sqrt{\alpha\eta-1}A \sin(kh\sqrt{\alpha\eta-1}) + iB \sin(kh\sqrt{\beta\eta-1}) &= -\sqrt{1-\theta\eta}A_2 + iB_2, \\ \mu_1(2-\beta\eta)A \cos(kh\sqrt{\alpha\eta-1}) + 2i\mu_1\sqrt{\beta\eta-1}B \cos(kh\sqrt{\beta\eta-1}) &= \mu_2(2-\eta)A_2 - \\ -2i\mu_2\sqrt{1-\eta}B_2. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Если из первых двух уравнений системы (2.10) определить A_2 через B_2 и A через B и подставить в третье и четвёртое уравнение, то получим

$$\beta B \sin(kh\sqrt{\beta\eta-1}) - B_2 = 0, \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\mu_1}{\mu_2} \left[\frac{(2-\beta\eta)^2}{2\sqrt{\alpha\eta-1}} \sin(kh\sqrt{\beta\eta-1}) \operatorname{ctg}(kh\sqrt{\alpha\eta-1}) + 2\sqrt{\beta\eta-1} \cos(kh\sqrt{\beta\eta-1}) \right] B - \\ - \left[\frac{(2-\eta)^2}{2\sqrt{1-\theta\eta}} - 2\sqrt{1-\eta} \right] B_2 = 0. \end{aligned}$$

Равенство нулю детерминанта системы (2.11) приводит к следующему уравнению, определяющему безразмерный параметр η , характеризующий фазовую скорость поверхностной волны:

$$\begin{aligned} R(\eta) \equiv \gamma\sqrt{1-\theta\eta} \left[(2-\beta\eta)^2 \operatorname{tg}(kh\sqrt{\beta\eta-1}) + 4\sqrt{\alpha\eta-1}\sqrt{\beta\eta-1} \operatorname{tg}(kh\sqrt{\beta\eta-1}) \right] - \\ - \beta\sqrt{\alpha\eta-1} \left[(2-\eta)^2 - 4\sqrt{1-\eta}\sqrt{1-\theta\eta} \operatorname{tg}(kh\sqrt{\beta\eta-1}) \operatorname{tg}(kh\sqrt{\alpha\eta-1}) \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

В (2.12) использовано обозначение

$$\gamma = \mu_1\mu_2^{-1}. \quad (2.13)$$

3. В частном случае $\gamma = 0$ или в пределе $\mu_1 \rightarrow \infty$ получается уравнение Рэлея для поверхностной волны, распространяющейся вдоль свободной границы упругого полупространства

$$(2-\eta)^2 - 4\sqrt{1-\eta}\sqrt{1-\theta\eta} = 0. \quad (3.1)$$

В случае, когда материалы слоя и полупространства одинаковые ($\mu_1 = \mu_2, \lambda_1 = \lambda_2, \rho_1 = \rho_2$), уравнение (2.12), с учётом условия (2.4), приводится к виду:

$$S(\eta) \equiv (2-\eta)^2 \left[1 + \operatorname{th}(kh\sqrt{1-\theta\eta}) \right] \operatorname{th}(kh\sqrt{1-\eta}) - 4\sqrt{1-\eta}\sqrt{1-\theta\eta} \left[1 + \operatorname{th}(kh\sqrt{1-\eta}) \right] \operatorname{th}(kh\sqrt{1-\theta\eta}) = 0 \quad (3.2)$$

Уравнение (3.2) не для всех kh имеет решение, удовлетворяющее условию затухания (2.4). В табл.1 приводятся некоторые значения η в зависимости от безразмерного параметра kh , характеризующего длину волны при $\theta = 0.25$ ($\nu = 1/3$).

Таблица 1 $\theta = 0.25$

kh	0	1.0	1.5	2.0	3.0	4.0
η	-	-	-	0.9900	0.9348	0.8996

Из таблицы видно, что поверхностная волна появляется при $kh \geq 2$. При $kh \rightarrow \infty$ получается значение фазовой скорости волны Рэля ($\eta = 0.8696$).

Уравнение (3.2) имеет корень $\eta = 1$ при произвольных значениях kh и θ . Нетрудно проверить, что этому корню соответствует тривиальное решение $\varphi_i \equiv 0, \psi_i \equiv 0$. Разделив уравнения (3.2) на $\sqrt{1-\eta}$ и совершив предельный переход $\eta \rightarrow 1$, можно получить следующее уравнение, определяющее параметр kh , для произвольного значения θ , начиная с которого появляется поверхностная волна

$$kh - (4\sqrt{1-\theta} - kh) \operatorname{th}(kh\sqrt{1-\theta}) = 0. \quad (3.3)$$

В табл.2 приводятся значения kh для различных значений коэффициента θ , начиная с которого появляется поверхностная волна.

Таблица 2

θ	0.0	0.20	0.25	0.33	0.40	0.5
kh	1.9604	1.7040	1.6290	1.4896	1.3611	1.12686

Табл.2 показывает, что с увеличением θ (уменьшением коэффициента Пуассона ν) уменьшается относительная длина волны, начиная с которого появляется поверхностная волна, т.е. расширяется диапазон длины поверхностных волн.

4. Рассмотренный в пункте 2 частный случай одинаковых материалов слоя и полупространства, показывает, что поверхностная волна возможна для относительно коротких волн ($kh > 1$). Возможны ли поверхностные волны в общем случае для относительно длинных волн ($k^2 h^2 \ll 1$). Будет естественным этот вопрос поставить для случая относительно "мягкого" слоя по аналогии с задачи о поверхностных волнах Лява [6].

Пусть $c_{12}^2 > c_{11}^2$. Тогда, согласно обозначениям (2.7), следует

$$\alpha > 1, \beta > 1 \quad (4.1)$$

и имеет место

$$\frac{\alpha}{\beta} = \theta_1 = \frac{c_{11}^2}{c_{12}^2} < \frac{1}{2}. \quad (4.2)$$

Очевидно, поверхностная волна возможна, если уравнение (2.12) имеет решение, удовлетворяющее условиям

$$\alpha^{-1} < \eta < 1. \quad (4.3)$$

В предположении

$$(kh)^2 \ll 1 \quad (4.4)$$

Уравнение (2.12) приводится к виду

$$R_1(\eta) \equiv \gamma\eta\sqrt{1-\theta\eta}[\beta^2\eta - 4(\beta - \alpha)] - \beta kh(\alpha\beta - 1)\left[(2 - \eta)^2 - 4\sqrt{1-\eta}\sqrt{1-\theta\eta}\right]. \quad (4.5)$$

Функция $R_1(\eta)$ в промежутке (4.3) обладает следующими свойствами:

$$R_1(\alpha^{-1}) \equiv \gamma\sqrt{1-\alpha^{-1}\theta}(2-\theta_1^{-1})^2 > 0, \quad (4.6)$$

$$R_1(1) \equiv \gamma\sqrt{1-\theta}(\beta^2 - 4\beta + 4\alpha) - \alpha\beta kh.$$

Из (4.5) следует, что условием существования поверхностной волны при ограничении (4.4) будет

$$R_1(1) < 0. \quad (4.7)$$

Условия (4.6), в частности, имеет место для малых γ . В пределе $\gamma \rightarrow \infty$ ($\mu_1 \rightarrow \infty$ слой не сопротивляется сдвигу) из (4.5) получается уравнение Рэлея.

ЛИТЕРАТУРА

1. Tiersten H. F. Elastic Surface Waves Guided by Thin films. // Journal of Applied Physics. 1969, v.40, №2, p.770-789.
2. Chattarjee S. N. Propagation of Rayleigh Waves in a Layer Lying over a Heterogeneous Half Space // Pure and Applied Geophysics. 1971, v.86, №3, p. 69-79.
3. Белоконь А.В., Релизов М.Ю. Гармонические колебания в системе: анизотропная полоса-полуплоскость при жёстком и скользящем соединении сред. // Изв. Вузов. Северо-Кавказский регион. Естеств. науки. 2002. №3. С.120-121.
4. Белубекян М.В. Волны типа Рэлея в системе тонкий слой-полупространство. // Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т.58. №2. С.9-15.
5. Агаян К.Л., Багдасарян Р.А. Распространение упругих волн в полупространстве с тонким упругим усиливающим слоем. // В сб.: "Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред." Ереван: Институт механики НАН Армении. 2011. С.18-25.
6. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872с.

Сведения об авторах:

Белубекян Мелс Вагаршакович – гл. научный сотр. Института механики НАН Армении.

E-mail: mbelubekyan@yahoo.com

Давтян Артем Александрович – магистрант Института механики НАН Армении, специалист конструкторского отделения “Мика-Прогрестех” ООО, (+37477)732734

E-mail: artyom.davtyan@yahoo.com

К ЗАДАЧЕ УСТОЙЧИВОСТИ СОСТАВНОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ ЕЁ НАГРЕВЕ

Белубекян М.В., Саноян Ю.Г.

Рассчитаны критические значения температуры, состоящей из двух пластинок составной упругой пластины, в постоянном температурном поле. Края пластины, перпендикулярные к контактной плоскости, находятся в условиях скользящего контакта, а два других шарнирно закреплены. Исследовано поведение критических температур для двух частных случаев, когда пластинки отличаются только коэффициентами линейного расширения и только коэффициентами Пуассона.

В настоящей статье рассмотрена задача устойчивости, свободной от внешних нагрузок, составной пластины при её равномерном нагреве. Прямоугольная составная пластина состоит из двух пластинок, две боковые грани которых жёстко скреплены в плоскости $y = 0$, перпендикулярные к этой плоскости боковые грани пластины находятся в условиях скользящего контакта, а две другие грани её шарнирно закреплены (рис.1). Геометрические размеры пластины находятся в пределах, допускающих использование теории плоского напряжённого состояния для определения начального напряжённо-деформированного состояния пластины при температурах ниже критических и решения задачи искривленного изгибного состояния пластины (выпучивания пластины) при потере устойчивости [1,2]. Термоупругие напряжения на контактной поверхности и в окрестности её краёв были исследованы в работах [1-5].

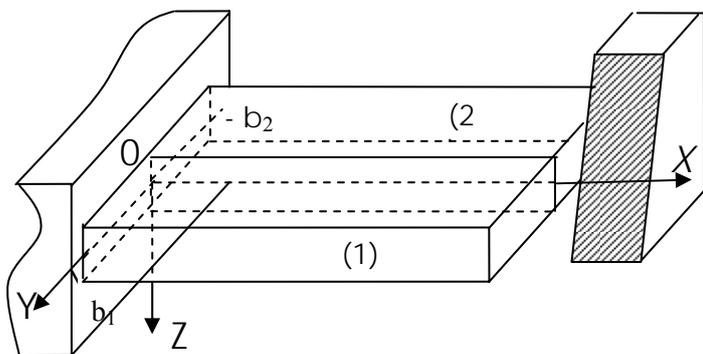


Рис.1

1. Для тонких, равномерно нагретых пластин, при отсутствии поверхностных сил можно принять, что начальные напряжения $\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$. Три оставшихся напряжения и перемещения u_i и v_i для каждой пластинки, находящейся в постоянном температурном поле θ , должны удовлетворять следующим трём уравнениям:

$$\begin{aligned} \sigma_{xi} &= \frac{E_i}{1-\nu_i^2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} + \nu_i \frac{\partial v_i}{\partial y} \right) - \frac{\gamma_i \theta}{1-\nu_i}, \\ \sigma_{yi} &= \frac{E_i}{1-\nu_i^2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial y} + \nu_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) - \frac{\gamma_i \theta}{1-\nu_i}, \\ \tau_{xyi} &= \frac{E_i}{2(1+\nu_i)} \left(\frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial v_i}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где

$$\gamma_i = E_i (1-\nu_i)^{-1} \alpha_{ti}, \quad i = 1, 2 \quad (1.2)$$

E_i – модули Юнга, ν_i – коэффициенты Пуассона, α_{ti} – линейные коэффициенты температурного расширения, и двум уравнениям:

$$\Delta u_i + k_i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y} \right) = 0,$$

$$\Delta v_i + k_i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y} \right) = 0 \quad (1.3)$$

где

$$k_i = (1 + \nu_i)(1 - \nu_i)^{-1}, \quad i = 1, 2 \quad (1.4)$$

В сечении раздела ($y=0$) должны быть удовлетворены условия жёсткого контакта

$$u_1 = u_2, v_1 = v_2, \sigma_{y1} = \sigma_{y2}, \tau_{xy1} = \tau_{xy2} \quad (1.5)$$

Пусть на кромках пластины $x=0$, $x=a$ заданы условия скользящего контакта, а две другие кромки свободны от напряжений

$$\begin{aligned} u_i = 0, \tau_{xyi} = 0 \quad \text{при } x=0, x=a, \\ \sigma_{y1} = \tau_{yx1} = 0 \quad \text{при } y=b_1, \\ \sigma_{y2} = \tau_{yx2} = 0 \quad \text{при } y=-b_2. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Для этих граничных условий решение уравнения (1.3), удовлетворяющее условиям (1.5,1.6), можно представить в следующем виде:

$$v_i = \gamma_i \theta y (1 + \nu_i) / E_i + C, u_i = 0 \quad (1.7)$$

$$\sigma_{xi} = -\gamma_i \theta + C, \sigma_{yi} = 0, \tau_{xyi} = 0 \quad (1.8)$$

Произвольную постоянную C , которая равна общему смещению пластины, можно приравнять нулю. Полученное решение показывает, что пластина расширяется в направлении оси y , а в срединной плоскости каждой пластинки появляются направленные вдоль оси x сжимающие силы N_i , пропорциональные σ_{xi} .

2. Для определения критических значений сил или критической температуры, при которых плоская форма равновесия становится неустойчивой, применим метод интегрирования дифференциального уравнения для изогнутой пластинки [2]. Дифференциальные уравнения прогибов пластинок, равномерно сжатых в направлении оси X силами N_i , можно представить в виде

$$D_i \Delta^2 w_i + N_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} = 0 \quad (2.1)$$

где D_i – жёсткость пластинок при изгибе,

$$D_i = \frac{2E_i h^3}{3(1 - \nu_i^2)}, \quad N_i = -2h\sigma_{xi} \quad (2.2)$$

В плоскости контакта двух пластинок уравнения (2.1) должны удовлетворять следующим условиям жёсткого контакта: равенство прогибов и производных, нормальных к плоскости сечения $y=0$, необходимо также обеспечить равенство изгибающих моментов M_{yi} и обобщённых перерезывающих сил Q_{yi}

$$\begin{aligned} w_1 = w_2, \partial w_1 / \partial y = \partial w_2 / \partial y \\ D_1 \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + \nu_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right) = D_2 \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \right) \\ D_1 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + (2 - \nu_1) \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right) = D_2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} + (2 - \nu_2) \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Граничные условия скользящего контакта для уравнений (2.1) состоят в равенстве нулю нормальных производных и перерезывающих сил при $x=0$, $x=a$.

$$\frac{\partial w_i}{\partial x} = 0, \frac{\partial^3 w_i}{\partial x^3} = 0 \quad (2.4)$$

На кромках пластины с шарнирным закреплением должны быть равны нулю прогибы и моменты сил M_{yi}

$$w_i = 0, \quad \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y=b_1, y=-b_2. \quad (2.5)$$

Принимая, что при повышении температуры пластинка выпучивается в n косинусоидальных полуволн, решение уравнения (2.1) будем искать в виде

$$w_i(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \operatorname{ch} \mu_n \rho_{i1} y + B_n \operatorname{sh} \mu_n \rho_{i1} y + C_n \operatorname{ch} \mu_n \rho_{i2} y + D_n \operatorname{sh} \mu_n \rho_{i2} y) \cos \mu_n x \quad \mu_n = \pi n / a, \quad (2.6)$$

где

$$\rho_{i1} = \sqrt{(1 + \eta_{in})}, \rho_{i2} = \sqrt{(1 - \eta_{in})} \quad (2.7)$$

$$\eta_{in}^2 = D_i^{-1} \mu_n^{-2} N_n \quad (2.8)$$

Эти уравнения удовлетворяют бигармоническим уравнениям (2.1), и тождественно удовлетворяют граничным условиям скользящих контактов (2.4). Величины η_{in}^2 пропорциональны сжимающим усилиям, действующим на срединные плоскости каждой из пластинок и связаны с температурой пластины формулой

$$\theta_{kr} = \eta_{in}^2 \frac{h^2 \mu_n^2}{3(1 + \nu_i) \alpha_i} \quad (2.9)$$

3. Подстановка (2.6) в условия контакта (2.3) и в граничные условия шарнирно закреплённых кромок (2.5) приводит к следующей системе алгебраических уравнений относительно восьми неизвестных $A_{in}, B_{in}, C_{in}, D_{in}$:

$$\begin{cases} A_{1n} + C_{1n} = A_{2n} + C_{2n}, \\ \rho_{11} B_{1n} + \rho_{12} D_{1n} = \rho_{21} B_{2n} + \rho_{22} D_{2n}, \\ (\rho_{11}^2 - \nu_1) A_{1n} + (\rho_{12}^2 - \nu_1) C_{1n} = (\rho_{21}^2 - \nu_2) A_{2n} + (\rho_{22}^2 - \nu_2) C_{2n}, \\ \rho_{11} (\rho_{11}^2 - 2 + \nu_1) B_{1n} + \rho_{12} (\rho_{12}^2 - 2 + \nu_1) D_{1n} = \kappa [\rho_{21} (\rho_{21}^2 - 2 + \nu_2) B_{2n} + \rho_{22} (\rho_{22}^2 - 2 + \nu_2) D_{2n}]. \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} A_{1n} \operatorname{ch} \rho_{11} \xi_{1n} + B_{1n} \operatorname{sh} \rho_{11} \xi_{1n} + C_{1n} \operatorname{ch} \rho_{12} \xi_{1n} + D_{1n} \operatorname{sh} \rho_{12} \xi_{1n} = 0, \\ A_{1n} \rho_{11}^2 \operatorname{ch} \rho_{11} \xi_{1n} + B_{1n} \rho_{11}^2 \operatorname{sh} \rho_{11} \xi_{1n} + C_{1n} \rho_{12}^2 \operatorname{ch} \rho_{12} \xi_{1n} + D_{1n} \rho_{12}^2 \operatorname{sh} \rho_{12} \xi_{1n} = 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\begin{cases} A_{2n} \operatorname{ch} \rho_{21} \xi_{2n} - B_{2n} \operatorname{sh} \rho_{21} \xi_{2n} + C_{2n} \operatorname{ch} \rho_{22} \xi_{2n} - D_{2n} \operatorname{sh} \rho_{22} \xi_{2n} = 0, \\ A_{2n} \rho_{21}^2 \operatorname{ch} \rho_{21} \xi_{2n} - B_{2n} \rho_{21}^2 \operatorname{sh} \rho_{21} \xi_{2n} + C_{2n} \rho_{22}^2 \operatorname{ch} \rho_{22} \xi_{2n} - D_{2n} \rho_{22}^2 \operatorname{sh} \rho_{22} \xi_{2n} = 0, \end{cases} \quad (3.3)$$

В (3.1)–(3.3) приняты следующие обозначения:

$$\kappa = D_1^{-1} D_2, \quad \xi_{in} = \mu_n b_i. \quad (3.4)$$

Эти условия могут быть удовлетворены, если все неизвестные в (3.1–3.3) будут равны нулю, что соответствует плоской форме равновесия пластинок. Для получения решений с выпученным видом равновесия необходимо найти критические температуры (или усилия N_i), при которых детерминант системы (3.1)–(3.3) равен нулю. Решение (2.6) имеет симметричную и антисимметричную формы относительно оси $x = a/2$ в зависимости от n : при нечётном n края скользящего контакта смещаются в разные стороны от срединной плоскости пластины $z=0$ (антисимметричная форма), при чётном n края смещаются в одну сторону (симметричная форма). Наименьшей энергии соответствует антисимметричная форма при $n=1$. Для пластины, состоящей из пластинок одинаковой ширины, с одинаковыми значениями коэффициентов Пуассона и модулей упругости этот детерминант может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} & (\rho_{11}^2 - \rho_{12}^2) (\rho_{21}^2 - \rho_{22}^2) (\rho_{22} \rho_{21} \operatorname{th} \rho_{11} \xi_n \operatorname{th} \rho_{12} \xi_n + \rho_{11} \rho_{12} \operatorname{th} \rho_{22} \xi_n \operatorname{th} \rho_{21} \xi_n) + \\ & + (\rho_{21}^2 - \rho_{12}^2) (\rho_{11}^2 - \rho_{22}^2) (\rho_{12} \rho_{21} \operatorname{th} \rho_{11} \xi_n \operatorname{th} \rho_{22} \xi_n + \rho_{22} \rho_{11} \operatorname{th} \rho_{12} \xi_n \operatorname{th} \rho_{21} \xi_n) + \\ & + (\rho_{21}^2 - \rho_{11}^2) (\rho_{22}^2 - \rho_{12}^2) (\rho_{11} \rho_{21} \operatorname{th} \rho_{12} \xi_n \operatorname{th} \rho_{22} \xi_n + \rho_{22} \rho_{12} \operatorname{th} \rho_{11} \xi_n \operatorname{th} \rho_{21} \xi_n) = 0 \end{aligned}$$

Для этого случая на рис.2а приведены зависимости $\theta_{кр}$ от отношения коэффициентов линейного расширения для пластин с отношением сторон b/a равным 2, 1, 0.6, 0.3 при $n=1$ (линии 1,3,5,6 соответственно). Для пластин с отношением сторон 2 и 1 приведены также зависимости и при $n=2$ (пунктирные линии 2, 4). Графики рассчитаны для пластины с коэффициентом линейного расширения $\alpha_{t1}=23 \cdot 10^{-6} \text{ C}^{-1}$ и коэффициентами Пуассона $\nu_1=\nu_2=0.3$. На рис.2b приведены эти же зависимости для пластины с отношением сторон $b/a=4$ для $n=1$ – кривая 1 и $n=2$ – кривая 2.

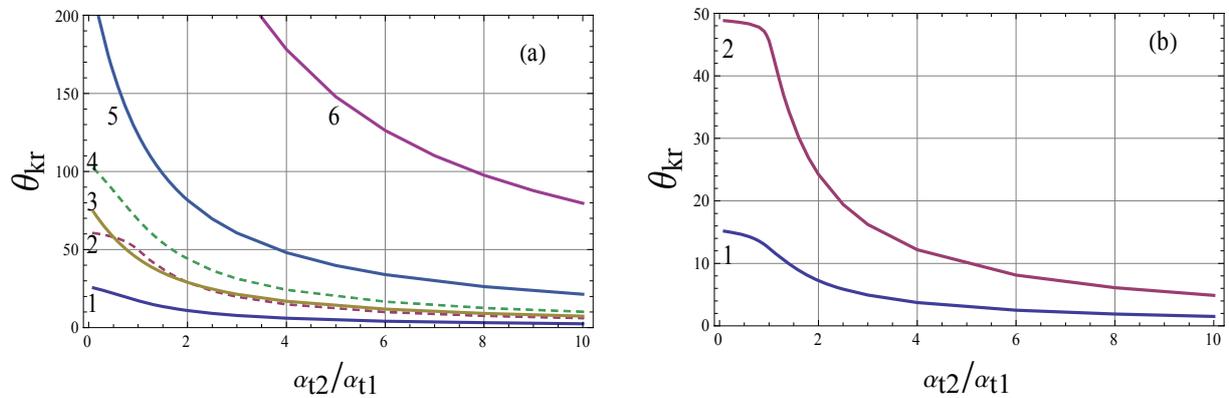


Рис.2. Графики $\theta_{кр}$ в зависимости от отношения α_{t2}/α_{t1} .

На рис.3 представлены графики критической температуры квадратной пластины, состоящей из пластинок одинаковой ширины, с одинаковыми значениями модулей упругости, с одинаковыми значениями коэффициентов линейного расширения $23 \cdot 10^{-6} \text{ C}^{-1}$ в зависимости от коэффициента Пуассона ν_1 пластинки (1) при коэффициентах Пуассона $\nu_2 = 0.0, 0.1-0.5$.

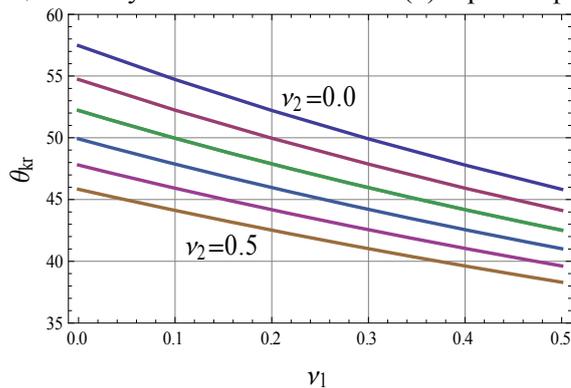


Рис.3. График $\theta_{кр}$ в зависимости от коэффициента Пуассона ν_1 .

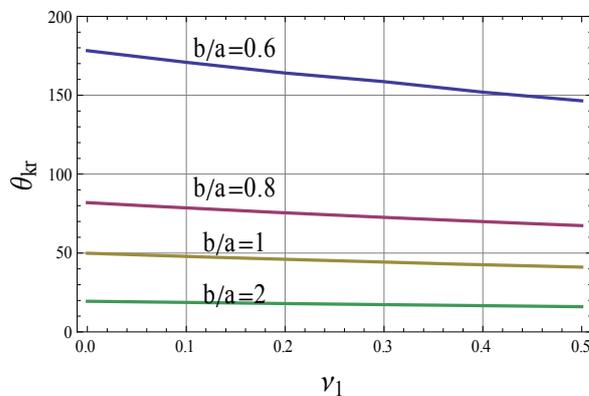


Рис.4. График $\theta_{кр}$ в зависимости от коэффициента Пуассона ν_1 при $\nu_2=0.3$.

На рис.4 представлены графики критической температуры пластины, состоящей из пластинок одинаковой ширины, с одинаковыми значениями модулей упругости и значениями коэффициентов линейного расширения $23 \cdot 10^{-6} \text{ C}^{-1}$, в зависимости от коэффициента Пуассона ν_1 для различных значений отношений сторон пластины (указаны на рисунке). Коэффициент Пуассона ν_2 равен 0.3. Величина критической температуры для широких пластинок ($b > a$), как это видно из последнего рисунка, слабо зависит от коэффициента Пуассона. Эта зависимость возрастает вместе с резким ростом и самой критической температуры с уменьшением ширины пластины b .

Уравнения 3.1 инвариантны к перестановкам индекса i (1 на 2 и 2 на 1), что соответствует перестановке пластинок. Очевидно, что эта операция не изменяет общее физическое состояние пластины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алфутов Н.А. Основы расчёта на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение, 1978. 312 с.
2. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем. М.-С.-П.: ОГИЗ, 1946. 532 с.
3. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964. 547 с.
4. Алексанян Р.К., Мкртчян А.М. Температурные напряжения в составном прямоугольнике //Изв.АН АрмССР. Механика. 1970. Т.23. № 4. С.3–11.
5. Чобанян К.С., Алексанян Р.К. Термоупругие напряжения в окрестности края поверхности соединения составного тела// Изв.АН АрмССР. Механика. 1971. Т.24. № 3. С.22–32.

Сведения об авторах

Белубекян Мелс Вагаршакевич – к.ф.-м.н., профессор, ведущий научный сотрудник Института механики НАН РА.; Тел.: (+37410) 521503.

E-mail: mbelubekyan@mechins.sci.am mbelubekyan@yahoo.com

Саноян Юрий Геворкович – к.ф.-м.н., старший научный сотрудник Института механики НАН РА, Тел.: (37410) 541319, **E-mail:** yuriisanoyan@mail.ru

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ КУСОЧНО-ПОСТОЯННОЙ ТОЛЩИНЫ ИЗ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА ПРИ ЗАДАННОМ ЗНАЧЕНИИ НИЗШЕЙ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ

Белубекян Э.В., Погосян А.Г., Аветисян Г.Р.

Рассматривается устойчивость прямоугольной пластинки кусочно-постоянной толщины, изготовленной из композиционного материала, шарнирно опертой по двум противоположным продольным сторонам и свободной, свободно опертой или заделанной по торцевым краям, при заданном значении частоты собственных колебаний пластинки.

При неизменном весе и заданном значении частоты собственных колебаний определяются оптимальные физические и геометрические параметры конструкции, обеспечивающие максимальное значение критической нагрузки.

Рассматривается устойчивость прямоугольной пластинки кусочно-постоянной толщины размерами $2L \times b$, шарнирно опертой по сторонам $y=0$ и $y=b$ и свободной, свободно опертой или заделанной по краям $x = \pm L$, при заданном значении низшей частоты собственных колебаний пластинки.

Предполагается, что пластинка изготовлена из композиционного материала (КМ) путем поочерёдной укладки его монослоев под углом $\pm \varphi$ к оси x пластинки, причём, на участке $-a \leq x \leq a$ пластинка имеет толщину h_2 , а на участках $-L \leq x \leq -a$ и $a \leq x \leq L$ – толщину h_1 (рис.1).

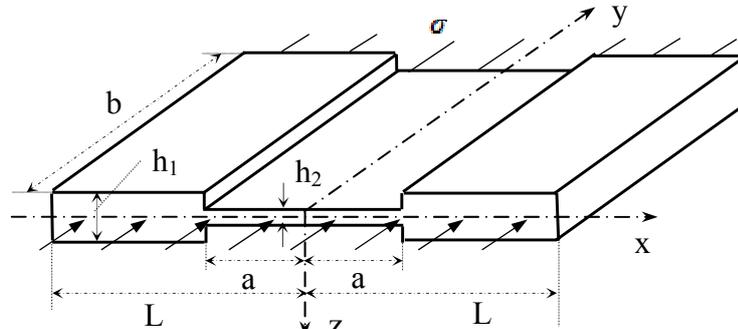


Рис. 1. Расчётная схема пластинки

Задача оптимизации пластинки кусочно-постоянной толщины при поперечных колебаниях рассматривалась в работе [1], а при действии осевой нагрузки – в работе [2].

Здесь ставится задача определения оптимальных геометрических и физических параметров конструкции a , h_1 , h_2 , φ , обеспечивающих максимальное значение критической нагрузки σ_{cr} при заданном значении низшей частоты собственных колебаний пластинки. Общий вес пластинки принимается постоянным, равным весу пластинки постоянной толщины h_0 .

Постоянству веса конструкции соответствует условие

$$L(h_0 - h_1) = a(h_2 - h_1). \quad (1)$$

Принятая структура пакета пластинки позволяет считать её ортотропной, для которой уравнение нагруженных колебаний записываются в виде [3]:

$$D_{11}^{(p)} \frac{\partial^4 w_p}{\partial x^4} + 2(D_{12}^{(p)} + 2D_{66}^{(p)}) \frac{\partial^4 w_p}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22}^{(p)} \frac{\partial^4 w_p}{\partial y^4} + \sigma h_p \frac{\partial^2 w_p}{\partial y^2} + \rho h_p \frac{\partial^2 w_p}{\partial t^2} = 0 \quad (p=1,2), \quad (2)$$

где: w_p – прогибы, ρ – плотность КМ, $D_{ik}^{(p)}$ – жёсткости составляющих участков пластинки ($p=1,2$)

$$D_{ik}^{(p)} = \frac{B_{ik} h_p^3}{12}, \quad (i, k = 1, 2, 6), \quad p = 1, 2,$$

B_{ik} – упругие характеристики КМ в главных геометрических направлениях пластинки, определяемые через его характеристики в главных физических направлениях B_{ik}^0 по известным формулам поворота [3].

Задача решается для каждой из областей пластинки ($p=1, 2$), соответствующих толщинам h_1 и h_2 , с удовлетворением условий сопряжения на линии их раздела. При этом, ввиду симметрии, рассматривается половина пластинки ($x \geq 0$) с исследованием случаев симметричной и антисимметричной форм потери устойчивости.

Граничные условия запишутся в виде:

– шарнирного опирания

$$w_p = 0, \quad \frac{\partial^2 w_p}{\partial y^2} = 0 \quad (p=1,2) \quad \text{при} \quad y=0, \quad y=b, \quad (3)$$

– симметрии (в случае симметричной формы потери устойчивости)

$$\frac{\partial w_2}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3} = 0 \quad \text{при} \quad x=0, \quad (4)$$

– антисимметрии (в случае антисимметричной формы потери устойчивости)

$$w_2 = 0, \quad \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad x=0, \quad (5)$$

– свободного края (в случае, когда край $x=L$ свободен)

$$D_{11}^{(1)} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + D_{12}^{(1)} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} = 0, \quad D_{11}^{(1)} \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3} + (D_{12}^{(1)} + 4D_{66}^{(1)}) \frac{\partial^3 w_1}{\partial x \partial y^2} = 0 \quad \text{при} \quad x=L, \quad (6)$$

– свободного опирания (в случае, когда край $x=L$ свободно опёрт)

$$w_1 = 0 \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad x=L, \quad (7)$$

– жёсткой заделки (в случае жёсткой заделки края $x=L$)

$$w_1 = 0 \quad \frac{\partial w_1}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x=L, \quad (8)$$

– сопряжения

$$w_1 = w_2, \quad \frac{\partial w_1}{\partial x} = \frac{\partial w_2}{\partial x},$$

$$D_{11}^{(1)} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + D_{12}^{(1)} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} = D_{11}^{(2)} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + D_{12}^{(2)} \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2}, \quad (9)$$

$$D_{11}^{(1)} \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3} + (D_{12}^{(1)} + 4D_{66}^{(1)}) \frac{\partial^3 w_1}{\partial x \partial y^2} = D_{11}^{(2)} \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3} + (D_{12}^{(2)} + 4D_{66}^{(2)}) \frac{\partial^3 w_2}{\partial x \partial y^2} \quad \text{при} \quad x=a.$$

Решения уравнений (2), удовлетворяющие условиям (3), в зависимости от значений

$$k_{pm}^2 = \frac{\sigma h_p}{D_{22}^{(p)} \lambda_m^2} + \frac{\rho h_p}{D_{22}^{(p)} \lambda_m^4} \Omega_m^2 \quad \text{и} \quad D_3^{(p)} = D_{12}^{(p)} + 2D_{66}^{(p)}, \quad \text{принимаются в виде:}$$

– при $k_{pm} > 1$ и $(D_3^{(p)})^2 + D_{11}^{(p)} D_{22}^{(p)} (k_{pm}^2 - 1) > 0$

$$w_p = \left(C_{1m}^{(p)} \operatorname{ch} \mu_{1m}^{(p)} \lambda_m x + C_{2m}^{(p)} \operatorname{sh} \mu_{1m}^{(p)} \lambda_m x + C_{3m}^{(p)} \cos \mu_{2m}^{(p)} \lambda_m x + C_{4m}^{(p)} \sin \mu_{2m}^{(p)} \lambda_m x \right) \sin \lambda_m y \sin \Omega_m t, \quad (10)$$

где:

$$\mu_{1m}^{(p)} = \sqrt{\sqrt{\left(\frac{D_3^{(p)}}{D_{11}^{(p)}}\right)^2 + \frac{D_{22}^{(p)}}{D_{11}^{(p)}} (k_{pm}^2 - 1)} + \frac{D_3^{(p)}}{D_{11}^{(p)}}}, \quad \mu_{2m}^{(p)} = \sqrt{\sqrt{\left(\frac{D_3^{(p)}}{D_{11}^{(p)}}\right)^2 + \frac{D_{22}^{(p)}}{D_{11}^{(p)}} (k_{pm}^2 - 1)} - \frac{D_3^{(p)}}{D_{11}^{(p)}}},$$

$\lambda_m = \frac{m\pi}{b}$, Ω_m – частота собственных колебаний пластинки.

– при $k_{pm} < 1$ и $(D_3^{(p)})^2 + D_{11}^{(p)}D_{22}^{(p)}(k_{pm}^2 - 1) > 0$

$$w_p = \left(C_{1m}^{(p)} \operatorname{ch} \mu_{1m}^{(p)} \lambda_m x + C_{2m}^{(p)} \operatorname{sh} \mu_{1m}^{(p)} \lambda_m x + C_{3m}^{(p)} \operatorname{ch} \mu_{2m}^{(p)} \lambda_m x + C_{4m}^{(p)} \operatorname{sh} \mu_{2m}^{(p)} \lambda_m x \right) \sin \lambda_m y \sin \Omega_m t, \quad (11)$$

где:

$$\mu_{1m}^{(p)} = \sqrt{\sqrt{\left(\frac{D_3^{(p)}}{D_{11}^{(p)}}\right)^2 + \frac{D_{22}^{(p)}}{D_{11}^{(p)}}(k_{pm}^2 - 1)} + \frac{D_3^{(p)}}{D_{11}^{(p)}}}, \quad \mu_{2m}^{(p)} = \sqrt{\frac{D_3^{(p)}}{D_{11}^{(p)}} - \sqrt{\left(\frac{D_3^{(p)}}{D_{11}^{(p)}}\right)^2 + \frac{D_{22}^{(p)}}{D_{11}^{(p)}}(k_{pm}^2 - 1)}},$$

– при $k_{pm} < 1$ и $(D_3^{(p)})^2 + D_{11}^{(p)}D_{22}^{(p)}(k_{pm}^2 - 1) < 0$

$$w_p = \left(C_{1m}^{(p)} \operatorname{ch} \alpha_{1m}^{(p)} \lambda_m x \cos \alpha_{2m}^{(p)} \lambda_m x + C_{2m}^{(p)} \operatorname{ch} \alpha_{1m}^{(p)} \lambda_m x \sin \alpha_{2m}^{(p)} \lambda_m x + \right. \\ \left. + C_{3m}^{(p)} \operatorname{sh} \alpha_{1m}^{(p)} \lambda_m x \cos \alpha_{2m}^{(p)} \lambda_m x + C_{4m}^{(p)} \operatorname{ch} \alpha_{1m}^{(p)} \lambda_m x \sin \alpha_{2m}^{(p)} \lambda_m x \right) \sin \lambda_m y \sin \Omega_m t, \quad (12)$$

где:

$$\alpha_{1m}^{(p)} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{D_{22}^{(p)}}{D_{11}^{(p)}}(1 - k_{pm}^2) + \frac{D_{33}^{(p)}}{D_{11}^{(p)}}} \right)}, \quad \alpha_{2m}^{(p)} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{D_{22}^{(p)}}{D_{11}^{(p)}}(1 - k_{pm}^2) + \frac{D_{33}^{(p)}}{D_{11}^{(p)}}} \right)}. \quad (13)$$

В случае свободного края $x = L$ пластинки, удовлетворение граничных условий (4), (6) и (9), соответствующих симметричной форме потери устойчивости, приводит к однородной системе линейных уравнений относительно коэффициентов $C_{im}^{(p)}$ ($i = 1, 2, 3, 4$, $p = 1, 2$). Удовлетворение граничным условиям (5), (6) и (9) приводит к аналогичной системе для антисимметричной формы. Из условий существования нетривиального решения этих систем для каждой из форм получаются трансцендентные уравнения относительно коэффициента k_{pm} .

После определения коэффициента k_{pm} значение критического напряжения определится по формуле

$$\sigma_{cr} = \frac{D_{22}^{(p)} \lambda_m^2}{h_p} \left(k_{pm}^2 - \frac{\rho h_p}{D_{22}^{(p)} \lambda_m^4} \Omega_m^2 \right). \quad (14)$$

Аналогичные трансцендентные уравнения получаются из удовлетворения соответствующим граничным условиям: (4), (7), (9) и (5), (7), (9) – для свободно опертого края пластинки, (4), (8), (9) и (5), (8), (9) – для заделанного края.

Поставленная задача оптимизации приводится к определению параметров a , h_1 , h_2 , φ , при которых наименьшее критическое напряжение, определяемое формулой (14) при условии (1) и заданных значениях $\Omega = \Omega^*$, достигнет наибольшего значения.

Определение оптимальных параметров конструкции сводится к следующей задаче нелинейного программирования:

Найти:

$$\max_x \min_m \sigma_{cr}, \quad \bar{x} = \{a, h_1, h_2, \varphi\}, \quad (15)$$

при ограничениях:

$$\Omega = \Omega^*,$$

$$h_2 = \frac{L}{a}(h_0 - h_1) + h_1, \quad (16)$$

$$0.01\delta_1 \leq h_1 \leq 0.2\delta_1, \quad 0.01\delta_2 \leq h_2 \leq 0.2\delta_2. \quad (17)$$

Ограничение (16) следует из условия постоянства веса пластинки (1), а ограничения в виде неравенств (17) обусловлены пределами применимости классической теории пластин. Здесь

принимается: $\delta_1 = L - a$ при $L - a \leq b$; $\delta_1 = b$ при $L - a \geq b$; $\delta_2 = 2a$ при $2a \leq b$; $\delta_2 = b$ при $2a \geq b$.

Задача решается методом Нелдера-Мида [4] в сочетании с методом прямого поиска.

Числовые расчёты произведены для случаев свободного, шарнирно опёртого и заделанного края $x = L$ пластинки при $\xi = 1$, $\bar{h}_0 = h_0 / b = 0.02; 0.03$, $\bar{\Omega}^* = \Omega^* \sqrt{\rho b^2 / B_{11}^0} = 0; 0.01; 0.02; 0.03; 0.04$. В качестве материала принят КМ со следующими характеристиками:

$\bar{B}_{11}^0 = 1$; $\bar{B}_{22}^0 = B_{22}^0 / B_{11}^0 = 0.0818$; $\bar{B}_{12}^0 = B_{12}^0 / B_{11}^0 = 0.0196$; $\bar{B}_{66}^0 = B_{66}^0 / B_{11}^0 = 0.04297$.

Оптимальные значения параметров $\bar{a} = a / 2L$, $\bar{h}_1 = h_1 / b$, $\bar{h}_2 = h_2 / b$, φ , а также соответствующие значения приведённого критического напряжения $\bar{\sigma}_{cr}$, вычисленные для случая свободного края $x = L$ при различных значениях \bar{h}_0 и $\bar{\Omega}^*$, приведены в табл.1. Там же, для сравнения, приведены наибольшие значения приведённого критического напряжения $\bar{\sigma}_{cr}^0$ для равновесной пластинки постоянной толщины \bar{h}_0 , которые получаются при $\varphi = 90^0$.

Таблица 1

\bar{h}_0	$\bar{\Omega}^*$	\bar{a}	\bar{h}_1	\bar{h}_2	φ	$\bar{\sigma}_{cr} \cdot 10^3$	$\bar{\sigma}_{cr}^0 \cdot 10^3$
0.02	0	0.32	0.0357	0.0112	90^0	1.0553	0.3289
	0.01	0.32	0.0357	0.0112	90^0	1.0452	0.3189
	0.02	0.32	0.0357	0.0112	90^0	1.0148	0.2885
	0.03	0.32	0.0357	0.0112	90^0	0.9641	0.2378
0.03	0	0.27	0.0459	0.0164	90^0	2.0716	0.7402
	0.01	0.27	0.0459	0.0164	90^0	2.0614	0.7301
	0.02	0.27	0.0459	0.0164	90^0	2.0310	0.6997
	0.03	0.27	0.0459	0.0164	90^0	1.9804	0.6490

Как следует из табл. 1, оптимальным является проект, где в средней части пластинка имеет меньшую толщину, чем по краям ($\bar{h}_1 > \bar{h}_2$), а $\varphi = 90^0$. При этом, увеличение критического напряжения по сравнению с пластинкой постоянной толщины составляет в среднем 3 раза.

В случае свободно опёртого края $x = L$ при $\bar{h}_0 = 0.02$ и $\bar{\Omega}^* = 0.03$ оптимальный проект получается при $\bar{a} = 0.255$, $\bar{h}_1 = 0.0304$, $\bar{h}_2 = 0.01$, $\varphi = 45^0$, $\bar{\sigma}_{cr} = 0.001059$, $\bar{\sigma}_{cr}^0 = 0.0006207$, $\varphi_0 = 45^0$. Здесь $\bar{h}_1 > \bar{h}_2$ и критическое напряжение по сравнению с пластинкой постоянной толщины увеличивается приблизительно в 1,71 раза.

В случае заделанного края $x = L$ при $\bar{h}_0 = 0.02$ и $\bar{\Omega}^* = 0.03$ оптимальный проект получается при $\bar{a} = 0.235$, $\bar{h}_1 = 0.02954$, $\bar{h}_2 = 0.0092$, $\varphi = 0^0$, $\bar{\sigma}_{cr} = 0.00366$, $\bar{\sigma}_{cr}^0 = 0.001713$, $\varphi_0 = 0^0$. Здесь $\bar{h}_1 > \bar{h}_2$ и критическое напряжение по сравнению с пластинкой постоянной толщины увеличивается приблизительно в 2.1 раза.

2. В работе рассматривается также задача определения оптимальных параметров конструкции, обеспечивающих наибольшее значение низшей частоты собственных колебаний, определяемое по формуле

$$\Omega_m^2 = \frac{D_{22}^{(p)} \lambda_m^4}{\rho h_p} \left(k_{pm}^2 - \frac{\sigma_{cr} h_p}{D_{22}^{(p)} \lambda_m^2} \right)$$

при заданном значении сжимающей нагрузки $\sigma = \sigma^*$.

Решение данной задачи сводится к следующей задаче нелинейного программирования:

Найти:

$$\Omega = \max_x \min_m \Omega_m, \quad \bar{x} = \{a, h_1, h_2, \varphi\}, \quad (18)$$

при ограничениях $\sigma = \sigma^*$ и (16), (17).

Численные расчёты показывают, что при $\bar{h}_0 = 0.02$ и $\bar{\sigma}^* = 1.0 \cdot 10^{-4}$ получаются следующие значения параметров оптимальных проектов:

– для случая свободного края $x = L$ пластинки

$$\bar{a} = 0.32, \quad \bar{h}_1 = 0.0358, \quad \bar{h}_2 = 0.0111, \quad \varphi = 90^\circ, \quad \bar{\Omega} = 0.09754, \quad \bar{\Omega}^0 = 0.04754, \quad \varphi_0 = 90^\circ$$

– для случая свободного опёртого края $x = L$ пластинки

$$\bar{a} = 0.20, \quad \bar{h}_1 = 0.0291, \quad \bar{h}_2 = 0.00643, \quad \varphi = 45^\circ, \quad \bar{\Omega} = 0.1065, \quad \bar{\Omega}^0 = 0.0777, \quad \varphi_0 = 45^\circ$$

– для случая заделанного края $x = L$ пластинки

$$\bar{a} = 0.203, \quad \bar{h}_1 = 0.0288, \quad \bar{h}_2 = 0.00713, \quad \varphi = 0^\circ, \quad \bar{\Omega} = 0.1911, \quad \bar{\Omega}_{cr}^0 = 0.130, \quad \varphi_0 = 0^\circ.$$

Таким образом, оптимальное проектирование пластинки кусочно-постоянной толщины при заданном значении сжимающей нагрузки приводит к значительному увеличению (до 2 раз) нижней частоты собственных колебаний по сравнению с пластинкой постоянной толщины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белубекян Э.В., Аветисян Г.Р., Погосян А.Г. Оптимизация пластинки кусочно-постоянной толщины из композиционного материала по критерию максимума нижней частоты собственных колебаний. //Вестник инженерной академии Армении, 2011. Т.8. №1. С.105-109.
2. Погосян А.Г., Аветисян Г.Р., Косян Н.А. Оптимизация по устойчивости прямоугольной пластинки кусочно-постоянной толщины. //Проблемы прочности элементов конструкций под действием нагрузок и рабочих сред, Саратовский государственный технический университет. 2010. С.86-91.
3. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360с.
4. Химмельблау Д., Прикладное нелинейное программирование. М.: Мир, 1975. 532с.

Сведения об авторах:

Белубекян Эрнест Вагаршакович – зав. кафедрой сопротивления материалов ЕГУАС, докт. техн. наук, тел.: (091) 43 11 94, e-mail: ebelubekyan@yahoo.com

Погосян Аревшат Гургенович – доцент кафедры АЯП ЕГИУА, канд. физ.-мат. наук, тел.: (099) 66 23 35, e-mail: arevpoghosyan@mail.ru

Аветисян Грайр Робертович – ассистент кафедры АЯП ЕГИУА, тел.: 34 87 12, e-mail: roba@seua.am

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НЕКЛАССИЧЕСКИХ ТРАНСЗВУКОВЫХ ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЁВ

Богданов А.Н., Диесперов В.Н., Жук В.И.

Предлагается асимптотическая трактовка задачи устойчивости трансзвукового потока. Рассмотрение нижней ветви нейтральной кривой устойчивости пограничного слоя приводит к так называемой трёхъярусной структуре возмущённого поля скоростей. Дается вывод управляющей системы уравнений на основе концепции свободного взаимодействия. Приводятся результаты исследования на комплексных плоскостях дисперсионных соотношений, возникающих в процессе решения задач на собственные значения.

1. Целый ряд новых аспектов возникает в теории Прандтля при введении концепции свободного взаимодействия, согласно которой градиент давления, в отличие от классических представлений, индуцируется самим пограничным слоем и не может быть вычислен по решению внешней задачи потенциального обтекания. Результат асимптотического анализа системы уравнений Навье-Стокса [1–3] состоит в выводе уравнений Прандтля с самоиндуцированным давлением для непосредственно прилегающей к обтекаемой поверхности узкой подобласти, которая оказывает преобладающее влияние на рост толщины вытеснения пограничного слоя.

Нелинейная теория возмущений, описывающая процесс свободного взаимодействия, допускает обобщение на нестационарные течения [4,5], причём производные по времени в уравнениях первого приближения следует удержать лишь в упомянутом пристеночном подслое, если скорость набегающего из бесконечности потока сверх- либо дозвуковая. В двух других подобластях, а именно, в основной толще пограничного слоя и внешнем потенциальном потоке, движение газа квазистационарно, а производные по времени входят лишь в асимптотические уравнения для высших приближений.

Наоборот, при трансзвуковых скоростях движения газа зависимость искомых функций от времени оказывается существенной именно во внешней потенциальной части течения. Последнее обстоятельство составляет важную особенность распространения предложенной в [6] асимптотической модели взаимодействия пограничного слоя с трансзвуковым потоком на нестационарные движения [7]. Здесь квазистационарными оказываются поля скоростей в основной толще пограничного слоя и в вязком подслое. Однако обобщение [7] асимптотической схемы [6] не является единственно возможным. Альтернативный подход [8] к построению трёхслойной теории нестационарных трансзвуковых течений имеет следствием ситуацию (не встречавшуюся ранее в асимптотическом анализе), когда члены с производными по времени входят как в систему уравнений для вязкого пристеночного подслоя, так и в уравнение для внешних потенциальных возмущений (которое, в отличие от аналогичного уравнения [7], становится линейным).

Если амплитуды возмущений превышают порядки величин, диктуемые предположениями теории [1–3], то асимптотический анализ пульсационных полей базируется на более сложной структуре поля потока. Для сверх- и дозвукового диапазона такой анализ приводит к формулировке четырёхслойной асимптотической теории [9,10], существенным компонентом которой является обоснование применимости уравнений Бюргерса и Бенджамин-Оно [11,12] к описанию эволюции возмущений.

Развитые в [9,10] представления позволили рассмотреть трансзвуковые течения с четырёхслойной структурой области взаимодействия [13,14]. Как и в [7,8], волновая картина включает существенно нестационарные области в нижней пристеночной части пограничного слоя и в верхнем потенциальном поле потока. Однако, само асимптотическое разделение области самоиндуцированного давления на четыре подслоя связано с рассмотрением класса возмущений, характеризующихся иной по сравнению с [7,8] нормировкой независимых переменных и искомых функций, в частности, большей относительной величиной амплитуд. Полученное в [13,14] интегро-дифференциальное уравнение, которое описывает процесс свободного взаимодействия, приводится к уравнениям Бюргерса либо Бенджамин-Оно при выходе из трансзвукового диапазона (в сторону увеличения либо уменьшения числа Маха). В этом смысле развитая в [13,14] теория является аналогом подходов [9,10], предложенных для отличающихся от единицы на конечную величину чисел Маха.

2. Асимптотические последовательности специального вида, описывающие явление свободного взаимодействия пограничного слоя с внешним потоком [1–3], оказались применимыми к изучению механизмов потери устойчивости [15]. Данное нетрадиционное приложение асимптотической теории отражает глубокую связь между концепцией самоиндуцированного давления и структурой флуктуационных полей на ранних стадиях ламинарно-турбулентного перехода. Нелинейные уравнения теории свободного взаимодействия в результате линеаризации по амплитуде возмущений позволяют построить собственные функции и вычислить собственные значения в задаче о свободных колебаниях в пограничном слое при больших числах Рейнольдса. При этом, критический слой, играющий важную роль в теории устойчивости вязких течений, располагается на дне пораничного слоя и соприкасается с обтекаемой поверхностью.

Линеаризация задачи с трёхъярусной структурой возмущённого поля скоростей приводит к дисперсионному уравнению, описывающему окрестность нижней ветви нейтральной кривой. В трансзвуковом случае дисперсионное уравнение записывается следующим образом [16]:

$$\frac{dA_i(\zeta)}{dZ} \left[\int_{\zeta}^{\infty} A_i(Z) dZ \right]^{-1} = \frac{i^{1/3} k^{4/3}}{(c - K_{\infty})^{1/2}},$$

где $\zeta = -i^{1/3} k^{1/3} c$, а c, k, K_{∞} — фазовая скорость, волновое число и трансзвуковой параметр соответственно. В ходе вывода дисперсионного соотношения предполагалось выполненным следующее условие: $\text{Real}\{P(c)\} > 0$, $P(c) = (c - K_{\infty})^{1/2}$.

Считая k вещественным и положительным, в качестве решений дисперсионного уравнения получаем бесконечный счётный набор дисперсионных кривых $\zeta^{(n)} = \zeta^{(n)}(k)$, $c^{(n)} = c^{(n)}(k)$, $\omega^{(n)} = \omega^{(n)}(k)$, $n=1,2,3,\dots$

Упорядочим бесконечное множество этих кривых, принимая в качестве номера моды n номер нуля производной функции Эйри $dA_i(\zeta)/dZ$. Результаты численного анализа дисперсионного уравнения получены при помощи комбинации отдельных модулей математической компьютерной среды.

Используя аналитически выведенное асимптотическое выражение для первой моды дисперсионного соотношения, полученное для значений волнового числа $k \rightarrow \infty$:

$$\zeta \sim \frac{e^{-\frac{5}{6}\pi i} k^{\frac{4}{3}}}{(c - K_{\infty})^{\frac{1}{2}}} - \frac{e^{\frac{5}{12}\pi i} (c - K_{\infty})^{\frac{1}{4}}}{k^{\frac{2}{3}}},$$

было проведено сопоставление аналитических результатов с результатами численного эксперимента на комплексной плоскости фазовой скорости c и других плоскостях. Упомянутое сопоставление подтвердил выход первой моды на соответствующую асимптотику.

Одним из наиболее важных результатов исследования трансзвукового дисперсионного соотношения является найденный сначала как итог вычислительных экспериментов неожиданный аспект топологии дисперсионных кривых, который получил в дальнейшем глубокое аналитическое описание. В ходе расчётов удалось установить, что кривые $c^{(1)} = c_r^{(1)} + i c_i^{(1)}$ на комплексной плоскости c имеют различные асимптотики при различных, но очень близких значениях трансзвукового параметра K_{∞} . Начиная с некоторого критического значения трансзвукового параметра $K_{\infty} = K_{\infty}^*$, качественно меняется вид основных зависимостей $c^{(1)} = c^{(1)}(k)$. А именно, в окрестности определённой точки (называемой ниже критической) происходит резкое изменение поведения первой моды дисперсионного соотношения. Неустойчивая первая мода становится устойчивой.

В результате численного решения в компьютерной среде определённой системы уравнений, были обнаружены следующие параметры критической точки:

$$\zeta_r^* = -1.009918613415694; c_r^* = 1.728197050687195; \zeta_i^* = -0.386068996403621;$$

$$c_i^* = -0.276171279652365 ; k^* = 0.235779767675346 ; K_\infty^* = 1.858690840482410.$$

Параметры критической точки, полученные аналитически, полностью совпали с результатами численного эксперимента.

Анализ с использованием теории функций нескольких комплексных переменных приводит к следующему аналитическому виду решения для фазовой скорости в окрестности критической точки:

$$c(k, K_\infty) = c^* \pm i \times \sqrt{-\frac{2a_2}{a_{11}} \sqrt{-(k-k^*) - \frac{a_3}{a_2}(K_\infty - K_\infty^*)} - \frac{a_{12}(k-k^*) + a_{13}(K_\infty - K_\infty^*)}{a_{11}}},$$

где a_j, a_{jk} — некоторые коэффициенты.

Выражение $c(\tau) = \pm \sqrt{\alpha\tau - c^* + a_{12}\tau/a_{11}}$ даёт уравнение сепаратрис седловой точки на комплексной плоскости c .

3. В трёхъярусной схеме свободного взаимодействия область трансзвукового потока, примыкающая сверху к пограничному слою, описывается уравнением Линя-Рейснера-Цзяня

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} + K_\infty \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Рассмотрим модификацию уравнения Линя-Рейснера-Цзяня, заключающуюся в сохранении второй производной по времени $\partial^2 \varphi / \partial t^2$ в уравнении для потенциала $\varphi = \varphi(t, x, y)$.

Таким образом, упомянутая модификация приводит к уравнению [17]

$$\varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} + K_\infty \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0,$$

(обобщённому уравнению Линя-Рейснера-Цзяня), где ε — малая действительная положительная величина, называемая сингулярным параметром.

Обобщённое уравнение Линя-Рейснера-Цзяня порождает модифицированное дисперсионное соотношение:

$$\frac{dAi(\zeta)}{dZ} \left[\int_{\zeta}^{\infty} Ai(Z) dZ \right]^{-1} = \frac{i^{1/3} k^{4/3}}{(c - \varepsilon c^2 - K_\infty)^{1/2}}.$$

При помощи компьютерной среды удалось выполнить серию расчётов при различных значениях трансзвукового параметра K_∞ и малого сингулярного параметра ε . При $k \rightarrow \infty$ аналитически можно получить асимптотику для первой моды модифицированного дисперсионного соотношения:

$$c(k, \varepsilon) = \frac{k^{1/2} e^{\pi i/4}}{\varepsilon^{1/4}} + \frac{1}{4 \times \varepsilon} + O\left(\frac{1}{k^{1/2}}\right).$$

Подробное исследование модифицированного дисперсионного соотношения позволило обнаружить явление так называемого переключения мод при изменении сингулярного параметра. В ходе тщательного анализа получен следующий качественный результат. Оказалось, что начиная с некоторого значения сингулярного параметра, возмущения в трансзвуковом пограничном слое становятся устойчивыми (в случае обычного дисперсионного соотношения первая мода всегда неустойчива в трансзвуковом режиме). Предлагается определённая физическая интерпретация, объясняющая с точки зрения авторов влияние сингулярного параметра на поведение решения в трансзвуковом режиме.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11-01-00842).

ЛИТЕРАТУРА

1. Нейланд В.Я. Асимптотические задачи теории вязких сверхзвуковых течений. //Труды ЦАГИ. Вып.1529, 1974.
2. Stewartson K. Multistructured boundary layers on flat plates and related bodies. //Adv. Appl. Mech. 1974.Vol.14. P.145–239.
3. Messiter A.F. Boundary layer flow near the trailing edge of a flat plate. //SIAM J. Appl. Math. 1970.Vol.18. №1. P.241–257.
4. Рыжов О.С. Уравнение нестационарного пограничного слоя с самоиндуцированным давлением. //Докл. АН СССР. т.234, 1977. №4. С.780.
5. Рыжов О.С., Терентьев Е.Д. О нестационарном пограничном слое с самоиндуцированным давлением. //ПММ. 1977. Т.41. №6. С.1007–1023.
6. Messiter A.F., Feo A., Melnik R.E. Shock-wave strength for separation of a laminar boundary layer at transonic speeds. //AIAA Journal. 1971. Vol.9. № 6. P.1197–1198.
7. Рыжов О.С. О нестационарном пограничном слое с самоиндуцированным давлением при околосзвуковых скоростях внешнего потока. //Докл. АН СССР. 1977. Т.236. №5. С.1091–1094.
8. Рыжов О.С., Савенков И.В. Об устойчивости пограничного слоя при трансзвуковых скоростях внешнего потока. //ПМТФ. 1990. № 2. С.65.
9. Жук В.И., Рыжов О.С. О локально-невязких возмущениях в пограничном слое с самоиндуцированным давлением. //Докл. АН СССР. 1982. Т.263. С.56–59.
10. Smith F.T., Burggraf O.R. On the development of large-sides short-scaled disturbances in boundary layers. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, vol. 399, № 1816, p.25–55, 1985.
11. Benjamin T.B. Internal waves of permanent form in fluids of great depth. J. Fluid Mech., vol.29, Pt.3. p. 559–592, 1967.
12. Оно Н. Algebraic solitary waves in stratified fluid. //J. Phys. Soc. Japan, vol.39, № 4, p.1082–1091, 1975.
13. Жук В.И. Нелинейные возмущения, индуцирующие собственный градиент давления в пограничном слое на пластине в трансзвуковом потоке. //ПММ. 1993.Т.57. Вып.5. С.68–78.
14. Жук В.И. Об одном варианте асимптотической теории свободного взаимодействия пограничного слоя с трансзвуковым потоком.// ПММ. 2001.Т.65. Вып.1. С.69–85.
15. Жук В.И. Волны Толлмина-Шлихтинга и солитоны. М.: Наука, 2001. 167с.
16. Жук В.И., Чернышёв А.В. Дисперсионные уравнения в задаче устойчивости трансзвуковых течений и некоторые их свойства. //ЖВМ и МФ. 2010.Т.50. №1. С.164–187.
17. Богданов А.Н., Диесперов В.Н., Жук В.И., Чернышёв А.В. Феномен свободного взаимодействия в трансзвуковых течениях и устойчивость пограничного слоя. //ЖВМ и МФ. 2010. Т.50. №12. С.2208–2222.

Сведения об авторах:

Богданов Андрей Николаевич – к.ф.м.н., старший научный сотрудник, Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова, (495) 939 59 77, (499) 739 84 40 . **E-mail:** bogdanov@imec.msu.ru

Диесперов Вадим Николаевич – д.ф.м.н., профессор, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования “Московский физико-технический институт (государственный университет)”,(495) 576 51 55, (495) 194 32 71. **E-mail:** diesvn@list.ru

Жук Владимир Иосифович – д.ф.м.н., профессор, главный научный сотрудник, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Вычислительный центр им. А.А. Дородницына Российской академии наук, (499) 135 62 39, (499) 135 78 38, **E-mail:** zhuk@ccas.ru

ТЕОРИЯ И ЭКСПЕРИМЕНТ В ЗАДАЧЕ МНОГОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ВОЛН НА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ДЕФЕКТАХ

Боев Н.В., Вдовин В.А., Зотов В.М.

В рамках лучевой теории для системы трёх соосных цилиндрических отверстий, изготовленных в стальном образце, проведено сравнение теоретического расчёта и экспериментальных данных однократно отражённых, а также переотражённых ультразвуковых волн.

Введение. В практике ультразвукового (УЗ) неразрушающего контроля (УЗНК) упругих материалов [1] часто применяются датчики продольной волны. С учётом применяемых частот в УЗНК материалов теоретическое исследование трёхмерных задач многократного рассеяния упругих волн может быть проведена в рамках геометрической теории дифракции (ГТД) [2,3].

Детерминированная модель и лабораторный макет. Детерминированная модель распределения дефектов в виде полостей реализована в лабораторном макете, который в качестве тела конечных размеров использует стальной образец в форме прямого параллелепипеда, толщина образца 40 мм, высота 78 мм, длина 300 мм. На расстоянии H от верхней грани, на которой располагается датчик продольных УЗ волн диаметром 30 мм и частотой 2,5 МГц, по дуге окружности радиуса R изготовлены три одинаковых соосных цилиндрических отверстия радиуса r с образующими перпендикулярными боковыми стенками. Схема образца с расположением отверстий и датчика приведена на рис.1. Для проведения эксперимента используется дефектоскоп-приставка «ЭВУД-ПК» (в дальнейшем дефектоскоп), общего назначения по ГОСТ 23049-94, который работает совместно с IBM компьютером и предназначен для УЗ контроля продукции на наличие дефектов типа нарушения сплошности и однородности металлов.

Лучевое решение задачи на основе физической теории дифракции Кирхгофа. Расположение цилиндрических отверстий в образце и ультразвукового датчика продольной волны позволяют измерять амплитуду перемещений в обратно отражённых волнах от поверхностей полостей в продольных волнах, в двукратно отражённых от дефектов 1 и 3 волнах, в трёхкратно отражённых волнах от всех трёх препятствий. Траектории указанных лучей приведены на рис.1. Явные выражения перемещений в отражённых волнах получены в рамках ГТД [5] на основе модификации физической теории дифракции Кирхгофа [6] асимптотической оценкой дифракционных интегралов методом стационарной фазы [7]. Выпишем эти формулы для продольных перемещений u_p . Случай однократного отражения:

$$u_p^{(1)} = Z^{-1/2} B V_{pp}(y^*) \exp \left[ik_p (L_0 + L_1) + \frac{\pi}{4} (\delta_2^{(pp)} + 2) \right] \quad (1)$$

$$Z = (L_0 + L_1)^2 + 2L_0 L_1 (L_0 + L_1) (2H_c \cos^2 \gamma + \tilde{k} \sin^2 \gamma) \cos^{-1} \gamma + 4L_0^2 L_1^2 K$$

$$B = Q_q k_p^2 (4\pi \mu k_s^2)^{-1}, \quad L_0 = |x_0 - y^*|, \quad L_1 = |y^* - x|$$



Рис.1. Схема образца с датчиком и осциллограмма с экрана дефектоскопа.

Здесь x_0 – точка, в которой помещён источник продольной волны, вызванной единичной силой $Q_d e^{-i\omega t}$, x – точка приёма волны, $k_p = \omega/c_p$, $k_s = \omega/c_s$, c_p, c_s – волновые числа и скорости соответственно продольной и поперечных волн, ω – частота колебаний, μ – модуль сдвига, $V_{pp}(y^*)$ – коэффициент $p-p$ отражения (продольной волны в продольную). $K = k_1 k_2$ – гауссова кривизна, а $H_c = (k_1 + k_2)/2$ – средняя кривизна поверхности в точке зеркального отражения y^* , а \tilde{k} – кривизна нормального сечения поверхности отражателя плоскостью луча $x_0 - y^* - x$. Кривизна \tilde{k} определяется формулой Эйлера $\tilde{k} = k_1 \cos^2 \tilde{\varphi} + k_2 \sin^2 \tilde{\varphi}$

$(\cos \tilde{\varphi} = \frac{\cos \alpha}{\sin \gamma}, \sin \tilde{\varphi} = \frac{\cos \beta}{\sin \gamma})$. Угол γ - это угол между направлением $q^0 = \{-\cos \alpha, -\cos \beta, -\cos \gamma\}$ падения и отражения продольной волны и нормалью к поверхности в точке y^* в локальной декартовой системе координат.

Случай двукратного (N=2) и трёхкратного (N=3) отражения :

$$u_p^{(N)} = \frac{Q_q}{4\pi\mu} \frac{k_p^2}{k_s^2} \left(\prod_{n=1}^N V_{pp}(y_n^*) \cos \gamma_n \right) \frac{\exp \left[i \left(k_p \sum_{n=0}^N L_n + \frac{\pi}{4} (\delta_{2N}^{(p)} + 2N) \right) \right]}{\left(\prod_{n=0}^N L_n \right) \sqrt{|\det(D_{2N}^{(p)})|}} \quad (2)$$

Здесь $\delta_{2N}^{(p)} = \text{sign } D_{2N}^{(p)}$ - разность между числом положительных и отрицательных собственных значений симметричной матрицы Гессе [4] $D_{2N}^{(p)} = (d_{ij})$, $i, j = 1, 2, \dots, 2N$ (N=2, N=3).

Получим из общих формул (1) и (2) явные выражения для амплитуды перемещений, принимаемой датчиком (рис. 1) продольной волны. Во всех случаях $k_1^{(i)} = 1/r, k_2^{(i)} = 0, K^{(i)} = k_1^{(i)} k_2^{(i)} = 0, i = 1, 2, 3$.

1) Обратное однократное отражение (рис. 1): $\gamma = 0, H_c = 0,5r, V_{pp} = -1$

а) от каждой из полостей 1 и 3 (первый отражённый импульс):

$$L_0 = L_1 = H + \frac{R}{2} - \frac{r}{2}, \quad u_p^{(1)} = B \sqrt{2 \left(H + \frac{R}{2} - \frac{r}{2} \right) \sqrt{1 + \left(H + \frac{R}{2} - \frac{r}{2} \right) / r}} \quad (3)$$

б) от полости 2 (второй отражённый импульс):

$$L_0 = L_1 = H + R, \quad u_p^{(2)} = B \sqrt{2(H + R) \sqrt{1 + (H + R)/r}}$$

Двукратное отражение волны от поверхностей двух цилиндров 1 и 3 в плоскости, перпендикулярной к их осям (третий отражённый импульс, рис.1):

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{\pi}{4}, \quad L_0 = L_2 = H + \frac{R}{2} - r \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \right), \quad L_1 = 2 \frac{\sqrt{3}}{2} R + r \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$u_p^{(1,3)} = B \cdot 0,5 V_{pp}^2 (y_1^*) \sqrt{L_0^2 L_1 \sqrt{|\det D_4^{(p)}|}} \quad (4)$$

2) Трёхкратное отражение волны от поверхностей трёх цилиндров 1, 2 и 3 в плоскости, перпендикулярной к их осям (четвёртый отражённый импульс, рис. 1):

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{\pi}{3}, \quad L_0 = L_3 = H + \frac{R}{2}, \quad L_1 = L_2 = R, \quad c = R/L_0$$

$$u_p^{(1,2,3)} = B \cdot 0,5 V_{pp}^3 (y_1^*) \sqrt{\left[(H/R + 0,5)^2 R \sqrt{3 |c(c+1)(c+5)(c-7)|} \right]}$$

Экспериментальные измерения и сравнительный анализ. Измерения проведены на стальном образце. При частоте, излучаемой продольной волной 2,5 МГц, её длина составляет 2,34 мм. В результате эксперимента получены следующие значения амплитуды перемещений в отражённых волнах: амплитуда перемещений $u_{pp}^{(1)}$ в обратной однократно отражённой волне от дефекта I (рис. 1) составляет 60,5 дБ; амплитуда перемещений $u_{pp}^{(1,3)}$ в двукратно отражённой волне последовательно от дефектов I и II составляет 29,5 дБ. Разность между этими значениями составляет 31 дБ. При этих данных отношение $u_{pp}^{(1)} / u_{pp}^{(1,3)} = 35$. Теоретические расчёты амплитуд $u_p^{(1)}$ и $u_p^{(1,3)}$ основывались на аналитических выражениях (3) и (4).

$$\frac{u_p^{(1)}}{u_p^{(1,3)}} = \frac{L_0^2 \left(r(a^2 - 1) \left[(a+b)^2 - 1 \right] \right)^{1/2}}{2 \left(H + \frac{R}{2} - \frac{r}{2} \right) \sqrt{\left(H + \frac{R}{2} - \frac{r}{2} \right) L_1 V_{pp}^2 (y_1^*)}} = 51,20$$

$$L_0 = 48,94 \text{ мм}, \quad L_1 = 12,88 \text{ мм}, \quad H + 0,5(R + r) = 50 \text{ мм}, \quad V_{pp} = 0,36$$

$$a = 1 + L_1/L_0, \quad b = 2\sqrt{2} L_1/r.$$

Заключение. Расхождение для отношений амплитуд перемещений в обратно отражённой и двукратно отражённой волне экспериментальных измерений и теоретических расчётов составляет 3дБ. Для данного макета этот результат вполне удовлетворительный.

Работа выполнена при поддержке РФФИ 10-01-00557а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ермолов И.Н. Теория и практика ультразвукового контроля. М.: Машиностроение, 1981. 240 с.
2. Боев Н.В. Коротковолновая дифракция на телах, ограниченных произвольной гладкой поверхностью / Н. В. Боев, М. А. Сумбатян // Доклады РАН. 2003. Т.392. №5. С.614 – 617.
3. Боев Н.В. Метод граничных интегральных уравнений в задачах коротковолновой дифракции / Н. В. Боев, И. И. Ворович, М. А. Сумбатян // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 5. С. 38–42.
4. Боев Н.В. Рассеяние высокочастотных волн на поверхностях в сплошных средах с учётом переотражений // Акуст. журн. 2004. Т.50. № 6. С.756– 61.
5. Хенл Х. Теория дифракции / Х. Хенл, Л. Мауэ, К. Вестпфаль. М.: Мир, 1964. 428 с.
6. Боровиков В.А. Геометрическая теория дифракции / В. А. Боровиков, Б. Е. Кинбер. – М.: Связь, 1978. 248с.
7. Федорюк М. В. Метод перевала / М. В. Федорюк. – М.: Наука, 1977. 368с.

Сведения об авторах:

Боев Николай Васильевич – профессор кафедры дифференциальных и интегральных уравнений, Южный федеральный университет, факультет математики, механики и компьютерных наук

E-mail: boyev@math.rsu.ru

Вдовин Владимир Александрович – инженер второй категории, НИИ механики и прикладной математики им. И.И. Воровича Южного федерального университета, лаборатория ультразвука

Зотов Владимир Михайлович – старший научный сотрудник, НИИ механики и прикладной математики им. И.И. Воровича Южного федерального университета, лаборатория ультразвука

УСТАЛОСТНОЕ РАЗРУШЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ АВИАЦИОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Бураго Н.Г., Журавлев А.Б., Никитин И.С.

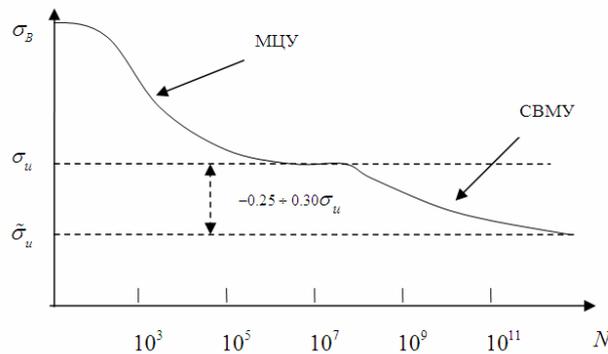
В предлагаемой работе исследуются критерии и модели многоосного разрушения в условиях малоциклового усталости (МЦУ) и в условиях сверхмногоциклового усталости (СВМУ). Описана процедура расчёта напряжённого состояния диска компрессора газотурбинного двигателя (ГТД) в полетном цикле нагружения и при низкоамплитудных вибрациях лопаток. С использованием рассчитанного напряжённого состояния с помощью моделей многоосного усталостного разрушения получены оценки долговечности диска компрессора для альтернативных механизмов усталости МЦУ и СВМУ. Рассмотрены модельные задачи теории упругости о нагружении кольцевого диска на внешнем контуре переменными по углу радиальными напряжениями (аналог режима МЦУ) и крутящими моментами (аналог режима СВМУ). Подтверждены оценки долговечности, полученные на основании расчётов реальных элементов конструкции.

1. Модели многоосного усталостного разрушения в режиме МЦУ. Основой для определения параметров моделей многоосного усталостного разрушения являются экспериментальные кривые одноосных циклических испытаний при различных значениях параметра асимметрии цикла $R = \sigma_{\min} / \sigma_{\max}$, где σ_{\max} и σ_{\min} – максимальное и минимальное значения напряжения в цикле. При описании результатов одноосных испытаний на усталостную прочность принимаются следующие обозначения: $\sigma_a = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) / 2$ – амплитуда напряжения в цикле, $\Delta\sigma = \sigma_{\max} - \sigma_{\min}$ – размах напряжений в цикле одноосного нагружения.

Экспериментальные данные одноосных испытаний описываются кривыми Веллера, которые аналитически могут быть представлены соотношением Баскина [1-3]

$$\sigma = \sigma_u + \sigma_c N^\beta \quad (1.1)$$

где σ_u – предел усталости, σ_c – коэффициент усталостной прочности, β – показатель усталостной прочности, N – число циклов до разрушения. Общий вид усталостной кривой представлен на фиг. 1, в данном режиме представляет интерес левая ветвь при $N < 10^7$.



Фиг. 1

Задача исследования усталостного разрушения состоит в определении пространственного распределения функции числа циклов до разрушения N из уравнений типа (1.1), обобщенных на случай многоосного напряжённого состояния и содержащих рассчитанные напряжения в рассматриваемой конструкции. Рассмотрим основные варианты обобщения результатов одноосных испытаний на общий случай многоосного напряжённого состояния [2].

Модель Сайнса. Обобщение одноосной усталостной кривой (1.1) на случай многоосного напряжённого состояния согласно [3] имеет вид:

$$\Delta\tau / 2 + \alpha_s \sigma_{\text{mean}} = S_0 + AN^\beta, \quad \sigma_{\text{mean}} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)_{\text{mean}} \quad (1.2)$$

где σ_{mean} – сумма главных напряжений, осредненная за цикл нагружения, $\Delta\tau$ – изменение октаэдрического касательного напряжения за цикл; $\Delta\tau / 2$ – его амплитуда; α_s, S_0, A, β – параметры, определяемые по данным эксперимента.

Параметры модели, определённые по одноосным усталостным кривым при $R = -1$ и $R = 0$, определены в [2]:

$$S_0 = \sqrt{2}\sigma_u / 3, \quad A = 10^{-3\beta} \sqrt{2}(\sigma_B - \sigma_u) / 3, \quad \alpha_s = \sqrt{2}(2k_{-1} - 1) / 3, \quad k_{-1} = \sigma_u / (2\sigma_{u0}) \quad (1.3)$$

где σ_u и σ_{u0} – пределы усталости по кривым $\sigma_a(N)$ при $R = -1$ и $R = 0$ соответственно.

Модель Кроссланда. Обобщение одноосной усталостной кривой на случай многоосного напряженного состояния согласно [4] имеет вид:

$$\Delta\tau / 2 + \alpha_c(\bar{\sigma}_{\max} - \Delta\tau / 2) = S_0 + AN^\beta, \quad \bar{\sigma}_{\max} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)_{\max} \quad (1.4)$$

где $\bar{\sigma}_{\max}$ – сумма главных напряжений, максимальная за цикл нагружения; параметры α_c , S_0 , A , β подлежат определению. В этом случае параметры модели равны [2]:

$$S_0 = \sigma_u \left[\sqrt{2} / 3 + (1 - \sqrt{2} / 3) \alpha_c \right], \quad A = 10^{-3\beta} \left[\sqrt{2} / 3 + (1 - \sqrt{2} / 3) \alpha_c \right] (\sigma_B - \sigma_u), \quad \alpha_c = \alpha_c(k_{-1}) \quad (1.5)$$

Модель Финдли. Обобщение одноосной усталостной кривой на случай многоосного напряженного состояния в этой модели имеет вид [5]:

$$(\Delta\tau_s / 2 + \alpha_F \sigma_n)_{\max} = S_0 + AN^\beta \quad (1.6)$$

где τ_s , σ_n – модуль касательного напряжения и нормальное напряжение на площадке с нормалью n_i , индекс \max означает выбор площадки, на которой комбинация $\Delta\tau_s / 2 + \alpha_F \sigma_n$ принимает максимальное значение; параметры α_F , S_0 , A , β подлежат определению. По одноосным усталостным кривым при $R = -1$ и $R = 0$ определены параметры модели:

$$S_0 = \sigma_u \left(\sqrt{1 + \alpha_F^2} + \alpha_F \right) / 2, \quad A = 10^{-3\beta} \left(\sqrt{1 + \alpha_F^2} + \alpha_F \right) (\sigma_B - \sigma_u) / 2, \quad \alpha_F = \alpha_F(k_{-1}) \quad (1.7)$$

Имея в виду конкретный расчётный пример, рассмотренный далее, приведём приближённые значения параметров для титанового сплава Ti-6Al-4V [2]: предел прочности $\sigma_B = 1100$ МПа; пределы усталости по кривым $\sigma_a(N)$ при $R = -1$ и $R = 0$ соответственно: $\sigma_u = 450$ МПа и $\sigma_{u0} = 350$ МПа; показатель степенной зависимости от числа циклов $\beta = -0.45$; модуль Юнга $E = 116$ ГПа; модуль сдвига $G = 44$ ГПа; коэффициент Пуассона $\nu = 0.32$.

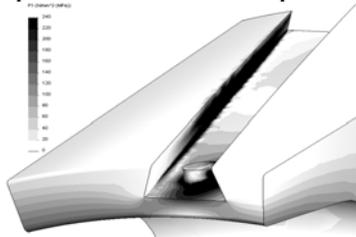
Кроме того, для оценок долговечности в рассмотренном далее расчетном примере применялись критерии многоосного усталостного нагружения МЦУ по деформированному состоянию, основанные на обобщении классического соотношения Коффина-Мэнсона (Брауна-Миллера, Фатеми-Соси, Смита-Ватсона-Топпера), а также модели усталостного разрушения с повреждаемостью Лемэтра-Шабаша и УЛ (Льежского Университета). Краткое описание этих моделей и сведения о параметрах для титанового сплава Ti-6Al-4V приведены в [2].

2. Пример расчета многоосного напряженного состояния и оценки долговечности элементов конструкций в полетном цикле нагружения (МЦУ). В качестве примера рассмотрим задачу усталостного разрушения диска компрессора газотурбинного двигателя в полетных циклах нагружения в условиях малоциклового усталости. Предполагается, что циклом многоосного нагружения системы диск-лопатка является полетный цикл нагружения (ПЦН), состоящий в достижении максимальных нагрузок на крейсерской скорости полета воздушного судна и соответствующих угловых скоростях вращения диска компрессора. Задача состоит в определении долговечности диска N (число ПЦН до разрушения) из соотношений (1.2), (1.4), (1.6). Для этого необходимо произвести расчет НДС системы диск-лопатка при действии комбинации внешних нагрузок, представленных центробежными силами, распределёнными аэродинамическими давлениями на лопатки и силами нелинейного контактного взаимодействия диска, лопаток и иных дополнительных учитываемых элементов конструкции, о которых говорится ниже.

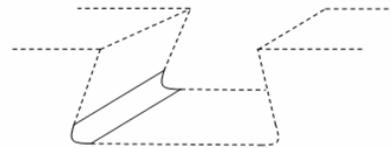
В данной работе анализ трёхмерного напряжённо-деформированного состояния контактной системы диска и лопаток компрессора (фиг. 2-а) выполнен численно с помощью конечно-элементного пакета программ [6].

Параметры расчёта принимались такими: угловая скорость вращения $\omega = 314$ рад/с (3000 об/мин), скоростной напор на бесконечности $\rho v_\infty^2 / 2 = 26000$ Н/м², что соответствует скорости потока 200 м/с при плотности 1.3 кг/м³. Свойства материалов принимались следующими: диск (титановый сплав): $E=116$ ГПа, $\nu=0.32$, $\rho = 4370$ кг/м³; лопатки (алюминиевый сплав): $E=69$ ГПа, $\nu=0.33$, $\rho = 2700$ кг/м³; фиксирующие штифты (сталь): $E=207$ ГПа, $\nu=0.27$, $\rho = 7860$ кг/м³.

Расчёты показали, что наиболее опасными с точки зрения зарождения усталостных трещин, являются окрестности зон контакта диска и лопаток, имеющих вид соединения типа “ласточкин хвост” [6]. На фиг. 2-а показана зона концентрации максимальных растягивающих напряжений в левом (скруглённом) углу паза в диске, в который вставляется лопатка. Видно, что концентрация напряжений нарастает от фронтальной к тыльной части паза, что совпадает с данными о расположении зон зарождения усталостных трещин в тыльной части диска [1].

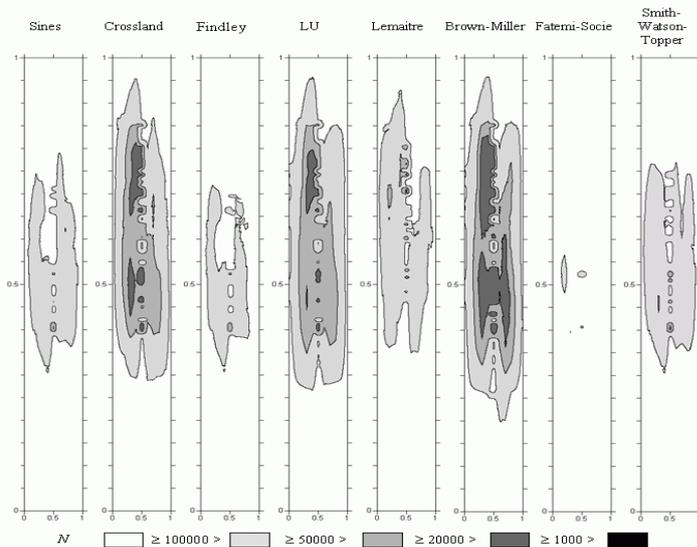


Фиг. 2-а

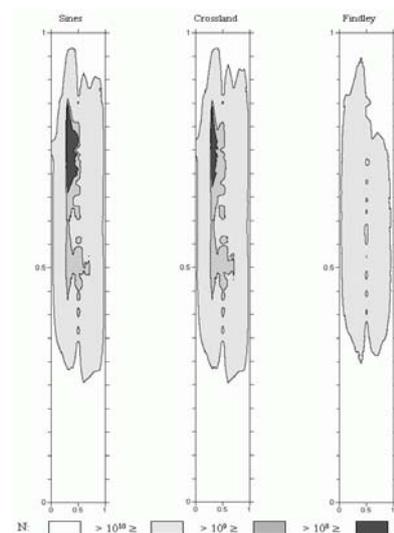


Фиг. 2-б

На фиг. 3-а для окрестности левого угла контактного соединения диска и лопатки типа «ласточкин хвост» (в зонах максимальной концентрации напряжений) показаны рассчитанные величины числа полетных циклов до разрушения N для выбранных критериев и моделей многоосного усталостного разрушения. На фиг. 2-б рассматриваемая окрестность левого угла контактного паза диска выделена сплошной линией. На фиг. 3-а по горизонтальной оси отложена безразмерная координата закругления левого угла паза, по вертикальной оси отложена безразмерная координата по глубине паза.



Фиг. 3-а. Оценка МЦУ долговечности.



Фиг. 3-б Оценка СВМУ долговечности

Критерии Сайнса, Лемэтра-Шабоша, Брауна-Миллера и Смита-Ватсона-Топпера дали оценку долговечности дисков ГТД на уровне 20 000 – 50 000 циклов. Критерии Кроссланда и УЛ предсказали возможность усталостного разрушения менее, чем в 20 000 полетных циклов. В целом, все эти критерии дали сходное расположение зон усталостного разрушения. Критерий Фатеми-Соси дает результаты для долговечности порядка 100 000 циклов. Расхождение оценки Фатеми-Соси с результатами, полученными по иным критериям, может

свидетельствовать о том, что сдвиговой механизм многоосного усталостного разрушения, отраженный в этом критерии, в чистом виде в полетных циклах нагружения не реализуется.

3. Пример расчета многоосного напряженного состояния и оценки долговечности элементов конструкций при низкоамплитудных осевых воздействиях. Дополнительно исследовался альтернативный механизм усталостного нагружения, связанный с наблюдаемыми высокочастотными осевыми колебаниями бандажных полок. Амплитуды этих колебаний и вызываемые ими возмущения напряженного состояния в окрестности концентратора напряжений относительно невелики, однако число циклов при высокой частоте колебаний за время эксплуатации может достигнуть величин $10^9 \div 10^{10}$, что приводит к необходимости исследования режима сверхмногоциклового усталости (СВМУ) и возможности усталостного разрушения при уровне напряжений, меньшем классического предела усталости материала [1].

В настоящее время отсутствуют экспериментально обоснованные модели многоосной усталости в режиме СВМУ. Поэтому для оценок долговечности применялись известные критерии многоосного усталостного разрушения МЦУ (1.2), (1.4) и (1.6) с учетом общих предположений о характере поведения усталостных кривых в рассматриваемом режиме. Характерный вид усталостной кривой показан на фиг.1, в данном режиме представляет интерес правая ветвь при $N > 10^8$. Значения параметров для обобщенных моделей Сайнса, Кроссланда и Финдли в режиме СВМУ определялись по формулам (1.3), (1.5), (1.7) с учетом подобия левой и правой ветвей усталостной кривой и с заменами $\sigma_B \rightarrow \sigma_u$, $\sigma_u \rightarrow \tilde{\sigma}_u$, $\sigma_{u0} \rightarrow \tilde{\sigma}_{u0}$, где $\tilde{\sigma}_u$ и $\tilde{\sigma}_{u0}$ – «новые» пределы усталости на правой ветви усталостной кривой для коэффициентов асимметрии $R = -1$ и $R = 0$. Для расчетов выбраны значения усталостных параметров титанового сплава в режиме СВМУ $\sigma_u = 450$ МПа, $\tilde{\sigma}_u = 250$ МПа, $\tilde{\sigma}_{u0} = 200$ МПа, $\beta = 0.3$.

Осевые смещения бандажных полок связаны с волновыми возмущениями, которые распространяются по угловой координате. На полный набор лопаток обычно укладывается 12-16 полуволн. Это дает возможность ввести в качестве крайних состояний элементарного цикла данного типа нагружения два положения сектора диска с одной лопаткой. В этих положениях при нулевом осевом смещении правого конца бандажной полки осевые смещения левого конца направлены в противоположных направлениях и в режимах эксплуатации достигают величины порядка 1 мм. Рассматриваемые низкоамплитудные воздействия накладываются на основное напряженное состояние в полетном цикле нагружения, определяемое крейсерской скоростью полета и базовой частотой вращения диска компрессора 3000 об/мин., которое рассчитано в разделе 2.

На фиг. 3-б для окрестности левого угла контактного соединения диска и лопатки (в зонах максимальной концентрации напряжений) показаны рассчитанные величины числа циклов до разрушения N для трех выбранных критериев по напряженному состоянию (Сайнса, Кроссланда и Финдли) в режиме СВМУ. Несмотря на относительно невысокий уровень амплитуд напряжений в цикле, расчетами показано, что и в этом случае возникают зоны возможного усталостного разрушения, расположенные в тыльной зоне левого угла паза диска, примерно там же, где и в случае полетных циклов нагружения. Величина N , при которой они появляются, имеет порядок $10^9 \div 10^{10}$, что в пересчете на реальное время процесса с периодом цикла 0.02 с (при выбранной частоте колебаний) дает величину 50 000 час, вполне достижимую в процессе эксплуатации. Эти оценки указывают на принципиальную возможность развития усталостного разрушения в указанных зонах диска компрессора как по механизму МЦУ (полетный цикл нагружения), так и по механизму СВМУ (высокочастотные, низкоамплитудные вибрации элементов конструкции).

4. Аналитические оценки долговечности кольцевого диска для механизмов МЦУ и СВМУ разрушения. С целью дополнительного наглядного подтверждения полученных результатов решены две модельные задачи теории упругости о нагружении кольцевого диска.

В первой задаче к диску приложена центробежная нагрузка, а на внешнем контуре переменное по углу радиальное напряжение, моделирующее центробежную нагрузку от

лопаток и согласованное с ней по амплитуде (аналог режима МЦУ). Предполагается, что циклом многоосного нагружения диска является аналог полетного цикла нагружения (ПЦН), состоящий в достижении максимальных нагрузок на максимальных угловых скоростях вращения диска компрессора при нулевых напряжениях в начале цикла.

Во второй задаче решается уравнение для изгиба диска под действием переменных по углу крутящих моментов на внешнем контуре. Эти моменты моделируют влияние колебаний лопаток (аналог режима СВМУ). В качестве крайних состояний элементарного цикла данного типа нагружения принимаются два положения сектора диска с одной лопаткой, закрученной на максимальный угол по и против часовой стрелки. Рассматриваемые низкоамплитудные колебания накладываются на напряженное состояние в полетном цикле нагружения, определяемое базовой частотой вращения диска.

В обоих случаях максимальные главные напряжения резко возрастают в окрестности внешнего контура и приводят к появлению зон усталостного разрушения при значениях параметров, соответствующих титановому сплаву Ti-6Al-4V. Оценки долговечности по критерию Сайнса также указывают, что усталостное разрушение в любом из этих режимов может происходить за примерно одинаковый период реального времени, оцениваемый как произведение числа N на период цикла нагружения МЦУ или СВМУ.

Выводы. В работе проведен сравнительный анализ и оценка долговечности диска компрессора ГТД для двух альтернативных механизмов усталостного разрушения МЦУ и СВМУ. Выполненные расчеты указывают на близкое расположение зон усталостного разрушения и близость оценок долговечности для МЦУ и СВМУ в реальном времени.

Исследование выполнено по планам ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009-2013 годы и проектов РФФИ 12-08-00366-а, 12-08-01260-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шанявский А.А. Моделирование усталостных разрушений металлов. Уфа: Изд-во научно-технической литературы «Монография», 2007. 498с.
2. Burago N.G., Zhuravlev A.B., Nikitin I.S. Models of Multiaxial Fatigue Fracture and Service Life Estimation of Structural Elements.// Mechanics of Solids. 2011. Vol. 46. No. 6. Pp. 828-838.
3. Sines G. Behavior of metals under complex static and alternating stresses. Metal fatigue. McGraw-Hill. 1959. Pp. 145-169.
4. Crossland B. Effect of large hydrostatic pressures on torsional fatigue strength of an alloy steel. // Proc. Int. Conf. on Fatigue of Metals. London. 1956. Pp.138-149.
5. Findley W.N. A theory for the effect of mean stress on fatigue of metals under combined torsion and axial load or bending. J. of Eng. for Industry. 1959. Pp. 301-306.
6. Бурого Н.Г., Журавлев А.Б., Никитин И.С. Анализ напряженного состояния контактной системы «диск-лопатка» газотурбинного двигателя. // Вычисл. мех. сплош. сред. 2011. Т.4. № 2. С.5-16.

Сведения об авторах:

Бурого Николай Георгиевич – ведущий научный сотрудник лаборатории моделирования в механике деформируемого твёрдого тела ИПМех РАН им. А.Ю. Ишлинского, (495)434 41 35
E-mail buragong@yandex.ru

Журавлев Алексей Борисович – старший научный сотрудник лаборатории геомеханики ИПМех РАН им. А.Ю. Ишлинского, (495)434 41 35 E-mail zhuravlev.alex2010@yandex.ru

Никитин Илья Степанович – профессор кафедры физики МАТИ им. К.Э. Циолковского, (495)417 99 04 E-mail i_nikitin@list.ru

ОБРАТНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТНЫЕ ЗАДАЧИ В МЕХАНИКЕ СВЯЗАННЫХ ПОЛЕЙ

Ватульян А.О.

Представлены способы исследования коэффициентных обратных задач для связанных линейных моделей механики деформируемого твёрдого тела. Сформулированы слабые постановки для моделей электроупругости, термоупругости, пороупругости. Решён ряд одномерных задач с помощью сведения к итерационным процессам, на каждом шаге которого решается прямая задача и находятся поправки к искомым функциям на основе решения ИУФ 1-го рода.

Расширение областей приложения моделей механики связанных полей в последние годы обусловлено значительным ростом приложений в механике пьезокомпозитов с неоднородной поляризацией, термоупругости функционально-градиентных материалов, в пороупругости, в механике грунтов, в моделях биомеханики при моделировании свойств костной и мышечной ткани. Одним из направлений содержательного развития современной механики связанных полей является переход к моделям с переменными свойствами. Для исследования конкретных задач для таких моделей, для расчёта компонент физических полей, который осуществляется обычно с использованием конечноэлементных технологий, уже недостаточно характерного набора физических постоянных, в том числе и моделирующих связанность полей, а требуется предварительное определение функций, характеризующих неоднородные свойства материала. Эти функции обычно определяются из набора экспериментов, в которых осуществляется анализ динамического отклика исследуемого объекта в установившемся или нестационарном режиме при варьировании способа нагружения и частоты колебаний. При этом, для определения этих функций требуется решать довольно сложные нелинейные некорректные обратные задачи. Отметим, что в рамках линейных моделей механики эти исследования по определению неизвестных материальных функций успешно продвигаются как в направлении совершенствования постановок (изменение вида граничных условий, способов нагружения, выбора частотного интервала или формы нестационарного воздействия, измерение различных компонент граничных полей), так и в направлении построения регуляризованных вычислительных схем, опирающихся на формулировку итерационных процессов.

Главная проблема, возникающая при решении задач такого типа, состоит в формулировке операторных соотношений между искомыми функциями и измеряемыми зависимостями (обычно граничными значениями полей смещений, температуры, электрического потенциала). Наиболее общий подход к решению таких задач в линейной механике описан в работе [1], различные аспекты реализации для моделей теории упругости и электроупругости представлены в [2]-[3], конкретные задачи для несвязанных моделей исследованы в [4]-[7], для моделей несвязанной теории термоупругости и теплопроводности – в [8]. Слабая постановка задач и некоторые этапы решения в механике связанных полей представлены в [9].

В настоящей работе представлен общий подход к решению обратных коэффициентных задач для моделей электроупругости, термоупругости и пороупругости и реализация на ряде примеров для одномерных обратных задач.

В рамках установившихся колебаний деформируемого твёрдого тела при наличии связанности полей исходная краевая задача сводится к следующей слабой постановке

$$A(a, u, v) = b(v) \quad (1)$$

где $A(a, u, v)$ – трилинейная форма (линейная по каждому аргументу) переменных a, u, v , $b(v)$ – линейная форма. Здесь u – вектор, характеризующий физические поля, v – пробный вектор, имеющий достаточно гладкие компоненты и удовлетворяющий главным граничным условиям, a – вектор коэффициентов для соответствующего оператора (компоненты тензоров модулей упругости, и пьезоэлектрические характеристики, плотность, коэффициенты тензора проницаемости и тензора Био). На основе слабой постановки можно получить обобщённое соотношение взаимности в следующем виде:

$$A(a^1 - a^2, u^1, u^2) = b(u^2 - u^1) \quad (2)$$

Построена итерационная схема решения обратной задачи, причём для определения элементов последовательности $(a^{(n)}, u^{(n)})$ формируются следующим образом:

$$A(a^{(n)}, u^{(n)}, v) = b(v) \quad (3)$$

а поправка $\delta a^{(n)}$ находится из линейного операторного уравнения с компактным оператором

$$A(\delta a^{(n)}, u^{(n)}, u^{(n)}) = b(f^{(n)} - f) \quad (4)$$

На основе этого подхода получены слабые постановки для операторов термоупругости в стационарной и нестационарной постановках, для операторов электроупругости и пороупругости в стационарных постановках. Отметим, что вид трилинейной формы для операторов электроупругости и термоупругости приведён в работе [9]. На основе слабой формулировки (1) в настоящей работе рассмотрен ряд одномерных обратных задач для стержневых и слоистых структур.

1. В качестве первого примера приведём задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений, к которым сводятся одномерные обратные задачи электроупругости для прямоугольника, для которого нагружение осуществляется различным образом (с помощью нормальной нагрузки, приложенной к верхней грани прямоугольника и с помощью подведения к электродам разности потенциалов). В качестве дополнительной информации, по которой осуществляется реконструкция неоднородных характеристик, используется информация о смещении на верхней грани и ток в цепи в некотором частотном диапазоне.

Задача 1

$$\begin{aligned} (C_{33}u' + e_{33}\psi')' + \kappa^2 u &= 0, \\ (e_{33}u' - \lambda^2 \varepsilon_{33}\psi')' &= 0 \\ u(0) = \psi(0) = 0, \quad C_{33}(1)u'(1) + e_{33}(1)\psi'(1) &= P_3, \quad \psi(1) = 0 \\ u(1, \kappa) = t_3(\kappa), \quad \kappa \in [\kappa_1, \kappa_2] \end{aligned} \quad (5)$$

Задача 2

$$\begin{aligned} (C_{33}v' + e_{33}\varphi')' + \kappa^2 v &= 0, \\ (e_{33}v' - \lambda^2 \varepsilon_{33}\varphi')' &= 0 \\ v(0) = \varphi(0) = 0, \quad C_{33}(1)v'(1) + e_{33}(1)\varphi'(1) &= 0, \quad \varphi(1) = F_0 \\ D_3(1, \kappa) = d_{30}(\kappa), \quad \kappa \in [\kappa_3, \kappa_4] \end{aligned} \quad (6)$$

Неизвестными коэффициентами в задачах (5)-(6) (компонентами вектора a) являются функции $C_{33}(x), e_{33}(x), \varepsilon_{33}(x)$ – соответственно модуль упругости, пьезомодуль и диэлектрическая проницаемость. Решение прямой задачи при изменении спектрального параметра κ , пропорционального частоте колебаний, осуществлено на основании сведения к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода с непрерывными ядрами. Решение обратной задачи строится на основе метода линеаризации, применённого к слабой постановке, причём начальное приближение находится с помощью минимизации функционала невязки в классе линейных функций, а поправки к неизвестным функциям $\delta C_{33}, \delta e_{33}, \delta \varepsilon_{33}$ находятся из системы интегральных уравнений Фредгольма первого рода, которые получаются из слабой постановки. Отметим, что ядра интегральных операторов являются суммируемыми и зависят от производных функций, найденных на предыдущем этапе

$$\begin{aligned} \int_0^1 [\delta C_{33}(u^{(n-1)})^2 + 2\delta e_{33}u^{(n-1)}\psi^{(n-1)} - \lambda^2 \delta \varepsilon_{33}(\psi^{(n-1)})^2] dx &= -P_3(t_3(\kappa) - u^{(n-1)}(1, \kappa)), \quad \kappa \in [\kappa_1, \kappa_2] \\ \int_0^1 [\delta C_{33}(v^{(n-1)})^2 + 2\delta e_{33}v^{(n-1)}\varphi^{(n-1)} - \lambda^2 \delta \varepsilon_{33}(\varphi^{(n-1)})^2] dx &= F_0(d_{30}(\kappa) - D_3^{(n-1)}(1, \kappa)), \quad \kappa \in [\kappa_3, \kappa_4] \end{aligned} \quad (7)$$

Из полученной системы двух интегральных уравнений (4) определяются неизвестные поправки лишь к двум неизвестным функциям (третья должна быть задана). При этом, решение

возможно лишь численно и с учётом некорректности этой задачи требуется применение регуляризующего алгоритма, в качестве которого использован метод А.Н. Тихонова. Таким образом, строится итерационный процесс для нахождения следующих приближений неизвестных функций $C_{33}^{(n)}(x)$, $e_{33}^{(n)}(x)$, $\varepsilon_{33}^{(n)}(x)$.

2. В качестве второго примера представим задачу об идентификации неоднородных характеристик для пороупругого слоя. Исследуем две задачи об определении безразмерного упругого модуля γ_4 и модуля Био β_3 неоднородного пороупругого слоя в режиме установившихся толщинных колебаний. Пусть известна некоторая дополнительная информация об амплитудах и фазах колебаний верхней грани слоя в некотором диапазоне частот. Соответствующая краевая задача относительно осреднённых безразмерных вертикальных смещений и давления в порах имеет вид:

$$\begin{aligned} i\kappa\delta\tilde{P} + (\mu_{33}\tilde{P}_{,3})_{,3} + i\kappa\eta_3\tilde{U}_{3,3} &= 0 \\ (\gamma_4\tilde{U}_{3,3})_{,3} - \beta_3\tilde{P}_{,3} + \kappa^2(1-\nu_3)\tilde{U}_3 &= 0 \\ \tilde{U}(0) = \tilde{P}_3(0) = 0 \quad \tilde{P}_3(1) = 0, \gamma_4\tilde{U}_{3,3}(1) &= F \\ \tilde{U}(1, \kappa) = f(\kappa) \quad , \quad \kappa \in [\kappa_1, \kappa_2] & \end{aligned} \quad (8)$$

причём неизвестными переменными коэффициентами в обратной задаче являются γ_4 , β_3 – соответственно безразмерные модуль упругости и модуль Био. Отметим, что исходная прямая задача решалась на основе метода стрельбы. Используя обобщённое соотношение взаимности (2), проведём линеаризацию задачи в окрестности некоторого начального состояния и получим интегральные уравнения Фредгольма первого рода для определения поправок для искомых коэффициентов дифференциальных уравнений. Так, например, при известном законе изменения β_3 уравнение для определения поправки имеет вид

$$(F(f(\kappa) - U^{(n-1)}(1, \kappa)) + \int_0^1 \delta\gamma_4^{(n)}(s)K_1(s, \kappa)ds = 0 \quad \kappa \in [\kappa_1, \kappa_2] \quad (9)$$

причём ядро интегрального оператора находится с помощью решений предыдущего этапа

$$K_1(s, \kappa) = U^{(n-1)'}(s, \kappa)\bar{U}^{(n-1)'}(s, \kappa)$$

Решая это уравнение методом Тихонова, определим функцию $\delta\gamma_4^{(n-1)}$, которая позволит строить новые приближения $\gamma_4^{(n)}$.

Отметим, что выход из итерационного процесса осуществляется из критерия невязки на основе проверки дополнительного граничного условия.

Тем самым, решение обратных задач сведено к последовательности решения прямых задач на основе метода стрельбы и решений интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода для определения поправок.

Результаты вычислительных экспериментов по реконструкции электроупругих, теплофизических и пороупругих характеристик в простых задачах для одномерных структур показали достаточную точность при восстановлении монотонных и немонотонных зависимостей.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№10-01-00194-а), ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009 – 2013 годы (госконтракт П596) и Южного математического института (г. Владикавказ).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ватульян А.О. К теории обратных коэффициентных задач в линейной механике деформируемого тела.// ПММ. 2010. №6. С.911-918.
2. Ватульян А.О. Обратные задачи в механике деформируемого твёрдого тела. М.: Физматлит, 2007. 223с.
3. Ватульян А.О., Соловьев А.Н. Прямые и обратные задачи для однородных и неоднородных упругих и электроупругих тел. Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета. 2008. 176с.
4. Ватульян А.О., Домброва О.Б., Жиров В.Е. Обратные задачи для неоднородно поляризованных пьезоэлектрических стержней // ПММ. 2007. №1. С.93-101
5. McLaughlin J., Yoon J.-R .Unique identifiability of elastic parameters from time-dependent interior displacement measurement //Inverse Problems. 2004. V.20. P.25-45
6. Gockenbach M.S., Khan A.A. Identification of Lamé parameters in linear elasticity: A fixed point approach // J. Indust. Manag. ptim. 2005. V.1. № 1. P.487-497.
7. Богачев И.В., Ватульян А.О., Явруян О.В. Идентификация упругих характеристик неоднородного по толщине слоя// Акустический журнал. 2011.Т.57. № 6. С.723-730.
8. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Коэффициентные обратные задачи термоупругости для неоднородных тел //Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2009. №3. С.24-30.
9. Ватульян А.О. Об идентификации неоднородных свойств в механике связанных полей //Сборник научных трудов межд .конф. «Актуальные проблемы механики сплошных сред», 4-8 октября 2010, Дилижан. Т.1. С.155-157.

Сведения об авторе:

Ватульян Александр Ованесович – доктор физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой теории упругости Южного федерального университета. **E-mail:** vatulyan@math.rsu.ru

НЕЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ И СИНТЕЗ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ С ПРЕДПИСАННЫМ ЗАКОНОМ УПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Гаврюшин С.С.

Излагается численная методика и накопленный практический опыт в области расчётов и проектирования нового поколения функциональных и исполнительных элементов робототехнических устройств и приводов, созданных на базе упруго-деформируемых тонкостенных механических конструкций. К отличительным особенностям рассматриваемых элементов следует отнести реализацию принципа управляемой деформации, позволяющего реализовать предписанный закон перемещения. Обсуждаются результаты анализа и синтеза реальных конструкций.

Введение. В традиционных робототехнических приводах электродвигателях, сервоприводах, гидравлических, пневматических и др. устройствах, как правило, подразумевается наличие движущихся как жёсткое целое узлов и деталей, что влечет сопутствующие проблемы обеспечения герметичности, уменьшения трения, смазки контактируемых поверхностей и т.д. В этой связи в качестве особого класса движителей (актюаторов) могут рассматриваться деформируемые конструкции, то есть конструкции, способные существенно изменять свою исходную форму без нарушения целостности. Такие элементы оказались незаменимыми при конструировании белых роботов, выводов движения в вакуум, для работы агрессивных и сверхчистых средах, в том числе, внутри человеческого организма [1–3]. Актюаторная компонента, с помощью которой осуществляется преобразование внешнего воздействия в механическое движение, наряду с логической и сенсорной компонентами, составляет триаду свойств, присущих робототехническому устройству в целом, и является основой для его создания и последующей интеллектуализации. Поскольку основным свойством актюаторов, использующих принцип управляемой деформации, является реализация движения. Деформационные процессы должны обеспечивать большие перемещения, то есть перемещения, соизмеримые с характерными размерами конструкции. Традиционные расчёты в рамках малых перемещений в соответствии с принципом неизменности начальных размеров оказываются не применимыми. Известно, что в тонкостенных конструкциях большие перемещения можно реализовать за счёт малых деформаций. Деформирование таких элементов может быть вызвано действием давления, температуры или происходить благодаря эффекту памяти формы. При проектировании в своём большинстве используются конструкции, подпадающие под две расчётные схемы: расчётную схему пространственного стержня и расчётную схему осесимметричной тонкостенной оболочки. Обе схемы позволяют свести задачу анализа процесса деформирования к решению нелинейной краевой задачи для системы дифференциальных уравнений в обыкновенных производных. Анализ проводится с использованием лагранжевого способа описания движения, позволяющего наглядно описывать процесс деформирования конструкции при больших перемещениях.

Алгоритм расчёта. Для обеспечения требуемых эксплуатационных характеристик в процессе численного моделирования и проектирования деформируемого элемента требуется провести своеобразное *программирование* свойств будущей конструкции, при котором закладывается возможность реализации требуемых нелинейных деформационных процессов, в том числе процессов, происходящих посредством хлопков или перескоков. Для описания текущего деформированного состояния используется векторная функция состояния $X(s^0, q)$, зависящая от лагранжевой координаты s^0 и параметра q , имеющего смысл параметра продолжения [4,5,6]. Излагаемая методика расчёта и проектирования элементов с управляемой упругой деформацией опирается на идею мультипараметрического подхода [4] при математическом моделировании на ЭВМ существенно нелинейных процессов. Для получения релейной характеристики, реализующей дискретный отклик на монотонное измерение внешнего воздействия, в проектируемый процесс деформирования тонкостенного оболочечного элемента закладывается эффект упругого перескока. При численном моделировании используется стратегия последовательного исследования однопараметрических нелинейных задач, принадлежащих многопараметрическому семейству в которое *погружена* анализируемая задача, что позволяет выйти на решение задачи численного синтеза конструкции. Алгоритм численного исследования основан на использовании метода

продолжения решения по параметру в сочетании с приёмом *смены подпространства управляющих параметров* [5]. Переход от задачи анализа к задаче синтеза конструкции реализуется в рамках многопараметрического подхода, суть, которого заключается в следующем. Представим разрешающие соотношения в операторном виде:

$$F(\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)})=0 \quad (1)$$

Предполагается, что в общем случае, система (1), имеющая порядок m , содержит m неизвестных $x_j^{(1)}$ ($j = 1, 2, \dots, m$), являющихся *внутренними* параметрами, характеризующими состояние системы, и зависит от переменных $x_j^{(2)}$ ($j = 1, 2, \dots, n$), которые трактуются, как *внешние* параметры или параметры управления. Количество независимых внешних параметров определяет, так называемую, *коразмерность* задачи. Параметрами управления в отдельно взятом случае могут быть конструкторские параметры, то есть параметры, которыми варьирует разработчик. Разделение параметров на две группы в определённой степени субъективно. Конечной целью задачи синтеза является нахождение рациональных значений параметров, а в случае наличия целевой функции их оптимальных значений. Исследование процессов деформирования в механике деформируемого твёрдого тела традиционно рассматривается как некоторый процесс, зависящий от внешнего возмущения, компоненты которого и составляют $\mathbf{X}^{(2)}$. Если все компоненты функционального вектора $\mathbf{X}^{(2)}$ удастся выразить только через один независимый параметр – q , процесс называют однопараметрическим или процессом с коразмерностью равной единице.

$$\mathbf{X}^{(2)} = \mathbf{X}^{(2)}(q) \quad (2)$$

Совокупность всех решений (1) для заданного числа $m+n$ внешних и внутренних параметров, для наглядности можно интерпретировать как некоторую поверхность (гиперповерхность) равновесных состояний, построенную в евклидовом пространстве параметров R^{m+n} , а каждый однопараметрический процесс (2), как некоторую траекторию, принадлежащую этой поверхности. При анализе однопараметрических процессов управляющий параметр q удобно считать равноправным с остальными параметрами задачи, рассматривая его как $(m+1)$ -ю неизвестную расширенного вектора \mathbf{X}_{ext} и записывать систему уравнений описывающих однопараметрический процесс в форме:

$$r(\mathbf{X}_{ext})=0 \quad (3)$$

Отметим, что порядок системы (3) равен m , и её решение проводят с использованием дополнительного соотношения, содержащего независимую величину λ , называемую параметром продолжения

$$f(\mathbf{X}_{ext}, \lambda)=0 \quad (4)$$

Известно, что в нелинейных механических системах даже при простых видах возмущения могут возникнуть сложные и трудно предсказуемые переходы. В современной математике эта проблематика изучается в рамках направления, получившего название теория катастроф [7]. В случае однопараметрического семейства систем общего положения (3), могут иметь место неустранимые особенности только типа складки. Процедура реализации счёта при прохождении окрестности предельных точек предложена в 1968 г. Н.В. Валишвили и известна как прием *смены параметра* [8]. Проблема выбора оптимального параметра для однопараметрических задач подробно продолжения рассмотрена в [5]. Особенности коразмерности два и выше можно устранить посредством *шевеления* параметров системы, что принципиально позволяет выбрать траекторию процесса, проходящую мимо окрестностей таких особых точек. Обход производится с помощью приёма численного счёта названного нами *приёмом смены подпространства управляющих параметров* [4]. Суть приёма заключается в следующем: при подходе к окрестности особой точки следует перейти к другой однопараметрической системе (3), для которой проекция равновесной поверхности на ось параметра управления в рассматриваемом диапазоне его изменений не имеет особенностей коразмерности выше первой. Стратегия численного исследования представляет собой кусочно-гладкий процесс продолжения решения по параметру в пространстве состояний всех систем, причём на каждом гладком участке процесса, численный анализ сводится к решению однопараметрической задачи.

Расчётная схема пространственного стержня. При анализе пространственного стержня используются соотношения [9], описывающие нелинейную деформацию гибкого растяжимого пространственного стержня в предположении справедливости гипотезы Эйлера-Бернулли. Исследование процесса деформирования сводится к решению краевой задачи для системы нелинейных дифференциальных уравнений, дополненной алгебраическими соотношениями. В качестве примера приведены результаты численного анализа упругого элемента микропереключателя, показанного на рис. 1.

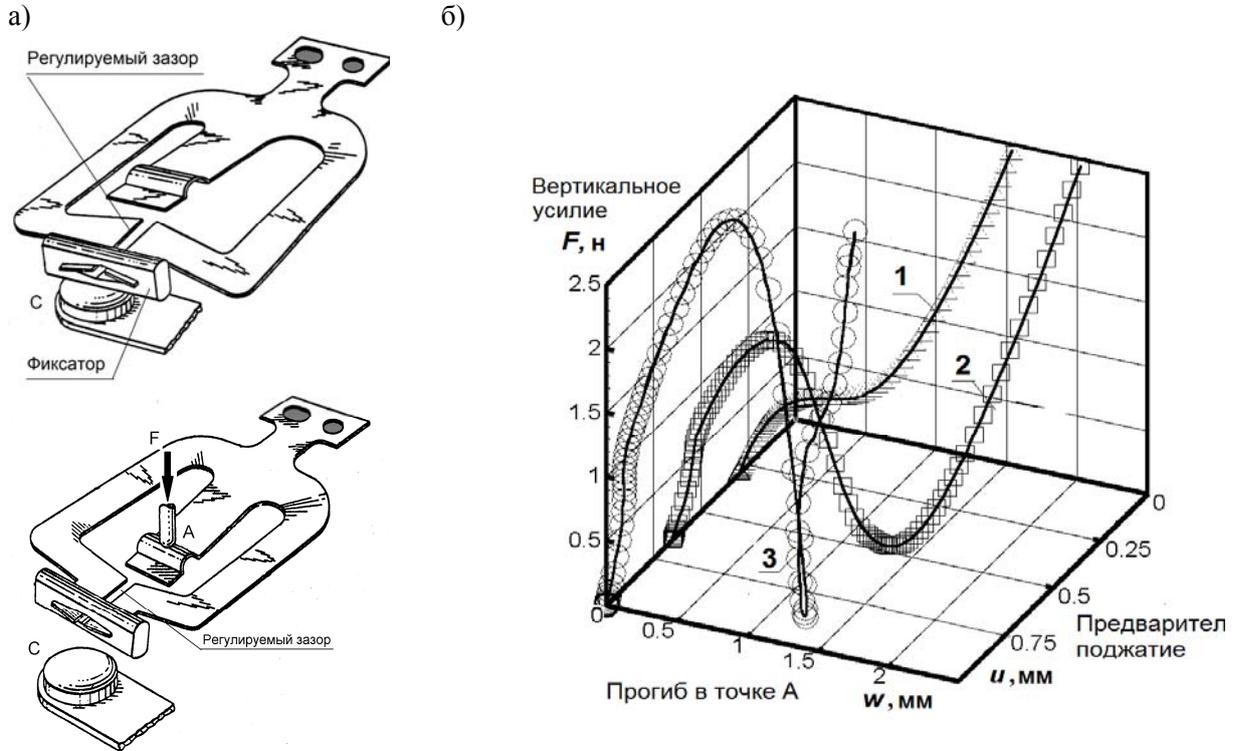


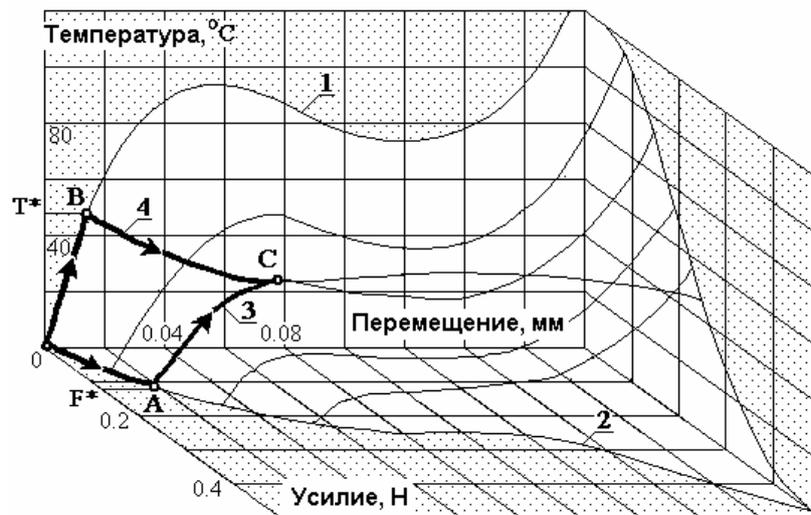
Рис.1. Анализ предварительно деформированного пространственного элемента с дискретной характеристикой переключения.

Элемент имеет достаточно сложную форму (рис.1а). Характерные размеры элемента: длина – 10 мм, ширина – 15 мм, толщина – 0.3 мм. Основной эксплуатационной характеристикой элемента является его рабочая характеристика – зависимость между вертикальным усилием F , приложенным в точке С и вертикальным перемещением контакта w в точке А. Рабочая характеристика элемента формируется на стадии предварительного деформирования при сборке. При этой операции заготовку упругого элемента микропереключателя деформируют посредством изменения и последующей фиксации регулируемого зазора. Таким образом, упругая характеристика элемента формируется на этапе предварительного деформирования. Упругие характеристики элемента в зависимости от величины предварительного поджатия приведены на рис. 1б. При малых значениях предварительного поджатия u рабочая характеристика 1 не имеет особых точек, и упругий элемент *прощелкивать* не будет. При увеличении предварительного поджатия, рабочая характеристика II приобретает характерный S-образный характер с верхней и нижней критическими точками. Деформирование упругого элемента с такой упругой характеристикой реализуется дискретно (хлопком). При достижении силой F верхнего критического значения элемент *прощелкивает* в нижнее положение равновесия, а при снижении значений силы до нижнего критического значения силы – возвращается в верхнее положение. При дальнейшем увеличении предварительного поджатия рабочая характеристика 3 усложняется, при этом нижнее критическое значение силы может стать отрицательным, что соответствует, так называемому *залипанию* элемента в нижнем равновесном положении. Задача синтеза конструкции заключается в подборе величины

предварительного поджатия, при котором процесс переключения реализуется хлопком и без залипания. Найденное рациональное значение величины соответствует примерно 0.65 мм.

Расчётная модель осесимметричной оболочки. Для описания нелинейного деформирования использовался вариант теории тонких упругих осесимметричных оболочек типа Рейсснера. Применительно к решению задачи о деформировании биметаллического купола вспомогательные величины определялись соотношениями [10]. Приведённый далее пример проектирования термобиметаллического (ТБ) диска с дискретной характеристикой (рис.3) даёт представление о реализации алгоритма численного синтеза, основанного на использовании приема *смены подпространства управляющих параметров*. Посредством предварительного механического нагружения, проводимого с помощью регулировочного винта (см. 3б), требуется произвести настройку ТБ диска на переключение при заданном значении температуры T^* . Независимыми параметрами являются температура и усилие предварительного поджатия ТБ элемента.

а)



б)

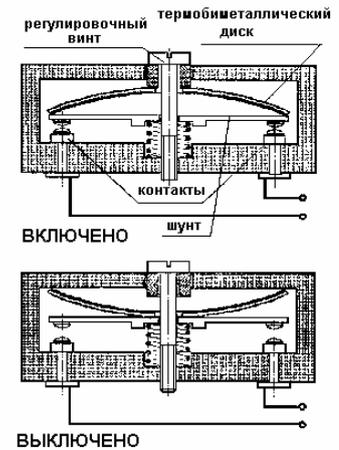


Рис. 2. Синтез термобиметаллического элемента с заданной температурой переключения

В недеформируемом состоянии биметаллический купол прижимается к плоскости по внешнему периметру силой F , распределённой по контуру отверстия в вершине. Геометрические и физико-механические характеристики ТБ диска следующие: диаметр ТБ диска – 5 мм, радиус кривизны в недеформированном состоянии – 22,2 мм; толщина – 0.04 мм, диаметр центрального отверстия – 0,5 мм. Физико-механические характеристики материалов: $E_1=1.50 \times 10^5$ МПа, $E_2=1.35 \times 10^5$ МПа, $\mu_1 = \mu_2=0.3$, $\alpha_1=1.0 \times 10^{-6}$ 1/°C, $\alpha_2=18.0 \times 10^{-6}$ 1/°C. Результаты численного анализа представлены на рис.3а в трёхмерном пространстве: температура, усилие предварительного поджатия, прогиб в центральной точке элемента. Кривая 1 соответствует процессу деформирования ТБ диска при отсутствии предварительного поджатия. Кривая 2 соответствует силовому нагружению элемента при постоянной температуре. Кусочно-гладкие кривые 3 и 4 соответствуют сложному процессу деформирования. Приём смены пространства управляющих параметров был применён в точках A и B . Для определения усилия предварительного поджатия, обеспечивающего срабатывание при заданной температуре, использовалась следующая стратегия решения задачи синтеза. На первой стадии процесса производилось нагружение конструкции температурой вдоль кривой 1 вплоть до достижения заданной температуры T^* . В точке B производилась смена параметра продолжения, и дальнейшее нагружение производилось по силе, пока не достигалась особая точка C , соответствующая предельной точке для зависимости перемещение – усилие. Усилие F , соответствующее этой точке, соответствовало искомому усилию предварительного поджатия F^* , обеспечивающему прощелкивание элемента при требуемой температуре T^* . Для контроля была решена задача по пути нагружения 3, которая показала идентичность полученных результатов с удовлетворительной погрешностью. Таким образом, предлагаемая методика численного синтеза позволяет научно обоснованно назначать конструктивные и технологические параметры проектируемых технических устройств.

Закключение. Использование элементов управляемой упругой деформации, открывает перспективу создания новых типов механических и мехатронных устройств, исполнительных

механизмов, функциональных элементов микро- и нано - систем – сенсоров и актюаторов. Конструктивные особенности элементов обеспечивают их функционирование в вакууме, в сверхчистых или в агрессивных средах, допуская при этом возможность миниатюризации. Использование принципа управляемой упругой деформации при проектировании технических систем, в том числе, и в конструкциях роботов, позволит повысить их функциональные возможности и выйти на новый технический уровень, отвечающий потребностям современного общества. На основе принципа управляемой упругой деформации могут быть созданы качественно новые конструкции мобильных мини- и микроботов специального назначения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александрова А.Т. Новые способы передачи и формирования движения в вакууме. М.: Высшая школа, 1979. 69с.
2. Гаврюшин С.С. Элементы управляемой упругой деформации для функциональных устройств робототехнического оборудования // Мехатроника. 2000. №5. С.16-18.
3. Патент РФ № 2218191 Эндовазальный мини-робот / Г.В.Саврасов, А.В.Покровский, С.С.Гаврюшин, О.С.Нарайкин, А.С.Ющенко, В.И.Поспелов. – №200210938/14 ; Заявл. 11.04.2002.; Оpubл. 10.12.2003, Бюл. №34.
4. Гаврюшин С.С. Численное моделирование и анализ процессов нелинейного деформирования гибких оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. 1994. №1. С.109–119.
5. Григолюк Э.И., Шалашин В.И. Проблемы нелинейного деформирования: Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформируемого тела. М.: Наука, 1988. 232с.
6. Gavriushin S.S. Nonlinear analysis of elastic thin-walled shell structures // Communication in nonlinear science and numerical simulation. 2002. №4. P.223-233.
7. Арнольд В.И. Теория катастроф. М.: Наука, 1990. 128с.
8. Валишвили Н.В. Методы расчёта оболочек вращения на ЭЦВМ. М.: Машиностроение, 1976. 278с.
9. Гаврюшин С.С. «Анализ и синтез исполнительных элементов робототехнических устройств с предписанным законом движения» //Изв. ВУЗов. Машиностроение. М.: 2011. №12. С.23-32.
10. Али Абдул Карим, Гаврюшин С.С. Численный анализ термометаллических элементов быстродействующих электротехнических устройств // Изв.ВУЗов. Машиностроение, 2005. № 8. С.17–23.

Сведения об авторе:

Гаврюшин Сергей Сергеевич – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Компьютерные системы автоматизации производства», Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, 8 499 263 68 54, 8 499 263 66 39,
E-mail: gss@rk9.bmstu.ru

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ И ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН-ПОЛОС ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА И ОСЕВОЙ СИЛЫ

Геворкян Г.З.

Рассмотрены задачи устойчивости и изгибных колебаний ортотропных пластин-полос переменной толщины при учёте поперечного сдвига и осевой силы. Полученные уравнения позволяют определить как частоты собственных колебаний так и критические значения осевой силы, при которой пластина-полоса теряет устойчивость. Задачи решены методом коллокаций при различных значениях геометрических и физических параметров.

1. Рассмотрим ортотропную пластину-полосу переменной толщины $h(x)$, бесконечную вдоль оси Oy и длины a по оси Ox . Координатную плоскость xOy совместим со срединной плоскостью пластины. Координатные оси параллельны главным направлениям анизотропии материала пластины-полосы. Уравнения изгибных колебаний пластины-полосы при учёте влияния поперечного сдвига и наличии осевой силы P можно представить в виде [1], [2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} &= -P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} - N_x &= -\frac{\rho h^3}{12} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} - a_{55} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$N_x = \frac{2}{3} h \varphi_1 - \frac{h^2 B_{11}}{12} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - a_{55} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) \frac{\partial h}{\partial x}, \quad M_x = -\frac{h^3 B_{11}}{12} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - a_{55} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) \quad (2)$$

Здесь a_{ij} и B_{ij} – упругие параметры материала, φ_1 – функция, характеризующая распределение касательных напряжений τ_{xz} , w – прогиб срединной плоскости пластины-полосы, t – время, ρ – плотность материала. Остальные обозначения общеприняты [3]. Подставляя (2) в (1), переходя к задаче колебаний и используя обезразмеривающие обозначения

$$\begin{aligned} x &= a\bar{x}, \quad h = h_0 H, \quad s = h_0 / a, \quad N_x = \bar{N}_x B_{11} h_0 e^{i\omega t}, \quad M_x = \bar{M}_x B_{11} h_0^2 e^{i\omega t}, \\ P &= T B_{11} h_0, \quad w = \bar{w} h_0 e^{i\omega t}, \quad \varphi_1 = \bar{\varphi} B_{11} e^{i\omega t}, \quad \omega^2 = \Omega^2 B_{11} / \rho a^2, \quad \chi = a_{55} B_{11}, \end{aligned} \quad (3)$$

после некоторых преобразований получим уравнения

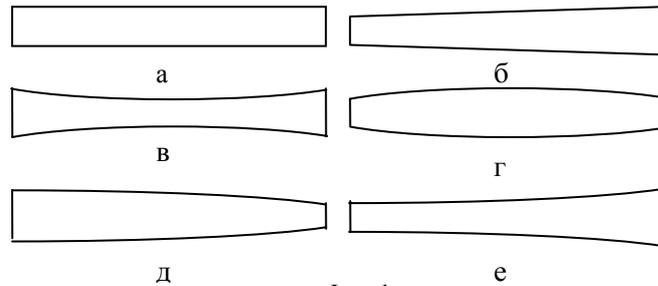
$$\begin{aligned} (12sT - s^3 H^2 H'') \bar{w}'' + \Omega^2 s^2 H^2 \bar{w}' + 12\Omega^2 s H \bar{w} + \\ + (8H + \chi s^2 H^2 H'') \bar{\varphi}' + (16H' - \chi \Omega^2 s^2 H^2 H') \bar{\varphi} = 0 \\ s^3 H^2 \bar{w}''' + 2s^3 H H' \bar{w}'' + \Omega^2 s^3 H^2 \bar{w}' - \\ - \chi s^2 H^2 \bar{\varphi}'' - 2\chi s^2 H H' \bar{\varphi}' + \bar{\varphi} (8 - \chi \Omega^2 s^2 H^2) = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

где Ω – безразмерная частота колебаний пластины. Уравнения (4) позволяют решить как задачу устойчивости, так и задачу собственных колебаний. Если положить $\Omega = 0$, то можно определить критическое значение силы T , при котором пластина-полоса теряет устойчивость.

Рассмотрим пластины-полосы переменной толщины, для которых безразмерная толщина $H(\bar{x})$ изменяется по законам (фиг. 1):

$$\begin{aligned} а) H(\bar{x}) &= 1, \quad б) H(\bar{x}) = 2(1 + \bar{x})/3, \quad в) H(\bar{x}) = 3(\bar{x} - 0.5)^2 + 0.75 \\ г) H(\bar{x}) &= 1.2[1 - 2(\bar{x} - 0.5)^2], \quad д) H(\bar{x}) = 0.6(2 - \bar{x}^2), \quad е) H(x) = 0.75[1 + (\bar{x} - 1)^2] \end{aligned} \quad (5)$$

Все они имеют одинаковую площадь поперечного сечения и при переменности толщины толстая часть в два раза больше тонкой.



Фиг. 1

К уравнениям (1) следует добавить соответствующие граничные условия.

Граничные условия для случаев заделки и шарнирного опирания при $\bar{x} = c = \text{const}$ имеют вид:

заделка

$$\bar{w}|_{\bar{x}=c} = 0, \quad (s\bar{w}' - \chi\varphi)|_{\bar{x}=c} = 0; \quad (6)$$

шарнирное опирание

$$\bar{w}|_{\bar{x}=c} = 0, \quad (s\bar{w}'' - \chi\varphi')|_{\bar{x}=c} = 0. \quad (7)$$

Для решения методом коллокаций функции \bar{w} и φ берём в виде

$$\bar{w} = \sum_{i=0}^n a_i \bar{x}^i, \quad \varphi = \sum_{i=0}^n b_i \bar{x}^i \quad (8)$$

В качестве точек коллокаций берём нули смещённых полиномов Чебышева $T_n(2\bar{x} - 1)$, $\bar{x}_k = \left[1 + \cos \frac{\pi(k-1/2)}{n} \right] / 2$. Удовлетворяя в точках коллокаций уравнениям (2), а в конечных точках граничным условиям, получим однородную систему $2n + 4$ уравнений относительно a_i, b_i .

Полагая $\Omega = 0$ или $T = T_0$ и приравнявая определитель этой системы нулю, получим критические значения силы T , при которых происходит потеря устойчивости или частоты собственных изгибных колебаний при наличии осевой силы.

После определения критических значений или частот собственных колебаний можно определить и вид функций \bar{w} и φ соответствующих этим значениям. Для этого надо полученные уравнения разделить на один из коэффициентов a_m или b_m , перевести соответствующий столбец в правую часть и отбросить одно из уравнений. Решая эти уравнения, можно с точностью постоянного множителя определить функции \bar{w} и φ .

В табл. 1–3 приведены безразмерные значения $T_{кр}$ при $\Omega = 0$ при трёх видах граничных условий.

Таблица 1

зад.-зад.	а	б	в	г	д	е
$\chi = 0$	-0,0337	-0,0273	-0.0442	-0.0272	-0.0273	-0.0290
$\chi = 3$	-0,0290	-0,0243	-0.0323	-0.0240	-0.0241	-0.0252
$\chi = 10$	-0,0221	-0,0189	-0.0228	-0.0187	-0.0188	-0.0195

Таблица 2

зад.-шарн. шарн.-зад.	а	б	в	г	д	е
$\chi = 0$	-0.0168	-0,0145 -0.0146	-0.0139	-0.0165	-0.0148 -0.0149	-0.0141 -0.0148
$\chi = 3$	-0.0155	-0.0135 -0.0135	-0.0132	-0.0152	-0.0135 -0.0139	-0.129 -0.0131
$\chi = 10$	-0.0132	-0.0115 -0.0115	-0.0114	-0.0129	-0.0116 -0.0118	-0.0111 -0.0112

Таблица 3

шарн.-шарн.	а	б	в	г	д	е
$\chi = 0$	-0.00823	-0.00717	-0.00457	-0.0107	-0.00789	-0.00625
$\chi = 3$	-0.00793	-0.00692	-0.00444	-0.0103	-0.00759	-0.00606
$\chi = 10$	-0.00732	-0.00641	-0.00415	-0.0093	-0.00699	-0.00564

В табл. 4–6 приведены безразмерные значения первой частоты Ω при трех значениях T .

Таблица 4

зад.-зад.		а	б	в	г	д	е
$\chi = 0$	$T = 0$	0.644	0.626	0.807	0.513	0.595	0.665
	$T=0.5T_{кр}$	0.422	0.425	0.441	0.317	0.428	0.478
	$T=-0.5T_{кр}$	0.714	0.753	1.03	0.651	0.719	0.805
$\chi = 3$	$T = 0$	0.591	0.578	0.747	0.474	0.549	0.615
	$T=0.5T_{кр}$	0.383	0.422	0.509	0.260	0.397	0.446
	$T=-0.5T_{кр}$	0.735	0.694	0.910	0.616	0.662	0.739
$\chi = 10$	$T = 0$	0.506	0.498	0.645	0.410	0.473	0.531
	$T=0.5T_{кр}$	0.365	0.367	0.469	0.332	0.345	0.390
	$T=-0.5T_{кр}$	0.611	0.595	0.765	0.474	0.569	0.632

Таблица 5

зад.-шарн. шарн.-зад		а	б	в	г	д	е
$\chi = 0$	$T = 0$	0.443	0.390 0.473	0.467	0.403	0.458 0.388	0.393 0.486
	$T=0.5T_{кр}$	0.315	0.276 0.341	0.348	0.287	0.329 0.274	0.270 0.342
	$T=-0.5T_{кр}$	0.539	0.477 0.568	0.564	0.491	0.553 0.475	0.485 0.590
$\chi = 3$	$T = 0$	0.422	0.374 0.449	0.453	0.384	0.436 0.371	0.377 0.464
	$T=0.5T_{кр}$	0.301	0.265 0.326	0.323	0.274	0.314 0.262	0.247 0.315
	$T=-0.5T_{кр}$	0.512	0.457 0.541	0.550	0.467	0.526 0.454	0.471 0.567
$\chi = 10$	$T = 0$	0.383	0.343 0.407	0.418	0.349	0.395 0.340	0.346 0.421
	$T=0.5T_{кр}$	0.273	0.244 0.298	0.300	0.250	0.289 0.243	0.245 0.308
	$T=-0.5T_{кр}$	0.466	0.419 0.486	0.505	0.424	0.472 0.414	0.423 0.503

Таблица 6

шарн.-шарн..		а	б	в	г	д	е
$\chi = 0$	$T = 0$	0.284	0.273	0.234	0.310	0.282	0.260
	$T=0.5T_{кр}$	0.200	0.193	0.167	0.220	0.201	0.185
	$T=-0.5T_{кр}$	0.348	0.333	0.285	0.379	0.345	0.318
$\chi = 3$	$T = 0$	0.279	0.268	0.230	0.304	0.277	0.256
	$T=0.5T_{кр}$	0.197	0.191	0.165	0.215	0.222	0.182
	$T=-0.5T_{кр}$	0.341	0.328	0.281	0.372	0.338	0.313
$\chi = 10$	$T = 0$	0.268	0.260	0.225	0.290	0.266	0.247
	$T=0.5T_{кр}$	0.190	0.184	0.162	0.206	0.190	0.176
	$T=-0.5T_{кр}$	0.328	0.316	0.273	0.354	0.325	0.302

В приведённых таблицах принято $s = 0.1$ при трёх значениях χ . $\chi = 0$ соответствует классической постановке задачи, когда не учитывается влияние поперечного сдвига, $\chi = 3$ относится к изотропной пластине-полосе при $\nu = 1/3$, а $\chi = 10$ – к ортотропной.

Из приведённых таблиц, как и следовало ожидать, можно заключить, что сжимающая сила приводит к уменьшению частоты изгибных колебаний пластины-полосы, а растягивающая сила – к увеличению.

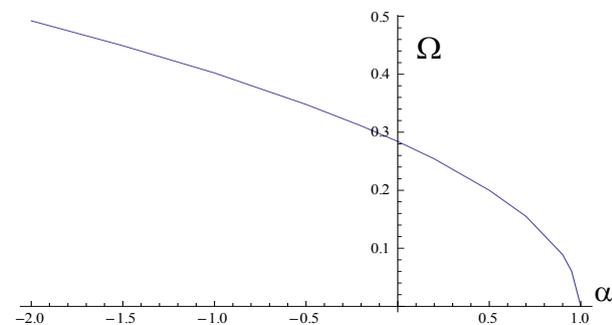
Как показывают численные расчёты, если вместо условий заделки (6) взять $\bar{w}|_{\bar{x}=c} = 0$, $\bar{w}'|_{\bar{x}=c} = 0$, т.е. условия заделки в классической постановке, то наибольшая разница при $\chi = 10$ составляет не более 3%.

Наибольшая разница $T_{кр}$ по классической и уточнённой постановках при $\chi = 10$ составляет 48% и имеет место в случае, когда оба конца заделаны для пластины **в)**, когда тонкая часть находится в середине пластины-полосы.

Когда оба конца заделаны в случае **в)**, при $\chi = 10$ значение $T_{кр}$ на 33% больше, чем для пластины постоянной толщины.

В случае заделка-шарнир наибольшее значение $T_{кр}$ принимает для пластины постоянной толщины, а случае шарнир-шарнир для пластины **г)** – на 29% больше, чем для пластины постоянной толщины.

В задаче свободных колебаний наибольшая разница Ω по классической и уточнённой постановках составляет 25% и имеет место также в случае, когда оба конца заделаны в случае **в)** при $\chi = 10$.



Фиг. 2

Наибольшая разница Ω относительно пластины постоянной толщины также имеет место, когда оба конца заделаны в случае **в)** и составляет 25%.

На фиг. 2 приведён график частоты Ω в зависимости от α , когда на пластину-полосу действует осевая сила $\alpha T_{кр}$. $\alpha = 0$ соответствует свободным колебаниям без осевой силы, а при $\alpha = -2$ на пластину действует растягивающая сила $-2T_{кр}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Киракосян Р.М. Основные уравнения ортотропных пластин переменной толщины при учете поперечных сдвигов и обжатия. // Изв. НАН Армении. Механика. 2002. Т.55. №4. С.12–20.
2. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Физматгиз, 1959. 439с.
3. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360с.
4. Геворкян Г.З., Киракосян Р.М. Свободные поперечные колебания прямоугольных ортотропных пластин переменной толщины при учёте поперечных сдвигов и инерции вращения. // В сб., посв. 80-летию академика НАН РА С.А. Амбарцумяна. Ереван: 2002. С.137–146.
5. Геворкян Г.З., Киракосян Р.М. О неклассической задаче определения частот свободных колебаний ортотропных пластин линейно-переменной толщины. // В сб.: “Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред”. Горис 1–7 октября 2005.
6. Геворкян Г.З. Статическая устойчивость ортотропных пластин-полос переменной толщины при учёте поперечного сдвига. // В сб.: Актуальные проблемы механики сплошной среды. Труды II международной конференции, 4–8 октября, Дилижан, Армения. С.177–181.

Сведения об авторе:

Геворкян Гнун Завенович

К.ф.-м.н., в.н.с. Института механики НАН РА

E-mail: gnungev2002@yahoo.com

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СМЕШАННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБОЛОЧЕК ИЗ ВЯЗКОУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ

Геворкян Р.С., Асратян М.Г.

Интегрированием уравнений трехмерной задачи теории вязкоупругости в криволинейных координатах асимптотическим методом выведены рекуррентные формулы для определения компонент тензора напряжений и вектора перемещения пологой оболочки бесконечных размеров из материалов модели Маслова – Арутюняна. Оболочка считается в плане неоднородной (физико-механические коэффициенты меняются по продольным координатам, но постоянны по толщине). Приведены случаи, когда на поверхностях оболочки заданы условия второй и смешанной краевых задач теории упругости.

Асимптотический метод решения краевых задач теории упругости с неклассическими граничными условиями, впервые применённый в [1,2], оказался эффективным также для решения смешанных краевых задач для слоистых полос и пластин из вязкоупругих материалов [3–5]. В предлагаемой работе выводятся решения смешанных краевых задач для оболочек из вязкоупругих материалов.

Имеем пологую тонкую оболочку толщины $2h$ и бесконечных продольных размеров. Оболочка – из вязкоупругого материала модели Маслова – Арутюняна [6]. Срединную поверхность оболочки отнесём к линиям кривизны α, β , а прямолинейную ось γ направим по внешней нормали к срединной поверхности так, чтобы оси α, β, γ образовали правую тройку.

Пусть на внешней и внутренней поверхностях оболочки заданы не меняющиеся во времени перемещения

$$u_j^*(\alpha, \beta, \gamma = \pm h) = u_j^\pm(\alpha, \beta), \quad j = \alpha, \beta, \gamma \quad (1)$$

или смешанные условия краевой задачи теории упругости

$$u_j^*(\alpha, \beta, \gamma = -h) = u_j^-(\alpha, \beta), \quad \sigma_{j\gamma}(\alpha, \beta, \gamma = h) = \sigma_{j\gamma}^+(\alpha, \beta), \quad j = \alpha, \beta, \gamma \quad (2)$$

Граничные условия на торцах оболочки не ставятся, принимая её бесконечно длинной (либо непрерывной и замкнутой).

Требуется найти напряжённо-деформированное состояние оболочки.

Для решения поставленных краевых задач перепишем уравнения равновесия относительно компонент несимметричного тензора напряжений, которые в выбранной системе координат имеют вид [5,7]

$$\begin{aligned} & \frac{1}{AB} \frac{\partial}{\partial \alpha} (B\tau_{\alpha\alpha}) - k_\beta \tau_{\beta\beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial}{\partial \beta} (A\tau_{\beta\alpha}) + k_\alpha \tau_{\alpha\beta} + \\ & + (1 + \gamma/R_1) \frac{\partial \tau_{\alpha\gamma}}{\partial \gamma} + \frac{2\tau_{\alpha\gamma}}{R_1} + P_\alpha^* = 0 \quad (\alpha, \beta; A, B; 1, 2) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{\partial \tau_{\gamma\gamma}}{\partial \gamma} - \left(\frac{\tau_{\alpha\alpha}}{R_1} + \frac{\tau_{\beta\beta}}{R_2} \right) + \frac{1}{A} \frac{\partial \tau_{\alpha\gamma}}{\partial \alpha} + \frac{1}{B} \frac{\partial \tau_{\beta\gamma}}{\partial \beta} + k_\beta \tau_{\alpha\gamma} + k_\alpha \tau_{\beta\gamma} + P_\gamma^* = 0$$

где A, B – коэффициенты первой квадратичной формы; R_1, R_2 – главные радиусы кривизны

координатной поверхности, а $k_\alpha = \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta}$, $k_\beta = \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha}$ – геодезические кривизны

координатной поверхности, $\tau_{\alpha\gamma} \neq \tau_{\gamma\alpha}(\alpha, \beta, \gamma)$ – компоненты несимметричного тензора напряжений [5,7], которые связаны с компонентами симметричного тензора $\sigma_{\alpha\gamma} = \sigma_{\gamma\alpha}(\alpha, \beta, \gamma)$ формулами

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha\alpha} &= \Lambda_2 \sigma_{\alpha\alpha}, \quad \tau_{\beta\beta} = \Lambda_1 \sigma_{\beta\beta}, \quad \tau_{\gamma\gamma} = \Lambda_1 \Lambda_2 \sigma_{\gamma\gamma}, \quad \tau_{\beta\gamma} = \Lambda_1 \sigma_{\beta\gamma}, \quad \tau_{\alpha\gamma} = \Lambda_2 \sigma_{\alpha\gamma} \\ \tau_{\alpha\beta} &= \Lambda_2 \sigma_{\alpha\beta}, \quad \Lambda_1 \tau_{\alpha\beta} = \Lambda_2 \tau_{\beta\alpha}, \quad \Lambda_1 = 1 + \gamma/R_1, \quad \Lambda_2 = 1 + \gamma/R_2 \end{aligned} \quad (4)$$

Приведём также соотношения, выражающие связь между напряжениями и перемещениями ползучей среды модели Маслова – Арутюняна [6], которые, с учётом (4), в выбранной выше криволинейной системе триортогональных координат имеют вид:

$$e_{\alpha\alpha} = \frac{1}{E(t)} \left[\Lambda_1 \tau_{\alpha\alpha}(t) - \nu(t) (\Lambda_2 \tau_{\beta\beta}(t) + \tau_{\gamma\gamma}(t)) \right] -$$

$$\begin{aligned}
& - \left[\int_{\tau_1}^t \Lambda_1 \tau_{\alpha\alpha}(\tau) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} - (\Lambda_2 \tau_{\beta\beta}(\tau) + \tau_{\gamma\gamma}(\tau)) \frac{\partial \delta_1(t, \tau)}{\partial \tau} \right] d\tau \quad (\alpha, \beta; \Lambda_1, \Lambda_2) \\
e_{\gamma\gamma} &= \Lambda_1 \Lambda_2 \frac{\partial u_\gamma}{\partial \zeta}, \quad e_{\gamma\gamma} = \frac{1}{E(t)} \left[\tau_{\gamma\gamma}(t) - \nu(t) (\Lambda_1 \tau_{\alpha\alpha}(t) + \Lambda_2 \tau_{\beta\beta}(t)) \right] - \\
& - \left[\int_{\tau_1}^t \tau_{\gamma\gamma}(\tau) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} - (\Lambda_1 \tau_{\alpha\alpha}(\tau) + \Lambda_2 \tau_{\beta\beta}(\tau)) \frac{\partial \delta_1(t, \tau)}{\partial \tau} \right] d\tau \\
e_{\alpha\beta} &= \Lambda_1 \left[\frac{\tau_{\alpha\beta}(t)}{G(t)} - 2 \int_{\tau_1}^t \tau_{\alpha\beta}(\tau) \frac{\partial (\delta(t, \tau) + \delta_1(t, \tau))}{\partial \tau} d\tau \right] \quad (5) \\
e_{\alpha\gamma} &= \Lambda_1 \left[\frac{\tau_{\alpha\gamma}(t)}{G(t)} - 2 \int_{\tau_1}^t \tau_{\alpha\gamma}(\tau) \frac{\partial [\delta(t, \tau) + \delta_1(t, \tau)]}{\partial \tau} d\tau \right] \quad (\alpha, \beta; \Lambda_1, \Lambda_2) \\
e_{\alpha\beta} &= \Lambda_1 \left(\frac{1}{B} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \beta} - k_\alpha u_\alpha \right) + \Lambda_2 \left(\frac{1}{A} \frac{\partial u_\beta}{\partial \alpha} - k_\beta u_\beta \right), \quad \frac{1}{G(t)} = \frac{2(1+\nu(t))}{E(t)} \\
e_{\alpha\alpha} &= \Lambda_2 \left(\frac{1}{A} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{u_\gamma}{R_1} \right) + \Lambda_1 k_\alpha u_\beta, \quad e_{\alpha\gamma} = \Lambda_1 \Lambda_2 \frac{\partial u_\alpha}{\partial \gamma} + \Lambda_2 \left(\frac{1}{A} \frac{\partial u_\gamma}{\partial \alpha} - \frac{u_\alpha}{R_1} \right) \quad (\alpha, \beta; A, B; 1, 2)
\end{aligned}$$

В (3)–(5) обозначены: $\tau_{ij}(t)$ – компоненты несимметричного тензора напряжений, $e_{ij}(t)$ – компоненты тензора деформаций, $u_\alpha(t), u_\beta(t), u_\gamma(t)$ – компоненты вектора перемещения, $E(t)$ – модуль упруго-мгновенной деформации, $\nu(t)$ – коэффициент поперечного сжатия (растяжения) для упругой части деформации, $\delta(t, \tau) = 1/E(\tau) + C(t, \tau)$ – полная относительная деформация при растяжении или сжатии, $\delta_1(t, \tau) = \nu(\tau)/E(\tau) + \nu_1(t, \tau)C(t, \tau)$ – полная относительная поперечная деформация, $\nu_1(t, \tau)$ – коэффициент поперечного сжатия (расширения) при деформации ползучести, $C(t, \tau)$ – мера ползучести при сжатии или растяжении, τ_1 – время (момент) времени приложения нагрузки.

В уравнениях (4) и соотношениях (5) переходим к безразмерным координатам и безразмерным перемещениям по формулам

$$\xi = \frac{\alpha}{R}, \quad \eta = \frac{\beta}{R}, \quad \zeta = \frac{\gamma}{h} = \varepsilon^{-1} \frac{\gamma}{R}, \quad u = \frac{u_\alpha}{R}, \quad v = \frac{u_\beta}{R}, \quad w = \frac{u_\gamma}{R}, \quad \varepsilon = \frac{h}{R}, \quad h \ll R \quad (6)$$

где R – характерный размер оболочки. В результате получаем систему уравнений и соотношений, которые сингулярно возмущены геометрическим малым параметром ε . Её асимптотическое решение складывается из двух типов решений [7–10]. Первое – решение внутренней задачи I^{int} , которое удовлетворяет граничным условиям, заданным на лицевых поверхностях оболочки и доминирует внутри области, занимаемой оболочкой. Второе решение, I^b является решением задачи пограничного слоя, которое на лицевых поверхностях оболочки удовлетворяет соответствующим однородным (нулевым) условиям и в сумме с решением внутренней задачи удовлетворяет граничным условиям, заданным на боковой поверхности (торцах) оболочки. Как правило, оно доминирует вблизи торцов и экспоненциально убывает по направлению внутренней нормали к поверхности торцов [9,10]. Рассматриваемая оболочка считается бесконечно длинной, либо замкнутой (сфера, эллипсоид, тор и др.), следовательно решается только внутренняя задача.

Решение внутренней задачи ищется в виде асимптотического разложения [1–5]

$$Q(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{s=0}^S \varepsilon^{\chi_Q + s} Q^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) \quad (7)$$

где Q – любая из неизвестных величин: компонент U_j вектора перемещения и тензора напряжений $\sigma_{ij}(\tau_{ij})$, причём для всех перемещений $\chi_u = 0$, а $\chi_\sigma = -1$ – для всех механических напряжений. Такие асимптотические порядки впервые установлены в статических краевых задачах для полос и пластин [1,2] с аналогичными (1),(2) кинематическими и смешанными граничными условиями. Одновременно представим заданную объёмную силу в виде асимптотического разложения

$$P_j = R^{-1} \sum_{s=0}^S \varepsilon^{-2+s} P_j^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad P_j^{(0)} = \varepsilon^2 R P_j, \quad P_j^{(s)} = 0, \quad s \neq 0, \quad j = \alpha, \beta, \gamma \quad (8)$$

Подставив (7), (8) в сингулярно-возмущённую систему уравнений и соотношений и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях геометрического малого параметра ε в левых и правых частях уравнений и соотношений, после несложного преобразования и интегрирования получим:

$$\begin{aligned} \tau_{j\gamma}^{(s)} &= \tau_{j\gamma 0}^{(s)}(\xi, \eta) + \tau_{j\gamma*}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad j = \alpha, \beta, \gamma \\ \tau_{\alpha\gamma*}^{(s)} &= -\int_0^\zeta \left[\frac{1}{AB} \frac{\partial}{\partial \xi} (B \tau_{\alpha\alpha}^{(s-1)}) + \frac{1}{AB} \frac{\partial}{\partial \eta} (A \tau_{\beta\alpha}^{(s-1)}) + R(k_\alpha \tau_{\alpha\beta}^{(s-1)} - k_\beta \tau_{\beta\beta}^{(s-1)}) + \right. \\ &\quad \left. + \kappa_1 \left(\zeta \frac{\partial \tau_{\alpha\gamma}^{(s-1)}}{\partial \zeta} + 2\tau_{\alpha\gamma}^{(s-1)} \right) + R P_\alpha^{(s)} + R \bar{\Lambda} (P_\alpha^{(s)}) \right] d\zeta \quad (\alpha, \beta; \xi, \eta; A, B; \kappa_1, \kappa_2) \\ \tau_{\gamma\gamma*}^{(s)} &= \int_0^\zeta \left[\left(\kappa_1 \tau_{\alpha\alpha}^{(s-1)} + \kappa_2 \tau_{\beta\beta}^{(s-1)} \right) - \frac{1}{A} \frac{\partial \tau_{\alpha\gamma}^{(s-1)}}{\partial \xi} - \frac{1}{B} \frac{\partial \tau_{\beta\gamma}^{(s-1)}}{\partial \eta} - R \left(k_\beta \tau_{\alpha\gamma}^{(s-1)} + k_\alpha \tau_{\beta\gamma}^{(s-1)} + P_\gamma^{(s)} + \bar{\Lambda} (P_\gamma^{(s)}) \right) \right] d\zeta \\ \tau_{\alpha\alpha}^{(s)}(t) &= \frac{\nu(t)}{1-\nu(t)} \sigma_{\gamma\gamma 0}^{(s)}(t) - \int_{\tau_1}^t \sigma_{\gamma\gamma 0}^{(s)}(\tau) \bar{R}^*(t, \tau) d\tau + \tau_{\alpha\alpha*}^{(s)}(t) \\ \tau_{\alpha\alpha*}^{(s)}(t) &= \frac{\nu(t)}{1-\nu(t)} \sigma_{\gamma\gamma*}^{(s)}(t) + \frac{1}{2} \int_{\tau_1}^t \left[\left(e_{\alpha\alpha}^{(s-1)}(\tau) + e_{\beta\beta}^{(s-1)}(\tau) \right) \bar{R}^-(t, \tau) + \left(e_{\alpha\alpha}^{(s-1)}(\tau) - e_{\beta\beta}^{(s-1)}(\tau) \right) \bar{R}^+(t, \tau) \right] d\tau + \\ &\quad + \frac{E(t)}{1-\nu^2(t)} \left(e_{\alpha\alpha}^{(s-1)}(t) + \nu(t) e_{\beta\beta}^{(s-1)}(t) \right) - \int_{\tau_1}^t \sigma_{\gamma\gamma*}^{(s)}(\tau) \bar{R}_2(t, \tau) d\tau - \kappa_1 \zeta \tau_{\alpha\alpha}^{(s-1)}(t) \quad (\alpha, \beta; u, \nu; \kappa_1, \kappa_2) \\ \tau_{\alpha\beta}^{(s)}(t) &= \frac{E(t)}{2(1+\nu(t))} e_{\alpha\beta}^{(s-1)} + \frac{1}{2} \int_{\tau_1}^t e_{\alpha\beta}^{(s-1)}(\tau) \bar{R}^+(t, \tau) d\tau - \kappa_1 \zeta \tau_{\alpha\beta}^{(s-1)}(t) \\ u^{(s)} &= u_0^{(s)} + \frac{1}{G(t)} \left(\zeta \tau_{\alpha\gamma 0}^{(s)}(t) + \kappa_1 \frac{\zeta^2}{2} \tau_{\alpha\gamma 0}^{(s-1)}(t) - \zeta \int_{\tau_1}^t \tau_{\alpha\gamma 0}^{(s)}(\tau) K^+(t, \tau) d\tau \right) - \\ &\quad - \kappa_1 \zeta^2 \int_{\tau_1}^t \tau_{\alpha\gamma 0}^{(s-1)}(\tau) \frac{K^+(t, \tau)}{G(t)} d\tau - u_*^{(s)}(\xi, \eta, \zeta, t) \\ u_*^{(s)} &= \int_0^\zeta \left[\bar{\Lambda} \left(\frac{\partial u^{(s)}}{\partial \zeta} \right) + \bar{\Lambda}_2 \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w^{(s-1)}}{\partial \xi} - \kappa_1 u^{(s-1)} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \bar{\Lambda}_1 \left(\frac{\tau_{\alpha\gamma*}^{(s)}(t)}{G(t)} - \int_{\tau_1}^t \tau_{\alpha\gamma*}^{(s)}(\tau) \frac{K^+(t, \tau)}{G(t)} d\tau \right) \right] d\zeta \quad (\alpha, \beta; \xi, \eta; u, \nu; \kappa_1, \kappa_2; \bar{\Lambda}_1, \bar{\Lambda}_2) \\ w^{(s)} &= w_0^{(s)} + \zeta \frac{1-\nu(t)-2\nu^2(t)}{E(t)(1-\nu(t))} \tau_{\gamma\gamma 0}^{(s)}(t) - \zeta \int_{\tau_1}^t \tau_{\gamma\gamma 0}^{(s)}(\tau) R_w^*(t, \tau) d\tau + w_*^{(s)}(t) - \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\zeta^2}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) \left[\frac{\nu^2(t)}{E(t)(1-\nu(t))} \tau_{\gamma\gamma 0}^{(s-1)}(t) - \int_{\tau_1}^t \tau_{\gamma\gamma 0}^{(s-1)}(\tau) R_w(t, \tau) d\tau \right] \\
w_*^{(s)} = & \int_0^\zeta \left[\frac{1}{E(t)} \tau_{\gamma\gamma^*}^{(s)}(t) - \frac{\nu(t)}{E(t)} \left[\bar{\Lambda}_1(\tau_{\alpha\alpha^*}^{(s)}(t)) + \bar{\Lambda}_2(\tau_{\beta\beta^*}^{(s)}(t)) \right] - \bar{\Lambda} \left(\frac{\partial w^{(s)}}{\partial \zeta} \right) - \right. \\
& \left. - \int_{\tau_1}^t \left(\tau_{\gamma\gamma^*}^{(s)}(\tau) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} - \left[\bar{\Lambda}_1(\tau_{\alpha\alpha^*}^{(s)}(t)) + \bar{\Lambda}_2(\tau_{\beta\beta^*}^{(s)}(t)) \right] \frac{\partial \delta_1(t, \tau)}{\partial \tau} \right) d\tau \right] d\zeta \\
e_{\alpha\alpha}^{(s)} = & \bar{\Lambda}_2 \left(\frac{1}{A} \frac{\partial u^{(s)}}{\partial \xi} + \kappa_1 w^{(s)} \right) + Rk_\alpha \bar{\Lambda}_1(\nu^{(s)}) \quad (\alpha, \beta; \xi, \eta; u, v; \kappa_1, \kappa_2; \bar{\Lambda}_1, \bar{\Lambda}_2) \\
e_{\alpha\beta}^{(s)} = & \bar{\Lambda}_1 \left(\frac{1}{B} \frac{\partial u^{(s)}}{\partial \eta} - Rk_\alpha u^{(s)} \right) + \bar{\Lambda}_2 \left(\frac{1}{A} \frac{\partial v^{(s)}}{\partial \xi} - Rk_\beta v^{(s)} \right), \quad \bar{R}^\pm = \frac{E(\tau)}{1 \pm \nu(\tau)} R^\pm(t, \tau) \\
\bar{R}^* = & \frac{E(t)}{1-\nu(t)} \frac{\partial \delta_1(t, \tau)}{\partial \tau} - \frac{\nu(\tau)}{1-\nu(\tau)} R^-(t, \tau) + \int_{\tau_1}^t \frac{E(\omega)}{1-\nu(\omega)} R^-(t, \omega) \frac{\partial \delta_1(\omega, \tau)}{\partial \tau} d\omega \\
R_w^* = & \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} - 2R_w, \quad R_w = \frac{\nu(t)}{E(t)} \bar{R}^* + \frac{\nu(t)}{1-\nu(t)} \frac{\partial \delta_1(t, \tau)}{\partial \tau} - \int_{\tau_1}^t \bar{R}^*(\omega, \tau) \frac{\partial \delta_1(t, \omega)}{\partial \omega} d\omega \\
R^\pm(t, \tau) - & \text{резольвенты ядер } R^\pm(t, \tau) \Rightarrow K^\pm = \frac{E(t)}{1 \pm \nu(t)} \frac{\partial}{\partial \tau} (\delta(t, \tau) \pm \delta_1(t, \tau))
\end{aligned}$$

а через $\bar{\Lambda}_1(Q^{(s)})$, $\bar{\Lambda}_2(Q^{(s)})$, $\bar{\Lambda}(Q^{(s)})$ обозначены операторы

$$\bar{\Lambda}_1(Q^{(s)}) = Q^{(s)} + \zeta \kappa_1 Q^{(s-1)} \quad (1, 2), \quad \bar{\Lambda}(Q^{(s)}) = \zeta(\kappa_1 + \kappa_2) Q^{(s-1)} + \zeta^2 \kappa_1 \kappa_2 Q^{(s-2)}$$

Полученный общий интеграл (9) системы уравнений (3),(5) содержит шесть функций интегрирования $\tau_{\alpha\gamma 0}^{(s)}$, $\tau_{\beta\gamma 0}^{(s)}$, $\tau_{\gamma\gamma 0}^{(s)}$, $u_0^{(s)}$, $v_0^{(s)}$, $w_0^{(s)}$, которые однозначно определяются из неклассических (для теории оболочек) граничных условий (1),(2), заданных на лицевых поверхностях $\gamma = \pm h$ оболочки.

Удовлетворив кинематическим граничным условиям (1), получим

$$\begin{aligned}
\tau_{\alpha\gamma 0}^{(s)}(t) = & G(t) U_u^{-s}(t) + \frac{1}{2} \int_{\tau_1}^t U_u^{-s}(\tau) \bar{R}^+(t, \tau) d\tau \quad (\alpha, \beta; u, v) \\
\tau_{\gamma\gamma 0}^{(s)}(t) = & \frac{E(t)(1-\nu(t))}{1-\nu(t)-2\nu^2(t)} U_w^{-s}(t) + \int_{\tau_1}^t U_w^{-s}(\tau) \bar{R}_w^{**}(t, \tau) d\tau \\
u_0^{(s)} = & U_u^{+s}(t) - \frac{\kappa_1}{2G(t)} \tau_{\alpha\gamma 0}^{(s-1)}(t) + \kappa_1 \int_{\tau_1}^t \tau_{\alpha\gamma 0}^{(s-1)}(\tau) \frac{K^+(t, \tau)}{G(t)} d\tau \quad (\alpha, \beta; u, v; \kappa_1, \kappa_2) \\
w_0^{(s)} = & U_w^{+s}(t) + \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \left[\frac{\nu^2(t)}{E(t)(1-\nu(t))} \tau_{\gamma\gamma 0}^{(s-1)}(t) - \int_{\tau_1}^t \tau_{\gamma\gamma 0}^{(s-1)}(\tau) R_w(t, \tau) d\tau \right] \quad (10) \\
U_u^{\pm(s)}(t) = & \left[u^{+s} \pm u^{-s} + u_*^{(s)}(\xi, \eta, \zeta = 1, t) \pm u_*^{(s)}(\xi, \eta, \zeta = -1, t) \right] / 2 \quad (u, v, w) \\
u_0^{\pm(0)} = & u_\alpha^\pm / R, \quad u_0^{\pm(s)} = 0, \quad s \neq 0 \quad (\alpha, \beta, \gamma; u_0, v_0, w_0), \quad \bar{R}_w^{**}(t, \tau) = \frac{E(\tau)(1-\nu(\tau))}{1-\nu(\tau)-2\nu^2(\tau)} R_w^{**}(t, \tau)
\end{aligned}$$

где $R_w^{**}(t, \tau)$ является резольвентой ядра $R_w^{**}(t, \tau) \Rightarrow K_w(t, \tau) = \frac{E(t)(1-\nu(t))}{1-\nu(t)-2\nu^2(t)} R_w^*(t, \tau)$.

А для смешанных граничных условий (2) функции интегрирования принимают вид:

$$\begin{aligned} \tau_{j\gamma 0}^{(s)} &= \tau_{j\gamma}^{+(s)} - \tau_{j\gamma}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta = 1), \quad \tau_{j\gamma 0}^{+(0)} = \varepsilon \sigma_{j\gamma}^+, \quad j = \alpha, \beta, \gamma; \quad \tau_{\alpha\gamma 0}^{(s)} = \tau_{\beta\gamma 0}^{(s)} = \tau_{\gamma\gamma 0}^{+(s+1)} = 0, \quad s \geq 2 \\ \tau_{\alpha\gamma 0}^{+(1)} &= \kappa_2 \varepsilon \sigma_{\alpha\gamma}^+, \quad \tau_{\beta\gamma 0}^{+(1)} = \kappa_1 \varepsilon \sigma_{\beta\gamma}^+, \quad \tau_{\gamma\gamma 0}^{+(1)} = (\kappa_1 + \kappa_2) \varepsilon \sigma_{\gamma\gamma}^+, \quad \tau_{\gamma\gamma 0}^{+(2)} = \kappa_1 \kappa_2 \varepsilon \sigma_{\gamma\gamma}^+ \\ u_0^{(s)} &= u^{-s} + \frac{1}{G(t)} \left(\tau_{\alpha\gamma 0}^{(s)}(t) - \kappa_1 \frac{1}{2} \tau_{\alpha\gamma 0}^{(s-1)}(t) - \int_{\tau_1}^t \tau_{\alpha\gamma 0}^{(s)}(\tau) K^+(t, \tau) d\tau \right) + \\ &+ \kappa_1 \int_{\tau_1}^t \tau_{\alpha\gamma 0}^{(s-1)}(\tau) \frac{K^+(t, \tau)}{G(t)} d\tau + u_*^{(s)}(\xi, \eta, \zeta = -1, t) \quad (\alpha, \beta; u, v; \kappa_1, \kappa_2) \\ w_0^{(s)} &= w^{+(s)} + \frac{1 - \nu(t) - 2\nu^2(t)}{E(t)(1 - \nu(t))} \tau_{\gamma\gamma 0}^{(s)}(t) - \int_{\tau_1}^t \tau_{\gamma\gamma 0}^{(s)}(\tau) R_w^*(t, \tau) d\tau + w_*^{(s)}(\xi, \eta, \zeta = -1, t) + \\ &+ \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \left[\frac{\nu^2(t)}{E(t)(1 - \nu(t))} \tau_{\gamma\gamma 0}^{(s-1)}(t) - \int_{\tau_1}^t \tau_{\gamma\gamma 0}^{(s-1)}(\tau) R_w(t, \tau) d\tau \right] \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, решения краевых задач (1),(3),(5) и (2),(3),(5) представляются соответственно рекуррентными формулами (9), (10) и (9), (11), которые позволяют вычислить компоненты тензора напряжений и вектора перемещения точек оболочки с любой заранее заданной асимптотической точностью $O(\varepsilon^S)$.

Отметим, что в формулах (5),(9) ядра уравнений не конкретизированы и, следовательно, приведены формальные решения интегральных уравнений Вольтерра второго рода. Для конкретного наследственно ползучего материала модели Арутюняна [6] интегральные уравнения Вольтерра второго рода легко преобразуются к линейным дифференциальным уравнениям второго порядка, которые также легко приводятся к квадратурам [3-5].

Заметим, что выведенные рекуррентные формулы одновременно из себя представляют готовый алгоритм для современной вычислительной техники, которые позволяют получить и аналитические, и численные значения искоемых величин за считанные минуты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаловян Л.А. О структуре решения одного класса плоских задач теории упругости анизотропного тела // Межвуз. сб. н. трудов. Механика. Ереван: Изд-во ЕГУ, 1982. Вып. 2. С. 7–12.
2. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи пластин с общей анизотропией // Сб. тр. IV Всесоюз. Симпозиума по механике конструкций из композиционных материалов. Новосибирск: Наука, 1984. С. 105-110.
3. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Асимптотическое решение смешанных краевых задач двухслойной полосы, состоящей из упругого и реологического слоев. // Изв. РАН. МТТ. 1992. №5. С. 120-128.
4. Геворкян Р.С. О действии дискретной нагрузки на трехслойную полосу с вязкоупругим средним слоем. // Изв. РАН. МТТ. 1995. №3. С. 136-144.
5. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: Изд-во „Гитутюн“ НАН РА, 2005. 468 с.
6. Арутюнян Н.Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М.: ГИТТЛ, 1952. 323 с.
7. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
8. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981. 398 с.
9. Агаловян Л.А. Упругий пограничный слой для одного класса плоских задач // Межвуз. сборник н. трудов. Механика. Ереван: Изд-во ЕГУ, 1984. С. 51-58.
10. Геворкян Р.С. Асимптотика пограничного слоя для одного класса краевых задач анизотропных пластин // Изв. АН АрмССР. Механика. 1984. Т. 37. №6. С. 3–15.

Сведения об авторах

Геворкян Рубен Степанович – профессор, доктор физ-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института механики НАН РА. Тел.: (+37410) 270828, (+37493) 536883.

E-mail: gevorgyanrs@mail.ru

Асратян Марианна Григорьевна – научный сотрудник Института механики НАН Армении.

ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК КОМПОЗИТА, МОДИФИЦИРОВАННОГО ФУЛЛЕРЕНАМИ

Головин Н.Н., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н.

Построена математическая модель композита в виде изотропной матрицы, содержащей относительно малую объёмную долю наноструктурных включений. На основе стержневой модели фуллера оценены его объёмный модуль упругости и модуль сдвига, что позволило получить эффективные значения этих модулей, в целом, для композита. Представлены также оценки эффективного коэффициента теплопроводности композита, модифицированного фуллеренами.

1. Перспектива модификации композитов наноструктурными элементами (в том числе, фуллеренами), имеющими высокие механические характеристики, связана с повышением макроскопических характеристик композитов в целом как конструкционных материалов. Для конструкций, испытывающих одновременно механические и тепловые воздействия, помимо информации о механических характеристиках композита необходимо располагать сведениями и о его теплофизических свойствах (в частности, о коэффициенте теплопроводности).

Параметры, определяющие упругие свойства фуллера, получены методами математического моделирования с использованием парного потенциала взаимодействия атомов углерода в виде [1, 2]

$$U = K_r (\Delta r)^2 / 2 + K_\theta (\Delta \theta)^2 / 2 + K_\phi \phi^2 / 2, \quad (1.1)$$

где K_r и K_θ – жёсткости ковалентной связи между двумя атомами углерода при изменениях в процессе деформирования расстояния между ними и взаимного углового положения, определяемых значениями Δr и $\Delta \theta$ соответственно; K_ϕ и ϕ – жёсткость ковалентной связи между двумя атомами при кручении, характеризуемом значением угла ϕ поворота одного атома относительно другого вокруг прямой, проходящей через эти атомы. В формуле (1.1) не учтена энергия взаимодействия за счёт сил Ван-дер-Ваальса, которая имеет величину, меньшую примерно на два порядка по сравнению с энергией ковалентного взаимодействия. Для жесткостных параметров углеродных связей приняты следующие значения [2]: $K_r = 6,52 \cdot 10^{-7}$ Н/нм (ньютон на нанометр), $K_\theta = 8,76 \cdot 10^{-10}$ Н·нм/рад² и $K_\phi = 2,78 \cdot 10^{-10}$ Н·нм/рад².

Механические характеристики фуллера C_{60} можно считать не зависящими от направления, т.е. принять включение в виде такого фуллера изотропным. Математическое моделирование позволило получить для фуллера C_{60} значения объёмного модуля упругости $\kappa^\circ = 1,01$ ТПа (террапаскаля) и модуля сдвига $\mu^\circ = 1,71$ ТПа. При моделировании для этого фуллера использованы значения толщины сферической оболочки, в пределах которой расположены атомы углерода, $h = 0,075$ нм и наружного радиуса $R_0 = 0,3899$ нм этой оболочки, что соответствует условным параметрам фуллера C_{60} [3].

2. Рассмотрим композит в виде линейно упругой изотропной матрицы с линейно упругими изотропными шаровыми включениями, объёмный модуль упругости κ° и модуль сдвига μ° которых имеют значения, приведённые выше для фуллера C_{60} . Примем, что композит состоит из большого числа составных частиц шаровой формы, в центре каждой из которых находится включение в виде фуллера с радиусом R_0 , а радиусы R этих частиц при заданной объёмной концентрации C_v включений изменяются так, чтобы обеспечить сплошность композита с точностью до значения R_0 . Упругие свойства материала, окружающего включение в каждой составной частице, соответствуют упругим свойствам матрицы, определяемым объёмным модулем упругости κ_m и модулем сдвига μ_m .

Пусть на внешней сферической поверхности каждой составной частицы нормальное напряжение в радиальном направлении имеет одинаковое значение, определяемое давлением p , т.е.

$$\sigma_{rr} = -p \text{ при } r = R, \quad (2.1)$$

где r – радиальная координата в сферической системе координат с началом в центре этой частицы, совпадающем с центром включения. Из условия центральной симметрии распределение напряжений в составной частице будет зависеть лишь от этой радиальной координаты, а уравнение равновесия в перемещениях примет вид [4]:

$$d^2u/dr^2 + (2/r)du/dr - (2/r^2)u = 0, \quad (2.2)$$

где u – перемещение в радиальном направлении. Этому уравнению удовлетворяет решение $u_r = Ar + B/r^2$. Но в центре включения $u = 0$ и поэтому отдельно для включения и для периферийной части составной частицы получим:

$$u_f = A_f r, \quad u_m = A_m r + B_m/r^2, \quad (2.3)$$

где u_f и u_m – перемещения в радиальном направлении во включении и в материале матрицы соответственно.

Используя равенства (2.3) для представления компонент тензора деформации и подставив эти компоненты в соотношения обобщенного закона Гука, получим соотношения

$$\sigma_f = 3\kappa^\circ A_f, \quad \sigma_m = 3\kappa_m A_m r - 4\mu_m B_m/r^2 \quad (2.4)$$

для распределения нормальных напряжений в радиальном направлении σ_f во включении и σ_m в периферийной части составной частицы. Три константы интегрирования уравнения (2.2), вошедшие в соотношения (2.4), определим из условия (2.1) и равенств перемещений и напряжений в радиальном направлении на сферической поверхности радиусом R_0 , разделяющей включение и периферийную часть составной частицы: $u_f = u_m$ и $\sigma_f = \sigma_m$ при $r = R_0$. В итоге, полагая $(R_0/R)^3 = C_V$, получаем

$$A_m = -\frac{Lp}{4\mu_m}, \quad B_m/R^3 = \frac{p}{4\mu_m} - 3\frac{\kappa_m Lp}{(4\mu_m)^2}, \quad A_f = A_m + \frac{B_m}{R^3 C_V}, \quad (2.5)$$

где $L = (\kappa^\circ + 4\mu_m/3) / (\kappa_m + (\kappa^\circ - \kappa_m)C_V + (3/4)\kappa^\circ\kappa_m/\mu_m)$.

Из второго равенства (2.2) следует, что перемещение в радиальном направлении на внешней поверхности составной частицы при $r = R$ будет равно $u_m|_{r=R} = A_m R + B_m/R^2$. Если считать рассматриваемую частицу однородной с объёмным модулем упругости κ' , то для перемещения на этой поверхности получим $u|_{r=R} = -pR/(3\kappa')$. Приравнявая $u_m|_{r=R}$ и $u|_{r=R}$ и учитывая равенства (2.5), находим

$$\frac{\kappa' - \kappa_m}{\kappa^\circ - \kappa_m} = \frac{(\kappa_m + 4\mu_m/3)C_V}{\kappa_m + 4\mu_m/3 + (1 - C_V)(\kappa^\circ - \kappa_m)}. \quad (2.6)$$

В случае абсолютно жёсткого включения ($\kappa^\circ \rightarrow \infty$) из равенства (2.6) следует

$$\kappa' = \kappa_m + (\kappa_m + 4\mu_m/3)C_V / (1 - C_V). \quad (2.7)$$

Оценку модуля сдвига μ рассматриваемого композита проведём для случая наиболее плотной упаковки составных шаровых частиц с одинаковым радиусом R , причём, концентрацию включений примем достаточно малой, т.е. $C_V \ll 1$ и, как следствие, $(R_0/R)^3 \ll 1$. В этом случае после весьма громоздких выкладок можно получить соотношение [4]

$$\frac{\mu}{\mu_m} = 1 + C_V \frac{15(1 - \nu_m)(\mu^\circ/\mu_m - 1)}{7 - 5\nu_m + 2(4 - 5\nu_m)\mu^\circ/\mu_m}, \quad (2.8)$$

где ν_m – коэффициент Пуассона материала матрицы. В частном случае несжимаемой матрицы ($\nu_m = 1/2$) из этой формулы следует

$$\mu/\mu_m = 1 + 5C_V (\mu^\circ/\mu_m - 1) / (3 + 2\mu^\circ/\mu_m),$$

а если включения абсолютно жёсткие ($\mu^\circ \rightarrow \infty$), то

$$\mu/\mu_m = 1 + (15/2)C_V(1 - v_m)/(4 - 5v_m).$$

Отметим, что отсюда для несжимаемой матрицы следует равенство $\mu/\mu_m = 1 + (5/2)C_V$, совпадающее по структуре с известной формулой Эйнштейна $\eta/\eta_{ж} = 1 + (5/2)C_V$ эффективного значения η динамического коэффициента вязкости суспензии в виде несжимаемой жидкости с коэффициентом динамической вязкости $\eta_{ж}$, содержащей объёмную долю $C_V \ll 1$ абсолютно жёстких шаровых частиц.

3. Для фуллеренов помимо высоких механических характеристик можно предполагать и повышенную способность к переносу тепловой энергии в поверхностном слое атомов углерода, расположенных, например, у фуллерена C_{60} в двадцати шестиугольных (гексагонах) и двенадцати пятиугольных (пентагонах) ячейках. Такое предположение основано (по аналогии) на сопоставлении структуры поверхностного слоя фуллерена и расположения атомов в параллельных гексагональных сетках слоёв кристаллической решетки, характерной для кристаллизации пирографита при определённых технологических режимах его осаждения на подложку. Известно, что такой пирографит обладает сильно выраженной анизотропией свойства теплопроводности. В направлениях, параллельных плоскости гексагональной сетки, коэффициент теплопроводности может достигать значения $400 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$ и на два порядка превосходить коэффициент теплопроводности в перпендикулярном направлении [5].

Каждый атом углерода в гексагональной сетке пирографита имеет трёх ближайших соседей на расстоянии $0,142 \text{ нм}$ и связан с ними прочными ковалентными связями. У фуллерена C_{60} длина стороны гексагона, общая с пентагоном, равна $0,144 \text{ нм}$, а общая с соседним гексагоном – $0,139 \text{ нм}$ [6], что практически совпадает со стороной ячейки гексагональной сетки. Поскольку взаимодействие между соседними атомами в структуре фуллерена также определяется ковалентной связью, есть основание предполагать, что у фуллеренов способность к переносу тепловой энергии сопоставима даже с таким металлом, как медь, и может существенно повлиять на значение коэффициента теплопроводности композита в целом при его модификации фуллеренами. Это значение принято называть эффективным коэффициентом теплопроводности композита.

Представительный элемент композита, модифицированного фуллеренами, примем в виде составной шаровой частицы радиусом R , в центре которой помещена термически тонкая сферическая оболочка с наружным радиусом R_0 и толщиной h . Такую оболочку примем в качестве допустимого приближения к геометрической форме фуллерена. Шаровой слой толщиной $R - R_0$ составной частицы заполнен изотропным материалом матрицы с коэффициентом теплопроводности λ_m . На основании аналогии со свойствами анизотропного пирографита примем коэффициент теплопроводности сферической оболочки в радиальном направлении пренебрежимо малым по сравнению с коэффициентом теплопроводности λ_0 в тангенциальных направлениях.

Составная шаровая частица по своей внешней поверхности радиусом R контактирует с изотропной однородной средой, занимающей неограниченную область и соответствующей рассматриваемому композиту с искомым значением λ эффективного коэффициента теплопроводности. Таким образом, композит представлен трёхфазной моделью, включающей двухфазную составную частицу и окружающую её изотропную однородную среду.

Примем, что на большом расстоянии от начала сферической системы координат с началом в центре фуллерена задан вектор градиента температурного поля в однородной среде, направленный по оси, от которой происходит отсчёт угловой координаты θ , т.е. при $r \rightarrow \infty$ распределение температуры в этой среде описывает функция $T_\infty(r, \theta) = Gr \cos \theta$, где G – модуль вектора градиента. Наличие составной частицы вызывает при конечных значениях r возмущение температурного поля в однородной среде, описываемое слагаемым $(B/r^2) \cos \theta$ [7], т.е. установившееся распределение температуры в этой среде можно задать соотношением

$$T(r, \theta) = Gr \cos \theta + (B/r^2) \cos \theta, \quad r \geq R, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad (3.1)$$

удовлетворяющим уравнению Лапласа в сферической системе координат.

Распределение температуры в шаровом слое матрицы, окружающем фуллерен, описывает функция, аналогичная соотношению (3.1):

$$T_m(r, \theta) = A_m r \cos \theta + (B_m / r^2) \cos \theta, \quad R_0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \theta \leq \pi. \quad (3.2)$$

При идеальном тепловом контакте однородной среды и составной частицы из условий равенства температур и плотности тепловых потоков на сферической поверхности при $r = R$ получим с учётом формул (3.1) и (3.2) два равенства

$$G + B/R^3 = A_m + B_m/R^3 \quad \text{и} \quad \lambda(G - 2B/R^3) = \lambda_m(A_m - 2B_m/R^3). \quad (3.3)$$

В предположении идеального теплового контакта шарового слоя и оболочки зависимость её температуры от угла θ определяет функция $T_m(R_0, \theta)$, а из условия теплового баланса в оболочке следует уравнение

$$\lambda_0 \frac{d}{d\theta} \left(2\pi R_0 (\sin \theta) h \frac{dT(\theta)}{R_0 d\theta} \right) + \lambda \left. \frac{\partial T_m(r, \theta)}{\partial r} \right|_{r=R_0} 2\pi R_0 (\sin \theta) R_0 = 0. \quad (3.4)$$

Из соотношений (3.3) и (3.4) с учётом формулы (3.2) получим

$$\frac{B}{GR^3} = \frac{2(1+\beta)(\tilde{\lambda}-1) + (1-2\beta)(\tilde{\lambda}+2)(R_0/R)^3}{(1+\beta)(2\tilde{\lambda}+1) + (1-2\beta)(\tilde{\lambda}-1)(R_0/R)^3}, \quad (3.5)$$

где $\beta = (\lambda_0/\lambda_m)h/R_0$ и $\tilde{\lambda} = \lambda/\lambda_m$, а также

$$A_m = \frac{3G\tilde{\lambda}(1+\beta)}{(1+\beta)(2\tilde{\lambda}+1) + (1-2\beta)(\tilde{\lambda}-1)(R_0/R)^3}, \quad B_m/R_0^3 = A_m \frac{1-2\beta}{1+2\beta}.$$

Замена составной шаровой частицы равновеликим шаром радиусом R с искомым коэффициентом теплопроводности λ приведёт к исчезновению возмущения температурного поля в окружающем её однородном материале. Тогда в правой части соотношения (3.1) второе слагаемое станет равным нулю, т.е. $B = 0$. Из этого условия получим

$$\tilde{\lambda} = \frac{2 + 2\beta - 2(1-2\beta)C_v}{2 + 2\beta + (1-2\beta)C_v}. \quad (3.6)$$

4. Особенность формулы (3.6) состоит в том, что при $\beta = 1/2$ рассматриваемая сферическая оболочка эквивалентна включению в виде сплошного шара из материала матрицы, поскольку при этом значении параметра β величина $\tilde{\lambda} \equiv 1$ и не зависит от объёмной концентрации C_v включений. К такому же результату при $\bar{\lambda} = \lambda_0/\lambda_m = 1$ приводит формула

$$\tilde{\lambda} = \frac{2 + \bar{\lambda} - 2(1-\bar{\lambda})C_v}{2 + \bar{\lambda} + (1-\bar{\lambda})C_v}, \quad (4.1)$$

полученная для эффективного коэффициента теплопроводности композита с включениями в виде сплошных шаров [7]. Формулы (3.6) и (4.1) идентичны при условии $2\beta = \bar{\lambda}$, что позволяет применить для величины $\tilde{\lambda}$ двусторонние оценки, которые следуют из двойственной вариационной формулировки стационарной задачи теплопроводности в неоднородном твердом теле [8].

При малом отличии значения β от $1/2$ разность верхней $\tilde{\lambda}_+ = 1 - C_v + 2\beta C_v$ нижней $\tilde{\lambda}_- = 1/(1 - C_v + C_v/(2\beta))$ оценок величины $\tilde{\lambda}$ сравнительно мала, а их полусумма $(\tilde{\lambda}_+ + \tilde{\lambda}_-)/2$ практически совпадает со значением $\tilde{\lambda}$, т.е. формула (3.6) достаточно хорошо описывает зависимость $\tilde{\lambda}$ от C_v во всём промежутке изменения объёмной концентрации включений. Однако, по мере отклонения значения β от $1/2$, несмотря на совпадение оценок при $C_v = 0$ и $C_v = 1$, разность $\tilde{\lambda}_+ - \tilde{\lambda}_-$ для промежуточных значений C_v становится значительной. Причина этого состоит в использовании достаточно простых допустимых распределений температуры и

плотности теплового потока при вычислении функционалов, входящих в двойственную вариационную формулировку.

Работа выполнена по гранту НШ-255.2012.8 программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кормилицын О.П. Механика материалов и структур нано- и микротехники. М.: Изд. Центр «Академия», 2008. 224 с.
2. Кувыркин Г.Н., Головин Н.Н. Математическое моделирование механических характеристик и взаимодействий углеродных нанотрубок // Вестник Нижегородского ун-та им. П.И. Лобачевского. 2011. № 4. Ч.2. С.478-180.
3. Елецкий А.В., Смирнов Б.М. Фуллерены. // УФН. 1993. Т.163. № 2. С.33.
4. Кристенсен Р. Введение в механику композитов: Пер. с англ. М.: Мир, 1982. 330 с.
5. Фиалков А.С., Бавер А.П., Сидоров Н.М. и др. Пирографит: получение, структура, свойства // Успехи химии. 1965. Т.34, №1. С.132-153.
6. Поздняков В.А. Физическое материаловедение наноструктурных материалов. М.: МГИУ, 2007. 121с.
7. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел: Пер. с англ. М.: Наука, 1961. 488с.
8. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 512с.
9. Шаскольская М.П. Кристаллография. М.: Высшая школа, 1976. 392 с.

Сведения об авторах:

Головин Николай Николаевич – канд. технических наук, старший научный сотрудник, зам. начальника отдела, ОАО «Корпорация «Московский институт теплотехники», (499)907-37-74

E-mail: fn2@bmstu.ru

Зарубин Владимир Степанович – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Прикладная математика» Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана, (499) 263-63-26

E-mail: fn2@bmstu.ru

Кувыркин Георгий Николаевич – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Прикладная математика» Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана, (499) 263-63-26

E-mail: fn2@bmstu.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕМОДИНАМИКИ КОРОНАРНЫХ АРТЕРИЙ

Голядкина А.А., Кириллова И.В., Коссович Л.Ю., Щучкина О.А.

Исследованы механические свойства коронарных артерий (КА) и тканей сердца. Проведено компьютерное 3D моделирование и численный анализ напряжённо-деформированного состояния и гемодинамики левой и правой коронарных артерий с учётом воздействия на КА сердечной мышцы в норме и при патологии.

Введение.

Современное состояние российского здравоохранения требует незамедлительного внедрения компьютеризированных методов диагностики и лечения в практику ведения больных, позволяющие количественно оценить состояние пациента и найти оптимальный вариант индивидуализированного лечения. Создание систем предоперационного прогнозирования результатов реконструкций, коррекций и оптимизации оперативных методов лечения при различных патологических состояниях и проведение так называемых «виртуальных операций» позволит существенно снизить риски возникновения негативных последствий во время и после выполнения хирургического вмешательства.

По данным ВОЗ в 57% случаев причина смертности населения – заболевания сердечно-сосудистой системы (ССС), из них 81% занимает ишемическая болезнь сердца (ИБС). Среди всех болезней ССС можно выделить группу заболеваний, наиболее значимую в медико-демографическом отношении и требующую хирургического вмешательства: ИБС, стенозы и аневризмы артерий, аневризмы левого желудочка сердца [1]. Для оптимизации хирургического лечения заболеваний ССС необходимо использование методов математического моделирования.

Современные исследователи неоднократно обращались к вопросу моделирования поведения КА [2–6], но ввиду того, что сложность реальной геометрии и физиологических процессов, протекающих в живом организме, требует огромных вычислительных затрат, большинство опубликованных результатов описывают поведение артерий с идеализированной геометрией и с применением простейших механических моделей тканей в упрощённой математической постановке. В последние годы ввиду стремительного развития вычислительных мощностей появились работы, в которых описаны попытки исследователей рассчитать гемодинамику и напряжённо-деформируемое состояние (НДС) коронарных артерий как с учётом их взаимодействия с миокардом, так и с учётом реальной трёхмерной геометрии исследуемых объектов [7,8]. При этом, в публикациях отсутствуют данные об упруго-деформативных свойствах тканей сердца и нативных препаратов сосудов человека.

Для изучения гемодинамики и НДС коронарных артерий сердца человека необходимо построение максимально точной компьютерной модели с заданием реальных параметров свойств материала. В связи с этим, определение геометрии изучаемого объекта и механических свойств тканей является необходимым подготовительным этапом процесса моделирования. В данной работе представлены результаты исследования механических свойств тканей сердца и результаты численного моделирования поведения левой и правой коронарных артерий, закреплённых на активном миокарде в норме и при стенозе артерий.

Механические испытания.

Исследование механических свойств миокарда и тканей коронарных артерий проводилось на одноколонной испытательной машине Instron 5944 (с соблюдением рекомендаций этической комиссии). КА были исследованы с использованием BioBath в 0,9% водном растворе хлорида натрия. Определение свойств миокарда проводилось в воздушной среде, т.к. при разделении слоёв стенки желудочков сердца (внутренний – эндокард, средний – миокард и наружный – эпикард) испытание в жидкой среде приводит к сильным диффузным процессам и недостоверным результатам.

Все материалы были распределены по 4 возрастным группам: I группа – 61–70 лет, II группа – 51–60 лет, III группа – 41–50 лет, IV группа – 31–40 лет.

Образцы вырезались из сосуда в двух направлениях – продольном и окружном. В среднем длина образца составляла $l_0 = 30 \pm 0,02$ мм для продольного и $l_0 = 8 \pm 0,02$ мм для

окружного направлений. Размеры образцов из ткани миокарда составляли 20x10x10мм. Для восстановления физико-механических свойств тканей, приближённых к физиологическому состоянию, проводилось от 3 до 10 циклов «подготовки» материала (рис. 1). Скорость нагружения составляла 20 мм/мин.

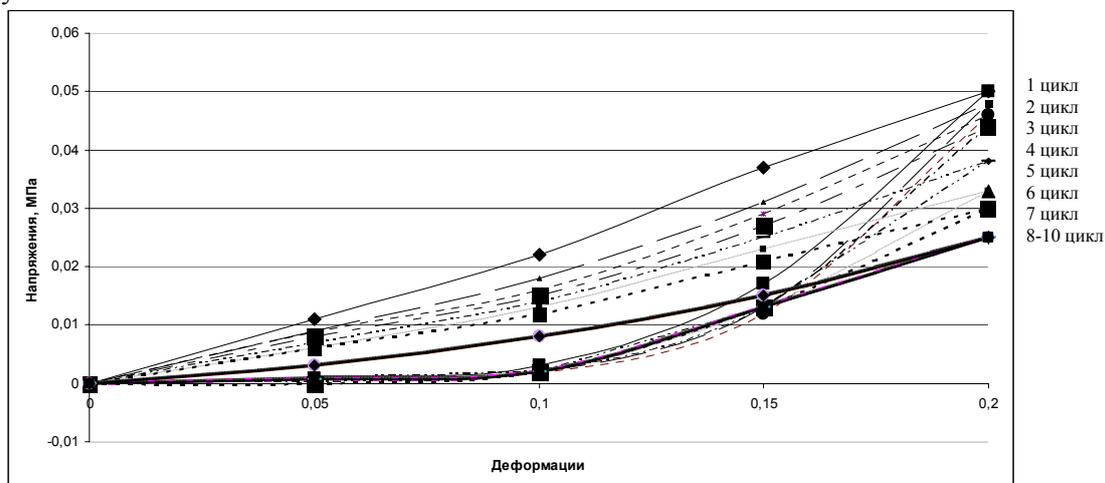


Рис. 1. График восстановления физиологических свойств миокарда при «предварительном» нагружении

В результате эксперимента по растяжению тканей сердца были получены зависимости напряжения – деформации и определены модули Юнга (рис. 2, 3, табл. 1,2).

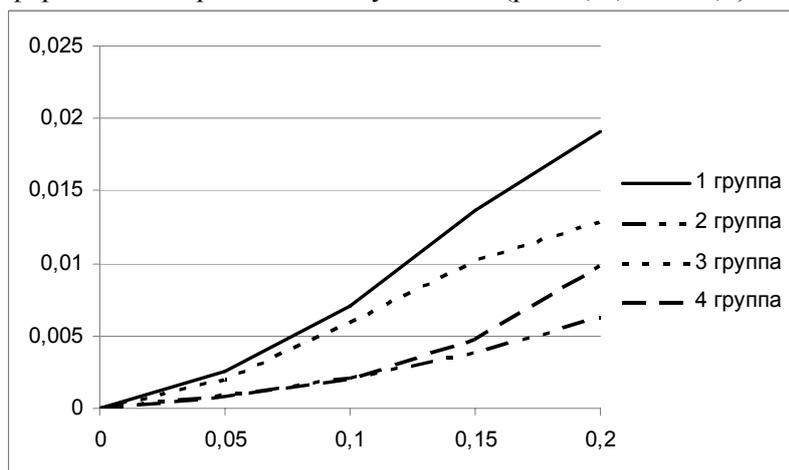


Рис. 2. Зависимости напряжения – деформации для миокарда

Для КА зависимости имеют линейный характер. С удалённостью сегмента от основного русла артерии наблюдается потеря эластичности. При возрастных изменениях и поражении сосудов мелкоочаговым и крупноочаговым кардиосклерозом наблюдается рост жёсткости ткани, критические значения показателей достигаются в I группе. Сравнительный анализ прочностных свойств тканей КА показал, что ветви ПКА прочнее ветвей ЛКА в среднем на 15%.

Таблица 1. Значения модуля Юнга (МПа) ЛКА

Тип сегмента	I группа	II группа	III группа	IV группа
Основной ствол	6,1–15,7	3,4–4,5	4,4–6,6	5,8–8,1
Огибающая ветвь	9,3–12,7	5,3–6,4	5,9–9,3	5,3–10,5
Ветвь тупого края	8,1–8,7	3,4–5,3	2,9–4,9	3,3–5,2
Диагональная ветвь	4,2–5,2	4,1–4,5	4,5–4,7	4,0–4,7
Передняя нисходящая ветвь	4,4–15,2	4,5–6,2	6,2–12,4	8,7–14,3

Таблица 2. Значения модуля Юнга (МПа) ПКА

Тип сегмента	I группа	II группа	III группа	IV группа
Основной ствол	5,2–23,8	3,2–4,1	12,3–14,8	14,1–16,9
Правая межжелудочковая ветвь	5,8–9,7	3,5–4,3	5,9–12,3	8,2–10,7
Задняя межжелудочковая ветвь	5,1–9,5	4,1–5,3	5,8–10,1	6,8–10,2

Для тканей миокарда зависимости напряжения–деформации свидетельствуют о нелинейном характере поведения материала. Модуль Юнга для образцов тканей миокарда левого желудочка (ЛЖ), правого желудочка (ПЖ) и межжелудочковой перегородки (МЖП) в IV и II группах принимает значения около 2 и 1,5 МПа соответственно. Наблюдается особенность поведения тканей ЛЖ: величина модуля Юнга для I возрастной группы на порядок больше, чем модуль Юнга ПЖ и МЖП для той же группы, для III возрастной группы значения превосходят в 2–3 раза.

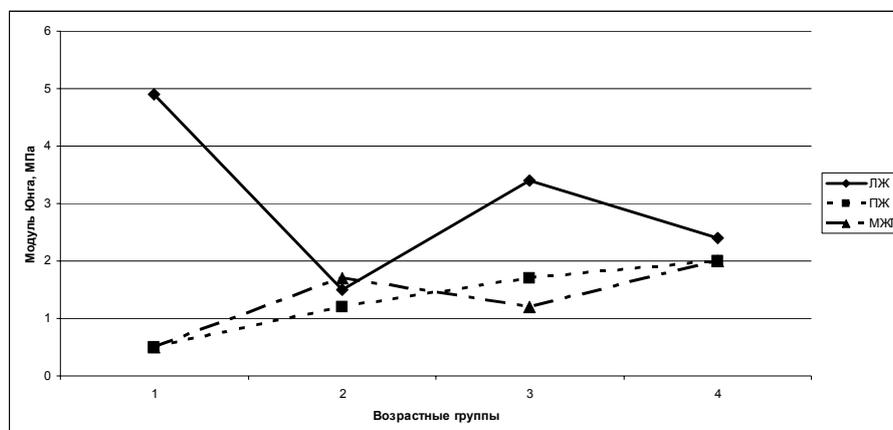


Рис. 3. Значения модуля Юнга миокарда в зависимости от возрастной группы

Полученные данные указывают на необходимость более раннего проведения мероприятий по профилактике сердечно-сосудистых заболеваний.

Математическое моделирование.

Для реконструкции реальной геометрии артерий, учитывающих внутренний рельеф сосуда, применялся метод заливки силиконом *in vitro*, данные МРТ, морфометрии, гистологии, использовался специализированный программный пакет SolidWorks 2008 (рис. 4). В соответствие с данными, полученными при гистологическом исследовании, была задана толщина стенок коронарных артерий.

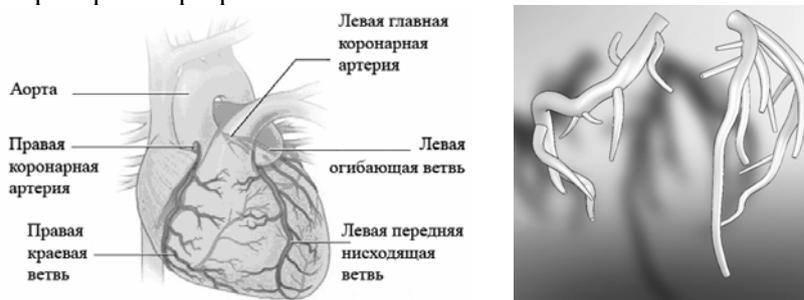


Рис. 4. 3D геометрия правой и левой коронарных артерий

Изучение НДС и гемодинамики КА проводилось с использованием конечно-элементного пакета ANSYS Multiphysics. Для расчётов на полученные объёмы была наложена нерегулярная тетраэдрическая сетка с размером элементов 0,0007 м для ПКА и 0,0009 м для ЛКА, 0,0005 м для жидкости и 0,0025 м для тканей сердца.

При численном моделировании кровь предполагалась однородной, несжимаемой и ньютоновской жидкостью. Материал тканей сердца моделировался однородными, изотропными, идеально-упругими свойствами. Движение стенки описывалось вторым законом Ньютона. Торцы сосуда считаются жёстко закреплёнными.

На стенке артерии ставилось условие равенства скоростей частиц жидкости, прилегающих к стенке, и соответствующих частиц стенки. На узлах элементов, принадлежащих внешней стенке артерии, соприкасающейся с миокардом, задавалось давление, соответствующее внешнему давлению сердечной мышцы на коронарные артерии.

В предыдущих работах авторов представлены результаты численного исследования НДС и гемодинамики коронарных артерий, пространственно незакреплённых и закреплённых на миокарде, а также желудочков сердца в норме и при патологии [9–14]. Полученные результаты подтвердили необходимость моделирования КА с учётом действия на них сердечной мышцы, так как в отличие от потока в других частях артериальной системы, коронарный поток осуществляется под действием внутримиекардиального давления, что увеличивает внесосудистое сжатие. В данной работе приведены результаты расчётов с учётом действия давления на внутреннюю поверхность КА со стороны сердца.

На входе в артерию задавалась скорость течения крови, изменяющаяся по физиологическому закону. На выходе задавалось давление, соответствующее внесосудистому сжатию сегментов, погружённых в миокард.

Задавались следующие механические характеристики крови, стенки артерии, тканей сердца: плотность крови $\rho_1 = 1050 \text{ кг/м}^3$, вязкость крови $\eta = 0.0037 \text{ Па} \cdot \text{с}$, плотность стенки артерий $\rho_2 = 1378 \text{ кг/м}^3$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.4$, модуль Юнга для левой коронарной артерии $E_1 = 5.5 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$, модуль Юнга для правой коронарной артерии $E_2 = 8 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$, модуль Юнга для тканей сердца $E_1 = 2 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2$.

Результаты.

Для ПКА в цикл диастолы наблюдаются особенности распределения давления и потока крови по сечению сосуда в области изгиба артерии. Минимум давления зафиксирован на внутренней стенке, максимум достигается на внешней стенке. Максимальные значения скорости потока крови достигаются в зоне взаимодействия ПКА с миокардом. Турбулентное течение с низкими значениями скоростей наблюдаются в огибающей ветви ЛКА и в первом сегменте основного русла ПКА как в цикл систолы, так и в цикл диастолы. Максимальное давление в цикл диастолы достигается в передней нисходящей ветви ЛКА и в первом сегменте основного русла ПКА, в цикл систолы смещается к наружным стенкам КА свободным от миекардиального давления. Максимальные значения вектора перемещений узлов элементов и низкие касательные напряжения в цикл диастолы достигаются в районе изгибов и бифуркаций артерий, в цикл систолы наблюдается смещение максимальных значений вектора перемещений узлов к стенке, не взаимодействующей с миокардом.

Численный эксперимент для КА с 60% стенозом, вызванным спазмом, выявил, что наибольшие значения давления, с равномерным распределением по сечению, наблюдаются в зоне максимального сужения. При 60% стенозе, вызванном атеросклеротическим поражением, максимум давления смещается к стенке, взаимодействующей с миокардом. При спазме сосуда максимальные значения скорости достигаются в центральной зоне патологического участка. При атеросклеротическом поражении максимум смещается к стенке артерии, свободной от миекардиального давления.

Заключение.

Понимание биомеханики коронарных артерий имеет важное значение в сосудистой физиологии и патологии, а также сосудистой хирургии. Процесс движения крови по коронарным артериям существенно отличается от течения в других частях сосудистого русла, т.к. КА расположены непосредственно на сердце и на них оказывает влияние процесс сокращения и расслабления миокарда. Учёт влияния со стороны сердца на КА позволил лучше понять процессы, происходящие в артериях в естественных условиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бокерия Л.А., Гудкова Р.Г. Сердечно-сосудистая хирургия – 2008. Болезни и врождённые аномалии системы кровообращения. М.: Изд-во НЦССХ им. А.Н. Бакулева РАМН, 2009. 162 с.
2. Malek A.M., Alper S.L., Izumo S. Hemodynamic shear stress and its role in atherosclerosis. //J. Am. Med. Assoc. 282(21), 1999. P.2035–2042.
3. Cunningham, K.S., Gotlieb, A.I. The role of shear stress in the pathogenesis of atherosclerosis. //Lab. Invest., 85 (1), 2005. P. 9–23.

4. Jung J., Lyczkowski R.W., Panchal Ch.B., Hassanein A. Multiphase hemodynamic simulation of pulsatile flow in a coronary artery. // J. Biomech. 2006. Vol. 39, issue 11. P.2064–2073.
5. Gotlieb A.I. Atherosclerosis. Cardiovascular Pathology, Y.: Churchill Livingstone, 2001. P.68–106.
6. Kumar A. Computational Model of Blood Flow in the Presence of Atherosclerosis. 6th World Congress of Biomechanics (WCB 2010). //Singapore IFMBE Proceedings. 2010. Vol. 31. Part 6. P.1591–1594.
7. Kim H. J., Vignon-Clementel I.E., Coogan J.S., Figueroa C.A., Jansen K.E., Taylor C.A. Patient-specific modeling of blood flow and pressure in human coronary arteries. //Ann. Biomed. Eng. 2010. 38(10). P. 3195–3209.
8. Kim H. J., Vignon-Clementel, I. E., Figueroa, C. A., Jansen, K. E., and Taylor, C. A. Developing computational methods for three-dimensional finite element simulations of coronary blood flow. //Finite Elements in Analysis and Design. 2010. 46(6). P. 514–525.
9. Голядкина А.А., Кириллова И.В., Щучкина О.А., Маслякова Г.Н., Островский Н.В., Челнокова Н.О. Конечно-элементное моделирование ишемической болезни сердца, исходя из картины морфо-функциональных изменений венечных артерий и сердечной мышцы человека // Российский журнал биомеханики – Пермь: Изд-во Перм. гос.тех. ун-та, 2011. Т.15, №4. С. 28–39.
10. Челнокова Н.О., Голядкина А.А., Щучкина О.А. Клинико-морфологические основы моделирования гемодинамики в системе венечных артерий с учётом их взаимодействия с миокардом // Саратовский научно-медицинский журнал.– Саратов: Изд-во СМУ, 2011. №4, ч. 7. С. 262–268.
11. Голядкина А.А., Кириллова И.В. Численное моделирование напряжённо-деформированного состояния стенок желудочков сердца человека в норме и при патологии // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Н. Новгород: Изд-во ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2011. № 4, ч. 2. С. 415–417.
12. Щучкина О.А. Напряжённо-деформированное состояние и гемодинамика коронарных артерий сердца человека // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Н. Новгород: Изд-во ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2011. № 4, ч. 2. С. 573–575.
13. Голядкина А.А., Кириллова И.В., Щучкина О.А. Анализ напряжённо-деформированного состояния и гемодинамики коронарных артерий и желудочков сердца человека // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физ.-мат. науки №3(24). – Самара: Изд-во СамГТУ, 2011. С. 79–88.
14. Кириллова И.В., Грамакова А.А., Щучкина О.А., Челнокова Н.О. Механические свойства и гистологическое строение желудочков сердца человека // Методы компьютерной диагностики в биологии и медицине–2009: Материалы ежегод. Всерос. науч. школы-семинара/под редакцией проф. Усанова Д.А.–Саратов: Изд. Саратов. ун-та, 2009. С. 76–80.

Сведения об авторах:

Голядкина Анастасия Александровна – аспирант ФГБОУ ВПО «Саратовский госуниверситет им.Н.Г. Чернышевского», Саратов, РФ, +7(845 2) 21 07 55; **E-mail:** nano-bio@sgu.ru

Кирилова Ирина Васильевна – к.ф.-м.н., доцент, директор Образовательно-научного института наноструктур и биосистем, ФГБОУ ВПО «Саратовский госуниверситет имени Н.Г. Чернышевского», Саратов, РФ, +7(845 2) 21 07 50; **E-mail:** nano-bio@sgu.ru

Коссович Леонид Юрьевич – д.ф.-м.н., профессор, зав.кафедрой математической теории упругости и биомеханики, ректор ФГБОУ ВПО «Саратовский госуниверситет имени Н.Г. Чернышевского», Саратов, РФ, +7(845 2) 26 16 96; **E-mail:** rector@sgu.ru

Щучкина Ольга Александровна – аспирант ФГБОУ ВПО «Саратовский госуниверситет им. Н.Г. Чернышевского», Саратов, РФ, +7(845 2) 21 07 55; **E-mail:** nano-bio@sgu.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ХРЯЩЕВОЙ ПРОСЛОЙКИ НА НАПРЯЖЁННОЕ СОСТОЯНИЕ ПЯСТНО-ЗАПЯСТНОГО СУСТАВА БОЛЬШОГО ПАЛЬЦА

Горячева И.Г., Антонов Ф.К., Анферов Г.М., Любичева А.Н.

Проведено исследование напряжённого состояния пястно-запястного сустава (ПЗС) в здоровом состоянии и при наличии патологий с использованием методов механики контактных взаимодействий. Геометрическая модель ПЗС строилась по результатам компьютерной обработки данных томографических исследований в положении разгибания, полученных в Национальном Чен-Кун университете (Тайвань). Исследование контактного взаимодействия в зоне ПЗС для заданной геометрии проводилось численно в программном коде ANSYS. Полученные численные решения контактных задач позволяют провести сравнительный анализ распределения напряжений в костной ткани как при наличии однородной хрящевой прослойки, так и в случае патологии, связанной с уменьшением или отсутствием в некоторых местах хрящевой ткани.

1. Введение. В работе исследуется контактное взаимодействие биологического объекта – пястно-запястного сустава (далее ПЗС) большого пальца. Строение ПЗС, толщина и свойства хрящевой ткани, возможные диапазоны нагрузок и относительных перемещений имеют индивидуальные и возрастные различия. Согласно анатомическому строению, большой палец образован двумя фалангами – основной и ногтевой, причём рассматриваемый сустав большого пальца кисти образован многоугольной пястной костью и основанием первой пястной кости – костью трапецией. Каждая из соприкасающихся суставных поверхностей имеет форму, близкую к седлу [1] (рис. 1а).

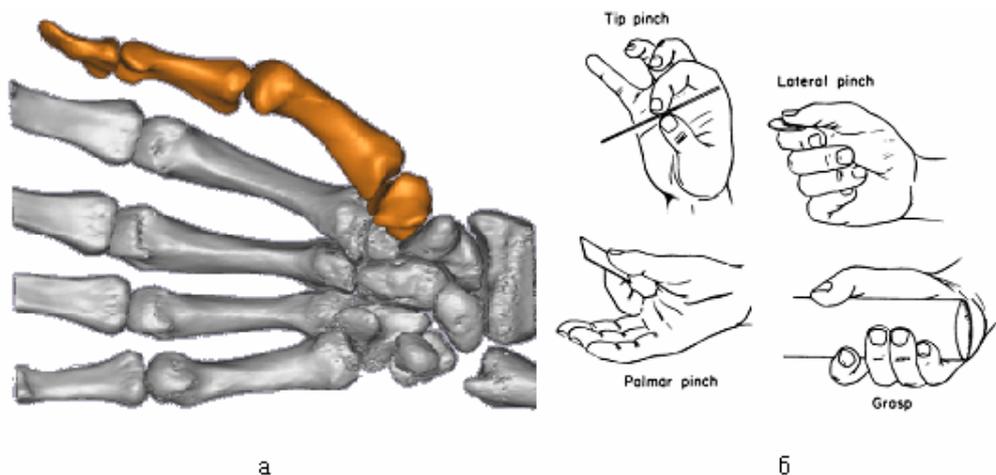


Рис.1. а – Изображение скелета большого пальца, полученное в результате обработки томографических исследований; б – характерные движения при работе большого пальца

Сустав обладает наибольшей в теле человека вариативностью движений, что позволяет обеспечить широкий спектр различных манипуляций, совершаемых кистью. В частности, в суставе реализуется следующий набор движений (рис.1б): приведение и отведение, противопоставление (оппозиция) и обратное движение (репозиция), а также круговое движение (циркумдукция). Величина подвижности в пястно-запястном суставе большого пальца составляет $45\text{--}60^\circ$ при отведении и приведении и $35\text{--}40^\circ$ при противопоставлении и обратном движении. При этом, диапазон нагрузок, реализуемых в суставе, небольшой по сравнению с такими суставами, как коленный или тазобедренный. Оценка величины нагрузки непосредственно на кости сустава представляется непростой задачей, поскольку большой палец является четырёхзвенным механизмом, а непосредственные измерения нагрузки возможны только на его кончике.

Деградация хрящевой ткани при различных заболеваниях сустава приводит к потере подвижности большого пальца. Это обстоятельство практически лишает кисть нормальной работоспособности, спектр возможных манипуляций кистью сужается. Целью данной работы является изучение ПЗС как биологического объекта, оценка контактных и внутренних

напряжений, возникающих в здоровом суставе, а также в суставе с патологией при уменьшении толщины хрящевой ткани.

2. Построение конечно-элементной модели ПЗС. Исходными данными для построения модели ПЗС являлись результаты обработки томографических исследований, проведённых в Национальном Чен-Кун университете (г.Тайнань, Тайвань). По результатам компьютерной обработки данных томографических исследований построена трёхмерная геометрическая модель пястно-запястного сустава в положении разгибания. Модель включает в себя пястную кость и кость трапецию, представляющие собой тела с заданными параметрически граничными поверхностями. Поскольку томографические исследования позволяют получить только изображения костной ткани, хрящевая ткань моделировалась тонкой прослойкой постоянной толщины на каждой из взаимодействующих костей.

Моделирование контактного взаимодействия проводилось методом конечных элементов в программном комплексе ANSYS Mechanical. Построена конечно-элементная модель с регулярной сеткой конечных элементов, состоящая из верхней части кости-трапеции и нижней части пястной кости, а также межкостной хрящевой ткани (рис.2а).

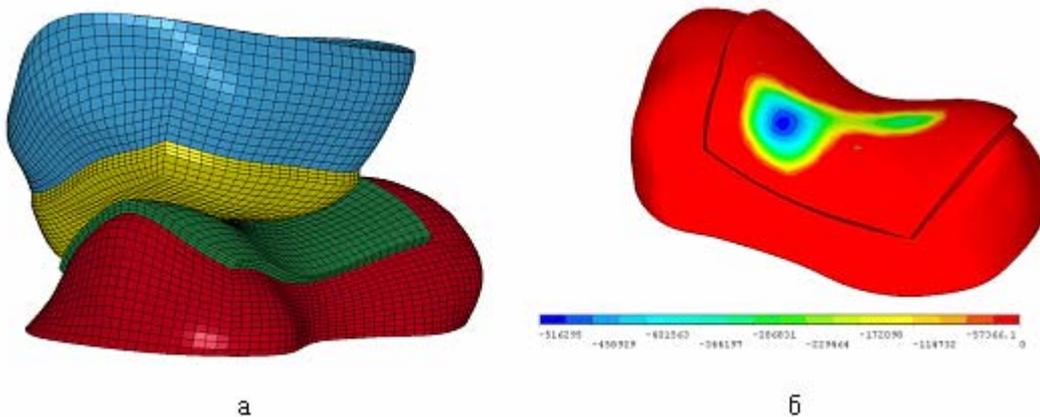


Рис.2. а – Конечно-элементная модель ПЗС; б – Распределение напряжений σ_3 на поверхности кости-трапеции при нагрузке 5Н

3. Модели материалов. Для моделирования костной ткани использовалась модель упругого анизотропного материала. Для трабекулярной (губчатой) кости, согласно [2], константы анизотропии определяются на основе стохастических соотношений в виде функций от объёмной доли материи в кости следующим образом: $E_{11} = E_{\text{tissue}} (1240 V_V^{1.8})$, $E_{22} = E_{\text{tissue}} (885 V_V^{1.89})$, $E_{33} = E_{\text{tissue}} (529 V_V^{1.92})$, $G_{23} = E_{\text{tissue}} (533.3 V_V^{2.04})$, $G_{13} = E_{\text{tissue}} (633.3 V_V^{1.97})$, $G_{12} = E_{\text{tissue}} (972.6 V_V^{1.98})$; $\nu_{23} = E_{\text{tissue}} (0.256 V_V^{-0.086})$, $\nu_{13} = E_{\text{tissue}} (0.316 V_V^{-0.191})$, $\nu_{12} = E_{\text{tissue}} 0.176 V_V^{0.248}$, где E_{tissue} – модуль упругости костной ткани, который принимался равным 500 МПа, V_V – объёмная доля ткани в кости. Для костей ПЗС коэффициент Пуассона принимался равным 0,3. Для моделирования хрящевых тканей использовалась модель изотропного линейно-упругого материала с упругими константами, определёнными в работе [3]: модуль упругости 5 МПа, коэффициент Пуассона 0,4. Толщина хрящевой ткани составляла 0.4 мм.

4. Граничные условия. Коэффициент трения между поверхностями взаимодействующих тел принимался равным 0.01 (смоченные поверхности). Кость - трапеция считалась неподвижной (закрепление по нижней поверхности). Нагрузка на кости в положении разгибания вызвана сжимающим усилием от растянутых связок и направлена по оси пястной кости, поэтому к её центру масс прикладывалась нагрузка от 1 до 5 Н, направленная вдоль оси пястной кости.

5. Результаты расчётов и выводы. Для заданных величин сжимающего усилия определены области контакта и распределение контактных давлений, проведён расчёт напряжённого состояния вблизи области контакта. На рис. 2б приведено распределение контактных

(сжимающих) напряжений σ_3 , действующих по нормали к поверхности и распределённых по поверхности кости-трапеции и в примыкающем хряще при нагрузке 5 Н. На рис.3 показано распределение сжимающих напряжений σ_3 и максимальных касательных напряжений в поперечном сечении сустава, проходящем через точку начального касания.

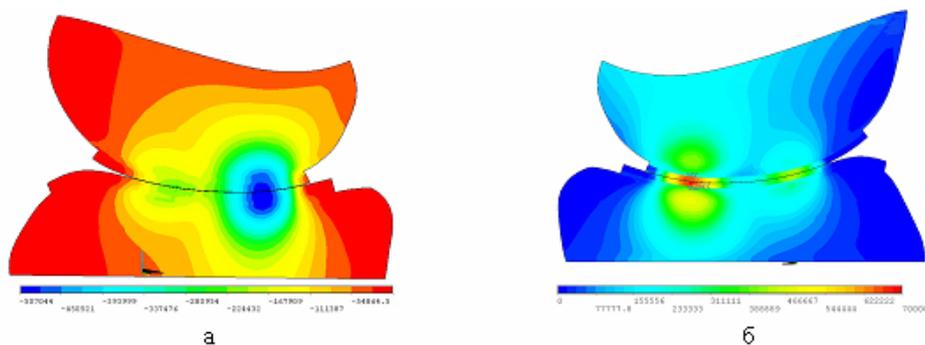


Рис.3. Распределение сжимающих напряжений σ_3 (а) и максимальных касательных напряжений (б) в поперечном сечении сустава

Анализ напряжённо-деформированного состояния в кости-трапеции показывает, что максимальные сжимающие напряжения возникают на поверхности кости, примыкающей к хрящевой ткани. Эти напряжения растут по абсолютной величине с увеличением нагрузки, приложенной к суставу (рис.4). Максимальные касательные напряжения концентрируются в области, отстоящей примерно на 1мм от поверхности пястной кости.

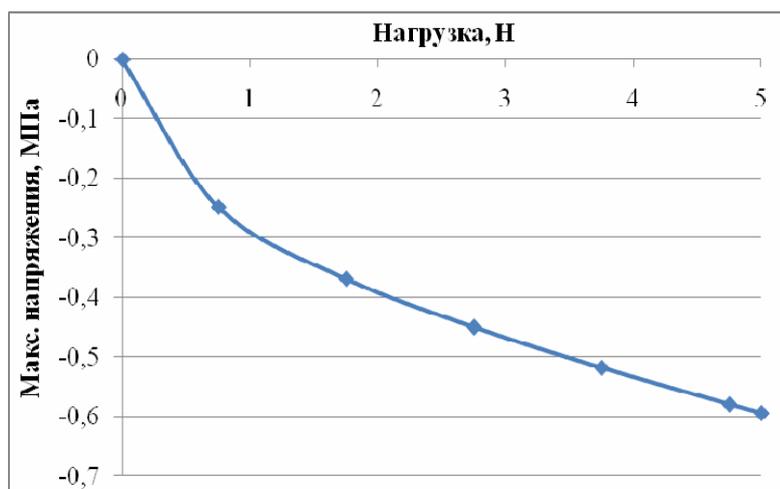


Рис.4. Зависимость максимальных значений сжимающих напряжений σ_3 на поверхности кости-трапеции от приложенной нагрузки при толщине хряща 0,4 мм

Для анализа влияния хрящевой прослойки на напряжённо-деформированное состояние костной ткани в расчётах её толщина варьировалась от значения, соответствующего здоровому суставу, до полностью деградированного, т.е. от 0.45 мм до 0.

На рис.5 представлены результаты расчётов с различными толщинами хрящевой ткани. Деградация хрящевой ткани приводит к росту максимальных контактных напряжений в кости более чем в 10 раз.

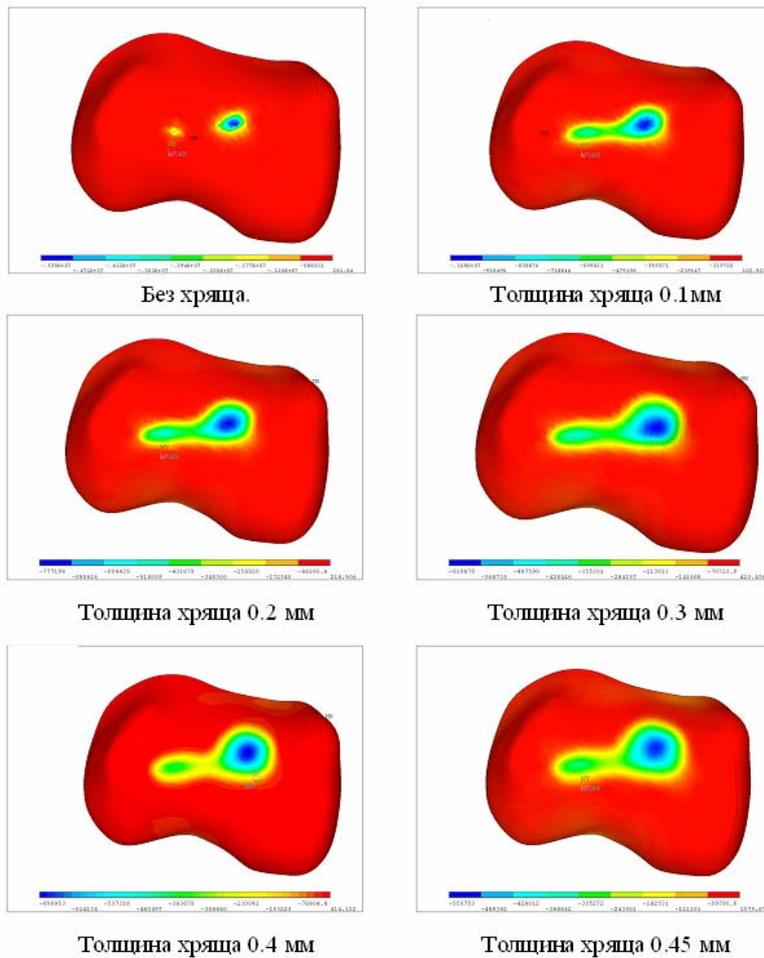


Рис.5. Сжимающие напряжения σ_z на поверхности кости-трапеции при различных толщинах хрящевой ткани и нагрузке $5H$.

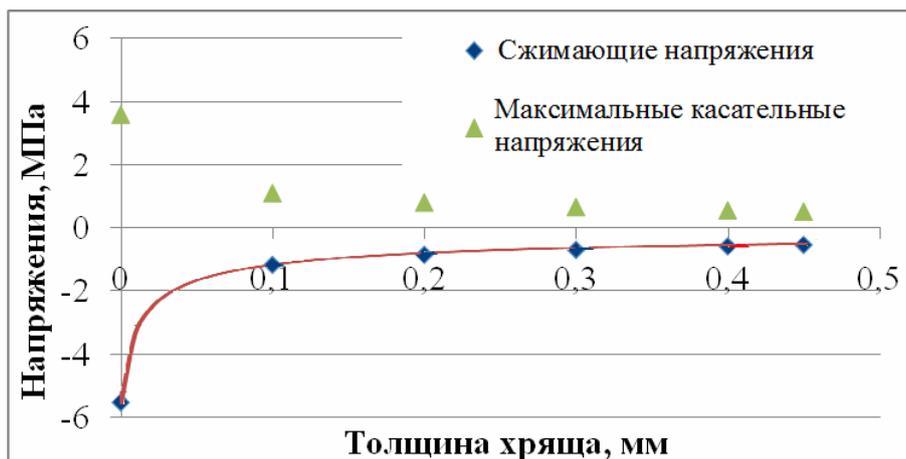


Рис.6. Зависимость максимальных значений сжимающих (ромбы) и максимальных касательных (треугольники) напряжений от толщины хряща

По результатам расчёта построены зависимости максимальных значений сжимающих и максимальных касательных напряжений от толщины хрящевого слоя, представленные на рис.6. Зависимость максимальных значений сжимающих напряжений в пястной кости хорошо аппроксимируется степенной зависимостью (сплошная линия на рис.6):

$P = -332600 \cdot (h + 0.006)^{-0.55}$, где P – максимальное значение сжимающего напряжения, h – толщина хряща.

Из анализа полученных результатов можно сделать вывод, что при наличии хрящевой ткани в условиях действия указанных выше нагрузок при их росте первоначальный одноточечный контакт переходит в двухточечный, и далее развиваются две области контакта. Наличие хрящевых тканей не оказывает существенного влияния на общий характер взаимодействия, однако величины напряжений в костной ткани при этом значительно ниже.

Таким образом, разработана расчётная модель для анализа напряжённо-деформированного состояния, возникающего при контактном взаимодействии в пястно-запястном суставе большого пальца при наличии хрящевой ткани различной толщины. Проведён анализ влияния толщины хрящевой ткани на максимальные значения напряжений в костной ткани сустава. Показано, что дегградация хрящевой ткани приводит к существенному росту напряжений.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №10-08-92001-ННС_a)

ЛИТЕРАТУРА

1. Gerard A. Ateshian, Jon W. Ark, Melvin P. Rosenwasser, Robert J. Pawluk, Louis J. Soslowsky, Van C. Mow. Contact Areas in the Thumb Carpometacarpal Joint. Journal of Orthopaedic Research, 1995 Orthopaedic Research Society, p. 450-458. Michigan, U.S.A.
2. Mow, Van C.; Huiskes, Rik. Basic Orthopaedic Biomechanics and Mechano-Biology, 3rd Edition. Lippincott Williams & Wilkins. 2005.
3. Akizuki S, Mow VC, Muller F, et al. Tensile properties of human knee joint cartilage: I influence of ionic conditions, weight bearing, and fibrillation on the tensile modulus. J Orthop Res 1986;4:379-392.

Сведения об авторах:

Горячева Ирина Георгиевна – академик, зав.лаб. трибологии ФГБУН Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук. **Тел.:** +7 (495) 434 36 92

Антонов Федор Константинович – к.ф.-м.н., м.н.с. Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова,

Анферов Глеб Михайлович – студент, ФГФОУВПО "Московский физико-технический институт"

Любичева Анастасия Николаевна – к.ф.-м.н., н.с. лаб. трибологии ФГБУН Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук. **Тел.:** +7 (495) 434 36 92
E-mail: lyubicheva@mail.ru

О КОНТАКТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА ИЛИ СЛОЯ С СИСТЕМОЙ СТРИНГЕРОВ ПРИ АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Григорян М.С.

Рассматриваются контактные задачи о взаимодействии упругого полупространства или бесконечного в обоих направлениях упругого слоя с системой из произвольного конечного числа стрингеров при условиях антиплоской деформации. В рамках известной модели Мелана для стрингеров решения поставленных задач сводятся к решениям двух сингулярных интегральных уравнений, которые затем в свою очередь сводятся к системам систем линейных алгебраических уравнений.

Задачи контактного взаимодействия между массивными деформируемыми телами различных геометрических форм и тонкостенными элементами в виде стрингеров (накладок) непосредственно связаны с важными для инженерной практики вопросами передачи нагрузок, представляют теоретический и практический интерес. Поэтому они стали предметом исследования многих авторов. Первые исследования в этой области восходят к известной работе Мелана [1]. В дальнейшем эти задачи развивались в разных направлениях и основные результаты в этой области теории упругости до 1976г. подытожены в [2]. Укажем еще на работу [3] и на монографию [4].

В настоящей работе рассматриваются две задачи о контакте упругого полупространства или упругого слоя с системой из произвольного конечного числа стрингеров, находящихся в условиях антиплоской деформации и обладающих различными геометрическими и упругими характеристиками. В рамках физической модели Мелана при антиплоской деформации для стрингеров [5], решения обсуждаемых задач сводятся к решениям двух сингулярных интегральных уравнений (СИУ). Для решения определяющих СИУ применяется известный численно-аналитический метод решения СИУ [6-8]. В результате, касательные контактные напряжения под стрингерами и коэффициенты их концентрации в концевых точках стрингеров представляются явными формулами.

Хотя контактная задача для упругого полупространства является частным (предельным) случаем задачи для упругого слоя, ввиду её важности и относительной простоты, здесь, в основном, рассматривается эта задача.

1. Рассмотрим задачу контактного взаимодействия между упругим полупространством и системой стрингеров при антиплоской деформации. Пусть отнесённое к правой прямоугольной системе координат $Oxuz$ полупространство $z < 0$ обладает модулем сдвига G и на своей граничной плоскости $z = 0$ усилено системой Ω из произвольного конечного числа n упругих полос ω_k ($k = \overline{1, n}$) с модулями сдвига G_k и высотами h_k , бесконечных в обе стороны по направлению оси Oz , т.е.

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^n \omega_k \quad \omega_k = \{a_k \leq x \leq b_k; 0 \leq y \leq h_k; -\infty < z < \infty\} \quad a_k < b_k < a_{k+1} \quad (k = \overline{1, n-1}), \quad a_n < b_n.$$

Предположим, что на верхней грани $y = h_k$ каждой полосы ω_k в направлении оси Oz действуют равномерно распределённые по оси Oz касательные силы интенсивности $T_k(x)$, т.е.

$$\tau_{yz} \Big|_{y=h_k} = T_k(x) \quad (a_k < x < b_k; k = \overline{1, n}),$$

где τ_{yz} – компонента касательных напряжений. Кроме того, предположим, что на граничных поверхностях $x = a_k$ и $x = b_k$ полосы ω_k в направлении оси Oz действуют равномерно распределённые по этой оси касательные сосредоточенные силы T_{a_k} и T_{b_k} соответственно.

Примем, что под действием совокупности указанных касательных сил полупространство вместе с системой упругих полос Ω находится в условиях антиплоской деформации (продольного сдвига) в направлении оси Oz с базовой плоскостью Oxy . Тогда описанная задача сводится к задаче для нижней упругой полуплоскости $y < 0$, когда её граница $y = 0$ усилена системой упругих накладок L , причем

$$L = \bigcup_{k=1}^n L_k; \quad L_k = \{y = 0, a_k < x < b_k\} \quad (k = \overline{1, n})$$

и верхняя грань $y = h_k$ k -ой накладки нагружена касательными силами интенсивности $T_k(x)$.

Далее для накладок примем $G_k \gg G$ ($k = \overline{1, n}$) и $h \ll \min_{1 \leq k \leq n} (b_k - a_k)$ и тогда будем считать, что для накладок справедлива модель одномерного упругого континуума Мелана [5] и в этом смысле их будем считать стрингерами. При сделанных предположениях требуется определить касательные контактные напряжения $\tau(x)$ под системой стрингеров L , т.е. функцию

$$\tau_{yz}|_{y=0} = \tau(x) \quad \left(x \in L = \bigcup_{k=1}^n (a_k, b_k) \right)$$

и коэффициенты концентрации этих напряжений в концевых точках каждого стрингера.

С целью вывода определяющего СИУ поставленной задачи воспользуемся известным выражением единственной отличной от нуля компоненты смещений $u_z(x, 0)$ граничных точек упругой полуплоскости от распределённых касательных сил интенсивности $\tau(x)$ ($-\infty < x < \infty$):

$$u_z(x, 0) = w(x, 0) = \frac{1}{\pi G} \sum_{k=1}^n \int_{a_k}^{b_k} \ln \frac{1}{|x-s|} \tau(s) ds + \text{const}. \quad (1)$$

Далее воспользуемся дифференциальным уравнением деформирования k -ого стрингера по модели Мелана при антиплоской деформации [5]

$$h_k G_k \frac{d^2 w_k}{dx^2} = \tau(x) - T_k(x) \quad (a_k < x < b_k; k = \overline{1, n}) \quad (2)$$

где $w_k = w_k(x)$ – компонента смещений точек k -ого стрингера в направлении оси Oz . При этом, условие равновесия этого стрингера имеет вид

$$\int_{a_k}^{b_k} \tau(x) dx = T_{b_k} - T_{a_k} + \int_{a_k}^{b_k} T_k(x) dx \quad (k = \overline{1, n}). \quad (3)$$

Интегрированием (2) легко находим

$$h_k G_k \frac{dw_k}{dx} = \frac{1}{2} (T_{a_k} + T_{b_k}) + \frac{1}{2} \int_{a_k}^{b_k} \text{sign}(x-s) [\tau(s) - T_k(s)] ds \quad (a_k \leq x \leq b_k; k = \overline{1, n}). \quad (4)$$

Теперь в условиях контакта упругой полуплоскости и системы стрингеров

$$w(x, 0) = w_k(x) \quad \text{и} \quad \frac{dw(x, 0)}{dx} = \frac{dw_k(x)}{dx} \quad (a_k \leq x \leq b_k; k = \overline{1, n})$$

подставим выражения $w(x, 0)$ и $w_k(x)$ из (1) к (4) соответственно. После простых преобразований придём к следующему определяющему СИУ контактной задачи ($a_k < x < b_k, k = \overline{1, n}$):

$$\frac{1}{\pi G} \sum_{k=1}^n \int_{a_k}^{b_k} \frac{\tau(s) ds}{s-x} + \frac{1}{2h_k G_k} \int_{a_k}^{b_k} \text{sign}(s-x) \tau(s) ds = \frac{1}{2h_k G_k} \left[T_{a_k} + T_{b_k} + \int_{a_k}^{b_k} \text{sign}(s-x) T_k(s) ds \right]. \quad (5)$$

Решения СИУ должно удовлетворять условиям (3).

Далее в (5) и (3) введём безразмерные координаты и величины

$$\xi = x/a, \quad \eta = s/a, \quad \alpha_k = a_k/a, \quad \beta_k = b_k/a, \quad h_k^0 = h_k/a \quad (k = \overline{1, n});$$

$$\lambda_k = (\pi G)/(2h_k^0 G_k), \quad T_k^0 = T_{a_k}/(aG), \quad T_{\beta_k}^0 = T_{b_k}/(aG); \quad \tau_0(\xi) = \tau(a\xi)/a; \quad T_k^0(\xi) = T_k(a\xi)/G;$$

где a - координата одной из конечных точек отрезков $[\alpha_k, \beta_k]$, отличная от нуля. Например, если $a_1 \neq 0$, то $a = a_1$. После несложных преобразований СИУ (5) представим в виде

$$\frac{1}{\pi} \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \left[\frac{1}{\eta - \xi} + \lambda_k \text{sign}(\eta - \xi) \right] \tau_0(\eta) d\eta + \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^n \int_{\alpha_p}^{\beta_p} \frac{\tau_0(\eta) d\eta}{\eta - \xi} = \frac{\lambda_k}{\pi} \left[T_{\alpha_k}^0 + T_{\beta_k}^0 + \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \text{sign}(\eta - \xi) T_k^0(\eta) d\eta \right] \quad (\alpha_k < \xi < \beta_k; k = \overline{1, n}); \quad (6)$$

а условия (3)– в виде

$$\int_{\alpha_k}^{\beta_k} \tau_0(\xi) d\xi = T_{\beta_k}^0 - T_{\alpha_k}^0 + \int_{\alpha_k}^{\beta_k} T_k^0(\xi) d\xi \quad (k = \overline{1, n}). \quad (7)$$

Чтобы к СИУ (6)-(7) применить известный численно-аналитический метод решения СИУ [6-8], каждый отрезок $[\alpha_k, \beta_k]$ преобразуем в отрезок $[-1, 1]$:

$$\xi = \frac{\beta_k - \alpha_k}{2} t + \frac{\alpha_k + \beta_k}{2}, \quad \eta = \frac{\beta_k - \alpha_k}{2} u + \frac{\alpha_k + \beta_k}{2} \quad (k = \overline{1, n}) \quad (-1 \leq t, n \leq 1).$$

Тогда СИУ (6) запишется в виде $(-1 < t < 1, k = \overline{1, n})$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{u-t} + \lambda_k^0 \text{sign}(u-t) \right] \tau_k^0(u) du + \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^n R_{k,p}(t, u) \tau_p^0(u) du = \frac{\lambda_k^0}{\pi} f_k^0(t) \quad (8)$$

$$R_{k,p}(t, u) = \frac{\beta_p - \alpha_p}{(\beta_p - \alpha_p)u - (\beta_k - \alpha_k)t + \beta_p - \beta_k + \alpha_p - \alpha_k};$$

$$\lambda_k^0 = \frac{\beta_k - \alpha_k}{2} \lambda_k; \quad \tau_k^0(u) = \tau_0\left(\frac{\beta_k - \alpha_k}{2}u + \frac{\beta_k + \alpha_k}{2}\right);$$

$$f_k^0(t) = T_{\alpha_k}^0 + T_{\beta_k}^0 + \frac{\beta_k - \alpha_k}{2} \int_{-1}^1 \text{sign}(u-t) \tilde{T}_k(u) du$$

а условия (7)– в виде

$$\int_{-1}^1 \tau_k^0(t) dt = Q_k, \quad Q_k = \frac{2}{\beta_k - \alpha_k} (T_{\beta_k}^0 - T_{\alpha_k}^0) + \int_{-1}^1 \tilde{T}_k(t) dt \quad (k = \overline{1, n}). \quad (9)$$

Теперь полагая

$$\tau_k^0(t) = \chi_k(t)/\sqrt{1-t^2} \quad (-1 < t < 1; k = \overline{1, n}) \quad (10)$$

где $\chi_k(t)$ – функции из гельдеровского класса на отрезке $[-1, 1]$ и следуя известной процедуре из [6-8], СИУ (8)-(9) сведём к следующей системе систем линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left[\frac{1}{u_m - t_r} + \lambda_k^0 \text{sign}(u_m - t_r) \right] \chi_k(u_m) + \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^n R_{k,p}(u_m, t_r) \chi_p(u_m) = \frac{\lambda_k}{\pi} f_k^0(t_r) \\ \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \chi_k(t_m) = Q_k \quad (k = \overline{1, n}); \quad (r = \overline{1, M-1}) \end{cases} \quad (11)$$

Здесь M – любое натуральное число, а

$$u_m = \cos((2m-1)\pi/2M) \quad (m = \overline{1, M}); \quad t_r = \cos(\pi r/M) \quad (r = \overline{1, M-1})$$

известные чебышевские узлы.

Коэффициенты концентрации касательных контактных напряжений на концах k -ого стрингера определим по формулам

$$K_{a_k}^0 = \lim_{x \rightarrow a_k + 0} \sqrt{x - a_k} \tau(x) \quad K_{b_k}^0 = \lim_{x \rightarrow b_k - 0} \sqrt{b_k - x} \tau(x)$$

и в них перейдём к безразмерным величинам. Тогда после решения системы (11) безразмерные коэффициенты концентрации контактных напряжений в концевых точках k -ого стрингера будут вычисляться при помощи формул

$$K_{a_k}^0 = \left((\sqrt{\beta_k - \alpha_k}) \chi_k(-1) \right) / 2, \quad K_{b_k}^0 = \left((\sqrt{\beta_k - \alpha_k}) \chi_k(1) \right) / 2 \quad (k = \overline{1, n})$$

где $\chi_k(t)$ – функция из (10), а величины $\chi_k(\pm 1)$ после решения системы (11) определяются при помощи интерполяционного многочлена Лагранжа [8]:

При этом,

$$\begin{aligned} \chi_k(1) &= \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (-1)^{M+1} \chi_k(u_m) \text{ctg} \left[\frac{(2M-1)\pi}{2M} \right]; \\ \chi_k(-1) &= \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (-1)^{M+m} \chi_k(u_m) \text{tg} \left[\frac{(2M-1)\pi}{2M} \right]. \\ \{K_{a_k}^0, K_{b_k}^0\} &= (\sqrt{aG})^{-1} \{K_{a_k}, K_{b_k}\} \quad (k = \overline{1, n}). \end{aligned}$$

В случаях абсолютно жёстких стрингеров $\lambda_k = 0$ и одного стрингера СИУ (6)-(7) и, соответственно, системы (11) примут особенно простые виды.

2. В случае поставленной задачи для пространственного слоя $D = \{-\infty < x, z < \infty; -H \leq y \leq 0\}$, нижняя граничная плоскость $y = -H$ которого жёстко защемлена, в базовой плоскости Oxy придём к описанной выше контактной задаче взаимодействия между упругой полосой $\omega = \{-\infty < x < \infty; -H \leq y \leq 0\}$ и системой стрингеров L . Построив при помощи интегрального преобразования Фурье функцию смещений $u_z(x, 0) = w(x, 0)$ граничных точек полосы $y = 0$ от действующих на этой же границе касательных сил интенсивности $\tau(x)$, когда $u_z(x, -H) = 0$, и далее поступив совершенно аналогично сделанному в п.1, придём к следующему определяющему СИУ контактной задачи для полосы ω ($a_k < x < b_k, k = \overline{1, n}$):

$$\frac{1}{\pi GH} \sum_{k=1}^n \int_{a_k}^{b_k} \frac{\tau(s) ds}{sh\left(\frac{s-x}{2H}\right)} + \frac{1}{2h_k G_k} \int_{a_k}^{b_k} \text{sign}(s-x) \tau(s) ds =$$

$$= \frac{1}{2h_k G_k} \left[T_{a_k} + T_{b_k} + \int_{a_k}^{b_k} \text{sign}(s-x) T_k(s) ds \right] \quad (12)$$

Если в (12) перейти к новым переменным $\xi = \ln t, \eta = \ln u$ ($\xi = x/H, \eta = s/H$) и учитывать соотношение

$$\frac{1}{2sh((\eta - \xi)/2)} = \frac{\sqrt{u}\sqrt{t}}{u-t}$$

то СИУ (12) преобразуется в СИУ типа (5), а затем – в СИУ типа (8). Это относится также к условиям (3) и (9). Итак, при антиплоской деформации определяющее СИУ контактной задачи для полосы можно свести к определяющему СИУ этой же задачи для полуплоскости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Melan E. Ein Beitrag zur Theorie geschweißter Verbindungen.// Ingr. Arch. 1932. Bd.3. No2. S.123-129.
2. Развитие теории контактных задач в СССР. М.: Наука, 1976. 493 с.
3. Арутюнян Н.Х. Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением.// ПММ. 1968. Т.32. Вып. 4. С.632-646.
4. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488 с.
5. Мхитарян С.М. О двух смешанных задачах, связанных с вопросами взаимодействия концентраторов напряжений различных типов с массивными телами при антиплоской деформации. //В сб.: “Механика деформируемого твердого тела”. Ереван: Изд-во НАН Армении, 1993. С.129-143.
6. Erdogan F., Gupta G.D., Cook T.S. The numerical solutions of singular integral equations. Methods of Analysis an solution of crack problems, pp 368-425, Noordhoff Intern. Publ., Leyden, 1973.
7. Theocaris P. S. , Iokimidis N. I. Numerical Integration Methods for the Solution of singular Integral Equations. Quart. Appl Math., vol xxxv, No1, pp 173-185, 1977.
8. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова думка, 1976. 443 с.

Сведения об авторе:

Григорян Марине Самвеловна – мл. н. сотр. Института механики НАН РА. Тел.: (374 222) 3 61 36, (374 91) 63 97 58. E-mail: gmarinchka@mail.ru

ИЗГИБ НЕСИММЕТРИЧНО НЕОДНОРОДНОЙ ПО ТОЛЩИНЕ ПЛАСТИНКИ В ОКРЕСТНОСТИ ЖЁСТКО ЗАКРЕПЛЁННОГО КРАЯ

Григорян Э. Ф.

В настоящей работе исследуются задачи несимметрично неоднородных по толщине пластин на основе гипотезы Кирхгофа, определяются прогиб, изгибающий и крутящий моменты и перерезывающие усилия в окрестности закреплённого края.

1. Пусть упругая пластинка в декартовой прямоугольной системе координат занимает область $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $-h_2 \leq z \leq h_1$. Модули пластинки одинаковы для всех точек на плоскости, параллельной срединной, но меняются по толщине, притом несимметрично. Тогда уравнения статики имеют вид [3]:

$$\begin{aligned} B_0 \Delta u + (C - B_0) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - K \frac{\partial}{\partial x} \Delta w &= 0, \\ B_0 \Delta v + (C - B_0) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - K \frac{\partial}{\partial y} \Delta w &= 0, \\ D_0 \Delta^2 w - K \Delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= q(x, y), \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$C = \int_{-h_1}^{h_2} \frac{E}{1-\nu^2} dz, \quad K = \int_{-h_1}^{h_2} \frac{zE}{1-\nu^2} dz, \quad D_0 = \int_{-h_1}^{h_2} \frac{z^2 E}{1-\nu^2} dz, \quad B_k = \int_{-h_1}^{h_2} \frac{z^k E}{1+\nu} dz, \quad k = 0, 1, 2.$$

После преобразований уравнение (1) приводится к виду:

$$D \Delta^2 w = q(x, y), \quad \text{где } D = D_0 - K^2 C^{-1}. \quad (2)$$

Уравнения (1) с учётом (2) допускают решения вида

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \sin \lambda_n y, \quad v = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) \cos \lambda_n y, \quad w = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x) \sin \lambda_n y. \quad (3)$$

При напряжённо-деформированном состоянии пластинки в окрестности жёстко закреплённого края имеем:

$$u = v = w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = 0. \quad (4)$$

Удовлетворяя граничным условиям (4), определяются выражения для искомым функций [6]:

$$w_n = \frac{q_0 a_n}{D \lambda_n^4} \left[1 - (1 + \lambda_n x) e^{\lambda_n x} \right], \quad u_n = \frac{K q_0 a_n}{C D \lambda_n^2} x e^{\lambda_n x}, \quad v_n = \frac{K q_0 a_n}{C D \lambda_n^3} \left[1 - (1 + \lambda_n x) e^{\lambda_n x} \right]. \quad (5)$$

По формулам (5) можно определить характерные величины в данной задаче :

$$T_1(0, y) = 0, \quad S(0, y) = 0, \quad M_1(0, y) = -\frac{q_0 a_n}{\lambda_n^2} \sin \lambda_n y,$$

$$N_1(0, y) = \frac{2q_0 a_n}{\lambda_n} \sin \lambda_n y, \quad \lim_{y \rightarrow 0} N_1(0, y) = 0, \quad \text{если } n \neq 0 \text{ и}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} N_1(0, y) = 2q_0 a_n, \quad \text{если } n = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} N_2(x, 0) = \frac{q_0 a_n}{D \lambda_n} \left(\frac{K^2}{C} - \frac{B_1 K}{C} \right), \quad (6)$$

$$\max w(x, 0.5b) \approx 0.0129 \frac{q_0 b^4}{D}.$$

2. Введём следующую безразмерную величину: $\frac{z}{h_0}$. Пусть модуль Юнга

изменяется по экспоненциальному закону: $E = E_0 e^{\alpha \frac{z}{h_0}}$ и $h_1 = h_2 = h_0$ ($\nu = 0.3$). Тогда, для значений $N_2(0, y)$ имеем следующее выражение:

$$N_2(0, y) = 0.6500 \frac{q_0 a_n}{\lambda_n} \frac{(\alpha \operatorname{ch} \alpha - \operatorname{sh} \alpha)^2}{\operatorname{sh}^2 \alpha - \alpha^2} \cos \lambda_n y.$$

Результаты вычислений при различных значениях α приведены на рис.1 и в табл.1.

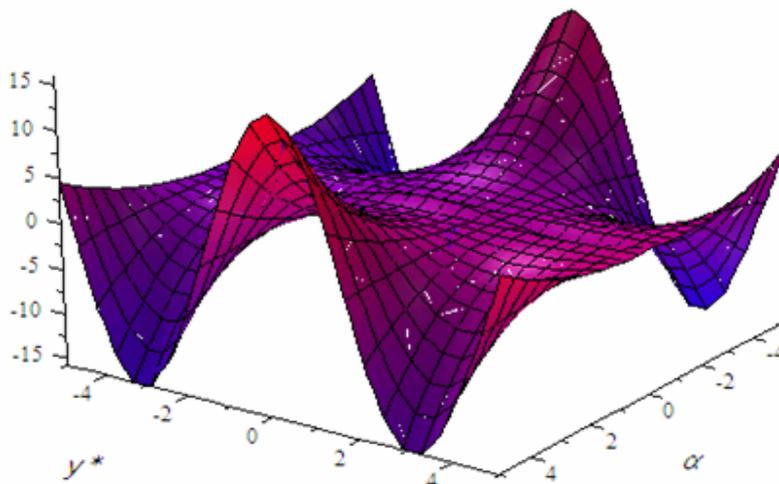


Рис.1

Таблица 1

$\alpha \backslash y^*$	-4	-3	-2	-1	0
0	9.2141	4.4598	1.6594	0.3551	0
1	4.9931	2.4096	0.8966	0.1918	0
2	-3.8349	-1.8561	-0.6906	-0.1478	0
3	-9.1203	-4.4147	-1.6426	-0.3515	0
4	-6.0223	-2.9149	-1.0846	-0.2321	0

Пусть теперь модуль Юнга изменяется по закону: $E = E_0 \left(1 + \alpha \frac{z}{h_0} \right)$. Для значений

$N_2(0, y)$ будем иметь

$$N_2(0, y) = 4.7502 \frac{q_0 a_n}{\lambda_n} \frac{\alpha^2}{(3 - \alpha^2)} \cos \lambda_n y.$$

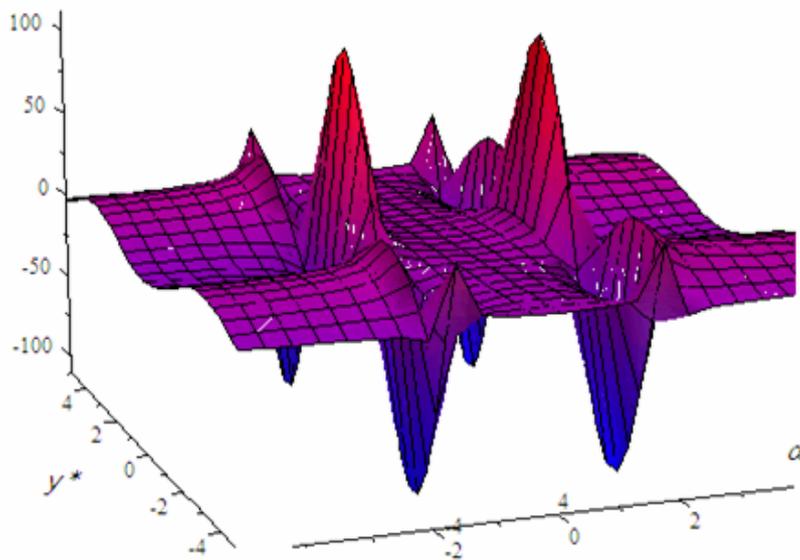


Рис.2

Таблица 2

$\alpha \backslash y^*$	-4	-3	-2	-1	0
0	-1.2307	-1.5000	-4.0000	0.5000	0
1	-0.6649	-0.8105	-2.1612	0.2702	0
2	0.5122	0.6243	1.6648	-0.2081	0
3	1.2182	1.4849	3.9596	-0.4946	0
4	0.8044	0.9804	2.6144	-0.3268	0

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. М.: Гостехиздат, 1957. 463 с.
2. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропных тел. М.: Наука, 1977. 416 с.
3. Белубекян МВ. К вопросу колебаний неоднородной по толщине пластинки. //Изв. НАН Армении. Механика. 2002. Т.55. №3. С.34-41.
4. Григоренко ЯМ., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д. Задачи теории упругости неоднородных тел. Киев: Наукова думка, 1991. 228с.
5. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Физматлит, 1963. 636с.
6. Григорян Э.Ф. Изгиб несимметрично неоднородной по толщине пластинки нормальной нагрузкой. Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. //Гр. VII Междунар. конф. Институт механики НАН РА. Ереван. 2011.

Сведения об авторе:

Григорян Эрмине Фердинантовна – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры мат. анализа ВГПИ, Армения, г. Ванадзор, ул. Тигран-Меца 36; **Тел.:** (0322)4-40-64; **E-mail:** grigherm@mail.ru

ДИФРАКЦИЯ СДВИГОВОЙ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ В УПРУГИХ И ЭЛЕКТРОУПРУГИХ СРЕДАХ, ДОПУСКАЮЩИХ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН

Григорян Э.Х., Агаян К.Л., Джилавян С.А.

Представлены некоторые работы, в которых рассмотрены задачи дифракции сдвиговых плоских волн в упругих изотропных или электроупругих средах при наличии упругих включений, трещин или тонких металлических заземлённых слоёв (электродов). Наличие неоднородностей, а также полубесконечных трещин в средах с пьезоэлектрическими свойствами являются причинами возбуждения локализованных (поверхностных) волн и некоторых новых, особых явлений при дифракции плоских волн сдвига.

В последние годы исследован ряд новых задач дифракции сдвиговых плоских волн в упругих и электроупругих средах. Актуальность этих исследований продиктована необходимостью как дальнейшего развития теории распространения волн в различных средах, так и разработки аналитических методов решения конкретных задач. Изучения вопросов дифракции, распространения поверхностных (локализованных) волн относятся к числу наиболее важных и интересных проблем динамики контактных взаимодействий упругих конструкций. В свете воплощения идей академика Н.Х. Арутюняна в области смешанных и контактных задач теории упругости нами был опубликован ряд работ, относящихся к вопросам исследования особенностей распространения и дифракции плоских волн сдвига в изотропных и пьезоэлектрических средах, содержащих полубесконечные концентраторы напряжений-трещины, включения, тонкие металлические слои (электроды). Для решения задач необходимо пользоваться методами динамической теории упругости и математической физики [1-9]. Задачи решаются методом интегрального преобразования Фурье, используя метод факторизации и метод, разработанный в [5], аппарат обобщённых функций и методы теории функций комплексного переменного.

При исследовании волновых процессов в деформируемых, изотропных средах, многие физико-механические свойства влияют на волновое поле, но важным из них является неоднородность, которая вносит существенное изменение в классическую теорию волн. Неоднородность порождает новые эффекты- локализованные волны, и приводит к существенной перестройке волновых дифрагированных полей.

В рассмотренных задачах выявлены основные характеристические свойства дифракции и распространения волн [9-33]. Задачи дифракции волн сдвига, в отличие от хорошо известных традиционных методов решения подобных задач [2,3,7,8], сводятся к решению функционального уравнения типа Римана на действительной оси:

$$U^-(\sigma) + K(\sigma)U^+(\sigma) = a\delta(\sigma - \cos\beta),$$

где $a = \text{const}$, β – угол падения сдвиговой волны, искомые функции $U^-(\sigma)$ и $U^+(\sigma)$ – трансформанты Фурье функций $V^-(x)$ и $V^+(x)$, $V^-(x) = 0$ при $x > 0$, а $V^+(x) = 0$ при $x < 0$, $\delta(\sigma)$ – функция Дирака и представляется в виде

$$2\pi i\delta(\sigma - \cos\beta) = \frac{1}{\sigma - \cos\beta - i0} - \frac{1}{\sigma - \cos\beta + i0}.$$

Исследуя дифрагированную картину, используя методы контурного интегрирования, выведены асимптотические формулы для волнового поля. Разработан новый метод определения асимптотических формул для компонент волнового поля в дальней зоне и использован во многих задачах дифракции волн сдвига. Для исследования решения, полученного в виде интеграла Фурье, разрезы в комплексной плоскости проводятся по координатным осям, и в итоге, решение задачи представляется при помощи регулярных интегралов на разрезах. Далее асимптотические формулы, в обход общепринятого метода перевала [2,3,7], определяются интегрированием по частям интегралов, представляющих волновое поле. Разработанный метод изложен на примере решения задачи о дифракции сдвиговой плоской волны на краю полубесконечной трещины в упругом пространстве [10].

В работах [9,11] рассматривается дифракция сдвиговой плоской волны, падающей из бесконечности под некоторым углом на полубесконечное упругое включение в упругом,

изотропном пространстве. Решение представляется в виде суммы своей чётной и нечётной частей. Рассматривая случай длинных волн, считая толщину включения достаточно малой, эти задачи моделируются соответствующим образом, после чего каждая из них сводится к решению функционального уравнения, используя метод интегрального преобразования. Методом факторизации получено замкнутое решение. Получены асимптотические формулы для амплитуд перемещения в дальней зоне и асимптотическое представление напряжения вблизи края включения. Выявлена локализованная (поверхностная) волна Лява, обусловленная наличием полубесконечного включения. Из решения рассматриваемой задачи предельным переходом получены решения соответствующих предельных задач – наличие жёсткого включения или полубесконечной трещины. Решена также задача дифракции локализованной волны в изотропном пространстве с полубесконечным включением в виде полубесконечного слоя с малой толщиной [12].

Исследована задача дифракции волны сдвига, когда бесконечное включение состоит из двух полубесконечных частей с различными материалами [14,15]. Решены функциональные уравнения, получены асимптотические формулы для амплитуды перемещения и контактных напряжений в дальней зоне, изучено поведение напряжений в окрестности линии соединения полубесконечных частей включения. Появление поверхностных волн обусловлено неоднородностью слоя и дифрагированной сдвиговой волны. Рассмотрена дифракция волны Лява от границы раздела двух полубесконечных упругих слоёв. Обусловленной неоднородностью слоя, существуют два луча, по направлению которых амплитуда дифрагированной объёмной волны не убывает.

Исследована задача об излучении плоской сдвиговой волны из упругого слоя (волновода) в упругое пространство [13,16]. Слой вложен в пространство и соединён с ней частично. Со стороны несоединенной части слоя распространяется заданная плоская сдвиговая волна и излучает в составное пространство. Методом факторизации решаются функциональные уравнения. Получены конечные выражения, определяющие волновое поле в каждой части слоя и пространства. При определённых отношениях волновых чисел слоя и пространства порядок убывания объёмной волны в слое распространяются со скоростью распространения объёмной волны в пространстве. Решена задача дифракции сдвиговой волны, падающей в верхнем полупространстве [17]. Задача опять сведена к функциональному уравнению типа Римана, решена методом факторизации, проведено асимптотическое представление волнового поля, показано, что распространяются поверхностные (локализованные) волны.

Изучение волновых процессов в электроупругих (пьезоэлектрических и диэлектрических) средах имеет особо важное значение при исследовании особенностей взаимодействия разных физических полей [18-33]. Вопросы существования и распространения поверхностных волн, дифракция и излучение волн, знание распределения напряжений и электрической индукции в окрестности особой линии, асимптотических представлений перемещений и электрического потенциала в дальней зоне существенно важны с точки зрения теории и практики. В представленных работах рассматривается пьезоэлектрик класса $6mm$ гексагональной симметрии.

В работах [18-24] рассмотрены задачи дифракции электроупругих волн сдвига в пьезоэлектрическом пространстве с полубесконечными заземлёнными металлическими тонкими слоями или полубесконечными трещинами. В [19,20] рассмотрена задача о дифракции плоской сдвиговой волны в пьезоэлектрическом пространстве, содержащем полубесконечный металлический слой малой толщины. На контактном участке перемещения представлены в виде суммы частей падающей волны, отражённой волны, локализованной волны, сдвиговой объёмной волны и неволновой части, а вне участка контакта в представлениях перемещения и электрического потенциала есть волна, идущая от поверхности слоя. Получены асимптотические формулы для перемещения и электрического потенциала в дальней зоне, а в окрестности ребра слоя – поведение электрической индукции. Обнаружено, что индукция электрического поля содержит локализованную волну, распространяющуюся со скоростью объёмной волны.

При исследовании задачи дифракции с двумя параллельными полубесконечными металлическими слоями [21,22] показано, что волновое поле состоит из суммы волновых полей симметричной и антисимметричной задач, каждая из которых содержит локализованную

(поверхностную) волну. Изучены, как вопрос существования этих волн, так и зависимость их скоростей распространения от расстояния между электродами и от коэффициента электромеханической связи.

В работе [19] рассмотрена дифракция сдвиговой плоской волны, падающей из бесконечности на полубесконечную трещину в пьезоэлектрическом пространстве. Получены распределения перемещения, напряжения, потенциала и компоненты вектора индукции электрического поля. Показано наличие поверхностной электроупругой волны. В [23] исследуются дифракция электроупругой волны сдвига в пьезоэлектрическом пространстве с двумя параллельными полубесконечными трещинами. Задача решается методом интегрального преобразования Фурье, решая функциональное уравнение типа Римана на действительной оси. Детально изучены дисперсионные уравнения. Обнаружены поверхностные волны и представлено волновое поле. Решена задача дифракции поверхностной сдвиговой волны в пьезоэлектрической среде с полубесконечной трещиной [24].

В работах [25,28] рассмотрены задачи дифракции сдвиговой плоской электроупругой и поверхностной волны на полубесконечном металлическом слое в пьезоэлектрическом пространстве с бесконечным металлическим слоем. Решается задача типа Римана в теории аналитических функций. Получено замкнутое решение для задач. Приведены асимптотические формулы для амплитуды перемещения и других компонент волнового поля в дальней зоне. Наличие полубесконечного металлического слоя приводит к появлению поверхностных и цилиндрических волн и волны распространяющейся по направлению луча со скоростью, зависящей от угла раствора луча, обнаружены неволновые части между слоями. В работах [26,27] рассмотрены задачи дифракции сдвиговой электроупругой волны в пьезоэлектрическом пространстве на полубесконечной трещине или полубесконечном металлическом слое при наличии в пьезопространстве бесконечного металлического слоя или трещины. Задачи сводятся к решению функционального уравнения Римана, получено замкнутое решение, выражающее поле электроупругих волн в среде. Наличие полубесконечных неоднородностей приводит к распространению поверхностных электроупругих волн.

В [29-31] рассмотрены задачи дифракции сдвиговой волны, когда одинаковые пьезоэлектрические полупространства разделены вакуумным слоем (щель). Край нижнего полупространства покрыт [29,30], или обе края покрыты [31] полубесконечным металлическим покрытием (электрод). Падающая сдвиговая волна распространяется в верхнем полупространстве. Наличием полубесконечного электрода обусловлена дифракция волны сдвига. Построено замкнутое решение, представляющее волновое электроупругое поле в каждом пьезоэлектрическом пространстве и значение электрического потенциала в вакуумном слое. Получены асимптотические формулы, определяющие поведение упругих перемещений на дальних зонах пьезоэлектрика, обнаружены поверхностные (щелевые) неоднородные и объёмные волны. Вычислен коэффициент концентрации электрической индукции около конца электрода. Изучена задача о туннелировании через зазор и дифракция на электроде. Выявлены характерные особенности электроупругого поля в нижнем полупространстве. Рассмотрена также задача дифракции в пьезоэлектрическом полупространстве, когда сдвиговая плоская волна падает на полубесконечный металлический слой на границе раздела пьезоэлектрика с вакуумным слоем [32]. Построено замкнутое решение, используя методы факторизации и интегрального преобразования. Показано, что возбуждаются поверхностные волны обусловленные наличием металлических слоёв.

Рассмотрена задача дифракции плоской волны сдвига в составном пространстве – пьезоэлектрическое полупространство контактирует с упругим диэлектрическим полупространством [33]. Среда имеет полубесконечную трещину в плоскости контакта. Учитывая электрический и механический контакты между полупространствами, задача сведена к решению краевой задачи типа Римана, искомые функции понимая как граничные значения аналитических функций. Получено, что в составной среде пьезоэлектрик-диэлектрик распространяются поверхностные (локализованные) волны, обусловленные дифракцией плоской волны сдвига и пьезоэффектом.

Полученные результаты позволяют глубже и полнее описать физические явления, выявить новые свойства и особенности, присущие взаимосвязанным средам и полям. Различные физико-механические свойства контактирующих сред приводят к существенным

изменениям волнового поля. Предложенные методы исследования и решения задач распространения волн имеют важное значение с точки зрения разработки и развития новых эффективных методов решения краевых задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
2. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. М.: ИИЛ, 1962. 279 с.
3. Балакирев М.К., Гишинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука, 1982, 242с.
4. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. М.: Наука, 1965. 327с.
5. Григорян Э.Х. Передача нагрузки от кусочно-однородной бесконечной накладки к упругой полуплоскости. // Ученые записки ЕГУ. 1979. № 3. С.29-34.
6. Справочная математическая библиотека. Функциональный анализ. М.: Наука, 1972. 283с.
7. Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. М.: Мир, 1974. 324с.
8. Григорян Э.Х., Саркисян Л.В. Дифракция сдвиговых электроупругих поверхностных волн на крае электропроводящего слоя.// Изв. НАН Армении. Механика. 1999.Т.52. №1.С.30-39.
9. Агаян К.Л., Григорян Э.Х., Джилаван С.А. Дифракция сдвиговой плоской волны в упругом пространстве с полубесконечным упругим включением.// Изв. НАН Армении. Механика, Т.56. № 4. 2003. С. 3-17.
10. Григорян Э.Х., Агаян К.Л. О новом методе определения асимптотических формул в задачах дифракции волн.// Доклады НАН Армении. 2010. Т.110. № 3. С.261-271.
11. Grigoryan E, Jilavyan S., Agayan K. Diffraction of Waves in a Elastic Space with Semi-Infinite Inclusion.// Proceedings of the International Seminar. St.Petersburg. 2004.pp.90-99.
12. Григорян Э.Х., Агаян К.Л., Джилаван С.А. Дифракция локализованной сдвиговой волны в упругом пространстве с полубесконечным включением.// В сб.: “Смешанные задачи механики деформируемого тела”, 5-ая Межд. конф., Саратов, Россия, 2005, С.105-107.
13. Агаян К.Л., Григорян Э.Х. Излучение плоской сдвиговой волны из упругого слоя в составное упругое пространство.// В кн.: “Проблемы взаимодействия деформируемых сред”, 5-ая Межд. конференция. Горис, 2005. С.19-23.
14. Восканян А.Р., Григорян Э.Х. Дифракция сдвиговой плоской волны в упругом пространстве с кусочно-однородным бесконечным упругим включением.// Изв. НАН Армении. Механика. 2007.Т.60. № 2.С.3-20.
15. Восканян А.Р. Дифракция волн Лява в упругом пространстве, содержащем бесконечное кусочно-однородное упругое включение.// Ученые записки ЕГУ. Естественные науки. 2007. №2. С. 45-52.
16. Григорян Э.Х., Агаян К.Л. Излучение плоской сдвиговой волны из упругого волновода в составное упругое пространство.// Изв. НАН Армении. Механика. 2007. Т.60. №3. С.23-37.
17. Агаян К.Л. Дифракция сдвиговой плоской волны на крае упругого слоя в составном пространстве.// Современные проблемы механики сплошной среды. Труды XIV межд. конф. Ростов-на-Дону. 2010, т.1. С.16-20.
18. Григорян Э.Х., Мелкумян А.С. Дифракция сдвиговой плоской волны в пьезоэлектрическом пространстве на краю полубесконечного металлического слоя.// Изв. НАН Армении. Механика. 2004.Т.57. №4. С.43-52.
19. Григорян Э.Х., Джилаван С.А. Дифракция плоской сдвиговой волны на полубесконечной трещине в пьезоэлектрическом пространстве.// Изв. НАН Армении. Механика. 2005 Т.58. №1. С.38-50.
20. Grigoryan E., Melkumyan A. On wave Diffraction in a Piezoelectric Medium Containing a Semi-Infinite Electrode.// Proceedings of the International Seminar, St.Petersburg, 2004. p.100-109.
21. Григорян Э.Х., Мелкумян А.С. Дифракция сдвиговой плоской волны в пьезоэлектрическом пространстве на краях параллельных полубесконечных металлических слоёв.// Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т.58. №3. С.16-28.
22. Grigoryan E., Melkumyan A. On Diffraction in a Piezoelectric Medium by Parallel-Situated Electrodes.// Proceedings of the 4th Australasian Congress on Applied Mechanics, Melbourne, 2005, p.593-598.

23. Григорян Э.Х., Джилаван С.А. Дифракция плоской сдвиговой волны в пьезоэлектрическом пространстве с двумя параллельными полубесконечными трещинами.// В кн.: “Проблемы взаимодействия деформируемых сред”, 5-ая Межд. конф. Горис, 2005. С.163-168.
24. Джилаван С.А. Дифракция поверхностной сдвиговой волны в пьезоэлектрическом пространстве с полубесконечной трещиной. // В сб.: “Смешанные задачи механики деформируемого тела”, 5-ая Межд. конф, Саратов, Россия, 2005. С.133-136.
25. Григорян Э.Х., Синанян С.С. Дифракция сдвиговой плоской электроупругой волны на полубесконечном металлическом слое в пьезоэлектрическом пространстве с бесконечным металлическим слоем.// Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. № 2. С.56-66.
26. Джилаван С.А., Шахбазян Г.А. Дифракция сдвиговой плоской волны на полубесконечной трещине в пьезоэлектрическом пространстве с бесконечным металлическим тонким слоем.//Тр. Межд. конф. “Актуальные проблемы механики сплошной среды”. Дилижан-Ереван, 2010, т.1., с.232-235.
27. Джилаван С.А., Шахбазян Г.А. Дифракция сдвиговой плоской волны на полубесконечном тонком металлическом слое в пьезоэлектрическом пространстве с трещиной.// Труды VII Межд. конф., “Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред”. Ереван: 2011, с.177-182.
28. Григорян Э.Х., Синанян С.С. Дифракция сдвиговой поверхностной электроупругой волны на полубесконечном металлическом слое в пьезоэлектрическом пространстве с бесконечным металлическим слоем.// Изв. НАН Армении. Механика. 2012. Т.65. №1. С.51-61.
29. Агаян К.Л., Григорян Э.Х. Дифракция сдвиговой плоской электроупругой волны на полубесконечном электроде в пьезоэлектрическом пространстве с щелью // Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. № 1. С.50-69.
30. Агаян К.Л. Дифракция электроупругих сдвиговых плоских волн на краях полубесконечных электродов в пьезоэлектрическом пространстве с щелью.// Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2011. № 1.С.13-18.
31. Агаян К.Л., Григорян Э.Х. Туннелирование сдвиговой плоской электроупругой волны через зазор в пьезоэлектрическом пространстве и её дифракция на полубесконечном электроде.// Тр. 2-ой Межд. конф. Дилижан-Ереван, 2010. Т.1. С.33-37.
32. Shakhbazyan G.A., Ghazaryan H.A. Diffraction of shear plane electro-elastic wave on the semi-infinite metallic layer on the piezoelectric semi-space.// Proceedings of the Yerevan State University. Physical and Mathematical Sciences. 2012, № 1, p. 33-37.
33. Григорян Э.Х., Джилаван С.А., Казарян А.А. Дифракция сдвиговой плоской волны на полубесконечной трещине в пространстве пьезоэлектрик-диэлектрик.//Труды VII Межд. конф., “Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред”. Ереван: 2011. С.37–143.

Сведения об авторах

Григорян Эдвард Хосровович – доктор физ.-мат. наук, профессор, кафедра механики, ЕГУ.
Тел: (+374 10) 230-389.

Агаян Каро Леренцович– доктор физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник
Института механики НАН Армении.

E-mail: karo.aghayan@gmail.com. **Тел:** (+374 91) 485-566.

Джилаван Самвел Акопович – кандидат физ.-мат. наук, доцент, кафедра механики, ЕГУ.

E-mail: samjilavyan@ysu.am. **Тел:** (+374 91) 500-770.

ДИВЕРГЕНЦИЯ ПЛАСТИНЫ ПРИ СВЕРХЗВУКОВОМ ОБТЕКАНИИ

Гришко А. М.

В современной околозвуковой и сверхзвуковой авиационной и ракетной технике задачи устойчивости упругих пластин, находящихся в потоке газа, занимают важное место среди неконсервативных задач упругой устойчивости. В настоящей работе исследуются задачи несимметрично неоднородных по толщине пластин на основе гипотезы Кирхгофа без условия постоянства коэффициента Пуассона [1]. Рассматриваются задачи устойчивости пластины при наличии пружины вдоль одной из длинных кромок и при жёстком закреплении и шарнирном закреплении вдоль другой.

Упругая пластинка в прямоугольной декартовой системе координат (x, y, z) занимает область $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, -h_2 \leq z \leq h_1$. Модуль Юнга E , коэффициент Пуассона μ и плотность материала ρ являются функциями координаты z . Согласно [1] изгиб тонких пластин, в соответствии с теорией Кирхгофа, описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} u = 0, \quad v = \frac{K}{C} \frac{\partial w}{\partial y} \\ D \Delta^2 w = q \\ D = D_0 - C^{-1} K^2 \end{aligned} \tag{1}$$

где q – нормальная распределённая нагрузка при сверхзвуковом обтекании газа, D – эффективная жёсткость пластинки на изгиб ($D > 0$), C – эффективная жёсткость на растяжение (сжатие):

$$\begin{aligned} K &= \int_{-h_2}^{h_1} \frac{zE}{1-\nu^2} dz \\ D_0 &= \int_{-h_2}^{h_1} \frac{z^2 E}{1-\nu^2} dz \\ C &= \int_{-h_2}^{h_1} \frac{E}{1-\nu^2} dz \end{aligned}$$

При больших сверхзвуковых скоростях, согласно «поршневой теории» [2]:

$$q = -kv \frac{dw}{dy}$$

где k – постоянная, $w = w(y)$ – прогиб пластинки, а dw/dy – местный угол атаки.

Обозначив $s = \sqrt[3]{\frac{kv}{D}}$, уравнение (1) запишем:

$$\frac{d^4 w}{dy^4} + s^3 \frac{dw}{dy} = 0 \tag{2}$$

1. Рассмотрим упругую пластинку при условиях жёсткого закрепления вдоль одной из длинных кромок и наличии пружины вдоль другой.

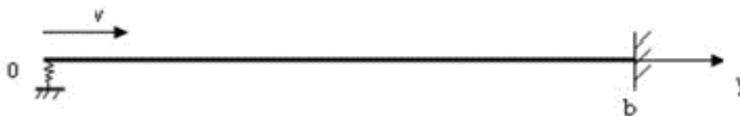


Рис.1. Схема действия воздушного потока на упругую пластинку

Пусть поток направлен параллельно невозмущённой срединной поверхности пластинки. Рассмотрим цилиндрический изгиб срединной поверхности неоднородной по толщине пластинки.

Выясним условия, при которых наряду с невозмущённой формой равновесия (неизогнутая пластинка) возможна искривленная форма равновесия, когда изгиб пластинки обусловлен соответствующими этому изгибу аэродинамическими нагрузками.

Изгибные колебания неоднородной по толщине пластинки будут описываться уравнением (2) при следующих граничных условиях:

$$\frac{d^2 w}{dy^2} = 0, \quad \frac{d^3 w}{dy^3} - \gamma_1 w = 0 \quad \text{при } y = 0 : \gamma_1 = c_1 D^{-1},$$

$$w = 0, \quad \frac{dw}{dy} = 0 \quad \text{при } y = b,$$
(1.1)

где c_1 – жёсткость пружины.

Частное решение дифференциального уравнения (2) примем в виде

$$w = Ae^{\lambda y} \quad (1.2)$$

Общее решение уравнения (2), выраженное тригонометрическими функциями, примет вид (см. стр. 37, [3])

$$w = A_1 + A_2 e^{-sy} + e^{\frac{sy}{2}} \left(A'_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} sy + A'_4 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} sy \right)$$

Из граничных условий (1.1) получим четыре уравнения относительно A_1, A_2, A'_3, A'_4 :

$$A_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} A'_3 - \frac{1}{2} A'_4 = 0,$$

$$\gamma A_1 + (1 + \gamma) A_2 + (1 + \gamma) A'_4 = 0,$$
(1.3)

$$A_1 + A_2 e^{-sb} + A'_3 e^{\frac{sb}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} sb + A'_4 e^{\frac{sb}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} sb = 0,$$

$$-A_2 e^{-sb} + A'_3 e^{\frac{sb}{2}} \left(\sin \frac{\sqrt{3}}{2} sb + \sqrt{3} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} sb \right) + A'_4 e^{\frac{sb}{2}} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} sb - \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} sb \right) = 0,$$

где $\gamma = \frac{\gamma_1}{s^3}$.

Данная система уравнений удовлетворяет нулевым значениям постоянных:

$$A_1 = A_2 = A'_3 = A'_4 = 0,$$

что соответствует тривиальному решению $w = 0$.

Определим условия существования нетривиального решения.

Решая систему уравнений (1.3) относительно переменных A_1 и A_2 , получим:

$$\left[1 - \frac{\gamma}{\sqrt{3}(1+\gamma)} e^{\frac{sb}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}sb}{2} - \frac{\gamma}{(1+\gamma)} e^{\frac{sb}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}sb}{2} \right] A_1 + \left[e^{-sb} - \sqrt{3} e^{\frac{sb}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}sb}{2} - e^{\frac{sb}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}sb}{2} \right] A_2 = 0$$
(1.4)

$$\frac{\gamma}{(1+\gamma)} \left[\cos \frac{\sqrt{3}sb}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}sb}{2} \right] A_1 + 2 \left[\cos \frac{\sqrt{3}sb}{2} + 0.5 e^{\frac{-3sb}{2}} \right] A_2 = 0$$

В случае чистого свободного края $y = 0$ ($\gamma = 0$) из второго уравнения (1.4) следует

$$\cos \frac{\sqrt{3}sb}{2} + 0.5e^{\frac{-3sb}{2}} = 0$$

что совпадает с результатами дивергенции консольной пластинки (см. стр. 38, [3]).

Решая данное уравнение, получим:

$$sb = 1,85$$

Отсюда можно найти критическую скорость потока для консольной пластинки:

$$V_{кр} = \frac{6,33D}{kb^3}$$

При этой скорости невозмущённая форма равновесия пластинки перестаёт быть устойчивой и возникает состояние дивергенции.

В случае наличия пружины ($\gamma \neq 0$), равенство нулю детерминанты системы уравнений (1.4) после преобразований даёт:

$$\cos \frac{\sqrt{3}sb}{2} + 0.5e^{\frac{-3sb}{2}} - \frac{\gamma_1}{(s^3 + \gamma_1)} (0.5e^{\frac{sb}{2}} + e^{-sb} \cos \frac{\sqrt{3}sb}{2}) = 0 \quad (1.5)$$

На Рис.2 приведено графическое решение уравнения (1.5) для пластинки шириной $b = 5$ м, где

$$\alpha = \frac{\sqrt{3}sb}{2}.$$

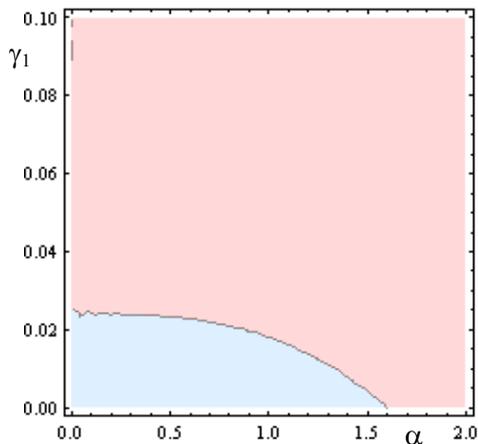


Рис.2. Графическое решение уравнения дивергенции

На Рис.3 показана поверхность, которая характеризует неустойчивые состояния упругой пластины при граничных условиях (1.1).

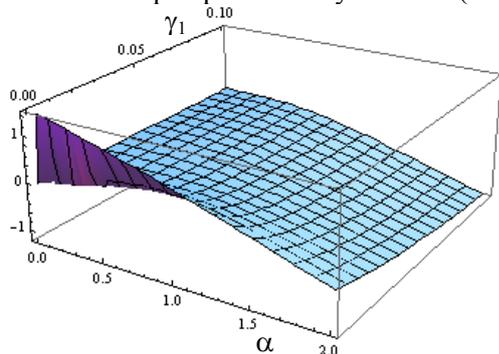


Рис.3. Состояния неустойчивости

2. Рассмотрим упругую пластинку при условиях шарнирного опирания вдоль одной из длинных кромок и наличии пружины вдоль другой.



Рис.4. Схема действия воздушного потока на упругую пластинку

Изгиб неоднородной по толщине пластинки будет описываться уравнением (2) при следующих граничных условиях:

$$\frac{d^2 w}{dy^2} = 0, \quad \frac{d^3 w}{dy^3} - \gamma_1 w = 0 \quad \text{при } y = 0 : \gamma_1 = c_1 D^{-1}, \quad (2.1)$$

$$w = 0, \quad \frac{d^2 w}{dy^2} = 0 \quad \text{при } y = b.$$

Из граничных условий (2.1) получим четыре уравнения относительно A_1, A_2, A'_3, A'_4 :

$$\begin{aligned} A_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} A'_3 - \frac{1}{2} A'_4 &= 0, \\ \gamma A_1 + (1 + \gamma) A_2 + (1 + \gamma) A'_4 &= 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$A_1 + A_2 e^{-sb} + A'_3 e^{\frac{sb}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} sb + A'_4 e^{\frac{sb}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} sb = 0,$$

$$A_2 e^{-sb} + A'_3 \frac{e^{\frac{sb}{2}}}{2} (\sqrt{3} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} sb - \sin \frac{\sqrt{3}}{2} sb) - A'_4 \frac{e^{\frac{sb}{2}}}{2} (\cos \frac{\sqrt{3}}{2} sb + \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} sb) = 0$$

Определим условие существования нетривиального решения.

Решая данную систему уравнений относительно переменных A_1 и A_2 :

$$\left[1 - \frac{\gamma}{\sqrt{3}(1+\gamma)} e^{\frac{sb}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}sb}{2} - \frac{\gamma}{(1+\gamma)} e^{\frac{sb}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}sb}{2} \right] A_1 + \left[e^{-sb} - \sqrt{3} e^{\frac{sb}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}sb}{2} - e^{\frac{sb}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}sb}{2} \right] A_2 = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{2\gamma}{\sqrt{3}(1+\gamma)} e^{\frac{sb}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}sb}{2} A_1 + \left[e^{-sb} + \sqrt{3} e^{\frac{sb}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}sb}{2} - e^{\frac{sb}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}sb}{2} \right] A_2 = 0 \quad (**)$$

Равенство нулю детерминанты системы уравнений (2.3) после преобразований даёт:

$$\begin{aligned} e^{-sb} - \left(\frac{\sqrt{3}\gamma_1}{\gamma_1 + s^3} e^{-\frac{sb}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}sb}{2} - \sqrt{3} e^{\frac{sb}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}sb}{2} \right) - \left(e^{\frac{sb}{2}} + \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + s^3} e^{-\frac{sb}{2}} \right) \cos \frac{\sqrt{3}sb}{2} + \\ + \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + s^3} e^{sb} = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

На Рис.5 приведено графическое решение уравнения (2.4).

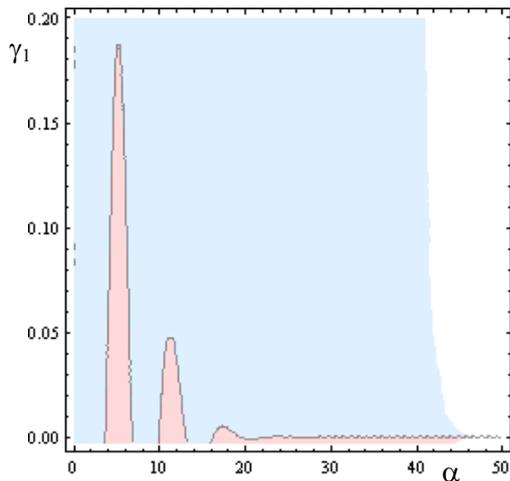


Рис.5. Графическое решение уравнения дивергенции

На Рис.6 показана поверхность, которая характеризует неустойчивое состояние упругой пластины при граничных условиях (2.1).

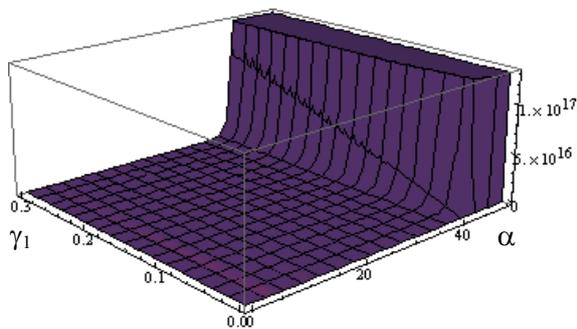


Рис.6. Состояния неустойчивости

ЛИТЕРАТУРА

1. Белубекян М. В. К вопросу колебаний неоднородной по толщине пластинки. // Изв. НАН Армении. Механика. 2002. Т.55. №3. С.34-41.
2. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961.
3. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1987. 352с.

Сведения об авторе:

Гришко Анна Микаеловна – аспирант кафедры механики, Ереванский государственный университет, факультет математики и механики. Руководитель группы отделения прочности, "МИКА - ПРОГРЕССТЕХ". (374 98) 15 28 20.

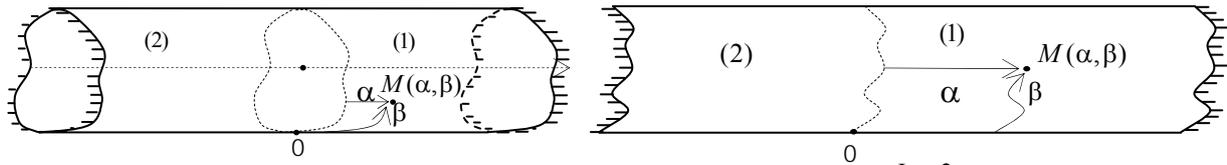
E-mail: ann.gevorgyan@gmail.com

О СВОБОДНЫХ И ИНТЕРФЕЙСНЫХ КОЛЕБАНИЯХ БЕЗМОМЕНТНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПЕРЕМЕННОЙ КРИВИЗНЫ С ЖЕСТКО ЗАЩЕМЛЕННЫМИ ТОРЦАМИ

Гулгазрян Г.Р., Миклашевич И.А.

Исследуются собственные интерфейсные колебания составных замкнутых и незамкнутых цилиндрических оболочек, составленных из конечных безмоментных ортотропных цилиндрических оболочек с разными упругими коэффициентами. Предполагается, что торцы оболочек жёстко защемлены.

Постановка задачи и некоторые математические особенности. Рассматриваются собственные интерфейсные колебания составных замкнутых и незамкнутых цилиндрических оболочек составленных из конечных безмоментных ортотропных цилиндрических оболочек с разными упругими коэффициентами. Выбор систем координат и возможные формы оболочек показаны на фиг. 1,2.



Фиг.1

Фиг.2

Здесь α ($-l^{(2)} < \alpha < l^{(1)}$) – текущая ориентированная длина образующей, а $\alpha = 0$ соответствует границе раздела свойств материала. β ($0 \leq \beta \leq s$) – текущая длина дуги направляющей кривой, s – полная длина направляющей кривой. Предполагается, что квадрат кривизны направляющей кривой составной цилиндрической оболочки можно представить в виде следующего ряда:

$$R^{-2} = k^2 \left(\frac{r_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} r_m \cos km\beta \right) \quad 0 \leq \beta \leq s, \quad \sum_{m=1}^{\infty} |r_m| < +\infty \quad (1)$$

Здесь $k = 2\pi/s$ для замкнутых цилиндрических оболочек, где s – полная длина направляющей кривой, и $k = \pi/s$ для незамкнутых цилиндрических оболочек, где s – длина направляющей кривой между шарнирно закрепленными граничными образующими. При $\alpha = 0$ ставятся условия полного контакта. Все величины, относящиеся к правой оболочке ($0 \leq \alpha \leq l^{(1)}$), отмечаются верхним индексом (1), а к левой оболочке ($-l^{(2)} \leq \alpha \leq 0$) – индексом (2). В качестве исходных уравнений, описывающих колебания оболочки, используются уравнения, соответствующие безмоментной теории ортотропных цилиндрических оболочек [1].

$$\sum_{j=1}^3 \ell_{ij}^{(r)} u_j^{(r)} = 0 \quad (i = \overline{1,3}, r = 1,2) \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \ell_{11}^{(r)} &= -B_{11}^{(r)} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - B_{66}^{(r)} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \lambda^{(r)}, \quad \ell_{12}^{(r)} = \ell_{21}^{(r)} = -(B_{12}^{(r)} + B_{66}^{(r)}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta}, \quad \ell_{23}^{(r)} = B_{22}^{(r)} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial}{R} \right) \\ \ell_{13}^{(r)} &= -\ell_{31}^{(r)} = \frac{B_{12}^{(r)}}{R} \frac{\partial}{\partial \alpha}, \quad \ell_{22}^{(r)} = -B_{66}^{(r)} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - B_{22}^{(r)} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \lambda^{(r)}, \quad \ell_{32}^{(r)} = -\frac{B_{22}^{(r)}}{R} \frac{\partial}{\partial \beta}, \quad \ell_{33}^{(r)} = \frac{B_{22}^{(r)}}{R^2} - \lambda^{(r)} \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $u_1^{(r)}, u_2^{(r)}, u_3^{(r)}$ ($r = 1,2$) – проекции вектора перемещения соответственно в направлениях α, β и нормали к поверхности оболочки: $R^{-1} = R^{-1}(\beta)$ – радиус кривизны направляющей кривой; $\lambda^{(r)} = \rho^{(r)} \omega^2$, где ω – угловая частота собственных интерфейсных колебаний, а $\rho^{(r)}$ ($r = 1,2$) – плотности материалов; $B_{ij}^{(r)}$ ($r = 1,2$) – коэффициенты упругости составляющих оболочек. Граничные условия имеют вид

$$T_1^{(1)}|_{\alpha=0} = T_1^{(2)}|_{\alpha=0}, \quad S_{12}^{(1)}|_{\alpha=0} = S_{12}^{(2)}|_{\alpha=0}, \quad u_1^{(1)}|_{\alpha=0} = u_1^{(2)}|_{\alpha=0}, \quad u_2^{(1)}|_{\alpha=0} = u_2^{(2)}|_{\alpha=0} \quad (4)$$

$$u_1^{(r)} \Big|_{\alpha=(-1)^{r-1}l^{(r)}} = 0, \quad u_2^{(r)} \Big|_{\alpha=(-1)^{r-1}l^{(r)}} = 0, \quad r = 1, 2 \quad (5)$$

$$T_2^{(r)} \Big|_{\beta=0,s} = 0, \quad u_1^{(r)} \Big|_{\beta=0,s} = 0, \quad r = 1, 2 \quad (6)$$

где $T_i^{(r)}, i = 1, 2, S_{12}^{(r)}$ – тангенциальные силы [1].

Граничные условия (4)-(5) соответствуют замкнутой цилиндрической оболочке: соотношения (4) выражают условия полного контакта при $\alpha = 0$, (5) – условия жесткого защемления на торцах $\alpha = l^{(1)}, \alpha = -l^{(2)}$ (фиг.1). Граничные условия (4)-(6) соответствуют незамкнутой цилиндрической оболочке: соотношения (6) являются условиями шарнирного закрепления по образующим $\beta = 0$ и $\beta = s$ (фиг. 2).

Любые граничные задачи, порождённые системой уравнений (2), имеют участок непрерывного спектра, совпадающий с отрезком $0 \leq \lambda^{(r)} \leq \lambda_0^{(r)}$ – множеством значений функции [2]

$$\Omega^{(r)}(\beta, \theta^{(r)}) = \frac{(B_{66}^{(r)}(B_{11}^{(r)}B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2)R^{-2}(\beta)\sin^4\theta^{(r)}}{B_{66}^{(r)}(B_{11}^{(r)}\sin^4\theta^{(r)} + B_{22}^{(r)}\cos^4\theta^{(r)}) + (B_{11}^{(r)}B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2 - 2B_{12}^{(r)}B_{66}^{(r)})\cos^2\theta^{(r)}\sin^2\theta^{(r)}} \quad (7)$$

$$0 \leq \beta \leq s, \quad 0 \leq \theta^{(r)} \leq 2\pi, \quad r = 1, 2$$

Появление этих участков непрерывного спектра является результатом нарушения эллиптичности системы (2) по Дуглису-Ниренбергу ([3], стр. 97). Эллиптичности системы не достаточно для того, чтобы задача Дирихле была корректно поставлена даже в случае однородных систем [3]. Для существования нетривиальных решений задачи (2), (4)-(5) и (2), (4)-(6) следует дополнительно потребовать выполнение вдоль границы оболочки и линии раздела материала некоторое условие алгебраического характера (условием Шапиро-Лопатинского) [3]. Доказывается, что условием Шапиро-Лопатинского на линии раздела свойств материала является [4]

$$\Omega(\beta, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}) = (S^{(1)}(\beta, \lambda^{(1)})S^{(2)}(\beta, \lambda^{(2)}))^{-1} \left\{ (B_{11}^{(1)}B_{22}^{(1)} - (B_{12}^{(1)})^2) / B_{66}^{(2)}\lambda^{(1)}Q^{(2)}(\beta, \lambda^{(2)}) + \right. \\ \left. + (B_{11}^{(2)}B_{22}^{(2)} - (B_{12}^{(2)})^2) / B_{66}^{(1)}\lambda^{(2)}Q^{(1)}(\beta, \lambda^{(1)}) \right\} + (\gamma_1^{(1)} + \gamma_2^{(1)})(\gamma_1^{(2)} + \gamma_2^{(2)})(\gamma_1^{(1)}\gamma_2^{(1)} + \gamma_1^{(2)}\gamma_2^{(2)}) - \\ - 2(\gamma_1^{(1)}\gamma_2^{(1)} - \lambda^{(1)}B_{12}^{(1)} / S^{(1)}(\beta, \lambda^{(1)}))(\gamma_1^{(2)}\gamma_2^{(2)} - \lambda^{(2)}B_{12}^{(2)} / S^{(2)}(\beta, \lambda^{(2)})) \neq 0, \quad 0 \leq \beta \leq s \quad (8)$$

$$Q^{(r)}(\beta, \lambda^{(r)}) = B_{66}^{(r)}(\lambda^{(r)} - B_{22}^{(r)}R^{-2}(\beta)) + \sqrt{B_{22}^{(r)}\lambda^{(r)}(B_{11}^{(r)}\lambda^{(r)} - (B_{11}^{(r)}B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2)R^{-2}(\beta))} \quad (9)$$

$$S^{(r)}(\beta, \lambda^{(r)}) = B_{11}^{(r)}\lambda^{(r)} - (B_{11}^{(r)}B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2)R^{-2}(\beta),$$

а $\gamma_1^{(r)}$ и $\gamma_2^{(r)}$ – корни уравнения

$$(\lambda^{(r)} - (B_{11}^{(r)}B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2)R^{-2}(\beta) / B_{11}^{(r)})(\gamma^{(r)})^4 - \lambda^{(r)}(B_{11}^{(r)}B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2 - 2B_{12}^{(r)}B_{66}^{(r)}) / (B_{11}^{(r)}B_{66}^{(r)})(\gamma^{(r)})^2 + \lambda^{(r)}B_{22}^{(r)} / B_{11}^{(r)} = 0 \quad (10)$$

с положительными действительными частями. Заметим, что для граничных условий (5) и (6) условие Шапиро-Лопатинского вне отрезка $[0, \lambda_0^{(1)} / \rho^{(1)}] \cup [0, \lambda_0^{(2)} / \rho^{(2)}]$ имеет вид

$$Q^{(r)}(\beta, \lambda^{(r)}) = B_{66}^{(r)}(\lambda^{(r)} - B_{22}^{(r)}R^{-2}(\beta)) + \sqrt{B_{22}^{(r)}\lambda^{(r)}(B_{11}^{(r)}\lambda^{(r)} - (B_{11}^{(r)}B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2)R^{-2}(\beta))} \neq 0, \quad 0 \leq \beta \leq s, r = 1, 2 \quad (11)$$

Этот факт доказывается аналогично, как в [2]. Следовательно, условие Шапиро-Лопатинского для задач (2), (4)-(5) и (2), (4)-(6) имеет вид

$$\Omega(\beta, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}) \neq 0, \quad Q^{(r)}(\beta, \lambda^{(r)}) \neq 0 \quad 0 \leq \beta \leq s, \quad r = 1, 2 \quad (12)$$

Множество значений ω^2 , при которых $\Omega(\beta, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}) = 0$ или $Q^{(r)}(\beta, \lambda^{(r)}) = 0, r = 1, 2$, обозначим через Ω , $Q^{(1)}$ и $Q^{(2)}$ соответственно.

Справедливо следующее утверждение: спектр частот задач (2), (4)-(5) и (2), (4)-(6) вне множества $\bigcup_{r=1}^2 \Omega \cup [0, \lambda_0^{(r)} / \rho^{(r)}] \cup Q^{(r)}$ состоит из изолированных собственных частот конечной кратности [3].

Вывод и анализ дисперсионных уравнений. Решение системы (2) ищем в виде

$$u_1^{(r)} = \exp((-1)^r \chi^{(r)} k \alpha) \left(\sum_{m=1}^{\infty} u_m^{(r)} \sin km \beta \right), \quad u_2^{(r)} = \exp((-1)^r \chi^{(r)} k \alpha) \left(\sum_{m=1}^{\infty} v_m^{(r)} \cos km \beta \right) \quad (13)$$

$$\frac{u_3^{(r)}}{R} = w^{(r)} = k \exp((-1)^r \chi^{(r)} k \alpha) \left(\sum_{m=1}^{\infty} w_m^{(r)} \sin km\beta \right), \quad r=1,2$$

Подставим выражения (13) в систему (2). Из первых двух уравнений (2) получим

$$\begin{aligned} C_m^{(r)} u_m^{(r)} &= (-1)^r \chi^{(r)} a_m^{(r)} w_m^{(r)}, \quad C_m^{(r)} v_m^{(r)} = m b_m^{(r)} w_m^{(r)}, \quad r=1,2 \\ a_m^{(r)} &= B_{12}^{(r)} / B_{11}^{(r)} (\chi^{(r)})^2 + B_{22}^{(r)} / B_{11}^{(r)} m^2 + B_{12}^{(r)} / B_{11}^{(r)} (\eta^{(r)})^2, \quad (\eta^{(r)})^2 = \lambda^{(r)} / (k^2 B_{66}^{(r)}) \\ b_m^{(r)} &= (B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2 - B_{12}^{(r)} B_{66}^{(r)}) / (B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}) (\chi^{(r)})^2 - B_{22}^{(r)} / B_{11}^{(r)} (m^2 - (\eta^{(r)})^2) \\ C_m^{(r)} &= (\chi^{(r)})^4 - (B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2 - 2B_{12}^{(r)} B_{66}^{(r)}) / (B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}) m^2 (\chi^{(r)})^2 + (B_{11}^{(r)} + B_{66}^{(r)}) / B_{11}^{(r)} (\eta^{(r)})^2 (\chi^{(r)})^2 + \\ &+ (m^2 - (\eta^{(r)})^2) (B_{22}^{(r)} / B_{11}^{(r)} m^2 - B_{66}^{(r)} / B_{11}^{(r)} (\eta^{(r)})^2), \quad m = \overline{1, +\infty} \end{aligned} \quad (14)$$

Из третьего уравнения системы (2), учитывая (14), придем к бесконечной системе уравнений

$$\sum_{n=1}^{\infty} (r_{|n-m|} - r_{n+m}) A_n^{(r)} w_n^{(r)} - 2B_{66}^{(r)} / B_{22}^{(r)} (\eta^{(r)})^2 w_m^{(r)} = 0, \quad m = \overline{1, +\infty}, \quad r=1,2 \quad (15)$$

$$A_n^{(r)} = P_n^{(r)} / C_n^{(r)}, \quad P_n^{(r)} = C_n^{(r)} + n^2 b_n^{(r)} - B_{12}^{(r)} / B_{22}^{(r)} (\chi^{(r)})^2 a_n^{(r)}, \quad n = \overline{1, +\infty} \quad (16)$$

Бесконечный определитель системы (15) при $\lambda^{(r)} \notin [0, \lambda_0^{(r)}]$, $r=1,2$ и в области определения коэффициентов (16) относится к классу сходящихся определителей [2]. Чтобы системы (15) имели нетривиальные решения, необходимо и достаточно, чтобы их определители равнялись нулю

$$D^{(r)}((\chi^{(r)})^2, (\eta^{(r)})^2, B_{11}^{(r)}, B_{22}^{(r)}, B_{12}^{(r)}, B_{66}^{(r)}, r_0, r_1, \dots, r_m, \dots) = 0, \quad r=1,2 \quad (17)$$

Предположим, что $\chi_1^{(r)}, \chi_2^{(r)}$ ($r=1,2$) – различные корни уравнения (17) с положительными действительными частями, тогда $\chi_3^{(1)} = -\chi_1^{(1)}, \chi_4^{(1)} = -\chi_2^{(1)}$ также являются различными корнями уравнения (17). Решения задач (2), (4)-(5) и (2), (4)-(6) ищем в виде

$$u_1^{(r)} = \sum_{j=1}^4 \sum_{m=1}^{\infty} \exp((-1)^r \chi_j^{(r)} k \alpha) u_{mj}^{(r)} \sin km\beta, \quad u_2^{(r)} = \sum_{j=1}^4 \sum_{m=1}^{\infty} \exp((-1)^r \chi_j^{(r)} k \alpha) v_{mj}^{(r)} \cos km\beta \quad (18)$$

$$w^{(r)} = k \sum_{j=1}^4 \sum_{m=1}^{\infty} \exp((-1)^r \chi_j^{(r)} k \alpha) w_{mj}^{(r)} \sin km\beta, \quad r=1,2$$

Здесь $u_{mj}^{(r)}, v_{mj}^{(r)}$ – значения $u_m^{(r)}, v_m^{(r)}$, а $(w_{1j}^{(r)}, w_{2j}^{(r)}, \dots, w_{mj}^{(r)}, \dots)$ $j=1,2$ – решения системы (15) при $\chi^{(r)} = \chi_j^{(r)}$ $j = \overline{1,4}$, $r=1,2$ соответственно. Учитывая граничные условия (4)-(5) и соотношения (14), придём к совокупности систем уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^4 \frac{R_{1j}^{(1)}}{C_{mj}^{(1)}} w_{mj}^{(1)} - \frac{B_{11}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}} \sum_{j=1}^4 \frac{R_{1j}^{(2)}}{C_{mj}^{(2)}} w_{mj}^{(2)} &= 0, \quad \sum_{j=1}^4 \frac{R_{2j}^{(1)}}{C_{mj}^{(1)}} w_{mj}^{(1)} + \frac{B_{66}^{(2)}}{B_{66}^{(1)}} \sum_{j=1}^4 \frac{R_{2j}^{(2)}}{C_{mj}^{(2)}} w_{mj}^{(2)} = 0 \\ \sum_{j=1}^4 \frac{R_{3j}^{(1)}}{C_{mj}^{(1)}} w_{mj}^{(1)} + \sum_{j=1}^4 \frac{R_{3j}^{(2)}}{C_{mj}^{(2)}} w_{mj}^{(2)} &= 0, \quad \sum_{j=1}^4 \frac{R_{4j}^{(1)}}{C_{mj}^{(1)}} w_{mj}^{(1)} - \sum_{j=1}^4 \frac{R_{4j}^{(2)}}{C_{mj}^{(2)}} w_{mj}^{(2)} = 0, \quad m = \overline{1, +\infty} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\sum_{j=1}^4 \frac{R_{3j}^{(r)}}{C_{mj}^{(r)}} \exp(z_j^{(r)}) w_{mj}^{(r)} = 0, \quad \sum_{j=1}^4 \frac{R_{4j}^{(r)}}{C_{mj}^{(r)}} \exp(z_j^{(r)}) w_{mj}^{(r)} = 0, \quad r=1,2$$

$$R_{1j}^{(r)} = (B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2 - B_{12}^{(r)} B_{66}^{(r)} (\eta_m^{(r)})^2) / (B_{11}^{(r)})^2 (x_j^{(r)})^2 + B_{12}^{(r)} B_{66}^{(r)} / (B_{11}^{(r)})^2 (1 - (\eta_m^{(r)})^2) \quad (20)$$

$$R_{2j}^{(r)} = (B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2) / (B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}) (x_j^{(r)})^3 + (B_{12}^{(r)} + B_{22}^{(r)}) / B_{11}^{(r)} (\eta_m^{(r)})^2 x_j^{(r)},$$

$$R_{3j}^{(r)} = \chi_j^{(r)} a_{mj}^{(r)}, \quad R_{4j}^{(r)} = b_{mj}^{(r)}$$

а $a_{mj}^{(r)}, b_{mj}^{(r)}, c_{mj}^{(r)}$ – значения $a_m^{(r)}, b_m^{(r)}, c_m^{(r)}$ из (14) при $\chi^{(r)} = \chi_j^{(r)}$ соответственно. Чтобы совокупность систем уравнений (19) имела решение, достаточно, чтобы совокупность уравнений

$$\Delta_m = \exp(-z_1^{(1)} - z_2^{(1)} - z_1^{(2)} - z_2^{(2)}) d_m = 0, \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (21)$$

$$d_m = \begin{vmatrix} R_{11}^{(1)} & R_{12}^{(1)} & R_{11}^{(1)} e^{z_1^{(1)}} & R_{12}^{(1)} e^{z_2^{(1)}} & -cR_{11}^{(2)} - cR_{12}^{(2)} & cR_{11}^{(2)} e^{z_1^{(2)}} & cR_{12}^{(2)} e^{z_2^{(2)}} \\ R_{21}^{(1)} & R_{22}^{(1)} & -R_{21}^{(1)} e^{z_1^{(1)}} & -R_{22}^{(1)} e^{z_2^{(1)}} & dR_{21}^{(2)} & dR_{22}^{(2)} & dR_{21}^{(2)} e^{z_1^{(2)}} & dR_{22}^{(2)} e^{z_2^{(2)}} \\ R_{31}^{(1)} & R_{32}^{(1)} & -R_{31}^{(1)} e^{z_1^{(1)}} & -R_{32}^{(1)} e^{z_2^{(1)}} & R_{31}^{(2)} & R_{32}^{(2)} & R_{31}^{(2)} e^{z_1^{(2)}} & R_{32}^{(2)} e^{z_2^{(2)}} \\ R_{41}^{(1)} & R_{42}^{(1)} & R_{41}^{(1)} e^{z_1^{(1)}} & R_{42}^{(1)} e^{z_2^{(1)}} & -R_{41}^{(2)} & -R_{42}^{(2)} & R_{41}^{(2)} e^{z_1^{(2)}} & R_{42}^{(2)} e^{z_2^{(2)}} \\ -R_{31}^{(1)} e^{z_1^{(1)}} & -R_{32}^{(1)} e^{z_2^{(1)}} & R_{31}^{(1)} & R_{32}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ R_{41}^{(1)} e^{z_1^{(1)}} & R_{42}^{(1)} e^{z_2^{(1)}} & R_{41}^{(1)} & R_{42}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{31}^{(2)} e^{z_1^{(2)}} & R_{32}^{(2)} e^{z_2^{(2)}} & R_{31}^{(2)} & R_{32}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{41}^{(2)} e^{z_1^{(2)}} & R_{42}^{(2)} e^{z_2^{(2)}} & -R_{41}^{(2)} & -R_{42}^{(2)} \end{vmatrix} \quad (22)$$

где $c = B_{11}^{(2)} / B_{11}^{(1)}$, $d = B_{66}^{(2)} / B_{66}^{(1)}$, вне множества $\bigcup_{r=1}^2 \Omega \cup [0, \lambda_0^{(r)} / \rho^{(r)}] \cup Q^{(r)}$ имела ω^2 – решение.

Выполняя элементарные действия над определителем (22), получим дисперсионные уравнения

$$d_m = m^{26} (x_2^{(1)} - x_1^{(1)})^2 (x_2^{(2)} - x_1^{(2)})^2 \text{Det} \|m_{ij}\|_{i,j=1}^8 = 0, \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (23)$$

где m_{ij} – функции, зависящие от $\eta^{(1)}$ и $\eta^{(2)}$. Уравнения (23) эквивалентны уравнениям

$$\text{Det} \|m_{ij}\|_{i,j=1}^8 = 0, \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (24)$$

При $l^{(2)} \rightarrow \infty$ уравнения (24) принимают вид:

$$\text{Det} \|m_{ij}\|_{i,j=1}^8 = \text{Det} \|m_{ij}\|_{i,j=1}^6 \text{Det} \|m_{ij}\|_{i=7,8}^{j=7,8} + \sum_{j=1}^2 O(\exp(z_j^{(2)})) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (25)$$

При $l^{(1)} \rightarrow \infty$ имеем асимптотическую формулу

$$\text{Det} \|m_{ij}\|_{i,j=1}^6 = \text{Det} \|m_{ij}\|_{i=5,6}^{j=3,4} \cdot \text{Det} \|m_{ij}\|_{i=1,2,3,4}^{j=1,2,5,6} + \sum_{j=1}^2 O(\exp(z_j^{(1)})), \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (26)$$

Из-за того, что оболочка закреплена на торцах $\alpha = -l^{(2)}$, $\alpha = l^{(1)}$, имеем

$$\text{Det} \|m_{ij}\|_{i=5,6}^{j=3,4} = Q^{(1)}(\eta_m^{(1)}, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}), \quad \text{Det} \|m_{ij}\|_{i=7,8}^{j=7,8} = Q^{(2)}(\eta_m^{(2)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)}) \quad (27)$$

$$Q^{(r)}(\eta_m^{(r)}, x_1^{(r)}, x_2^{(r)}) = \gamma_1^{(r)} (x_1^{(r)})^2 (x_2^{(r)})^2 + \gamma_2^{(r)} x_1^{(r)} x_2^{(r)} + \gamma_3^{(r)} ((x_1^{(r)})^2 + (x_2^{(r)})^2) + \gamma_4^{(r)}, \quad r=1,2$$

$$\gamma_1^{(r)} = B_{12}^{(r)} (B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2 - B_{12}^{(r)} B_{66}^{(r)}) / ((B_{11}^{(r)})^2 B_{66}^{(r)}) \quad (28)$$

$$\gamma_2^{(r)} = -(B_{22}^{(r)} (B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2) + B_{12}^{(r)} (B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2 - B_{12}^{(r)} B_{66}^{(r)} - B_{22}^{(r)} B_{66}^{(r)}) (\eta_m^{(r)})^2) / ((B_{11}^{(r)})^2 B_{66}^{(r)})$$

$$\gamma_3^{(r)} = -B_{12}^{(r)} B_{22}^{(r)} / (B_{11}^{(r)})^2 (1 - (\eta_m^{(r)})^2), \quad \gamma_4^{(r)} = -B_{22}^{(r)} / B_{11}^{(r)} (1 - (\eta_m^{(r)})^2) (B_{22}^{(r)} / B_{11}^{(r)} + B_{12}^{(r)} / B_{11}^{(r)} (\eta_m^{(r)})^2)$$

Учитывая (25)-(27), уравнения (24) можно написать в виде

$$\text{Det} \|m_{ij}\|_{i,j=1}^8 = Q^{(1)}(\eta_m^{(1)}, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) \cdot Q^{(2)}(\eta_m^{(2)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)}) \cdot \text{Det} \|m_{ij}\|_{i=1,2,3,4}^{j=1,2,5,6} + \sum_{j=1}^2 O(\exp(z_j^{(2)})) + \sum_{j=1}^2 O(\exp(z_j^{(1)})) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (29)$$

При больших $l^{(1)}$ и $l^{(2)}$ уравнения (24) распадаются на уравнения:

$$\text{Det} \|m_{ij}\|_{i=1,2,3,4}^{j=1,2,5,6}, \quad Q^{(1)}(\eta_m^{(1)}, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) = 0, \quad Q^{(2)}(\eta_m^{(2)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)}) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (30)$$

Первые уравнения из (30) являются дисперсионными уравнениями интерфейсных колебаний замкнутой бесконечной составной цилиндрической оболочки ($k=2\pi/s$) или незамкнутой составной цилиндрической оболочки ($k=\pi/s$), когда граничные образующие шарнирно закреплены.

При больших m , ω^2 – корни второго и третьего уравнений из (30), по-видимому, принадлежат зоне непрерывного спектра $Q^{(1)} \cup Q^{(2)}$ [2].

Рассматриваются следующие частные случаи.

Случай а): $R^{-2}(\beta) \equiv 0$ ($r_m = 0, m = \overline{0, +\infty}$), исследуются планарные интерфейсные колебания составной пластины-полосы и составной прямоугольной пластины.

Случай б): $R^{-2} = k^2 r_0 / 2$ ($r_m = 0, m = \overline{1, +\infty}$), исследуются интерфейсные колебания безмоментных круговых замкнутых и незамкнутых конечных составных цилиндрических оболочек.

Случай в): $R^{-2} = k^2 (r_0 / 2 + r_1 \cos k\beta)$, $r_m = 0, m = \overline{2, +\infty}$, исследуются интерфейсные колебания безмоментных некруговых конечных составных замкнутых и незамкнутых цилиндрических оболочек. Для случаев а) и б) характеристические уравнения (17) распадаются на уравнения, соответственно

$$(\chi^{(r)})^4 - ((B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2 - 2B_{12}^{(r)} B_{66}^{(r)}) / (B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}) m^2 - (B_{11}^{(r)} + B_{66}^{(r)}) / B_{11}^{(r)} (\eta^{(r)})^2) (\chi^{(r)})^2 + (31)$$

$$+ (m^2 - (\eta^{(r)})^2) (B_{22}^{(r)} / B_{11}^{(r)} m^2 - B_{66}^{(r)} / B_{11}^{(r)} (\eta^{(r)})^2) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty}, \quad r = 1, 2$$

$$r_{mm}^{(r)} = ((\eta^{(r)})^2 - r_0 (B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2) / (2B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)})) (\chi^{(r)})^4 - (\eta^{(r)})^2 ((B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2 - 2B_{12}^{(r)} B_{66}^{(r)}) / (B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}) m^2 - (32)$$

$$- (B_{11}^{(r)} + B_{66}^{(r)}) / B_{11}^{(r)} (\eta^{(r)})^2 + r_0 (B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2 + B_{22}^{(r)} B_{66}^{(r)}) / (2B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)})) (\chi^{(r)})^2 +$$

$$+ (\eta^{(r)})^2 (m^2 - (\eta^{(r)})^2) (B_{22}^{(r)} / B_{11}^{(r)} m^2 - B_{66}^{(r)} / B_{11}^{(r)} (\eta^{(r)})^2 + r_0 B_{22}^{(r)} / (2B_{11}^{(r)})) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty}, \quad r = 1, 2$$

В случае в) для $\chi^{(r)}$ - корней уравнения (17) выведены приближённые формулы

$$\chi_j^{(r)} = ((\chi_{mj}^{(r)})^2 + \alpha_{mj}^{(r)} r_1^2)^{1/2}, \quad (j = 1, 2) \quad (33)$$

где $\chi_{mj}^{(r)}$ ($j = 1, 2$) – корни уравнения (32) с положительными действительными частями, а

$$\alpha_{mj}^{(r)} = P_m^{(r)} (P_{m-1}^{(r)} r_{m+1m+1}^{(r)} + P_{m+1}^{(r)} r_{m-1m-1}^{(r)}) / (r_{m-1m-1}^{(r)} r_{m+1m+1}^{(r)} r_{mm}^{(r)'}) \Big|_{\chi^{(r)} = \chi_{mj}^{(r)}} \quad j = 1, 2, \quad r = 1, 2 \quad (34)$$

где $r_{mm}^{(r)'}$ – производная по $(\chi^{(r)})^2$.

Для нахождения характеристик собственных частот $\eta^{(1)} / m$ и $\eta^{(2)} / m$ в любом случае можно использовать дисперсионные уравнения (24). Доказана асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемых задач и аналогичных задач для составной пластинки – полосы и составной прямоугольной пластинки соответственно.

Численные исследования показывают эффективность полученных асимптотических формул. Работа выполнена при поддержке гранта “БРФФИ–ГКН Арм. 2011” №Ф11АРМ-010 / 11РБ-007.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. М.: Гос.изд.физ.мат.лит, 1961. 384с.
2. Гулгазарян Г.Р. Колебания безмоментной консольной незамкнутой ортотропной цилиндрической оболочки переменной кривизны // Изв. АН РФ. МГТ. 2007. №1. С.84-99.
3. Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 383с.
4. Гулгазарян Г.Р., Гулгазарян Л.Г., Миклашевич И.А., Плетежов А.А, Хачаян А.А. Свободные интерфейсные колебания бесконечной безмоментной цилиндрической оболочки с произвольной направляющей // Вестник ФФИ. 2012. № 1. С.44-65.

Сведения об авторах:

Гулгазарян Гурген Рубенович, профессор, доктор физ.-мат. наук. АГПУ им. Х. Абовяна. Проф. кафедры мат. анализа и теории функций. Тигран Мец 17, 0010, Ереван, Армения. Тел.: (+37410) 649121, (+37491) 706700. **E-mail:** ghulgr@yahoo.com

Миклашевич Игорь Александрович, Доцент, доктор физ.-мат. наук. БНТУ. Заведующий лабораторией динамики систем и механики материалов. Пр. Независимости 65. Минск, Белорусь. Тел. (+37517) 2472430, (+37517) 2939322. **E-mail:** miklashevich@rambler.ru

СОБСТВЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК В ЗОНЕ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ПРИ УСЛОВИЯХ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Гулгазарян Л.Г.

Рассматриваются собственные пространственные колебания ортотропных оболочек в зоне пограничного слоя при условиях первой краевой задачи. Выведены характеристические уравнения для определения скоростей убывания функций плоского и антиплоского пограничных слоев при удалении от боковой поверхности во внутрь оболочки. Приведены первые некоторые численные значения для скорости затухания функций пограничного слоя.

Один из эффективных методов решения неклассических задач на нахождение собственных частот и форм колебаний пластин и оболочек оказался асимптотический метод. Поскольку один из геометрических размеров оболочки резко отличается от остальных, при переходе к безразмерным координатам в уравнениях и соотношениях трехмерной задачи появляется малый геометрический параметр. Эти преобразованные уравнения являются сингулярно возмущенными, их решения складываются из решений внутренней задачи и пограничных слоев [1,2]. При асимптотическом методе решения принимается, что влияние пограничного слоя, построенного вблизи одной кромки, не ощущается на другой. Несмотря на то, что пограничный слой локализован вблизи торцов, в общем случае, пограничный слой через граничные условия при $\alpha = \alpha_0, \alpha_1$ влияет на решение внутренней задачи [2-4].

В работе получены асимптотические решения неклассических краевых задач о собственных колебаниях ортотропных оболочек в зоне пограничного слоя при условиях первой краевой задачи на лицевых поверхностях. Решение внутренней задачи приведено в работе [5].

Рассмотрим собственные колебания в зоне пограничного слоя вблизи боковой поверхности $\alpha = \alpha_0$ ортотропной оболочки толщины $2h: D = \{\alpha, \beta, \gamma; \alpha, \beta \in D_0, -h \leq \gamma \leq h\}$, где D_0 – срединная поверхность, α, β – линии кривизны срединной поверхности оболочки, γ – прямолинейная ось, направленная перпендикулярно к срединной поверхности. Требуется найти решения динамических уравнений теории упругости в выбранной триортогональной системе координат в зоне пограничного слоя, когда на лицевых поверхностях $\gamma = \pm h$ оболочки заданы условия [2]:

$$\tau_{\alpha\gamma}(h) = 0, \quad \tau_{\beta\gamma}(h) = 0, \quad \tau_{\gamma\gamma}(h) = 0 \quad (1)$$

$$\tau_{\alpha\gamma}(-h) = 0, \quad \tau_{\beta\gamma}(-h) = 0, \quad \tau_{\gamma\gamma}(-h) = 0 \quad (2)$$

Для упрощения выкладок используем компоненты несимметричного тензора напряжений τ_{ij} [2,3]. Перейдем к безразмерным компонентам вектора перемещения $U = Ru, V = Rv, W = Rw$, где R – характерный размер оболочки (наименьший из радиусов кривизны и линейных размеров срединной поверхности), $\varepsilon = h/R$ – малый параметр, и введем новые независимые переменные по формулам $\alpha - \alpha_0 = h\xi, \beta = R\eta, \gamma = h\zeta$. Разложим величины

$$\frac{1}{A}, \frac{1}{B}, k_\alpha = \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta}, k_\beta = \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha}, \quad (3)$$

$$\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}, 2H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, K = \frac{1}{R_1 R_2}$$

в ряд Тейлора вблизи $\alpha = \alpha_0$, предполагая, что они удовлетворяют условиям разложения. Если Q – любое из этих величин, то

$$Q = Q_n (\alpha - \alpha_0)^n = Q_n R^n \varepsilon^n \xi^n \quad (4)$$

Q_n – коэффициент тейлоровского разложения, по немому индексу “n” происходит суммирование в пределах $[0, +\infty)$.

Решение преобразованной системы уравнений будем искать в виде

$$Q_{\alpha\beta} = Q_{jk}(\xi, \eta, \zeta) \exp(i\omega t) \quad (\alpha, \beta, \gamma); \quad j, k = 1, 2, 3$$

В результате получим сингулярно возмущенную малым параметром ε систему относительно Q_{jk} , решение которой ищем в виде асимптотического представления [1, 3]

$$\begin{aligned} \tau_{jk}(\xi, \eta, \zeta) &= \varepsilon^{-1+s} \tau_{jk}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad j, k = 1, 2, 3; \quad \omega_* = \varepsilon^s \omega_*^{(s)}, \quad s = \overline{0, N} \\ (u(\xi, \eta, \zeta), v(\xi, \eta, \zeta), w(\xi, \eta, \zeta)) &= \varepsilon^s (u^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), v^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), w^{(s)}(\xi, \eta, \zeta)) \end{aligned} \quad (5)$$

и припишем всем искомым величинам индекс b (от слова boundary).

Получается следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} A_0 \frac{\partial \tau_{11b}^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{13b}^{(s)}}{\partial \zeta} + c^{(j)} u_b^{(s-j)} &= R_{1\tau}^{(s-1)} \quad (11b, 12b, 13b; 13b, 23b, 33b; u, v, w; 1\tau, 2\tau, 3\tau) \\ A_0 \frac{\partial u_b^{(s)}}{\partial \xi} - \sum_{1b}^{(s)} &= R_u^{(s-1)}, \quad \sum_{2b}^{(s)} = R_v^{(s-1)}, \quad \frac{\partial w_b^{(s)}}{\partial \zeta} - \sum_{3b}^{(s)} = R_w^{(s-1)}, \quad A_0 = A(\alpha_0) \\ \frac{\partial v_b^{(s)}}{\partial \zeta} - a_{44} \tau_{23b}^{(s)} &= R_{4\tau}^{(s-1)}, \quad A_0 \frac{\partial w_b^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial u_b^{(s)}}{\partial \zeta} - a_{55} \tau_{13b}^{(s)} = R_{5\tau}^{(s-1)}, \quad c^{(j)} = \sum_{n=0}^j \omega_{*(j-n)} \omega_{*(n)} \\ A_0 \frac{\partial v_b^{(s)}}{\partial \xi} - a_{66} \tau_{12b}^{(s)} &= R_{6\tau}^{(s-1)}, \quad \tau_{12b}^{(s)} - \tau_{21b}^{(s)} = R_{7\tau}^{(s-1)}, \quad j = \overline{0, s}, \quad \sum_{ib}^{(s)} = a_{i1} \tau_{11b}^{(s)} + a_{i2} \tau_{22b}^{(s)} + a_{i3} \tau_{33b}^{(s)} \end{aligned} \quad (6)$$

где $R_{i\tau}^{(s-1)}, R_u^{(s-1)} (u, v, w)$ – функции, известные для каждого приближения, если известны величины предыдущих приближений, в частности, $R_{i\tau}^{(k)} (i\tau, u, v, w) \equiv 0$ при $k < 0$.

Из системы (6) компоненты тензора напряжений выражаются через $u_b^{(s)}, v_b^{(s)}, w_b^{(s)}$:

$$\begin{aligned} \tau_{23b}^{(s)} &= \frac{1}{a_{44}} \left[\frac{\partial v_b^{(s)}}{\partial \zeta} - R_{4\tau}^{(s-1)} \right], \quad \tau_{12b}^{(s)} = \frac{1}{a_{66}} \left[A_0 \frac{\partial v_b^{(s)}}{\partial \xi} - R_{6\tau}^{(s-1)} \right], \quad \tau_{12b}^{(s)} - \tau_{21b}^{(s)} = R_{7\tau}^{(s-1)} \\ \tau_{13b}^{(s)} &= \frac{1}{a_{55}} \left[A_0 \frac{\partial w_b^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial u_b^{(s)}}{\partial \zeta} - R_{5\tau}^{(s-1)} \right] \end{aligned} \quad (7)$$

$$\tau_{11b}^{(s)} = \frac{1}{\Delta} \left[\left(A_0 \frac{\partial u_b^{(s)}}{\partial \xi} - R_u^{(s-1)} \right) \Delta_{23} + R_v^{(s-1)} \Delta_1 + \left(\frac{\partial w_b^{(s)}}{\partial \zeta} - R_w^{(s-1)} \right) \Delta_2 \right] \quad (8)$$

$$(11b, 22b, 33b; \Delta_{23}, \Delta_1, \Delta_2; \Delta_1, \Delta_{13}, \Delta_3; \Delta_2, \Delta_3, \Delta_{12})$$

а для определения компонент вектора перемещения получаются уравнения

$$\frac{1}{a_{66}} A_0^2 \frac{\partial^2 v_b^{(s)}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{a_{44}} \frac{\partial^2 v_b^{(s)}}{\partial \zeta^2} + c^{(j)} v_b^{(s-j)} = T_v^{(s-1)}, \quad j = \overline{0, s} \quad (9)$$

$$\frac{\Delta_{23}}{\Delta} A_0^2 \frac{\partial^2 u_b^{(s)}}{\partial \xi^2} + A_0 \left(\frac{\Delta_2}{\Delta} + \delta_1 \right) \frac{\partial^2 w_b^{(s)}}{\partial \xi \partial \zeta} + \frac{1}{a_{55}} \frac{\partial^2 u_b^{(s)}}{\partial \zeta^2} + c^{(j)} u_b^{(s-j)} = T_u^{(s-1)} \quad (10)$$

$$(u, w; \Delta / \Delta_{23}, a_{55}; a_{55}, \Delta / \Delta_{12})$$

Уравнение (9) и соотношения (7) описывают антиплоский, а (8) и (10) – плоский пограничные слои. Особый интерес представляет исходное приближение. При $s = 0$ правые части уравнений (9) и (10) обращаются в нуль.

Решение уравнения (9) при $s = 0$ будем искать в виде

$$v_b^{(0)}(\xi, \eta, \zeta) = \exp(-\lambda_a \xi) C^{(0)}(\eta) v_{1b}^{(0)}(\zeta) \quad (11)$$

После подстановки выражения (11) в уравнение (9), получим однородное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 v_{1b}^{(0)}(\zeta)}{\partial \zeta^2} + (\omega_{*0}^2 + \frac{A_0^2}{a_{66}} \lambda_a^2) a_{44} v_{1b}^{(0)}(\zeta) = 0 \quad (12)$$

общее решение которого имеет вид

$$v_{1b}^{(0)}(\zeta) = C_1^{(0)} \sin \alpha_a \zeta + C_2^{(0)} \cos \alpha_a \zeta, \quad \alpha_a = \sqrt{a_{44}(\omega_{*0}^2 + A_0^2 / a_{66} \lambda_a^2)} \quad (13)$$

Индекс a означает, что λ_a относится к антиплоскому пограничному слою.

Удовлетворив соответствующим граничным условиям (1), (2), получим

$$\sin 2\alpha_a = 0 \Rightarrow \lambda_{ank} = \pm \sqrt{\frac{a_{66}}{A_0^2} \left(\frac{\pi^2 k^2}{4a_{44}} - \omega_{*0n}^2 \right)} \quad (14)$$

В силу свойства пограничного слоя необходимо ограничиться значениями λ_{ank} с $\operatorname{Re} \lambda_{ank} > 0$. Собственными функциями будут

$$v_{bnk}^{(0)}(\xi, \eta, \zeta) = C^{(0)}(\eta) \exp(-\lambda_{ank} \xi) \cos \frac{\pi n}{2} (1 - \zeta) \quad (15)$$

Из системы уравнений (10) получим следующее уравнение для определения $u^{(0)}$:

$$B_1 \frac{\partial^4 u_b^{(0)}}{\partial \xi^4} + B_2 \frac{\partial^4 u_b^{(0)}}{\partial \zeta^4} + B_3 \frac{\partial^4 u_b^{(0)}}{\partial \xi^2 \partial \zeta^2} + B_4 \frac{\partial^2 u_b^{(0)}}{\partial \xi^2} + B_5 \frac{\partial^2 u_b^{(0)}}{\partial \zeta^2} + \omega_{*0}^4 u_b^{(0)} = 0 \quad (16)$$

$$B_1 = A_0^4 \Delta_{23} / (\Delta a_{55}), \quad B_2 = \Delta_{12} / (\Delta a_{55}), \quad B_3 = \left((\Delta_{23} \Delta_{12} - \Delta_2^2) / \Delta^2 - 2\Delta_2 / (\Delta a_{55}) \right) A_0^2 \\ B_4 = (\Delta_{23} / \Delta + 1 / a_{55}) A_0^2 \omega_{*0}^2, \quad B_5 = (\Delta_{12} / \Delta + 1 / a_{55}) \omega_{*0}^2 \quad (17)$$

решение которого будем искать в виде

$$u_b^{(0)}(\xi, \eta, \zeta) = K_b^{(0)}(\eta) \exp(-\lambda_p \xi + k \zeta) \quad (18)$$

при этом, $w_b^{(0)}$ имеет вид

$$w_b^{(0)}(\xi, \eta, \zeta) = LK_b^{(0)}(\eta) \exp(-\lambda_p \xi + k \zeta) \quad (19)$$

где L – неопределенный пока множитель, k – корень характеристического уравнения

$$B_2 k^4 + (\lambda_p^2 B_3 + B_5) k^2 + \lambda_p^4 B_1 + \lambda_p^2 B_4 + \omega_{*0}^4 = 0 \quad (20)$$

$$B_1 = \frac{\Delta_{23}}{\Delta a_{55}} A_0^4, \quad B_2 = \frac{\Delta_{12}}{\Delta a_{55}}, \quad B_3 = \left(\frac{\Delta_{23} \Delta_{12} - \Delta_2^2}{\Delta^2} - 2 \frac{\Delta_2}{\Delta a_{55}} \right) A_0^2$$

$$B_4 = \left(\frac{\Delta_{23}}{\Delta} + \frac{1}{a_{55}} \right) A_0^2 \omega_{*0}^2, \quad B_5 = \left(\frac{\Delta_{12}}{\Delta} + \frac{1}{a_{55}} \right) \omega_{*0}^2$$

Отсюда следует

$$k_{1,2}^2 = (-\lambda_p^2 B_3 - B_5 \pm \sqrt{D}) / (2B_2) \quad (21)$$

$$D = \lambda_p^4 (B_3^2 - 4B_1 B_2) + 2\lambda_p^2 (B_3 B_5 - 2B_2 B_4) + B_5^2 - 4B_2 \omega_{*0}^4$$

$$L_i = \frac{\Delta_{23} a_{55} \lambda_p^2 A_0^2 + \Delta k_i^2 + \Delta a_{55} \omega_{*0}^2}{(\Delta + \Delta_2 a_{55}) \lambda_p k_i}$$

В результате решение уравнения (16) примет вид

$$u_b^{(0)}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^4 K_{ib}^{(0)}(\eta) \exp(-\lambda_p \xi + k_i \zeta), \quad w_b^{(0)}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^4 L_i K_{ib}^{(0)}(\eta) \exp(-\lambda_p \xi + k_i \zeta) \quad (22)$$

После удовлетворения граничным условиям (1), (2), для определения λ_p скорости затухания плоского погранслоя получим характеристическое уравнение

$$(Q_3 S_2 - Q_2 S_3)(Q_4 S_1 - Q_1 S_4)(-e^{2(k_2+k_3)} - e^{2(k_1+k_4)}) + \\ (Q_3 S_1 - Q_1 S_3)(Q_4 S_2 - Q_2 S_4)(e^{2(k_1+k_3)} + e^{2(k_2+k_4)}) + \\ (Q_2 S_1 - Q_1 S_2)(Q_4 S_3 - Q_3 S_4)(-e^{2(k_1+k_2)} - e^{2(k_3+k_4)}) = 0 \quad (23)$$

где

$$S_i = k_i L_i \Delta_{12} - \lambda_p A_0 \Delta_2, \quad Q_i = k_i - \lambda_p A_0 L_i, \quad i = \overline{1, 4}.$$

Таблица

	n	$\omega_{*0n}^{uI} = \frac{\pi n}{\sqrt{a_{55}}}$	$\omega_{*0n}^{vI} = \frac{\pi n}{\sqrt{a_{44}}}$	$\omega_{*0n}^{wI} = \pi n \sqrt{\frac{\Delta_{12}}{\Delta}}$
		<i>Плоский пограничный слой</i>		
	1	1.05711+0.97062 i 2.60787+0.38827 i 2.65092 2.70138 4.55707	0.38353 +0.38298 i 1.00791 +0.92545 i 2.3821 2.66292 2.86419 +0.46373 i	2.22182 +0.49151 i 3.77563 +0.61706 i 5.01937 5.61415 6.21244 +0.640544 i
	2	1.34253 2.11422+1.94124 i 2.50158 3.15255+0.38907 i 5.2346 +0.388056 i	1.09407 1.39518 2.01583 +1.8509 i 2.65927 3.25828 +0.46353i	1.74313 2.87217 4.32938 4.89114 5.74031
	3	1.72682 3.17133+2.91186 i 3.30778+0.55038 i 4.88523 5.42548	1.80438 +0.44054 i 3.54119 +0.58683 i 4.94387 5.525 5.91171 +0.49363 i	3.3375 4.88738 +0.440789 i 6.84313 +0.393789 i 8.42684 +0.350404 i 9.90658 +0.509547 i
<i>Антиплоский пограничный слой</i>				
	1	$\lambda_{a13} = 3.0439$	$\lambda_{a13} = 3.17349$	$\lambda_{a16} = 2.75083$
		$\lambda_{a14} = 4.83371$	$\lambda_{a14} = 4.91635$	$\lambda_{a17} = 5.80962$
$\lambda_{a15} = 6.44148$		$\lambda_{a15} = 6.50371$	$\lambda_{a18} = 7.9978$	
	2	$\lambda_{a25} = 3.86071$	$\lambda_{a25} = 4.25768$	$\lambda_{a212} = 5.50166$
		$\lambda_{a26} = 6.08781$	$\lambda_{a26} = 6.34698$	$\lambda_{a213} = 8.97905$
<i>Плоский пограничный слой</i>				
	n	$\omega_{*0n}^{uII} = \frac{\pi(2n+1)}{2\sqrt{a_{55}}}$	$\omega_{*0n}^{vII} = \frac{\pi(2n+1)}{2\sqrt{a_{44}}}$	$\omega_{*0n}^{wII} = \frac{\pi(2n+1)}{2} \sqrt{\frac{\Delta_{12}}{\Delta}}$
	0	0.528554+0.48531 i 1.35896 +0.701745 i 2.1918 2.69547 3.5877 +0.601633 i	0.165073 0.503957 +0.462725 i 1.40192 +0.688479 i 2.19136 2.69319	1.43081 +1.31375 i 1.43725 +0.496721 i 2.48515 3.07911 4.2511 +0.659071 i
	1	1.43229 1.58566 +1.45593 i 2.34813 3.02877 3.9729 +0.703922i	1.18536 +0.213173 i 2.42165 3.05769 4.10739 +0.691125 i 4.86638	2.70304 3.37737 4.22116 4.82793 5.92541 +0.537677 i
	2	2.59438 +0.409678 i 4.09823 +0.659438 i 5.1174 5.70191 6.61338 +0.702251 i	1.075 +0.307352 i 2.75023 +0.357461 i 4.30039 +0.673766 i 5.16778 5.73211	3.11106 3.50331 4.53924 6.0589 +0.494543 i 7.67901 +0.543092 i
<i>Антиплоский пограничный слой</i>				
	1	$\lambda_{a14} = 3.50523$	$\lambda_{a14} = 3.75492$	$\lambda_{a19} = 4.12624$
		$\lambda_{a15} = 5.51493$	$\lambda_{a15} = 5.67691$	$\lambda_{a110} = 7.43611$
$\lambda_{a16} = 7.25057$		$\lambda_{a16} = 7.37452$	$\lambda_{a111} = 9.87897$	
	2	$\lambda_{a26} = 4.13772$	$\lambda_{a26} = 4.70704$	$\lambda_{a215} = 6.87707$
		$\lambda_{a27} = 6.58068$	$\lambda_{a27} = 6.95276$	$\lambda_{a216} = 10.4754$

Каждому значению ω_{*0} будет соответствовать счетное множество λ_a и λ_p . Таким образом, каждому собственному значению ω_{*0} соответствует свое семейство пограничных функций. При этом, собственные колебания одного типа порождают в пограничном слое колебания и другого типа.

В таблице приведены первые некоторые значения скорости затухания пограничных слоев оболочки из стеклопластика 2:1 с характеристиками $v_{12} = 0.105$, $v_{23} = 0.431$, $v_{31} = 0.405$,

$E_1 = 36 \cdot 10^3 \text{ МПа}$, $E_2 = 26.3 \cdot 10^3 \text{ МПа}$, $E_3 = 10.8 \cdot 10^3 \text{ МПа}$, $G_{12} = 4.9 \cdot 10^3 \text{ МПа}$,
 $G_{23} = 4 \cdot 10^3 \text{ МПа}$, $G_{13} = 4.4 \cdot 10^3 \text{ МПа}$. ω_{*0n}^{ij} , (u, v, w) , $j = I, II$ являются собственными частотами колебаний [5]. Построение приближений $s \geq 1$ осуществляется аналогично, как и в [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512с.
2. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 414с.
3. Агаловян Л.А., Гулгазарян Л.Г. Асимптотические решения неклассических краевых задач о собственных колебаниях ортотропных оболочек.//ПММ. 2006. Т.70. Вып.1. С.111–125.
4. Агаловян Л.А., Гулгазарян Л.Г. Неклассические краевые задачи о вынужденных колебаниях ортотропных оболочек.//Международный научный журнал “Прикладная механика”. 2009. Т.45. №8. С.105-122.
5. Гулгазарян Л.Г. Асимптотика собственных колебаний ортотропных оболочек при условиях первой краевой задачи на лицевых поверхностях. //Сб. научн. трудов межд. конф.: Актуальные проблемы механики сплошной среды. Ереван: 2010. Т.1. С.224–228.

Сведения об авторе

Гулгазарян Лусине Гургеновна – кандидат физ.-мат. наук, доцент,
старший научный сотрудник Института механики НАН РА
Адрес: пр. Маршала Баграмяна 24^Б, 0019, Ереван, Армения
Тел: (+37410) 61-81-55; (+37491) 30-25-54; E-mail: lusina@mail.ru

О КРУЧЕНИИ УПРУГО-ПОЛЗУЧЕГО РАЗНОВОЗРАСТНОГО КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО ЦИЛИНДРА КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Давтян З.А., Гаспарян А.В.

Рассматривается задача об определении напряжённо-деформированного состояния упруго-ползучего разнородного кусочно-однородного цилиндра конечной длины, на торцах которого приложены крутящие нагрузки произвольной интенсивности.

Предполагается, что конечный круглый цилиндр состоит из любого конечного числа различных цилиндров, спаянных между собой торцами. Принимается, что контактирующие элементы изготовлены из разных материалов в разные моменты времени, вследствие чего имеют разные возрасты.

Определение характеристик напряжённо-деформированного состояния составных упругих и упруго-ползучих тел представляет теоретический и практический интерес. В этом направлении укажем на работы [1,2,3].

В настоящей работе в рамках теории ползучести неоднородно наследственно стареющих тел Н.Х. Арутюняна [4,5] рассматривается задача о кручении кусочно-однородного круглого цилиндра конечной длины, состоящего из произвольного конечного числа цилиндров, обладающих свойствами ползучести, изготовленных из разнородных неоднородно наследственно стареющих материалов.

При помощи конечного преобразования Ханкеля задача сводится к решению конечно-разностного неоднородного уравнения второго порядка, содержащего операторы по временным и по пространственным координатам. Полученные формулы позволяют определить требуемые контактные напряжения и другие механические характеристики задачи, связанные с разнородностью контактирующих цилиндров.

1. Пусть круглый упруго-ползучий цилиндр конечной длины l и радиуса a представляет собой пакет из n цилиндров различных длин $l_{k-1} \leq z \leq l_k$ с мгновенными модулями сдвига $G_k(t)$, спаянных торцами между собой. Будем считать, что контактирующие цилиндры обладают свойствами ползучести и имеют разные возрасты. Пусть далее, в момент времени τ_0 такой композит скручивается произвольными тангенциальными усилиями интенсивностей $q_0(r, t)$ и $q_n(r, t)$, приложенными к крайним торцам составного цилиндра, т.е.

$$\tau_{z\varphi}(r, z, t) \Big|_{z=l_0} = q_0(r, t), \quad \tau_{z\varphi}(r, z, t) \Big|_{z=l_n} = q_n(r, t) \quad (0 < r < a) \quad (1.1)$$

Для вывода определяющих уравнений поставленной задачи рассмотрим k -ый элемент пакета. Для этого элемента имеем следующую упруго-мгновенную граничную задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V_k}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_k}{\partial r} - \frac{V_k}{r^2} + \frac{\partial^2 V_k}{\partial z^2} = 0 \\ G_k(t) \frac{\partial V_k}{\partial z} \Big|_{z=l_{k-1}} = q_{k-1}(r, t), \quad G_k(t) \frac{\partial V_k}{\partial z} \Big|_{z=l_k} = q_k(r, t) \\ V_k(a, z, t) = 0 \\ (0 < r < a, \quad l_{k-1} \leq z < l_k, \quad k = \overline{1, n}) \end{cases} \quad (1.2)$$

где $V_k = V_k(r, z, t)$, $(k = \overline{1, n})$ – единственная отличная от нуля компонента смещений в окружном направлении при кручении, а $q_{k-1}(r, t)$ и $q_k(r, t)$ – пока неизвестные касательные контактные напряжения на торцах $z = l_{k-1}$ и $z = l_k$, $(k = \overline{2, n-1})$ цилиндра.

Для решения граничной задачи (1.2) введём в рассмотрение трансформанты Фурье-Ханкеля [6]:

$$\{\bar{V}_k(z, \lambda_m, t); \bar{q}_k(\lambda_m, t)\} = \int_0^a \{V_k(r, z, t); q_k(r, t)\} r J_1(r \lambda_m) dr \quad (1.3)$$

где $J_1(x)$ – функция Бесселя первого рода индекса 1, а λ_m – корни уравнения $J_1(a\lambda_m) = 0$.

При помощи (1.3) в трансформантах Фурье-Ханкеля граничная задача (1.2) примет вид

$$\begin{cases} \frac{d^2 \bar{V}_k}{dz^2} - \lambda_m^2 \bar{V}_k = 0 & (l_{k-1} < z < l_k, \quad k = \overline{1, n}) \\ G_k \frac{d\bar{V}_k}{dz} \Big|_{z=l_{k-1}} = \bar{q}_{k-1}, \quad G_k \frac{d\bar{V}_k}{dz} \Big|_{z=l_k} = \bar{q}_k, \end{cases} \quad (1.4)$$

где $\bar{V}_k = \bar{V}_k(z, \lambda_m, t)$, $\bar{\tau}_k = \bar{\tau}_k(\lambda_m, t)$.

Решение краевой задачи (1.4) имеет вид

$$\bar{V}_k = \bar{V}_k(z, \lambda_m, t) = A_k(t) \operatorname{ch}(\lambda_m z) + B_k(t) \operatorname{sh}(\lambda_m z) \quad (l_{k-1} \leq z \leq l_k), \quad (1.5)$$

где коэффициенты $A_k(t)$ и $B_k(t)$ определяются из граничных условий (1.4) и имеют вид

$$A_k(t) = \frac{\bar{q}_k \operatorname{ch}(\lambda_m l_{k-1}) - \bar{q}_{k-1} \operatorname{ch}(\lambda_m l_k)}{\lambda_m G_k \operatorname{sh}(\lambda_m d_k)}, \quad B_k(t) = \frac{\bar{q}_{k-1} \operatorname{sh}(\lambda_m l_k) - \bar{q}_k \operatorname{sh}(\lambda_m l_{k-1})}{\lambda_m G_k \operatorname{sh}(\lambda_m d_k)} \quad (k = \overline{1, n}) \quad (1.6)$$

где $d_k = l_k - l_{k-1}$ – высота k -ого цилиндра

Теперь условия непрерывности смещений на линии контакта ($z = l_k$) двух цилиндров с учётом ползучести принимают вид

$$(I - L_k) \bar{V}_k = (I - L_{k+1}) \bar{V}_{k+1}, \quad (k = \overline{1, n-1}) \quad (1.7)$$

Здесь

$$L_i[y(t)] = \int_{\tau_0}^t G_i(u) K_i[t + \rho_i, u + \rho_i] y(u) du$$

$$K_i[t, u] = \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{G_i(u)} + \omega(t, u) \right] \quad i = \overline{1, n-1} \quad \rho_i = \tau_i - \tau_0$$

где $\omega(t, u)$ – мера ползучести при сдвиге, τ_i – возраст i -ого цилиндра, а смысл остальных параметров, хорошо известных в теории ползучести, пояснены в [4].

Далее, принимая во внимание соотношения (1.5) и (1.6), условия контакта (1.7) запишутся в форме:

$$(I - L_k) \frac{\bar{q}_{k-1} - \bar{q}_k \operatorname{ch}(\lambda_m d_k)}{G_k(t) \operatorname{sh}(\lambda_m d_k)} = (I - L_{k+1}) \frac{\bar{q}_k \operatorname{ch}(\lambda_m d_{k+1}) - \bar{q}_{k+1}}{G_{k+1}(t) \operatorname{sh}(\lambda_m d_{k+1})}, \quad (k = \overline{1, n-1}) \quad (1.8)$$

Теперь вводя обозначения

$$a_k(t) = \frac{1}{G_k(t) \operatorname{sh}(\lambda d_k)}, \quad b_k(t) = \frac{\operatorname{cth}(\lambda d_k)}{G_k(t)}, \quad \lambda = \lambda_m \quad k = \overline{1, n}$$

уравнения (1.8) можно свести к конечно-разностным уравнениям второго порядка [7]

$$(I - L_k)(a_k(t) \bar{q}_{k-1} - b_k(t) \bar{q}_k) = f_k(t) \quad (1.9)$$

$$(I - L_{k+1})(a_{k+1}(t) \bar{q}_{k+1} - b_{k+1}(t) \bar{q}_k) = g_{k+1}(t) \quad (k = \overline{1, n-1}) \quad (1.10)$$

При условиях

$$f_k(t) + g_{k+1}(t) = 0, \quad k = \overline{1, n-1} \quad (1.11)$$

уравнения (1.9) и (1.10) можно представить таким образом:

$$a_k(t) \bar{q}_{k-1} - b_k(t) \bar{q}_k = (I + R_k) f_k(t) \quad (1.12)$$

$$a_{k+1}(t)\bar{q}_{k+1} - b_{k+1}(t)\bar{q}_k = (I + R_{k+1})g_{k+1}(t) \quad (k = \overline{1, n-1}) \quad (1.13)$$

Здесь $R_s(t, u)$ – резольвента ядра $K_s(t, u)$ ($s = \overline{1, n-1}$)

Таким образом, решение поставленной здесь задачи сводится к решению конечно-разностных уравнений первого порядка (1.12) и (1.13). После того как построены решения этих уравнений, при помощи обратного преобразования Фурье-Ханкеля определяются контактные напряжения в композите.

2. Решение конечно-разностных уравнений первого порядка (1.12) и (1.13) построим известным методом [2,7], которые представим в виде

$$\bar{q}_k(\lambda, t) = [1 - P(k, t)]\bar{q}_{k-1}(\lambda, t) + Q(k, t). \quad (2.1)$$

Здесь

$$P(k, t) = \frac{b_k(t) - a_k(t)}{b_k(t)}, \quad Q(k, t) = -\frac{(I + R_k)f_k(t)}{b_k(t)} \quad k = \overline{1, n-1}.$$

Поступая аналогичным образом, как в работе [7], находим общее решение (2.1)

$$\bar{q}_k = -\prod_{j=1}^k [1 - P(j, t)] \left\{ \sum_{i=1}^k \frac{(I + R_i)f_i(t)}{b_i(t) \prod_{r=1}^i [1 - P(r, t)]} - \bar{q}_0 \right\}, \quad k = \overline{1, n-1} \quad (2.2)$$

Совершенно аналогичным образом решение уравнения (1.13) представим в виде

$$\bar{q}_k = -\prod_{j=k}^{n-1} \frac{1}{1 - \tilde{P}(j, t)} \left\{ \sum_{i=k}^{n-1} \frac{(I + R_{i+1})g_{i+1}(t)}{a_{i+1}(t) \prod_{r=i+1}^{n-1} [1 - \tilde{P}(r, t)]} - \bar{q}_n \right\}. \quad (2.3)$$

Здесь

$$\tilde{P}(k, t) = \frac{(a_{k+1}(t) - b_{k+1}(t))}{a_{k+1}(t)}, \quad k = \overline{1, n-1}.$$

Теперь, приравнявая выражения (2.2) и (2.3) и учитывая (1.11) относительно неизвестных $f_i(t)$, $i = \overline{1, n-1}$, получим систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода:

$$A_k(t)(I + R_k)f_k(t) + \sum_{i=1}^{k-1} A_i(t) \frac{C_i}{C_k} (I + R_i)f_i(t) + \sum_{i=k}^{n-1} B_i(t) \frac{D_{i+1}}{D_k} (I + R_{i+1})f_{i+1}(t) = \frac{\bar{q}_0(\lambda, t)}{C_k} - \frac{\bar{q}_n(\lambda, t)}{D_k}, \quad (k = \overline{1, n-1}) \quad (2.4)$$

Здесь введены обозначения:

$$A_i(t) = G_i(t) \text{th}(\lambda d_i), \quad (i = \overline{1, k}), \quad B_i(t) = G_{i+1}(t) \text{sh}(\lambda d_{i+1}), \quad (i = \overline{k, n-1})$$

$$C_i = \prod_{r=1}^i \text{ch}(\lambda d_r), \quad (i = \overline{1, k}), \quad D_i = \prod_{r=i}^{n-1} \text{ch}(\lambda d_{r+1}), \quad (i = \overline{k, n-1})$$

После решения определяющей системы интегральных уравнений (2.4), из уравнений (1.12) и (1.13) определяются функции $\bar{q}_k(\lambda, t)$, а затем при помощи обратного преобразования Фурье-Ханкеля определяются контактные касательные напряжения $q(r, t)$ и другие характеристики напряжённого состояния композита.

3. Частный случай. Рассмотрим частный случай, когда композит состоит из двух разнородных цилиндров, т.е. $n = 2$. В данном случае для определения контактных напряжений согласно (1.8) получим следующие интегральные уравнения Вольтерра второго рода:

$$\Delta(\lambda, t) \bar{q}_1(\lambda, t) - \int_{\tau_0}^t \{ \Delta_1(\lambda, \tau) K_1(t, \tau) + \Delta_2(\lambda, \tau) K_2(t, \tau) \} \bar{q}_1(\lambda, \tau) d\tau = F(\lambda, t) \quad (3.1)$$

где

$$\Delta_1(\lambda, t) = G_2(t) \operatorname{sh} \lambda d_2 \operatorname{ch} \lambda d_1 \quad \Delta_2(\lambda, t) = G_1(t) \operatorname{sh} \lambda d_1 \operatorname{ch} \lambda d_2 \quad \Delta(\lambda, t) = \Delta_1(\lambda, t) + \Delta_2(\lambda, t)$$

$$F(\lambda, t) = \left(\frac{\Delta_1(\lambda, t)}{\operatorname{ch} \lambda d_1} \bar{q}_0(\lambda, t) + \frac{\Delta_2(\lambda, t)}{\operatorname{ch} \lambda d_2} \bar{q}_2(\lambda, t) \right) - \int_{\tau_0}^t \left\{ \frac{\Delta_1(\lambda, \tau)}{\operatorname{ch} \lambda d_1} \bar{q}_0(\lambda, \tau) K_1(t, \tau) + \frac{\Delta_2(\lambda, \tau)}{\operatorname{ch} \lambda d_2} \bar{q}_2(\lambda, \tau) K_2(t, \tau) \right\} d\tau.$$

Для решения интегрального уравнения (3.1) меры ползучести контактирующих материалов примем в форме [4]

$$\omega_i(t, \tau) = \varphi_i(\tau) [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}] \quad (i = 1, 2) \quad (3.2)$$

где $\varphi_1(\tau)$, $\varphi_2(\tau)$ – функции старения материалов. В дальнейшем примем также, что

$$G_1(t) = G_1 = \text{const}, \quad G_2(t) = G_2 = \text{const}.$$

Далее, интегральное уравнение (3.1) можно свести к дифференциальному уравнению с переменными коэффициентами, или методом дискретизации можно свести к системам линейных уравнений.

Рассмотрим частный случай внешней нагрузки. Предположим, что в момент времени $t = \tau_0$ к крайним торцам цилиндра прилагается сосредоточенная кольцевая сила величины Q_0 , которая затем остается постоянной во времени. Тогда, $q_0(r, t) = q_2(r, t) = Q_0 \delta(r - r_0) H(t - \tau_0)$. Здесь $\delta(r)$ – дельта-функция Дирака, $H(t)$ – единичная функция Хевисайда.

При указанной нагрузке получим:

$$\bar{q}_1(\lambda, t) = \frac{T(\lambda, r_0) M(\lambda)}{\Delta(\lambda)} \left\{ 1 + \frac{\gamma N(\lambda) (\operatorname{ch} \lambda d_1 - \operatorname{ch} \lambda d_2)}{\Delta(\lambda)} (G_1 \varphi_1(\tau_0) - G_2 \varphi_2(\tau_2)) \int_{\tau_0}^t e^{-\eta(\lambda, \tau)} d\tau \right\}$$

$$T(\lambda, r_0) = Q_0 r_0 J_1(r_0 \lambda), \quad N(\lambda) = \frac{G_1 G_2 \operatorname{sh} \lambda d_1 \operatorname{sh} \lambda d_2}{M(\lambda)}$$

$$M(\lambda) = \frac{\operatorname{ch} \lambda d_2 \Delta_1(\lambda) + \operatorname{ch} \lambda d_1 \Delta_2(\lambda)}{\operatorname{ch} \lambda d_1 \operatorname{ch} \lambda d_2}, \quad \eta(\lambda, t) = \int_{\tau_0}^t A(\lambda, \tau) d\tau, \quad A(\lambda, u) = \gamma - \frac{K^*(\lambda, u)}{\Delta(\lambda)} \quad (3.3)$$

$$K^*(\lambda, u) = \gamma (\Delta_1(\lambda) \varphi_1(u) + \Delta_2(\lambda) \varphi_2(u))$$

Отсюда при помощи обратного преобразования Ханкеля можно определить контактные напряжения

$$q_1(r, t) = \frac{2}{a^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(r \lambda_i) \bar{q}_1(\lambda_i, t)}{[J_1'(a \lambda_i)]^2} = \frac{2}{a^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{T(\lambda, r_0) M(\lambda)}{\Delta(\lambda_i)} \left\{ 1 + \frac{\gamma N(\lambda) (\operatorname{ch} \lambda d_1 - \operatorname{ch} \lambda d_2)}{\Delta(\lambda_i)} \times \right. \\ \left. \times (G_1 \varphi_1(\tau_0) - G_2 \varphi_2(\tau_2)) \int_{\tau_0}^t e^{-\eta(\lambda_i, \tau)} d\tau \right\} \frac{J_1(r \lambda_i)}{[J_1'(a \lambda_i)]^2} \quad (3.4)$$

Из (3.4) видно, что когда деформации ползучести двух контактирующих цилиндров, вызванные постоянным напряжением, приложенным к торцам цилиндра в один и тот же момент времени (соответственно в возрасте τ_0 и τ_2), пропорциональны их упругим деформациям, т.е. $G_1\varphi_1(\tau_0) = G_2\varphi_2(\tau_2)$, решение поставленной задачи совпадает с решением соответствующей упругой задачи. Отметим также, что при равных высотах цилиндров $d_1 = d_2$ опять получается чисто упругое решение.

Работа выполнена в рамках гранта 11-2с450 Госкомитета по науке Министерства образования и науки РА.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В.З. Метод начальных функций в задачах теории упругости.// Изв. АН СССР. ОТН. 1955. № 7. С.49–69.
2. Гаспарян А.В., Мхитарян С.М. О напряжённом состоянии композита в виде пакета из произвольного конечного числа упругих слоёв при антиплоской деформации. //Изв.НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. № 2. С.10-20.
3. Гаспарян А.В., Давтян З.А. О напряжённом состоянии композита в виде пакета из произвольного конечного числа упругих круговых цилиндров при антиплоской деформации.//В сб. научных трудов Международной конференции: “Актуальные проблемы механики сплошной среды. 4-8 октября, Дилижан, Армения, Т.1. С.167-171.
4. Арутюнян Н.Х., Колмановский В.Б. Теория ползучести неоднородных сред. М.: Наука, 1983. 336 с.
5. Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В. Контактные задачи теории ползучести. Ереван: 1999. 320с.
6. Снеддон И. Преобразования Фурье. М.: Госиноиздат, 1955. 667с.
7. Гельфонд Н.О. Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967. 375 с.

Сведения об авторах:

Давтян Завен Азибекович – кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, Институт механики НАН Армении, (374 10) 52-48-90

E-mail: anush@mechins.sci.am

Гаспарян Ануш Вараздатовна – младший научный сотрудник, Институт механики НАН Армении, (374 10) 52-48-90

E-mail: anush@mechins.sci.am

ВЛИЯНИЕ РАЗМЕРА И МЕСТОПОЛОЖЕНИЯ ОТВЕРСТИЯ В ДИАФРАГМАХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ЗДАНИЙ НА ИХ НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ

Дадаян Т. Л., Григорян Д. Г.

В статье показано влияние наличия отверстий на напряжённно-деформированное состояние железобетонных диафрагм и здания в целом. При этом рассматривались различные схемы расположения отверстий при действии вертикальных и горизонтальных нагрузок. Расчёты проводились с помощью программного комплекса Лира 9.6, основанного на методе конечных элементов. Результаты расчёта показывают, каким образом различные параметры отверстий влияют на напряжённно-деформированное состояние железобетонных диафрагм каркасно-связевых зданий, которые на данный момент являются основной конструктивной системой, применяемой для строительства новых многоэтажных зданий в РА.

В железобетонных каркасно-связевых зданиях основными элементами, воспринимающими горизонтальную (сейсмическую или ветровую) нагрузку, являются железобетонные диафрагмы, жёсткость которых во много раз больше жёсткости железобетонных колонн. Наличие отверстий в диафрагмах приводит к уменьшению их жёсткости, при этом в отдельных случаях к резкому изменению напряжений в отдельных её частях [1, 2, 3]. В угловых частях диафрагм появляются концентрации напряжений, приводящие к появлению трещин даже при не очень сильных землетрясениях. При проектировании зданий часто возникает необходимость устройства отверстий в диафрагмах, при этом конструкторы располагают отверстия по своему усмотрению, без учёта каких либо ограничений. Поэтому необходимо выявить наиболее характерные недостатки того или иного расположения отверстий, учитывая как их месторасположение, так и относительные размеры.

В представленной статье рассмотрено влияние размеров отверстий в диафрагмах, расположенных на первом (нижнем) этаже многоэтажного здания на её деформативность и несущую способность.

В качестве примера рассмотрены шестиэтажные двухпролётные железобетонные каркасные здания с диафрагмами жёсткости. Высота каждого этажа принята равным 3.3 м, пролет – 6 м. Сечение колонн постоянное по высоте здания и принято равным 50x50 см, для ригелей 50x55 см. Для всех элементов здания принят бетон класса В25. Диафрагмы жёсткости для всех случаев равны 20 см.

Для сравнительного анализа, как несущей способности, так и деформативности здания рассмотрены 3 случая. В первом примере длина проёма составляет 2 м, во втором – 3 м, а в третьем – 4 м. Проёмы в остальных этажах приняты одинаковыми, равными 1x2.2 м, причём, для всех трёх зданий. Размеры проёмов для нижнего этажа приняты такими какие главным образом применяются при проектировании каркасно-связевых зданий в РА. Широкие отверстия в нижних этажах зданий обусловлены устройством автостоянок, требующие достаточного места.

Расчёты проводились для третьей сейсмической зоны и для второй категории грунтов [4] по первому и второму предельным состояниям. Постоянные и временные (длительные и кратковременные) нагрузки были приняты типовыми, как для жилых зданий.

При расчёте по несущей способности согласно полученным расчётным сочетаниям усилий определено необходимое количество арматуры для всех несущих элементов зданий. Особый интерес представляют колонны и диафрагмы жёсткости, причём, для нижних этажей. Результаты расчёта арматуры и процента армирования для колонн на каждом этаже представлено в табл. 1.

Как видно из табл.1, размеры проёмов являются главным фактором, влияющим на увеличение процента армирования в нижних сечениях колонн многоэтажных зданий. Увеличение ширины проема с 2-х метров до 4-х в нашем случае приводит к резкому увеличению армирования в 2.4 раза в сечении крайних колонн на уровне обреза фундамента. В средних колоннах при тех же параметрах увеличение армирования в тех же сечениях составляет 3.6 раз, но для крайних колонн увеличение процента армирования превышает допустимые пределы и возникает проблема свободного размещения продольной арматуры. В средних же колоннах увеличение продольной арматуры находится в приемлемых пределах.

Таблица 1

Здание		крайняя колонна	средняя колонна	крайняя колонна	средняя колонна	крайняя колонна	средняя колонна
этаж		1 этаж		2 этаж		3 этаж	
Здание 1 (проём 2м)	$A_s, \text{см}^2$	38.0	7.9	17.6	0	13.6	1
	$\mu, \%$	1.52	0.31	0.70	0	0.55	0.04
Здание 2 (проём 3м)	$A_s, \text{см}^2$	64.3	14.0	17.6	0	17.5	1.0
	$\mu, \%$	2.57	0.56	0.70	0	0.70	0.04
Здание 3 (проём 4м)	$A_s, \text{см}^2$	90.2	28.5	27.0	0	18.0	1.52
	$\mu, \%$	3.61	1.18	1.08	0	0.72	0.06
этаж		4 этаж		5 этаж		6 этаж	
Здание 1 (проём 2м)	$A_s, \text{см}^2$	8.5	1.0	2.8	1.0	0.5	1.0
	$\mu, \%$	0.34	0.04	0.11	0.04	0.02	0.04
Здание 2 (проём 3м)	$A_s, \text{см}^2$	10.0	1.52	4.52	1.0	1.0	1.0
	$\mu, \%$	0.40	0.06	0.04	0.18	0.04	0.04
Здание 3 (проём 4м)	$A_s, \text{см}^2$	10.5	2.0	4.52	1.52	1.0	1.0
	$\mu, \%$	0.42	0.08	0.18	0.06	0.04	0.04

Площадь сечения арматуры A_s колонн и их процент армирования μ для разных этажей рассматриваемых зданий

На рис.1 показано напряжённо-деформированное состояние (в виде мозаики напряжения σ_x) двух зданий: один – с отверстием 2 м, второй – с отверстием 4 м. При этом, по контрасту видно, как резко увеличиваются напряжения в диафрагмах, особенно в местах концентрации напряжений (в угловых местах соединения диафрагм с колоннами и в углах самих диафрагм). Даже на глаз видно резкое увеличение перемещений на уровне перекрытия первого этажа.

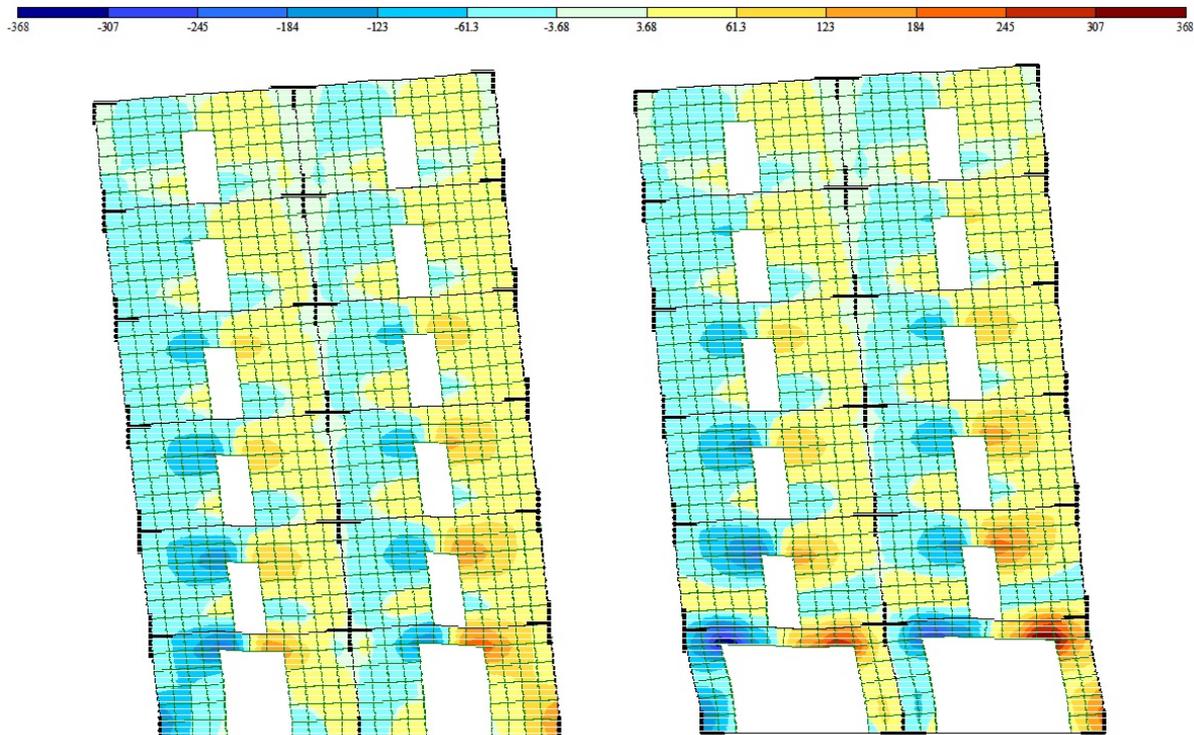


Рис.1. Мозаика нормальных напряжений σ_x и деформированные модели для зданий с проёмами 2 и 4 м

Поскольку здания рассматриваются в одной плоскости, то полученные нами проценты армирования имеют скорее ориентировочный характер, поскольку для пространственной системы учёт сейсмического воздействия по всем трём направлениям привёл бы к резкому увеличению армирования. А при обычной стержневой арматуре подобные проценты армирования (свыше 4%) не допустимы в реальном проектировании железобетонных колонн в сейсмоопасных районах [4]. Но именно плоская задача из анализа численных примеров позволяет оценивать влияние размеров отверстия на несущую способность железобетонных диафрагм и колонн.

Как видно из табл.1, армирование резко возрастает только на первых двух этажах, а на остальных этажах влияние нижнего отверстия сказывается незначительно. Главным параметром, влияющим на увеличение армирования в верхних этажах является увеличение деформативности здания. Уменьшение жёсткости зданий приводит к изменению периодов колебаний.

Вопросы деформативности также имеют первостепенное значение. Уменьшение жёсткости на первом этаже может привести к резкому отличию от жёсткости на последующих этажах. В строительных нормах разных стран не допускается большая разница в жёсткости соседних этажей. Последствия гибкого первого этажа зданий после землетрясений показало все отрицательные особенности данного явления. Для оценки изменения деформативности зданий определены как перемещения по высоте зданий табл. 2, так и перекосы этажей табл. 3.

Таблица 2

Здание	x = 3.3м	x = 6.6м	x = 9.9м	x = 13.2м	x = 16.5м	H = 19.8м
Здание 1 (проём 2м)	0.736	1.582	2.499	3.436	4.329	5.126
Здание 2 (проём 3м)	1.091	2.032	3.022	4.025	4.978	5.832
Здание 3 (проём 4м)	1.930	3.005	4.109	5.212	6.260	7.201

Перемещения зданий при сейсмическом воздействии на уровне перекрытий, мм

Таблица 3

Здание	1 этаж	2 этаж	3 этаж	4 этаж	5 этаж	6 этаж
Здание 1 (проём 2м)	0.736	0.846	0.917	0.937	0.893	0.797
Здание 2 (проём 3м)	1.091	0.941	0.990	1.003	0.953	0.854
Здание 3 (проём 4м)	1.930	1.075	1.104	1.103	1.048	0.941

Перекосы этажей зданий при сейсмическом воздействии, мм

Как видно из табл. 2 и 3, перемещение на уровне перекрытия первого этажа возрастает в 2.6 раз, а на уровне покрытия в 1.4 раза. Перекос первых этажей показывает, что увеличение ширины отверстия в 4 м недопустимо, поскольку значение перекоса превышает допустимые значения по [4]. Для верхних этажей здания 3 перекосы равны предельно допустимым значениям. Для зданий 1 и 2 перекосы всех этажей находятся в допустимых пределах. Часто, при реальном проектировании для обеспечения перекоса на уровне нижних этажей при больших отверстиях в диафрагмах проектировщики увеличивают толщину диафрагм. Но даже такое увеличение не решает проблему с большими процентами армирования в колоннах, в тоже время перекосы приближаются к предельно допустимым значениям. При широких проёмах и больших толщинах диафрагм система на нижних этажах скорее превращается в рамную систему, и тем самым, снижается так называемая «статическая неопределимость» системы, и в конечном счёте появляется риск хрупкого разрушения в отдельных элементах конструкций [1, 5]. По этой причине необходимо ограничить не только уменьшение относительной жёсткости этажа, но и относительный размер отверстия, т.е. отношение размера проёма к общей площади диафрагмы, расположенной между двумя соседними колоннами в пределах одного этажа, тем самым, предотвращая возможность хрупкого разрушения. При этом,

необходимо обозначить минимальные расстояния до начала отверстия в диафрагме, как это существует для каменных зданий, и, тем самым, уточнить как максимальные размеры отверстий так и их местоположение в диафрагмах железобетонных зданий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Железобетонные стены сейсмостойких зданий: Исследования и основы проектирования / под ред. Г.Н. Ашкинадзе и М.Е. Соколова. М.: Стройиздат, 1988. 504с.
2. РСН 13-87 Строительство монолитных зданий в сейсмических районах Молдавской ССР. Госстрой Молдавской ССР – Кишинев: Тимпул, 1988. 108с.
3. Измайлов Ю.В. Сейсмостойкие монолитные здания – Кишинев: Картя Молдовеняскэ, 1989. 290с.
4. СНРА II-6.02-2006 Сейсмостойкое строительство. Ереван: МГРА, 2006.
5. Powell Gr. H. Modeling for Structural Analyses, Behavior and Basics, CSI, 2010.365p.

Сведения об авторах:

Дадаян Тигран Леонидович – кандидат технических наук, доцент кафедры Строительные Конструкции, Ереванский государственный университет архитектуры и строительства, факультет промышленное и гражданское строительство, Тел.: (374 93) 54 39 11

E-mail: sapce@rambler.ru

Григорян Давид Гамлетович – кандидат технических наук, ассистент кафедры Строительные Конструкции, Ереванский государственный университет архитектуры и строительства, факультет промышленное и гражданское строительство, Тел.: (374 93) 57 87 96

E-mail: davit-grigoryan@yandex.com

ЭЛЕКТРОУПРУГИЕ ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ ЛЯВА В СЛОИСТОЙ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ ПРИ НАЛИЧИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЭКРАНА

Даноян З.Н., Атоян Л.А., Саакян С.Л., Даноян Н.З.

В данной работе в квазистатическом приближении исследуются электроупругие поверхностные волны типа Лява в слоистой структуре, состоящей из пьезоэлектрической полубесконечной подложки, диэлектрического слоя, жёстко закреплённого с ней и примыкающей к слою без акустического контакта диэлектрической среды (или вакуума), ограниченной с другой стороны электрическим или магнитным экраном.

Из общего дисперсионного уравнения легко получаются дисперсионные соотношения, соответствующие различным важным частным случаям, которые совпадают с аналогичными уравнениями из других работ [2-6]. Проведено численное исследование для конкретных материалов и различных слоистых структур, а также построены соответствующие графики.

1. Постановка задачи. В слоистой упругой системе, состоящей из упругого пьезоэлектрического полупространства кристаллического класса симметрии $6mm$ или $4mm$, с жёстко примыкающим к нему изотропным диэлектрическим слоем конечной толщины h_2 и диэлектрической среды (или вакуума) толщиной h_3 при наличии экрана электрического или магнитного поля. Диэлектрическая среда примыкает к слою без акустического контакта. Декартовы оси координат выбраны так, как показано на рис.1.

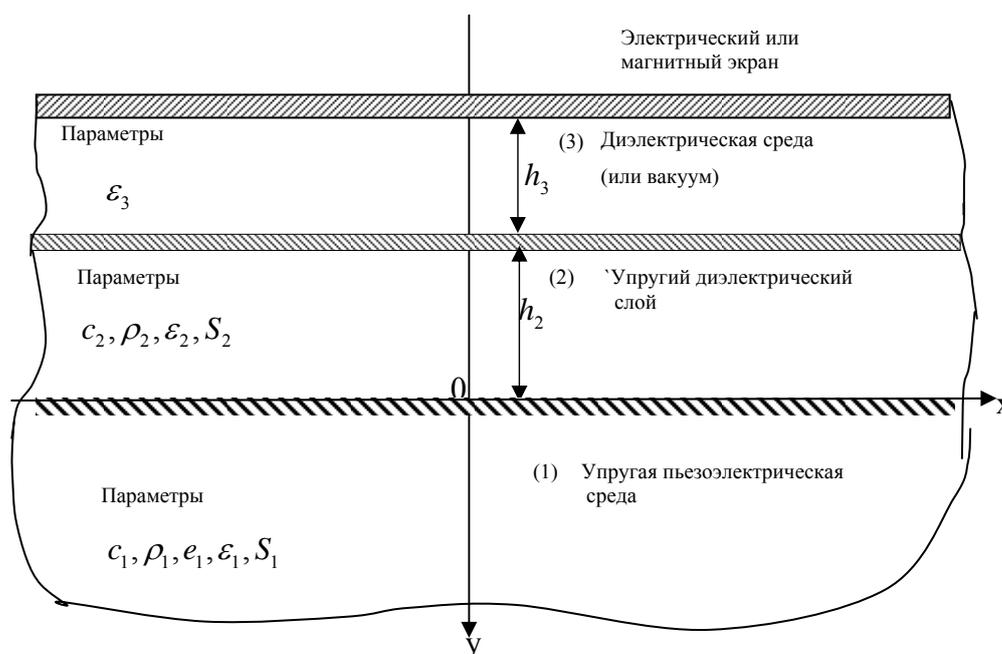


Рис.1.

На рис.1 показаны параметры, относящиеся к антиплоскому деформационному состоянию, c_i — упругие постоянные, ρ_i — плотности масс, S_i — скорости объёмных волн ($i = 1, 2$), ϵ_i — диэлектрические постоянные ($i = 1, 2, 3$), e_1 — пьезомодуль подложки. Впредь также величины, относящиеся к подложке, слою и диэлектрической среде, будут индексироваться цифрами 1, 2 и 3 соответственно.

Для рассматриваемой в работе антиплоской задачи состояние слоистой структуры в квазистатическом приближении описывается следующими электроупругими параметрами:

$$u_1 = u_2 = 0, u_3 = w(x, y, t), \varphi = \varphi(x, y, t), \quad (1.1)$$

где $\{u_i\}$ – вектор перемещений, φ – потенциал электрического поля. Диэлектрическая среда между слоем и экраном характеризуется квазистатическим потенциалом $\varphi_3 = \varphi_3(x, y, t)$, которое также как и потенциал в слоистой системе определяется соотношением

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi, \quad (1.2)$$

где \vec{E} – вектор напряжённости электрического поля. Предполагается, что главная ось пьезоэлектрика (L_6 или L_4) параллельна оси Oz .

При указанных выше предположениях, волновой процесс во всей слоистой структуре будет описываться следующими уравнениями:

а) уравнения в подложке ($y > 0$):

$$\begin{cases} \nabla^2 w_1 = \frac{1}{S_1^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}, \\ \nabla^2 \psi_1 = 0, \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \end{cases} \quad (1.3)$$

б) уравнения в диэлектрическом слое ($-h_2 < y < 0$):

$$\begin{cases} \nabla^2 w_2 = \frac{1}{S_2^2} \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2}, \\ \nabla^2 \varphi_2 = 0; \end{cases} \quad (1.4)$$

в) уравнение в диэлектрической среде ($-(h_2 + h_3) < y < -h_2$):

$$\nabla^2 \varphi_3 = 0. \quad (1.5)$$

Выше использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \varphi_1 - \frac{e_{15}^{(1)}}{\varepsilon_{11}^{(1)}} w_1; c_{44}^{(1)} = c_1, c_{44}^{(2)} = c_2, \\ e_{15}^{(1)} &= e_1, \varepsilon_{11}^{(i)} = \varepsilon_i (i=1, 2, 3), \frac{e_1}{\varepsilon_1} = \bar{e}_1, \\ c_1 + \frac{e_1^2}{\varepsilon_1} &= \bar{c}_1, \bar{c}_1 = c_1 (1 + \chi_1^2); \chi_1^2 = \frac{e_1^2}{\varepsilon_1 c_1} \\ R_1^2 &= \frac{e_1^2}{\varepsilon \bar{c}_1} = \frac{\chi_1^2}{1 + \chi_1^2}, S_1^2 = \frac{\bar{c}_1}{\rho_1} = S_{10}^2 (1 + \chi_1^2), \\ S_{10}^2 &= \frac{c_1}{\rho_1}, S_2 = \frac{c_2}{\rho_2}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $c_{44}^{(1)}$ и $c_{44}^{(2)}$ – упругие постоянные, $e_{15}^{(1)}$ – пьезоэлектрическая постоянная подложки, $\varepsilon_{11}^{(1)}, \varepsilon_{11}^{(2)}, \varepsilon_{11}^{(3)}$ – диэлектрические постоянные, ρ_1 и ρ_2 – плотности масс, R_1^2 – коэффициент электромеханической связи. Граничные условия, условия непрерывности, а также условия затухания при $y \rightarrow +\infty$ представляются соотношениями:

1. Условия непрерывности при $y = 0$:

$$w_1 = w_2, \sigma_{23}^{(1)} = \sigma_{23}^{(2)}, \psi_1 + \bar{e}_1 w_1 = \varphi_2, D_2^{(1)} = D_2^{(2)}. \quad (1.7)$$

2. Граничные условия при $y = -h_2$:

$$\sigma_{23}^{(2)} = 0, \varphi_2 = \varphi_3, D_2^{(2)} = D_2^{(3)}. \quad (1.8)$$

3. Граничные условия на экране при $y = -(h_2 + h_3)$:

$$\varphi_3 = 0, \quad (1.9)$$

4. Условия затухания при $y \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} w_1 = 0, \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} \psi_1 = 0, \quad (1.10)$$

где $\sigma_{23}^{(i)}$ – касательные напряжения ($i = 1, 2$).

2. Решения задачи, представляющие плоские волны.

Прежде чем переходить к решению задачи, выпишем уравнения состояния структуры:

а) в основании:

$$\sigma_{23}^{(1)} = \bar{c}_1 \frac{\partial w_1}{\partial y} + e_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial y}, \quad D_2^{(1)} = -\varepsilon_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial y}, \quad (2.1)$$

б) в слое:

$$\sigma_{23}^{(2)} = c_2 \frac{\partial w_2}{\partial y}, \quad D_2^{(2)} = -\varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}, \quad (2.2)$$

в) в диэлектрической среде:

$$D_2^{(3)} = -\varepsilon_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial y}. \quad (2.3)$$

Решения уравнений (1.3) ищем в виде:

$$\begin{cases} w_1 = W_{10} e^{iqy} e^{i(px-\omega t)} \\ \psi_1 = \Psi_{10} e^{iqy} e^{i(px-\omega t)} \end{cases} \quad (2.4)$$

где $p > 0, \omega > 0, V = \omega / p$, V – фазовая скорость распространения искомой волны, W_{10}, Ψ_{10} – амплитуды.

Подставив (2.4) в уравнение (1.3) и далее используя условие равенства нулю амплитуд, получим выражения для q :

$$q = \pm ip\beta_1(V), \quad q = \pm ip, \quad (2.5)$$

где

$$\beta_1(V) = \sqrt{1 - V^2 / S_1^2}.$$

Учитывая условия затухания (1.10), решение представляется так:

$$\begin{aligned} w_1 &= W_{10} e^{-p\beta_1(V)y} e^{i(px-\omega t)}, \\ \psi_1 &= \Psi_{10} e^{-py} e^{i(px-\omega t)}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Аналогичным образом находятся решения в слое, они имеют вид:

$$\begin{aligned} w_2 &= W_{20}^- e^{-ip\beta_2 y} + W_{20}^+ e^{ip\beta_2 y}, \\ \varphi_2 &= \Phi_{20}^- e^{-py} + \Phi_{20}^+ e^{py}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

здесь $\beta_2(V) = \sqrt{V^2 / S_2^2 - 1}$, а $W_{20}^-, W_{20}^+, \Phi_{20}^-$ и Φ_{20}^+ – амплитуды волн.

И наконец, решения в диэлектрической среде, примыкающей к слою, представляются так:

$$\varphi_3 = (\Phi_{30}^- e^{-py} + \Phi_{30}^+ e^{py}) e^{i(px-\omega t)}, \quad (2.8)$$

где Φ_{30}^- и Φ_{30}^+ – амплитуды.

3. Подчинение решений условиям непрерывности и граничным условиям.

Подставив решения (2.6), (2.7) и (2.8) в условия (1.7), (1.8) и (1.9), после несложных преобразований мы придём к системе:

$$\begin{aligned}
& (\bar{c}_1\beta_1 - ic_2\beta_2)W_{20}^- + (\bar{c}_1\beta_1 + ic_2\beta_2)W_{20}^+ + \varepsilon_2\bar{e}_1(\Phi_{20}^- - \Phi_{20}^+) = 0, \\
& \bar{e}_1W_{20}^- + \bar{e}_1W_{20}^+ + \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - 1\right)\Phi_{20}^- - \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} + 1\right)\Phi_{20}^+ = 0, \\
& e^{ik_2\beta_2}W_{20}^- - e^{-ik_2\beta_2}W_{20}^+ = 0, \\
& \left(1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}\delta_3\right)e^{2k_2}\Phi_{20}^- + \left(1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}\delta_3\right)\Phi_{20}^+ = 0,
\end{aligned} \tag{3.1}$$

где $\delta_3 = th k_3, k_2 = ph_2, k_3 = ph_3, \bar{e}_1 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}, \bar{e}_2 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}, R_1^2 = e_1^2 / (\varepsilon_1 \bar{c}_1)$.

Из условия равенства нулю детерминанта системы (3.1), которое является условием существования ненулевого решения системы, получаем дисперсионное уравнение:

$$(V) = \frac{c_2}{\bar{c}_1} \beta_2 (V) \operatorname{tg}(k_2\beta_2) + \frac{\bar{e}_2 R_1^2 (\delta_3 \bar{e}_2 th k_2 + 1)}{\bar{e}_2 (\delta_3 \bar{e}_2 th k_2 + 1) + \bar{e}_1 (\delta_3 \bar{e}_2 + th k_2)}. \tag{3.2}$$

Соотношение (3.2) неявным образом задаёт зависимость фазовой скорости волны V от относительной (приведённой) толщины слоя k_2 .

Рассмотрим некоторые важные частные случаи:

1. Экран находится в бесконечности (отсутствует), т.е. $\delta_3 = 1$. Дисперсионное уравнение (3.2) примет вид:

$$\beta_1 = \frac{c_2}{\bar{c}_1} \beta_2 \operatorname{tg}(k_2\beta_2) + \frac{\bar{e}_2 R_1^2 (\bar{e}_2 th k_2 + 1)}{\bar{e}_2 (\bar{e}_2 th k_2 + 1) + \bar{e}_1 (\bar{e}_2 + th k_2)}. \tag{3.3}$$

Это совпадает с результатом из работы [6].

2. Экран находится на верхней поверхности слоя, $\delta_3 = 0$. Дисперсионное уравнение в этом случае имеет вид:

$$\beta_1 = \frac{c_2}{\bar{c}_1} \beta_2 \operatorname{tg}(k_2\beta_2) + \frac{\bar{e}_2 R_1^2}{\bar{e}_2 + \bar{e}_1 th k_2}. \tag{3.4}$$

Это тоже совпадает с результатом из работы [6].

3. Слой представляет собой проводник $\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \rightarrow 0\right)$, тогда имеем:

$$\beta_1 = \frac{c_2}{\bar{c}_1} \beta_2 \operatorname{tg}(k_2\beta_2) + R_1^2. \tag{3.5}$$

Это также совпадает с тем, что было получено в работах [4,6] при $e_{14} = d_1 = 0$.

4. Подложка – не пьезоэлектрическая среда ($e_1 = d_1 = 0, R_1^2 = 0$):

$$\beta_1 = \frac{c_2}{\bar{c}_1} \beta_2 \operatorname{tg}(k_2\beta_2). \tag{3.6}$$

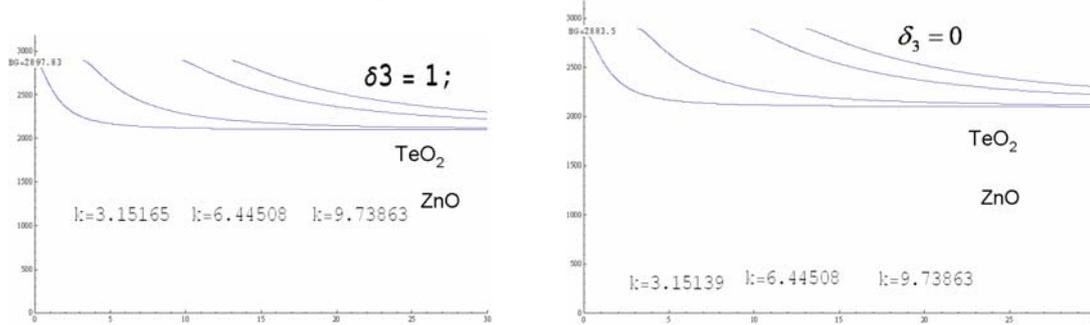
Это есть классическое уравнение Лява [1].

5. Слой отсутствует, тогда имеем:

$$\beta_1 = \frac{R_1^2}{\delta_3 \bar{e}_1 + 1}, \tag{3.7}$$

что совпадает с результатом работы [7].

Приведём результаты численных расчётов для конкретных материалов, когда слой представляет собой окись теллура, а подложка – окись цинка .



а) Экран отсутствует.

б) Экран на поверхности слоя.

Рис.2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 827с.
2. Балакирев М.К., Гишинский И.Л. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука, 1982. 237с.
3. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 472с.
4. Curtis R.G., Redwood M. Transvers surface wave on a piezoelectric material carrying a metal layer of finite thickness. J. Appl. Phys. 1973, vol.44, №5, p. 2002-2007.
5. Багдасарян Г.Е., Даноян Я.Н. Электромагнитоупругие волны. Ереван: Изд. ЕГУ, 2006. 492с.
6. Danoyan Z.N., Piliposyan G.T. Surface electro-elastic Love waves in a layered structure with a piezoelectric substrate and two isotropic layers. Int. Journal of solids and structures. 46 (2009), 1345-1353.
7. Аветисян А.С., Карапетян М.Е. Экранирование волны Гуляева-Блюстейна.// В кн.: "Оптимальное управление, устойчивость и прочность механических систем". Ереван, Изд. ЕГУ. 2002. С.97-100.
8. Белубекян М.В. Экранированная поверхностная сдвиговая волна в пьезоактивном полупространстве гексогональной симметрии. //В кн.: "Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред". Ереван: Институт механики НАН РА, 2008. С.125-130.

Сведения об авторах:

Даноян Завен Нерсесович – зав.отделом Института механики НАН РА,

E-mail: zavendanoyan@gmail.com

Атоян Левон Арутюнович – ст.н.с. Института механики НАН РА,

E-mail: levous@mail.ru

Саакян Саак Леонович – Институт механики НАН РА,

E-mail: mehins@sci.am

Даноян Нерсес Завенович – мл.н.с. Института механики НАН РА,

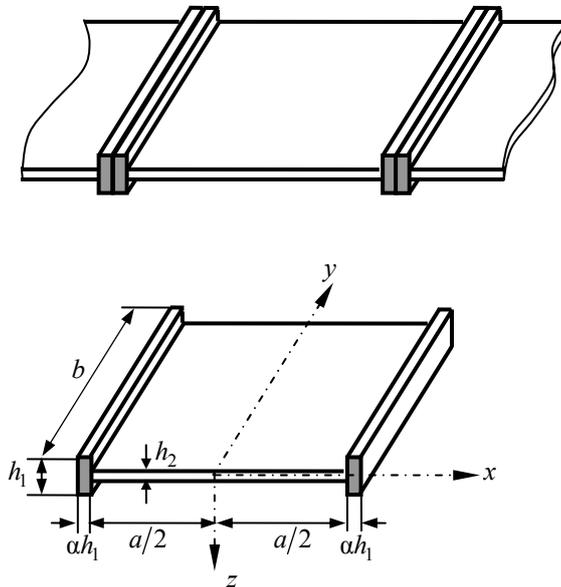
E-mail: mehins@sci.am

ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКИ-ПОЛОСЫ, УСИЛЕННОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ РЕБЕР

Дарбинян А.З.

Рассматривается случай одновременного действия на усиленную периодической системой ребер пластинку-полосу поперечной нагрузки и температурного поля. Получены решения, удовлетворяющие условиям шарнирного опирания пластинки по боковым кромкам. Произведена численная реализация задачи. Определено значение температуры, при котором пластинка практически не подвергается изгибу. Проведено сравнение полученных результатов с решением задачи изгиба прямоугольной пластинки, усиленной по краям ребрами жёсткости и подверженной одновременному действию поперечной нагрузки и температурного поля, выполненной ранее.

Рассматривается бесконечная изотропная пластина-полоса шириной b , шарнирно опёртая по продольным кромкам $y = 0, y = b$ и подкреплённая периодической, с периодом a , системой ребер жёсткости сечением $a h_1 \times h_1$ (фиг.1). Предполагается, что пластинка находится под действием поперечной нагрузки $q(y)$ при наличии стационарного температурного поля $T(x, y, z)$.



Фиг.1

Уравнение изгиба пластинки при наличии температурного поля имеет вид [1]

$$D(\Delta^2 w(x, y) + \Delta R_e(x, y)) = q(y) \quad (1)$$

где

$$R_e(x, y) = \frac{3(1+\nu)}{2h_2^3} \alpha_t \int_{-h_2/2}^{h_2/2} z T(x, y, z) dz,$$

α_t – коэффициент температурного линейного расширения.

Допустим, что изменение температуры по толщине пластины следует линейному закону и что в плоскостях, параллельных поверхностям пластинки, температура остается постоянной. Предположим, что верхняя поверхность прямоугольной пластины имеет положительную температуру, равную $T_0 = \text{const}$, нижняя – отрицательную ($-T_0$). Выбор такого распределения температуры обусловлен тем, что в таком случае изгиб пластины от температурных напряжений будет происходить вверх и, тем самым, противодействовать действию поперечной нагрузки $q(y)$.

В этом случае, $T(x, y, z) = 2zT_0/h_2$ и $R_e(x, y) = \alpha_i T_0(1 + \nu)/(4h_2)$.

Прогиб $w(x, y)$ представляется в виде [1]

$$w(x, y) = w_1(x, y) + w_2(x, y)$$

где $w_1(x, y)$ – прогиб от нагрузки $q(y)$, а $w_2(x, y)$ – прогиб от действия температуры, который предполагается изменяющимся по параболическому закону [2]

$$w_2(x, y) = 0.5y(b - y)R_e$$

Граничные условия запишутся в виде:

на кромках $y = 0, y = b$ – условия шарнирного опирания

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + R_e = 0 \quad (2)$$

на средней линии $x = 0$ – условия симметрии

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \quad (3)$$

на кромке $x = a/2$ – условия упругого опирания на рёбра жёсткости

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \alpha h_1 q = 2D \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}$$

где $D = Eh_2^3/12(1 - \nu^2)$ – цилиндрическая жёсткость пластинки, $J = \alpha h_1^4/12$ – момент инерции ребра, E, ν – упругие постоянные материала пластинки. Отметим, что в условиях (4) влияние температурных напряжений не учтено.

Разлагая в ряд Фурье

$$y(b - y) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \lambda_k y, \quad q(y) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k \sin \lambda_k y$$

где

$$b_k = \frac{2}{b} \int_0^b y(b - y) \sin \lambda_k y dy$$

$$q_k = \frac{2}{b} \int_0^b q(y) \sin \lambda_k y dy$$

$$\lambda_k = \frac{\pi k}{b},$$

решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2) и (3), принимаем в виде

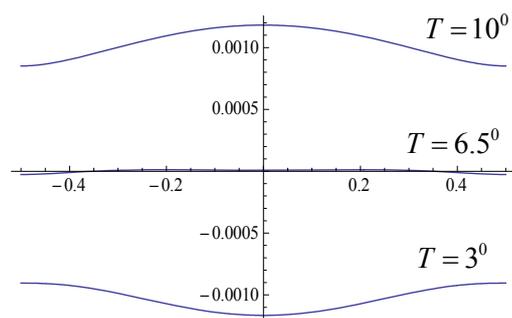
$$w(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{q_k}{D\lambda_k^4} + c_{1k} \cosh \lambda_k x + c_{3k} x \sinh \lambda_k x - 0.5R_e b_k \right] \sin \lambda_k y. \quad (5)$$

Коэффициенты c_{1k} и c_{3k} определяются из граничных условий (4). Их выражения здесь не приводятся из-за громоздкости.

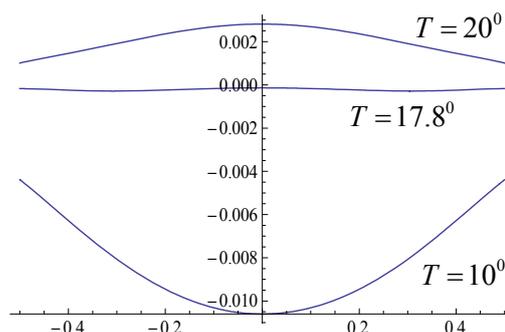
Численные расчёты проведены для стальной полосы со следующими физико-механическими характеристиками $E = 21 \times 10^{10} \text{ н/м}^2$, $\alpha_i = 1,2 \times 10^{-5} \text{ К}^{-1}$, $\nu = 0.25$. Для высоты ребра, толщины пластинки и периода усиления рёбрами жёсткости, отнесённых к ширине пластинки, и внешней поперечной нагрузки приняты значения $h_1/b = 0.2$, $h_2/b = 0.05$, $a/b = 1$, $q = 1 \text{ м/м}^2$.

Для различных значений температуры построены графики изменения прогибов пластинки на линии $y = 0.5b$ (фиг. 2). На фиг.3 приведены аналогичные графики для конечной прямоугольной пластины, имеющей такие же физико-механические и геометрические характеристики, что и основной период рассматриваемой пластины [3].

Как следует из приведённых графиков, при сравнительно высоких значениях температуры ($T = 10^0$) прогибы пластинки получаются положительными, т.е. большее влияние на прогибы оказывает изменение температуры. Меньшим значениям температуры ($T = 3^0$) соответствуют отрицательные прогибы, здесь влияние поперечной нагрузки более существенно. Можно определить значение температуры, при которой максимальный прогиб пластинки от совместного действия поперечной нагрузки и температуры практически равен нулю. В настоящем примере значение этой температуры получается равным $T = 6.5^0$.



Фиг. 2



Фиг. 3

Сравнивая графики на фиг. 2 и 3, замечаем, что в рассматриваемом случае температура, при которой практически уравниваются силовые и температурные воздействия, существенно ниже, чем в случае конечной пластинки. Это объясняется условиями симметрии на кромках $x = \pm a/2$, которые исключают поворот рёбер относительно своей оси.

Как следует из графиков, наибольшие значения прогибов на линии $y = 0.5b$ получаются равными нулю, а в других точках пластинки они незначительны. Таким образом, соответствующим выбором температуры можно добиться того, чтобы пластинка практически не подвергалась изгибным деформациям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белубекян М.В., Саргсян М.Г., Саноян Ю.Г. Управление перемещениями в пьезопластинках с помощью электрического поля. //Вестник инженерной академии Армении. 2009. Т.6. №2. С.255-261.
2. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 635с.
3. Дарбинян А.З. Задача термоупругости прямоугольной ребристой пластинки при изгибе. //Труды II межд. конф. «Актуальные проблемы механики сплошной среды» Дилижан, Армения, 4-8 октября 2010, с. 229-231.

Сведения об авторе:

Дарбинян Артавазд Завенович – к.ф.-м.н. старший научный сотрудник Института механики НАН Армении, Тел.: (374 77)30 48 81

КОЭФФИЦИЕНТЫ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ В СЛОЕ ТКАНОГО КОМПОЗИТА С ЛОКАЛЬНЫМИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ДЕФЕКТАМИ

Дедков Д.В., Зайцев А.В., Ташкинов А.А.

Разработана модель слоя тканого композита с искривленными волокнами и поликристаллической матрицей. При чистом формоизменении на основе численного решения краевых задач методом конечных элементов определены коэффициенты концентрации напряжений, вызванные локальными технологическими дефектами. Установлено, что главными механизмами, инициирующими разрушение поликристаллической матрицы, являются отрывы и сдвиги.

В настоящее время тканые композиты получили широкое распространение в авиационной, космической и автомобильной промышленности, судостроении, строительстве, производстве медицинского оборудования и спортивного снаряжения. Отличительной особенностью процесса изготовления готовых изделий из этих материалов является раскрой и выкладка на оправку слоёв ткани с искривленными волокнами (полотняной, сатиновой, саржевой и др.), а также прошивка этих слоёв между собой. Полученный армирующий каркас насыщается полимерной или поликристаллической матрицей, в результате чего происходит одновременное создание самого элемента конструкции и материала, из которого он изготовлен.

При производстве изделий из тканых композитов неизбежны технологические дефекты, снижающие эксплуатационные свойства изделий. К числу типичных дефектов относятся отсутствие (пропуск) волокон основы или утка, разрывы волокон при прошивке слоёв, а также внутренние поры, которые обнаруживаются только на этапе выходного ультразвукового контроля. Проникновение полимерного связующего в эти области затруднено, даже при вакуумировании, доуплотнении или пропитки под давлением [1]. Гарантированное обеспечение наличия в этих участках поликристаллической матрицы (углеродной, осаждаемой из газовой фазы или получаемой при карбонизации полимеров), матрицы на основе терморасширенного графита или керамики также затруднено. Это связано с тем, что образующиеся на поверхности нитей слой осаждаемого материала препятствует дальнейшему насыщению каркаса.

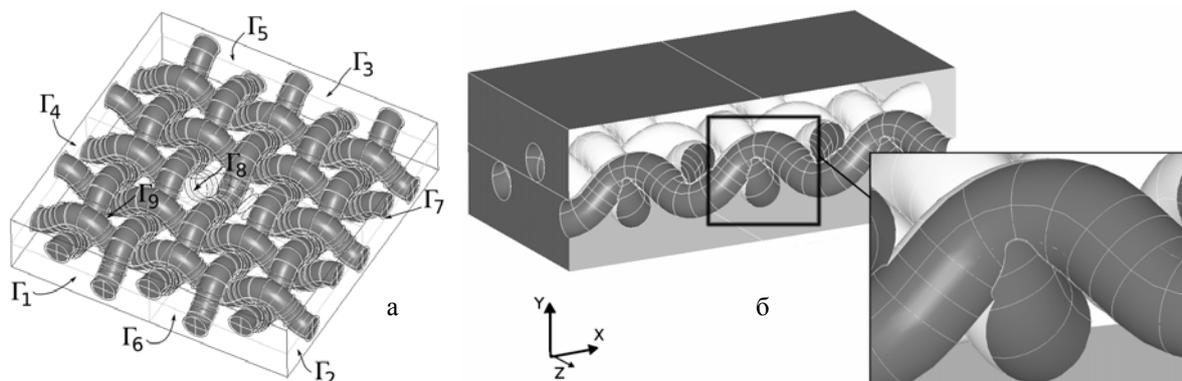
Применение тканых композитов для изготовления элементов конструкций ответственного назначения, работающих в условиях многократно изменяющихся внешних нагрузок в течении длительного срока эксплуатации, предопределяет необходимость прогнозирования не только эффективных деформационных характеристик, но и проведения уточнённого прочностного анализа. Это, в свою очередь, актуализирует построение математических моделей поведения слоёв этих материалов с локальными дефектами при комбинированных многоосных квазистатических нагружениях.

В настоящей работе решена более частная задача по определению коэффициентов концентрации напряжений в слое композита полотняного плетения (саржа 1/1 с равными рапортами по основе и утку) с поликристаллической матрицей, вызванных сложной геометрией переплетения волокон и наличием локальных технологических дефектов (внутренними порами и локальными разрывами волокон), а также выявлению механизмов, определяющих сценарии начального разрушения. Выбор полотняного переплетения обеспечивает с одной стороны наиболее короткие перекрытия нитей, наибольшую прочность, плотность и повышенную жёсткость, однородную, геометрически идентичную с лицевой и изнаночной стороны поверхность ткани, с другой — наличие внутренних технологических пор.

Рассмотрим слой тканого композита, толщиной $2,5D$, с армирующим каркасом полотняного переплетения, образованного волокнами круглого поперечного сечения с постоянным диаметром D . Следуя [2], искривление волокон основы и утка ткани будем задавать дугой окружности с центральным углом $\alpha = \pi/4$ и участком прямой.

В тканых композитах армирующий каркас несёт силовую нагрузку, а матрица служит для перераспределения напряжений между нитями. В процессе изготовления композита не удастся исключить их соприкосновение. Поэтому будем предполагать, что искривленные волокна, принадлежащие слоям идеальной периодической структуры, не всегда окружены гарантированным слоем поликристаллической матрицы и содержат локальные замкнутые технологические поры. Кроме того, в силу малости деформаций будем считать углы α

неизменными при нагружении слоя. Для построения геометрической модели будем использовать препроцессор, входящий в состав платформы SALOME-MECA. Этот пакет был разработан и сертифицирован для французской энергетической отрасли и предназначен для решения задач механики сплошных сред, термо- и гидродинамики, акустики и магнетизма, выполнения расчётов для строительных конструкций и сооружений. На рис. 1 представлены фрагменты слоя тканого композита с коэффициентами армирования $\alpha_1 = \alpha_3 = 0,14$. Здесь и



далее оси x_1 и x_3 ортогональной декартовой системы координат будут принадлежать плоскости слоя.

Рис 1. Фрагменты слоя тканого композита полотняного плетения с технологическими дефектами: локальный разрыв нити утка (а), внутренняя технологическая пора (б)

Будем рассматривать наиболее типичные дефекты (которые являются локальными концентраторами напряжений): полости, связанные со случайными разрывами утка (рис. 1, а) или основы и утка, образующиеся в результате сшивки слоёв или имеющимися в исходной ткани до прошивки, а также внутренние поры (рис. 1, б), расположенные в областях вблизи участков наибольшего искривления волокон, в результате недостаточного насыщения материалом матрицы, вызванные короткими перекрытиями и соприкосновениями нитей армирующего каркаса. Размеры образующихся в результате полостей соизмеримы с характерными размерами неоднородностей, не изменяют значительно интегральные коэффициенты армирования композита, могут оказаться частично или полностью заполненными материалом матрицы, если технологический процесс предусматривает дополнительную пропитку полимерным связующим с последующей карбонизацией или доосаждением поликристаллического материала из газовой фазы.

Для простоты предположим, что волокна и матрица слоя модельного тканого композита изотропные, линейно упругие, не изменяющие геометрию, взаимное расположение и тип симметрии при нагружении. Тогда компоненты тензора напряжений $\sigma_{ij}(\mathbf{r})$ удовлетворяют уравнения равновесия, а компоненты тензора малых деформаций $\varepsilon_{ij}(\mathbf{r})$ связаны с компонентами вектора перемещений $u_i(\mathbf{r})$ геометрическими соотношениями Коши:

$$\sigma_{ij,j}(\mathbf{r}) = 0, \quad 2\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}) = u_{i,j}(\mathbf{r}) + u_{j,i}(\mathbf{r}). \quad (1)$$

Для описания геометрии слоя тканого композита введём единичную, кусочно-однородную индикаторную функцию $\lambda(\mathbf{r})$ радиус-вектора \mathbf{r} , которая принимает значение 1, если точка принадлежит волокну основы или утка и 0, если матрице. Тогда определяющие соотношения запишем следующим образом:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{r}) = \left\{ C_{ijkl}^f \lambda(\mathbf{r}) + C_{ijkl}^m [1 - \lambda(\mathbf{r})] \right\} \varepsilon_{kl}(\mathbf{r}), \quad (2)$$

где верхними индексами f и m отмечены материальные коэффициенты, относящиеся к нитям армирующего каркаса и матрице соответственно.

Дополним краевую задачу (1) – (2) граничными условиями:

$$\begin{aligned}
u_1(\mathbf{r})|_{\Gamma_2} &= u_1^0, \quad u_3(\mathbf{r})|_{\Gamma_1} = u_3^0, \quad u_1(\mathbf{r})|_{\Gamma_4} = u_3(\mathbf{r})|_{\Gamma_3} = u_3(\mathbf{r})|_{\Gamma_5} = u_2(\mathbf{r})|_{\Gamma_6} = 0, \\
\sigma_{12}(\mathbf{r})|_{\Gamma_4} &= \sigma_{13}(\mathbf{r})|_{\Gamma_4} = \sigma_{13}(\mathbf{r})|_{\Gamma_3} = \sigma_{23}(\mathbf{r})|_{\Gamma_3} = 0, \\
\sigma_{12}(\mathbf{r})|_{\Gamma_5} &= \sigma_{13}(\mathbf{r})|_{\Gamma_5} = \sigma_{12}(\mathbf{r})|_{\Gamma_6} = \sigma_{13}(\mathbf{r})|_{\Gamma_6} = 0,
\end{aligned} \tag{3}$$

обеспечивающими заданное макрооднородное неравнокомпонентное деформирование в плоскости слоя. Условия идеального сопряжения

$$[\sigma_{ij}(\mathbf{r})n_j(\mathbf{r})]_{\Gamma_7^+} = [\sigma_{ij}(\mathbf{r})n_j(\mathbf{r})]_{\Gamma_7^-}, \quad [u_i(\mathbf{r})]_{\Gamma_7^+} = [u_i(\mathbf{r})]_{\Gamma_7^-} \tag{4}$$

на границах раздела фаз Γ_7 (рис. 1, а) описывают совместную работу нитей и поликристаллической матрицы при нагружении. Будет предполагать, что на этих границах также отсутствуют химические реакции и фазовые переходы в процессе нагружения слоя.

В случае, если в модельном материале не исключается возможность контакта волокон основы и утка, на соответствующих поверхностях Γ_9 (положение и геометрия которых считаются заданными и неизменными в процессе нагружения слоя) будем считать справедливыми условия контакта с кулоновским трением: если $[\sigma_{n\tau}(\mathbf{r})]_{\Gamma_9^+} < [\mu|\sigma_{mn}(\mathbf{r})]_{\Gamma_9^-}$, то

$$[\sigma_{n\tau}(\mathbf{r})n_n(\mathbf{r})]_{\Gamma_9^+} = [\sigma_{n\tau}(\mathbf{r})n_n(\mathbf{r})]_{\Gamma_9^-}, \quad [u_n(\mathbf{r})]_{\Gamma_9^+} = [u_n(\mathbf{r})]_{\Gamma_9^-} \tag{5}$$

а, если $[\sigma_{n\tau}(\mathbf{r})]_{\Gamma_9^+} \geq [\mu|\sigma_{mn}(\mathbf{r})]_{\Gamma_9^-}$, то

$$[\sigma_{n\tau}(\mathbf{r})]_{\Gamma_9^+} \geq [\mu|\sigma_{mn}(\mathbf{r})]_{\Gamma_9^-}, \quad [u_n(\mathbf{r})]_{\Gamma_9^+} = [u_n(\mathbf{r})]_{\Gamma_9^-}. \tag{6}$$

Здесь μ — статический коэффициент трения, а индексы n и τ определяют направление внешней нормали и касательной к поверхности Γ_9 .

Внутренняя пора (рис. 1, б) моделируется исключением из рассмотрения локального объема матрицы. Точки образовавшейся внутренней поверхности Γ_8 не имеют ограничений на перемещения, а сама поверхность свободна от напряжений:

$$[\sigma_{ij}(\mathbf{r})n_j(\mathbf{r})]_{\Gamma_8} = 0. \tag{7}$$

Численное решение краевой задачи (1) – (3) с граничными условиями (4) – (7) проводилось методом конечных элементов, с помощью некоммерческого пакета Code-Aster, входящего в состав платформы SALOME-MECA. Степень дискретизации фрагментов проводилась на 16-узловые тетраэдральные и 20-узловые гексаэдральные изопараметрические элементы выбиралась таким образом, чтобы полученные в результате численного решения поля структурных перемещений, деформаций и напряжений в слое тканого композита без локальных дефектов и с несовершенствами ни качественно, ни количественно не изменялись при уменьшении характерных размеров конечных элементов. Этим условиям удовлетворяют конечно-элементные сетки, параметры которых представлены в табл. 1.

Таблица 1

Параметры конечно-элементной сетки		
Слой композита с идеальной периодической структурой	Нити с гарантированным слоем матрицы	298 255 / 77 760
	Нити имеют поверхность контакта с трением	405 480 / 77 760
Разрыв нитей утка	Нити с гарантированным слоем матрицы	285 466 / 75 168
	Нити имеют поверхность контакта с трением	405 480 / 75 168
Разрыв нитей основы и утка	Нити с гарантированным слоем матрицы	279 276 / 72 576
	Нити имеют поверхность контакта с трением	405 480 / 72 576

Примечание: 16-узловые тетраэдральные элементы (числитель), 20-узловые гексаэдральные — знаменатель

В качестве примера рассмотрим результаты макроскопически однородного чистого формоизменения слоя тканого композита с поликристаллической матрицей. В этом частном

случае на границах Γ_1 и Γ_2 должны быть заданы перемещения $u_1^0 = -u_3^0$, $u^0 > 0$. Модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала нитей армирующего каркаса соответствовали работе [3] и принимали значения: $E_f = 280$ ГПа и $\nu_f = 0,20$. Упругие модули поликристаллической матрицы были выбраны следующими: $E_m = 0,28$ ГПа и $\nu_m = 0,40$. Статический коэффициент трения $\mu = 0,12$ соответствовал скольжению керамического волокна по поверхности поликристаллической матрицы.

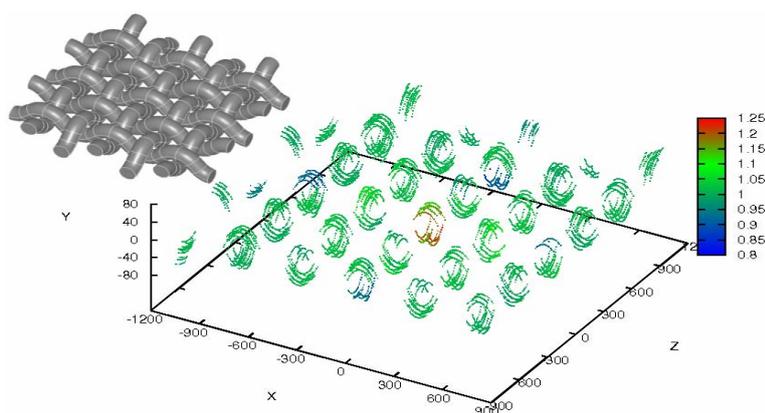
Таблица 2

Максимальные коэффициенты концентрации напряжений в слое тканого композита

Локальный технологический дефект	$K_{\sigma_{11}}$	$K_{\sigma_{22}}$	$K_{\sigma_{33}}$	$K_{\sigma_{12}}$	$K_{\sigma_{13}}$	$K_{\sigma_{23}}$
Разрыв нити основы	$\frac{1,25}{3,66}$	$\frac{1,27}{5,70}$	$\frac{2,38}{9,64}$	$\frac{1,29}{5,16}$	$\frac{1,97}{12,30}$	$\frac{1,59}{10,54}$
Разрыв нити основы с последующим доуплотнением слоя	$\frac{1,23}{3,36}$	$\frac{1,25}{4,87}$	$\frac{2,03}{15,83}$	$\frac{1,35}{6,53}$	$\frac{1,89}{11,59}$	$\frac{1,52}{10,97}$
Разрыв нитей основы и утка	$\frac{1,60}{3,76}$	$\frac{1,56}{7,53}$	$\frac{3,28}{29,34}$	$\frac{1,95}{5,82}$	$\frac{2,42}{28,39}$	$\frac{2,01}{8,02}$
Разрыв нитей основы и утка с последующим доуплотнением слоя	$\frac{1,48}{3,33}$	$\frac{1,45}{6,95}$	$\frac{2,59}{15,03}$	$\frac{1,76}{5,85}$	$\frac{2,17}{12,71}$	$\frac{1,82}{7,31}$

Примечание: каждая нить армирующего каркаса окружена гарантированным слоем матрицы (числитель), имеют общую поверхность контакта с трением, а между участками с наибольшей кривизной располагаются внутренние поры (знаменатель).

В табл. 2 представлены максимальные безразмерные коэффициенты $K_{\sigma_{ij}}(\mathbf{r}) = \sigma_{ij}(\mathbf{r}) / \sigma_{ij}^{\text{per}}(\mathbf{r})$, определяемые отношением компонент тензора напряжений в слое модельного тканого композита с локальным дефектом к соответствующим компонентам в слое материала идеальной периодической структуры. Обратим внимание на то, что наибольший вклад в концентрацию напряжений вносят нормальная σ_{33} и касательная σ_{13} составляющие. Кроме того, коэффициенты концентрации для этих компонент, определённые для слоя композита, содержащего внутренние поры, в 3–14 раз превышают соответствующие значения для материала, в котором каждая нить окружена гарантированным слоем поликристаллической



матрицы.

Рис. 2. Распределение коэффициентов концентрации интенсивности напряжений в фрагменте тканого композита с локальным разрывом нити утка

На рис. 2 представлено распределение коэффициентов концентрации интенсивности напряжений в слое тканого композита при макрооднородном чистом формоизменении.

Области, в которых интенсивности напряжений имеют максимальную величину, располагаются строго периодически в местах, где нити армирующего каркаса имеют наибольшую кривизну. Исключение составляют области вблизи локальных разрывов утка или основы и утка, где анализируемый параметр поля напряжений превышает соответствующее значение, определённое для фрагмента с идеальной периодической структурой, в 1,25 и 1,6 раза. Кроме того, вычислительные эксперименты показали, что если не исключена возможность контакта искривленных нитей с кулоновским трением, а также присутствуют закрытые внутренние поры, то коэффициенты концентрации для рассматриваемых случаев увеличиваются до 2,5. Заполнение локальных технологических дефектов материалом матрицы снижает значения безразмерных коэффициентов K_{σ_j} . Это снижение может быть до 15–20 % в случае, если каждая нить окружена гарантированным слоем матрицы, и составлять 2,0–2,2 раза, когда в армирующем каркасе присутствуют контакты с кулоновским трением.

Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что для повышения способности тканым композитом сопротивляться внешнему воздействию необходимо предусмотреть в технологическом процессе операции, обеспечивающие проникновение связующего в полости технологических локальных дефектов (дополнительная пропитка, доуплотнение и карбонизация, доосаждение поликристаллической матрицы из газовой фазы) в случае, если обнаруживаются закрытые внутренние поры. В противном случае возможно разрушение материала матрицы по механизмам сдвига и отрыва.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант РФФИ–Урал № 11–01–96033).

ЛИТЕРАТУРА

1. Суrowикин В.Ф., Суrowикин Ю.В., Цеханович М.С. Новые направления в технологии получения углерод-углеродных материалов. Применение углерод-углеродных материалов. // Рос. хим. ж-л. (Ж-л Рос. хим. об-ва им. Д. И. Менделеева). 2007. № 4. С. 111–118.
2. Иманкулова А. С. Текстильные композиты. Бишкек: Изд. центр «МОК», 2005. 152 с.
3. Тарнапольский Ю.М., Розе А.В., Жигун И.Г., Гуняев Г.М. Конструкционные особенности материалов, армированных высокомодульными волокнами // Механика полимеров. 1971. № 4. С. 676–685.
4. Дедков Д.В., Зайцев А.В., Ташкинов А.А. Концентрация напряжений в слое тканого композита с закрытыми внутренними технологическими порами // Вестник ПНИПУ. Механика, 2011. № 4. С. 29–36.

Сведения об авторах:

Дедков Денис Владимирович – аспирант кафедры «Механика композиционных материалов и конструкций», Пермский национальный исследовательский политехнический университет, +7 (342) 239 12 94

Е-mail: denis.v.dedkov@gmail.com

Зайцев Алексей Вячеславович – к.ф.-м.н., зам. декана Аэрокосмического факультета, доцент кафедры «Механики композиционных материалов и конструкций», Пермский национальный исследовательский политехнический университет, +7 (342) 239 12 94

Е-mail: zav@pstu.ru

Ташкинов Анатолий Александрович – д.ф.-м.н., профессор, ректор, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, +7 (342) 219 80 67

Е-mail: rector@pstu.ru

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ТЕРМОУПРУГИМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ В УПРУГОМ БЕСКОНЕЧНОМ СЛОЕ

Джилавыян С. А., Хуршудян А. Ж.

Рассматривается задача оптимального управления для взаимосвязанной системы дифференциальных уравнений в частных производных, описывающей напряжённое состояние упругого бесконечного слоя, находящегося в нестационарном температурном поле с учётом взаимосвязанности полей температуры и напряжения, т.е. учитывается термоупругое рассеяние механической энергии. Предполагается, что на торцах слоя в течение некоторого конечного промежутка времени действуют сжимающие нормальные напряжения. Процесс управления осуществляется граничными условиями, причём в качестве критерия оптимальности процесса управления выбран функционал, описывающий величину управляющих воздействий в рассматриваемом промежутке времени. Далее, пользуясь методом финитного управления, аппаратом обобщённого интегрального преобразования Фурье, рассматриваемая задача сведена к интерполяционной задаче относительно трансформантов Фурье искомым функций управления, которая, в свою очередь, сведена к соответствующей системе проблем моментов относительно функций управления. Построено решение рассматриваемой задачи в явном виде. Приведены также необходимые и достаточные условия разрешимости полученной системы проблем моментов.

1. Изотропный, однородный, бесконечный слой постоянной толщины a , на торцах которого в течение конечного промежутка времени $[t_0; T]$ действуют равномерно распределенные нормальные, сжимающие усилия интенсивности $\sigma_0(t_*)$, находится в неоднородном, нестационарном температурном поле $\vartheta = \vartheta(x_*, t_*)$. Тогда, после перехода к безразмерным величинам и линейного преобразования промежутка $[t_0; T]$ в $[-\pi; \pi]$ напряжённое состояние рассматриваемого слоя можно описать следующей взаимосвязанной системой дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial t^2} + \alpha^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = (1 + \varepsilon) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial \sigma_x}{\partial t}, \end{cases} \quad x \in [0, 1], \quad t \in [-\pi; \pi], \quad (1.1)$$

второе уравнение которой представляет собой уравнение теплопроводности с учётом термоупругого рассеяния механической энергии, причём, $x = \frac{x_*}{a}$ и $t = \frac{a_g}{a^2} t_*$ – безразмерные

координата и время, a_g – коэффициент температуропроводности; $\sigma_x = \frac{1 - 2\nu}{E} \sigma_*$; σ_* – нормальные напряжения, возникающие в сечениях слоя, перпендикулярных к направлению x_* ;

$\theta = \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \alpha_g \vartheta_*$; $\vartheta_* = \vartheta_*(x, t)$ – функция температуры, ν – коэффициент Пуассона,

$\alpha_g \vartheta_*$ – относительное температурное расширение, а α_g – коэффициент линейного температурного расширения слоя; $\alpha^2 = \frac{a_g^2}{c^2 a^2}$; c – скорость распространения упругой волны в

слое, α – отношение времени распространения упругой волны на время возрастания температуры, а входящее в уравнение теплопроводности ε – безразмерный коэффициент, характеризующий взаимодействие полей деформации и температуры.

Граничные условия представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\sigma_0 u_1(t), \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} \mp Bi(\theta - \theta_0 u_2(t)) &= 0 \quad (\sigma_0; \theta_0 = \text{const}) \end{aligned} \quad \text{при } x = 0; 1, t \in [-\pi; \pi], \quad (1.2)$$

где Bi – критерий Био, которое характеризует теплообмен с окружающей средой.

Пусть заданы еще следующие начальные условия:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 0; \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial t} = 0, \\ \theta &= 0 \end{aligned} \quad \text{при } t = -\pi, x \in [0; 1]. \quad (1.3)$$

Принимается, что граничными условиями (1.2) осуществляется управление системой (1.1). Общая постановка рассматриваемой задачи состоит в определении законов формирования граничных управлений $u_1(t)$ и $u_2(t)$ – переводящих в промежутке $[-\pi; \pi]$ решение системы (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2), из заданного состояния (1.3) в желаемое состояние

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\sigma_0; \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial t} = \sigma_1, \\ \theta &= \theta_1(x), \end{aligned} \quad \text{при } t = \pi, x \in [0; 1], \quad (1.4)$$

и оптимальных в смысле критерий оптимальности процесса управления

$$\kappa[u_1] = \max_{t \in [-\pi; \pi]} |u_1(t)|; \quad \kappa[u_2] = \max_{t \in [-\pi; \pi]} |u_2(t)|. \quad (1.5)$$

Здесь следует отметить, что критерии оптимальности (1.5) описывают величины управляющих воздействий в рассматриваемом отрезке $[-\pi; \pi]$ [1].

2. Для определённости, не ограничивая общность рассуждений, будем полагать, что функции граничных управлений $u_1(t)$ и $u_2(t)$ обращаются в нуль вне рассматриваемого отрезка, т.е. являются финитными функциями с носителем $[-\pi; \pi]$. Тогда решение рассматриваемой задачи можно построить, пользуясь методом финитного управления [2] – применив обобщённое интегральное преобразование Фурье по переменной t к системе (1.1) и к условиям (1.2). В результате, после несложных алгебраических преобразований, учитывая также условия (1.3) и (1.4), соответственно получим:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \bar{\sigma}_x}{dx^2} + \alpha^2 \sigma^2 \bar{\sigma}_x = -\alpha^2 \sigma^2 \bar{\theta} + f(x, \sigma) \\ \frac{d^2 \bar{\theta}}{dx^2} + i\sigma(1 + \varepsilon) \bar{\theta} = -i\sigma \varepsilon \bar{\sigma}_x + g(x, \sigma) \end{cases}, \quad x \in [0, 1], \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= -\sigma_0 \cdot \bar{u}_1(\sigma), \\ \frac{d\bar{\theta}}{dx} \mp Bi \cdot (\bar{\theta} - \theta_0 \bar{u}_2(\sigma)) &= 0, \end{aligned} \quad \text{при } x = 0; 1, \quad (2.2)$$

σ – спектральный параметр преобразования Фурье, $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\theta}$ и \bar{u}_s ($s = 1, 2$) – трансформанты Фурье соответствующих функций;

$$\begin{aligned}
f(x, \sigma) &= A_1(x, \sigma) + i \cdot A_2(x, \sigma), \\
A_1(x, \sigma) &= \frac{\alpha^2}{1 + \varepsilon} \left[\sigma_1 + \frac{d^2 \theta_1''(x)}{dx^2} \right] \cos(\pi \sigma) - \alpha^2 \sigma [\sigma_0 - \theta_1(x)] \sin(\pi \sigma), \\
A_2(x, \sigma) &= \frac{\alpha^2}{1 + \varepsilon} \left[\sigma_1 + \frac{d^2 \theta_1''(x)}{dx^2} \right] \sin(\pi \sigma) + \alpha^2 \sigma [\sigma_0 - \theta_1(x)] \cos(\pi \sigma), \\
g(x, \sigma) &= B_1(x, \sigma) + i \cdot B_2(x, \sigma), \\
B_1(x, \sigma) &= [(1 + \varepsilon) \theta_1(x) - \varepsilon \sigma_0] \cos(\pi \sigma); \quad B_2(x, \sigma) = [(1 + \varepsilon) \theta_1(x) - \varepsilon \sigma_0] \sin(\pi \sigma).
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Таким образом, решение рассматриваемой задачи оптимального управления свелось к решению задачи финитного управления для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2.1) при краевых условиях (2.2).

Фундаментальное решение системы (2.1) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{x1} &= e^{\lambda x}, \quad \bar{\sigma}_{x2} = e^{-\lambda x}, \\
\bar{\theta}_1 &= e^{\mu x}, \quad \bar{\theta}_2 = e^{-\mu x}, \quad x \in [0, 1],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda(\sigma) &= \left[\frac{\sigma}{2} \left(\sqrt{\alpha^4 \sigma^2 - (1 + \varepsilon)^2 - 2i(1 - \varepsilon)\alpha^2 \sigma - (\alpha^2 \sigma + i(1 + \varepsilon))} \right) \right]^{\frac{1}{2}}, \\
\mu(\sigma) &= i \cdot \left[\frac{\sigma}{2} \left(\sqrt{\alpha^4 \sigma^2 - (1 + \varepsilon)^2 - 2i(1 - \varepsilon)\alpha^2 \sigma + (\alpha^2 \sigma + i(1 + \varepsilon))} \right) \right]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Следуя общей методике финитного управления [2], после всех необходимых преобразований и выкладок, для определения трансформантов Фурье неизвестных функций граничных управлений при условиях (2.2) и обозначениях (2.3), получим следующую интерполяционную задачу:

$$\begin{aligned}
\sigma_0 \cdot \bar{u}_1(\sigma_{2m}^{(1)}) &= \frac{1}{4\pi m} \int_0^1 f(x, \sigma_{2m}^{(1)}) \sin(2\pi m x) dx, \\
Bi \theta_0 \cdot \bar{u}_2(\sigma_k^{(2)}) &= \\
&= \frac{1}{2} \left(\mu(\sigma_k^{(2)}) + Bi \right)^2 \int_0^1 g(x, \sigma_k^{(2)}) \left[\operatorname{ch}(\mu(\sigma_k^{(2)})(1-x)) + Bi \cdot \operatorname{sh}(\mu(\sigma_k^{(2)})(1-x)) \right] dx, \\
& \quad m, k \in \mathbb{N},
\end{aligned} \tag{2.5}$$

где узлы интерполяций $\sigma_{2m}^{(1)}$ и $\sigma_k^{(2)}$ действительны и определяются соответственно из характеристических уравнений:

$$\lambda(\sigma_{2m}^{(1)}) = i \cdot 2\pi m, \quad \operatorname{tg} \gamma_k = 2Bi \cdot \frac{\gamma_k}{\gamma_k^2 - Bi^2}, \quad \gamma_k = i \cdot \mu(\sigma_k^{(2)}), \quad m, k \in \mathbb{N}. \tag{2.6}$$

Отметим, что в результате разделения действительных и мнимых частей в равенствах (2.5), с учётом представлений (2.3), эту интерполяционную задачу можно свести к следующей системе тригонометрических проблем моментов в пространстве $L^1[-\pi; \pi]$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sigma_0 \cdot u_1(t) \cos(\sigma_{2m}^{(1)} t) dt = M_{11m}; \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_0 \cdot u_1(t) \sin(\sigma_{2m}^{(1)} t) dt = M_{12m},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} Bi\theta_0 \cdot u_2(t) \cos(\sigma_k^{(2)} t) dt = M_{21k}; \quad \int_{-\pi}^{\pi} Bi\theta_0 \cdot u_2(t) \sin(\sigma_k^{(2)} t) dt = M_{22k},$$

$m, k \in \mathbb{N}. \quad (2.7)$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$M_{11m} = \frac{1}{4\pi m} \int_0^1 A_1(x, \sigma_{2m}^{(1)}) \sin(2\pi mx) dx,$$

$$M_{12m} = \frac{1}{4\pi m} \int_0^1 A_2(x, \sigma_{2m}^{(1)}) \sin(2\pi mx) dx,$$

$$M_{21k} = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\left((a_k + Bi)^2 - b_k^2 \right) \left(B_1(x, \sigma_k^{(2)}) C_1(x, \sigma_k^{(2)}) - B_2(x, \sigma_k^{(2)}) C_2(x, \sigma_k^{(2)}) \right) - \right.$$

$$\left. - 2(a_k + Bi) b_k \left(B_1(x, \sigma_k^{(2)}) C_2(x, \sigma_k^{(2)}) + B_2(x, \sigma_k^{(2)}) C_1(x, \sigma_k^{(2)}) \right) \right] dx,$$

$$M_{22k} = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\left((a_k + Bi)^2 - b_k^2 \right) \left(B_1(x, \sigma_k^{(2)}) C_2(x, \sigma_k^{(2)}) + B_2(x, \sigma_k^{(2)}) C_1(x, \sigma_k^{(2)}) \right) + \right.$$

$$\left. + 2(a_k + Bi) b_k \left(B_1(x, \sigma_k^{(2)}) C_1(x, \sigma_k^{(2)}) - B_2(x, \sigma_k^{(2)}) C_2(x, \sigma_k^{(2)}) \right) \right] dx, \quad (2.8)$$

$$C_1(x, \sigma_k^{(2)}) = \left[\operatorname{ch}(a_k(1-x)) + Bi \cdot \operatorname{sh}(a_k(1-x)) \right] \cos b_k(1-x),$$

$$C_2(x, \sigma_k^{(2)}) = \left[\operatorname{sh}(a_k(1-x)) + Bi \cdot \operatorname{ch}(a_k(1-x)) \right] \sin b_k(1-x),$$

где $-b_k + i \cdot a_k = \gamma_k$.

3. Таким образом, решение поставленной задачи оптимального управления, окончательно, сводится или к решению интерполяционной задачи (2.5) относительно трансформантов Фурье искомых функций граничных управлений или к решению соответствующей системы тригонометрических проблем моментов (2.7) уже относительно искомых функций граничных управлений. Для решения рассматриваемой задачи оптимального управления здесь воспользуемся системой проблем моментов (2.7) при критериях оптимальности (1.5).

Согласно известной методике решения проблемы моментов при интегральных ограничениях, изложенного в [1], решение системы проблем моментов (2.7), представляющее собой решение рассматриваемой задачи, получим в следующем виде:

$$u_1^o(t) = \frac{U_1^o}{\sigma_0} \cdot [2H(\tau_1) - 1]; \quad u_2^o(t) = \frac{U_2^o}{Bi\theta_0} \cdot [2H(\tau_2) - 1], \quad t \in [-\pi; \pi],$$

$$U_1^o = \frac{1}{4} \left[\sum_{m \in M} \frac{1}{\sigma_{2m}^{(1)}} \left(M_{11m}^2 + M_{12m}^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \right]^{-1}; \quad \tau_1(t) = \sum_{m \in M} \left(M_{11m}^2 + M_{12m}^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \cos(\sigma_{2m}^{(1)} t - \varphi_m),$$

$$U_2^o = \frac{1}{4} \left[\sum_{k \in K} \frac{1}{\sigma_k^{(2)}} (M_{21k}^2 + M_{22k}^2)^{-\frac{1}{2}} \right]^{-1}; \quad \tau_2(t) = \sum_{k \in K} (M_{21k}^2 + M_{22k}^2)^{-\frac{1}{2}} \cos(\sigma_k^{(2)} t - \varphi_k), \quad (3.1)$$

$$\varphi_m = \arctan \frac{M_{12m}}{M_{11m}}; \quad \varphi_k = \arctan \frac{M_{22k}}{M_{12k}}, \quad m \in M; k \in K,$$

где M и K – множества всех целых индексов m и k , соответственно, для которых $\{\sigma_{2m}^{(1)} t - \varphi_m\}_{m \in M}; \{\sigma_k^{(2)} t - \varphi_k\}_{k \in K} \subset [-\pi; \pi]; H(t)$ – функция Хэвисайда.

Таким образом, решение поставленной задачи оптимального граничного управления получено в замкнутом виде, причём искомые функции граничного управления, оптимальные в смысле критерия оптимальности (1.5), имеют вид (3.1).

В конце следует отметить, что для разрешимости системы проблем моментов (2.7) при критериях (1.5) необходимо и достаточно, чтобы для любых индексов $m \in M$ и $k \in K$ выполнялись следующие неравенства [1]:

$$\sum_{m \in M} \frac{1}{\sigma_{2m}^{(1)}} (M_{11m}^2 + M_{12m}^2)^{-\frac{1}{2}} > 0; \quad \sum_{k \in K} \frac{1}{\sigma_k^{(2)}} (M_{21k}^2 + M_{22k}^2)^{-\frac{1}{2}} > 0, \quad (3.2)$$

откуда, с учётом представлений (2.3), (2.4) и (2.8), для вполне управляемости рассмотренной системы (1.1) можно получить соответствующие условия вполне управляемости системы (1.1) для характеристических коэффициентов рассматриваемой задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476с.
2. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределёнными параметрами. М.: Наука, 1975. 568с.

Сведения об авторах:

Джилавян Самвел Акопович – кандидат физ.-мат. наук, доцент, кафедра механики, ЕГУ.

E-mail: samjilavyan@ysu.am **Тел:** (+374 91) 500-770.

Хуршудян Асатур Жораевич – магистрант, факультет математики и механики, ЕГУ.

E-mail: asaturkhurshudyan@yandex.ru **Тел:** (+374 99) 420-713.

ВАРИАНТЫ РЕОЛОГИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ БЕТОНА КАК ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЫ

Есяян С.Г.

Представлены реологические вязкоупругие модели бетона как наследственно стареющей, стареющей и наследственной среды.

1. Как современная механика твёрдого деформируемого тела, вообще, так и теория ползучести, в частности, построены на феноменологических подходах. Реологическое моделирование процесса является наиболее эффективным способом для построения феноменологической теории. И корректность теории зависит от того, насколько при моделировании удалось учесть и отразить основные факторы процесса.

Реологическая модель бетона должна с достаточной полнотой отражать:

- изменение модуля упругости в зависимости от возраста бетона,
- зависимость меры вязкости от возраста бетона при введении элемента в напряжённое состояние,
- зависимость меры вязкости от длительности действия напряжения.

Последние два условия означают, что аналитическая функция меры вязкости модели $C(t, \tau)$ должна удовлетворить следующим условиям:

- с ростом t $C(t, \tau)$ монотонно растёт, но с убывающей скоростью, т.е. при $t_2 > t_1$:

$$\left. \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial t} \right|_{t=t_1} > \left. \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial t} \right|_{t=t_2}. \quad (1)$$

Это условие означает:

$$\frac{\partial^2 C(t, \tau)}{\partial t^2} < 0. \quad (2)$$

- $C(t, \tau)$ с ростом τ монотонно убывает:

$$\frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} < 0. \quad (3)$$

Все эти факторы учтены в предложенной [1] реологической модели бетона как вязкоупругой, наследственно стареющей среды. Эта модель представлена на рис. 1.

Элемент 1 модели (Э-1) из себя представляет упругую пружину, величина модуля упругости которой зависит от возраста модели t . Для бетона предлагается $E(t)$ представить по формуле

$$E(t) = E(\tau_0) \left[a + (1-a)e^{-b(t-\tau_0)} \right], \quad (4)$$

где τ_0 – возраст, при котором на модель начинает действовать нормальное напряжение $\sigma(\tau_0)$, a и b – опытные параметры.

В технической литературе аналитическая функция $E(t)$ представляется формулой Н.Х. Арутюняна [2]

$$E(t) = E_\infty \left[1 - ae^{-bt} \right]. \quad (5)$$

Очевидно, что определение $E(\tau_0)$ гораздо легче и, что наиболее важно, реально, чем определение E_∞ .

H – модуль упругости второй упругой пружины (Э-3), значение которого постоянно и не зависит от возраста.

Коэффициент вязкости первого вязкостного элемента (Э-2) $\eta(t)$ определяется формулой

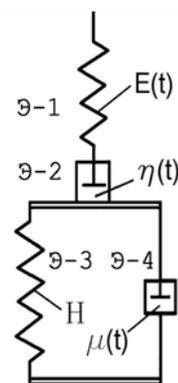


Рис. 1. Схема реологической вязкоупругой модели наследственного старения

$$\eta(t) = \eta_0 e^{\gamma t}, \quad (6)$$

где $\eta_0 = \eta$ – начальный коэффициент вязкости.

Как следует из (6), с возрастом t $\eta(t)$ экспоненциально растёт и при больших значениях t перестаёт функционировать как вязкостный элемент. При этом, Э–2 становится бесконечно жёстким узлом.

Коэффициент вязкости второго вязкостного элемента Э–4 определяется формулой

$$\mu(t) = \mu_\infty (1 - e^{-\alpha t}). \quad (7)$$

Параметры η , γ , μ_∞ , α определяются соответствующими лабораторными испытаниями бетона.

Аналитическая функция меры вязкости (ползучести) реологической вязкоупругой модели наследственного старения (ВУМНС) будет

$$C(t, \tau) = C \frac{e^{\alpha t} - e^{\alpha \tau}}{e^{\alpha t} - 1} + B(e^{-\gamma \tau} - e^{-\gamma t}), \quad (8)$$

где:

$$C = 1/H; \quad H = \alpha \mu_\infty; \quad B = 1/\gamma \eta. \quad (9)$$

Предельное значение меры ползучести ВУМНС, когда $t \rightarrow \infty$, будет

$$C(\infty, \tau) = C + B e^{-\gamma \tau}. \quad (10)$$

Здесь очевидно влияние возраста при загрузении τ : чем моложе бетон, тем больше $e^{-\gamma \tau}$ и, следовательно, больше $C(\infty, \tau)$. Если бетон весьма старый: $\tau \geq \bar{\tau}$ и $C(\infty, \bar{\tau}) = C$.

2. Мера ползучести (8) удовлетворяет условиям (1) и (2). Первое частное производное по t функции $C(t, \tau)$ дает

$$\frac{\partial C(t, \tau)}{\partial t} = \alpha C \frac{e^{\alpha t} (e^{\alpha \tau} - 1)}{(e^{\alpha t} - 1)^2} + \gamma B e^{-\gamma t}. \quad (11)$$

(11) определяет характер изменения графика функции $C(t, \tau)$, когда t меняется от τ до ∞ .

При $t = \tau$ (т.е. в начальный момент времени)

$$\left. \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial t} \right|_{t=\tau} = \alpha C \frac{e^{\alpha \tau}}{e^{\alpha \tau} - 1} + \gamma B e^{-\gamma \tau}. \quad (12)$$

Из этого выражения следует, что чем моложе бетон при загрузении, тем круче подъём начального участка кривой

$C(t, \tau)$, поскольку, как следует из рис. 2:

$$\operatorname{tg} \theta = \left. \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial t} \right|_{t=\tau} = \alpha C \frac{e^{\alpha \tau}}{e^{\alpha \tau} - 1} + \gamma B e^{-\gamma \tau}. \quad (13)$$

В частности, когда τ изменяется: $\tau = 0 \dots \bar{\tau}$, то соответственно:

$\operatorname{tg} \theta = \infty \dots \alpha C$. Это отражает закономерность изменений графиков характерных кривых меры ползучести (рис. 3).

Второе частное производное $C(t, \tau)$ по t

дает

$$\frac{\partial^2 C(t, \tau)}{\partial t^2} = -\alpha^2 C \frac{e^{\alpha t} (e^{\alpha t} + 1)(e^{\alpha \tau} - 1)}{(e^{\alpha t} - 1)^3} - \gamma^2 B e^{-\gamma t}, \quad (14)$$

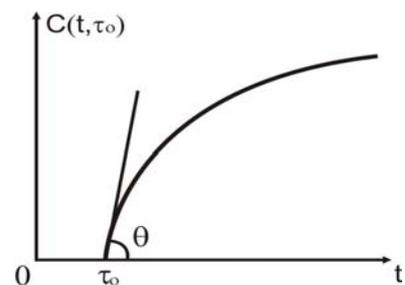


Рис. 2. Угол θ на кривой

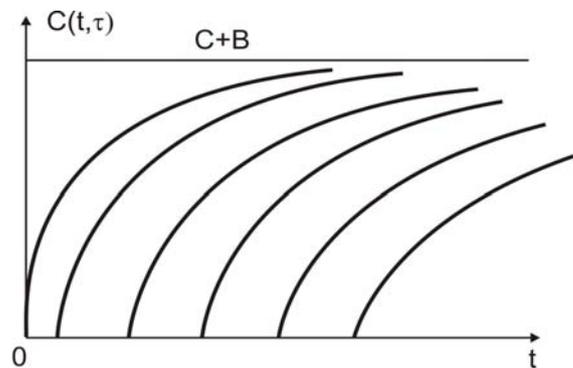


Рис. 3. Характерные кривые $C(t, \tau)$

что соответствует условию (2), т. е. график кривой $C(t, \tau)$ с ростом t монотонно развивается с убывающей скоростью.

Частное производное $C(t, \tau)$ по τ дает

$$\frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} = -\alpha C \frac{e^{\alpha\tau}}{e^{\alpha t} - 1} - \gamma B e^{-\gamma\tau}, \quad (15)$$

что удовлетворяет условию (3).

3. Если в возрасте τ_0 на модель прилагается напряжение $\sigma(\tau_0)$, величина которого в дальнейшем сохраняется постоянной, то связь $\sigma - \varepsilon$ при любом значении t будет

$$\varepsilon(t) = \sigma \left[\frac{1}{E(t)} + C(t, \tau_0) \right]. \quad (16)$$

При переменных напряжениях связь $\sigma(t) - \varepsilon(t)$ выразится интегральным уравнением Вольтерра второго рода

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E(t)} \left[\sigma(t) + \int_{\tau_0}^t \sigma(\tau) K(t, \tau) d\tau \right], \quad (17)$$

где $K(t, \tau)$ является ядром вязкости и определяется формулой

$$K(t, \tau) = -E(t) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} = E(t) \left[\alpha C \frac{e^{\alpha\tau}}{e^{\alpha t} - 1} + \gamma B e^{-\gamma\tau} \right]. \quad (18)$$

Аналитическая функция ядра релаксации модели ВУМНС $R(t, \tau)$ определится его представлением как резольвента ядра вязкости $K(t, \tau)$:

$$\begin{aligned} R(t, \tau) &= K(t, \tau) - \int_{\tau}^t R(\xi, \tau) K(t, \xi) d\xi = \\ &= E(t) \left\{ \left[\alpha C \frac{e^{\alpha\tau}}{e^{\alpha t} - 1} + \gamma B e^{-\gamma\tau} \right] - \int_{\tau}^t R(\xi, \tau) \left[\alpha C \frac{e^{\alpha\xi}}{e^{\alpha t} - 1} + \gamma B e^{-\gamma\xi} \right] d\xi \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Аналитическая функция меры релаксации модели $r(t, \tau)$ определится уравнением

$$r(t, \tau) = -E(t) \int_{\tau}^t R(t, \xi) d\xi. \quad (20)$$

4. Основные интегральные уравнения теории ползучести бетона по существу являются интегральными уравнениями Вольтерра второго рода. Метод решения этих уравнений разработан в [1]. Сущность метода заключается в следующем. Неизвестная функция (условно обозначим эту функцию через $Z(t)$) разлагается в степенной ряд по степеням

$$T = 1 - e^{-\lambda(t-\tau_0)}, \quad (21)$$

где λ – положительный параметр:

$$Z(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n(t)}{n!} Z^{(n)}(T_0). \quad (22)$$

T_0 – значение $T(t)$ при $t = \tau$, т. е. $T_0 = T(t)|_{t=\tau} = 0$.

Коэффициенты ряда (22) $Z^{(n)}(T_0)$ связаны с $Z^{(n)}(\tau_0)$ согласно правилам дифференцирования сложной функции. А $Z^{(n)}(\tau_0)$ определяются из исходного интегрального уравнения – его поочерёдным дифференцированием по t и подстановкой в полученных выражениях $t = \tau_0$.

Если принимать

$$\lambda = -\frac{Z''(\tau_0)}{Z'(\tau_0)}, \quad (23)$$

то третий член ряда (22) превращается в ноль, что значительно активизирует сходимость ряда (22). При этом, как показывают сравнительные расчёты, первые два члена ряда, с достаточной для практических расчётов точностью, дают решение задачи. Так, например, решение уравнения (19) будет:

$$\begin{aligned} R'(\tau, \tau) &= E'(\tau) \left(\alpha C \frac{e^{\alpha\tau}}{e^{\alpha\tau} - 1} + \gamma B e^{-\gamma\tau} \right) - \\ &- \alpha^2 C E(\tau) \left(\frac{e^{\alpha\tau}}{e^{\alpha\tau} - 1} \right)^2 - E^2(\tau) \left(\alpha C \frac{e^{\alpha\tau}}{e^{\alpha\tau} - 1} + \gamma B e^{-\gamma\tau} \right)^2; \\ R''(\tau, \tau) &= E''(\tau) \left(\alpha C \frac{e^{\alpha\tau}}{e^{\alpha\tau} - 1} + \gamma B e^{-\gamma\tau} \right) - 2\alpha^2 C E'(\tau) \left(\frac{e^{\alpha\tau}}{e^{\alpha\tau} - 1} \right)^2 - \\ &+ \alpha^3 C E(\tau) \frac{e^{2\alpha\tau} (e^{\alpha\tau} + 1)}{(e^{\alpha\tau} - 1)^3} - R'(\tau, \tau) K(\tau, \tau) - K(\tau, \tau) K'(\tau, \tau) - \\ &- K(\tau, \tau) \left[E'(\tau) \left(\alpha C \frac{e^{\alpha\tau}}{e^{\alpha\tau} - 1} + \gamma B e^{-\gamma\tau} \right) - \alpha^2 C E(\tau) \frac{e^{2\alpha\tau}}{(e^{\alpha\tau} - 1)^2} \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

$$\lambda = -\frac{R''(\tau, \tau)}{R'(\tau, \tau)}; \quad (25)$$

$$R(t, \tau) = E(\tau) \left(\alpha C \frac{e^{\alpha\tau}}{e^{\alpha\tau} - 1} + \gamma B e^{-\gamma\tau} \right) + \frac{[R'(\tau, \tau)]^2}{R''(\tau, \tau)} [1 - e^{-\lambda(t-\tau)}]. \quad (26)$$

(26) является ядром релаксации модели ВУМНС.

5. Если в модели ВУМНС принимать: $H = \infty$, то получится реологическая модель теории старения (рис. 4). Для этой модели аналитическая функция меры ползучести будет

$$C(t, \tau) = B(e^{-\gamma t} - e^{-\gamma \tau}), \quad (27)$$

что может лежать в основе теории ползучести старения бетона.

Предельное значение меры ползучести этой модели будет:

$$C(\infty, \tau) = B e^{-\gamma \tau}. \quad (28)$$

Когда τ меняется в пределах: $\tau = 0 \dots \bar{\tau}$, мера ползучести меняется соответственно: $C(\infty, \tau) = B \dots 0$. Этим отражается основная сущность теории старения бетона, согласно которой: весьма старый бетон теряет свои вязкостные свойства.

6. Если в модели наследственного старения принимать $\eta = \infty$, то получится реологическая модель, приведённая на рис. 5. Мера ползучести этой модели будет

$$C(t, \tau) = C \frac{e^{\alpha t} - e^{\alpha \tau}}{e^{\alpha t} - 1}. \quad (29)$$

Эта модель, в отличие от модели наследственного старения, учитывает процесс старения бетона частично. Первое частное производное $C(t, \tau)$ по t будет

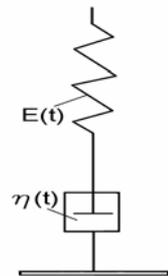


Рис. 4. Вязкоупругая модель теории старения

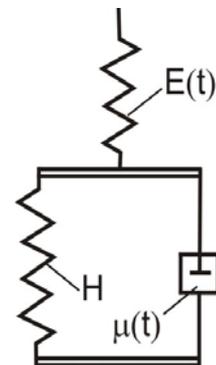


Рис. 5. Схема реологической вязкоупругой модели без Э-2

$$\frac{\partial C(t, \tau)}{\partial t} = \alpha C \frac{e^{\alpha t} (e^{\alpha \tau} - 1)}{(e^{\alpha t} - 1)^2}. \quad (30)$$

(30) показывает, что характеристика активности начального участка подъёма графика $C(t, \tau)$ будет

$$\operatorname{tg} \theta = \left. \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial t} \right|_{t=\tau} = \alpha C \frac{e^{\alpha \tau}}{e^{\alpha \tau} - 1}. \quad (31)$$

При изменении τ в пределах $\tau = 0 \dots \bar{\tau}$, $\operatorname{tg} \theta$ изменяется: $\operatorname{tg} \theta = \infty \dots \alpha C$.

7. Если в ВУМНС принимать $\eta = \infty$, $\mu(t) = \mu = \operatorname{Const}$ и $E(t) = E(\tau_0) = \operatorname{Const}$, получится известная реологическая модель теории наследственности (рис. 6) с аналитической функцией меры ползучести

$$C(t, \tau) = C [1 - e^{-\alpha(t-\tau)}]. \quad (32)$$

Здесь, в отличие от предыдущих трёх моделей, параметры ни одного из элементов модели (1,2,3) не зависят от возраста t . Частное производное $C(t, \tau)$ по t даёт

$$\frac{\partial C(t, \tau)}{\partial t} = \alpha C e^{-\alpha(t-\tau)}. \quad (33)$$

(33) показывает, что для этой модели угол θ не зависит от τ и

$$\operatorname{tg} \theta = \alpha C \quad (34)$$

при любом значении τ .

Очевидно, что для бетона модель наследственности может быть приемлемой при его весьма старом возрасте, когда, условно, процесс его взросления можно считать завершённым.

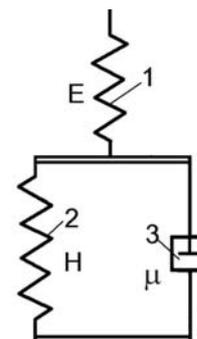


Рис. 6. Модель теории наследственности

ЛИТЕРАТУРА

1. Есаян С.Г. Реологическое моделирование вязкоупругих, упругопластических и вязкоупругопластических сред. Ереван: Чартарагет, 2009. 368 с.
2. Арутюнян Н.Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М.: Гостехиздат, 1952. 324 с.

Сведения об авторе:

Есаян Спартак Г., профессор, доктор технических наук (Армянский Государственный Инженерный Университет), Республика Армения, (098) 85 39 93

E-mail: s.g.yesayan@mail.ru

О ПЛАСТИЧЕСКОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ ГОРНЫХ ПОРОД. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛАСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПО ДАННЫМ ЭКСПЕРИМЕНТОВ НА ТРЁХОСНОЕ НАГРУЖЕНИЕ

Журавлев А.Б., Карев В.И., Коваленко Ю.Ф., Сидорин Ю.В., Сиротин А.А., Устинов К.Б.

Проведён анализ существующих подходов к описанию упруго-пластического поведения горных пород. Выбрана модель Друкера-Прагера, позволяющая описывать неупругое деформирование пород с упрочнением. Предложен способ определения пластических параметров модели путем проведения экспериментов по достаточно простым траекториям нагружения. Разработанный подход реализован для ряда горных пород. С использованием найденных параметров выполнен расчёт упруго-пластического деформирования пород при неоднородном нагружении, соответствующий практической задаче нефтяной механики – определению напряжённо-деформированного состояния в окрестности перфорированной скважины.

1. Пластическое деформирование горных пород является начальной стадией процесса разрушения, и исследование этого процесса важно в связи с вопросами устойчивости выработок и скважин [1]. Кроме того, неупругое деформирование пород часто вызывает необратимое изменение их фильтрационных свойств, причём не только в сторону уменьшения, но и в сторону увеличения [2]. На использовании данного свойства пород основан метод увеличения притока в скважину – метод георыхления [3].

2. В Институте проблем механики Российской академии наук создана уникальная экспериментальная установка для изучения процессов деформирования и разрушения горных пород – Испытательная система трёхосного независимого нагружения (ИСТНН). Она позволяет нагружать образцы горных пород кубической формы с ребром 40 или 50 мм независимо по каждому из трёх направлений и таким образом воссоздавать в них любые напряжённые состояния, возникающие в пласте при бурении скважины, её освоении и эксплуатации.

На данной установке были исследованы горные породы из различных нефтяных и газовых месторождений. В настоящей работе представлены результаты испытаний и расчёты процессов деформирования для пород Киринского газоконденсатного месторождения на сахалинском шельфе.

3. Особенностью пластического деформирования грунтов и горных пород является зависимость условий его возникновения и развития не только от интенсивности напряжений (что характерно для металлов), но и от гидростатического давления. С целью исследования этой зависимости испытания на трёхосное сжатие образцов грунта обычно проводятся по стандартной программе: образец предварительно подвергается всестороннему сжатию до различных уровней давления, а затем выводится в пластическое состояние посредством продолжения сжатия по одной из осей при фиксированных напряжениях по остальным (рис. 1).

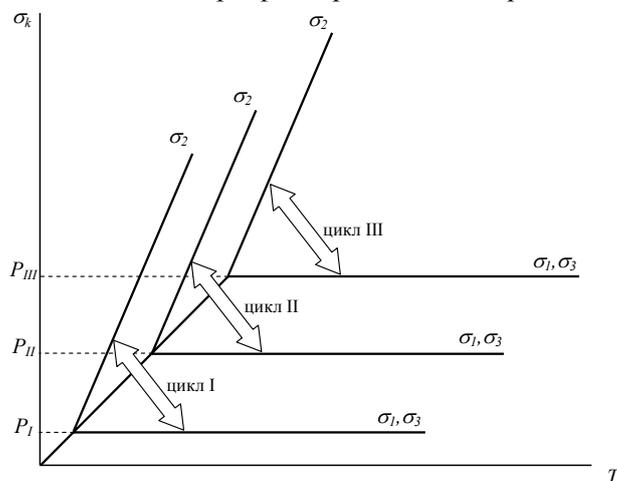


Рис. 1. Программы нагружения при испытаниях образцов грунта на трёхосное сжатие

Соответствующие типичные кривые напряжение-деформация изображены на рис.2. Видно, что в циклах с более высоким уровнем предварительного всестороннего сжатия пластическое деформирование возникает позже, т.е. при большей интенсивности напряжений. Кроме того, при больших величинах поджатия величины пластических деформаций меньше, чем для малых поджатий.

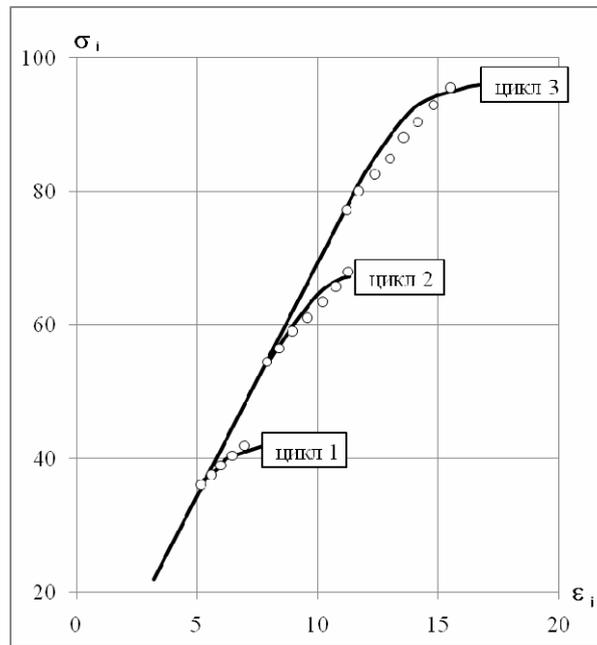


Рис.2. Кривые *напряжение-деформация* для трёх циклов нагружения. Линии – эксперимент, точки – расчёт

Для описания перехода в неупругие деформирования горных пород и грунтов в разное время был предложен ряд моделей – Кулона-Мора, Кузаку-Барлата, Дешпанде-Флека, Хозка-Брауна, Баландина, Парчского-Шашенко и др. Из всех моделей была выбрана модель Друкера-Прагера [4], обеспечивающая возможность описывать не только переход в пластическое состояние, но и процесс пластического течения для материалов с упрочнением, критерий перехода в состояние пластичности, для которых учитывает влияние гидростатического давления. Функция пластичности F для данной модели обычно записывается в виде

$$F = \sigma_i + \alpha \cdot \sigma_m - \tau_s = 0 \quad (1.1)$$

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \quad \sigma_i = \sqrt{3I_2}, \quad I_2 = \frac{1}{2}s_{jk}s_{jk} \quad (1.2)$$

Здесь σ_i – интенсивность напряжений; I_2 – второй инвариант тензора напряжений; s_{jk} – девиаторы напряжений; σ_m – гидростатическое давление; α и τ_s – константы материала.

При выполнении критерия (1.1) дальнейший рост напряжений сопровождается ростом пластических деформаций, для описания которого используется закон течения. Существенной особенностью применяемого закона течения является его неассоциированность, т.е. его представление в виде

$$d\varepsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \quad (1.3)$$

Здесь $d\varepsilon_{ij}^p$ – приращения (скорости) пластических деформаций, а пластический потенциал Q отличается от функции пластичности F :

$$Q = \sigma_i + \alpha' \cdot \sigma_m - \tau_s = 0 \quad (1.4)$$

Константа α' отличается от α , более того, из экспериментальных данных для исследуемых пород с достаточно высокой точностью следует, что пластические деформации носят чисто сдвиговой (бездилатансионный) характер, что соответствует $\alpha' = 0$. Использование неассоциированного пластического потенциала (1.4) в сочетании с функцией пластичности (1.1) позволяет адекватно описать, как влияние всестороннего сжатия на процесс деформирования, так и поведение породы за пределом перехода в пластичность (в частности, его бездилатансионный характер). В случае изотропного упрочнения, когда параметром упрочнения является работа пластических деформаций, окончательно имеем

$$d\varepsilon_{kl}^p = \frac{S_{kl}}{H \cdot \sigma_i^2} \cdot \left[\frac{S_{ij}}{\sigma_i} - \frac{1}{3} \alpha \cdot \delta_{ij} \right] \cdot d\sigma_{ij} \quad (1.5)$$

Здесь $H \equiv -\frac{\partial F}{\partial k}$ – функция, определяемая из какого либо стандартного опыта, например,

опыта на одноосное сжатие.

Описанный алгоритм был реализован для моделирования как аналитически (для однородного напряженного состояния), так и в рамках программного комплекса ANSYS (для однородного и неоднородного состояния).

4. Для определения констант, входящих в модель, характеризующих свойства Кириного месторождения, были проведены испытания образцов породы на установке ИСТНН по программам, представленным на рис.1. На рис.2 представлены экспериментальные (сплошные линии) и расчётные (точки) кривые деформирования для трёх циклов с разным уровнем предварительного всестороннего сжатия.

Поскольку для горных пород характерно наличие трещиноватости, на начальном этапе сжатия породы происходит её уплотнение (закрытие трещин). Поэтому упругие константы E и ν определялись по тем участкам экспериментальной кривой, где по мере уплотнения касательный модуль достигает максимального значения и сохраняется приблизительно постоянным.

Точка перехода в пластичность определялась как момент начала устойчивого снижения касательного модуля. Для определения констант α и τ_s достаточно двух испытаний с разным уровнем поджатия и моментами перехода в пластичность. Значения констант, полученные по различным парам точек, могут отличаться. Сопоставление данных расчёта и эксперимента показывают, что наилучшей является пара точек, наиболее отстоящие друг от друга вдоль кривой сжатия. Если выбрать циклы I и III, в точках перехода которых достигнуты интенсивности напряжений $\sigma_i^I, \sigma_i^{III}$ и давления $\sigma_m^I, \sigma_m^{III}$, то из критерия пластичности, записанного для этих двух точек

$$\alpha = \frac{\sigma_i^{III} - \sigma_i^I}{\sigma_m^{III} - \sigma_m^I}, \quad \tau_s = \sigma_i^I - \alpha \cdot \sigma_m^I \quad (1.6)$$

Поведение породы за пределами упругости определяется его пластической податливостью, причём в рамках выбранной модели с линейной функцией упрочнения для сжатия с боковым поджатием $\sigma_1 = \sigma_3 = \text{const} = -\sigma_0$, $\sigma_r = -\sigma_2$. Для такого процесса (1.5) преобразуется к виду

$$d\varepsilon_2^p = \frac{2}{9} \cdot \frac{2 - \alpha}{H \cdot (\sigma_r - \sigma_0)} \cdot d\sigma_2 \quad d\varepsilon_1^p = d\varepsilon_3^p = -d\varepsilon_2^p \quad (1.7)$$

Для простого сжатия ($\sigma_0 = 0$): $d\varepsilon_2^p = \frac{2}{9} \cdot \frac{2 - \alpha}{H \cdot \sigma} \cdot d\sigma_2$. Если ввести в рассмотрение величину

$B = \frac{2}{9} \cdot H \cdot \sigma = \text{const}$, поскольку при линейном упрочнении можно полагать, $E_p = \frac{d\sigma_2}{d\varepsilon_2^p} \approx \text{const}$,

то B – постоянная материала, определяемая из любого испытания на сжатие. Тогда для произвольного поджатия:

$$E_p = \frac{B}{2-\alpha} \cdot \frac{\sigma_r - \sigma_0}{\sigma_r - \left(1 + \frac{3\alpha}{3-\alpha}\right) \cdot \sigma_0} \quad (1.8)$$

Постоянные для исследуемой терригенной породы Киринского ГКМ представлены в таблице.

Таблица. Константы, используемые в расчётах

E , МПа	ν	Цикл 1		Цикл 3		τ_s	α	E_p
		σ_i , МПа	σ_m , МПа	σ_i , МПа	σ_m , МПа			
6000	0.3	36.07	14.07	76.88	45.87	18.01	1.28	1371

5. В качестве примера рассмотрим деформирование породы в прискважинной области при наличии вертикальных разрезов вдоль оси скважины (щелевой перфорации). Данные разрезы создаются для улучшения гидродинамической связи между скважиной и пластом и увеличения притока, поскольку область в окрестности скважины, как правило, обладает пониженной проницаемостью вследствие колматации и пластических деформаций. Необходимо учитывать, что концы разрезов сами являются сильными концентраторами напряжений, способными вызвать пластические деформации. Если для рассматриваемых пород неупругое деформирование вызывает ухудшение фильтрационных свойств, то область вблизи кончика разреза становится новой фильтрационной пробкой. Изолинии интенсивности пластических деформаций в плоскости, нормальной к скважине, для параметров породы, определённых в предыдущем пункте, представлены на рис.3. Эффективное горное давление при расчётах было принято равным 35 МПа.

На основании данных представленного расчёта, зная величину интенсивности пластических деформаций, при которой наступает значительное необратимое снижение проницаемости, можно судить о размерах зоны пониженной проницаемости. Кроме того, из рисунка видно, что оптимальным является проведение одного-двух разрезов. При большем их количестве вероятно смыкание областей пониженной проницаемости с образованием сплошной непроницаемой пробки [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00844).

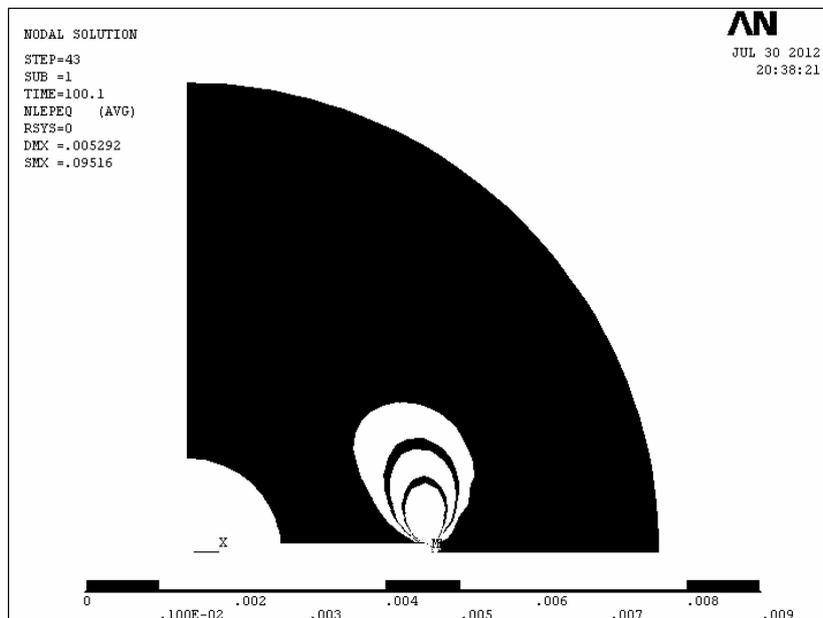


Рис. 3. Изолинии интенсивности пластических деформаций в окрестности скважины с вертикальной щелью для Киринского газоконденсатного месторождения

ЛИТЕРАТУРА

1. Климов Д.М., Карев В.И., Коваленко Ю.Ф., Устинов К.Б. Об устойчивости наклонных и горизонтальных нефтяных и газовых скважин.//В сб.: «Актуальные проблемы механики. Механика деформируемого твёрдого тела. – М.: Наука, 2009. С.455-469.
2. Карев В.И., Коваленко Ю.Ф. Зависимость проницаемости призабойной зоны пласта от депрессии и конструкции забоя для различных типов горных пород // Технологии ТЭК. 2006. № 6. С.59–63.
3. Христианович С.А., Коваленко Ю.Ф., Кулинич Ю.В., Карев В.И. Увеличение продуктивности нефтяных скважин с помощью метода георыхления // Нефть и газ Евразия. 2000. № 2. С.90-94.
4. Drucker, D.C., Prager, W. Soil mechanics and plastic analysis for limit design. Quarterly of Applied Mathematics, vol. 10, № 2, 157–165, 1952.

Сведения об авторах:

Журавлев Алексей Борисович – к.ф.-м.н., с.н.с. лаборатории геомеханики, ИПМех РАН.
Тел.: (+7 495) 4343447; E-mail: ustinov@ipmnet.ru

Карев Владимир Иосифович – д.т.н., зам. директора ИПМех РАН. Тел.: (+7 495) 4343447
E-mail: ustinov@ipmnet.ru

Коваленко Юрий Федорович – к.ф.-м.н., зав. лаборатории геомеханики, ИПМех РАН.
(+7 495) 4343447; E-mail: ustinov@ipmnet.ru

Сидорин Юрий Васильевич – к.ф.-м.н., с.н.с. лаборатории геомеханики, ИПМех РАН.
Тел.: (+7 495) 4343447
E-mail: ustinov@ipmnet.ru

Сиротин Александр Алексеевич – вед. электроник лаборатории геомеханики, ИПМех РАН.
Тел.: (+7 495) 4343447
E-mail: ustinov@ipmnet.ru

Устинов Константин.Борисович – к.ф.-м.н., с.н.с. лаборатории геомеханики, ИПМех РАН.
Тел.: (+7 495) 4343447; E-mail: ustinov@ipmnet.ru

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОБ УПРУГОМ РАВНОВЕСИИ ТЯЖЁЛОГО ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ОРТОТРОПНОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТЕЛА

Зайцев А. В. , Кутергин А. В.

Используя разложения перемещений по окружной и радиальной координате в тригонометрические и обобщённые степенные ряды, получены новые точные аналитические решения задач о равновесии тяжёлых горизонтальных толстостенных ортотропных цилиндрических тел, находящихся под действием неравномерного внешнего давления.

Рассмотрим равновесие тяжёлого горизонтального толстостенного ортотропного цилиндрического тела, которое находится под действием неравномерно распределённого давления, заданного на внешней боковой поверхности. В силу бесконечной протяжённости тела радиальные и окружные перемещения (u и v), радиальные (σ_{rr} и ε_{rr}), окружные ($\sigma_{\theta\theta}$ и $\varepsilon_{\theta\theta}$), осевые (σ_{zz}) нормальных напряжения и деформации, касательные напряжения и сдвиговые деформации (σ_{rz} и ε_{rz}) не зависят от осевой координаты z .

Действующее на внешнюю поверхность цилиндра неравномерное давление задаётся функцией $R(\theta)$, симметричной относительно вертикальной диаметральной плоскости. Ограничимся частным случаем, когда на закон распределения $R(\theta)$ накладываются следующие ограничения:

$$\int_0^{2\pi} \sigma_{rr}^* \cos \theta d\theta = -\pi(b^2 - a^2)\rho, \quad \sigma_{rr}^* = \begin{cases} R(\theta), & \pi/2 < \theta < 3\pi/2; \\ 0, & 3\pi/2 \leq \theta \leq 2\pi \vee 0 \leq \theta \leq \pi/2, \end{cases} \quad (1)$$

вызванные тем, что эта нагрузка является реакцией основания цилиндрического тела, помещённого на половину диаметра в грунт, на действие собственного веса. Здесь ρ — удельный вес материала, a и b — внутренний и внешний радиусы.

Запишем неоднородную систему уравнений Ламе для тяжёлого ортотропного цилиндра

$$\begin{aligned} \partial_r^2 u + [\partial_r u + (q^2 + m^2)\partial_r \partial_\theta v]/r - [n^2 u - (n^2 + m^2)\partial_\theta v + m^2 \partial_\theta^2 u]/r^2 &= (\rho/K_{11}) \cos \theta, \\ \partial_r^2 v + [\partial_r v + (k^2 + 1)\partial_r \partial_\theta u]/r + [p^2 \partial_\theta^2 v - v + (p^2 + 1)\partial_\theta u]/r^2 &= -(\rho/G_{r\theta}) \sin \theta, \end{aligned} \quad (2)$$

которая была получена последовательной подстановкой определяющих и геометрических соотношений Коши в уравнения равновесия. Правые части уравнений (2) содержат компоненты вектора массовых сил $F_r = -\rho \cos \theta$ и $F_\theta = \rho \sin \theta$, а сами уравнения — следующие коэффициенты $n = \sqrt{K_{22}/K_{11}}$ — «классический» показатель анизотропии [1], $m = \sqrt{G_{r\theta}/K_{11}}$, $q = \sqrt{K_{12}/K_{11}}$, $p = \sqrt{K_{22}/G_{r\theta}}$ и $k = \sqrt{K_{21}/G_{r\theta}}$, при записи которых были использованы обозначения:

$$\begin{aligned} DK_{11} &= E_r (1 - \mu_{\theta z}^2 E_\theta / E_z), \quad DK_{22} = E_\theta (1 - \mu_{zr}^2 E_z / E_r), \quad DK_{12} = \mu_{r\theta} E_r + \mu_{zr} \mu_{\theta z} E_\theta, \\ D &= 1 - 2\mu_{r\theta} \mu_{\theta z} \mu_{zr} - \mu_{r\theta}^2 E_r / E_\theta - \mu_{\theta z}^2 E_\theta / E_z - \mu_{zr}^2 E_z / E_r. \end{aligned}$$

Здесь E_r , E_θ и E_z — модули Юнга в направлениях r , θ и z , коэффициентами Пуассона $\mu_{r\theta}$, $\mu_{\theta z}$ и μ_{zr} , а $G_{r\theta}$ — модуль сдвига. Для бесконечно длинного цилиндрического тела, находящегося в условиях плоской деформации, осевые напряжения σ_{zz} не являются независимыми.

Симметрии нагрузки (относительно вертикальной диаметральной плоскости) и тела предопределяют поиск решения (2) в виде тригонометрических рядов по окружной координате [2, 3]:

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(r) \cos i\theta, \quad v = \sum_{i=0}^{\infty} v_i(r) \sin i\theta,$$

подстановка которых в исходную систему позволяет записать обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned} \rho \cos \theta &= K_{11} \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ u_i'' + [u_i' + i(q^2 + m^2)v_i'] / r - \cos i\theta [(m^2 i^2 + n^2)u_i + i(n^2 + m^2)v_i] / r^2 \right\}, \\ -\rho \sin \theta &= G_{r\theta} \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ v_i'' + [v_i' - i(k^2 + 1)u_i'] / r - \sin i\theta [(p^2 i^2 + 1)v_i + i(p^2 + 1)u_i] / r^2 \right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Система (3) однородна при $i=0$ и $i>1$, неоднородна при $i=1$. Поэтому для различных i решение (3) можно рассматривать независимо и представить поля перемещений и напряжений в виде суперпозиции:

$$u = u_0 + u_1 \cos \theta + \sum_{i=2}^{\infty} u_i \cos i\theta, \quad v = v_1 \cos \theta + \sum_{i=2}^{\infty} v_i \sin i\theta, \quad (4)$$

$$\sigma_{rr} = \sigma_{rr}^{(0)} + \sigma_{rr}^{(1)} \cos \theta + \sum_{i=2}^{\infty} \sigma_{rr}^{(i)} \cos i\theta, \quad \tau_{r\theta} = \tau_{r\theta}^{(1)} \cos \theta + \sum_{i=2}^{\infty} \tau_{r\theta}^{(i)} \sin i\theta,$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}^{(0)} + \sigma_{\theta\theta}^{(1)} \cos \theta + \sum_{i=2}^{\infty} \sigma_{\theta\theta}^{(i)} \cos i\theta.$$

Разложение (4) позволяет выделить механический смысл каждого из слагаемых. Так, например, слагаемые с индексом $i=0$ отражают вклад равномерно распределённой нагрузки на внутренней и/или внешней боковой поверхности цилиндра и соответствуют решению «классической» задачи Ламе. Слагаемые при $i=1$ позволяют учесть гравитационные силы, а при $i>1$ — неравномерно распределённую нагрузку, которую перед подстановкой в граничные условия необходимо разложить в тригонометрические ряды по окружной координате.

При $i=0$ отсутствуют окружные перемещения ($v_0=0$ и, как следствие — $v'_0 \equiv v''_0 \equiv 0$) и касательные напряжения $\tau_{r\theta}^{(0)}=0$, а единственное уравнение системы (3) $u''_0 + (u'_0 - n^2 u_0)/r = 0$ имеет общее решение

$$u_0 = C_1 r^n + C_2 / r^n. \quad (5)$$

Решение системы уравнений (3) при $i=1$ представим в виде суперпозиции общего решения соответствующей однородной \bar{u}_1, \bar{v}_1 и одного из частных решений неоднородной системы

$$u_1^* = \rho r^2 \Theta / G_{r\theta}, \quad v_1^* = \rho r^2 (\omega_4 \Theta - 1) / (\omega_3 G_{r\theta}), \quad \Theta = (\omega_3 G_{r\theta} + \omega_2 K_{11}) / [K_{11} (\omega_1 \omega_3 + \omega_2 \omega_4)], \quad (6)$$

$$\omega_1 = 4 - m^2 - n^2, \quad \omega_2 = 2q^2 + m^2 - n^2, \quad \omega_3 = 3 - p^2, \quad \omega_4 = 2k^2 + p^2 + 3.$$

Решение однородной системы при $i \geq 1$ будем искать в виде обобщённых степенных рядов:

$$\bar{u}_i = \sum_{j=0}^{\infty} a_j r^{j+\nu}, \quad \bar{v}_i = \sum_{j=0}^{\infty} b_j r^{j+\nu}.$$

Это позволяет записать выражения для радиальных и окружных перемещений следующим образом

$$u_1 = (a_1 r^\beta + a_2 r^{-\beta} + a_3 \ln r + a_4 + v_1^*) \cos \theta, \quad v_1 = (a_1 \alpha_1 r^\beta + a_2 \alpha_2 r^{-\beta} + a_3 \alpha_3 \ln r + a_4 \alpha_4 + u_1^*) \sin \theta, \quad (7)$$

$$u^{(i>1)} = \sum_{i=2}^{\infty} (a_1 r^{\xi_i} + a_2 r^{-\xi_i} + a_3 r^{\varphi_i} + a_4 r^{-\varphi_i}) \cos i\theta, \quad (8)$$

$$v^{(i>1)} = \sum_{i=2}^{\infty} (a_1 \psi_{1i} r^{\xi_i} + a_2 \psi_{2i} r^{-\xi_i} + a_3 \psi_{3i} r^{\varphi_i} + a_4 \psi_{4i} r^{-\varphi_i}) \sin i\theta,$$

$$\alpha_1 = [\beta(k^2 + 1) + p^2 + 1]/h, \quad \alpha_2 = [p^2 + 1 - \beta(k^2 + 1)]/h, \quad \alpha_3 = \alpha_4 = -1, \quad h = \beta^2 - p^2 - 1,$$

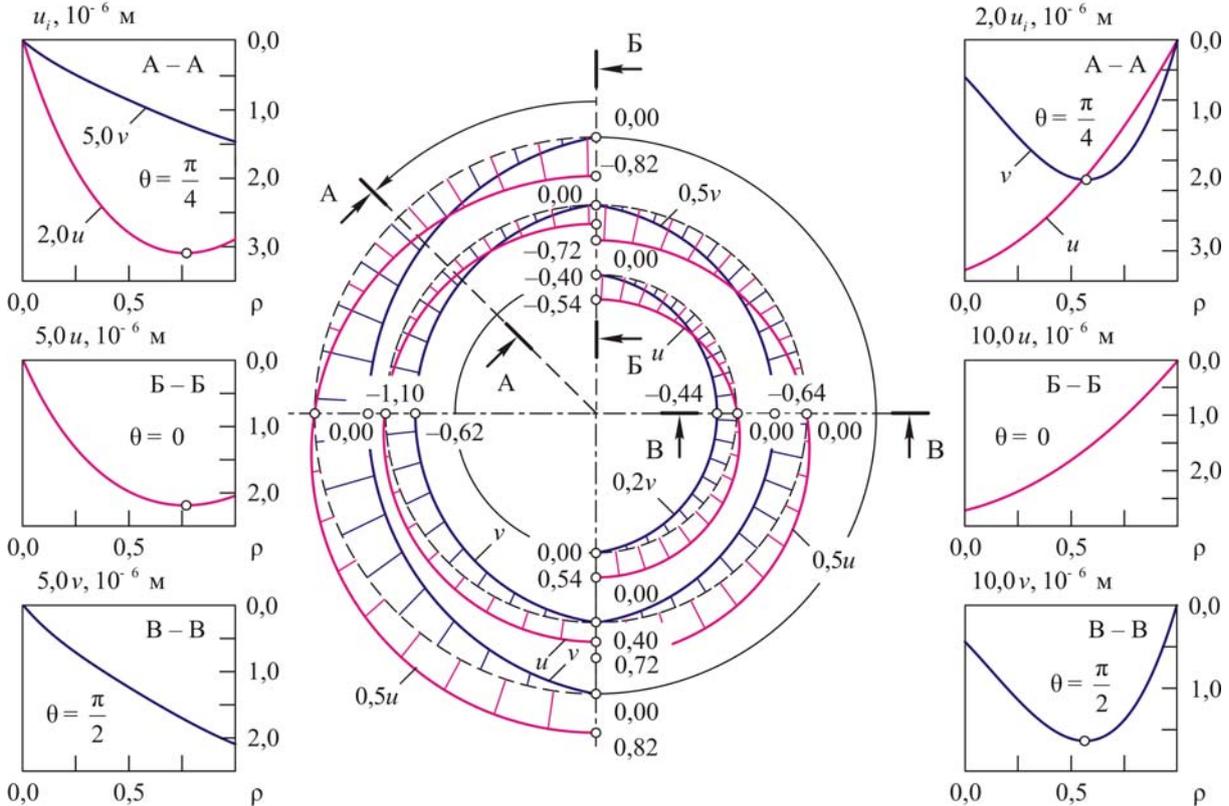
где $\beta = \sqrt{K_{22}(1/K_{11} + 1/G_{r\theta}) - K_{12}(2 + K_{12}/G_{r\theta})/K_{11} + 1}$ — показатель анизотропии для горизонтального осесимметричного тела, находящегося под действием равномерно распределённой нагрузки, имеющей вертикальную плоскость симметрии. Обратим внимание на то, что в отличие от «классического» n , показатель t зависит от продольного модуля сдвига. Эта зависимость является следствием появления сдвиговых деформаций, которые отсутствуют в случае, когда и нагрузка, и само тело обладают одной и той же осью симметрии. Коэффициенты $\varphi_i, \xi_i, \psi_{1i}, \psi_{2i}, \psi_{3i}, \psi_{4i}, f_{1i}$ и f_{2i} не приводятся ввиду громоздкости.

В выражениях для параметров ξ_i и φ_i под знак квадратного корня входят комплексы, состоящие из упругих модулей материала [4]. Поскольку вышеперечисленные параметры должны принимать только действительные значения, запишем ограничения на возможные значения упругих модулей материала и условия существования решения при $i>1$:

$$n^2 + i^2 [p^2 - q^2(k^2 - 2)] + 1 \geq \pm 2n \sqrt{(i^4 - 2i^2 + 1)}, \quad i^2 [p^2 - q^2(k^2 - 2)] + 1 > 0.$$

В частном случае, $E_r = E_\theta = E_z = E$, $\mu_{r\theta} = \mu_{\theta z} = \mu_{rz} = \mu$ и $G_{r\theta} = G = E/[2(1+\nu)]$, который соответствует изотропному тяжёлому горизонтальному цилиндру, новое аналитическое

решение совпадает с результатом, полученным автором [3] с точностью до коэффициентов любого частного решения. Учёт анизотропии материала позволяет установить связь между



коэффициентами, входящими в равенства (6) [4]:

$$\Theta = (\omega_4 \Theta - 1) / \omega_3 = \rho \left[1 - \mu - 2(\mu)^2 \right] / (2E).$$

Рис 1. Распределения перемещений в тяжёлых железобетонных горизонтальных цилиндрах с жёстко закреплёнными внутренней (слева) или внешней (справа) поверхностями

На рис. 1 представлено распределение перемещений точек поперечного сечения монолитных железобетонных цилиндрах на внутренней, внешней и срединной поверхности по окружной θ и безразмерной радиальной $\tilde{\rho} = (r - a) / (b - a)$ координатам. Параметры геометрии тела и упругие постоянные железобетона ($\rho = 40 \text{ кН/м}^3$) были выбраны следующими: $a = 3,0 \text{ м}$ и $b = 5,5 \text{ м}$; $E_{rr} = 4 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $E_{\theta\theta} = 8 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $E_{zz} = 5,33 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $\mu_{\theta r} = 0,15$, $\mu_{rz} = 0,075$ и $\mu_{z\theta} = 0,375$ и $G_{r\theta} = 5,65 \cdot 10^4 \text{ МПа}$. В отличие от классической задачи Ламе даже при отсутствии внешней нагрузки точки тяжёлого цилиндра получают радиальные и окружные перемещения. Наибольшие значения u достигаются на верхнем и нижнем сводах цилиндра, а максимумы v принадлежат горизонтальной диаметральной плоскости. При жёстком закреплении внешней поверхности радиальные перемещения монотонно возрастают при переходе вдоль координаты $\tilde{\rho}$ от закреплённой поверхности к свободной, а окружные перемещения имеют точку локального минимума, положение которой не зависит от выбора сечения. При жёстком закреплении внутренней поверхности все изменяется «с точностью до наоборот».

Еще одним из возможных приложений полученного аналитического решения является задача о равновесии тяжёлого горизонтального железобетонного цилиндра, на половину диаметра закопанного в грунт. Предположим, что площадь контактной поверхности и реакция основания известны и неизменны во времени, а сама реакция распределена по параболическому закону:

$$R(\theta) = (b^2 - a^2) (8\pi\theta - 3\pi^2 - 4\theta^2) \rho / 16,$$

удовлетворяющему условиям (1). Представим решение задачи для бесконечно протяжённого тяжёлого ортотропного цилиндрического тела со свободной от нагрузок внутренней

поверхностью, находящегося на грунтовом основании, в виде суперпозиции решений: «классической» задачи Ламе ($i=0$), задач о равновесии тяжёлого цилиндра с жёстко закрепленной внешней и свободной от напряжений внутренней боковой поверхностью ($i=1$), и, наконец, с жёстко закрепленной внутренней и заданным неравномерным давлением на внешней поверхности ($i>1$).

Закрепление цилиндров по внутренней или внешней поверхности приводит к появлению на этих участках дополнительных реакций с интегральным вкладом

$$R_a = -\int_0^{2\pi} \sigma_{rr}^{(i>1)} \Big|_{r=a} \sin \theta d\theta \quad \text{и} \quad R_b = \int_0^{2\pi} \sigma_{rr}^{(1)} \Big|_{r=a} \cos \theta d\theta. \quad (9)$$

Поскольку исходная задача не предполагает каких-либо условий закрепления, то необходимо скомпенсировать реакции (9) путем их замены эквивалентными равномерно распределёнными нагрузками интенсивностью $q_a = R_a/\pi$ и $q_b = R_b/\pi$. Тогда граничные условия для рассматриваемой суперпозиции краевых задач можно представить следующей группой равенств:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(i=0)} \Big|_{r=a} &= -p_a - q_a, & \sigma_{rr}^{(i=0)} \Big|_{r=b} &= -p_b - q_b, & \sigma_{rr}^{(i>1)} \Big|_{r=b} &= (-1)^i (a^2 - b^2) \rho / i^2 \cos i\theta, \\ u^{(i=1)} \Big|_{r=b} &= v^{(i=1)} \Big|_{r=b} = u^{(i>1)} \Big|_{r=a} = v^{(i>1)} \Big|_{r=a} = 0, & \sigma_{r\theta}^{(i=1)} \Big|_{r=a} &= \tau_{r\theta}^{(i=1)} \Big|_{r=a} = \tau_{r\theta}^{(i>1)} \Big|_{r=b} = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

которые позволяют определить постоянные интегрирования общих решений (5), (7) и (8).

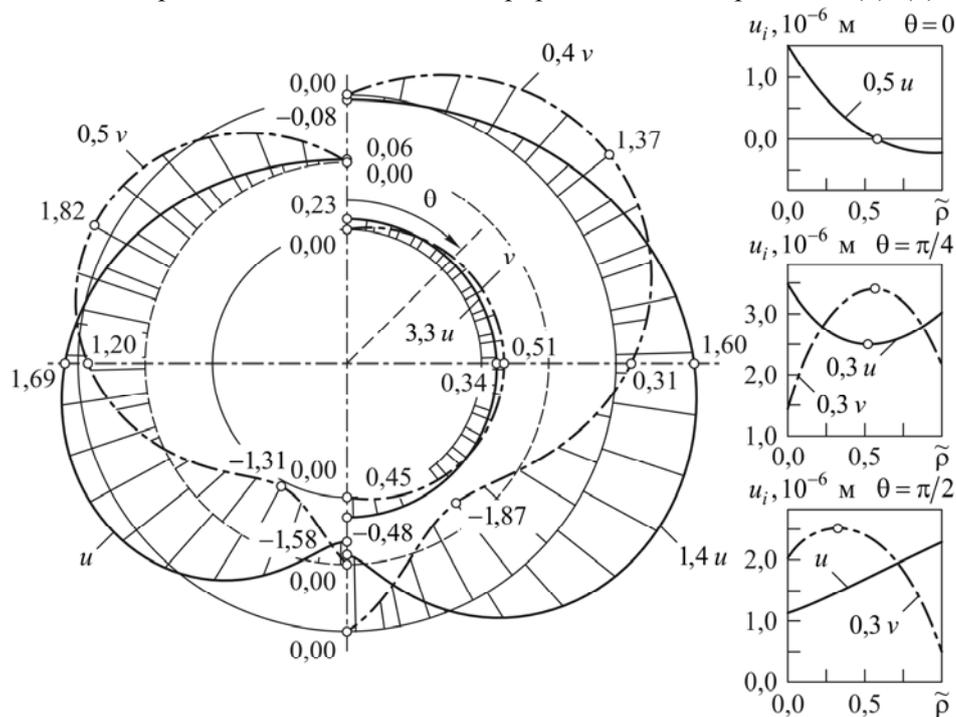


Рис 2. Распределение радиальных ($u, 10^{-6}$ м) и окружных ($v, 10^{-6}$ м) перемещений в монолитном железобетонном цилиндре на внутренней, внешней и срединной поверхностях [4]

Граничные условия (10) позволяют скомпенсировать дополнительные реакции только в радиальном направлении. Несмотря на то, что при закреплении внутренней или внешней боковой поверхности возникают усилия ещё и в окружном, и осевом направлениях, попытка компенсации этих реакций привела бы к получению решения с точностью до константы, отвечающей либо за вращение тяжёлого цилиндра как жёсткого целого вокруг оси симметрии, либо за перемещение в вертикальном направлении.

Распределения перемещений в горизонтальном железобетонном цилиндре по окружной координате носят немонотонный характер (рис. 2). Окружные перемещения v являются нулевыми в точках, принадлежащих вертикальной диаметральной плоскости; положительными — на внутренней, середине и внешней поверхностях верхнего свода; принимают свои максимальные значения при $\theta=90^\circ$, $\theta=60^\circ$ и $\theta=45^\circ$. На нижнем своде в точках $\theta=125^\circ$,

$\theta = 115^\circ$ и $\theta = 125^\circ$ происходит смена знака перемещений v , а при $\theta = 125^\circ$, $\theta = 115^\circ$ и $\theta = 125^\circ$ достигают минимума на внутренней, срединной и внешней поверхностях. Радиальные перемещения на верхнем своде минимальны, возрастают по величине при увеличении окружной координаты. Эти перемещения на внутренней поверхности цилиндра всюду положительны, на срединной поверхности принимают положительные значения в диапазоне $0^\circ \leq \theta \leq 168^\circ$ и имеют максимумы при $\theta = 180^\circ$ и $\theta = 120^\circ$. На внешней поверхности зависимость u от окружной координаты такова, что отрицательные значения имеют место при $0^\circ \leq \theta \leq 15^\circ$ и $160^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$, а максимальные значения достигаются при $\theta = 115^\circ$. Характер зависимостей перемещений точек, принадлежащих верхнему своду тяжёлого цилиндра в направлении обезразмеренной радиальной координаты существенно изменяется при увеличении угла θ . Перемещения u монотонно убывают при $\theta = 0$, монотонно возрастают при $\theta = \pi/2$ и имеют точку локального минимума при $\theta = \pi/4$. Зависимости $v \sim \tilde{\rho}$ имеют локальные максимумы, положение которых при увеличении окружной координаты смещается к внутренней поверхности цилиндра.

Обратим внимание на ещё одну закономерность распределения радиальных перемещений. Производные u по окружной координате

$$\partial_{\theta} u = -\left(a_1 r^{\beta} + a_2 r^{-\beta} + a_3 \ln r + a_4 + B r^2\right) \sin \theta - \sum_{i=2}^{\infty} \left[i \left(a_1 r^{\xi_i} + a_2 r^{-\xi_i} + a_3 r^{\varphi_i} + a_4 r^{-\varphi_i} \right) \sin i \theta \right]$$

принимают нулевые значения

$$\partial_{\theta} u \Big|_{\theta=0}^{r=a} = \partial_{\theta} u \Big|_{\theta=\pi}^{r=a} = \partial_{\theta} u \Big|_{\theta=0}^{r=(a+b)/2} = \partial_{\theta} u \Big|_{\theta=\pi}^{r=(a+b)/2} = \partial_{\theta} u \Big|_{\theta=0}^{r=b} = \partial_{\theta} u \Big|_{\theta=\pi}^{r=b} = 0$$

в любых точках поперечных сечений, принадлежащих вертикальной диаметральной плоскости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Биргер И.А., Шорр Б.Ф., Демьянушко И.В. и др. Термопрочность деталей машин. М.: Машиностроение, 1975. 455с.
2. Матвеевко В.П., Шевелев Н.А. Равновесие упругого и вязкоупругого горизонтального тяжёлого цилиндра // Прикладные задачи теории упругости и вязкоупругости. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1976. С.77–83.
3. Кузнецов Г.Б. Упругость, вязкоупругость и длительная прочность цилиндрических и сферических тел. М.: Наука, 1979. 112с.
4. Фукалов А.А., Кутергин А.В. Точные аналитические решения задач о равновесии упругих анизотропных тяжёлых тел с центральной и осевой симметрией и их приложения // Вестник Нижегородского университета имени Н.И. Лобачевского. 2011. № 4. Ч. 4. С.1485–1487.

Сведения об авторах:

Зайцев Алексей Вячеславович – к.ф.-м.н., зам. декана Аэрокосмического факультета, доцент кафедры «Механика композиционных материалов и конструкций», Пермский национальный исследовательский политехнический университет, +7 (342) 239 12 94

E-mail: zav@pstu.ru

Кутергин Алексей Владимирович – магистрант кафедры «Механика композиционных материалов и конструкций», Пермский национальный исследовательский политехнический университет, +7 (342) 239 12 94

ОСОБЕННОСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ РАСКРЫТИЯ ТРАНСФОРМИРУЕМЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Зимин В.Н., Крылов А.В., Файзуллин Ф.Р., Чурилин С.А.

Создание больших космических конструкций сопряжено с решением ряда технических и механических проблем, обусловленных уникальностью объектов, характерной особенностью которых является сочетанием противоречивых требований увеличения габаритных размеров и обеспечения достаточной жёсткости при весьма ограниченной массе силового каркаса. Как правило, такие конструкции устанавливаются на космические орбиты в сложенном транспортном состоянии и дальнейшее приведение их в рабочее положение связано с реализацией процесса раскрытия. Реализация раскрытия трансформируемых систем связана с решением трудных задач механики конструкций, обеспечивающих необходимые рабочие характеристики проектируемых космических конструкций. Несмотря на достигнутые значительные успехи в области проектирования таких конструкций, важной остается задача обеспечения плавного и надёжного раскрытия трансформируемых крупногабаритных конструкций, состоящих из десятков, сотен и даже тысяч взаимосвязанных между собой элементов, при гарантированном обеспечении их последующего функционирования.

Особое место среди создаваемых в настоящее время крупногабаритных трансформируемых космических систем занимают многозвенные стержневые конструкции ферменного типа, раскрытие которых происходит автоматически при срабатывании механизма расчехловки за счёт первоначальной накопленной упругой энергии пружин, расположенных в шарнирных соединениях (рис. 1 и рис. 2).

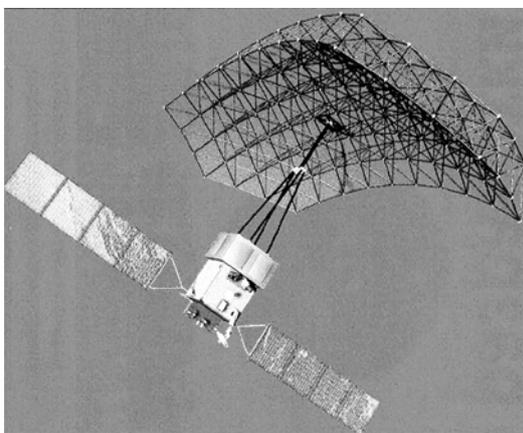


Рис. 1. Космический аппарат с трансформируемой параболической антенной ферменного типа

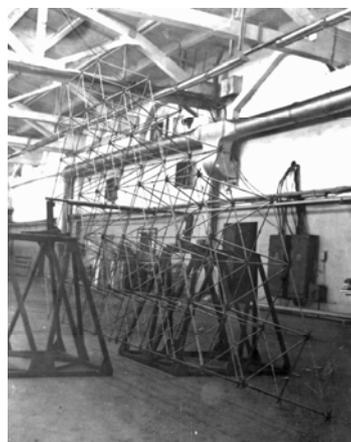


Рис. 2. Крупногабаритная трансформируемая конструкция с плоской образующей поверхностью

Особенность этих конструкций заключается в технологичности, контактности при транспортировке, большом отношении объемов в раскрытом и сложенном состояниях, скорости раскрытия (единицы секунд), малой массе при значительных размерах и в то же время большой площади рабочей поверхности в раскрытом состоянии. Стержни таких конструкций могут быть выполнены как из металла, так и из композиционного материала (КМ), рис. 3. Ключевым элементом таких конструкций, определяющим в конечном счёте их характеристики, является несущий силовой каркас. Именно он обеспечивает минимальные габариты в сложенном положении и высокую жесткость конструкции в раскрытом рабочем состоянии.



Рис. 3. Стержни силовых трансформируемых конструкций, выполненные: а – из металла; б – из композиционного материала

Для моделирования динамики раскрытия таких трансформируемых конструкций целесообразно воспользоваться программным комплексом MSC.ADAMS (Automatic Dynamics Analysis of Mechanical Systems) или программным комплексом автоматизированного динамического анализа многокомпонентных механических систем EULER. Программный комплекс EULER предназначен для математического моделирования поведения многокомпонентных механических систем в трёхмерном пространстве. В результате численного анализа раскрытия трансформируемых конструкций с

использованием построенных расчётных моделей в программных комплексах можно определить следующие характеристики: скорость и перемещения элементов конструкции по времени и время развёртывания; промежуточные формы раскрывающейся конструкции, динамические нагрузки на элементы при развёртывании.

Особенности моделирования раскрытия многозвенных замкнутых трансформируемых конструкций рассмотрены на примере складного антенного контура диаметром 5 м и сферической трансформируемой конструкции диаметром 3 м в раскрытом состоянии, рис. 4 и рис. 5. Обе конструкции – многозвенные, состоят из однотипных элементов (прямоугольных панелей и трубчатых стержней), связанных упругими шарнирами, содержащими упоры, обеспечивающими раскрытие конструкций из транспортного положения в рабочее и поддержание требуемой формы в конце развёртывания.

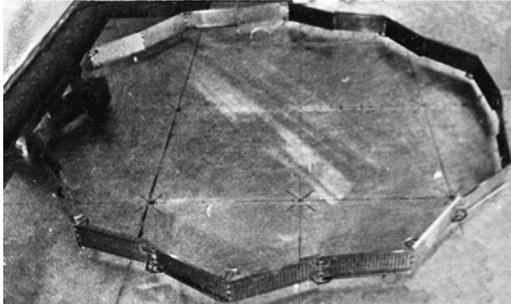


Рис. 4. Трансформируемая антенна контурного типа

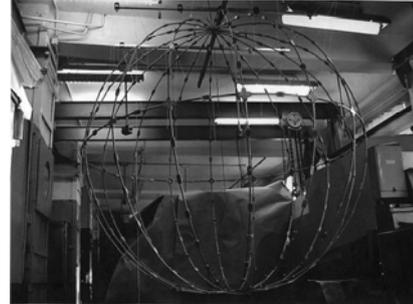


Рис. 5. Трансформируемая сферическая конструкция

Складной антенный контур состоит из двух пакетов профилированных прямоугольных панелей 615x230x0,8 мм (по 13 панелей в пакете), шарнирно связанных с одной стороны через жёсткое основание, а с другой стороны короткой замыкающей панелью. Развёртывание также происходит за счёт первоначально накопленной потенциальной энергии в пружинах, расположенных в шарнирных соединениях, связывающих соседние панели. Конструкция антенного контура также может быть выполнена из трубчатых стержней.

Процесс развёртывания трансформируемых конструкций индивидуален для каждого изделия, тем не менее, можно определить общий подход к построению моделей их развёртывания. Для расчётов принимается простая, достаточно хорошо учитывающая особенности конструкций расчётная схема в виде системы абсолютно твердых тел, связанных между собой шарнирными узлами. Массы и моменты инерции твердых тел принимаются равными массам и моментам инерции реальных звеньев каркаса. При определённом относительном положении смежных звеньев во время раскрытия на них накладываются связи, ограничивающие их взаимное угловое смещение. Технические связи выполняются в виде различного рода упоров, которые моделируются упругими и демпфирующими элементами (рис. 6) с соответствующими характеристиками.

Пружины кручения, расположенные в шарнирах, также моделируются упругими и демпфирующими элементами. Силовая характеристика каждого упруго-демпфирующего элемента определяется следующим соотношением:

$$M_i(\varphi_i, \omega_i) = c_i \cdot (\varphi_{\text{загр}_i} - \varphi_i) - \mu_i \omega_i,$$

где c_i – коэффициент жёсткости i -ого упругого элемента; φ_i – текущий угол развёртывания; $\varphi_{\text{загр}_i}$ – предварительный угол закрутки i -ого упругого элемента. μ_i – коэффициент вязкого трения i -го демпфирующего элемента; ω_i – относительная угловая скорость смежных звеньев.

Когда угол раскрытия смежных звеньев достигает определённого значения $\varphi_{\text{упор}_i}$, соответствующего их рабочему положению, происходит постановка звеньев на упоры. Постановка на упор моделируется упругим и демпфирующим элементами с нелинейной зависимостью момента от угла развёртывания и описывается следующей зависимостью:

$$M_{\text{упор}_i}(\varphi_i, \omega_i) = \begin{cases} 0, & \text{если } \varphi_i < \varphi_{\text{упор}_i} \\ -c_{\text{упор}_i} \cdot (\varphi_i - \varphi_{\text{упор}_i}) - \mu_i \omega_i, & \text{если } \varphi_i \geq \varphi_{\text{упор}_i} \end{cases}$$

где $c_{упор_i}$ – коэффициент жёсткости i -го упругого элемента; φ_i – текущий угол развёртывания; $\varphi_{упор_i}$ – значение угла развёртывания, при котором происходит постановка на упор; μ_i – коэффициент вязкого трения i -го демпфирующего элемента, моделирующего упор; ω_i – относительная угловая скорость смежных звеньев.

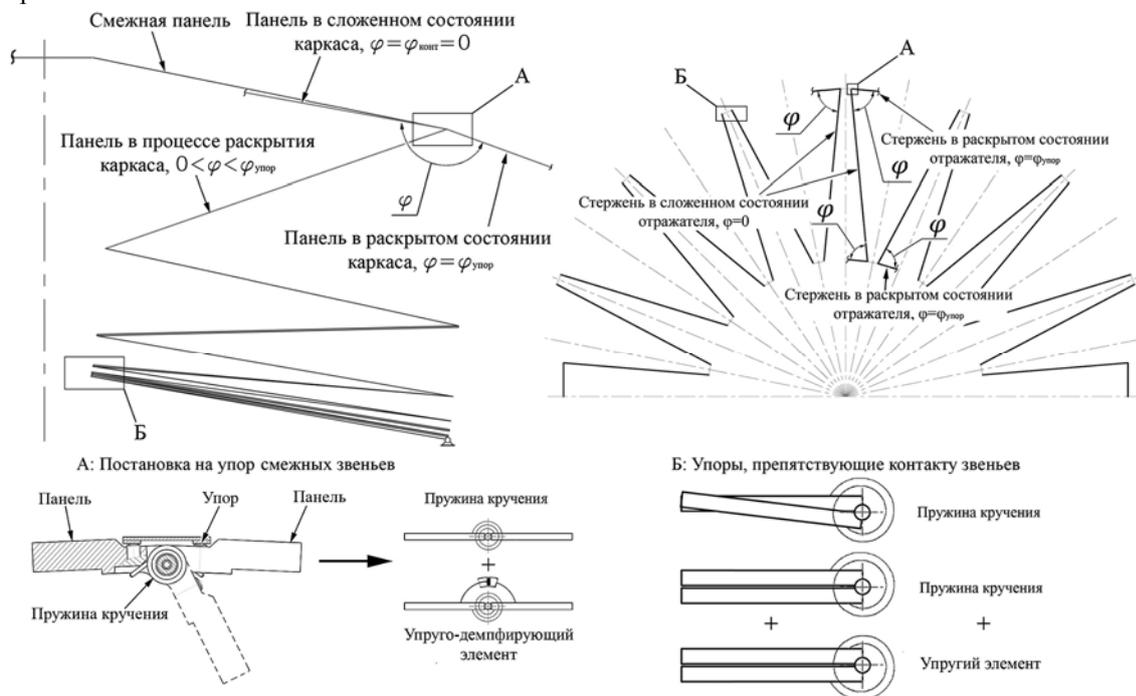


Рис. 6. Моделирование упоров

В процессе движения смежные звенья модели могут совершать вращение навстречу друг другу и соприкасаться. В модели предусмотрены упоры, препятствующие контакту звеньев. Они представлены упругими элементами с нелинейной зависимостью момента от угла развёртывания:

$$M_{конт_i}(\varphi_i) = \begin{cases} 0, & \text{если } \varphi_i > \varphi_{конт_i} \\ -c_{конт_i} \cdot (\varphi_i - \varphi_{конт_i}), & \text{если } \varphi_i \leq \varphi_{конт_i} \end{cases}$$

где $c_{конт_i}$ – коэффициент жёсткости i -го упругого элемента; φ_i – текущий угол развёртывания; $\varphi_{конт_i}$ – значение i -го угла развёртывания, при котором происходит контактное взаимодействие между смежными звеньями.

Напряжённо-деформированное состояние элементов трансформируемого каркаса при развёртывании определяется ударными нагрузками при установке соседних звеньев каркаса на упоры. Ударные нагрузки определяются из анализа кинематики развёртывания каркаса. Расчёты показывают, что звенья каркасов складного антенного контура и фрагмента отражателя встают на упоры в разные моменты времени. В качестве расчётной схемы при определении напряжённо-деформированного состояния элементов каркаса при развёртывании принимается его форма в определённый момент развёртывания, когда относительные скорости соседних звеньев максимальны. Тогда каркас представляет собой кинематически неизменяемую систему, что необходимо для проведения расчёта на прочность. Такой подход идёт в запас прочности, так как некоторая подвижность отдельных звеньев каркаса относительно друг друга в рассматриваемые моменты времени приводит к снижению значений напряжений, что обусловлено потерями кинетической энергии в шарнирных соединениях.

Поскольку методика определения напряжённо-деформированного состояния звеньев трансформируемого каркаса для складного антенного контура и фрагмента отражателя не различается, последовательность действий приводится на примере моделирования фрагмента отражателя.

Развёртывание двух меридиональных рёбер отражателя происходит практически одновременно, и их скорости и ускорения в эти моменты времени отличаются друг от друга незначительно. Такая кинематика развёртывания позволяет при расчёте напряжённо-деформированного состояния элементов каркаса рассмотреть только одно меридиональное ребро, которое, будучи закреплённым в полюсных

шарнирах, динамически «ведёт себя» подобно совокупности меридиональных рёбер, собранных в силовой каркас. При значительной жёсткости пружины телескопической штанги в расчётной схеме концы меридионального ребра в момент его полного раскрытия принимаются заземлёнными.

В результате расчёта в Euler и Adams с шагом по времени $\Delta t = 10^{-8}$ с получены координаты, скорости и ускорения центров масс звеньев, а также их угловые скорости и ускорения. Для определения напряжений, возникающих в меридиональном ребре при постановке звеньев на упоры, необходимо определить моменты времени, в которые относительные скорости стержней ребра максимальны. Для этого строятся графики зависимостей угловых скоростей стержней от времени (рис. 7) и выбираются несколько моментов времени, в которые угловые скорости максимальны.

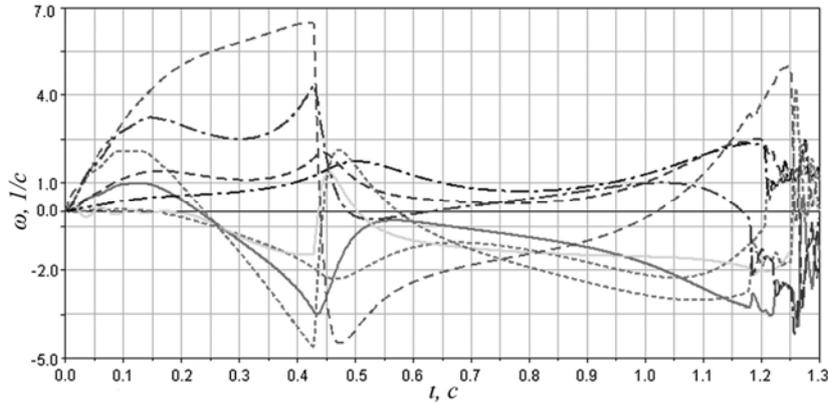


Рис. 7. Зависимости угловых скоростей стержней от времени

Для определения напряжённо-деформированного состояния меридионального ребра фрагмента отражателя в программном комплексе MSC.Patran-Nastran построена его конечно-элементная модель. Каждый стержень смоделирован десятью балочными конечными элементами типа beam, каждый шарнир – двумя балочными элементами beam и одним точечным элементом типа «сосредоточенная масса». Каждый полюсный шарнир моделируется одним балочным элементом beam с прямоугольным сечением и одной «сосредоточенной массой» со значением полной массы шарнира. Соединения конечных элементов, моделирующих шарниры и стержни, жёсткие. По всем степеням свободы закреплены два крайних узла, принадлежащих полюсным шарнирам.

Вычисленные значения скоростей в заданных точках модели меридионального ребра принимаются в качестве начальных условий для расчёта переходного процесса в программном комплексе MSC.Nastran, то есть при $t = 0$ и $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$ и $\dot{\mathbf{u}}(t) = \dot{\mathbf{u}}_0(t)$, где $\dot{\mathbf{u}}_0(t)$ – вектор начальных узловых скоростей. При расчёте вводится следующее допущение: считается, что в каждый из рассматриваемых моментов времени петли шарниров стоят на упорах, и меридиональное ребро ведёт себя как упругий стержень с заданными характеристиками.

Расчёт напряжённо-деформированного состояния приводится только для одного момента времени, так как анализ напряжений для каждого выбранного ранее расчётного случая показал, что максимальные эквивалентные напряжения возникают в расчётном случае, соответствующем именно этому моменту времени.

В результате расчёта напряжённо-деформированного состояния меридионального ребра (без учёта демпфирования) получены значения эквивалентных напряжений, возникающих в его узлах в рассматриваемый момент времени. На рис. 8 показано изменение напряжений по времени в узле меридионального ребра, соответствующем петле шарнира, связывающего стержни меридионального ребра и экваториальный стержень, в котором напряжения максимальны.

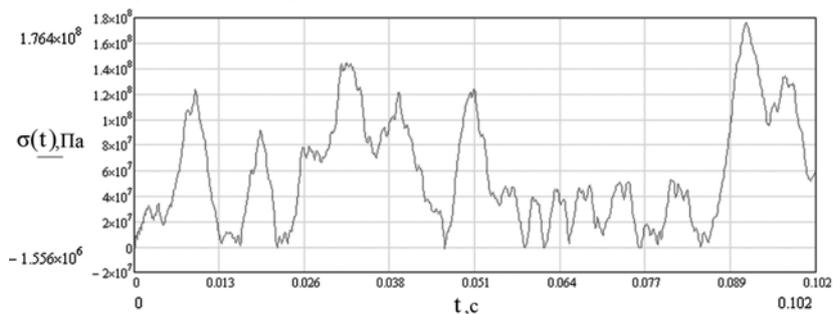


Рис. 8. Изменение напряжений в одном узле меридионального ребра по времени

Следует отметить, что данное значение эквивалентного напряжения в указанной зоне меридионального ребра характеризует напряжённое состояние, которое существует в течение весьма малого промежутка времени и определяется динамическим характером нагружения. При учёте демпфирования реальное значение максимального эквивалентного напряжения в конструкции может быть меньше.

В программном комплексе EULER построены модели и проведён численный анализ динамики раскрытия плоской и параболической конструкции ферменного типа (рис. 1,2). При моделировании раскрытия таких конструкций были учтены выявленные особенности динамики развёртывания многозвенных замкнутых трансформируемых конструкций, исследованные на примере складного антенного контура и сферической трансформируемой конструкции. На рис. 9 приведены расчётные формы, принимаемые конструкцией (рис. 1) в различные моменты времени.

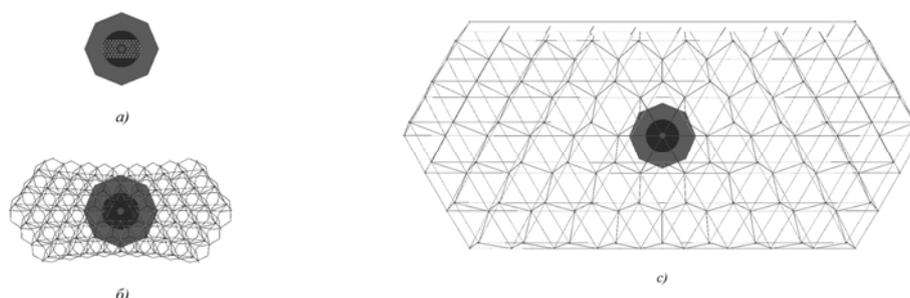


Рис. 9.

Проведённые исследования и расчёты показали, что для конструкций ферменного типа, отличных от плоских, начальные значения обобщённых координат для сложенного транспортного состояния необходимо определять, исходя из предположения, что центры узловых шарнирных элементов должны располагаться на поверхности (параболической, сферической, цилиндрической и т.д.), соответствующей раскрытому рабочему положению конструкции. Кроме того, с ростом числа взаимосвязанных между собой элементов трансформируемых конструкций существенно возрастают объёмы вводимой исходной информации в виде параметров, характеризующих геометрию, распределение масс и сил, действующих в местах соединения. При этом, актуальной задачей становится подготовка и контроль большого объёма исходной информации. Ручной ввод исходных данных становится малоэффективным, поэтому для исключения ошибок необходимо создавать блоки автоматизированной подготовки исходной информации.

Сведения об авторах:

Зимин Владимир Николаевич

Доктор технической наук, директор Научно-исследовательского института специального машиностроения Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана.

Адрес: 105005, г. Москва, 2-ая Бауманская ул., д. 5, МГТУ им. Н.Э.Баумана

Тел.: 8(499)261-21-88, факс: 8(499) 261-36-14

E-mail: sml1@sm.bmstu.ru, niism@sm.bmstu.ru

Крылов Алексей Владимирович

Аспирант кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители»

Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана.

Адрес: 105005, г. Москва, 2-ая Бауманская ул., д. 5, МГТУ им. Н.Э.Баумана

Тел.: 8(499)263-63-71. E-mail: sml1@sm.bmstu.ru

Файзуллин Фарис Рафаэльевич

ЗАО «Автомеханика»

Адрес: 125459, Москва, Новопоселковая ул., д. 6

Тел. 8(495)492-72-91

Чурилин Сергей Александрович

Инженер Научно-исследовательского института специального машиностроения

Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана.

Адрес: 105005, г. Москва, 2-ая Бауманская ул., д. 5, МГТУ им. Н.Э.Баумана

Тел.: 8(499)263-67-10. E-mail: sml1@sm.bmstu.ru

ВЛИЯНИЕ ЦИКЛИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ НА ДИФФУЗИЮ ВОДОРОДА В МЕТАЛЛАХ

Индейцев Д.А., Полянский В.А., Семёнов Б.Н.

В результате проведённых экспериментальных исследований было установлено, что циклические и длительные статические нагрузки приводят к перераспределению естественных концентраций водорода в металлах как в объеме, так и по энергиям связи. При циклических нагрузках объёмное перераспределение водорода приводит к увеличению его концентрации в областях разрушения. В областях, прилегающих к областям разрушения, напротив, концентрация водорода уменьшается. При одноосном циклическом нагружении распределение концентрации водорода вдоль металлического образца имеет ярко выраженный многоэкстремальный характер с одним основным пиком.

Предложена модель, описывающая наблюдаемое явление. В качестве приложения рассмотрено явление локализации примеси при циклическом нагружении стержня. Результаты расчётов сопоставлены с экспериментами по исследованию перераспределения водорода при циклическом деформировании металлических образцов из сплава алюминий-медь-свинец.

Водород – это один из самых распространённых элементов на планете. В металлах и других твёрдых материалах водород находится в ловушках различной природы. В зависимости от характера распределения водорода по ловушкам и его концентрации материал приобретает определённые свойства. В конструкционных материалах, таких как сталь и алюминий, наличие водорода негативно сказывается на механических свойствах. Большое влияние на распределение водорода в материале оказывает не только насыщение из внешней среды, но и распределение механических напряжений по материалу. В процессе механического нагружения материала водород диффундирует в область растягивающих напряжений (эффект Горского). При циклическом нагружении материала наблюдается накопление водорода в зонах максимальных напряжений. Этот эффект связан с тем, что в процессе нагружения происходит перераспределение водорода по энергиям связи. При циклических нагрузках объёмное перераспределение водорода приводит к увеличению его концентрации в областях разрушения. В областях, прилегающих к областям разрушения, напротив, концентрация водорода уменьшается. При одноосном циклическом нагружении распределение концентрации водорода вдоль металлического образца имеет ярко выраженный многоэкстремальный характер с одним основным пиком.

В работе предложена модель, описывающая наблюдаемое явление, и приведена замкнутая система связанных уравнений переноса водорода при деформации тела, вытекающая из общих законов механики сплошной среды. На этой основе выведено обобщенное уравнение диффузии.

Показано, что учёт взаимных связей диффузии и деформации важен при изучении процессов, сопровождающихся вибрацией и чередующимися циклами нагружения-разгрузки материала с примесью. При нестационарном деформировании тела перераспределение водорода может быть направлено против энтропийного потока диффузии, вызывать локализацию водорода и, как результат, необратимое ухудшение механических свойств материала, например, охрупчивание и разрушение металла в местах концентрации в нём диффузионно-подвижного водорода.

Учёт взаимного влияния диффузии и деформации актуален в изучении процессов, которые сопровождаются вибрационным или циклическим нагружением материалов, содержащих водород. При нестационарной деформации твёрдого тела движение водорода может быть направлено против диффузионного потока. Это приводит к водородной локализации и, как следствие, к необратимому ухудшению механических свойств материала, например, охрупчиванию и разрушению металла в местах аккумуляции диффузионно-подвижного водорода [1, 2].

Изучение потока примеси, вызванного внутренними напряжениями в дополнение к диффузионному, было начато в работах В.С.Горского. Однако замкнутой математической модели переноса примеси не было создано. Перенос примеси выражался через параметры микроскопической модели или с помощью неизвестных внутренних сил, действующих на атомы примеси.

В этой работе предложена замкнутая система связанных уравнений переноса водорода при деформации твёрдого тела, следующая из общих законов механики сплошных сред, и получено обобщённое уравнение диффузии. В рамках двухкомпонентной модели рассмотрены два взаимопроникающих континуума: динамически деформируемая структура твёрдого тела и подвижный водород в нём.

Описывается совместное движение и связь между двумя указанными континуумами в абсолютной системе координат следующей системой уравнений.

Уравнение движения основной структуры

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \rho_1 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} - \mathbf{R}_{21} \quad (1)$$

Уравнение движения подвижного водорода

$$-\nabla p = \rho_2 \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial t} + \mathbf{R}_{21} \quad (2)$$

уравнение непрерывности для подвижного водорода

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_2 \mathbf{v}_2) = 0 \quad (3)$$

и уравнение состояния подвижного водорода

$$p = p(\rho_2) \quad (4)$$

Здесь $\boldsymbol{\sigma}$, ρ_1 и \mathbf{v}_1 – тензор напряжений, плотности и вектор скорости материальной базовой структуры, соответственно, t – время, ρ_2 , \mathbf{v}_2 и p – плотность, вектор скорости и давление подвижного водорода, \mathbf{R}_{21} – внутренние силы взаимодействия между основной структурой и подвижным водородом:

$$\mathbf{R}_{21} = \rho_2 \alpha(\varepsilon) (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \quad (5)$$

где $\alpha(\varepsilon) = \gamma / d(\varepsilon)$ – коэффициент сопротивления, γ – постоянная, а $d(\varepsilon)$ – характерный размер проницаемости материала основной структуры, зависящий от сферической деформации [6].

Перейдём к подвижным координатам, связанным с основной структурой, и к относительной скорости водорода $\mathcal{G} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$. Запишем (3) в виде

$$\mathbf{R}_{21} = -\nabla p - \rho_2 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} - \rho_2 \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} \quad (6)$$

Выразим относительную скорость движения водорода через \mathbf{R}_{21}

$$\mathcal{G} = \frac{1}{\rho_2 \alpha(\varepsilon)} \mathbf{R}_{21} \quad (7)$$

Последним слагаемым в (6) по сравнению с \mathbf{R}_{21} можно пренебречь. Тогда после линеаризации уравнения состояния (4) получим

$$\mathcal{G} = -\frac{c^2}{\alpha(\varepsilon)} \nabla \rho_2 - \frac{1}{\alpha(\varepsilon)} \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} \quad (8)$$

где c – скорость звука в водороде.

Уравнение (3) в подвижной системе координат имеет вид

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_2 \mathcal{G}) = 0 \quad (9)$$

После подстановки \mathcal{G} из (8) в (9), получим уравнение диффузии, учитывающее влияние деформаций и сил инерции:

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} = \nabla \cdot (D \nabla \rho_2) + \nabla \cdot \left(\frac{D}{c^2} \rho_2 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} \right) \quad (10)$$

где $D = D(\varepsilon) = \frac{c^2}{\alpha(\varepsilon)}$. В отсутствие деформации уравнение (9) сводится к классическому

уравнению диффузии с коэффициентом диффузии $D_0 = D(0)$. Таким образом, в первом приближении D определяется экспериментальными значениями, полученными в статике [7].

Совместное решение (1) и (10) позволяет определить динамику перераспределения водорода при деформации материала. В большинстве случаев действием силы R_{21} на движение основной структуры в (1) в первом приближении можно пренебречь. Тогда определив v_1 из (1) и подставив в (10), получаем уравнение диффузии водорода в деформируемом твёрдом теле.

В качестве примера рассмотрим динамику накопления водорода вблизи центра стержня $-l \leq x \leq l$ под действием приложенных к его концам сил $F_0 \sin \omega t$. Рассматривая установившуюся стадию вибрационного нагружения и пренебрегая переходными процессами, запишем поле перемещений задачи (1) в виде

$$u(x, t) = u_0 \sin \omega t \sin \frac{\omega x}{c_1}$$

а соответствующее ему поле деформаций – в виде

$$\varepsilon(x, t) = u_x(x, t) = u_0 \sin \omega t \cos \frac{\omega x}{c_1},$$

где c_1 – скорость звука в материале стержня.

Предполагаем, что водород в начальный момент $t = 0$ распределён по стержню равномерно, а $D(\varepsilon) = D_0 - D_1 \varepsilon$ [6]. Будем искать перераспределение плотности водорода $\rho_2(x, t)$ при условии сохранения постоянства его массы в стержне.

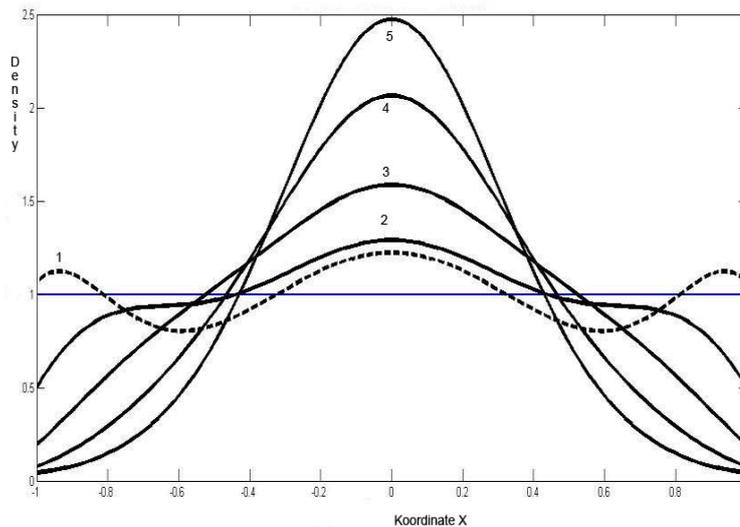


Рис 1. Распределение водорода для последовательных моментов времени (1-5)

В безразмерных координатах уравнение (10) имеет вид

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial X} \cdot \left((1 - \beta \varepsilon) \frac{\partial}{\partial X} \rho_2 \right) + \frac{\partial}{\partial X} \left((1 - \beta \varepsilon) \rho_2 W \right) \quad (11)$$

где $T = \frac{D_0 t}{l^2}$, $\beta = \frac{D_1}{D_0}$, $X = \frac{x}{l_0}$, $\varepsilon(X, T) = \varepsilon_0 \sin \Omega T \cos \lambda X$,

$W(X, T) = W_0 \sin \Omega T \sin \lambda X$, $\Omega = \frac{\omega l^2}{D_0}$, $W_0 = -\varepsilon_0 \lambda \left(\frac{c_1}{c} \right)^2$, $\lambda = \frac{\omega l}{c_1}$.

В силу симметрии задача (11) решалась в области $0 \leq X \leq 1$ при следующих начальных и граничных условиях:

$$\rho_2(X,0) = \rho_0, \quad \left. \frac{\partial \rho_2}{\partial X} \right|_{X=0} = 0, \quad \left. \left(\frac{\partial \rho_2}{\partial X} + \rho_2 W \right) \right|_{X=1} = 0$$

На рис. 1 показаны распределения водорода вдоль стержня длиной в последовательные моменты безразмерного времени T (кривые 1-5).

Для экспериментальных исследований на усталостное разрушение были взяты 10 образцов из сплава Al-Cu-Pb. Эти образцы были подвергнуты циклической нагрузке на растяжение. Результаты испытаний представлены в табл. 1.

Таблица 1. Результаты испытаний в зависимости от амплитуды и числа циклов нагружения

Номер образца	Амплитуда	Число циклов	Результат испытания
	МПа	millions.	
01	140	10	не разрушен
02	160	5,44	не разрушен
03	180	3,21	разрушен
04	180	3,60	разрушен
05	180	2,84	разрушен
06	180	1,02	не разрушен
07	180	0,84	не разрушен
08	180	0,35	не разрушен
09	180	0,25	не разрушен
10	0	0	

Для анализа содержания водорода из разрушенных и не разрушенных образцов вырезались цилиндры диаметром 7 мм и высотой 3 мм по схеме, представленной на рис.2.

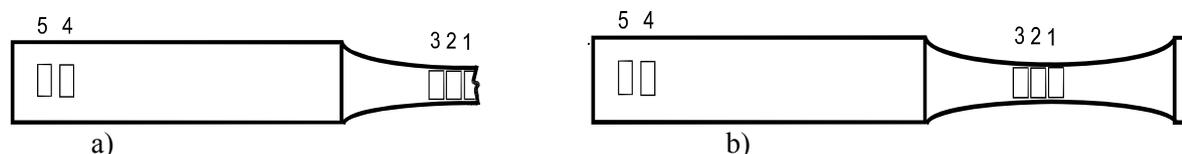


Рис.2. Схема выреза : а) для разрушенных и б) не разрушенных образцов

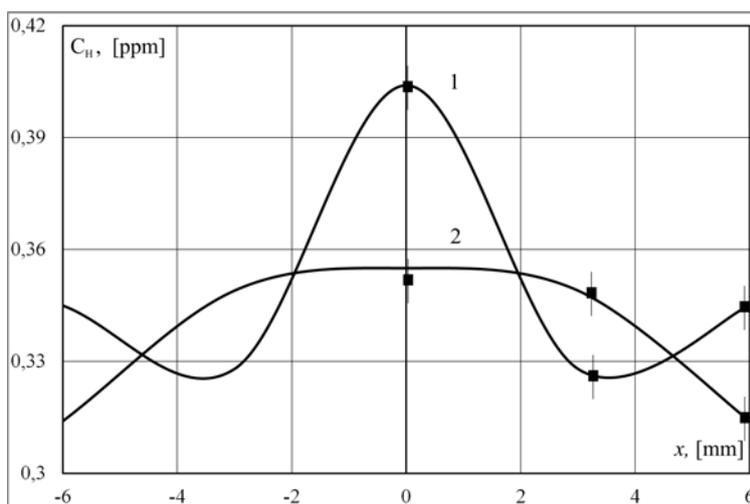


Рис.3. Распределение водорода по длине образца No. 01- 1 No.10- 2.

На рис.3 представлены распределения водорода по длине для образца 01 после 10 млн циклов при амплитуде 140 МПа и для эталонного образца 10, не подвергнутого нагружению.

В результате проведённых экспериментальных исследований получено не только содержание водорода в материале, но и его распределение в образце по энергиям связи. Анализ полученных результатов показывает, что в процессе накопления дефектов при циклических нагрузках происходит как объёмное перераспределение водорода, так и по энергиям в зоне растягивающих напряжений. Прослеживается корреляция между остаточным ресурсом и характером этого распределения: водород накапливается в зоне разрушения.

Накопление водорода в центральной части стержня, которое было обнаружено экспериментально (рис.3), хорошо согласуется с приведёнными выше теоретическими результатами (рис.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Баландин Ю.Ф., Горынин И.В., Звездин Ю.И., Марков В.Г. Конструкционные материалы АЭС. М.: «Энергоатомиздат», 1984. 47с.
2. Колачев Б. А. Водородная хрупкость металлов. М.: Metallurgia. 1985. 215с.
3. Крайко А.Н., Нигматулин Р.И., Старков В.К., Стернин Л.Е. Механика многофазных сред. Итоги науки и техники. Гидромеханика, т.6. М.: ВИНТИ, 1972. С.93-174.
4. Индейцев Д.А., Стерлин М.Д. Динамика перестройки твёрдого тела при физико-химических воздействиях. // Доклады РАН. 2011. Т.436. №3. С.328-331.
5. Бабичев А.П., Бабушкина Н.А., Братковский А.М. Физические величины./ Справочник . М.: Энергоатомиздат, 1991. 1234с.

Сведения об авторах%

Индейцев Дмитрий Анатольевич – директор Института проблем машиноведения РАН, (7 812)321 47 72, Dmitry.Indeitsev@gmail.com

Полянский Владимир Анатольевич – ведущий научный сотрудник Института проблем машиноведения РАН, (7 812)321 47 72, vapol@mail.ru

Семенов Борис Николаевич – доцент кафедры теории упругости Санкт-Петербургского государственного университета, математико-механический факультет, (7 812)428 69 89, semenov@bs1892.spb.edu

КОРРОЗИОННОЕ РАСТРЕСКИВАНИЕ НИЗКОЛЕГИРОВАННОЙ СТАЛИ ПРИ ЗАМЕДЛЕННОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ

Казанцев А.Г.

Рассматриваются результаты экспериментального исследования процесса замедленного деформационного коррозионного растрескивания (ЗДКР) низколегированной стали 10ГН2МФА в высокотемпературной воде при наличии отложений окислов меди и железа. Исследованы границы проявления ЗДКР в зависимости от параметров воды, уровня температуры, скорости деформации и состава отложений. Предложены критерии инициации и развития коррозионных трещин. Результаты расчётов сопоставляются с экспериментальными данными при статическом и циклическом нагружении.

Практика эксплуатации парогенераторов из стали 10ГН2МФА энергоблоков с реакторами ВВЭР-1000 свидетельствует о возможности растрескивания отдельных узлов данного оборудования с коррозионным поражением больших объёмов металла.

Анализ условий эксплуатации парогенераторов показал, что режимы нагружения в зонах повреждения характеризуются низкими скоростями деформации на уровне $10^{-6} - 10^{-7}$ 1/сек и наличием отложений окислов меди и железа.

Для более детального исследования условий образования и развития таких повреждений выполнена программа лабораторных исследований.

Испытания проводились на цилиндрических образцах диаметром 10 мм и компактных образцов толщиной 20-25мм с выкружкой.

При проведении испытаний цилиндрический образец устанавливали в тонкостенный стакан из нержавеющей стали, в котором помещался шлам нужного состава, рис.1. В компактном образце с выкружкой, (рис.2), шламом заполнялась выкружка.

Испытания проводились в автоклаве, установленном на испытательной машине “Автограф” (Шимадзу).

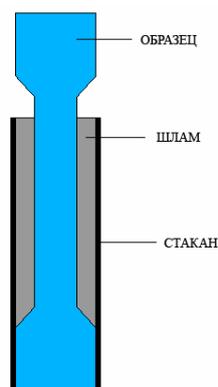


Рис.1. Образец на растяжение, рабочая часть которого контактирует со шламом.

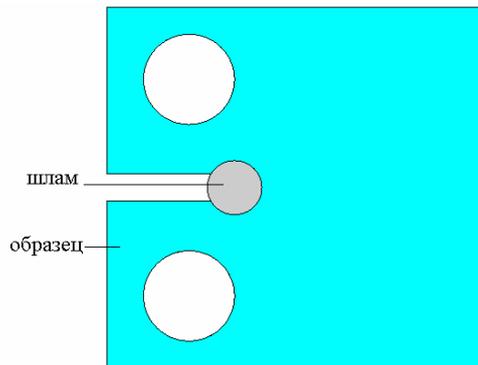


Рис.2. Компактный образец с выкружкой, заполненной шламом.

Вода в автоклаве предварительно барботировалась аргоном для удаления кислорода до концентрации $[O_2] \leq 0.005$ мг/кг, соответствующей теплоносителю I-ого контура. Температура воды составляла 100-300°C, водородный показатель в большинстве случаев был принят pH = 6.

Шлам изготавливали смешиванием порошка Fe_2O_3 и CuO. Активным компонентом в шламе, как показали испытания, является окись меди.

Испытания показали, что в определённом диапазоне температур и скоростей деформирования имеет место провал пластических свойств, разрушение образцов происходит без образования шейки с небольшими деформациями. Соответствующие зависимости относительного сужения образца приведены на рис.3-4. При проведении испытаний использовался шлам состава $75\%Fe_2O_3 + 25\%CuO$, характерного для коллекторов ПГВ-1000.

Минимальные значения пластичности соответствуют диапазону температур 180-290°C и скоростям деформации порядка $10^{-7}-10^{-6}$ с⁻¹. С увеличением скорости до 10^{-3} с⁻¹ эффект коррозионного растрескивания исчезает.

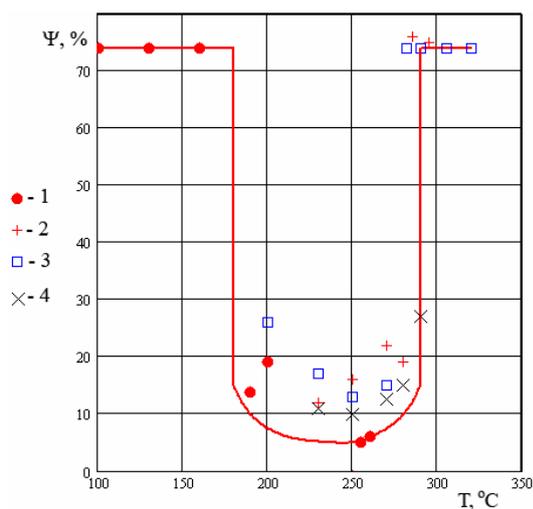


Рис.3. Влияние температуры на склонность к ЗДКР стали 10ГН2МФА в воде высоких параметров ($\dot{\epsilon} = 1,4 \cdot 10^{-7} \div 3 \cdot 10^{-7}$ 1/сек).

1 – бидистиллат, шлам; 2 – бидистиллат, $[O_2] = 2$ мг/кг; 3 – $[Na^+] = 0,5$ мг/кг; $[Cl^-] = 0,5$ мг/кг; $[O_2] = 4$ мг/кг; 4 – бидистиллат, $[O_2] = 4$ мг/кг;

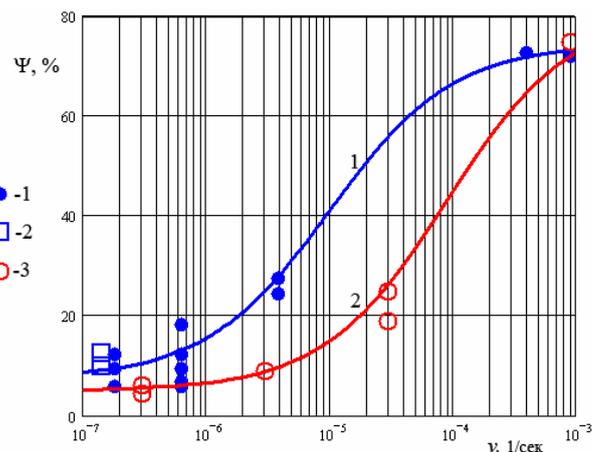


Рис.4. Зависимость относительного сужения от скорости нагружения. 1, 2 – в воде без шлама, $pH = 4 \div 11$, с кислородом до 4 мг/кг; 3 – бидистиллат, шлам.

Влияние концентрации CuO и Fe_2O_3 в шламе на величину относительного сужения образца при разрушении при скорости деформирования $\dot{\epsilon} = 3 \cdot 10^{-7}$ 1/сек ($T = 260^\circ C$) показано на рис. 5. По крайней мере, до значений концентрации CuO равной 10% в обескислороженной воде ЗДКР не проявляется, образцы разрушались с образованием шейки при величине сужения $\psi \approx 75\%$. При содержании CuO от 25 % и выше имеется провал пластичности.

Кривые деформирования цилиндрических образцов в воде при $T = 260^\circ C$ при наличии шлама $75\%Fe_2O_3 + 25\% CuO$ с варьированием водородного показателя приведены на рис.6. При повышении pH^{25} с 6 до 8.5 эффект коррозионного растрескивания сохранялся, относительное сужение при разрушении составляло $\Psi = 12\%$ (кривая 1). При дальнейшем повышении pH^{25} до 9.2 образцы разрушались вязко с образованием шейки без возникновения коррозионных трещин, при величине сужения около 75%. Эти данные показывают, что за счёт повышения pH до необходимого уровня, воздействие шлама, провоцирующего коррозионное растрескивание, может быть нейтрализовано.

Для создания условий, провоцирующих коррозионное растрескивание в компактных образцах с выкружкой, испытания проводились при скорости перемещения захватов

$v = 1$ мкм/мин. По данным расчёта методом конечных элементов в этом случае скорость локальных деформаций в вершине выкружки составляет $1,5 \cdot 10^{-6}$ 1/сек. Как видно из рис.3, эффект снижения пластичности при такой скорости деформации проявляется.

На рис.7 показаны кривые деформирования компактных образцов с выкружкой, полученные в условиях проявления ЗДКР ($T = 260^\circ C$, $pH = 6$) в контакте со шламом в обескислороженной воде – кривая 1 и без шлама в воде с концентрацией кислорода 4.5 мг/кг – кривая 2. В этих случаях в вершине выкружки наблюдалось возникновение коррозионных трещин без заметных пластических деформаций образца.

При испытании без шлама в воде с концентрацией кислорода до 1.5 мг/кг, а также при более высокой скорости деформирования (10^3 мкм/мин) наблюдались значительные пластические деформации и утяжка образца без возникновения трещин. Кривая деформирования для нагружения при высокой скорости также приведена на рис.7 (кривая 3).

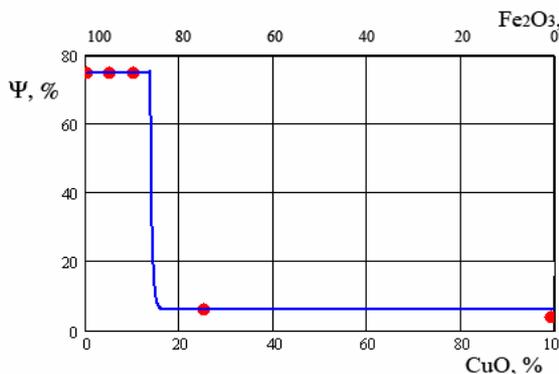


Рис.5. Влияние концентрации окиси меди в шламе на относительное сужение образца при разрушении (точки – экспериментальные данные).

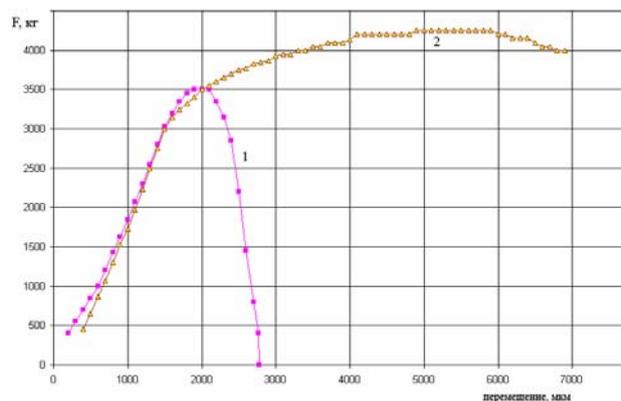


Рис.6. Диаграммы растяжения образцов при испытании с варьированием pH при T= 260 °С. 1 – pH²⁵ = 8.5; 2 – pH²⁵ = 9.2.

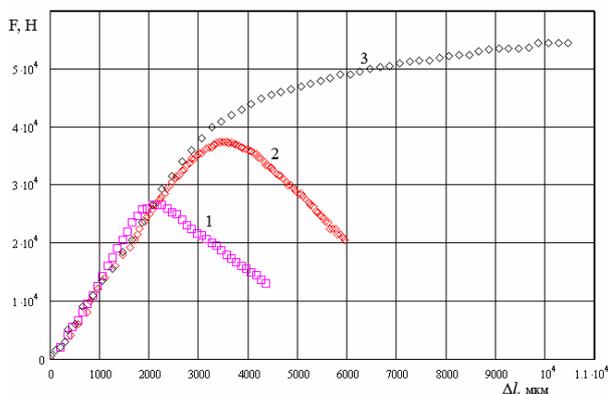


Рис.7. Диаграммы деформирования компактных образцов с выкружкой при T=260 °С, pH =6.

- 1 – $v = 1$ мкм/мин, со шламом;
- 2 – $v = 1$ мкм/мин, $[O_2] = 4.5$ мг/кг;
- 3 – $v = 10^3$ мкм/мин, $[O_2] = 4.5$ мг/кг.

В работе также была исследована возможность коррозионного разрушения стали 10ГН2МФА при низкоскоростном циклическом нагружении при наличии контакта образца со шламом состава 25%CuO+75% Fe₂O₃.

Нагружение осуществлялось по отнулевому циклу. Скорость нагружения в полцикле растяжения была принята такой же, как и в случае статического нагружения при ЗДКР, т.е. порядка $3 \cdot 10^{-7}$ 1/сек. Разгрузка с целью снижения трудоёмкости испытаний осуществлялась с более высокой скоростью. Длительность цикла составляла порядка одних суток.

Величина максимальных напряжений задавалась в интервале 0.8-1.0 от условного предела текучести. Полученные результаты испытаний в амплитудах напряжений приведены на рис.8 (точки 3).

На этом же рисунке в амплитудах условных напряжений показаны экспериментальные данные для стали 10ГН2МФА (жёсткое нагружение) при отсутствии коррозионной среды.

Как видно из рис.8, снижение амплитуды циклических напряжений при низкоскоростном нагружении зависит от уровня напряжений и может составлять до 20 раз.

Полученные результаты описывались зависимостью Ленджера в виде [3]:

$$\sigma_a = \frac{E \cdot e_c}{(4N_0)^{m_p}} + \frac{R_{-1}}{1 + \frac{R_{-1}}{R_m} \frac{1+r}{1-r}} \quad (1)$$

где $E = 2 \cdot 10^5$ МПа – модуль упругости стали 10ГН2МФА; e_c – характеристика пластичности, определяемая в соответствии с [3]; $R_{-1} = 0.4 \cdot R_m$ – предел выносливости при симметричном цикле

нагружения; R_m – временное сопротивление; r – коэффициент асимметрии цикла; $m_p = 0.5$.
Эффект снижения пластичности в условиях ЗДКР учитывался на основе соотношения

$$e_{с\text{ воздух}} = e_{с\text{ воздух}} \frac{\varepsilon_{f\text{ ЗДКР}}}{\varepsilon_{f\text{ воздух}}}$$

В таблице представлены значения параметров уравнения (1) для случая низкоскоростного нагружения со шламом и для нагружения в обычных условиях на воздухе. Величина $\varepsilon_{f\text{ ЗДКР}}$ определялась как среднее значение по данным испытаний трёх образцов металла мартеновской плавки.

Таблица. Параметры уравнения кривой усталости

Условия нагружения	e_f , %	e_c , %	R_{-1} , МПа	R_m , МПа	m_p
на воздухе	140	34,6	208	520	0.5
в воде со шламом	0.68	0.168	178	450	0.5

Расчётные кривые усталости для испытаний на воздухе ($r = -1$) и в коррозионной среде со шламом ($r = 0$) приведены на рис.8.

Как следует из рис.8, расчёт согласуется с экспериментальными данными. Полученный результат показывает возможность прогнозирования кривых усталости при низкоскоростном нагружении по данным статических испытаний в соответствующих условиях.

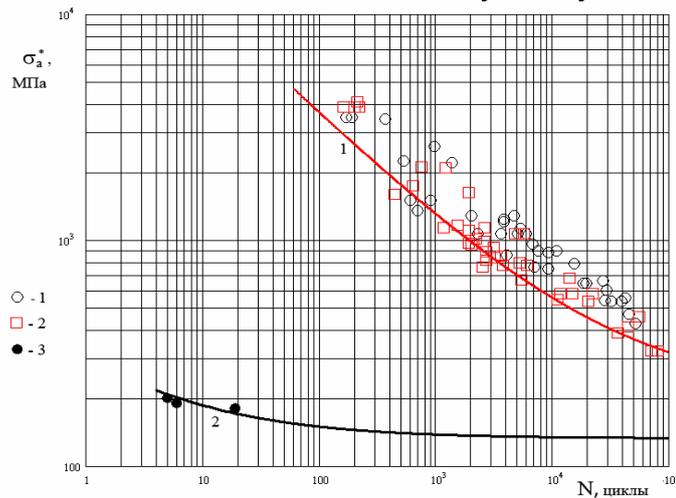


Рис.8. 1– кривая усталости (в амплитудах условных напряжений) для стали 10ГН2МФА на воздухе; 2 – расчётная кривая усталости при низкоскоростном нагружении. Точки – экспериментальные данные: 1 – $T=20$ °С; 2 – $T=350$ °С – испытания на воздухе; 3 – $T = 260$ °С – испытания при низкоскоростном нагружении со шламом.

Для приближённой оценки скорости роста коррозионных трещин при медленном циклическом нагружении можно воспользоваться подходом, изложенным в [4].

В соответствии с [4] скорость роста трещины при циклическом нагружении можно так же представить в виде

$$\frac{da}{dN} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2K_{1a}}{\varepsilon_f} \right)^2, \text{ где } K_{1a} \text{ – амплитуда коэффициента интенсивности деформаций.}$$

Отсюда, считая, что данное соотношение справедливо и в случае испытаний на воздухе и при медленном циклическом нагружении в воде, можно получить:

$$\varphi_{\text{ЗДКР}} = \frac{(da/dN)_{\text{ЗДКР}}}{(da/dN)_{\text{воздух}}} = \left(\frac{\varepsilon_{f_{\text{воздух}}}}{\varepsilon_{f_{\text{ЗДКР}}}} \right)^2,$$

где $(da/dN)_{\text{воздух}}$ – скорость роста трещины при циклическом нагружении на воздухе, $(da/dN)_{\text{ЗДКР}}$ – скорость роста трещины при низкоскоростном циклическом нагружении в воде в условиях проявления ЗДКР, $\varepsilon_{f_{\text{воздух}}}$ и $\varepsilon_{f_{\text{ЗДКР}}}$ – пластичность материала при испытании на воздухе и в воде соответственно.

При $\varepsilon_{f_{\text{воздух}}} = 140\%$ и $\varepsilon_{f_{\text{ЗДКР}}} = 0.68\%$ (при наличии шлама) увеличение скорости роста трещины при циклическом нагружении в воде при проявлении ЗДКР составляет $\varphi_{\text{ЗДКР}} = 4.24 \cdot 10^4$.

Так как для стали 10ГН2МФА скорость роста трещины на воздухе описывается уравнением Пэриса в виде $da/dN = C (\Delta K)^m$, где $m = 2.7$; $C = 2.8 \cdot 10^{-11}$ [5], то в условиях проявления ЗДКР получим $(da/dN)_{\text{ЗДКР}} = 1.19 \cdot 10^{-6} \cdot (\Delta K)^{2.7}$. Здесь da/dN в м/цикл, ΔK в МПа \cdot м^{0.5}. Данный результат, естественно, нуждается в экспериментальной проверке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Казанцев А.Г., Зубченко А.С., Григорьев В.А., Харина И.Л., Петрова О.Ю. Методы прогнозирования влияния состава высокотемпературной воды на склонность к замедленному деформационному коррозионному растрескиванию стали 10ГН2МФА. – Вопросы атомной науки и техники. Выпуск 23, Подольск, 2008, с.53-61.
2. Matocha K., Cicryt F. The Simultaneous Effect of Ageing and Water Environment on Subcritical Crack Growth and Fracture Behaviour Of 10GN2NFA Low Alloy Steel. Metallurgical Transactions A, 11A, 2006, 21-30.
3. ПН АЭ Г-7-002-86 «Нормы расчёта на прочность оборудования и трубопроводов атомных энергетических установок». М.: Энергоатомиздат, 1989. 525с.
4. Махутов Н.А. Деформационные критерии разрушения и расчёт элементов конструкций на прочность. М.: Машиностроение, 1981. 272с.
5. РД ЭО 0330–01. Руководство по расчёту на прочность оборудования и трубопроводов реакторных установок РБМК, ВВЭР И ЭГП на стадии эксплуатации. М.: Федеральное агентство по атомной энергии, 2004.

Сведения об авторе

Казанцев Александр Георгиевич – д.т.н., проф., заведующий отделом прочности ОАО НПО ЦНИИТМАШ (Центральный научно-исследовательский институт технологии машиностроения), Москва, Россия, +7 (495) 675-89-05.

E-mail: kazantsev_a_g@mail.ru

ВОЛНЫ ФЛОКА В УПРУГОМ СТЕРЖНЕ С ПЕРИОДИЧЕСКИ РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ ТОЧЕЧНЫМИ МАССАМИ

Казарян К.Б., Наслян А. Г.

Рассмотрена задача распространения продольной волны в упругом стержне с альтернативно чередующимися материалами при наличии сосредоточенных масс, расположенных в точках раздела материалов. В рамках теории Флоке получено дисперсионное уравнение относительно частоты колебаний. Показано, что в случае однородного стержня возможно существование волн Флоке, обусловленных наличием точечных масс.

Вопросы существования волн Флоке, волн, имеющих запретные диапазоны частот нераспространяющихся волн в периодически упругих структурах, исследованы в многочисленных работах, в частности, отметим [1–3]. В этих работах для одномерных периодических структур с кусочно-постоянными характеристиками альтернативно чередующегося материала установлены условия и причины их возникновения, диапазоны запретных частот. В случае однородных материалов с периодической структурой интерфейсов неполного контакта возможность существования волн Флока показана в [4,5]. В однородных упругих волноводах с периодическими альтернативными граничными условиями на стенках волноводов возникновение запретных диапазонов частот изучено в [6].

Рассмотрим бесконечный упругий стержень с альтернативно чередующимися материалами, разделённый в точках

$$x = \hat{x} + na; \quad x = \check{x} + na; \quad \hat{x} = (a-b)/2; \quad \check{x} = (a+b)/2; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

точечными массами M_1, M_2 (рис.1)

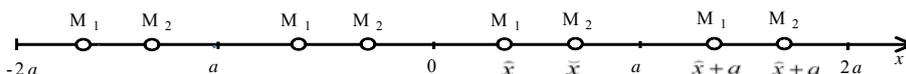


Рис.1

В элементарной периодически повторяющейся ячейке $x \in (0, a)$, в области $x \in (0, \hat{x})$, $x \in (\hat{x}, a)$, материал характеризуется модулем упругости E_1 и плотностью ρ_2 , в области $x \in (\check{x}, \bar{x})$ материал характеризуется параметрами E_2, ρ_2 .

Рассматривается задача распространения продольных волн в этой системе.

Данная задача требует решения следующих уравнений:

$$\frac{\partial \sigma_s}{\partial x} = \rho_s \frac{\partial^2 U_s}{\partial t^2} \tag{1}$$

$$\sigma_s = E_s \frac{\partial U_s}{\partial x}$$

при следующих условиях неполного контакта:

$$U_1(\tilde{x}, t) = U_2(\tilde{x}, t)$$

$$\sigma_1(\tilde{x}, t) - \sigma_2(\tilde{x}, t) = -\frac{M_1}{S} \frac{\partial^2 U_1(\tilde{x}, t)}{\partial t^2}$$

$$U_2(\tilde{x}, t) = U_3(\tilde{x}, t)$$

$$\sigma_2(\tilde{x}, t) - \sigma_3(\tilde{x}, t) = -\frac{M_2}{S} \frac{\partial^2 U_2(\tilde{x}, t)}{\partial t^2}$$

и условий Флоке

$$U_1(0) = \exp(ika)U_2(a)$$

$$\sigma_1(0) = \exp(ika)\sigma_2(a)$$

В (2) S – площадь поперечного сечения стержня.

Представляя $U_s(x, t)$ в виде монохроматической волны

$$U_s(x, t) = U_{0s}(x) \exp(i\omega t),$$

решения $U_{0s}(x)$ запишутся в виде:

$$U_{10} = A_1 \sin(px) + B_1 \cos(px)$$

$$U_{20} = A_2 \sin(qx) + B_2 \cos(qx)$$

$$U_{30} = A_3 \sin(px) + B_3 \cos(px)$$

$$p = \omega \sqrt{\rho_1/E_1}; \quad q = \omega \sqrt{\rho_2/E_2}$$

Удовлетворяя решения (5) условиям неполного контакта и условиям Флоке, получим следующее дисперсионное уравнение:

$$E_1 E_2 p q (1 + \lambda^2) = \lambda E_1 q \cos(aq - bq) \left[2E_2 p \cos(bp) + \frac{\omega^2 (M_1 + M_2)}{S} \sin(bp) \right] +$$

$$+ \frac{\lambda E_2 \omega^2 (M_1 + M_2) p \cos(bp) \sin(aq - bq)}{S} +$$

$$+ \lambda \sin(bp) \sin(aq - bq) \left(\frac{\omega^4 M_1 M_2}{S^2} - E_1^2 p^2 - E_1^2 q^2 \right)$$

Принимая во внимание

$$\frac{1 + \lambda^2}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} + \lambda = 2 \cos(ka) \quad ; \quad S = \frac{M}{\rho_1(a-b) + \rho_2 b}$$

где M – масса стержня длины a , уравнение (7) запишется в виде:

$$\cos(ka) = F(\Omega) - S(\Omega) - K(\Omega)$$

Здесь

$$S(\Omega) = \frac{(m_1 + m_2)(1 - \beta + \beta\gamma)\Omega}{2} [Z \cos(\Omega - \Omega\beta) + \cos(Z\Omega\gamma\beta)] \sin(Z\Omega\gamma\beta)$$

$$F(\Omega) = \cos(Z\Omega\gamma\beta) \cos(\Omega - \Omega\beta) - \frac{(1 + Z^2) \sin(Z\Omega\gamma\beta) \sin(\Omega - \Omega\beta)}{2Z} \quad (9)$$

$$K(\Omega) = \frac{m_1 m_2 (1 - \beta + \beta\gamma)^2 Z \Omega}{2} \sin(\Omega - \Omega\beta) \sin(Z\Omega\gamma\beta)$$

В (9) использованы следующие безразмерные параметры:

$$\beta = b/a, \gamma = \rho_2/\rho_1, Z = Z_1/Z_2, \Omega = \omega a \sqrt{\rho_1/E_1}, m_1 = M_1/M; m_2 = M_2/M.$$

Отметим, что $Z_1 = \sqrt{\rho_1 E_1}, Z_2 = \sqrt{\rho_2 E_2}$ есть импедансы альтернативных материалов стержня, играющие существенную роль в задачах распространения волн в периодических средах [7,8].

При $m_1 = m_2 = 0$ имеем следующее дисперсионное уравнение, которое впервые было получено и исследовано в работе [1]:

$$\cos(ka) = F(\Omega) \quad (10)$$

Когда импедансы альтернативных материалов равны $Z = 1$, имеем $\Omega = ka$.

Если стержень является однородным $Z_1 = Z_2, \gamma = 1$, то в этом случае имеем следующее дисперсионное уравнение:

$$\cos(ka) = (4 - m_1 m_2 \Omega^2) \cos(\Omega) + \Omega [m_1 m_2 \Omega \cos(\Omega - 2\Omega\beta) + 2(m_1 + m_2) \sin(\Omega)] \quad (11)$$

Когда сосредоточенные массы равны ($m_1 = m_2 = m$) и расположены на одинаковом расстоянии друг от друга ($\beta = 1/2$), имеем

$$\cos(ka) = \left(1 - \frac{\Omega^2 m^2}{4}\right) \cos(\Omega) + \Omega m \sin(\Omega) + \frac{\Omega^2 m^2}{4} \quad (12)$$

Дисперсионные уравнения (9,11,12) определяют волновое число k в зависимости от частоты Ω . Если при фиксированных значениях параметров $\beta, \gamma, Z, m_1, m_2$ имеются области значений Ω , для которых $F(\Omega) > 1$, где функция $F(\Omega)$ есть модуль правых частей уравнений (9,11,12), то в этом случае волновое число k не является действительным и, следовательно, в этой области частот распространение волны не имеет места.

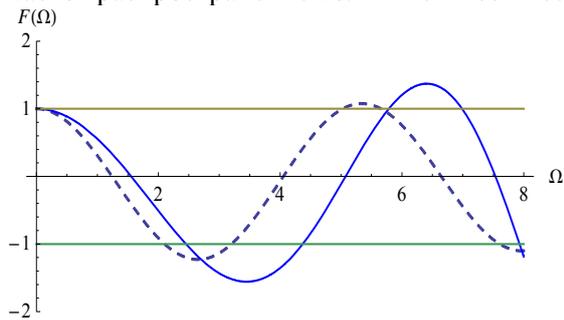


Рис.2

На рис.2 для стержня с параметрами $\beta = 0.3, \gamma = 0.8, Z = 2, m_1 = 0.3, m_2 = 0.1$

приведены графики зависимости функции $F(\Omega)$ от безразмерной частоты Ω .

Последовательности точек значений частот Ω_i , где $F(\Omega_i) = \pm 1$ определяют границы зон записания частот. График с пунктирной линией соответствует случаю $m_1 = m_2 = 0$.

Покажем теперь существование зон записания частот для уравнения (12). Функция $F(\Omega)$ в точке $\Omega = 2\pi$ равна единице $F(2\pi) = 1$, а производная в этой точке $F'(2\pi) = 8m\pi$. Откуда следует, что $F(2\pi + \varepsilon) > 1$ для сколь угодно малых значений параметра $m > 0$. Разлагая функцию в ряд в точке $\Omega = 0$, получим:

$$F(\Omega) \approx 1 + (m - 1/2)\Omega^2 + O(\Omega^4)$$

откуда следует, что при $m > 1/2$ начальная точка запретной зоны частот перемещается в точку $\Omega = 0$. При $m < 1/2$ начальная точка запретной зоны равна $\Omega = 2\pi$.

Таким образом, нами установлена возможность существования волн Флоке в упругом однородном стержне, обусловленная наличием периодической структуры присоединённых точечных масс.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. H. Lee, Wei H. Yang, On waves in composite materials with periodic structure. // Siam Journal. Appl. Math. Vol.25, No.3, p.493–499, 1973.
2. R. E. Camley, B. Djafari-Rouhani L. Dobrzynski, A. A. Maradudin, Transverse elastic waves in periodically layered infinite and semi-infinite media. // Physical Review B., volume 27, number 12, 1983, p.7319-7228.
3. A. Velo, E. Bruder, N. Rodriguez, G. Gazonas, E. Bruder, Recursive Dispersion Relations in One-Dimensional Periodic Elastic Media //SIAM Journal on Applied Mathematics. Vol.69, No.3, pp. 670–689. 2008.
4. Казарян К.Б., Казарян Р.А. Изгибные волны Флока в пластинке-полосе с периодической структурой интерфейсов. Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред //Труды VII международной конференции, Горис–Степанакерт: Сентябрь 19–23. 2011. С.194-199.
5. K.B. Ghazaryan, D.G. Piliposyan, Interfacial effects for shear waves in one dimensional periodic piezoelectric structure. // Journal of Sound and Vibration, Elsevier publ. v.330, December, 2011, p.6456–6466.
6. Adams S., Craster R, Guenneau S. Bloch waves in periodic multi-layered acoustic waveguides. Proceedings London Royal Society A, 464(2008), pp.2669-2692.
7. G.T. Piliposian, A.S. Avetisyan, K.B. Ghazaryan, Shear wave propagation in periodic phononic/photonic piezoelectric medium. // International Journal Wave Motion, Elsevier publisher, v.49, iss.1, January, 2012, p.125–134.
8. Аветисян А.С., Казарян К.Б. Волны в “фонон-фотон” кристаллах и импеданс. //В сб.: “Проблемы механики деформируемого твёрдого тела”, посвящ. 90-летию академика НАН Армении С.А. Амбарцумяна. Ереван. 2012. С.15–22.

Сведения об авторах:

Казарян Карен Багратович – доктор физ.-мат наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института механики НАН РА. Тел.: (374 10) 22 73 95, (374 955) 22 73 95,

E-mail: ghkarren@gmail.com

Наслян Арменуи Гензеловна – ассистент Ереванского Государственного медицинского университета им. М. Гераци, кафедра “Мед. физики, математики и информатики”

Тел.: (374 10) 472865, (374 55) 472865

E-mail: armine_n@bk.ru

МАГНИТОУПРУГИЕ ВОЛНЫ В ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕМ СЛОЕ В ПРИСУТСТВИИ ПРОДОЛЬНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Калиджян Л.Р.

Рассматривается распространение волн в бесконечном электропроводящем упругом слое с толщиной b . Слой в начальном состоянии находится в постоянном магнитном поле параллельным сторонам ограничивающим слой. На поверхностях слоя принимаются условия скользящего контакта или условия Навье. Получены численные результаты для фазовой скорости волны, при разных значениях величины магнитного поля и толщины b .

1. Плоская деформация. Идеальный проводник. Рассмотрим задачу распространения волн в таких упругих телах, для которых существенную роль в формировании поля играет не только взаимодействие волн со свободной границей, но и взаимовлияние границ. В качестве объектов, которые будут рассмотрены, используется бесконечный слой с толщиной b , которое в начальном состоянии находится в постоянном магнитном поле, которое параллельно сторонам, ограничивающим слой. Слой расположен в прямоугольной декартовой координатной системе (x, y, z) и волны не зависят от координаты z . Пусть слой занимает область $(-\infty < x < \infty, 0 < y < b, -\infty < z < \infty)$.

Вектор напряженности магнитного поля задается в виде

$$\vec{H}_0 = H_{01} \hat{i}$$

Уравнение магнитоупругих волн для идеального проводника имеет вид [1]:

$$c_i^2 \Delta u + (c_i^2 - c_i^2) \text{grad div } \vec{u} + \frac{\mu}{4\pi\rho} \left[\text{rot rot}(\vec{u} \times \vec{H}_0) \right] \times \vec{H}_0 = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Проектируя и имея в виду, что $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ и $\vec{H}_0 = H_{01} \hat{i}$, получим уравнения распространения волн для задач плоской деформации

$$c_i^2 \Delta u + (c_i^2 - c_i^2) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad v_1^2 = \frac{H_{01}^2 \mu}{4\pi\rho} \quad (1.1)$$

$$(c_i^2 + v_1^2) \Delta v + (c_i^2 - c_i^2) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

Компоненты возмущенного электромагнитного поля определяются следующим образом :

$$\begin{aligned} e_1 &= 0 & e_2 &= -\frac{\mu}{c} H_{01} \frac{\partial w}{\partial t} & e_3 &= \frac{\mu}{c} H_{01} \frac{\partial v}{\partial t} \\ h_1 &= -H_{01} \frac{\partial v}{\partial y} & h_2 &= H_{01} \frac{\partial v}{\partial x} & h_3 &= H_{01} \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Теперь напишем условия скользящего контакта [1]

$$v = 0, \quad \sigma_{21} + t_{21} = t_{21}^{(e)}, \quad \mu h_2 = h_2^{(e)} \quad \text{при} \quad y = 0, b, \quad (1.3)$$

где

$$t_{21} = \frac{H_{01}^2 \mu}{4\pi} \frac{\partial v}{\partial x} \quad t_{21}^{(e)} = \frac{H_{01}}{4\pi} h_2^{(e)} \quad e = 1, 2 \quad (1.4)$$

Уравнения электродинамики в области вне пластинки:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_2^{(e)}}{\partial x} - \frac{\partial h_1^{(e)}}{\partial y} &= \frac{1}{c} \frac{\partial e_3^{(e)}}{\partial t} & \frac{\partial h_1^{(e)}}{\partial x} + \frac{\partial h_2^{(e)}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial e_3^{(e)}}{\partial y} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial h_1^{(e)}}{\partial t} & \frac{\partial e_3^{(e)}}{\partial x} &= \frac{1}{c} \frac{\partial h_2^{(e)}}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.5)$$

С учётом (1.2), (1.4) граничные условия (1.3) будут :

$$v = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0, b \quad (1.6)$$

то есть нет необходимости решения внешней задачи.

2. Решение задачи. Искомые решения задачи представим в виде :

$$u = u_0(y) \exp i(\omega t - kx) \quad v = v_0(y) \exp i(\omega t - kx) \quad (2.1)$$

Вставляя эти решения в (1.1), получим:

$$\begin{cases} u_0'' + k^2 \theta^{-1} (\theta \eta - 1) u_0 - ik \theta^{-1} (1 - \theta) v_0' = 0 \\ v_0'' + k^2 \frac{\theta}{1 + \theta \alpha} (\eta - 1 - \alpha) v_0 - ik \frac{1 - \theta}{1 + \theta \alpha} u_0' = 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

где

$$\eta = \frac{\omega^2}{k^2 c_t^2} \quad \frac{v_1^2}{c_t^2} = \alpha \quad \frac{c_t^2}{c_l^2} = \theta \quad \theta \alpha = \frac{v_1^2}{c_l^2} \quad (2.1)^*$$

Ищем решения системы (2.2) в виде

$$u_0 = A e^{kpy} \quad v_0 = B e^{kpy} \quad (2.3)$$

Подстановка (2.3) в (2.2) даёт:

$$\begin{cases} \left[p^2 + \theta^{-1} (\theta \eta - 1) \right] A - i \theta^{-1} (\theta \eta - 1) p B = 0 \\ \left[p^2 + \frac{\theta}{1 + \theta \alpha} (\eta - 1 - \alpha) \right] B - i \frac{1 - \theta}{1 + \theta \alpha} A = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

Равенство нулю детерминанта системы (2.4) даёт:

$$p^4 + \left[\eta - 1 - \alpha + \frac{\theta \eta - 1}{1 + \theta \alpha} - \frac{\alpha^2 \theta}{1 + \theta \alpha} \right] p^2 + \frac{(\eta - 1 - \alpha)(\theta \eta - 1)}{1 + \theta \alpha} = 0 \quad (2.5)$$

Сделаем следующие обозначения:

$$p_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\gamma} \right)^{1/2}, \quad p_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\gamma} \right)^{1/2},$$

где

$$\beta = \eta - 1 - \alpha + \frac{\theta \eta - 1}{1 + \theta \alpha} - \frac{\alpha^2 \theta}{1 + \theta \alpha}, \quad \gamma = \frac{(\eta - 1 - \alpha)(\theta \eta - 1)}{1 + \theta \alpha} \quad (2.6)$$

получим, что корни уравнения (2.5) будут:

$$\pm i p_1, \pm i p_2 \quad (2.7)$$

Следовательно, общее решение системы (2.2) будет:

$$\begin{aligned} u_0 &= A_1 \cos k p_1 y + A_2 \sin k p_1 y + A_3 \cos k p_2 y + A_4 \sin k p_2 y \\ v_0 &= B_2 \cos k p_1 y + B_1 \sin k p_1 y + B_4 \cos k p_2 y + B_3 \sin k p_2 y \end{aligned} \quad (2.8)$$

В частном случае, когда $\alpha = 0$

$$p_1 = \sqrt{\eta - 1} \quad p_2 = \sqrt{\theta \eta - 1} \quad (2.9)$$

Произвольные постоянные в (2.8) должны быть связаны согласно (2.4). Согласно корням (2.7) эти соотношения будут:

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{p_1^2 - \theta^{-1} (\theta \eta - 1)}{\theta^{-1} (1 - \theta) p_1} A_1 & B_2 &= -\frac{p_1^2 - \theta^{-1} (\theta \eta - 1)}{\theta^{-1} (1 - \theta) p_1} A_2 \\ B_3 &= \frac{p_2^2 - \theta^{-1} (\theta \eta - 1)}{\theta^{-1} (1 - \theta) p_2} A_3 & B_4 &= -\frac{p_2^2 - \theta^{-1} (\theta \eta - 1)}{\theta^{-1} (1 - \theta) p_2} A_4 \end{aligned} \quad (2.10)$$

3. Граничные условия (1.6), с учётом (2.1) приводятся к виду:

$$v_0 = 0, \quad u_0' = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, b \quad (3.1)$$

Подстановка (2.8) в граничные условия (3.1) даст

$$\begin{cases} B_2 + B_4 = 0 & p_1 A_2 + p_2 A_4 = 0 \\ -A_1 p_1 \sin p_1 \zeta + A_2 p_1 \cos p_1 \zeta - A_3 p_2 \sin p_2 \zeta + A_4 p_2 \cos p_2 \zeta = 0 \\ B_2 \cos p_1 \zeta + B_1 \sin p_1 \zeta + B_4 \cos p_2 \zeta + B_3 \sin p_2 \zeta = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\text{где } \zeta = kb \quad (3.3)$$

Так как B_i ($i = \overline{1,4}$) выражается через A_i ($i = \overline{1,4}$) по формулам (2.10), то система (3.2) есть система четырёх однородных уравнений относительно четырёх произвольных постоянных A_i ($i = \overline{1,4}$). Равенство нулю детерминанта системы (3.2) определяет уравнение относительно безразмерного параметра η , характеризующего искомую фазовую скорость магнитоупругой волны.

Указанное дисперсионное уравнение получается в виде :

$$(p_1^2 - p_2^2)\theta^{-1}(\theta\eta - 1)\sin p_1 \zeta \sin p_2 \zeta = 0 \quad (3.4)$$

Из этого следует:

$$\sin p_1 \zeta = 0, \quad p_1 \zeta = n\pi, \quad \sin p_2 \zeta = 0, \quad p_2 \zeta = m\pi \quad (3.5)$$

Подстановка выражений p_1, p_2 из (2.6) приводят к уравнениям относительно η .

Если в уравнении (2.5) пренебречь малым слагаемым $\alpha^2\theta$, то получим

$$p_1 \approx \sqrt{\eta - 1 - \alpha} \quad p_2 \approx \sqrt{\frac{\theta\eta - 1}{1 + \theta\alpha}} \quad (3.6)$$

Из (3.5) с учётом (3.6) и (2.1)* получается выражение для фазовых скоростей поперечных и продольных волн:

$$\frac{\omega^2}{k^2} = c_t^2 \left[1 + \alpha + \left(\frac{n\pi}{\zeta} \right)^2 \right] \quad \frac{\omega^2}{k^2} = c_l^2 \left[1 + \alpha + (1 + \theta\alpha) \left(\frac{m\pi}{\zeta} \right)^2 \right] \quad (3.7)$$

В случае отсутствия магнитного поля ($\alpha = 0$) получается известное соотношение [2].

Интересно отметить, что при $n=0$ магнитное поле влияет только на скорость поперечной волны.

Внизу приведены примеры при разных значениях ζ и α , где видно, что при $\alpha^2\theta \approx 0$ и $\alpha^2\theta \neq 0$ значения продольных волн совпадают. А это значит, что $\alpha^2\theta$ почти всегда можем пренебречь.

$$\theta = 0.25, \quad \alpha^2\theta \approx 0$$

Таблица 1

	$\alpha=0$	$\alpha=0,01$	$\alpha=0,02$	$\alpha=0,03$	$\alpha=0,04$
$\zeta=1$	10.8596 43.4384	10.8696 43.537	10.8796 43.6356	10.8896 43.7342	10.8996 43.8328
$\zeta=4$	1.61623 6.4649	1.62623 6.47106	1.63623 6.47722	1.64623 6.48339	1.65623 6.48955
$\zeta=5$	1.39438 5.57754	1.40438 5.58148	1.41438 5.58542	1.42438 5.58937	1.43438 5.59331

$\theta = 0.25, \alpha^2 \theta \neq 0$

Таблица 2

	$\alpha=0$	$\alpha=0,01$	$\alpha=0,02$	$\alpha=0,03$	$\alpha=0,04$
$\zeta=1$	10.8596 43.4384	10.8696 43.537	10.8797 43.6355	10.8899 43.7339	10.9001 43.8323
$\zeta=4$	1.61622 6.4649	1.62624 6.47105	1.63628 6.47717	1.64634 6.48327	1.65643 6.48934
$\zeta=5$	1.39438 5.57754	1.40439 5.58147	1.41442 5.58539	1.42447 5.58928	1.43454 5.59316

4. Теперь рассмотрим распространение волн, когда на одной стороне даны условия скользящего контакта, а на другой – условия Навье.

Условия Навье:

$$y = b: \quad u = 0 \quad ; \quad \sigma_{22} + t_{22} = t_{22}^{(e)} \quad ; \quad e_3 = e_3^{(e)} \quad ; \quad \mu h_2 = h_2^{(e)} \quad (4.1)$$

$$t_{22} = \frac{\mu}{4\pi} H_{01}^2 \frac{\partial v}{\partial y} \quad t_{22}^{(e)} = -\frac{1}{4\pi} H_{01} h_1^{(e)},$$

или

$$u = 0 \quad ; \quad \left(v + 2G + \frac{\mu}{4\pi} H_{01}^2 \right) \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{4\pi} H_{01} h_1^{(e)} \quad ; \quad e_3 = e_3^{(e)} \quad ; \quad \mu h_2 = h_2^{(e)}$$

Здесь нам необходимо решать также внешнюю задачу . Решения этой задачи представим в виде:

$$e_3^{(e)} = C_2 e^{-k\sqrt{1-\theta_0}\eta y} \exp i(\omega t - kx) \quad (4.2)$$

$$h_1^{(e)} = -C_2 \frac{ick\sqrt{1-\theta_0}\eta}{\omega} e^{-k\sqrt{1-\theta_0}\eta y} \exp i(\omega t - kx) \quad (4.3)$$

$$h_2^{(e)} = -C_2 \frac{ck}{\omega} e^{-k\sqrt{1-\theta_0}\eta y} \exp i(\omega t - kx), \quad (4.4)$$

где $\theta_0 = \frac{c_t^2}{c^2}$

Для решения задачи нам необходимо рассмотреть три случая:

4.1.Рассмотрим случай, когда граничные условия имеют вид (4.1) без $\mu h_2 = h_2^{(e)}$. Подставив (4.2) и (4.3) в граничные условия (4.1) и имея в виду выражения из (2.10) и (1.2) и добавляя ещё решения при условиях скользящего контакта, будем иметь:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(v + 2G + \frac{\mu}{4\pi} H_{01}^2 \right) [q_1 p_1 A_1 \cos p_1 \zeta + q_2 p_2 A_3 \cos p_2 \zeta] = C_2 \frac{icH_{01}\sqrt{1-\theta_0}\eta}{\omega} e^{-k\sqrt{1-\theta_0}\eta b} \\ \frac{\mu}{c} H_{01} [q_1 A_1 \sin p_1 \zeta + q_2 A_3 \sin p_2 \zeta] = C_2 \frac{e^{-k\sqrt{1-\theta_0}\eta b}}{i\omega} \\ A_1 \cos p_1 \zeta + A_3 \cos p_2 \zeta = 0, \end{array} \right. \quad (4.5)$$

где

$$q_1 = \frac{p_1^2 - \theta^{-1}(\theta\eta - 1)}{\theta^{-1}(1-\theta)p_1} \quad q_2 = \frac{p_2^2 - \theta^{-1}(\theta\eta - 1)}{\theta^{-1}(1-\theta)p_2}$$

Найдём решения, когда $H_{01} = 0$

$$(q_1 p_1 - q_2 p_2)(v + 2G) \cos p_1 \zeta \cos p_2 \zeta = 0$$

$$\cos p_1 \zeta = 0 \quad p_1 \zeta = \frac{n\pi}{2} \quad \cos p_2 \zeta = 0 \quad p_2 \zeta = \frac{n\pi}{2} \quad (4.6)$$

$$\frac{\omega^2}{k^2} = c_i^2 \left[1 + \left(\frac{n\pi}{\zeta} \right)^2 \right] \quad \frac{\omega^2}{k^2} = c_i^2 \left[1 + \left(\frac{n\pi}{\zeta} \right)^2 \right]$$

А в случае $H_{01} \neq 0$ детерминант имеет вид:

$$\frac{\sqrt{\beta^2 - 4\gamma p_1 p_2 (\theta^{-1} + \alpha)}}{4\pi\alpha\sqrt{1 - \theta_0\eta}} - \left[(p_2^2 - \theta^{-1}(\theta\eta - 1)) p_2 \operatorname{tg} p_2 \zeta - (p_1^2 - \theta^{-1}(\theta\eta - 1)) p_1 \operatorname{tg} p_1 \zeta \right] = 0 \quad (4.7)$$

4.2. Найдём решения, когда наши граничные условия имеют вид (4.1) без $e_3 = e_3^{(e)}$.

В этом случае детерминант имеет тот же вид, что (4.7), т.е. детерминанты совпадают.

4.3. Интересный результат получается, когда в граничных условиях $t_{22} \gg t_{22}^{(e)}$. В этом случае граничные условия будут:

$$u = 0 \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

А это значит, что здесь тоже нет необходимости решать внешнюю задачу. Детерминант получается в виде:

$$\left[p_2^2 - p_1^2 \right] \cos p_1 \zeta \cos p_2 \zeta = 0$$

$$\frac{\omega^2}{k^2} = c_i^2 \left[1 + \alpha + \left(\frac{n\pi}{\zeta} \right)^2 \right] \quad \frac{\omega^2}{k^2} = c_i^2 \left[1 + (1 + \theta\alpha) \left(\frac{n\pi}{\zeta} \right)^2 \right]$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Белубекян М.В. Введение в теорию магнитоупругости : Ереван: 1997. 34с.
2. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах: Киев: «Наукова Думка», 1981. 284с.

Сведения об авторе:

Калиджян Лилит Размиковна – стажёр-исследователь Института механики НАН РА

Тел.: (37493) 74-04-41 , (37491) 16-32-22

Е-mail: lilit_k@mail.ru

СОПРОТИВЛЯЕМОСТЬ УСАДКЕ БЕТОНА РАЗЛИЧНЫХ ЗОН ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ МАССИВОВ

Карапетян К.А.

Исследованию закономерности изменения сопротивляемости бетона усадке по поперечному сечению массивных элементов посвящены весьма немногочисленные работы. В этих исследованиях, однако, не учитывалось влияние возрастного фактора на указанную закономерность.

Настоящая работа посвящена изучению сопротивляемости бетона усадке в различных зонах сечения массивов с учётом возраста материала.

В проявлениях деформаций усадки среди других факторов важную роль играют капиллярные явления, имеющие место в микропорах бетона в связи с изменением гигрометрического равновесия в этих порах и в окружающей среде, а также вязкость гелевой структурной составляющей цементного камня [1, 2]. Указанные факторы весьма чувствительны к влажности, величина которой, как известно, сильно изменяется по поперечному сечению массивных элементов [3, 4].

Распределение деформации усадки по поперечному сечению массивов прямым методом (информацию об усадке снимают с датчиков, вложенных в соответствующие зоны сечения массивов при их изготовлении) исследовано в работах [5, 6], а непрямым методом (на опытных образцах, вырезанных из различных зон сечения) – в работе [7]. На основе этих исследований, однако, невозможно составить представление о роли возрастного фактора при указанных изменениях, поскольку все они были проведены на образцах конкретного возраста к моменту проведения опытов.

В данной работе приводятся и обсуждаются результаты экспериментального исследования сопротивляемости усадке бетона различных зон поперечного сечения массивных элементов с учетом возраста.

В качестве массивов (исходных элементов) служили цилиндры диаметром 57 см и высотой 25 см, изготовленные из литоидпемзобетона состава в массе 1:1,43:2,50, $B/C = 0,86$, $C = 294$ кг/м³. Для приготовления бетона применялись песок ($\gamma_n = 1117$ кг/м³), щебень ($\gamma_{щ} = 834$ кг/м³) с фракцией 5-20 мм из литоидной пемзы, взятой из карьера Джрабер (Республика Армения) и портландцемент марки 50 МПа из Арагатского цементно-шиферного завода.

Сразу после формовки верхние торцы исходных цилиндров были закрыты металлическими листами с целью исключения их преждевременного обезвоживания. После расформовки, которая была проведена через 5 суток, оба торца массивов были покрыты несколькими слоями расплавленного парафина и слоем алюминиевой фольги так, что высыхание или влагопоглощение могло происходить только с их боковых поверхностей. В таком состоянии массивные цилиндры до момента выбуривания из них опытных образцов в различных возрастах хранились в лабораторном помещении при температуре окружающей среды $22 \pm 4^\circ\text{C}$ и относительной влажности $63 \pm 7\%$.

Опытные образцы-цилиндры с диаметром 5,55 см и высотой 22 см были получены методом выбуривания из различных зон поперечного сечения исходных массивов (рис.1) в возрасте 28 сут.; 3 мес.; 6 мес. и 1 года. Для имитации условий нахождения бетона в ядровой части массивов (зоны II–IV, рис.1) опытные образцы, выбуренные из этой части, сразу гидроизолировались. Образцы же, выбуренные из периферийного высыхающего слоя массивов (зона I, рис.1), толщина которого при температурно-влажностных условиях Армении составляет 8-10 см [8], были оставлены без гидроизоляции. В каждом возрасте из указанных разновидностей было выбурено и испытано по 3 образца-близнеца. Температура лабораторного помещения в период проведения измерений усадочных деформаций указанных образцов составляла $22 \pm 5^\circ\text{C}$, а относительная влажность – $58 \pm 12\%$.

Проведённые измерения показали, что деформации усадки опытных образцов, выбуренных из ядра поперечного сечения массивов в рассматриваемом каждом возрасте, практически не отличались друг от друга. Учитывая это, анализ полученных результатов был осуществлён на основе сравнения данных, полученных в наружных слоях массивов с усреднёнными данными их ядровой части.

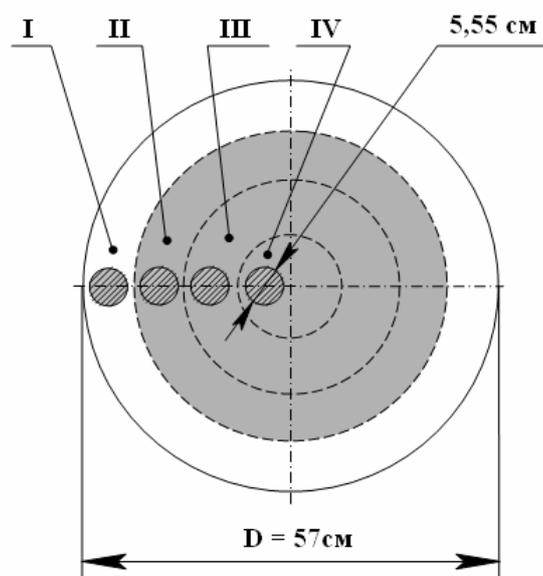


Рис.1. Зоны поперечного сечения массивного литоидпемзобетонного цилиндра, из которых были выбурены опытные образцы

Согласно результатам исследований, представленным на рис.2, нарастание во времени усадочных деформаций опытных образцов, выбуренных из периферийных слоев литоидпемзобетонных массивов, происходит немонотонно. Как нетрудно заметить из сравнения сроков спада усадочных деформаций, немонотонность процесса их нарастания во времени носит сезонный характер. Промежуток времени приобретения образцами максимальной величины усадочных деформаций существенным образом зависит от их возраста τ к моменту начала наблюдения. Эта зависимость представлена в табл.1.

Таблица 1

Меры сопротивляемости усадке бетона периферийных слоёв литоидпемзобетонных массивов

Промежуток времени приобретения образцами максимальной величины усадочных деформаций, сут.	Максимальные значения усадочных деформаций $\epsilon_{ус.} \times 10^5$ при возрасте бетона τ , сут.			
	28	90	180	360
210	75	35	30	-
150	68	40	24	28
100	56	35	33	29,8
80	64	29	30	30

Более интересное поведение показывают усадочные деформации образцов, выбуренных из ядровой части литоидпемзобетонных массивов (рис.2, табл.2).

Как и в случае периферийных образцов, процесс нарастания усадочных деформаций этих образцов во времени происходит немонотонно. Однако, в этом случае, как нетрудно заметить из трёх последних графиков рис.2, существуют промежутки времени, когда деформации меняют знак. Обнаруженное явление означает, что в указанный период времени происходит набухание образцов. Это можно объяснить возникновением предварительно-напря-

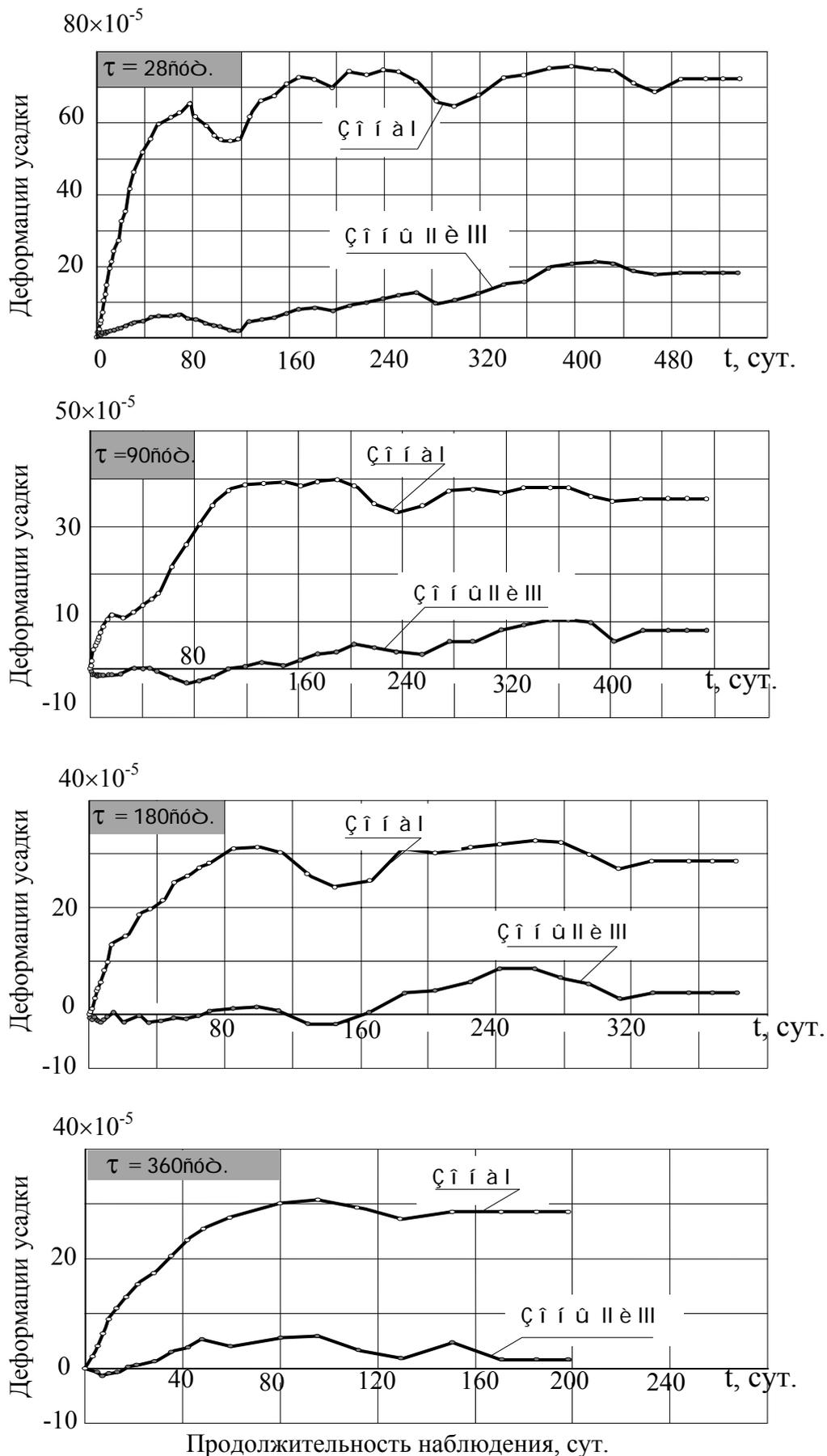


Рис.2. Кривые усадочных деформаций бетона различных зон поперечного сечения литоидпемзобетонного массивного цилиндра

жённого (сжатого) состояния в ядровой части за счёт существенной усадки периферийной (высохшей) части массивов к моменту выбуривания и гидроизоляции опытных образцов.

Таблица 2

Меры сопротивляемости усадке бетона ядровой части литоидпемзобетонных массивов

Промежуток времени приобретения образцами максимальной величины усадочных деформаций, сут.	Максимальные значения усадочных деформаций $\varepsilon_{yc.} \times 10^5$ при возрасте бетона τ , сут.			
	28	90	180	360
380	22	9,8	5	-
340	15	10	5	-
240	11	3.5	7.5	-
50	6	0	-1	5

В случае образцов, полученных из ядра массивов, немонотонность процесса развития усадочных деформаций также носит сезонный характер (рис.2). Однако, если в этом случае основную роль играет перепад температур, то в предыдущем случае существенную роль может также играть влажность окружающей среды.

Основные данные по процессу развития во времени усадочных деформаций приведены в табл.2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карапетян К.С. Влияние размеров образца на усадку и ползучесть бетона. //Изв. АН Арм. ССР. Серия физ.-мат., естеств. и техн. наук. 1956. Т.9. №1. С.87-100.
2. Александровский С.В. О влиянии длительного действия внешней нагрузки на режим высыхания и усадку бетона. //В кн.: Исследование свойств бетона и железобетонных конструкций. Труды НИИЖБ. М.: Госстройиздат, 1959. Вып.4. С.154-183.
3. Мощанский Н.А. Прочность и стойкость бетона. //Строительная промышленность. 1948. №2. С.11-16.
4. Cady Philip D., Clear Kenneth C., Marshall Lawrence G. Tensile strength reduction of mortar and concrete due to moisture gradients. //J. of the Amer. Concr. Inst. 1972. №11. Proceedings. 69. P.700-705.
5. Pickett G. The effect of change in moisture content on the creep of concrete under a sustained load. //Proc. ACI. 38. Feb. 1942. №4. P.335-355.
6. Pickett G. Shrinkage stresses in concrete. //Proc. ACI. 42. Jan. 1946. №3. P.165-204, and Feb. 1946. №4. P.361-398.
7. Снисар В.Х. Исследование процессов усадки и ползучести бетона в массивных сборно-монолитных конструкциях. // В сб.: «Научно-техн. конференция, посвящен. 50-летию СССР». Тез. докл., подготовленные к печати Новосиб. ин-том инж. ж.-д. транспорта. Новосибирск, 1972. С.52.
8. Карапетян К.С., Карапетян К.А. Прочность и деформации различных зон сечения бетонного цилиндра при сжатии. //Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1982. Т.35. №4. С.56-67.

Сведения об авторе:

Карапетян Корюн Ашотович – Доктор техн. наук, зав. Лаб. Института механики НАН РА

Адрес: 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24^б.

Тел.: (+37410) 52-48-52.

Е-mail: Koryan@mechins.sci.am

ВОЗМОЖНОСТЬ ОБЕСПЕЧЕНИЯ СУЩЕСТВУЮЩИХ ПРИСТРОЕК ОТ ОПРОКИДЫВАНИЯ И СТОЛКНОВЕНИЯ С ОСНОВНЫМ ЗДАНИЕМ ПРИ СЕЙСМИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Карапетян Л. Г.

В городе Ереване существует множество зданий с пристройками, причём, большинство пристроек находится рядом с каменными зданиями, которые сами по себе требуют увеличения сейсмovoоружения или усиления. Хаотичные и конструктивно неправильно сооружённые пристройки при сейсмических воздействиях представляют серьёзную опасность, поскольку динамические нагрузки могут привести или к опрокидыванию, или разрушению пристройки при возможном столкновении с основным зданием при её колебании.

В статье показаны основные недостатки и дефекты существующих пристроек, а также возможные подходы и методы усиления, позволяющие обеспечить несущую способность и в несколько раз уменьшить как возможность опрокидывания, так и столкновения пристройки с основным зданием при сейсмическом воздействии.

В постсоветские времена архитектура Еревана потеряла свой традиционный облик. В городе безконтрольно и самовольно возводились различные здания и сооружения, а также многочисленные пристройки и надстройки. К сожалению, чаще всего это делалось с многочисленными нарушениями и изменениями несущих конструкций зданий и сооружений. Особенно в центре города трудно найти здание, не видоизменённое надстройками или пристройками, абсолютно не согласующимися с архитектурой фасада здания.

Следует отметить, что многочисленное количество пристроек построено в непосредственной близости с 4-5 этажными каменными зданиями первых массовых серий постройки 50-80-х годов. Опасность близости таких пристроек связано как с их конструктивным решением, так и с возможным соединением с основным зданием. Опасность намного возрастает, учитывая, что вся территория РА находится в сейсмоопасном регионе, и вероятность происхождения сильных землетрясений велика. В Ереване проживает почти половина населения республики, и катастрофа масштаба Спитакской приведёт к значительным разрушениям и жертвам. Также известно, что в советские времена была занижена сейсмичность Армении, то есть здания и сооружения проектировались и строились по заниженным требованиям к сейсмостойкости.

Немалый вклад в процесс ослабления сейсмостойкости зданий вносят и сами жильцы тоже. Расширяя свои квартиры, разрушая несущие конструкции зданий, обеспечивающие жёсткость несущей системы здания, они увеличивают сейсмическую уязвимость и без того слабых зданий. Учитывая вышеизложенные положения, можно сказать, что больше половины жилого фонда города Еревана находится в зоне повышенной сейсмической опасности.

Ниже рассмотрены наиболее распространённые виды пристроек-этажерок, возведённые рядом с каменными зданиями с присущими им конструктивными системами. Выявлены главные недостатки и даны рекомендации по их решению.

Следует отметить, что в большинстве случаев для пристроек используют стальную рамную систему (рис.1), при этом базы проектируются как для центрально нагруженных колонн (рис.2).



Рис.1. Пристройка с металлическим каркасом к каменному зданию

Сейсмическое воздействие может привести или к опрокидыванию, или разрушению пристройки при возможном столкновении с основным зданием. Надо отметить также, что соединительные связи пристройки и здания устроены таким образом, что при расчётных значениях сейсмических нагрузок сразу же выйдут из строя. Даже если пристройка не опрокинется, возможное столкновение с каменным зданием приведёт к повреждению или разрушениям. Аналогичная картина наблюдается и для железобетонных пристроек (рис. 3).



Рис.2. Пример опорного узла пристройки



Рис.3. Пристройка с ж/б каркасом.

Существующие пристройки бывают в виде отдельно стоящих или заделанными одной стороной в несущие каменные стены основных зданий. В обоих случаях есть недостатки.

При наличии деформационных швов здание и пристройка делятся по высоте сверху донизу на отдельные отсеки. В результате, отдельные блоки получают возможность свободного перемещения. В этом случае, учитывая тот факт, что при сейсмическом воздействии пристройка и здание начинают колебаться в разных фазах, поскольку периоды колебаний каменных зданий намного меньше периодов колебаний стальных рамных систем, остаётся опасность столкновения и опрокидывания. Во втором случае более опасным является опрокидывание, поскольку инерционная сила, возникшая в пристройке, не может восприниматься местами так называемых соединений.

Результаты пространственного расчёта сооружения на статическую нагрузку показали, что отдельно стоящая пристройка размерами 6х6 м с металлическим рамным каркасом (наиболее часто используемая несущая система для пристроек) удовлетворяет требованиям строительных норм по первому и второму предельному состоянию со следующими сечениями (рис. 4): колонна – коробка из швеллеров №20П; ригели по периметру – швеллер №20П; средние балки на расстоянии 1.5 м – швеллер №14П.

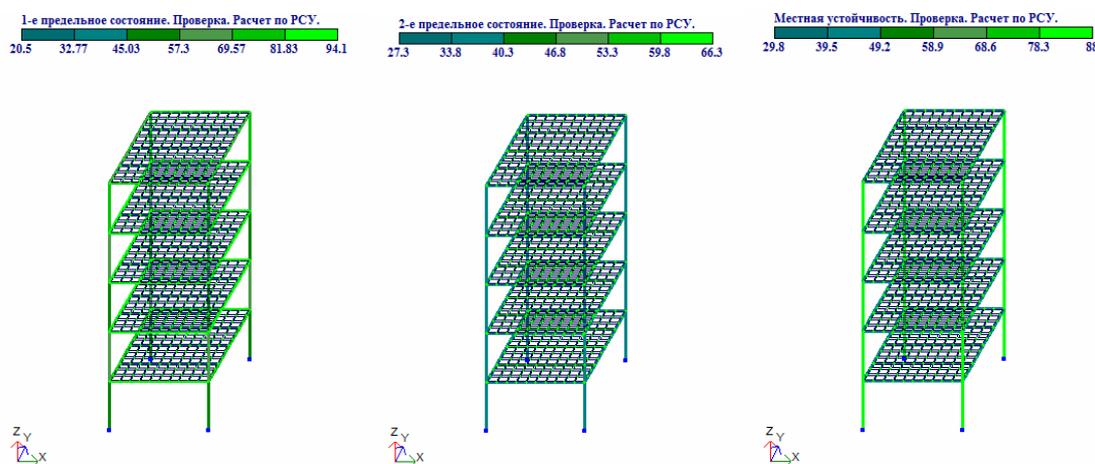


Рис.4. Результаты расчётов пристройки со стальным рамным каркасом на статическую нагрузку

Также были проведены расчёты с учётом сейсмического воздействия трёх разных систем. Первая – рамная, две другие – рамно-связевые в одном направлении (рис.5). Сечения конструкций каркаса были приняты такими же, какие были приняты при статическом расчёте, а в связевых системах в дополнение добавлены связи-раскосы со следующим сечением: швеллер №14П.

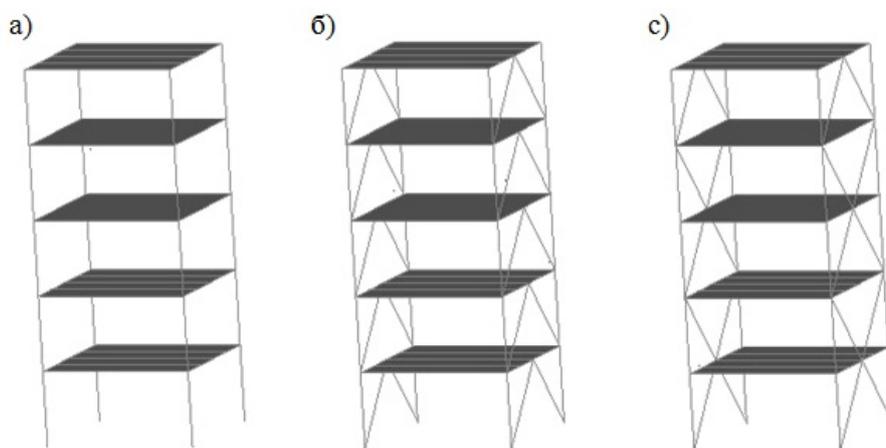


Рис.5. Несущие системы пристроек-этажерок; а – рамный каркас (I вариант), б – рамно-связевой каркас (II вариант), с – рамно-связевой каркас (III вариант).

Таблица 1

Наименование		Конструктивная система пристройки-этажерки		
		I вариант рамная система (распространённая схема-а)	II вариант рамно-связевая система (рекомендуемая схема-б)	III вариант рамно-связевая система (рекомендуемая схема-в)
период колебания пристройки	T_1	2.184 с	0.301 с	0.31 с
перемещения на уровне междуэтажных перекрытий	3.0 м	78.7 мм	4.05 мм	3.76
	6.0 м	200.3 мм	9.36 мм	9.81
	9.0 м	310.1 мм	14.88 мм	15.39
	12.0 м	390.0 мм	19.97 мм	21.01
	15.0 м	434.3 мм	24.03 мм	25.65
PCY на уровне обреза фундамента	N	-27.4 т	-35.95 т	-34.9
	M	-3.97 т.м	-0.31 т.м	-0.19 т.м
	Q	-2.15 т	-0.19 т	-0.8 т
	$N_{\text{связи}}$	-	± 7.8 т	± 7.7 т

Результаты расчётов пристроек с металлическим каркасом разных конструктивных систем

В результате расчёта оказалось, что во втором и третьем случаях период колебания уменьшается в 7 раз, т.е. жёсткость конструкции намного увеличивается.

По строительным нормам период колебания пятиэтажного каменного здания равен: $0.055 \times 5 = 0.275$ с. При этом, следует иметь в виду, что период колебания предлагаемых рамно-связевых систем приближается к периоду колебания основного каменного здания.

Известно, что период колебаний пристроек зависит, главным образом, от конструктивной системы и, конечно, от материала тоже (железобетон, сталь, камень). Дополнительные связи позволяют уменьшить как период колебания, так и создать систему, в которой горизонтальные силы, возникающие при сейсмическом воздействии, воспринимаются стержневой системой, работающей только на сжатие и растяжения. Тем самым, уменьшается вероятность

опрокидывания и небольшими увеличениями в размере обеспечивается нормальная работа фундамента.

Таким образом, предложенными конструктивными мероприятиями становится возможным повысить сейсмостойкость пристройки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Байков В.Н., Сигалов Э.Е. Железобетонные конструкции: Общий курс. М.: Стройиздат, 1991.
2. Маилян Р.Л. Строительные конструкции. М.: Феникс, 2010.
3. Перельмутер А.В., Сливлер В.И. Расчётные модели сооружений и возможность их анализа. Киев: 2002.
4. СНРА I-4.02-99 Реконструкция, восстановление и усиление. Ереван: МГРА, 2000.
5. СНРА II-6.02-2006 Сейсмостойкое строительство. Ереван: МГРА, 2006.
6. СНиП II-23-81* Стальные конструкции. М.: ГУП ЦПП, 1990.
7. СНиП 2.01.07-85 Нагрузки и воздействия. М.: ГП ЦИТП, 1996.
8. Шпете Г. Надёжность несущих конструкций. М.: Стройиздат, 1994.

Сведения об авторе:

Карапетян Лусине Гургеновна – кандидат технических наук, доцент кафедры Строительные Конструкции, Ереванский государственный университет архитектуры и строительства, факультет промышленное и гражданское строительство, **Тел.:** (374 94) 42 00 80

Е-mail: karapetyan.lusin@rambler.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ГОРНЫХ ПОРОД НА УСТАНОВКЕ ИСТИННО ТРЁХОСНОГО НАГРУЖЕНИЯ

Карев В.И., Коваленко Ю.Ф.

Работа посвящена экспериментальному изучению деформационных, прочностных и фильтрационных свойств горных пород, слагающих коллектора нефтяных и газовых месторождений. Исследования проводились на уникальной экспериментальной установке истинно трёхосного нагружения, созданной в Институте проблем механики РАН. Разработаны методики определения упругих и прочностных констант анизотропных пород, зависимости фильтрационных характеристик от напряжённо-деформированного состояния. Представлены результаты исследований, имеющие большое практическое значение с точки зрения разработки методов повышения нефтеотдачи пластов, устойчивости наклонных и горизонтальных скважин.

В настоящее время для определения упругих и прочностных характеристик горных пород главным образом используются экспериментальные установки, в основу которых заложен принцип Кармана. Испытываемые образцы представляют собой цилиндры длиной 70 – 80 мм и диаметром 30 – 40 мм. Нагружение образцов осуществляется сжатием вдоль образующей образца и всесторонним обжатием по боковой поверхности. Таким образом, в установках, основанных на принципе Кармана, можно осуществлять независимое нагружение образцов лишь по двум осям.

Этого оказывается достаточным для определения упругих и некоторых прочностных характеристик горных пород в предположении их изотропности. Для существенно анизотропных пород определение этих параметров на установках с кармановской схемой оказывается невозможным. При этом именно анизотропия упругих и прочностных свойств горных пород является основной причиной ряда серьезных проблем, возникающих при проводке и эксплуатации наклонных и горизонтальных скважин. Важно также отметить, что поскольку в установках, использующих схему Кармана, осуществляется двухосное нагружение образца, то эти установки не позволяют воспроизводить реальные напряжённо-деформированные состояния, возникающие в пласте, которые являются существенно трёхмерными.

Попытки создания установок, позволяющие реализовывать на образцах горной породы так называемое «истинное трёхосное нагружение», предпринимались достаточно давно [1-4]. Для трёхосных испытаний обычно используются кубические образцы горных пород с гранью 50 мм или больше. Основными требованиями, предъявляемыми к установкам на трёхосное сжатие, является возможность создания трёхосного независимого нагружения образца и обеспечение однородности полей напряжений и деформаций в образце. Однако во всех этих установках оставались два главных недостатка – или нажимные элементы не закрывали всей поверхности образца, что неизбежно приводило к неоднородности полей деформаций и напряжений внутри образца в ходе эксперимента, или в них было сложно избавиться от трения между соприкасающимися плитами, а также между плитами и образцом, что затрудняло получение достоверных экспериментальных данных.

Эти проблемы удалось в основном решить при создании в Институте проблем механики РАН Испытательной системы трёхосного независимого нагружения (ИСТНН), рис.1. Установка ИСТНН представляет собой уникальный исследовательский комплекс для изучения деформационных, прочностных и фильтрационных характеристик горных пород [5].

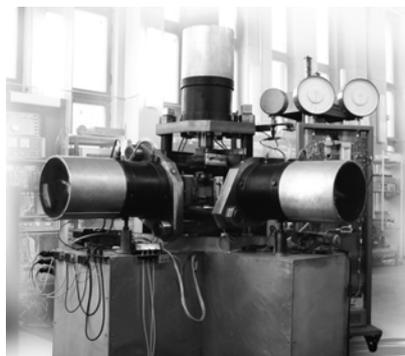


Рис.1. Испытательная система трёхосного независимого нагружения.

Установка ИСТНН позволяет нагружать образцы горных пород в форме куба независимо по каждому из трёх направлений, что достигается благодаря применённой в конструкции нагружающего узла оригинальной кинематической схеме, в результате нажимные плиты могут сближаться в трёх направлениях, не создавая препятствия друг другу, рис.2.

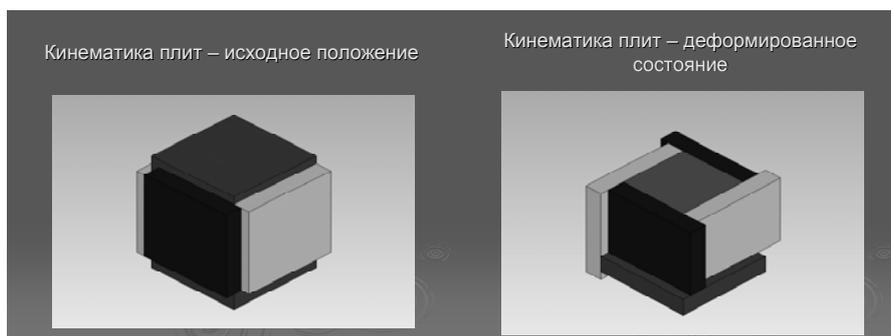


Рис.2. Положение нагружающих плит до и после деформирования образца

По сравнению с другими испытательными средствами на сложное нагружение с использованием жёстких нажимных плит она обеспечивает равномерное приложение нагрузок по всей площади образца в течение всего процесса деформирования, включая стадию разрушения. Это существенно упрощает анализ результатов экспериментов, так как отпадает необходимость учёта возможности концентрации напряжений вблизи ребра образца. Кроме того, это открывает возможность воссоздавать в ходе испытаний любые напряжённые состояния, возникающие в призабойной зоне пласта при бурении скважины, её освоении и эксплуатации, и изучать их влияние на фильтрационные свойства породы. Чтобы обеспечить возможность перемещения плит в плоскости, перпендикулярной к оси силовой рамы с малой силой трения при высокой нагрузке нажимные и опорные плиты установлены на плоских роликовых подшипниках прецизионного исполнения. Для уменьшения трения между плитами и образцом при испытаниях используются тефлоновые прокладки.

ИСТНН относится к классу электрогидравлических испытательных машин с автоматизированной системой управления. Испытательная система представляет собой комплекс, включающий силовой агрегат, маслонасосную станцию, блок автоматического управления, измерительно-информационную систему. Наибольшее давление рабочей жидкости в гидроцилиндре составляет 20 МПа, при этом, гидроцилиндр развивает усилие 500 кН. Нагружающие и опорные плиты снабжены комплектами сменных наконечников, позволяющих проводить испытания образцов в форме куба с ребром 40 мм и 50 мм.

В ИСТНН применена трёхканальная система управления с электрогидравлическими преобразователями (сервоклапанами). Это позволяет управлять процессом нагружения либо по усилиям, либо по перемещениям по каждому из трёх каналов, и реализовать практически любую трёхосную траекторию независимого нагружения образца по каждой из его трёх осей, включая процесс разрушения.

Это дает возможность определять деформационные и прочностные характеристики анизотропных горных пород. Предварительно для определения типа анизотропии породы используется специально созданная установка по измерению скоростей распространения продольных ультразвуковых волн в трёх направлениях. После этого путем испытания образцов породы на установке ИСТНН по специальным программам нагружения определяются упругие анизотропные модули породы.

Установка ИСТНН позволяет выполнять экспериментальные исследования показателей объёмной прочности горных пород – коэффициента сцепления и угла внутреннего трения. Программа трёхосных испытаний образцов пород направлена на оценку напряжения, необходимого для разрушения образца породы в зависимости от величины всестороннего обжатия образца. Для определения необходимых параметров требуется определение значения напряжения разрушения по крайней мере для трёх значений давления всестороннего обжатия.

Сложность заключается в том, что в силу существенной неоднородности горных пород желательно все опыты проводить на одном образце. При этом, каждое нагружение образца

(цикл) необходимо доводить до уровня, когда образец насчёт деформироваться пластически, но ещё будет оставаться целым. Для этого необходим постоянный контроль за состоянием образца в ходе опыта, чего можно достичь лишь за счёт вывода в режиме он-лайн на экран компьютера кривых деформирования образца и одновременного вычисления текущих деформационных характеристик породы. Кроме того, управление нагружением образца должно осуществляться по перемещениям, а не по нагрузке. В противном случае вовремя остановить нагружение образца в пластической области, не доводя его до разрушения, практически невозможно. Испытательная система трёхосного независимого нагружения ИСТНН даёт возможность проведения подобных работ.

В качестве примера на рис.3 приведены кривая σ – ϵ и зависимость касательного модуля от величины действующего по оси керн напряжения, регистрировавшиеся в ходе первого цикла испытания образца из Штокмановского ГКМ [6].

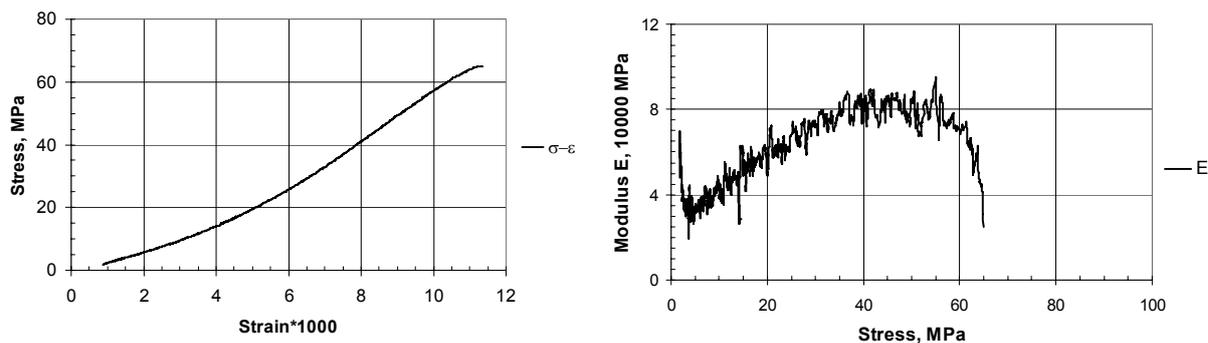


Рис.3. Кривые σ – ϵ и изменение касательного модуля на первом цикле нагружения.

Важной особенностью установки ИСТНН является возможность исследования зависимости проницаемости горных пород от величины и вида действующих напряжений. Известно, что проницаемость горных пород может как уменьшаться, так и увеличиваться (причём, необратимо) в зависимости от возникающих в них напряжений. Тип и уровень этих напряжений определяются конструкцией забоя (наличие или отсутствие обсадки, тип перфорации и так далее) и создаваемыми на забое скважины депрессиями. Установка ИСТНН позволяет моделировать эти условия на образцах породы и непрерывно регистрировать при этом изменение их проницаемости. Выполненные исследования зависимости фильтрационных свойств различных пород от величины депрессии в скважине позволили разработать новую технологию повышения продуктивности скважин – метод георыхления, который прошёл успешные опытно-промышленные испытания на ряде нефтяных месторождений Западной Сибири и Прикамья [7].

На установке ИСТНН реализована схема эксперимента, представляющего большой интерес при решении проблем, связанных с устойчивостью стволов горизонтальных скважин и определению максимально допустимых депрессий на их забое. Такая схема эксперимента практически не используется в практике российских исследовательских организаций. Это опыты по прямому моделированию на установке ИСТНН процесса создания депрессий на забое горизонтальной скважины с целью определения депрессий, при которых начинается вынос песка из скважины и разрушение стенок скважины. Эти эксперименты можно рассматривать как аналоги известным испытаниям цилиндрических образцов по схеме «полый цилиндр».

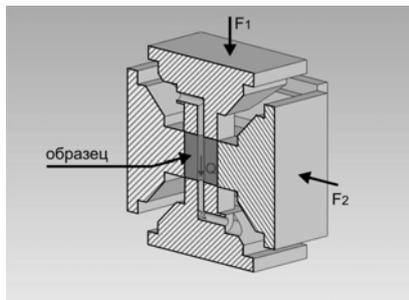


Рис.4 Схема испытания образца с отверстием

Для испытаний используются специально изготовленные кубические образцы с центральным отверстием (диаметром 10 мм) и две нажимные плиты с центральными каналами, рис.4. В ходе эксперимента через канал в наконечнике верхней активной нажимной плиты, совпадающий с отверстием в образце, продувается воздух под давлением около 0,1 МПа. Прошедший через канал в образце воздух отводится через канал в наконечнике нижней нажимной плиты, совпадающий с отверстием в образце. Через это отверстие по специальной трубке выносимый песок поступает на электронные весы, подключённые к компьютеру.

Так же, как и в эксперименте «полый цилиндр», образец равномерно обжимается со всех сторон нагрузкой, периодически поднимавшейся в ходе опыта. Нагружение образца производилось до его разрушения.

В ходе всего эксперимента измеряется вес песка, выносимого через отверстие, и регистрируются деформации образца по трём осям.

На рис.5 приведены результаты испытания одного из образцов. На рис.5а показаны программа нагружения образца и зависимость веса вынесенного песка от величины внешнего обжатия. На рис.5б показаны кривые деформирования образца по трём осям в ходе опыта.

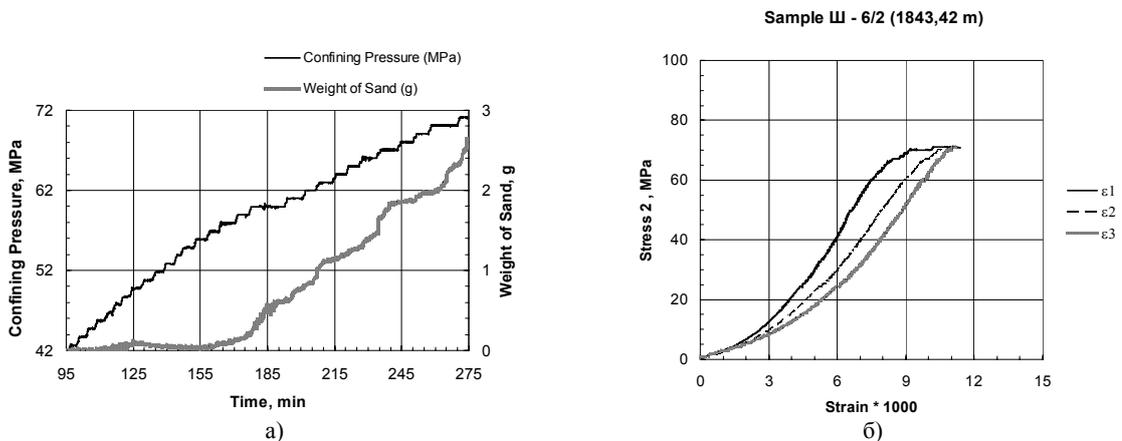


Рис.5. Результаты испытания образца по схеме «полый цилиндр»

Установка ИСТНН, в отличие от установок, использующих схему Кармана, позволяет проводить эксперименты по схеме «полый цилиндр» с учётом наличия в пласте бокового распора. В естественных условиях горная порода нагружена вертикальным и боковым горным давлением. Если порода, слагающая пласт, обладает пластическими свойствами, то постепенно за геологические времена все напряжения в ней должны были выровняться, т.е. в этом случае боковое горное давление равно вертикальному. Однако в менее пластичных и прочных породах, таких как нефтеносные песчаники и известняки, этот процесс выравнивания напряжений еще не закончился, в результате чего боковое горное давление не равно вертикальному, и грунтовый скелет в исходном состоянии нагружен неравномерными сжимающими напряжениями. В этом случае говорят о наличии бокового распора, которое характеризуется коэффициентом бокового распора, равного отношению бокового горного давления к вертикальному.

Наличие бокового распора приводит к тому, что напряжения, действующие на контуре скважины, отличны от тех, что действуют на контуре скважины при отсутствии бокового распора. Соответственно меняется и программа нагружения образцов, отвечающая понижению давления на забое скважины, так что сжатие образца в ходе эксперимента по схеме «полый цилиндр» будет уже не равномерным, а разноосным. Как показали многочисленные эксперименты, выполненные на установке ИСТНН, наличие бокового распора приводит как правило к существенному снижению допустимых напряжений, не приводящих к разрушению стенок скважины. Это обстоятельство значительно повышает риски при бурении и эксплуатации скважин и должно обязательно учитываться при проектировании и разработке месторождений нефти и газа.

На рис.6 для сравнения приведены два образца из Приразломного месторождения, испытанные

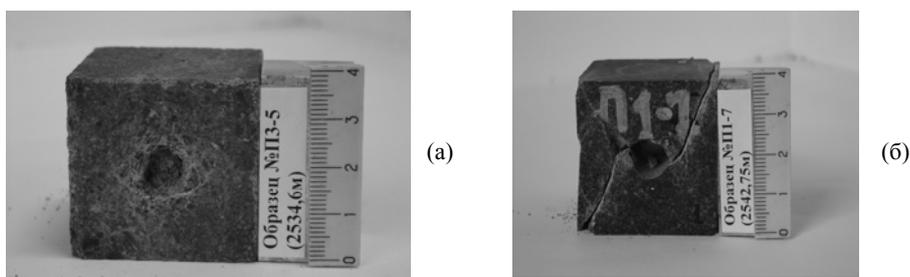


Рис.6. Два образца, испытанные без бокового распора (а) и при его наличии (б).

без учёта бокового распора (а) и при боковом распоре с коэффициентом 0,4 (б). Видно, что характер разрушения образцов совершенно различен.

Таким образом, установка ИСТНН позволяет проводить эксперименты по схеме «полый цилиндр», причём испытания на установке ИСТНН обладают значительными преимуществами по сравнению с испытаниями по схеме Кармана.

На установке ИСТНН было выполнено прямое физическое моделирование процессов деформирования и разрушения породы в окрестности наклонных и горизонтальных скважин при бурении и эксплуатации на различных дебитах. В результате были выработаны рекомендации для ряда конкретных месторождений по обеспечению устойчивости стволов скважин. В частности, полученные результаты позволили оценить риски, связанные с опасностью выноса песка при эксплуатации скважин с высокими депрессиями, выработать рекомендации о необходимой конструкции скважин – то есть обосновать технические и технологические решения по оптимизации стратегии и тактики освоения Штокмановского газоконденсатного месторождения [6].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 11-01-00844-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Airey D.W. and Wood D.M. The Cambridge true triaxial apparatus. In *Advanced triaxial testing of soil and rock*. ASTM STP 977. American Society for Testing and Materials. Philadelphia. pp. 796-805.
2. Ibsen L.B. and Praastrup U. The Danish rigid boundary true triaxial apparatus for soil testing. *Geotechnical Testing Journal*. 25(3). 2002. pp. 1-12.
3. Wood D.M. Multiaxial testing at Boulder and elsewhere. In *Proceedings of the Inaugural International Conference of the Engineering Mechanics Institute*, 19-21 May 2008, Minneapolis. Minn. American Society of Civil Engineers. Reston. Va. p. 31 [Abstr.]
4. Alexeev, A.D., Revva, V.N., Alyshev, N.A. & Zhitlyonok, D.M. True triaxial loading apparatus and its application to coal outburst prediction// *International Journal of Coal Geology*. 2004. 58. pp.245-250.
5. Karev V., Kovalenko Yu. Triaxial loading system as a tool for solving problems of oil and gas production. *The 12th International Congress on Rock Mechanics (Beijing, October 18-21, 2011)*.
6. Климов Д.М., Тер-Саркисов Р.М, Чига́й С.Е., Коваленко Ю.Ф., Рыжов А.Е. Определение прочностных характеристик пород Штокмановского ГКМ и оценка рисков выноса песка при его разработке// *Газовая промышленность*. 2010. № 11.
7. Христианович С.А., Коваленко Ю.Ф., Кулинич Ю.В., Карев В.И. Увеличение продуктивности нефтяных скважин с помощью метода георыхления// *Нефть и газ. Евразия*, 2000. № 2. С.90-94.

Сведения об авторах:

Карев Владимир Иосифович – зам. дир. по научн. работе, ИПМех РАН, д.т.н., (495) 434-35-56

E-mail: wikarev@ipmnet.ru

Коваленко Юрий Федорович – зав. лаб. геомеханики, ИПМех РАН, к.ф.м.н., (495) 434-41-60

E-mail: perfolinkgeo@yandex.ru

НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ И ЗАКРИТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ КРУГЛЫХ МЕМБРАН СО СЛОЖНЫМ ПРОФИЛЕМ МЕРИДИАНА

Карякин М.И., Мостипан Г.О., Устинов Ю.А.

Один из фундаментальных фактов, установленных И.И. Воровичем в 1950-е г.г. [1], относится к теории устойчивости пологих оболочек и состоит в следующем: проблему устойчивости оболочки, как правило, нельзя решать методом линеаризации в окрестности безмоментного напряжённого состояния и для её решения следует рассматривать полную нелинейную формулировку. Это положение наглядно показано в [2] на примере мембраны со сложным профилем меридиана. Ниже даётся краткое описание численно-аналитического алгоритма анализа равновесия и устойчивости круглых мембран с произвольным профилем меридиана, и приводятся некоторые результаты численного анализа устойчивости и закритического поведения сферического купола с возможными отклонениями от идеальной поверхности.

1. В связи с необходимостью учёта искажений в форме сферического купола рассмотрим общую задачу для круглой оболочки вращения произвольного профиля. Будем считать, что профиль поверхности такой оболочки, имеющей толщину h и радиус $a \gg h$, в цилиндрической системе координат задан функцией

$$z = f(r) \quad (1)$$

Главные кривизны поверхности вдоль меридиана и параллелей, соответственно, выражаются по формулам:

$$k_1 = -\frac{f''}{(1+f'^2)^{3/2}}, \quad k_2 = -\frac{f'}{r(1+f'^2)^{1/2}}, \quad f' = \frac{df}{dr} \quad (2)$$

В частности, для сферического купола, задаваемого радиусом окружности опирания a и возвышением центральной точки (стрелой подъема) d функция $f(r)$ имеет вид

$$f(r) = \sqrt{R^2 - r^2} - (R - d)$$

где $R = (d^2 + a^2)/(2d)$ – радиус сферы – срединной поверхности купола, а кривизны k_1 и k_2 являются константами:

$$k_1 = k_2 = \frac{1}{R}$$

Нелинейное поведение рассматриваемых мембран под действием гидростатического давления p адекватно описывается двумерными нелинейными уравнениями, в основе которых лежат гипотезы Кирхгофа. В цилиндрической системе координат эти уравнения имеют вид [2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(rT_{11})}{\partial r} - T_{22} + \frac{\partial T_{12}}{\partial \varphi} + rk_1(Q_1 - \frac{S_1}{C}) - rp \frac{\sin \theta_1}{C} &= 0, \\ \frac{\partial(rT_{12})}{\partial r} + T_{12} + \frac{\partial T_{22}}{\partial \varphi} + rk_2(Q_2 - \frac{S_2}{C}) - rp \frac{\sin \theta_2}{C} &= 0, \\ \frac{\partial(rCQ_1 - rS_1)}{\partial r} + \frac{\partial Q_2}{\partial \varphi} - \frac{r}{C}(k_1T_{11} + k_2T_{22}) - \frac{1}{C} \frac{\partial S_2}{\partial \varphi} - rp \frac{\cos \theta_1}{C} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{1}{r} \frac{\partial(rM_{11})}{\partial r} - \frac{M_{22}}{r} + \frac{1}{rC} \frac{\partial M_{12}}{\partial \varphi}, \\ Q_2 &= \frac{1}{r} \frac{\partial(rM_{12})}{\partial r} + \frac{M_{12}}{r} + \frac{1}{rC} \frac{\partial M_{22}}{\partial \varphi} \\ S_1 &= T_{11}\theta_1 + T_{12}\theta_2, \quad S_2 = T_{12}\theta_1 + T_{22}\theta_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{11} &= B(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}), & T_{22} &= B(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11}), & T_{12} &= B(1-\nu)\varepsilon_{12}, \\
M_{11} &= D(\kappa_{11} + \nu\kappa_{22}), & M_{22} &= D(\kappa_{22} + \nu\kappa_{11}), & M_{12} &= D(1-\nu)\kappa_{12}, \\
\varepsilon_{11} &= e_{11} + \frac{1}{2}\theta_1^2, & \varepsilon_{22} &= e_{22} + \frac{1}{2}\theta_2^2, & \varepsilon_{12} &= e_{12} + \frac{1}{2}\theta_1\theta_2, \\
e_{11} &= C\frac{\partial u_1}{\partial r} + k_1u_3, & e_{22} &= \frac{1}{r}\frac{\partial u_2}{\partial \varphi} + C\frac{u_1}{r} + k_2u_3, & 2e_{12} &= \frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial \varphi} + rC\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_2}{r}\right), \\
\kappa_{11} &= C\frac{\partial \theta_1}{\partial r}, & \kappa_{22} &= \frac{1}{r}\frac{\partial \theta_2}{\partial \varphi} + \frac{C}{r}\theta_1, & 2\kappa_{12} &= rC\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\theta_2}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial \theta_1}{\partial \varphi} \\
\theta_1 &= -C\frac{\partial u_3}{\partial r} + k_1u_1, & \theta_2 &= -\frac{1}{r}\frac{\partial u_3}{\partial \varphi} + k_2u_2, & C &= C(r) = \frac{1}{(1+f^2)^{1/2}} \\
B &= \frac{Eh}{1-\nu^2}, & D &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},
\end{aligned} \tag{4}$$

где u_1, u_2, u_3 – смещения точки срединной поверхности мембраны вдоль меридиана, параллели и нормали соответственно, θ_1, θ_2 – углы поворота нормали, Q_1, Q_2 – поперечные силы, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона. В случае сферического купола $C = \sqrt{1 - (r/R)^2}$.

Для мембраны, жёстко закреплённой по краю, граничные условия при $r = a$ имеют вид:

$$u_1 = u_2 = u_3 = 0, \quad \theta_1 = 0. \tag{5}$$

Для описания алгоритма исследования введём восьмимерный вектор $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_8)$ с безразмерными компонентами

$$Y_i = u_i/h \quad (i=1,2,3), \quad Y_4 = \theta_1, \quad Y_5 = rT_{11}/(Bh),$$

$$Y_6 = rT_{12}/(Bh), \quad Y_7 = rM_{11}/(Bh^2),$$

$$Y_8 = r(CQ_1 - T_{11}\theta_1 - T_{12}\theta_2)/(Bh)$$

В терминах вектора \mathbf{Y} уравнения (3), (4) могут быть представлены в виде:

$$\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x} = \mathbf{L}(\mathbf{Y}, \partial_\varphi \mathbf{Y}, p) + \mathbf{N}(\mathbf{Y}, \partial_\varphi \mathbf{Y}, p) \tag{6}$$

где $x = r/h$ – безразмерный радиус, \mathbf{L} – линейный оператор, в том числе и по параметру p , а \mathbf{N} – нелинейный оператор. Матричные выражения этих операторов весьма громоздки и здесь не приводятся.

В случае осесимметричной деформации ($u_2 = 0, \partial_\varphi Y_i = 0$) уравнения (6) существенно упрощаются и превращаются в систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned}
\frac{dY_1}{dx} &= -\frac{\nu}{x}Y_1 - \frac{(K_1 + \nu K_2)}{C}Y_3 + \frac{1}{Cx}Y_5 - \frac{1}{2C}Y_4^2, & Y_2 &\equiv 0, \\
\frac{dY_3}{dx} &= \frac{K_1}{C}Y_1 - \frac{1}{C}Y_4, \\
\frac{dY_4}{dx} &= -\frac{\nu}{x}Y_4 + \frac{12}{xC}Y_8, \\
\frac{dY_5}{dx} &= \frac{(1-\nu^2)C}{x}Y_1 + (1-\nu^2)K_2Y_3 + \frac{qx}{C}Y_4 + \frac{\nu}{x}Y_5 - \frac{K_1}{C}Y_7
\end{aligned} \tag{7}$$

$$Y_6 \equiv 0,$$

$$\frac{dY_7}{dx} = (1-\nu^2)K_2Y_1 + \frac{(1-\nu^2)K_2^2x}{C}Y_3 + \frac{K_1 + \nu K_2}{C}Y_5 - \frac{qx}{2C}Y_4^2 + \frac{qx}{C},$$

$$\frac{dY_8}{dx} = \frac{(1-\nu^2)C}{12x}Y_4 + \frac{1}{C}Y_7 + \frac{\nu}{x}Y_8 + \frac{1}{C}Y_4Y_5$$

Здесь $K_i = k_i h$ – безразмерные кривизны, $q = hp / B$ – безразмерный параметр внешнего давления.

Граничные условия для (7) в точке $x_1 = a/h$ следуют из (5) и в случае жёсткого защемления края принимают вид:

$$Y_1(x_1) = 0, \quad Y_3(x_1) = 0, \quad Y_4(x_1) = 0 \quad (8)$$

При численном интегрировании системы (7) общепринят подход, когда условия ограниченности решения при $x=0$ заменяются граничными условиями при $x=x_0$ ($x_0 \ll 1$):

$$Y_5(x_0) = 0, \quad Y_7(x_0) = 0, \quad Y_8(x_0) = 0, \quad (9)$$

что вполне естественно, поскольку согласно формулам (5) эти компоненты при $x=0$ обращаются в ноль и являются непрерывными функциями в окрестности нуля.

В качестве наглядной характеристики нелинейного поведения мембраны в осесимметричном случае обычно используется диаграмма $p=p(w_0)$, где w_0 – прогиб в центре мембраны. Так, например, в работе [3] такая диаграмма строилась методом Галеркина. Авторы данной работы использовали метод пристрелки. Существенная особенность его реализации в данной задаче связана с невозможностью выбора параметра w_0 или p в качестве независимого на весь цикл построения характеристики мембраны. Это особенно наглядно проявляется в случае сферического купола (рис.1), когда между этими параметрами отсутствует функциональная зависимость. Для решения этой проблемы был реализован специальный алгоритм автоматического выбора параметра нагружения и, соответственно, пристреливаемых параметров. В результате задача построения диаграммы нагружения решается достаточно устойчиво, надежно и в приемлемое время, в том числе для весьма тонких оболочек ($h/a < 1/300$).

2. В качестве примера на рис.1 приведены диаграммы осесимметричного деформирования сферических куполов различной высоты, полученные на основе численного решения краевой задачи (7)-(9). В качестве геометрической характеристики пологости купола использован безразмерный параметр

$$\lambda = \frac{\sqrt[4]{(12(1-\nu^2)a)}}{\sqrt{Rh}} = \sqrt[4]{48(1-\nu^2)} \frac{1}{\sqrt{1+d^2/a^2}} \sqrt{\frac{d}{h}}$$

По оси абсцисс отложен прогиб в вершине купола, отнесённый к высоте недеформированного купола $w = u_2(0)/d$. Приложенное давление отнесено к критическому давлению, рассчитанному в рамках линейной теории упругости для идеального сферического купола

$$p^* = \frac{p}{p_{\text{lin}}}, \quad p_{\text{lin}} = \frac{2E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \left(\frac{h}{R} \right)^2$$

На рис.2 изображены графики зависимости параметра бифуркации (безразмерного перемещения w в центре купола) от параметра пологости λ . Линия с индексом 0 соответствует точкам осесимметричной бифуркации. Эти точки совпадают с точками максимума и минимума на диаграмме нагружения – зависимости приложенного давления от прогиба в средней точке купола. Появлению этих точек соответствует значение параметра пологости $\lambda=3.34$. Начиная с $\lambda=4.74$, появляются две новые точки бифуркации по первой гармонике.

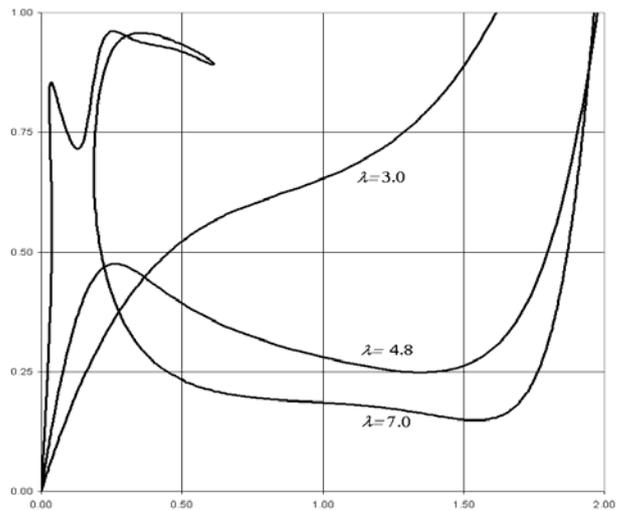


Рис. 1. Диаграммы нагружения сферических куполов различной пологости

Рис.2 демонстрирует резкое возрастание количества точек бифуркации по неосесимметричным модам после достижения геометрическим параметром оболочки значения $\lambda=5.5$. Авторы склонны полагать, что столь высокая плотность пересекающихся бифуркационных кривых идеального сферического купола проявляется в эксперименте как высокая степень чувствительности устойчивости купола к несовершенствам геометрии и невозможность предсказать конкретную форму потери устойчивости (например, количество вмятин). Данный факт делает практически бессмысленной работу по разработке усовершенствованных теорий или методов надежного предсказания формы и описания закритического поведения сферической оболочки на основе модели идеального купола.

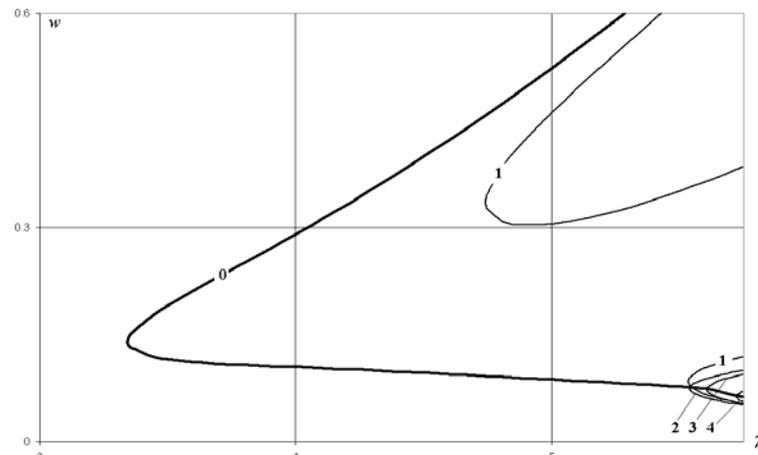


Рис.2. Точки бифуркации. Номера кривых соответствуют номерам гармоник потери устойчивости.

3. Описанные выше проблемы показывают, что для изготовления высокоточных мембран, работающих в условиях возможной потери устойчивости или близких к ним, сферическая форма большого погиба не является удачной. В работе [4] для изготовления хлопающих предохранительных мембран использована концепция и технология артификации – геометрической модуляции поверхности сферического купола. Она подразумевает специальные способы изготовления и доводки мембран путем искусственного внесения «несовершенств» и искажений в сферическую форму. Цель этих искажений – устранение (по крайней мере, из некоторой рабочей области параметров мембраны) точек бифуркации по неосесимметричным модам, вносящих неопределённость в тип и характер потери устойчивости и закритического поведения мембраны.

В качестве иллюстрации приведём простую модельную схему такой модуляции, когда верхняя часть купола заменяется прямолинейным участком. Кроме характеристик исходного купола геометрия мембраны при этом описывается одним дополнительным параметром – высотой t расположения прямолинейного участка.

Задача о модуляции решалась для сферической мембраны толщины $h = 0.1 \text{ мм}$, радиусом опирания $a = 25 \text{ мм}$ и высотой подъема $d = 0.52 \text{ мм}$. Считая коэффициент Пуассона материала купола равным 0.3, для параметра λ получаем значение 5.86, что соответствует наличию точек бифуркации с $n = 1, 2, 3, 4$ на возрастающем участке диаграммы нагружения. Кроме существенной разницы в профилях диаграмм, важным отличием является отсутствие у модулированного купола точек бифуркации на возрастающем участке. В отличие от сравнимых сферических куполов у модулированной мембраны вообще нет точек бифуркации по модам с $n > 1$, а точки неосесимметричной бифуркации по $n = 1$ расположены в области глубокой закритической деформации.

Представленные результаты означают, в частности, что для куполообразных оболочек одинаковой толщины, равным отношением стрелы подъема к радиусу окружности опирания и количественно близкими профилями поведение диаграммы осесимметричного нагружения, а также характеристики устойчивости и тип закритического поведения могут быть качественно различными. Модулирование формы купола позволяет целенаправленно управлять этими характеристиками.

Работа выполнена при финансовой поддержке Южного математического института Владикавказского научного центра РАН, а также в рамках федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ворович И.И. Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек. М.: Наука, 1989. 376 с.
2. Гетман И.П., Карякин М.И., Устинов Ю.А. Анализ нелинейного поведения мембраны с произвольным профилем по радиусу // ПММ. 2010. Т.74. В.6. С.19-29.
3. Григолюк Э.И., Лопаницын Е.А. Осесимметричное закритическое поведение пологих сферических куполов // Прикладная математика и механика. 2002. Т.66. Вып.4. С.621-634.
4. Пьянков Б.Г., Какурин А.М., Юдин А.С. Экспериментальные и теоретические основы артификации предохранительных мембран // Изв. вузов. Сев.-Кав. регион. Естеств. науки. 1999. №2. С.22–24.

Сведения об авторах:

Карякин Михаил Игоревич – декан факультета математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета, (+7 863) 275-110, **E-mail:** karyakin@math.sfedu.ru

Мостипан Георгий Олегович – аспирант НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И.И. Южного федерального университета, (+7 863) 275-111
E-mail: galperion@gmail.com

Устинов Юрий Анатольевич – профессор кафедры теории упругости факультета математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета, (+7 863) 275-114
E-mail: ustinov@math.sfedu.ru

ПЕРЕДАЧА НАГРУЗКИ ОТ НЕОДНОРОДНОЙ НАКЛАДКИ К УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ ИЛИ К БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЕ ПРИ НАЛИЧИИ СДВИГА

Керопян А. В.

Рассматривается задача для упругой полуплоскости и бесконечной пластины, которые вдоль линии $y = 0$ в плоскости xOy (для пластины xOy - её средняя плоскость) усилены неоднородной (кусочно-однородной) бесконечной накладкой, состоящей из двух полубесконечных кусков и одного конечного куска с различными модулями упругости. Контактное взаимодействие между накладкой и деформируемым основанием осуществляется через слой клея с другими физико-механическими и геометрическими характеристиками. Контактирующая тройка (накладка, слой клея, основания) деформируются под действием сил, приложенных к накладке. Задача определения неизвестных контактных напряжений при помощи обобщенного интегрального преобразования Фурье сведена к решению систем интегральных уравнений Фредгольма второго рода с двумя неизвестными функциями на различных интервалах, которые в довольно широком диапазоне изменения значения отношения характерных параметров задачи в банаховом пространстве B можно решать методом последовательных приближений. Рассмотрены некоторые возможные частные случаи и выяснен характер и поведения контактных напряжений, действующих в различных контактных участках.

В основе постановки задачи в качестве деформируемого основания выбрана полуплоскость, а по ходу её решения приведены результаты для упругой бесконечной пластины по возможности с одинаковыми обозначениями.

1. Постановка задачи и вывод исходных разрешающих уравнений. Пусть упругая полуплоскость (модуль упругости E или модуль сдвига G , коэффициент Пуассона ν) усилена на границе $y = 0$ (в плоскости xOy) неоднородной (кусочно-однородной) бесконечной накладкой малой толщины h , модуль упругости которой при $x > a$ равен E_1 , при $|x| < a$ - E_2 , а при $x < -a$ - E_3 . Контактное взаимодействие между накладкой и полуплоскостью осуществляется через тонкий слой клея с характеристиками (E_k, ν_k, h_k) . Задача заключается в определении контактных напряжений, когда вдоль оси накладки в точках $x = \pm b$ приложены сосредоточенные силы P ($b > a$).

Для накладки (стрингера) принимается модель контакта по линий, а для слоя клея - условия чистого сдвига, благодаря чему под накладкой действуют только касательные контактные напряжения [1-5].

Согласно вышепринятому, дифференциальные уравнения равновесия накладки с помощью обобщённых функций можно записать в виде [2- 5]:

$$\frac{dU^{(1)}(x)}{dx} = \frac{\tau_a^+(x)}{E_1 h} + \frac{\tau_a^-(x)}{E_3 h} + \frac{\tau_0(x)}{E_2 h} - \frac{P\delta(x-b)}{E_1 h} - \frac{P\delta(x+b)}{E_3 h} - u'_a \delta(x-a) - u'_{-a} \delta(x+a), \quad (1.1)$$

при условиях

$$\left(\frac{du^{(1)}}{dx} \right)_{x=a-0} - \left(\frac{du^{(1)}}{dx} \right)_{x=a+0} = u'_a \neq 0, \quad \left(\frac{du^{(1)}}{dx} \right)_{x=-a-0} - \left(\frac{du^{(1)}}{dx} \right)_{x=-a+0} = u'_{-a} \neq 0.$$

Здесь

$$U^{(1)}(x) = \theta(-x-a) \frac{du^{(1)}}{dx} + [\theta(x+a) - \theta(x-a)] \frac{du^{(1)}}{dx} + \theta(x-a) \frac{du^{(1)}}{dx}, \quad (1.2)$$

$$\tau_a^+(x) = \theta(x-a)\tau(x), \quad \tau_a^-(x) = \theta(-x-a)\tau(x), \quad \tau_0(x) = [\theta(x+a) - \theta(x-a)]\tau(x),$$

$$\tau(x) = \tau_a^+(x) + \tau_a^-(x) + \tau_0(x),$$

$u^{(1)}(x)$ - горизонтальные перемещения точек накладки, $\tau(x)$ - интенсивность касательных контактных напряжений, $\theta(x)$ - функция Хевисайда, $\delta(x)$ - её производная, u'_a, u'_{-a} - пока неизвестные постоянные.

Для деформации граничных точек упругой полуплоскости, когда на её границе $y = 0$ действуют только касательные напряжения с интенсивностью $\tau(x)$, имеем

$$\frac{du^{(2)}(x, 0)}{dx} = U^{(2)}(x) = \frac{1}{\pi A} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau(s) ds}{s-x}, \quad -\infty < x < \infty, \quad (1.3)$$

где

$$U^{(2)}(x) = \theta(-x-a) \frac{du^{(2)}}{dx} + [\theta(x+a) - \theta(x-a)] \frac{du^{(2)}}{dx} + \theta(x-a) \frac{du^{(2)}}{dx}, \quad (1.4)$$

$A = E/2(1-\nu^2) = 2G(1-\chi^2)$, $\chi^2 = (1-2\nu)/2(1-\nu)$, G – модуль сдвига материала полуплоскости, $u^{(2)}(x, 0)$ – горизонтальные перемещения граничных точек полуплоскости.

Теперь, полагая, что каждый дифференциальный элемент слоя клея находится в условиях чистого сдвига, будем иметь условие [1-5]:

$$u^{(1)}(x) - u^{(2)}(x, 0) = k\tau(x), \quad -\infty < x < \infty,$$

которое с помощью обобщённых функций можно представить в виде:

$$U^{(1)}(x) = U^{(2)}(x) + k\tau'(x) \quad (1.5)$$

где

$$\tau'(x) = [\tau_a^+(x) + \tau_a^-(x) + \tau_0(x)]', \quad k = h_k/G_k, \quad G_k = E_k/2(1+\nu_k), \quad \text{штрих означает дифференцирование по } x.$$

Для бесконечной пластины, находящейся в условиях обобщённого плоского напряжённого состояния, в предположении, что неоднородная накладка находится на поверхности пластины по линии $y=0$ (xOy – средняя плоскость пластины), в (1.3) следует A заменить на $A^* = 8Gd/b_1^*(3-\nu)$, где d – толщина пластины, а в (1.1) следует h заменить площадью поперечных сечений накладки F , а в (1.5) – k на $k^* = k/b_1^*$, b_1^* – ширина накладки в контактных участках.

В дальнейшем, для интегрального преобразования Фурье функции $f(x)$ будем пользоваться обозначениями:

$$\bar{f}(\sigma) = F[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\sigma x} dx, \quad f(x) = F^{-1}[\bar{f}(\sigma)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\sigma)e^{-i\sigma x} d\sigma.$$

F – оператор преобразования Фурье.

Теперь, применив к (1.1), (1.3) и (1.5) обобщённое преобразование Фурье, получим следующее функциональное уравнение на действительной оси:

$$(\lambda_1^2 + 2\beta|\sigma| + \sigma^2)\bar{\tau}_a^+(\sigma) + (\lambda_2^2 + 2\beta|\sigma| + \sigma^2)\bar{\tau}_0(\sigma) + (\lambda_3^2 + 2\beta|\sigma| + \sigma^2)\bar{\tau}_a^-(\sigma) = \bar{f}_\beta(\sigma), \quad -\infty < \sigma < \infty, \quad (1.6)$$

где

$$\lambda_j^2 = 1/kE_jh \quad (j=1,2,3), \quad \beta = 1/2kA, \quad \bar{\tau}_a^\pm(\sigma) = F[\tau_a^\pm(x)], \quad \bar{\tau}_0(\sigma) = F[\tau_0(x)] \quad (1.7)$$

$$\bar{f}_\beta(\sigma) = P(\lambda_1^2 e^{i\beta\sigma} + \lambda_3^2 e^{-i\beta\sigma}) + \frac{u'_a}{k} e^{i\sigma a} + \frac{u'_{-a}}{k} e^{-i\sigma a}.$$

Для бесконечной пластины в (1.6) λ_j^2 следует заменить на $\lambda_j^{*2} = 1/k^*E_jF$ ($j=1,2,3$), β на $\beta^* = 1/2k^*A^*$.

Уравнение (1.6) запишем в двух видах

$$(\lambda_3^2 + 2\beta|\sigma| + \sigma^2)\bar{\tau}(\sigma) + (\lambda_2^2 - \lambda_3^2)\bar{\tau}_0(\sigma) + (\lambda_1^2 - \lambda_3^2)\bar{\tau}_a^+(\sigma) = \bar{f}_\beta(\sigma), \quad -\infty < \sigma < \infty, \quad (1.8)$$

$$(\lambda_1^2 + 2\beta|\sigma| + \sigma^2)\bar{\tau}(\sigma) + (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)\bar{\tau}_0(\sigma) + (\lambda_3^2 - \lambda_1^2)\bar{\tau}_a^-(\sigma) = \bar{f}_\beta(\sigma), \quad -\infty < \sigma < \infty, \quad (1.9)$$

Таким образом, задача сведена к решению функциональных уравнений типа (1.8), (1.9). Для определённости сначала рассмотрим уравнение (1.8).

2. Решение функционального уравнения (1.8) и её исследование. Для этой цели представим (1.8) в следующем виде:

$$\bar{\tau}(\sigma) + \frac{(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)\bar{\tau}_0(\sigma)}{\lambda_3^2 + 2\beta|\sigma| + \sigma^2} + \frac{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)\bar{\tau}_a^+(\sigma)}{\lambda_3^2 + 2\beta|\sigma| + \sigma^2} = \bar{g}_{\beta_3}(\sigma), \quad -\infty < \sigma < \infty, \quad (2.1)$$

Применив к (2.1) обратное преобразование Фурье, получим

$$\tau(x) + (\lambda_2^2 - \lambda_3^2) \int_{-a}^a K_{\beta_3}(x-s) \tau_0(s) ds + (\lambda_1^2 - \lambda_3^2) \int_{-\infty}^{\infty} K_{\beta_3}(x-s) \tau_a^+(s) ds = g_{\beta_3}(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (2.2)$$

Здесь

$$\tau(x) = F^{-1}[\bar{\tau}(\sigma)], \quad K_{\beta_3}(x) = F^{-1}[\bar{K}_{\beta_3}(\sigma)], \quad \bar{K}_{\beta_3}(\sigma) = \frac{1}{\lambda_3^2 + 2\beta|\sigma| + \sigma^2}, \quad (2.3)$$

$$g_{\beta_3}(x) = F^{-1}[\bar{g}_{\beta_3}(\sigma)] = P[\lambda_1^2 K_{\beta_3}(x-b) + \lambda_3^2 K_{\beta_3}(x+b)] + \frac{u'_a}{k} K_{\beta_3}(x-a) + \frac{u'_{-a}}{k} K_{\beta_3}(x+a).$$

Теперь, поскольку при $|x| < a$ $\tau(x) = \tau_0(x)$, а при $x > a$ $\tau(x) = \tau_a^+(x)$, из (2.2) будем иметь:

$$\tau_0(x) + (\lambda_2^2 - \lambda_3^2) \int_{-a}^a K_{\beta_3}(x-s) \tau_0(s) ds + (\lambda_1^2 - \lambda_3^2) \int_a^{\infty} K_{\beta_3}(x-s) \tau(s) ds = g_{\beta_3}(x), \quad |x| < a, \quad (2.4)$$

$$\tau(x) + (\lambda_2^2 - \lambda_3^2) \int_{-a}^a K_{\beta_3}(x-s) \tau_0(s) ds + (\lambda_1^2 - \lambda_3^2) \int_a^{\infty} K_{\beta_3}(x-s) \tau(s) ds = g_{\beta_3}(x), \quad a < x < \infty,$$

причём, (2.2) запишем в виде:

$$\tau(x) = (\lambda_3^2 - \lambda_2^2) \int_{-a}^a K_{\beta_3}(x-s) \tau_0(s) ds + (\lambda_3^2 - \lambda_1^2) \int_a^{\infty} K_{\beta_3}(x-s) \tau(s) ds + g_{\beta_3}(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (2.5)$$

При рассмотрении уравнения (1.9), вместо $K_{\beta_3}(x)$ и $g_{\beta_3}(x)$ следует принять обозначения $K_{\beta_1}(x) = F^{-1}[\bar{K}_{\beta_1}(\sigma)]$ и $g_{\beta_1}(x) = F^{-1}[\bar{g}_{\beta_1}(\sigma)]$, что соответствует с изменением параметра λ_3^2 на λ_1^2 .

Таким образом, задача сведена к решению системы интегральных уравнений типа (2.4). Для исследования разрешимости системы (2.4) заметим, что имеет место [3-5]:

$$K_{\beta_3}(x) = \frac{\gamma_1}{\pi} \ln \left(\frac{b_2}{b_1} \right) + \gamma_1 R(x), \quad (2.6)$$

где

$$b_1 = \frac{\lambda_3^2}{\beta + \sqrt{\beta^2 - \lambda_3^2}}, \quad b_2 = \frac{\lambda_3^2}{\beta - \sqrt{\beta^2 - \lambda_3^2}}, \quad \gamma_1 = \frac{1}{b_2 - b_1} = \frac{1}{2\sqrt{\beta^2 - \lambda_3^2}},$$

$$R(x) = R_{b_1}(x) - R_{b_2}(x),$$

$$R_{b_j}(x) = -\frac{C}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[\frac{(b_j x)^{2k}}{\pi(2k)!} \left(\ln \frac{1}{|b_j x|} + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2k} - C \right) - \frac{|b_j x|^{2k-1}}{2(2k-1)!} \right], \quad j=1,2,$$

C – постоянная Эйлера.

Из (2.6) следует, что $K_{\beta_3}(x)$ – непрерывная функция в рассматриваемых интервалах, а её значение в точке $x=0$ конечно, причём, $K_{\beta_3}(0) = (\gamma_1/\pi) \ln(b_2/b_1)$.

Теперь пользуясь представлением (2.6), систему (2.4) можно записывать в виде

$$\tau_0(x) = \gamma_1 (\lambda_3^2 - \lambda_2^2) \int_{-a}^a R(x-s) \tau_0(s) ds + (\lambda_3^2 - \lambda_1^2) \int_a^{\infty} K_{\beta_3}(x-s) \tau(s) ds + g_1(x), \quad |x| < a, \quad (2.7)$$

$$\tau(x) = (\lambda_3^2 - \lambda_2^2) \int_{-a}^a K_{\beta_3}(x-s) \tau_0(s) ds + (\lambda_3^2 - \lambda_1^2) \int_a^{\infty} K_{\beta_3}(x-s) \tau(s) ds + g_2(x), \quad a < x < \infty,$$

где

$$g_1(x) = g_{\beta_3}(x) + \frac{\gamma_1 (\lambda_3^2 - \lambda_2^2)}{\pi} \ln \left(\frac{b_2}{b_1} \right) \int_{-a}^a \tau_0(s) ds, \quad g_2(x) = g_{\beta_3}(x).$$

Далее, имея в виду (2.3), из (2.5) и (2.7) легко заметить, что $\tau(x)$ – непрерывная функция в рассматриваемых интервалах, а в точках $x = \pm a$ $x = \pm b$ принимает конечные значения. Отметим, что такое поведение $\tau(x)$ обусловлено наличием прослойки материала склеивания в контактных участках. При отсутствии прослойки в этих точках накладки $\tau(x)$ имеет логарифмическую особенность [6]. После решения системы (2.7), значения контактных напряжений при $-\infty < x < -a$ будут определяться из (2.5) при требовании $-\infty < x < -a$.

Систему (2.7) запишем в виде:

$$\varphi = K\varphi + g, \quad (2.8)$$

где

$$\varphi = \begin{pmatrix} \tau_0 \\ \tau \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} \gamma_1(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)k_{11} & (\lambda_3^2 - \lambda_1^2)k_{12} \\ (\lambda_3^2 - \lambda_2^2)k_{21} & (\lambda_3^2 - \lambda_1^2)k_{22} \end{pmatrix},$$

$$k_{11}\tau_0 = \int_{-a}^a R(x-s)\tau_0(s)ds, \quad k_{12}\tau = \int_a^\infty K_{\beta_3}(x-s)\tau(s)ds, \quad (2.9)$$

$$k_{21}\tau_0 = \int_{-a}^a K_{\beta_3}(x-s)\tau_0(s)ds, \quad k_{22}\tau = \int_a^\infty K_{\beta_3}(x-s)\tau(s)ds.$$

Теперь рассмотрим (2.8) в банаховом пространстве B [7] вектор-функции $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, где $x_1 \in L_1(-a, a)$, $x_2 \in L_1(a, \infty)$ и с нормой $\|x\| = \max \left\{ \|x_1\|_{L_1(-a, a)}, \|x_2\|_{L_1(a, \infty)} \right\}$.

Очевидно, что оператор K действует в пространстве B и является фредгольмовым. Тогда операторное уравнение (2.8) в указанном пространстве можно решать методом последовательных приближений, если $\|K\| < 1$, причём

$$\|K\| = \max \left\{ \left| \gamma_1(\lambda_3^2 - \lambda_2^2) \right| \|k_{11}\| + \left| \lambda_3^2 - \lambda_1^2 \right| \|k_{12}\|, \left| \lambda_3^2 - \lambda_2^2 \right| \|k_{21}\| + \left| \lambda_3^2 - \lambda_1^2 \right| \|k_{22}\| \right\}.$$

Следовательно, получим условие разрешимости методом последовательных приближений в виде:

$$\max \left\{ \left| 1 - \frac{\lambda_2^2}{\lambda_3^2} \right| + \frac{1}{2} \left| 1 - \frac{\lambda_1^2}{\lambda_3^2} \right|, \left| 1 - \frac{\lambda_1^2}{\lambda_3^2} \right| + \frac{1}{2} \left| 1 - \frac{\lambda_2^2}{\lambda_3^2} \right| \right\} < 1. \quad (2.10)$$

Поступая аналогичным образом с уравнением (1.9), можно получить систему интегральных уравнений в виде:

$$\tau_0(x) + (\lambda_2^2 - \lambda_1^2) \int_{-a}^a K_{\beta_1}(x-s)\tau_0(s)ds + (\lambda_3^2 - \lambda_1^2) \int_{-\infty}^{-a} K_{\beta_1}(x-s)\tau(s)ds = g_{\beta_1}(x), \quad |x| < a, \quad (2.11)$$

$$\tau(x) + (\lambda_2^2 - \lambda_1^2) \int_{-a}^a K_{\beta_1}(x-s)\tau_0(s)ds + (\lambda_3^2 - \lambda_1^2) \int_{-\infty}^{-a} K_{\beta_1}(x-s)\tau(s)ds = g_{\beta_1}(x), \quad -\infty < x < -a,$$

причём, $\tau(x)$ при $-\infty < x < \infty$ будет определяться так:

$$\tau(x) = (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \int_{-a}^a K_{\beta_1}(x-s)\tau_0(s)ds + (\lambda_1^2 - \lambda_3^2) \int_{-\infty}^{-a} K_{\beta_1}(x-s)\tau(s)ds + g_{\beta_1}(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (2.12)$$

Повторяя вышеуказанные рассуждения к системе (2.11) аналогичным образом, получим условие разрешимости методом последовательных приближений в виде:

$$\max \left\{ \left| 1 - \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \right| + \frac{1}{2} \left| 1 - \frac{\lambda_3^2}{\lambda_1^2} \right|, \left| 1 - \frac{\lambda_3^2}{\lambda_1^2} \right| + \frac{1}{2} \left| 1 - \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \right| \right\} < 1. \quad (2.13)$$

Из неравенств (2.10) и (2.13) следует, что в довольно широком интервале изменения значения λ_1^2/λ_3^2 , λ_2^2/λ_3^2 и λ_3^2/λ_1^2 , λ_2^2/λ_1^2 задачу в пространстве B можно решать методом последовательных приближений.

В случае $\lambda_3^2 = \lambda_1^2$ контактные напряжения определяются методом последовательных приближений при всех допустимых значениях $0 < \lambda_2^2/\lambda_1^2 < 2$, а в случае $a \rightarrow 0$ – при всех допустимых значениях $0 < \lambda_j^2 < \infty$, $j=1,3$.

При получении этих неравенств имелось в виду, что

$$\int_0^\infty K_{\beta_j}(x) dx = \frac{1}{2\lambda_j^2}, \quad K_{\beta_j}(x) > 0, \quad j=1,3, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < b_2 \leq 2b_1.$$

Значения $\tau(x)$ в точках $x = \pm a$ можно определять из (2.5), подставляя $x = \pm a$, а неизвестные постоянные u'_a и u'_{-a} будут определяться из условий

$$u'_a = \frac{E_1 - E_2}{E_1 E_2 h} \left[\int_a^\infty \tau(s) ds - P \right], \quad u'_{-a} = \frac{E_2 - E_3}{E_2 E_3 h} \left[\int_{-\infty}^{-a} \tau(s) ds - P \right].$$

Из (2.1) в силу разложения $\bar{K}_{\beta_3}(\sigma)$ при $|\sigma| \rightarrow 0$ получим, что $\tau(x) = F^{-1}[\bar{\tau}(\sigma)]$ при $|x| \rightarrow \infty$ имеет степенной порядок $O(x^{-2})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lubkin J.L. and Lewis L.C. Adhesive shear flow for an axially loaded, finite stringer bounded to an infinite sheet. //Quart J. of Mech. and Applied Math. 1970. Vol. XXIII, p. 521.
2. Григорян Э.Х. Контактная задача для упругой полуплоскости, на границе которой приклеена бесконечная кусочно-однородная накладка. //Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1990. Т.43. №4. С.24-34.
3. Саркисян В.С., Керопян А.В. К решению задач для упругих бесконечных тел, границы которых усилены склеенными с ними упругой кусочно-однородной бесконечной накладкой. // Изв. НАН Армении. Механика. 1995. Т.48. №1. С.42-48.
4. Григорян Э.Х., Керопян А.В., Саркисян В.С. Контактная задача для упругой полуплоскости, граница которой усилена склеенными с ней полубесконечными накладками. //Изв.РАН. МТТ. 1992. №3. С.180-184.
5. Керопян А.В. Контактная задача для упругой полуплоскости или бесконечной пластины с кусочно-однородным стрингером при наличии сдвига. //Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Тр. VII межд. конф. Институт механики НАН РА. Ереван: 2011. С.207-214.
6. Саркисян В.С. Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками. Ереван: Изд. ЕГУ, 1983. 259с.
7. Крейн С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1971.

Сведения об авторе:

Керопян Агаси Вачаганович – канд. физ-мат. наук, доцент кафедры механики ЕГУ.
ул. А. Манукяна, 1, тел.: 551148 (раб.), 461941 (дом),
E-mail: agas50@ysu.am

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ

Киракосян Г.Н.

При исследовании задач оптимальной стабилизации математического маятника с подвижной точкой подвеса получаются линейные неоднородные системы, исследование которых имеет и теоретическое, и прикладное важное значение. Задача оптимальной стабилизации линейных неоднородных систем с постоянными коэффициентами была решена в [1].

В работе рассмотрена задача оптимальной стабилизации линейных неоднородных систем с переменными коэффициентами. Предполагается, что коэффициенты фазовых координат являются непрерывными и ограниченными функциями, а неоднородная часть системы – непрерывная функция, которая в бесконечности ($t \rightarrow \infty$) стремится к нулю. Задача решена методом Ляпунова – Беллмана, получена оптимальная функция Ляпунова, показана сходимость возникших несобственных интегралов и построены оптимальные управляющие воздействия.

Для примера исследована задача оптимальной стабилизации положения равновесия математического маятника, когда точка подвеса может двигаться в произвольном направлении в плоскости колебаний маятника.

Постановка задачи. Рассмотрим возмущённое движение некоторого объекта, описываемым системой обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами (1). Запишем эту систему в матричной форме

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u + \psi(t), \quad (1)$$

где $A(t) = \|a_{ij}(t)\|$, $B(t) = \|b_{is}(t)\|$, $\psi(t) = \|\psi_i(t)\|$, $u(t) = \|u_s(t)\|$ ($i, j = 1, \dots, n$; $s = 1, \dots, r$).

Предположим, что $a_{ij}(t)$ и $b_{is}(t)$ ($i, j = 1, \dots, n$; $s = 1, \dots, r$) – ограниченные и непрерывные функции времени t , в частности, они могут быть и постоянными. Кроме того, будем считать, что функции $\psi_i(t)$ непрерывны и при $t \rightarrow \infty$ стремятся к нулю, причём так, что

$|\psi_i(t)| \leq Me^{-\alpha t}$ при всех $t \geq 0$, где α и M – некоторые положительные величины. Мы будем

предполагать, что система (1) вполне управляема воздействиями u_s , т.е.

$$\text{rank} \{B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B\} = n \quad [2].$$

Запишем систему уравнений (1) в открытом виде:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j + \sum_{s=1}^r b_{is}(t)u_s + \psi_i(t) \quad (i = 1, \dots, n). \quad (2)$$

Возьмём за признак качества функционал

$$J[u] = \int_0^\infty \left(\sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}(t)x_i x_j + \sum_{k,s=1}^r \beta_{ks}(t)u_k u_s \right) dt, \quad (3)$$

где квадратичные формы $\sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}(t)x_i x_j$ и $\sum_{k,s=1}^r \beta_{ks}(t)u_k u_s$ предполагаются определенно

положительными.

Задача. Требуется найти такие управляющие воздействия u_s^o ($s = 1, \dots, r$), которые сделают решение $x_i = 0$ ($i = 1, \dots, n$) системы (2) асимптотически устойчивым, минимизируя функционал (3).

Решение. Для решения задачи оптимальной стабилизации системы (2) пользуемся методом Ляпунова – Беллмана [1,3]. Составим выражение Беллмана для системы (2).

$$\Phi(x, u, t) = \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(x, t)}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j + \sum_{s=1}^r b_{is}(t)u_s + \psi_i(t) \right) + \quad (4)$$

$$+ \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}(t)x_i x_j + \sum_{k,s=1}^r \beta_{ks}(t)u_k u_s,$$

где $V(x, t)$ – функция Ляпунова.

Функция $\Phi(x, u, t)$ при $u_i(t) = u_i^o(t)$ ($i = 1, \dots, r$) оптимальных управляющих воздействиях должна иметь минимум по u , равный нулю, следовательно, $\left. \frac{\partial \Phi(x, u, t)}{\partial u} \right|_{u^o} = 0$ и

$\Phi(x, u, t)|_{u^o} = 0$. Из данного условия получаем следующие соотношения, соответственно:

$$\sum_{i=1}^n b_{is} \frac{\partial V}{\partial x_i} + 2 \sum_{k=1}^r \beta_{ks} u_k^o = 0 \quad (s = 1, \dots, r), \quad (5)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \sum_{s=1}^r b_{is} u_s^o + \psi_i \right) + \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} x_i x_j + \sum_{k,s=1}^r \beta_{ks} u_k^o u_s^o = 0. \quad (6)$$

Уравнения (5) – линейные неоднородные уравнения относительно неизвестных u_k^o . Уравнения (5) можно решить относительно неизвестных u_k^o , так как форма $\sum_{k,s=1}^r \beta_{ks} u_k u_s$ является

определённо положительной (в силу выбора критерия $J[u]$), и следовательно, детерминант этой формы при всех $t \geq t_0$ $\det \|\beta_{ks}\| \geq \delta > 0$, где δ – положительное постоянное.

Из уравнений (5) находим, что

$$u_k^o = -\frac{1}{2} \sum_{s=1}^r \frac{\Delta_{sk}}{\Delta} \left(\sum_{i=1}^n b_{is} \frac{\partial V}{\partial x_i} \right) \quad (k = 1, \dots, r), \quad (7)$$

где Δ_{sk} – алгебраическое дополнение элемента, стоящего на пересечении s -ой строки и k -ого столбца в определителе Δ .

Подставим теперь найденные управляющие воздействия u_k^o (7) в уравнение (6), тогда получим следующее уравнение в частных производных для определения оптимальной функции Ляпунова $V(x, t)$. Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^r b_{is} \left(\sum_{k=1}^r \frac{\Delta_{ks}}{\Delta} \left(\sum_{j=1}^n b_{js} \frac{\partial V}{\partial x_j} \right) \right) + \psi_i \right) + \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} x_i x_j + \\ + \frac{1}{4} \sum_{k,s=1}^r \beta_{ks} \left(\sum_{l=1}^n \frac{\Delta_{lk}}{\Delta} \left(\sum_{i=1}^n b_{il} \frac{\partial V}{\partial x_i} \right) \right) \left(\sum_{m=1}^r \frac{\Delta_{ms}}{\Delta} \left(\sum_{j=1}^n b_{jm} \frac{\partial V}{\partial x_j} \right) \right) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

После выполнения соответствующих шагов уравнение (8) запишем в виде:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_j \frac{\partial V}{\partial x_i} - \frac{1}{4} \sum_{k,s=1}^r \frac{\Delta_{ks}}{\Delta} \left(\sum_{i=1}^n b_{ik} \frac{\partial V}{\partial x_i} \right) \left(\sum_{j=1}^n b_{js} \frac{\partial V}{\partial x_j} \right) + \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \psi_i = 0. \quad (9)$$

Оптимальную функцию Ляпунова $V^o(x, t)$ будем искать в следующем виде:

$$V^o(x, t) = V^{(2)}(x, t) + V^{(1)}(x, t) + V^{(0)}(t), \quad (10)$$

где $V^{(2)}(x, t)$ – квадратичная форма относительно переменных x_i с коэффициентами, зависящими от времени t , $V^{(1)}(x, t)$ – линейная функция относительно переменных x_i с коэффициентами, зависящими от времени t , а $V^{(0)}(t)$ – функция от времени t , не зависящая от величин x_i .

Подставим выражение (10) в уравнение (9) и приравняем нулю члены одинакового порядка по x_i . Получим следующие уравнения для определения функций $V^{(2)}(x, t)$, $V^{(1)}(x, t)$ и $V^{(0)}(t)$.

Для членов второго порядка переменных x_i имеем

$$\frac{\partial V^{(2)}}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_j \frac{\partial V^{(2)}}{\partial x_i} - \frac{1}{4} \sum_{k,s=1}^r \frac{\Delta_{ks}}{\Delta} \left(\sum_{i=1}^n b_{ik} \frac{\partial V^{(2)}}{\partial x_i} \right) \left(\sum_{j=1}^n b_{js} \frac{\partial V^{(2)}}{\partial x_j} \right) + \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} x_i x_j = 0. \quad (11)$$

Для членов первого порядка переменных x_i имеем

$$\frac{\partial V^{(1)}}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_j \frac{\partial V^{(1)}}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \sum_{k,s=1}^r \frac{\Delta_{ks}}{\Delta} \left(\sum_{i=1}^n b_{ik} \frac{\partial V^{(1)}}{\partial x_i} \right) \left(\sum_{j=1}^n b_{js} \frac{\partial V^{(1)}}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V^{(1)}}{\partial x_i} \psi_i = 0. \quad (12)$$

А для членов, зависящих только от времени, имеем

$$\frac{dV^{(0)}}{dt} - \frac{1}{4} \sum_{k,s=1}^r \frac{\Delta_{ks}}{\Delta} \left(\sum_{i=1}^n b_{ik} \frac{\partial V^{(0)}}{\partial x_i} \right) \left(\sum_{j=1}^n b_{js} \frac{\partial V^{(0)}}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V^{(0)}}{\partial x_i} \psi_i = 0. \quad (13)$$

Так как система (1) вполне управляема, то из уравнения (11) единственным образом определим форму $V^{(2)}(x, t)$ [1,3], которую будем искать в следующем виде:

$$V^{(2)}(x, t) = \sum_{i,j=1}^n c_{ij}(t) x_i x_j. \quad (14)$$

Подставим теперь значения частных производных по t и x_i от функции (14)

$\frac{\partial V^{(2)}}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^n \frac{dc_{ij}(t)}{dt} x_i x_j$ и $\frac{\partial V^{(2)}}{\partial x_i} = 2 \sum_{j=1}^n c_{ij}(t) x_j$ в уравнение (11). Получим

$\sum_{i,j=1}^n \frac{dc_{ij}}{dt} x_i x_j + \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n c_{ij} x_j \right) \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) - \sum_{k,s=1}^r \frac{\Delta_{ks}}{\Delta} \left(\sum_{i,j=1}^n b_{ik} c_{ij} x_j \right) \left(\sum_{i,j=1}^n b_{js} c_{ij} x_j \right) = 0$. Приравняв далее нулю коэффициенты при одинаковых произведениях $x_i x_j$, получим следующие уравнения для определения коэффициентов $c_{ij}(t)$:

$$\frac{dc_{ij}}{dt} + \sum_{k=1}^n (a_{ki} c_{kj} + a_{kj} c_{ki}) - \sum_{k,s=1}^r \frac{\Delta_{ks}}{\Delta} \left(\sum_{l=1}^n b_{lk} c_{lj} \right) \left(\sum_{m=1}^n b_{ms} c_{mi} \right) + \alpha_{ij} = 0 \quad (15)$$

$$(i, j = 1, \dots, n, \quad c_{ij} = c_{ji}, \quad \alpha_{ij} = \alpha_{ji}).$$

Уравнение (15) является уравнением типа Риккати. Если удастся найти частное решение $c_{ij}(t)$ этих уравнений, то можно найти и полное решение. Точно такое же уравнение можно получить при рассмотрении задачи об оптимальной стабилизации линейной однородной системы $\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u$. Решение такой задачи существует, так как, по предположению $\text{rank}\{B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B\} = n$ [2]. Следовательно, асимптотически устойчива система первого приближения:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \frac{\partial V}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \sum_{k,s=1}^r b_{is} \frac{\Delta_{ks}}{\Delta} \left(\sum_{j=1}^n b_{jk} \frac{\partial V^{(2)}}{\partial x_j} \right) \quad (i = 1, \dots, r). \quad (16)$$

Рассмотрим теперь уравнение (12). Если перенести в правую часть последнее слагаемое, то оставшиеся слагаемые представят собой полную производную по времени $\left(\frac{dV^{(1)}}{dt} \right)_{(16)}$ от

функции $V^{(1)}(x, t)$, составленную в силу системы (16):

$$\left(\frac{dV^{(1)}}{dt}\right)_{(16)} = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial V^{(2)}}{\partial x_i} \psi_i. \quad (17)$$

Уравнение (17) имеет решение, поскольку квадратичная форма $V^{(2)}(x, t)$ является функцией Ляпунова для асимптотически устойчивой системы (16). Следуя [1], решение уравнения (17) получим интегрируя (17) по τ в пределах от t до ∞ вдоль движения $\xi(\tau; x, t)$ системы (16), порождаемых начальными условиями $\tau = t$, $\xi(t; x, t) = x$, т.е.

$$V^{(1)}(x, t) = \int_t^\infty \sum_{i=1}^n \psi_i(\tau) \frac{\partial V^{(2)}(\xi(\tau; x, t), t)}{\partial x_i} d\tau. \quad (18)$$

Интеграл (18) сходится абсолютно равномерно относительно величин x_i из произвольной замкнутой области G начальных возмущений. Это следует из того, что $|\psi_i(\tau)| \leq M e^{-\alpha\tau}$ и $\|\xi(\tau; x, t)\| \leq N \|x\| e^{-\beta(\tau-t)}$, где N, β – положительные постоянные. Поэтому имеем

$$\frac{\partial V^{(1)}(x, t)}{\partial x_s} = -\int_t^\infty \sum_{i,j=1}^n \psi_i(\tau) \frac{\partial^2 V^{(2)}(\xi(\tau; x, t), t)}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial \xi(\tau; x, t)}{\partial x_s} d\tau,$$

из которого вытекает, что существуют такие N_1 и γ постоянные положительные числа, что имеет место неравенство

$$\left| \frac{\partial V^{(1)}(x, t)}{\partial x_s} \right| \leq N_1 e^{-\gamma t}. \quad (19)$$

Рассмотрим теперь уравнение (13). Имеем

$$V^{(0)}(t) = \int_t^\infty \left[\frac{1}{4} \sum_{k,s=1}^r \frac{\Delta_{ks}}{\Delta} \left(\sum_{i=1}^n b_{ik} \frac{\partial V^{(1)}}{\partial x_i} \right) \left(\sum_{j=1}^n b_{js} \frac{\partial V^{(1)}}{\partial x_j} \right) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial V^{(1)}}{\partial x_i} \psi_i \right] dt. \quad (20)$$

В силу (19), интеграл (20) сходится также абсолютно [1].

Таким образом, оптимальная функция Ляпунова существует и имеет вид (10). А управляющие воздействия находим из (7).

В качестве примера исследована задача оптимальной стабилизации положения равновесия математического маятника, когда точка подвеса может двигаться в произвольном направлении в плоскости колебаний маятника.

ЛИТЕРАТУРА

1. Альбрехт Э.Г., Шелементьев Г.С. Лекции по теории стабилизации. Свердловск: 1972. 274с.
2. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475с.
3. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. Доп. 4. М.: Наука, 1966. С.475-514.

Сведения об авторе:

Киракосян Галя Норайровна – аспирант кафедры механики, Ереванский государственный университет, факультет математики и механики, (374 10) 25 21 51, (374 99) 37 17 30

E-mail: galva2151@mail.ru

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОРТОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ЛИНЕЙНО-ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ ПРИ УЧЁТЕ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА

Киракосян Р.М., Степанян С.П.

В рамках уточнённой теории решается линейная задача статической устойчивости ортотропной цилиндрической оболочки линейно-переменной толщины. Рассматривается вопрос оптимальности. Показывается, что среди всех оболочек линейно-переменной толщины одинакового объёма при шарнирном опирании обоих торцов наибольшее критическое значение сжимающих сил имеет оболочка постоянной толщины.

Вопросам устойчивости оболочек посвящено много исследований, проведённых в рамках как классической ([1], [2] и др.), так и уточнённых теорий ([3] и др.) В настоящей статье в рамках уточнённой теории [4] рассматривается осесимметричная линейная задача устойчивости в малом ортотропной замкнутой круговой цилиндрической оболочке линейно-переменной толщины, которая при различных торцевых условиях сжимается вдоль образующих равномерно распределёнными силами. Определение безразмерных критических значений сжимающих сил сводится к нахождению собственных чисел системы двух однородных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Пользуясь разработанным алгоритмом решения, рассматривается вопрос об определении оптимальной линейно-переменной толщины оболочки по критерию устойчивости. Показывается, что при шарнирном опирании обоих торцов из множества оболочек линейно-переменной толщины одинакового объёма наибольшее критическое значение сжимающих сил имеет оболочка постоянной толщины. Это заключение верно как при классической, так и уточнённой постановках задачи.

1. Рассмотрим замкнутую круговую цилиндрическую оболочку длины l и радиуса срединной поверхности R . Оболочку отнесём к системе ортогональных координат α, β, γ . Координатные линии α совпадают с образующими, а γ – перпендикулярны к срединной поверхности оболочки. Оболочка изготовлена из ортотропного линейно-упругого материала, главные направления анизотропии которого параллельны координатным линиям. Будем считать, что оболочка имеет линейно-переменную толщину. Такие оболочки одинакового объёма V образуют однопараметрическое множество толщины

$$h = \frac{h_0}{l} [2\alpha + \beta(l - 2\alpha)] \quad (1.1)$$

Здесь $h_0 = V/2\pi Rl$ – средняя толщина оболочек. Безразмерный параметр β изменяется в пределах

$$0 < \beta < 2 \quad (1.2)$$

В случае одинаковых условий крепления торцевых сечений оболочки можно ограничиться рассмотрением только половины этого промежутка: $0 < \beta \leq 1$.

Пусть к торцевым сечениям оболочки $\alpha = 0$ и $\alpha = l$ вдоль образующих приложены сжимающие силы интенсивности P . Условия крепления торцов симметричны относительно оси оболочки. Рассмотрим осесимметричную задачу устойчивости в малом оболочки в рамках уточнённой теории [4].

Дифференциальные уравнения равновесия осесимметрично деформированной оболочки в усилиях и моментах имеют вид [3]:

$$\frac{dT_1}{d\alpha} = 0 \Rightarrow T_1 = -P, \quad -\frac{T_2}{R} + \frac{dN_1}{d\alpha} = P \frac{d^2 w}{d\alpha^2}, \quad \frac{dM_1}{d\alpha} - N_1 = 0 \quad (1.3)$$

Усилия T_1, T_2, N_1 и изгибающий момент M_1 имеют выражения [4]:

$$\begin{aligned}
T_1 &= C_{11} \frac{du}{d\alpha} + C_{12} \frac{w}{R} - \frac{D_{11}}{R} \left(\frac{d^2 w}{d\alpha^2} - a_{55} \frac{d\varphi_1}{d\alpha} \right) - \frac{D_{12} w}{R^3}, \\
T_2 &= C_{22} \frac{w}{R} + C_{12} \frac{du}{d\alpha}, \quad M_1 = -D_{11} \left(\frac{d^2 w}{d\alpha^2} - a_{55} \frac{d\varphi_1}{d\alpha} - \frac{1}{R} \frac{du}{d\alpha} \right) \\
N_1 &= \frac{2}{3} h \varphi_1 - \frac{D_{11}}{h} \left(\frac{d^2 w}{d\alpha^2} - a_{55} \frac{d\varphi_1}{d\alpha} - \frac{1}{R} \frac{du}{d\alpha} \right) \frac{dh}{d\alpha} = \frac{2}{3} h \varphi_1 + \frac{M_1}{h} \frac{dh}{d\alpha}
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Здесь

$$C_{ij} = B_{ij} h, \quad D_{ij} = \frac{B_{ij} h^3}{12} \tag{1.5}$$

B_{ij}, a_{55} – параметры материала.

Пренебрегая докритическим прогибом и учитывая, что при потере устойчивости оболочки сжимающие силы P остаются неизменными, для производной осевого перемещения, возникшего вследствие выпучивания оболочки, из первого уравнения (1.3) получим:

$$\frac{du}{d\alpha} = -\frac{B_{12}}{B_{11} R} \left(1 - \frac{h^2}{12R^2} \right) w + \frac{h^2}{12R} \left(\frac{d^2 w}{d\alpha^2} - a_{55} \frac{d\varphi_1}{d\alpha} \right) \tag{1.6}$$

С учётом (1.3)–(1.6) последние два уравнения системы (1.3) после выпучивания оболочки можно привести к виду:

$$\begin{aligned}
S \left[12\bar{P} + mn^2 H^3 S^2 \right] \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{\alpha}^2} + n^2 SH \left[12q - m^2 (12 - n^2 H^2 S^2) \right] \bar{w} - \\
H \left(8 + \chi mn^2 H^2 S^2 \right) \frac{d\bar{\varphi}_1}{d\bar{\alpha}} - 16t\bar{\varphi}_1 = 0 \\
S^3 H^2 (12 - n^2 S^2 H^2) \frac{d^3 \bar{w}}{d\bar{\alpha}^3} + 4S^3 tH (6 - n^2 S^2 H^2) \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{\alpha}^2} + \\
+ mn^2 S^3 H^2 (12 - n^2 S^2 H^2) \frac{d\bar{w}}{d\bar{\alpha}} + 4mn^2 S^3 tH (6 - n^2 S^2 H^2) \bar{w} - \\
- \chi S^2 H^2 (12 - n^2 S^2 H^2) \frac{d^2 \bar{\varphi}_1}{d\bar{\alpha}^2} - 4\chi S^2 tH (6 - n^2 S^2 H^2) \frac{d\bar{\varphi}_1}{d\bar{\alpha}} + 96\bar{\varphi}_1 = 0
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Здесь приняты обезразмеривающие обозначения:

$$\begin{aligned}
\alpha = l\bar{\alpha}, \quad u = h_0 \bar{u}, \quad w = h_0 \bar{w}, \quad l = nR, \quad S = h_0/l, \quad h = h_0 H, \\
H = \beta + t\bar{\alpha}, \quad t = 2(1 - \beta), \quad B_{12} = mB_{11}, \quad B_{22} = qB_{11}, \quad \chi = a_{55} B_{11}, \\
T_1 = B_{11} h_0 \bar{T}_1, \quad T_2 = B_{11} h_0 \bar{T}_2, \quad N_1 = B_{11} h_0 \bar{N}_1, \quad M_1 = B_{11} h_0^2 \bar{M}_1, \\
\varphi_1 = B_{11} \bar{\varphi}_1, \quad P = B_{11} h_0 \bar{P} \cdot 10^{-3}, \quad V = \pi R l^2 \bar{V}, \quad \bar{V} = 2S
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Это и есть система устойчивости безмоментного состояния рассматриваемой оболочки в рамках уточнённой теории [4].

Нетрудно заметить, что система дифференциальных уравнений (1.7) имеет четвёртый порядок. К системе (1.7) следует присоединить краевые условия оболочки. Приведём наиболее часто встречающиеся краевые условия в обозначениях (1.8):

а) свободный край:

Имея в виду (1.4) и (1.6), из (1.3) получим:

$$\bar{M}_1 = -\frac{SH^3}{12} \left(1 - \frac{n^2 S^2 H^2}{12} \right) \left(S \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{\alpha}^2} - \chi \frac{d\bar{\varphi}_1}{d\bar{\alpha}} + mSn^2 \bar{w} \right), \quad \bar{N}_1 = \frac{2}{3} H \bar{\varphi}_1 + \bar{M}_1 St \tag{1.9}$$

С учётом этих выражений условия свободного края от опор будут:

$$S \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{\alpha}^2} - \chi \frac{d\bar{\varphi}_1}{d\bar{\alpha}} + mSn^2 \bar{w} = 0, \quad (\bar{M}_1 = 0),$$

$$\bar{\varphi}_1 = \frac{3S\bar{P}10^{-3}}{2H} \frac{d\bar{w}}{d\bar{\alpha}}, \quad \left(\bar{N}_1 = \frac{2}{3} H \bar{\varphi}_1 \right)$$
(1.10)

б) шарнирно опертый край:

$$\bar{w} = 0, \quad S \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{\alpha}^2} - \chi \frac{d\bar{\varphi}_1}{d\bar{\alpha}} = 0, \quad (\bar{M}_1 = 0)$$
(1.11)

в) защемлённый край:

$$\bar{w} = 0, \quad S \frac{d\bar{w}}{d\bar{\alpha}} - \chi \bar{\varphi}_1 = 0, \quad (\bar{u} = 0)$$
(1.12)

Таким образом, определение критических значений сжимающих сил \bar{P} в линейной постановке сводится к нахождению собственных значений чисел системы (1.7) при соответствующих краевых условиях.

2. Рассмотрим случай, когда оба торца оболочки $\bar{\alpha} = 0, \bar{\alpha} = 1$ шарнирно оперты. Задачу будем решать по методу коллокаций.

Положим:

$$\bar{w} = \sum_{i=1}^k a_i \sin i\pi\bar{\alpha}, \quad \bar{\varphi}_1 = \sum_{i=1}^k b_i \cos i\pi\bar{\alpha},$$
(2.1)

Представления (2.1) удовлетворяют условиям шарнирного опирания (1.11). Разделив промежуток $0 < \bar{\alpha} < 1$ на $k+1$ части и в точках коллокаций, удовлетворив систему (1.7), получим систему $2k$ однородных уравнений. Собственными числами детерминанта этой системы и будут искомые критические значения \bar{P} . Исследования показывают, что для лучшей сходимости процесса вычислений целесообразно в качестве точек коллокаций брать корни многочлена Чебышева.

В нижеприведённой таблице представлены безразмерные значения критической силы \bar{P} для некоторых ортотропных оболочек линейно-переменных толщин одинакового объёма $\bar{V} = 2S = 0,2$. Как и следовало ожидать, учёт поперечного сдвига приводит к уменьшению критической силы.

На рис. 1–3 представлены графики зависимости критических значений от параметра β .

Как из данных таблицы, так и из графиков видно, что оптимальная оболочка по критерию устойчивости – это оболочка постоянной толщины $\beta = 1$.

Таблица

$S = 0,1$		$q = 0,5$		$q = 1$		$q = 2$		
		$n = 1$	$n = 2$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 1$	$n = 2$	
$\chi = 0$	β	0,2	11,37	23,11	16,68	37,42	25,47	57,98
		0,4	19,67	36,95	27,56	57,99	40,59	85,89
		0,6	28,66	51,61	39,17	80,54	56,82	115,2
		0,8	37,18	64,93	49,65	103,7	71,96	146,5
		1	42,25	72,36	55,33	112,9	80,75	157,8
$\chi = 5$	β	0,2	9,94	18,83	14,16	28,19	20,47	41,09
		0,4	17,31	30,84	23,79	44,70	33,41	63,46
		0,6	25,10	43,68	34,02	61,64	47,29	85,65
		0,8	32,19	56,36	43,48	77,12	61,24	104,5
		1	36,35	64,68	49,08	87,30	68,75	110,9

Для изотропной ($q=1$) оболочки постоянной толщины ($\beta=1$) при неучёте поперечного сдвига ($\chi=0$) известна формула ([1], стр.389)

$$\sigma_{кр} = \frac{Eh}{R\sqrt{3(1-\nu^2)}}$$

В обозначениях (1.8) она принимает вид

$$\bar{P} = \sqrt{\frac{1-\nu^2}{3}} S_n \cdot 10^3$$

При $\nu=0,3$, $S=0,1$, $n=1$ эта формула для критической сжимающей силы даёт безразмерное значение $\bar{P}=55,076$. Соответствующее значение таблицы равно 55,326. Эти значения отличаются друг от друга менее 0,5%, что свидетельствует о высокой степени достоверности результатов, полученных по методу коллокаций.

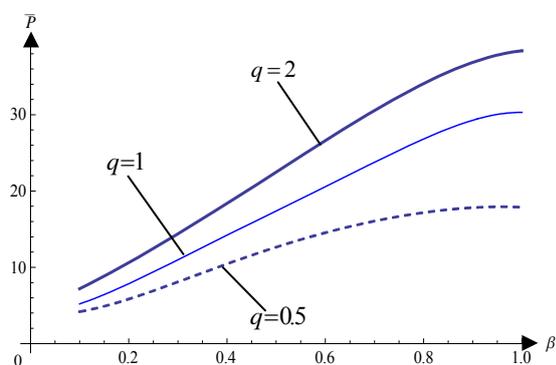


Рис.1

$n = 0,5; S = 0,1; \chi = 5$

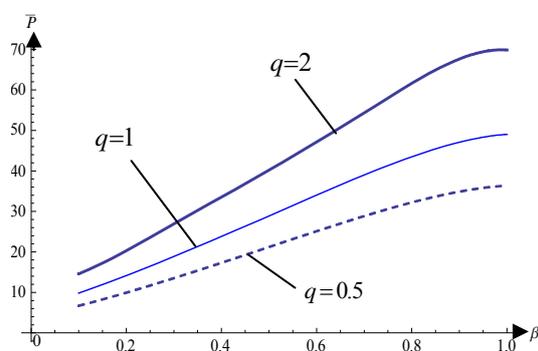


Рис.2

$n = 1; S = 0,1; \chi = 5$

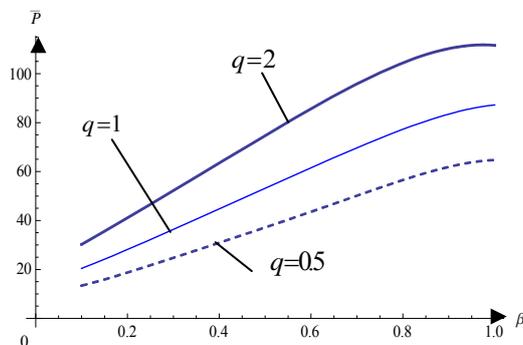


Рис.3

$n = 2; S = 0,1; \chi = 5$

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем. М.-Л.: Огиз-гостехиздат, 1946. 532с.
2. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. М.: Физматгиз, 1963. 880с.
3. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: «Наука», Главная редакция физматлит, 1974. 446с.
4. Киракосян Р.М. Об одной уточнённой теории гладких ортотропных оболочек переменной толщины. //Докл. НАН Армении. 2011. Т.111. №2. С.149-156.

Сведения об авторах:

Киракосян Размик Макарович – доктор техн. наук, профессор, главный научн. сотрудник Института механики НАН РА.

Адрес: 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24^б.

Тел.: (+37410) 56-81-88.

E-mail: Kiraz37@mail.ru

Степанян Сейран Павлович – кандидат физ.-мат. наук, доцент, сотрудник кафедры числ.анализа и мат. моделирования факультета информ. и прикл. математики Ереванского госуниверситета.

Адрес: 0025, Ереван, ул. А.Манукяна 1.

Тел.: (+37410) 55-90-96.

E-mail: SEYRANSTEP@yahoo.com

ВЛИЯНИЕ МЕТОДА НАГНЕТЕНИЯ РАСТВОРА НА ВЯЗКОСТНЫЕ СВОЙСТВА БЕТОНА

Клекчян Д.Г.

Представлены результаты лабораторных испытаний вязкостных свойств шлакобетона и бетона из базальтового щебня и песка литоидной пемзы, изготовленные двумя разными технологиями: традиционным (вибрированием) и методом нагнетания раствора.

Метод изготовления бетонных и железобетонных элементов и конструкций нагнетанием раствора имеет ряд преимуществ по сравнению с элементами, полученными по традиционной технологии вибрирования. Как показывают проведённые нами многолетние лабораторные исследования, метод нагнетания раствора значительно повышает физико-механические свойства – с одной стороны и снижает усадочные и ползучие характеристики – с другой стороны. Лабораторные исследования производились над бетонами разного состава: тяжёлого, облегчённого и лёгкого. Здесь приводятся некоторые данные, полученные испытанием шлакобетона и бетона из базальтового щебня и песка литоидной пемзы на ползучесть, когда бетоны изготавливаются по технологиям нагнетания раствора и традиционным методом вибрирования.

1. **Шлакобетон.** Состав бетона из вулканического шлакового щебня и песка с коэффициентом заполнения пустотности $m = 1,2$: М-400 цемент – 350 кг, вода – 220 л, песок – 560 кг, щебень – 603 кг. Средняя температура лабораторного помещения $+18^\circ\text{C}$, относительная влажность воздуха – 80%. Образцы для испытаний призмные, с размерами 100x100x280 мм. Относительные удельные деформации образцов $\delta(t, \tau)$ определялись не по традиционной принятой формуле [1]

$$\delta(t, \tau) = \frac{1}{E(\tau)} + \bar{C}(t, \tau), \quad (1)$$

где $E(\tau)$ – модуль упругости бетона в момент загрузки $t = \tau$, $\bar{C}(t, \tau)$ – условная мера ползучести, а по более корректной формуле [2]

$$\delta(t, \tau) = \frac{1}{E(t)} + C(t, \tau), \quad (2)$$

где $C(t, \tau)$ – истинная мера ползучести:

$$C(t, \tau) = \bar{C}(t, \tau) + \frac{1}{E(\tau)} - \frac{1}{E(t)} \quad (3)$$

и поскольку из-за взросления со временем бетона: $E(t) > E(\tau)$, следовательно $C(t, \tau) > \bar{C}(t, \tau)$.

Возраст бетона при загрузке: $\tau = 7, 14, 28, 56$ дням. При этом, величины нормальных напряжений не превышали 30%–ов предела прочности бетона в момент τ . Этим обеспечена линейность деформации.

Усреднённые результаты испытаний показаны на графиках рис.1. Как следует из этих графиков, мера ползучести образцов, полученных нагнетанием раствора, устойчиво уступает мере ползучести образцов, полученных традиционным методом (вибрированием).

Аппроксимация опытных точек производилась по аналитической формуле меры ползучести проф. С.Г. Есяяна [2]:

$$C(t, \tau) = C \frac{e^{\alpha t} - e^{\alpha \tau}}{e^{\alpha t} - 1} + B(e^{-\gamma \tau} - e^{-\gamma t}). \quad (4)$$

Числовые значения опытных параметров C , B , α , γ – следующие.

При нагнетании раствора:

$$C = 14,6 \times 10^{-5} \text{ МПа}^{-1}; \quad \alpha = 0,038 \text{ дн}^{-1}; \quad B = 16,12 \times 10^{-5} \text{ МПа}^{-1}; \quad \gamma = 0,052 \text{ дн}^{-1}.$$

При вибрировании:

$$\bar{C} = 16,2 \times 10^{-5} \text{ МПа}^{-1}; \bar{\alpha} = 0,04 \text{ дн}^{-1}; \bar{B} = 16,76 \times 10^{-5} \text{ МПа}^{-1}; \bar{\gamma} = 0,054 \text{ дн}^{-1}.$$

2. Бетон из базальтового щебня и песка литоидной пемзы. Состав бетона: М-400 цемент – 350 кг, вода – 231 л, песок – 563 кг, щебень – 1126кг. Как и при шлакобетоне, призмные образцы испытывались на ползучесть в возрасте бетона $\tau = 7, 14, 28, 56$ дням. Средние результаты испытаний приведены на рис. 2.

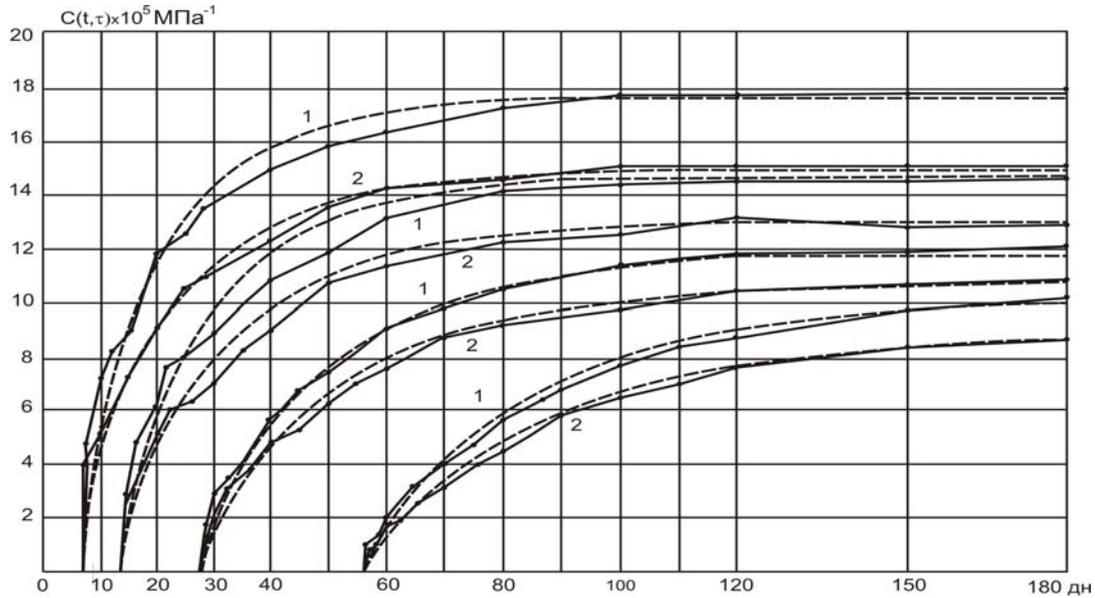


Рис.1. Мера ползучести шлакобетона, изготовленного методом: 1 – вибрирования, 2 – нагнетания раствора. $\tau = 7, 14, 28, 56$ дней

Экспериментальные точки (рис. 2) аппроксимировались аналитической функцией меры ползучести (4) при следующих числовых данных:

При нагнетании раствора:

$$C = 8,2 \times 10^{-5} \text{ МПа}^{-1}; \alpha = 0,028 \text{ дн}^{-1}; B = 9,5 \times 10^{-5} \text{ МПа}^{-1}; \gamma = 0,042 \text{ дн}^{-1}.$$

При вибрировании:

$$\bar{C} = 9,8 \times 10^{-5} \text{ МПа}^{-1}; \bar{\alpha} = 0,032 \text{ дн}^{-1}; \bar{B} = 12,3 \times 10^{-5} \text{ МПа}^{-1}; \bar{\gamma} = 0,062 \text{ дн}^{-1}.$$

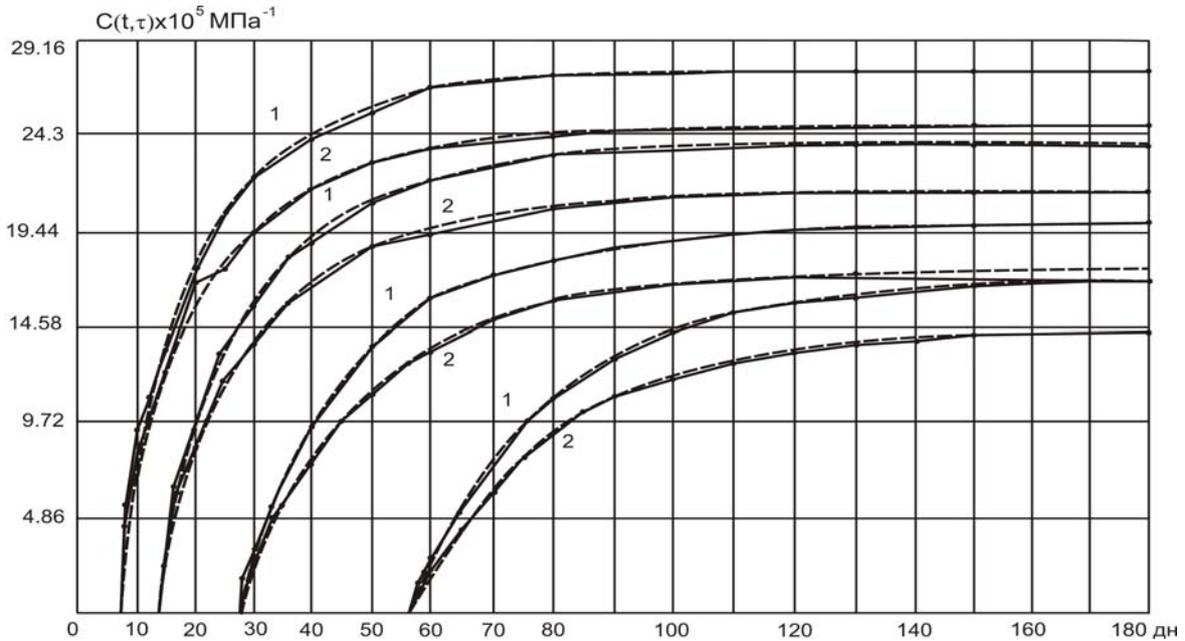


Рис.2. Мера ползучести бетона из базальтового щебня и песка из литоидной пемзы, изготовленного методом: 1 – вибрирования, 2 – нагнетания раствора. $\tau_0 = 7, 14, 28, 56$ дней.

Как показывают графики кривых $C(t, \tau)$ на рис. 1 и 2, ползучесть бетона, изготовленного методом нагнетания раствора, определённо уступает ползучести тех же бетонов, но полученных вибрированием. Так например, предельное значение меры ползучести шлакобетона при $\tau = 56$ дням будет

$$C(\infty, 56) = C + Be^{-0,052 \times 56} = 14,6 \times 10^{-5} + 16,12 \times 10^{-5} \times 0,054 = 15,47 \times 10^{-5} \text{ МПа}^{-1};$$
$$\bar{C}(\infty, 56) = \bar{C} + \bar{B}e^{-0,054 \times 56} = 16,2 \times 10^{-5} + 16,76 \times 10^{-5} \times 0,048 = 17,01 \times 10^{-5} \text{ МПа}^{-1}.$$

Разницу составляет 10%-ов.

При бетоне из базальтового щебня и песка литоидной пемзы:

$$C(\infty, 56) = C + Be^{-0,042 \times 56} = 8,2 \times 10^{-5} + 9,5 \times 10^{-5} \times 0,095 = 9,1 \times 10^{-5} \text{ МПа}^{-1};$$
$$\bar{C}(\infty, 56) = \bar{C} + \bar{B}e^{-0,062 \times 56} = 9,8 \times 10^{-5} + 12,3 \times 10^{-5} \times 0,031 = 10,18 \times 10^{-5} \text{ МПа}^{-1}.$$

Разница составляет 12%-ов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н.Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М.: Гостехиздат, 1952. 324с.
2. Есаян С.Г. Реологическое моделирование вязкоупругих, упругопластических и вязкоупругопластических сред. Ереван: Чартарагет, 2009. 368с.

Сведения об авторе:

Клекчян Давид Грачикович – кандидат технических наук, председатель производственного кооператива «Бетон», Республика Армения, (091) 20 08 94, (0322) 6-01-96

E-mail: klekchyan@mail.ru

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ТРЕЩИНЫ В ТРУБЕ, УСИЛЕННОЙ ТОНКОЙ КОЛЬЦЕВОЙ НАКЛАДКОЙ, НА ОСНОВЕ АППАРАТА ИСКУССТВЕННЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

Краснощеков А.А., Васильев П.В.

В статье предложен метод построения имитационной модели сечения трубы, усиленной тонкой кольцевой накладкой, с дальнейшим анализом и определением внутренних дефектов на основе аппарата искусственных нейронных сетей. Проведено исследование влияния различных физических и геометрических параметров на показатели обучения нейронных сетей. Экспериментальным путем установлена оптимальная структура нейронной сети и вид обучающих векторов.

Введение

Материалы с покрытиями, несущими защитные функции, получили широкое распространение практически во всех отраслях современной промышленности. Например, в практике металлообработки, все большее применение находят инструментальные материалы с покрытиями. Тонкие «пленочные» покрытия, наносят на поверхность заточенного и доведенного инструмента из быстрорежущей стали, твердого сплава и режущей керамики, которые позволяют улучшить ряд служебных характеристик инструмента и значительно изменить условия его работы.

При восстановлении изношенных деталей немаловажным шагом является идентификация дефекта с последующей его локализацией. Кроме того, идентификация дефектов является важным аспектом в рамках эксплуатационной безопасности и функциональности упругих конструкций. Данная проблема относится к области неразрушающего контроля свойств и параметров объекта в обратных задачах механики деформируемого твердого тела [1].

Современные вычислительные средства позволяют применять для решения задач идентификации новые методы и технологии, в том числе основанные на механизме искусственных нейронных сетей (ИНС) [2-3]. ИНС представляют собой систему соединенных и взаимодействующих между собой простых процессоров (искусственных нейронов).

Постановка прямой и обратной задач

В прямой задаче рассматриваются установившиеся колебания упругого тела, которые описываются следующей краевой задачей:

$$\sigma_{ij,j} = -\omega^2 u_i, \sigma_{ij} = c_{ijkl} u_{k,l}, i = 1,2,3 \quad (1)$$

$$u_i |_{S_u} = u_i^{(0)}, \sigma_{ij} n_j |_{S_t} = p_i, \sigma_{ij} n_j |_{S_d} = q_i \quad (2)$$

где u_i – искомые компоненты вектора смещений, $u_i^{(0)}$ и p_i, q_i – известные компоненты вектора смещений и поверхностных нагрузок, σ_{ij} и c_{ijkl} – компоненты тензоров напряжения и упругих постоянных; ρ – плотность; ω – круговая частота, S_d – внутренние поверхности трещины.

В задачах идентификации дефектов (трещин, включений, полостей) требуется определить их конфигурацию, поэтому поверхности S_d являются неизвестными, что относит рассматриваемые проблемы к обратным геометрическим задачам теории упругости. Далее будем считать, что берега трещины не взаимодействуют и свободны от напряжений. Для решения обратных задач реконструкции поверхности S_d необходима некоторая дополнительная информация кроме той, что содержится в краевых условиях (2). Такой дополнительной информацией может служить \bar{U} – волновое поле смещений, измеренное на свободной поверхности:

$$S_0 \quad u_i /_{S_0} = U_i(x, \omega), \text{ при } x \in S_0 \text{ и } \omega \in [\omega_b, \omega_e] \quad (3)$$

На основе этого получается дискретизированная информация: Ω - набор собственных частот (спектральное сканирование)

$$\Omega = \{\omega_{r1}, \omega_{r2}, \dots, \omega_{rN}\} \quad (4)$$

или Ψ – набор амплитуд смещений при установившихся колебаниях в x_k – некотором наборе точек (позиционное сканирование) и при ω_m – наборе частот (частотное сканирование)

$$\Psi = \{U_i(x_k, \omega_m) / k = 1, 2, \dots, K, m = 1, 2, \dots, M\} \text{ при } x_k \in S_0 \text{ и } \omega_m \in [\omega_b, \omega_e] \quad (5)$$

Таким образом, в виде Ω или Ψ имеем некоторый дискретный набор входной информации X .

Имитационная модель исследуемого объекта имеет параметры, приведённые в табл.1. Данные параметры характеризуют магистральный нефтепродуктопровод второго класса в обычном и северном исполнениях.

Таблица 1. Параметры трубы

Диаметр трубы	720 мм
Толщина стенки трубы	9 мм
Толщина кольцевой накладки	0,27 мм
Материал стенки трубы	Сталь
Материал кольцевой накладки	Алюминий

Концепция идентификации дефекта

Идентификация дефекта основана на анализе поведения исследуемого объекта после воздействия на него. Воздействие может проходить при различных условиях и характеризоваться различными параметрами. Проведя ряд экспериментов над исследуемым объектом, и проанализировав их результаты, можно сделать выводы о структуре и характеристиках самого объекта, в том числе и о возможных дефектах. При этом прибегнув к уникальным возможностям аппарата искусственных нейронных сетей, анализ полученных результатов можно проводить более продуктивно.

Построение имитационной модели

Для построения имитационной модели применяются широкие возможности встроенного языка ASYS APDL. Имитируется дефект, который расположен между внешней и внутренней поверхностями трубы, что показано на рисунке 1 (слева).

Особое внимание уделяется построению сетки конечных элементов, её детализации в области дефекта и внешней поверхности трубы. Моделируется кратковременное воздействие силой в точке на внешней поверхности исследуемого объекта и производится считывание колебаний, которые возникают после удара. Для получения более детальной информации об исследуемом объекте, возбуждение колебаний и их считывание производится в 40 точках, которые равномерно распределены по внешней поверхности трубы. Таким образом, получают данные, которые характеризуют дефект.

В результате расчётов, проведённых в пакете ANSYS, были получены колебания соответствующие одному набору параметров дефекта, график которых представлен на рис.1 (справа).

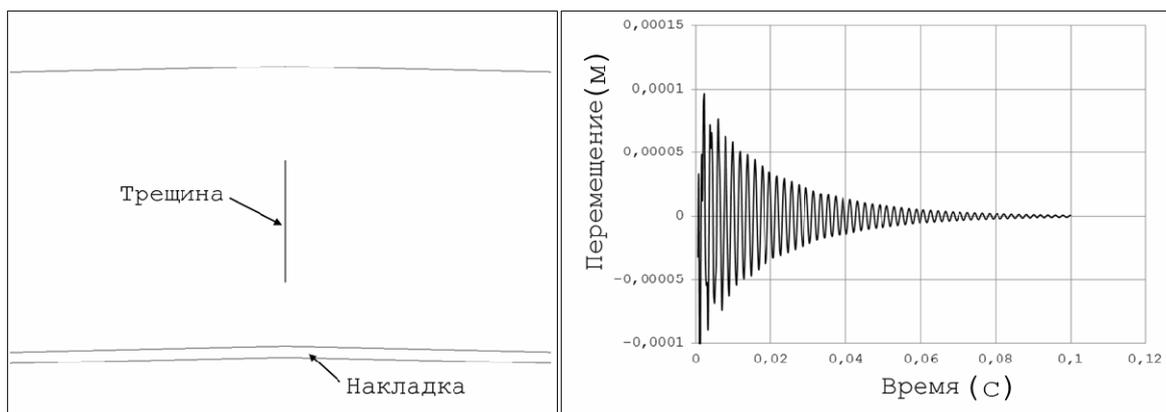


Рис.1. Фрагмент исследуемого объекта в области дефекта (слева), колебания исследуемого объекта в точке (справа)

Размер трещиноподобного дефекта варьируется в пределах от 10% до 40% от толщины стенки трубы.

Положение дефекта определено тремя значениями:

- Отступ в 10% от толщины стенки трубы от внутренней поверхности
- Отступ в 10% от толщины стенки трубы от внешней поверхности
- Равноудаленно от внешней и внутренней поверхностей трубы

В результате генерации параметров было получено определённое количество наборов, которые характеризуют дефект. В результате расчётов имитационной модели, проведённых посредством комплекса ANSYS, были получены собственные колебания для ранее определённых комбинаций параметров дефекта.

Построение обучающей выборки

Построение обучающей выборки является важным шагом при решении поставленной задачи. Выборка влияет на дальнейшее обучение, функционирование и результативность применения аппарата искусственных нейронных сетей. Для получения амплитудно-частотных характеристик собственных колебаний исследуемого объекта применяется дискретное преобразование Фурье (ДПФ). После применения ДПФ получаются пары значений частот и амплитуд. Из этих пар выделяются наиболее значимые. Каждому набору параметров трещины соответствует несколько наборов колебаний.

Установлено что 40 наборов колебаний является оптимальным количеством. К каждому из сорока наборов колебаний применяется дискретное преобразование Фурье, тем самым формируется обучающая выборка для искусственной нейронной сети.

Для обучения ИНС производится кодирование обучающей выборки во входные вектора ИНС. Частью процедуры кодирования является нормализация данных. Под нормализацией мы будем понимать отображение данных на интервал $[0,1]$.

Идентификация дефекта

Нейронные сети – это инструмент нелинейного моделирования. Обычно они используются для моделирования сложных связей между входами и выходами для нахождения закономерностей в данных.

Технически обучение заключается в нахождении коэффициентов связей между нейронами. В процессе обучения нейронная сеть способна выявлять сложные зависимости между входными данными и выходными, а также выполнять обобщение [4].

ИНС получили повсеместное применение. Самой распространённой архитектурой является нейронная сеть прямого распространения (Feed-forward neural network). Нейронная сеть

прямого распространения – сеть, где связь между узлами не образуют ориентированный цикл. В этом заключается отличие от рекуррентных нейронных сетей. Эта архитектура полностью подходит для решения поставленной задачи, при этом, сочетая в себе простоту реализации и быстродействие. Общая схема нейронной сети прямого распространения представлена на рис.2.

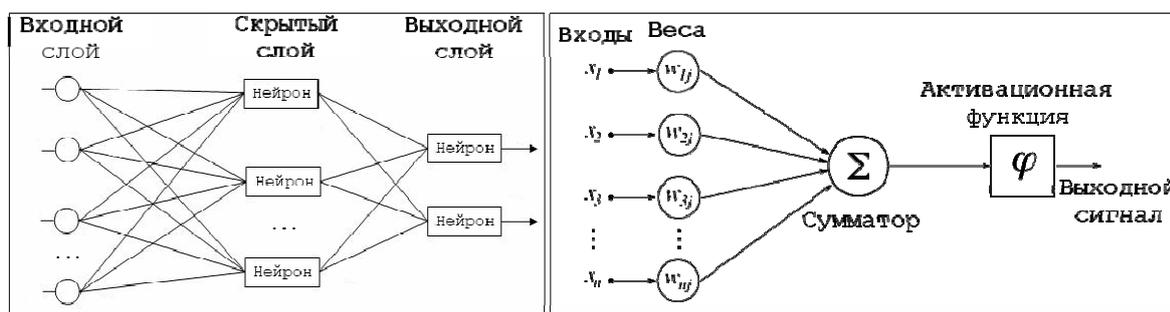


Рис.2. Схема нейронной сети (слева), схема нейрона (справа)

На входной слой подаются обучающие вектора, которые содержат подготовленные и обработанные данные. В данном случае входной слой принимает сорок обучающих векторов. На выходном слое получают параметры дефекта, а именно размер и положение. После того как процесс обучения нейронной сети окончен, происходит подача ранее не известных данных на вход, а на выходе получают значения, характеризующие параметры дефекта.

Было установлено, что наиболее оптимальными активационными функциями, в контексте поставленной задачи, являются: скрытая Sigmoid Stepwise (пошаговая аппроксимация к сигмовидной функции) и выходная Sin Symmetric (периодическая синусоидальная активационная функция). Наиболее оптимальным алгоритмом обучения нейронной сети, для решения поставленной задачи, является Resilient Propagation (RProp).

Для обучения было использовано 10 000 эпох, такое количество оптимально в рамках поставленной задачи. Такого количества эпох хватает для корректного обучения искусственной нейронной сети, при этом достигается удовлетворительный уровень её работы.

Результаты работы нейронной сети представлены на рис.3. Слева приведён график, характеризующий точность определения размера трещины. Показаны значения параметра, характеризующего размер дефекта, рассчитанного нейронной сетью и значения параметра, установленного при создании модели ANSYS. Справа приведён график, характеризующий точность определения положения трещины. Аналогичным образом представлены значения, рассчитанные нейронной сетью и заданные на этапе моделирования. Разности этих значений характеризуют точность работы нейронной сети.

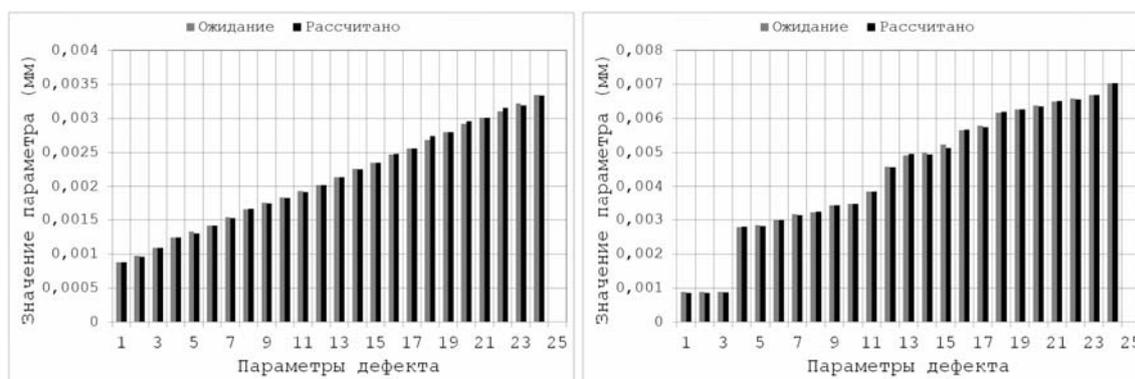


Рис. 3. Результаты работы нейронной сети, точность определения размера трещины (слева), точность определения положения трещины (справа).

Выводы

В ходе исследования было выявлено, что важнейшим шагом в решении поставленной задачи является подготовка и обработка данных для дальнейшего применения в обучении искусственной нейронной сети. Идентификация дефекта основывается на амплитудно-частотных характеристиках исследуемого объекта.

При решении поставленной задачи погрешность определения размера и положения трещины находится в пределах 1%. Благодаря экспоненциальному убыванию погрешности в процессе обучения нейронной сети достигается высокая эффективность применения аппарата ИНС. Стоит отметить, что на многих стадиях решения задачи происходит накопление погрешности, связанной с различными факторами, поэтому полученные результаты можно отнести к теоретическим.

Для решения задачи применялась многослойная нейронная сеть прямого распространения, обучаемая с помощью алгоритма Resilient Propagation.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 10-08-00839а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ватульян А.О. Обратные задачи в механике деформируемого твёрдого тела. М.: Физматлит, 2007. 224с.
2. Соловьев А.Н., Курбатова П.С., Сапрунов Н.И., Шевцов С.Н. Об использовании нейронных сетей в задачах определения дефектов в упругих телах // Материалы X международной конференции "Современные проблемы механики сплошной среды", 2006. С.175-180.
3. Ватульян А.О., Аникина Т.А., Богачев И.В. Идентификация неоднородных характеристик вязкоупругих стержней при изгибных колебаниях. //Механика композиционных материалов и конструкций. 2011. №1.
4. Саймон Хайкин Нейронные сети: полный курс Neural Networks: A Comprehensive Foundation. М.: «Вильямс», 2006. С.1104.

Сведения об авторах:

Васильев Павел Владимирович – магистрант кафедры информационных технологий, Донской Государственный технический университет, факультет информатики и вычислительной техники.

E-mail: lyftzeigen@mail.ru

Краснощеков Александр Александрович – аспирант кафедры информационных технологий, Донской Государственный технический университет, факультет информатики и вычислительной техники.

E-mail: akrasnoschekov@gmail.com

О ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НЕЛОКАЛЬНОЙ СРЕДЫ

Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю.

На основе соотношений рациональной термодинамики необратимых процессов предложена модель теплопроводности, учитывающая нелокальность среды. Модель интегрально учитывает взаимное влияние процессов, протекающих на макро- и микроуровнях.

1. Успехи последних лет в создании новых материалов с использованием нанотехнологий [1, 2] требуют создания и новых математических моделей, описывающих температурные поля в деталях и элементах конструкций из консолидированных наноструктурных материалов. Эти математические модели должны учитывать две существующие противоположные концепции описания структуры любого твёрдого тела – концепции непрерывности и дискретности [3]. С одной стороны, большинство технических объектов представляются состоящими из сплошного материала, для определения температурных полей в которых используют «макроскопические» функции состояния – абсолютную температуру $T(\mathbf{x}, t)$, массовую плотность энтропии $h(\mathbf{x}, t)$, массовую плотность внутренней $u(\mathbf{x}, t)$ и свободной $A(\mathbf{x}, t)$ энергии, вектор плотности теплового потока $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ с проекциями $q_i(\mathbf{x}, t)$, ($i=1, 2, 3$) и, возможно, некоторые другие, зависящие от координат, заданных радиус-вектором \mathbf{x} , и времени t . С другой стороны, для наноразмерных объектов процесс распространения теплоты ассоциируется с такими понятиями, как вектор плотности распределения фононов при фононном (решеточном) механизме распространения теплоты и аналогичными представлениями об электронном и некоторых других механизмах переноса энергии. Аккумуляцию теплоты ассоциируют с увеличением кинетической энергии колебаний атомов или молекул наноструктурных элементов – возрастанием частоты и амплитуды их колебаний. Поэтому для построения математической модели теплопроводности консолидированных наноструктурных материалов на макроуровне необходимо объединение двух этих подходов.

2. Для получения уравнения теплопроводности воспользуемся соотношениями рациональной термодинамики необратимых процессов для среды с параметрами термодинамического состояния [4-6]. Выбор этого подхода объясняется тем, что такая модель позволяет связать макроскопическое поведение тел с рядом микроструктурных процессов, которые протекают на молекулярном и субмолекулярном уровнях.

В зависимости от структуры материала – кристаллической, аморфной и др. приложенные внешние механические и тепловые нагрузки вызывают соответствующие структурные изменения. На макроуровне эти изменения описываются конечным, хотя и (в общем случае) достаточно большим количеством параметров. Характер этих параметров и их изменение вследствие приложения к телу внешних термомеханических воздействий определяется макроскопическим анализом.

В соответствии с указанным подходом, массовая плотность энтропии $h = -\partial A / \partial T$, а параметр термодинамического состояния κ определяет неравновесный процесс аккумуляции теплоты на микроуровне. В линейном приближении характер изменения κ во времени можно описать уравнением

$$t_T^* \dot{\kappa} + A_{44} \kappa = \bar{\kappa}, \quad (2.1)$$

где t_T^* – время релаксации параметра состояния; $(\dot{}) = \partial() / \partial t$; A_{44} – параметр, характеризующий размер наночастиц, $0 < A_{44} \leq 1$, при увеличении размера наночастиц $A_{44} \rightarrow 1$; $\bar{\kappa}$ – равновесное значение параметра κ . Для полимерных материалов имеет смысл учитывать спектр времен релаксации, в случае кристаллических материалов можно ограничиться рассмотрением одного значения времени релаксации [7].

Закон сохранения энергии в предлагаемой модели имеет вид [4, 6]

$$\rho T \frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + q_v, \quad i=1, 2, 3, \quad (2.2)$$

где ρ – плотность; x_i – декартовы прямоугольные координаты; q_V – объемная плотность мощности источников (стоков) теплоты, например, обусловленных термомеханической связанностью или фазовыми превращениями второго рода, характерным признаком которых является изменение типа кристаллической решетки и который может быть инициирован охлаждением или нагревом тела.

Процесс распространения теплоты будем ассоциировать с вектором \mathbf{k} , характеризующим, например, решеточный (фононный) механизм переноса энергии:

$$t_q^* \dot{\kappa}_i + A_{ij} \kappa_j = \bar{\kappa}_i, \quad j=1, 2, 3, \quad (2.3)$$

где t_q^* – время релаксации параметра \mathbf{k} ; $A_{ij} = A_{ji}$; $\det A_{ij} > 0$; $\bar{\kappa}_i$ – равновесные значения проекций вектора \mathbf{k} на оси Ox_i .

Положим, что проекции вектора плотности теплового потока линейно зависят от κ_i , но так как вектор \mathbf{k} характеризует процесс переноса энергии на молекулярном и субмолекулярном уровне, а \mathbf{q} – на макроуровне, то переход от одного уровня в другому представим в интегральной форме

$$q_i = \int_V \varphi_{ij}(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \kappa_j(\mathbf{x}', t) dV(\mathbf{x}'), \quad (2.4)$$

где $\varphi_{ij}(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \neq 0$ при $(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \in V'$ и $\varphi_{ij}(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) = 0$ при $(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \notin V'$, $\mathbf{x}' \in V'$, V' – объём наночастицы, $\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}$; V – объём тела.

Далее равновесные значения переменных микроуровня $\bar{\kappa}$ и $\bar{\kappa}_i$ положим зависящими от $T(\mathbf{x}, t)$ и $\partial T(\mathbf{x}, t)/\partial x_j$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{\kappa}(\mathbf{x}, t) &= \int_V \varphi_T(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) T(\mathbf{x}', t) dV(\mathbf{x}'), \\ \bar{\kappa}_i(\mathbf{x}, t) &= - \int_V Z_{ij}(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \frac{\partial T(\mathbf{x}', t)}{\partial x'_j} dV(\mathbf{x}'), \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $\varphi_T(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \neq 0$ и $Z_{ij}(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \neq 0$ только при $(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \in V'$ и $\mathbf{x}' \in V'$.

Соотношения, аналогичные (2.4) и (2.5), используют в механике деформируемого твёрдого тела при построении нелокальных зависимостей компонент тензора напряжений от компонент тензора деформации [8, 10]. В общем случае эти соотношения определяют зависимость активных переменных от интегральных (осредненных) значений реактивных переменных, в данном случае T , κ , κ_i и $\partial T/\partial x_i$. Заметим, что если принять

$$\varphi_{ij}(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) = \varphi_{ij}^0 \delta(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|), \quad \varphi_T(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) = \varphi_T^0 \delta(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|), \quad Z_{ij}(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) = Z_{ij}^0 \delta(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|),$$

где $\delta(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|)$ – дельта-функция Дирака, то соотношения (2.4) и (2.5) переходят в известные [11].

Если решить систему уравнений (2.3) при заданном виде $\bar{\kappa}_i$ из (2.5), то получим функциональную зависимость для проекций вектора \mathbf{k} :

$$\kappa_j = \sum_{\alpha=1,2,3} \frac{g_{j\alpha} (g_{\alpha m})^{-1}}{\lambda_\alpha} \bar{\kappa}_m - \frac{g_{j\alpha} (g_{\alpha m})^{-1}}{\lambda_\alpha} \int_0^t \exp\left(-\frac{\lambda_\alpha (t-t')}{t_q^*}\right) \frac{\partial \bar{\kappa}_m}{\partial t'} dt', \quad (2.6)$$

где λ_α – собственные значения однородной системы, соответствующей (2.3), $g_{j\alpha}$ – элементы матрицы \mathbf{G} , составленной из собственных векторов, записанных по столбцам, $(g_{\alpha m})^{-1}$ – элементы обратной матрицы \mathbf{G}^{-1} .

Комбинируя (2.5) и (2.6), имеем

$$\begin{aligned} q_i(\mathbf{x}, t) &= - \int_V \varphi_{ij}(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \sum_{\alpha=1,2,3} \frac{g_{j\alpha} (g_{\alpha m})^{-1}}{t_q^*} \int_0^t \exp\left(-\frac{\lambda_\alpha (t-t')}{t_q^*}\right) \times \\ &\times \int_V Z_{nm}(|\mathbf{x}'' - \mathbf{x}'|) \frac{\partial T(\mathbf{x}'', t')}{\partial x''_n} dV(\mathbf{x}'') dt' dV(\mathbf{x}'). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Из (2.1) при $t_T^* \dot{\kappa} \approx 0$ с учётом первого равенства (2.5) получим:

$$\kappa(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{A_{44}} \int_V \varphi_T(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) T(\mathbf{x}', t) dV(\mathbf{x}'). \quad (2.8)$$

В дальнейшем будем рассматривать сравнительно небольшие отклонения значений абсолютной температуры от температуры T_0 естественного состояния. Тогда, задав $A(T, \kappa) = T \cdot A^\circ(\kappa)$, получим

$$\rho T \frac{\partial h}{\partial t} = -\rho T \frac{dA^\circ}{d\kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial t} \approx -\rho T_0 \frac{dA^\circ}{d\kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial t} = \rho c \frac{\partial \kappa}{\partial t}, \quad (2.9)$$

где $c = -T_0 \frac{dA^\circ}{d\kappa}$ – удельная массовая теплоёмкость, обусловленная изменением вида и границ фононного спектра, т.е. изменением функции распределения частот колебаний атомов. Подставив в (2.9) равенство (2.8) и учитывая (2.7), получим уравнение теплопроводности следующего вида:

$$\begin{aligned} & \rho \frac{c}{A_{44}} \int_V \varphi_T(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \frac{\partial T(\mathbf{x}', t)}{\partial t} dV(\mathbf{x}') = \\ & = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\int_V \varphi_{ij}(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) g_{jk} (g_{km})^{-1} \int_V Z_{mn}(|\mathbf{x}'' - \mathbf{x}'|) \frac{\partial T(\mathbf{x}'', t)}{\partial x''_n} dV(\mathbf{x}'') dV(\mathbf{x}') \right] - \\ & - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\int_V \varphi_{ij}(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \sum_{\alpha=1,2,3} \frac{g_{j\alpha} (g_{\alpha m})^{-1}}{t_q^*} \int_0^t \exp\left(-\frac{\lambda_\alpha(t-t')}{t_q^*}\right) \times \right. \\ & \quad \left. \times \int_V Z_{mn}(|\mathbf{x}'' - \mathbf{x}'|) \frac{\partial T(\mathbf{x}'', t')}{\partial x''_n} dV(\mathbf{x}'') dt' dV(\mathbf{x}') \right] + q_V. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Уравнение (2.10) принципиально отличается от известного, оно позволяет рассматривать процесс теплопроводности на макроуровне с учётом эффекта запаздывания распространения теплоты. При этом, интегрально учтена нелокальная зависимость составляющих вектора плотности теплового потока от градиента температуры.

Будем полагать, что функции влияния можно всегда представить в виде $\varphi_T(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) = \varphi_T^0 \varphi_0(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|)$, $\varphi_{ij}(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) = \varphi_{ij}^0 \varphi_1(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|)$, $Z_{ij}(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) = Z_{ij}^0 \varphi_2(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|)$ и $Y_{ij}(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) = Y_{ij}^0 \varphi_3(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|)$, где φ_T^0 , φ_{ij}^0 , Z_{ij}^0 , Y_{ij}^0 – константы; $\varphi_0(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|)$, $\varphi_1(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|)$, $\varphi_2(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|)$, $\varphi_3(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|)$ – единичные функции влияния такие, что $\int_{V'} \varphi_0(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) dV' = 1$, $\int_{V'} \varphi_1(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) dV' = 1$, $\int_{V'} \varphi_2(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) dV' = 1$, $\int_{V'} \varphi_3(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) dV' = 1$, $(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \in V'$, $\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}$.

Отметим, что, проведя осреднение подынтегральных выражений в (2.10) по объёму сферы единичного радиуса, получим при $\int_V \varphi_T(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) dV(\mathbf{x}') = H(\mathbf{x})$, $\int_V \varphi_{ij}(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) dV(\mathbf{x}') = \varphi_{ij}^0 H(\mathbf{x})$ и $\int_V Y_{jk}(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) dV(\mathbf{x}') = Y_{jk}^0 H(\mathbf{x})$, где $H(\mathbf{x})$ – функция Хевисайда, $\mathbf{x} \in V'$, результаты, совпадающие с известными [11].

Поскольку $\max |\mathbf{x}' - \mathbf{x}| \ll l$, где l – характерный размер тела, то $T(\mathbf{x}', t)$ и $\partial T(\mathbf{x}', t) / \partial x'_k$ можно разложить в ряд Тейлора в окрестности точки \mathbf{x} . Тогда в нулевом приближении при $A_{ij} = \delta_{ij}$ уравнение теплопроводности (2.10) будет иметь вид:

$$\rho \frac{c}{A_{44}} \int_V \varphi_T(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) dV(\mathbf{x}') \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_{ik}^{(T)} \int_V \varphi_1(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) dV(\mathbf{x}') \int_V \varphi_3(|\mathbf{x}'' - \mathbf{x}'|) dV(\mathbf{x}'') \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) -$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sum_{\alpha=1,2,3} \lambda_{i\alpha}^{(T)} \int_V \varphi_1(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) dV(\mathbf{x}') \int_V \varphi_3(|\mathbf{x}'' - \mathbf{x}'|) dV(\mathbf{x}'') \int_0^t \exp\left(-\frac{\lambda_\alpha(t-t')}{t_q^*}\right) \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} dt' \right] + q_V,$$

где $\lambda_{i\alpha}^{(T)} = \varphi_{ij}^o Y_{j\alpha}^o$ – компоненты тензора теплопроводности и, наконец, если положить $\int_V \varphi_T(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) dV(\mathbf{x}') = 1$, то уравнение теплопроводности принимает хорошо известную форму [4, 11]:

$$\rho \tilde{c} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_{ik}^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sum_{\alpha=1,2,3} \lambda_{i\alpha}^{(T)} \int_0^t \exp\left(-\frac{\lambda_\alpha(t-t')}{t_q^*}\right) \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} dt' \right] + q_V,$$

где $\tilde{c} = c/A_{44}$ – эффективная удельная массовая теплоемкость консолидированного наноструктурного материала.

3. Рассмотрим задачу высокоинтенсивного поверхностного нагрева в одномерном случае. Запишем функции влияния следующим образом:

$$\varphi_\mu(|x' - x|) = \varphi(|x' - x|) = \frac{1}{a} \left(1 - \frac{|x' - x|}{a} \right), \quad |x' - x| \leq a, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad (3.1)$$

где a – характерный размер наноструктурного элемента. Тогда уравнение теплопроводности (2.10) примет вид:

$$\begin{aligned} \rho \frac{c}{A_{44}} \int_V \varphi(|x' - x|) \frac{\partial T(x', t)}{\partial t} dV(x') = \\ = \lambda^{(T)} \frac{\partial}{\partial x} \int_V \varphi(|x' - x|) \int_V \varphi(|x'' - x'|) \frac{\partial T(x'', t)}{\partial x''} dV(x'') dV(x'), \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $\lambda^{(T)}$ – теплопроводность тела.

Краевые условия для задачи поверхностного нагрева запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} t = 0 \quad T(x, 0) = T_0, \\ x = 0 \quad -\lambda^{(T)} \int_V \varphi(|x' - x|) \int_V \varphi(|x'' - x'|) \frac{\partial T(x'', t)}{\partial x''} dV(x'') dV(x') = q_S, \\ x = L \quad -\lambda^{(T)} \int_V \varphi(|x' - x|) \int_V \varphi(|x'' - x'|) \frac{\partial T(x'', t)}{\partial x''} dV(x'') dV(x') = 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $q_S = B M t^m \exp(-mt/t_0)$, $m \geq 1$, $m \in \mathbb{N}$.

Применив к уравнению (3.2) и граничным условиям из (3.3) конечно-элементную процедуру в форме метода Бубнова-Галеркина, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$[C] \{\dot{T}\} + [K] \{T\} = \{F\},$$

где $[C]$, $[K]$ – матрицы, характеризующие теплоемкость и теплопроводность исследуемого тела; $\{T\}$, $\{\dot{T}\}$ – векторы неизвестных узловых значений температуры и скорости ее изменения; $\{F\}$ – вектор тепловой нагрузки. Компоненты F_p вектора $\{F\}$ и C_{pq} , K_{pq} матриц $[C]$, $[K]$ определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} F_p = q_S(t) \delta_{p1}, \quad C_{pq} = \sum_{e=1}^E \int_{V^{(e)}} \frac{\rho c}{A_{44}} \left(\int_V \varphi(|x' - x|) N_q(x') dx' \right) N_p(x) dx, \\ K_{pq} = \sum_{e=1}^E \int_{V^{(e)}} \lambda^{(T)} \left(\int_V \varphi(|x' - x|) \int_V \varphi(|x'' - x'|) \frac{dN_q(x'')}{dx''} dx'' dx' \right) \frac{dN_p(x)}{dx} dx, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где E – количество конечных элементов, $V^{(e)}$ – объем конечного элемента, N_p , N_q – зависящие от координаты x одномерные квадратичные функции формы, p, q – номера узлов сетки, $p, q = \overline{1, n}$.

Отметим, что использование линейных функций формы приведёт к исчезновению зависимости элементов K_{pq} от функций влияния $\varphi(|x' - x|)$ и, соответственно, от характерного размера наноструктурного элемента a , что не соответствует известным экспериментальным данным [1, 2].

Работа выполнена по гранту НШ-255.2012.8 программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андриевский Р.А., Рагуля А.В. Наноструктурные материалы. М.: Изд. центр. «Академия», 2005. 192 с.
2. Гусев А.И. Наноматериалы, наноструктуры, нанотехнологии. М.: Физматлит, 2005. 416с.
3. Кривцов А.М. Деформирование и разрушение твердых тел с микроструктурой. М.: Физматлит, 2007. 304 с.
4. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 512 с.
5. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математическое моделирование термомеханических процессов при интенсивном тепловом воздействии // Теплофизика высоких температур. 2003. Т.4. № 2. С. 300–309.
6. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели термомеханики. М.: Физматлит, 2002. 168 с.
7. Новик А., Берри Б. Релаксационные явления в кристаллах: Пер. с англ. М.: Атомиздат, 1975. 472 с.
8. Введение в микромеханику / Онами М. и др.: Пер. с япон. М.: Metallurgia, 1987. 280 с.
9. Кунин И.А. Теория упругих сред с микроструктурой. Нелокальная теория упругости. М.: Наука, 1975. 416 с.
10. Eringen A.C. Nonlocal continuum field theories. New York-Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2002. 393 pp.
11. Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Математическая модель теплопроводности новых конструкционных материалов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естеств. науки. 2010. № 3. С. 72-85.

Сведения об авторах:

Кувыркин Георгий Николаевич – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Прикладная математика» Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана, (499) 263-63-26

E-mail: fn2@bmstu.ru

Савельева Инга Юрьевна – ассистент кафедры «Прикладная математика» Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана, (499) 263-63-26

E-mail: Inga.Savelyeva@gmail.com

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛОКАЛИЗАЦИИ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ, РАЗУПРОЧНЕНИЯ И КОНТИНУАЛЬНОГО РАЗРУШЕНИЯ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ УДАРНОМ НАГРУЖЕНИИ

Кукуджанов В.Н.

Рассматривается задача о растягивающем ударе по упругопластическому стержню из материала с разупрочнением по модели Прандля-Рейсса. В такой постановке задача некорректна. В работе рассматривается два типа регуляризации задачи: упруговязкопластическая модель, для которой регуляризующие члены связаны с высшими производными для неизвестных по времени и альтернативная модель, для которой регуляризация связана с высшими производными по пространственной переменной, точнее с высшими градиентами от тензора деформации. Асимптотическим методом, предложенным автором [1], решена нелинейная динамическая задача о растягивающем ударе по стержню по модели с высшими градиентами от тензора деформации. Проведено сравнение полученного решения с решением для упруговязкопластической модели [1]. Показано, что точное решение, полученное в работе [2] в рамках модели Прандля-Рейсса, физически некорректно и приводит к противоречивым результатам.

1. Введение. Исследуется континуальное разрушение стержней в одномерной постановке при ударном динамическом нагружении. Хорошо известно, что классическая упругопластическая постановка задачи оказывается некорректной и для её решения необходимо вводить регуляризацию, которая заключается в учёте дополнительных малых членов в определяющих уравнениях пластичности и характеризует физические эффекты неучтённые в первоначальной модели [1]. Учёт дополнительных физических эффектов увеличивает число уравнений системы и, следовательно, повышает её порядок. Регуляризованная система отличается от первоначальной наличием членов с производными более высокого порядка с малыми параметрами. Модель, регуляризирующая некорректную систему уравнений, не единственная.

Хорошо известна регуляризация за счёт введения вязкости в исходную модель. Она связана с увеличением порядка максимальной производной по времени. Физически иной характер имеет модель при введении производных по пространственным переменным, т.е. введением высших градиентов от тензора деформаций.

Вязкопластическая модель была решена автором в работе [1]. В настоящей работе исследуется постановка для упругопластической модели с высшими градиентами.

Для широкого класса инженерных материалов (включая геоматериалы, бетон, металлы) диаграмма σ – ε имеет падающую часть. Этот эффект называется пластическим разупрочнением. Описание этого эффекта классическими локальными, не зависящими от времени моделями, ведёт к плохо-обусловленным граничным задачам, благодаря тому, что уравнения теряют эллиптичность в квазистатике и гиперболичности в динамике [3]. При численных расчётах проявляется патологическая зависимость от размера сетки. Математические модели должны быть регуляризованы введением производных высокого порядка для предотвращения смены типа уравнений. Различные подходы предлагались для регуляризации задачи введением внутренней длины или временного параметров. В литературе рассматривались модели с определяющими уравнениями с высокими градиентами [4] такими, как микрополярные [5], нелокальные среды [6], модели с зависимостью деформаций от времени [7]. Но большинство решений получены в численном виде, аналитические исследования ограничиваются только линеаризованными уравнениями.

2. Основные уравнения регуляризованных моделей.

Уравнения пластичности при наличии высших градиентов

$$f(\sigma, \varepsilon, \nabla^2 \varepsilon) = \sigma - \sigma_Y(\varepsilon) + l^2 E \nabla^2 \varepsilon = 0 \quad (1)$$

Уравнение движения и уравнение совместности для модели с высшими градиентами деформаций

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{d\sigma_Y}{d\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} - l^2 E \frac{\partial^3 \varepsilon}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2)$$

Система уравнений для упруговязкопластической среды

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{1}{\tau} \Phi^*(\sigma - \sigma_Y(\varepsilon)) \quad (3)$$

Рассматривается начально-краевая задача

$$\begin{aligned} t = 0: \quad \sigma = \varepsilon = v = 0 \\ x = 0, v = 0: \quad x = L, \quad v = v_0 H(t) \end{aligned} \quad (4)$$

3. Решение уравнений теории пластичности при наличии высших градиентов.

Перейдём к безразмерным переменным в уравнениях (1)-(2)

$$\bar{x} = \frac{x}{L_0}, \quad \bar{t} = \frac{c_0 t}{L_0}, \quad \bar{v} = \frac{v}{v_0}, \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_0}, \quad \bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}, \quad \sigma_0 = v_0 \rho c_0, \quad c \varepsilon_0 = v_0$$

Уравнения (1)-(2) для пластичности с высшими градиентами для задачи (4), записанные в безразмерных переменных (здесь и далее только безразмерные переменные и знак “черта” над ними опускаем)

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = c^2(\varepsilon) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} - \omega^2 \frac{\partial^3 \varepsilon}{\partial x^3}, \quad c^2(\varepsilon) = \frac{1}{\rho} \frac{d\sigma_Y(\varepsilon)}{d\varepsilon}, \quad \omega = \frac{l}{L} \ll 1 \quad (5)$$

Нелинейная задача для теории с градиентами второго порядка может быть решена методом [1]. Медленно меняющееся решение ищется в виде разложения по степеням функций по параметру ω . Для нулевого приближения получим

$$\frac{\partial v^0}{\partial t} = c^2(\varepsilon^0) \frac{\partial \varepsilon^0}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varepsilon^0}{\partial t} = \frac{\partial v^0}{\partial x}, \quad c^2(\varepsilon^0) = \left. \frac{d\sigma_s}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_0} \quad (6)$$

после растяжения координаты x и использования разложения в виде степенного ряда по степеням ω^{-2} получим

$$\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial t} = \frac{\partial v_0}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial v_0}{\partial t} + \frac{\partial^3 \varepsilon_0}{\partial \beta^3} = 0, \quad \beta = \frac{x}{\omega^2} \quad (7)$$

исключая ε_0 , находим

$$\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 v_0}{\partial \beta^4} = 0, \quad (8)$$

которое разлагается на множители

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + i \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) \left(\frac{\partial v_0}{\partial t} - i \frac{\partial^2 v_0}{\partial \beta^2} \right) = L_1 L_2(v_0) = 0 \quad (9)$$

где i – мнимая единица. Вводя переменную $\xi^2 = -i\beta^2$, получим

$$\xi = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)\beta$$

тогда (9) примет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) \left(\frac{\partial v_0}{\partial t} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial \xi^2} \right) = 0 \quad (10)$$

4. Условие сращивания быстроменяющегося и медленноменяющегося решений.

Решение задачи автомодельное, зависящее от одного комплексного переменного $z = \frac{\xi}{2\sqrt{t}}$.

Переход к переменной z в (10) даёт

$$\frac{1}{4t} \left(\frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} + 2\bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \frac{1}{4t} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial z^2} + 2z \frac{\partial v_0}{\partial z} \right) = A_2 A_1(v_0) = 0 \quad (11)$$

Решения уравнений $A_1(v_0^{(1)}) = 0$ и $A_2(v_0^{(2)}) = 0$ удовлетворяют (31) одновременно.

Эти решения легко получаются как функции комплексной переменной z :

$$v_0^{(1)} = c_1 \operatorname{erf}(\bar{z}), \quad v_0^{(2)} = c_2 \operatorname{erf}(z)$$

где c_1 и c_2 – произвольные константы. Функцию $\operatorname{erf}(z)$ можно представить через интегралы Френеля по вещественной переменной x

$$\operatorname{erf}(z) = \operatorname{erf}\left(\frac{1+i}{2}\sqrt{\pi x}\right) = (1+i)[C(x) - iS(x)] \quad (12)$$

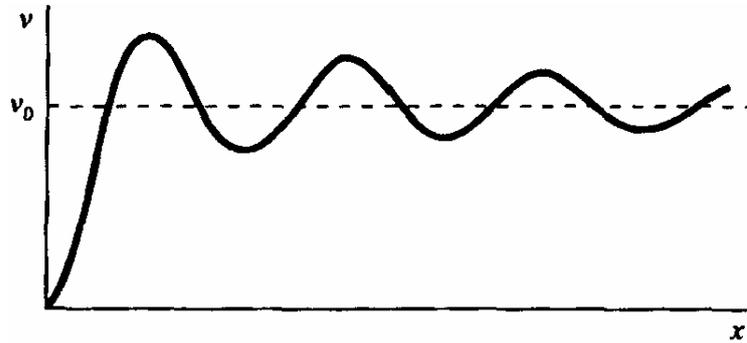
где

$$C(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) dx, \quad S(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) dx$$

Вещественное решение (11), удовлетворяющее граничным условиям $v|_{\beta=0} = 0$, $v|_{\beta=\infty} = v_0$, может быть найдено как

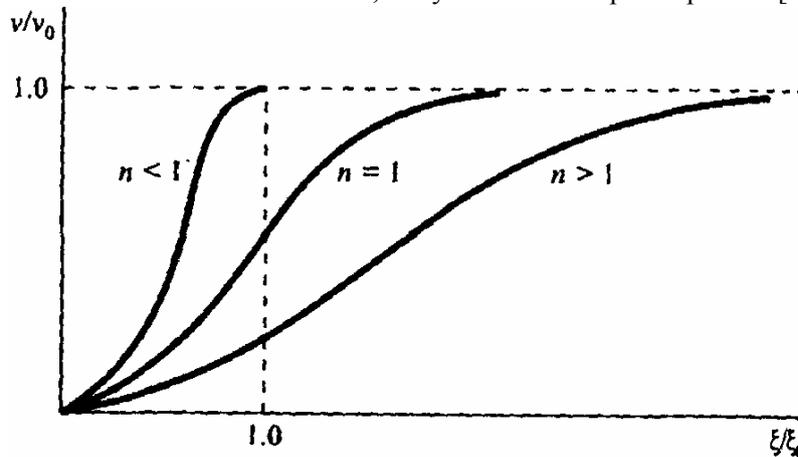
$$v = \frac{v_0}{2} [\operatorname{erf}(z) + \operatorname{erf}(\bar{z})] = v_0 [C(x) + S(x)] \quad (13)$$

т.к. $\lim_{x \rightarrow \infty} C(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} S(x) = \frac{1}{2}$. Решение имеет осциллирующий профиль (фиг. 1).



Фиг. 1

Для сравнения приведены на фиг. 2 профили скоростей для упруговязкопластического решения при разных показателях вязкости n , полученного автором в работе [1].



Фиг. 2

Интегрирование уравнения (5) даёт

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = v_0 \beta \left\{ \frac{1}{\eta \pi} \left[\cos\left(\frac{\pi \eta^2}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi \eta^2}{2}\right) \right] + [[S(\infty) - S(\eta)] - [C(\infty) - C(\eta)]] \right\} \quad (14)$$

Принимая во внимание асимптотическое разложение для интегралов Френеля [8]

$$S(\eta) = S(\infty) - \frac{\cos\left(\frac{\pi \eta^2}{2}\right)}{\pi \eta} - \frac{\sin\left(\frac{\pi \eta^2}{2}\right)}{\pi^2 \eta^3} + O\left(\frac{1}{\eta^5}\right), \quad C(\eta) = C(\infty) - \frac{\sin\left(\frac{\pi \eta^2}{2}\right)}{\pi \eta} - \frac{\cos\left(\frac{\pi \eta^2}{2}\right)}{\pi^2 \eta^3} + O\left(\frac{1}{\eta^5}\right)$$

находим соотношение для деформации ε :

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = 4v_0 \frac{1}{\beta^2} \sqrt{\frac{t^3}{2\pi}} \left[\cos\left(\frac{\pi\eta^2}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi\eta^2}{2}\right) \right] \left[1 + O\left(\frac{1}{\eta^2}\right) \right], \quad \eta = \frac{\beta}{\sqrt{2\pi t}} \quad (15)$$

В точке $x = 0$ деформация ε растёт во времени как

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = v_0 \sqrt{\frac{2tL}{\pi l}} [1 + O(\eta)] \quad (16)$$

Профиль деформации ε осциллирует вокруг начального значения и затухает как β^{-2} . При $l \rightarrow 0$ предел деформаций в точке $x = 0$ имеет то же самое значение для вязкопластической модели в случае линейной вязкости.

Заключение. Получены асимптотические решения начально-краевой задачи (4) для двух регуляризованных моделей Прандля-Рейсса. Показано, что в обоих случаях в отличие от [2], решения являются физически адекватными, они отличаются качественно между собой: для градиентальной модели решение осциллирует и затухает во времени (фиг. 1), а для упруговязкопластической – решение шейкообразное (фиг. 2). Но для обеих моделей деформация в центральной точке столкновения волн со временем стремится к бесконечности, а ширина зоны локализации пластической деформации растёт как $t^{1/2}$. Таким образом, эффективные характеристики у них одинаковые и отличаются от полученных в работе [2] (диссипация энергии пластической деформации отлична от нуля).

ЛИТЕРАТУРА

1. V.N.Kukudzhyanov. One dimensional waves propagation in elastoviscoplastic bars. //Proc. Of Appl Math., Computer Center of AN USSR, Moscow (1977), pp. 3-62 (in Russian).
2. Z.P. Bazant and T. Belytschko, "Wave Propagation in a Strain-Softening Bar: Exact Solution,"// Journal of Engineering Mechanics, 111 (3), 381-389 (1985)
3. L.V. Nikitin: Softening Solids: Reality or Misinterpretation? //Technische Mechanik. 16(1), pp. 89–96, 1996.
4. Sluys L.J., de Borst R. and Mühlhaus H.-B. Wave propagation, localization and dispersion in a gradient-dependent medium.// Int. J. Solids Struct., 1993, 30, 1153–1171.
5. P. Steinmann and E. Stein. Finite element localization analysis of micropolar strength degrading materials. In Computer modelling of concrete structures, Mang, H.; Bicanic, N.; de Borst, R. (eds.), pages 435–444. North-Holland Publ. Comp., 1994.
6. G. Pijaudier-Cabot and Z. L. Bazant. Nonlocal damage theory.// Journal of Engineering Mechanics, 113:1512-1533, 1987.
7. Faciu C., 1996. Initiation and growth of strain bands in rate-type viscoelastic materials. Part I: Discontinuous strain solutions. Part II: a□The energetics of the banding mechanism. Eur. J. Mech. A/Solids 15, 969–988, 989–1011.
8. G. A. Korn, and T. M. Korn, Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. New York/San Francisco/Toronto/London/Sydney 1968. McGraw-Hill Book Company.

Сведения об авторе:

Кукуджанов Владимир Николаевич – иностранный член Национальной Академии наук Республики Армения, доктор физико-математических наук, профессор, заслуженный деятель науки Российской Федерации, главный научный сотрудник Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук (ИПМех РАН)

Web: <http://ipmnet.ru/~kukudz/>

E-mail: kukudz@ipmnet.ru

НЕКОТОРЫЕ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ВЯЗКОГО ГАЗА

Липатов И.И.

Представлены результаты исследования процессов вязко-невязкого взаимодействия, описываемых новыми математическими моделями.

1. Введение.

Среди работ, посвящённых исследованию течений вязкой жидкости следует упомянуть две работы, сыгравшие исключительную роль в развитии гидродинамики.

Первая из них принадлежит Людвигу Прандтлю [1] и была представлена почти столетие назад на математическом конгрессе в Гейдельберге. В этой работе были заложены основы теории пограничного слоя. В основу теории течений вязкой жидкости были положены опытные данные и физические соображения о малом влиянии вязкости при больших числах Рейнольдса.

Вторая работа была несколько позднее выполнена создателем квантовой механики Вернером Гейзенбергом [2] и была посвящена развитию теории гидродинамической устойчивости и, в частности, исследованию решений линейной теории устойчивости при больших числах Рейнольдса. В дальнейшем оба этих направления получили интенсивное развитие.

В данной работе обсуждаются вопросы приложения теории взаимодействия для исследования развития возмущений, хотя и малой амплитуды, но превосходящей такие величины, при которых в области нелинейных возмущений существенно влияние вязкости.

2. Постановка задачи.

Рассматривается течение в ламинарном пограничном слое около плоской поверхности при больших числах Рейнольдса, не превосходящих критических величин, при которых происходит ламинарно-турбулентный переход. Предполагается, что на основное течение наложены возмущения, источник которых находится во внешнем невязком потоке или эти возмущения инициированы изменениями граничных условий на поверхности.

Предполагается также, что все функции течения обезразмерены и отнесены к соответствующим величинам в невозмущённом невязком потоке, а давление отнесено к удвоенному скоростному напору.

Предшествующие исследования, основанные на использовании метода сращиваемых асимптотических разложений, привели к выводу о том, что воздействие возмущений на течение в пограничном слое требует введения в рассмотрение ряда характерных областей, в силу того, что физические механизмы по-разному проявляются в этих областях.

В тех случаях, когда протяжённость области возмущённого течения превосходит толщину пограничного слоя, но меньше характерной длины тела, возмущённое течение содержит три или четыре характерные области. Все эти области имеют одинаковую протяжённость, но разный поперечный размер.

Первая из рассматриваемых областей имеет одинаковые продольный и поперечный размеры.

Следующая область, вводимая в рассмотрение, представляет собой пограничный слой, где невозмущённое течение является завихренным и где возмущения приводят к линейным изменениям продольной скорости.

В силу выполнения условия прилипания продольная скорость около стенки сколь угодно мала и поэтому всегда найдётся область, в которой изменения оказываются нелинейными. Характерный поперечный размер этой области δ зависит от амплитуды возмущения, например, давления Δp , $\Delta p \ll 1$, $\delta \sim \varepsilon \Delta p^{1/2}$, $\varepsilon = \text{Re}^{-1/2}$ и в силу нелинейных изменений скорости изменение толщины области $\Delta \delta$ сравнимо с δ .

Для сверхзвуковых или дозвуковых течений это изменение толщины вытеснения превосходит по порядку величины изменение толщины основной части пограничного слоя с конечными скоростями. Индуцированное возмущение давления во внешнем невязком потоке может быть определено в соответствии с линейной теорией невязких течений

$\Delta p \sim \Delta \delta / \Delta x$, $\Delta x \sim \varepsilon \Delta p^{-1/2}$, где Δx - характерный продольный размер области возмущённого течения.

Как можно видеть, этот размер много больше, чем характерный поперечный размер, что приводит к вырожденности уравнения сохранения поперечного импульса. Кроме того, можно оценить соотношение сил вязкости и инерции и получить, что при амплитудах возмущения давления, превосходящих $Re^{-1/4}$, течение в пристеночной области оказывается невязким в первом приближении. Предполагается, что возмущения могут быть вызваны, как граничными условиями (искривление поверхности, отсос или вдув), так и возмущениями, приходящими из внешнего потока (например, падением ударной волны, или распространяющимися в невязком течении волнами давления или завихренности). Основываясь на полученных оценках масштабов области возмущённого течения и величин функций, можно выписать соответствующие асимптотические разложения функций течения. Подстановка последних в исходные уравнения Навье-Стокса и соответствующий предельный переход приводят к следующим уравнениям для главных членов разложений в области нелинейных изменений, расположенной на дне пограничного слоя вблизи поверхности [16-17]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho_w} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

Граничные условия для компонентов вектора скорости и возмущения давления на больших расстояниях вверх по потоку от области взаимодействия определяются решением для пристеночной области в невозмущённом пограничном слое

$$u = ay, \quad v = 0, \quad p = 0 \quad (2)$$

Для дальнейшего анализа существенно, что решение уравнений в частных производных, зависящее от двух пространственных переменных и времени, можно искать в виде, для которого задача зависит от одной пространственной переменной и времени

$$u(x, y, t) = ay + aA(x, t) \quad v = v_w - ay \frac{\partial A}{\partial x} \quad (3)$$

где коэффициент a пропорционален напряжению трения в невозмущённом пограничном слое перед областью взаимодействия. Функция $A(x, t)$ с точностью до знака пропорциональна изменению толщины пограничного слоя. Подстановка (3) в уравнения (1) приводит к следующему уравнению:

$$a \frac{\partial A}{\partial t} + a^2 A \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{1}{\rho_w} \frac{\partial p}{\partial x} + av_w = 0 \quad (4)$$

в котором возмущение давления p заранее не определено и находится из решения задачи, описывающей внешнее невязкое течение. Предполагается, что возмущение давления индуцируется как внешними возмущениями, так и откликом пограничного слоя на это воздействие. Так, изменение толщины вытеснения пограничного слоя приводит к появлению возмущений во внешнем невязком потоке.

3. Дозвуковые течения.

Дальнейший анализ зависит от характера внешнего течения. Проводя сращивание решений для рассматриваемой области и для возмущённого внешнего невязкого течения, можно получить:

$$p(x, t) = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(s - x)} \frac{\partial(A - \delta_w)}{\partial s} ds, \quad M_\infty < 1 \quad (5)$$

где δ_w - изменение толщины тела (неровности, находящейся на плоской поверхности). Аффинное преобразование переменных и подстановка (5) в уравнение (4) приводит к неоднородному уравнению Бенджамена-Оно [3],[4], выведенному ранее для описания волн в стратифицированной жидкости

$$\frac{\partial A_1}{\partial t_1} + A_1 \frac{\partial A_1}{\partial x_1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(s-x_1)} \frac{\partial^2}{\partial s^2} (A_1 - \delta_{w1}) ds - av_{w1} = 0 \quad (6)$$

В результате численных исследований решений уравнения (6) было установлено [5], что при определённой зависимости формы поверхности от времени и при изменении максимальной высоты происходит существенное преобразование решения и возникают автоколебательные режимы.

4. Сверхзвуковые течения.

Для сверхзвуковых течений, используя результаты линейной теории, можно прийти к формуле Аккерета, связывающей индуцированное возмущение давления и изменение толщины вытеснения пограничного слоя

$$p(x,t) = -\frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{\partial A}{\partial x}, \quad M_\infty > 1 \quad (7)$$

Подстановка (7) в уравнение (4) и аффинное преобразование переменных приводят к неоднородному уравнению Бюргерса

$$\frac{\partial A_2}{\partial x_2} + A_2 \frac{\partial A_2}{\partial x_2} = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} (A_2 - \delta_{w2}) - v_{w2} = 0 \quad (8)$$

Решения неоднородного уравнения Бюргерса получены для ряда проблем, например, для описания, течений около донного среза [6], течений в пограничном слое при наличии разрывных граничных условий [7] и др.

Для сверхзвуковых течений возможны и другие режимы взаимодействия, например, режим, реализующийся для больших чисел Маха при сильном охлаждении поверхности. Для этого режима справедлив следующий закон взаимодействия:

$$p_3 = L \frac{\partial p_3}{\partial x_3} + \frac{\partial \delta_3}{\partial x_3} \quad (9)$$

Тогда после ряда преобразований получается система уравнений вида

$$\frac{\partial^2 A_3}{\partial x_3 \partial t_3} + (A_3 + \frac{1}{L}) \frac{\partial^2 A_3}{\partial x_3^2} = -(\frac{\partial A_3}{\partial x_3})^2 + \frac{1}{L} (\frac{\partial A_3}{\partial t_3} + A_3 \frac{\partial A_3}{\partial x_3}) + \frac{1}{L} \frac{\partial^2 \delta_{w3}}{\partial x_3^2} \quad (10)$$

где параметр подобия L определяет отношение изменений толщины вытеснения, индуцируемых в основной области течения и в области нелинейных изменений.

Уравнение (10) имеет гиперболический тип и обладает двумя семействами характеристик.

При определённых условиях пересечение характеристик одного семейства может приводить к образованию разрывного решения (скачка). Такое решение было получено численно для задачи, описывающей течение около поверхности, форма которой меняется со временем [8]. Следует учитывать, что разрывное решение не является скачком, изучаемым в газовой динамике, поперечный размер которого сравним с длиной свободного пробега молекул.

Толщина рассматриваемого скачка сравнима с толщиной пограничного слоя и, по-видимому, соответствует одному из режимов возникновения "псевдоскачка".

5. Пространственные течения.

В пространственных течениях представление решения в виде (3) несправедливо (уравнения для завихренности и толщины вытеснения не разделяются) и необходимо решать полную систему уравнений Эйлера с вырожденным уравнением для поперечного импульса

$$A(x, z, t) = u(x, 0, z, t), \quad B(x, z, t) = w(x, 0, z, t)$$

Тогда функции A и B удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + A \frac{\partial A}{\partial x} + B \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial B}{\partial t} + A \frac{\partial B}{\partial x} + B \frac{\partial B}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (11)$$

Так же, как и для двумерных течений, входящее в задачу распределение давления p заранее не известно и должно определяться условиями взаимодействия течения в пограничном слое с внешним потоком. Например, если внешний поток гиперзвуковой и реализуется режим слабого гиперзвукового взаимодействия $\chi = M\delta \ll 1$, для возмущения давления имеем следующую формулу:

$$p = \frac{\partial \Delta}{\partial x} = \frac{\partial \delta_w}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} (\omega_x - 1) dy \quad (12)$$

где Δ – суммарное изменение толщины вытеснения пограничного слоя, складывающееся из толщины неровности δ_w и изменения толщины пристеночной области течения в пограничном слое, для которой характерны нелинейные изменения продольной скорости.

Рассматриваемый режим взаимодействия приводит к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} + A \frac{\partial A}{\partial x} + B \frac{\partial A}{\partial z} &= - \frac{\partial^2 \delta_w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^{\infty} (\omega_x - 1) dy \\ \frac{\partial B}{\partial t} + A \frac{\partial B}{\partial x} + B \frac{\partial B}{\partial z} &= - \frac{\partial^2 \delta_w}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \int_0^{\infty} (\omega_x - 1) dy \end{aligned} \quad (13)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Prandtl L. Uber Flussigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung // Verhandlg. III. Intern. Kongr. Heidelberg 1904. S. 484-491.
2. Heisenberg W. Uber Stabilitat und Turbulenz von Flussigkeitsstromen // Ann. Phys. Lpz. N 4. 74. S. 577-627.
3. Ono H/ Algebraic solitary waves in stratified fluid // J/ Phys. Soc. Jap. 1975. Vol. 39. N. 4. P. 1082-1091.
4. Жук В.И., Попов С.П. О нелинейном развитии длинноволновых невязких возмущений в пограничном слое // ЖПМТФ. 1989. N 3. С.101-108.
5. Карабалаев А.Х., Липатов И.И. Влияние разрывных граничных условий на течение осесимметричном пограничном слое // Учен. зап. ЦАГИ. 1998. N 3. С.53-62.
6. Липатов И.И. Задачи с разрывными граничными условиями, описывающие ламинарные течения при больших числах Рейнольдса. //ПММ. 1999. Т.63. Вып.1. С.37-46.
7. Липатов И.И., Нейланд В.Я. Нестационарные процессы транскритического взаимодействия течения в пограничном слое с гиперзвуковым потоком // Аэродинамика больших скоростей. 1997. N 1. С.5-13.
8. Жук В.И. Волны Толлмина-Шлихтинга и солитоны. М.: Наука, 2001. 167с.

Сведения об авторе:

Липатов Игорь Иванович – начальник теоретического отдела ЦАГИ (+7 495) 5564996, (+7 9099052728, E-mail: igor_lipatov@mail.ru)

ПОЛЗУЧЕСТЬ И ДЛИТЕЛЬНАЯ ПРОЧНОСТЬ МЕТАЛЛОВ ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ

Локощенко А.М.

В середине 60-х годов XX века выдающийся советский ученый, академик Юрий Николаевич Работнов предложил для описания реологических процессов в твёрдых телах так называемую кинетическую концепцию [1]. Эта концепция представляет собой механическое уравнение состояния, дополненное системой кинетических уравнений для определения структурных параметров материала.

В данной статье приведены результаты применения этой концепции при описании ряда наблюдающихся в экспериментах особенностей ползучести и длительной прочности металлов.

1. Виброползучесть при сложном напряжённом состоянии

Под явлением виброползучести понимается резкое ускорение процесса ползучести в условиях, при которых к статическому напряжению добавляется циклическая составляющая малой амплитуды (не превышающей величину порядка 1% от статического напряжения). В НИИ механики МГУ имени М.В.Ломоносова с участием автора данной статьи ранее были проведены испытания трубчатых образцов из алюминиевых сплавов Д16Т и АД1 при температурах от 20 до 200°C. При этом в некоторых опытах вид напряжённого состояния постоянного напряжения совпадал с видом напряжённого состояния дополнительного переменного напряжения, в других опытах добавление переменного напряжения малой амплитуды приводило к сложному напряжённом состоянию [2, 3].

Испытания при температурах 120 – 200°C показали, что добавление к постоянному растягивающему напряжению продольных вибраций на растяжение-сжатие не приводит к изменению кривой ползучести. При добавлении к постоянному растягивающему напряжению крутильных вибраций или при добавлении к постоянному касательному напряжению продольных вибраций наблюдается эффект виброползучести, характеризуемый увеличением скорости ползучести в несколько раз. Испытания образцов при комнатной температуре показали, что при постоянных растягивающих напряжениях осевая деформация ползучести отсутствует, а при добавлении крутильных вибраций малой амплитуды появляется. Во всех случаях проявления эффекта виброползучести наблюдается его «насыщение»: данный эффект наиболее заметен на первых циклах приложения вибрационной составляющей напряжения.

Автором проведено моделирование полученных ранее экспериментальных результатов с помощью кинетической теории Ю.Н.Работнова. С этой целью использована модифицированная теория упрочнения:

$$p_u^\alpha \cdot \dot{p}_{ij} = \frac{3}{2} \frac{f(\sigma_u)}{\sigma_u} [1 + (\beta_1 - \beta_2 p_u) q] s_{ij}, \quad f(\sigma_u) = A \sigma_u^n, \quad \beta_1 > 0, \quad \beta_2 > 0, \quad (1)$$

s_{ij} – компоненты девиатора напряжений, \dot{p}_{ij} – компоненты тензора скоростей деформаций ползучести, σ_u и p_u – интенсивности напряжений и деформаций ползучести соответственно, $n, A, \alpha, \beta_1, \beta_2$ – материальные константы, $q(t)$ – кинетический параметр, зависящий от времени t . Для определения зависимости $q(t)$ предложено соотношение

$$q = \frac{\left[\bar{\sigma}_{\max}^{(0)} \times \bar{\sigma}_{\max}^{(1)} \right]}{\sigma_u^2}, \quad (2)$$

в числителе этого соотношения фигурирует абсолютная величина векторного произведения максимальных главных напряжений до приложения вибрационной составляющей тензора напряжений ($\bar{\sigma}_{\max}^{(0)}$) и после ее приложения ($\bar{\sigma}_{\max}^{(1)}$). Из (1) – (2) следует, что предложенная модель описывает обе особенности экспериментальных данных: появление эффекта виброползучести только в случае сложного напряжённого состояния и насыщение этого эффекта при увеличении длительности испытаний.

На рис. 1-2 в качестве примера приведены кривые осевой ползучести при добавлении осевых вибраций (рис. 1) и крутильных (рис. 2) вибраций к базовому постоянному

растягивающему напряжению, экспериментальные и теоретические кривые обозначены цифрами 1 и 2 соответственно.

2. Длительная прочность при переменных напряжениях, отклонения первого рода от правила Бейли

Во всех исследованиях работы конструкций при переменных напряжениях основным является следующий вопрос: можно ли по результатам испытаний на длительную прочность при постоянных напряжениях оценить время до разрушения t^* при переменных напряжениях. В качестве самой простой и наиболее известной гипотезы при этом используется правило линейного суммирования парциальных времен, которое иногда называется правилом Бейли. Рассмотрим случай, когда растягивающее напряжение в образце σ_1 , действующее в течение времени t_1 , затем скачком меняется до значения σ_2 , которое действует в образце вплоть до разрушения в момент времени $t^* = t_1 + t_2$. Правило Бейли для этого случая имеет следующий вид:

$$A = \frac{t_1}{t_1^*} + \frac{t_2}{t_2^*} = 1$$

t_1^* и t_2^* – времена до разрушения при постоянных напряжениях σ_1 и σ_2 соответственно.

В значительном количестве экспериментальных исследований наблюдаются систематические отклонения от правила Бейли, выходящие за границы естественного разброса. Среди них можно выделить отклонения двух типов. Отклонения первого типа характеризуются тем, что знак разности $(A-1)$ не зависит от того, какое напряжение больше: σ_1 или σ_2 . Отклонения второго типа характеризуются выполнением неравенства

$$(\sigma_2 - \sigma_1)(A - 1) < 0.$$

В данном параграфе рассматривается моделирование результатов испытаний, которым соответствуют односторонние отклонения $A > 1$ от правила Бейли первого типа. В соответствии с теорией Ю.Н.Работнова примем, что постоянное разрушение образца связано с присутствием в материале образца двух нарастающих во времени параметров поврежденности $\omega(t)$ и $Q(t)$, изменяющихся от нуля (при $t=0$) до 1 (при $t=t^*$). В качестве условия длительной прочности примем сумму

$$(\omega^* + Q^*) = 1. \quad (3)$$

Рассмотрим систему кинетических уравнений в следующем виде:

$$\dot{\omega} = B \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n \omega^\alpha, \quad \dot{Q} = B \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m Q^\alpha, \quad k = m - n > 0, \quad l = \frac{1}{1 - \alpha} > 1. \quad (4)$$

Уравнение кривой длительной прочности при одноосном растяжении согласно (3) – (4) имеет вид

$$t^* = \frac{l}{B} \left[\left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^{me} + \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^{ne} \right]^{-1/e}.$$

Эта кривая в логарифмических координатах $\lg \sigma - \lg t^*$ имеет две наклонные асимптоты, пересекающиеся при напряжении $\sigma = \sigma_0$ (рис. 3).

При кусочно-постоянном напряжении время разрушения t^* удовлетворяет следующему уравнению:

$$\left[\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0} \right)^m \cdot t_1 + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_0} \right)^m (t^* - t_1) \right]^l + \left[\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0} \right)^n t_1 + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_0} \right)^n (t^* - t_1) \right]^l = \left(\frac{l}{B} \right)^l.$$

Можно доказать, что величина A независимо от значений напряжений σ_1 и σ_2 ($\sigma_1 \neq \sigma_2$) и порядка их приложения, а также от величины времени t_1 описывает одностороннее отклонение от правила Бейли: $1 < A < 2$ (рис. 4).

3. Длительная прочность при переменных напряжениях, отклонения второго рода от правила Бейли

При испытаниях ряда материалов понижение напряжения ($\sigma_2 < \sigma_1$) приводит к отклонению от правила Бейли в сторону увеличения A ($A > 1$), а при повышении напряжения ($\sigma_2 > \sigma_1$) наблюдается обратный эффект: $A < 1$.

В [4] предложена модель с одним параметром повреждённости ω , в кинетическом уравнении для которого учитываются как непрерывное увеличение $\omega(t)$ в процессе ползучести, так и скачкообразное изменение ω при мгновенном изменении напряжения:

$$d\omega = \varphi'(\sigma)d\sigma + f(\sigma)dt, \quad (5)$$

характеристики материала $\varphi(\sigma)$ и $f(\sigma)$ являются непрерывными, монотонно возрастающими от нуля функциями. В качестве критерия разрушения принимается условие $\omega(t^*) = 1$. При мгновенном нагружении неповреждённого материала из (5) следует $\varphi(\sigma) < 1$, а при нагружении до уровня предела прочности σ_e при данной температуре из (5) следует $\varphi(\sigma_e) = 1$.

Можно сказать, что применение рассматриваемого кинетического уравнения (5) в случае кусочно-постоянной зависимости $\sigma(t)$ с одной ступенью приводит к следующему выражению для A :

$$A = 1 - \frac{[\varphi(\sigma_2) - \varphi(\sigma_1)]f(\sigma_1)t_1}{[1 - \varphi(\sigma_1)] \cdot [1 - \varphi(\sigma_2)]}. \quad (6)$$

При учёте того, что зависимость $\varphi(\sigma)$ – монотонно возрастающая функция, из (6) следует, что данная модель описывает отклонения второго рода от правила Бейли.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 11-08-00008).

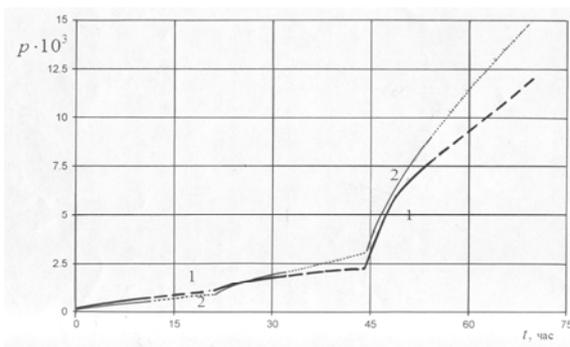


Рис. 1

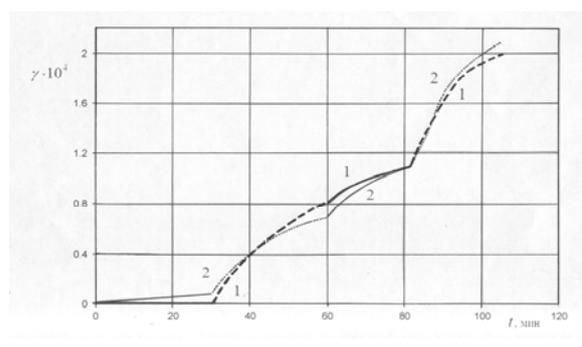


Рис. 2

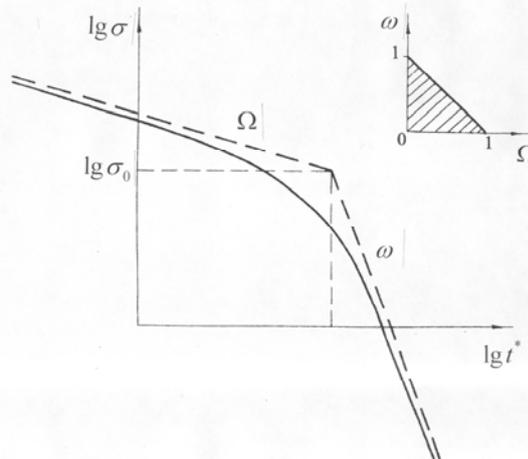


Рис. 3

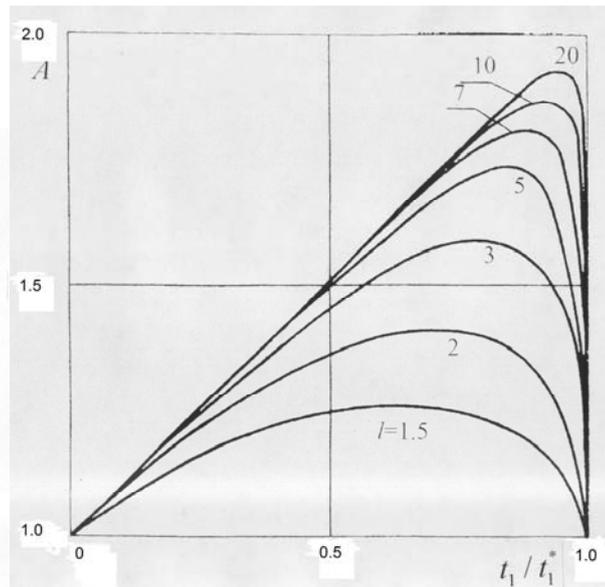


Рис. 4

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
2. Локощенко А.М., Шестериков С.А. О виброползучести // Изв. АН СССР. Механика твёрдого тела. 1966. №3. С.141-143.
3. Локощенко А.М., Мякотин Е.А., Шестериков С.А. Исследование влияния малых вибраций на ползучесть // Проблемы прочности. 1985. № 5. С. 50-54.
4. Локощенко А.М., Наместникова И.В., Шестериков С.А. Описание длительной прочности при ступенчатом изменении напряжения // Пробл. прочности. 1981. № 10. С. 47-51.

Сведения об авторе:

Локощенко Александр Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор, Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, 8-(495)9395308), 8-(499)1216272

E-mail: loko@imec.msu.ru

ФОТОГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕГИСТРАЦИИ ЛОКАЛИЗАЦИИ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ДЕФОРМАЦИЙ

Локощенко А.М., Терауд В.В.

С помощью предлагаемого метода бесконтактных измерений можно определять форму образцов при одноосном и сложных напряжённых состояниях в процессе испытаний, в результате можно получать синхронную информацию о нескольких параметрах деформированного состояния и, в частности, наблюдать развитие локализации деформаций в ослабленном сечении. Метод основан на компьютерном анализе деформирующегося образца. Специальная подготовка для образца не требуется. Через смотровое окно в процессе испытаний производится фотосъёмка образца. Получаемые изображения анализируются, и с учётом осесимметричности процесса деформирования восстанавливаются значения измеряемых параметров.

Проведение любого эксперимента имеет своей целью проверку теоретической модели поведения реального процесса. При высокотемпературных испытаниях возникает множество проблем, вызванных невозможностью проведения прямых измерений параметров в эксперименте, при этом, значительно снижается возможность использования датчиков, большинство из которых не рассчитано на высокую рабочую температуру. Обычно в подобных экспериментах производятся измерения очень малого количества параметров, что не лучшим образом сказывается на сравнительном анализе с проверяемой теорией.

Испытания металлов при осевом растяжении в условиях высокотемпературной ползучести проводятся с начала XX века. Во всех этих испытаниях образец находится внутри закрытой печи, поэтому единственная характеристика деформированного состояния, которую можно измерить в реальных опытах, – это зависимость удлинения образца от времени. Известно, что в некоторый момент времени в слабом сечении образца образуется шейка, характеризующаяся локальным уменьшением поперечного сечения. С течением времени размеры шейки увеличиваются. Изменение размеров шейки представляет безусловный интерес. При стандартных испытаниях эти данные получить невозможно. Некоторые печи оборудованы специальным отверстием для наблюдения за образцом и развитием шейки, однако для измерения этих параметров необходимо выполнение специальных условий: необходимое освещение внутри печи, создание бесконтактного (оптического) устройства регистрации, разработка специальной программы, обрабатывающей регистрируемые данные. Разработка подобной системы представлена в настоящей статье.

В основу измерений был положен бесконтактный принцип измерений геометрических параметров. Общий принцип этого метода изложен в [1-2]. Разработанная система состоит из трёх основных частей: модернизированной печи, специального фотоаппарата, компьютерного комплекса.

Испытания проводились на установке ИМех-5 в Институте механики МГУ. На рис. 1 изображена схема испытания образца. На установке ИМех-5 поддерживаются заданная высокая температура, заданное усилие в рабочей части печи. Растягивающее усилие создается грузами, нагружаемыми на платформу в нижней части установки. В качестве испытываемого материала был выбран алюминиевый сплав Д16Т, рабочая температура – 400°С. Длина рабочей части перед испытаниями составляет $l_0 = 25$ мм, начальный диаметр $d_0 = 4$ мм. Нагрузка соответствует напряжению в начальный момент времени, равному $\sigma = 40$ МПа.

Испытания проводились по следующей схеме. Сначала образец, закреплённый в тисках установки, нагревался до рабочей температуры. После выхода температуры на заданный уровень включался фотоаппарат, настроенный на съёмку через заданный промежуток времени. Производилось быстрое нагружение образца до заданного уровня осевого напряжения σ_0 . Дальнейшее деформирование производилось в условиях ползучести при постоянной растягивающей силе вплоть до разрушения. После разрушения образца съёмка прекращалась, температура в печи постепенно уменьшалась до комнатной и после этого образец извлекался из установки.

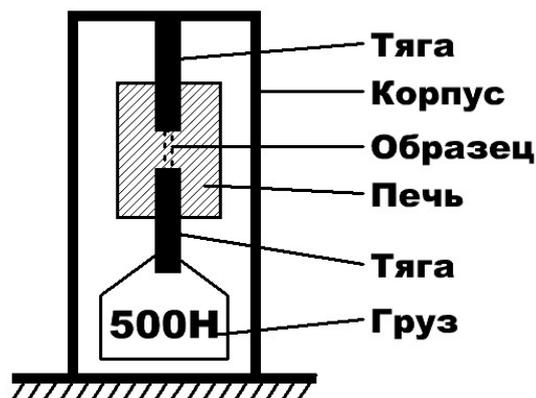


Рис. 1.

В разработанном методе измерения осуществляется прямой визуальный доступ к испытываемому образцу. В изоляционном материале печи было сделано отверстие размерами 12x1.5 см. Изготовлена оправа, которая плотно прилегает к внешней стороне печи, имея прямоугольное отверстие в центре для визуального доступа. Это отверстие плотно закрыто оптическим кварцевым стеклом. Такая конструкция исключает попадание холодного воздуха внутрь печи во время эксперимента.

Для чёткого фотографирования освещение образца нагретыми тэнами было недостаточно, поэтому было необходимо дополнительное освещение образца. Внутри печи была укреплена кварцевая лампа на керамических держателях, к которой проволокой из нихрома подводилось электричество. С помощью регулировки яркости лампы и её положения было получено превосходное освещение образца в процессе эксперимента.

К регистрирующему устройству предъявляются особые требования, так как от разрешающей способности оптической системы зависит разрешающая способность производимых измерений.

Для перевода сфотографированных изображений образца в числовую геометрию и для последующих вычислений различных параметров был разработан пакет программ. Пакет программ состоит из двух основных частей: вычислителя и постобработчика.

Вычислитель решает задачу перевода изображения из графической формы (фотография) в числовую форму (метрические данные) с вычислением необходимых параметров. Для этого производятся последовательно два действия: распознавание границ образца и вычисление параметров. Для облегчения распознавания предусмотрен модуль автоматического распознавания. Если автоматический модуль неверно распознает изображение, то пользователю необходимо распознать изображение самостоятельно и нанести реперные точки при помощи ручного модуля редактирования. Модуль ручного редактирования позволяет при помощи мыши нанести реперные линии на изображения, после чего с помощью разработанной программы можно рассчитывать изменение параметров образца.

Вычислитель позволяет определять следующие параметры (все вычисления изложенных параметров производятся в координатной системе, связанной с образцом): $l(t)$ – длина рабочей части образца, $p(t) = \ln(l(t)/l(0))$ – логарифмическая деформация ползучести, $\dot{p}(t)$ – скорость деформации ползучести, $d(t, z)$ – диаметр образца в различных сечениях, $\sigma(t, z)$ – действующие напряжения в сечениях, t – время, z – продольная координата.

Постобработчик визуализирует все вычисленные параметры в двумерной форме. Имеется возможность графически изображать зависимости различных параметров от времени t и от продольной координаты образца z . Некоторые параметры можно изображать в виде дополнительной реальности цветами, соответствующими деформации или напряжению в сечении, например такое изображение диаметра в сечениях показано на рис.2, а изображение напряжения, действующего в сечении, показано на рис. 3.

Разработанная система позволяет получать оптический доступ к образцу, в связи с этим можно наблюдать процесс деформирования образца, а также записывать видео-процесс для

дальнейшего просмотра. Для каждого эксперимента имеется возможность создавать видео-файл не только для стандартного отображения процесса, но и с использованием дополнительной реальности в виде цветного подкрашивания образца в соответствии с деформациями или действующими напряжениями. Пример подобных изображений изображен на рис. 2, 3.

Обычно под локализацией деформаций в экспериментах понимают явное, заметное глазом, сужение образца, хотя разрешающая способность глаза весьма слабая. При помощи разработанной системы можно легко и с высокой точностью находить время появления локализации деформации. На рис. 2 изображена серия фотографий для $t = 0$ сек, $t = 960$ сек, $t = 1300$ сек, $t = 1560$ сек. Из рис. 2в следует, что локализация деформации глазом еще не заметна, но компьютерная система уже распознала начало этого процесса. В приводимом эксперименте локализация деформации начинается при $t = 1300$ сек, что соответствует 80% времени до разрушения. Известно, что большинство авторов, описывая локализацию деформации, утверждают, что она происходит непосредственно перед разрушением, и время её развития составляет небольшую часть от всего времени деформирования. Разработанная система объективно показывает, что это предположение для алюминиевого сплава Д16Т неверно. Есть основание полагать, что эта распространённая точка зрения также неверна и для других вязких материалов.

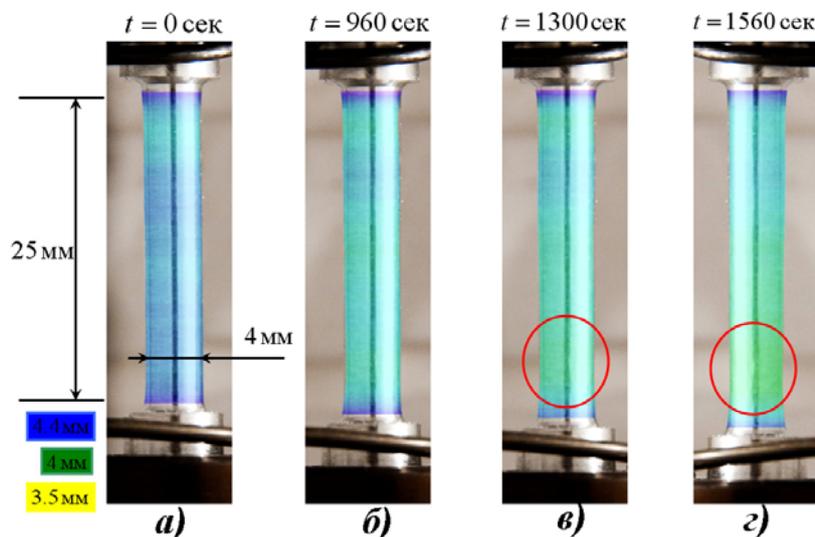


Рис. 2.

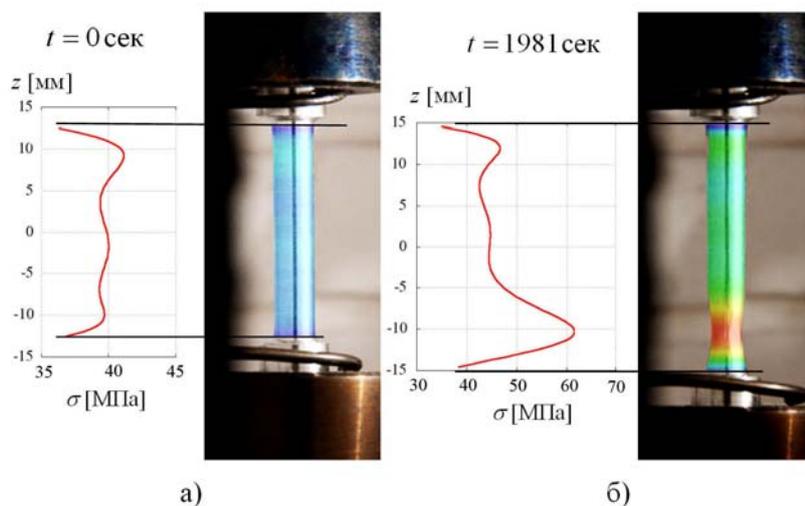


Рис. 3.

Локализация деформации влечёт за собой повышение растягивающего напряжения в окрестности места локализации. На рис. 3 изображены фотографии образца при $t = 0$ сек (недеформированное состояние) и $t = 1981$ сек (за 4 сек до разрушения). Разработанная программа позволяет изображать данные фотографии в виде различных цветов, соответствующих действующим напряжениям в поперечном сечении. На рис.3 изображены напряжения вдоль длины образца. Отчётливо видно повышение действующего напряжения в образце в месте локализации, развитие которой приводит к разрушению. Можно также отметить, что область повышенного напряжения относительно среднего значения по образцу достаточно широкая, перед разрушением она соответствует 30% от длины образца, т.е. локализация деформации затрагивает достаточно большую часть образца.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-08-31166).

ЛИТЕРАТУРА

1. Терауд В.В. Инновационная многокомпонентная система бесконтактных измерений при высоко температурных испытаниях // Труды конференции-конкурса молодых учёных Институт механики МГУ (14-16.10.2009). М.: Изд-во МГУ. 2010. С.307-317.
2. Lokoshchenko A.M., Teraud V.V. Experimental and theoretical study of the high temperature creep shortening for a circular cylinder // 37th Solid mechanics conference (6.09-10.09.2010, Warsaw, Poland). Inst. of Fundam. Technol. Research. Wars. 2010. P.194 – 195.

Сведения об авторах:

Локощенко Александр Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор, заместитель директора НИИ механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова. Лауреат Государственной премии РСФСР. 8(495)939-53-08. **E-mail:** loko@imec.msu.ru

Терауд Валентин Викторович – кандидат технических наук, научный сотрудник НИИ механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова. 8 (495)939-52-78. **E-mail:** ldrnww@gmail.com

CONTENTS AND ABSTRACTS

- NAGUSH ARUTYUNYAN To 100th Anniversary5**
- Mkhitaryan S.M.18**
On Academician N. Kh. Arutyunyan's heritage and the development of his investigations
The paper highlights Academician N. Kh. Arutyunyan's main ideas and results in the spheres of torsion of elastic and elastic-creeping bodies, creep theory, contact and mixed problems of mechanics of deformable solids, their development and generalization.
- Avetisyan V.V.28**
About one algorithm of group searching in a rectangular domain
A problem of group searching of immobile objects in a rectangular domain is considered. An algorithm is proposed for breaking down the rectangular domain into non-intersecting sub-rectangulars in such a way that will allow each searching object to observe the prescribed rectangular with time optimal way, while the maximum out of minimum times for observing the sub-rectangular will become of minimal value.
- Aghabekyan P.V..... 33**
A contact problem for an elastic semi-infinite plate with finite and infinite stringers
In given paper a contact problem for semi-infinite elastic plate fastened by two elastic stringers, one finite and one infinite, herewith, the finite stringer is situated at the edge of the plate, and the infinite stringer is situated at the ultimate distance from the edge of the plate and parallel to it is considered. The semi-infinite plate is deformed under the action of the forces, applied on the infinity. The problem is reduced to the solution of the singular integral equation relative to the stresses acting under the finite stringer. Hereinafter, the solution of the singular integral equation with the help of Chebishevs orthogonal polynomials is reduced to the solution of quasi-completely regular infinite systems of linear algebraic equations.
- Aghalaryan H.B.....37**
On a plane problem of compound elastic wedge under different boundary conditions
In the present paper the problem of finding of stress-strain state in the vicinity of joint apex of compound body which consists of three wedges of arbitrary value of angles' magnitude by the statement of plane theory of elasticity is considered. In the case of longitudinal shear by nonlinear statement the power law of strengthening under different boundary conditions is accepted.
- Aghalovyan L.A., Aghalovyan M.L.42**
On dynamic conduct of Lithospheric Plates of the Earth on the base of the data of seismic stations and GPS systems
Using the data of seismic stations and GPS systems the spatial, dynamic, non-classical problem of elasticity theory for layered packet from plate specifically simulating the conduct of Lithospheric Plates of the Earth is solved.
The amplitudes of forced vibrations are determined, the way for tracing their changing in time is indicated.
- Aghayan K.L., Grigoryan E.Kh., Gulyan K.G.47**
Diffraction of sheared plane wave on the edge of semi-infinite crack at compound elastic space.
The dynamic contact problem of sheared plane wave diffraction in elastic piecewise-homogeneous space with stress concentrator in the shape of semi-infinite crack of longitudinal displacement is investigated. The space is consisting of two different elastic semi-spaces, and semi-infinite crack is parallel to the line of partition of materials is located in one of the semi-spaces. Herein, considered a case when falling from infinity shear plane wave is propagated at continuous semi-space. The problem of determination of diffracting wave field at compound space with the help of generalized Fourier transformation reduced to the boundary problem of

Riemann type on the real axis. The asymptotic formulas characterizing a field of elastic displacements at far fields of each part of piecewise-homogeneous space as well as distribution of sheared stresses near the edge of crack is obtained.

Hakobyan V.N., Amirjanyan H.A...... 52

On transfer of load from elastic inclusions to infinite viscous-elastic plate with semi-infinite slit

The plane stress state of infinite viscous-elastic plate with semi-infinite slit, banks of which are welded by different viscous-elastic inclusions, is considered. Taking into account that the inclusions are located in uniaxial stress state [1], the governing system of equations of stated problem consists of singular integro-differential and singular integral equation with respect to tangential stresses, acting at banks of inclusions, is obtained. The behavior of solutions of governing system at the end-points of inclusions and slits is studied. The solution of system is built by the numerical-analytical method of discrete singularities.

Hakobyan V.N., Dashtoyan L.L., Hakobyan L.V...... 57

On stress state of elastic plane with semi-infinite slit, perpendicularly situated at the absolutely rigid inclusion, which is partially detached from matrix

The stress state of homogeneous elastic plane, weakened by semi-infinite slit, perpendicularly situated at the absolutely rigid inclusion, is considered. The governing system of singular integral equations with respect to derivatives of functions of displacements' differences and jumping function of stresses, acting at edges of crack, is obtained. The solution of system is built by the numerical-analytical method of discrete singularities.

Alvajyan Sh. I 62

Asymptotic substantiation of mathematical model of micropolar elastic orthotropic thin bars

In this paper an asymptotic method of integration of micropolar theory of elasticity for orthotropic material in the case of plane stress state in thin rectangle is developed. An applied one-dimensional theory of orthotropic micropolar elastic thin bars is built and inherently a model of micropolar orthotropic bars built on the basis of hypotheses method is substantiated.

Alexandrov V.M., Mark A.V...... 67

Fixed contact problem for viscoelastic cylinder

The contact problem of the interaction of hard-liner and tie with a boundary of a viscoelastic cylinder is considered. It is assumed that the band moves with constant velocity along this border. Friction in the contact region is neglected. At the first stage, the displacement of the boundary of the cylinder attached to her normal workload is defined. Then on the second step an integral equation of the contact problem for determination the contact pressure is derived. In the third stage an approximate solution of this integral equation by the modified Multhopp-Kalandia method is constructed. The graphs of the distribution of contact pressure is presented.

Altenbach H. 71

Creep Mechanics - from the Classical to some Advanced Models

Investigations in Creep Mechanics started at the end of the 19th century. First theories were suggested in the 20th and 30th years of the last century. From this time creep Mechanics is established in structural analysis in the case that the structure or some structural element is used if the loading level is moderate (far from the yield stress), but the temperature level is approximate 0.3-0.4 of the melting temperature of the given material. During the last 70 years the main research direction is focused on the formulation of constitutive equations. Outstanding contributions in this field were made by scientists from the former Soviet Union: among them Yu.N. Rabotnov, N.N. Malinin, L.M. Kachanov, N.Kh. Arutunyan, and R.A. Arutunyan. Now some proposals for constitutive equations are established, but they differ from the point of view of their structure, even from their physical explanation.

- Amirbekyan A.N.**.....76
About bending of periodic system of beams on the elastic semi-plane
The problem of bending of the periodic system of beams on elastic base is considered within S.P.Timoshenko's theory. In present paper the contact problem on indentation of periodic system of bendable beams into elastic semi-plane by Timoshenko's theory is studied.
- Annin B.D., Ostapenko V.V., Chesnokov A.A.**.....81
Modeling of the plane plastic flow of a material with allowance for inertial forces
We consider a system of differential equations describing the planar plastic flow of a material outside of a convex hole taking into account the effect of inertia. It is shown that the system has two sets of multiple real characteristics, for each one eigenvector and one adjoined vector are appropriate. For this reason, this model is not hyperbolic in the classical sense. The system of equations is transformed into a set of evolutionary equations, which is used for numerical calculations illustrating the effect of inertia forces on the main parameters of the flow.
- Arutyunyan A.R., Arutyunyan R.A.**.....86
Thermodynamic creep fracture law for aging elastic-viscous materials
The modified elastic-viscous equations expressed in the scale of the effective time are considered to describe the deformation, climate and radiation aging of polymer materials. The concrete differential relation for the parameter of effective time is suggested. Using the received constitutive equations and the energy conservation law the creep fracture criterion is formulated. The criterion can be applied to describe degradation and fracture of polymer materials due to climate, deformation and radiation aging. In the thermodynamic creep fracture criterion these effects are connected with the increase of internal and, consequently, with the increase of the stored energy.
- Harutyunyan L.A.**90
Two-dimensional mixed boundary problems of compound plane with cracks
The two-dimensional problem of the theory of elasticity for compound plane consisting of two half-plane is considered with different elastic characteristic and existing between them finite cracks or semi-infinite cracks. Due to Fourier integral in bipolar system of coordinates the problems are solved closed with the help of Papkovitch–Neuber function.
- Astafiev V.I., Roters P.V.**.....95
Elliptic functions in the simulation of oil field development
Subject of the present work is the simulation of oil field recovery using elliptic functions.
- Baghdasaryan G.Ye., Marukhyan S.A.**99
Forced transverse vibrations of the cylindrical shell partially filled with fluid under the influence the longitudinal harmonic force
The vibrations of the cylindrical shells partially filled with fluid under the influence of the longitudinal harmonic force is considered. It is taken into account, that under the influence of hydrostatic pressure of the fluid the shell bulges and as a result of this the longitudinal force acquires additional property as a source of transverse vibrations. The properties of the general characteristics of forced vibrations emerged in this way (related to longitudinal vibrations) depending on the depth of the fluid is investigated.
- Baghdasaryan G.Ye., Danoyan Z.N., Mikilyan M.A.**.....104
Regulation of nonlinear forced and parametric vibrations of perfectly conductive plate by magnetic field
On the basis of the non-linear theory of magneto-elasticity of thin plates the equations and boundary conditions of non-linear dynamics of perfectly conductive plate in an inclined magnetic field are obtained. In the presented work the approximate solution of the addressed problem in the cases of non-linear forced and parametric vibrations is received. The influences of as orientation, as well as the intensity of the given magnetic field on the behavior of forced

vibrations, on the weight of dynamic instability boundary and on the amplitude of non-linear forced and parametric vibrations are investigated. It is shown that the existence of resonant type vibrations near the frequency $\theta = 2\Omega$ is conditioned only by the presence of the inclined magnetic field ($H_{01}H_{03} \neq 0$).

Bagdov A.G. 109

Kinematic nonlinear wave treatments for description of stochastic space processes in semiconductors, traffic motion and motion of micro pores in fracture mechanics.

Using universal kinematic nonlinear wave treatment, supplemented by similar experimental curves among two parameters, there are investigated phase transitions for Gunn instability in semiconductors, for traffic flow near bottleneck and in micro-mezo pores motion to macroscopic fracture formation.

Baryshev A. A. 113

Forced Vibration of Growth Cylindrical Shell

Small forced vibrations of growing cylindrical shell is studied in the framework of Kirchhoff-Love shell theory. The process of the accretion are characterized by the continuous adherence of material particles to its facial surface. Since the shell bends during the accretion, its stressed-strained state depends not only on loading, but also on the history of the process of accretion, i.e. the schedule of accretion. A schedule of elementary type, when during every infinitesimal time interval the particles of adhered material constitute the layer of constant infinitesimal thickness, is considered. The closed form solution was obtain by spectral decomposition.

Belubekyan M.V., Davtyan A.A. 116

Elastic waves in the layer-semispace under the condition of sliding contact on the layer limited plane

The possibility of occurrence of Raleigh type surface waves in the case when on the surfaces of layer are realized the conditions of sliding contact is considered. It is established that the appearance of surface waves depends both on the Poisson's ratio and the ratio of layer thickness and wavelength. The series of papers, particularly [1-5], are devoted to the propagation of surface waves of Raleigh type in the system of layer semi-space. In all known investigations, under different conditions of contact between the semi-space and layer we consider only the case of the free outer boundary of layer. In this paper we study a version, when, on the outer boundary layer and on the boundary of contact of layer with semi-space the conditions of sliding contact is occurred.

Belubekyan M. V., Sanoyan Yu. G. 121

To the problem of stability of compound plates at heating

The critical temperature values of compound elastic plate are calculated. Composite plate consists of two plates. The edges of the plate perpendicular to the contact plane are in sliding contact, while the other two hingedly fixed. The behavior of critical temperatures for two particular cases is studied: when the plates are differing only by the coefficients of linear expansion and when the plates are differing only by coefficients of the Poisson.

Belubekyan E.V., Poghosyan A.G., Avetisyan H.R. 126

Optimization of the piecewise constant thickness rectangular plate from the composite material at a given value of the lowest vibration frequency

The problem of stability of the piecewise constant thickness rectangular plate, prepared from the composite material, hinge supported on two opposite longitudinal sides and free, hinge or clamped supported on the end edges at a given value of the lowest frequency of the natural vibration is investigated. The optimum values of the geometric and physical parameters of the plate ensuring the maximum value of critical load at constant weigh and a given value of the lowest frequency of the natural vibration are determined.

- Bogdanov A.N., Diesperov V.N., Zhuk V.I.131**
Asymptotical models of nonclassical transonic boundary layers
 It is proposed an asymptotical version of transonic flow stability problem. The lower branch of neutral curve consideration leads to so called triple-deck structure of disturbed velocity field. The deduction of the basic system of equation on the basis of the free-interaction concept is given. Results of research on the complex planes of the dispersion relations arising in the course of the solution of tasks on own values are represented.
- Boyev N.V., Vdovin V.A., Zotov V.M.....135**
Theory and experiment in the problem of multiple diffraction of ultrasonic waves by three-dimensional defects
 In the framework of the Ray theory for a system of three co-axial cylindrical holes, made in a steel sample, there is performed a comparison between theoretical calculation and experimental data for displacements with a single multiply reflected ultrasonic waves.
- Burago N.G., Zhuravlev A.B., Nikitin I.S.139**
Fatigue fracture of aviation structure elements
 Criteria and models of multiaxial fracture are investigated under the conditions of low-cycle fatigue (LCF) and very-high-cycle fatigue (VHCF). A procedure for calculating the stress state of the compressor disk in a gas turbine engine (GTE) taking into account the flight cycle of loading and the low-amplitude vibrations of blades is outlined. The calculated stress state and models of multiaxial fatigue fracture are used to estimate the service life of the compressor disk for alternative fatigue fracture mechanisms of LCF and VHCF. Model problems of elasticity for annular disk loading by radial stresses (LCF regime analog) and by torsion torques (VHCF regime analog) are considered. Durability estimations for real GTE structure elements are calculated and compared.
- Vatulyan A.O.144**
The inverse coefficient problems in the mechanic of the coupled fields
 In given work the space problem of propagation of waves in an isotropic elastic infinite plate is considered. For definition of phase speed of a wave is received the dispersion equation. Ways of research of inverse coefficient problems for the coupled linear models of mechanics of a deformable solids are presented. Feeble statement for models of electroelasticity, thermoelasticity, poroelasticity are formulated. A number of one-dimensional problems is solved by reducing to iterative processes. On each step of iterative process the direct problem is solved and on the basis of decision integral Fredholm equation of first kind the correction to required functions are discovered.
- Gavriushin S. S.148**
Nonlinear Analysis and Synthesis of thin-walled structures with the guided elastic deformation
 Stated theoretical principles, strategy and algorithms for numerical analysis and syntheses mechanical structures and devices, realizing principle of the guided elastic deformation. For numerical simulation is used strategy of consequent analysis of single-parametric nonlinear problems, belonging multi-variable family, in which embedding under investigation problem that allows solving the structures syntheses problem. The algorithm of the computer analysis is based on the parameter continuation methods combined with the "control parameter sub-space changing" technique proposed by the author.
- Gevorgyan G.Z.153**
Stability and vibration of variable thickness ortotrope strips with account of transverse shear and axial force.
 Stability and vibration of variable thickness ortotrope strips with account of transverse shear and axial force at various boundary conditions is considered. The obtained set of equations

solved numerically by collocation method in various laws of variation of thickness and elastic constants. The results of calculation in some cases compared with known exact solutions.

Gevorgyan R.S., Hasratyan M.G. 157

Asymptotic solution of mixed boundary-value problems for the shells of viscoelastic material

Integrating the equations of three-dimensional problem of the theory of viscoelasticity in curvilinear coordinates are derived by an asymptotic recursion formulas for determining the components of the stress tensor and displacement vector of a shallow shell of infinite dimensions of the viscoelastic model of Maslov - Harutunyan. The shell is considered in terms of heterogeneous (physical and mechanical factors vary along the longitudinal coordinates, but are constant in thickness). The cases are shown when on the surfaces of the shell the conditions of second and mixed boundary value problems of elasticity theory are given.

Golovin N.N., Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. 162

The estimates of the effective characteristic of modified fullerenes composite

A mathematical model of the composite (an isotropic matrix containing a relatively small volume fraction of nanoparticles) is obtained. Bulk modulus and shear modulus are estimated based on the fullerene core model, which allowed us to obtain the effective values of these modules as a whole for the composite. The evaluation of the effective thermal conductivity of the composite, modified fullerenes, are also presented.

Golyadkina A.A. Kirillova I.V., Kossovich L.Yu., Shuchkina O.A 167

Modeling of haemodynamics of coronary arteries

Coronary artery (CA) and heart tissue mechanical properties are studied in this work. Their 3D computer models were built. Numerical analysis of stress-strain state and haemodynamics of left and right coronary arteries was performed using the aforementioned models and taking into account an influence of the healthy and pathologically affected heart muscle on the CA.

Goryacheva I.G., Antonov F.K., Anferov G.M., Lyubicheva A.N. 172

Modeling of the effect of cartilage on stress distribution in metacarpal-carpal joint of the thumb

The study of stress state of the thumb carpometacarpal joint (healthy and pathological) is carried out using the methods of contact mechanics. The geometric model of the joint was based on the results of computer tomography data in the position of extension of the thumb obtained in National Cheng Kung University (Taiwan). The contact interaction for a given geometry was analyzed numerically using ANSYS code. From the numerical solution of the contact problem the comparative analysis of the contact and internal stresses inside the bone tissues in the presence of a uniform layer of cartilage, as well as in the case of the pathology connected with a decrease or absence of cartilage layer, was carried

Grigoryan M.S. 177

On the contact interaction of an elastic half-space or a layer with a system of stringers under antiplane deformation

Problems of contact interaction of an elastic half-space or an infinite elastic layer with a system of an arbitrary finite number of stringers under antiplane deformation are considered.

Grigoryan H.F. 182

Curving of asymmetrically inhomogeneous plate on the thickness in a neighborhood of rigidly fixed edge

In this work the problems of asymmetrically inhomogeneous plates on a thickness on the basis of a hypothesis of Kirchhoff are investigated, also are defined the bending, buckling moment and torsion torque and intersecting force in a neighborhood of fixed edge of a plate. Asymmetry is understood in sense, that if functions mechanical characteristics of plate material are continuous on thickness coordinate they are asymmetrical concerning a median plane.

- Grigoryan E.Kh., Aghayan K.L., Jilavyan S.H.186**
The diffraction of a shear plane wave in elastic and electro-elastic mediums allowing propagation of surface waves
 Herein, is presented some results, in which problems of shear plane waves diffraction in elastic isotropic and electro-elastic mediums in presence of elastic inclusions, cracks or thin grounded metallic layers (electrodes) are considered. The presence of non-homogeneities, as well as semi-infinite cracks in mediums with piezo-electric properties are the reasons of excitation of localized (surface) waves and some new special phenomena of shear plane waves diffraction..
- Grishko A. M.191**
Plate divergence in supersonic flow
 In modern transonic and supersonic aircraft and rocketry the problems of stability of elastic plates which are in the gas flow, occupy an important place among the non-conservative problems of elastic stability. The problems of the plates with nonhomogeneity along thickness are investigated based on Kirchhoff's hypothesis without assumption of invariability of Poisson's ratio. The problems of stability of the plate in the presence of springs along one long edge and hard fixing or pin joint supporting along the other are considered.
- Ghulghazaryan G.R, Miklashevich I.A196**
Free interfacial vibrations of momentless cylindrical shells with variable curvature and rigid clamped ends.
 Free interfacial vibrations of closed and non-closed cylindrical shells composed of finite orthotropic momentless cylindrical shells with variable curvature and different elastic properties are studied. It is assumed that the ends of shells are rigid-clamped. Dispersion equations for finding the natural frequencies of interfacial vibrations of composed cylindrical shells are obtained using the system of equations corresponding to the classical theory of orthotropic cylindrical shells. Asymptotic links are established between dispersion equations of considered problems and analogous problems for composed plate-strip and rectangular plate. Calculations are carried out for shells with directing curves in forms of closed and non-closed ellipses with different values of curvature and length of components. It is showed that with increasing the square of curvature of directing curve of cylindrical shell wave numbers and frequencies of vibrations forms of the first frequencies of interfacial vibrations may increase.
- Ghulghazaryan L.G.201**
The natural space vibrations of orthotropic shells at the boundary layer for conditions of first boundary-value problem
 The natural space vibrations of orthotropic shells at the boundary layer for conditions of first boundary-value problem are considered. Characteristic equations for determining speeds of plane and anti-plane boundary layer function damping when moving from edge surface into the shell are obtained. Some first numerical values of speed of boundary layer function damping are given.
- Davtyan Z.A., Gasparyan A.V.206**
On Torsion of an Uneven-Aged Elastic Creeping Piecewise-Homogeneous Cylinder of Finite Length
 Stress-strained state of an uneven-aged elastic creeping piecewise-homogeneous cylinder of finite length is considered. On the edges of the cylinder turning loads of arbitrary intensity are applied. The round cylinder is composed of an arbitrary finite number of different cylinders welded with each other on the edges. It is assumed that the contacting elements have a property of creep, are made of different materials at the different moments of time and hence have different ages.

- Dadayan T. L., Grigoryan D. H. 211**
Influence of the openings and its location in diaphragms of reinforced concrete buildings on their stress-strain state
 Influence of the openings in the reinforced concrete diaphragms on their stress-strain state and a building as a whole is shown in the article. Various schemes of an opening were considered at action of vertical and lateral loads. Calculations were carried out by software program Lira 9.6 based on FEM. Results of the calculation show that various parameters of openings influence on stress-strain state of reinforced concrete diaphragms in frame-braced buildings that are currently the basic structural system are used for new multistory buildings in the republic of Armenia.
- Danoyan Z.N., Atoyan L.A., Sahakyan S.L., Danoyan N.Z..... 215**
Electroelastic surface Love waves at layered piezoelectric structure in the presence of electric screen
 In the given article at quasi-static approximation the electroelastic surface Love waves at layered structure consisting of piezoelectric semi-infinite substrate, dielectric layer and adjoining dielectric medium with an electric or magnetic screen at some distance from the layer is investigated.
 The dispersion equation and the conditions of existing of surface Love waves are obtained. Dependence of phase velocities of the Love waves from the relative thickness of a dielectric layer is investigated.
- Darbinyan A.Z. 220**
Problem of thermoelasticity of an infinite plate-strip reinforced by periodic system of ribs
 In this work the case of joint action on the infinite plate intensified on the edges by periodical system of stiffening ribs of transverse load and temperature field is considered. The solutions, which satisfy the conditions for the hinged support of plate on its opposite edges are obtained. The numerical realization of problem is performed. Value of temperature is determined, under which the plate practically unexposed to bending. Obtained results are compared with results for rectangular plate under same conditions.
- Dedkov D. V., Zaitsev A. V., Tashkinov A. A. 223**
Stress concentration at a textile composite layer with local closed technological defects
 The new model for a hooked-fiber textile composite layer with polycrystalline matrix was developed. On the bases of numerical solution of the boundary-value problems by FEM the values of stress concentration factors caused by presence of local technological defects were defined under macroscopically homogeneous pure shape change. It was determined that shear and tension are main mechanisms for damage beginning under loading.
- Jilavyan S. H., Khurshudyan A. Zh..... 228**
Optimal boundary control of thermal stresses in infinite elastic layer
 An optimal control problem is investigated for a system of coupled partial differential equations, describing the strain state of an infinite elastic layer in non-stationary thermal field with taking into consideration coupling of thermal and stress fields. It is assumed, that at the end faces of the layer are acting normal compressive forces during a finite time interval. Control process is carried out via mixed boundary conditions, at that a functional describing the maximal value of controls in the considered time interval is taken as the optimal control process optimality criterion. Using the finite control method, by means of Fourier generalized integral transform solution of the considered problem is reduced to an interpolation problem with respect to Fourier transformants of unknown functions of controls, which, in turn, is reduced to an appropriate system of trigonometric moments problem with respect to functions of controls. The solution of considered problem is constructed explicitly by means of solution of the system of moments problem. Necessary and sufficient conditions for solvability of obtained system of moments problems are also obtained.

- Esayan S.G.**233
Variants of rheological modeling of concrete as a visco-elastic medium
 Herein presented rheological visco-elastic models of concrete as a hereditary aging, aging and the legacy environment.
- Zhuravlev A.B., Karev V.I., Kovalenko Yu. F., Sidorin Yu.V., Sirotin A.A., Ustinov K.B.**.....238
On plastic deformation of rocks. Determination of plastic characteristics on the base of experiments on tri-axial loading
 Analysis of the existing approaches to description of elastic-plastic behavior of rocks is performed. Drucker-Prager model is chosen since it allows describing inelastic behavior with hardening. An approach of determining plastic parameters is suggested on the base of experiments according to relatively simple loading trajectories. The approach has been fulfilled for a number of rocks. Using the found parameters the deformation process was described for non-uniform loading, corresponding to a practical geomechanical problem: finding stress-strain state near a perforated well.
- Zaitsev A. V., Kutergin A. V.**243
Analytical solution to problems on elastic equilibrium state of heavy horizontal orthotropic cylindrical body
 Using decomposition of hoop and radial components of displacement vector to the trigonometrical and generalized power series, the new exact analytical solutions to problems on elastic equilibrium state of thick-walled heavy horizontal orthotropic axial-symmetric body, which are subject to the action of non-uniform external lateral pressure, are obtained.
- Zimin V.N., Krylov A.V., Fayzullin F.R., Churilin S.A.**248
Special features of transformable structures deploy dynamics modelling
 Special features of large transformable space structures deploy modeling are under consideration. Mathematical models of the structure deploy take into account next features: multilink architecture, impact character of elements fixation, restriction movements of adjacent sections. It is also considered that some structures are systems with closed kinematic chains.
- Indeitsev D.A, Polyanskii V.A., Semenov B.N.**253
Influence of cyclic loading on hydrogen diffusion in metals
 In our experimental studies it was found that cyclic and long-term static loads lead to a redistribution of the natural concentration of hydrogen in metals both in volume and in the binding energies. The distribution of the hydrogen concentration along the metal sample has a distinct character under uniaxial cyclic loading. It has many extremes with the one major peak. A model describing of phenomenon is proposed. As an application of proposed model the hydrogen localization under cyclic loading of a rod is considered. The theoretical results are compared with the experimental data for rods from the aluminum-copper- magnesium alloy. The hydrogen accumulation in the central part of the rods, which is experimentally determined, has a good agreement with the theoretical results.
- Kazantsev A.G.**258
Corrosion cracking of low alloy steel under slow rate strain
 The results of experimental investigation of slow-rate strain corrosion cracking (SRSCC) of low-alloy steel 10GN2MFA in the high temperature water with deposits of copper and iron oxides are presented. The boundaries of SRSCC appearance depending on the parameters of water, the level of temperature, strain rate and composition of deposits were studied. Criteria for the initiation and development of cracks are offered. The calculation results are compared with experimental data under static and cyclic slow-rate loading.
- Ghazaryan K.B., Naslyan A. H.**263
Floquet waves in elastic rod with periodically positioned attached masses

The problem of longitudinal elastic waves propagation is considered for a rod with periodically alternated materials separated by attached masses. In the framework of the Floquet theory relation is obtained between wave frequency and Floquet wave number. The result demonstrates that in homogeneous rod the existence of Floquet waves caused by periodically system of attached masses are possible.

Kalidzhyan L.R...... 267

Magnitoelectric waves in a perfectly conducting layer in the presence of a longitudinal magnetic field

Propagation of waves in an electro conductive elastic infinite layer with a thickness b is considered. In the initial state layer is in a constant magnetic field which is parallel to the layer planes. On the layer surfaces the conditions of sliding contact and the conditions of Navier are take place. Numerical results for the phase velocity of waves at different values of magnetic field magnitude and thickness are obtained.

Karapetyan K.A...... 272

Resistivity to concrete shrinkage of various zones of masses cross-section

To the investigation of regularities of resistivity to concrete shrinkage change along the cross-section of massive elements not numerous papers are devoted. In these investigations, however, the influence of the aging factor on the denoted regularity was not taken into account.

The present paper deals with the study of resistivity to concrete shrinkage in the various zones of the section of the masses, taking into account the age of the material.

Karapetyan L. G...... 276

Stabilization possibility of existing extensions from overturning and collision with a basic building at seismic action

A lot of buildings with extensions exist in the city of Yerevan, where the majority of extensions are located near to the stone buildings that demand increasing the level of seismic resistance or strengthening. Chaotic and structurally not correctly built extensions at seismic action represent serious danger so far as dynamic loadings can overturn or destruct of an extension at possible collision with the basic building at its oscillation.

The basic imperfection and defects of existing extensions, and also possible approaches and the strengthening methods are shown in article, where these methods can provide bearing ability and several times to reduce both overturning possibility, and collisions of an extension with the basic building at seismic action.

Karev V.I., Kovalenko Yu.F...... 280

The Study of Mechanical Properties of Rocks by Using the True Triaxial Loading Setup

The paper is devoted to experimental study of deformation, strength and filtration properties of rocks forming reservoirs of oil and gas fields. The investigations were carried out by using a unique experimental True Triaxial Loading Setup developed at the Institute for Problems in Mechanics of RAS. The techniques of elastic and strength constant determining for anisotropic rocks are developed. Dependence of filtration characteristic of rock on stress-strain state is studied. The results which are of great practical importance in terms of developing methods of enhanced oil recovery and methods of ensuring stability of directional wells are presented.

Karyakin M.I., Mostipan G.O, Ustinov Yu.A. 285

Some results of stability and post-critical behavior of a circular membrane with a complex meridian profile

Brief description of the numerical-analytic algorithm for the analysis of equilibrium and stability of circular membrane with an arbitrary profile of the meridian and some results of numerical analysis of stability and post-critical behavior of a spherical dome with possible deviations from the ideal surface are presented.

Kerobyan A.V......290

The load transmission from the heterogeneous stringer to elastic half-plane or infinite plate in the presence of the shear

The problem of contact interaction is observed for the elastic half- plane or the infinite plate which of the length of the line $y = 0$ in the plane xOy (for the plate xOy -its average plane) are strengthened by infinite heterogeneous (piece-homogeneous) elastic stringer (overlay) which consists of three pieces with different elastic characteristics. It is supposed that contact interaction is realized through a thin layer of glue with other physico-mechanical and geometric characteristics. The stringer is deformed under the action of horizontal forces. Using generalized Fourier transforms the determinational problem of unknown contact stresses is reduced to the solution of second kind of Fredholm's integral equations within the different intervals, which in the region in the large change values of the ratio of the problem characteristics parameters, in the B space of Banach may be solved by the method of successive approximations. Possible particular cases are observed and the character of the change contact stresses and behavior are illustrated in different contact parts.

Kirakosyan G.N......295

On the optimal stabilization of the transient linear nonhomogeneous systems

In the research of the problem of optimal stabilization of a driven simple pendulum linear nonhomogeneous systems have been obtained, the study of which has a theoretical and applied importance. The problem of optimal stabilization of linear nonhomogeneous systems with constant coefficients has been solved in. In this paper the optimal stabilization problem of linear nonhomogeneous systems with variable coefficients has been considered. It was assumed that coefficients of the phase coordinates were continuous and bounded functions and the nonhomogeneous part of the system was continuous function, which tended to zero at infinity ($t \rightarrow \infty$). The problem has been solved by using Lyapunov-Bellman method. An optimal Lyapunov function has been obtained, the convergence of originated improper integrals have been shown, and optimal control actions have been constructed. For example, a problem of optimal stabilization of the equilibrium position of a simple pendulum has been investigated, when the suspension center could move in any direction in the plane of the oscillations of pendulum.

Kirakosyan R.M., Stepanyan S.P......299

On the stability of orthotropic cylindrical shell of linear-variable thickness taking into account the transversal shear displacement

In the framework of refined theory the linear problem of static stability of orthotropic cylindrical shell of linear-variable thickness is solved. The question of optimum is considered. It is shown that among the all linear-variable thickness shells of the similar volume under the hinged support of both edges the largest critical value of compression forces has the shell of constant thickness.

Klekchyan D.G.303

The influence of the injection solution on the viscosity properties of concrete

The results of laboratory tests of the viscosity of slag concrete from basalt crushed stone and sand lithoidal pumice are presented. Concretes obtained by two different technologies: traditional (vibrating) and a method of forcing of a solution.

Krasnoschekov A.A., Vasiliev P.V.308

Crack identification in a tube reinforced by a thin annular coat based on artificial neural networks

This paper proposes a method of constructing a simulation model of the pipe, reinforced by a thin annular plate, with further analysis and definition of internal defects based on the artificial neural networks. The influence of various physical and geometrical parameters of training neural networks was performed. Optimal structure of neural network and the type of training vectors was established.

- Kuvyrkin G.N., Savelyeva I.Yu..... 312**
Heat conductivity nonlocal medium
 The mathematical model of heat conduction nonlocal medium is proposed on the basis of the relations of rational thermodynamics, with using the environment model with internal state parameters. The model takes into account the mutual influence of processes at the macro and micro levels by means of integral relations.
- Kukudzhanov V.N. 317**
Modeling of the plastic deformation localization, strain softening and continuum fracture under dynamical shock loading
 The strain localization problems in softening solids under dynamic loading are considered. Two different models are accepted. One is elastoviscoplastic model with a strain softening diagram and another is the second order gradient elastoplastic model. By the asymptotic method of matching rapidly and slowly changing solutions for the partially differential equations with a small parameter, developed by the author, the close form solution for a one-dimensional dynamic localization problem was obtained for the both models. A bar loaded instantaneously by forcing both ends to move with a constant opposite velocity of the magnitude v_0 is considered. After the collision of generated elastic waves at the middle point of a bar the plastic strain is appeared. The plastic strains $\varepsilon < \varepsilon^*$ propagate along a bar and the strains $\varepsilon > \varepsilon^*$ concentrate at the middle point of the bar, ε^* is the strain related to the maximum stress. The zone of these large strains forms a band of strain localization with the width slowly growing in time. The solution describing the structure of the bands is obtained in an analytical form for both models. The profile of the elastoviscoplastic solution is monotone, while for the second gradient theory it is oscillating, but the effective width of the band for the both models is similar and is growing in time as $t^{1/2}$. Note, that the linear analysis predicts constant width of a localization band and the solution obtained for strain rate-insensitive elastoplastic material shows that localization takes place only at one point. It is shown that the exact solution obtained in in the framework of the Prandtl-Reiss physically incorrect and leads to inconsistent results.
- Lipatov I.I..... 321**
Some models of viscous gas flows
 The results of investigation of viscous-inviscid interaction processes described by the new mathematical models are presented.
- Lokoshchenko A.M. 325**
Creep and creep rupture of metals at variable stresses
 Results of application of kinetic conception are given at the description of a number of the features which were observed in experiments of creep and creep rupture of metals.
- Lokoshchenko A.M., Teraud W.V 329**
Photo method registration of localized high temperature deformation
 The proposed non-touch measuring method is able to measure the shape of the specimen under one-axis and complex stress study. It allows you to give information about some parameters of deformation state and to monitor the development of localized deformation in slowed section. The method is based on computer analysis of deformable specimen. Special preparation of the sample is not required. Through the viewing window at the time of testing is photographing the specimen. The resulting images are analyzed. The values of measured parameters are restored by the geometry of the specimen which taken into account axis-symmetry deformation process.

ОГЛАВЛЕНИЕ

НАГУШ ХАЧАТУРОВИЧ АРУТЮНЯН – К 100-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ	5
Мхитарян С.М. О научном наследии академика Н.Х. Арутюняна и развитии его исследований	18
Аветисян В.В. Об одном алгоритме группового поиска в прямоугольной области	28
Агабекян П.В. Контактная задача для упругой полубесконечной пластины с конечным и бесконечным стрингерами	33
Агаларян О.Б. К плоской задаче составного упругого клина при различных краевых условиях	37
Агаловян Л.А., Агаловян М.Л. О динамическом поведении литосферных плит земли на основе данных сейсмостанций и GPS систем	42
Агаян К.Л., Григорян Э.Х., Гулян К.Г. Дифракция сдвиговой плоской волны на крае полубесконечной трещины в составном упругом пространстве	47
Акопян В.Н., Амирджанян А.А. О передаче нагрузки от упругих включений к бесконечной вязкоупругой пластине с полубесконечным разрезом	52
Акопян В.Н., Даштоян Л.Л., Акопян Л.В. О напряжённом состоянии упругой плоскости с полубесконечным разрезом, перпендикулярно выходящим на частично оторванное от матрицы абсолютно жёсткое включение	57
Алваджян Ш. И. Асимптотическое обоснование математической модели микрополярных упругих ортотропных тонких балок	62
Александров В.М., Марк А.В. Стационарная контактная задача для вязкоупругого цилиндра	67
Альтенбах Х. Теория ползучести – от классических до некоторых современных моделей	71
Амирбекян А.Н. Об изгибе периодической системы балок на упругой полуплоскости	76
Аннин Б. Д., Остапенко В. В., Чесноков А. А. Моделирование плоского пластического течения материала с учётом сил инерции	81
Арутюнян А.Р., Арутюнян Р.А. Термодинамический критерий длительной прочности стареющей упруго-вязкой среды	86
Арутюнян Л.А. Плоские задачи составной плоскости с трещинами, закреплёнными на одном крае	90
Астафьев В.И., Ротерс П.В. Эллиптические функции в моделировании разработки нефтяных месторождений	95
Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н., Микилян М.А. Регулирование нелинейных вынужденных и параметрических колебаний идеально проводящей пластинки магнитным полем	99
Багдасарян Г.Е., Марухян С.А. Вынужденные поперечные колебания частично заполненной жидкостью цилиндрической оболочки под действием продольной гармонической силы	104
Багдоев А.Г. Кинематические нелинейные волновые подходы описания стохастических пространственных процессов в полупроводниках, движении транспорта и движении микропор в механике разрушения	109
Барышев А.А. Вынужденные колебания растущей цилиндрической оболочки	113
Белубекян М. В., Давтян А. А. Упругие волны в слой-полупространстве при условии скользящего контакта на плоскостях, ограничивающих слой	116
Белубекян М.В., Саноян Ю.Г. К задаче устойчивости составной пластины при её нагреве	121

Белубекян Э.В., Погосян А.Г., Аветисян Г.Р. Оптимизация прямоугольной пластинки кусочно-постоянной толщины из композиционного материала при заданном значении низшей частоты колебаний.....	126
Богданов А.Н., Диесперов В.Н., Жук В.И. Асимптотические модели неклассических трансзвуковых пограничных слоёв	131
Боев Н.В., Вдовин В.А., Зотов В.М. Теория и эксперимент в задаче многократного рассеяния ультразвуковых волн на пространственных дефектах.....	135
Бураго Н.Г., Журавлев А.Б., Никитин И.С. Усталостное разрушение элементов авиационных конструкций	139
Ватульян А.О. Обратные коэффициентные задачи в механике связанных полей	144
Гаврюшин С.С. Нелинейный анализ и синтез тонкостенных конструкций с предписанным законом упругого деформирования.....	148
Геворкян Г.З. Об устойчивости и изгибных колебаниях ортотропных пластин-полос переменной толщины с учётом поперечного сдвига и осевой силы	153
Геворкян Р.С., Асратян М.Г. Асимптотические решения смешанных краевых задач для оболочек из вязкоупругих материалов	157
Головин Н.Н., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Оценки эффективных характеристик композита, модифицированного фуллеренами	162
Голядкина А.А., Кириллова И.В., Коссович Л.Ю., Щучкина О.А. Моделирование гемодинамики коронарных артерий	167
Горячева И.Г., Антонов Ф.К., Анферов Г.М., Любичева А.Н. Моделирование влияния хрящевой прослойки на напряжённое состояние пястно-запястного сустава большого пальца	172
Григорян М.С. О контактном взаимодействии упругого полупространства или слоя с системой стрингеров при антиплоской деформации	177
Григорян Э.Ф. Изгиб несимметрично неоднородной по толщине пластинки в окрестности жёстко закреплённого края.....	182
Григорян Э.Х., Агаян К.Л., Джилавыян С.А. Дифракция сдвиговой плоской волны в упругих и электроупругих средах, допускающих распространение поверхностных волн.....	186
Гришко А. М. Дивергенция пластины при сверхзвуковом обтекании	191
Гулгазарян Г.Р., Миклашевич И.А. О свободных и интерфейсных колебаниях безмоментной цилиндрической оболочки переменной кривизны с жёстко защемлёнными торцами.....	196
Гулгазарян Л.Г. Собственные пространственные колебания ортотропных оболочек в зоне пограничного слоя при условиях первой краевой задачи	201
Давтян З.А., Гаспарян А.В. О кручении упруго-ползучего разновозрастного кусочно-однородного цилиндра конечной длины.....	206
Дадаян Т.Л., Григорян Д.Г. Влияние размера и местоположения отверстия в диафрагмах железобетонных зданий на их напряжённо-деформированное состояние	211
Даноян З.Н., Атоян Л.А., Саакян С.Л., Даноян Н.З. Электроупругие поверхностные волны Лява в слоистой пьезоэлектрической структуре при наличии электрического экрана.....	215
Дарбинян А.З. Задача термоупругости для бесконечной пластинки-полосы, усиленной периодической системой ребер.....	220
Дедков Д.В., Зайцев А.В., Ташкинов А.А. Коэффициенты концентрации напряжений в слое тканого композита с локальными технологическими дефектами.....	223
Джилавыян С. А., Хуршудян А. Ж. Оптимальное управление термоупругими напряжениями в упругом бесконечном слое	228
Есяян С.Г. Варианты реологического моделирования бетона как вязкоупругой среды.....	233

Журавлев А.Б., Карев В.И., Коваленко Ю.Ф., Сидорин Ю.В., Сиротин А.А., Устинов К.Б. О пластическом деформировании горных пород. Определение пластических характеристик по данным экспериментов на трёхосное нагружение	238
Зайцев А. В., Кутергин А. В. Аналитические решения задач об упругом равновесии тяжёлого горизонтального ортотропного цилиндрического тела	243
Зимин В.Н., Крылов А.В., Файзуллин Ф.Р., Чурилин С.А. Особенности моделирования динамики раскрытия трансформируемых конструкций.....	248
Индейцев Д.А., Полянский В.А., Семёнов Б.Н. Влияние циклического нагружения на диффузию водорода в металлах.....	253
Казанцев А.Г. Коррозионное растрескивание низколегированной стали при замедленном деформировании.....	258
Казарян К.Б., Наслян А.Г. Волны Флоке в упругом стержне с периодически распределёнными точечными массами.....	263
Калиджян Л.Р. Магнитоупругие волны в идеально проводящем слое в присутствии продольного магнитного поля	267
Карапетян К.А. Сопrotивляемость усадке бетона различных зон поперечного сечения массивов	272
Карапетян Л.Г. Возможность обеспечения существующих пристроек от опрокидывания и столкновения с основным зданием при сейсмическом воздействии	276
Карев В.И., Коваленко Ю.Ф. Исследование механических свойств горных пород на установке истинно трёхосного нагружения.....	280
Карякин М.И., Мостипан Г.О., Устинов Ю.А. Некоторые результаты исследования устойчивости и закритического поведения круглых мембран со сложным профилем меридиана.....	285
Керопян А.В. Передача нагрузки от неоднородной накладке к упругой полуплоскости или к бесконечной пластине при наличии сдвига.....	290
Киракосян Г.Н. Об оптимальной стабилизации нестационарных линейных неоднородных систем	295
Киракосян Р.М., Степанян С.П. Об устойчивости ортотропной цилиндрической оболочки линейно-переменной толщины при учёте поперечного сдвига.....	299
Клекчян Д.Г. Влияние метода нагнетания раствора на вязкостные свойства бетона.....	303
Краснощеков А.А., Васильев П.В. Идентификация трещины в трубе, усиленной тонкой кольцевой накладкой, на основе аппарата искусственных нейронных сетей	308
Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. О теплопроводности нелокальной среды	312
Кукуджанов В.Н. Моделирование локализации пластической деформации, разупрочнения и континуального разрушения при динамическом ударном нагружении.....	317
Липатов И.И. Некоторые модели динамики вязкого газа	321
Локощенко А.М. Ползучесть и длительная прочность металлов при переменных напряжениях	325
Локощенко А.М., Терауд В.В. Фотографический метод регистрации локализации высокотемпературной деформаций.....	329
CONTENTS AND ABSTRACTS	333