

**TRCM**  
 8-12 October 2012  
 Saint-Petersburg  
 Физматцентр имени  
 Ф.Я. Данилова



**TRCM 2012**  
 TOPICAL PROBLEMS OF CONTINUUM MECHANICS  
 АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ



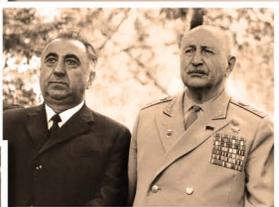
*Нагуш Арутюнян с ...  
 Nagush Arutyunyan with...*



*... выдающимся математиком, академиком  
 prominent mathematician, acad. S.N. Margulian*



*... выдающимся пианистом  
 greatest pianist Svyatoslav Richter, 1965*



*... Маршалом М.М. Баграмяном  
 полководца Азербайджана  
 Marshal M.M. Bagramyan  
 of Commander Andranik, Père Lachaise cemetery, Paris, 1970*



*... композиторами  
 composers Aram Khachaturian and Edvard Mirzoyan*

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ  
**АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ  
 МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ**  
 посвященный столетию  
 академика Нагуша Арутюняна

THE PROCEEDING OF  
 INTERNATIONAL CONFERENCE

**TOPICAL  
 PROBLEMS OF  
 CONTINUUM MECHANICS**

dedicated to centenary of  
 academician Nagush Arutyunyan

**2012**



Посвящается  
100-летию со дня рождения  
академика НАН Армении  
**Н.Х.АРУТЮНЯНА**



ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ  
ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

ՀՈԾ ՄԻՋԱՎԱՅՐԻ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԱՐԴԻ  
ՊՐՈՔԼԵՄՆԵՐԸ

ՀՀ ԳԱԱ ակադեմիկոս Ն.Խ.Հարությունյանի ծննդյան 100-ամյակին նվիրված  
միջազգային գիտաժողովի նյութեր

ՀԱՏՈՐ 2

ԵՐԵՎԱՆ – 2012

---

NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA  
INSTITUTE OF MECHANICS

**TOPICAL PROBLEMS OF CONTINUUM MECHANICS**

Proceedings of International Conference dedicated to the 100<sup>th</sup> Anniversary of  
Academician Nagush Kh. Arutyunyan

VOLUME 2

YEREVAN – 2012

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ  
ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ

**АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ  
СПЛОШНОЙ СРЕДЫ**

труды международной конференции, посвящённой 100-летию  
академика НАН Армении Н.Х.АРУТЮНЯНА  
08-12 октября 2012, Цахкадзор, Армения

ТОМ 2

ИЗДАТЕЛЬСТВО ЕГУАС  
ЕРЕВАН – 2012

**Министерство науки и образования Армении  
Национальный комитет по теоретической и прикладной механике Армении  
Российский национальный комитет по теоретической и прикладной механике  
Научный совет РАН по механике деформируемого твердого тела  
Институт механики НАН РА  
Институт проблем механики РАН  
Ереванский государственный университет  
Ереванский государственный инженерный университет  
Ереванский государственный университет архитектуры и строительства**

**Международный научный комитет**

Аветисян А.С., Агаловян Л.А., Агаян К.Л., Александров В.М., Альтенбах Г., Аннин Б.Д., Арутюнян Р.А., Асанян Д.Дж., Бабешко В.А., Багдасарян Г.Е., Багдоев А.Г., Баженов В.Г., Банцури Р.Д., Белубекян М.В., Болотник Н.Н., Буренин А.А., Ватульян А.О., Гдутос К., Гольдштейн Р.В., Горячева И.Г., Григоренко Я.М., Григорян Э.Х., Григорян С.С., Гринченко В.Т., Гузь А.Н., Гуидугли П.П., Гукасян А.А., Гупта Н., Даноян З.Н., Джаиани Дж., Жубер С., Зимин В.Н., Индейцев Д.А., Казарян К.Б., Калинин В.В., Канель Г.И., Каплунов Ю.Д., Карапетян К.А., Кашиати Ф., Киракосян Р.М., Кириллова И.В., Климов Д.М., Коссович Л.Ю., Кувыркин Г.Н., Кудиш И.И., Кукуджанов В.Н., Куликовский А.Г., Левин В.А., Липанов А.М., Липатов И.И., Локощенко А.М., Ломакин Е.В., Лурье С.А., Марзокка П., Матвеев В.П., Миннетян Л., Мовсисян Л.А., Мовчан А.А., Мруз З., Панин В.Е., Петров Ю.П., Полянин А.Д., Попов Г.Я., Радаев Ю.Н., Саркисян В.С., Саркисян С.В., Саркисян С.О., Сейранян А.П., Сильников М.В., Сосновский Л.А., Суржиков С.Т., Тамуж В.П., Токмаджян О.В., Федотов И., Филиппов В.В., Фомин В.М., Черноусько Ф.Л., Черный Г.Г., Шифрин Е.И.

**Организационный комитет**

*Сопредседатели:* академик НАН РА С.А.Амбарцумян, академик РАН Н.Ф.Морозов,  
чл.-корр. НАН РА С.М.Мхитарян, д.ф.-м.н. А.В.Манжиров, д.ф.-м.н. В.Н.Акопян  
*Зам. председателя:* д.ф.-м.н. А.В.Саакян, д.ф.-м.н. М.А.Сумбатьян  
*Учёные секретари:* к.ф.-м.н. Л.Л.Даштоян, к.ф.-м.н. Д.А.Паршин

Ответственный редактор: д.ф.-м.н. В.Н.Акопян  
Технический редактор: к.ф.-м.н. Г.З.Геворкян  
Дизайн обложки: к.ф.-м.н. Д.М.Минасян  
Редакторы: Ж.А.Авдалян и С.С.Овсебян

В сборник включены доклады, представленные на международную конференцию «Актуальные проблемы механики сплошной среды», посвящённой 100-летию со дня рождения академика НАН РА Нагуша Хачатуровича Арутюняна.

## РАЗВИТИЕ ИДЕЙ Н.Х. АРУТЮНЯНА В СОВРЕМЕННОЙ МЕХАНИКЕ

Манжиров А. В.

Обсуждается влияние идей академика НАН РА Н.Х. Арутюняна на современную механику и их развитие в науке сегодняшнего дня. Подробно обсуждаются три основных направления его научной деятельности. Это теория вязкоупругости или ползучести, механика контактных взаимодействий и механика растущих тел. Развитие теории вязкоупругости тесно связано с идеями старения и неоднородного старения. Новые направления развития механики контактных взаимодействий обусловлены концепциями множественного контакта тел и дискретного наращивания. Механика растущих тел развивается на основании современной геометрии и использует понятия из физики и химии. Эти направления имеют разнообразные пересечения и порождают новые задачи, актуальные как с точки зрения фундаментальной науки, так и с точки зрения разнообразных приложений. Развитие каждого направления иллюстрируется постановкой новых задач, демонстрацией эффективных методов их решения и формулировкой новых механических эффектов.

23 ноября 2012 года исполняется 100 лет со дня рождения выдающегося учёного-механика, организатора науки и высшего образования, видного государственного и общественного деятеля, одного из основателей научной школы механики в Армении, академика АН АрмССР/НАН РА Нагуша Хачатуровича Арутюняна.

Н.Х. Арутюнян, потомственный армянский интеллигент, получил блестящее образование в Москве и Ленинграде, где под влиянием крупнейших учёных-механиков того времени – Б.Г. Галеркина, А.И. Лурье, Е.Л. Николаи – начала складываться его научная судьба и раскрываться заложенный в нем огромный творческий потенциал.

Он защитил кандидатскую диссертацию в 1941 г. всего за несколько дней до начала Великой Отечественной войны, которую прошёл от первого до последнего дня.

Его первые работы начала 40-х годов были посвящены кручению и изгибу упругих призматических стержней полигонального поперечного сечения. Им был предложен метод решения такого круга задач, основанный на сведении их к бесконечным системам алгебраических уравнений. Полученные в этом направлении научные результаты были обобщены и подытожены в энциклопедической монографии Н.Х. Арутюняна и Б.Л. Абрамяна "Кручение упругих тел" (1963 г.).

Свой первый научный вклад мирового уровня Н.Х. Арутюнян внес в механику деформируемого твёрдого тела, разработав совместно с Г.Н. Масловым в конце 40-х годов теорию ползучести бетона. Изучив результаты экспериментов по нагружению образцов из бетона, они установили, что в вопросах прочности, долговечности, устойчивости и разрушения бетонных инженерных сооружений необходимо учитывать свойства, обусловленные ползучестью и зависимостью физико-механических свойств материалов от времени, т.е. старением. Как показали дальнейшие экспериментальные исследования целого ряда учёных, эти свойства оказались присущи не только бетону, но и полимерам, пластмассам, композитам, грунтам, дереву и многим другим материалам. Плодотворным итогом работы Н.Х. Арутюняна в этой области стала новая теория ползучести стареющих тел, которая также вошла в науку под названием теории ползучести Маслова–Арутюняна. В 1949 г. в Москве в Институте механики АН СССР он с блеском защитил докторскую диссертацию на соискание учёной степени доктора технических наук, в которой была изложена новая теория ползучести.

Фундаментальные результаты Н.Х. Арутюняна по теории ползучести стареющих материалов (прежде всего бетона) были обобщены в его монографии "Некоторые вопросы теории ползучести" (1952 г.), которая стала первой книгой по этой тематике не только в СССР, но и в мире. Эта книга в течение десятилетий остается настольной книгой для многих поколений научных работников и инженеров-исследователей. Она переведена и опубликована в Англии, Франции, Китае, а отдельные ее главы — в Германии, Польше и Румынии.

Хорошо известны работы Н.Х. Арутюняна в области установившейся нелинейной ползучести и пластичности со степенным упрочнением. Предложенный им в 1959 г. принцип суперпозиции обобщённых перемещений впервые позволил получить интегральные уравнения, приближённо описывающие сложные нелинейные контактные задачи, а решения этих уравнений в замкнутом виде стали первыми приближёнными решениями столь сложных задач механики деформируемого твёрдого тела. Принцип суперпозиции обобщённых перемещений

широко применялся и применяется в настоящее время как один из эффективных способов исследования нелинейных задач.

С начала 60-х до середины 70-х гг. Н.Х. Арутюнян занимал высокие государственные посты. Тем не менее, он продолжал заниматься наукой, уделяя основное внимание контактным задачам теории упругости и ползучести. Увлечённость исследованиями в области механики контактных взаимодействий Н.Х. Арутюнян сохранил на всю жизнь [1-30]. Основные идеи, изложенные в указанных работах, развивают его ученики. Это идеи множественного контакта, множественного неодновременного контакта, задачи для неоднородно-стареющих тел, задачи дискретного наращивания и др. В качестве примера можно привести работы [31-45].

В середине 70-х Н.Х. Арутюнян существенно обобщил и развил свою теорию ползучести стареющих тел, введя понятие возрастной неоднородности, которая принципиальным образом отличается от конструкционной неоднородности. Такая неоднородность возникает вследствие постепенного возведения или изготовления зданий, сооружений, деталей машин и других деформируемых тел. Основные положения этой теории изложены в монографии Н.Х. Арутюняна и В.Б. Колмановского "Теория ползучести неоднородных тел" (1983 г.). В книге Н.Х. Арутюняна и А.А.Зевина "Расчёт строительных конструкций с учётом ползучести" (1988 г.) эта теория была использована для решения прикладных задач. Модель вязкоупругого неоднородно-стареющего тела активно использовалась и далее при исследовании контактных задач, список которых обсуждался выше, и при исследовании процессов наращивания деформируемых тел (к списку соответствующих работ обратимся далее).

Представления, положенные Н.Х. Арутюняном в основу теории неоднородно-стареющих тел, естественным образом привели его к мысли о необходимости развития математической модели твёрдого деформируемого тела, которое растёт вследствие притока новых материальных элементов к его поверхности. В конце 70-х – начале 80-х им были развиты основы нового научного направления — механики растущих тел, которая позволяет эффективно моделировать широкий круг инженерных задач, технологических процессов и природных явлений. Основные уравнения и граничные условия краевых задач механики растущих тел, так же как и механические эффекты, присущие таким телам, принципиальным образом отличаются от классических. Их изучение является и теперь чрезвычайно важной проблемой, обещающей большие перспективы как с точки зрения формулировки фундаментальных результатов, так и с точки зрения использования в разнообразных приложениях.

Полученные Н.Х. Арутюняном и его учениками в этой области научные результаты представлены в многочисленных научных трудах [46-66] и в следующих монографиях: Н.Х. Арутюнян, А.Д. Дроздов, В.Э. Наумов "Механика растущих вязкоупругопластических тел" (1987 г.); Н.Х. Арутюнян, А.В. Манжиров "Контактные задачи теории ползучести" (1990, 1999 г.г.); Н.Х. Арутюнян, А.В. Манжиров, В.Э. Наумов "Контактные задачи механики растущих тел" (1991 г.). Механика растущих тел бурно развивается в настоящее время. Из основных современных работ в этой области отметим [66-120].

Заслуги Н.Х. Арутюняна перед отечеством и государством отмечены орденом Красной звезды, орденами Отечественной войны I и II степени, орденом Ленина, орденом Октябрьской Революции, орденом Трудового Красного Знамени и медалями. Его труды навсегда вошли в сокровищницу мировой цивилизации, а его имя стало в один ряд с именами выдающихся деятелей науки XX века - достойный итог долгой и яркой жизни замечательного учёного, гражданина и человека.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н.Х. Плоская контактная задача теории пластичности со степенным упрочнением материала // Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-мат. наук. 1959. Т.12. №2.
2. Арутюнян Н.Х. Плоская контактная задача теории ползучести // ПММ. Т.23. Вып.5.
3. Арутюнян Н.Х., Манукян М.М. О вдавливании жёсткого клина в полуплоскость в условиях установившейся ползучести // ПММ. 1962. Т.26. Вып.1.

4. Арутюнян Н.Х. Краевая задача теории ползучести для наращиваемого тела. //ПММ. 1977. Т.41. Вып.5. С.783-789.
5. Арутюнян Н.Х., Манукян М.М. Контактная задача теории ползучести с учётом сил трения // ПММ. 1963. Т.27. Вып.5
6. Абрамян Б.Л., Арутюнян Н.Х., Баблоян А.А. О сжатии упругой сферы с жёсткой кольцевой обоймой // Изв.АН АрмССР. Сер. физ.-мат. наук. 1964. Т.17. №3.
7. Абрамян Б.Л., Арутюнян Н.Х., Баблоян А.А. О двух контактных задачах для упругой сферы // ПММ.1964. Т.28. Вып.4.
8. Абрамян Б.Л., Арутюнян Н.Х.. О вдавливании жёсткого штампа в упругую сферу //ПММ. Т.28. Вып.6.
9. Арутюнян Н.Х., Баблоян А.А. О двух динамических контактных задачах для упругой сферы // ПММ. 1965. Т.29. Вып.3.
10. Абрамян Б.Л., Арутюнян Н.Х., Баблоян А.А. О симметричном давлении круглого штампа на упругое полупространство при наличии сцепления // ПММ. 1966. Т.30. Вып.1.
11. Абрамян Б.Л., Арутюнян Н.Х., Баблоян А.А. Об одной контактной задаче кручения вытянутого эллипсоида вращения // Изв.АН АрмССР. Механика. 1966. Т.19. №4.
12. Арутюнян Н.Х., Баблоян А.А. О контактных задачах для полупространства с включением // ПММ. 1966. Т.30. Вып.6.
13. Абрамян Б.Л., Арутюнян Н.Х. О некоторых контактных задачах для составного полупространства // ПММ. 1967. Т.1. Вып.6 .
14. Арутюнян Н.Х. Контактные задачи теории ползучести // ПММ. 1967. Т.31. Вып.5.
15. Арутюнян Н.Х. Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением // ПММ. 1968. Т.32. Вып.4.
16. Абрамян Б.Л., Арутюнян Н.Х. Некоторые осесимметричные контактные задачи для полупространства и упругого слоя с вертикальным цилиндрическим отверстием // Изв. АН АрмССР. Механика. 1969. Т.22. №3.
17. Арутюнян Н.Х., Мхитарян С.М. Периодическая контактная задача для полуплоскости с упругими накладками // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 5.
18. Арутюнян Н.Х., Мхитарян С.М. Некоторые контактные задачи для полупространства, усиленного упругими накладками // ПММ. 1972. Т.36. Вып.5.
19. Арутюнян Н.Х., Мхитарян С.М. Некоторые контактные задачи для полуплоскости с частично скреплёнными упругими накладками // Изв. АН АрмССР. Механика. 1972 . Т.25. №2.
20. Арутюнян Н.Х., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с упругими креплениями // XIII Межд. Конгр. по теор. и прикл. мех. М.: Наука, 1972.
21. Арутюнян Н.Х., Мхитарян С.М. Контактная задача для упругого бесконечного цилиндра, усиленного бесконечной цилиндрической оболочкой // Избр. проблемы прикл. мех. М., 1974.
22. Арутюнян Н.Х. К контактной задаче о двух полубесконечных пластинках, соединённых полубесконечной упругой накладкой // Мех. деформ. тел. и конструкций. М.: Машиностроение, 1975.
23. Арутюнян Н.Х., Мхитарян С.М. Контактная задача о вдавливании штампа в упругую полуплоскость с тонким усиливающим покрытием // ПММ. 1975. Т.39. Вып.5.
24. Арутюнян Н.Х., Наумов В.Э. О контактном взаимодействии наращиваемой системы вязкоупругих накладок с однородной полуплоскостью // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. №2.
25. Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В. Контактные задачи механики растущих тел // ПММ. 1989. Т.53. Вып.1.

26. Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В. Контактные задачи теории ползучести. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1990; Изд-во НАН РА, 1999.
27. Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В., Наумов В.Э. Контактные задачи механики растущих тел. М.: Наука, 1991.
28. Арутюнян Н.Х., Антипов Ю.А. Контактные задачи теории упругости при наличии трения и сцепления // ПММ. 1991. Т.55. Вып.6.
29. Арутюнян Н.Х., Антипов Ю.А. Контактные задачи теории упругости для клиновидных областей в условиях трения и сцепления // ПММ. 1992. Т.56. Вып.5.
30. Арутюнян Н.Х., Антипов Ю.А. Контактные задачи для упругого слоя с накладками при наличии трения и сцепления // ПММ. 1993. Т.57. Вып.1.
31. Арутюнян Н.Х., Антипов Ю.А. О взаимодействии полубесконечного стрингера с полуплоскостью и полосой при наличии трения и сцепления // Изв. РАН. МГТ. 1993. №4.
32. Манжиров А.В. Контактные задачи для неоднородных стареющих вязкоупругих тел // Механика контактных взаимодействий. — М.: Физматлит, 2001. С.549–565.
33. Манжиров А.В. Износ поверхностно неоднородного шероховатого упругого слоя кольцевым штампом // Труды III Всероссийской конференции по теории упругости с международным участием, 13–16 октября 2003 г., г. Ростов-на-Дону, г. Азов, Россия. — Ростов-на-Дону: «Новая книга», 2004.
34. Манжиров А.В. Смешанные интегральные уравнения контактной механики и трибологии // Смешанные задачи механики деформируемого тела: Материалы V Рос. конф. с междунар. участием / Под ред. акад. Н.Ф. Морозова. — Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2005
35. Казаков К.Е. Об износе поверхностно неоднородного основания // Смешанные задачи механики деформируемого тела: Материалы V Рос. конф. с междунар. участием / Под ред. акад. Н.Ф. Морозова. — Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2005. С.171–174.
36. Казаков К.Е. Осесимметричная контактная задача для вязкоупругого основания с тонким неоднородным покрытием // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды IX Международной конференции, посвященной 85-летию со дня рождения академика РАН И.И. Воровича, г. Ростов-на-Дону, 11–15 октября 2005 г. Т. 1. — Ростов-на-Дону: Издательство ООО «ЦВВР», 2005. С. 93–97.
37. Манжиров А.В., Казаков К.Е. Плоские и осесимметричные контактные задачи для вязкоупругих стареющих тел с поверхностно неоднородными покрытиями // Проблемы механики деформируемых тел и горных пород. Сборник статей к 75-летию со дня рождения Е.И. Шемякина. — М.: Физматлит, 2006.
38. Манжиров А.В., Казаков К.Е. Износ вязкоупругого основания с неоднородным покрытием // Сборник трудов международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы трибологии», июнь 2007 г., в 2-х томах. Том 1. — М: Машиностроение, 2007 г.
39. Казаков К.Е. Осесимметричная контактная задача о склейке // Актуальные проблемы механики сплошной среды. Труды Международной конференции, посвященной 95-летию академика НАН Армении Н.Х. Арутюняна. 25–28 сентября 2007, Цахкадзор, Армения. — Ереван: Ереванский гос. ун-т архитектуры и строительства, 2007.
40. Казаков К.Е. Контактные задачи для тел с покрытиями // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2007. №4(54).
41. Казаков К.Е., Манжиров А.В. О конформном контакте слоистых оснований и штампов // Изв. РАН. МГТ. 2008. № 3.
42. Манжиров А.В., Казаков К.Е. Проекционный метод решения смешанных интегральных уравнений механики и его приложения к контактным задачам для тел с неоднородными

- покрытиями // Актуальные проблемы механики: механика деформируемого твёрдого тела: сб. трудов / отв. ред. Р.В. Гольдштейн; Ин-т проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН. — М.: Наука, 2009.
43. Казаков К.Е. Задачи контактного взаимодействия для вязкоупругих тел с покрытиями // Механика 2009: Труды международной школы-конференции молодых ученых. — Ереван: Изд-во ЕГУАС, 2009.
  44. Манжиров А.В., Казаков К.Е. Контактная задача с износом для упругого основания с неоднородным покрытием. // Трибофатика = Tribo-fatigue: труды VI Междунар. симп. по трибофатике МСТФ 2010. Минск, 25 окт. – 1 нояб., 2010 г. В 2 ч. Ч. 1 / редкол.: М.А. Журавков (пред.) [и др.]. — Минск: БГУ, 2010.
  45. Казаков К.Е., Федотов И.А. Контактная задача для оснований с покрытиями и штампов со сложной формой основания. Современные проблемы механики сплошной среды. Труды XIV Международной конференции, гг. Ростов-на-Дону, Азов, 19–24 июня 2010 г. Т. 2. — Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2010.
  46. Казаков К.Е. О контакте тел с покрытиями и штампов, имеющих сложный профиль основания // Актуальные проблемы механики сплошной среды: Труды II международной конференции. 4–8 октября, Дилижан, Армения. Том 1. — Ереван: ЕГУАС, 2010.
  47. Арутюнян Н.Х., Метлов В.В. Некоторые задачи теории ползучести наращиваемых тел, подверженных старению // Изв. АН АрмССР. Механика. 1982. Т.75. №2.
  48. Арутюнян Н.Х., Метлов В.В. Некоторые задачи теории ползучести неоднородно-стареющих тел с изменяющимися границами // Прикл. матем. и механика. 1982. №5.
  49. Арутюнян Н.Х., Метлов В.В. Некоторые задачи теории ползучести для наращиваемых тел, подверженных старению // Изв. АН АрмССР. Механика. 1982. Т. 35. №3.
  50. Арутюнян Н.Х., Метлов В.В. Нелинейные задачи теории ползучести наращиваемых тел, подверженных старению. //Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 4.
  51. Арутюнян Н.Х., Дроздов А.Д. Механика растущих вязкоупругих тел, подверженных старению, при конечных деформациях // Докл. АН СССР. 1984. Т.276. №4.
  52. Арутюнян Н.Х., Наумов В.Э. Об одном механизме формообразования растущих вязкоупругих тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. №1.
  53. Арутюнян Н.Х., Наумов В.Э. Краевая задача теории вязкоупругопластичности для растущего тела, подверженного старению // ПММ. 1984. Т.48. Вып. 1.
  54. Арутюнян Н.Х., Дроздов А.Д. Нарращивание стареющих вязкоупругих тел в условиях фазового перехода // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. №6.
  55. Арутюнян Н.Х., Дроздов А.Д. Нарращивание стареющих вязкоупругих тел в условиях фазового перехода // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. №6.
  56. Арутюнян Н.Х., Дроздов А.Д. О фазовых переходах в упругих и вязкоупругих телах // Механика композитных материалов. 1986. №1.
  57. Арутюнян Н.Х., Геогджаев В.О., Наумов В.Э. Задачи механики растущих вязкоупругопластических тел в условиях старения и разгрузки // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. №4.
  58. Арутюнян Н.Х. Фундаментальные решения задач для растущего тела в форме четверть-плоскости // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. №2.
  59. Арутюнян Н.Х., Григорян С.С., Наумов В.Э. Механическая модель растущей ледяной сосульки // Пластич. и разруш. твёрд. тела. М.: 1988.
  60. Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В. Контактные задачи механики растущих тел ПММ. 1989. Т.53. Вып. 1.
  61. Арутюнян Н.Х., Наумов В.Э., Радаев Ю.Н. Математическая модель динамически наращиваемого деформируемого тела. Ч. 1. Кинематика и меры деформации растущего тела. Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 6.

62. Арутюнян Н.Х., Наумов В.Э., Радаев Ю.Н. Математическая модель динамически наращиваемого деформируемого тела. Ч.2. Эволюционная граничная задача теории растущих тел. //Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 1.
63. Манжиров А.В. О кручении растущего цилиндра жёстким штампом. //ПММ. 1990. Т.54. Вып. 5.
64. Манжиров А.В., Черныш В.А. Задача об усилении заглубленной арочной конструкции методом наращивания. //Изв. РАН. МТТ. 1992. №5.
65. Арутюнян Н.Х., Наумов В.Э. Некоторые вопросы теории наращиваемых деформируемых тел // Изв. АН. МТТ. 1993. №3.
66. Манжиров А.В. Общая безынерционная начально-краевая задача для кусочно-непрерывно наращиваемого вязкоупругого стареющего тела. ПММ. 1995. Т.59. Вып. 5.
67. Манжиров А.В. Контактные задачи механики наращиваемых тел. /В кн.: Механика контактных взаимодействий. Под ред. И.И. Воровича и В.М. Александрова. М.: Физматлит, 2001.
68. Манжиров А.В., Михин М.Н. Плоская задача для растущего тела. /В кн.: Современные проблемы механики сплошной среды. Труды VI международной конференции, г. Ростов-на-Дону, 19–23 июня 2000 г. Том 2. Ростов-на-Дону: Изд-во СКНЦ ВШ, 2001.
69. Манжиров А.В., Михин М.Н. О кручении наращиваемого эллиптического бруса. /В кн.: Проблемы механики деформируемых тел. Ереван: Изд-во "Гитутюн" НАН РА, 2003.
70. Манжиров А.В., Михин М.Н. Методы теории функций комплексного переменного, в механике растущих тел. //Вестник СамГУ. Естественная серия. 2004. № 4(34).
71. Манжиров А.В., Михин М.Н. О кручении растущих тел. /В кн.: Современные проблемы механики сплошной среды. Тр. IX Международной конференции, посвящённой 85-летию со дня рождения академика РАН И.И. Воровича, г. Ростов-на-Дону, 11–15 октября 2005 г. Ростов-на-Дону: Изд-во ООО "ЦВВР", 2005.
72. Манжиров А.В., Паршин Д.А. Наращивание вязкоупругого шара в центрально-симметричном силовом поле. //Изв. РАН. МТТ. 2006. № 1.
73. Манжиров А.В., Паршин Д.А. Моделирование процессов наращивания цилиндрических тел на вращающейся оправке с учётом действия центробежных сил. //Изв. РАН. МТТ. 2006. №6.
74. Manzhirov A.V., Parshin A.D. Accretion of solids under mass forces. In: Indo-Russian workshop "Problems in nonlinear mechanics of solids with large deformation". New Delhi: IIT Delhi, 2006.
75. Манжиров А.В., Паршин Д.А. Моделирование процесса деформирования наращиваемых конических тел. //Вестник СамГУ. Естественная серия. 2007. № 4 (54).
76. Михин М.Н. Наращивание пластины, ослабленной эллиптическим отверстием. Новые информационные технологии. Сборник трудов VI Всероссийской научно-технической конференции, Москва, 23-24 апреля 2003 г. Т.1. Под ред. А.П. Хныкана. М.: МГАПИ, 2003.
77. Паршин Д.А. О контакте массивной наращиваемой арки с жёстким основанием. /В кн.: Смешанные задачи механики деформируемого тела. Материалы V Российской конференции с международным участием. Саратов, 23-25 августа 2005 г. Под ред. акад. Н.Ф. Морозова. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005.
78. Паршин Д.А. Наращивание гравитирующего упругого шара. /В кн.: Современные проблемы механики сплошной среды. Труды IX Международной конференции, посвящённой 85-летию со дня рождения акад. И.И. Воровича. Ростов-на-Дону, 11-15 октября 2005 г. Ростов-на-Дону: Изд-во ООО <<ЦВВР>>, 2005. Т. 1.
79. Паршин Д.А. Наращивание массивных деформируемых тел. /В кн.: XXXII Гагаринские чтения. Научные труды Международной молодёжной научной конференции в 8 томах. Москва, 4-8 апреля 2006 г. М.: <<МАТИ>> - РГТУ им. К.Э. Циолковского, 2006. Т.1.
80. Паршин Д.А. Деформирование наращиваемых тел под действием массовых сил: Дис. канд. физ.-мат. наук. М.: Институт проблем механики РАН, 2007.
81. Михин М.Н. Кручение растущей призмы. Зимняя школа по механике сплошных сред (пятнадцатая). Сборник статей. В 3-х частях. Часть 3. Екатеринбург: УрО РАН, 2007.

82. Manzhairov A.V., Parshin D.A. Raising of a semi-circular vault // Prace IPPT – IFTR Reports. 2008. Vol. 2.
83. Manzhairov A.V., Kazakov K.E. Conformal contact between foundations and punches // Topical Problems in Solid Mechanics / Ed. by Gupta N.K., Manzhairov A.V. – New Delhi: Elite Publishing, 2008.
84. Manzhairov A.V., Parshin D.A. Erection of a heavy semicircular arch structure // Topical Problems in Solid Mechanics / Ed. by Gupta N.K., Manzhairov A.V. – New Delhi: Elite Publishing, 2008.
85. Kazakov K.E. Modeling of contact interaction for solids with inhomogeneous coatings // J. Phys.: Conf. Ser. 2009. Vol. 181. 012013.
86. Казаков К.Е. Задачи контактного взаимодействия для вязкоупругих тел с покрытиями // Механика 2009: Труды международной школы-конференции молодых учёных. Ереван: Изд-во ЕГУАС, 2009. Лычев С.А. Теоретическое и экспериментальное определение прогибов растущих пластин // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды XIII Междунар. конф. Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2009. Т.1.
87. Манжиров А.В. Механика наращиваемых тел: новый подход // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды XIII Междунар. конф. Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2009. Т.1.
88. Manzhairov A.V., Lychev S.A. Mathematical modeling of growth processes in nature and engineering: A variational approach // J. Phys.: Conf. Ser. 2009. Vol. 181. 012018.
89. Parshin D.A. Raising of a heavy semi-circular vault on a rigid centering // J. Phys.: Conf. Ser. 2009. Vol. 181. 012058.
90. Паршин Д.А. Моделирование процесса деформирования под действием сил тяжести стареющего вязкоупругого полуциркульного свода, возводимого на жёсткой опалубке // Механика -2009: Труды международной школы-конференции молодых учёных. Ереван: Изд-во ЕГУАС, 2009.
91. Лычев С.А. Связанная динамическая задача для конечного цилиндра // Вестник Самарского гос.университета. Естественнонаучная серия. 2003. 4(30).
92. Манжиров А.В., Паршин Д.А. Смежные задачи механики наращиваемых тел и геомеханики // Неклассические задачи геомеханики. Труды Всероссийской объединённой научной сессии Научных советов РАН по механике деформируемого твёрдого тела и по проблемам горных наук. Якутск, 16–20 июня 2008 г. / Отв. ред. С.М. Ткач. Якутск: Изд-во ЯНЦ СО РАН, 2008.
93. Манжиров А.В., Паршин Д.А. О новых результатах в классических проблемах гео- и горных наук // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды XII Международной конференции. Ростов-на-Дону, 1–5 декабря 2008 г. Т.1. Ростов-на-Дону: Изд-во ООО «ЦВВР», 2008.
94. Манжиров А.В., Паршин Д.А. Возведение тяжёлого полуциркульного свода // Актуальные проблемы механики: механика деформируемого твёрдого тела: Сб. трудов Ин-та проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН / Отв. ред. Р.В. Гольдштейн. М.: Наука, 2009.
95. Lychev S.A., Manzhairov A.V. Finite deformations of accreted solids // Proceedings of XXXVIII Summer School-Conference APM2010. St. Petersburg, 2010.
96. Лычев С.А. Краевые задачи механики растущих тел // Международная конференция «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике», посвященная 110-летию академика М.А. Лаврентьева. 23–27 августа 2010 г. Тезисы докладов. — Новосибирск: Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, 2010.
97. Lychev S.A. О Finite deformations of accreted elastic globe // Актуальные проблемы механики сплошной среды: Труды II международной конференции. 4–8 октября, Дилижан, Армения. Том 1. — Ер.: ЕГУАС, 2010. 364 с.
98. Манжиров А.В., Лычев С.А. Геометрические аспекты математической теории растущих тел // Асимптотические методы и математическая физика. Конференция. Тезисы докладов. Москва, 12–14 мая 2010. — М.: ИПМех РАН, 2010.
99. Манжиров А.В., Лычев С.А. Вариационные принципы механики растущих термоупругих тел // Всероссийская конференция «Новые математические модели механики сплошных

- сред: построение и изучение», приуроченная к 90-летию академика Л.В. Овсянникова. Тезисы докладов. Новосибирск, 23–28 апреля 2010 г.
100. Манжиров А.В., Лычев С. А. Модели растущих объектов в биомеханике // X Всероссийская конференция по биомеханике «Биомеханика 2010». Тезисы докладов. Саратов, 16–22 мая 2010. Саратов: Изд-во СГУ, 2010.
  101. Манжиров А.В. Математическая теория растущих тел. Конечные деформации // Современные проблемы механики сплошной среды. Тезисы докладов XIV международной конференции, г. Ростов-на-Дону, Азов, 19–24 июня 2010 г. — Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2010. 90 с.
  102. Манжиров А.В. Математическая теория растущих тел. Конечные деформации // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды XIV Международной конференции, г. Ростов-на-Дону, Азов, 19–24 июня 2010 г. Т. 1. — Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2010.
  103. Manzhirov A.V., Lychev S.A. Finite deformations of accreted solids // Advanced Problems in Mechanics: XXXVIII Summer School. Book of Abstracts. — СПб.: ИПМ, 2010.
  104. Manzhirov A.V., Lychev S.A. Finite deformations of accreted solids // Proceedings of XXXVIII Summer School-Conference «Advanced Problems in Mechanics (APM) 2010». St. Petersburg (Repino), July 1–5, 2010. — СПб.: ИПМ, 2010.
  105. Манжиров А.В. Основы математической теории растущих тел. Международная конференция «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике», посвящённая 110-летию академика М.А. Лаврентьева. 23–27 августа 2010 г. Тезисы докладов. — Новосибирск: Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, 2010.
  106. Manzhirov A.V., Lycheva T.N. Bending of accreted solids // Book of Abstracts of the 37th Solid Mechanics Conference. Warsaw, Poland, September 6–10, 2010. — Warsaw: IPPT, 2010.
  107. Manzhirov A.V. New results in mechanics of growing solids // Актуальные проблемы механики сплошной среды: Труды II международной конференции. 4–8 октября, Дилижан, Армения. Том 2. — Ер.: ЕГУАС, 2010. 368 с.
  108. Паршин Д.А. Исследование напряжённо-деформированного состояния кругового свода, возводимого с использованием опалубки // XXXVI Гагаринские чтения. Тезисы докладов секции № 3 «Механика и моделирование материалов и технологий» Международной молодёжной научной конференции, Москва, 6–10 апреля 2010 г. — М.: МАТИ, 2010.
  109. Parshin D.A. The stress-strain state of a cylindrical vault built by using a centering // Advanced Problems in Mechanics: XXXVIII Int. Summer School. Proceedings.
  110. Parshin D.A. A study of formation process of the stress-strain state of an accreted elastic semi-spherical mass // Book of Abstracts of the 37th Solid Mechanics Conference. Warsaw, Poland, September 6–10, 2010. — Warsaw: IPPT, 2010.
  111. Паршин Д.А. Моделирование процесса наращивания радиально-неоднородного упругого шарового тела в поле сил собственной гравитации // Актуальные проблемы механики сплошной среды: Труды II международной конференции. 4–8 октября, Дилижан, Армения. Том 2. — Ереван: ЕГУАС, 2010. 368 с.
  112. Manzhirov A.V., Lychev S.A. Residual Stresses in Growing Bodies. In “Topical Problems in Solid and Fluid Mechanics.” Eds A.V. Manzhirov, N.K. Gupta, D.A. Indeitsev. Delhi: Elit Publ. House Pvt Ltd. 2011.
  113. Manzhirov A.V., Lychev S.A. On the Equilibrium of Accreted Plates. In “Topical Problems in Solid and Fluid Mechanics.” Eds A.V. Manzhirov, N.K. Gupta, D.A. Indeitsev. Delhi: Elit Publ. House Pvt Ltd. 2011.
  114. Кузнецов С.И., Манжиров А.В., Федотов И. Задача теплопроводности для растущего шара // Изв. РАН. МТТ. 2011. №6.
  115. Левитин А.Л. Вынужденные колебания растущих полигональных пластин // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (5).
  116. Лычев С.А., Лычева Т.Н., Манжиров А.В. Нестационарные колебания растущей круглой пластины // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 2.
  117. Лычев С.А. Деформирование растущих упругих пластин // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (4).
  118. Лычев С.А. Универсальные деформации растущих тел // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 6.

119. Манжиров А.В. Математическая теория растущих тел: уравнения, задачи, приложения // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (4).
120. Манжиров А.В., Лычев С. А. Математическая теория растущих тел при конечных деформациях // Докл. РАН. 2012. Т.443. № 4.
121. Manzhirou A.V. Advances in mechanics of growing solids // Proceedings of XXIII ICTAM. 19-24 August, Beijing, China. Beijing, 2012.

**Сведения об авторе:**

**Манжиров Александр Владимирович** – заведующий лабораторией моделирования в механике деформируемого твёрдого тела, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН; заведующий филиалом кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана в ИПМех РАН; профессор кафедры высшей математики Московского государственного университета приборостроения и информатики, +74954344138

**E-mail:** [manzh@inbox.ru](mailto:manzh@inbox.ru)

# НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ РАСТУЩЕГО ШАРА

Манжиров А.В., Лычев С.А., Федотов И.А., Юбер С.В.

Работа посвящена исследованию эволюции температурного поля в растущем шаре. Определяется закон движения растущей поверхности, при котором решение начально-краевой задачи теплопроводности может быть представлено в замкнутом виде. Строится спектр линейного дифференциального оператора, порождаемого задачей.

**1. Введение.** Некоторые природные явления и технологические процессы, такие как кристаллизация, электролитическое осаждение, лазерное напыление, формирование осадочных пород, сопровождаются увеличением массы твёрдых тел за счёт присоединения к их поверхности дополнительного материала. Изучением объектов, рост которых осуществляется посредством притока вещества извне, занимается механика растущих тел (см., например, [1] – [5]).

В рамках данной теории уже проводилось исследование температурного поля растущего сплошного и полого шара [6]. В этой работе при построении аналитического решения авторы пренебрегают членом, содержащим скорость движения подвижной границы. При достаточно малых скоростях поверхности роста полученное решение обеспечивает достаточно высокую точность. В общем случае, когда закон движения растущей поверхности определяется технологическим процессом, не удаётся представить решение начально-краевой задачи в замкнутой форме.

В той же работе предложен метод, позволяющий свести исходную начально-краевую задачу теплопроводности к задаче Коши для бесконечной связанной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая решается приближёнными методами. Однако для оценки параметров счёта, обеспечивающих требуемую точность и качественное соответствие численного решения аналитическому, необходима отладка вычислительного алгоритма на известных точных решениях.

При определённых режимах роста задача Коши для связанной системы вырождается в последовательность несвязанных обыкновенных дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями. Это позволяет построить распределение температуры в растущем шаре в замкнутой форме. Полученные решения могут быть использованы для исследования качественных особенностей процесса теплопроводности, а также для тестирования и отладки вычислительных алгоритмов. Целью настоящей работы является поиск таких решений.

**2. Постановка задачи теплопроводности для растущего шара.** Рассматривается шар радиуса  $R_0$ , состоящий из однородного изотропного линейно-упругого материала, который характеризуется коэффициентом теплопроводности  $\lambda$ , плотностью  $\rho$  и теплопроводностью при постоянных деформациях  $c_\varepsilon$ . Распределение температуры в начальный момент времени известно и удовлетворяет условию центральной симметрии. Пусть в начальный момент времени к поверхности шара начинают присоединяться сферические слои вещества постоянной толщины, имеющие температуру<sup>1</sup>  $T_g$ . Дополнительный материал свободен от напряжений и идентичен основному телу. В результате присоединения вещества радиус шара изменяется по известному закону  $R(t)$ , где  $t$  — рассматриваемый момент времени. Предполагается отсутствие теплообмена между шаром и окружающей средой после завершения роста.

Введём сферическую систему координат, начало которой совпадает с центром шара. Каждой точке будет соответствовать тройка координат  $(r, \theta, \varphi)$ . В силу центральной симметрии задачи температурное поле будем описывать дважды дифференцируемой по каждому аргументу функцией  $T(r, t)$ . Поле температур удовлетворяет уравнению теплопроводности, которое в сферической системе координат с учётом центральной симметрии будет выглядеть следующим образом [7]:

<sup>1</sup> Здесь и далее под температурой понимается избыточная температура

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad \text{где} \quad a = \sqrt{\frac{\lambda}{c \varepsilon \rho}}. \quad (1)$$

Соответствующее начальное условие будет иметь вид:

$$T(r, t)|_{t=0} = T_0(r), \quad (2)$$

где  $T_0(r)$  — функция, характеризующая начальное распределение температуры в шаре.

Будем полагать, что в процессе роста температура на растущей поверхности будет равна температуре присоединяемых слоёв<sup>2</sup>. Это позволяет записать граничное условие на внешней поверхности следующим образом:

$$T(r, t)|_{r=a(t)} = T^{(s)}. \quad (3)$$

Чтобы начально-краевая задача теплопроводности имела единственное решение, следует дополнить уравнения (1) – (3) условием ограниченности температуры в центре шара.

**3. Построение решения в форме спектрального разложения.** Для построения решения в форме спектрального разложения необходимо привести задачу (1)–(3) к виду, в котором краевые условия оказались бы однородными. С этой целью вводятся безразмерные переменные  $\hat{r}$  и  $\hat{t}$ , безразмерная температура  $\Theta$  и параметр, характеризующий движение границы шара  $\xi$ , определяемые следующим образом:

$$\hat{r} = \frac{r}{R_0}, \quad \hat{t} = \frac{a^2 t}{R_0^2}, \quad \Theta = \frac{T - T^{(s)}}{T^{(s)}}, \quad \xi(\hat{t}) = \frac{R \left( \frac{R_0^2 \hat{t}}{a^2} \right)}{R_0}, \quad (4)$$

где  $R_0$  — радиус шара в начальный момент времени. Уравнения (1) – (3) в новых переменных (4) будут иметь следующий вид:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \hat{t}} = \frac{1}{\hat{r}^2} \frac{\partial}{\partial \hat{r}} \left( \hat{r}^2 \frac{\partial \Theta}{\partial \hat{r}} \right), \quad \Theta(\hat{r}, \hat{t})|_{\hat{t}=0} = \Theta_0(\hat{r}), \quad \Theta(\hat{r}, \hat{t})|_{\hat{r}=\xi(\hat{t})} = 0, \quad (5)$$

где  $\Theta_0(\hat{r})$  — распределение безразмерной температуры в начальный момент времени:

$$\Theta_0(\hat{r}) = \frac{T_0(\hat{r}) - T^{(s)}}{T^{(s)}}.$$

Для перехода к фиксированной области перейдём к новым переменным:

$$\tilde{t} = \hat{t}, \quad \tilde{r} = \frac{\hat{r}}{\xi(\tilde{t})}.$$

Задача (5) в переменных  $(\tilde{r}, \tilde{t})$  запишется следующим образом:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tilde{t}} = \frac{\tilde{r}}{\xi(\tilde{t})} \frac{d\xi(\tilde{t})}{d\tilde{t}} \frac{\partial \Theta}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}^2 \xi^2(\tilde{t})} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left( \tilde{r}^2 \frac{\partial \Theta}{\partial \tilde{r}} \right), \quad (6)$$

$$\Theta(\tilde{r}, \tilde{t})|_{\tilde{t}=0} = \Theta_0(\tilde{r}), \quad \Theta(\tilde{r}, \tilde{t})|_{\tilde{r}=1} = 0. \quad (7)$$

Уравнение (6) в общем случае не допускает разделение переменных. Однако, при выполнении следующего условия:

$$\xi(\tilde{t}) \frac{d\xi(\tilde{t})}{d\tilde{t}} = \frac{\beta}{2}, \quad \beta = \text{const}. \quad (8)$$

разделение переменных возможно, что позволяет нам строить решение задачи в форме разложения по собственным функциям. При этом, функция  $\xi(\tilde{t})$  с учётом условия (8) и замены (4) имеет вид:

$$\xi(\tilde{t}) = \sqrt{1 + \beta \tilde{t}},$$

а уравнение (6) запишется следующим образом:

$$(1 + \beta \tilde{t}) \frac{\partial \Theta}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \tilde{r}^2} + \left( \frac{2}{\tilde{r}} + \frac{\tilde{r} \beta}{2} \right) \frac{\partial \Theta}{\partial \tilde{r}}. \quad (9)$$

Правая часть уравнения (9) с граничными условиями (7) определяет линейный дифференциальный оператор

$$A[\chi(\tilde{r})] = - \left[ \frac{\partial^2 \chi}{\partial \tilde{r}^2} + \left( \frac{2}{\tilde{r}} + \frac{\tilde{r} \beta}{2} \right) \frac{\partial \chi}{\partial \tilde{r}} \right],$$

определённый на множестве ограниченных функций, интегрируемых с квадратом на отрезке  $[0, 1]$  и обращающихся в нуль при  $\tilde{r} = 1$ . Оператор  $A[\chi(\tilde{r})]$  является самосопряжённым и положительно определённым относительно скалярного произведения

<sup>2</sup> В общем случае, температура на поверхности роста будет равна некоторой эффективной температуре, которая отличается как от температуры присоединяемых слоев, так и от средней температуры вблизи поверхности основного тела. Однако, при определённых условиях (например, если рост происходит в среде с большой теплоёмкостью) все эти три температуры приблизительно равны

$$(\chi_1(\tilde{r}), \chi_2(\tilde{r})) = \int_0^1 \chi_1(\tilde{r}) \chi_2(\tilde{r}) \tilde{r}^2 e^{\frac{\tilde{r}^2 \beta}{4}} d\tilde{r}$$

и имеет дискретный спектр. Это позволяет представить решение задачи в форме спектрального разложения по собственным функциям

$$\Theta = \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n(\tilde{t}) \psi_n(\tilde{r}), \quad (10)$$

где  $\psi_n(\tilde{r})$  — решение задачи Штурма-Лиувилля которая в переменных запишется следующим образом:

$$-\left[ \frac{\partial^2 \psi_n(\tilde{r})}{\partial \tilde{r}^2} + \left( \frac{2}{\tilde{r}} + \frac{\tilde{r} \beta}{2} \right) \frac{\partial \psi_n(\tilde{r})}{\partial \tilde{r}} \right] = \lambda_n \psi_n(\tilde{r}), \quad (11)$$

$$|\psi(\tilde{r})|_{\tilde{r}=0} < +\infty, \quad \psi(\tilde{r})|_{\tilde{r}=1} = 0. \quad (12)$$

Решение уравнения (11) может быть представлено в терминах гипергеометрической функции  ${}_1F_1(\dots)$  [8]:

$$\psi_n(\tilde{r}) = C_1 {}_1F_1\left(\frac{\lambda_n}{\beta}; \frac{3}{2}; -\frac{\tilde{r}^2 \beta}{4}\right) + \frac{2C_2 {}_1F_1\left(\frac{\lambda_n - \frac{1}{2}}{\beta}; \frac{3}{2}; -\frac{\tilde{r}^2 \beta}{4}\right)}{\tilde{r} \sqrt{\beta}}, \quad (13)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — константы интегрирования. Гипергеометрическая функция может быть представлена в виде ряда:

$${}_1F_1(a; b; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_k z^k}{(b)_k k!}, \quad {}_1F_1\left(\frac{\lambda_n}{\beta}; \frac{3}{2}; -\frac{\tilde{r}^2 \beta}{4}\right)\Big|_{\tilde{r}=0} = 1. \quad (14)$$

Из условия ограниченности собственных функций следует, что  $C_2 = 0$ . Подставляя найденное решение (13) в краевое условие (12), получаем набор трансцендентных уравнений для определения собственных значений оператора  $A$ :

$${}_1F_1\left(\frac{\lambda_n}{\beta}; \frac{3}{2}; -\frac{\beta}{4}\right) = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, собственные функции оператора  $A$  могут быть определены с точностью до константы:

$$\psi_n(\tilde{r}) = C_1 {}_1F_1\left(\frac{\lambda_n}{\beta}; \frac{3}{2}; -\frac{\tilde{r}^2 \beta}{4}\right).$$

Постоянную  $C_1$  находим из условия нормировки:

$$\|\psi_n(\tilde{r})\| = \int_0^1 \left( C_1 {}_1F_1\left(\frac{\lambda_n}{\beta}; \frac{3}{2}; -\frac{\tilde{r}^2 \beta}{4}\right) \right)^2 \tilde{r}^2 e^{\frac{\tilde{r}^2 \beta}{4}} d\tilde{r} = 1. \quad (15)$$

Интеграл, присутствующий в уравнении (15), в общем случае не удаётся отыскать в замкнутом виде. Однако, поскольку функция  $\psi_n(\tilde{r})$  является простой точкой спектра линейного оператора  $A$ , её норма может быть найдена с использованием теоремы, приведённой в [9]. Нормированные собственные функции будут иметь следующий вид:

$$\psi_n(\tilde{r}) = \frac{1}{N(\lambda_n, \beta)} {}_1F_1\left(\frac{\lambda_n}{\beta}; \frac{3}{2}; -\frac{\tilde{r}^2 \beta}{4}\right),$$

$$N(\lambda_n, \beta) = \sqrt{-\frac{1}{3} \frac{\lambda_n}{\beta} {}_1F_1\left(\frac{3}{2} - \frac{\lambda_n}{\beta}; \frac{5}{2}; \frac{\beta}{4}\right) \frac{\partial}{\partial \lambda} {}_1F_1\left(\frac{\lambda}{\beta}; \frac{3}{2}; -\frac{\beta}{4}\right)\Big|_{\lambda=\lambda_n}}.$$

Производная гипергеометрической функции по первому аргументу вычисляется почленным дифференцированием ряда (14):

$$\frac{\partial}{\partial a} {}_1F_1(a; b; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{(a)_k z^k}{(b)_k k!} \right).$$

Для нахождения координатных функций подставим разложение (10) в уравнение (9), в результате чего исходная начально-краевая задача сведётся к последовательности задач Коши:

$$(1 + \beta \tilde{t}) \frac{d\Theta_n}{d\tilde{t}} = -\lambda_n \Theta_n, \quad \Theta_n(t)|_{t=0} = \Theta_n^{(0)}, \quad (16)$$

где  $\Theta_n^{(0)}$  — проекция начального распределения температуры на элемент ортонормированного базиса  $\psi_n$ :

$$\Theta_n^{(0)} = \int_0^1 \frac{\Theta^{(0)}(\tilde{r})}{N(\lambda_n, \beta)} {}_1F_1\left(\frac{\lambda_n}{\beta}; \frac{3}{2}; -\frac{\tilde{r}^2 \beta}{4}\right) \tilde{r}^2 e^{\frac{\tilde{r}^2 \beta}{4}} d\tilde{r}.$$

Задача Коши (16) имеет следующее решение:

$$\Theta_n = \Theta_n^{(0)} (1 + \beta \tilde{t})^{-\frac{\lambda_n}{\beta}},$$

которое позволяет построить распределение температурного поля по (10). Осуществляя обратный переход к переменным  $(r, t)$ , находим решение исходной начально-краевой задачи

$$T(r, t) = T(\varepsilon) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Theta_n^{(0)}(r)}{N(\lambda_n, \beta)} \left(1 + \frac{\alpha^2 \beta t}{R_0^2}\right)^{-\frac{\lambda_n}{\beta}} {}_1F_1\left(\frac{\lambda_n}{\beta}; \frac{3}{2}; -\frac{r^2 \beta}{4R_0^2(1+\beta t)}\right) + T(\varepsilon).$$

Заметим, что при  $\beta \rightarrow 0$  полученное решение будет в силу асимптотики гипергеометрической функции и первого замечательного предела стремиться к известному решению задачи теплопроводности для шара фиксированного радиуса с краевыми условиями типа Дирихле:

$$T(r, t) = T(\varepsilon) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2} \Theta_n^{(0)} e^{-\lambda_n t} \sin(r\sqrt{\lambda_n})}{r} + T(\varepsilon), \quad \lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{R_0^2}.$$

**4. Анализ результатов.** Так как распределение температурного поля в растущем шаре строится в форме спектрального разложения, первым шагом в построении решения будет отыскание спектра рассматриваемого линейного оператора. На рис. 1 представлены графики собственных функций линейного оператора **A**.

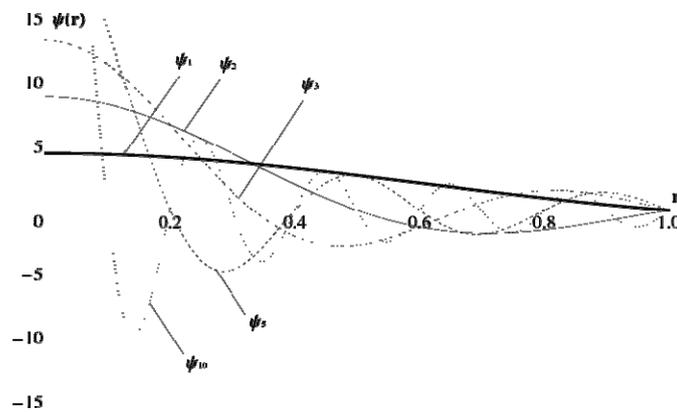


Рис.1.

Для исследования особенностей температурного поля рассмотрим случай, когда в начальный момент времени температура во всех точках шара одинакова. Тогда эволюция температурного поля при фиксированном значении параметра  $\beta$  представлена на рис.2(а). Сравнение распределений температуры при различных значениях параметра  $\beta$  в некоторый фиксированный момент времени представлено на рис. 2(б).

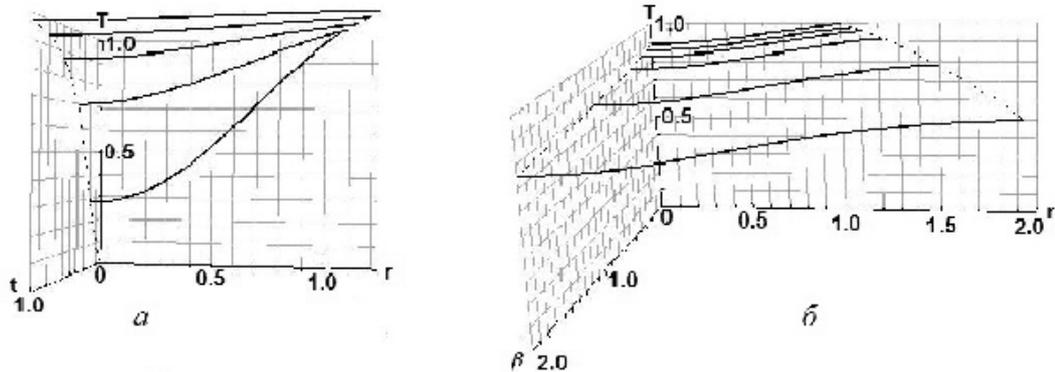


Рис. 2.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ N 11-01-00669-а, 12-08-01119-а, 11-08-93967-ЮАР\_а.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В., Наумов В.Э. Контактные задачи механики растущих тел. М.: Наука, 1991. 175 с.
2. Манжиров А.В., Паршин Д.А. Нарастание вязкоупругого шара в центрально-симметричном силовом поле// Изв. РАН. МТТ. 2006. № 1. С.66–83.
3. Лычев С.А. Связанная динамическая задача термовязкоупругости// Изв. РАН. МТТ. 2008. № 5. С.95–113.
4. Лычев С.А., Лычева Т.Н., Манжиров А.В. Нестационарные колебания растущей круглой пластины// Изв. РАН. МТТ. 2011. № 2. С.199–208.
5. Лычев С.А., Манжиров А.В., Юбер С.В. Замкнутые решения краевых задач связанной термоупругости// Изв. РАН. МТТ. 2010. № 4. С.138–154.
6. Кузнецов С.И., Манжиров А.В., Федотов И. Задача теплопроводности для растущего шара // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 6. С.139–148.
7. Новацкий С.В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872с.
8. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматлит, 2001. 576с.
9. Сеницкий Ю.Э., Лычев С.А. Определение нормы ядер конечных интегральных преобразований и их приложения // Изв. вузов. Математика. 1999. № 8. С.60–69.

### Сведения об авторах:

**Манжиров Александр Владимирович** – зав. лабораторией моделирования в механике деформируемого твёрдого тела, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН; заведующий филиалом кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана в ИПМех РАН; профессор кафедры высшей математики Московского государственного университета приборостроения и информатики.

**Лычев Сергей Александрович** – ст. научн. сотр. лаборатории моделирования в механике деформируемого твёрдого тела, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН.

**Федотов Игорь Александрович** – профессор кафедры математики и статистики, Тшванский университет технологии, Претория, ЮАР

**Юбер Стефан Виктор** – профессор кафедры математики и статистики, Тшванский университет технологии, Претория, ЮАР

# ПОСТРОЕНИЕ ПРИКЛАДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МИКРОПОЛЯРНЫХ ОРТОТРОПНЫХ УПРУГИХ ТОНКИХ БАЛОК АСИМПТОТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Маргарян Л.М.

В данной работе в тонкой прямоугольной области рассматривается начально-граничная задача плоской линейной микрополярной теории упругости для ортотропной балки. Считается, что общее напряжённо-деформированное состояние можно разделить на внутреннюю задачу и погранслои (по координатам и по времени). Асимптотическим методом построена внутренняя одномерная задача и погранслои по координатам и по времени. На основе сращения внутренней задачи и указанных погранслоев определены соответствующие граничные и начальные условия. В итоге построена математическая модель микрополярных ортотропных упругих тонких балок с независимыми полями перемещений и вращений и обосновывается соответствующая модель микрополярных балок, построенная на основе метода гипотез.

**1. Введение.** Асимптотический метод в классической теории тонких оболочек, пластин и балок развит в работах [1-4] и других. Асимптотический метод в теории микрополярных балок, пластин и оболочек развит в работах [5-7]. В работах [8-11] на основе качественных результатов асимптотического метода интегрирования граничных задач трёхмерной (двумерной) микрополярной теории упругости в тонких областях сформулированы адекватные гипотезы и построены общие теории микрополярных упругих тонких оболочек, пластин (балок). В работе [12] развит асимптотический метод работы [5] изучения граничных задач плоской микрополярной статической теории упругости для изотропного материала в тонкой прямоугольной области, построена асимптотически точная модель микрополярных изотропных упругих тонких балок и обоснована соответствующая математическая модель, построенная на основе метода гипотез [8]. В данной работе развивается асимптотический подход работы [12]: асимптотическим методом построена математическая модель динамики микрополярных ортотропных упругих тонких балок с независимыми полями перемещений и вращений и обосновывается соответствующая модель микрополярных балок, построенная на основе метода гипотез [11].

**2. Построение внутреннего итерационного процесса. Основные уравнения прикладной модели динамического изгиба микрополярной ортотропной упругой тонкой балки с независимыми полями перемещений и вращений.** Будем рассматривать прямоугольник ( $0 \leq x_1 \leq a$ ,  $-h \leq x_2 \leq h$ ) как плоское упругое микрополярное тело. Основные уравнения, граничные и начальные условия плоской динамической задачи микрополярной теории упругости для ортотропного материала в прямоугольной области приведены в работе [11].

Предположим, что высота прямоугольника мала по сравнению с его длиной, т.е.  $2h \ll a$ ,  $\delta = \frac{h}{a} \ll 1$  – основной малый геометрический параметр задачи. При введении надлежащих масштабов для координат и времени динамические уравнения плоской задачи несимметричной теории упругости принимают форму, в которых малый параметр будет стоять перед некоторыми производными, т.е. получим сингулярно-возмущённую с малым параметром  $\delta$  начально-краевую задачу. При построении внутреннего итерационного процесса в указанных двумерных динамических уравнениях перейдём к безразмерным величинам и выполним замену независимых переменных – координат  $x_1$ ,  $x_2$  и времени  $t$  следующим образом:

$$\xi = \frac{x_1}{a}, \quad \zeta = \frac{x_2}{h}, \quad \tau = \frac{t}{t_0} \left( t_0 = \delta^\omega \frac{h}{c_0} \right), \quad \bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{A_{11}}, \quad \bar{\mu}_{i3} = \frac{\mu_{i3}}{aA_{11}}, \quad \bar{u}_i = \frac{u_i}{a}, \quad \bar{I} = \frac{I}{\delta^k \rho h^2}. \quad (2.1)$$

Здесь величина  $\omega$  характеризует изменяемость напряженно-деформированного состояния во времени. В итоге получим безразмерные сингулярно-возмущённые с малым параметром  $\delta$  уравнения. Решение таким образом полученной системы уравнений отыщем в виде асимптотического разложения (внутреннее асимптотическое разложение)

$$Q = \delta^{-q} \sum \delta^s Q^{(s)}, \quad (2.2)$$

где  $Q$  – напряжения (силовые и моментные), перемещения и поворот;  $q$  – натуральное число, которое для различных величин разное и определяется из условия получения

непротиворечивой рекуррентной системы уравнений в асимптотических приближениях;  $s$  – номер асимптотического приближения. В случае задачи изгиба прямоугольника для величин  $\omega, k, q$  получим следующие значения:

$$\omega = -1, \quad k = -2, \quad q = \begin{cases} 0 & \bar{\sigma}_{11}, \bar{\sigma}_{22}, \bar{u}_1, \bar{\mu}_{23} \\ 1 & \bar{\sigma}_{21}, \bar{\sigma}_{12}, \bar{u}_2, \bar{\mu}_{13}, \omega_3 \end{cases} \quad (2.3)$$

Рассмотрим исходное приближение  $s = 0$  для внутреннего итерационного процесса. Для перемещений, свободного поворота, силовых и моментных напряжений получим следующие выражения:

$$\bar{u}_2^{(0)} = u_2^{(0)}(\xi, \tau), \quad \omega_3^{(0)} = \omega_3^{(0)}(\xi, \tau), \quad \bar{u}_1^{(0)} = \zeta \psi_1^{(0)}(\xi, \tau), \quad (2.4)$$

$$\psi_1^{(0)} = \left[ -\omega_3^{(0)} + \frac{A_{11}A_{77}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \sigma_{21}^{(0)} - \frac{A_{11}A_{78}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \sigma_{12}^{(0)} \right] \zeta, \quad \bar{\sigma}_{22}^{(0)} = \left[ -\frac{\partial \sigma_{12}^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{\rho c_0^2}{A_{11}} \frac{\partial^2 u_2^{(0)}}{\partial \tau^2} \right] \zeta,$$

$$\bar{\mu}_{13}^{(0)} = \frac{B_{66}}{a^2 A_{11}} \frac{\partial \omega_3^{(0)}}{\partial \xi} = \mu_{13}^{(0)}(\xi, \tau), \quad \bar{\mu}_{23}^{(0)} = \left[ -\frac{\partial \mu_{13}^{(0)}}{\partial \xi} - \left( \sigma_{12}^{(0)} - \sigma_{21}^{(0)} \right) + \frac{\bar{I} \rho c_0^2}{A_{11}} \frac{\partial^2 \omega_3^{(0)}}{\partial \tau^2} \right] \zeta, \quad (2.5)$$

$$\bar{\sigma}_{12}^{(0)} = \frac{A_{77}A_{88} - A_{78}^2}{A_{11}A_{88}} \left( \frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial \xi} - \omega_3^{(0)} \right) + \frac{A_{78}}{A_{88}} \sigma_{21}^{(0)} = \sigma_{12}^{(0)}(\xi, \tau), \quad (2.6)$$

$$\bar{\sigma}_{11}^{(0)} = \sigma_{11}^{(0)} \zeta, \quad \sigma_{11}^{(0)} = \left[ \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{11}A_{22}} \frac{\partial \psi_1^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{A_{12}}{A_{22}} \left( -\frac{\partial \sigma_{12}^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{\rho c_0^2}{A_{11}} \frac{\partial^2 u_2^{(0)}}{\partial \tau^2} \right) \right] \zeta,$$

$$\sigma_{21} = A_{11} \delta^{-1} \left[ \sigma_{21}^{(0)} + \delta^2 \left( \frac{1}{6} - \frac{\zeta^2}{2} \right) \left( \frac{\partial \sigma_{11}^{(0)}}{\partial \xi} - \frac{\rho c_0^2}{A_{11}} \frac{\partial^2 \psi_1^{(0)}}{\partial \tau^2} \right) \right]. \quad (2.7)$$

Здесь  $A_{11}, A_{12}, A_{22}, A_{77}, A_{88}, A_{78}, B_{66}$  – упругие коэффициенты микрополярного ортотропного материала в плоской задаче. Величина  $\sigma_{21}$  в формуле (2.7) приведена в размерном виде. Формулы (2.4) характеризуют кинематику деформации по внутреннему итерационному процессу. Они говорят о том, что в процессе деформации нормальный к средней линии тонкого прямоугольника элемент остается прямым, но не перпендикулярным к деформированной средней линии. Кроме того, свободный поворот точек прямоугольника не зависит от поперечной координаты  $x_2$ . В работах [8,11] это положение принято как кинематическая гипотеза для построения прикладной одномерной модели микрополярных изотропных и ортотропных упругих тонких балок. В указанных работах эта гипотеза названа обобщённой на микрополярный случай кинематической гипотезой Тимошенко. На основе полученного результата, если ввести усреднённые усилия и моменты [8, 11], в итоге приходим к одномерным динамическим уравнениям модели микрополярных ортотропных балок с независимыми полями перемещений и вращений:

уравнения движения:

$$N_{21} - \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} = h(X^+ - X^-) - \frac{2h^3}{3} \rho \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} = -(Y^+ + Y^-) + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial L_{13}}{\partial x_1} + N_{12} - N_{21} = -(M^+ + M^-) + 2Ih \frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2}.$$

Соотношения упругости:

$$N_{12} = c_{77} \Gamma_{12} + c_{78} \Gamma_{21}, \quad N_{21} = c_{78} \Gamma_{12} + c_{88} \Gamma_{21}, \quad L_{13} = d_{66} k_{13}, \quad M_{11} = D_{11} K_{11} + \frac{A_{12}}{A_{22}} \frac{h^2}{3} (Y^+ + Y^-). \quad (2.9)$$

Геометрические соотношения:

$$\Gamma_{12} = \frac{\partial w}{\partial x_1} - \Omega_3, \quad \Gamma_{21} = \psi_1 + \Omega_3, \quad k_{13} = \frac{\partial \Omega_3}{\partial x_1}, \quad K_{11} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}. \quad (2.10)$$

В соотношениях упругости (2.8) величины  $c_{77}, c_{88}, c_{78}, d_{66}, D_{11}$ , – жёсткостные характеристики балки:

$$c_{77} = 2hA_{77}, \quad c_{88} = 2hA_{88}, \quad c_{78} = 2hA_{78}, \quad d_{66} = 2hB_{66}, \quad D_{11} = \frac{2h^3}{3} \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}}. \quad (2.11)$$

Отметим, что полученная система уравнений (2.8)-(2.11) полностью совпадает с основными уравнениями прикладной одномерной модели динамики микрополярных ортотропных тонких балок, построенной на основе метода гипотез [11]. Разница лишь в том, что для  $M_{11}$  в работе [11] получена формула  $M_{11} = D_{11}K_{11}$ . Это результат того, что в законе Гука силовое напряжение  $\sigma_{22}$  пренебрегается относительно силового напряжения  $\sigma_{11}$ , которое есть известное предположение в теории изгиба балок.

**3. Построение погранслоев по координатам и времени. Сращивание асимптотических разложений. Граничные и начальные условия прикладной модели микрополярных балок.** Для получения граничных условий для одномерных уравнений (2.8)-(2.11) прикладной модели микрополярных балок обратимся к изучению краевых упругих явлений. Для этого введём в уравнения плоской динамической задачи микрополярной теории упругости [11] следующие преобразования координат  $x_1, x_2$  (для бокового края  $x_1 = 0$ ), времени  $t$  и перейдём к безразмерным величинам по следующим формулам:

$$\xi_1 = \frac{x_1}{h}, \quad \zeta = \frac{x_2}{h}, \quad \tau = \frac{t}{t_0} \left( t_0 = \delta^\omega \frac{h}{c_0} \right), \quad \bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{A_{11}}, \quad \bar{\mu}_{i3} = \frac{\mu_{i3}}{aA_{11}}, \quad \bar{u}_i = \frac{u_i}{a}, \quad \bar{I} = \frac{I}{\delta^k \rho h^2}. \quad (3.1)$$

Решение преобразованной таким образом системы уравнений отыщем в виде асимптотического разложения

$$R = \delta^{\chi_R} \sum \delta^s R^{(s)}, \quad (3.2)$$

где  $R$  – любая из величин рассматриваемой задачи;  $\chi$  – целое число, которое характеризует интенсивность пограничного слоя; изменяемость  $\omega$  напряжённо-деформированного состояния во времени должна соответствовать значению для внутренней задачи. Таким образом, для величин  $\chi_R, \omega, k$  получим:

$$\chi_{\sigma_{ij}} = \chi, \quad \chi_{\mu_{i3}} = \chi, \quad \chi_{u_i} = \chi + 1, \quad \chi_{\omega_3} = \chi + 1, \quad \omega = -1, \quad k = -2. \quad (3.3)$$

После подстановки (3.2) (с учётом (3.3)) в преобразованную систему безразмерных уравнений плоской задачи микрополярной теории упругости приходим к системе уравнений погранслоя в асимптотических приближениях. Можно показать, что решение погранслоевой задачи имеет определённые свойства, которые в исходном приближении  $s = 0$  выражаются так:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \bar{\sigma}_{12}^{(s)}(\xi_1 = 0) d\zeta &= -\frac{\rho c_0^2}{A_{11}} \int_{-1}^1 d\zeta \int_0^\infty \frac{\partial^2 \bar{u}_2^{(s-2)}}{\partial \tau^2} d\xi_1, \\ \int_{-1}^1 \bar{\mu}_{13}^{(s)}(\xi_1 = 0) d\zeta &= \int_{-1}^1 d\zeta \int_0^\infty (\bar{\sigma}_{12}^{(s-1)} - \bar{\sigma}_{21}^{(s-1)}) d\xi_1 - \frac{\bar{I} \rho c_0^2}{A_{11}} \int_{-1}^1 d\zeta \int_0^\infty \frac{\partial^2 \omega_3^{(s-2)}}{\partial \tau^2} d\xi_1, \\ \int_{-1}^1 \omega_3^{(s)}(\xi_1 = 0) d\zeta &= \frac{a^2 A_{11}}{B_{66}} \int_{-1}^1 d\zeta \int_0^\infty (\bar{\sigma}_{21}^{(s-1)} - \bar{\sigma}_{12}^{(s-1)}) \xi_1 d\xi_1 + \frac{\bar{I} \rho c_0^2 a^2}{B_{66}} \int_{-1}^1 d\zeta \int_0^\infty \frac{\partial^2 \omega_3^{(s-2)}}{\partial \tau^2} \xi_1 d\xi_1, \\ \int_{-1}^1 \bar{\sigma}_{11}^{(s)}(\xi_1 = 0) \zeta d\zeta &+ \frac{A_{77} A_{88} - A_{78}^2}{A_{11} A_{78}} \int_{-1}^1 \bar{u}_2^{(s)}(\xi_1 = 0) d\zeta = -\frac{A_{77} A_{88} - A_{78}^2}{A_{11} A_{78}} \int_{-1}^1 d\zeta \int_0^\infty \omega_3^{(s-1)} d\xi_1 - \\ &- \frac{\rho c_0^2}{A_{11}} \int_{-1}^1 \zeta d\zeta \int_0^\infty \frac{\partial^2 \bar{u}_1^{(s-2)}}{\partial \tau^2} d\xi_1 + \frac{A_{88} \rho c_0^2}{A_{78} A_{11}} \int_{-1}^1 d\zeta \int_0^\infty \frac{\partial^2 \bar{u}_2^{(s-2)}}{\partial \tau^2} \xi_1 d\xi_1, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\partial \bar{u}_1^{(0)}}{\partial \zeta} (\xi_1 = 0) d\zeta + \frac{A_{77}}{A_{88}} \int_{-1}^1 \frac{\partial \bar{u}_2^{(0)}}{\partial \xi_1} (\xi_1 = 0) d\zeta = 0.$$

В результате сращивания внутреннего и погранслоного разложений для  $s=0$ , с использованием свойств (3.4) погранслоя, получаются граничные условия для одномерных уравнений (2.8)-(2.11) микрополярных балок:

$$\text{загруженный край: } M_{11}|_{x_1=0} = \int_{-h}^h x_2 \varphi_1 dx_2, \quad N_{12}|_{x_1=0} = \int_{-h}^h \varphi_2 dx_2, \quad L_{13}|_{x_1=0} = \int_{-h}^h \varphi_3 dx_2; \quad (3.5)$$

$$\text{защемленный край: } \psi_1|_{x_1=0} = 0, \quad w|_{x_1=0} = 0, \quad \Omega_3|_{x_1=0} = 0. \quad (3.6)$$

$$\text{шарнирно-опёртый край: } M_{11}|_{x_1=0} = \int_{-h}^h x_2 \varphi_1 dx_2, \quad w|_{x_1=0} = 0, \quad L_{13}|_{x_1=0} = \int_{-h}^h \varphi_3 dx_2. \quad (3.7)$$

Для получения начальных условий для системы одномерных уравнений (2.8)-(2.11) построим погранслою по времени  $t$ , считая  $t=0$  своего рода границей, и вводим погранслоное явление около этой границы. На основании такого подхода введём в рассмотрение дополнительное НДС, имеющее по времени большую изменчивость и ту же изменчивость по координатам, которую имеет внутренняя задача. Такое НДС вызывает высокочастотные колебания по толщине балки, наиболее отчетливо проявляющееся в переходный момент времени до установившихся динамических явлений, определяемым по теории внутренней задачи. Введём в уравнения плоской задачи микрополярной теории упругости для ортотропного материала преобразования координат и времени и перейдем к безразмерным величинам по формулам (2.1). Решение преобразованной таким образом системы отыщем в виде (2.2), где для величин  $\omega$ ,  $k$ ,  $q$  на основе некоторых определяющих требований имеем:

$$\omega = 0, \quad k = -2, \quad q = \begin{cases} 0 & \bar{u}_1, \bar{u}_2, \omega_3, \bar{\mu}_{13} \\ 1 & \bar{\sigma}_{11}, \bar{\sigma}_{22}, \bar{\sigma}_{21}, \bar{\sigma}_{12}, \bar{\mu}_{23} \end{cases} \quad (3.8)$$

После подстановки (2.2) (с учётом (3.8)) в преобразованную систему безразмерных уравнений плоской задачи микрополярной теории упругости для ортотропного материала получим отдельные уравнения гиперболического типа для величин  $\bar{u}_1^{(0)}$ ,  $\bar{u}_2^{(0)}$ ,  $\omega_3^{(0)}$ . Символически в исходном асимптотическом приближении эти уравнения можем записать в следующем общем виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = 0, \quad (3.9)$$

где  $a$  – коэффициент, выражающийся через упругие константы материала прямоугольника (этот коэффициент принимает разные значения для величин  $\bar{u}_1^{(0)}$ ,  $\bar{u}_2^{(0)}$ ,  $\omega_3^{(0)}$ ). В исходном приближении к уравнениям (3.9) следует присоединить однородные граничные условия на  $\zeta = \pm 1$ . Построив общие решения полученных граничных задач (отдельно для  $\bar{u}_1^{(0)}$ ,  $\bar{u}_2^{(0)}$ ,  $\omega_3^{(0)}$ ) и приписывая их осцилляционный характер, на основе сращивания с внутренним итерационным процессом при  $s=0$  получим начальные условия для одномерной системы уравнений (2.8)-(2.11):

$$\begin{aligned} \psi_1|_{t=0} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \Big|_{x_2=h} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \Big|_{x_2=-h} \right), & \frac{\partial \psi_1}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \Big|_{x_2=h} + \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \Big|_{x_2=-h} \right), \\ w|_{t=0} &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h f_2(x_1, x_2) dx_2, & \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h F_2(x_1, x_2) dx_2, \\ \Omega_3|_{t=0} &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \varphi_3(x_1, x_2) dx_2, & \frac{\partial \Omega_3}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \Phi_3(x_1, x_2) dx_2. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Таким образом, на основе асимптотического метода построена прикладная модель динамики микрополярных ортотропных упругих тонких балок с независимыми полями перемещений и вращений: уравнения движения (2.8), физические соотношения (2.9), (2.11) геометрические соотношения (2.10), граничные условия (3.5) (либо (3.6), (3.7)) и начальные условия (3.10). Построенная модель полностью обосновывает аналогичную модель микрополярных ортотропных балок, построенную на основе метода гипотез в работе [11].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ворович И.И. Некоторые результаты и проблемы асимптотической теории пластин и оболочек.//Сб.: Материалы I Всесоюзной школы по теории и численным методам расчёта оболочек и пластин. Тбилиси: изд-во Тбилисск.ун-та. 1975. С.51-149.
2. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 510с.
3. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 414с.
4. Саркисян С.О. Общая двумерная теория магнитоупругости тонких оболочек. Ереван: Изд-во НАН Армении, 1992. 232с.
5. Саркисян С.О. Прикладные одномерные теории балок на основе несимметричной теории упругости.//Физическая мезомеханика. 2008. Т.11. №5. С.41-54.
6. Саркисян С.О. Краевые задачи тонких пластин в несимметричной теории упругости.//Прикладная математика и механика. 2008. Т.72. №1. С.129-147.
7. Саркисян С.О. Теория микрополярных упругих тонких оболочек.// Прикладная математика и механика. 2012.Т.76. Вып.2. С.325-343.
8. Sargsyan S.H. Effective Manifestations of Characteristics of Strength and Rigidity of Micropolar Elastic Thin Bars.//Journal of Materials Science and Engineering. 2012. Vol. 2. №1. P.98-108.
9. Саркисян С.О. Общие математические модели микрополярных упругих тонких пластин и особенности их прочностных и жёсткостных характеристик.//Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т.53. №2.
10. Саркисян С.О. Общая динамическая теория микрополярных упругих тонких оболочек. // Доклады РАН. 2011. Т. 436. М2. С.195-198.
11. Sargsyan S.H., Margaryan L.M. Mathematical Model of Dynamics of Micropolar Orthotropic Elastic Thin Bars with Free Fields of Displacements and Rotations.//Journal of Mechanics Engineering and Automation. 2012. Vol. 2. P. 110-118.
12. Саркисян С.О. Построение математической модели микрополярных упругих тонких балок асимптотическим методом.// Изв. высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2012 (в печати).

### **Сведения об авторе:**

**Маргарян Лилит Мкртычевна** – аспирант Гюмрийского государственного педагогического института, (374 94) 05 44 98. **E-mail:** [m.liloo@mail.ru](mailto:m.liloo@mail.ru)

# НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА ЗАЛЕЧИВАНИЯ ТРЕЩИНЫ, ДВИЖУЩЕЙСЯ С ПЕРЕМЕННОЙ СКОРОСТЬЮ

Мартиросян А.Н., Динуц А.С., Давтян А.В.

Дается аналитическое решение задачи о заживании трещины, движущейся с произвольной скоростью, исследуется характер кривых процесса заживания.

## 1. Аналитическое решение задачи.

Рассматривается нестационарная смешанная задача для полуплоскости, когда точка раздела граничных условий движется с переменной скоростью. Рассматривается полубесконечная трещина, в которой, начиная с момента  $t = 0$ , имеется поток жидкости с примесями, и край которой движется по произвольному закону  $x = l(t)$ . В граничных условиях учитывается наращивание границы трещины и показано, что на крае трещины, т.е. при  $x \rightarrow l(t)$  особенностей не имеется.

В случае нулевой скорости движения края трещины задача наращивания границы трещины аналитически и численно исследована в [6], с обсуждениями возможных применений результатов к геотермальным, технологическим, биологическим трещинам. Вместе с тем, представляет интерес изучение соответствующих задач заживания подобных полостей и разломов, называемых в [6], условно трещинами, когда, кроме потока флюида в них имеется движение самого края разлома с произвольной скоростью, причём, подобного рода задачи рассматривались в разных вариантах в [10], [11], [12].

Рассмотрим следующую задачу, когда граничные условия имеют вид ( $y = 0$ ):

$$\sigma_{xy} = 0, -\infty < x < \infty; \quad V = 0, x > l(t)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \left\{ \frac{K(\bar{a}^2 - 2b^2)\rho}{\rho_s} + \xi \right\} \frac{\partial U}{\partial x} + \left( \frac{K\bar{a}^2\rho}{\rho_s} + \xi \right) \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{i_0}{\rho_s} H(x - \xi) H(t - \tau), x < l(t), \xi < l(\tau) \quad (1.1)$$

где  $l(t)$  – закон движения края трещины,  $K$  – коэффициент наращивания границы трещины. При  $t = 0$  имеем нулевые начальные условия. Значения термоупругих и термодиффузионных постоянных в (1.1) даётся в [6], [10], [11]. Решение уравнений термоупругости при условиях (1.1) ищется методом свертки [7], [9], [12], причём, для вертикальной компоненты перемещения границы трещины получится [12]

$$V(x, t) = \frac{2i_0(x - \xi)}{\rho_s C_0 \pi} \operatorname{Re} (A(I_{11} + I_{12}) + I_{21} + I_{22} + I_{23} + I_{24}), \quad (1.2)$$

где

$$I_{22} = \int_1^{\frac{\bar{a}}{b}} F_3(h) \int_{L_1}^{\frac{\bar{a}}{b}} F_4(u) \left( \frac{-(\ell(t_1^*) - x)\varphi_1 \sqrt{u - L_1}}{u(x - \xi) + (\ell(t_1^*) - \xi) \left( L_1 + \frac{h}{\varphi_1^2} \right)} - \frac{1}{2\sqrt{u + h}} \ln \left| \frac{\varphi_1 - \sqrt{\frac{u + h}{u - L_1}}}{\varphi_1 + \sqrt{\frac{u + h}{u - L_1}}} \right| \right) H(L_1 - 1) H\left(\frac{\bar{a}}{b} - L_1\right) dudh$$

$$I_{12} = \int_1^{\frac{\bar{a}}{b}} F_4(u) \left( \frac{\sqrt{u - 1} \sqrt{T^2 - 1}}{u - T} - \frac{1}{2\sqrt{u + 1}} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{T + 1}{T - 1}} - \sqrt{\frac{u + 1}{u - 1}}}{\sqrt{\frac{T + 1}{T - 1}} + \sqrt{\frac{u + 1}{u - 1}}} \right| \right) H(1 - L_0) du +$$

$$+ \int_{L_0}^{\frac{\bar{a}}{b}} F_4(u) \left( \frac{\sqrt{u - L_0} (\ell(t_0^*) - \xi)}{(u - T)(x - \xi)\varphi_0} - \frac{1}{2\sqrt{u + 1}} \ln \left| \frac{\varphi_0 - \sqrt{\frac{u + 1}{u - L_0}}}{\varphi_0 + \sqrt{\frac{u + 1}{u - L_0}}} \right| \right) H(L_0 - 1) H\left(\frac{\bar{a}}{b} - L_0\right) du$$

$$I_{21} = \int_1^{\frac{\bar{a}}{b}} F_3(h) \left\{ \left( \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\varphi_1 \sqrt{h} - 1}{\varphi_1 \sqrt{h} + 1} \right| + \frac{\varphi_1 \sqrt{h}}{1 - \varphi_1^2 h} \right) H(L_1 - 1) + \left( \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{T + h}{T - 1}} - 1}{\sqrt{\frac{T + h}{T - 1}} + 1} \right| - \frac{\sqrt{T - 1} \sqrt{T + h}}{h + 1} \right) H(1 - L_1) \right\} dh$$

$$\begin{aligned}
I_{23} &= \int_1^{\frac{\bar{a}}{b}} F_3(h) \int_1^{\frac{\bar{a}}{b}} F_4(u) \left( \frac{\sqrt{(bu-\bar{a})(bT-\bar{a})(T+h)}}{(\bar{a}+hb)(T-u)} + \frac{1}{2\sqrt{u+h}} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{T+h}{T-\bar{a}/b} - \sqrt{\frac{u+h}{u-\bar{a}/b}}}}{\sqrt{\frac{T+h}{T-\bar{a}/b} + \sqrt{\frac{u+h}{u-\bar{a}/b}}}} \right| \right) H(1-L_1) H\left(T-\frac{\bar{a}}{b}\right) dudh \\
I_{24} &= -\int_1^{\frac{\bar{a}}{b}} F_3(h) \int_{L_1}^{\frac{\bar{a}}{b}} F_4(u) \left( \frac{\sqrt{(u-1)(T+h)(T-1)}}{(h+1)(T-u)} + \frac{1}{2\sqrt{u+h}} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{T+h}{T-1} - \sqrt{\frac{u+h}{u-1}}}}{\sqrt{\frac{T+h}{T-1} + \sqrt{\frac{u+h}{u-1}}}} \right| \right) H(1-L_1) dudh \\
F_3(h) &= \int_h^{\frac{\bar{a}}{b}} \frac{d}{du} \left( \frac{(\bar{a}/b-u)\sqrt{u-1}F_2(u)}{(u-\alpha_1)(u-\alpha_2i)} \right) \frac{du}{\sqrt{u-h}}, \quad F_4(u) = \frac{(\bar{a}/b-u)\sqrt{u-1}(u-T)F_2(u)}{(u-\alpha_1)(u-\alpha_2i)u}, \\
\ell(t_n^*)-x &= \frac{\bar{a}(t-t_n^*)}{h_n}, \quad \Phi_n = \sqrt{\frac{\ell(t_n^*)-\xi}{\ell(t_n^*)-x}}, \quad L_n = \frac{\bar{a}(t_n^*-\tau)}{\ell(t_n^*)-\xi}, \quad h_0=1, h_1=h, \quad A = 1 - \int_1^{\bar{a}/b} \frac{(\bar{a}/b-u)F_2(u)du}{(u-\alpha_1)(u-\alpha_2i)}, \quad \text{где} \\
F_1(u) &= \frac{\beta_1^* \bar{a}^2/b^2 + 2(K_2 - K_3)u^2\beta_1^*\beta_2/\bar{a}}{\pi \sqrt{\left(\beta_1^* \frac{\bar{a}^2}{b^2} + 2\frac{K_2 - K_3}{a}u^2\beta_1^*\beta_2\right)^2 + (\zeta^2 - \beta_2^2)^2 \left(\frac{K_3}{a}(\beta_1^*)^2 - \frac{K_2}{a}u^2\right)^2}} G_-(u), \\
F_2(u) &= \frac{-\left(\beta_1^* \bar{a}^2/b^2 + 2(K_2 - K_3)u^2\beta_1^*\beta_2/\bar{a}\right)}{\pi \sqrt{\left(\beta_1^* \frac{\bar{a}^2}{b^2} + 2\frac{K_2 - K_3}{a}u^2\beta_1^*\beta_2\right)^2 + (\zeta^2 - \beta_2^2)^2 \left(\frac{K_3}{a}(\beta_1^*)^2 - \frac{K_2}{a}u^2\right)^2}} G_-^{-1}(u), \\
G_-(\bar{\alpha}) &= \text{Exp} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_1^{\bar{a}/b} \arctg \frac{\frac{\bar{a}^{-3}}{b^2} \sqrt{\zeta^2-1} + 2(K_2-K_3)\zeta^2 \sqrt{\zeta^2-1} \sqrt{\frac{\bar{a}^2}{b^2} - \zeta^2}}{\left(K_3(\zeta^2-1) - K_2\zeta^2\right) \left(2\zeta^2 - \frac{\bar{a}^2}{b^2}\right)} \frac{d\zeta}{\zeta - \frac{\bar{\alpha}\omega}{\omega}} \right\}, \quad (1.4)
\end{aligned}$$

$H(x)$  – единичная функция. Как видно из (1.2), при  $x \rightarrow \ell(t)$  особенностей не имеется, что в других задачах статики и динамики известно из решений работ [6], [12], [13].

Для залечивания трещин, даваемого уравнением  $b = 0, b = b_0 + V(x, t)$ , получаем уравнение для процесса залечивания  $x(t)$ , которое решено численно для заданных констант  $C_0 = 10^3; \bar{a} = 10^5 \text{ cm/sec}, \bar{a}/b = 3; K_2 = 0,8; K_3 = 0,3; t = 10^{-4}; \xi = 0; b_0 = 10^{-4}; 10^{-3}; 10^{-2}; 10^{-1}$   $\alpha_{1,3} = \pm 0.889; \alpha_{2,4} = \pm 8.736i$ , откуда можно в плоскости  $x, t$  построить график процесса залечивания для различных значений  $b_0$  при  $i_0/\rho_s = 10^{-2}, C_0 = 10^3; \bar{a} = 10^5 \text{ cm/sec}, \bar{a}/b = 3; K_2 = 0,8; K_3 = 0,3; t = 10^{-4}; \xi = 0; b_0 = 10^{-4}; \alpha_{1,3} = \pm 0.889; \alpha_{2,4} = \pm 8.736i$ .

Для примера рассмотрим случай  $b_0 = 0.01 \text{ см}$ , тогда получится график

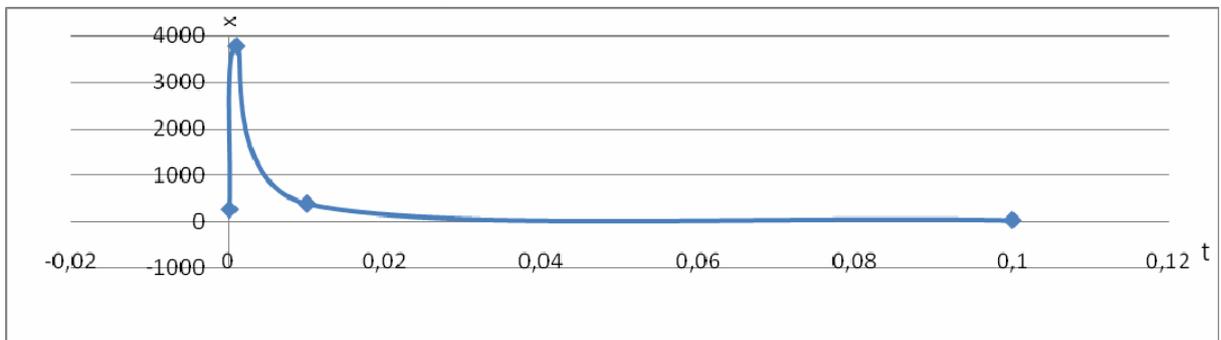


Рис.1. Кривая зависимости координаты  $x(t)$  залечивания трещины при  $b_0 = 0,01 \text{ см}$

## 2. Применение метода нелинейных волн к исследованию вероятностей стохастических процессов.

Для стохастических марковских процессов  $x, t$  переходная вероятность  $p(t_0, x_0, t, x)$  от значения случайной величины  $\xi = x_0$  в момент  $t_0$  к величине  $\xi = x$  в момент  $t$  определяется уравнением Колмогорова–Эйнштейна–Фоккера–Планка–Релея [1]

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial ap}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 bp}{\partial x^2} \quad (2.1)$$

где  $a(x, t)$  называется скоростью переноса, в нашей терминологии [14] скоростью линейных волны вероятности,  $b(x, t)$  есть коэффициент диффузии.  $a(x, t)$  характеризует скорость упорядоченного изменения процесса в виде средней кривой  $x = \bar{x}(t)$ , называемого трендом,  $b$  характеризует отклонение  $\xi = x$  от тренда  $\bar{x}(t)$ . Введя осредненные по  $p$  величины [1]

$$\bar{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(t_0, x_0, t, x) dx, \quad \bar{x}(t_0) = x_0, \quad \bar{a}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} ap(t_0, x_0, t, x) dx \quad (2.2)$$

дифференцируя (2.2) по  $t$ , используя (2.1), после интегрирования по частям и  $p(t_0, \pm\infty, t, x) = 0$ , получим [1]

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \overline{a(x, t)}, \quad \overline{b(x, t)} = \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} \quad (2.3)$$

что оправдывает вышеуказанные соображения о тренде и отклонении  $\Delta x$  от него;  $\overline{b(x, t)}$  есть скорость брауновского движения [1]; при этом, найдя осредненные величины  $\bar{x}(t)$  и  $\Delta x$  из экспериментальных данных, можно определять приближенно  $a$  и  $b$ .

В частном случае  $a(x, t) = a_0 + cx$ ,  $a_0, c = \text{const}$ ,  $\overline{a(x, t)} = a_0 + c\bar{x}(t)$ ; для  $c = 0$ , т.е. прямого тренда,  $\bar{x}(t) = a_0 t$ , а для  $a_0 = 0$  экспоненциальный тренд будет  $\bar{x}(t) = e^{ct}$ .

Можно ввести одномерную функцию вероятности

$$P(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} P(t_0, x_0) p(t_0, x_0, t, x) dx_0 \quad (2.4)$$

которая [1] также удовлетворяет (2.1) и начальному условию  $P(t_0, x) = P_0(t, x)$ .

Как и в волновой динамике [14], естественно в окрестности средней кривой процесса, тренда  $x = \bar{x}(t)$ , представляющего волну вероятности, учесть зависимость скорости волны  $a$  от самого решения  $P' = P(t, x) - P_0$ , т.е. учесть нелинейность в указанном уравнении для  $P$ . Мы полагаем, что имеется предварительная латентная область малых изменений процесса, где решение хаотично, там  $P = P_0$ ,  $P_0 = \text{const}$  и в силу симметричности можно считать  $P_0 = 1/2$  [14],[15], а далее процесс переходит в область больших изменений параметра  $x$  к самоорганизации [4].

В этой области больших  $\bar{x}(t)$  и  $d\bar{x}(t)/dt$  процесс близок детерминированному [2]. Учитывая это, можно в нелинейной задаче выбрать для коэффициента

$$a = a_0 + \frac{\gamma}{2} P' \quad (2.5)$$

где  $a_0 = \text{const}$  есть скорость линейной волны в предварительной области,  $\gamma = \text{const}$  – нелинейный коэффициент, который определяется экспериментально.

Тогда, учитывая, что для  $P'$  в линейном случае имеет место снова (2.1), можно в нелинейном случае опять взять для  $P'$  уравнение (2.1) с учётом добавки вида (2.5)

$$\frac{\partial P'}{\partial t} = -\frac{\partial a P'}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 b P'}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial P'}{\partial t} = -a_0 \frac{\partial P'}{\partial x} - \gamma P' \frac{\partial P'}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 b P'}{\partial x^2} \quad (2.6)$$

В области больших значений  $\bar{x}$ ,  $d\bar{x}/dt$ , где отклонения от тренда  $(\Delta x)^2$  малы в силу значительной детерминации процесса, можно приближённо, как и в волновой механике [14], пренебречь диффузионным членом в (2.6) и получится

$$\frac{\partial P'}{\partial t} = -a_0 \frac{\partial P'}{\partial x} - \gamma P' \frac{\partial P'}{\partial x} \quad (2.7)$$

т.е. нелинейное уравнение газовой динамики, решаемое методом характеристик [14].

Для типичных задач образуется ударная волна вероятности [14], впереди которой в силу начальных условий,  $P' = 0$ , а позади неё определяется  $P' = P'(t)$  из условий на ударной волне [14]. В частности, получается для наклона ударной волны  $x = x(t)$  известное из волновой динамики соотношение [14]

$$\frac{dx}{dt} = a_0 + \frac{\gamma}{2} P' \quad (2.8)$$

Как видно, (2.8) дает значение  $a$  из (2.5), чтобы сравнить с (2.3), полученного в линейной задаче, можно повторить те же выкладки для нелинейной, взяв в (2.1) нелинейный коэффициент (2.5).

Тогда получится с учётом  $p(t, \pm\infty) = 0$ ,

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{\partial p}{\partial t} dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \left( -\frac{\partial a p}{\partial x} \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left( a_0 + \frac{\gamma}{2} P' \right) p dx = a_0 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma}{2} P' p dx \quad (2.9)$$

Вначале, как и в [14], считается что, поскольку (2.9) есть среднее значение  $P'$ ,  $P'(t)$  дается решением на ударной волне, тогда получится с учётом  $a_0 \approx 0$ ,

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} \approx \frac{\gamma}{2} P'(t), \quad \frac{dx}{dt} = \frac{d\bar{x}(t)}{dt}, \quad \frac{dx(t)}{dt} \approx \pm \frac{\gamma}{2} P'(t), \quad \gamma > 0 \quad (2.10)$$

причём, в третьем уравнении добавлен знак “-“ для убывающих частей кривой рис.1, и окончательно, из наклона экспериментальной кривой процесса  $x = \bar{x}(t)$  можно определять параметры  $\gamma$ ,  $P'$  соотношением (2.10). Другой подход состоит в предположении, что  $P'$  есть вероятность процесса, описываемого плотностью  $p$ ,  $p = \partial P' / \partial x$ .

Тогда при взятых допущениях снова имеют место (2.7), (2.8), только в (2.5) нужно  $\frac{\gamma}{2}$  заменить  $\gamma$ , при этом, уже (2.9) даёт

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\gamma}{2} P'^2 \quad (2.11)$$

где использовано, что  $P'(t, -\infty) = 0$ , и обозначено  $P'(t, \infty) = P'(t, x)$  для больших  $x$  в рассматриваемой области.

С помощью метода нелинейной динамики волн [3], по указанным графикам, представляющим средние кривые процессов залечивания и в то же время ударные волны вероятностей случайных процессов, можно решать уравнение  $dx/dt \approx \gamma P'/2$ , где  $P' = P - P_0$ ,  $P_0 \approx 0.5$  а  $P$  – есть вероятность, причём, уравнение (2.11) для вдвое больших  $\gamma$  дает для  $P'$  близкие результаты.

Так как для макроскопических трещин, рассматриваемых в данной работе, процессы можно считать почти детерминированными, можно для макроскопических размеров ширины трещины (рис.1) в интервале по  $t(0; 0,001\text{сек.})$  предположить  $P = 1, P' = 0.5$  и можно получить  $dx/dt = \pm 4 \cdot 10^3 \text{ м/сек.}$ , тогда  $\gamma = 1.6 \cdot 10^4 \text{ м/сек.}$  Для  $b_0 = 0,001\text{см}$  даже в указанном узком интервале по  $t$   $dx/dt$  будет в 10 раз меньше, и для указанных  $\gamma, P' = 1/20$ , т.е. процесс более хаотичен. Такие же результаты получаются и для всех других графиков микроскопических размеров ширины трещины. Здесь используется метод ударных волн вероятности в рассмотрении кривых процесс залечивания трещины, что может быть применён к обратным процессам генерации макроскопических трещин путём изучения кривых процесс перехода от малых микро- и мезотрещины до макротрещины [16]. Кстати,  $dx/dt = \pm 400 \text{ м/сек.}$  на рис.1, что близко скорости волн Релея, а для  $b_0 = 10^{-4} \text{ см}$   $dx/dt = \pm 2 \text{ м/сек.}$ , что коррелирует с [8], где линейной теорией показано наличие быстрой и медленной волн для процессов в трещине.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Рыгов С.М. Введение в статистическую радиофизику. Случайные процессы. Ч.1 М.: Наука, 1976. 495с.
2. Айала Ф., Кайгер Дж. Современная генетика. Т.3. М.: Мир, 1998. 331с.
3. Глико А. О. //Труды VI межд. конф., Горис-Степанакерт, 2008. С.170-177.
4. Горячева И. Г., Добычин М. Н. Контактные задачи в трибологии. М.: 1988. 253с.
5. Ландау, Лифшиц. Механика сплошных сред. М.: 1954.
6. Bagdoyev A.G., Martirosyan A.N., Dinunts A.S., Davtyan A.V. The proceedings of International Conference. Topical Problems of Continuum Mechanics, Dilijan, Armenia, 2010, p. 242-247.
7. Сарайкин В.А., Слепян Л.И. //МТТ. 1979. №4.
8. Sleyuan L.I. Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2000. V.48. P.227–260.
9. Мартиросян А.Н. Математические исследования нестационарных линейных граничных задач для сплошных сред. Ереван: “Зангак–97”, 2007. 244с.
10. Багдоев А.Г., Мартиросян А.Н., Динунц А.С., Давтян А.В. Аналитическое и численное исследование задачи о залечивании трещины в термоупругой среде. //Докл. НАН РА. 2010. Т.110. № 2. С.151-162.
11. Мартиросян А.Н., Динунц А.С., Давтян А.В. Решения задачи о залечивании движущихся трещин в термоупругой среде // В сб.: “Проблемы механики деформируемого твердого тела”, посвящ. 90-летию академика НАН Армении С.А. Амбарцумяна. Ереван: 2012. С.193-202.
12. Мартиросян А.Н., Динунц А.С., Давтян А.В.// Докл. НАН Армении. Механика. 2012. Т.112, №2. С.176–184.
13. Мхитарян С.М., Шемян А.Л., Шемян Л.А.//VI Межд. конф. «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред». Горис-Степанакерт, 2008. С.345-349.
14. Багдоев А.Г., Варданян С.В., Карапетян Д.Р. Мартиросян Г.А. Прикладная эконометрика, 2009. Т.3. №1. С.50-69.
15. Мазур И.И., Молдавинов О.И. Введение в инженерную экологию. М.: Наука, 1989. 375с.
16. Vratov V.A., Morozov N.F., Petrov Y.V. The Proceed. of Int. Conf. “Topical Problems in Continuum Mechanics”. Yerevan. 2010, p. 256–260.

### Сведения об авторах:

**Мартиросян А.Н.** – доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. каф. математики Горисского гос. ун-та, г.Горис, ул. Авангарда 2, Горисский государственный университет, (374 93) 192465

**Динунц А.С.** – кандидат физ.-мат. наук, Горисский государственный университет  
**E-mail:** [dinuntsas@gmail.com](mailto:dinuntsas@gmail.com)

**Давтян А.В.** – Лектор каф. математики Горисского гос. университета

# ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ, ОБТЕКАЕМОЙ СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ГАЗА

Мартыросян С.Р.

В линейной постановке исследуется устойчивость тонкой упругой прямоугольной пластинки постоянной толщины с одним свободным и тремя шарнирно закрепленными краями. Пластика обтекается сверхзвуковым потоком газа в направлении от свободного края к противоположному шарнирно закрепленному краю. С помощью численно-аналитических методов анализа показана возможность возникновения как дивергенции пластинки, так и локализованной дивергенции в окрестности свободного края пластинки. Найдена критическая скорость потока, которая существенно зависит от коэффициента Пуассона и от относительной длины и ширины пластинки.

1. Рассмотрим прямоугольную тонкую упругую пластинку, которая в декартовой системе координат  $Oxyz$  занимает область  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ ,  $-h \leq z \leq h$ . Декартова система координат  $Oxyz$  выбирается так, что оси  $Ox$  и  $Oy$  лежат в плоскости невозмущенной пластинки, а ось  $Oz$  перпендикулярна к пластинке и направлена в сторону сверхзвукового потока газа, обтекающего пластинку с одной стороны в направлении оси  $Ox$  с невозмущенной скоростью  $V$ . Течение газа будем считать плоским и потенциальным. А также будем считать, что пластинка не подвержена действию усилий в срединной плоскости.

Пусть кромка  $x=0$  пластинки свободна, а кромки  $x=a$ ,  $y=0$  и  $y=b$  шарнирно закреплены.

Выясним условия, при которых наряду с невозмущенной формой равновесия (неизогнутая пластинка) возможна искривленная форма равновесия (изогнутая пластинка), когда изгиб пластинки обусловлен соответствующими аэродинамическими нагрузками.

В предположении справедливости гипотезы Кирхгофа и «поршневой теории» [1] дифференциальное уравнение изгиба пластинки описывается соотношением [2]

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + a_0 \rho_0 V \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad w = w(x, y). \quad (1.1)$$

Здесь  $w = w(x, y)$  – прогиб точек срединной поверхности пластинки;  $\rho_0$  – плотность невозмущенного потока газа,  $a_0$  – скорость звука в невозмущенной газовой среде;  $D$  – цилиндрическая жесткость пластинки на изгиб.

Граничные условия в принятых предположениях относительно способа закрепления кромок имеют вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0, \quad x = 0; \quad (1.2)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad x = a; \quad (1.3)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad y = 0 \text{ и } y = b; \quad (1.4)$$

где  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

Требуется найти значения критической скорости потока газа  $V_{cr}$ , при превышении которых возникает дивергентная неустойчивость: невозмущенная форма равновесия пластинки перестает быть устойчивой, а становится устойчивой изогнутая форма. Иными словами, требуется определить значения параметра  $V$ , при которых возможны нетривиальные решения дифференциального уравнения (1.1), удовлетворяющие граничным условиям (1.2) – (1.4).

Для нахождения решения поставленной задачи устойчивости пластинки сведём её к задаче на собственные значения для обыкновенного дифференциального уравнения.

Общее решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2) – (1.4), будем искать в виде

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(\lambda_n p x) \cdot \sin(\lambda_n y), \quad \lambda_n = \pi n b^{-1}. \quad (1.5)$$

Подставляя выражение (1.5) в уравнение (1.1), получаем характеристическое уравнение

$$q^4 - 2p^2 + \alpha_n^3 p + 1 = 0, \quad \alpha_n^3 = a_0 \rho_0 V D^{-1} \lambda_n^{-3}, \quad \alpha_n^3 > 0. \quad (1.6)$$

Поведение корней уравнения (1.6) в зависимости от параметров задачи (1.1) – (1.4) подробно исследовано в работе [3]. Корни характеристического уравнения (1.6) определяются выражениями [3]

$$p_{1,2} = -\frac{\sqrt{2(q_1+1)}}{2} \pm \sqrt{\sqrt{q_1^2-1} - \frac{q_1-1}{2}}, \quad p_1 < 0, \quad p_2 < 0; \quad (1.7)$$

$$p_{3,4} = \frac{\sqrt{2(q_1+1)}}{2} \pm i \sqrt{\sqrt{q_1^2-1} + \frac{q_1-1}{2}}, \quad \alpha_n^3 > 0.$$

Здесь  $q_1$  – единственный действительный корень кубического уравнения

$$q^3 + q^2 - q - 1 - \frac{\alpha_n^6}{8} = 0, \quad \alpha_n^3 = a_0 \rho_0 V D^{-1} \lambda_n^{-3}. \quad (1.8)$$

Из представления уравнения (1.8) в виде

$$8 \cdot (1+q)^2 (q-1) = \alpha_n^6. \quad (1.9)$$

и положительности её дискриминанта  $Q = \alpha_n^6 \left( \frac{1}{27} + \frac{\alpha_n^6}{256} \right)$  следует, что кубическое уравнение (1.8) при условии  $\alpha_n^3 > 0$  имеет один действительный корень  $q_1$  и пару комплексных сопряжённых корней [3]. При этом,

$$q_1 > 1. \quad (1.10)$$

2. Общее решение (1.5) дифференциального уравнения (1.1), в соответствии с вышеизложенным, можно представить в виде

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \{ C_{n1} \exp(\lambda_n p_1 x) + C_{n2} \exp(\lambda_n p_2 x) + \exp(\lambda_n \alpha x) \cdot (C_{n3} \cos(\lambda_n \beta x) + C_{n4} \sin(\lambda_n \beta x)) \} \cdot \sin(\lambda_n y), \quad \lambda_n = \pi n b^{-1}, \quad (2.1)$$

где  $p_i, i = \overline{1,4}$  – корни характеристического уравнения (1.6), определяемые выражениями (1.7);  $C_{nk}, k = \overline{1,4}$  – произвольные постоянные.

Подставляя выражение (2.1) в граничные условия (1.2) и (1.3), получаем однородную систему алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных  $C_{nk}$ . Далее, приравняв нулю определитель полученной системы, получаем следующее дисперсионное уравнение относительно  $q$  – единственного действительного корня уравнения (1.8) :

$$\begin{aligned} F(q, \gamma, n, \nu) = & \quad (2.2) \\ = & -B_1 B_2 \exp(-2\pi n \gamma \sqrt{2(q+1)}) \left[ 2(q+1)(q + \sqrt{q^2-1} - \nu) - (1-\nu)^2 \right] + \\ & + B_1 B_2 \left[ 2(q+1)(q - \sqrt{q^2-1} - \nu) - (1-\nu)^2 \right] + \\ & + B_2 \exp(-\pi n \gamma \sqrt{2(q+1)}) \left\{ [(4q^2 + 2q - 1)\sqrt{2(q-1)} - (2q^2 - 4q + 1)\sqrt{2(q+1)} - \right. \\ & \left. - 2((2q-1)\sqrt{2(q+1)} - q\sqrt{2(q-1)})\nu + (\sqrt{2(q+1)} + \sqrt{2(q-1)})\nu^2] \operatorname{sh}(\pi n \gamma B_1) + \right. \\ & \left. + 4B_1(q+1)\sqrt{q^2-1} \cdot \operatorname{ch} \pi n \gamma B_1 \right\} \cos(\pi n \gamma B_2) + \\ & + \exp(-\pi n \gamma \sqrt{2(q+1)}) \left\{ B_1 [-(4q^2 + 2q - 1)\sqrt{2(q-1)} - (2q^2 - 4q + 1)\sqrt{2(q+1)} - \right. \end{aligned}$$

$$-2((2q-1)\sqrt{2(q+1)} + q\sqrt{2(q-1)})v + (\sqrt{2(q+1)} - \sqrt{2(q-1)})v^2 \left] ch(\pi n \gamma B_1) - \right. \\ \left. -6(q^2-1)\sqrt{q^2-1} \cdot sh \pi n \gamma B_1 \right\} \sin(\pi n \gamma B_2) = 0,$$

где

$$\gamma = ab^{-1}, \quad \gamma \in (0, \infty); \quad (2.3)$$

$$B_1(q) = \sqrt{\sqrt{q^2-1} - 0.5(q-1)}, \quad B_2(q) = \sqrt{\sqrt{q^2-1} + 0.5(q-1)}, \quad q > 1. \quad (2.4)$$

Заметим, что здесь и далее в тексте в обозначении действительного корня уравнения (1.9) индекс "1" опущен.

Из выражений (2.4) следует, что

$$B_1(q) > 0, \quad B_2(q) > 0 \quad \text{при всех } q > 1. \quad (2.5)$$

Легко показать, что дисперсионное уравнение (2.2) в предельных случаях, в которых  $\gamma \rightarrow 0$  ( $b \rightarrow \infty$ ) и  $\gamma \rightarrow \infty$  ( $a \rightarrow \infty$ ), соответственно, приводится к виду

$$\frac{1}{2} \exp\left(-\frac{3}{2}sa\right) - \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}sa + \frac{\pi}{3}\right) = 0, \quad \gamma \rightarrow 0; \quad (2.6)$$

$$2(q+1) \cdot (q - \sqrt{q^2-1} - v) - (1-v)^2 = 0, \quad \gamma \rightarrow \infty; \quad (2.7)$$

где  $s^3 = a_0 \rho_0 VD^{-1}$  или, в соответствии с обозначениями (1.5), (1.6), (2.3) и соотношением (1.14),

$$sa = \pi n \gamma \sqrt{2q}. \quad (2.8)$$

Можно показать, что дисперсионное уравнение (2.6) в точности такое же, как и дисперсионное уравнение, полученное при исследовании задачи статической устойчивости удлиненной пластинки ( $0 \leq x \leq a$ ,  $-\infty \leq y \leq \infty$ ) в условии обтекания её сверхзвуковым потоком газа в направлении от свободного края  $x=0$  к шарнирно закреплённому краю  $x=a$ . Первый корень уравнения (2.6)  $V_{cr.div} = 0$ , т.е. невозмущённая форма равновесия удлиненной пластинки является изначально до обтекания статически неустойчивой.

Уравнение (2.7) в точности совпадает с дисперсионным уравнением, полученным в работе [3] при изучении явления локализованной дивергентной неустойчивости, возникающей в окрестности свободного края ( $x=0$ ) упругой полубесконечной пластины-полосы ( $0 \leq x < \infty$ ,  $0 \leq y \leq b$ ), обтекаемой сверхзвуковым потоком газа вдоль полубесконечных шарнирно закреплённых краев в направлении от свободного края ( $x=0$ ). При этом критическая скорость потока  $V_{cr.div}$  зависит от коэффициента Пуассона: она меньше в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона  $\nu$ .

В соответствии с обозначениями (1.5), (1.6) и соотношением (1.9), значение критической скорости потока, приводящее к дивергентной неустойчивости, определяется выражением

$$V_{cr.div} = 2\sqrt{2(q-1)} \cdot (q+1) \cdot \pi^3 n^3 D (a_0 \rho_0 b^3)^{-1}, \quad (2.9)$$

или, учитывая обозначение (2.3),

$$V_{cr.div} = 2\sqrt{2(q-1)} \cdot (q+1) \cdot \pi^3 n^3 \gamma^3 D (a_0 \rho_0 a^3)^{-1}. \quad (2.10)$$

Отсюда очевидно следует, что дивергентная форма потери устойчивости возможна только в случае, когда справедливо условие (2.9):  $q > 1$ ,  $q$  – действительный корень кубического уравнения (1.9).

Таким образом, анализ устойчивости плоской формы пластинки в потенциальном сверхзвуковом потоке сводится к исследованию уравнения (2.2).

**3.** С помощью численных методов анализа найдены первые корни  $q^*$  уравнения (2.2), соответствующие различным значениям коэффициента Пуассона  $\nu$  и параметра  $\gamma \in (0, \infty)$ ,

определяемого выражением (2.3). Подставляя полученные значения  $q = q^*$  в соотношения (2.6) или (2.7), получаем соответствующие значения критической скорости потока  $V_{cr div}$ , приводящие к дивергентной неустойчивости: при значениях скорости потока  $V \geq V_{cr div}$  невозмущенная форма равновесия пластинки перестает быть устойчивой. Некоторые результаты расчетов – значения  $V_{cr div} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ , соответствующие различным значениям  $\nu$  и  $\gamma$ , представлены в табл.1.

Отметим, что для всех  $\nu \in (0, 0.5)$  и  $\gamma \in (0, \infty)$  наименьшее значение скорости потока достигается при значении  $n = 1$ .

В результате расчёта было установлено, что при всех  $\gamma \in (0, \infty)$  критическая скорость  $V_{cr div}$  зависит от величины коэффициента Пуассона  $\nu$  и отношения сторон  $\gamma = ab^{-1}$  прямоугольника: критическая скорость  $V_{cr div}$  меньше в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона  $\nu$ , а с возрастанием  $\gamma$  значение критической скорости растет (табл. 1).

Таблица 1

$\gamma \backslash \nu$	0.125	0.25	0.375	0.5
$1 \cdot 10^{-4}$	$0.365 \cdot 10^{-6}$	$0.332 \cdot 10^{-6}$	$0.294 \cdot 10^{-6}$	$0.265 \cdot 10^{-6}$
$1 \cdot 10^{-2}$	$0.365 \cdot 10^{-2}$	$0.332 \cdot 10^{-2}$	$0.294 \cdot 10^{-2}$	$0.265 \cdot 10^{-2}$
$1 \cdot 10^{-1}$	0.365	0.332	0.294	0.265
$5 \cdot 10^{-1}$	14.95	13.51	10.78	9.06
$8 \cdot 10^{-1}$	80.47	60.09	46.75	35.95
1.0	523.52	157.17	101.04	70.21
1.2	613.53	320.01	194.87	133.24
1.5	980.85	595.82	388.36	269.25
1.8	1695.90	992.19	695.13	440.55
2.0	2598.09	1382.02	953.54	604.31

В случае достаточно длинных пластинок ( $\gamma = ab^{-1} \leq 0.0001$ ) значение критической скорости, примерно, порядка  $V_{cr div} \approx 10^{-7} D(a_0 \rho_0 a^3)^{-1}$ , а с уменьшением  $\gamma$  стремится к нулю. Это означает, что при значениях  $\gamma \leq 0.0001$  поведение обтекаемой в сверхзвуковом потоке газа прямоугольной пластинки примерно такое же, как и удлиненной пластинки  $\gamma \rightarrow 0$  ( $b \rightarrow \infty$ ): в обоих случаях невозмущенная форма равновесия пластинки, являясь изначально до обтекания статически неустойчивой, остается такой же и при обтекании её потоком газа.

Начиная с  $\gamma = 2$ , значения критических скоростей потока, найденные в данной работе для различных значений коэффициента Пуассона  $\nu$  (табл.1), пересчитанные по формуле (2.9), примерно равны значениям критических скоростей потока, полученных в работе [3] при исследовании задачи локализованной дивергенции пластины-полосы. Тем самым, начиная с  $\gamma = 2$ , прямоугольная пластинка в потоке газа теряет статическую устойчивость при скоростях потока, равных критическим скоростям, при которых наблюдается явление локализованной дивергенции в окрестности свободного края полубесконечной пластины-полосы.

Таким образом, в случае, когда ширина пластинки превосходит ее длину более чем в два раза, поведение прямоугольной пластинки в потоке газа аналогично поведению полубесконечной пластины-полосы: наблюдается явление локализованной дивергентной

неустойчивости в окрестности свободного края пластинки. При этом, критические скорости потока, приводящие к статической потере устойчивости, примерно равны и зависят от коэффициента Пуассона. Критическая скорость потока меньше в пластинках из материалов с большим коэффициентом Пуассона. А в случае, когда отношение ширины пластинки к её длине порядка  $10^{-4}$  и меньше, то поведение прямоугольной пластинки в сверхзвуковом потоке газа такое же, как и поведение обтекаемой удлиненной пластинки.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях // ПММ. 1956. Т.20. № 6. С.733-755.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Наука. 1961. 329 с.
3. Belubekyan M.V., Martirosyan S.R. The Localized Instability of the Elastic Plate-Strip Streamlined by Supersonic Gas Flow// Изв. НАН Армении. Механика. 2012. Т.65. №1.С.29–34.

#### Сведения об авторе:

**Мартirosян Стелла Размиковна** – кандидат физ-мат. наук, старший научный сотрудник, Институт механики НАН Армении, Ереван, Армения (+374 10) 524890

**E-mail:** [mechinsstella@mail.ru](mailto:mechinsstella@mail.ru)

# ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ СОСТАВНОЙ БАЛКИ СО СОСРЕДОТОЧЕННОЙ МАССОЙ

Микаелян А.О.

Рассматриваются задачи устойчивости составной балки со сосредоточенной массой и сжатой на свободном конце или нагрузкой с неизменяемым направлением, или следящей нагрузкой.

Подобные задачи рассматривались в работах G.E. Lee and E. Reissner и Л.А.Мовсисяна.

Составная балка состоит из двух частей имеющих разные изгибные жёсткости. Один конец балки шарнирно закреплён. В месте раздела балки на две части поставлена подвижная опора. В обоих случаях определяется критическая сила.

В третьем пункте рассматривается задача со сосредоточенной массой при следящей нагрузке. В этой задаче определяется критическая нагрузка дивергентной неустойчивости, а для определения критической нагрузки флаттерной неустойчивости рассматриваются частные случаи. После этого сравниваются значения критической нагрузки дивергентной и флаттерной неустойчивости.

## 1. Задача устойчивости составной балки, сжатой нагрузкой с неизменяемым направлением.

Уравнения устойчивости составной балки принимаются в виде [1]:

$$D_1 \frac{d^4 W_1}{dx^4} + P \frac{d^2 W_1}{dx^2} = 0, \quad (1.1)$$

$$D_2 \frac{d^4 W_2}{dx^4} + P \frac{d^2 W_2}{dx^2} = 0, \quad (1.2)$$

т.е. предполагается, что в реальном уравнении устойчивости пренебрегаются инерционный член и силы от внутреннего и внешнего трения.

В рассматриваемой задаче граничные условия принимаются в виде:

$$x = -b; \quad W_1(-b) = W_1''(-b) = 0, \quad (1.3)$$

$$x = 0; \quad W_1(0) = W_2(0) = 0, \quad W_1'(0) = W_2'(0), \quad D_1 W_1''(0) = D_2 W_2''(0), \quad (1.4)$$

$$x = a; \quad W_2'''(a) = 0, \quad D_2 \frac{d^3 W_2}{dx^3} + P \frac{dW_2}{dx} = 0. \quad (1.5)$$

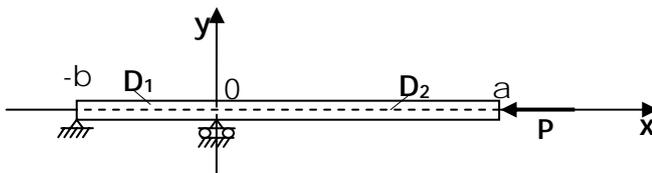


Рис.1

Решая уравнения (1.1), (1.2) и удовлетворяя граничным условиям (1.3), (1.4), (1.5), получим систему уравнений. Приравняв детерминант системы уравнений нулю, получим следующее трансцендентное уравнение:

$$\gamma \alpha^2 b \cot \beta a \tan \alpha b = \beta^2 (\tan \alpha b - \alpha b), \quad (1.6)$$

где  $\gamma = \frac{D_1}{D_2}; \quad \alpha^2 = \frac{P}{D_1}; \quad \beta^2 = \frac{P}{D_2}.$

Чтобы из уравнения (1.6) определить критическую нагрузку, рассмотрим частный случай.

Пусть  $\gamma = 1$  и  $a + b = c = \text{const}$ , т.е. длина балки остаётся неизменной. Меняем только положение подвижной опоры, т.е.меняем значения а и b.

При  $\gamma = 1$   $\alpha = \beta$ , а из уравнения (1.6) получаем

$$ab \tan \alpha b = \tan \alpha a (\tan \alpha b - \alpha b), \quad (1.7)$$

Значения а и b, при которых определяется критическая нагрузка, приводятся в нижеследующей таблице:

$a/c$	$b/c$	$P_k c^2 / D_1$
0.99	0.01	2.50063
0.84	0.16	3.09094
0.69	0.31	3.90883
0.54	0.46	5.05781
0.39	0.61	6.62788
0.24	0.76	8.44328
0.09	0.91	9.68346
0.03	0.97	9.85079

Как показывают расчёты и как видно из таблицы,  $P_{kr}$  монотонно возрастает (см. рис. 2):

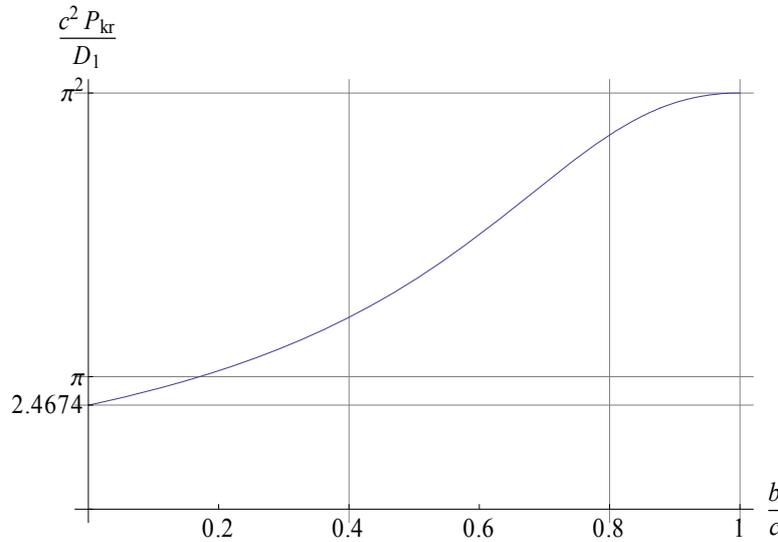


Рис. 2

## 2. Задача устойчивости составной балки, сжатой следящей нагрузкой.

Уравнения устойчивости составной балки принимаются в виде (1.1) и (1.2).

Граничные условия принимаются в виде (1.3) и (1.4) и ещё прибавляются следующие условия:

$$x = a; \quad W_2''(a) = 0, \quad \frac{d^3 W_2}{dx^3} = 0. \quad (2.1)$$

Решая уравнения (1.1), (1.2) и удовлетворяя граничным условиям (1.3), (1.4), (2.1), получим систему уравнений. Приравняв детерминант системы уравнений нулю, получим следующее трансцендентное уравнение:

$$D_1 \alpha^2 b \tan \alpha b = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha b = \pi n \quad \Rightarrow \quad P_{кр} = D_1 \frac{\pi^2}{b^2} .$$

### 3. Задача устойчивости составной балки со сосредоточенной массой при следящей нагрузке.

Уравнения устойчивости составной балки принимаются в виде (1.1) и (1.2).

Граничные условия принимаются в виде (1.3) и (1.4) и ещё прибавляются следующие условия:

$$x = a; \quad W_2''(a) = 0, \quad D_2 \frac{d^3 W_2}{dx^3} = m \frac{d^2 W_2}{dt^2} \quad (3.1)$$

Решая уравнения (1.1), (1.2) и удовлетворяя граничным условиям (1.3), (1.4), (3.1), получим систему уравнений. Приравняв детерминант системы уравнений нулю, получим следующее трансцендентное уравнение:

$$\begin{aligned} & -D_1 b \alpha^2 \beta^3 \tan \alpha b \tan \beta a \sin \beta a - D_1 b \alpha^2 \beta^3 \tan \alpha b \cos \beta a + \beta^2 b \omega^2 m \tan \alpha b \tan \beta a - \\ & - \beta^2 b \omega^2 m \tan \alpha b \tan \beta a \cos \beta a + \beta^2 b \omega^2 m \tan \alpha b \sin \beta a - \beta^2 b \omega^2 a m \tan \alpha b - \\ & - \beta^2 \alpha b \omega^2 m a \tan \beta a + \beta^2 a \omega^2 m \tan \alpha b \tan \beta a = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

При  $m = 0$  получаем

$$D_1 b \alpha^2 \beta^3 \tan \alpha b [\tan \beta a \sin \beta a + \cos \beta a] = 0. \quad (3.3)$$

Из уравнения (3.3) получается

$$\alpha b = \pi n \quad \Rightarrow \quad P_{кр} = D_1 \frac{\pi^2}{b^2} , \quad (3.4)$$

которое совпадает с задачей устойчивости составной балки, сжатой следящей нагрузкой.

Из уравнения (3.2) очевидно, что минимальная критическая нагрузка, приводящая к дивергентной ( $\omega = 0$ ) неустойчивости, будет

$$\alpha = \frac{\pi}{b} \quad \text{или} \quad P_{кр}^I = D_1 \frac{\pi^2}{b^2} . \quad (3.5)$$

Из уравнения (3.2) получаем

$$\omega^2 = \frac{D_1 b \alpha^2 \beta^3 \tan \alpha b [\tan \beta a \sin \beta a + \cos \beta a]}{m [b \tan \alpha b [\tan \beta a - \beta a] + a \tan \beta a [\tan \alpha b - \alpha b]]} . \quad (3.6)$$

Минимальная критическая нагрузка, приводящая к флаттерной ( $\omega \rightarrow \infty$ ) неустойчивости, получается из следующего уравнения:

$$b \tan \alpha b [\tan \beta a - \beta a] + a \tan \beta a [\tan \alpha b - \alpha b] = 0. \quad (3.7)$$

Для нахождения критической нагрузки флаттерной неустойчивости, для уравнения (3.7) рассмотрим частные случаи:

1. Пусть  $b \rightarrow 0$ .

Из уравнения (3.7) получаем

$$\tan \beta a - \beta a = - \frac{ab^2 a \tan \beta a}{3 \left( \alpha b + \frac{(\alpha b)^3}{3} \right)} \quad (3.8)$$

Из уравнения (3.8) следует, что при  $b \rightarrow 0$  получаем

$$\tan \beta a = \beta a \Rightarrow \beta a = \frac{3}{2}\pi \Rightarrow P_{кр}^{\phi} = D_2 \frac{9\pi^2}{4a^2}. \quad (3.9)$$

Рассмотрим частный случай, когда  $a = b$  и  $D_1 = D_2$ , тогда получим  $P_{кр}^{\phi} = D_1 \frac{9\pi^2}{4b^2}$ .

Отсюда следует, что критическая нагрузка дивергентной неустойчивости намного меньше флаттерной  $P_{кр}^{\pi} < P_{кр}^{\phi}$ .

2. Пусть  $\beta \rightarrow 0$ .

Из уравнения (3.7) получаем

$$\tan \alpha b - \alpha b = -\frac{b(\beta a)^3 \tan \alpha b}{3\alpha \left( \beta a + \frac{(\beta a)^3}{3} \right)} \quad (3.10)$$

Из уравнения (3.10) следует, что при  $\beta \rightarrow 0$  получаем

$$\tan \alpha b = \alpha b \Rightarrow \alpha b = \frac{3}{2}\pi \Rightarrow P_{кр}^{\phi} = D_1 \frac{9\pi^2}{4b^2}. \quad (3.11)$$

Отсюда следует, что критическая нагрузка дивергентной неустойчивости намного меньше флаттерной  $P_{кр}^{\pi} < P_{кр}^{\phi}$ .

3. Пусть  $\alpha = \beta$  и  $a = b$ .

Из уравнения (3.7) получаем

$$\tan \alpha b [\tan \alpha b - \alpha b] = 0. \quad (3.12)$$

Из (3.12) получается

$$\alpha b \approx 3.14 \Rightarrow P_{кр}^{\phi} = D_1 \frac{9,86}{b^2}. \quad (3.13)$$

Отсюда следует, что критическая нагрузка дивергентной неустойчивости совпадает с критической нагрузкой флаттерной неустойчивости  $P_{кр}^{\pi} = P_{кр}^{\phi}$ .

4. Пусть  $\alpha = \beta$  и  $b = \frac{a}{100}$ .

Из уравнения (3.7) получаем

$$\frac{\alpha}{100} \tan \frac{\alpha a}{100} [\tan \alpha a - \alpha a] + \alpha \tan \alpha a \left[ \tan \frac{\alpha a}{100} - \frac{\alpha a}{100} \right] = 0 \quad (3.14)$$

Из (3.14) получается

$$\alpha a \approx 4.48 \Rightarrow P_{кр}^{\phi} = D_1 \frac{20,07}{a^2}. \quad (3.15)$$

Отсюда следует, что критическая нагрузка дивергентной неустойчивости намного больше флаттерной  $P_{кр}^{\pi} > P_{кр}^{\phi}$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Уч.-изд. Физ., 1964. 336с.
2. Гнуни В.Ц. Оптимальный выбор расположения опор в задачах изгиба, колебаний и устойчивости упругой балки. // В сб.: “Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем”. Ереван: Изд.ЕГУ, 1997. С.114–117.
3. G.E. Lee and E. Reissner Note on a problem of beam buckling. //Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP). 1975. Vol.26. P.839-841.
4. Мовсисян Л.А. К упругой и вязкоупругой устойчивости составного стержня. //Изв. НАН Армении. Механика. 1991. Т.44. № 4. С.3-11.

### Сведения об авторе:

**Микаелян Асмик Овиковна** – аспирант кафедры механики, Ереванский государственный университет, факультет математики и механики, (374 77) 03 63 49, (374 96) 03 63 49

**E-mail:** [hasomik@mail.ru](mailto:hasomik@mail.ru)

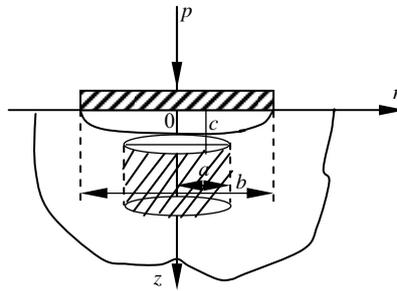
# ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА С ВЕРТИКАЛЬНЫМ КОНЕЧНЫМ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ РАЗРЕЗОМ

Минасян А.Ф.

Даётся постановка и решение осесимметричной контактной задачи о штампе на границе полупространства с цилиндрическим вертикальным разрезом.

Рассматривается осесимметричная контактная задача теории упругости для изотропного полупространства, ослабленного цилиндрическим разрезом с радиусом „ $a$ ”, Разрез имеет конечную длину „ $c$ ” (фиг.1). На границе полупространства приложен жёсткий круглый штамп с произвольным основанием, радиус которого больше радиуса цилиндрического разреза ( $b > a$ ) (фиг.1).

Предполагается, что отсутствует трение между штампом и полупространством вне штампа и в разрезе отсутствуют внешние усилия. На вертикальной поверхности вне цилиндрического разреза заданы условия полного контакта.



Фиг. 1

Общее решение основных уравнений теории упругости в осесимметричном случае в цилиндрической системе координат имеет вид:

$$\Delta^2 \Phi = 0; \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$2GU = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z}$$

$$2Gw = \left[ 2(1-\nu)\Delta - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \Phi + c$$

$$\sigma_r = \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu\Delta - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \Phi$$

$$\sigma_z = \frac{\partial}{\partial z} \left[ (2-\nu)\Delta - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \Phi$$

$$\sigma_\varphi = \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu\Delta - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \Phi$$

$$\tau_{rz} = \frac{\partial}{\partial z} \left( (1-\nu)\Delta - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi$$
(1)

Поставленная задача, как известно [8], сводится к определению бигармонических функций  $\Phi_1(r, z)$  для цилиндра и  $\Phi_2(r, z)$  – для полупространства с цилиндрической выемкой, которые в рассматриваемой задаче удовлетворяют следующим граничным условиям, заданным на границе полупространства, и условиям полного контакта вне разреза

$$U_z^{(1)}(r, 0) = f(r); 0 \leq r \leq a \quad U_z^{(2)}(r, 0) = f(r); \alpha \leq r \leq b \quad (1)$$

$$\tau_{rz}^{(1)}(r, 0) = 0; 0 \leq r \leq a \quad \sigma_z^{(2)}(r, 0) = 0; b < r < \infty$$

$$\tau_{rz}^{(2)}(r, 0) = 0; a < r < \infty$$

$$\sigma_r^{(1)}(a, z) = \sigma_r^{(2)}(a, z) = \tau_{rz}^{(2)}(a, z) = 0 \quad 0 < z < c \quad (2)$$

$$U_r^{(1)}(a, z) = U_r^{(2)}(a, z), \quad U_z^{(1)}(a, z) = U_z^{(2)}(a, z) \quad c < z < \infty$$

$$\tau_{rz}^{(1)}(a, z) = \tau_{rz}^{(2)}(a, z); \quad \sigma_r^{(1)}(a, z) = \sigma_r^{(2)}(a, z)$$

Бигармоническая функция для цилиндра ищется в виде суммы интегралов Фурье и ряда Фурье–Дини [1]:

$$\begin{aligned} \Phi_1(r, z) = & \int_0^\infty [A_1(\alpha)I_0(\alpha a) + \alpha r B_1(\alpha)I_1(\alpha r)] \sin(\alpha z) d\alpha + \\ & + \sum_{k=1}^\infty (F_k + \lambda_k z G_k) e^{-\lambda_k z} \bar{J}_0(\lambda_k r) \quad 0 \leq r \leq a, 0 \leq z < \infty \end{aligned} \quad (3)$$

а для полупространства с цилиндрической (полостью) выемкой – в виде суммы интегралов Фурье и Вебера [5]:

$$\begin{aligned} \Phi_2(r, z) = & \int_0^\infty [A_2(\alpha)K_0(\alpha r) + \alpha r B_2(\alpha)K_1(\alpha r)] \sin(\alpha z) d\alpha + \\ & + \int_0^\infty \lambda [A(\lambda) + \lambda z B(\lambda)] e^{-\lambda z} W_0(\lambda r) d\lambda \quad a \leq r < \infty, 0 < z < \infty \end{aligned} \quad (4)$$

где  $W_i(x)$  – функция Вебера.

$$W_n(\lambda r) = \bar{J}_n(\lambda r) Y_1(\lambda a) - Y_n(\lambda r) \bar{J}_1(\lambda a) \quad (n = 0, 1)$$

Вычисляем с помощью (3) и (4) по обычным формулам перемещения и напряжения [8] и удовлетворяем граничным условиям (2). Тогда задача приводится к системе 3 парных интегральных уравнений.

В результате их решения все искомые функции выражаются через неизвестное перемещение  $\varphi(r)$  вне штампа и получается уравнение

$$S(t) = t \int_b^t \frac{\varphi'(r) dr}{\sqrt{t^2 - r^2}} \quad (5)$$

Получаем интегральное уравнение типа Фредгольма второго рода относительно  $S(t)$

$$S(t) = \int_b^\infty S(y) K(y, t) dy + \Psi(t) \quad (6)$$

Ядро  $K(y, t)$  содержит интегралы от комбинации Бесселевых и экспоненциальных функций.

Имея в виду асимптотические разложения функций Бесселя [2], получаем

$$\int_b^\infty |K(y, t) dy| < 1$$

Значит, интегральное уравнение (6) можно решить методом последовательных приближений. Далее можно определить все искомые функции, напряжения и перемещения по известным формулам [8] будут определены в любой точке полупространства с цилиндрической выемкой. Напряжения под штампом имеют корневую особенность в точке  $r = b$ .

$$\sigma_z(r, 0) = \frac{r}{b} \frac{F(r)}{\sqrt{b^2 - r^2}} + w(r) \quad (7)$$

где  $F(r)$  – гипергеометрическая функция Гаусса,  $w(r)$  – регулярная функция относительно  $r$ .

Связь между усилиями, действующим на штамп, и их осадкой определяется по формулам

$$P = 2 \int_0^b \sigma_z(r, 0) r dr \quad (8)$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н.Х., Абрамян Б.Л. Некоторые осесимметричные контактные задачи для полупространства и упругого слоя с вертикальным цилиндрическим отверстием. //Изв.АН Арм.ССР. Механика. 1969. Т.ХХII. №2. С.3–13.
2. Бейтман Т., Эрдейн А. Высшие трансцендентные функции. Т.2. Функции Бесселя. М.: 1966.
3. Макарян В.С., Папоян С.О. Об одной контактной задаче для упругого полупространства с полубесконечной цилиндрической выемкой. //Изв.АН Арм.ССР. Механика.1980. Т.ХХХII. №1. С.3–11.
4. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1963.
5. Чибриков Л.И. О решении некоторых полных сингулярных интегральных уравнений. //Уч. записки Казанского Ун-та. 1962. Т.122, кн.3.
6. Абрамян Б.Л., Арутюнян Н.Х. //ПММ. 1967. Т.31. Вып.6.
7. Srivastov R.P., Narain Prem Stress distribution to pressurized exterior crack in an infinite isotropic medium with coaxial cylindrical cavity.// Int. J. Eng Sci. Vol. 4. №6. 1966.
8. Абрамян Б.Л. Пространственные задачи теории упругости. Ереван: НАН Армении.1998.

#### Сведения об авторе:

**Минасян Арутюн Фарсович** – кандидат физ. мат. наук, доцент, научный сотрудник НАН Армении.

# О ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ СО СТРИНГЕРАМИ С УЧЁТОМ ФАКТОРА СТАРЕНИЯ

Мирзоян С.Е., Акопян В.В.

В постановке теории ползучести неоднородно наследственно-стареющих тел рассматривается задача для полосы, когда в одном периоде содержится прямоугольник, который вдоль вертикальных кромок усилен двумя одинаковыми стрингерами и подвергается действию симметричных нормальных сил. Находящийся в условиях плоской деформации прямоугольник, при помощи стрингеров подвешен на нерастяжимых лентах к двум неподвижным точкам. При различных вязкоупругих характеристиках прямоугольника и стрингеров, принимая допущения Мелана для стрингеров, исследуется напряжённо-деформированное состояние прямоугольника. При указанных предположениях задача сводится к решению системы бесконечных систем линейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода и линейных алгебраических уравнений.

Технология возведения и изготовления многих конструкций из стареющих материалов неразрывно связана с процессом их дискретного или непрерывного наращивания элементами материала с различными возрастами. Такие материалы характеризуются тем, что в ходе их наращивания различные элементы этих тел изготавливаются в разные моменты времени, а это значит, что возраст материала таких тел зависит от пространственных координат.

Известно, что теория ползучести неоднородно наследственно-стареющих сред, предложенная Н.Х. Арутюняном [1,2], наиболее точно отражает физико-механические процессы, происходящие в телах и конструкциях, изготовленных из стареющих разновозрастных вязкоупругих материалов.

Параллельно с развитием математической теории вязкоупругости и теории ползучести наследственно-стареющих сред развивалась теория контактных и смешанных задач с учётом фактора ползучести [3,4].

В данной работе в постановке теории ползучести неоднородно наследственно-стареющих тел [1] рассматривается напряжённо-деформированное состояние периодической системы прямоугольников, которые усилены симметрично по своим вертикальным кромкам стрингерами, при помощи которых прямоугольники подвешены на нерастяжимых лентах к неподвижным точкам.

В такой постановке задачи, если ограничиться рассмотрением основного периода, приходим к плоской задаче для прямоугольника  $[-l \leq x \leq l, 0 \leq y \leq b]$ , усиленного по краям  $x = \pm l$  стрингерами длины  $b$  и малой толщины  $h$ .

Для стрингера, как обычно, принимается известное допущение Мелана [5] о том, что стрингер в вертикальном направлении растягивается или сжимается как стержень, находясь в одноосном напряжённом состоянии. Кроме того, ввиду симметрии, здесь принимается также, что перемещение в зоне контакта в горизонтальном направлении равно нулю [6].

Будем считать, что для материалов прямоугольника и стрингеров коэффициенты поперечного сжатия для упругой деформации  $v_1(t)$  и деформации ползучести  $v_2(t, \tau)$  одинаковы и постоянны:  $v_1(t) = v_2(t, \tau) = v = \text{const}$ .

Требуется определить закон распределения нормальных и касательных напряжений на линии соединения стрингера с прямоугольником, если в момент времени  $\tau_0$  к прямоугольнику на кромке  $y = b$  приложена симметричная относительно оси  $Oy$  нормальная нагрузка  $p(x, t)$ .

На основе сделанных предположений поставленная задача для стрингера математически формулируется в виде соотношений

$$u_1^*(y, t) = 0, \quad \varepsilon_y^{(1)}(y, t) = \frac{1 - v_1^2}{h} [1 - L_1] \int_0^y \frac{\tau(s, t)}{E_1^*(t, y)} ds \quad (1)$$

где  $u_1^*(y, t)$  – перемещение,  $\varepsilon_y^{(1)}(y, t)$  – осевая деформация стрингера, т.е. деформация в вертикальном направлении. Деформация же граничных точек прямоугольника  $\varepsilon_y^{(2)}(t, y)$  на линии контакта выражается формулой

$$\varepsilon_y^{(2)}(t, y) = \frac{1-v_2^2}{b} [1-L_2] \int_{-b}^b \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2b} (y-s) \frac{\tau(s, t)}{E_2^*(t, y)} ds - \frac{1-v_2^2}{b} [1-L_2] \frac{R(t, y)}{E_2^*(t, y)}$$

$$L_i[Y(t)] = \int_{\tau_0}^t E_i^*(\tau) K_i^*(t, \tau) Y(\tau) d\tau, \quad E_i^*(t, y) = E_i[t + \chi_i(y),]$$

$$K_i^*[t, \tau, y] = K_i[t + \chi_i(y), \tau + \chi_i(y)], \quad \chi_i(y) = \tau_i(y) - \tau_0, \quad \tau_2 = \text{const} \quad (i=1, 2)$$

Здесь  $K_i^*(t, \tau, y)$ ,  $(i=1, 2)$  – известные ядра ползучести [1],  $R(y, s)$  – непрерывная по обоим аргументам функция, характеризующая упруго-мгновенное напряжённое состояние прямоугольника,  $E_i(t, y)$ ,  $(i=1, 2)$  – модули упругости,  $\tau_i(t, y)$ ,  $(i=1, 2)$  – возрасты материалов, а  $\tau(x, t)$  – неизвестные тангенциальные контактные напряжения.

Заметим, что на линии соединения стрингера с прямоугольником должны удовлетворяться условия контакта:

$$u_1^*(y, t) = u_2^*(y, t), \quad \varepsilon_y^{(1)}(y, t) = \varepsilon_y^{(2)}(y, t) \quad (x = \pm l, \quad 0 \leq y \leq b, \quad \tau \geq \tau_0) \quad (3)$$

При этом, из условия равновесия стрингера имеем

$$\int_0^b \tau(s, t) ds = T(t) \quad (4)$$

где  $T(t)$  – сила натяжения в лентах.

Из условия равновесия всей системы находим

$$2T(t) = \int_0^l p(s, t) ds \quad (5)$$

Теперь из условий контакта (3), с учётом (2) (4) и (5), для определения неизвестных контактных тангенциальных напряжений получим следующую систему уравнений, состоящую из бесконечной системы линейных алгебраических уравнений и сингулярного интегро-дифференциального уравнения:

$$X_p(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{p,n}^{(2)} Y_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_{p,n}^{(2)} X_n(t) + N_p(t) \quad (6)$$

$$\left[1 - L_2^0\right] \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ctg} \frac{\eta - \xi}{2} \varphi'(\xi, t) d\xi = \lambda_0(t, \eta) \left[1 - L_1^0\right] \varphi(\eta, t) + R_1(\eta, t) \quad (7)$$

где использованы обозначения:

$$x_m(t) = 2 \frac{th\mu_m}{b} \int_0^b \sigma(s, t) \sin \beta_m s ds$$

$$\varphi'(\xi, t) = \tau\left(\frac{b\xi}{\pi}, t\right), \quad \lambda(t, y) = \frac{(1-v_1^2)E_1^*(t)b}{(1-v_2^2)E_1^*(t)h}$$

$$R_0(\eta, t) = \frac{\pi}{h} R_0(h\eta/\pi, t), \quad \lambda_0(\eta, t) = \lambda(h\eta/\pi, t),$$

$$L_i^0[Y(t)] = \int_{\tau_0}^t E_i^*(t) K_i^*(t, \tau) Y(\tau) d\tau, \quad (i=0, 2)$$

а  $Y_n(t)$  – решение следующей бесконечной линейной алгебраической системы для прямоугольника:

$$Y_p(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{p,n}^{(1)} Y_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_{p,n}^{(1)} X_n(t) + N_p^{(2)} \quad (8)$$

Отметим при этом, что коэффициенты  $A_{n,p}^{(i)}(t)$ ,  $B_{n,p}^{(i)}(t)$ ,  $N_p(t)$ , ( $i=1,2$ ) по структуре аналогичны приведённым в [7].

Интегро-дифференциальное уравнение (7), согласно (4) и (5), должно рассматриваться при граничных условиях

$$\varphi(-\pi, t) = 0, \quad \varphi(\pi, t) = \frac{2\pi}{b}. \quad (9)$$

Заметим, что в уравнении (7) операторы по пространственной и временной координатам не разделяются друг от друга и к обсуждаемой задаче не применим принцип Вольтерра.

Решение уравнения (7) при условиях (9) представим в виде бесконечного ряда

$$\varphi'(\xi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n(t) \cos n\xi \quad (-\pi < \xi < \pi), \quad (10)$$

где  $Z_n(t)$  ( $n=1,2,\dots$ ) – неизвестные коэффициенты, зависящие от времени и подлежащие определению.

Исходя из последнего представления и учитывая условия (9), сразу находим

$$Z_0(t) = \frac{T(t)}{b} = \frac{1}{2b} \int_{-l}^l P(x, t) dx. \quad (11)$$

Далее, по известной процедуре [8], уравнение (7), после несложных выкладок, сведём к бесконечной системе линейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода относительно неизвестных коэффициентов  $Z_n(t)$  ( $n=1,2,\dots$ ). После несложных преобразований для определения  $X_n(t)$ ,  $Y_n(t)$  и  $Z_n(t)$  ( $n=1,2,\dots$ ) получим систему бесконечных систем линейных интегральных уравнений Вольтерра и алгебраических уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned} Y_p(t) + \sum_{n=1}^{\infty} D_{p,n}^{(1)} Y_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} F_{p,n}^{(1)} X_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} E_{p,n}^{(1)} Z_n(t) &= a_p^{(1)}(t) \\ X_p(t) + \sum_{n=1}^{\infty} D_{p,n}^{(2)} Y_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} F_{p,n}^{(2)} X_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} E_{p,n}^{(2)} Z_n(t) &= a_p^{(2)}(t) \\ Z_p(t) + \sum_{n=1}^{\infty} D_{p,n}^{(3)} Y_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} F_{p,n}^{(3)} X_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} E_{p,n}^{(3)} Z_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\tau_0}^t K_{p,n}^{(1)}(t, \tau) d\tau &= a_p^{(3)}(t) \end{aligned} \quad (12).$$

Для исследования системы (12) на регулярность заметим, что ядра этой системы являются коэффициентами Фурье квадратично суммируемых функций, поэтому, следуя известной методике [9], можно показать, что система бесконечных систем (12) квазивполне регулярна, причём, при больших  $p$  свободные члены системы имеют порядок убывания не менее чем  $1/p$ . Следовательно, для решения системы (12) можно использовать метод последовательных приближений.

Для выделения особенности контактных напряжений на границах контакта стрингера с прямоугольником можно воспользоваться асимптотикой неизвестных [10], входящих в бесконечные системы, и вычислить главные части рядов в выражениях напряжений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н.Х. Некоторые задачи теории ползучести для неоднородно-старееющих тел. // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. №3. С.153-164.
2. Арутюнян Н.Х., Колмановский В.Б. Теория ползучести неоднородных тел. М: Наука, 1983. 336с.
3. Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В. Контактные задачи теории ползучести. Ереван: 1999, 320с.
4. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488с.

5. Melan E. Ein Beitrag zur theorie geschweisster verbindungen. //Ing. Archiv, H.2, Bd. 31932, s. 123-129.
6. Buffler H. Der spannungszustand in einer geschichteten seible. //ZAMM. 1961. Bd.41. №4. S.158-180.
7. Акопян В.В., Мирзоян С.Е., Мхитарян С.М. О контактном взаимодействии между прямоугольником и двумя одинаковыми стрингерами с учётом фактора старения. / В сб.: “Современные проблемы теории контактных взаимодействий”. Ереван: Изд. НАН РА, 1996. С.33-45.
8. Давтян З.А., Мхитарян С.М. О двух контактных задачах кручения цилиндров при помощи цилиндрических оболочек с учётом их вязкоупругих свойств. // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1984. Т.37. №3. С.3-17.
9. Мирзоян С.Е., Мхитарян С.М. О некоторых задачах контактного взаимодействия между бесконечными стрингерами и полосами с учётом неоднородности старения материалов. //Изв.АН Арм. ССР. Механика. 1981. Т.34. №5. С.27-40.
10. Гринченко В.Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. Киев: Наукова думка, 1978. 264с.

**Сведения об авторах:**

**Мирзоян Саак Езникович** – к.ф-м.н., с. н. с. Института механики НАН Армении

**Адрес:** 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24<sup>б</sup>

**Тел:** (+37410) 568188

**E-mail:** [mechins@sci.am](mailto:mechins@sci.am)

**Акопян Вазгануш Велихановна** – к.ф-м.н., н. с. Института механики НАН Армении

**Адрес:** 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24<sup>б</sup>

**Тел:** (+37410) 568188

**E-mail:** [mechins@sci.am](mailto:mechins@sci.am)

# ИЗГИБ РАСТУЩЕЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ КРИВОЛИНЕЙНОЙ БАЛКИ

Михин М.Н.

В работе исследована задача изгиба для растущего вязкоупругого стареющего тела. Исследуются три основных этапа деформирования тела: до начала наращивания, в процессе и после остановки роста. Предложен метод решения, основанный на использовании функции напряжений.

Предположим, что в нулевой момент времени из стареющего вязкоупругого материала изготовлена балка  $\Pi_1$ , плоское сечение которого параллельное основаниям представляет собой кольцевой сектор с внутренним радиусом  $a_1$  и внешним радиусом  $b_1$ . Пусть кольцевой сектор

$$\Omega_1 = \left\{ (r, \theta) \mid a_1 \leq r \leq b_1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

заделан на торце ( $\theta = \pi/2$ ) и изгибается поперечной силой  $P(t)$ , приложенной к незакреплённому торцу. Границу поперечного сечения  $\Omega_1$  обозначим  $L_1$ . До момента загрузки  $\tau_0$  боковая поверхность балки свободна от напряжений.

В момент времени  $\tau_1 > \tau_0$  к боковой поверхности балки начинается приток вещества. При этом, новые приращиваемые элементы не напряжены и момент их изготовления совпадает с моментом изготовления основного тела.

Обозначим через  $L(t)$  границу поперечного сечения  $\Omega(t)$ , которая изменяется с течением времени. Изменение границы  $L(t)$  вполне определяется заданием законов изменения внутреннего и внешнего радиусов, т.е. заданием двух функций  $a(t)$  и  $b(t)$ . При этом,  $a(\tau_1) = a_1$ ,  $b(\tau_1) = b_1$  и  $L(\tau_1) = L_1$ ,  $\Omega(\tau_1) = \Omega_1$ . Границу  $L(t)$  можно представить в виде  $L(t) = L_\sigma \cup L^*(t)$ , где  $L^*(t)$  — граница роста, к которой в рассматриваемый момент времени осуществляется приток материала,  $L_\sigma(t)$  — граница, на которой задана нагрузка.

Будем считать, что граница роста  $L^*(t)$  не загружается в процессе наращивания. В этом случае задаваемый на ней полный тензор напряжений согласован с нулевыми внешними силами. Будем также считать, что момент приложения нагрузки к приращиваемым элементам  $\tau_0(r, \theta)$  совпадает с моментом их присоединения к растущему телу  $\tau^*(r, \theta)$ .

В момент  $\tau_2 \geq \tau_1$  наращивание балки прекращается, и с этого момента оно занимает область  $\Pi_2 = \Pi(\tau_2)$  с поперечным сечением  $\Omega_2 = \Omega(\tau_2)$ , имеющим границу  $L_2 = L(\tau_2)$ . При этом  $a(\tau_2) = a_2$ ,  $b(\tau_2) = b_2$ .

Краевая задача для основного (нерастущего) вязкоупругого стареющего тела на интервале времени  $t \in [\tau_0, \tau_1]$  представляет собой традиционную задачу вязкоупругости. Её можно решить известными методами, например, при помощи принципа соответствия.

Начально-краевую задачу для непрерывно растущей вязкоупругой балки на интервале времени  $t \in [\tau_1, \tau_2]$  составляют [1-4]:

уравнения равновесия

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

соотношения Коши между скоростями деформаций  $D_{ij} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t}$  и скоростями перемещений

$$v_{ij} = \frac{\partial u_{ij}}{\partial t}$$

$$D_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r}, D_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}, D_{r\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right), \quad (2)$$

уравнения состояния

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= G(\mathbf{I} + N_{\tau_0(r,\theta)})[(K+1)\varepsilon_{rr} + (K-1)\varepsilon_{\theta\theta}], \\ \sigma_{\theta\theta} &= G(\mathbf{I} + N_{\tau_0(r,\theta)})[(K-1)\varepsilon_{rr} + (K+1)\varepsilon_{\theta\theta}], \\ \sigma_{r\theta} &= 2G(\mathbf{I} + N_{\tau_0(r,\theta)})\varepsilon_{r\theta}, \\ \tau_0(r,\theta) &= \begin{cases} \tau_0, & (r,\theta) \in \Omega_1, \\ \tau^*(r,\theta), & (r,\theta) \in \Omega(t) \setminus \Omega_1, \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

$$(\mathbf{I} + N_{\tau_0(r,\theta)})^{-1} = (\mathbf{I} - \mathbf{L}_{\tau_0(r,\theta)}), \quad 2G(t) = \frac{E(t)}{1+\nu}, \quad K = \frac{1}{1-2\nu},$$

$$L_s f(t) = \int_s^t f(\tau) K_1(t,\tau) d\tau, \quad K_1(t,\tau) = G(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} [G^{-1}(\tau) + \omega(t,\tau)]$$

краевое условие на неподвижной границе

$$\theta = 0: \quad \int_{a(t)}^{b(t)} \sigma_{r\theta} dr = P(t), \quad (4)$$

начально-краевое условие на растущей границе

$$\begin{aligned} r = a(t), r = a(t): \quad \sigma_{ij}(r,\theta,t) &= \sigma_{ij}^*(r,\theta) \left( t = \tau^*(r,\theta) \right), \\ \sigma_{rr}^* &= \sigma_{r\theta}^* = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $G = G(t)$  — модуль упруго мгновенной деформации при сдвиге,  $K_1(t,\tau)$  и  $\omega(t,\tau)$  — ядро ползучести и мера ползучести при сдвиге соответственно,  $\mathbf{I}$  — тождественный оператор. Выше в ряде очевидных случаев аргументы опущены. Будем опускать их и далее, воспроизводя лишь в случаях, когда их отсутствие может затруднить понимание.

Отличительными особенностями начально-краевой задачи (1)-(5) для наращиваемого тела, выводящими ее за рамки классических задач механики деформируемого твердого тела, являются: специфическое начально-краевое условие на растущей границе; нарушение условий совместности деформаций в области, занимаемой дополнительным телом, и выполнение лишь его аналога и аналога соотношений Коши в скоростях соответствующих величин; зависимость определяющих соотношений от функции  $\tau_0(r,\theta)$ , которая может иметь разрывы первого рода.

Обозначая  $\sigma_{ij}^0 = (\mathbf{I} - \mathbf{L}_{\tau_0(r,\theta)})\sigma_{ij} G^{-1}$ , преобразуем задачу наращивания вязкоупругой балки с определяющими соотношениями (1)-(5) к задаче наращивания упругого тела, описываемого законом Гука

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}^0}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^0}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr}^0 - \sigma_{\theta\theta}^0}{r} &= 0, \quad \frac{\partial \sigma_{r\theta}^0}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^0}{\partial \theta} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}^0}{r} = 0, \\ D_{rr} &= \frac{\partial v_r}{\partial r}, D_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}, D_{r\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right), \\ \sigma_{rr}^0 &= (K+1)\varepsilon_{rr} + (K-1)\varepsilon_{\theta\theta}, \quad \sigma_{\theta\theta}^0 = (K-1)\varepsilon_{rr} + (K+1)\varepsilon_{\theta\theta}, \quad \sigma_{r\theta}^0 = 2\varepsilon_{r\theta}, \\ \theta = 0: \quad \int_{a(t)}^{b(t)} \sigma_{r\theta}^0 dr &= P^0(t), \\ r = a(t), r = a(t): \quad S_{rr} &= S_{r\theta} = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

Преобразуем начально-краевую задачу (6) к краевой задаче относительно скоростей деформации, скоростей перемещений и скоростей операторных напряжений. Для этого продифференцируем по  $t$  уравнение равновесия и уравнения состояния. Для вывода граничного условия на границе  $L^*(t)$  подействуем оператором дивергенции на начально-краевое условие на поверхности роста.

В итоге получим следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial S_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{S_{rr} - S_{\theta\theta}}{r} = 0, \quad \frac{\partial S_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial S_{\theta\theta}}{\partial \theta} + 2 \frac{S_{r\theta}}{r} = 0, \\ D_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad D_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}, \quad D_{r\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right), \\ S_{rr} = (K+1)\varepsilon_{rr} + (K-1)\varepsilon_{\theta\theta}, \quad S_{\theta\theta} = (K-1)\varepsilon_{rr} + (K+1)\varepsilon_{\theta\theta}, \\ \sigma_{r\theta} = 2\varepsilon_{r\theta}, \quad S_{ij} = \partial \sigma_{ij}^0 / \partial t, \\ \theta = 0: \quad \int_{a(t)}^{b(t)} S_{r\theta} dr = Q(t), \end{aligned} \quad (7)$$

$$Q(t) = \frac{dP^0(t)}{dt} = \frac{1}{G(t)} \frac{\partial P^0(t)}{\partial t} + \int_{\tau_0(r,\theta)}^t \frac{\partial P(\tau)}{\partial \tau} \frac{\partial \omega(t,\tau)}{\partial t} d\tau + P(\tau_0(r,\theta)) \frac{\partial \omega(t,\tau_0(r,\theta))}{\partial t},$$

$$r = a(t), r = b(t): \quad \sigma_{ij}(r,\theta,t) = \sigma_{ij}^*(r,\theta) \left( t = \tau^*(r,\theta) \right), \quad \sigma_{rr}^* = \sigma_{r\theta}^* = 0,$$

Краевая задача (7) совпадает по форме с краевой задачей теории упругости с параметром  $t$ . Ее решение может быть построено любым эффективным в теории упругости аналитическим или численным методом. Решение исходной начально-краевой задачи наращивания вязкоупругого стареющего тела (1)-(6) при  $t \in [\tau_1, \tau_2]$  можно восстановить затем по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(r,\theta,t) = G(t) \left\{ \frac{\sigma_{ij}(r,\theta,\tau_0(r,\theta))}{G(\tau_0(r,\theta))} \left[ 1 + \int_{\tau_0(x_1,x_2)}^t R_1(t,\tau) d\tau \right] + \right. \\ \left. + \int_{\tau_0(r,\theta)}^t \left[ S_{ij}(r,\theta,\tau) + \int_{\tau_0(r,\theta)}^\tau S_{ij}(r,\theta,\zeta) d\zeta R_1(t,\tau) \right] d\tau \right\}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$u_i(r,\theta,t) = u_i(r,\theta,\tau_0(r,\theta)) + \int_{\tau_0(r,\theta)}^t v_i(r,\theta,\tau) d\tau.$$

где  $R_1(t,\tau)$  — резольвента ядра  $K_1(t,\tau)$ .

Основные соотношения задачи для тела, наращивание которого прекращено, имеют вид (1)-(5), где отсутствует условие на границе роста. Она приводится к виду (7), причем формулы, по которым восстанавливаются истинные характеристики напряженно-деформированного состояния, сохраняют вид (8).

Для решения краевой задачи типа (7) достаточно рассмотреть функцию напряжений Эри в виде

$$F(r,\theta) = f(r) \sin \theta. \quad (9)$$

Из общего бигармонического уравнения  $\Delta \Delta F = 0$  получается обыкновенное дифференциальное уравнение для функции  $f(r)$ :

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \right)^2 = 0,$$

общее решение, которого имеет вид

$$f(r) = Ar^3 + B/r + Cr + Dr \ln r.$$

Тогда, используя граничные условия, найдём соответствующие компоненты напряжений

$$\begin{aligned}
S_{rr} &= \frac{Q}{T} \left( r - \frac{a^2(t) + b^2(t)}{r^3} + \frac{a^2(t)b^2(t)}{r} \right) \sin \theta, \\
S_{\theta\theta} &= \frac{Q}{T} \left( 3r - \frac{a^2(t) + b^2(t)}{r^3} - \frac{a^2(t)b^2(t)}{r} \right) \sin \theta, \\
S_{r\theta} &= -\frac{Q}{T} \left( r - \frac{a^2(t) + b^2(t)}{r^3} + \frac{a^2(t)b^2(t)}{r} \right) \cos \theta, \\
T(t) &= a^2(t) - b^2(t) + (a^2(t) + b^2(t)) \ln(b(t)/a(t)).
\end{aligned} \tag{10}$$

Получаемые соотношения позволяют предсказывать такие органически присущие растущим телам явления, как возникновение остаточных напряжений после снятия нагрузок, появление в наращиваемом теле поверхностей разрыва напряжений, зависимость напряжённо-деформированного состояния вязкоупругих тел от скорости их роста.

Автор благодарит А.В. Манжирова за постановку задачи и помощь.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В. Контактные задачи теории ползучести. Ереван: Изд-во НАН РА, 1999. 320с.
2. Арутюнян Н.Х., Манжиров А. В., Наумов В.Э. Контактные задачи механики растущих тел. М.: Наука, 1991.176с.
3. Манжиров А.В. Общая безинерционная начально-краевая задача для кусочно-непрерывно наращиваемого вязкоупругого стареющего тела // ПММ.1995. Т.59. Вып.5. С.836 – 848.
4. Манжиров А.В., Михин М.Н. Плоская задача для растущего тела. // Современные проблемы механики сплошной среды. // Труды VI Международной конференции, г. Ростов-на-Дону, 12-14 июня 2000г.
5. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М: Изд-во АН СССР, 1954. 647с.

#### Сведения об авторе:

**Михин Михаил Николаевич** – к.ф.-м.н., доцент кафедры высшей математики, Московский государственный университет приборостроения и информатики.

**E-mail:** [mmikhin@inbox.ru](mailto:mmikhin@inbox.ru)

# О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ КРУЧЕНИЯ УПРУГОГО ПРИЗМАТИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ С ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ В ВИДЕ НЕРАВНОБОКОГО УГОЛКА МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

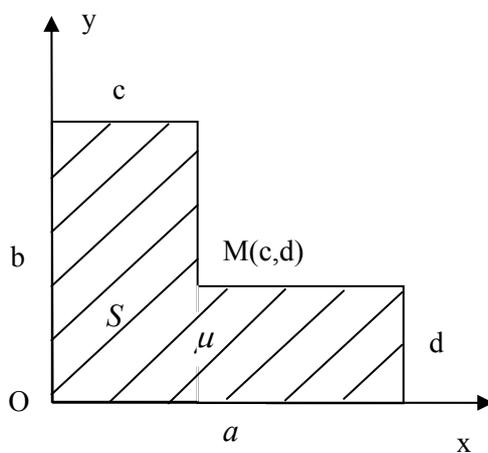
Мкртчян М.М., Мкртчян М.С.

Известная задача Н.Х. Арутюняна [1] о кручении упругого призматического стержня с поперечным сечением в виде неравнобокого уголка здесь рассматривается с точки зрения применения к ней метода граничных интегральных уравнений (ГИУ).

Для решения поставленной задачи сначала выводятся определяющие интегральные уравнения, используя известное представление гармонической функции внутри области через её граничные значения, и граничные значения нормальной производной на контуре области. При этом на основании известной связи между интегралом типа Коши и логарифмическими потенциалами простого и двойного слоёв, а также на основании известных результатов Н.И. Мухелишвили о поведении интеграла типа Коши вблизи угловых точек на контуре, предельным переходом выводится определяющее граничное интегральное уравнение краевых задач для уравнения Лапласа в случае рассмотренной области. В этом уравнении уже отражены вклады угловых точек.

Далее определяющее ГИУ в соответствии со смешанной граничной задачей для рассмотренной области дискретизируется. В результате, получаются соответствующие системы линейных уравнений, причём, угловые точки- вершины данной области включаются в число узлов.

1. Многие основополагающие результаты по исследованию обширных классов задач о кручении однородных и кусочно-однородных стержней изложены в монографиях [1,2]. Здесь рассмотрим задачу о кручении упругого призматического стержня полигонального поперечного сечения в виде неравнобокого уголка (фиг.1)



Фиг.1

Модуль сдвига стержня обозначим через  $\mu$ . Направим ось  $Ox$  по горизонтальной нижней стороне областей  $S$ , а ось  $Oy$  – по вертикальной левой стороне этой области. Далее, как в [2], в область  $S$  введём гармоническую функцию

$$\Phi(x, y) = \varphi(x, y) + xy, \tag{1}$$

где  $\varphi(x, y)$  – функция кручения в области  $S$ , причём, она также является гармонической функцией в соответствующей области. Для касательных напряжений в этой задаче имеем следующие формулы:

$$X_z = \tau\mu \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right); \quad Y_z = \tau\mu \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right), \tag{2}$$

где  $\tau$  – постоянная степень закручивания.

Теперь запишем разрешающее уравнение и соответствующие граничные условия этой задачи:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad ((x, y) \in S); \quad (3)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad (y = b, 0 \leq x \leq c); & \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2y \quad (x = 0, 0 \leq y \leq b); \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad (y = d, a - c \leq x \leq a); & \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2y \quad (x = c, b - d \leq y \leq b); \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad (y = 0, 0 \leq x \leq a); & \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2y \quad (x = a, 0 \leq y \leq d); \end{cases} \quad (4)$$

После нахождения решения системы (3)-(4) определяются основные характеристики обсуждаемой задачи: функцию кручения, касательные напряжения по формулам (1) и (2), соответственно, и жёсткость при кручении  $D$  по формуле [2]

$$D = \mu \iint_S \left( x^2 + y^2 + x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dy.$$

Теперь применяя результаты работы [3] к системе уравнений (3)-(4), получим следующее определяющее ГИУ для этой задачи:

$$\begin{aligned} \gamma \Phi(\sigma) - \int_0^l \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \operatorname{arctg} \left[ \frac{y(s) - y(\sigma)}{x(s) - x(\sigma)} \right] \right\} \Phi(s) ds = \\ = \int_0^l \ln \sqrt{[x(s) - x(\sigma)]^2 + [y(s) - y(\sigma)]^2} \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds \quad (\sigma \in [0, l]) \end{aligned} \quad (5)$$

где  $n$  – внутренняя к  $S$  нормаль на контуре  $L$ , а  $l$  – длина контура.

Таким образом, поставленная граничная задача Неймана сводится к решению уравнения (5). После нахождения решения на гранях области  $S$  решение в каждой точке области находим по следующей формуле:

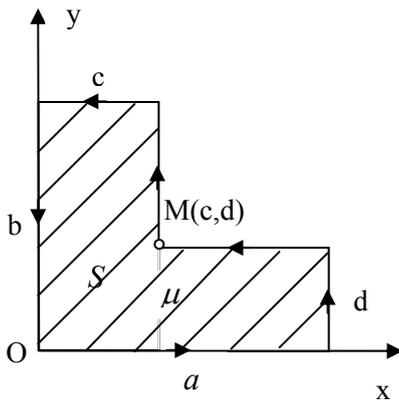
$$\begin{aligned} \Phi(M_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_L \ln \left( \frac{1}{r} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds + \frac{1}{2\pi} \int_L \Phi \frac{\partial}{\partial n} \ln \left( \frac{1}{r} \right) ds; \\ r = \sqrt{[x(s) - x(\sigma)]^2 + [y(s) - y(\sigma)]^2}. \end{aligned}$$

2. Используя полученные результаты, построим решение задачи Неймана для области, граница которой является ломаная линия (фиг. 2). Решения этой задачи построим по известной методике Н.М Крылова и Н.И.Боголюбова [4]. Данная задача из (5) математически формулируется в виде следующего интегрального уравнения:

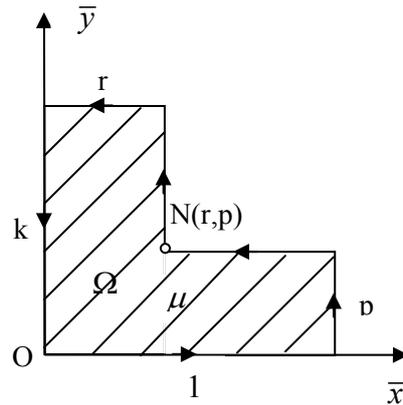
$$\begin{aligned} \gamma \Phi(\sigma) - \int_0^l \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \operatorname{arctg} \left[ \frac{y(s) - y(\sigma)}{x(s) - x(\sigma)} \right] \right\} \Phi(s) ds = \\ = \int_0^l \ln \sqrt{[x(s) - x(\sigma)]^2 + [y(s) - y(\sigma)]^2} \psi(s) ds \quad (\sigma \in [0, l]). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $l = 2(a + b)$ , а  $\psi(s) = \frac{\partial \Phi}{\partial n}$  – известная функция, где  $s$  – дуговая координата, причём, начало отсчёта  $s$  – точка  $M(c, d)$ , а направление на контуре выберем в сторону возрастания параметра  $s$  так, чтобы внутренние точки области находились в левой стороне контура при её обходе.

При сделанных предположениях параметрические уравнения этой ломаной  $x = x(s), y = y(s)$  записываются в виде:



Фиг. 2



Фиг. 3

$$x(s) = \begin{cases} c & 0 \leq s \leq b-d; \\ b-d+c-s & b-d < s \leq b-d+c; \\ 0 & b-d+c < s \leq 2b-d+c; \\ s-2b+d-c & 2b-d+c < s \leq a+2b-d+c; \\ a & a+2b-d+c < s \leq a+2b+c; \\ 2a+2b+c-s & a+2b+c < s \leq 2a+2b. \end{cases} \quad (7)$$

$$y(s) = \begin{cases} s+d & 0 \leq s \leq b-d; \\ b & b-d < s \leq b-d+c; \\ 2b-d+c-s & b-d+c < s \leq 2b-d+c; \\ 0 & 2b-d+c < s \leq a+2b-d+c; \\ s-a-2b+d-c & a+2b-d+c < s \leq a+2b+c; \\ d & a+2b+c < s \leq 2a+2b. \end{cases} \quad (8)$$

Далее для численного решения уравнения (6) введём следующие безразмерные координаты и величины:

$$\begin{aligned} \xi = \frac{\sigma}{a}, \eta = \frac{s}{a}; \bar{x}(\eta) = \frac{x(a\eta)}{a}, \bar{y}(\eta) = \frac{y(a\eta)}{a}, \bar{\Phi}(\xi) = \frac{\Phi(a\xi)}{a}, n = a\rho; \\ \bar{\psi}(\xi) = \psi(a\xi) = \frac{\partial \Phi(a\xi)}{\partial n} = \frac{\partial \bar{\Phi}(\xi)}{\partial \rho}, \bar{\gamma}(\xi) = \gamma(a\xi); \\ \frac{b}{a} = k, \frac{c}{a} = q, \frac{d}{a} = r, \tilde{l} = \frac{l}{a} = \frac{2(a+b)}{a} = 2(1+k). \end{aligned} \quad (9)$$

Тогда уравнение (6) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}(\xi)\bar{\Phi}(\xi) - \int_0^{\tilde{l}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \arctg \left[ \frac{\bar{y}(\eta) - \bar{y}(\xi)}{\bar{x}(\eta) - \bar{x}(\xi)} \right] \right\} \bar{\Phi}(\eta) d\eta = \\ = \int_0^{\tilde{l}} \ln \sqrt{[\bar{x}(\eta) - \bar{x}(\xi)]^2 + [\bar{y}(\eta) - \bar{y}(\xi)]^2} \bar{\psi}(\eta) d\eta \quad (\xi \in [0, \tilde{l}]). \end{aligned} \quad (10)$$

В величинах (9) начальная область  $S$ , контур которой описывается уравнениями (7) и (8), преобразуется в область  $\Omega$  (фиг. 3), уравнения контура которого в безразмерных величинах имеет вид

$$\bar{x}(\eta) = \begin{cases} q & 0 \leq \eta \leq k-r; \\ k-r+q-\eta & k-r < \eta \leq k-r+q; \\ 0 & k-r+q < \eta \leq 2k-r+q; \\ \eta-2k+r-q & 2k-r+q < \eta \leq 1+2k-r+q; \\ 1 & 1+2k-r+q < \eta \leq 1+2k+q; \\ 2+2k+q-\eta & 1+2k+q < \eta \leq 2+2k. \end{cases}$$

$$\bar{y}(\eta) = \begin{cases} \eta+r & 0 \leq \eta \leq k-r; \\ k & k-r < \eta \leq k-r+q; \\ 2k-r+q-\eta & k-r+q < \eta \leq 2k-r+q; \\ 0 & 2k-r+q < \eta \leq 1+2k-r+q; \\ \eta-1-2k+r-q & 1+2k-r+q < \eta \leq 1+2k+q; \\ r & 1+2k+q < \eta \leq 2+2k. \end{cases}$$

Промежуток интегрирования в уравнении (6) разделим на шесть частей  $[l_{i-1}, l_i]$  ( $i = \overline{1,6}$ ), полагая

$$l_0 = 0; l_6 = \tilde{l} = 2(1+k); l_1 = \frac{2N_1}{2N_1-1}(k-p); l_2 = k-p+r + \frac{k-p+r-l_1}{2N_2-1};$$

$$l_3 = 2k-p+r + \frac{2k-p+r-l_2}{2N_3-1}; l_4 = 2k-p+r+1 + \frac{2k-p+r+1-l_3}{2N_4-1};$$

$$l_5 = 2k+r+1 + \frac{2k+r+1-l_4}{2N_5-1},$$

где  $N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6$  – наперёд заданные натуральные числа. Отметим, что при таком разделении промежутков интегрирование делится на шесть частей, притом, первые пять из них содержат угловые точки рассматриваемой области. При этих обозначениях уравнение (10) запишется в следующей форме:

$$\bar{y}(\xi)\bar{\Phi}(\xi) - \sum_{i=1}^6 \int_{l_{i-1}}^{l_i} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \arctg \left[ \frac{\bar{y}(\eta) - \bar{y}(\xi)}{\bar{x}(\eta) - \bar{x}(\xi)} \right] \right\} \bar{\Phi}(\eta) d\eta =$$

$$= \sum_{i=1}^6 \int_{l_{i-1}}^{l_i} \ln \sqrt{[\bar{x}(\eta) - \bar{x}(\xi)]^2 + [\bar{y}(\eta) - \bar{y}(\xi)]^2} \bar{\psi}(\eta) d\eta \quad (\xi \in [0, \tilde{l}]). \quad (11)$$

Теперь введём обозначения:

$$\Delta \eta^{(r)} = \frac{l_r - l_{r-1}}{N_r} \quad (r = \overline{1,6}); \quad \eta_j^{(r)} = l_{r-1} + \frac{2j-1}{2} \Delta \eta^{(r)} \quad (j = \overline{1, N_r}; r = \overline{1,6})$$

Здесь значениям  $\eta_{N_r}^{(r)}$  ( $r = \overline{1,5}$ ) соответствуют угловые точки границы области. Теперь из (11) по известному методу Н.М. Крылова и Н.Н. Боголюбова [4] придём к следующей системе линейных алгебраических уравнений (ЛАУ):

$$\begin{aligned} \bar{y}(\eta_i^{(k)})\bar{\Phi}(\eta_i^{(k)}) - \sum_{r=1}^6 \sum_{j=1}^{N_r} \left\{ \int_{\eta_j^{(r)} - \frac{\Delta\eta^{(r)}}{2}}^{\eta_j^{(r)} + \frac{\Delta\eta^{(r)}}{2}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \arctg \left[ \frac{\bar{y}(\eta) - \bar{y}(\eta_i^{(k)})}{\bar{x}(\eta) - \bar{x}(\eta_i^{(k)})} \right] \right] d\eta \right\} \bar{\Phi}(\eta_j^{(r)}) = \\ = \sum_{r=1}^6 \sum_{j=1}^{N_r} \left\{ \int_{\eta_j^{(r)} - \frac{\Delta\eta^{(r)}}{2}}^{\eta_j^{(r)} + \frac{\Delta\eta^{(r)}}{2}} \ln \sqrt{[\bar{x}(\eta) - \bar{x}(\eta_i^{(k)})]^2 + [\bar{y}(\eta) - \bar{y}(\eta_i^{(k)})]^2} d\eta \right\} \bar{\psi}(\eta_j^{(r)}); \end{aligned} \quad (12)$$

$(i = \overline{1, N_k}; k = \overline{1, 6}).$

В заключение отметим, что коэффициенты ЛАУ (12) выражаются определёнными интегралами, которые вычисляются аналитическими методами.

Работа выполнена в рамках гранта 11–2с450 Госкомитета по науке министерства образования и науки РА.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л. Кручение упругих тел. М.: Физматгиз, 1963. 686с.
2. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707с.
3. Мхитарян С.М., Мкртчян М.С. О решении основных краевых задач теории гармонических функций для прямоугольной области методом граничных интегральных уравнений. //Избранные тр. Международной научной конференции «Образование, наука и экономика в ВУЗах. Интеграция в международное образовательное пространство» – 26–30 сентября, 2011, Ереван: 2012. С.145-154.
4. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближённые методы высшего анализа. М.: Гостехиздат, 1952. 695с.

#### Сведения об авторах:

**Мкртчян Мгер Мушегович** – науч. сотрудник Института механики НАН Армении,  
**Адрес:** Армения, 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24<sup>б</sup>, Институт механики НАН РА  
**Тел:** (37410)-43-16-52, **E-mail:** [mher\\_1982@mail.ru](mailto:mher_1982@mail.ru)

**Мкртчян Мушег Сережаевич** – канд. ф.-м.н., ст.научн.сотр. Института механики НАН РА.  
**Адрес:** Армения, 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24<sup>б</sup>, ИМех. НАН  
**Тел:** (37410)-43-16-52, (37410)-80-19-56, **E-mail:** [muscheg-mkrtchyan@rambler.ru](mailto:muscheg-mkrtchyan@rambler.ru)

## К УСТОЙЧИВОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ И КРУГОВОГО КОЛЬЦА

Мовсисян Л.А.

Исследуется устойчивость прямоугольной пластинки и кругового кольца с наполнителем при силовых и температурных воздействиях. Для кольца изучается также задача устойчивости под воздействием жестких штампов. Определены критические параметры – мгновенные и длительные (упругость–вязкоупругость).

1. Прямоугольная пластинка находится в постоянном температурном поле  $t_0$  и на внешних плоскостях действуют противоположно направленные сдвигающие напряжения интенсивностью  $S$  [1.2]. По направлению этой оси края пластинки неподвижны и поэтому возникает сжимающее усилие  $Eh\alpha T_0$ , а  $S$  вызывает перерезывающее усилие  $Sh$ .

Уравнения устойчивости такой пластинки будут:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{S(1-\nu^2)}{E} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0 \\ \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{S(1-\nu^2)}{E} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= 0 \\ D\Delta^2 w + Sh \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Sh \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + Eh\alpha t_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

На краях пластинки имеются условия, которые допускают решение (1.1) в виде

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} \sin \lambda_m x \sin \mu_n y, \quad v = \bar{v} \cos \lambda_m x \cos \mu_n y \\ w &= \bar{w} \sin \lambda_m x \sin \mu_n y, \quad \lambda_m = \frac{m\pi}{a}, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{b} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Комбинация  $S$  и  $t_0$ , при которой возможна потеря устойчивости –

$$S^2(1-\nu^2) + E^2\alpha t_0 = \frac{E^2 h^2}{12(1-\nu^2)\lambda_m^2} (\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2 \quad (1.3)$$

Минимальное соотношение действующих воздействий, вызывающие потерю устойчивости, будет ( $n=1, mb=a$ )

$$S^2(1-\nu^2) + E^2\alpha t_0 = \frac{E^2 h^2 \pi^2}{3(1-\nu^2)b^2} \quad (1.4)$$

В частности, при отдельных воздействиях

$$(\alpha t_0)_{\text{кр}} = \frac{h^2 \pi^2}{3(1-\nu^2)b^2}, \quad S_{\text{кр}} = \pm \frac{Eh\pi}{\sqrt{3(1-\nu^2)}b} \quad (1.5)$$

Для вязкоупругой пластинки мгновенный модуль  $E$  должны заменить  $E_\infty$  и, если только при воздействии температуры ее критические значения одинаковы, то уже при наличии  $S$  они различны.

2. Цилиндрическое кольцо со сплошным наполнителем находится в стационарном неоднородном температурном поле и подвергается внешнему давлению интенсивностью  $q$  (в [3] изучалась устойчивость при однородном температурном поле). Так как толщина кольца тонкая, будем предполагать, что температура по толщине не меняется и есть

$$t = t_0 + t_1 \cos 2\theta \quad (2.1)$$

Тогда температура в наполнителе будет

$$t = t_0 + t_1 \frac{r^2}{R^2} \cos 2\theta \quad (2.2)$$

В соответствии с внешними воздействиями функция напряжения начального НДС будет

$$\Phi^o = A_0 + B_0 r^2 + (A_2 r^2 + B_2 r^4) \cos 2\theta \quad (2.3)$$

Напряжения и радиальное перемещение в наполнителе –

$$\begin{aligned} \sigma_r^0 &= 2(B_0 - A_2 \cos 2\theta), \quad \sigma_\theta^0 = 2[B_0 + (A_2 + 6B_2 r^2) \cos 2\theta], \quad \sigma_{r\theta}^0 = (A_2 + 3B_2 r^2) \sin 2\theta \\ u_r^0 &= \frac{2}{E_0} \left\{ B_0 (1 - \nu_0) r - [(1 + \nu_0) A_2 r + 2\nu_0 B_2 r^3] \cos 2\theta \right\} + \alpha_0 r \left( t_0 - t_1 \frac{r^2}{3R^2} \cos 2\theta \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь  $\alpha_0$  – коэффициент линейного расширения и  $\nu_0$  – коэффициент Пуассона материала наполнителя.

Уравнение статики начального состояния кольца –

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^0}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial M^0}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial^2 M^0}{\partial \theta^2} - T^0 R = R^2 (q + \sigma_r^0(R)) \\ T = \frac{Eh}{R} \left( w_0 + \frac{\partial v_0}{\partial \theta} \right) - Eh \alpha t, \quad M^0 = -\frac{Eh^3}{12R^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} \end{aligned} \quad (2.5)$$

В предположении, что на линии раздела двух сред  $r = R$  имеются условия

$$\sigma_{r\theta}^0 = 0, \quad u_r^0 = w_0, \quad (2.6)$$

необходимого для дальнейшего усилия  $T^0$  имеем

$$\frac{T_0}{Eh} = -\frac{q(1 - \nu_0)}{EX_1} + \frac{e(\alpha_0 - \alpha)t_0}{X_1} + \frac{9\alpha + \gamma^2 \alpha_0}{3X_2} t_1 \cos 2\theta \quad (2.7)$$

Здесь

$$X_1 = e + \gamma(1 + \nu_0), \quad X_2 = 3e + \gamma^3(3 - \nu_0), \quad e = \frac{E_0}{E}, \quad \gamma = \frac{h}{R}$$

В системе уравнений возмущённого состояния первое уравнение сохраняет вид первого из (2.5), а вот второе будет

$$\frac{\partial^2 M}{\partial \theta^2} - TR + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( T^0 \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) - R^2 \sigma_r(R) = 0 \quad (2.8)$$

Функция напряжения для данного состояния имеет вид

$$\Phi = \sum_m \left[ (A_m r^m + B_m r^{m+2}) \cos m\theta + (C_m r^m + D_m r^{m+2}) \sin \theta \right] \quad (2.9)$$

Перемещения в кольце также представим в виде таких рядов:

$$w = \sum_m (f_m^{(1)} \cos m\theta + f_m^{(2)} \sin m\theta), \quad v = \sum_m (\psi_m^{(1)} \sin m\theta + \psi_m^{(2)} \cos m\theta) \quad (2.10)$$

Так как при наличии наполнителей потеря устойчивости происходит в виде сумм больших  $m$ , то в выражении (2.9) первые члены можно опускать. При однородных воздействиях ( $t_1 = 0$ ) гармоник будет одна [3]. Вычисляя соответствующие величины и удовлетворяя условиям типа (2.6), для  $\sigma_r(R)$  получим

$$\sigma_r(R) = \frac{E_0}{R} \sum_m \frac{m^2 - 1}{2m - 1 + \nu_0} (f_m^{(1)} \cos m\theta + f_m^{(2)} \sin \theta) \quad (2.11)$$

Учитывая (2.8)–(2.11), для определения критических величин получим систему

$$\left[ \frac{1}{12} \gamma^2 m^2 (m^2 - 1) + Y_1 m^2 + Y_2 \right] f_m - \frac{m}{2} Y_3 [(m + 2) f_{m+2} + (m - 2) f_{m-2}] = 0 \quad (2.12)$$

Здесь приняты обозначения

$$Y_1 = -Q\gamma^3 \frac{1 - \nu_0}{4X_1} + \frac{e(\alpha_0 - \alpha)}{X_1} t_0, \quad Q = \frac{q}{q_{kp}^0}, \quad q_{kp}^0 = \frac{E}{4} \gamma^3, \quad Y_2 = \frac{e}{\gamma} \frac{m^2 - 1}{2m - 1 + \nu_0}, \quad Y_3 = \frac{9\alpha + \gamma^2 \alpha_0}{3X_2} t_1$$

В табл.1 приведены критические значения  $Q_{кр}$  для различных  $e, \gamma$  и  $t_1$  при  $t_0 = 100^{\circ}C$ ,  $\alpha = 2 \cdot 10^{-5} \frac{1}{град}$ ,  $\nu_0 = 0,5$ .

В каждой клетке первые строки соответствуют  $t_1 = 0$ , а вторые –  $t_1 = 25^{\circ}C$ . В скобках приведены номера главных гармоник.

Таблица 1

$e \backslash \frac{1}{\gamma}$	200	300	400
$10^{-5}$	42.71	101.1	187.8
	47.17 (6)	105.6 (9)	192.3 (12)
$5 \cdot 10^{-5}$	135.7	329.1	626.2
	140.5 (11)	334.2	630.5 (29)

Таблица 2

$k \backslash e$	$10^{-6}$	$10^{-5}$	
1	$t_0 = t_1 = 0$	33.90	157.1
	$t_1 = 0$	36.97	187.8
	$t_0, t_1 \neq 0$	42.41	192.3
0,75	$t_0 = t_1 = 0$	27.42	129.3
	$t_1 = 0$	29.72	152.3
	$t_0, t_1 \neq 0$	34.14	156.8
0,5	$t_0, t_1 = 0$	21.01	99.30
	$t_1 = 0$	22.54	114.7
	$t_0, t_1 \neq 0$	27.00	119.7

В случае, когда материал наполнителя вязкоупругий, в окончательных формулах  $E$  должен быть заменен на  $E_{\infty} = kE$ , в табл.2 приведены значения критических  $Q_{кр}$  для  $k = 0,75$  и  $k = 0,5$ .

Из приведённых таблиц видно, что наличие температуры, как видно и из выражения (2.7), так как  $\alpha_0 > \alpha$ , увеличивает значение  $Q_{кр}$  и для вязкоупругого наполнителя уменьшение последнего нелинейно зависит от  $k$ .

3. Здесь уже рассмотрим устойчивость кольца под штампами – оно находится под действием  $2n$  одинаковых (симметрично расположенных) жёстких и гладких штампов. Они имеют ось симметрии, радиус кривизны  $R_1$ , и сосредоточенные силы  $P$  действуют по этой оси и направлены к центру круга кольца. Предполагается, что кольцо находится в однородном температурном поле и трение между кольцом и штампами отсутствует.

Произведя обычные процедуры для неизвестного давления под штампом, получим [4]:

$$\bar{q} = \beta^2 \left[ \bar{C}_1 - \bar{C}_3 + 1 - \lambda \right] \text{ch} \beta \theta + \bar{C}_3 - (1 - \lambda), \quad \lambda = \frac{R}{R_1}, \quad \bar{q} = \frac{qR^2}{EJ} \quad (3.1)$$

$$\bar{C}_i = \bar{C}_i \frac{R}{EJ}, \quad \beta^2 = \frac{k^2 R^2 Gh}{EJ}, \quad C_1 = \frac{R}{\sin \theta_1} \int_0^{\theta_1} q \cos(\theta_1 - \varphi) d\varphi, \quad C_3 = \frac{R^2}{\theta_1} \int_0^{\theta_1} q d\varphi$$

В качестве конкретного примера взято  $n = 4 \left( \theta_1 = \frac{\pi}{4} \right)$ . Типичная зависимость  $\theta_0$  от  $\bar{q}$  приведена на рис.1. Знаки  $\pm$  перед  $\lambda$  указывают расположение центра штампа по сравнению с центром кольца. Как и следовало ожидать, при одной и той же силе интервал контакта штампа с кольцом при положительном  $\lambda$  больше, чем при отрицательном. При рассмотрении вязкоупругости материала выражение  $(1-\lambda)$  должно быть заменено  $(1-\Gamma^*)(1-\lambda)$ .

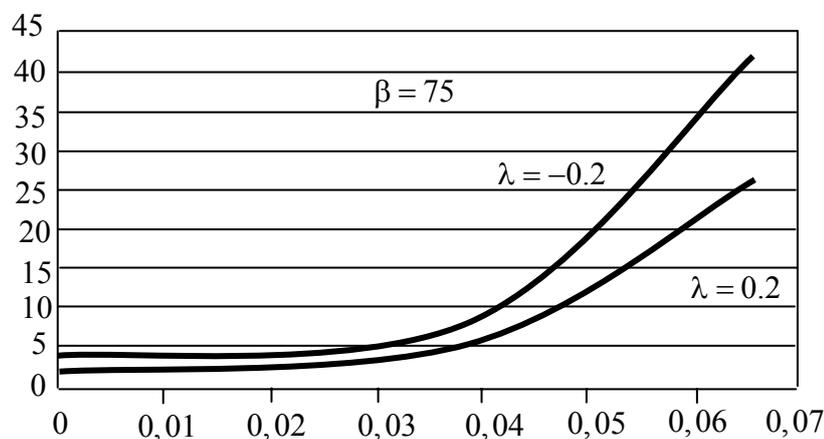


Рис.1

В табл. 3 приведены значения  $\bar{P} = P \frac{R^2}{EJ}$ , которые вызывают интервал контакта соответственно, когда материал упругий и когда длительный модуль составляет соответственно 0.75 и 0.5 от мгновенного модуля. Значение  $\theta$  – в радианах.

Таблица 3

$\theta$	0.2			-0.2		
	1	0.75	0.5	1	0.75	0.5
1	6.169	4.625	3.084	9.250	6.945	4.625
2	6.590	4.945	3.295	9.885	7.414	4.942
3	7.052	5.284	3.525	10.58	7.935	5.288
4	7.372	5.663	3.779	11.34	8.501	5.668
5	8.003	5.867	3.936	11.77	8.792	5.884

Для изучения задачи устойчивости представим  $\bar{q}$  и  $\bar{T} = T \frac{R^2}{EJ}$  в виде рядов

$$\bar{q} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos m\theta, \quad \bar{T} = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \cos m\theta, \quad a_0 = \frac{2}{\pi} \left[ \beta \operatorname{sh} \beta \theta_0 + (\bar{C}_3 - 1 + \lambda) \right] \quad (3.2)$$

$$a_m = \frac{4}{\pi} \left\{ \frac{\beta^2}{\beta^2 + m^2} \left[ \beta \operatorname{sh} \beta \theta_0 \cos m\theta_0 + m \operatorname{ch} \beta \theta_0 \sin m\theta_0 + (\bar{C}_3 - 1 + \lambda) \frac{\sin m\theta_0}{m} \right] \right\}$$

$$c_m = \frac{a_m}{1 - m^2}, \quad m = 4k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

В окончательном виде уравнение устойчивости будет

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \bar{T} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) = 0, \quad (3.4)$$

решение которого ищем в виде

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cos n\theta, \quad (3.5)$$

тогда для определения критических сил получится система

$$2n(n^2 - 1)f_n - (2c_0 - c_{2n})nf_n - \sum_{\substack{n=1 \\ m \neq n}}^{\infty} m(c_{n-m} - c_{n+m})f_m = 0 \quad (3.13)$$

В табл.4 приведены значения  $\bar{P}_{кр}$  для различных  $\beta$  и  $\lambda$ .

Таблица 4

$\lambda \backslash \beta$	0.1	-0.1	0.2	-0.2	-1
75	3.037	3.711	2.669	4.049	6.749
150	3.256	3.980	2.895	4.342	7.236
300	3.329	4.068	2.959	4.438	7.397

Как видно из табл.4, критическая сила для положительных  $\lambda$  меньше, чем для отрицательных. Для вязкоупругого материала значение длительных критических сил можно получить из вышеприведённых значений умножением на соответствующий коэффициент.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Флеминг, Герман, Муни. Потеря устойчивости конструкций под действием поверхностных усилий сдвига. // Прикладная механика. Труды американского общества инженеров механиков. 1965. №1. С.225-227.
2. Мовсисян Л.А., Пештмалджян Д.В. Об уравнениях устойчивости и колебаний анизотропных пластин. // Изв.АН Арм.ССР. Механика. 1973. Т.46. №6. С.18-28.
3. Мовсисян Л.А. Устойчивость кольца с наполнителем при силовых и температурных воздействиях. // Докл.АН Арм.ССР. 1976. Т.63. №2. С.77-84.
4. Мовсисян Л.А. К устойчивости кольца под штампами. //Изв. НАН Армении. Механика. 2011. Т.64. №2. С.32-40.

#### Сведения об авторе:

**Мовсисян Лаврентий Александрович,**

Д.т.н., профессор, главный научный сотрудник Института механики НАН Армении

Адрес: 0019, Ереван-19, пр. Маршала Баграмяна24<sup>б</sup>

Тел.: (+37410). 56821

Е-mail: [mechins@sci.am](mailto:mechins@sci.am)

# СПЛАВЫ С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ: РЕОНОМНЫЕ СВОЙСТВА И УСТОЙЧИВОСТЬ

Мовчан А.А., Сильченко Т.Л., Климов К.Ю., Казарина С.А.

Описаны экспериментальные данные, согласно которым сплавы с памятью формы (СПФ) обладают реономными свойствами. Приведены две модели реономного поведения СПФ. Исследован вопрос о влиянии реономных свойств СПФ на устойчивость.

1. Уникальные свойства сплавов с памятью формы (СПФ) связаны с происходящими в этих материалах термоупругими фазовыми и структурными превращениями. Термоупругие фазовые превращения считаются бездиффузионными процессами, поэтому механические свойства этих материалов должны быть склерономными (не зависящими от масштаба времени). В [1-3] предложена склерономная модель нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях и соответствующие определяющие соотношения, носящие для деформаций инкрементальный характер. В [3] доказано положение об активных процессах пропорционального нагружения, следуя которому для процессов, состоящих из конечного числа этапов прямого и обратного фазового мартенситного превращения, сопровождающихся или нет структурными переходами, в случае отсутствия разгрузок и пропорциональном изменении компонент девиатора напряжений, а также при выполнении некоторых дополнительных предположений относительно материальных функций, для деформирования СПФ справедлив аналог деформационной теории пластичности, выражающийся в виде конечной связи между напряжениями, деформациями и параметром фазового состава вида

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_0 q \delta_{ij} + \frac{3}{2} \frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_i} \rho_D q \varphi(\sigma_i) \quad (1.1)$$

В (1.1)  $\varepsilon_{ij}$  – фазово-структурная деформация,  $\varepsilon_0$  – линейная деформация объёмного эффекта прямого мартенситного превращения,  $q$  – объёмная доля мартенситной фазы,  $\delta_{ij}$  – дельта Кронекера,  $\sigma_{ij}'$ ,  $\sigma_i$  – девиатор и интенсивность напряжений,  $\rho_D$  – параметр, коррелирующий с интенсивностью кристаллографической деформации фазового превращения,  $\varphi(\sigma_i)$  – функция распределения интенсивности микронапряжений в представительном объёме СПФ. Следует отметить, что для большинства СПФ  $\varepsilon_0 \ll \varepsilon_D$ . Поэтому, ниже первым слагаемым правой части (1.1) пренебрегается по сравнению со вторым слагаемым.

2. Положения о склерономности механического поведения СПФ придерживаются большинство исследователей этих материалов. Наблюдаемые в некоторых опытах временные эффекты обычно относят за счёт макроскопической и микроскопической не изотермичности, зависимости от времени процессов теплообмена образцов из СПФ с окружающей средой, реономности процесса теплопроводности. Чтобы понять, является ли изменение температуры СПФ со временем единственной причиной реономных свойств этих материалов, проведена серия экспериментов, в которых температура была равномерно распределена по образцу и не менялась со временем. Это были эксперименты по жёсткому изотермическому нагружению образцов из никелида титана в режиме мартенситной неупругости (одноосное растяжение) с различными скоростями движения активного захвата; мягкому изотермическому ступенчатому нагружению и разгрузке образцов из того же материала в режимах как мартенситной неупругости, так и сверхупругости; опыты на релаксацию напряжений после жёсткого изотермического нагружения сжатием коротких образцов в режиме мартенситной неупругости и фиксации величины достигнутой полной деформации; опыты по потере устойчивости при сжатии образцов, нагружаемых в режиме мартенситной неупругости с различными скоростями. Во всех опытах изотермический режим и равномерность распределения температур по образцу контролировалась несколькими термомпарами, закреплёнными на образце.

Установлено, что форма диаграммы жёсткого изотермического нагружения образцов из никелида титана растяжением зависит от скорости движения активного захвата: чем выше эта скорость, тем меньшая деформация соответствует тому же значению напряжения [4]. При мягком ступенчатом нагружении образцов из СПФ после каждого скачка напряжения наблюдается рост деформаций со временем при постоянном напряжении и постоянной

температуре. Сразу после достаточно больших скачков напряжения наблюдается мгновенный скачок неупругих деформаций, после чего деформации растут сначала с чрезвычайно высокой скоростью, так что асимптотика зависимости приращения деформаций  $\Delta\varepsilon$  от времени  $t$ , прошедшего после скачка для малых времен близка к корневой:

$$\Delta\varepsilon \approx \beta t^{0.5} \quad (2.1)$$

С течением времени скорость деформации уменьшается, а сама величина деформации асимптотически стремится к некоторому предельному значению. Систематический рост деформации прекращается примерно через 1 час после скачка напряжений. Таким образом, наблюдаемый эффект весьма похож на явление ограниченной ползучести, однако наблюдается он при комнатных температурах, соответствующих мартенситному состоянию СПФ. Прирост деформаций со временем  $\Delta\varepsilon^t$  на каждой ступени процесса сравним по величине с мгновенным скачком деформаций, соответствующим данному скачку напряжений  $\Delta\sigma$ . При одинаковых величинах напряжений до скачка величина  $\Delta\varepsilon^t$  растёт с ростом  $\Delta\sigma$ . При одинаковых величинах  $\Delta\sigma$  величина  $\Delta\varepsilon^t$  тем выше, чем меньше значение касательного модуля, соответствующее на диаграмме мартенситной неупругости значению напряжения, при котором растёт деформация.

При мягкой ступенчатой разгрузке после нагружения в режиме мартенситной неупругости реономных эффектов не наблюдается. Аналогичные эксперименты на мягкое ступенчатое нагружение и разгрузку проведены в режиме сверхупругости, т.е. изотермического процесса, происходящего при температуре начально – аустенитного состояния и сопровождающегося вызванным ростом напряжений прямым мартенситным превращением при нагружении и обратным мартенситным превращением при разгрузке. Здесь при нагружении опять наблюдается после каждого скачка напряжений явление ограниченной ползучести. При разгрузке, в отличие от режима мартенситной неупругости, в данном случае после каждого скачкообразного уменьшения напряжений наблюдается уменьшение (с затухающей скоростью) деформаций со временем при постоянных напряжении и температуре. Это отличие связано, по-видимому, с тем, что в данном случае происходит неупругое деформирование (вызванное падением напряжений обратное фазовое превращение), тогда как разгрузка после нагружения в режиме мартенситной неупругости близка к упругой.

Двойственным к ползучести является эффект релаксации напряжений. Это явление также обнаружено в образцах из никелида титана. Круговые цилиндры диаметром основания 4 мм и длиной от 12 до 6 мм нагружались в жёстком режиме сжатием с различными скоростями движения активного захвата до напряжения  $\sigma_0$ , после чего положение захватов фиксировалось и наблюдалось изменение напряжения в образце. Обнаружено, что при фиксированных температуре и полной деформации напряжение убывало со временем сначала с очень высокой, но постепенно уменьшающейся скоростью. Примерно через 1 час монотонное уменьшение напряжений прекращалось. При прочих равных условиях скорость падения напряжений и сама величина падения  $\Delta\sigma$  увеличивались с ростом скорости предварительного нагружения. Что касается зависимости величины  $\Delta\sigma$  от значения  $\sigma_0$ , то она является немонотонной и имеет максимум в точке, где касательный модуль на диаграмме сжатия соответствует минимальному значению. Величина  $\Delta\sigma$  может достигать 8% от  $\sigma_0$ .

**3.** Предложены две модели для описания реономных свойств СПФ. Согласно первой из них существует класс предельно медленных процессов деформирования СПФ, которые являются склерономными. Для описания этих процессов могут быть использованы упомянутые выше определяющие соотношения модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях [1-3].

Ниже для краткости одномерный вариант склерономных определяющих соотношений для предельно медленных процессов в СПФ будет обозначаться как

$$\varepsilon = \psi_1(q, \sigma) \quad (3.1)$$

где  $\psi(q, \sigma)$  является, вообще говоря, функционалом истории изменения своих аргументов. В случае выполнения условий положения об активных процессах пропорционального нагружения вместо (3.1) можно записать

$$\varepsilon = \rho_D q \varphi(\sigma) \quad (3.2)$$

Если речь идёт об испытаниях в режиме мартенситной неупругости, когда СПФ находится в полностью мартенситном состоянии, то в (3.2) следует положить  $q = 1$ .

Для процессов происходящих с обычными скоростями предлагается определяющее соотношение

$$\dot{\varepsilon} = k \langle \psi_1(q, \sigma) - \varepsilon \rangle \quad (3.3)$$

где введено обозначение

$$\langle x \rangle = \begin{cases} x & \text{при } x \geq 0 \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

Суть соотношения (3.3) сводится к тому, что для весьма медленных процессов  $\dot{\varepsilon} \rightarrow 0$  и, согласно (3.3)  $\varepsilon \rightarrow \psi_1(q, \sigma)$ , т.е. определяющее соотношение для этих процессов стремится к определяющему соотношению для предельно медленных процессов (3.1). Соотношение (3.3) аналогично вязко-пластическим определяющим соотношениям. Наличие оператора  $\langle x \rangle$  отличает соотношение (3.3) от предложенного в [5], что позволяет распространить модель на случай разгрузки, когда может выполняться неравенство  $\varepsilon > \psi_1(q, \sigma)$ .

В рамках модели (3.3) могут быть описаны упомянутые выше реономные эффекты, наблюдаемые в СПФ, а именно, зависимость формы диаграммы мартенситной неупругости от скорости нагружения, явление ограниченной ползучести при мягком ступенчатом нагружении в режиме мартенситной неупругости или сверхупругости, явление релаксации напряжений. Однако, некоторые особенности этих эффектов в рамках модели (3.3) либо вообще не описываются, либо описываются качественно неправильно. Так, модель (3.3) не описывает мгновенные скачки неупругих деформаций, сопровождающие достаточно большие скачки напряжений при мягком ступенчатом нагружении. Действительно, скачкообразное увеличение напряжений приводит, согласно (3.3) лишь к увеличению скорости деформаций, которая имеет конечное значение. Кроме того, решение (3.3) для процесса после скачка напряжений, когда напряжение постоянно и равно  $\sigma$  имеет вид  $\varepsilon - \varepsilon_0 = (\psi_1(q, \sigma) - \varepsilon_0)(1 - \exp(-kt))$ , где  $\varepsilon_0$  – начальное значение деформаций перед скачком напряжений при  $t = 0$ . Разлагая экспоненту в ряд и ограничиваясь двумя членами, получаем линейную асимптотику роста деформаций со временем после скачка напряжений

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = kt(\psi_1(q, \sigma) - \varepsilon_0) \quad (3.4)$$

в то время как согласно экспериментальным данным эта асимптотика ближе к корневой (2.1). Кроме того, определённые трудности возникают при описании в рамках модели (3.3) диаграммы жёсткого нагружения с фиксированной скоростью деформаций в режиме мартенситной неупругости.

**4.** Чтобы ликвидировать эти несоответствия, предлагается вторая модель реономного поведения СПФ, в рамках которой делается предположение о существовании двух классов склерономных процессов – предельно медленных и предельно быстрых. Предельно медленным соответствует по прежнему соотношение (3.1), а предельно быстрым – соотношение  $\varepsilon = \psi_2(q, \sigma)$ . Для промежуточных скоростей деформаций предлагается определяющее соотношение

$$\dot{\varepsilon} = \left\langle \frac{\psi_1(q, \sigma) - \varepsilon}{\varepsilon - \psi_2(q, \sigma)} \right\rangle \quad (4.1)$$

Суть данного предложения сводится к следующему. Если стремится к нулю числитель правой части (4.1), то есть процесс стремится к предельно медленному, то согласно (4.1) скорость деформации стремится к нулю. Если же к нулю стремится знаменатель правой части (4.1), то есть процесс стремится к предельно быстрому, то, согласно (4.1),  $\dot{\varepsilon} \rightarrow \infty$ . Один из частных вариантов модели (4.1) сводится к тому, чтобы считать предельно быстрые процессы чисто упругими. В этом случае в (4.1) необходимо положить

$$\psi_2(q, \sigma) = 0 \quad (4.2)$$

Известно, что для динамического упруго-пластического поведения алюминиевых и некоторых других сплавов зависимость предела текучести от скорости деформирования состоит из двух ветвей. Одна соответствует весьма медленным процессам и отражает слабую зависимость предела текучести от скорости деформирования. Вторая получается для высоких скоростей деформаций и показывает весьма резкий рост графика зависимости предела текучести от скорости деформаций, положение которого близко к вертикальному. Модель (4.1) с условием (4.2) соответствует предположению, когда первый из этих графиков считается горизонтальным (параллельным оси скоростей деформаций), а второй – вертикальным (параллельным оси пределов текучести).

Модель (4.1), в отличие от модели (3.3), естественным образом описывает скачки неупругих деформаций при скачкообразном росте напряжений, происходящие в случае если мгновенное увеличение напряжений при неизменных деформациях приводит к обращению в нуль знаменателя правой части (4.1). В случае, если при значении деформации  $\varepsilon_0$  напряжение скачком меняется от величины  $\sigma_0$ , для которой  $\varepsilon_0 > \psi_2(q, \sigma_0)$  до значения  $\sigma_0 + \Delta\sigma$ , для которого  $\varepsilon_0 < \psi_2(q, \sigma_0 + \Delta\sigma)$ , то мгновенный скачок фазово-структурных деформаций равен  $\Delta\varepsilon = \psi_2(q, \sigma_0 + \Delta\sigma) - \varepsilon_0$ . При этом, асимптотика роста деформаций со временем при постоянном напряжении после его скачка, как нетрудно видеть, определяется формулой  $\Delta\varepsilon = \sqrt{2kt(\psi_1(q, \sigma_0 + \Delta\sigma) - \psi_2(q, \sigma_0 + \Delta\sigma))}$ , т.е. соответствует экспериментальным данным (2.1).

5. В [6] экспериментально установлено, что фазовые превращения могут служить причиной потери устойчивости элементов из СПФ. Модели потери устойчивости элементов из СПФ, основанные на склерономных определяющих соотношениях для этих материалов, и решения соответствующих задач для стержней и пластин опубликованы в [2,3,7,8] и др. Возникает вопрос о том, как влияет учёт реономных свойств СПФ на результаты решения соответствующих задач устойчивости? Известно, что задачи устойчивости для деформируемых твердых тел, обладающих реономными свойствами, делятся на два класса. К первому относятся проблемы для линейно-вязкоупругих тел, обладающих свойством ограниченной ползучести. Здесь имеет смысл постановка задачи устойчивости по Ляпунову на бесконечном временном интервале, и критическая сила определяется значением длительного упругого модуля. Второй класс проблем касается тел с нелинейной неограниченной ползучестью. Здесь речь может идти не об устойчивости на бесконечном временном интервале, а об определении времени до момента потери устойчивости. Поведение СПФ является сугубо нелинейным, однако при мягком ступенчатом нагружении эти материалы демонстрируют явление ограниченной ползучести. Возникает вопрос о том, к какому классу – первому или второму относятся задачи устойчивости, учитывающие реономные свойства СПФ.

С целью ответа на этот вопрос был решён ряд простейших модельных задач. В первой из них рассмотрен вертикально расположенный жёсткий стержень, нижний конец которого опирается на шарнир для которого зависимость угла поворота от момента идентична зависимости (3.3). К верхнему концу приложена направленная вертикально вниз сила фиксированной величины. Определяется устойчивость описанного выше тривиального состояния системы. Задача решалась в различных постановках, включая динамическую постановку задачи об устойчивости по Ляпунову. Показано, что в данном случае правомерной является постановка задачи устойчивости на бесконечном временном интервале. Критическая сила определяется значением касательного модуля, вычисленного по диаграмме предельно-медленного процесса.

Рассмотрена задача об устойчивости шарнирно закреплённого стержня из СПФ, нагружаемого продольной сжимающей силой в режиме мартенситной неупругости. Материал стержня подчиняется определяющему соотношению (3.3). Используется гипотеза плоских сечений. Получено следующее выражение для критической длины стержня  $L$  через величину сжимающей силы  $P$

$$L(P) = \sqrt{\frac{EJ\pi^2}{P(1 + \rho_D \varphi'(P/F))}} \quad (5.1)$$

Здесь  $J, F$  – момент инерции и площадь поперечного сечения стержня,  $E$  – модуль упругости СПФ в мартенситном фазовом состоянии, штрихом обозначена производная. Согласно (5.1), критическое состояние стержня определяется значением касательного модуля материала  $[\rho_D \varphi'(\sigma)]^{-1}$ , найденного в точке потери устойчивости по диаграмме предельно медленного нагружения.

Исследован вопрос о влиянии скорости нагружения на критическую нагрузку потери устойчивости, определяемую с учётом реономных свойств СПФ. Для всех решённых задач установлено, что такая зависимость отсутствует. Действительно, критические нагрузки определяются касательным модулем, вычисленным по диаграмме предельно медленного процесса, а сами такие процессы по принятому предположению являются склерономными, т.е. от скорости нагружения не зависят. Тезис об отсутствии зависимости величины критических нагрузок от скорости нагружения подтверждён в экспериментах.

*Работа выполнена при финансовом содействии РФФИ, проект № 11-01-00503 и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 годы», проект ГК №16.740.11.0132.*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Мовчан А.А., Мовчан И.А., Сильченко Л.Г. Микромеханическая модель нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях. //Изв. РАН. МТТ. 2010. № 3. С.118-130.
2. Мовчан А.А., Мовчан И.А., Сильченко Л.Г. Влияние структурного превращения и нелинейности процесса деформирования на устойчивость стержня из сплава с памятью формы. //Изв. РАН. МТТ. 2010. №6. С.137-147.
3. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г., Сильченко Т.Л. Учёт явления мартенситной неупругости при обратном фазовом превращении в сплавах с памятью формы. //Изв. РАН. МТТ. 2011. № 2. С.44-56.
4. Мовчан А.А., Казарина С.А., Тант Зин Аунг. Реономные свойства сплавов с памятью формы, проявляемые в опытах на мартенситную неупругость и сверхупругость.// Механика композиционных материалов и конструкций. 2010. Т.16. №3. С.305-311.
5. Мовчан А.А., Климов К.Ю. Моделирование реономных свойств сплавов с памятью формы. //Механика композиционных материалов и конструкций. 2011. Т.17. №2. С.255-267.
6. Мовчан А.А., Казарина С.А. Экспериментальное исследование явления потери устойчивости, вызванной термоупругими фазовыми превращениями под действием сжимающих напряжений. //Проблемы машиностроения и надежности машин. 2002. №6. С.82–89.
7. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г. Устойчивость круглой пластины из сплава с памятью формы при прямом мартенситном превращении.// ПММ. 2006. Т.70. Вып.5. С.869-881.
8. Мовчан А.А., Мовчан И.А., Сильченко Л.Г. Устойчивость кольцевой пластины из сплава с памятью формы.// ПМТФ. 2011. Т.52. №2. С.144-155.

#### Сведения об авторах:

**Мовчан Андрей Александрович**, проф., д.ф.-м.н., г.н.с Института прикладной механики РАН, Москва. +7(495) 946-17-77. **E-mail:** [movchan47@mail.ru](mailto:movchan47@mail.ru)

**Сильченко Татьяна Леонидовна**, аспирант Института прикладной механики РАН, Москва

**Климов Кирилл Юрьевич**, аспирант Московского Государственного Университета

**Казарина Светлана Александровна**, к.т.н., с.н.с. Института прикладной механики РАН

# ИЗБРАННЫЕ ПРОБЛЕМЫ НАНОМЕХАНИКИ

Морозов Н.Ф., Семенов Б.Н.

При изучении наноразмерных объектов необходимо учитывать возрастающее влияние поверхности. Рассмотрен ряд классических задач упругости для наноразмерных структур с учётом поверхностных напряжений и проведено сравнение с классическими результатами. Исследовано влияние учета поверхностных напряжений на эффективную жесткость нанопористого стержня и на устойчивость пластины с круговым вырезом при растяжении.

Стартовым годом для наномеханики в Санкт-Петербурге можно считать 2000 год, когда Жорес Иванович Алфёров стал Нобелевским лауреатом. Традиционно проведённые тогда в Санкт-Петербурге лекции, посвящённые этому событию, возбудили большой научный интерес к нанопроблематике у многих учёных, в том числе, и у механиков. Изучение механических свойств твёрдых нанобъектов показало, что у них существуют те же проблемы, как и у объектов традиционных размеров: прочность, разрушение, дефектность, отслоение, устойчивость и, следовательно, для предсказания их поведения необходимо использовать теоретические модели. Естественно для механиков выбрать классические модели изучения материалов и конструкции, соответственно их модифицировав, и первой проблемой является определение основных параметров – модуля Юнга и коэффициента Пуассона. Некоторые результаты, касающиеся неоднозначности в определении модуля Юнга для малого числа атомных слоёв, приведены в [1,2].

## О поверхностных эффектах

Многие наноматериалы обладают физическими свойствами, существенно отличающимися от свойств обычных материалов. Одним из объяснений этих отличий является наличие поверхностных эффектов, роль которых для наноразмерных структур может быть чрезвычайно велика по сравнению с классической механикой. Моделью, учитывающей свойства поверхности, служит теория упругости с поверхностными напряжениями [3-7]. Поверхностные напряжения  $\tau$  являются обобщением поверхностного натяжения, известного в теории капиллярности, на случай твёрдых тел. В её рамках наряду с тензором напряжений  $\sigma$ , определённым в объёме тела  $V$  и на его поверхности  $\Omega$ , на границе тела или ее части действуют поверхностные напряжения  $\tau$ . Тензор  $\tau$  обобщает известное в гидромеханике скалярное поверхностное натяжение на случай твёрдых тел. Введение поверхностных напряжений позволяет описать характерный для наноматериалов размерный эффект.

Математические исследования поверхностных напряжений в твёрдых телах и жидкостях восходят к работам Лапласа, Юнга, Гиббса и др., см., например, обзоры в [8,9]. Уравнения равновесия и краевые условия для линейно упругого тела с поверхностными напряжениями имеют вид [3-8]:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \sigma + \rho f &= 0 \quad \delta V, \\ u|_{\Omega_d} &= u_0, \quad n \cdot \sigma|_{\Omega_f} = \varphi, \quad (n \cdot \sigma - \nabla_s \cdot \tau)|_{\Omega_s} = \varphi. \end{aligned} \quad (1)$$

В (1)  $\sigma$  – напряжения,  $\nabla$  – трехмерный оператор набла,  $\rho$  – плотность,  $f$  – массовые силы,  $n$  – вектор нормали к поверхности тела,  $\Omega \equiv \partial V = \Omega_d \cup \Omega_s \cup \Omega_f$ , на  $\Omega_d$  заданы перемещения  $u_0$ , на  $\Omega_f$  действуют силы  $\varphi$ , а на  $\Omega_s$  также действуют поверхностные напряжения  $\tau$ ,  $\nabla_s$  – поверхностный оператор градиента, связанный с  $\nabla$  формулой  $\nabla_s = \nabla - n \frac{\partial}{\partial z}$ ,  $z$  – координата, отсчитываемая по нормали к поверхности  $\Omega$ . Тензоры напряжений и поверхностных напряжений в (1) даются формулами:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} = \lambda \text{tr} \varepsilon + 2\mu \varepsilon, \\ \tau &= \frac{\partial V}{\partial \varepsilon} = \tau_0 A + \lambda^s \text{tr} \varepsilon + 2\mu^s \varepsilon, \end{aligned} \quad (2)$$

$$W = W(\varepsilon) \equiv \frac{1}{2} \lambda \operatorname{tr} \varepsilon + \mu \varepsilon \cdot \varepsilon, \quad (3)$$

$$\varepsilon = \varepsilon(u) \equiv \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^T),$$

$$U = U(\varepsilon) \equiv \tau_0 \operatorname{tr} \varepsilon \varepsilon + \frac{1}{2} \lambda^S \operatorname{tr}^2 \varepsilon + \mu^S \varepsilon \cdot \varepsilon, \quad (4)$$

$$\varepsilon = \varepsilon(u) \equiv \frac{1}{2} ((\nabla_S u_S) \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot (\nabla_S u_S)^T),$$

Здесь  $\varepsilon$  – поверхностный тензор деформаций,  $u_S = u|_{\Omega_S}$  – вектор перемещений на  $\Omega_S$ ,  $\mathbf{A} = \mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ ,  $\mathbf{I}$  – трёхмерный единичный тензор,  $\lambda$  и  $\mu$  – постоянные Ламе,  $\lambda^S$  и  $\mu^S$  – поверхностные упругие модули (аналоги поверхностных постоянных Ламе),  $\tau_0$  – остаточное поверхностное напряжение.

### Эффективная жёсткость нанопористого стержня

Задача о растяжении линейно-упругого прямолинейного стержня с круговым сечением радиуса  $R$ . Будем считать, что параллельно оси стержня расположены  $n$  пор цилиндрической формы с одинаковыми радиусами  $r$ , суммарная площадь поперечных сечений которых равна

$$S = \pi n r^2. \quad (5)$$

Пусть на торцах стержня действует равномерно распределённая нагрузка, статически эквивалентная силам  $P$ . Обозначив модуль Юнга материала стержня через  $E$ , эффективный продольный модуль стержня с порами  $E_0^*$  можно выразить как:

$$E_0^* = E(1 - \varphi), \quad (6)$$

где  $\varphi = S/F$  – пористость,  $F = \pi R^2$  – полная площадь сечения стержня, включая площадь пор. Очевидно, что эффективный продольный модуль стержня с порами  $E_0^*$  не зависит от количества содержащихся в нем пор, а только от суммарной площади их поперечных сечений. Эффективный модуль упругости с учётом поверхностных напряжений  $E_S^*$  имеет вид

$$E_S^* = E(1 - \varphi) + E_S \frac{2\pi r n}{F} = E_0^* + E_S \frac{2\pi r n}{F}. \quad (7)$$

или с учётом (5)

$$E_S^* = E(1 - \varphi) + E_S \frac{2\sqrt{S}}{2\sqrt{\pi F}} \sqrt{n}. \quad (8)$$

Здесь  $E_S = \sigma_{zz}/\varepsilon_{zz} > 0$  – поверхностный аналог модуля Юнга, имеющий размерность Н/м,  $\sigma_{zz}$ ,  $\varepsilon_{zz}$  – продольные компоненты напряжений и поверхностной деформации.

Таким образом, учёт поверхностного эффекта позволяет получить зависимость эффективного модуля упругости стержня с порами  $E_S^*$  от количества пор  $n$ . При этом, маленькое количество пор большой площади поперечного сечения ослабляет стержень (его жёсткость становится меньше жёсткости изотропного материала стержня), но при той же суммарной площади поперечных сечений пор, стержень становится тем жёстче, чем больше пор он содержит (чем меньше радиус пор).

### Плоская задача для кругового отверстия в нанопластине (задача Кирша)

Еще одна задача, рассмотренная в работе, демонстрирующая, что учёт поверхностных напряжений оказывает существенное влияние на механические свойства нанообъектов – плоская задача для кругового отверстия в наноматериале.

Рассмотрим соответствующую задачу теории упругости: пусть упругая плоскость с круговым вырезом радиуса  $R$  находится под действием одноосного растяжения на бесконечности (задача

Кирша) величины  $p$  и дополнительных поверхностных напряжений. Объёмные соотношения поверхностной [3,4] и объёмной линейной упругости в случае плоской деформации сводятся к

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi\varphi}^S &= \sigma_0^S + (\lambda_S + 2\mu_S)\varepsilon_{\varphi\varphi}^S, & \sigma_{33}^S &= \sigma_0^S + \lambda_S\varepsilon_{\varphi\varphi}^S, \\ \sigma_{\varphi\varphi}(\lambda + 2\mu)\varepsilon_{\varphi\varphi} + \lambda\varepsilon_{rr}, & \sigma_{rr} &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{rr} + \lambda\varepsilon_{\varphi\varphi}, & (9) \\ \sigma_{r\varphi} &= 2\mu\varepsilon_{r\varphi}, & \sigma_{32} &= \lambda(\varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{rr}). \end{aligned}$$

Здесь  $(r, \varphi)$  – полярная система координат с центром, совпадающим с центром выреза,  $\sigma_0^S$  – остаточное поверхностное напряжение, отвечающее ненагруженному телу,  $\sigma_{\varphi\varphi}^S$  и  $\varepsilon_{\varphi\varphi}^S$  – окружные поверхностные напряжения и деформации,  $\sigma_{33}^S$  – нормальная к плоскости компонента тензора поверхностных напряжений,  $\sigma_{ij}$  и  $\varepsilon_{ij}$  – компоненты тензоров напряжений и деформаций в объёме,  $\lambda_S$  и  $\mu_S$  – модули поверхностной упругости, аналогичные постоянным Ламе  $\lambda$  и  $\mu$  для объёмной изотропной упругости.

Краевые условия на границе выреза  $r = R$  будут иметь вид:

$$\sigma_{rr} - \frac{\sigma_{\varphi\varphi}^S}{R} = 0, \quad \sigma_{r\varphi} + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}^S}{\partial \varphi} = 0, \quad r = R, \quad (10)$$

а условия на бесконечности в декартовой системе координат ( $x_1 = r \cos \theta$ ,  $x_2 = r \sin \theta$ ):

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \omega = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \sigma_{ij} = 0 \quad (i, j = 1, 2), \quad \text{кроме } \lim_{r \rightarrow \infty} \sigma_{11} = p, \quad (11)$$

Решив задачу (9)-(11) методом комплексных потенциалов, получим для внешности круга  $r > R$  [11]

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r, \varphi) &= \frac{\sigma_0^S R^2}{R+M} \frac{1}{r^2} + \frac{p}{2} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{M(1+k)}{2(R+M)} \right) \frac{R^2}{r^2} + \left( 1 - \frac{4R^2}{r^2} + \left( 3 - \frac{2M(1+k)}{2R+M(3+k)} \right) \frac{R^4}{r^4} \right) \cos 2\varphi \right], \\ \sigma_{\varphi\varphi}(r, \varphi) &= -\frac{\sigma_0^S R^2}{R+M} \frac{1}{r^2} + \frac{p}{2} \left[ 1 + \left( 1 - \frac{M(1+k)}{2(R+M)} \right) \frac{R^2}{r^2} - \left( 1 + \left( 3 - \frac{6M(1+k)}{2R+M(3+k)} \right) \frac{R^4}{r^4} \right) \cos 2\varphi \right], \\ \tau_{r\varphi}(r, \varphi) &= -\frac{p}{2} \left[ 1 + \frac{2R^2}{r^2} + \left( 3 - \frac{4M(1+k)}{2R+M(3+k)} \right) \frac{R^4}{r^4} \right] \sin 2\varphi. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь  $M = (\lambda_S + 2\mu_S)/2\mu$ ,  $k = (3 - \nu)$ .

Равенства (12) показывают характерную для наноматериалов зависимость напряжений от размера отверстия. Кроме того, из равенств (12) следует, что при  $M > 0$  учёт поверхностных напряжений уменьшает концентрацию напряжений в окрестности выреза. Аналогичное действие оказывает остаточное поверхностное напряжение  $\sigma_0^S$ , которое по сути является поверхностной энергией, необходимой для образования единицы поверхности. Например, для кубических металлов  $M \sim (10^{-10} - 10^{-9})_M$ ,  $\sigma_0^S \sim 1$  Н/м [5], и в этом случае при радиусе отверстия  $a \sim 10$  нм первое слагаемое во второй из формул (12) имеет порядок 100 МПа. А значит, при значениях напряжений на бесконечности  $p = 100$  МПа, вклад остаточных напряжений  $\sigma_0^S$  в напряжённое состояние границы отверстия сравним со вкладом однородного напряжённого состояния, существенно уменьшая концентрацию напряжений вблизи выреза. Это, в частности, означает, что наноматериал способен нести существенно большую нагрузку до момента потери устойчивости.

### Устойчивость бесконечной пластины с круговым отверстием с учётом поверхностных эффектов

В самом деле, воспользуемся энергетическим методом С.П. Тимошенко для определения критического напряжения, при котором наступает потеря плоской формы устойчивости [13]:

$$\begin{aligned}
 U &= \mathcal{W}, \\
 U &= \frac{D}{2} \int_0^{2\pi} \int_R^\infty [(\Delta w)^2 - (1-\nu)\mathcal{L}(w, w)] r \, dr \, d\varphi, \\
 \mathcal{W} &= \frac{h}{2} \int_0^{2\pi} \int_R^\infty \left[ \sigma_{rr} r \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \sigma_{\varphi\varphi} \frac{1}{r} \left( \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)^2 + 2\tau_{r\varphi} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right] dr \, d\varphi,
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

где  $U$  – потенциальная энергия деформации изгиба,  $\mathcal{W}$  – работа усилий в срединной плоскости пластины, накопившихся к моменту потери устойчивости, на дополнительных перемещениях, вызванных выпучиванием,  $w$  – прогиб выпученной пластины,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $D = Eh^3/12(1-\nu)^2$  – цилиндрическая жёсткость пластины,  $h$  – её жёсткость,

$$\mathcal{L}(w, w) = 2 \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} \right)^2 + \frac{2}{r^3} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^4} \left( \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)^2 \right].$$

Разыскивая функцию прогиба в виде  $w(r, \varphi) = \sum_{i=1}^3 \frac{\alpha_i}{r^i} \cos \varphi$  и определив коэффициенты  $\alpha_i$  из граничных условий, с использованием формул (20) получим выражение для критической нагрузки  $P_{cr}$ , вызывающей потерю устойчивости, с учётом поверхностных напряжений на отверстии.

В табл. 1 приведены критические нагрузки  $P_{cr}$  по отношению к критическим нагрузкам без учёта поверхностных напряжений  $P_{cr\_clas}$  для различных толщин пластинки для следующих параметров задачи:  $R = 15nm$ ,  $E = 10^{11} N/m^2$ ,  $\sigma_0^s = 1N/m$ ,  $M = 5 \cdot 10^{-9} m$ ,  $\nu = 1/3$

Таблица 1

$h$	0.5 nm	1 nm	10nm
$\frac{P_{cr}}{P_{cr\_clas}}$	0.4879	0.6534	0.7080

Таким образом, учёт поверхностных напряжений приводит к заметному увеличению критических нагрузок.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кривцов А.М., Морозов Р.Ф. Аномалии механических характеристик наноразмерных объектов. // Доклады РАН. 200. Т.381. №3. С.345-347.
2. Иванова Е.А., Кривцов А.М., Морозов Н.Ф. Об одном подходе к определению изгибной жёсткости нанооболочек.// Доклады РАН. 2002. Т.385. №4. С.494-496.
3. Подстригач Я.С., Повстенко Ю.З. Введение в механику поверхностных явлений. Киев: Наукова Думка, 1985. 200с.
4. Miller R.E., Shenoy V.B. Size-dependent elastic properties of nanosized structural element. Nanotechnology 11, (2000), 139-147.
5. Shenoy V.B., Atomic calculations of elastic properties of metallic fcc crystal surfaces. Phys.Rev. B., 71(9), 94-104.
6. Yang J., Ono T., Esashi M. Investigation Surface Stresses: Surface Ioss in ultrathin single –crystal silicon cantilevers. Journal of Vacuum science and technology. B., 19(2001), 551-556.
7. Duan H.L., Wang J. and Karihaloo B.L. Theory of Elasticity on nanoscale. Adv.Appl. Mech., 42, 1-68 (2000).
8. Goldstein R.V., Ustinov K.B., Gorodtsov V.A. Influence of surface elasticity on deformation of nanometer size in elastic matrix. Phys. Mesomechanics, 13(5), 127-138 (2010).
9. Bets K., Yakobson B. Spontaneous Twist and Intrinsic Instabilities. Nano Research Tebr. 2009, v.2, №2., pp.161-166.
10. Eremeyev V.A. and Morozov N.F. On effective rigity of nanoporous rod (Russian (Dokl. Acad. Nauk, 432(4), 473-476 (2010).

11. Grekov M.A. A singular plane problem in the theory of elasticity. (Russian) Izd. St-Peterburgskodo Universiteta, (St. Petersburg), (2000).
12. Tian L. Rajapakse RKD. Analitical solution for size-dependent elastic field of a nanoscale circular in homogeneity. Trans ASME, J. Appl. Mech. 74. Pp.568-574. 2007.
13. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем. М.: ГИТТЛ, 1955. 567с.

**Сведения об авторах:**

**Морозов Никита Федорович** – зав.кафедрой теории упругости, Санкт-Петербургский государственный университет, математико-механический факультет, (7812) 4286989

**E-mail:** [morozov@nm1016.spb.edu](mailto:morozov@nm1016.spb.edu)

**Семенов Борис Николаевич** – доцент кафедры теории упругости, Санкт-Петербургский государственный университет, математико-механический факультет, (7812) 4286989

**E-mail:** [semenov@bs1892.spb.edu](mailto:semenov@bs1892.spb.edu)

## РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ ДЛИТЕЛЬНЫХ ДЕФОРМАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ СЛОИСТЫХ ДЕМПФИРУЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ АНТИСЕЙСМИЧЕСКОГО ФУНДАМЕНТА

Мхитарян Д.А.

Анализ результатов исследований длительных деформационных процессов с учётом старения материалов позволяют сделать вывод о возможности использования этих элементов для решения инженерных задач. При этом, в качестве критерия оценки надёжности конструкций можно принять незначительное влияние длительного сжатия на поведение многослойных резиновых подушек, армированных металлическими пластинками

Защиты зданий и сооружений от разрушительного воздействия землетрясения можно достигнуть, исходя из принципа приспособляемости конструкций к сейсмическим силам с применением резино-металлических подушек антисейсмического фундамента [7].

Во многих странах, в районах с высокой сейсмичностью, в качестве антисейсмических элементов, в фундаментах принимают амортизирующие блоки в виде фрикционных подушек из полимерных материалов. Причём, сейсмоизоляция, как наиболее эффективное средство защиты зданий от землетрясений, уже внедрена в практику сейсмостойкого строительства [8,9]. Наряду с этим, широкое распространение получили слоистые резино-металлические опоры сейсмоизоляции (СРМОС) [6].

Опыты на модельных подушках (Франция) показали, что армированная неопреновая подушка действует как мягкая горизонтальная пружина и при землетрясениях с ускорением грунта до 0,5g происходит лишь деформация резиновой подушки без скольжения фрикционных пластин.

При более сильном землетрясении, кроме деформации резиновой подушки, происходит скольжение фрикционных пластин, в результате чего здание колеблется равномерно по высоте и не разрушается. Здесь важно отметить, что при условиях вертикального давления от 20 до 100 кг/см, скорости скольжения 0.2-1м/сек, необходимо, чтобы свойства и рабочие характеристики амортизирующего блока, коэффициента трения, статические и динамические коэффициенты оставались без изменения в течение всего срока службы установки, порядка 40 лет. В связи с этим, возникает проблема экспериментальных методов изучения деформативности и прочности этих элементов при различных условиях нагружения и напряжённого состояния [5,7].

Учитывая это, а также тот факт, что в конструкциях материалы обычно подвергаются сложному напряжённому состоянию при различных условиях нагружений, очевидна необходимость накопления опытных данных о механическом состоянии полимерных материалов.

Представляет интерес исследование деформационных свойств слоистых элементов образцов сборок-подушек из разных комбинаций полимеров, предназначенных для работы в условиях длительно действующих высоких давлений. При этом, большое значение имеет исследование процессов потери устойчивости элементов конструкций, в которых учитываются свойства ползучести материала [1]. Наряду с этим, поведение конструкции из полимерных материалов в реальных условиях эксплуатации в значительной степени определяется физическими свойствами материалов, зависящими от их структуры и изменяющимися во времени в результате физических и химических процессов. Следовательно, проблема установления гарантийных сроков их работоспособности приобретает особое значение. Так как демпфирующие элементы должны находиться в условиях постоянно действующих давлений, то в комплексе исследований, проводимой нами, входил вопрос изучения ползучести армированных полимерных слоистых опытных образцов, предназначенных для использования в качестве демпфирующих элементов под фундаментами сооружений при сейсмических воздействиях [5].

Отметим, что проблема прогнозирования поведения конструкций из полимерных материалов на продолжительный срок службы на основе лабораторных испытаний ограниченной длительности рассмотрена неоднократно [2,3]. Наряду с этим, основные предпосылки такого прогнозирования заключаются в том, что время и температура связаны друг с другом переменными, описывающими вязкоупругие свойства полимеров.

Согласно современным представлениям разрушение полимерных материалов вызывается термофлуктуационным процессом, развивающимся во времени и этот процесс тесно связан с упругим и вязкоупругим деформированием.

Опыты показывают, что разрушение резин при деформации происходит всегда в результате возникновения перенапряжений у микродефектов и последующего прорастания трещин. Это положение, сформулированное сначала в случае разрушения хрупких материалов, затем получило широкое приложение к полимерным системам. Следовательно, для большинства полимерных материалов задача прогнозирования долговечности сводится к выявлению реологических характеристик материала и их зависимости от напряжений и температуры.

Исходя из этого, опытные образцы многослойных подушек I и II серий скомбинированы из отдельных слоёв наирита, ограниченных с двух сторон металлическими латунными или стальными пластинками, с той разницей, что образцы II серии имеют внутренний слой армирования. Образцы III серии скомбинированы из амортизационной резины и алюминиевой пластинки.

В ходе экспериментов [5] кратковременным и длительным испытаниям подвергались три серии образцов в режиме однократного и повторного нагружения (табл. 1).

Таблица 1

Серии образцов	Наименование материалов составляющих слоёв	Толщина составляющих слоёв в мм	Общее количество слоёв в шт.	Размеры образцов в мм	
				в плане	толщина
I	Алюминиевый лист	1.0	9	70 x 70	13 ± 1
	Наирит 7 слойный	11.0			
	Алюминиевый лист	1.0			
II	Алюминиевый лист	1.0	9	70 x 70	13 ± 1
	Наирит 3 слойный	5.0			
	Алюминиевый лист	1.0			
	Наирит 3 слойный	5.0			
	Алюминиевый лист	1.0			
III	Амортизационная резина	10.0	3	70 x 70	13 ± 1
	Алюминиевый лист	3.0			

Опытные образцы подушек амортизирующего блока сейсмического фундамента имеют размеры 70×70 мм, толщину 13 мм.

Полученные данные показали, что при исследовании длительных деформационных процессов, образцы подвергались разным уровням нагружений. Кроме того, независимо от типа образцов, влияние возраста испытаний на деформирование незначительно. При этом, существенное влияние на изменение деформации оказывает количество повторных нагружений. При повышении количества циклов нагружений уменьшается как упругая, так и остаточная деформация. Здесь важно отметить, что определение деформаций полимерных материалов несколько сложнее вследствие большой разницы величин всех видов деформаций и постепенного их нарастания при каждой ступени нагрузки. При этом, судя по данным табл. 2, во всех случаях необратимые деформации первичного нагружения больше необратимых деформаций повторного нагружения [5], т.е. основные обратимые изменения в структуре, причиненные нагрузкой определённой величины, образуются даже при первичном нагружении материала.

Опыты показали, что влияние структурных изменений, служащих причиной возникновения необратимых деформаций, неодинаково сказывается на деформации в разных комбинациях слоёв полимерных материалов [5]. Следовательно, повторные циклы нагрузки-разгрузки образцов приводят к постоянному накоплению неупругих деформаций. Однако, в зависимости от схемы армирования, упругая и остаточная деформации резко отличаются.

Незначительное изменение деформации происходит в образцах, отличающихся только межслойным армированием.

Таблица 2

Номера	Серия модельных образцов	Вид деформации	Деформации $\epsilon \times 10^{-3}$ при однократном и повторном нагружении, испытанных в разных возрастах								
			$\tau = 5$ мес.		$\tau = 7$ мес.			$\tau = 18$ мес.			
			I цикл	II цикл	I цикл	II цикл	III цикл	I цикл	II цикл	III цикл	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
1	I	упр.	12.0	6.6	12.6	9.0	13.3	7.3	11.1	9.9	
		Остаточ.	15.5	7.7	15.0	13.6	11.4	13.3	12.9	12.3	
2	II	упр.	9.0	9.5	7.3	8.3	8.3	4.8	5.8	5.9	
		Остаточ.	11.5	12.0	13.1	12.2	12.3	11.6	10.6	10.3	
3	III	упр.	4.8	5.8	6.1	7.3	10.5	4.2	5.2	4.5	
		Остаточ.	12.6	14.1	14.2	14.2	12.3	16.6	12.9	12.5	

Данные табл. 3 показывают, что возраст испытания существенно влияет на снижение модуля упругости образцов.

Таблица 3

Серия опытных образцов	Модуль упругости опытных образцов в МПа при испытании разных возрастов		
	$\tau = 5$ мес.	$\tau = 7$ мес.	$\tau = 18$ мес.
I	103	100	46
II	119	134	141
III	85	80	52

Если возраст испытаний образцов  $\tau = 7$  и 18 месяцев приводят в наиритовых образцах I серии к падению модуля упругости, соответственно 3 и 50% по отношению к модулю упругости образцов, испытанных при  $\tau = 5$  месяцев, то в образцах II серии, отличающихся только межслойным армированием, наоборот, происходит повышение модуля упругости соответственно 21 и 18.5%, указывая при этом на повышение жёсткости подобных образцов. При этом, у резиновых образцов III серии, испытанных в аналогичных условиях, наблюдается незначительное повышение жёсткости, примерно 4%, и резкий спад значения модуля упругости. Эти данные указывают влияние возраста на изменение деформации образцов всех серий. При этом, возраст испытания оказывает большое влияние на изменение деформируемости образцов разных схем армирования. Под высоким давлением наблюдается в этих конструкциях из полимеров изменение физико-механических свойств, характеризуемое уменьшением его жесткости, возникновением остаточной деформации, изменением вида деформационных кривых. Наряду с этим, под влиянием старения у полимеров со временем повышается предел прочности и сопротивляемость деформированию. При этом, старение качественно одинаково действует на величину деформации ползучести и чем старше материал, тем больше его сопротивляемость деформированию. Однако, характер деформирования полимерных образцов имеет качественное отличие для разных армирований, указывая на более несущую способность этих конструкций. Кроме того, результаты испытания на длительное сжатие показывают, что слоистые элементы имеют значительно меньшую величину ползучести. Эти конструкции, составленные из полимеров с разными свойствами и с разной

структурой, армированными металлическими межслойными пластинками из цветных металлов и стали, которые способствуют повышению жёсткости элементов и срока службы.

Решение всех этих вопросов, связанные с исследованием ползучести полимерных элементов, в окончательной форме дают возможность прогнозировать долговечность подобных элементов на протяжении срока службы. Наряду с этим, полученные экспериментальные данные указывают на более высокую несущую способность конструкций многослойных подушек из наирита, армированных металлическими межслойными пластинками.

Результаты длительных испытаний под высокой нагрузкой, с учетом старения материалов, позволяют сделать вывод о возможности использования этих элементов для решения инженерных задач напряжённого состояния конструкций под длительно действующих высоких давлениях. При этом, в качестве критерия для оценки надежности конструкций можно принять незначительное влияние длительного сжатия на поведение конструкций типа многослойных подушек, армированных металлическими пластинками.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н.Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М.–Л.: Гостехтеориздат, 1952. 323с.
2. Ильюшин А.А., Огибалов П.М. Механика полимеров. 1966. №6. 828 с.
3. Каргин В.А., Сломинский Г.Л. //ДАН СССР. 1948. 62 с.
4. Назаров А.Г. О механическом подобии твёрдых деформируемых тел. Ереван: Изд. АН Арм.ССР. 1965. 217 с.
5. Мхитарян Д.А. Исследование деформационных свойств слоистых демпфирующих элементов антисейсмического фундамента. //Сб. науч. трудов ИГИС НАН РА. г.Гюмри. 1998. С.102-107.
6. Нерсисян Т.Э. Пути улучшения технологии изготовления слоистых резино-металлических опор сейсмоизоляции. //Сб. науч. трудов ИГИС НАН РА, г.Гюмри, 1998, ст. 108-112.
7. Шахсуварян Н.Л., Оганесян Н.Л. О возможности применения упругих подушек для повышения сейсмостойкости зданий. //Научные сообщения, вып. 7, АЙСМ, Ереван 1966. С.113-138.
8. Melkumian M. G. Base Isolation Retrofit Project in Armenia. Workshop on use of Natural Rubber Bearings for Seismic Isolation on Structures, Jakarta, 24-26 October 1994.
9. Melkumian M. G., Zadoyan P. M., Arzumanian V. G., Vardanian G. Kh., Nersessian T. E. Design, Manufacturing, Testing and First Application of Seismic Isolations Bearings in Armenia. – Proceedings of the Fourth International Conference on Civil Engineering. Department of Civil Engineering, Sharif University of Technology, Tehran, I. R. Iran, May 4-6, 1997. Vol. 1. Pp. 306-312.

#### **Сведение об авторе:**

**Мхитарян Долорес Агасиевна** – канд. техн.наук, старший науч. сотрудник Института геофизики и инженерной сейсмологии им. А.Назарова НАН РА г.Гюмри.

**Тел.:** (374 93) 89 60 47 . (374 055) 110 112; **Е-mail:** [avetisyan\\_lusine@bk.ru](mailto:avetisyan_lusine@bk.ru)

# О КОНТАКТЕ МЕЖДУ БЕСКОНЕЧНЫМ СТРИНГЕРОМ И УПРУГОЙ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНОЙ С ВЕРТИКАЛЬНОЙ ТРЕЩИНОЙ

Мхитарян С.М.

В рамках известной физической модели Мелана одномерного упругого континуума стрингера рассматривается контакт между бесконечным стрингером с упругой полубесконечной пластиной, содержащей вертикально выходящуюся одним концом на стрингер трещину конечной длины.

В задачах контактного взаимодействия стрингеров с массивными деформируемыми телами, содержащими трещины, подходящим выбором взаимного расположения стрингеров и трещин, а также их характерных параметров, иногда можно достичь уменьшения коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) и, тем самым, предотвратить их распространение. Поэтому исследование таких задач, учитывающее эффекты взаимовлияний двух различных типов концентраторов напряжений, представляется актуальным. В этом направлении укажем на работы [1,2].

В настоящей работе приводится система определяющих сингулярных интегральных уравнений (СИУ) рассматриваемой задачи, указывается метод его решения, вычисляются касательные контактные напряжения под стрингером, КИН в концевой точке трещины, расположенной в упругой пластине, раскрытие трещины. Рассматриваются частные случаи.

1. Пусть отнесённая к правой прямоугольной системе координат  $Oxy$  упругая полубесконечная пластина высоты (толщины)  $h$  и модуля упругости  $E$  занимает нижнюю полуплоскость  $y < 0$  и вдоль оси  $Oy$  содержат вертикальную трещину  $\omega = \{x = 0, -l < y < 0\}$ . Пусть далее пластина на своей границе  $y = 0$  усилена бесконечным упругим стрингером с модулем упругости  $E_s$  и площадью поперечного сечения  $A_s$ , причём  $A_s = h_s \cdot d_s$ , где  $h_s$  – высота сечения, а  $d_s$  – его ширина. Считаем также, что на грани  $y = h_s$  стрингер нагружен симметрическими касательными силами интенсивности  $\tau_+(x)$ :  $\tau_+(-x) = -\tau_+(x)$  ( $-\infty < x < \infty$ ), а на бесконечности – сосредоточенными, опять симметрическими, силами  $P_{-\infty}$  и  $P_{\infty}$  ( $P_{-\infty} = P_{\infty}$ ). Обращаясь к пластине, будем считать, что она на бесконечности по оси  $Ox$  растягивается равномерно распределёнными силами интенсивности  $\sigma$ , а на берегах трещины  $\omega$  действуют нормальные к ним разрывающие и равные по интенсивности силы  $p(y)$ . Требуется определить касательные контактные напряжения  $\tau_-(x)$  под стрингером, плотность дислокаций берегов трещины, КИН и раскрытие трещины.

Чтобы вывести определяющее СИУ описанной задачи, необходимо, учитывая симметрию задачи, в полярной системе координат  $(r, \vartheta)$  с полюсом в начале координат и полярной осью, совпадающую с отрицательной полосою  $Oy$ , для упругого клина  $\Omega = \{0 < r < \infty; 0 < \vartheta < \pi/2\}$  построить решение следующей смешанной граничной задачи:

$$\begin{aligned} \tau_{r\vartheta}|_{\vartheta=\pi/2} &= \tau_+(r) \quad (0 < r < \infty); & \sigma_{\vartheta}|_{\vartheta=\pi/2} &= \tau_{r\vartheta}|_{\vartheta=0} = 0 \quad (0 < r < \infty); \\ \sigma_{\vartheta}|_{\vartheta=\pi/2} &= -p(r) \quad (0 < r < l); & u_{\vartheta}|_{\vartheta=0} &= 0 \quad (l < r < \infty). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\tau_{r\vartheta}$ ,  $\sigma_{\vartheta}$  – компоненты напряжений, а  $u_{\vartheta}$  – компонента перемещений в окружном направлении. Вводя в рассмотрение половину плотности дислокаций на берегах трещины

$$\frac{du_{\vartheta}(0, r)}{dr} = \begin{cases} \varphi(r) & (0 < r < l); \\ 0 & (r > l); \end{cases}$$

решение этой граничной задачи построим при помощи интегрального преобразования Меллина. Далее считая, что пластина находится в обобщённом плоском напряжённом состоянии, а в соответствии с моделью Мелана [3]  $h_s, d_s \ll l$ , на основании решения задачи (1) по известной методике [4], получим следующую систему определяющих СИУ описанной выше задачи:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{4}{\pi E} \frac{d}{h} \int_0^\infty \frac{u \tau_-(u) du}{u^2 - x^2} + \frac{4}{\pi} \int_0^l \frac{ux^2}{(u^2 + x^2)} \varphi(u) du = \\ & = \frac{1}{2E_s A_s} \left[ d \int_{-\infty}^\infty \text{sign}(x-s) \tau_-(s) ds - \int_{-\infty}^\infty \text{sign}(x-s) \tau_+(s) ds \right] \quad (0 < x < \infty) \quad (2) \\ & \frac{E}{\pi} \int_0^l \left[ \frac{u}{u^2 - s^2} - \frac{(u-s)u}{(u+s)^3} \right] \varphi(u) du + \frac{4}{\pi} \frac{d}{h} \int_0^\infty \frac{u^3 \tau_-(u) du}{(u^2 + s^2)^2} = -\sigma - p(s) \quad (0 < s < l) \end{aligned} \right.$$

откуда определяются неизвестные функции  $\tau_-(x)$  ( $0 < x < \infty$ ) и  $\varphi(r)$  ( $0 < r < l$ ). Здесь  $d$  – ширина фактической контактной зоны, причём  $d \leq \min(h_s, ds)$ , и учтено условие совместности деформаций стрингера и пластины на бесконечности:  $\sigma/E = P_\infty/E_s A_s$ .

Так как ввиду симметрии и условия контакта  $u_g(0,0) = 0$ , то функция  $\varphi(r)$  должна удовлетворять условию

$$\int_0^l \varphi(u) du = 0. \quad (3)$$

Если жёсткость стрингера пренебрежимо мала, можно положить  $E_s A_s = 0$ , и тогда первое уравнение системы (2) отпадает, а вторым уравнением, полагая в нем  $\tau_-(x) \equiv 0$ , описывается задача об упругой полубесконечной пластине с вертикальной трещиной конечной длины [5].

Если же в (2) положить  $l = 0$ , то отпадёт второе уравнение этой системы, а оставшимся первым уравнением описывается задача о контакте бесконечного стрингера со сплошной упругой полубесконечной пластиной при их симметрическом нагружении.

Теперь в системе СИУ (2) функцию  $\tau_-(x)$  на интервал  $(-\infty, 0)$  продолжим нечётным образом, а функцию  $\varphi(u)$  на интервал  $(-l, 0)$  продолжим чётным образом. В результате, после введения безразмерных координат и величин

$$\begin{aligned} \xi = x/l, \quad \eta = u/l = s/l, \quad \tau(\xi) = \frac{d}{Eh} \tau(l\xi), \quad \tau_0(\xi) = \frac{\tau_+(l\xi)}{hE}, \quad \sigma_0 = \sigma/2E, \\ \varphi_0(\xi) = \varphi(l\xi), \quad \lambda = lhE/4E_s A_s, \quad p_0(\xi) = p(l\xi)/E \end{aligned}$$

систему СИУ (2) преобразуем к виду:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \left[ \frac{1}{\eta - \xi} + \pi \lambda \text{sign}(\eta - \xi) \right] \tau(\eta) d\eta + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{|\eta| \xi^2 \varphi_0(\eta) d\eta}{(\xi^2 + \eta^2)^2} = f(\xi) \quad (-\infty < \xi < \infty) \\ & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{\eta - \xi} - \frac{(3|\eta||\xi| + \xi^2) \text{sign} \xi}{(|\xi| + |\eta|)^3} \right] \varphi_0(\eta) d\eta + \frac{4}{\pi} \text{sign} \xi \int_{-\infty}^\infty \frac{\eta^3 \tau(\eta) d\eta}{(\xi^2 + \eta^2)^2} = g(\xi) \quad (-1 < \xi < 1) \end{aligned} \right. \quad (4)$$

где введены обозначения:

$$f(\xi) = \lambda \int_{-\infty}^\infty \text{sign}(\eta - \xi) \tau_0(\eta) d\eta, \quad g(\xi) = -2[2\sigma_0 + p_0(\xi)] \text{sign} \xi. \quad (5)$$

При этом, условие (3) преобразуется в условие

$$\int_{-1}^1 \varphi_0(\eta) d\eta = 0. \quad (6)$$

2. Для решения системы (4), из её первого уравнения при помощи интегрального преобразования Фурье определим функцию  $\tau(\xi)$  и полученный результат подставим во второе уравнение (4). В результате, придём к следующему одинарному определяющему СИУ задачи:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_0(\eta) d\eta}{\eta - \xi} - \frac{2\lambda}{\pi} \int_{-1}^1 M_0(\xi, \eta) \varphi_0(\eta) d\eta = h(\xi) \quad (-1 < \xi < 1) \quad (7)$$

$$M_0(\xi, \eta) = \text{sign} \xi \int_0^{\infty} \frac{(\alpha |\xi| - 2)(1 - \alpha |\eta|) e^{-\alpha(|\xi| + |\eta|)} d\alpha}{2\lambda + \alpha}, \quad L(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\eta - v) \frac{v^3 dv}{(\xi^2 + v^2)^2}; \quad (8)$$

$$h(\xi) = g(\xi) - \frac{2\xi}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\eta)(3\eta^2 + \xi^2) d\eta}{(\xi^2 + \eta^2)^2} - \frac{8}{\pi^2} \text{sign} \xi \int_{-\infty}^{\infty} L(\xi, \eta) f(\eta) d\eta,$$

$$K(t) = \int_0^{\infty} \frac{\sin(\alpha t) d\alpha}{2\lambda + \alpha} = \sin(2\lambda t) Ci(2\lambda t) - \cos(2\lambda t) si(2\lambda t);$$

где  $Ci(x)$  и  $si(x)$  – известные интегральные косинус и синус-функции. Решение СИУ (7) должно удовлетворять условию (6), а контактные напряжения  $\tau(\xi)$  выражаются формулой

$$\tau(\xi) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{\eta - \xi} - 2\lambda K(\eta - \xi) \right] f(\eta) d\eta + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \left[ \frac{\xi(\eta^2 - \xi^2)}{(\xi^2 + \eta^2)^2} + 2\lambda N(\xi, \eta) \right] \varphi_0(\eta) d\eta \quad (9)$$

$$N(\xi, \eta) = \int_0^{\infty} \frac{(1 - \alpha |\eta|) e^{-\alpha |\eta|} \sin(\alpha \xi) d\alpha}{2\lambda + \alpha} \quad (-\infty < \xi < \infty).$$

Если  $h(\xi)$  из (8) – гельдеровская функция на отрезке  $[-1, 1]$ , то решение СИУ (7)-(6) известным методом [5,6] можно свести к решению системы линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{m=1}^{2M} K_{rm} X_m = a_r \quad (r = \overline{1, 2M}); \quad a_r = \begin{cases} h(\xi_r) & (r = \overline{1, 2M-1}); \\ 0 & (r = 2M); \end{cases} \quad X_m = X_0(2m);$$

$$K_{rm} = \begin{cases} \frac{1}{2M} \left[ \frac{1}{\eta_m - \xi_r} - 2\lambda M_0(\xi_r, \eta_m) \right] & (m = \overline{1, 2M}, r = \overline{1, 2M-1}) \\ \frac{1}{2M} & (m = 2M, r = 2M) \end{cases} \quad (10)$$

$$\eta_m = \cos\left(\frac{2m-1}{4M}\pi\right) \quad (m = \overline{1, 2M}), \quad \xi_r = \cos\left(\frac{\pi r}{2M}\right) \quad (r = \overline{1, 2M-1}).$$

Здесь  $\xi_r$  и  $\eta_m$  – известные чебышевские узлы.

3. Рассмотрим два частных случая нагружения системы стрингер–пластина.

I.  $\sigma = 0$  и, следовательно,  $P_{\infty} = 0$ ,  $p(r) \equiv 0$ ,  $\tau_+(x) = P[\delta(x-a) - \delta(x+a)]$  ( $a > 0$ ),

где  $\delta(x)$  – известная дельта-функция Дирака. В случае этих сосредоточенных сил по (5)

$$g(\xi) \equiv 0 \quad \text{и} \quad f(\xi) = \begin{cases} p_0 & (-c < \xi < c); \\ 0 & (|\xi| > c); \end{cases} \quad (c = a/l; \quad p_0 = P/2E_s A_s).$$

А по (8) и (9) в данном частном случае

$$h(\xi) = -\frac{4p_0}{\pi} \left[ 2 \operatorname{arctg} \frac{c}{\xi} - \frac{c\xi}{c^2 + \xi^2} + 2\lambda \operatorname{sign} \xi \int_0^\infty \frac{(\alpha|\xi| - 2) \sin(\alpha c) e^{-\alpha|\xi|} d\alpha}{\alpha(2\lambda + \alpha)} \right] \quad (-1 < \xi < 1); \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \tau(\xi) = & -\frac{p_0}{\pi} \left[ \ln \left| \frac{c - \xi}{c + \xi} \right| + 4\lambda \int_0^\infty \frac{\sin(\alpha c) \sin(\alpha \xi) d\alpha}{\alpha(2\lambda + \alpha)} \right] + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \left[ \frac{\xi(\eta^2 - \xi^2)}{(\xi^2 + \eta^2)^2} + 2\lambda N(\xi, \eta) \right] \varphi_0(\eta) d\eta \quad (-\infty < \xi < \infty). \end{aligned} \quad (12)$$

Отметим, что функции  $h(\xi)$  и  $\tau(\xi)$  из (11)–(12) легко могут быть выражены через решение линейной системы (10).

II.  $\tau_+(x) \equiv 0$  ( $-\infty < x < \infty$ ),  $p(r) \equiv 0$ ,  $\sigma \neq 0$ . В этом случае  $f(\xi) \equiv 0$ ,  $h(\xi) = g(\xi) = -4\sigma_0 \xi$ , а в формуле (12) для  $\tau(\xi)$  остается только второй интегральный член.

Рассмотрим теперь важный частный случай абсолютно жёсткого стрингера:  $E_s = \infty$ . Тогда  $\lambda = 0$  и полагая  $\tau_+(x)$ ,  $P_\infty$ ,  $\sigma$  равными нулю, по (5) будем иметь  $g(\xi) = -2p_0(\xi) \operatorname{sign} \xi$ . Тогда СИУ (7)–(8) примет вид

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_0(\eta) d\eta}{\eta - \xi} = -2p_0(\xi) \operatorname{sign} \xi \quad (-1 < \xi < 1). \quad (13)$$

Рассматривая более частный случай, когда  $p_0(\xi) = p_0 = \operatorname{const}$ , решение СИУ (13) при условии (6) получим в виде [7]:

$$\varphi_0(\xi) = -\frac{4p_0}{\pi\sqrt{1-\xi^2}} + \frac{2p_0}{\pi} \ln \left( \frac{1 + \sqrt{1-\xi^2}}{1 - \sqrt{1-\xi^2}} \right) \quad (-1 < \xi < 1). \quad (14)$$

Отсюда очевидно, что в точке  $\xi = 0$  решение СИУ (13), когда  $p_0(\xi) = p_0 = \operatorname{const}$ , обладает логарифмической особенностью. Это обстоятельство всегда будет уметь место, если правая часть СИУ (7) функция  $h(\xi)$  и второй интеграл в левой части в (7) в точке  $\xi = 0$  будут иметь разрывы непрерывности. Поэтому, чтобы в этих случаях к СИУ (7)–(8) при условии (6) можно было применить метод решения СИУ [5,6], необходимо предварительно в указанных функциях выделить те их части, которыми обусловлена логарифмическая особенность решения  $\varphi_0(\xi)$  в точке  $\xi = 0$ . Исходя из этих соображений, в СИУ (7)–(8) положим

$$N_0(\xi, \eta) = M_0(\xi, \eta) - M_0(0, \eta), \quad h_0(\xi) = h(\xi) - h(+0), \quad c_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 M_0(\xi, \eta) \varphi_0(\eta) d\eta; \quad (15)$$

в результате чего исходное СИУ можем записать в виде

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_0(\eta) d\eta}{\eta - \xi} - \frac{2\lambda}{\pi} \operatorname{sign} \xi \int_{-1}^1 N_0(\xi, \eta) \varphi_0(\eta) d\eta = h_0(\xi) \operatorname{sign} \xi - 2q_0 \operatorname{sign} \xi \quad (-1 < \xi < 1) \quad (16)$$

$$N_0(\xi, \eta) = \int_0^\infty \frac{(1 - \alpha|\eta|) e^{-\alpha|\eta|} [(\alpha|\xi| - 2) e^{-\alpha|\xi|} + 2]}{2\lambda + \alpha} d\alpha, \quad q_0 = -\frac{1}{2\pi} [\pi h(+0) + 4c_0\lambda] \quad (-1 < \xi, \eta < 1)$$

Далее принимая во внимание (14), решение СИУ (16) представим в форме

$$\varphi_0(\xi) = \psi_0(\xi) + \frac{8q_0\lambda}{\pi^2} \psi_1(\xi) - \frac{4q_0}{\pi\sqrt{1-\xi^2}} + \frac{2q_0}{\pi} \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-\xi^2}}{1-\sqrt{1-\xi^2}}\right) \quad (-1 < \xi < 1), \quad (17)$$

где  $\psi_0(\xi)$  и  $\psi_1(\xi)$  – чётные функции – решения следующих СИУ:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_k(\eta) d\eta}{\eta - \xi} - \frac{2\lambda}{\pi} \text{sign}\xi \int_{-1}^1 N_0(\xi, \eta) \psi_k(\eta) d\eta = h_k(\xi) \text{sign}\xi \quad (-1 < \xi < 1; \quad k = 0, 1), \quad (18)$$

удовлетворяющие условиям типа (6). Здесь функция  $h_0(\xi)$  определена в (15), а функция  $h_1(\xi)$  выражается интегралом

$$h_1(\xi) = \int_{-1}^1 \frac{N_0(\xi, \eta)}{\sqrt{1-\eta^2}} \left\{ \sqrt{1-\eta^2} \left[ \ln\left(1 + \sqrt{1-\eta^2}\right) - \ln|\eta| \right] - 1 \right\} d\eta \quad (-1 < \xi < 1). \quad (19)$$

Теперь к СИУ (18)–(19) можно применить метод [5,6] и их свести к системам линейных уравнений типа (10), полагая при этом

$$\psi_0(\xi) = \Omega_0(\xi) / \sqrt{1-\xi^2}, \quad \psi_1(\xi) = \Omega_1(\xi) / \sqrt{1-\xi^2} \quad (-1 < \xi < 1).$$

КИН определяется по формуле

$$K_l = -\frac{E}{2} \lim_{x \rightarrow l-0} \left[ \sqrt{2\pi(x-l)} \varphi(x) \right], \quad K_0 = \frac{2K_l}{E\sqrt{\pi l}} = -\left[ \Omega_0(1) + \frac{8q_0\lambda}{\pi^2} \Omega_1(1) - \frac{4q_0}{\pi} \right];$$

а безразмерное раскрытие трещины – формулой

$$\Phi_0(\xi) = \int_{-1}^1 \text{sign}\eta \text{sign}(\xi - \eta) \varphi_0(\eta) d\eta,$$

где  $\varphi_0(\xi)$  определяется по (17). При помощи (17) из (15) можно найти постоянную  $c_0$ .

В случае конечного стрингера получаются аналогичные результаты.

Работа выполнена в рамках гранта 11-2с450 Госкомитета по науке мин. обр. и науки РА.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Грейф, Сэндерс Мл. Влияние стрингера на распределение напряжений в листе с трещиной. // Прикладная механика. Тр. амер. о-ва инж.- мех. Сер. Е. 1965. №1.
2. Мхитарян С.М., Агаян К.Л. Об одной периодической контактной задаче для упругой полосы, ослабленной трещинами и усиленной упругими стрингерами. // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1978. Т. 31. №3. С.3–17.
3. Melan E. Ein Beitrag zur Theorie geschweißter Verbindungen. // Ingr. Arch., 1932, Bd. 3, No2, S. 123-129.
4. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонким покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488 с.
5. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацьшин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова думка, 1976. 443 с.
6. Erdogan F., Gupta G.D., Cook T.S. The numerical solutions of singular integral equations. Methods of Analysis an solution of crack problems, pp. 368-425, Noordhoff Intern. Publ., 1973.
7. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. М.–Ленинград: 1949. 270 с.

### Сведения об авторе:

**Мхитарян Сурен Манукович** – член-корр. НАН РА, д.ф.-м.н., профессор, зав.отделом Института механики НАН РА

Тел.: 62 10 25, (093) 93 61 17; E-mail: [smkhitaryan@mechins.sci.am](mailto:smkhitaryan@mechins.sci.am)

## О ГИДРАВЛИЧЕСКОМ РАСЧЁТЕ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТОМ МНОГОСЛОЙНОМ ГРУНТЕ

**Мхитарян С.М., Токмаджян О.В.**

Рассматривается плоская задача об определении основных гидравлических характеристик установившейся фильтрации жидкости в пористом многослойном грунтовом массиве, когда с верхней границы массива жидкость с определённой скоростью впрыскивается во внутрь грунта.

Определение основных гидравлических характеристик установившейся фильтрации жидкости в пористых грунтах: потенциал скоростей, законы распределения давлений и скоростей, расходы жидкости через сечения грунта, широко применяются в расчётах гидротехнических сооружений, представляют теоретический и практический интерес [1-3].

В настоящей работе в постановке теории установившейся фильтрации жидкости, построено точное решение плоской задачи фильтрации жидкости в составном многослойном грунтовом массиве, состоящего из произвольного конечного числа однородных слоёв, когда с верхней границы массива жидкость с определённой скоростью впрыскивается во внутрь грунта, а нижняя поверхность массива водонепроницаема. Предлагается методика для вычисления указанных гидравлических характеристик и рассматривается частный случай. Отметим, что инъекции жидкости, химических растворов и жидких удобрений в почву используется в практике обработки и орошения сельскохозяйственных угодий [4].

1. Пусть при плоском течении жидкости в грунте, отнесённом к прямоугольной системе координат  $Oxy$  (ось  $Oy$  направлена вниз), имеем кусочно-однородный пористый грунтовой массив  $\Omega$ , состоящий из произвольного конечного числа  $n$  слоёв (полос)  $\omega_p$  ( $p = \overline{1, n}$ ):

$$\Omega = \{ \omega_p \} \quad \omega_p = \{ -\infty < x < \infty, \quad h_{p-1} \leq x \leq h_p \} \quad (h_0 = 0).$$

Будем считать, что  $p$ -ый слой  $\omega_p$ , высоты  $H_p = h_p - h_{p-1}$  ( $p = \overline{1, n}$ ,  $h_0 = 0$ ), обладает коэффициентом фильтрации  $k_p$ . Пусть далее с верхней границы грунтового массива  $y = 0$  или с её части в виде системы отрезков  $L = \{ y = 0, [a_p, b_p] \}$  жидкость с заданной вертикальной скоростью  $v_0(x)$  впрыскивается во внутрь многослойного грунта, а его нижняя грань  $y = h_n$  водонепроницаема. При этих условиях выведем определяющие уравнения поставленной задачи.

С этой целью сначала для полосы  $\omega_p$  запишем закон Дарси [1,2]

$$v_x^{(p)} = -k_p \frac{\partial h_p}{\partial x}, \quad v_y^{(p)} = -k_p \frac{\partial h_p}{\partial y}, \quad v_x^{(p)} = -k_p \frac{\partial h_p}{\partial x} h_p(x, y) = \frac{P_p}{\gamma_p} - y \quad (p = \overline{1, n}) \quad (1)$$

где  $v_x^{(p)}$  и  $v_y^{(p)}$  – соответственно, горизонтальные и вертикальные составляющие скорости фильтрации в  $\omega_p$ ,  $h_p = h_p(x, y)$  – пьезометрическое давление,  $P_p(x, y)$  – давление в  $\omega_p$ , а  $\gamma_p$  – удельный вес жидкости в  $\omega_p$ . В  $p$ -ой полосе  $\omega_p$  ( $p = \overline{1, n}$ ), вводя в рассмотрение потенциал скоростей  $\varphi_p = \varphi_p(x, y) = -k_p h_p(x, y)$ , по (1) будем иметь

$$v_x^{(p)} = \frac{\partial \varphi_p}{\partial x}, \quad v_y^{(p)} = \frac{\partial \varphi_p}{\partial y} \quad ((x, y) \in \omega_p) \quad (2)$$

Подставляя теперь (2) в уравнение неразрывности, придём к уравнению Лапласа для  $\varphi_p(x, y)$ . Решение этого уравнения на границах составного грунта  $y = 0$  и  $y = h_n$  должно удовлетворять граничным условиям:

$$\left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right|_{y=0} = \begin{cases} v_0(x) & (x \in L \text{ или } x \in R); \\ 0 & x \in R \setminus L \quad R = (-\infty, \infty); \end{cases} \quad \left. \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} \right|_{y=h_n} = 0 \quad (x \in R) \quad (3)$$

и условиям контакта на линиях стыка полос  $\omega_p$  и  $\omega_{p+1}$ , заключающимися в равенстве давлений и вертикальных компонент скоростей [1]

$$\left. \frac{\varphi_p}{k_p} \right|_{y=y_p} = \left. \frac{\varphi_{p+1}}{k_{p+1}} \right|_{y=h_p}; \quad \left. \frac{\partial \varphi_p}{\partial y} \right|_{y=h_p} = \left. \frac{\partial \varphi_{p+1}}{\partial y} \right|_{y=h_p} \quad (p = \overline{1, n-1}, \quad -\infty < x < \infty) \quad (4)$$

Учитывая граничные условия (3) и вторые условия (4), для определения потенциала скоростей в полосе  $\omega_p$  рассмотрим следующую граничную задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi_p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_p}{\partial y^2} = 0 \quad (-\infty < x < \infty, \quad h_{p-1} < y < h_p) \quad (p = \overline{1, n}) \\ \left. \frac{\partial \varphi_p}{\partial y} \right|_{y=h_{p-1}} = v_{p-1}(x), \quad \left. \frac{\partial \varphi_p}{\partial y} \right|_{y=h_p} = v_p(x) \quad (-\infty < x < \infty) \end{cases} \quad (5)$$

где  $v_p = v_y^{(p)}(0, n)$ , причём,  $v_0(x)$  – заданная функция,  $v_n(x) \equiv 0$ , а  $v_p(x)$  ( $p = \overline{1, n-1}$ ) – пока неизвестные функции. Решение задачи (5) построим при помощи интегрального преобразования Фурье по координате  $x$ , для чего в  $\omega_p$  введём трансформанты Фурье:

$$\bar{\varphi}_p(\lambda, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_p(x, y) e^{i\lambda x} dx \quad (p = \overline{1, n}), \quad \bar{v}_p(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} v_p(x, y) e^{i\lambda x} dx \quad (p = \overline{0, n-1})$$

В трансформантах Фурье задача (5) преобразуется к виду

$$\begin{cases} \frac{d^2 \bar{\varphi}_p}{dy^2} - \lambda^2 \bar{\varphi}_p = 0 \quad (h_{p-1} < y < h_p, \quad p = \overline{1, n}); \\ \left. \frac{d\bar{\varphi}_p}{dy} \right|_{y=h_{p-1}} = \bar{v}_{p-1}(\lambda), \quad \left. \frac{d\bar{\varphi}_p}{dy} \right|_{y=h_p} = \bar{v}_p(\lambda) \end{cases} \quad (6)$$

Решение граничной задачи (6) представляется формулой ( $h_{p-1} \leq y \leq h_p$ )

$$\bar{\varphi}_p(\lambda, y) = \left\{ \bar{v}_p \operatorname{ch}[\lambda(y - h_{p-1})] - \bar{v}_{p-1} \operatorname{ch}[\lambda(y - h_p)] \right\} / \lambda \operatorname{sh}(\lambda H_p) \quad (p = \overline{1, n}) \quad (7)$$

Далее первое условие (4) запишем в трансформантах Фурье  $\bar{\varphi}_p/k_p|_{y=h_p} = \bar{\varphi}_{p+1}/k_{p+1}|_{y=h_p}$  ( $p = \overline{1, n-1}$ ) и потребуем, чтобы решение (7) удовлетворяло этому условию. В результате, после простых преобразований относительно неизвестных функций  $\bar{v}_p = \bar{v}_p(\lambda, h_p)$  получим следующую определяющую систему конечно-разностных уравнений второго порядка:

$$a_p \bar{v}_{p-1} - (b_p + b_{p+1}) \bar{v}_p + a_{p+1} \bar{v}_{p+1} = 0 \quad (p = \overline{1, n-1}), \quad (8)$$

где приняты обозначения

$$a_p = 1/k_p \operatorname{sh}(\lambda H_p), \quad b_p = \operatorname{cth}(\lambda H_p)/k_p, \quad H_p = h_p - h_{p-1} \quad (p = \overline{1, n-1}). \quad (9)$$

После решения системы (8)–(9), функции  $\bar{\varphi}_p(\lambda, y)$  полностью определяются по (7), а функции  $\varphi_p(x, y)$  – формулой обратного преобразования Фурье. Затем по функциям  $\varphi_p(x, y)$  ( $p = \overline{1, n}$ ) можно вычислить упомянутые выше гидравлические характеристики.

Системы (8)–(9) сведём к конечно-разностным уравнениям первого порядка, полагая

$$a_p \bar{v}_{p-1} - b_p \bar{v}_p = \omega_p; \quad a_{p+1} \bar{v}_{p+1} - b_{p+1} \bar{v}_p = X_{p+1} \quad (p = \overline{1, n-1}) \quad (10)$$

Тогда система (8) перейдет в систему

$$\omega_p + X_{p+1} = 0 \quad (p = \overline{1, n-1}). \quad (11)$$

Таким образом, решение рассматриваемой задачи окончательно сводится к решению конечно-разностных уравнений первого порядка (10)–(11).

2. Решения определяющих конечно-разностных уравнений (10) построим известным методом [5], и как в [6], первое уравнение (10) представим в виде

$$\bar{v}_p = [1 - P(p)]\bar{v}_{p-1} + Q(p) \quad (p = \overline{1, n-1}), \quad P(p) = (b_p - a_p)/b_p, \quad Q(p) = -\omega_p/b_p. \quad (12)$$

Сначала решим однородное уравнение:  $\bar{v}_p = [1 - P(p)]\bar{v}_{p-1}$  ( $p = \overline{1, n-1}$ ), которое запишем в развёрнутом виде  $\bar{v}_1 = [1 - P(1)]\bar{v}_0$ ,  $\bar{v}_2 = [1 - P(2)]\bar{v}_1, \dots$ ,  $\bar{v}_p = [1 - P(p)]\bar{v}_{p-1}$ .

Переумножая почленно эти равенства, получено решение однородного уравнения в виде

$$\bar{v}_p = \bar{v}_0 \prod_{j=1}^p [1 - P(j)] \quad (p = \overline{1, n-1}). \quad (13)$$

Далее исходя из (13), методом вариации находим решение неоднородного уравнения (12):

$$\bar{v}_p = -\sum_{j=1}^p A_j \frac{C_j}{C_p} \omega_j + \frac{\bar{v}_0}{C_p} \quad (p = \overline{1, n-1}) \quad A_j = k_j \text{th}(\lambda H_j), \quad C_j = \prod_{r=1}^j \text{ch}(\lambda H_r) \quad (j = \overline{1, n}). \quad (14)$$

Таким же образом решение второго уравнения (10) с учётом (11) представляется формулой

$$\bar{v}_p = -\sum_{j=p}^{n-1} B_j \frac{D_{j+1}}{D_p} \omega_j \quad (p = \overline{1, n-1}) \quad B_j = k_{j+1} \text{sh}(\lambda H_{j+1}), \quad D_j = \prod_{r=1}^{n-1} \text{ch}(\lambda H_{r+1}). \quad (15)$$

Теперь приравниваем выражения (14) и (15), что относительно неизвестных  $\omega_j$  ( $j = \overline{1, n-1}$ ) приведёт к следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$-\sum_{j=1}^p A_j \frac{C_j}{C_p} \omega_j + \frac{\bar{v}_0}{C_p} = \sum_{j=p}^{n-1} B_j \frac{D_{j+1}}{D_p} \omega_j \quad (p = \overline{1, n-1}). \quad (16)$$

Далее поступив совершенно аналогично сделанному в [6], систему (16) преобразуем в систему с левой частью треугольной матрицы:

$$\sum_{j=1}^p L_{pj} \omega_j = g_p \quad (p = \overline{1, n-1}) \quad g_p = \bar{v}_0 - C_p^2 X_n, \quad X_n = \sum_{j=1}^{n-1} A_{j+1} \omega_j / C_j$$

$$L_{pj} = \begin{cases} A_j C_j - \frac{C_p^2}{C_j} A_{j+1} & (j = \overline{1, p-1}), \\ A_p C_p & (j = p) \end{cases} \quad (17)$$

Чтобы определить  $X_n$ , решение системы при правой части  $g_p^{(1)}$  – равной вектору–столбцу из  $p$  строк с единицами, обозначим через  $\omega_j^{(1)}$  ( $j = \overline{1, n-1}$ ), а при правой части  $g_p^{(2)} = C_p^2$  – через  $\omega_j^{(2)}$ . Тогда решение системы (17) выразится формулой

$$\omega_j = \bar{v}_0 \omega_j^{(1)} - X_n \omega_j^{(2)} \quad (j = \overline{1, n-1}). \quad (18)$$

Подставляя теперь (18) в выражение  $X_n$  из (17), находим

$$X_n = \left[ \bar{v}_0 \sum_{j=1}^{n-1} A_{j+1} \omega_j^{(1)} / C_j \right] / \left[ 1 + \sum_{j=1}^{n-1} A_{j+1} \omega_j^{(2)} / C_j \right]$$

Система линейных уравнений (17) допускает точное аналитическое решение. В самом деле, введем в рассмотрение левую треугольную матрицу  $L = (L_{pj})$  ( $j = \overline{1, p}; \quad p = \overline{1, n-1}$ ). Тогда элементы обратной матрицы  $M = (M_{pj}) = L^{-1}$  определяются формулами:

$$M_{jj} = 1/L_{jj}, \quad M_{pj} = 0 \quad (p < j); \quad M_{pj} = -\sum_{r=j}^{p-1} L_{pr} M_{rj} / L_{pp} \quad (p > j).$$

Из этих равенств элементы  $M_{pj}$  обратной матрицы  $L^{-1}$  последовательно определяются.

3. Рассмотрим частный случай двухслойного грунта ( $n=2$ ). В этом случае из (17) сразу определится  $\omega_1$ , а затем из (14) или (15) определится  $\bar{v}_1$  через  $\bar{v}_0$ , ( $\bar{v}_2 = 0$ ). При этом, образы Фурье потенциалов скоростей  $\varphi_p(\lambda, y)$  ( $p=1, 2$ ) определяются по (7). В результате,

$$\bar{\varphi}_1(\lambda, y) = -\frac{1}{\lambda k_1 \text{sh}(\lambda H_1)} \left\{ \text{ch}[\lambda(h_1 - y)] \bar{v}_0 - \text{ch}(\lambda y) \bar{v}_1 \right\} \quad (0 \leq y \leq h_1) \quad (19)$$

$$\bar{\varphi}_2(\lambda, y) = -[\text{ch}\lambda(h_2 - y)] \bar{v}_1 / \lambda k_2 \text{sh}(\lambda H_2) \quad (h_1 \leq y \leq h_2) \quad (20)$$

$$\bar{v}_1 = k_2 \text{sh}(\lambda H_2) \bar{v}_0 / [k_2 \text{sh}(\lambda H_2) \text{ch}(\lambda H_1) + k_1 \text{sh}(\lambda H_1) \text{ch}(\lambda H_2)] \quad (H_1 = h_1). \quad (21)$$

Теперь исходя из (19), выведем дифференциальное уравнение фильтрации жидкости в тонком грунтовом слое  $\omega_1 = \{0 \leq y \leq h_1, -\infty < x < \infty\}$ . С этой целью (19) запишем в виде

$$\lambda k_1 \text{sh}(\lambda h_1) \bar{\varphi}_1(\lambda, y) = \text{ch}(\lambda y) \bar{v}_1 - \text{ch}[\lambda(h_1 - y)] \bar{v}_0 \quad (0 \leq y \leq h_1)$$

и в этом равенстве целые функции  $\lambda \text{sh}(\lambda h_1)$ ,  $\text{ch}(\lambda y)$  и  $\text{ch}[\lambda(h_1 - y)]$  разложим в ряды, ограничиваясь в них членами порядка  $\lambda^2$ . В результате будем иметь

$$h_1 k_1 \lambda^2 \bar{\varphi}_1(\lambda, y) = \bar{v}_1(\lambda) - \bar{v}_0(\lambda) + \frac{y^2}{2} \lambda^2 \bar{v}_1(\lambda) - \frac{(h_1 - y)^2}{2} \lambda^2 \bar{v}_0(\lambda) \quad (-\infty \leq \lambda < \infty).$$

Отсюда при помощи формулы обратного преобразования Фурье получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее по принятой точности процесс фильтрации в материальном волокне грунта с ординатой  $y$  первого слоя грунтового массива:

$$h_1 k_1 d^2 \varphi_1 / dx^2 = v_0(x) - v_1(x) + (y^2/2) v_1''(x) - ((h_1 - y)^2/2) v_0''(x) \quad (-\infty < x < \infty); \quad 0 \leq y \leq h_1 \quad (22)$$

Теперь из (22) при  $y=0$  и  $y=h_1$ , соответственно, находим ( $-\infty < x < \infty$ )

$$h_1 k_1 d^2 \varphi_0 / dx^2 = v_0 - v_1 - (h_1^2/2) v_0''; \quad (23); \quad h_1 k_1 d^2 \varphi_1 / dx^2 = v_0 - v_1 + (h_1^2/2) v_1''; \quad (24)$$

Далее в (23)–(24) совершим предельные переходы  $h_1 \rightarrow 0$   $k_1 \rightarrow \infty$  таким образом, чтобы величина  $h_1 k_1$ , назовём её модулем фильтрации грунта, оставалась постоянной. В итоге

$$K \frac{d^2 \varphi_1}{dx^2} = v_0 - v_1 \quad (K = h_1 k_1, \quad 0 \leq y \leq h_1) \quad (25)$$

Этим уравнением описывается модель фильтрации жидкости в тонком грунтовом слое представляющая аналог известной модели Мелана [17] стрингера в задачах контактного взаимодействия тонкостенных элементов с упругими массивными телами [8].

Аналогичное с (25) уравнение можно получить для второго слоя грунта, исходя из (21).

Обращаясь к вертикальным скоростям на контактной линии  $y=h_1$ , из (21) по формуле обратного преобразования Фурье получим ( $k = k_2/k_1, -\infty < x < \infty$ )

$$v_1(x) = \frac{k}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(|x-s|) v_0(s) ds; \quad K(x) = \int_0^{\infty} \frac{\text{sh}(\lambda H_2) \cos(\lambda x) d\lambda}{k \text{sh}(\lambda H_2) \text{ch}(\lambda h_1) + \text{sh}(\lambda h_1) \text{ch}(\lambda H_2)} \quad (26)$$

Для упрощения этих формул рассмотрим случай, когда  $v_0(x) = V \delta(x)$ , где  $\delta(x)$  – функция Дирака. Тогда после введения безразмерных величин

$$\alpha = \lambda h_1, \quad \xi = x/h_1, \quad \delta = H_2/h_1, \quad \tilde{v}_1(\xi) = h_1 v_1(h_1 \xi) / V,$$

формулы (26) примут вид

$$\tilde{v}_1(\xi) = \frac{k}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{sh}(\lambda\delta) \cos(\lambda\xi) d\alpha}{k \text{sh}(\lambda\delta) \text{ch}\alpha + \text{sh}\alpha \text{ch}(\lambda\delta)}. \quad (27)$$

Обсудим следующие частные случаи формулы (27).

1) Пусть  $k = 1$ , т.е.  $k_1 = k_2$  и, следовательно, грунтовый массив однороден. Тогда, после вычисления интеграла  $K(\xi)$  ([9]. ф-ла 3. 981. 5, стр.518) получим

$$\bar{v}_1(\xi) = \sin(\pi\delta/\delta+1)/2(\delta+1) \{ \text{ch}[\pi\xi(\delta+1)] + \cos[\pi\delta/(\delta+1)] \} \quad (-\infty < \xi < \infty)$$

2) Пусть  $k \ll 1$ , т.е.  $k_1 \ll k_2$ . В этом случае можем записать

$$\frac{k \text{sh}(\alpha\delta)}{k \cdot \text{sh}(\alpha\delta) \text{ch}\alpha + \text{sh}\alpha \text{ch}(\alpha\delta)} = \frac{1}{\text{ch}\alpha} \left[ 1 - \frac{\text{th}\alpha}{\text{th}\alpha + k \text{th}/\alpha\delta} \right] \approx k \frac{\text{th}(\alpha\delta)}{\text{sh}\alpha}.$$

Тогда по формуле (27) будем иметь

$$\tilde{v}_1(\xi) \approx \frac{k}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{th}(\alpha\delta)}{\text{sh}\alpha} \cos(\alpha\xi) d\alpha \quad (-\infty < \xi < \infty),$$

3) Теперь пусть  $k \gg 1$ , т.е.  $k_1 \gg k_2$ . В этом случае

$$\frac{k \text{sh}(\alpha\delta)}{k \cdot \text{sh}(\alpha\delta) \text{ch}\alpha + \text{sh}\alpha \text{ch}(\alpha\delta)} = \frac{1}{\text{ch}\alpha} \frac{k \text{th}(\alpha\delta)}{\text{th}\alpha + k \text{th}/\alpha\delta} \approx \frac{1}{\text{ch}\alpha} - \frac{1}{k} \frac{\text{sh}\alpha}{\text{ch}^2\alpha \text{th}(\alpha\delta)}$$

Следовательно, по (27)

$$\bar{v}_1(\xi) \approx \frac{1}{2 \text{ch}(\pi\xi/2)} - \frac{1}{\pi k} \int_0^{\infty} \frac{\text{th}\alpha \cos(\alpha\xi)}{\text{ch}\alpha \text{th}(\alpha\delta)} d\alpha \quad (-\infty < \xi < \infty)$$

В общем случае для вычисления безразмерной вертикальной скорости  $\tilde{v}_1(\xi)$  имеем формулу (27), при помощи которой можно провести численный анализ  $\tilde{v}_1(\xi)$ .

Работа выполнена при финансовом содействии правительства РА в рамках гранта 11-2h442.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Аравин В.И., Нумеров С.Н. Теория движения жидкости и газов в недеформируемой пористой среде. М.: Гос.изд.техн.теор.лит., 1953. 616с.
2. Полубаринова–Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664с.
3. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917-1967). М.: Наука, 1969. 545с.
4. Григорян Ш.М., Саноян В.Г. Токмаджян О.В., Гаспарян С.М. К теории инъекции жидкости в плотную среду. // Доклады НАН Армении. 1999. Т.99. №1. С.69–73.
5. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967. 375с.
6. Гаспарян А.В., Мхитарян С.М. О напряжённом состоянии композита в виде пакета из произвольного конечного числа упругих слоёв при антиплоской деформации. // Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. №2. С.10–20.
7. Melan E. Ein Beitrag zur Theorie geschweißter Verbindungen.–Ingr. Arch.,1932, Bd.3, N2, S.123.
8. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488с.
9. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108с.

### Сведения об авторах:

**Мхитарян Сурен Манукович** – чл.-корр. НАН Армении, д.ф.-м.н., профессор, зав. отделом Института механики НАН РА; Тел. 62 10 25, (093) 93 61 17; **E-mail:** [smkhitaryan@mechins.sci.am](mailto:smkhitaryan@mechins.sci.am)

**Токмаджян Оганес Вачеевич** – д.т.н., проф., Тел.: 093 43 16 64, **E-mail:** [toqmajyan@ysuac.am](mailto:toqmajyan@ysuac.am)

# ОСОБЕННОСТИ РУСЛОВЫХ СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЙ И ИХ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Надолин К.А.

В работе обсуждаются особенности течения воды в протяжённых русловых потоках и подходы к их моделированию. Рассматриваются модельные уравнения, которые описывают течение в русловых потоках как пространственно трёхмерный процесс, при этом они существенно проще полных трёхмерных уравнений. В отличие от осреднённых уравнений, рассматриваемые редуцированные модели учитывают пространственную структуру течения, что позволяет исследовать влияние формы дна и береговой линии русла, а также некоторых внешних факторов (например, воздействие ветра) на особенности течения.

**1. Особенности русловых потоках.** Большое разнообразие естественных водотоков не позволяет рассчитывать на адекватное и в то же время вычислительно эффективное описание таких объектов в рамках единственной математической модели, основанной, например, на полных уравнениях гидродинамики турбулентного потока. Поэтому весьма актуальной задачей является построение упрощённых математических моделей, которые математически обоснованно учитывают существенные особенности рассматриваемых сдвиговых течений.

Например, многим рекам свойственны спокойное медленное течение, значительная протяженность слабо искривленных участков, а также относительно малая глубина русла по сравнению с его шириной. Средняя скорость течения равнинных рек обычно не превосходит  $1 \text{ м/сек}$ , а отношение характерной глубины к характерной ширине русла колеблется в пределах от 0.1 до 0.005 [1]. Такой русловой поток не стоит считать обычным нестационарным трёхмерным течением, хотя в силу многих причин его не всегда можно рассматривать как стационарное и одномерное или двумерное течение.

Естественные водотоки всегда являются турбулентными, поэтому любая, даже самая упрощенная математическая модель должна учитывать турбулентность течения. В задачах окружающей среды использование сложных моделей турбулентности оказывается не всегда оправданным [2]. Поэтому для русловых потоков можно ограничиться простейшими способами учёта турбулентности в сдвиговом течении с возможностью калибровки параметров по имеющимся данным. В работе [3] показано, что при определённых условиях упрощение математической модели гидродинамики протяжённого слабо искривленного руслового потока может быть основано на методе малого параметра, связанного с геометрией области течения. Такой подход приводит к рекуррентной последовательности модельных задач, решая которые можно, при необходимости, повышать точность моделирования. С другой стороны, переход к осредненным величинам даёт возможность понизить размерность возникающих математических моделей, а подбор коэффициентов позволяет провести их калибровку и согласовать с имеющимся экспериментальным материалом.

**2. Общие уравнения в безразмерных переменных.** Рассмотрим протяжённый и слабо искривлённый участок руслового течения, границы которого включают твёрдое и непроницаемое для жидкости дно, свободную поверхность, входное и выходное сечение. На свободной поверхности потока задана внешняя сила, обусловленная, например, действием ветра, которую считаем постоянной.

Введём прямоугольные декартовы координаты  $(x, y, z)$  так, чтобы плоскость  $xu$  оказалась на поверхности потока, а ось  $z$  была направлена в сторону дна под углом  $\varphi$  к вертикали. Ось  $x$  направим вдоль направления уклона потока, а ось  $y$  – от левого берега к правому перпендикулярно оси  $x$ . Начало координат разместим в соответствии с входным сечением рассматриваемого участка на одинаковом расстоянии от берегов. Входное и выходное сечения находятся в плоскостях  $x = 0$  и  $x = L_x$ , соответственно, где  $L_x$  – определяет протяжённость рассматриваемого участка потока. Пусть свободная поверхность описывается уравнением  $z = \xi(x, y, t)$ , где  $\xi(x, y, t)$  – неизвестная функция. Будем считать, что ложе потока задает соотношение  $z = h(x, y)$ , где  $h(x, y)$  – известная и достаточно гладкая функция. Тогда берега потока являются пространственными линиями, точки которых имеют координаты  $(x, l(x, t), h(x, l(x, t)))$  и  $(x, r(x, t), h(x, r(x, t)))$  для левого и правого берега соответственно.

Функции  $y = l(x, t)$  и  $y = r(x, t)$  находятся из условия  $h(x, y) = \xi(x, y, t)$  на основе теоремы о неявной функции. Очевидно, что в любой момент времени  $t$  при  $l(x, t) < y < r(x, t)$  выполнено условие  $h(x, y) > \xi(x, y, t)$ . Запишем уравнения Рейнольдса для несжимаемой жидкости, замкнутые на основе гипотезы Буссинеска относительно безразмерных переменных. В качестве линейного масштаба по соответствующему направлению  $x$ ,  $y$  и  $z$  примем характерную длину  $L_x$ , ширину  $L_y$  и глубину  $L_z$  потока. Введём параметры мелководности  $\varepsilon = L_z / L_y$  и протяжённости  $\delta = L_y / L_x$  потока (они предполагаются малыми). Различные компоненты вектора скорости нормируем, используя разные масштабы. Пусть  $U_x$  – характерная скорость в направлении  $x$ . За масштаб скорости в направлении  $y$  примем  $U_y = \delta U_x$ , а в направлении  $z$ , соответственно  $U_z = \varepsilon U_y = \varepsilon \delta U_x$ . В качестве масштаба измерения давления удобно принять  $\rho U_x^2$ , времени –  $L_x / U_x$ . Это означает, что число Эйлера и число Струхала для рассматриваемых сдвиговых течений равны единице. Такое предположение выполняется для широкого класса русловых потоков. Пусть  $\mathbf{f}$  – заданный вектор поверхностных напряжений. Его компоненты нормируем в соответствии с представлением

$$\mathbf{f} = (f \cos \psi_x, \delta f \cos \psi_y, \varepsilon \delta f \cos \psi_z)$$

где направляющие косинусы связаны соотношением

$$\cos \psi_z = \frac{\partial \xi}{\partial x} \cos \psi_x + \frac{\partial \xi}{\partial y} \cos \psi_y$$

Уравнения Рейнольдса для несжимаемой жидкости относительно безразмерных переменных примут вид

$$\begin{aligned} \varepsilon \delta \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} \right) &= -\varepsilon \delta \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \right. \\ &+ \left. \varepsilon^2 \delta^2 \left[ 2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \right) + Fr^{-1} \sin \varphi \\ \varepsilon \delta^2 \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial vw}{\partial z} \right) &= -\varepsilon \frac{\partial p}{\partial y} + \delta \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \right. \\ &+ \left. \varepsilon^2 \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \varepsilon^2 \delta^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) \\ \varepsilon^2 \delta^2 \left( \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial uw}{\partial x} + \frac{\partial vw}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \varepsilon \delta \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \right. \\ &+ \left. 2 \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \varepsilon^2 \delta^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) + Fr^{-1} \cos \varphi \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь введены число Фруда  $Fr = U_x^2 / (gL_z)$ , число Рейнольдса  $\text{Re} = \rho U_x L_z / \eta$  и безразмерная функция вязкости  $\nu$ , учитывающая турбулентность течения. Поскольку в определение числа Рейнольдса входит значение коэффициента турбулентной вязкости  $\eta$ , вычисленное на поверхности потока, значение функции  $\nu$  на поверхности потока должно быть равно 1.

Граничные условия на твёрдом дне  $z = h(x, y)$  имеют вид

$$u = v = w = 0 \tag{2}$$

На свободной поверхности потока при  $z = \xi(x, y, t)$  кинематические и динамические условия имеют вид:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} - w = 0 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & - \varepsilon \delta \operatorname{Re} p \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \varepsilon^2 \delta^2 \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \\ & + \varepsilon^3 \delta \kappa \left( \delta^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} = F \cos \psi_x \left( 1 + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + \varepsilon^2 \delta^2 \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right)^{1/2} \\ & - \varepsilon \operatorname{Re} p \frac{\partial \xi}{\partial y} - \delta \frac{\partial v}{\partial z} + \varepsilon^2 \delta \left( \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial x} + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \varepsilon^2 \delta^3 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \\ & + \varepsilon^3 \kappa \left( \delta^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) \frac{\partial \xi}{\partial y} = \delta F \cos \psi_y \left( 1 + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + \varepsilon^2 \delta^2 \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right)^{1/2} \\ & \operatorname{Re} p + \varepsilon \delta \left( \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial \xi}{\partial y} - 2 \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \varepsilon^3 \delta \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \varepsilon^3 \delta^3 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} - \\ & - \varepsilon^2 \kappa \left( \delta^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) = \varepsilon \delta F \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \cos \psi_x + \frac{\partial \xi}{\partial y} \cos \psi_y \right) \left( 1 + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + \varepsilon^2 \delta^2 \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $\kappa = g(\eta U_x)^{-1}$  – капиллярный параметр; углы  $\psi_x$  и  $\psi_y$  определяют направление, а параметр  $F = fL_z(\eta U_x)^{-1}$  – интенсивность ветровой нагрузки.

Для завершения корректной постановки краевой задачи для уравнений (1) надо также задать начальные условия и условия во входном и выходном сечениях.

**3. Классификация моделей русловых потоков.** Безразмерные уравнения (1)-(4), содержащие параметры  $\varepsilon$  и  $\delta$ , позволяют получать различные математические модели русловых потоков. Для этого требуется определить связь между параметром мелководности  $\varepsilon$  и параметром протяжённости  $\delta$  в соответствии с предположениями о характере рассматриваемого сдвигового течения. В таблице приведены различные варианты связи между параметрами, которые могут быть использованы для характеристики русловых потоков.

Таблица. Классификация математических моделей потоков

	Тип модели потока	$\varepsilon$	$\delta$	Замена в (1)-(12)
1	Мелкий протяжённый	$o(1)$	$O(\varepsilon)$	$\varepsilon = \delta$
2	Очень мелкий протяжённый	$o(\delta)$	$o(1)$	$\varepsilon = \delta^2$
3	Мелкий сильно протяжённый	$o(1)$	$o(\varepsilon)$	$\delta = \varepsilon^2$
4	Мелкий широкий поток	$o(1)$	$O(1)$	$\delta = 1$
5	Глубокий протяжённый	$O(1)$	$o(\varepsilon)$	$\varepsilon = 1$
6	Существенно трёхмерный	$O(1)$	$O(1)$	$\varepsilon = \delta = 1$

Например, модель *мелкого протяжённого потока* возникает из предположения, что параметры  $\varepsilon$  и  $\delta$  являются малыми одного порядка. Это означает, что ширина значительно превосходит глубину потока, причём рассматривается течение на участке русла, длина которого во столько же раз превосходит ширину потока, во сколько раз ширина превосходит глубину. Считая  $\varepsilon$  и  $\delta$  малыми параметрами разных порядков малости, получим уравнения, описывающие *мелкий*

сильно протяжённый поток ( $\delta = o(\varepsilon)$ ) или очень мелкий протяжённый поток ( $\varepsilon = o(\delta)$ ). Варианты, когда лишь один из параметров является малым, отвечают случаям *глубокого протяжённого потока* и *мелкого широкого потока*. Заметим, что отказ от предположения о малости как параметра  $\varepsilon$ , так и параметра  $\delta$ , приводит к обычным трёхмерным уравнениям.

**4. Редуцированные трёхмерные модели.** Дальнейшее основывается на том условии, что величина слагаемых в уравнениях (1)–(4), записанных в безразмерном виде, определяется стоящими при них параметрами. Для неизвестных величин и их производных это обеспечивается выбором масштабов, а для формы русла (в исходной геометрии) требуется выполнение условий, означающих слабую искривленность потока

$$\frac{\partial h}{\partial x} = O(\varepsilon\delta), \quad \frac{\partial h}{\partial y} = O(\varepsilon)$$

Наличие малого параметра в уравнениях позволяет применить технику разложения неизвестных величин в асимптотические ряды и свести исходную нелинейную задачу к рекуррентной последовательности линейных начально-краевых задач. При этом, уравнения для главных членов можно рассматривать как упрощённые математические модели, описывающие соответствующий тип руслового потока (будем их называть *базовыми моделями*), а уравнения для последующих членов – как *уравнения поправок*.

Выпишем базовые модели для вариантов 1-5 из таблицы классификации потоков. Введём гравитационный параметр  $G = Fr^{-1} \cos \varphi$  и параметр уклона  $I = \operatorname{tg} \varphi$ . Для мелкого протяженного потока имеем

$$\frac{\partial p}{\partial z} = G, \quad p|_{z=\xi} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial z} \left( v \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\operatorname{Re} GI, \quad \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=\xi} = -F \cos \psi_x, \quad u|_{z=h} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( v \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\operatorname{Re} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=\xi} = -F \cos \psi_y, \quad v|_{z=h} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = - \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad w|_{z=h} = 0; \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} + u|_{z=\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + v|_{z=\xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} - w|_{z=\xi} = 0 \quad (7)$$

Уравнения для очень мелкого протяжённого и мелкого широкого потоков отличаются от модели мелкого протяжённого потока (5)-(7) лишь уравнением для поперечной скорости (6), которое надо брать в виде

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( v \frac{\partial v}{\partial z} \right) = 0$$

Уравнения мелкого сильно протяжённого потока отличаются от модели (5)-(7) дополнительным условием на давление, а также уравнением для поперечной скорости

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial z} \left( v \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\operatorname{Re} G \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial y}$$

где функция  $\tilde{\xi}(x, y, t)$  – поправка порядка  $\varepsilon$  к форме свободной границы  $\xi = \xi(x, t)$ .

Уравнения глубокого протяжённого потока с плоской стационарной свободной границей  $\xi \equiv 0$  имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = G, \quad p|_{z=0} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( v \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\operatorname{Re} GI, \quad \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = -F \cos \psi_x, \quad u|_{z=h} = 0 \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left[ v \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + 2 \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left[ v \left( \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( v \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial z}\bigg|_{z=0} = -F \cos \psi_y, \quad w|_{z=0} = 0, \quad v|_{z=h} = w|_{z=h} = 0$$

**5. Заключение.** Уравнения упрощённых математических моделей русловых потоков выводятся путем обоснованных математических преобразований общих уравнений гидродинамики несжимаемой жидкости. Это позволяет придать математический смысл сделанным предположениям (например, условию слабой искривленности русла), дать классификацию потоков и соответствующих моделей, а также формализовать область их применимости. В отличие от распространённых и общепринятых осреднённых моделей, предлагаемые редуцированные модели русловых потоков учитывают пространственную структуру течения, что позволяет исследовать влияние формы дна и береговой линии русла, а также некоторых внешних факторов (например, воздействие ветра) на особенности течения. В качестве математических моделей русловых потоков предлагается брать уравнения для старших членов асимптотического разложения неизвестных величин в ряды по параметру мелководности (или протяжённости), который считается малым. Эти модели названы *базовыми*. При необходимости, результаты могут быть уточнены путём решения уравнений для поправок, образующих рекуррентную последовательность краевых задач.

Предлагаемые модельные уравнения описывают течение в русловом потоке как пространственно трёхмерный процесс, при этом, они существенно проще полных трехмерных уравнений. Для мелких потоков уравнения могут быть проинтегрированы явно, а поля скорости и давления выражаются через функцию возвышения свободной поверхности. Т.о., определение гидродинамических полей сводится к нахождению функции возвышения свободной поверхности. Поэтому важно выяснить, можно ли считать свободную поверхность потока стационарной и плоской. Общий ответ оказывается отрицательным, но при определённых условиях и геометрии русла это возможно. (Например, при отсутствии уклона, или в случае ламинарного потока постоянной глубины в плоском канале или в канале прямоугольного сечения). Априорное предположение о стационарной и плоской свободной поверхности потока допускает модель мелкого сильно протяжённого и модель глубокого протяжённого потоков. В этих моделях продольная скорость определяется независимо из самостоятельной краевой задачи. Заметим, что для ответа на многие практически важные вопросы (например, о расходе жидкости) достаточно знать лишь величину продольной скорости.

Привлечение гипотезы Буссинеска и использованный подход к выводу модельных уравнений позволяют полуэмпирически учитывать турбулентность потока, выбирая коэффициент турбулентной вязкости  $\nu$ , исходя из соответствия получаемой скорости имеющимся экспериментальным данным [3]. При этом, вид функции  $\nu$  может быть достаточно произвольным. Требуется лишь выполнение условия  $\nu = 1$  на поверхности потока и убывание (вместе со скоростью) по направлению ко дну. Также, при постоянной вязкости ( $\nu \equiv 1$ ) результаты должны соответствовать ламинарному течению.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Великанов М.А. Динамика русловых потоков. Т.1. Структура потока. М.: ГТТИ. 1954. 323с.
2. Роди В. Модели турбулентности окружающей среды // В кн.: «Методы расчёта турбулентных течений». М.: Мир, 1984. С.227-322.
3. Надолин К.А. Об одном подходе к моделированию пассивного массопереноса в русловых потоках // Математическое моделирование. 2009. Т.21, № 2. С.14-28.
4. Жилиев И.В., Надолин К.А. Численное моделирование гидродинамики мелкого протяжённого руслового потока // Изв. ЮФУ. Технические науки. 2012. №6(131). С.10-14.

#### Сведения об авторе:

**Надолин Константин Аркадьевич** – доцент кафедры математического моделирования, Южный федеральный университет, факультет математики, механики и компьютерных наук, +7(863) 2975 285, +7(863) 2975 111, E-mail: [nadolin@math.sfedu.ru](mailto:nadolin@math.sfedu.ru)

# МУЛЬТИДИСЦИПЛИНАРНАЯ МОДЕЛЬ ОКОЛОСКВАЖИННОГО ПРОСТРАНСТВА ДЛЯ ОПИСАНИЯ ЭВОЛЮЦИИ ФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ

Назарова Л.А., Назаров Л.А., Эпов М.И., Ельцов И.Н.

Разработана объёмная модель, описывающая эволюцию геомеханических и гидродинамических полей при бурении глубоких скважин. Показано, что при определённом соотношении прочностных свойств пород, давления бурового раствора и величины естественных горизонтальных напряжений в околоскважинном пространстве могут возникать зоны необратимых деформаций, оказывающие существенное влияние на показания приборов геофизического исследования скважин, что необходимо учитывать при инверсии каротажных данных.

**1. Введение.** Неотъемлемым элементом современных технологий бурения и эксплуатации разведочных и добычных скважин является диагностика породного массива комплексом геофизических методов, позволяющая не только определить продуктивные интервалы, но и дать количественную оценку фильтрационно-ёмкостных параметров пласта. Интерпретация каротажных данных проводится с использованием гидродинамического моделирования процесса фильтрации в околоскважинном пространстве [1]. С увеличением глубины под действием природного поля напряжений в окрестности контура могут возникать зоны необратимых деформаций [2], в которых существенно меняются не только механические, но и фильтрационные [3] свойства пород, что необходимо учитывать при описании процессов массопереноса и инверсии данных исследования скважин.

**2. Постановка и методика решения задачи.** Пусть горизонтально-слоистый коллектор в момент времени  $t = 0$  мгновенно вскрывается вертикальной скважиной радиуса  $r_0$ . При бурении на репрессии, когда давление в пласте  $p_c$  меньше давления на забое  $p_b$ , в окрестности скважины формируется несколько зон (рис. 1). Будем полагать, что область разрушений  $F$  возникает, если выполнен критерий Треска  $\tau = \tau_s$ , где  $\tau$  – максимальное касательное напряжение,  $\tau_s$  – предел прочности пород на сдвиг.

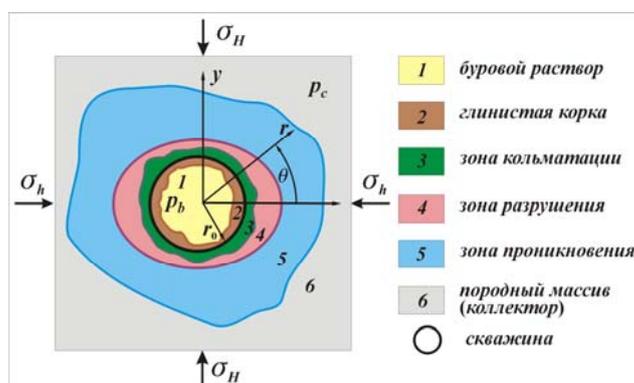


Рис. 1. Типичные зоны в окрестности скважины при бурении на репрессии.

Деформирование среды описывается упругопластической моделью [4], включающей: уравнения равновесия

$$\text{div } \Sigma + \Phi = m \nabla p ; \quad (1)$$

соотношения Коши для малых деформаций

$$D = 0.5(\nabla u^r + \nabla u^r{}^T) ; \quad (2)$$

закон Гука для упругих областей

$$\Sigma = \lambda I_1(D^e)E + 2\mu D^e ; \quad (3)$$

критерий Треска для определения областей разрушения и условие аддитивности приращений деформаций

$$\Delta D = \Delta D^e + \Delta D^p , \quad (4)$$

где  $\Sigma$ ,  $D$  и  $E$  – тензоры напряжений, деформаций и единичный;  $\dot{\Phi} = (0, 0, \rho g)$  и  $\dot{u}$  – векторы плотности массовых сил и смещений;  $I_1$  – первый инвариант;  $\lambda$ ,  $\mu$  – параметры Ламе;  $\rho$  – плотность;  $g$  – ускорение свободного падения;  $m$  – пористость;  $p$  – давление флюида; индексы “e” и “p” означают упругую и пластическую составляющие.

Процесс двухфазной фильтрации в околоскважинном пространстве описывается [1] системой, в которую входят:

$$\text{уравнения сохранения массы} \quad (mS_n)_{,t} + \text{div} \dot{w}_n = 0; \quad (5)$$

$$\text{закон Дарси} \quad \dot{w}_n = -\frac{k}{\eta_n} k_n \nabla p; \quad (6)$$

$$\text{зависимость пористости от давления [5]} \quad m = m_0(1 + \beta p); \quad (7)$$

$$\text{а также уравнения роста глинистой корки} \quad \dot{B}(\theta, z, t) = \delta(\bar{w}_1)_r(r_0, \theta, z, t) \quad (8)$$

$$\text{и солепереноса} \quad (mCS_1)_{,t} + \text{div}(C\dot{w}_1) = 0, \quad (9)$$

где  $(r, \theta, z)$  – цилиндрические координаты;  $S_n$  – насыщенность  $n$ -ой фазой ( $n = 1, 2$ ;  $S_1 + S_2 = 1$ );  $k$  – абсолютная проницаемость;  $k_n = S_n^{a_n}$  – относительная проницаемость;  $\dot{w}_n$  – скорость;  $\eta_n$  – вязкость;  $\beta$  – сжимаемость скелета коллектора;  $B$  – толщина глинистой корки;  $C$  – солёность (масса солей, растворённых в единице объёма воды);  $\delta$ ,  $a_n$  – эмпирические константы. Для системы (5)-(9) формулируются начальные

$$p(r, \theta, z, 0) = p_c, \quad S_1(r, \theta, z, 0) = S_{10}, \quad B(\theta, z, 0) = 0, \quad C(r, \theta, z, 0) = C_0$$

и граничные

$$p(r_0, \theta, z, t) = p_b, \quad p(r_c, \theta, z, t) = p_c,$$

$$S_1(r_0, \theta, z, t) = 1, \quad S_1(r_c, \theta, z, t) = S_{10}, \quad C(r_0, \theta, z, t) = C_1, \quad C(r_c, \theta, z, t) = C_0$$

условия ( $r_c$  – радиус зоны влияния скважины [1]), а для системы (1)-(4) только граничные условия (рис. 1):

$$\bullet \text{ на контуре скважины } r = r_0 \quad \Sigma_{rr} = (1 - m)p_b, \quad \Sigma_{r\theta} = \Sigma_{rz} = 0;$$

$$\bullet \text{ при } r_0 \ll r \quad \Sigma_{rr} = \sigma_H \cos^2 \theta + \sigma_h \sin^2 \theta, \quad \Sigma_{r\theta} = 0.5(\sigma_H - \sigma_h) \sin 2\theta, \quad \Sigma_{rz} = 0$$

( $\sigma_h$  и  $\sigma_H$  – минимальное и максимальное горизонтальные напряжения в природном поле).

Для описания зависимости абсолютной проницаемости от напряжений использовались экспериментальные данные [2], аппроксимация которых позволила получить соотношение

$$k = k_0 [k_e^{\tau/\tau_s} H(\tau_s - \tau) + k_p H(\tau - \tau_s)], \quad (10)$$

где  $H$  – функция Хевисайда,  $k_e = 0.7-0.8$  и  $k_p = 0.2-0.4$  – эмпирические константы.

Численная реализация модели (1)-(9) осуществлялась по следующей процедуре:

1) система (5)-(7) сводилась к уравнению относительно давления, которое решалось конечно-разностным методом переменных направлений [6], модифицированным с учётом (8);

2) полученное распределение давлений подставлялось в правую часть (1) и методом конечных элементов из (1)-(4) определялись напряжения и конфигурация  $F$ ;

3) по (10) находилось изменение проницаемости;

4) из (5), (6) и (9) определялись водонасыщенность и солёность в зоне проникновения.

**3. Осесимметричная модель слоистого коллектора.** В равнокомпонентном поле внешних напряжений ( $\sigma_H = \sigma_h$ ) область разрушения в горизонтальном сечении имеет форму круга (радиус  $r_*$ ), поэтому задача становится осесимметричной. На примере одной из скважин Когалымского месторождения углеводородов (верхняя граница пласта расположена на глубине 2518 м) рассмотрим влияние зон разрушения на эволюцию гидродинамических полей и динамику роста глинистой корки. В табл. 1 приведены основные параметры модели, остальным присваивались типичные значения, характерные для рассматриваемой залежи.

Таблица 1. Числовые значения основных параметров модели и размер зон разрушения.

№ слоя	I	II	III	IV	V	VI	VII
мощность, м	1.0	3.2	0.8	5.6	3.4	2.2	3.8
$m_0$	0.205	0.213	0.170	0.203	0.189	0.174	0.164
$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	2450	2490	2100	2420	2245	2390	2375
$S_{10}$	0.298	0.291	0.700	0.349	0.423	0.468	0.606
$k_0$ , мD	43.65	87.62	11.00	33.91	10.72	8.80	6.14
$\tau_s$ , МПа	10	10	12	10	12	12	12
$r^*$ , см	19.45	19.52	16.02	19.65	16.18	16.20	16.25

На рис. 2 показано изменение толщины глинистой корки во времени без учёта (а) и с учётом (b) зоны  $F$  при  $k_e = 0.8$  и  $k_e = 0.4$ . Можно заметить, что во втором случае величина  $B$  заметно меньше, что необходимо учитывать при интерпретации данных кавернометрии, поскольку толщина глинистой корки служит одним из индикаторов наличия продуктивного интервала: в окрестности высокопроницаемых участков пласта  $B$  увеличивается, что хорошо видно на рис. 2 (тоном отмечены пропластки с низкой абсолютной проницаемостью).

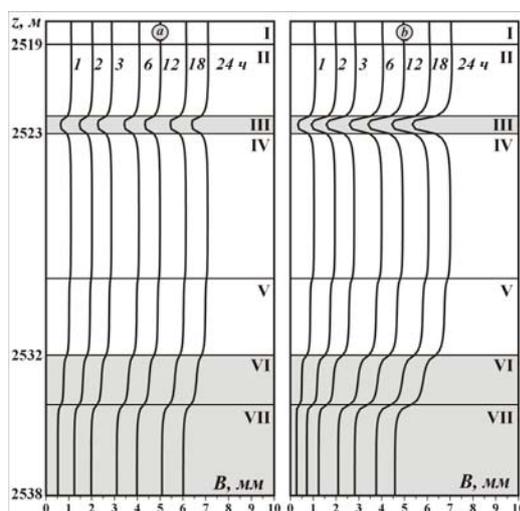


Рис. 2.

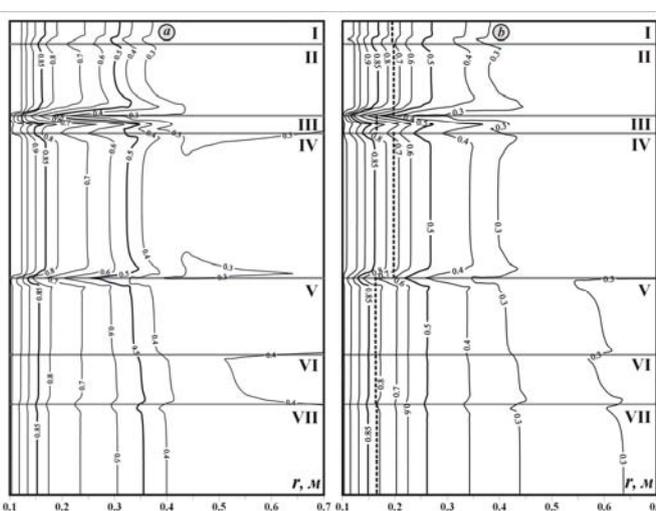


Рис. 3.

На рис. 3 представлено распределение водонасыщенности в зоне проникновения (границы зон разрушения показаны штриховыми линиями) через сутки после вскрытия пласта. Отметим некоторые особенности поля  $S_1$ :

- ♦ при возникновении зоны разрушения скорость проникновения фильтрата бурового раствора в пласт уменьшается на 20-30%, особенно в низкопроницаемых областях;
- ♦ вблизи контрастных по проницаемости границ имеют место высокие градиенты, но в окрестности срединных сечений пропластков распределение водопроницаемости достаточно однородно по  $z$ , что даёт основание использовать далее двумерные модели для исследования процессов эволюции в горизонтальных сечениях модели.

#### 4. Распределение водонасыщенности и электрического сопротивления в зоне проникновения при неравнокомпонентном поле внешних горизонтальных напряжений.

Многие месторождения углеводородов расположены в регионах с негидростатическим полем природных напряжений [7]  $\sigma_H \neq \sigma_h$ , которые будем характеризовать коэффициентами бокового отпора:  $q_x = \sigma_h / \sigma_V$  и  $q_y = \sigma_H / \sigma_V$  ( $\sigma_V = \rho g z$  – литостатическое давление на глубине  $z$ ). Л.А.Галин (1947) показал, что зона разрушения в окрестности отверстия в неравнокомпонентном поле внешних напряжений имеет форму эллипса, который полностью охватывает отверстие, если  $\sigma_h$  и  $\sigma_H$  различаются незначительно, в противном случае зона  $F$

лишь примыкает к скважине (неполный охват). Рассмотрим, как конфигурация  $F$  влияет на распределение исследуемых полей в околоскважинном пространстве.

На рис. 4 представлены изолинии водонасыщенности  $S_1$  при  $t = 48$  ч в характерном горизонтальном сечении модели при полном (а) и неполном (б) охвате (контур  $F$  показан штриховой линией). Здесь отчетливо видно, что незначительное уменьшение  $q_x$  приводит к качественному изменению распределения  $S_1$ : при неполном охвате возникает ярко выраженная анизотропия в направлении действия максимального горизонтального напряжения  $\sigma_H$ .

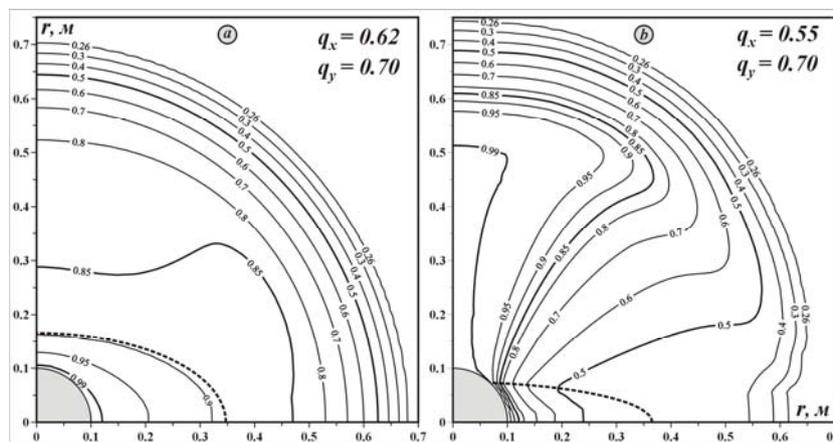


Рис. 4. Распределение водонасыщенности в окрестности скважины.

Метод электрического каротажа скважин основан на регистрации удельного электрического сопротивления  $\Omega$  околоскважинного пространства зондами различной длины. Величина  $\Omega$  связана с гидродинамическими и геомеханическими параметрами модели эмпирической формулой Арчи [8]  $\Omega = A / (m^2 C (S_1 + S_{10})^2)$ , где  $A$  – константа, характеризующая, в основном, петрографические особенности коллектора.

Рис.5 иллюстрирует распределение  $\Omega$  (Ом·м) для условий, аналогичных таковым рис. 4.

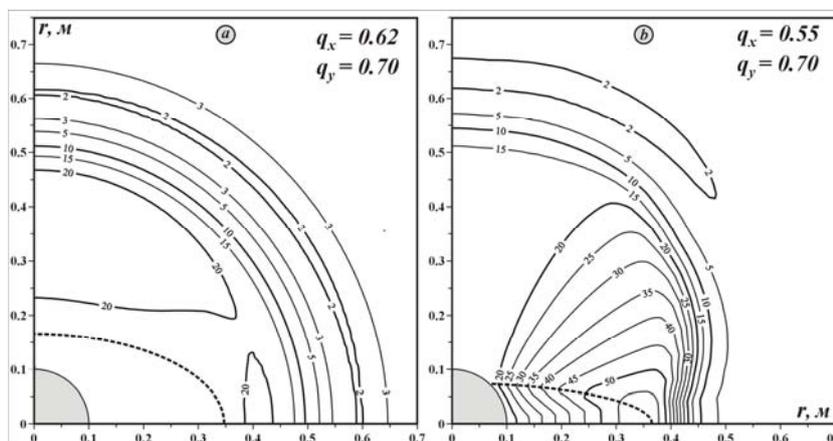


Рис. 5. Изолинии удельного электрического сопротивления в окрестности скважины.

Здесь так же, как и для водонасыщенности, имеет место качественное отличие в распределениях  $\Omega$ : при неполном охвате высокоомная зона смещается в направлении действия минимального горизонтального напряжения  $\sigma_h$  в природном поле.

Таким образом, показано, что геомеханический фактор оказывает существенное влияние на поведение гидродинамических и электрических полей околоскважинном пространстве: незначительное различие в величине горизонтальных компонент природного поля напряжений

может привести к качественному изменению показаний приборов геофизических исследований скважин. Это вызывает необходимость внесения корректив в процедуру инверсии данных каротажа для количественной оценки фильтрационно-ёмкостных параметров продуктивных пластов.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Интеграционного проекта СО РАН № 89 и Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект № 10-05-00736).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кашеваров А.А., Ельцов И.Н., Эпов М.И. Гидродинамическая модель формирования зоны проникновения при бурении скважин. //ПМТФ. 2003. Т.44. № 6. С.148-157.
2. Ельцов И.Н., Назаров Л.А., Назарова Л.А., Эпов М.И. Эволюция полей деформаций и фильтрационных параметров породных массивов в зонах возможных разрушений в окрестности глубоких скважин.// Физическая мезомеханика. 2010. № 13. С.18-22.
3. Holt R.M. Permeability reduction induced by a nonhydrostatic stress field. SPE Formation Evaluation, 1990, №5, p. 444-448.
4. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
5. Щелкачев В.Н. Избранные труды. Т.1, ч. 2. М.: Недра, 230 с.
6. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971. 552 с.
7. L.W.Teufel. In Situ Stress and Natural Fracture Distribution at Depth in Piceane Basin, Colorado: Implication to Stimulation in Production of Low Permeability Gas Reservoirs, Rock Mechanics: Key to Energy Production 27<sup>th</sup> U.S. Symposium on Rock Mechanics, 1986, 765 p.
8. Дахнов В.Н. Геофизические методы определения коллекторских свойств и нефтегазонасыщения горных пород. М.: Недра, 1985. 310с.

### **Сведения об авторах:**

**Назарова Лариса Алексеевна** – доктор физико-математических наук, заведующий отделом Института горного дела им. Н.А.Чинакала СО РАН, Тел.: (383) 217 05 28

**E-mail:** [larisa@misd.nsc.ru](mailto:larisa@misd.nsc.ru)

**Назаров Леонид Анатольевич** – доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией Института горного дела им. Н.А.Чинакала СО РАН, Тел.: (383) 217 24 46

**E-mail:** [naz@misd.nsc.ru](mailto:naz@misd.nsc.ru)

**Эпов Михаил Иванович** – академик РАН, доктор технических наук, заместитель Председателя Сибирского отделения РАН, директор Института нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А.Трофимука СО РАН, Тел.: (383) 333 29 00

**E-mail:** [EpovMI@ipgg.nsc.ru](mailto:EpovMI@ipgg.nsc.ru)

**Ельцов Игорь Николаевич** – доктор технических наук, заместитель директора Института нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А.Трофимука СО РАН, Тел.: (383) 333 34 32

**E-mail:** [EltsovIN@ipgg.nsc.ru](mailto:EltsovIN@ipgg.nsc.ru)

## НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ДВУХ ПЕРЕСЕЧЁННЫХ ПОД УГЛОМ ПОЛОС, НАХОДЯЩИХСЯ В ПОЛЕ СИЛ ТЯЖЕСТИ

Оганесян Э. К.

В поле сил тяжести рассматривается тело, ограниченное двумя полосами и находящееся в положении, когда линия пересечения этих полос перпендикулярна к направлению вектора собственного веса. Предполагается, что тело состоит из двух различных материалов, каждый из которых изотропен и однороден, а верхняя полоса полностью закреплена. Границы полос соединены плоскостью. Предполагается также, что конструкция находится в плоско-деформированном состоянии, что позволяет рассматривать вместо всего тела его сечение плоскостью, перпендикулярной к линии пересечения полос. Это сечение имеет форму треугольника, причём, когда ширина полос одинакова, этот треугольник является равнобедренным. Рассматривается значение угла  $\varphi = 90^0$ . Полагаем, что при изменении угла от  $\varphi = 0^0$  до  $\varphi = 45^0$  конструкция состоит из первого материала, а остальная часть состоит из второго материала. Такое же значение имеет угол вершины треугольника, когда ширины полос разные. Задача решена методом конечных элементов (МКЭ) [1].

В соответствии с процедурой МКЭ перемещения в любой точке элемента "e" задаются вектором

$$\{f\} = [N]\{\delta\}^e \quad (1)$$

где

$$[N] = [N_i, N_j, N_m]$$

$$\{\delta\}^e = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (2)$$

Здесь  $N_i, N_j, N_m$  являются функциями формы.

Если известны перемещения, то деформации записываются в виде

$$\{\varepsilon\}^e = [B]\{\delta\}^e \quad (3)$$

а напряжения – в виде

$$\{\sigma\}^e = [D]\{\varepsilon\}^e \quad (4)$$

$$D = K \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

где  $K = E / (1+\nu)(1-2\nu)$ .

Узловые силы, статически эквивалентные распределённым по элементу нагрузкам, представляются в следующем виде:

$$\{F\}^e = \{F_i, F_j, F_m\} = [M]^e + \{F\}_p^e \quad (6)$$

здесь

$$[M]^e = \iint [B]^T [D] [B] dS \quad (7)$$

является матрицей жёсткости элемента, а

$$\{F\}_p^e = -\iint [N^T] \{P\} dS \quad (8)$$

есть вектор узловых сил, обусловленных распределёнными нагрузками.

Во всех случаях треугольник был разбит на 72 треугольных элемента с шестью степенями свободы и с 49 узловыми точками. Линии разбиения взяты параллельно сторонам исходного

треугольника. Локальные координаты взяты параллельно линиям глобальных координат, а начала координатных систем взяты в вершинах элементов.

Переходя от локальной (местной) системы координат к общей (глобальной) системе [1], совокупность уравнений равновесия можем представить в следующей форме:

$$[M]\{\delta\} + \{F\}_p = 0$$

или в форме

$$[M]\{\delta\} = \{P\} \quad (9)$$

В произвольной точке элемента смещения аппроксимируем линейной функцией от координат

$$U_x = a_1 + a_2x + a_3y$$

$$U_y = a_4 + a_5x + a_6y$$

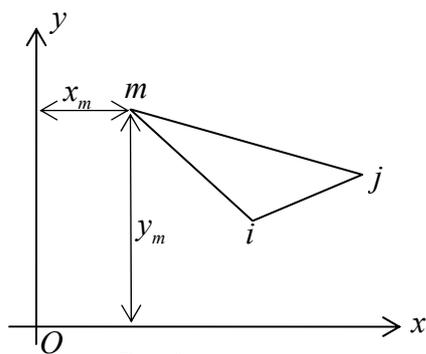


Рис.1

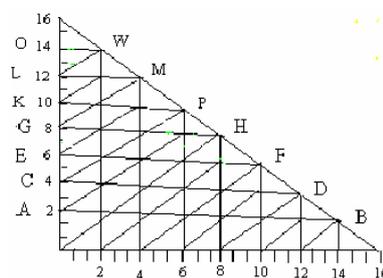


Рис.2

В соответствии с процедурой метода конечных элементов в этом случае функции формы взяты в виде

$$N_k = (a_k + b_kx + c_ky) / 2s_k \quad (k = i, j, m)$$

здесь  $s_k$  – площадь треугольника.

Основное внимание уделено вопросу изучения изменения максимального и минимального значения напряжения в каждом элементе. Немаловажное значение имело и изучение изменения знака этих напряжений, т.е. в каких элементах конструкции он положителен, и в каких – отрицателен. А также вычислены напряжения на стыке двух материалов.

Задача решена в двух вариантах – когда материалы одинаковы и когда разные. Рис.3 соответствует случаю, когда и материалы, и ширины полос одинаковы. На рис. 3 показано изменение перемещения точек вершин элементов на горизонтальной линии, параллельной оси  $x$  линии  $CD$ , для значений угла  $\varphi = 90^\circ$ . Из графика видно что, когда с защемлённой стороны треугольника двигаемся по этому сечению, график резко поднимается для компоненты перемещения по оси  $Ox$  и резко опускается для компоненты по оси  $Oy$ , т.е. эта зона наибольшего изгиба конструкции. В задаче для материала взят модуль Юнга  $E_1 = E_2 = 960000 \text{ кг/см}^2$ , модуль Пуассона –  $\nu_1 = \nu_2 = 0.2$ , а плотность –  $0.0005 \text{ кг/см}^3$ .

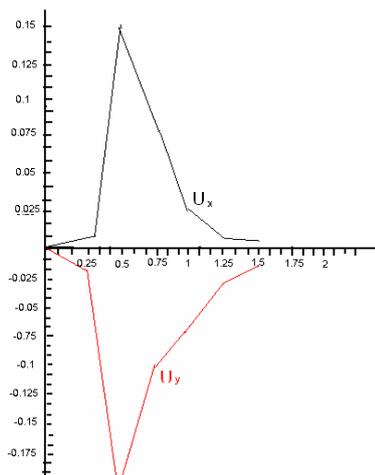


Рис.3

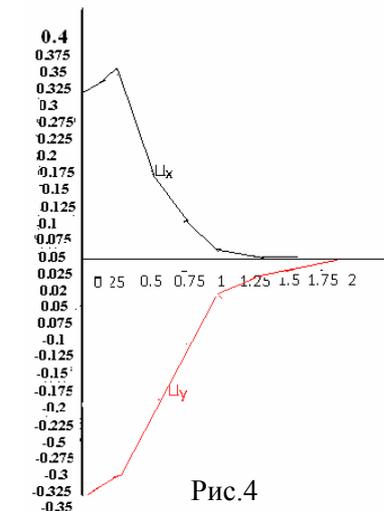


Рис.4

На рис. 4 представлены графики изменения перемещения точек вершин элементов на вертикальной линии, параллельной оси  $Oy$ : линии, проходящей через точку  $M$ , при тех же значениях остальных величин, что и на рис. 3.

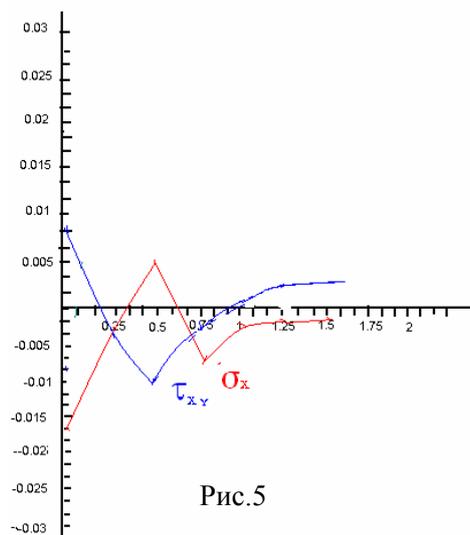


Рис.5

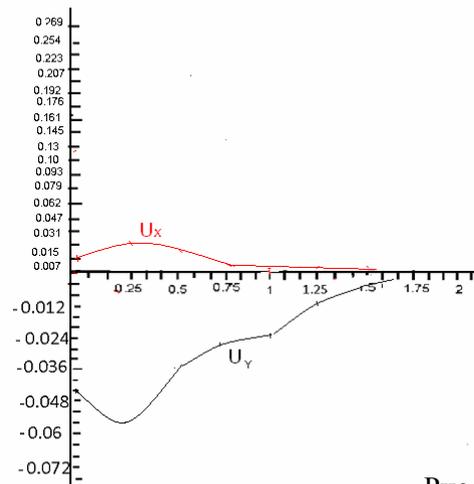


Рис.6

Подсчитаны максимальные и минимальные значения полного напряжения для всей конструкции. Для конструкции, состоящей из одного материала:  $E_1 = E_2 = 0.96$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = 0.2$ , максимальное значение напряжения равно 1.0548, минимальное – 0.0000298, а угол наклона от вертикальной оси по направлению часовой стрелки равен  $\theta = -45,18^\circ$ . В случае, когда конструкция состоит из разных материалов:  $E_1 = 0.16$ ,  $E_2 = 0.56$ ,  $\nu_1 = 0.1$ ,  $\nu_2 = 0.15$ , максимальное значение напряжения становится равным 0.0278, минимальное – 0.00000569, а угол наклона равен  $\theta = -64,66^\circ$ . Графики 5–7 соответствуют случаю для разных материалов. На рис. 5 представлены графики изменения нормального напряжения и касательного напряжения  $\tau_{xy}$  на сечении  $x = 0.5$  исходного треугольника, когда нижний материал более жёсткий, чем верхний, т.е.  $E_1 = 0.56$ ,  $E_2 = 0.16$ ,  $\nu_1 = 0.15$ ,  $\nu_2 = 0.1$ . Графики на рис.6 представляют изменение перемещения на линии  $y = 0.5$ . На рис.7 представлены графики изменения нормального

напряжения  $\sigma_y$  и касательного напряжения  $\tau_{xy}$  на сечении линии  $CD$  исходного треугольника, а когда нижний материал более податливый, чем верхний, т.е. когда  $E_1 = 0.16$ ,  $E_2 = 0.56$ ,  $\nu_1 = 0.1$ ,  $\nu_2 = 0.15$ .

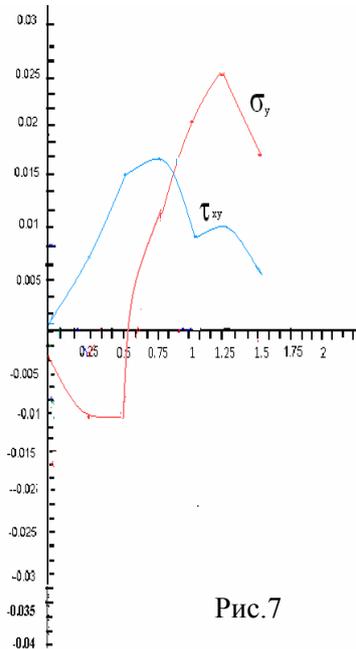


Рис.7

Ниже приведена таблица максимальных и минимальных значений напряжения в каждом выбранном элементе.

N	1	9	18	27	36	45	54	63	71
макс	0.027836	0.000120	0.001166	-0.001232	0.000310	0.000953	0.016100	0.003549	0.000993
мин	-0.001385	-0.000927	-0.000400	-0.007408	-0.001646	-0.000540	-0.000618	-0.005177	-0.001392

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Зенкевич О. К. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541с.
2. Karp S.N., Karel F.C.J. The elastic field behavior in the neighborhood of crack of arbitrary angles. // Comm. Pure and Appl. Math., 1962. V.15. №4.

#### Сведения об авторе:

**Оганесян Эмин Казарович** – к.ф.-м.н., научный сотр. Института механики НАН Армении, Ереван, 0019, Баграмяна 24<sup>б</sup>. Тел: 26-46-99

# КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СОСТАВНОЙ ПЛАСТИНЫ С ДВУМЯ РАЗНОРОДНЫМИ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМИ СТРИНГЕРАМИ

Оганисян Г.В.

В работе рассматривается контактная задача для упругой составной (кусочно-однородной) бесконечной пластины, состоящей из двух сцепленных между собой вдоль общей прямолинейной границы полубесконечных пластин с различными упругими свойствами, усиленной двумя находящимися на одной линии разнородными упругими полубесконечными стрингерами с различными прямоугольными поперечными сечениями, которые параллельны линии разнородности указанных полубесконечных пластин. Поставленная контактная задача сформулирована в виде сингулярного интегрального уравнения с ядром, состоящим из сингулярной и регулярной частей. При помощи действительного обобщённого интегрального преобразования Фурье, это интегральное уравнение приводится к функциональному уравнению относительно трансформантов Фурье искомых функций интенсивностей тангенциальных контактных усилий и деформации промежуточного конечного интервала между разнородными упругими полубесконечными стрингерами. Далее показано, что решение этого функционального уравнения сводится к решению сингулярного интегрального уравнения относительно деформации промежуточного конечного интервала между разнородными упругими полубесконечными стрингерами, ядро которого состоит из сингулярной и регулярной частей, решение которой сводится к решению квазивполне регулярной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений.

1. Пусть упругий сплошной изотропный лист в виде тонкой однородной составной (кусочно-однородной) бесконечной пластины малой постоянной толщины  $h$ , состоящей из двух сцеплённых между собой вдоль общей прямолинейной границы полубесконечных пластин с различными упругими свойствами, на линии  $y = a$  ( $a > 0$ ) своей верхней поверхности усилена двумя разнородными упругими полубесконечными стрингерами с достаточно малыми постоянными прямоугольными поперечными сечениями. Считается, что разнородные полубесконечные стрингеры жёстко сцеплены к верхней полубесконечной пластине, параллельны линии разнородности указанных полубесконечных пластин и имеют отличные от них упругие свойства.

Задача заключается в определении закона распределения интенсивности тангенциальных контактных усилий, действующих вдоль линий креплений упругих полубесконечных стрингеров с упругой составной (кусочно-однородной) бесконечной пластиной, когда контактирующая пара (пластина-стрингер) деформируется сонаправленными и сосредоточенными силами  $P\delta(x-d)\delta(y-a)$  ( $d > 0$ ) и  $Q\delta(x+b)\delta(y-a)$  ( $b > 0$ ), приложенными на концах стрингеров и равномерно распределёнными горизонтальными растягивающими напряжениями постоянной интенсивности  $\sigma_0$ , действующими на бесконечности составной бесконечной пластины.

В рассматриваемой контактной задаче относительно разнородных упругих полубесконечных стрингеров принимается во внимание модель контакта по линии [1-5], то есть предполагается, что распределение интенсивностей тангенциальных контактных усилий сосредоточены вдоль средних линий контактных участков, а для упругой составной бесконечной пластины считается справедливой модель обобщённого плоского напряжённого состояния.

Здесь, по условиям задачи модули упругости и площади поперечных сечений разнородных упругих полубесконечных стрингеров определяются следующими формулами:

$$\{E_S(x); F_S(x)\} = \theta(x-d)\{E_S^{(1)}; F_S^{(1)}\} + \theta(-x-b)\{E_S^{(2)}; F_S^{(2)}\} \quad (-\infty < x < \infty), \quad (1.1)$$

где  $\theta(u)$  – единичная ступенчатая функция Хэвисайда, а  $E_S^{(n)}; F_S^{(n)} = \text{const}$  ( $n = 1; 2$ ).

Обращаясь теперь к выводу разрешающих уравнений поставленной контактной задачи, заметим, что в горизонтальном направлении стрингер растягивается или сжимается, находясь в одноосном напряжённом состоянии. Тогда, на основе вышесказанного, дифференциальное уравнение равновесия элементов разнородных упругих полубесконечных стрингеров, записанное в обобщённых функциях можно представить одним уравнением, записанным в виде:

$$U_S(x) = -\frac{1}{E_S^{(1)}F_S^{(1)}} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(s-x) \tau_a^{(1)}(s) ds - \frac{1}{E_S^{(2)}F_S^{(2)}} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(s-x) \tau_b^{(2)}(s) ds +$$

$$+ \frac{P\theta(d-x)}{E_S^{(1)}F_S^{(1)}} + \frac{Q\theta(-b-x)}{E_S^{(2)}F_S^{(2)}} + \frac{\sigma_0}{E} \quad (-\infty < x < \infty), \quad (1.2)$$

которое удовлетворяет следующим граничным условиям и условиям на бесконечности:

$$U_S(d+0) = -\frac{P}{E_S^{(1)}F_S^{(1)}}; \quad U_S(-b-0) = \frac{Q}{E_S^{(2)}F_S^{(2)}}; \quad U_S(\pm\infty) = \frac{\sigma_0}{E}, \quad (1.3)$$

а также условиям равновесия разнородных упругих полубесконечных стрингеров:

$$\int_{-\infty}^{-b} \tau^{(2)}(s) ds = Q - Q_0 \quad (a); \quad \int_d^{\infty} \tau^{(1)}(s) ds = P + P_0 \quad (b). \quad (1.4)$$

Отметим, что в формулах (1.2) и (1.3) были использованы следующие обозначения:

$$U_S(x) = \theta(x-d) \frac{du_S^{(1)}(x;a)}{dx} + \theta(-x-b) \frac{du_S^{(2)}(x;a)}{dx} \quad (-\infty < x < \infty), \quad (1.5)$$

$$\tau_d^{(1)}(x) = \theta(x-d)\tau^{(1)}(x); \quad \tau_b^{(2)}(x) = \theta(-x-b)\tau^{(2)}(x); \quad \tau(x) = \tau_d^{(1)}(x) + \tau_b^{(2)}(x).$$

Здесь в формулах (1.1) – (1.5)  $P_0 = \frac{E_S^{(1)}F_S^{(1)}}{E}\sigma_0$  и  $Q_0 = \frac{E_S^{(2)}F_S^{(2)}}{E}\sigma_0$  – те силы, которые возникают

в разнородных полубесконечных стрингерах при  $x \rightarrow +\infty$  и  $x \rightarrow -\infty$ ;  $u_S^{(1)}(x;a)$  и  $u_S^{(2)}(x;a)$  – горизонтальные перемещения точек стрингеров на линии  $y=a$  при  $d < x < \infty$  и  $-\infty < x < -b$ ;

$\tau^{(1)}(x) = d_S^{(1)}\tau^{(1)}(x;a)$ , где  $\tau^{(1)}(x;a)$  – тангенциальные контактные напряжения на линии  $y=a$  при  $d < x < \infty$ ,  $d_S^{(1)}$  – ширина этого стрингера;  $\tau^{(2)}(x) = d_S^{(2)}\tau^{(2)}(x;a)$ , где  $\tau^{(2)}(x;a)$  – тангенциальные контактные напряжения на линии  $y=a$  при  $-\infty < x < -b$ ,  $d_S^{(2)}$  – ширина этого стрингера;

$E_S^{(1)}$  и  $E_S^{(2)}$  – модули упругости,  $F_S^{(1)} = d_S^{(1)}h_S^{(1)}$  и  $F_S^{(2)} = d_S^{(2)}h_S^{(2)}$  – площади поперечных сечений, а  $h_S^{(1)}$  и  $h_S^{(2)}$  – высоты стрингеров при  $d < x < \infty$  и  $-\infty < x < -b$ , соответственно;

$P$  и  $Q$  – интенсивности сосредоточенных сил;  $\delta(u)$  – известная дельта-функция Дирака.

С другой стороны, для горизонтальной деформации верхней упругой полубесконечной пластины составной бесконечной пластины, когда на линии  $y=a$  действуют тангенциальные контактные усилия с интенсивностями  $\tau^{(1)}(x)$  ( $d < x < \infty$ ) и  $\tau^{(2)}(x)$  ( $-\infty < x < -b$ ), имеем:

$$hIU(x;a) + hlg(x;a) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{s-x} + K(s-x) \right] \tau(s) ds + \frac{hl}{E} \sigma_0 \quad (-\infty < x < \infty). \quad (1.6)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$U(x;a) = \theta(x-d) \frac{du^{(1)}(x;a)}{dx} + \theta(-x-b) \frac{du^{(2)}(x;a)}{dx}; \quad d_2 = \frac{(k-1)(1+\nu)}{k(3-\nu)+1+\nu}, \quad (1.7)$$

$$g(x;a) = -\theta(x-d) \frac{du^{(1)}(x;a)}{dx} + \theta(x+b) \frac{du^{(2)}(x;a)}{dx}; \quad d_3 = \frac{2(k-1)(1+\nu)^2}{(3-\nu)[k(3-\nu)+1+\nu]},$$

$$K(u) = -\frac{d_1 u}{u^2 + 4a^2} + \frac{8a^2 d_2 u}{(u^2 + 4a^2)^2} + \frac{2a^2 d_3 u(u - 12a^2)}{(u^2 + 4a^2)^3}; \quad l = \frac{4E}{(3-\nu)(1+\nu)}; \quad k = \frac{\mu_1}{\mu},$$

$$d_1 = \frac{k(3-\nu)[k(3-\nu)(1+\nu_1)+2(1-\nu)(1-\nu_1)] - (3-\nu_1)[8-(3-\nu)(1+\nu)]}{(3-\nu)[k(3-\nu)+1+\nu][3-\nu_1+k(1+\nu_1)]},$$

где  $u^{(1)}(x; a)$  и  $u^{(2)}(x; a)$  – горизонтальные перемещения точек верхней полубесконечной пластины на линии  $y = a$  при  $d < x < \infty$  и  $-\infty < x < -b$ ;  $(E; \mu; \nu)$  и  $(E_1; \mu_1; \nu_1)$  – модули упругости, модули сдвига и коэффициенты Пуассона материала полубесконечных пластин.

Теперь, имея в виду условие контакта  $U(x; a) = U_S(x)$  ( $-\infty < x < \infty$ ), из (1.2) и (1.6) получим следующее сингулярное интегральное уравнение относительно неизвестных тангенциальных контактных усилий с интенсивностями  $\tau_d^{(1)}(x)$  и  $\tau_b^{(2)}(x)$  ( $-\infty < x < \infty$ ):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{s-x} + \lambda_1 \pi \theta(s-x) + K(s-x) \right] \tau_d^{(1)}(s) ds + \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{s-x} + \lambda_2 \pi \theta(s-x) + K(s-x) \right] \tau_b^{(2)}(s) ds = \\ = \lambda_1 \pi P \theta(d-x) + \lambda_2 \pi Q \theta(-b-x) + \pi h l g(x; a); \quad \lambda_n = \frac{h l}{E_S^{(n)} F_S^{(n)}} \quad (n=1, 2) \quad (-\infty < x < \infty), \quad (1.8)$$

где интегралы с ядром Коши при  $s = x$  трактуются в смысле их главных значений по Коши.

Таким образом, решение рассматриваемой контактной задачи при принятых выше предположениях сводится к решению сингулярного интегрального уравнения (1.8) с ядрами, состоящими из сингулярной и регулярной частей, при наличии условий (1.4).

2. С целью решения сингулярного интегрального уравнения (1.8) при наличии условий (1.4), применим к уравнению (1.8) действительное обобщённое интегральное преобразование Фурье, после некоторых алгебраических выкладок, относительно трансформантов Фурье функций  $\tau_d^{(1)}(x)$ ,  $\tau_b^{(2)}(x)$  и  $g(x; a)$  ( $-\infty < x < \infty$ ), получим следующее функциональное уравнение:

$$\left[ \lambda_1 + |\sigma| + \bar{\Lambda}(|\sigma|) \right] \bar{\tau}_d^{(1)}(\sigma) + \left[ \lambda_2 + |\sigma| + \bar{\Lambda}(|\sigma|) \right] \bar{\tau}_b^{(2)}(\sigma) = i \sigma h l \bar{g}(\sigma; a) + \bar{f}(\sigma), \quad (2.1) \\ (-\infty < \sigma < \infty),$$

которое должно удовлетворять условиям равновесия стрингеров (1.4), эквивалентными условию

$$\bar{\tau}(0) = P + Q + P_0 - Q_0. \quad (2.2)$$

Здесь сделаны следующие обозначения:

$$\bar{\Lambda}(|\sigma|) = (-d_1 + 2d_2 a |\sigma| - d_3 a^2 \sigma^2) |\sigma| e^{-2a|\sigma|}; \quad \bar{f}(\sigma) = \lambda_1 P e^{i\sigma d} + \lambda_2 Q e^{-i\sigma b}, \quad (2.3)$$

$$\bar{A}(\sigma) = F[A(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} A(x) e^{i\sigma x} dx; \quad A(x) = F^{-1}[\bar{A}(\sigma)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{A}(\sigma) e^{-i\sigma x} d\sigma,$$

где  $\sigma$  ( $-\infty < \sigma < \infty$ ) – спектральный параметр преобразования Фурье, а  $F[\bullet]$  – оператор Фурье.

Решая функциональное уравнение (2.1) при наличии условия (2.2), относительно  $\bar{\tau}(\sigma)$  получим:

$$\bar{\tau}(\sigma) = (\lambda_1 - \lambda_2) \frac{\bar{\tau}_b^{(2)}(\sigma)}{\lambda_1 + |\sigma| + \bar{\Lambda}(|\sigma|)} + \frac{h l i \sigma \bar{g}(\sigma; a)}{\lambda_1 + |\sigma| + \bar{\Lambda}(|\sigma|)} + \frac{\bar{f}(\sigma)}{\lambda_1 + |\sigma| + \bar{\Lambda}(|\sigma|)} \quad (-\infty < \sigma < \infty). \quad (2.4)$$

Если теперь применить к (2.4) обратное преобразование Фурье, после некоторых алгебраических выкладок и пользуясь формулой свёртки, получим следующее интегральное уравнение:

$$\tau(x) = (\lambda_1 - \lambda_2) \int_{-\infty}^{\infty} B(x-s) \tau_b^{(2)}(s) ds - h l \int_{-\infty}^{\infty} B'(x-s) g(s; a) ds + p(x) \quad (-\infty < x < \infty). \quad (2.5)$$

Здесь ядро и свободные члены имеют следующий вид:

$$B(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\sigma x} d\sigma}{\lambda_1 + |\sigma| + \bar{\Lambda}(|\sigma|)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos(\sigma x) d\sigma}{\lambda_1 + \sigma + \bar{\Lambda}(\sigma)} \quad (-\infty < x < \infty), \quad (2.6)$$

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{f}(\sigma) e^{-i\sigma x} d\sigma}{\lambda_1 + |\sigma| + \bar{\Lambda}(|\sigma|)} = \lambda_1 PB(x-d) + \lambda_2 QB(x+b); \quad B'(x) = \frac{dB(x)}{dx}.$$

Теперь, имея ввиду, что  $\tau_d^{(1)}(x) = 0$  при  $-\infty < x < -b$ ,  $\tau_b^{(2)}(x) = 0$  при  $d < x < \infty$  и полагая, что  $-b < x < d$ , из интегрального уравнения (2.5) относительно деформации промежуточного конечного интервала между разнородными упругими полубесконечными стрингерами получим следующее интегральное уравнение первого рода:

$$hl \int_{-b}^d B'(x-s) g(s; a) ds = p(x) \quad (-b < x < d). \quad (2.7)$$

Таким образом, решение рассматриваемой контактной задачи при принятых выше предположениях свелось к решению интегрального уравнения первого рода (2.7). Здесь надо отметить, что структура решения интегрального уравнения первого рода (2.7) зависит от ядра  $B'(x-s)$ .

**3.** Приведём решение интегрального уравнения первого рода (2.7) к эквивалентному сингулярному интегральному уравнению, ядро которого состоит из сингулярной и регулярной частей, решение которой приводится к решению квазивполне регулярной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. Для этой цели исследуем подынтегральное выражение  $B'(x)$ , определённое формулой (2.6). Так как справедливо следующее тождество:

$$\frac{i\sigma}{\lambda_1 + |\sigma| + \bar{\Lambda}(|\sigma|)} = \frac{i\sigma}{\lambda_1 + |\sigma|} - \frac{i\sigma \bar{\Lambda}(|\sigma|)}{(\lambda_1 + |\sigma|) [\lambda_1 + |\sigma| + \bar{\Lambda}(|\sigma|)]} \quad (-\infty < \sigma < \infty). \quad (3.1)$$

и поскольку при  $|\sigma| \rightarrow \infty$  имеет место следующее асимптотическое представление:

$$\frac{i\sigma}{\lambda_1 + |\sigma|} = i \operatorname{sgn} \sigma - \frac{i\lambda_1}{\sigma} + i \operatorname{sgn} \sigma \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{\lambda_1}{|\sigma|} \right)^n, \quad (3.2)$$

то после применения обратного преобразования Фурье к (3.1) и в силу свойств интегралов Фурье, для  $B'(x)$  при  $|x| \rightarrow 0$  получим следующее асимптотическое представление [3,7]:

$$B'(x) = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{x} - \frac{\lambda_1 \pi}{2} \operatorname{sgn} x + \tilde{R}(x) - R(x) \right], \quad (3.3)$$

где функции  $\tilde{R}(x)$  и  $R(x)$  определяются следующим образом ( $\psi(x)$  – известная пси-функция):

$$\tilde{R}(x) = \lambda_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (\lambda_1 x)^{2n-1}}{(2n-1)!} \left( \psi(2n) + \ln \frac{1}{|\lambda_1 x|} + \frac{\pi |\lambda_1 x|}{2 \cdot (2n)} \right), \quad (3.4)$$

$$R(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\sigma \bar{\Lambda}(|\sigma|) e^{-i\sigma x} d\sigma}{(\lambda_1 + |\sigma|) [\lambda_1 + |\sigma| + \bar{\Lambda}(|\sigma|)]} = \int_0^{\infty} \frac{\sigma \bar{\Lambda}(\sigma) \sin(\sigma x) d\sigma}{(\lambda_1 + \sigma) [\lambda_1 + \sigma + \bar{\Lambda}(\sigma)]}.$$

Учитывая асимптотическое представление (3.3) на основе (2.7) для определения  $g(s; a)$  получим следующее сингулярное интегральное уравнение первого рода, ядро которого состоит из сингулярной и регулярной частей:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-b}^d \left[ \frac{1}{s-x} - \frac{\lambda_1 \pi}{2} \operatorname{sgn}(s-x) + \tilde{R}(s-x) - R(s-x) \right] g(s; a) ds = -\frac{p(x)}{hl} \quad (-b < x < d). \quad (3.5)$$

Представим неизвестную функцию  $g(s; a)$  в форме разложения бесконечного ряда по многочленам Чебышева первого рода с неизвестными коэффициентами  $X_n$  ( $n = 0; 1; 2; \dots$ ) [2-6]:

$$g(s; a) = \frac{1}{\sqrt{1-h^2(s)}} \sum_{n=0}^{\infty} X_n T_n[h(s)]; \quad h(s) = \frac{2s+b-d}{d+b}; \quad |h(s)| < 1, \quad (3.6)$$

Подставляя значение выражения  $g(s; a)$  из разложения (3.6) в (3.5) и поступив аналогичным образом как в работах [2-6], известным способом получим следующую квазивполне регулярную бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $X_n$  ( $n = 1; 2; 3; \dots$ ):

$$X_m + \sum_{n=1}^{\infty} A_{nm} X_n = \alpha_m, \quad (m = 1; 2; 3; \dots). \quad (3.7)$$

Здесь ядра при неизвестных и свободные члены определяются следующими формулами:

$$A_{nm} = \frac{4}{\pi^2(d+b)} \int_{-b}^d \int_{-b}^d \frac{\sqrt{1-h^2(x)}}{\sqrt{1-h^2(s)}} M(s-x) T_n[h(s)] U_{m-1}[h(x)] ds dx,$$

$$\alpha_m = -\frac{4}{\pi(d+b)hl} \int_{-b}^d p(x) \sqrt{1-h^2(x)} U_{m-1}[h(x)] dx - X_0 A_{0m} \quad (n, m = 1; 2; 3; \dots), \quad (3.8)$$

$$M(s-x) = \tilde{R}(s-x) - R(s-x) - \frac{\lambda_1 \pi}{2} \operatorname{sgn}(s-x),$$

где  $T_n(x)$  и  $U_{m-1}(x)$  – многочлены Чебышева первого и второго родов, а  $X_0$  – неизвестный коэффициент, определяющийся из условия (1.4).

В конце отметим, что после решения бесконечной системы (3.7) неизвестные тангенциальные контактные усилия  $\tau^{(1)}(x)$  и  $\tau^{(2)}(x)$  определяются из интегрального уравнения (2.5).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Муки Р., Стернберг Е. Передача нагрузки от растягиваемого поперечного стержня к полубесконечной упругой пластине. // ПМ. Тр. Амер. общ. инж.-мех. Сер.Е. 1968. № 4. С.124-135.
2. Григорян Э.Х. О динамической контактной задаче для полуплоскости, усиленной упругой накладкой конечной длины. // ПММ. 1974. Т.38. № 2. С.321-330.
3. Саркисян В.С. Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками. Ереван: Изд. ЕГУ, 1983. 260 с.
4. Григорян Э.Х. Передача нагрузки от кусочно-однородной бесконечной накладки к упругой полуплоскости. // Уч. Записки ЕГУ. 1979. №3. С.29-34.
5. Григорян Э.Х., Оганисян Г.В. Контактная задача для упругой кусочно-однородной бесконечной пластины, усиленной двумя параллельными различными бесконечными упругими стрингерами. //Изв. НАН Армении. Механика. 2009. Т.62. №3. С.29-43.
6. Попов Г.Я. О сведении интегральных уравнений теории упругости к бесконечным системам. // ПММ. 1966. Т.30. № 4. С.672-682.
7. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 832с.

## Сведения об авторе

**Оганисян Гамлет Вараздатович** - кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, преподаватель кафедры механики факультета математики и механики ЕГУ. Ереван, Алека Манукяна 1. Тел: (+374 93) 27-26-26. E-mail: [HovhannisyanHamlet@yandex.ru](mailto:HovhannisyanHamlet@yandex.ru)

# ОБ ОДНОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УПРУГОЙ СОСТАВНОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ С ДВУМЯ УПРУГИМИ КОНЕЧНЫМИ СТРИНГЕРАМИ

Оганисян Г.В., Бегларян А.А.

В работе рассматривается контактная задача для упругой составной (кусочно-однородной) бесконечной пластины, состоящей из двух полубесконечных пластин с различными упругими свойствами, сцепленных между собой вдоль общей прямолинейной границы, на своей верхней поверхности усиленной двумя конечными упругими стрингерами, которые расположены на разных сторонах раздела указанных полубесконечных пластин и приварены (приклеены) к этим полубесконечным пластинам. Предполагается, что один из стрингеров параллелен, а другой перпендикулярен к линии разнородности полубесконечных пластин, имеют разные упругие свойства и площади поперечных сечений. Контактующая пара (пластина-стрингер) деформируется сосредоточенными силами, приложенными к концам стрингеров. Задача сформулирована в виде системы сингулярных интегральных уравнений при определенных условиях, ядра которых состоят из сингулярной и регулярной частей. Далее, эта система решается при помощи известного математического аппарата ортогональных многочленов Чебышева, которое превращает систему сингулярных интегральных уравнений в совокупность квазивполне регулярных бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Получены формулы для определения нормальных напряжений в упругих конечных стрингерах.

1. Пусть упругий сплошной изотропный лист в виде тонкой однородной составной (кусочно-однородной) бесконечной пластины малой постоянной толщины  $h$ , состоящей из двух сцепленных между собой вдоль общей прямолинейной границы полубесконечных пластин с различными упругими свойствами, на отрезках  $b \leq y \leq d$  ( $b; d > 0$ ) и  $-b_0 \leq x \leq d_0$  ( $b_0; d_0 > 0$ ) линий  $x = 0$  и  $y = -a$  ( $a > 0$ ) своей верхней поверхности усилен двумя различными упругими конечными стрингерами с различными прямоугольными поперечными сечениями. Предполагается, что стрингеры жёстко сцеплены к упругим полубесконечным пластинам, находятся на разных сторонах линии разнородности полубесконечных пластин, причём, один из стрингеров параллелен, а другой перпендикулярен к линии раздела указанных полубесконечных пластин.

Наша цель заключается в определении распределений интенсивностей неизвестных тангенциальных контактных усилий вдоль линий крепления упругих конечных стрингеров с упругими полубесконечными пластинами и нормальных напряжений, возникающих в упругих конечных стрингерах, когда контактирующая пара (пластина-стрингер) деформируется сосредоточенными силами  $Q\delta(x)\delta(y-d)$  и  $P\delta(x-d_0)\delta(y+a)$ , приложенными на концах стрингеров.

Здесь, что в рассматриваемой контактной задаче относительно стрингеров принимается модель одноосного напряжённого состояния в сочетании с моделью контакта по линии [1-3], а для упругой составной бесконечной пластины считается справедливой модель обобщённого плоского напряжённого состояния, благодаря чему она деформируется как плоскость.

Обращаясь теперь к получению разрешающих уравнений рассматриваемой контактной задачи, нетрудно видеть, что дифференциальные уравнения равновесия элемента упругих конечных стрингеров, записанные в обобщённых функциях, будут иметь следующий вид:

$$\frac{dv_s^{(1)}(0; y)}{dy} = -\frac{1}{2E_s^{(1)}F_s^{(1)}} \int_b^d \operatorname{sgn}(\eta - y) \tau^{(1)}(\eta) d\eta + \frac{Q}{2E_s^{(1)}F_s^{(1)}} \quad (b \leq y \leq d), \quad (1.1)$$

$$\frac{du_s^{(2)}(x; -a)}{dx} = -\frac{1}{2E_s^{(2)}F_s^{(2)}} \int_{-b_0}^{d_0} \operatorname{sgn}(u - x) \tau^{(2)}(u) du + \frac{P}{2E_s^{(2)}F_s^{(2)}} \quad (-b_0 \leq x \leq d_0), \quad (1.2)$$

которые соответственно удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$\left. \frac{dv_s^{(1)}(0; y)}{dy} \right|_{y=b+0} = 0; \quad \left. \frac{dv_s^{(1)}(0; y)}{dy} \right|_{y=d-0} = \frac{Q}{E_s^{(1)}F_s^{(1)}}, \quad (1.3)$$

$$\left. \frac{du_s^{(2)}(x; -a)}{dx} \right|_{x=-b_0+0} = 0; \quad \left. \frac{du_s^{(2)}(x; -a)}{dx} \right|_{x=d_0-0} = \frac{P}{E_s^{(2)}F_s^{(2)}}, \quad (1.4)$$

и условиям равновесия упругих конечных стрингеров:

$$\int_b^d \tau^{(1)}(\eta) d\eta = Q; \quad \int_{-b_0}^{d_0} \tau^{(2)}(u) du = P. \quad (1.5)$$

Легко видеть, что на основе (1.1) и (1.2) нормальные напряжения, возникающие в упругих конечных стрингерах, можно определить следующим образом:

$$\sigma_x^{(1)}(0; y) = -\frac{1}{2F_s^{(1)}} \int_b^d \operatorname{sgn}(\eta - y) \tau^{(1)}(\eta) d\eta + \frac{Q}{2F_s^{(1)}} \quad (b \leq y \leq d), \quad (1.6)$$

$$\sigma_x^{(2)}(x; -a) = -\frac{1}{2F_s^{(2)}} \int_{-b_0}^{d_0} \operatorname{sgn}(u - x) \tau^{(2)}(u) du + \frac{P}{2F_s^{(2)}} \quad (-b_0 \leq x \leq d_0). \quad (1.7)$$

Здесь в формулах (1.1) – (1.7)  $v_s^{(1)}(0; y)$  и  $u_s^{(2)}(x; -a)$  – вертикальные и горизонтальные перемещения точек стрингеров на отрезках  $b \leq y \leq d$  и  $-b_0 \leq x \leq d_0$  линий  $x = 0$  и  $y = -a$ ;  $\tau^{(1)}(y) = d_s^{(1)} \tau^{(1)}(0; y)$ , где  $\tau^{(1)}(0; y)$  – тангенциальные контактные напряжения при  $b \leq y \leq d$  линии  $x = 0$ ;  $\tau^{(2)}(x) = d_s^{(2)} \tau^{(2)}(x; -a)$ , где  $\tau^{(2)}(x; -a)$  – тангенциальные контактные напряжения при  $-b_0 \leq x \leq d_0$  линии  $y = -a$ ;  $E_s^{(1)}$  и  $E_s^{(2)}$  – модули упругости,  $F_s^{(1)} = d_s^{(1)} h_s^{(1)}$  и  $F_s^{(2)} = d_s^{(2)} h_s^{(2)}$  – площади поперечных сечений,  $d_s^{(1)}$  и  $d_s^{(2)}$  – ширины, а  $h_s^{(1)}$  и  $h_s^{(2)}$  – высоты стрингеров;  $Q$  и  $P$  – интенсивности сосредоточенных сил;  $\operatorname{sgn} t$  – известная единичная сигнум-функция.

С другой стороны, имея в виду вышесказанное, для вертикальной и горизонтальной деформаций упругой составной (кусочно-однородной) бесконечной пластины, когда на полубесконечных пластинах в отрезках  $b \leq y \leq d$  и  $-b_0 \leq x \leq d_0$  линий  $x = 0$  и  $y = -a$ , действуют тангенциальные контактные усилия с интенсивностями  $\tau^{(1)}(y)$  и  $\tau^{(2)}(x)$ , имеем [4,5]:

$$hl \frac{dv^{(1)}(0; y)}{dy} = \frac{1}{\pi} \int_b^d \left[ \frac{1}{\eta - y} + K_{11}(\eta; y) \right] \tau^{(1)}(\eta) d\eta + \frac{1}{\pi} \int_{-b_0}^{d_0} K_{12}(u; y) \tau^{(2)}(u) du \quad (0 < y < \infty), \quad (1.8)$$

$$hl_1 \frac{du^{(2)}(x; -a)}{dx} = \frac{1}{\pi} \int_{-b_0}^{d_0} \left[ \frac{1}{u - x} + K_{22}(u - x) \right] \tau^{(2)}(u) du + \frac{1}{\pi} \int_b^d K_{21}(\eta; x) \tau^{(1)}(\eta) d\eta \quad (|x| < \infty). \quad (1.9)$$

При этом здесь введены следующие обозначения:

$$K_{11}(\eta; y) = \frac{d_1}{\eta + y} - \frac{d_2 \eta (\eta - y)}{(\eta + y)^3}; \quad K_{12}(u; y) = -\frac{d_3 u}{u^2 + (a + y)^2} - \frac{2(d_4 a + d_5 y) u (a + y)}{[u^2 + (a + y)^2]^2},$$

$$K_{21}(\eta; x) = -\frac{b_4 (a + \eta)}{x^2 + (a + \eta)^2} + \frac{(b_6 a + b_5 \eta) [x^2 - (a + \eta)^2]}{[x^2 + (a + \eta)^2]^2}; \quad l = \frac{4E}{(3 - \nu)(1 + \nu)},$$

$$K_{22}(u) = -\frac{b_1 u}{u^2 + 4a^2} + \frac{8b_2 a^2 u}{(u^2 + 4a^2)^2} + \frac{2b_3 a^2 u (u^2 - 12a^2)}{(u^2 + 4a^2)^3}; \quad l_1 = \frac{4E_1}{(3 - \nu_1)(1 + \nu_1)}, \quad (1.10)$$

$$d_1 \equiv d_1(k; \nu; \nu_1) = \frac{k(3 - \nu) [k(3 - \nu)(1 + \nu_1) + 2(1 - \nu)(1 - \nu_1)] - (3 - \nu_1) [8 - (1 + \nu)(3 - \nu)]}{(3 - \nu) [k(3 - \nu) + 1 + \nu] [3 - \nu_1 + k(1 + \nu_1)]},$$

$$\begin{aligned}
d_2 \equiv d_2(k; \nu) &= \frac{2(k-1)(1+\nu)^2}{(3-\nu)[k(3-\nu)+1+\nu]}; \quad d_4 \equiv d_4(k; \nu; \nu_1) = \frac{4(1+\nu_1)}{(3-\nu)[3-\nu_1+k(1+\nu_1)]}, \\
d_3 \equiv d_3(k; \nu; \nu_1) &= \frac{8\nu(3-\nu_1)+8k[2-\nu_1(1-\nu)]}{(3-\nu)[k(3-\nu)+1+\nu][3-\nu_1+k(1+\nu_1)]}; \quad k = \frac{\mu_1}{\mu}, \\
d_5 \equiv d_5(k; \nu) &= \frac{4(1+\nu)}{(3-\nu)[k(3-\nu)+1+\nu]}; \quad b_4 = \frac{4k[(1-\nu)(3-\nu_1)-k(1-\nu_1)(3-\nu)]}{(3-\nu_1)[k(3-\nu)+1+\nu][3-\nu_1+k(1+\nu_1)]} \\
b_2 &= \frac{(1-k)(1+\nu_1)}{[3-\nu_1+k(1+\nu_1)]}; \quad b_1 = d_1\left(\frac{1}{k}; \nu_1; \nu\right); \quad b_3 = d_2\left(\frac{1}{k}; \nu_1\right); \quad b_5 = d_4\left(\frac{1}{k}; \nu_1; \nu\right); \quad b_6 = d_5\left(\frac{1}{k}; \nu_1\right),
\end{aligned} \tag{1.11}$$

где  $v^{(1)}(0; y)$  и  $u^{(2)}(x; -a)$  – вертикальные и горизонтальные перемещения точек полубесконечных пластин на линиях  $x=0$  и  $y=-a$ ;  $(E, \mu, \nu)$  и  $(E_1, \mu_1, \nu_1)$  – упругие характеристики верхней и нижней полубесконечных пластин соответственно;  $E$  и  $E_1$  – модули упругости,  $\mu$  и  $\mu_1$  – модули сдвига, а  $\nu$  и  $\nu_1$  – коэффициенты Пуассона материалов полубесконечных пластин.

Здесь следует отметить, что контактные условия на линиях креплений упругих конечных стрингеров с упругими полубесконечными пластинами имеют следующий вид:

$$\frac{dv_s^{(1)}(0; y)}{dy} = \frac{dv^{(1)}(0; y)}{dy} \quad (b \leq y \leq d); \quad \frac{du_s^{(2)}(x; -a)}{dx} = \frac{du^{(2)}(x; -a)}{dx} \quad (-b_0 \leq x \leq d_0). \tag{1.12}$$

Теперь, учитывая контактные условия (1.12), на основе (1.1), (1.2), (1.8) и (1.9) относительно распределений неизвестных тангенциальных контактных усилий с интенсивностями  $\tau^{(1)}(y)$  ( $b \leq y \leq d$ ) и  $\tau^{(2)}(x)$  ( $-b_0 \leq x \leq d_0$ ), которые являются основными неизвестными функциями рассматриваемой контактной задачи, получим следующую систему сингулярных интегральных уравнений (СИУ) с ядрами, состоящими из сингулярной и регулярной частей:

$$\frac{1}{\pi} \int_b^d \left[ \frac{1}{\eta-y} + \frac{\lambda\pi}{2} \operatorname{sgn}(\eta-y) + K_{11}(\eta; y) \right] \tau^{(1)}(\eta) d\eta + \frac{1}{\pi} \int_{-b_0}^{d_0} K_{12}(u; y) \tau^{(2)}(u) du = \frac{\lambda Q}{2}, \tag{1.13}$$

$(b < y < d),$

$$\frac{1}{\pi} \int_b^d K_{21}(\eta; x) \tau^{(1)}(\eta) d\eta + \frac{1}{\pi} \int_{-b_0}^{d_0} \left[ \frac{1}{u-x} + \frac{\lambda_1\pi}{2} \operatorname{sgn}(u-x) + K_{22}(u-x) \right] \tau^{(2)}(u) du = \frac{\lambda_1 P}{2}, \tag{1.14}$$

$(-b_0 < x < d_0),$

где  $\lambda = \frac{hl}{E_s^{(1)} F_s^{(1)}}$ ,  $\lambda_1 = \frac{hl_1}{E_s^{(2)} F_s^{(2)}}$ , а интегралы с ядрами Коши в точках  $\eta = y$  и  $u = x$  в системе СИУ (1.13) и (1.14) трактуются в смысле их главных значений по Коши.

Таким образом, решение рассматриваемой контактной задачи при принятых выше предположениях сводится к решению системы СИУ (1.13) и (1.14) при наличии условий (1.5), с ядрами, состоящими из сингулярной и регулярной частей.

2. С целью решения системы СИУ (1.13) и (1.14) при наличии условий (1.5), представим неизвестные функции  $\tau^{(1)}(\eta)$  и  $\tau^{(2)}(u)$  в форме разложения бесконечных рядов по многочленам Чебышева первого рода с неизвестными коэффициентами  $X_n$  и  $Y_n$ , соответственно [2-6]:

$$\tau^{(1)}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{1-p^2(\eta)}} \sum_{n=0}^{\infty} X_n T_n[p(\eta)]; \quad p(\eta) = \frac{2\eta-b-d}{d-b}; \quad |p(\eta)| < 1, \tag{2.1}$$

$$\tau^{(2)}(u) = \frac{1}{\sqrt{1-g^2(u)}} \sum_{n=0}^{\infty} Y_n T_n[g(u)]; \quad g(u) = \frac{2u+b_0-d_0}{b_0+d_0}; \quad |g(u)| < 1. \quad (2.2)$$

Подставляя значения выражений  $\tau^{(1)}(\eta)$  и  $\tau^{(2)}(u)$  из разложений (2.1) и (2.2) в систему СИУ (1.13) и (1.14), пользуясь следующими спектральными интегральными соотношениями [4-7]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{1}{t-x} \frac{T_n[h(t)]}{\sqrt{1-h^2(t)}} dt &= \begin{cases} 0; & n=0, \\ U_{n-1}[h(x)]; & n=1,2,3,\dots \end{cases} \quad (a < x < b), \\ \frac{1}{\pi} \int_a^b \sqrt{1-h^2(t)} U_{n-1}[h(t)] U_{m-1}[h(t)] dt &= \begin{cases} 0; & n \neq m, \\ \frac{b-a}{4}; & n=m, \end{cases} \quad (n, m=1,2,3,\dots), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где  $U_{n-1}(t)$  – многочлены Чебышева второго рода, и поступив аналогичным образом как в работах [2-6], получим следующую совокупность квазивполне регулярных бесконечных систем линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $X_n$  и  $Y_n$ :

$$\begin{cases} X_m + \sum_{n=1}^{\infty} A_{nm} X_n + \sum_{n=1}^{\infty} B_{nm} Y_n = \alpha_m, \\ Y_m + \sum_{n=1}^{\infty} C_{nm} Y_n + \sum_{n=1}^{\infty} D_{nm} X_n = \beta_m, \end{cases} \quad (m=1,2,3,\dots). \quad (2.4)$$

Здесь ядра при неизвестных и свободные члены совокупности бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (2.4) определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} A_{nm} &= A_{nm}^* + A_{nm}^{(1)}; \quad C_{nm} = C_{nm}^* + C_{nm}^{(1)}; \quad A_{nm}^{(1)} = -\frac{\lambda(d-b)}{\pi} J_{nm}; \quad C_{nm}^{(1)} = -\frac{\lambda_1(b_0+d_0)}{\pi} J_{nm}, \\ \alpha_m &= \alpha_m^{(1)} + X_0 \alpha_m^{(2)} + Y_0 \alpha_m^{(3)}; \quad \alpha_m^{(3)} = -B_{0m}; \quad \beta_m = \beta_m^{(1)} + Y_0 \beta_m^{(2)} + X_0 \beta_m^{(3)}; \quad \beta_m^{(3)} = -D_{0m}, \\ A_{nm}^* &= \frac{4}{\pi^2(d-b)} \int_b^d \int_b^d \frac{\sqrt{1-p^2(y)}}{\sqrt{1-p^2(\eta)}} K_{11}^*(\eta; y) T_n[p(\eta)] U_{m-1}[p(y)] d\eta dy; \quad X_0 = \frac{2Q}{\pi(d-b)}, \\ B_{nm} &= \frac{4}{\pi^2(d-b)} \int_b^{d_0} \int_{-b_0}^{d_0} \frac{\sqrt{1-p^2(y)}}{\sqrt{1-g^2(u)}} K_{12}(u; y) T_n[g(u)] U_{m-1}[p(y)] dud; \quad Y_0 = \frac{2P}{\pi(b_0+d_0)}, \\ C_{nm}^* &= \frac{4}{\pi^2(b_0+d_0)} \int_{-b_0}^{d_0} \int_{-b_0}^{d_0} \frac{\sqrt{1-g^2(x)}}{\sqrt{1-g^2(u)}} K_{22}^*(u-x) T_n[g(u)] U_{m-1}[g(x)] dudx, \\ D_{nm} &= \frac{4}{\pi^2(b_0+d_0)} \int_{-b_0}^{d_0} \int_b^d \frac{\sqrt{1-g^2(x)}}{\sqrt{1-p^2(\eta)}} K_{21}(\eta; x) T_n[p(\eta)] U_{m-1}[g(x)] d\eta dx, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\alpha_m^{(1)} = \begin{cases} 0; & m \neq 1, \\ \frac{\lambda Q}{2}; & m=1, \end{cases} \quad \alpha_m^{(2)} = -A_{0m}^* + \begin{cases} -\frac{\lambda\pi(d-b)}{4}; & m=1, \\ \frac{\lambda(d-b)}{\pi} J_{0m}; & m \neq 1, \end{cases} \quad \beta_m^{(1)} = \begin{cases} 0; & m \neq 1, \\ \frac{\lambda_1 P}{2}; & m=1, \end{cases}$$

$$\beta_m^{(2)} = -C_{0m}^* + \begin{cases} -\frac{\lambda_1 \pi (b_0 + d_0)}{4}; & m = 1, \\ \frac{\lambda_1 (b_0 + d_0)}{\pi} J_{0m}; & m \neq 1, \end{cases} \quad J_{mm} = \begin{cases} 0; & |m-n|=1, \\ \frac{2m[1+(-1)^{m+n}]}{[(m+n)^2-1][(m-n)^2-1]}; & |m-n| \neq 1. \end{cases}$$

Так как интенсивности распределения неизвестных тангенциальных контактных усилий представлены в виде бесконечных рядов (2.1) и (2.2), то на основе (1.6) и (1.7) нормальные напряжения, возникающие в упругих конечных стрингерах можно определить следующим образом:

$$\sigma_x^{(1)}(0; y) = \frac{Q}{\pi F_s^{(1)}} \left[ \frac{\pi}{2} + \arcsin p(y) \right] - \frac{d-b}{2F_s^{(1)}} \sqrt{1-p^2(y)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{n} U_{n-1}[p(y)] \quad (b \leq y \leq d), \quad (2.6)$$

$$\sigma_x^{(2)}(x; -a) = \frac{P}{\pi F_s^{(2)}} \left[ \frac{\pi}{2} + \arcsin g(x) \right] - \frac{b_0+d_0}{2F_s^{(2)}} \sqrt{1-g^2(x)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_n}{n} U_{n-1}[g(x)] \quad (-b_0 \leq x \leq d_0). \quad (2.7)$$

Итак, решение поставленной контактной задачи при принятых предположениях свелось к решению совокупности бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (2.4) с ядрами  $A_{nm}, B_{nm}, C_{nm}$  и  $D_{nm}$  и свободными членами  $\alpha_m, \beta_m$ , определяющиеся формулами (2.5).

В конце отметим, что исследование совокупности бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (2.4) в смысле его квазивполне регулярности, можно проводить аналогично, как в работах [2-6], поскольку регулярные ядра сингулярных интегральных уравнений (СИУ) (1.13) и (1.14) со своими частными производными квадратично интегрируемые функции.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Муки Р., Стернберг Е. Передача нагрузки от растягиваемого поперечного стержня к полу-бесконечной упругой пластине.// ПМ. Тр. Амер. общ. инж.-мех. Сер.Е. 1968. № 4. С.124-135.
2. Григорян Э.Х. О динамической контактной задаче для полуплоскости, усиленной упругой накладкой конечной длины.// ПММ. 1974. Т.3. № 2.С.321-330.
3. Саркисян В.С. Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками. Ереван: Изд. ЕГУ, 1983. 260с.
4. Григорян Э.Х., Оганисян Г.В. Об одной контактной задаче для кусочно-однородной пластины с конечными стрингерами.// Межвуз. сб. науч. трудов. Механика. Ереван. Изд. ЕГУ. 1984. № 3. С.130-137.
5. Оганисян Г.В. Контактные задачи для упругой неоднородной (кусочно-однородной) бесконечной пластины со стрингерами.// Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук. Ереван. 1986. 163с.
6. Попов Г.Я. О сведениях интегральных уравнений теории упругости к бесконечным системам.// ПММ. 1966. Т.30. № 4. С.672-682.
7. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 832с.

### Сведения об авторах:

**Оганисян Гамлет Вараздатович** – кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, преподаватель кафедры механики факультета математики и механики ЕГУ. Ереван, Алека Манукяна 1. Тел: (+374 93) 27-26-26. **E-mail:** [HovhannisyanHamlet@yandex.ru](mailto:HovhannisyanHamlet@yandex.ru)

**Бегларян Арташес Агасиевич** – магистрант кафедры механики факультета математики и механики ЕГУ. Тел: (+374 94) 93-76-79. **E-mail:** [artashes.beglaryan@yahoo.com](mailto:artashes.beglaryan@yahoo.com)

# ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА ДИНАМИКИ ОДИНОЧНОГО СПЕКЛА

Осипов М.Н., Чекменев А.Н., Щеглов Ю.Д.

В работе рассматривается применение одиночных спеклов для исследования динамических нормальных перемещений элементов конструкций. Предложена оптическая схема для реализации предлагаемого способа измерений. Рассмотрены ограничения, накладываемые на предлагаемую оптическую схему. Дана оценка диапазона измерений величин перемещений.

**1. Введение.** Развитие техники ставит задачу повышения надёжности создаваемых и уже работающих элементов конструкций, подверженных динамическим нагрузкам. Важнейшей составляющей надёжности является соответствие прочности и вибростойкости материалов конструкций предъявляемым требованиям эксплуатации. Существующие расчётные методы прогнозирования не позволяют в полной мере учесть все реальные условия эксплуатации конструкций. Для обеспечения требуемых параметров конструкции необходимы экспериментальные исследования при динамических и статических нагрузках. Это требует разработки измерительных средств, позволяющих получать как качественные, так и количественные данные при этих нагрузках.

Оптические бесконтактные методы исследований в настоящее время приобретают все большую научную и прикладную значимость. Бесконтактные методы не оказывают влияния на процесс проведения экспериментальных исследований, что приводит к повышению точности и достоверности получаемых результатов. Значительный интерес вызывает применение неразрушающих интерферометрических методов для исследования динамических процессов, происходящих в элементах конструкций, к которым на современном этапе необходимо в первую очередь отнести голографическую и спекл интерферометрию.

Оптические, в том числе и лазерные интерферометры требуют выполнения ряда условий, ограничивающих их применение: отражающая исследуемая поверхность должна быть оптически гладкой; требуется жёсткая взаимная юстировка элементов оптической системы. Следует также отметить, что интерферометрические методы при практическом применении требуют использования лазеров с большой длиной когерентности, что накладывает дополнительные ограничения при использовании данных систем в реальных условиях.

Хорошо известно, что применение когерентного излучения в интерферометрии приводит к возникновению собственных шумов, которые называются спекл шумами, приводящих к уменьшению чувствительности и точности измерений. Кроме того, спекл шум приводит к ограничению измерения максимального значения перемещений.

В данной работе рассматривается применение спекл шума для регистрации малых нормальных, как динамических так статических, перемещений исследуемой поверхности объекта в большом диапазоне измеряемых величин перемещений.

**2. Образование спекл-структур.** При освещении лазерным когерентным источником света оптически шероховатой поверхности за счёт рассеяния в пространстве образуется сложная интерференционная картина, называемая спекл структурой (с английского *speckle* — пятно, зерно). Характерный вид спекл структуры представлен на рис.1.

Образование спекл-структуры можно объяснить следующим образом [1]: каждая точка

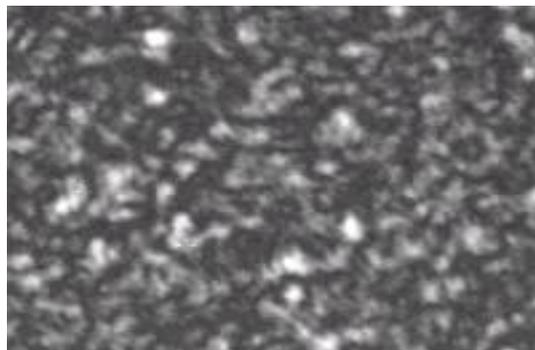


Рис. 1. Фотография спекл-структуры

шероховатой поверхности при отражении лазерного излучения может быть представлена источником вторичных сферических волн со случайным распределением фаз. Интерференция этих волн в пространстве и образует спекл структуру. Различают два вида спекл-структур: объективные – образованные в пространстве за счёт интерференции множества отражённых лучей от шероховатой поверхности, которые могут быть зарегистрированы непосредственно без оптической системы на фотоматериале и субъективные – образованные и зафиксированные на

фотоматериале с помощью оптической системы в плоскости изображения исследуемой шероховатой поверхности.

Размеры спеклов в объективных и субъективных (при расстоянии до исследуемой поверхности много большем фокусного расстояния оптической системы) спекл-структурах (продольные —  $L$  и поперечные —  $H$ ) оцениваются по известным формулам [1]:

$$L = \frac{4\lambda}{\alpha^2}, \quad (2.1)$$

$$H = 1,22 \frac{\lambda}{\alpha}, \quad (2.2)$$

где  $\lambda$  — длина волны лазерного излучения, используемого для освещения исследуемой поверхности;  $\alpha$  — отношение диаметра освещённой области исследуемой поверхности к расстоянию от исследуемой поверхности до точки регистрации спекла (объективная спекл-структура):  $\alpha$  — отношение диаметра входной апертуры к фокусному расстоянию оптической системы (субъективная спекл-структура).

Динамические процессы, возникающие на поверхности исследуемого объекта, приводят к изменению параметров спекл структуры в пространстве и во времени, что связано с изменением фазы отражённых вторичных сферических волн. Следовательно, по анализу пространственно-временного поведения спекл-структур можно определить динамические и статические процессы, происходящие с исследуемой поверхностью.

**3. Предлагаемое решение.** Параметрами спекл структуры, изменяющимися в пространстве и во времени, являются: продольные и поперечные размеры; распределение интенсивности.

Оценим возможность измерения динамических и статических процессов, происходящих с исследуемой поверхностью, за счёт изменения пространственных размеров спекла.

Из выражений (2.1) и (2.2) следует, что размеры субъективных спекл-картин не зависят от динамики исследуемой поверхности, т.к.  $\alpha$  — константа, и, следовательно, связаны только с характеристиками оптической системы. Таким образом, субъективные спекл-структуры не позволяют регистрировать перемещения исследуемой поверхности за счёт измерения размеров спекла. С другой стороны, регистрация субъективной спекл-структуры позволяет жёстко привязать точки исследуемой шероховатой поверхности к самой спекл-структуре и также увеличить интенсивность регистрируемой спекл-картины на фотодетекторе.

Проведём аналогичную оценку для объективных спеклов. При динамических перемещениях исследуемой поверхности изменения размеров спекла для объективных спекл-структур согласно выражениям (2.1) и (2.2) будут определяться следующими соотношениями:

$$L = \frac{4\lambda(r \pm \Delta r)^2}{D^2}, \quad (3.1)$$

$$H = 1,22 \frac{\lambda(r \pm \Delta r)}{D}, \quad (3.2)$$

где  $r$  — расстояние от исследуемой поверхности до точки регистрации спекла;  $\pm \Delta r$  — величина перемещения исследуемой поверхности;  $D$  — диаметр освещённой области исследуемой поверхности.

Из анализа выражений (3.1) и (3.2) следует, что поперечный и продольный размеры спекла, при перемещениях исследуемой поверхности, будет меняться на очень малую величину, так как  $\Delta r/r \rightarrow 0$  при реальных условиях измерений. Следовательно, как и в случае с субъективными спеклами, определить динамику исследуемой поверхности за счёт измерения размеров объективных спеклов также практически невозможно.

Рассмотрим возможность определения динамики исследуемой поверхности за счёт регистрации изменения интенсивности спекла.

Изменение интенсивности спекла связано с изменением его фазы, которая зависит от изменения оптического пути при смещении исследуемой поверхности. Изменение значения фазы спекла на  $\pm \pi(2n+1)$ , (где  $n=0,1,2,\dots$ ) приводит к изменению интенсивности спекла от минимального значения до максимального или, наоборот.

Для регистрации изменения фазы спекла необходимо использование опорного лазерного излучения, которое накладывается на спекл-структуру, в результате чего образуется вторичная интерференционная картина в виде полос (рис.2).

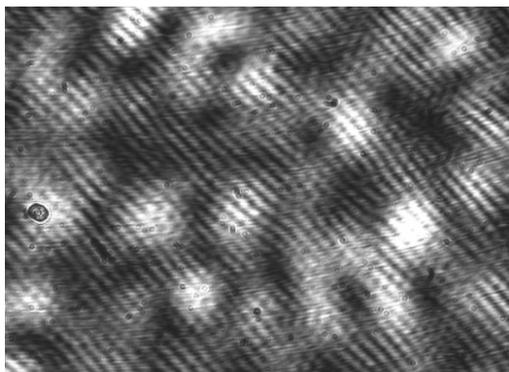


Рис.2. Фотография вторичной интерференционной картины

Ширина вторичных интерференционных полос  $d$  определяется хорошо известным выражением [2]:

$$d = \frac{\lambda}{2 \sin\left(\frac{\Theta}{2}\right)}, \quad (3.3)$$

где  $\Theta$  – угол схождения между опорным лазерным излучением и сфокусированным рассеянным лазерным излучением, образующим спекл структуру в плоскости фотодетектора, регистрирующего изображение исследуемой поверхности.

Для эффективной регистрации динамики спекл структуры необходимо выполнить следующие условия: ширина полос вторичной интерференционной картины должна быть

согласована с размерами спекл-структуры, а также с размерами чувствительного элемента фотодетектора.

Для согласования размера спекла с размерами чувствительного элемента фотодетектора необходимо, чтобы выполнялось следующее соотношение:

$$H \geq h, \quad (3.4)$$

где  $h$  – максимальное значение из размеров чувствительного элемента фотодетектора.

Выполнение данного условия достигается подбором параметра  $\alpha$  оптической системы, как следует из выражения (2.2).

Для того чтобы чувствительный элемент фотодетектора смог различать изменение фазы спекл-структуры необходимо, чтобы ширина вторичных интерференционных полос была больше максимального значения из размеров чувствительного элемента фотодетектора, то есть выполнялось следующее соотношение:

$$d \geq h, \quad (3.5)$$

Таким образом, выполнение условий (3.4) и 3.5) приводит к тому, что интенсивность спекла, как целого, будет меняться от минимального до максимального значения в зависимости от колебаний исследуемой поверхности.

**4. Реализация предлагаемого решения.** Реализация данного способа регистрации колебаний исследуемой поверхности под воздействием акустического сигнала предлагается осуществить по оптической схеме, на рис.3. С помощью оптической системы Л2 шероховатая поверхность исследуемого объекта О, освещённая лазерным излучением, фокусируется на приборе с зарядовой связью (ПЗС-матрица). Подчеркнём, что, как отмечалось выше, в плоскости ПЗС-матрицы фиксируется изображение объекта, покрытое спеклами, что позволяет наблюдать объект с привязкой спеклов к координатам исследуемой поверхности.

Так как стандартные ПЗС-матрицы не являются в стандартном исполнении быстродействующими фотодетекторами, которые способны регистрировать динамику спеклов

в килгерцовом диапазоне, то в оптической схеме предлагается использовать дополнительно быстродействующий фотодетектор ФД, позволяющий анализировать динамику спеклов в килгерцовом диапазоне. Для выделения одиночного спекла, с помощью делителя Д2 изображение спекла направляется на входной торец оптоволокну ОВ2, выходной торец которого согласован с быстродействующим фотодетектором ФД. Диаметр сердцевины оптоволокну

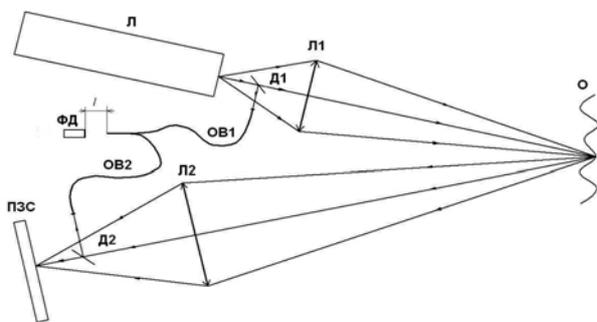


Рис.3. Оптическая схема регистрации перемещений

ОВ2 должен быть согласован с поперечными размерами спекла, то есть должно выполняться соотношение (6). Данное условие достигается использованием стандартных оптических систем. Для создания опорной волны с помощью делителя Д1 часть излучения от лазера Л направляется в оптоволоконно ОВ1, выходной торец которого также согласован с быстродействующим фотодетектором ФД. Выходные концы оптоволокон совмещены, а торцы располагаются в одной плоскости. Выходное излучение из оптоволокон ОВ1 и ОВ2 создает в пространстве спекл-структуру, покрытую вторичными интерференционными полосами, как описано выше (рис. 2). Быстродействующий фотодетектор ФД располагается на расстоянии  $l$  от торцов оптоволокон ОВ1 и ОВ2 таким образом, чтобы выполнялись условия (3.4) и (3.5).

**5. Теоретический анализ распределения интенсивности.** Рассмотрим образование распределения интенсивности в одиночном спекле при выполнении условий (3.4) и (3.5) для предлагаемой оптической схемы. Используя комплексную форму записи для вектора электрической напряжённости электромагнитного поля, запишем значения векторов электрической напряжённости на фотодетекторе  $PD$  для волн, прошедших через оба оптоволоконна в следующем виде:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_0 e^{i(kx_1 - \omega t + \varphi)}, \quad (5.1)$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_0 e^{i(kx_2 - \omega t + \varphi)}, \quad (5.2)$$

где  $\vec{E}_0$  – вектор амплитуды электрической напряжённости электромагнитного поля (предполагаем для упрощения расчётов, что она одинакова в обоих оптоволоконнах);  $k=2\pi/\lambda$  – волновое число;  $\omega$  – круговая частота лазерного излучения;  $\varphi$  – начальная фаза, которая также считается одинаковой для обоих оптоволокон;  $x_1$  – расстояние от лазера до фотодетектора по оптоволокону ОВ1;  $x_2$  – расстояние от лазера до фотодетектора по оптоволокону ОВ2.

Расстояние от лазера до фотодетектора по оптоволокону ОВ2 представим в следующем виде:

$$x_2 = r_0 + r \pm 2\Delta r, \quad (5.3)$$

где  $r_0$  – расстояние от лазера до исследуемой поверхности О;  $r$  – в данном случае расстояние от исследуемой поверхности до фотодетектора по оптоволокону ОВ2.

Так как фотодетектор фиксирует интенсивность, то распределение интенсивности в интерференционной картине одиночного спекла запишется в следующем виде:

$$I(x, t) = \left| (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^+ (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^- \right|^2 \approx 2E_0^2 \{1 + \cos[k(x_1 - r_0 - r \mp 2\Delta r)]\}, \quad (5.4)$$

где верхний индекс (+) означает, что векторное значение электрической напряжённости электромагнитного поля является транспонированным и комплексно сопряжённым.

Как следует из выражения (5.4) и как отмечалось выше, интенсивность одиночного спекла меняется от минимального до максимального значения при изменении значения фазы спекла на  $\pm\pi(2n+1)$ , (где  $n=0,1,2,\dots$ ), которая связана динамикой поверхности, то есть с изменением  $\Delta r$  во времени.

Изменение интенсивности одиночного спекла на входе фотодетектора преобразуется в изменение выходного напряжения фотодетектора, которое, исходя из выражения (5.4), можно записать в следующем виде:

$$u(t) = A + B \cos[\varphi(0) - \varphi(t)], \quad (5.5)$$

где  $u(t)$  – выходное напряжение на фотодетекторе;  $A$  – постоянная составляющая напряжения смещения на выходе электрической схемы, которая связана с усреднённым значением изменения интенсивности одиночного спекла;  $B$  – амплитуда полезного выходного напряжения, которая определяется параметрами оптоэлектронной схемы,  $\varphi(0) = k(x_1 - r_0 - r)$  – начальное значение разности фаз между опорным излучением и рассеянным лазерным излучением, образующим спекл структуру, которое может меняться в зависимости от начальных условий и остается постоянным в процессе измерений;  $\varphi(t) = \pm 2k\Delta r$  – изменение

фазы в одиночном спекле, связанное с изменением оптического пути при динамических смещениях исследуемой поверхности.

Из анализа формулы (5.5) видно, что изменение выходного напряжения фотодетектора зависит от изменения фазы  $\varphi(t)$ , характеризующей динамику спекла^ связанную с перемещением исследуемой поверхности. Так как интенсивность спекла меняется от минимального до максимального или наоборот, то соответственно и выходное напряжение с фотодетектора меняется от минимального значения  $-u(t)_{min}$  до максимального значения  $-u(t)_{max}$  или наоборот.

**6. Оценка диапазона измерений.** Из анализа выражений (5.4) и (5.5) следует, что изменение выходного напряжения от минимального до максимального соответствует смещению исследуемой поверхности на величину, равную  $\lambda/4$ .

Тогда, при перемещениях постоянного направления – не знакопеременных – для определения величины полного перемещения достаточно определить количество изменений интенсивностей спекла от максимального до минимального. При знакопеременных перемещениях, что соответствует виброакустическим сигналам, характер выходного сигнала фотодетектора имеет особенности.

Анализ выражений (5.4) и (5.5) показывает, что при колебаниях исследуемой поверхности с амплитудами меньше или равно  $\lambda/8$  выходное напряжение фотодетектора соответствует форме колебаний этой поверхности. При амплитудах колебаний исследуемой поверхности более  $\lambda/8$  выходное напряжение фотодетектора не будет соответствовать форме колебаний этой поверхности, что потребует разработки дополнительного алгоритма расшифровки выходного сигнала фотодетектора.

Для регистрации колебаний без дополнительной обработки выходного сигнала, как следует из выражения (8), необходимо выбрать  $\varphi(0)$  равным  $\frac{\pi}{2}(2n+1)$  (где  $n=0,1,2,\dots$ ). Данное условие

означает, что в начальный момент измерений выходное напряжение с фотодетектора должно быть установлено таким образом, чтобы его значение соответствовало величине равной  $(u(t)_{max} - u(t)_{min})/2$ , то есть  $u(0)=A$ . Это достигается соответствующим изменением фазы опорного пучка. При этих условиях амплитуда измеряемых колебаний исследуемой поверхности будет соответствовать величине, равной  $\lambda/8$ .

**7. Заключение.** В данной работе рассмотрен способ регистрации акустической информации с использованием анализа динамики спекл-структур. Проведён теоретический анализ условий, накладываемых на спекл-структуры и фотодетектор, которые необходимы для оптимального решения поставленной задачи. Преимущество предлагаемого способа заключается в том, что его использование не требует тщательной юстировки элементов оптической системы и позволяет частично избавиться от помех.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Франсон М. Оптика спеклов. М.: Мир, 1980. 172с.
2. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1973. 719с.

### Сведения об авторах:

**Осипов Михаил Николаевич** – доцент механико-математического факультета, Самарский государственный университет, 8 (846) 3379941, +7 (927) 2635777, **E-mail:** osipov@ssu.samara.ru;

**Чекменев Антон Николаевич** – студент механико-математического факультета, Самарский государственный университет;

**Щеглов Юрий Денисович** – ведущий инженер механико-математического факультета, Самарский государственный университет

## К ЗАДАЧЕ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИНКИ В ПРОДОЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Папян А.А.

В представленной статье решается задача магнитоупругих колебаний для пластинки. На основе теории Кирхгофа и теории магнитоупругости тонких тел трёхмерная задача магнитоупругих колебаний сводится к двумерным уравнениям. Однако, в этих уравнениях содержатся также неизвестные значения компонент напряжённости магнитного поля на лицевых поверхностях пластинки. Чтобы найти неизвестные значения, нужно решить уравнения электродинамики для окружающей пластинку среды. Поэтому, задача колебаний пластинки остаётся пространственной. Для окончательного сведения трёхмерной задачи к двумерной предлагаются два простых подхода:

- принимается, что поверхностные значения компонент напряжённости магнитного поля можно определить согласно модели идеального проводника;
- принимается, что поверхностные значения компонент напряжённости магнитного поля равны нулю.

На основе гипотезы Кирхгофа и гипотезы магнитоупругости тонких тел, С.А. Амбарцумяна, Г.Е. Багдасаряна и М.В. Белубекяна [1] рассматривается задача колебаний пластинки в продольном магнитном поле. Для того, чтобы не рассматривать уравнение электродинамики для окружающей среды пластинки, предлагается более простой подход. Принимается, что поверхностные значения компонент напряжённости магнитного поля  $h_1^+$ ,  $h_1^-$ ,  $h_2^+$  и  $h_2^-$  можно определить согласно модели идеального проводника.

1. Пусть упругая изотропная пластинка с постоянной толщиной  $2h$  и конечной электропроводностью  $\sigma$  находится во внешнем постоянном магнитном поле  $\vec{H} = (H_{01}, H_{02}, 0)$ . Пластинка в декартовой системе координат  $Oxyz$  расположена так, что срединная плоскость пластинки совпадает с плоскостью  $Oxy$ .

Уравнение движения для пластинки имеет вид:

$$\operatorname{div} \vec{\sigma} + \vec{R} = \rho \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

Уравнения электродинамики имеют вид:

$$\operatorname{rot} \vec{h} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \operatorname{rot} \vec{e} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{h}}{\partial t}, \operatorname{div} \vec{e} = \frac{4\pi}{\varepsilon} \rho_{(e)}, \operatorname{div} \vec{h} = 0 \quad (1.2)$$

$$\vec{R} = \frac{\mu}{c} (\vec{j} \times \vec{H}) \quad (1.3)$$

Материальные уравнения, выражающие закон Гука для изотропного тела, имеют следующий вид:

$$\sigma_{ij} = (\lambda + 2\mu) \varepsilon_{ij} + \delta_{ij} \lambda \varepsilon_{kk} \quad (1.4)$$

а деформации и перемещения связаны соотношениями:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) \quad (1.5)$$

Здесь  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжения,  $\varepsilon_{ij}$  – компоненты тензора деформации,  $\vec{R}$  – пондеромоторная сила (объёмная сила),  $\vec{h}$  – вектор напряжённости магнитного поля,  $\vec{e}$  – вектор напряжённости электрического поля,  $\vec{j}$  – ток проводимости,  $\mu$  – магнитная проницаемость,  $c$  – скорость света,  $\vec{U}$  – вектор перемещения,  $\rho$  – плотность.

К уравнениям (1.2), (1.3) и (1.4) необходимо присоединить функциональную связь:

$$\vec{j} = \sigma \left( \vec{e} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \times \vec{H} \right) \quad (1.6)$$

Граничные условия на лицевых поверхностях пластинки  $z = \pm h$  имеют вид:

$$\sigma_{3i} = 0, \mu h_3 = h_3^{(e)}, e_1 = e_1^{(e)}, e_2 = e_2^{(e)} \quad (1.7)$$

Уравнения электродинамики для окружающей среды

$$\operatorname{rot} \vec{h}^{(e)} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{e}^{(e)}}{\partial t}, \operatorname{rot} \vec{e} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{h}^{(e)}}{\partial t}, \operatorname{div} \vec{e}^{(e)} = 0, \operatorname{div} \vec{h}^{(e)} = 0 \quad (1.8)$$

2. Для пластинки считается справедливой гипотеза Кирхгофа, согласно которой для перемещений какой-либо точки пластинки получаются выражения (2.1) и гипотеза магнитоупругости тонких тел, согласно которой, нормальный по отношению к срединной плоскости пластинки, компонент возмущённого магнитного поля и тангенциальные компоненты не меняются по толщине пластинки. Аналитически приведённая гипотеза записывается следующим образом (2.2):

$$U_1(x, y, z, t) = U(x, y, t) - z \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial x}, \quad U_2(x, y, z, t) = V(x, y, t) - z \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial y} \quad \text{и}$$

$$U_3(x, y, z, t) = w(x, y, t) \quad (2.1)$$

$$e_1 = \varphi(x, y, t), \quad e_2 = \psi(x, y, t), \quad h_3 = f(x, y, t) \quad (2.2)$$

Для задачи магнитоупругих колебаний в продольном магнитном поле из уравнений (1.2) имеем [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\mu}{c} \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{4\pi\sigma}{c} \left( \varphi - \frac{\mu}{c} H_{02} \frac{\partial w}{\partial t} \right) &= \frac{h_2^+ - h_2^-}{2h} \\ \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{4\pi\sigma}{c} \left( \psi + \frac{\mu}{c} H_{01} \frac{\partial w}{\partial t} \right) &= \frac{h_1^+ - h_1^-}{2h} \end{aligned} \quad (2.3)$$

где  $h_2^+ = h_2 / z=h$ ,  $h_2^- = h_2 / z=-h$ ,  $h_1^+ = h_1 / z=h$  и  $h_1^- = h_1 / z=-h$

Компоненты  $h_1$  и  $h_2$  определяются из уравнений:

$$\begin{aligned} h_2 &= \frac{h_2^+ + h_2^-}{2h} + z \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{4\pi\sigma}{c} \left( \varphi - \frac{\mu}{c} H_{02} \frac{\partial w}{\partial t} \right) \right) \\ h_1 &= \frac{h_1^+ + h_1^-}{2h} + z \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{4\pi\sigma}{c} \left( \psi + \frac{\mu}{c} H_{01} \frac{\partial w}{\partial t} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Уравнения планарных колебаний:

$$\begin{aligned} \Delta U + \mathcal{G} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) - \frac{\sigma\mu H_{02}}{cG} \left( \frac{c}{8\pi\sigma} \left( \frac{\partial}{\partial x} (h_2^+ + h_2^-) - \frac{\partial}{\partial y} (h_1^+ + h_1^-) \right) \right) &= \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \\ \Delta V + \mathcal{G} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\sigma\mu H_{01}}{cG} \left( \frac{c}{8\pi\sigma} \left( \frac{\partial}{\partial x} (h_2^+ + h_2^-) - \frac{\partial}{\partial y} (h_1^+ + h_1^-) \right) \right) &= \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Уравнение поперечных колебаний:

$$D\Delta^2 w - \frac{2h\mu\sigma}{c} \left( H_{02}\varphi - H_{01}\psi - \frac{\mu}{c} (H_{01}^2 + H_{02}^2) \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{h^2}{3} \left( \frac{\partial}{\partial x} (H_{02}F) - \frac{\partial}{\partial y} (H_{01}F) \right) \right) + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,$$

$$\text{где } F = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( H_{02} \frac{\partial w}{\partial x} - H_{01} \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad \mathcal{G} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \quad (2.6)$$

Шесть уравнений (2.6) (2.5) и (2.3) являются двумерными уравнениями относительно шести искомых функций:  $U$ ,  $V$ ,  $w$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$  и  $f$  (от  $x$ ,  $y$ ,  $t$ ). Однако, эти уравнения содержат также неизвестные поверхностные значения  $h_1^+$ ,  $h_1^-$ ,  $h_2^+$  и  $h_2^-$ . Для полного замыкания системы уравнений необходимо рассматривать также уравнения электродинамики в окружающей пластинку среде (1.10) с соответствующими поверхностными условиями. Таким образом, несмотря на то, что уравнения относительно искомых функций являются двумерными, задача колебаний пластинки остается пространственной [1].

3. Для окончательного сведения пространственной задачи магнитоупругих колебаний пластинки были предложены различные подходы [1–5]. В настоящей статье предлагается более простой подход. Принимается предположение, что поверхностные значения  $h_1^+$ ,  $h_1^-$ ,  $h_2^+$  и  $h_2^-$  можно определить согласно модели идеального проводника.

Согласно модели идеального проводника для установившихся колебаний возмущённое магнитное поле определяется следующим образом [2,3]:

$$\vec{h} = \text{rot}(\vec{U} \times \vec{H}) \quad (3.1)$$

Из (2.1), с учётом (2.1, 2.2), следуют:

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{\partial}{\partial y} \left( H_{02}U - H_{01}V - z \left( H_{02} \frac{\partial w}{\partial x} - H_{01} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) \\ h_2 &= \frac{\partial}{\partial x} \left( H_{01}V - H_{02}U - z \left( H_{01} \frac{\partial w}{\partial y} - H_{02} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Из (2.3) следуют:

$$\begin{aligned} h_1^+ + h_1^- &= 2 \frac{\partial}{\partial y} (H_{02}U - H_{01}V), & h_2^+ + h_2^- &= 2 \frac{\partial}{\partial x} (H_{01}V - H_{02}U) \\ h_1^+ - h_1^- &= -2h \frac{\partial}{\partial y} \left( H_{02} \frac{\partial w}{\partial x} - H_{01} \frac{\partial w}{\partial y} \right) & h_2^+ - h_2^- &= -2h \frac{\partial}{\partial x} \left( H_{01} \frac{\partial w}{\partial y} - H_{02} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Подстановка (3.3) в (2.5), (2.6) и (2.3) приводит к шести двумерным уравнениям относительно искомых функций  $U$ ,  $V$ ,  $w$ ,  $f$ ,  $\varphi$  и  $\psi$ . При этом, оказывается, что уравнения планарных колебаний пластинки отделяются от уравнения изгибных колебаний.

Уравнения планарных колебаний имеют вид:

$$\begin{aligned} \Delta U + g \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\mu}{\pi G} H_{02}^2 \Delta U - \frac{\mu}{\pi G} H_{01} H_{02} \Delta V &= \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \\ \Delta V + g \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\mu}{\pi G} H_{01}^2 \Delta V - \frac{\mu}{\pi G} H_{01} H_{02} \Delta U &= \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Уравнения планарных колебаний (3.4) совпадают с уравнениями планарных колебаний для идеального проводника [4].

Уравнения поперечных (изгибных) колебаний:

$$D \Delta^2 w + \frac{2h\mu\sigma}{c} \left( H_{02}\varphi - H_{01}\psi - \frac{\mu}{c} (H_{01}^2 + H_{02}^2) \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{h^2}{3} \left( \frac{\partial}{\partial x} (H_{02}F) - \frac{\partial}{\partial y} (H_{01}F) \right) \right) + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\mu}{c} \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad (3.6)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{4\pi\sigma}{c} \left( \varphi - \frac{\mu}{c} H_{02} \frac{\partial w}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( H_{01} \frac{\partial w}{\partial y} - H_{02} \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{4\pi\sigma}{c} \left( \psi + \frac{\mu}{c} H_{01} \frac{\partial w}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( H_{02} \frac{\partial w}{\partial x} - H_{01} \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

4. Из системы (3.7), исключая функции  $\varphi$  и  $\psi$ , получаем:

$$\begin{cases} \varphi - \frac{\mu}{c} H_{02} \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{c}{4\pi\sigma} \left( \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left( H_{01} \frac{\partial w}{\partial y} - H_{02} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) \\ \psi + \frac{\mu}{c} H_{01} \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{c}{4\pi\sigma} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( H_{02} \frac{\partial w}{\partial x} - H_{01} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) \end{cases} \quad (4.1)$$

Подставляя значения  $\varphi$  и  $\psi$  в уравнения (3.5) – (3.6), получаем систему уравнений относительно функций  $w$  и  $f$ :

$$\begin{cases} D \Delta^2 w - \frac{\mu h}{2\pi} \left( H_{02} \frac{\partial f}{\partial y} + H_{01} \frac{\partial f}{\partial x} - H_{01}^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - H_{02}^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2H_{01}H_{02} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \\ + \frac{\mu h^3}{6\pi} \left( H_{02}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + H_{01}^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2H_{01}H_{02} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) \Delta w + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{\mu}{c} \left( \frac{\partial f}{\partial t} - H_{01} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} - H_{02} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \right) - \frac{c}{4\pi\sigma} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

В системе (4.2) для модели идеальной проводящей среды предполагается ( $\sigma \rightarrow \infty$ ), что даёт.

$$D\Delta^2 w - \frac{\mu h}{2\pi} \left( (H_{02}^2 - H_{01}^2) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (H_{01}^2 - H_{02}^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 4H_{01}H_{02} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\mu h^3}{6\pi} \left( H_{02}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + H_{01}^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2H_{01}H_{02} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) \Delta w + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (4.3)$$

Уравнение (4.3) отличается от уравнения поперечных (изгибных) колебаний идеального проводника отличием второго члена  $\frac{\mu h}{2\pi} \left( H_{01}^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + H_{02}^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2H_{01}H_{02} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)$ .

Для системы (4.2) рассмотрим случай, когда колебания не зависят от координаты  $y$ . Тогда система (4.2) будет иметь следующий вид (4.4):

$$\begin{cases} D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{\mu h}{2\pi} \left( H_{01} \frac{\partial f}{\partial x} - H_{02}^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{\mu h^3}{3} H_{02}^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{\mu}{c} \left( \frac{\partial f}{\partial t} - H_{01} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right) - \frac{c}{4\pi\sigma} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

Решения системы (4.4) будем искать в виде (4.5):

$$w = A \exp i(\omega t - kx) \quad f = B \exp i(\omega t - kx) \quad (4.5)$$

Подстановка (4.5) в систему (4.4) приводит к системе однородных алгебраических уравнений относительно произвольных  $A$  и  $B$  для того, чтобы система имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы детерминант системы был равен нулю, что даёт (4.6):

$$\omega^3 - i\beta\omega^2 - (\Omega_0^2 + \Omega_1^2 - \Omega_2^2)\omega + i\beta(\Omega_0^2 - \Omega_2^2) = 0, \quad (4.6)$$

$$\text{где } \beta = \frac{c^2 k^2}{4\mu\pi\sigma}, \quad \Omega_0^2 = \frac{Dk^4}{2\rho h}, \quad \Omega_1^2 = \frac{\mu k^2 H_{01}^2}{4\pi\rho} \quad \text{и} \quad \Omega_2^2 = \frac{\mu k^2 (3 + h^2 k^2) H_{02}^2}{12\pi\rho}$$

Рассмотрим случай, когда  $H_{02} = 0$ , следовательно,  $\Omega_2^2 = 0$  и получим (4.7):

$$\omega^3 - i\beta\omega^2 - (\Omega_0^2 + \Omega_1^2)\omega + i\beta\Omega_0^2 = 0 \quad (4.7)$$

**5.** Рассмотрим случай, когда  $h_1^+ = h_1^- = h_2^+ = h_2^- = 0$ . В этом случае планарные колебания не зависят от магнитного поля. Из системы (3.7), исключая функции  $\varphi$  и  $\psi$ , учитывая, что  $h_1^+ = h_1^- = h_2^+ = h_2^- = 0$ , получим (5.1):

$$\begin{cases} \varphi = \frac{\mu}{c} H_{02} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{c}{4\pi\sigma} \frac{\partial f}{\partial y} \\ \psi = -\frac{\mu}{c} H_{01} \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{c}{4\pi\sigma} \frac{\partial f}{\partial x} \end{cases} \quad (5.1)$$

Подставляя значение (5.1) в (3.6) и (3.7), получим систему уравнений относительно функций  $w$  и  $f$  (5.2):

$$\begin{cases} D\Delta^2 w - \frac{\mu h}{2\pi} \left( H_{02} \frac{\partial f}{\partial y} + H_{01} \frac{\partial f}{\partial x} \right) + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{\mu}{c} \left( \frac{\partial f}{\partial t} - H_{01} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} - H_{02} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \right) - \frac{c}{4\pi\sigma} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) = 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

Если в системе (5.2)  $\sigma \rightarrow \infty$ , а из второго уравнения определить  $f$  и подставить в первое уравнение, получим

$$D\Delta^2 w - \frac{\mu h}{2\pi} \left( H_{01}^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + H_{02}^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2H_{01}H_{02} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (5.3)$$

Уравнение (5.3) отличается от уравнения поперечных (изгибных) колебаний для идеального проводника отсутствием  $\frac{\mu h^3}{6\pi} \left( H_{02}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + H_{01}^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2H_{01}H_{02} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) \Delta w$ .

6. Уравнение поперечных (изгибных) колебаний для идеального проводника имеет следующий вид (6.1):

$$D\Delta^2 w - \frac{\mu h}{2\pi} \left( H_{01}^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + H_{02}^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2H_{01}H_{02} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\mu h^3}{6\pi} \left( H_{02}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + H_{01}^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2H_{01}H_{02} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) \Delta w + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (6.1)$$

Решения уравнения (6.1), (5.3) и (4.3) будем искать в виде

$$w = w_0 \exp i(\omega t - k_1 x - k_2 y) \quad (6.2)$$

Подставляя значения  $w$  в уравнения (6.1), (4.3) и (5.3), будем иметь:

$$\frac{\omega^2}{k_1^2 + k_2^2} = \frac{c^2 h^2}{3(1-\nu^2)} (k_1^2 + k_2^2) + \frac{(V_1 k_1 + V_2 k_2)^2}{k_1^2 + k_2^2} + \frac{h^2}{3} (k_1 V_2 - k_2 V_1)^2 \quad (6.3)$$

$$\frac{\omega^2}{k_1^2 + k_2^2} = \frac{c^2 h^2}{3(1-\nu^2)} (k_1^2 + k_2^2) + \frac{(V_2^2 - V_1^2)(k_2^2 - k_1^2) + 4V_1 V_2 k_1 k_2}{k_1^2 + k_2^2} + \frac{h^2}{3} (k_1 V_2 - k_2 V_1)^2 \quad (6.4)$$

$$\frac{\omega^2}{k_1^2 + k_2^2} = \frac{c^2 h^2}{3(1-\nu^2)} (k_1^2 + k_2^2) + \frac{(V_1 k_1 + V_2 k_2)^2}{k_1^2 + k_2^2}, \quad (6.5)$$

где  $V_i^2 = \frac{\mu H_{0i}^2}{4\pi\rho}$  ( $i=1,2$ ),  $c^2 = \frac{E}{\rho}$ ,  $D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}$ .

Если в приближении  $h^2(k_1^2 + k_2^2) \ll 1$ , в уравнении (6.3) пренебречь  $\frac{h^2}{3}(k_1 V_2 - k_2 V_1)^2$  по сравнению с  $\frac{(V_1 k_1 + V_2 k_2)^2}{k_1^2 + k_2^2}$ , получим совпадение с уравнением (6.5).

Совпадение уравнения (6.3) с уравнением (6.4) получится лишь в том случае, когда колебания не зависят от координаты  $y$  и компонента магнитного поля  $H_{02} = 0$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977. 272 с.
2. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах. М.: Мир, 1986. 160с.
3. Белубекян М.В. Введение в теорию магнитоупругости (специальный курс лекций для студентов факультета механики ЕГУ) Ереван: 1997. 103с.
4. M.Belubekyan, K. Ghazaryan, P. Marzocca, C. Cormier Localized Magnetoelastic Bending Vibration of an Electroconductive Elastic Plate. //Journal of Applied Mechanics, November 2007. Vol.74. P.1071–1077.
5. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Х., Микилян М.А. Собственные и вынужденные нелинейные колебания идеально проводящей пластинки в наклонном магнитном поле. Проблемы механики деформируемого твёрдого тела. Ереван: Институт механики НАН Армении, 2012. С.75–87.

#### Сведения об авторе:

**Папян Арагат Артурович** – аспирант Института механики НАН Армении

**E-mail:** [aro088@mail.ru](mailto:aro088@mail.ru)

# ТРЕЩИНА С НЕЛИНЕЙНЫМИ СВЯЗЯМИ В КОНЦЕВОЙ ОБЛАСТИ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА МАТЕРИАЛОВ

Перельмутер М.Н.

Рассмотрена методика решения нелинейной системы сингулярных интегро-дифференциальных уравнений при наличии в концевой области трещины связей с нелинейной диаграммой деформирования. Представлены результаты численных экспериментов по исследованию скорости сходимости итерационного процесса решения в зависимости от вида кривой деформирования связей.

1. Связи между берегами трещины в композиционных материалах и адгезионных соединениях, образованные подкрепляющими волокнами или слоем адгезива, сдерживают развитие разрушения. Этот эффект усиливается при возрастании размера части трещины, занятой связями (далее – концевой области трещины). Если длина концевой области трещины не является малой по сравнению с размером трещины, то приближённые методы оценки трещиностойкости, основанные на рассмотрении трещины с малой концевой областью, неприменимы. В таких случаях необходимо прямое моделирование напряжённого состояния в концевой области трещины с учётом деформационных характеристик связей.

Одна из возможностей моделирования концевой области трещины состоит в рассмотрении её как части (продолжения) трещины и в явном приложении в концевой области к поверхностям трещины сил сцепления, сдерживающих её раскрытие. Различные варианты такой модели трещины использовались ранее для анализа хрупкого и упругопластического разрушения однородных тел в предположении, что напряжения в вершине трещины ограничены, что эквивалентно равенству нулю коэффициента интенсивности напряжений. Если процессы деформирования и разрушения в концевой области трещины включают в себя несколько физических механизмов, как, например, в композиционных материалах или адгезионных соединениях, то в таких случаях более эффективным является использование модели концевой области с сингулярностью напряжений в вершине трещины.

Моделирование трещиностойкости композиционных материалов и адгезионных соединений на основе модели концевой области трещины состоит из трёх основных этапов:

- а) определение закона деформирования связей в концевой области трещины;
- б) анализ напряжённого состояния в концевой области трещины;
- в) анализ предельного равновесия трещины с учётом возможности продвижения вершины трещины и края концевой области при действии внешних нагрузок и усилий, возникающих в связях.

Определение напряжённого состояния в концевой области трещины со связями является важнейшим этапом моделирования. При использовании нелинейных законов деформирования связей и размере концевой области, сравнимом с размером трещины, решение задачи об определении напряжённо-деформированного состояния в концевой области трещины сводится к численному решению нелинейной системы сингулярных интегро-дифференциальных уравнений, которая имеет вид [1-3]

$$T_{ij}(s, \sigma) \frac{df_j(s)}{ds} + W_{ij}(s, \sigma) f_j(s) + \varepsilon \int_{1-d/\ell}^1 G_{ij}(s, t) f_j(t) dt = Z_i(s) \quad (i, j = 1, 2) \quad (1)$$

где  $\ell$  – полудлина трещины,  $d$  – длина концевой области трещины, параметр  $\varepsilon$  зависит от начальной жёсткости связей и жёсткостей материалов

$$\varepsilon = \frac{E_B \ell}{2\pi H} \left( \frac{k_1 + 1}{\mu_1} + \frac{k_2 + 1}{\mu_2} \right) \quad (2)$$

Здесь  $E_B$  – начальный модуль упругости связей,  $H$  – линейный размер, пропорциональный толщине зоны неоднородности на участке соединения материалов,  $k_{1,2} = 3 - 4\nu_{1,2}$  (плоская деформация) или  $k_{1,2} = (3 - \nu_{1,2}) / (1 + \nu_{1,2})$  (плоское напряжённое состояние),  $\nu_{1,2}$  и  $\mu_{1,2}$  – коэффициенты Пуассона и модули сдвига материалов подобластей 1 ( $y > 0$ ) и 2 ( $y < 0$ ), (рис.1),

$\sigma = \sqrt{q_y^2 + q_x^2}$  – модуль вектора усилий в связях. Неизвестные функции  $f_{1,2}$  в уравнении (1) связаны с нормальными  $q_y$  и касательными  $q_x$  усилиями в концевой области трещины следующим образом [1,2]:

$$f_1(s) - if_2(s) = \left( \frac{q_y(s) - iq_x(s)}{\sqrt{1-s}} \right) \left( \frac{1-s}{1+s} \right)^{i\beta}, \quad \beta = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\mu_2 k_1 + \mu_1}{\mu_1 k_2 + \mu_2} \quad (3)$$

Выражения для функций  $T_{ij}(s, \sigma)$ ,  $W_{ij}(s, \sigma)$ ,  $G_{ij}(s, t)$ ,  $Z_i(s)$  приведены в работах [1,2]. Отметим, что ядро  $G_{ij}(s, t)$  является сингулярным, а функции  $T_{ij}(s, \sigma)$ ,  $W_{ij}(s, \sigma)$  зависят также от податливости связей. После решения уравнения (1) усилия в связях определяются из соотношения (3).

**2.** Уравнения (1) представляют собой систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений (СНИДУ) с сингулярными ядрами типа Коши и могут быть решены только численно. Для их решения используется коллокационная схема с кусочно-квадратичной аппроксимацией неизвестных функций. Для дискретизации уравнения (1) участок, содержащий связи в концевой области трещины, подразделяется на одномерные квадратичные изопараметрические конечные элементы. Неизвестные функции  $f_j(s)$  аппроксимируются разложением по кусочно-непрерывным квадратичным полиномам. Обходя последовательно узловые точки и выполняя интегрирование на элементах с учётом сингулярного поведения подынтегральной функции в (1) (методика интегрирования описана в работах [1, 2]), получаем из уравнения (1) систему нелинейных алгебраических уравнений (при наличии нелинейных связей в концевой области трещины) для определения неизвестных узловых значений функции  $f_j(s)$ . Для решения нелинейной системы используется итерационная схема, аналогичная методу переменных параметров упругости [4], в форме метода касательной податливости. Первый шаг итерационного процесса состоит в решении уравнения (1) для линейно-упругих связей. Последующие итерации выполняются в том случае, если на части концевой области трещины  $u(x) > u_m$ , где  $u_m$  – значение раскрытия трещины, при котором происходит переход от линейного к нелинейному закону деформирования связей. Эффективная податливость связей в процессе решения является переменной вдоль концевой области трещины и зависит от величины модуля вектора усилий в связях, полученного на предыдущем шаге решения. Вычисление эффективной податливости выполняется подобно определению текущего модуля в методе переменных параметров упругости. Процесс последовательных приближений заканчивается, когда усилия в связях, полученные на двух последовательных итерациях, мало отличаются друг от друга.

**3.** Рассмотрим модель трещины с концевой областью на примере адгезионного соединения металла (модуль упругости  $E_1 = 135 \text{ ГПа}$ ) и полимера (модуль упругости  $E_2 = 25 \text{ ГПа}$ ) при нелинейной кривой деформирования связей в концевой области трещины. Полагаем, что на границе раздела материалов существует трещина длины  $2\ell = 10^{-3} \text{ м}$  с концевой областью, заполненной связями, с нелинейной диаграммой деформирования (начальный модуль упругости связей  $E_B = E_2$ ). Распределения усилий  $q_{x,y}$  вдоль концевой области трещины определяются из решения СНИДУ (1), причём для связей с нелинейной диаграммой деформирования решение зависит не только от параметра относительной жёсткости связей  $\varepsilon$  (см. (2)), но и вида кривой деформирования связей. Во многих практически важных случаях кривую деформирования связей можно представить в форме билинейной зависимости [2, 3]

$$\sigma(u) = \begin{cases} u(s) / c_B(s), & 0 \leq u(s) \leq u_m, \\ \frac{u_m}{c_B(s_m)(\eta - 1)} \left[ \left( \eta - \frac{u(s)}{u_m} \right) + \delta \left( \frac{u(s)}{u_m} - 1 \right) \right], & u_m < u(s) \leq u_{cr}, \end{cases} \quad \eta = \frac{u_{cr}}{u_m}, \quad \delta = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_m} \quad (4)$$

где  $c_B(s)$  – начальная податливость связей, переменная (в общем случае) вдоль концевой области трещины;  $u_m$  – значение раскрытия трещины, при котором происходит переход от

линейного к нелинейному закону деформирования связей;  $\sigma_m$  – максимальное упругое напряжение в связях, соответствующее раскрытию трещины  $u_m$ ;  $u_{cr}$  – предельная вытяжка связи, при которой происходит её разрыв;  $\sigma_{cr}$  – напряжения в связи перед разрывом.

Представленные ниже результаты расчётов получены в предположении, что начальная податливость связей постоянна вдоль концевой области трещины и определяется выражением (см. детали в работах [1-3])

$$c_B(s) = c_0 \frac{\ell}{E_B}, \quad c_0 = \frac{H}{\ell} \quad (5)$$

где  $c_0$  – относительная податливость связей. Значение раскрытия трещины, при котором происходит изменение закона деформирования связей, принималось равным  $u_m = 10^{-7} m$ . Билинейные зависимости вида (4) при  $u_m = 10^{-7} m$ ,  $\eta = 2$  и  $\delta = 0.5$  представлены на рис.2. Отметим, что для кривых упругопластического деформирования связей с упрочнением сходимость итерационного процесса решения СНИДУ является достаточно быстрой (5-20 итераций в зависимости от точности).

Ниже приведены некоторые численные результаты анализа сходимости итерационного процесса решения СНИДУ. В процессе расчётов были фиксированы: параметр, определяющий изменение кривой деформирования связей  $u_m = 10^{-7} m$ , а также податливость при упругом деформировании связей (начальная податливость)  $c_B = c_0 (\ell/E_B) = 0.1 (0.5 \cdot 10^{-3} m / 25 \cdot 10^9 Pa) = 2 \cdot 10^{-9} m \cdot MPa^{-1}$ . Максимальное упругое напряжение в связях при этом составляет

$$\sigma_m = \frac{u_m}{c_B} = 10^{-7} m / 2 \cdot 10^{-15} m \cdot Pa^{-1} = 50 MPa \quad (6)$$

В процессе расчётов варьировались параметры: 1) величина внешней нагрузки  $\sigma_0$ ;

2) параметры билинейной кривой деформирования связей (см. (4))  $\eta = \frac{u_{cr}}{u_m}$ ,  $\delta = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_m}$ .

В рамках принятой модели размер части концевой области трещины, в которой связи деформируются по нелинейному закону, зависит от начальной податливости связей. Если начальная податливость постоянна вдоль концевой области, то упругие напряжения в связях максимальны на краю концевой области [1,2]. Зависимость упругих напряжений на краю концевой области от размера концевой области трещины для указанных выше параметров материалов и связей приведена на рис. 3. Напряжения достигают наибольшей величины  $(\sigma/\sigma_0) \approx 4.74$  при  $(d/\ell) \approx 0.16$ . Соответственно, область нелинейного деформирования возникает, если внешняя нагрузка  $\sigma_0 > (\sigma_m/4.74)$ . При  $\sigma_m = 50 MPa$  получаем  $\sigma_0 \approx 11 MPa$ .

Рассмотрим закон деформирования связей при  $\delta = 1$  ( $\sigma_{cr} = \sigma_m$ ) и  $\eta = 7.5$ . Для идеально-пластических связей итерационный процесс сходится при любой допустимой внешней нагрузке. Зависимость числа итерации до достижения сходимости решения от размера концевой области трещины при различных уровнях внешней нагрузки приведена на рис. 4. При внешней нагрузке  $11 MPa \leq \sigma_0 \leq 40 MPa$  и заданных выше параметрах закона деформирования итерационный процесс сходится при любом размере концевой области. Число итераций, за которое достигается сходимость итерационного процесса, существенно зависит от величины внешней нагрузки. При увеличении внешней нагрузки возникает заметная область, в которой решение отсутствует, ввиду того, что перемещения на краю концевой области превышают величину  $u_{cr}$  ещё до достижения сходимости итерационного процесса (см. рис.5). В рамках механической модели это соответствует разрыву связей.

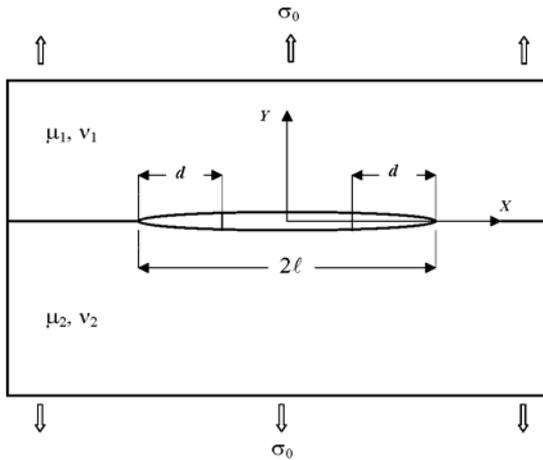


Рис.. Трещина на границе раздела материалов со связями между берегами

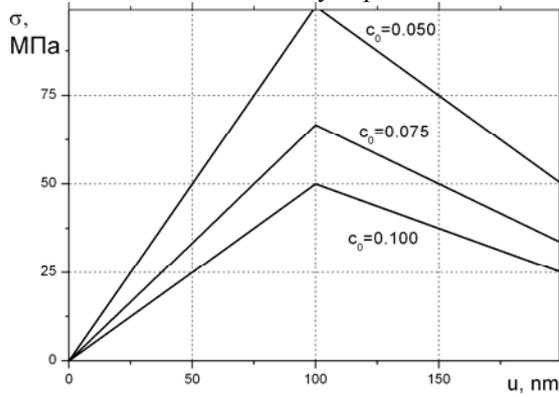


Рис.2. Билинейные кривые деформирования связей,

$$u_m = 10^{-7} m, u_{cr} = 2u_m$$

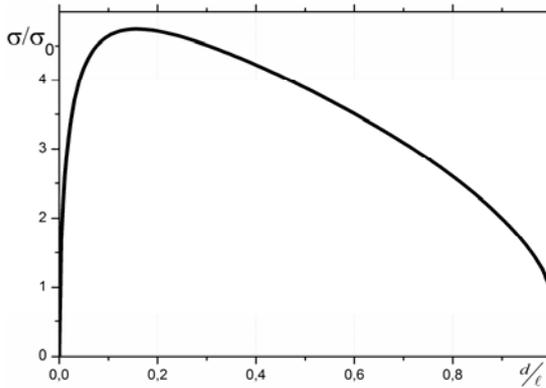


Рис.3. Напряжения на краю концевой области. Зависимость от длины концевой области.

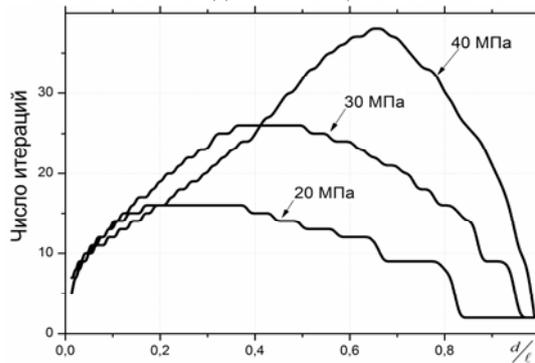


Рис. 4 Зависимость числа итераций от длины концевой области. Умеренные нагрузки

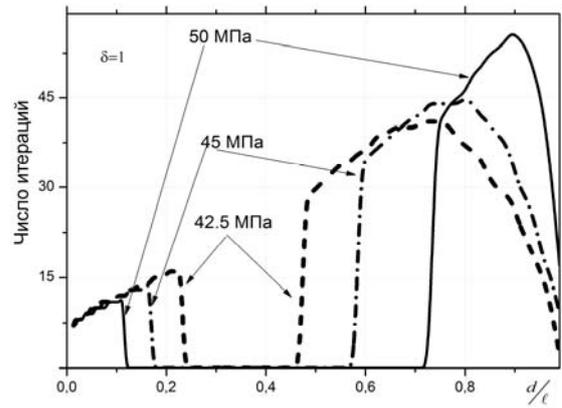


Рис.5. Зависимость числа итераций от длины концевой области. Зоны сходимости решения.

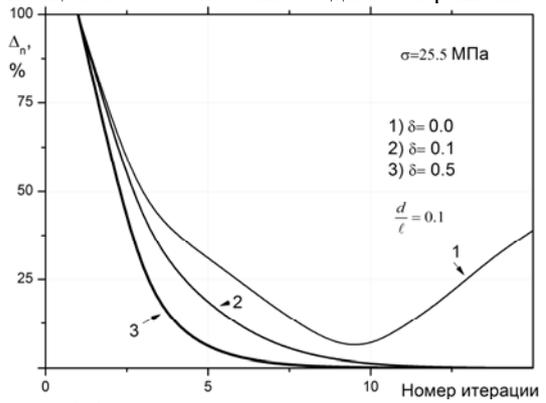


Рис.6. Зависимость погрешности решения от номера итерации.

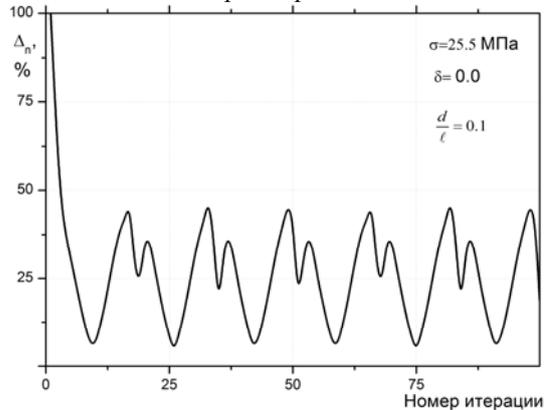


Рис. 7 Численная неустойчивость решения,  $\delta = 0$  ( $\sigma_{cr} = 0$ )

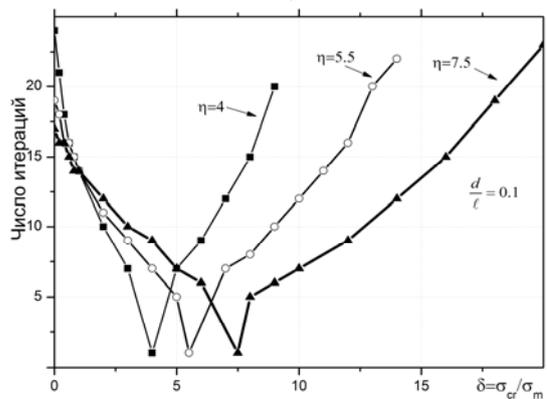


Рис. 8 Зависимость числа итераций от параметра билинейной кривой деформирования  $\delta$

Следующая серия расчётов выполнена при  $\delta = 0., 0.1, 0.5$  и  $\eta = 4$ . При таких параметрах кривой деформирования связей уровень нагрузки, при которой отсутствует сходимость решения, снижается, и при определённой внешней нагрузке может возникнуть численная неустойчивость решения. Зависимость параметра сходимости решения от номера итерации при внешней нагрузке  $\sigma_0 = 25.5 \text{ МПа}$  и  $(d / \ell) = 0.1$  приведена на рис. 6. При заданной нагрузке и  $\delta = 0.1, 0.5$  итерационный процесс является абсолютно сходящимся, а при  $\delta = 0$  ( $\sigma_{cr} = 0$ ) итерационный процесс расходится и возникает неустойчивость решения (рис 7). Зависимости числа итераций от параметра  $\delta$  при  $\sigma_0 = 25 \text{ МПа}$  и  $(d / \ell) = 0.1$  и изменении параметра  $\eta$  приведены на рис. 8. Число итераций до достижения сходимости решения достигает минимума (1 итерация) при условии  $\delta = \eta$ , что соответствует упругой деформации связей. Как при  $0 \leq \delta < 1$ , так и при  $\delta \geq 1$ , число итераций существенно зависит от величины  $\sigma_{cr}$ . При каждом значении параметра  $\eta$  расчёт выполнялся до достижения предельного значения  $\delta$ , при котором решение сходится для заданного размера концевой области. Радиус сходимости при заданном размере концевой области  $1 \leq \delta \leq \delta_{cr}$  возрастает при увеличении критического раскрытия трещины. Отметим, что физически ситуация  $\delta > \eta$  (увеличение модуля упругости связей) возможна при изменении свойств связей в процессе нагружения под воздействием внешних физических полей.

### Заключение

В работе представлена методика численного решения СНИДУ при наличии в концевой области трещины связей с нелинейной диаграммой деформирования. Для решения СНИДУ используется итерационная схема, аналогичная методу переменных параметров упругости (МППУ). Алгоритм МППУ модифицирован для задач о связях в концевой области трещины. Приведены результаты численных экспериментов по исследованию скорости сходимости итерационного процесса решения СНИДУ в зависимости от вида кривой деформирования связей. Модель трещины на границе раздела материалов со связями между берегами позволяет исследовать основные закономерности распределения усилий в связях при различных законах их деформирования, проводить анализ предельного равновесия трещины с учётом кинематического и энергетического условий разрушения.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Goldstein R. V., Perelmuter M. N. Modeling of bonding at an interface crack // International J. of Fracture. 1999. V.99. № 1–2. P.53–79.
2. Гольдштейн Р.В., Перельмутер М.Н. Трещина на границе соединения материалов со связями между берегами. // Изв. РАН. МТТ. 2001. №1. С. 94-112.
3. Гольдштейн Р.В., Перельмутер М.Н. Моделирование трещиностойкости композиционных материалов // Вычислительная механика сплошных сред. 2009. Т.2. № 2. С.22-39.
4. Биргер И.А. Расчёт конструкций с учётом пластичности и ползучести. // Изв. АН СССР. Механика. 1965. №2. С.113–119.

### Сведения об авторе:

**Перельмутер Михаил Натанович** – старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, 119526, Россия,  
**e-mail:** [perelm@ipmnet.ru](mailto:perelm@ipmnet.ru)

## ВЛИЯНИЕ СТАРЕНИЯ НА ДИССИПАТИВНЫЕ СВОЙСТВА БЕТОНА

Петросян Т.Л.

Для проектирования и расчёта конструкций необходимо знание о диссипативных свойствах материалов.

Во многих работах ([1–6] и др.) при рассмотрении рассеяния механической энергии и затухания собственных колебаний делается попытка найти связь между рассеянием энергии и параметрами структуры материала. В работе [7] показано, что явление рассеяния энергии от цикла к циклу изменяется существенно и, следовательно, параметры нагружения сильно влияют на величину коэффициента поглощения. В работе [8] на основе данных о ползучести материала при использовании теории старения и теории наследственности построены петли гистерезиса в сравнении с экспериментальными данными при малоцикловой ползучести, и на примере грунтов показано, что теория наследственности в общем может быть рекомендована для описания деформаций и поглощения энергии. В работе [9] дан анализ зависимости коэффициента поглощения от периода циклических нагружений, степени асимметрии цикла и от номера цикла для материала, деформирующегося согласно линейной теории наследственности. В рассмотренных работах рассматривался нестареющий материал.

Целью настоящей работы является исследование влияния старения на диссипативные свойства бетона.

Многочисленные опыты показывают, что модуль упруго-мгновенной деформации бетона  $E(\tau)$  с увеличением возраста бетона  $\tau$  монотонно растёт, асимптотически приближаясь к предельному значению модуля упругости  $E_0$  для бетона весьма зрелого возраста. Для аналитического описания закона изменения модуля мгновенной деформации бетона  $E(\tau)$  во времени принята экспоненциальная зависимость [10]

$$E(\tau) = E_0(1 - \beta e^{-\gamma\tau}) \quad (1)$$

где  $E_0$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  – некоторые константы, значения которых определяются из эксперимента.

Закон изменения меры ползучести бетона представлен в общем случае выражением вида [10]

$$c(t, \tau) = \varphi(\tau) \left[ 1 - e^{-\alpha(t-\tau)} \right] \quad (2)$$

где

$$\varphi(\tau) = c_0 + \frac{A}{\tau + B}$$

Выражение (2) дает достаточно близкое совпадение с экспериментальными кривыми ползучести бетона как в старом, так и в молодом его возрасте, а также определяет основные свойства явления ползучести бетона во времени, а именно его старение и наследственность [10, 11].

Учитывая линейную зависимость между упруго-мгновенными деформациями и напряжениями и пользуясь принципом суперпозиций, получим интегральное уравнение нелинейной теории наследственности с учётом старения при одноосном напряжённом состоянии, предложенное Н.Х. Арутюняном

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^t \sigma(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} \right] d\tau - \int_{\tau_1}^t F(\sigma(\tau)) \frac{\partial c(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (3)$$

где  $\tau_1$  – возраст бетона.

Рассмотрим действие циклического нагружения

$$\sigma(t) = \sigma_0 \sin(\omega t + \varphi_0) + \sigma_1 \quad (4)$$

где  $\sigma_1$  – постоянное слагаемое напряжения,  $\varphi_0$  – начальная фаза.

Для определения площади петли гистерезиса  $\Delta W(n)$  используется формула [8]

$$\Delta W(n) = \int_{T_n}^{T(n+1)} \sigma(t) \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial t} dt, \quad (5)$$

где  $T$  – период цикла, определяемый формулой

$T = 2\pi/\omega$ , а  $n$  – номер цикла.

Формула (5), естественно, не предусматривает замкнутости кривой гистерезиса и при  $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$  фактически описывает площадь между кривыми нагружения, разгрузки и осью  $t$ .

При использовании (1), (2), (4) и (5) для площади петли гистерезиса, согласно теории наследственного старения (3), будем иметь

$$\begin{aligned}
\Delta W(n) = & \int_{T_n}^{T(n+1)} \frac{[\sigma_0 \sin(\omega t + \varphi_0) + \sigma_1] \sigma_0 \cdot \omega \cos(\omega t + \varphi_0)}{E_0(1 - \beta e^{-\gamma t})} dt + \\
& + \int_{T_n}^{T(n+1)} \frac{A\alpha t [\sigma_0 \sin(\omega t + \varphi_0) + \sigma_1]^2}{(t + B)^2} dt + \int_{T_n}^{T(n+1)} \frac{AB\alpha [\sigma_0 \sin(\omega t + \varphi_0) + \sigma_1]}{(t + B)^2} dt + \\
& + (1 - \alpha\tau - B\alpha) \int_{T_n}^{T(n+1)} \left[ [\sigma_0 \sin(\omega t + \varphi_0) + \sigma_1] \int_{\tau_1}^t \frac{A\alpha [\sigma_0 \sin(\omega\tau + \varphi_0) + \sigma_1] e^{-\alpha(t-\tau)}}{(\tau + B)^2} d\tau \right] dt + \\
& + c_0 e^{\alpha\tau_1} e^{-\alpha T n} (1 - e^{-\alpha T}) \left( \frac{\alpha\omega\sigma_0}{\alpha^2 + \omega^2} \cos\varphi_0 + \frac{\alpha^2\sigma_0}{\alpha^2 + \omega^2} \sin\varphi_0 + \sigma_1 \right) \times \\
& \times \left( \frac{\alpha^2\sigma_0}{\alpha^2 + \omega^2} \sin(\omega\tau_1 + \varphi_0) - \frac{\alpha\omega\sigma_0}{\alpha^2 + \omega^2} \cos(\omega\tau_1 + \varphi_0) + \sigma_1 \right) + \\
& + \frac{c_0\alpha\sigma_0^2 T}{2} \left( 1 - \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \omega^2} \right)
\end{aligned} \tag{6}$$

Рассмотрим определение коэффициента поглощения  $\psi(n)$  в форме [5]

$$\psi(n) = \frac{\Delta W(n)}{W(n)} \tag{7}$$

где  $\Delta W(n)$  – площадь петли гистерезиса,  $W(n)$  – работа в процессе нагружения, определяемая так:

$$W(n) = \int_{T_n}^{T(n+1/2)} \sigma(t) \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial t} dt \tag{8}$$

Для расчёта  $W(n)$  согласно [3] при использовании (1), (2), (4) и (8) получим формулу:

$$\begin{aligned}
W(n) = & \int_{T_n}^{T(n+1/2)} \frac{[\sigma_0 \sin(\omega t + \varphi_0) + \sigma_1] \sigma_0 \omega (\omega t + \varphi_0)}{E_0(1 - \beta e^{-\gamma t})} dt + \\
& + \int_{T_n}^{T(n+1/2)} \frac{A\alpha t [\sigma_0 \sin(\omega t + \varphi_0) + \sigma_1]^2}{(t + B)^2} dt + \int_{T_n}^{T(n+1/2)} \frac{AB\alpha [\sigma_0 \sin(\omega t + \varphi_0) + \sigma_1]}{(t + B)^2} dt + \\
& + (1 - \alpha\tau - B\alpha) \int_{T_n}^{T(n+1/2)} \left[ [\sigma_0 \sin(\omega t + \varphi_0) + \sigma_1] \int_{\tau_1}^t \frac{A\alpha [\sigma_0 \sin(\omega\tau + \varphi_0) + \sigma_1] e^{-\alpha(t-\tau)}}{(\tau + B)^2} d\tau \right] dt +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{c_0 \alpha \sigma_0^2 T}{4} \left( 1 - \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \omega^2} \right) - \frac{2c_0 \alpha^2 \sigma_0 \sigma_1}{\omega(\alpha^2 + \omega^2)} (\alpha \cos \varphi_0 + \omega \sin \varphi_0) + \\
& + \frac{2c_0 \alpha \sigma_0 \sigma_1 \cos \varphi_0}{\omega} + c_0 e^{\alpha \tau_1} e^{-\alpha T n} \left[ \frac{\alpha \omega \sigma_0}{\alpha^2 + \omega^2} \cos \varphi_0 (1 + e^{-\alpha T/2}) + \right. \\
& \left. + \frac{\alpha^2 \sigma_0}{\alpha^2 + \omega^2} \sin \varphi_0 (1 + e^{\alpha T/2}) + \sigma_1 (1 - e^{-\alpha T/2}) \right] \times \\
& \times \left[ \frac{\alpha^2 \sigma_0}{\alpha^2 + \omega^2} \sin(\omega \tau_1 + \varphi_0) - \frac{\alpha \omega \sigma_0}{\alpha^2 + \omega^2} \cos(\omega \tau_1 + \varphi_0) + \sigma_1 \right] \quad (9)
\end{aligned}$$

Ниже приведены графики зависимостей коэффициента поглощения  $\psi$  от номера цикла нагружения (рис.1) при разных возрастах бетона и от возраста для разных циклов нагружения (рис.2), построенные, согласно формуле (7), на основе экспериментальных данных, полученных в работе [11].

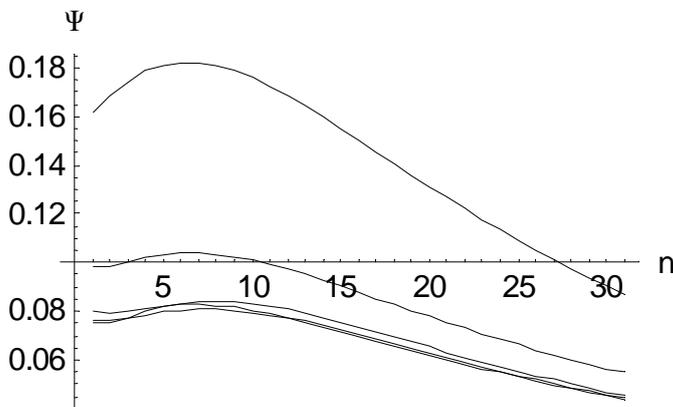


Рис. 1. Графики зависимости коэффициента поглощения от номера цикла при разных возрастах бетона

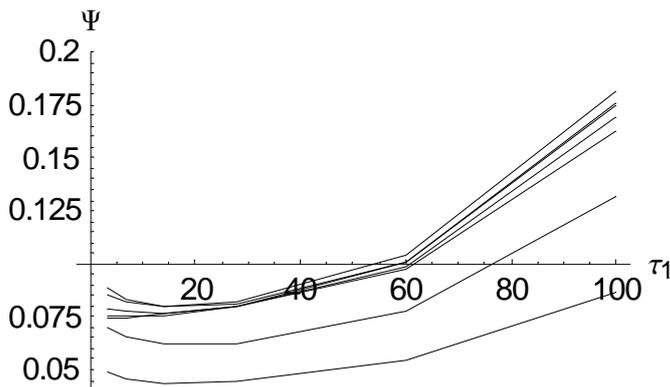


Рис. 2. Графики зависимости коэффициента поглощения от возраста бетона при разных циклах нагружения.

Как можно заключить из данных, приведённых на рис.1 и 2, коэффициент поглощения у стареющего материала с возрастанием номера цикла  $n$  вначале растёт, затем убывает, а чем материал имеет больший возраст, тем коэффициент поглощения растёт.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Зинер С. Упругость и неупругость металлов. //В сб.: “Упругость и неупругость металлов” М.: Изд. Иностран. лит., 1954. С.9–168.
2. Гурев А.В., Мирошников Э.В. О форме механического гистерезиса и влияние предварительной пластической деформации на рассеяние энергии. Киев: Наукова Думка, 1974. С.203–209.
3. Мицкевич З.А. Исследование внутреннего поглощения в металлах. //Изв. высших учебных заведений. М.: Машиностроение, 1961. №6. С.749–751.
4. Давиденков Н.Н. О рассеянии энергии при вибрациях. // Изв. АН СССР. ЖТФ. 1938. Вып.6. Т.8. С.483–495.
5. Сорокин Е.С. К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем, М. Госстройиздат, 1960. 131с.
6. Шилькрут Д.И. Единая реологическая гипотеза для описания совместного влияния гистерезиса и наследственных явлений на колебательные процессы в не вполне упругих системах. Рассеяние энергии при колебаниях упругих систем. Киев: Изд-во АН УССР. 1963. С.93–109.
7. Петросян Т.Л. Экспериментальное исследование влияния степени асимметрии цикла на формы и площади петли гистерезиса водонасыщенных глинистых грунтов при компрессии. //Изв. НАН Армении. Науки о Земле. 1993. Т.46. №2. С.60–63.
8. Петросян Т.Л., Симонян А.М. Исследование гистерезиса при малоцикловой ползучести. //Изв. НАН Армении. Механика. 2007. Т.60. №2. С.114–121.
9. Симонян А.М., Петросян Т.Л. Исследование гистерезисных энергетических потерь в зависимости от характеристик периодического нагружения на базе теории наследственности. //Изв. НАН Армении. Механика. 2011. Т.64. №2. С.73–77.
10. Арутюнян Н.Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М.–Л.: Гостехтеориздат, 1952. 323с.
11. Карапетян К.С. Влияние старения бетона на зависимость между напряжениями и деформациями ползучести. //Изв. АН Арм.ССР. Сер. физ.-мат. наук. 1959. Т.12. №4. С.57–88.

### Сведения об авторе

**Петросян Тигран Людвигович** – Научный сотрудник Института механики НАН РА, к. т. н.

Адрес. Ереван, Джрвеж ул 10, дом 21.

Тел. (010) 67- 43-04 д. (099) 16-50-38

**E-mail:** tpetrosyan@mail.ru

# О РАВНОВЕСИИ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО-НАПРЯЖЁННОГО УПРУГОГО СЛОЯ С ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ТРЕЩИНОЙ В СРЕДИННОЙ ПЛОСКОСТИ

И.М. Пешхоев

Рассматривается задача теории трещин о нагружении нормальным давлением берегов плоской эллиптической трещины, расположенной в срединной плоскости упругого слоя. Под действием нагрузки трещина находится в раскрытом состоянии. Слой предварительно подвергнут однородному двухосному растяжению или сжатию вдоль плоскости трещины. Грани слоя после его преднапряжения опираются о жёсткое основание без трения. Рассмотрена модель несжимаемого неогуковского материала [1]. Задача сведена к решению интегрального уравнения (ИУ). Рассмотрены случаи, когда коэффициенты предварительного растяжения равны или мало различаются. Построено асимптотическое решение [2] в виде разложения по двум параметрам: большому параметру относительной толщины слоя и малому параметру разности коэффициентов предварительного растяжения. Показано, как и в случае равных коэффициентов [3, 4], что начальное напряжение не меняет порядка особенности поля напряжений вблизи ребра трещины и влияет лишь на коэффициент интенсивности нормальных напряжений. Аналогичные задачи для случая равных коэффициентов предварительной деформации в теле, содержащем круглую трещину, рассмотрены в работах [4–7]. Построено [6] решение осесимметричной задачи для слоя при различных условиях на его гранях, показана возможность [7] использования решения задачи о трещине в анизотропном материале. Построено [8] решение осесимметричной задачи в случае радиальной предварительной конечной деформации. В работе [9] для предварительно напряжённого упругого тела, ослабленного плоской эллиптической трещиной, построено точное решение в случае, когда коэффициенты предварительного растяжения равны и асимптотическое решения, когда коэффициенты предварительного растяжения мало отличаются. В работе [10] построено асимптотическое решение для задачи о равновесии упругого слоя, ослабленного плоской эллиптической трещиной. Пространственная контактная задача для предварительно напряжённого упругого тела впервые рассмотрена в [11], построено асимптотическое решение. Пространственные контактные задачи для предварительно напряжённого несжимаемого упругого слоя рассмотрены в [12,13].

1. Рассмотрим упругий слой толщиной  $2h$ , заключенный между плоскостями  $z = \pm h$ . На бесконечности в двух взаимно-перпендикулярных направлениях действуют равномерные нагрузки  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$ , вызывающие конечную деформацию неогуковского тела. В срединной плоскости  $z = 0$  слоя расположена трещина, занимающая в плане после преднапряжения эллиптическую область  $\Omega: x^2/a^2 + y^2/a^2 \leq 1$ . Из соотношений теории малых деформаций, наложенных на конечную деформацию [1], вытекают уравнения равновесия, описывающие деформацию предварительно напряжённого тела в случае неогуковского материала [1]:

$$\lambda_1^2 \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} + \lambda_2^2 \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} + \lambda_3^2 \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} + \frac{2}{G} \text{grad } q = 0, \quad \text{div } L = 0 \quad (1.1)$$

Здесь  $L = \{u, v, w\}$  — вектор добавочных перемещений,  $x, y, z$  — декартовы координаты в деформированном состоянии,  $q$  — функция добавочного давления,  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  — коэффициенты предварительного растяжения вдоль координатных осей,  $G$  — постоянная материала. Так как материал несжимаем, выполняется [1]  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$ .

В силу симметрии рассмотрим часть слоя  $0 \leq z \leq h$ . Для нагрузки, приложенной к берегам трещины, введём обозначение  $\sigma_z = -p(x, y)$ . Тогда краевые условия при  $z = 0$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \\ q + G\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2} \frac{\partial w}{\partial z} &= -p, \quad (x, y) \in \Omega; \quad w = 0, \quad (x, y) \notin \Omega \end{aligned} \quad (1.2)$$

Для границы  $z = h$  слоя рассмотрим следующие краевые условия:

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad w = 0 \quad (1.3)$$

2. Следствием уравнения (1.1) является уравнение Лапласа для функции  $q(x, y, z)$ , которое можно использовать для определения функции добавочного давления. Применим к уравнению (1.1), уравнению Лапласа  $\Delta q = 0$  и граничным условиям (1.2), (1.3) двумерное интегральное

преобразование Фурье. Для трансформант Фурье получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} d^2 u^*/dz^2 - \lambda_1^2 \lambda_2^2 v^2 u^* = -2i\alpha \lambda_1^2 \lambda_2^2 q^*/G, \\ d^2 v^*/dz^2 - \lambda_1^2 \lambda_2^2 v^2 v^* = -2i\beta \lambda_1^2 \lambda_2^2 q^*/G, \\ d^2 w^*/dz^2 - \lambda_1^2 \lambda_2^2 v^2 w^* = -2i\lambda_1^2 \lambda_2^2 G^{-1} dq^*/dz, \quad v^2 = \lambda_1^2 \alpha^2 + \lambda_2^2 \beta^2 \end{cases} \quad (2.1)$$

$$i\alpha u^* + i\beta v^* + dw/dz = 0 \quad (2.2)$$

$$d^2 q^*/dz^2 - \kappa^2 q^* = 0, \quad \kappa^2 = \alpha^2 + \beta^2 \quad (2.3)$$

Краевые условия (1.2) преобразуются в условия для образов Фурье при  $z = 0$

$$\begin{aligned} i\alpha w^* + du^*/dz = 0, \quad i\beta w^* + dv^*/dz = 0 \\ q^* + G\lambda_1^2 \lambda_2^2 dw^*/dz = -p^*, \quad (x, y) \in \Omega; \quad w^* = 0, \quad (x, y) \notin \Omega \end{aligned} \quad (2.4)$$

Краевые условия (1.3) при  $z = h$  в образах Фурье принимают вид:

$$i\alpha w^* + du^*/dz = 0, \quad i\beta w^* + dv^*/dz = 0, \quad w^* = 0, \quad (2.5)$$

Общее решение уравнения (2.3) имеет вид

$$q^*(\alpha, \beta, z) = q_1(\alpha, \beta) e^{-\kappa z} + q_2(\alpha, \beta) e^{\kappa z} \quad (2.6)$$

Подставляя (2.6) в систему (2.1), находим её общее решение:

$$\begin{aligned} (u^*(\alpha, \beta, z), v^*(\alpha, \beta, z), w^*(\alpha, \beta, z)) = (u_1(\alpha, \beta), v_1(\alpha, \beta), w_1(\alpha, \beta)) e^{-\lambda_1 \lambda_2 v z} + \\ + (u_2(\alpha, \beta), v_2(\alpha, \beta), w_2(\alpha, \beta)) e^{\lambda_1 \lambda_2 v z} + (i\alpha, i\beta, \kappa) 2\lambda_1^2 \lambda_2^2 \frac{q_1(\alpha, \beta) e^{-\kappa z} + q_2(\alpha, \beta) e^{\kappa z}}{G(\lambda_1^2 \lambda_2^2 v^2 - \kappa^2)} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Подставляя (2.7) в (2.2), находим соотношения, связывающие функцию вертикальных перемещений  $w^*(\alpha, \beta, z)$  с функциями  $u^*(\alpha, \beta, z)$  и  $v^*(\alpha, \beta, z)$ :

$$w_1 = i(\alpha u_1 + \beta v_1)/(\lambda_1 \lambda_2 v), \quad w_2 = -i(\alpha u_2 + \beta v_2)/(\lambda_1 \lambda_2 v) \quad (2.8)$$

Здесь и далее, для сокращения записи, аргументы  $\alpha, \beta$  функций  $u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2, q_1, q_2$  опущены.

Введём параметр относительной толщины  $\mu = h/a$ . Из краевых условий (2.4), (2.5), с учётом соотношений (2.8), находим зависимости функций  $u_1, u_2, v_1, v_2, q_1, q_2$  от  $p^*$ , а затем из (2.7), (2.8) при  $z = 0$  получим:

$$p^*(\alpha, \beta) = GN w^*(\alpha, \beta, 0)/2 \quad (2.9)$$

где функция  $N$  имеет вид:

$$N = \frac{\psi_1 \omega_2 \operatorname{sh}(\mu a \psi_2) + \psi_2 \omega_1 \operatorname{sh}(\mu a \psi_1)}{2\lambda_1^2 \lambda_2^2 \kappa \chi_2 \operatorname{sh}(\mu a v \lambda_1 \lambda_2) \operatorname{sh}(\mu a \kappa)} \quad (2.10)$$

$$\psi_1 = v \lambda_1 \lambda_2 + \kappa, \quad \psi_2 = v \lambda_1 \lambda_2 - \kappa, \quad \chi_1 = v^2 \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \kappa^2, \quad \chi_2 = v^2 \lambda_1^2 \lambda_2^2 - \kappa^2$$

$$\omega_1 = v^3 \lambda_1^3 \lambda_2^3 + \kappa v^2 \lambda_1^2 \lambda_2^2 + 3\kappa^2 v \lambda_1 \lambda_2 - \kappa^3, \quad \omega_2 = v^3 \lambda_1^3 \lambda_2^3 - \kappa v^2 \lambda_1^2 \lambda_2^2 + 3\kappa^2 v \lambda_1 \lambda_2 + \kappa^3$$

Можно показать, что при  $\kappa > 0, v > 0, \mu \rightarrow \infty$  функция  $N$  имеет предельное значение, которое соответствует задаче о равновесии преднапряжённого упругого пространства, ослабленного плоской трещиной [9].

Переходя в (2.9) к оригиналам Фурье, получим интегральное уравнение для определения вертикального перемещения берега трещины

$$\iint_{\Omega} \gamma(\xi, \eta) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} N e^{i[\alpha(x-\xi)+\beta(y-\eta)]} d\alpha d\beta d\Omega = \frac{4\pi^2}{G} p(x, y), \quad \gamma(x, y) = w(x, y, 0), \quad (x, y) \in \Omega \quad (2.11)$$

Предположим, что коэффициенты растяжения  $\lambda_1, \lambda_2$  мало отличаются и слой имеет достаточно большую относительную толщину, т.е.  $\lambda_1 = \lambda - \varepsilon, \lambda_2 = \lambda + \varepsilon, \varepsilon > 0, \varepsilon \ll 1, \mu \gg 1$ . Функция  $N$  для  $\kappa > 0$  может быть представлена в виде

$$N = T \kappa + \kappa \sum_{m=1}^{\infty} (n_1 e^{-2m\kappa\mu a} + n_2 e^{-2m\lambda^3 \kappa\mu a}) + M \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\kappa} \varepsilon + O(\varepsilon^2) \quad (2.12)$$

$$T = \frac{\lambda^9 + \lambda^6 + 3\lambda^3 - 1}{2\lambda^4(\lambda^3 + 1)}, \quad n_1 = \frac{(\lambda^6 + 1)^2}{\lambda^4(\lambda^6 - 1)}, \quad n_2 = -\frac{4}{\lambda(\lambda^6 - 1)}, \quad M = \frac{(\lambda^3 + 2)(\lambda^6 + 1)}{\lambda^2(\lambda^3 + 1)^2}$$

Подставив (2.12) в (2.11) и преобразуя внутренний двойной интеграл по переменным  $\alpha, \beta$  с помощью замены переменных  $\alpha = \kappa \sin(\delta), \beta = \kappa \cos(\delta)$ , получим интегральное уравнение

$$T \Delta \iint_{\Omega} \frac{\gamma(\xi, \eta)}{R} d\xi d\eta - \frac{\zeta(3)}{a^3 \mu^3} S \iint_{\Omega} \gamma(\xi, \eta) d\xi d\eta + O(\mu^{-5}) - \\ - \varepsilon M \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \iint_{\Omega} \frac{\gamma(\xi, \eta)}{R} d\xi d\eta + O(\varepsilon^2) = -\frac{\pi}{G} p(x, y) \quad (2.13)$$

где  $\zeta(n)$  — дзета-функция Римана,  $S = (\lambda^{12} + 3\lambda^6 + 4)/(4\lambda^{10})$ .

Коэффициенты  $S$  и  $M$  в уравнении (2.13) строго положительны при  $\lambda > \lambda^*$ , где  $\lambda^* = 0,666$ . При  $\lambda \rightarrow \lambda^*$  коэффициент  $T$  стремится к нулю. Физически это означает, что сжатый слой без трещины при  $\lambda \rightarrow \lambda^*$  испытывает потерю устойчивости, симметричную относительно срединной плоскости. Указанное критическое значение  $\lambda^*$  совпадает с кратностью удлинения, при котором происходит потеря устойчивости сжатого полупространства [11] и неограниченного пространства [9] из неогуковского материала.

**3. Решение ИУ.** Будем искать решение ИУ (2.13) в виде асимптотического разложения в предположении, что  $\varepsilon \rightarrow 0$  и  $\mu \rightarrow \infty$ :

$$\gamma(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_{ij}(x, y) \varepsilon^i \mu^{-j} \quad (3.1)$$

Подставив (3.1) в (2.13), получим систему интегральных уравнений

$$\begin{cases} T \Delta \iint_{\Omega} \gamma_{0,0}(\xi, \eta)/R d\xi d\eta = -\pi p(x, y)/G \\ T \Delta \iint_{\Omega} \gamma_{0,3}(\xi, \eta) d\xi d\eta = S \zeta(3) \iint_{\Omega} \gamma_{0,0}(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ T \Delta \iint_{\Omega} \gamma_{1,0}(\xi, \eta) d\xi d\eta = M (\partial^2/\partial x^2 - \partial^2/\partial y^2) \iint_{\Omega} \gamma_{0,0}(\xi, \eta)/R d\xi d\eta \\ T \Delta \iint_{\Omega} \gamma_{1,3}(\xi, \eta) d\xi d\eta = S \zeta(3) \iint_{\Omega} \gamma_{1,0}(\xi, \eta) d\xi d\eta \end{cases} \quad (3.2)$$

Применяя к системе (3.2) результаты работ [2, 9] и предполагая, что  $p(x, y) = p = \text{const}$ , найдём асимптотическую формулу решения ИУ (2.8):

$$\gamma(x, y) = \frac{pb}{2GTE} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \left( 1 - \frac{S \zeta(3) (1 - e^2)}{3\mu^3 TE} \right) \left[ 1 - \varepsilon M \frac{(2 - e^2)E - 2(1 - e^2)K}{TEe^2} \right] \quad (3.3)$$

где  $e = \sqrt{1 - b^2/a^2}$ ,  $K = K(e)$ ,  $E = E(e)$  — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно.

**4. Анализ результатов.** При  $\mu \rightarrow \infty$  формула (3.3) переходит в асимптотическое решение задачи для предварительно напряжённого упругого тела, ослабленного плоской

эллиптической трещиной [9], а в случае  $\varepsilon = 0$ ,  $\lambda = 1$  совпадает с решением задачи для упругого слоя, ослабленного плоской эллиптической трещиной [10], если для коэффициента Пуассона принять  $\nu = 1/2$ .

Рассмотрим параметр [9], характеризующий изменение коэффициента интенсивности нормальных напряжений в результате предварительной деформации

$$N_1 = K_{10}/K_{1*} = 1/T(\lambda) \quad (4.1)$$

где  $K_{10}$  — коэффициент интенсивности нормальных напряжений в окрестности контура эллиптической трещины в пространстве в случае, когда пространство подвергнуто предварительной конечной деформации и интенсивность растяжения в обоих направлениях одинакова  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ;  $K_{1*}$  — соответствует значению  $\lambda = 1$ . Также рассмотрим величину [10], характеризующую изменение коэффициента интенсивности нормальных напряжений в результате изменения толщины упругого слоя

$$N = K_1/K_{1\infty} = 1 - 2\zeta(3)(1 - e^2)/(3\mu^3 E) \quad (4.2)$$

где  $K_1$  — коэффициент интенсивности нормальных напряжений в окрестности контура эллиптической трещины в упругом слое;  $K_{1\infty}$  — предельное значение при  $\mu \rightarrow \infty$ .

Введём параметр

$$N_{1\lambda} = K_{1\mu}/K_1 = \frac{1 - S\zeta(3)(1 - e^2)/(3\mu^3 TE)}{1 - 2\zeta(3)(1 - e^2)/(3\mu^3 E)} \quad (4.3)$$

где  $K_{1\mu}$  — коэффициент интенсивности нормальных напряжений в окрестности контура эллиптической трещины в преднапряжённом слое относительной толщины  $\mu$ , когда интенсивность растяжения в обоих направлениях одинакова  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ;  $K_1$  соответствует предельному значению при  $\lambda = 1$ . Параметр  $N_{1\lambda}$  при  $\mu \rightarrow \infty$  переходит в (4.1).

Как и в случае  $\mu = \infty$  [9], двухосное предварительное растяжение ( $\lambda > 1$ ) в плоскости трещины способствует упрочнению слоя по сравнению с классическим случаем  $\lambda = 1$ , т.е. коэффициент интенсивности нормальных напряжений снижается ( $N_{1\lambda} < 1$ ), а при двустороннем сжатии ( $\lambda^* < \lambda < 1$ ) несущая способность слоя уменьшается, коэффициент интенсивности нормальных напряжений увеличивается ( $N_{1\lambda} > 1$ ).

По аналогии с (4.2) также можно ввести параметр, характеризующий изменение коэффициента интенсивности нормальных напряжений в результате изменения толщины предварительно напряжённого слоя

$$N_{1\mu} = K_{1\mu}/K_{1\infty} = 1 - S\zeta(3)(1 - e^2)/(3\mu^3 TE) \quad (4.4)$$

где  $K_{1\mu}$  — коэффициент интенсивности нормальных напряжений в окрестности контура эллиптической трещины в преднапряжённом слое относительной толщины  $\mu$ , когда интенсивность растяжения в обоих направлениях одинакова  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ,  $K_{1\infty}$  — соответствует предельному значению при  $\mu \rightarrow \infty$ . Отсюда следует, что коэффициент интенсивности нормальных напряжений в окрестности контура эллиптической трещины в предварительно напряжённом слое монотонно растёт с ростом толщины, его предельное значение соответствует предварительно напряжённому пространству. Из (4.2) следует аналогичный вывод для упругого слоя.

Автор благодарит профессоров Зубова Л. М. и Соболя Б. В. за помощь. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-08-00839-а).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
2. Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
3. Гузь А. Н. Теория трещин в упругих телах с начальными напряжениями (пространственные статические задачи) // Прикл. механика, 1981. Т.17. № 6. С. 3–20.
4. Филиппова Л. М. О влиянии начальных напряжений на раскрытие круговой трещины. //ПММ. 1983. Т.47. Вып. 2. С.286–290.
5. Филиппова Л. М. Устойчивость сжатого упругого слоя, ослабленного круговой трещиной. //ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 2. С.327–330.
6. Dhalival R. S., Singh B. M.,Rokne J. G. Axisymmetric contact and crack problems for an initially stressed neo-Hookean elastic layer// Internat. J. Engn Sci., 1980. V. 18. No. 1. P. 169-179.
7. Haughton D. M. Penny-shaped cracks in a finitely deformed elastic solid// Internat. J. Solid and Structure, 1982. V. 18. No. 8.P. 699-704.
8. Selvadurai A. R. S. The penny-shaped crack problem for a finitely deformed incompressible elastic solid// Internat. J. Fracture, 1980.V. 16. No. 4. P. 327- 333.
9. Александров В. М., Соболев Б. В. Равновесие предварительно напряженного упругого тела, ослабленного плоской эллиптической трещиной // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 2. С.348-352.
10. Сметанин Б. И., Соболев Б. В. Равновесие упругого слоя, ослабленного плоскими трещинами // ПММ. 1984. Т.48, вып. 6. С.1030-1038.
11. Филиппова Л. М. Пространственная контактная задача для предварительно напряженного упругого тела// ПММ. 1978. Т.42. Вып.6. С.1080-1084.
12. Александров В. М. Пространственные контактные задачи для преднапряженного несжимаемого упругого слоя //Изв. РАН. МТТ. 2011. № 2. С.141-146.
13. Александров В. М., Порошин В. С. Контактная задача для предварительно напряжённого физически нелинейного упругого слоя //Изв. РАН. МТТ. 1986. № 6. С.79–85.
14. Брычков Ю. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука, 1977. 287с.

### **Сведения об авторе:**

**Пешхоев Иса Мусаевич** — доцент кафедры «Информационные технологии», Донской государственной технической университет, факультет «Информатика и вычислительная техника», 8 928 172 48 53, **E-mail:** [peshkhoev@rambler.ru](mailto:peshkhoev@rambler.ru)

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВИБРОУСТОЙЧИВОСТИ ДИСКОВОГО ТОРМОЗА АВТОМОБИЛЯ С АНТИБЛОКИРОВОЧНОЙ СИСТЕМОЙ

Погосян А.К., Бахсян А.О.

На основе математической модели торможения автомобиля с учётом влияния антиблокировочной тормозной системы, описывающей колебательный процесс тормозных колодок, разработана расчётная методика виброустойчивости дисково-колодочного тормоза, в результате которой предложен алгоритм решения дифференциальных уравнений, описывающих динамику процесса торможения автомобиля. Рассмотренная модель тормозной динамики устанавливает взаимодействие между тормозным моментом и моментом сцепления колеса с дорогой. Проведены расчёты виброустойчивости дисково-колодочного тормоза с учётом влияния работы антиблокировочной тормозной системы.

Для обеспечения управляемости и безопасности в процессе торможения автомобиль оснащается антиблокировочной тормозной системой (АБС), которая, изменяя давление на тормозную колодку, предупреждает скольжение колеса относительно дороги. Антиблокировочная тормозная система обеспечивает максимальное замедление и уменьшает тормозной путь автомобиля. Улучшая тормозные характеристики автомобиля, антиблокировочная тормозная система вместе с этим увеличивает нагруженность тормозного устройства, что сказывается на надёжности его работы [1]. Одним из значительных характеристик тормозного устройства автомобиля, влияющая на плавность движения и устойчивость работы, является виброустойчивость. Возникающие в тормозных устройствах фрикционные колебания, которые обусловлены поверхностными неровностями тормозного диска, неблагоприятно воздействуют на их виброустойчивость и препятствуют надёжной работе.

Работа посвящена разработке расчётной методики исследования рабочих характеристик дисково-колодочного тормоза автомобиля, оснащённой антиблокировочной тормозной системой.

Существенное влияние на виброколебания, возникающие в тормозном устройстве автомобиля при торможении оказывают не только силы, действующие именно в тормозном устройстве, а также силы, действующие на весь автомобиль. По этой причине для расчёта виброустойчивости тормозного устройства выбрана расчётная модель автомобиля в целом (рис.1), которая описывает движение автомобиля по ровной местности в процессе торможения, учитывая перераспределение динамической нагрузки на колёса.

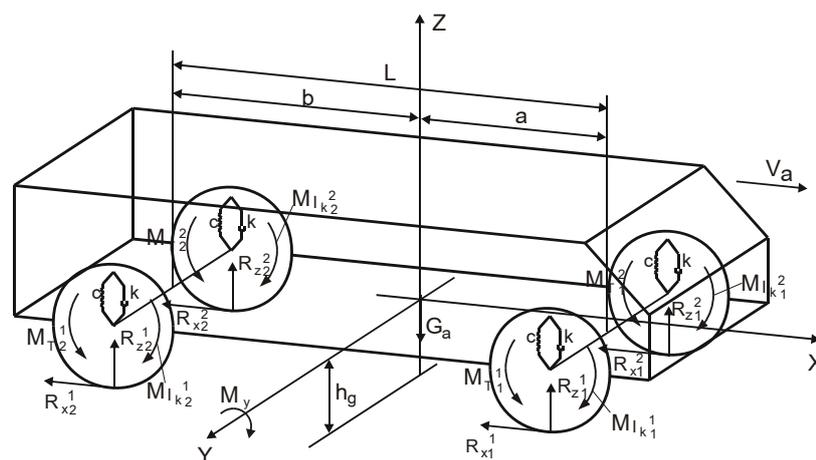


Рис.1. Расчётная схема торможения автомобиля

Пренебрегая силами сопротивления качению и сопротивления воздуха, которые в общем балансе сил не превышают 3–5%, уравнение движения центра масс автомобиля описывается следующим уравнением [2]:

$$M_a j_x = \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 R_{xk}^i, \quad (1.1)$$

где  $M_a$  – масса автомобиля,  $j_x$  – замедление автомобиля,  $R_{xk}$  – касательная реакция в контакте колеса с дорогой,  $k=1$  – передний мост,  $k=2$  – задний мост,  $i=1$  – левое колесо,  $i=2$  – правое колесо. При торможении перемещение центра тяжести автомобиля вдоль оси  $z$ , перпендикулярной к поверхности дороги, определяется:

$$M_a j_z = \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 R_{zk}^i - M_a g, \quad (1.2)$$

где  $j_z$  – замедление вдоль оси  $z$ ,  $R_{zk}$  – нормальная реакция на колесо автомобиля,  $g$  – ускорение свободного падения.

Угол дифферента определяется уравнением моментов относительно горизонтальной оси  $y$ , проходящей через центр тяжести автомобиля:

$$I_y \varepsilon_y = \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 R_{xk}^i (h_g - z) - (R_{z1}^1 + R_{z1}^2) a + (R_{z2}^1 + R_{z2}^2) b, \quad (1.3)$$

где  $I_y$  – момент инерции автомобиля относительно оси  $y$ ,  $\varepsilon_y$  – угловое замедление автомобиля относительно оси  $y$ ,  $h_g$  – высота центра тяжести автомобиля,  $a$ ,  $b$  – расстояние от центра тяжести автомобиля соответственно до передней и задней осей.

Угловая скорость колеса определяется из условия силового равновесия:

$$I_k \frac{\partial \omega_k}{\partial t} = M_T - R_x r_d, \quad (1.4)$$

где  $I_k$  – момент инерции колеса,  $M_T$  – тормозной момент.

Для расчёта виброустойчивости тормозного устройства автомобиля выбрана колебательная модель дисково-колодочного тормоза [3], которая представляет собой вращающийся диск с моментом инерции  $I$ , на котором установлены колодки с массой  $m$ , рассматриваемые как твёрдое тело, упруго-контактируемое с диском и взаимосвязанное с неподвижным корпусом тормозного устройства упругой связью, смоделированной в виде пружины (рис.2).

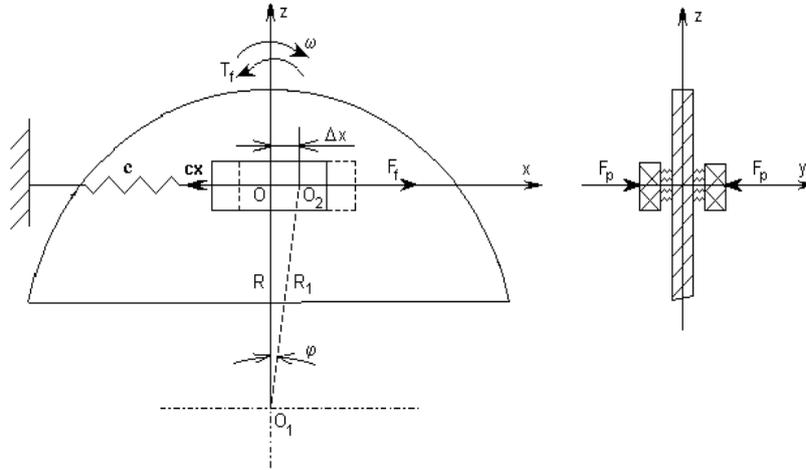


Рис.2. Расчётная модель колебательного процесса дисково-колодочного тормоза

Колебательный процесс дисково-колодочного тормозного устройства автомобиля описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} I_k \cdot \ddot{\varphi} = -T_f \\ m \cdot \ddot{x} = -c \cdot x + F_f, \end{cases} \quad (1.5)$$

где  $T_f$  и  $F_f$  – тормозной момент и сила трения в сопряжении,  $cx$  – сила упругости крепления колодки с корпусом,  $\ddot{x}$  и  $\ddot{\varphi}$  – угловые ускорения колодки и тормозного диска.

Давление, действующее на тормозные колодки, в данной системе уравнений (1.5) принимается постоянным, т.е. не учитывается влияние антиблокировочной системы, основная цель которой – предотвращение блокировки колеса посредством изменения давления. В связи с этим, для исследования колебаний, возникающих в тормозном устройстве во время торможения, уравнения (1)-(5) систематизируются с условием взаимозависимости силы сцепления колеса с дорогой и угловой скорости тормозного диска. Рассмотренная модель тормозной динамики учитывает связь между тормозным моментом и моментом сцепления колеса с дорогой:

$$\begin{cases} M_a \ddot{X} = R_{x1}^1 + R_{x2}^1 + R_{x1}^2 + R_{x2}^2 \\ M_a \ddot{z} = R_{z1}^1 + R_{z2}^1 + R_{z1}^2 + R_{z2}^2 - M_a g \\ I_y \ddot{\phi}_y = (R_{x1}^1 + R_{x2}^1 + R_{x1}^2 + R_{x2}^2)(h_g - z) - (R_{z1}^1 + R_{z2}^1)a + (R_{z1}^2 + R_{z2}^2)b \\ I_k \ddot{\phi} = T_f - R_x r_d \\ m \ddot{x} = -cx + F_f \end{cases} \quad (1.6)$$

Решение системы уравнений (1.6) произведено численным методом, пакетом специального программного обеспечения MathCAD, результаты которого в графическом виде представлены на рис.3.

В процессе торможения автомобиля, оснащённого антиблокировочной системой, увеличивается амплитуда колебаний колодки (рис.3а), а высокочастотная составляющая колебаний уменьшается. Частота вибраций в начальный момент торможения колеблется в пределах 100-200 Гц, а в конечный момент достигает до 1000 Гц. Колебания тормозного момента (рис.3б) являются следствием регулировки давления на колодках с целью предотвращения блокировки колес, антиблокировочной системой, что безусловно повышает эффективность торможения автомобиля, сокращая его тормозной путь и увеличивая замедление.

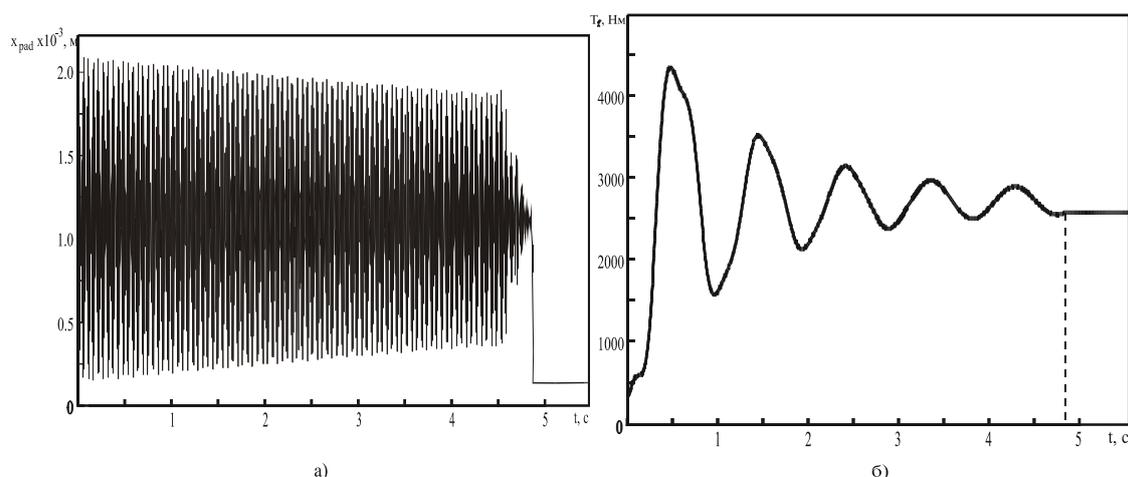


Рис.3. Спектр колебаний тормозной колодки (а) и изменение тормозного момента (б) в зависимости от времени торможения

Расчётная модель предоставляет возможность исследования виброустойчивости тормоза с применением антиблокировочной системы, а также эксплуатации автомобиля в разных дорожных условиях.

Проведены соответствующие стендовые экспериментальные исследования дисково-колодочного тормоза, оснащённого имитатором антиблокировочной тормозной системы. Исследования проведены на безасбестовых фрикционных материалах типа Бастенит [4]. Расчетные значения виброперемещений колодки не превышают результатов, полученных экспериментальным путем, более чем на 25%. При этом, кривые почти повторяют друг друга за время цикла торможения (рис.4).

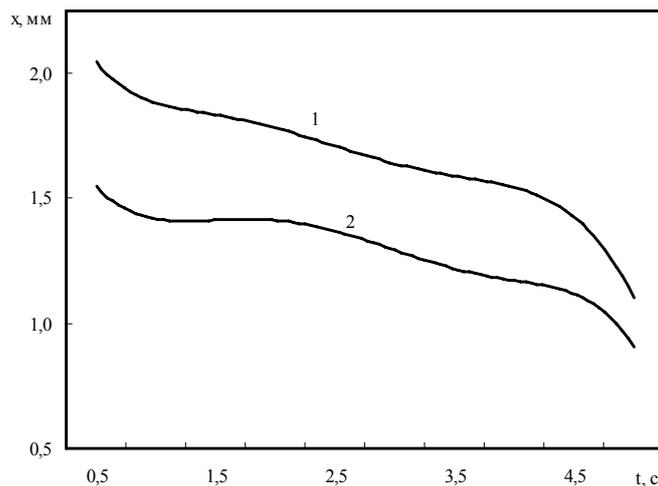


Рис.4. Аналитические (1) и экспериментальные (2) кривые виброперемещения колодки

Анализ результатов исследований показывает, что фрикционные колебания, возникающие в тормозных устройствах, оснащённых антиблокировочной тормозной системой, отличаются от колебаний в обычных тормозных устройствах, амплитуда которых до 4 раз больше амплитуды колебаний в обычных тормозных устройствах. Одновременно высокочастотная составляющая колебаний до 3 раз меньше, при этом наибольшая частота проявлялась в момент остановки тормозного диска. Расчётные данные величины виброперемещения колодки тормозного устройства с антиблокировочной тормозной системой на 20% больше.

Математическая модель достаточно полно отражает динамику колебаний в период торможения и расхождение расчётных данных с экспериментальными результатами не превышает 25%. Она даёт возможность исследовать динамику колебательного спектра в процессе торможения при разных дорожных условиях. Расчётная методика может быть использована для оценки виброустойчивости как разрабатываемых, так и существующих тормозов. В результате могут быть модифицированы как конструкции тормозного устройства, так и разработаны новые тормозные материалы с соответствующими трибологическими характеристиками.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Фрумкин А.К., Алышев И.И., Попов А.И. Антиблокировочные и противобуксовочные системы легковых автомобилей. М.: Автомобильная промышленность, 1989.
2. Ревин А.А. и др. Антиблокировочные системы тормозов транспортных средств. М.: Воздушный транспорт, 1989.
3. Погосян А.К., Бахшян А.О., Макарян В.К. Расчёт виброустойчивости дисково-колодочного автомобильного тормоза / Труды 4-го Международного симпозиума по трибологии фрикционных материалов ЯРОФРИ, 2000, С.22-27.
4. Погосян А.К., Сысоев П.В., Меликсетян Н.Г. и др. Фрикционные композиты на основе полимеров. Минск: Информтрибо, 1992.

### Сведения об авторах

**Погосян Альберт Князевич** – член корр. НАН РА, профессор кафедры машиноведения, Государственный инженерный университет Армении, факультет механики и машиноведения, (374 10) 58 61 82; **E-mail:** [pogosian@seua.am](mailto:pogosian@seua.am)

**Бахшян Артак Оникович** – доцент кафедры наземных транспортных средств, Государственный инженерный университет Армении, факультет транспортных систем, (374 10) 72 02 51, (374 93) 73 76 54; **E-mail:** [a\\_bakhshyan@seua.am](mailto:a_bakhshyan@seua.am)

## ТРИБОЛОГИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ БЕЗАСБЕСТОВЫХ ФРИКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

**Погосян А.К., Меликсетян Н.Г.**

Показано, что работоспособность фрикционных тормозных материалов в условиях высокотемпературного трения определяется напряжённо-деформированным состоянием контактирующих тонких поверхностных слоев, в которых действуют превышающие предел прочности при срезе растягивающие и сжимающие напряжения и решающее значение имеют свойства армирующих наполнителей. Приведены результаты трибологических исследований новых безасбестовых фрикционных материалов с более термостойкими армирующими наполнителями под общим названием Бастенит на основе минералов армянского месторождения. Установлено, что они позволяют стабилизировать фрикционно-износные характеристики пары трения при поверхностных температурах 500...600 °С устранить поверхностные дефекты контактирующих деталей и термические трещины металлического контртела, уменьшить износ фрикционной накладки и контртела в 1,8 и 1,6 раза соответственно в условиях наличия влаги во фрикционном контакте, стабилизировать и повысить коэффициент трения в 1,5 раза при 400...600 °С, защитить поверхность трения контртела от коррозионного и водородного износа.

Ранее установлено, что в условиях высокотемпературного трения в тонких поверхностных слоях фрикционных тормозных материалов в направлении трения действуют остаточные растягивающие напряжения, а перпендикулярно к направлению трения – сжимающие напряжения. При этом, сжимающие напряжения по абсолютному значению меньше растягивающих. Такое напряжённое состояние поверхностных слоев – следствие их ориентации по направлению скольжения и она приводит к растрескиванию поверхности по направлению трения. Исходя из концепции усталостно-деламинационного механизма разрушения поверхностей трения, рекомендуются эти напряжения определять следующим образом [1-3]:

$$t_1 = -\frac{1 + \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma}{(1 + \operatorname{tg}^2\beta)^2}, \quad t_2 = -\frac{1 + \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma}{(1 + \operatorname{tg}^2\beta)^2} \cdot \operatorname{tg}\beta,$$

где  $t_1 = \pi \cdot \Delta h \cdot \sigma / 2P_a$  и  $t_2 = \pi \cdot \Delta h \cdot \tau / 2P_a$  характеризуют зависимости комплексов  $\sigma/P_a$  и  $\tau/P_a$  от геометрии расположения фрикционного контакта при постоянных значениях  $\Delta h$ ;  $P_a$  – удельное давление н/м;  $\gamma$  – угол трения;  $\Delta h$  – толщина рабочего слоя;  $\operatorname{tg}\beta = x/y$  – относительное расстояние от фрикционного контакта.

Для создания новых более эффективных и безасбестовых материалов необходимо выявить влияние напряжённо-деформированного состояния на работоспособность фрикционных тормозных материалов в условиях высокотемпературного трения.

По специальной программе MathCAD 2000 Professional при коэффициенте трения  $\operatorname{tg}\gamma = 0,2 \dots 0,7$  и  $\operatorname{tg}\beta = -10 \dots +10$ , рассчитывались и исследовались функции  $t_1$  и  $t_2$  (рис.1).

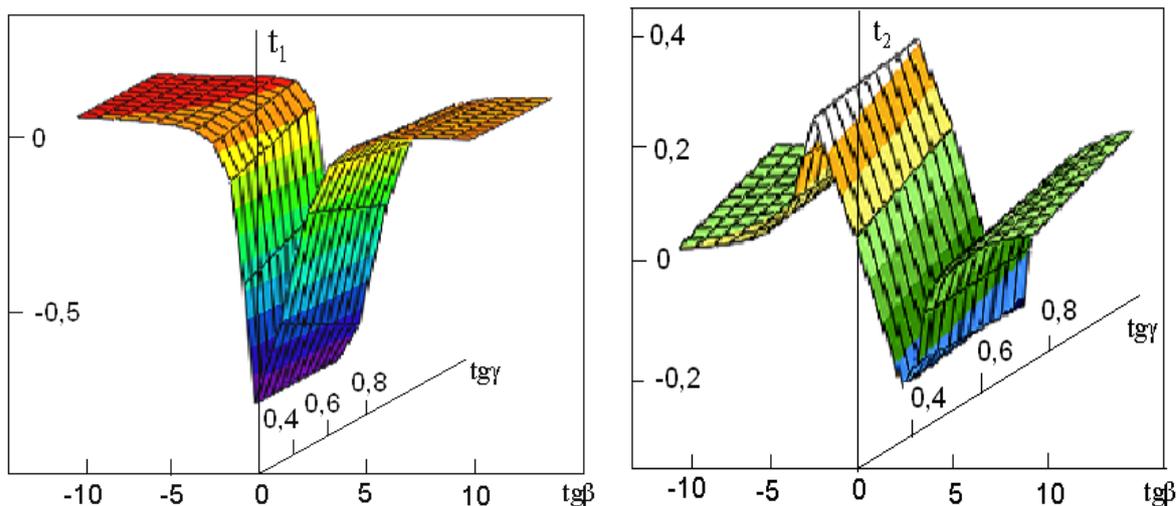


Рис.1. Результаты исследований функций  $t_1$  и  $t_2$

При этом выяснилось, что вне интервала  $-3...+3$  функции  $t_1$  и  $t_2$  принимают значения, близкие к нулю, поэтому их следует анализировать только в интервале  $-3...+3$ . Результаты расчётов функций  $t_1$  и  $t_2$  для данного интервала приведены в таблице.

Следует отметить, что экстремальное значение функция  $t_1$  принимает при  $\text{tg}\beta = 0$ , т.е. сжимающие напряжения  $\sigma$  наибольшие значения принимают в точках, находящихся на оси вектора  $P_a$ . Касательные напряжения  $\tau$  экстремальные значения принимают приблизительно при  $\text{tg}\beta=|0,5|$ , что соответствует  $\beta_0=26^\circ$ . Растрескивание рабочего слоя при таком напряжённом состоянии происходит при смыкании поверхностных трещин с подповерхностной трещиной в точках, где  $\tau$  принимает максимальное значение. Это предположение согласуется с результатами, приведёнными в работе [4], где, в частности, показано, что угол направления распространения вертикальной трещины, измеренный по отношению к вертикали, изменяется в пределах  $0...20^\circ$  и тенденция к пересечению вертикальной трещины с горизонтальной приводит к разрушению материала поверхностного слоя посредством отслаивания.

Остаточные напряжения превышают предел прочности фрикционного материала при срезе. Следовательно, для обеспечения удовлетворительной работоспособности при высоких температурах решающее значение имеют свойства армирующих наполнителей.

Таблица

Значения функций  $t_1$  и  $t_2$  при различных коэффициентах трения

tg $\beta$	tg $\gamma = 0,2$		tg $\gamma = 0,3$		tg $\gamma = 0,4$	
	$t_1$	$t_2$	$t_1$	$t_2$	$t_1$	$t_2$
-3,0	-0,004	0,012	-0,001	0,003	-0,002	0,006
-2,5	-0,009	0,020	-0,0048	0,012	-0,003	0,009
-2,0	-0,024	0,040	-0,016	0,032	-0,008	0,016
-1,5	-0,066	0,090	-0,052	0,078	-0,038	0,060
-1,0	-0,200	0,200	-0,175	0,175	-0,150	0,150
-0,5	-0,570	0,280	-0,944	0,270	-0,512	0,256
0	-1	0	-1	0	-1	0
0,5	-0,700	-0,350	-0,736	-0,368	-0,768	-0,384
1,0	-0,300	-0,300	-0,325	-0,325	-0,350	-0,350
1,5	-0,123	-0,180	-0,137	-0,206	-0,150	-0,230
2,0	-0,050	-0,112	-0,064	-0,128	-0,070	-0,140
2,5	-0,029	-0,070	-0,053	-0,080	-0,038	-0,095
3,0	-0,016	-0,040	-0,020	-0,060	-0,022	-0,066

В качестве более термостойких армирующих наполнителей выбрали базальтовые и стеклянные волокна, полученные из минералов армянского месторождения. При разработке новых фрикционных безасбестовых полимерных материалов была поставлена задача: создать композиции на базе базальтового и стеклянного волокон со стабильными трибологическими свойствами в широком диапазоне температур на поверхности трения.

В результате целенаправленного выбора связующих, порошкообразных наполнителей и минералов армянского месторождения созданы новые фрикционные безасбестовые композиционные материалы под общим названием Бастенит. На основе трёхэтапного рационального цикла экспериментального исследования [1,2] установлено, что базальтовые и стеклянные волокна являются успешными заменителями асбестовых волокон, благодаря их сравнительно высокой прочности. Разработан механизм структурообразования новых материалов, согласно которому волокна обеспечивают высокую прочность композиции, работают как самостоятельные наполнители, не находясь в химической связи с полимерным связующим, одновременно повышают трибологические характеристики материала. Результаты стендовых испытаний материалов Бастенит приведены на рис.2.

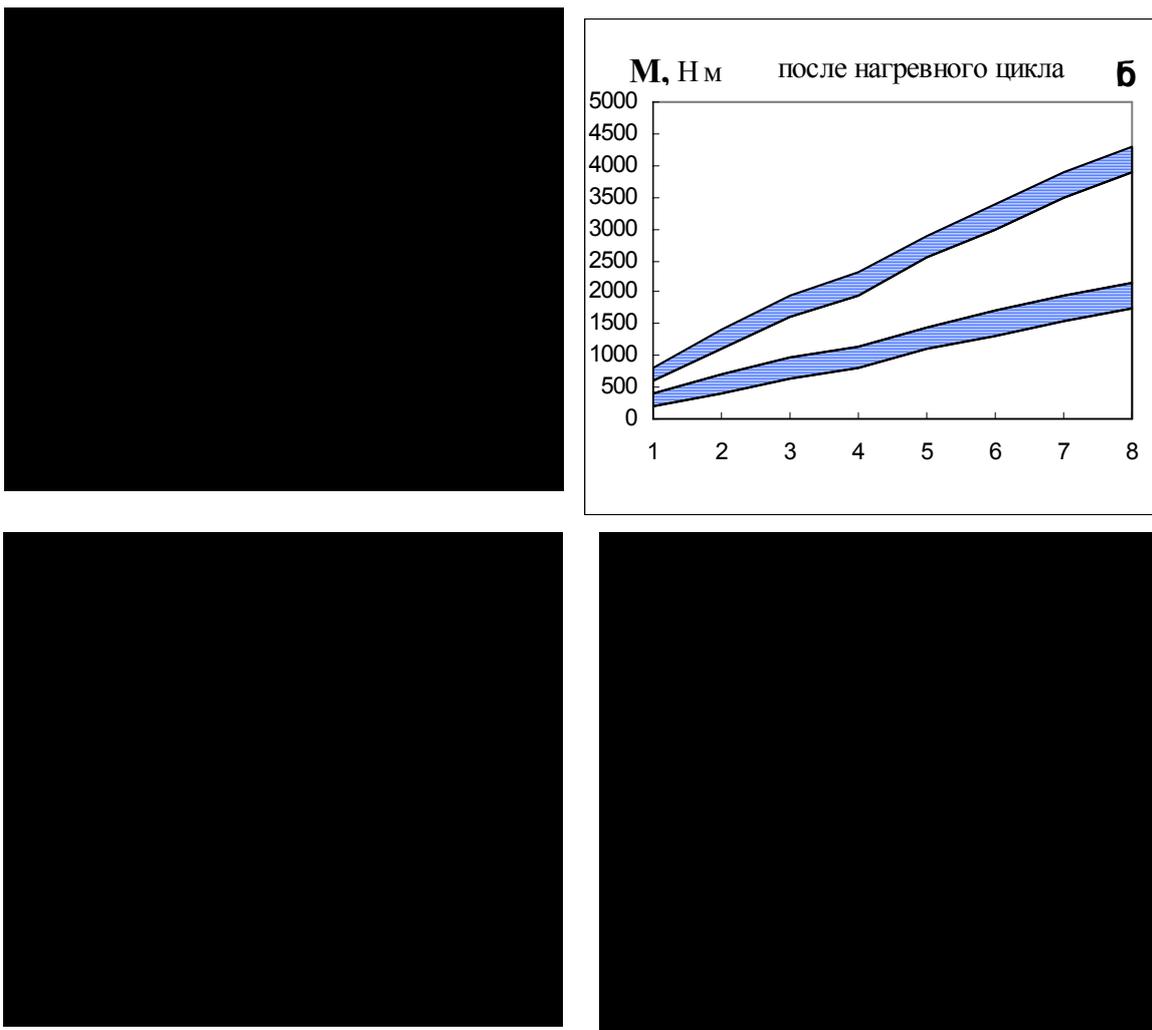


Рис.2. Зона эффективности торможения материалов Бастенит в зависимости от давления тормозного привода (а,б) и скорости передвижения автомобиля (в,г)

Тормозные колодки, изготовленные из материалов Бастенит по своим характеристикам отвечают требованиям безопасности стандарта ЕЭК ООН (Правило N13, приложение 15). При нагревном цикле разброс значений тормозного момента не превышает 15% и находится на уровне показателей [5]. Значения эффективности торможения в зависимости от давления в приводе (рис.2,а) и от скорости скольжения (рис.2,в) укладываются в зону 15%-го допуска. Показатели восстанавливаемости торможения в зависимости от давления в приводе (рис.2,б) и от скорости скольжения (рис.2,г) не отличаются от нормативных показателей стандарта [5].

Материалы Бастенит позволяют стабилизировать фрикционно-износные характеристики пары трения при поверхностных температурах 500...600 °С устранить поверхностные дефекты контактирующих деталей и термические трещины металлического контртела, уменьшить износ фрикционной накладке и контртела в 1,8 и 1,6 раза соответственно в условиях наличия влаги во фрикционном контакте, стабилизировать и повысить коэффициент трения в 1,5 раза при 400...600 °С, защитить поверхность трения контртела от коррозионного и водородного износа.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Погосян А.К., Сысоев П.В., Меликсетян Н.Г. и др. Фрикционные композиты на основе полимеров. Минск. Информтрибо, 1992. 218 с.
2. Погосян А.К. Основы трибологии (арм. яз.). Ереван: Луйс, 1994. 296с.
3. Погосян А.К., Меликсетян Н.Г., Ламбарян Н.А. Высокотемпературное разрушение поверхностных слоёв фрикционных материалов /Труды 7-го Международного Симпозиума по фрикционным изделиям и материалам «ЯРОФРИ-2008». – Ярославль: 2008. <http://www.tiir.ru/>
4. Keer L.M., Bryant M.D., Haritos G.K. Subsurface Cracking and Delamination // Transactions of the ASME. AMD, 1980. Vol. 39. P. 79-95.
5. ГОСТ 41.13-Н-99 (Правила ЕЭК ООН N13-Н). Единообразные предписания, касающиеся официального утверждения легковых автомобилей в отношении торможения. М.: Изд-во стандартов, 2003.

### **Сведения об авторах:**

**Погосян Альберт Князевич** – Член- корр. НАН Армении, д.т.н., профессор  
Государственный инженерный университет Армении  
**Адрес:** г.Ереван, ул.Теряна 105. **Тел.:** (+374 10) 58-61-82  
**E-mail:** [pogosian@seua.am](mailto:pogosian@seua.am)

**Меликсетян Норик Галустович** – д. т. н, доцент, Ванадзорский филиал  
Государственного Инженерного Университета Армении  
**Адрес:** г.Ванадзор ул. Шинарарнери 12.  
**Тел.:** (+374 322) 4-73-74  
**E-mail:** [n\\_meliksetyan@mail.ru](mailto:n_meliksetyan@mail.ru)

# ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН В ПРОВОДЯЩЕЙ ПЛАСТИНКЕ ПРИ НАЛИЧИИ ПРОДОЛЬНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Погосян А.С., Минасян Д.М.

С помощью уравнений, полученных на основе уточнений электромагнитной части гипотезы магнитоупругости тонких тел, исследовано распространение продольных волн в электропроводящих пластинах в продольном магнитном поле.

Асимптотическое разложение искомой величины проведено для слабо- и сильнопроводящих пластин.

В работах [1, 2] установлено, что при исследовании задач колебаний электропроводящих пластин в магнитном поле учёт деформаций поперечного сдвига уточняет задачу поперечных колебаний пластинки, а предположение о линейном законе изменения компонент индуцированного электромагнитного поля по толщине пластинки уточняет задачи слабого взаимодействия. Примерами таких задач являются продольные колебания пластинки в продольном магнитном поле и поперечные колебания пластинки в поперечном магнитном поле. При этом, в случае продольного магнитного поля можно ограничиваться лишь принятием линейного закона изменения для тангенциальных компонент электрического поля [2].

Рассмотрим задачу о распространении продольных волн в тонком упругом проводящем слое (пластинка постоянной толщины  $2h$  и с электропроводимостью  $\sigma$ ) в продольном магнитном поле  $\vec{B}(0, B_2, 0)$ . Декартова система координат  $x, y, z$  выбрана так, что срединная плоскость недеформированной пластинки совпадает с координатной плоскостью  $x, y$ . Магнитная и диэлектрическая проницаемости материала пластинки считаются равными единице, а электромагнитные свойства среды, окружающей пластинку – эквивалентными со свойствами вакуума.

Уравнения исследуемой задачи были получены на основе линеаризованных уравнений электродинамики, уравнений движения тонких пластин с учётом гипотезы недеформируемых нормалей [3].

Для изменения компонент  $e_1, e_2, h_3$  электромагнитного поля по толщине пластинки принимаются следующие предположения:

$$e_1 = \varphi(x, y, t) + z\varphi_1(x, y, t)$$

$$e_2 = \psi(x, y, t) + z\psi_1(x, y, t)$$

$$h_3 = f(x, y, t)$$

В случае одномерной задачи (распространение не зависит от координаты  $y$ ) при дополнительных допущениях относительно характера изменения электромагнитного поля в окружающей среде [3] получается следующая замкнутая система уравнений [2]:

$$\frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\sigma B_2}{c} \left[ \frac{h^2}{3} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{c}{4\pi\sigma} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h_2^+ + h_2^-}{2} \right) \right] = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\varphi_1 - \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left[ \frac{h^2}{3} \varphi_1 - \frac{c}{4\pi\sigma} \left( \frac{h_2^+ + h_2^-}{2} \right) \right] + \frac{B_2}{c} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = 0 \quad (1)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \frac{h_2^+ + h_2^-}{2} = -\frac{h}{\lambda c} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}$$

Решение системы (1) представим в виде волн, распространяющихся вдоль пластинки по оси  $Ox$

$$\{u, \varphi_1, h_2^+ + h_2^-\} = \{u_0, \varphi_{10}, h_{20}^+ + h_{20}^-\} e^{i(\omega t - kx)}, \quad (2)$$

где  $u_0, \varphi_{10}, h_{20}^+ + h_{20}^- = \text{const}$ ,  $\omega$  – частота колебаний,  $k$  – волновое число.

Подставляя решения (2) в систему уравнений (1) и принимая  $\lambda = k^{-1}$ ,  $\omega^2 c^{-2} k^{-2} \ll 1$ ,  $|\omega| \ll 4\pi\sigma$  (соответствует условию пренебрежения токами смещения), полученное характеристическое уравнение можно представить в следующем безразмерном виде:

$$\xi R_m \Omega^3 + \Omega^2 + \xi R_m (1 + \beta_2) \Omega + 1 = 0 \quad (3)$$

где  $\Omega = \frac{i\omega}{\omega_0}$ ,  $\omega_0^2 = \frac{Ek^2}{\rho(1-\nu^2)} = c_0^2 k^2$ ,  $c_0^2 = \frac{E}{\rho(1-\nu^2)}$ ,  $R_m = \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{4\pi\sigma c_0 h}{c^2}$  – магнитное число

Рейнольдса,  $\beta_2 = \frac{V_{A2}^2}{c_0^2}$  – величина типа магнитного давления (характеризует интенсивность

влияния магнитного поля, а  $V_{A2}^2 = \frac{B_2^2}{4\pi\rho}$  – скорость распространения волн Альвена),  $\xi^2 = \frac{k^2 h^2}{3}$ .

Исследование уравнения (3) проведём с помощью асимптотического разложения искомой величины  $\Omega$  по параметру  $R_m$ , пропорциональному электропроводимости пластинки  $\sigma$ . Рассмотрим два случая, соответствующие слабопроводящим и сильнопроводящим пластинкам:  $R_m < 1$  и  $R_m > 1$  [4].

1. **Слабопроводящие пластинки.** Такие пластинки характеризуются неравенством  $R_m < 1$ .

Искомую величину  $\Omega$  представим в виде асимптотического разложения по  $R_m$ :

$$\Omega = \Omega_0 + R_m^1 \Omega_1 + R_m^2 \Omega_2 + \dots \quad (4)$$

Подставляя (4) в уравнение (3) и приравнивая члены при одинаковых степенях  $R_m$ , получим нулевые приближения  $(R_m)^0$ , первые – при  $(R_m)^1$  и т.д. При этом различаются два случая в зависимости от величины магнитного давления  $\beta_2 \ll 1$  и  $\beta_2 \approx 1$ .

В нулевом приближении имеем

$$\Omega_0^2 + 1 = 0 \text{ или } \omega = \omega_0$$

Отметим, что аналогичный результат получится, если данную задачу решить на основе гипотезы магнитоупругости тонких тел [3].

В первом приближении  $\Omega_1$  будет уже зависеть от известного нулевого приближения:

$$\Omega_1^2 + \Omega_0 \xi (1 + \beta_2 + \Omega_0^2) = 0,$$

откуда

$$\Omega_1^2 = -\xi \beta_2 \Omega_0 \text{ и т.д.}$$

**2. Сильнопроводящие пластинки.** В этом случае пластинка характеризуется неравенством  $R_m > 1$ , и искомая величина  $\Omega$  представляется в виде асимптотического разложения по обратным степеням  $R_m$ :

$$\Omega = \Omega_0 + R_m^{-1} \Omega_1 + R_m^{-2} \Omega_2 + \dots \quad (5)$$

Подставляя (5) в уравнение (3) и приравнявая члены при одинаковых степенях  $(R_m)^{-1}$  последовательно, получим уравнения асимптотических приближений. Уравнение нулевого приближения, соответствующее идеальной проводимости, будет:

$$\Omega_0^2 + 1 + \beta_2 = 0$$

или

$$\omega^2 = \omega_0^2 (1 + \beta_2)$$

Поправка  $\Omega_1$  согласно уравнению первого приближения будет определяться выражением

$$\Omega_1 = \frac{\beta_2}{2\xi \Omega_0^2} \text{ и т.д.}$$

Практические значения при решении задач имеют нулевые приближения, которые существенно проще исходных уравнений. На основе уравнений идеальной проводимости решено большое количество задач, а в приближении слабой проводимости получено значительно меньше решений.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Погосян А.С. Влияние индуцированного электромагнитного поля и поперечных сдвиговых деформаций на магнитоупругие колебания трансверсально-изотропных электропроводящих пластин./ Кандидатская диссертация, Ереван, 2002, 93с.
2. Погосян А.С., Саркисян С.В. О распространении продольных волн в пластинке при наличии магнитного поля//В сб. научных тр. V межд. конф.: “The problems of dynamics of interaction of deformable media” (1–7 октября, 2005г., Горис, Армения), Ереван, 2005, с.296-300.

3. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977. 272с.
4. Селезов И.Т. Некоторые приближённые формы уравнений движения магнитоупругих сред. //Изв. АН СССР. МТТ. 1975. №5. С.86-91.

**Сведения об авторах:**

**Погосян Арман Смбатович** – к.ф.м.н., старший научный сотрудник кафедры механики факультета математики и механики ЕГУ, (37493) 521303

**E-mail:** armpogosyan@yahoo.com

**Минасян Давид Мелсович** – к.ф.м.н., заведующий лабораторией кафедры механики факультета математики и механики ЕГУ, (37499) 020722

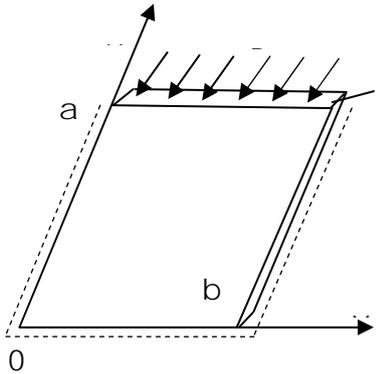
**E-mail:** minasyan@ysu.am

# ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УСТОЙЧИВОСТИ СЖАТОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ

Погосян Д. М.

В работе рассматривается задача устойчивости возмущённого движения пластинки, нагруженной «следящей» силой, при наличии сосредоточенной инерционной массы. Показано, что, когда три остальных края пластинки шарнирно закреплены, то существует дивергентная неустойчивость. А когда два противоположных края шарнирно закреплены, а третий защемлён, то в этом случае дивергентной неустойчивости не существует. Частный случай этой задачи есть задача Болотина, который впервые вычислил критическую силу для устойчивости гибкого стержня, заделанного одним концом и нагруженного на другом конце тангенциальной сжимающей силой. Задачи устойчивости упругой системы, нагруженной следящими силами, впервые исследовал Е.Л.Николаи. Николаи, Болотин и Бек известны своими задачами устойчивости стержня, нагруженными следящими силами.

Пластинка занимает область  $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, -h \leq z \leq h$ . Уравнение устойчивости пластинки при наличии сжимающей нагрузки  $P$  на кромке  $x = a$  имеет вид [1, 2]



$$D\Delta^2 w + P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (1.1)$$

где  $D$  – изгибная жёсткость пластинки,  $w = w(x, y, t)$  – динамический прогиб в каждой точке пластинки.

Граничные условия на кромке  $x = a$  записываются следующим образом:

или

$$M_1 = 0, \quad \tilde{N}_1 = m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{m}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

Аналогичная задача при отсутствии сосредоточенной массы рассмотрена в [3].

1. Края пластинки  $x = 0$  и  $y = 0, b$  шарнирно закреплены

$$x = 0: \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (1.3)$$

$$y = 0, b: \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (1.4)$$

Решение уравнения (1.1) представляется в виде

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \sin(n\pi y) * e^{\omega t} \quad x = \frac{x}{a}; \quad y = \frac{y}{b}; \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.5)$$

с тем, чтобы удовлетворить граничным условиям (1.4). Подстановка (1.5) в (1.1) приводит к следующей задаче на собственные значения:

$$f_n^{IV} + (P_0 - 2\lambda_n^2) f_n'' + \lambda_n^4 f_n = 0 \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned}
x = 0: & \quad f = 0, \quad f'' = 0 \\
x = 1: & \quad f'' - \nu \lambda_n^2 f = 0, \quad f''' - (2 - \nu) \lambda_n^2 f' = m_0 \omega^2 f
\end{aligned} \tag{1.7}$$

где

$$\lambda_n = \frac{a}{b} \pi n; \quad m_0 = a^3 \frac{m}{D}; \quad P_0 = a^2 \frac{P}{D}; \quad k = (2 - \nu) \lambda_n^2$$

Общее решение уравнения (1.6) имеет вид

$$f_n = A_{1n} \operatorname{sh}(q_1 x) + A_{2n} \operatorname{ch}(q_1 x) + A_{3n} \operatorname{sh}(q_2 x) + A_{4n} \operatorname{ch}(q_2 x) \tag{1.8}$$

где

$$q_i = \sqrt{\frac{-(P_0 - 2\lambda_n^2) \pm \sqrt{P_0(P_0 - 4\lambda_n^2)}}{2}} \quad i = 1, 2 \tag{1.9}$$

Подставляя общее решение (1.8) в граничные условия (1.7), получаем следующую однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных  $A_{in} \neq 0, i = \overline{1, 4}$ :

$$\begin{cases}
A_{2n} + A_{4n} = 0 \\
A_{2n} q_1^2 + A_{4n} q_2^2 = 0 \\
A_{1n} (q_1^2 - \nu \lambda_n^2) \operatorname{sh}(q_1) + A_{2n} (q_1^2 - \nu \lambda_n^2) \operatorname{ch}(q_1) + \\
\quad + A_{3n} (q_2^2 - \nu \lambda_n^2) \operatorname{sh}(q_2) + A_{4n} (q_2^2 - \nu \lambda_n^2) \operatorname{ch}(q_2) = 0 \\
A_{1n} (q_1^3 \operatorname{ch}(q_1) - k q_1 \operatorname{ch}(q_1) - g \operatorname{sh}(q_1)) + \\
\quad + A_{2n} (q_1^3 \operatorname{sh}(q_1) - k q_1 \operatorname{sh}(q_1) - g \operatorname{ch}(q_1)) + \\
\quad + A_{3n} (q_2^3 \operatorname{ch}(q_2) - k q_2 \operatorname{ch}(q_2) - g \operatorname{sh}(q_2)) + \\
\quad + A_{4n} (q_2^3 \operatorname{sh}(q_2) - k q_2 \operatorname{sh}(q_2) - g \operatorname{ch}(q_2)) = 0
\end{cases} \tag{1.10}$$

Чтобы иметь ненулевые коэффициенты  $A_{in}$ , приравняем нулю детерминант системы (1.10),

получаем следующее выражение для частот собственных колебаний пластинки:

$$\omega_n^2 = \frac{\lambda^2 (k q_2 - \lambda^2 q_1 - \nu k q_1 + \nu q_1^3) \operatorname{ch}(q_1) \operatorname{sh}(q_2) - (k q_1 - \lambda^2 q_2 - \nu k q_2 + \nu q_2^3) \operatorname{ch}(q_2) \operatorname{sh}(q_1)}{m_0 (q_1^2 - q_2^2) \operatorname{sh}(q_1) \operatorname{sh}(q_2)} \tag{1.11}$$

где  $k = (2 - \nu) \lambda_n^2$ .

Равенство нулю числителя в выражении для  $\omega_n$  определяет дивергентную критическую нагрузку. В табл.1 приведены некоторые критические значения  $P_0$  при  $\nu = 0.3$ .

Таблица 1

$\lambda_n$	0.01	0.1	1.0	1.5	1.6	2.0	5.0	10.0	40.0	100.0
$P_0$	7.276	7.281	7.95	9.247	33.254	35.057	165.21	479.33	6659.51	40014.4

Обращая знаменатель (1.11) в нуль

$$(q_1^2 - q_2^2) \operatorname{sh}(q_1) \operatorname{sh}(q_2) = 0 \quad (1.12)$$

находим критические значения силы  $P_0$ , приводящие к флаттерной неустойчивости. В табл.2 приведены некоторые критические значения  $P_0$ . Как видно из (1.12), критическая сила не зависит от коэффициента Пуассона.

Таблица 2

$\lambda_n$	0.01	0.1	1.0	1.5	1.6	2.0	5.0	10.0	40.0	100.0
$P_0$	9.87	9.89	11.97	14.883	15.654	19.491	105.31	401.406	6402.77	40001.12

Итак, получили, что в случае пластинки, нагруженной «следящей» силой, при наличии сосредоточенной инерционной массы и при граничных условиях (1.3), (1.4) существует дивергентная неустойчивость.

Сравнивая численное значение силы  $P_0$  из таблиц 1 и 2, можно сказать, что потеря устойчивости дивергентного вида поступает раньше, чем флаттерное при  $\lambda \in (0, 1.6)$ , а при  $\lambda \in [1.6, 100)$ , наоборот.

2. Рассмотрим ту же пластинку, как в задаче 1, только с граничными условиями (2.1), (2.2).

$$x = 0: \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

$$x = a: \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{m}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

$$y = 0, b: \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (2.2)$$

В частном случае, когда  $w = w(x, t)$ , задача совпадает с задачей Болотина [4].

Рассуждая так, как в предыдущей задаче, получаем следующее выражение для частот собственных колебаний пластинки:

$$\omega_n^2 = \frac{1}{m_0} \frac{A}{B} \quad (2.3)$$

где

$$A = \left( (q_1^4 + q_2^4) - 2\lambda_n^2 (q_1^2 + q_2^2) + 2\lambda_n^4 v(2-v) \right) + 2\lambda_n^2 \left( (q_1^2 + q_2^2) - \lambda_n^2 (1 + v(2-v)) \right) * \\ * \operatorname{ch}(q_1) \operatorname{ch}(q_2) + \\ + \left( -2\lambda_n^4 (2-v) + \lambda_n^2 (1 + v(2-v)) (q_1^2 + q_2^2) - v(q_1^4 + q_2^4) \right) \operatorname{sh}(q_1) \operatorname{sh}(q_2) \\ B = -\frac{(q_1^2 - q_2^2)}{\lambda_n^2} (q_1 \operatorname{ch}(q_1) \operatorname{sh}(q_2) - q_2 \operatorname{ch}(q_2) \operatorname{sh}(q_1))$$

Обращая знаменатель (2.3) в нуль, находим критические значения силы  $P_0$ , приводящие к флаттерной неустойчивости.

В табл. 3 приведены некоторые критические значения  $P_0$  при  $n = 1$ .

Таблица 3

$\lambda$	0.01	0.1	1.0	5.0	10.0	40.0	100.0
$\nu = 0.3$ $P_0$	20.19	20.21	22.27	111.86	408.98	6410.12	40010.0

Равенство нулю числителя в выражении для  $\omega_n$  определяет дивергентную критическую нагрузку.

$$A = \left( (q_1^4 + q_2^4) - 2\lambda_n^2 (q_1^2 + q_2^2) + 2\lambda_n^4 v(2-v) \right) + 2\lambda_n^2 \left( (q_1^2 + q_2^2) - \lambda_n^2 (1 + v(2-v)) \right) * \\ * \operatorname{ch}(q_1) \operatorname{ch}(q_2) + \\ + \left( -2\lambda_n^4 (2-v) + \lambda_n^2 (1 + v(2-v)) (q_1^2 + q_2^2) - v(q_1^4 + q_2^4) \right) \operatorname{sh}(q_1) \operatorname{sh}(q_2) = 0 \quad (2.4)$$

В этом случае численные расчёты с помощью программы Математика, показывают, что имеем только фиктивное решение  $P_0 = 4\lambda_n^2$ .

Можно показать, что  $P_0 = 4\lambda_n^2$  – фиктивное, для этого, подставляя значение  $P_0$  в уравнение (1.1), из решения (1.1) при граничных условиях (2.1), (2.2) находим  $w(x, y, t) = 0$ .

На рис.1 представлены графики для  $A(P_0)$  функции.

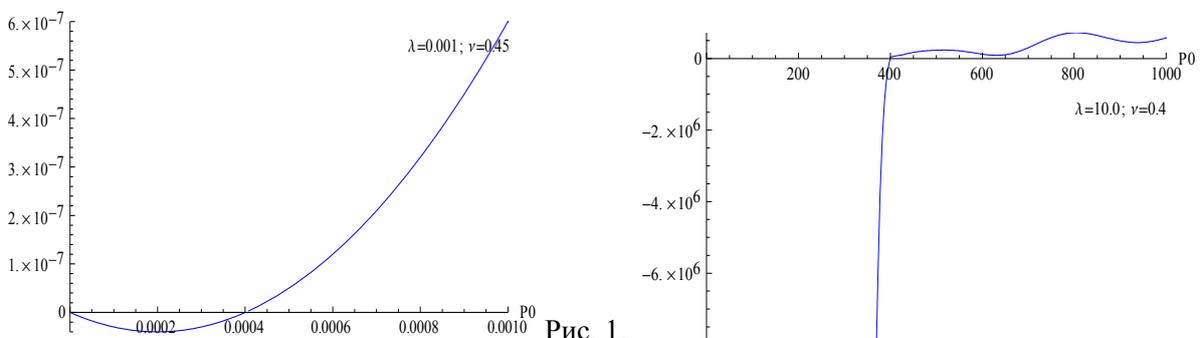


Рис. 1.

Рассмотрим частный случай, когда  $w = w(x, t)$ , то есть прогиб пластинки зависит только от  $x$ , в этом случае

$$b \rightarrow \infty \Rightarrow \lambda \rightarrow 0 \quad (2.5)$$

следовательно, значение  $\omega_n^2$  из (2.3), учитывая (2.5), примет вид

$$\omega_n^2 = -\frac{\lambda_n^2 A}{m_0 (q_1^2 - q_2^2) q_1 (\operatorname{sh}(q_2) - q_2 \operatorname{ch}(q_2))} \quad (2.6)$$

где

$$A = \left( (q_1^4 + q_2^4) - 2\lambda_n^2 (q_1^2 + q_2^2) + 2\lambda_n^4 \nu (2 - \nu) \right) + 2\lambda_n^2 \left( (q_1^2 + q_2^2) - \lambda_n^2 (1 + \nu(2 - \nu)) \right) \operatorname{ch}(q_2) + \\ + \left( -2\lambda_n^4 (2 - \nu) + \lambda_n^2 (1 + \nu(2 - \nu)) (q_1^2 + q_2^2) - \nu (q_1^4 + q_2^4) \right) q_1 \operatorname{sh}(q_2)$$

$$\text{при } \lambda_n \rightarrow 0 \Rightarrow A > 0, \quad A(P_0 = 0) = 0.$$

Обращая знаменатель (2.6) в нуль, находим критические значения силы  $P_0$ , приводящие к флаттерной неустойчивости

$$\operatorname{sh}(q_2) - q_2 \operatorname{ch}(q_2) = 0 \quad \operatorname{th}(q_2) = q_2 \Rightarrow P_0 = (4.49)^2 \\ P = (4.49)^2 \frac{D}{a^2} \quad (2.7)$$

Критическое значение силы  $P$  совпадает с критической силой задачи Болотина [4].

Итак, в случае пластинки, как и в случае стержня, нагруженного «следающей» силой, при наличии сосредоточенной инерционной массы, дивергентной неустойчивости не существует при граничных условиях типа (2.2).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 384 с.
2. Белубекян М.В., Белубекян В.М. Устойчивость прямоугольной пластинки при действии «следающей» нагрузки на свободной кромке. //Изв. НАН Армении. Механика. 2008. Т.61. №2. С.23-32.
3. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. М.: Госиздат физматлит., 1963.
4. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Госиздат физматлит., 1961.

### Сведения об авторе:

**Погосян Диана Мнацакановна** – аспирант Института механики НАН РА. (374 91) 64 98 31  
**E-mail:** dianpoghosyan@yahoo.com

# ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ ВОЗЛЕ ДВУХ ТРЕЩИН, ВЫХОДЯЩИХ ИЗ ОДНОЙ ТОЧКИ, ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ВОЛНЫ ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА

Попов В. Г.

Решена задача определения динамических КИН для двух трещин, выходящих из одной точки. На трещины действует гармоническая волна продольного сдвига. Исходная задача сведена к решению системы двух сингулярных интегро-дифференциальных уравнений с неподвижными особенностями. Для численного решения этой системы предложен численный метод, который учитывает реальную асимптотику неизвестных функций и использует специальные квадратурные формулы для сингулярных интегралов.

**Постановка задачи и сведение к системе сингулярных интегро-дифференциальных уравнений (ССИДУ).** Пусть изотропное упругое тело находится в условиях антиплоской деформации и содержит две трещины, выходящие из одной точки (рис.1). Эти трещины в плоскости  $Oxy$  занимают отрезки  $2d_k$  и образуют с осью  $Ox$  углы  $\alpha_k, k = 1, 2$ . С трещинами взаимодействует плоская волна продольного сдвига, которая вызывает в теле следующие перемещения вдоль оси  $Oz$

$$w^q(x, y) = Ae^{ik_2(x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0)}, \quad \kappa_2^2 = \frac{\rho \omega^2}{G} \quad (1.1)$$

где  $\omega$  – частота колебаний,  $\rho, G$  – плотность и модуль сдвига тела,  $\theta_0$  – угол между направлением и распространением волны и осью  $Ox$ . Множитель  $e^{-i\omega t}$ , определяющий зависимость от времени здесь и далее отброшен.

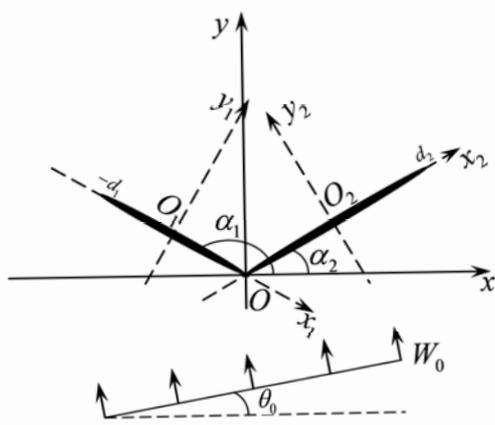


Рис.1.

Пусть  $w(x, y)$  – единственная, не равная 0 при антиплоской деформации,  $z$  – компонента вектора перемещений, вызванная волнами, отражёнными от трещин. Она определяется из уравнения Гельмгольца

$$\Delta w + \kappa_2^2 w = 0, \quad (1.2)$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа в системе координат  $Oxy$ . Для формулировки граничных условий на трещинах с каждой из них связывается локальная система координат  $O_l x_l y_l, l = 1, 2$  (рис.1). Пусть

$w_l(x_l, y_l), w_l^q(x_l, y_l)$  получены из  $w(x, y), w^q(x, y)$  в результате перехода к локальным координатам.

Если считать берега трещин свободными от напряжений, то тогда на каждой из них должно выполняться равенство

$$\tau_{zy_l}(x_l, 0) = -\tau_{zy_l}^q(x_l, 0), \quad -d_l < x_l < d_l, \quad l = 1, 2, \quad \tau_{zy_l} = G \frac{\partial w_l}{\partial y_l}, \quad \tau_{zy_l}^q = G \frac{\partial w_l^q}{\partial y_l} \quad (1.3)$$

Также на каждой трещине перемещения  $w_l(x_l, y_l)$  имеют разрыв с неизвестным скачком

$$w_l(x_l, +0) - w_l(x_l, -0) = \chi_l(x_l), \quad l = 1, 2 \quad (1.4)$$

При сформулированных условиях ставится задача определить перемещения и напряжения дифракционного поля и найти КИН для трещин.

Для решения этой задачи для каждой трещины в системе координат связанной с ней строится разрывное решение уравнения (1.2) со скачком (1.4) [1].

$$W_k^d(x_k, y_k) = \int_{-d_k}^{d_k} \chi_k(\eta) \frac{\partial}{\partial y_k} r_2(\eta - x_k, y_k) d\eta, \quad k = 1, 2 \quad (1.5)$$

$$r_2(\eta - x_k, y_k) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)} \left( \kappa_2 \sqrt{(\eta - x_k)^2 + y_k^2} \right)$$

После этого перемещения дифракционного поля в системе  $Oxy$  представляются в виде

$$w(x, y) = w_1^g(x, y) + w_2^g(x, y), \quad (1.6)$$

где  $w_k^g(x, y)$ ,  $k=1,2$  получаются по формулам (1.5) после преобразования координат. Чтобы окончательно определить перемещения и напряжения в полупространстве, необходимо найти неизвестные скачки (1.4) перемещений. Для этого следует использовать оставшиеся условия (1.3). Предварительно на основании (1.5), (1.6) находим

$$\tau_{zy_l} = \sum_{k=1}^2 \tau_{zy_k}^k, \quad \tau_{zx_k}^k = -\tau_{zx_k}^d \sin(\alpha_k - \alpha_l) + \tau_{zy_k}^d \cos(\alpha_k - \alpha_l), \quad l=1,2. \quad (1.7)$$

В соответствии с (1.6) слагаемые в (1.7) определяются формулой

$$\begin{aligned} \tau_{zy_l}^k = G \int_{-d_k}^{d_k} \chi_k'(\eta) \frac{i\kappa_2}{4} \frac{H_1^{(1)}(\kappa_2 \sqrt{Q_{lk}})}{\sqrt{Q_{lk}}} ((\eta + d_k) \cos \alpha_{lk} - (x_l + d_l)) d\eta + \\ + \frac{i\kappa_2^2}{4} G \cos \alpha_{lk} \int_{-d_k}^{d_k} \chi_k(\eta) \cdot H_0^{(1)}(\kappa_2 \sqrt{Q_{lk}}) d\eta, \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$Q_{lk} = (\eta + d_k - (\kappa_l + d_l) \cos \alpha_{lk} + y_l \sin \alpha_{lk})^2 + ((\kappa_l + d_l) \sin \alpha_{lk} + y_l \cos \alpha_{lk})^2; \quad \alpha_{lk} = \alpha_l - \alpha_k.$$

После перестановки (1.7), (1.8) в (1.3) получаем систему двух сингулярных интегрально-дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_1'(\tau) \left[ \frac{1}{\tau - \zeta} + R_{11}(\tau - \zeta) \right] d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_2'(\tau) [g_{12}(\tau, \zeta) + R_{11}(\tau - \zeta)] d\tau + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_1(\tau) [-\gamma_1^2 \kappa_0^2 \ln|\tau - \zeta| + U_{11}(\tau - \zeta)] d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_2(\tau) \cdot U_{12}(\tau, \zeta) d\tau = f_1(\zeta), \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_2'(\tau) \left[ \frac{1}{\tau - \zeta} + R_{22}(\tau - \zeta) \right] d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_1'(\tau) [g_{21}(\tau, \zeta) + R_{21}(\tau - \zeta)] d\tau + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_2(\tau) [-\gamma_2^2 \kappa_0^2 \ln|\tau - \zeta| + U_{22}(\tau - \zeta)] d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_1(\tau) \cdot U_{21}(\tau, \zeta) d\tau = f_2(\zeta), \end{aligned}$$

$$f_l(\zeta) = -i\kappa_0 C_0 \sin(\theta_0 - \alpha_l) \exp(i\kappa_0 \gamma_l (1 + \zeta) \cos(\theta_0 - \alpha_l)), \quad l=1,2$$

$$\eta = d_k \tau, \quad x_l = d_l \zeta, \quad y_l = d^{-1} d_l, \quad \kappa_0 = \kappa_2 d, \quad d = \max(d_1, d_2),$$

$$\varphi_k(\tau) = d_k^{-1} \chi_k(d_k \tau), \quad C_0 = d^{-1} A, \quad k, l=1,2.$$

$$g_{12}(\tau, \zeta) = \frac{(\gamma_2(1+\tau) \cos \beta + \gamma_1(1-\zeta)) \gamma_2}{q_{12}(\tau, \zeta)}, \quad g_{21}(\tau, \zeta) = \frac{-(\gamma_1(1-\tau) \cos \beta + \gamma_2(1+\zeta)) \gamma_1}{q_{21}(\tau, \zeta)}.$$

$$q_{12}(\tau, \zeta) = \gamma_2^2 (1+\tau)^2 + \gamma_1^2 (1-\zeta)^2 + 2\gamma_1 \gamma_2 (1-\zeta)(1+\tau) \cos \alpha_{12},$$

$$q_{21}(\tau, \zeta) = \gamma_1^2 (1-\tau)^2 + \gamma_2^2 (1+\zeta)^2 + 2\gamma_1 \gamma_2 (1+\zeta)(1-\tau) \cos \alpha_{21}$$

## 2. Приближенное решение системы интегро-дифференциальных уравнений.

Наличие у системы (1.9) неподвижных особенностей при  $\tau = -1, \zeta = 1$  влияет на поведение её решений в окрестности точек  $\zeta = \pm 1$  [2]. Асимптотика решений в их окрестности определяется также как и в случае системы жёстких включений, выходящих из одной точки [3]. Установлено, что производные неизвестных функций необходимо разыскивать в виде

$$\varphi_l'(\tau) = W_l(\tau) \cdot \psi_l(\tau), \quad l=1,2 \quad W_1(\tau) = (1-\tau)^{-\sigma} (1+\tau)^{-1/2}, \quad W_2(\tau) = (1-\tau)^{-1/2} (1+\tau)^{-\sigma}, \quad (2.1)$$

где показатель особенности определяется равенством:

$$\sigma = (\pi - \beta) / (2\pi - \beta), \quad \beta = |\alpha_2 - \alpha_1|, \quad 0 \leq \beta \leq \pi,$$

а функции  $\psi_l(\tau)$  предполагаются удовлетворяющими условию Гельдера на  $[-1, 1]$ .

Дальнейшее решение основывается на аппроксимации этих функций интерполяционными многочленами

$$\psi_l(\tau) \approx \psi_{n-1}^{(l)}(\tau), \quad \psi_{n-1}^{(l)}(\tau) = \sum_{m=1}^n \psi_{lm} \frac{P_{ln}(\tau)}{(\tau - \tau_{lm})P'_{ln}(\tau)}, \quad \psi_{lm} = \psi_l(\tau_{lm}) \quad (2.2)$$

где  $P_{1n}(\tau) = P_n^{-\sigma-1/2}(\tau)$ ,  $P_{2n}(\tau) = P_n^{-1/2-\sigma}(\tau)$  – многочлены Якоби, ортогональные с весовыми функциями  $W_l(\tau)$ , а  $\tau_{lm}$  – корни этих многочленов. При представлении неизвестных функций в виде (2.1), (2.2) для интегралов с ядром Коши справедливы квадратурные формулы [4]

$$\int_{-1}^1 \frac{\phi_l'(\tau)}{\tau - \zeta_{lj}} d\tau = \sum_{m=1}^n \psi_{lm} \frac{A_{lm}}{\tau_{lm} - \zeta_{lj}}, \quad l=1, 2, \quad j=1, 2, \dots, n. \quad (2.3)$$

В формуле (16)  $\zeta_{lj}$  ( $l=1, 2, j=1, 2, \dots, n$ ) – нули функций Якоби второго рода  $J_n^{-\sigma-1/2}(\tau)$  и  $J_n^{-1/2-\sigma}(\tau)$ , а  $A_{lm}$  – коэффициенты соответствующий квадратурных формул Гаусса-Якоби [5].

Далее аналогичные формулы необходимо получить для интегралов с неподвижными особенностями

$$E_{lk}^j = \int_{-1}^1 \phi_k'(\tau) g_{lk}(\tau, \zeta_{lj}) d\tau, \quad l, k=1, 2, \quad l \neq k, \quad (2.4)$$

Если  $1 - \zeta > \varepsilon, 1 + \zeta > \varepsilon$ , где  $0 < \varepsilon < 1$  – некоторое число, то функции  $g_{lk}(\tau, \zeta)$  являются бесконечно-гладкими и к интегралам (2.4) может быть применена квадратурная формула Гаусса-Якоби. При  $1 \pm \zeta \rightarrow 0$  используются представления (2.1), (2.2) и метод для вычисления интегралов с ортогональными многочленами [6], основанный на применении теоремы о свёртке для интегрального преобразования Меллина. Окончательные формулы для интегралов (2.4) имеют вид:

$$E_{lk}^j = \sum_{m=1}^n \psi_{km} \frac{D_{jm}^{lk}}{q_{ln}(\tau_{km}, \zeta_{lj})}, \quad l, k=1, 2, \quad l \neq k, \quad (2.5)$$

где

$$D_{jm}^{12} = A_{2m} \gamma_2 (\gamma_2 (1 + \tau_{2m}) \cos \beta + \gamma_1 (1 - \zeta_{1j})), \quad 1 - \zeta_{1j} > \varepsilon > 0$$

$$D_{jm}^{21} = A_{1m} \gamma_1 (\gamma_1 (1 - \tau_{1m}) \cos \beta + \gamma_2 (1 + \zeta_{2j})), \quad 1 + \zeta_{2j} > \varepsilon > 0$$

А при  $1 - \zeta_{1j} \rightarrow 0$  и  $1 + \zeta_{2j} \rightarrow 0$   $D_{jm}^{lk}$  представляются быстро сходящимися степенными рядами. Для вычисления интегралов с функциями  $\phi_k(\tau)$ , необходимо найти их приближённое значение с помощью очевидных равенств

$$\phi_1(\tau) = \int_{-1}^{\tau} \phi_1'(x) dx, \quad \phi_2(\tau) = -\int_{\tau}^1 \phi_2'(x) dx \quad (2.6)$$

После подстановки (2.1), (2.2) в (2.6) и интегрирования получены выражения

$$\phi_l(\tau) = \left(1 - (-1)^l \tau\right)^{1/2} \sum_{m=1}^n A_{lm} \psi_{lm} S_{lm}(\tau), \quad l=1, 2$$

$$S_{lm}(\tau) = F\left(\sigma, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1 - (-1)^l \tau}{2}\right) \frac{(-1)^l 2^{1-\sigma}}{\sigma_0} - \left(1 + (-1)^l \tau\right)^{1-\sigma} \sum_{j=1}^n \frac{P_{lj}(\tau_{lm}) P_{lj}^{(1)}(\tau)}{2j\sigma_j^2},$$

Затем для вычисления интегралов, их содержащих  $\phi_k(\tau)$ , применены квадратурные формулы Гаусса-Якоби:

$$\int_{-1}^1 \phi_k(\tau) \begin{bmatrix} U_{kk}(\tau - \zeta_{kj}) \\ U_{lk}(\tau, \zeta_{kj}) \end{bmatrix} d\tau = \sum_{m=1}^n A_{km} \psi_{km} \begin{bmatrix} U_{jm}^{kk} \\ U_{jm}^{lk} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} U_{jm}^{kk} \\ U_{jm}^{lk} \end{bmatrix} = \sum_{p=1}^n B_{kp} S_{km}(z_{kp}) \begin{bmatrix} U_{kk}(z_{kp} - \zeta_{kj}) \\ U_{lk}(z_{kp}, \zeta_{kj}) \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

здесь  $z_{kp}$  – корни многочленов Якоби  $P_n^{0/2}(z_{1p})=0$ ,  $P_n^{1/2^0}(z_{2p})=0$ , а  $B_{1p} = A_p^{0/2}$ ,  $B_{2p} = A_p^{1/2^0}$  – коэффициенты соответствующих квадратурных формул Гаусса-Якоби.

Для интегралов с логарифмической функцией получены следующие квадратурные формулы:

$$\int_{-1}^1 \varphi_k(\tau) \ln|\tau - \zeta_{lj}| d\tau = \sum_{m=1}^n A_{lm} H_{jm}^{(l)}, \quad l=1,2 \quad (2.8)$$

$$H_{jm}^{(l)} = (-1)^l \left(1 + (-1)^l \zeta_{lj}\right) \left(\ln|1 + (-1)^l \zeta_{lj}| - 1\right) - (\tau_{lm} - \zeta_{lj}) \left(\ln|\tau_{lm} - \zeta_{lj}| - 1\right)$$

Применение квадратурных формул (2.3),(2.5),(2.7),(2.8), а также формул Гаусса-Якоби, приводит к замене СИДУ (1.9) системой линейных алгебраических уравнений.

Для механики разрушения наибольший интерес представляет коэффициент интенсивности напряжений (КИН):

$$K_1 = \lim_{x_1 \rightarrow -d_1-0} \sqrt{-x_1 - d_1} \tau_{yz}^1(x_1, 0) \quad K_2 = \lim_{x_2 \rightarrow d_2+0} \sqrt{x_2 - d_2} \tau_{yz}^2(x_2, 0)$$

После численного решения системы (1.9) приближённые значения КИН выражаются по формулам

$$K_l = -G\sqrt{d_l} 2^{-(l+\sigma)} P_n^{(l)} \left( (-1)^l \right) \sum_{m=1}^n \frac{\psi_{lm}}{P_n^{(l)}(\tau_{lm}) (1 - (-1)^l \tau_{lm})} \quad (2.9)$$

**3. Результаты численного анализа и выводы.** При численной реализации, прежде всего, была исследована практическая сходимость предложенного метода решения СИДУ. Для этого рассмотрены трещины одинаковой длины  $d$ , выходящие из начала координат и расположенные симметрично относительно оси  $Oy$ . Угол между трещинами считался равным  $\beta = 60^\circ$ , падающая волна – распространяющейся в положительном направлении оси  $Ox$  ( $\theta_0 = 90^\circ$ ).

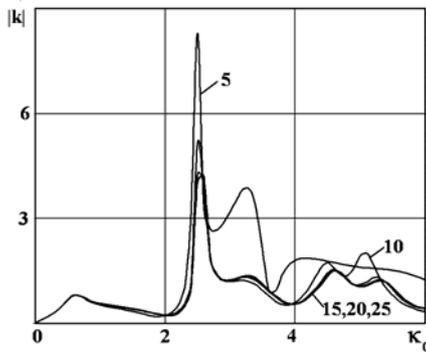


Рис. 2

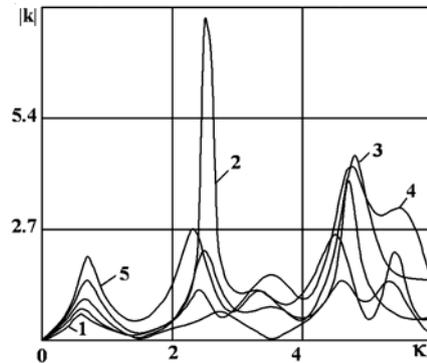


Рис.3

В этом случае в силу симметрии  $K_1 = K_2 = K$ . Результаты вычислений приведены на рис. 2 в виде графиков зависимости абсолютного значения безразмерного КИН  $k = K/G\sqrt{d}$  от безразмерного волнового числа  $\kappa_0$ . Каждая кривая соответствует указанному числу узлов интерполяции в формулах (2.2). Как следует из приведённых графиков, при низкочастотных колебаниях ( $0 < \kappa_0 \leq 1$ ) для получения значений КИН с погрешностью меньше 0.1% достаточно 5 узлов интерполяции в (2.2). Во всем рассмотренном частотном диапазоне указанная точность достигается при 15-20 узлах. Далее исследовано влияние на значение КИН угла между этими же трещинами при угле падения волны  $\theta_0 = 270^\circ$ . Результаты приведены на рис.3, где кривые 1-5 соответствуют следующим значениям угла:  $\beta: 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 180^\circ$ . Видно, что при небольших частотах ( $\kappa_0 \leq 2$ ) с увеличением угла между трещинами возрастают и значения КИН и наибольшие наблюдаются, когда угол разворачивается в отрезок ( $\beta = 180^\circ$ ). Затем зависимость от частоты принимает сложный характер с большим числом максимумов и

минимумов, что связано с многократным отражением волн от сторон угла, образованного трещинами.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Попов В. Г. Исследование полей напряжений и перемещений при дифракции упругих волн сдвига на тонком жёстком отслоившемся включении // Изв.РАН. МТТ. 992. №3. С.139-146.
2. Дудучава Р.В. Интегральные уравнения свертки с разрывными предсимволами, сингулярные интегральные уравнения с неподвижными особенностями и их приложения к задачам механики // Труды Тбилисского математического института АН Груз.ССР. 1979. Т.60. С.31–35.
3. Попов В.Г. Дифракция упругих волн сдвига на включении сложной формы, расположенной в неограниченной упругой среде // Гидроаэромеханика и теория упругости. ДГУ. 1986. С.121-127.
4. Андреев А.Р. Прямой численный метод решения сингулярных интегральных уравнений первого рода с обобщёнными ядрами // Изв. РАН. МТТ. 2005. №1. С.126-146.
5. Крылов В. И. Приближённое вычисление интегралов. М.: Наука, 1967. 500 с.
6. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1962. 344 с.

#### **Сведения об авторе:**

**Попов Всеволод Геннадиевич** – заведующий кафедрой высшей математики. Одесская национальная морская академия. +38048 733 23 12, +38048 746 11 42, +38067 480 65 57

**E-mail:** [dr.vg.popov@gmail.com](mailto:dr.vg.popov@gmail.com)

# АНТИПЛОСКИЕ КОЛЕБАНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СРЕД БЕЗ ДЕФЕКТОВ НА СТЫКЕ СЛОЕВ

Пряхина О.Д., Смирнова А.В., Самойлов М.В.

В работе изучена задача о сдвиговых колебаниях многослойных пьезоэлектрических сред. Получены формулы для расчета основных динамических характеристик задачи с учетом связности электрических и механических полей.

В настоящее время динамические задачи электроупругости благодаря важности их практического приложения и специфике методов решения выделились в самостоятельный раздел механики сплошной среды. Этому способствовало и то обстоятельство, что конкретные задачи, с которыми приходится сталкиваться в дефектоскопии, радиоэлектронике, акустике и других областях техники, при надлежащей их постановке должны учитывать сопряженность механических и электрических полей.

Рассмотрим случай, когда поверхность пакета  $N$  слоев полностью электродирована и параллельна плоскости  $x_1 0 x_3$ . Общая толщина пакета  $H = 2 \sum_{k=1}^N h_k$ ,  $h_k$  – полутолщина  $k$ -го слоя. Каждый слой характеризуется своим набором физико-механических параметров. Слои пакета жестко сцеплены между собой (случай идеального контакта). Верхняя грань среды  $x_2 = 0$  подвергается механическому и электрическому гармоническому воздействию, а нижняя  $x_2 = -H$  – жестко скреплена с недеформируемым основанием, металлизирована и закорочена. В качестве электроупругого материала рассмотрим пьезокерамику, поляризованную вдоль оси, параллельной поверхности среды (класс  $6mm$  гексагональной сингонии).

Решение задачи строится согласно алгоритму, описанному в [1–6]. На поверхности среды решение задачи в преобразованиях Фурье, записанное в локальной системе координат  $x_2^{(1)} = x_2 + h_1$ , имеет вид

$$\mathbf{W}_0(h_1) = \mathbf{R}_N(h_1, h_2, \dots, h_N) \mathbf{Q}_0, \quad \mathbf{W}_0 = (W, \Phi), \quad \mathbf{Q}_0 = (T, D), \quad (1)$$

$$\mathbf{R}_N = \mathbf{B}_+(h_1) + \mathbf{B}_-(h_1) \mathbf{F}_1^{-1}(h_1, \dots, h_N) \mathbf{B}_-(h_1) \quad (2)$$

( $W, T, \Phi, D$  – трансформанты Фурье перемещений, напряжений, электрического потенциала и электрической индукции соответственно).

В (1) – (2) используются следующие матрицы-функции

$$\mathbf{F}_k(h_k, h_{k+1}, \dots, h_N) = \mathbf{B}_-(-h_k) - g_k \mathbf{R}_{N-k}(h_{k+1}, \dots, h_N), \quad \mathbf{F}_N(h_N) = -\mathbf{B}_+(h_N),$$

$$\mathbf{R}_{N-k+1}(h_k, h_{k+1}, \dots, h_N) = \mathbf{B}_+(h_k) + \mathbf{B}_-(h_k) \mathbf{F}_k^{-1}(h_k, \dots, h_N) \mathbf{B}_-(h_k),$$

$$g_k = c_{44}^{(k)} / c_{44}^{(k+1)} \quad (c_{44}^{(k)} \text{ – упругая постоянная } k\text{-го слоя}).$$

Для антиплоской задачи матрицы  $\mathbf{B}_\pm(h_k)$  имеют структуру

$$\mathbf{B}_\pm(h_k) = \begin{pmatrix} b_{11}^\pm(h_k) & b_{12}^\pm(h_k) \\ b_{21}^\pm(h_k) & b_{22}^\pm(h_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1^\pm(h_k) & e_k \varepsilon_k^{-1} n_1^\pm(h_k) \\ e_k \varepsilon_k^{-1} n_1^\pm(h_k) & e_k^2 \varepsilon_k^{-2} n_1^\pm(h_k) - \varepsilon_k^{-1} n_2^\pm(h_k) \end{pmatrix}.$$

Здесь параметры  $e_k, \varepsilon_k$  описывают пьезоэлектрические и диэлектрические свойства  $k$ -го слоя в безразмерном виде, а функции  $n_{1,2}^\pm(h_k)$  приведены в [1 – 6].

Обратные матрицы  $\mathbf{F}_k^{-1}(h_k, h_{k+1}, \dots, h_N)$  имеют вид

$$\mathbf{F}_k^{-1}(h_k, h_{k+1}, \dots, h_N) = -\frac{1}{\det \mathbf{F}_k} \begin{pmatrix} f_{22}^{(k)} & -f_{12}^{(k)} \\ -f_{12}^{(k)} & f_{11}^{(k)} \end{pmatrix},$$

а их элементами являются следующие функции

$$f_{11}^{(k)}(h_k, h_{k+1}, \dots, h_N) = n_1^+(h_k) + g_k r_{11}^{(N-k)}(h_{k+1}, \dots, h_N),$$

$$f_{12}^{(k)}(h_k, h_{k+1}, \dots, h_N) = e_k \varepsilon_k^{-1} n_1^+(h_k) + g_k r_{12}^{(N-k)}(h_{k+1}, \dots, h_N),$$

$$f_{22}^{(k)}(h_k, h_{k+1}, \dots, h_N) = \varepsilon_k^{-1} \left[ e_k^2 \varepsilon_k^{-1} n_1^+(h_k) - n_2^+(h_k) \right] + g_k r_{22}^{(N-k)}(h_{k+1}, \dots, h_N).$$

В последних выражениях  $r_{ij}^{(k)}$  – элементы матрицы-символа Грина  $\mathbf{R}_k$  для электроупругого  $k$ -слойного пакета без дефектов на стыке слоев ( $i, j = 1, 2$ ).

Определитель  $\det \mathbf{F}_k$  представим в виде

$$\det \mathbf{F}_k(h_k, h_{k+1}, \dots, h_N) = \det \mathbf{B}_+(h_k) + g_k^2 \det \mathbf{R}_{N-k}(h_{k+1}, \dots, h_N) + g_k \left[ b_{11}^+(h_k) r_{22}^{(N-k)}(h_{k+1}, \dots, h_N) - 2b_{12}^+(h_k) r_{12}^{(N-k)}(h_{k+1}, \dots, h_N) + b_{22}^+(h_k) r_{11}^{(N-k)}(h_{k+1}, \dots, h_N) \right].$$

Матрицы-символы Грина  $\mathbf{R}_k$  имеют структуру

$$\mathbf{R}_{N-k+1}(h_k, h_{k+1}, \dots, h_N) = \begin{pmatrix} r_{11}^{(N-k+1)} & r_{12}^{(N-k+1)} \\ r_{12}^{(N-k+1)} & r_{22}^{(N-k+1)} \end{pmatrix},$$

$$r_{11}^{(N-k+1)}(h_k, h_{k+1}, \dots, h_N) = n_1^+(h_k) \left\{ g_k^2 \det \mathbf{R}_{N-k}(h_{k+1}, \dots, h_N) + g_k R_1(h_k) \left[ e_k^2 \varepsilon_k^{-2} r_{11}^{(N-k)}(h_{k+1}, \dots, h_N) - 2e_k \varepsilon_k^{-1} r_{12}^{(N-k)}(h_{k+1}, \dots, h_N) + r_{22}^{(N-k)}(h_{k+1}, \dots, h_N) - \varepsilon_k^{-1} n_2^+(h_k) \right] \right\} / \det \mathbf{F}_k(h_k, h_{k+1}, \dots, h_N),$$

$$r_{12}^{(N-k+1)}(h_k, h_{k+1}, \dots, h_N) = e_k \varepsilon_k^{-1} r_{11}^{(N-k+1)}(h_k, h_{k+1}, \dots, h_N) - g_k \varepsilon_k^{-1} n_1^-(h_k) n_2^-(h_k) \left[ -e_k \varepsilon_k^{-1} r_{11}^{(N-k)}(h_{k+1}, \dots, h_N) + r_{12}^{(N-k)}(h_{k+1}, \dots, h_N) \right] / \det \mathbf{F}_k(h_k, h_{k+1}, \dots, h_N),$$

$$r_{22}^{(N-k+1)}(h_k, h_{k+1}, \dots, h_N) = e_k^2 \varepsilon_k^{-2} r_{11}^{(N-k+1)}(h_k, h_{k+1}, \dots, h_N) - \varepsilon_k^{-1} n_2^+(h_k) - \left\{ 2e_k \varepsilon_k^{-2} n_1^-(h_k) n_2^-(h_k) g_k \left[ -e_k \varepsilon_k^{-1} r_{11}^{(N-k)}(h_{k+1}, \dots, h_N) + r_{12}^{(N-k)}(h_{k+1}, \dots, h_N) \right] + \varepsilon_k^{-2} (n_2^-(h_k))^2 \left[ n_1^+(h_k) + g_k r_{11}^{(N-k)}(h_{k+1}, \dots, h_N) \right] \right\} / \det \mathbf{F}_k(h_k, h_{k+1}, \dots, h_N).$$

Здесь

$$\det \mathbf{R}_{N-k+1}(h_k, h_{k+1}, \dots, h_N) = \det \mathbf{B}_+(h_k) / \det \mathbf{F}_k(h_k, h_{k+1}, \dots, h_N) \times \left\{ g_k^2 \det \mathbf{R}_{N-k}(h_{k+1}, \dots, h_N) + g_k R_1(h_k) \left[ e_k^2 \varepsilon_k^{-2} r_{11}^{(N-k)}(h_{k+1}, \dots, h_N) - 2e_k \varepsilon_k^{-1} r_{12}^{(N-k)}(h_{k+1}, \dots, h_N) + r_{22}^{(N-k)}(h_{k+1}, \dots, h_N) \right] - \varepsilon_k^{-1} R_2(h_k) \left[ R_1(h_k) + g_k r_{11}^{(N-k)}(h_{k+1}, \dots, h_N) \right] \right\}.$$

Применив к решению (1) обратное преобразование Фурье, получим интегральное представление решения в матричном виде, позволяющее перейти к решению динамической смешанной задачи, когда на поверхность среды нанесена система электродов, и провести расчет динамических характеристик задачи (сдвиговых смещений, напряжений, электрического потенциала и электрической индукции).

В работе проведены качественные и количественные исследования дисперсионных свойств элементов матрицы Грина  $\mathbf{R}_3$  (трехслойная среда толщиной  $2(h_1 + h_2 + h_3)$  без дефектов на стыке слоев). Построены графики фазовых скоростей распространяющихся по поверхности среды волн и изучено влияние различных параметров пьезоактивных материалов на величину этих скоростей.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (11-08-00135).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Пряхина О.Д., Смирнова А.В. Эффективный метод решения динамических задач для слоистых сред с разрывными граничными условиями // ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 3. С. 499 – 506.
2. Пряхина О.Д., Смирнова А.В. Аналитический метод решения динамических задач для слоистых сред с включениями // Изв. РАН. МТТ. 2005. № 2. С. 87 – 97.

3. Пряхина О.Д., Смирнова А.В. Рекуррентная процедура вычисления элементов матрицы Грина многослойных сред // Вестник ЮНЦ РАН. Т. 4. № 1. 2008. С. 3 – 7.
4. Пряхина О.Д., Смирнова А.В. Динамические задачи для составных пьезоэлектриков с системой электродов// Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2009. №1. С.59–65.
5. Пряхина О.Д., Смирнова А.В., Самойлов М.В., Маслов Р.Г. Учет связанности физических полей в динамических задачах для многослойных сред// Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2010. №1. С.54–60.
6. Пряхина О.Д., Смирнова А.В., Самойлов М.В. Эффективный метод исследования динамики слоистых электроупругих сред // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. №4. Часть 4. С.1719–1721.

### **Сведения об авторах**

Пряхина Ольга Донатовна – д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры интеллектуальных информационных систем, Кубанский государственный университет, факультет компьютерных технологий и прикладной математики, (861) 2199603

E-mail [onna@kubsu.ru](mailto:onna@kubsu.ru)

Смирнова Алла Васильевна – д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры интеллектуальных информационных систем, Кубанский государственный университет, факультет компьютерных технологий и прикладной математики, (861) 2199603

E-mail [allasmir@yandex.ru](mailto:allasmir@yandex.ru)

Самойлов Максим Викторович – аспирант кафедры интеллектуальных информационных систем, Кубанский государственный университет, факультет компьютерных технологий и прикладной математики, (861) 2682575

E-mail [yt-56@mail.ru](mailto:yt-56@mail.ru)

# УСЛОВИЯ СВЯЗАННОЙ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОЙ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ В НЕЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ТЕОРИЯХ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Радаев Ю. Н.

В рамках нелинейной теории термоупругого континуума Грина–Нахди (GNIII, type-III thermoelasticity) приводится вывод условий термодинамической (термомеханической) ортогональности в “пространстве” обобщённых термодинамических сил. Принцип термодинамической ортогональности был предложен Г.Циглером как обобщение линейной термодинамики необратимых процессов Л.Онсагера. В силу условий термодинамической ортогональности, в связанных процессах термоупругого деформирования и теплопроводности твердых тел термодинамический поток (точнее, необратимая составляющая референциального потока энтропии) геометрически ортогонален регулярной поверхности уровня потенциала рассеяния. Неотрицательность внутреннего производства энтропии обеспечивается геометрической выпуклостью поверхностей уровня потенциала рассеяния. Рассматривается нелинейный определяющий закон теплопроводности в теории GNIII, удовлетворяющий принципу ортогональности термодинамических потоков и сил. Устанавливаются также два предельных варианта определяющих законов термоупругости: GNI/CTE – (type-I thermoelasticity) стандартная термоупругость, основанная на классическом законе теплопроводности Фурье; GNII – (type-II thermoelasticity) гиперболическая недиссипативная термоупругость с присущим ей нулевым внутренним производством энтропии и полностью обратимым референциальным потоком энтропии.

1. В последнее десятилетие в различных областях механики и физики были предприняты успешные попытки выйти за пределы классической линейной термодинамики необратимых процессов. Главная идея обобщения традиционных подходов состоит в расширении числа переменных, описывающих состояние термодинамической системы (extended irreversible thermodynamics). В качестве новых переменных состояния обычно используются обобщённые термодинамические потоки или (в двойственной формулировке) обобщённые термодинамические силы. В такой постановке энтропия системы и термодинамические потенциалы состояния (например, свободная энергия Гельмгольца) также оказываются функциями дополнительных переменных, приобретая совершенно иные аналитические формы. То же самое касается вектора потока энтропии и внутреннего производства энтропии. Классические переменные состояния, как известно, относятся к числу “медленных” переменных; использование их в теории транспорта тепла в качестве термодинамического базиса вместе с законами сохранения приводят к ряду противоречий. Учёт дополнительных переменных состояния (“быстрых” переменных) приводит к гиперболическим уравнениям и, в частности, к гиперболическим теориям теплопроводности. Теория связанной термоупругости Грина–Нахди (GN) [1], [2] в полной мере отвечает принципам такой расширенной термодинамики.

В соответствии с лагранжевым подходом нелинейная деформация термоупругого тела описывается “конечным” преобразованием отсчётной конфигурации (R) в актуальную

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t), \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{x}$  — отсчётные и актуальные положения. “Конечные” тензоры деформации при этом конструируются, исходя из (1.1), с помощью градиента деформации  $\mathbf{F}$  ( $\nabla_{\mathbf{R}}$  — отсчётный оператор Гамильтона)

$$\mathbf{F} = \nabla_{\mathbf{R}} \otimes \mathbf{x}. \quad (1.2)$$

В дальнейшем изложении используется якобиан “конечной” деформации  $J = \det \mathbf{F}$ . Тензор истинных напряжений (тензор напряжений Коши) будет обозначаться через  $\mathbf{T}$ . Символом  $\mathbf{S}$  указывается первый тензор напряжений Пиола–Кирхгофа ( $\mathbf{S} = J\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{T}$ ). Вектор  $\mathbf{h}_{\mathbf{R}}$  — референциальный вектор потока тепла,  $\mathbf{j}_{\mathbf{R}}$  — референциальный вектор потока энтропии. Объемная плотность внутренней энергии  $e$  и объемная плотность энтропии  $s$  будут относиться к отсчётной конфигурации.

Дифференциальные уравнения нелинейной теории термоупругости включают:

$$\left. \frac{\partial \rho_{\mathbf{R}}}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} = 0 \quad (\text{баланс массы, } \rho_{\mathbf{R}} \text{ — плотность тела в отсчётной конфигурации); \quad (1.3)$$

$$\rho_{\mathbf{R}} \ddot{\mathbf{x}} = \nabla_{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{S} \quad (\text{баланс импульса}); \quad (1.4)$$

$$\dot{e} = -\nabla_{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{h}_{\mathbf{R}} + \text{tr}(\mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{F}}^T) + \varepsilon \quad (\text{баланс внутренней энергии, } \varepsilon \text{ — лучистое тепло}); \quad (1.5)$$

$$\dot{s} = -\nabla_{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{j}_{\mathbf{R}} + \sigma + \xi \quad (\text{баланс энтропии}). \quad (1.6)$$

В последнем из балансовых уравнений величина  $\sigma$  представляет собой внешнее производство энтропии. Внутреннее производство энтропии  $\xi$  обязано удовлетворять неравенству необратимости

$$\xi \geq 0. \quad (1.7)$$

В качестве основной термической переменной в теории Грина–Нахди [1], [2] используется температурное смещение  $\vartheta$ . В теории третьего типа (GNIII) полный термодинамический базис состоит из следующих термодинамических переменных состояния:

$$\vartheta, \dot{\vartheta}, \nabla_{\mathbf{R}} \vartheta, \nabla_{\mathbf{R}} \dot{\vartheta}, \mathbf{F}. \quad (1.8)$$

Указанные переменные состояния считаются независимыми и именно в этом смысле они образуют термодинамический базис. Термодинамические потенциалы состояния при этом зависят, вообще говоря, от всех перечисленных переменных. Выбор базиса решающим образом влияет на математическую модель транспорта тепла в твёрдых деформируемых средах.

Термодинамически допустимыми будем считать только такие процессы, для которых уравнение баланса энтропии (1.6) выполняется в силу дифференциальных ограничений (1.3) – (1.5). Это утверждение известно как *принцип непротиворечивости*. Следствиями этого принципа являются соотношение  $\theta = \theta(\dot{\vartheta})$  ( $\theta$  — абсолютная температура), уравнение, связывающие поток тепла и поток энтропии

$$\theta \mathbf{j}_{\mathbf{R}} = \mathbf{h}_{\mathbf{R}}, \quad (1.9)$$

и уравнение, связывающее объёмное производство внутренней энергии (лучистое тепло, radiant heat) и внешнее производство энтропии

$$\theta \sigma = \varepsilon. \quad (1.10)$$

Принцип непротиворечивости, таким образом, дает возможность не рассматривать в дальнейшем уравнение баланса энтропии (1.6), поскольку оно будет заведомо выполняться в силу (1.9) и (1.10). Уравнения баланса (1.3)–(1.5) вместе с (1.9), (1.10) позволяют получить следующее широко используемое в термомеханике континуума приведённое уравнение баланса энергии

$$-(\dot{\psi} + s\dot{\theta}) + \text{tr}(\mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{F}}^T) - \mathbf{j}_{\mathbf{R}} \cdot \nabla_{\mathbf{R}} \theta = \theta \xi. \quad (1.11)$$

Здесь  $\psi = e - s\theta$  — референциальная объёмная плотность свободной энергии Гельмгольца.

2. Приведённые выше дифференциальные уравнения термоупругости должны быть дополнены определяющими уравнениями. В соответствии с выбором термодинамического базиса в виде (1.8) наиболее общие определяющие уравнения в теории GNIII будут иметь следующую форму:

$$\begin{aligned} \psi &= \psi(\vartheta, \dot{\vartheta}, \nabla_{\mathbf{R}} \vartheta, \nabla_{\mathbf{R}} \dot{\vartheta}, \mathbf{F}), \\ \mathbf{h}_{\mathbf{R}} &= \mathbf{h}_{\mathbf{R}}(\vartheta, \dot{\vartheta}, \nabla_{\mathbf{R}} \vartheta, \nabla_{\mathbf{R}} \dot{\vartheta}, \mathbf{F}), \\ \mathbf{S} &= \mathbf{S}(\vartheta, \dot{\vartheta}, \nabla_{\mathbf{R}} \vartheta, \nabla_{\mathbf{R}} \dot{\vartheta}, \mathbf{F}), \\ s &= s(\vartheta, \dot{\vartheta}, \nabla_{\mathbf{R}} \vartheta, \nabla_{\mathbf{R}} \dot{\vartheta}, \mathbf{F}), \\ \xi &= \xi(\vartheta, \dot{\vartheta}, \nabla_{\mathbf{R}} \vartheta, \nabla_{\mathbf{R}} \dot{\vartheta}, \mathbf{F}), \\ \theta &= \theta(\dot{\vartheta}). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Второе из них собственно и будет устанавливать обобщённый закон теплопроводности, характерный для термоупругости третьего типа GNIII.

Определяющие уравнения (2.1) в силу своей общности пока еще непригодны в прикладных вопросах и нуждаются в дальнейшей конкретизации. Для этого необходимо выполнить подстановку (2.1) в уравнение (1.11) и, пользуясь тем, что уравнение (1.11) должно

выполняться для всех термодинамически допустимых процессов, приравнять нулю коэффициенты при *высших* градиентах  $\ddot{\mathfrak{G}}, \nabla_{\mathbf{R}} \dot{\mathfrak{G}}, \dot{\mathbf{F}}$ .

В результате приходим к заключению, что свободная энергия в действительности не может зависеть от градиента  $\nabla_{\mathbf{R}} \dot{\mathfrak{G}}$ , т.е.

$$\psi = \psi(\mathfrak{G}, \dot{\mathfrak{G}}, \nabla_{\mathbf{R}} \mathfrak{G}, \mathbf{F}), \quad (2.2)$$

и, кроме того, — к определяющим соотношениям для энтропии и тензора Пиола–Кирхгофа

$$s = -\frac{1}{\partial \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \dot{\mathfrak{G}}}, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}}. \quad (2.4)$$

Для внутреннего производства энтропии остается выражение

$$\theta \xi = -\left( \mathbf{j}_{\mathbf{R}} + \frac{\partial \psi}{\partial \nabla_{\mathbf{R}} \mathfrak{G}} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{R}} \dot{\mathfrak{G}} - \frac{\partial \psi}{\partial \mathfrak{G}} \dot{\mathfrak{G}}, \quad (2.5)$$

которое при условии, что определяющие уравнения не содержат явных вхождений температурного смещения, сводится к

$$\theta \xi = -\left( \mathbf{j}_{\mathbf{R}} + \frac{\partial \psi}{\partial \nabla_{\mathbf{R}} \mathfrak{G}} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{R}} \dot{\mathfrak{G}}. \quad (2.6)$$

**3.** Формула для внутреннего производства энтропии в термоупругом континууме (2.6) имеет классическую структуру произведения необратимой составляющей термодинамического потока и термодинамической силы  $-\nabla_{\mathbf{R}} \dot{\mathfrak{G}}$ . Следовательно, можно завершить конструирование определяющих уравнений термоупругости, опираясь на принцип термодинамической ортогональности, формулировка которого была предложена Г.Циглером в ряде работ, начиная с 1958 г. (см., например, [3]). Принцип термодинамической ортогональности выступает как одно из обобщений линейной теории Л.Онсагера (1931 г.).

Введем потенциал рассеяния

$$\theta \xi = D = D(\dot{\mathfrak{G}}, \nabla_{\mathbf{R}} \mathfrak{G}, \mathbf{F}; \nabla_{\mathbf{R}} \dot{\mathfrak{G}}) \quad (3.1)$$

как функцию от термодинамической силы  $-\nabla_{\mathbf{R}} \dot{\mathfrak{G}}$ . На основании принципа термодинамической ортогональности необратимая составляющая термодинамического потока  $\mathbf{j}_{\mathbf{R}} + \frac{\partial \psi}{\partial \nabla_{\mathbf{R}} \mathfrak{G}}$  геометрически ортогональна (в “пространстве” термодинамических сил) поверхности уровня потенциала рассеяния  $D(\dot{\mathfrak{G}}, \nabla_{\mathbf{R}} \mathfrak{G}, \mathbf{F}; \nabla_{\mathbf{R}} \dot{\mathfrak{G}}) = \text{const}$ .

Таким образом, в регулярных точках поверхности уровня имеем следующее условие градиентальности с множителем  $\Omega$ :

$$\mathbf{j}_{\mathbf{R}} + \frac{\partial \psi}{\partial \nabla_{\mathbf{R}} \mathfrak{G}} = -\Omega \frac{\partial D}{\partial \nabla_{\mathbf{R}} \dot{\mathfrak{G}}}, \quad (3.2)$$

откуда

$$\mathbf{j}_{\mathbf{R}} = -\frac{\partial \psi}{\partial \nabla_{\mathbf{R}} \mathfrak{G}} - \Omega \frac{\partial D}{\partial \nabla_{\mathbf{R}} \dot{\mathfrak{G}}} \quad (3.3)$$

Множитель  $\Omega$  в уравнении (3.3) вычисляется на основании (3.1) и (3.2)

$$\theta \xi = D = \Omega (\nabla_{\mathbf{R}} \dot{\mathfrak{G}}) \cdot \frac{\partial D}{\partial \nabla_{\mathbf{R}} \dot{\mathfrak{G}}}, \quad (3.4)$$

откуда

$$\Omega = \frac{1}{(\nabla_{\mathbf{R}} \dot{\mathfrak{G}}) \cdot \frac{\partial D}{\partial \nabla_{\mathbf{R}} \dot{\mathfrak{G}}}} D. \quad (3.5)$$

В итоге, подставляя (3.5) в уравнение (3.3), приходим к *закону теплопроводности*, согласующемуся с теорией GNII и принципом термодинамической ортогональности

$$\mathbf{j}_{\mathbf{R}} = -\frac{\partial \psi}{\partial \nabla_{\mathbf{R}} \mathfrak{G}} - \frac{1}{(\nabla_{\mathbf{R}} \dot{\mathfrak{G}}) \cdot \frac{\partial D}{\partial \nabla_{\mathbf{R}} \dot{\mathfrak{G}}}} D \frac{\partial D}{\partial \nabla_{\mathbf{R}} \dot{\mathfrak{G}}}. \quad (3.6)$$

Заметим, что выполнение неравенства необратимости (1.7) обеспечивается геометрической выпуклостью поверхностей уровня потенциала  $D$  в “пространстве” термодинамических сил.

Теория связанной термоупругости первого типа GNI/CTE (conventional thermoelasticity) получается в предположении, что свободная энергия *явным* образом не зависит от температурного смещения  $\mathfrak{G}$  и градиента температурного смещения  $\nabla_{\mathbf{R}} \mathfrak{G}$ ; поэтому  $\psi = \psi(\dot{\mathfrak{G}}, \mathbf{F})$ . В результате внутреннее производство энтропии вычисляется как

$$\theta \xi = -\mathbf{j}_{\mathbf{R}} \cdot \nabla_{\mathbf{R}} \dot{\mathfrak{G}}. \quad (3.7)$$

Условие термодинамической ортогональности в этом случае обобщает закон теплопроводности Фурье в форме следующего уравнения:

$$\mathbf{j}_{\mathbf{R}} = -\frac{D}{(\nabla_{\mathbf{R}} \dot{\mathfrak{G}}) \cdot \frac{\partial D}{\partial \nabla_{\mathbf{R}} \dot{\mathfrak{G}}}} \frac{\partial D}{\partial \nabla_{\mathbf{R}} \dot{\mathfrak{G}}}. \quad (3.8)$$

Теория второго типа GNII получается, если полагать, что процесс распространения тепла не сопровождается внутренним производством энтропии. На основании (2.6) это возможно, только если вектор потока энтропии состоит только из одной обратимой составляющей

$$\mathbf{j}_{\mathbf{R}} = -\frac{\partial \psi}{\partial \nabla_{\mathbf{R}} \mathfrak{G}}. \quad (3.9)$$

Закон теплопроводности (3.9) обладает одной замечательной особенностью: вектор потока тепла полностью определяется термодинамическими переменными состояния  $\dot{\mathfrak{G}}, \nabla_{\mathbf{R}} \mathfrak{G}, \mathbf{F}$  и заданием свободной энергии  $\psi = \psi(\dot{\mathfrak{G}}, \nabla_{\mathbf{R}} \mathfrak{G}, \mathbf{F})$ . Линеаризованные уравнения термоупругости GNII являются гиперболическими и допускают решения в форме распространяющихся с конечной скоростью незатухающих термических волн “второго звука”.

**4.** Принцип, аналогичный принципу термодинамической ортогональности, впервые появился в математической теории пластичности (там он известен как *принцип максимума Мизеса*) и выступал как ее основополагающий принцип, из которого следовали геометрическая выпуклость в “пространстве” напряжений  $\boldsymbol{\sigma}$  поверхности текучести  $f(\boldsymbol{\sigma}) = 0$  и ортогональность приращения пластической деформации  $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$  поверхности текучести. Указанное условие ортогональности собственно и представляет собой определяющий закон математической теории пластичности — ассоциированный с условием пластичности  $f(\boldsymbol{\sigma}) = 0$  закон течения (см, например, [4]):

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^P = (d\lambda) \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (f(\boldsymbol{\sigma}) = 0, df(\boldsymbol{\sigma}) = 0).$$

Здесь в скобках справа приводятся признаки активного нагружения идеально пластического тела, выполнение которых указывает на наличие необратимого термодинамического потока  $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$  в том случае, когда действительные напряжения  $\boldsymbol{\sigma}$  находятся на пределе текучести и при инфинитезимальном догружении  $d\boldsymbol{\sigma}$  напряжения  $\boldsymbol{\sigma} + d\boldsymbol{\sigma}$  также не

утрачивают своего предельного характера ( $f(\boldsymbol{\sigma} + d\boldsymbol{\sigma}) = 0$ ). Множитель  $d\lambda \geq 0$  — неопределенный множитель, имеющий смысл множителя Лагранжа при решении экстремальной задачи, соответствующей принципу максимума.

Сдвиговая природа пластической деформации металлов и горных пород прекрасно отображается решениями гиперболических уравнений математической теории пластичности с определяющим уравнением в форме ассоциированного закона течения и условием текучести Кулона–Треска.

Нет никаких сомнений в том, что принцип максимума Мизеса (и родственный ему принцип термодинамической ортогональности) является фундаментальным принципом механики деформируемого твердого тела и в широком смысле — всеобъемлющим принципом современного естествознания. В сочетании с концепцией дополнения “медленных” термодинамических переменных состояния “быстрыми” он дает возможность сформулировать термомеханику деформируемых тел с помощью дифференциальных уравнений гиперболического аналитического типа.

Представленная работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 10-01-00184-а “Волновые задачи связанной гиперболической термоупругости”).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Green A.E., Naghdi P.M. On undamped heat waves in an elastic solid. //J. Thermal Stresses, 1992, vol. 15, pp. 253–264.
2. Green A.E., Naghdi P.M. Thermoelasticity without energy dissipation.// J. Elasticity, 1993, vol. 31, pp. 189–208.
3. Ziegler H. Proof of an orthogonality principle in irreversible thermodynamics.//Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP), 1970, vol. 21, No. 6, pp. 853–863.
4. Радаев Ю.Н. Пространственная задача математической теории пластичности. Самара: Изд-во Самарского гос. университета, 2006. 340 с.

### Сведения об авторе:

**Радаев Юрий Николаевич** – ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, + 7 (495) 4343592

**E-mail:** [radayev@ipmnet.ru](mailto:radayev@ipmnet.ru), [y.radayev@gmail.com](mailto:y.radayev@gmail.com)

# ВЛИЯНИЕ ОРИЕНТАЦИИ ВЕКТОРА СКОРОСТИ УДАРНИКА НА РАЗРУШЕНИЕ АНИЗОТРОПНОЙ ПРЕГРАДЫ ПРИ ВЫСОКОСКОРОСТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ

Радченко А. В., Радченко П. А.

Рассматривается задача нормального и косоугольного взаимодействия удлинённого стального изотропного цилиндрического ударника с ортотропной пластиной в диапазоне скоростей удара до 2000 м/с в случае, когда вектор скорости ударника не совпадает с его продольной осью. Исследовано влияние угла нутации на разрушение пластины и на поведение ударника в процессе внедрения. Задача решается численно, методом конечных элементов в трёхмерной постановке. Поведение материала ударника описывается упруго-пластической моделью, поведение материала преграды описывается в рамках упруго-хрупкой модели.

1. В реальных условиях, направление вектора скорости, как правило, не совпадает с направлением продольной оси движущегося тела, и составляет с ним некоторый угол, называемый углом нутации. Влияние угла нутации на процесс взаимодействия ударника и преграды определяется не только его величиной, но и геометрическими и кинематическими параметрами процесса. Очевидно, что для случая удлинённого ударника влияние угла нутации более значительно, чем для компактного ударника, потому что в этом случае наличие угла нутации меняет не только картину напряжённо-деформируемого состояния взаимодействующих тел, но и может приводить к потере устойчивости в ударнике. Проблема высокоскоростного проникания удлинённых (более 10 калибров) ударников в преграду представляет собой специфическую задачу. Эта задача сложна как для экспериментального исследования, так и для математического и численного. Проведение физического эксперимента с удлинёнными ударниками (по сравнению с компактными) сопряжено с дополнительными трудностями различного характера: для обеспечения контролируемого метания таких ударников надо создавать специальные технические устройства (вакуумная трасса, поддоны, ведущие пояски и т.д.); также в процессе внедрения в преграду удлинённых ударников помимо их деформирования и разрушения возможна потеря устойчивости, поэтому необходимо иметь регистрирующую аппаратуру, которая позволяет фиксировать этот процесс во времени. При математическом и численном исследовании подобных задач основные проблемы следующие: 1) адекватность модельного представления поведения удлинённых ударников при высокоскоростном проникании – в идеале математическая модель должна описывать всю специфику поведения таких ударников: разрушение, срабатывание и прогнозирование потери устойчивости ударника в зависимости от условий взаимодействия, которые включают в себя диапазон скоростей удара, углов подхода и углов нутации; свойства материала ударника и преграды, соотношения их геометрических параметров; 2) при создании численных методик надо создавать алгоритмы и методы, обеспечивающие такую дискретизацию, чтобы она не вносила нефизических возмущений, также алгоритм должен обеспечивать возможность длительного расчёта по времени без накопления существенных погрешностей, искажающих результаты.

2. Рассматривается трёхмерная задача высокоскоростного взаимодействия удлинённого цилиндрического ударника с анизотропной преградой (рис. 1). Материал ударника – изотропная сталь ( $\rho_0=7800\text{кг/м}^3$ ,  $\sigma_d=1.01\text{ГПа}$ ), материал преграды – ортотропный органический полимер ( $\rho_0=1350\text{кг/м}^3$ ) с соотношением прочностных и упругих свойств:  $E_x > E_y > E_z$ ,  $\sigma_{bx} > \sigma_{by} > \sigma_{bz}$  [1]. Удлинение ударника составляет 20 калибров (диаметр 5 мм, длина 100 мм), толщина преграды 30 мм. Исследован диапазон начальных скоростей ударника от 1000 до 2000 м/с. Угол встречи (угол между нормалью к преграде и продольной осью ударника) составлял  $\alpha = 0^\circ$  (нормальный удар) и  $\alpha = 60^\circ$ , угол нутации (угол между вектором скорости и продольной осью ударника)  $\beta = 0^\circ$  и  $\beta = 15^\circ$ . Для определённости примем, что угол нутации берётся со знаком плюс, если он отсчитывается от вектора скорости по часовой стрелке. На контактной поверхности между ударником и преградой реализованы условия скольжения без трения. На рис. 1 показана объёмная конфигурация удлинённого ударника и преграды при косом ударе с углом нутации. Динамику развития разрушений в преграде и поведение ударника для различных геометрических и кинематических условий взаимодействия иллюстрируют

рис. 2 – рис. 4, на которых в сечении  $ZOX$  в различные моменты времени приведены изолинии относительного объема разрушений (степени разрушения). Степень разрушения определяется как отношение объема разрушенного материала  $V_d$  к общему объему рассматриваемого элементарного объема материала  $V_0$ . Значение относительного объема разрушений равное 1 (черный цвет) означает, что материал в данной области полностью разрушен.

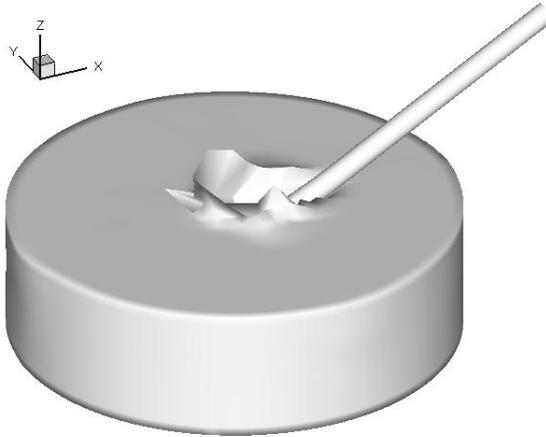


Рис. 1. Объемная конфигурация ударника и преграды.  $v_0=1000\text{м/с}$ ,  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 15^\circ$ ,  $t = 20\text{мкс}$ .

При нормальном проникании без угла нутации (рис. 2а) ударник сохраняет симметрию относительно продольной оси. Наблюдается симметричное увеличение диаметра головной части ударника, обусловленное действием волн разгрузки аналогично механизму, описанному в работе [2]. При нормальном проникании с углом нутации (рис. 2б) наблюдается существенная деформация головной части ударника, и потеря симметрии в части ударника, внедрившейся в преграду. При косом ударе со скоростью  $1000\text{м/с}$  (рис. 3) наблюдается существенный изгиб не сработавшейся части ударника при ударе с углом нутации (рис. 3б), тогда как при ударе без угла нутации изгиб в ударнике отсутствует. Увеличение начальной скорости удара приводит к тому, что влияние угла нутации на изменение формы (изгиб) не сработавшейся части ударника уменьшается (рис. 4).

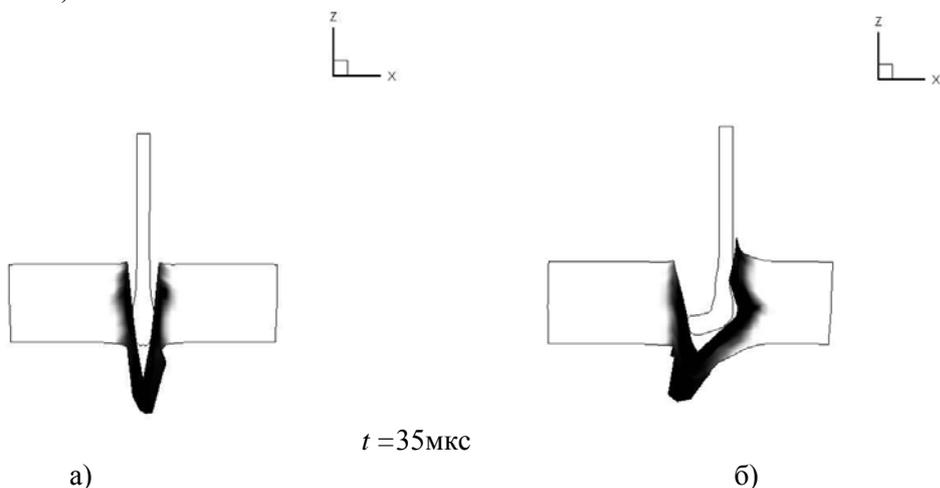


Рис. 2. Конфигурации взаимодействующих тел и степень разрушения материала преграды в сечении  $ZOX$ ,  $v_0=1000\text{м/с}$ ,  $\alpha = 0^\circ$ . а)  $\beta = 0^\circ$ , б)  $\beta = 15^\circ$ .

Это объясняется тем, что с увеличением скорости удара возрастает амплитуда ударной волны, инициируемой в начале процесса, что приводит к более интенсивному и объемному разрушению материала преграды. В результате чего воздействие материала преграды на ударник уменьшается. В тоже время увеличение скорости взаимодействия приводит к тому, что при ударе с углом нутации большее срабатывание ударника. Так для скорости  $2000\text{м/с}$  к  $35\text{мкс}$  длина не сработавшейся части ударника в случае угла нутации на 16% меньше, чем при ударе без угла нутации. Так же, как видно из представленных изолиний разрушения, наличие

положительного угла нутации приводит к увеличению объема разрушенного материала в преграде. Это так же наглядно иллюстрирует рис.5, где приведены изменения во времени относительного объема разрушений в преграде в целом при косом ударе. Причем с увеличением скорости удара разница возрастает, так для скорости 1000м/с (рис. 5а) разница составляет 20%, а для скорости 2000м/с (рис. 5б) уже 100%.

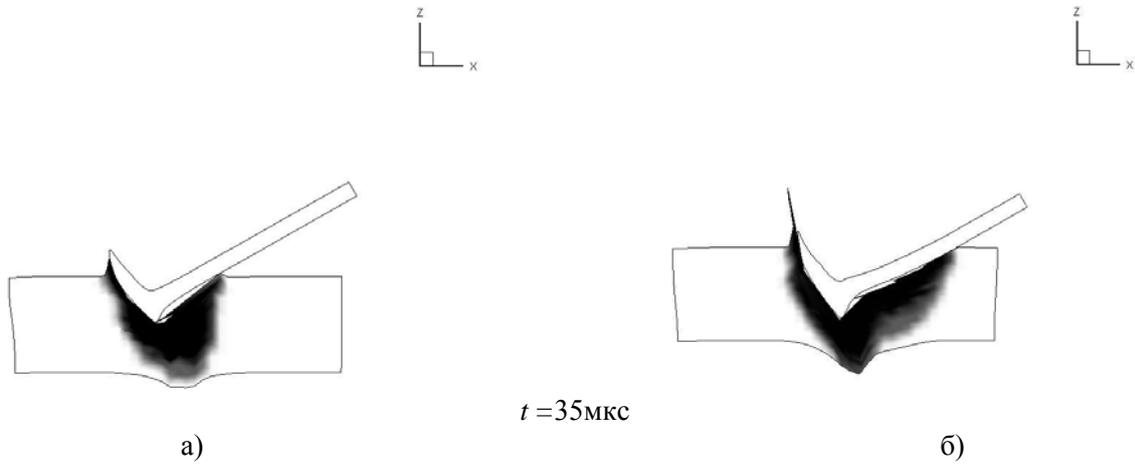


Рис. 3. Конфигурации взаимодействующих тел и степень разрушения материала преграды в сечении  $ZOX$ ,  $v_0=1000\text{м/с}$ ,  $\alpha = 60^\circ$ . а)  $\beta = 0^\circ$ , б)  $\beta = 15^\circ$ .

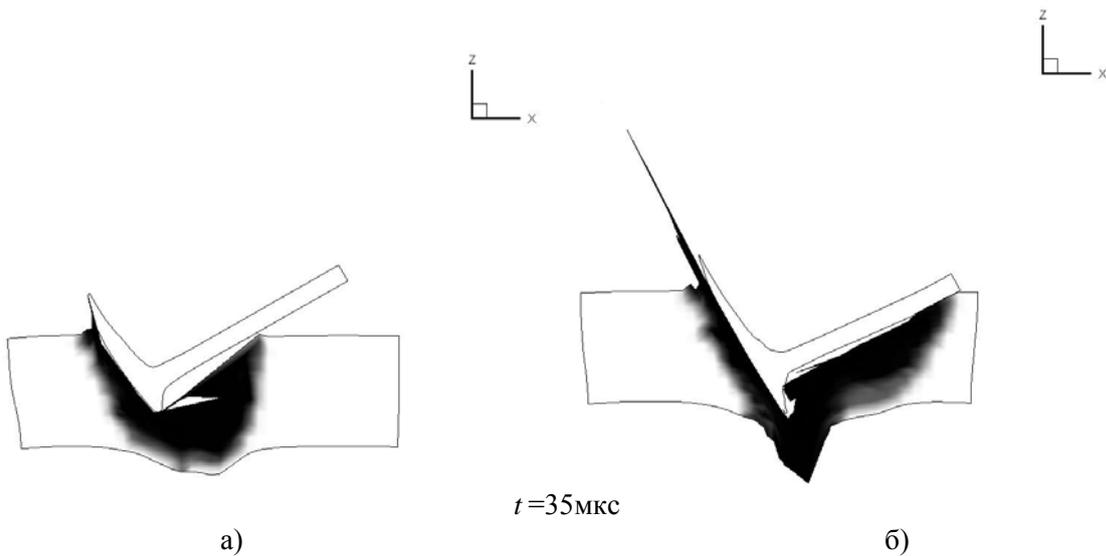


Рис. 4. Конфигурации взаимодействующих тел и степень разрушения материала преграды в сечении  $ZOX$ ,  $v_0=2000\text{м/с}$ ,  $\alpha = 60^\circ$ . а)  $\beta = 0^\circ$ , б)  $\beta = 15^\circ$ .

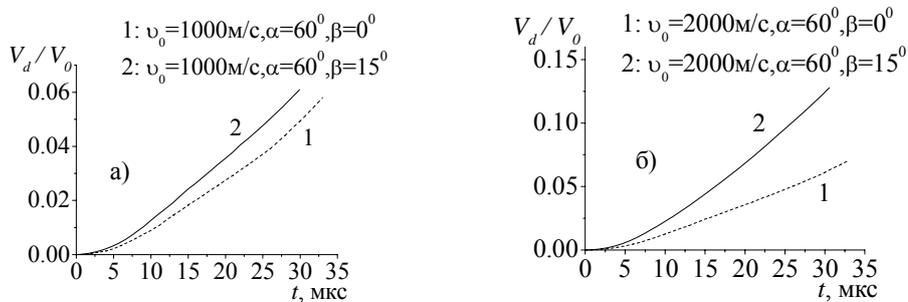


Рис. 5. Изменение во времени относительного объема разрушений в преграде.

3. Таким образом, угол нутации оказывает существенное влияние на процесс проникания стального ударника в ортотропную преграду из органопластика и приводит к (изгибу) потере устойчивости ударника, несмотря на существенно меньшее значение плотности материала преграды. Для рассмотренных условий взаимодействия ( $\beta=+15^\circ$ ) угол нутации приводит к увеличению объёма разрушенного материала в преграде.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Радченко А.В. Моделирование поведения анизотропных материалов при ударе.// Механика композиционных материалов и конструкций. 1998. Т.4. № 4. С.51-61.
2. Радченко А.В., Фортов В.Е., Хорев И.Е. Физические особенности высокоскоростного взаимодействия удлинённых техногенных осколков с конструкциями. //Доклады РАН. 2003. Т.389. № 1. С.49-54.

#### Сведения об авторах:

**Радченко Андрей Васильевич** – директор Института геоинформационных технологий и кадастра, Томский государственный архитектурно-строительный университет, +7(3822)472891  
**E-mail:** [andrey-radchenko@live.ru](mailto:andrey-radchenko@live.ru)

**Радченко Павел Андреевич** – научный сотрудник Института физики прочности и материаловедения СО РАН, +7(3822)286701  
**E-mail:** [radchenko@live.ru](mailto:radchenko@live.ru)

## РЕШЕНИЕ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ С ЗОНАМИ ТРЕНИЯ И СЦЕПЛЕНИЯ (ЗАДАЧА ГАЛИНА) МЕТОДОМ ДИСКРЕТНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ

Саакян А.В.

В предлагаемой работе решение контактной задачи о вдавлении штампа в упругую полуплоскость, когда зона контакта разбивается на участки сцепления и проскальзывания с трением, сводится к системе из трех сингулярных интегральных уравнений относительно тангенциального и нормального напряжений в зоне сцепления и контактного давления в зоне проскальзывания. Решение последней строится посредством прямого численного интегрирования определяющих уравнений методом дискретных особенностей. На основе численного анализа показана сходимость вычислительного процесса в зависимости от порядка интерполяционных формул. Построены графики распределения контактных напряжений, исследована зависимость длины зоны сцепления от коэффициента трения и коэффициента Пуассона.

Контактная задача о вдавлении штампа с плоским основанием в упругую полуплоскость, когда зона контакта разбивается на участки сцепления и проскальзывания с трением, впервые была рассмотрена Л.А.Галиным [1]. При помощи конформного отображения было построено приближенное решение в замкнутом виде. В работе [2] та же задача решена с применением уравнения класса Фукса. В работе [3] решение задачи сведено к векторной задаче Римана. В работе [4] с использованием метода Винера-Хопфа решение задачи сведено к бесконечной системе алгебраических уравнений. В последней работе имеются численные результаты, по которым можно провести сравнение результатов, полученных разными методами.

В предлагаемой работе решение задачи сводится к системе из трех сингулярных интегральных уравнений относительно тангенциального и нормального напряжений в зоне сцепления и контактного давления в зоне проскальзывания. Решение последней строится посредством прямого численного интегрирования методом дискретных особенностей [6]. На основе численного анализа показана сходимость вычислительного процесса в зависимости от порядка интерполяционных формул. Построены графики распределения контактных напряжений при различных значениях коэффициента трения и коэффициента Пуассона, а также кривые зависимости длины зоны сцепления от тех же характеристик.

Пусть жесткий штамп с плоским основанием длиной  $2a$  под действием сосредоточенной нормальной силы  $P$  вдавляется в упругую полуплоскость. Рассмотрим случай, когда сила приложена к середине штампа, т.е. имеем ось симметрии, по которой и направим ось ординат.

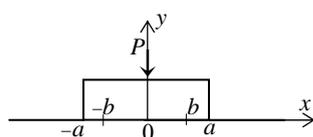


Рис. 1

Предположим, что в средней части  $(-b, b)$  зоны контакта имеет место сцепление, а у концов происходит скольжение (рис.1). При этом полагаем, что на участках скольжения тангенциальное напряжение  $q(x)$  подчиняется закону Кулона

$$q(x) = \begin{cases} -\theta p(x) & x \in (-a, -b) \\ \theta p(x) & x \in (a, b) \end{cases} \quad (1)$$

где  $\theta$  – коэффициент трения,  $p(x)$  – нормальное давление.

Для граничных точек полуплоскости в зоне контакта имеем [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1-2\nu}{2\mu} p(x) + \frac{1-\nu}{\mu\pi} \int_{-a}^a \frac{q(t)}{t-x} dt, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1-2\nu}{2\mu} q(x) + \frac{1-\nu}{\mu\pi} \int_{-a}^a \frac{p(t)}{t-x} dt \quad (2)$$

где  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  - горизонтальная и вертикальная компоненты перемещения.

Имеем следующие условия контакта:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \text{при } |x| < b \quad \text{и} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad q(x) = \theta \operatorname{sgn}(x) p(x) \quad \text{при } b < |x| < a \quad (3)$$

Кроме того, имеем условие равновесия штампа, выражаемое формулой:

$$\int_{-a}^a p(t) dt = P \quad (4)$$

Перейдём к безразмерным величинам:

$$t = a\tau; \quad x = as; \quad b^* = \frac{b}{a}; \quad q^*(\tau) = \frac{aq(a\tau)}{P}; \quad p^*(\tau) = \frac{a}{P}p(a\tau) \quad (5)$$

и подставим представления (2) в условия контакта (3). С учетом нечетности  $q^*(\tau)$  и четности  $p^*(\tau)$  получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \int_0^{b^*} \left[ \frac{1}{\tau-s} + \frac{1}{\tau+s} \right] q^*(\tau) d\tau - \theta \int_{b^*}^1 \left[ \frac{1}{\tau-s} + \frac{1}{\tau+s} \right] p^*(\tau) d\tau + \kappa p^*(s) &= 0 \quad (s < b^*) \\ \int_0^1 \left[ \frac{1}{\tau-s} - \frac{1}{\tau+s} \right] p^*(\tau) d\tau - \kappa q^*(s) &= 0 \quad (0 < s < b^*) \\ \int_0^1 \left[ \frac{1}{\tau-s} - \frac{1}{\tau+s} \right] p^*(\tau) d\tau + \kappa \theta p^*(s) &= 0 \quad (b^* < s < 1); \quad \kappa = \frac{\pi}{2} \frac{1-2\nu}{1-\nu} \end{aligned} \quad (6)$$

Условие равновесия (4) примет вид

$$\int_{-1}^1 p^*(\tau) d\tau = 1 \quad (7)$$

Рассматривая контактное давление  $p^*(\xi)$  как самостоятельную функцию на каждом из участков определения:  $g(\xi)$  при  $\xi < b^*$  и  $u(\xi)$  при  $b^* < \xi < 1$ , система уравнений (6) и условие равновесия (7) примут вид:

$$\begin{aligned} \int_0^{b^*} \left[ \frac{1}{\tau-s} + \frac{1}{\tau+s} \right] q^*(\tau) d\tau - \theta \int_{b^*}^1 \left[ \frac{1}{t-s} + \frac{1}{t+s} \right] u(t) dt + \kappa g(s) &= 0 \quad (0 < s < b^*) \\ \int_0^{b^*} \left[ \frac{1}{\tau-s} - \frac{1}{\tau+s} \right] g(\tau) d\tau + \int_{b^*}^1 \left[ \frac{1}{t-s} - \frac{1}{t+s} \right] u(t) dt - \kappa q^*(s) &= 0 \quad (0 < s < b^*) \\ \int_0^{b^*} \left[ \frac{1}{\tau-\sigma} - \frac{1}{\tau+\sigma} \right] g(\tau) d\tau + \int_{b^*}^1 \left[ \frac{1}{t-\sigma} - \frac{1}{t+\sigma} \right] u(t) dt + \kappa \theta u(\sigma) &= 0 \quad (b^* < \sigma < 1) \\ 2 \int_0^{b^*} g(\tau) d\tau + 2 \int_{b^*}^1 u(\tau) d\tau &= 1 \end{aligned} \quad (8)$$

При помощи замены переменных

$$\{\tau, s\} = \frac{b^*}{2}(1 + \{\xi, \zeta\}), \quad \{t, \sigma\} = \frac{1-b^*}{2}\{\xi, \zeta\} + \frac{1+b^*}{2} \quad (-1 < \{\xi, \zeta\} < 1) \quad (10)$$

и введения новых неизвестных

$$X(\xi) = q^* \left( \frac{b^*}{2}(1 + \xi) \right); \quad Y(\xi) = g \left( \frac{b^*}{2}(1 + \xi) \right); \quad Z(\xi) = u \left( \frac{1-b^*}{2}\xi + \frac{1+b^*}{2} \right) \quad (11)$$

систему (8) сведём на интервал  $(-1, 1)$  и запишем в виде:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{\xi-\zeta} + \frac{1}{\xi+\zeta+2} \right] X(\xi) d\xi - \theta \int_{-1}^1 \left( \frac{(1-b^*)Z(\xi)}{(1-b^*)\xi+1-b^*\zeta} + \frac{(1-b^*)Z(\xi)}{(1-b^*)\xi+1+2b^*+b^*\zeta} \right) d\xi + \kappa Y(\zeta) &= 0 \\ \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{\xi-\zeta} - \frac{1}{\xi+\zeta+2} \right] Y(\xi) d\xi + \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{\xi+\frac{1-b^*\zeta}{1-b^*}} - \frac{1}{\xi+\frac{1+2b^*+b^*\zeta}{1-b^*}} \right] Z(\xi) d\xi - \kappa X(\zeta) &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\int_{-1}^1 \left[ \frac{Y(\xi)}{\xi - \frac{1+(1-b^*)\zeta}{b^*}} - \frac{Y(\xi)}{\xi + \frac{1+2b^*+(1-b^*)\zeta}{b^*}} \right] d\xi + \int_{-1}^1 \left[ \frac{Z(\xi)}{\xi - \zeta} - \frac{Z(\xi)}{\xi + \zeta + 2\frac{1+b^*}{1-b^*}} \right] d\xi + \kappa\theta Z(\zeta) = 0$$

Условие равновесия (9) примет вид:

$$b^* \int_{-1}^1 Y(\xi) d\xi + (1-b^*) \int_{-1}^1 Z(\xi) d\xi = 1 \quad (13)$$

Очевидно, что неизвестные функции  $X(\xi)$  и  $Y(\xi)$  являются непрерывными функциями, принимающими конечные значения на обоих концах отрезка интегрирования, функция же  $Z(\xi)$  на правом конце неограничена. Из подробного анализа поведения уравнений в конечных точках отрезка интегрирования и проведённого численного эксперимента, находим, что неизвестные функции в системе (12) целесообразно представить в виде:

$$\begin{aligned} X(\xi) &= (1+\xi)C + X^*(\xi)(1-\xi)^\alpha \\ Y(\xi) &= -\frac{2C}{\theta} + Y^*(\xi)(1-\xi)^\alpha \\ Z(\xi) &= -2^\alpha \frac{C}{\theta} (1-\xi)^{1-\alpha} + \frac{Z^*(\xi)(1+\xi)^\alpha}{(1-\xi)^\alpha} \quad \left( 0 < \alpha = \frac{1}{\pi} \operatorname{arccotg} \left( \frac{\theta\kappa}{\pi} \right) < 1 \right) \end{aligned} \quad (14)$$

где  $C$  – постоянная, подлежащая определению,  $X^*(\xi), Y^*(\xi), Z^*(\xi)$  – гельдеровские функции, ограниченные на отрезке  $[-1, 1]$ .

Неизвестные функции  $X^*(\xi), Y^*(\xi)$  и  $Z^*(\xi)$  заменим интерполяционными многочленами:

$$\{X^*(x), Y^*(x)\} = \frac{2}{n+\alpha+1} \sum_{j=1}^n \frac{\{X^*(\xi_j), Y^*(\xi_j)\} P_n^{(\alpha,0)}(x)}{(x-\xi_j) P_{n-1}^{(1+\alpha,1)}(\xi_j)}; \quad P_n^{(\alpha,0)}(\xi_j) = 0 \quad (j = \overline{1, n}) \quad (15)$$

$$Z^*(x) = \frac{2}{n+1} \sum_{j=1}^n \frac{Z^*(\zeta_j) P_n^{(-\alpha,\alpha)}(x)}{(x-\zeta_j) P_{n-1}^{(1-\alpha,1+\alpha)}(\zeta_j)}; \quad P_n^{(-\alpha,\alpha)}(\zeta_j) = 0 \quad (j = \overline{1, n}) \quad (16)$$

Воспользовавшись квадратурными формулами для сингулярных и регулярных интегралов [5] и выбирая в качестве точек коллокации, согласно методу дискретных особенностей [6], корни функций Якоби второго рода, соответствующих многочленам  $P_n^{(\alpha,0)}(\xi)$  и  $P_n^{(-\alpha,\alpha)}(\xi)$ , систему интегральных уравнений (23), вместе с уравнением равновесия (13), заменим следующей системой линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n m_{j,k}^{1x} X^*(\xi_j) + \kappa(1-x_k)^\alpha \sum_{j=1}^n m_{j,k}^{1y} Y^*(\xi_j) - \theta \sum_{j=1}^n m_{j,k}^{1z} Z^*(\zeta_j) + m_k^{1C} C + \gamma_1 &= 0 \quad k = \overline{1, n+1} \\ -\kappa(1-x_k)^\alpha \sum_{j=1}^n m_{j,k}^{2x} X^*(\xi_j) + \sum_{j=1}^n m_{j,k}^{2y} Y^*(\xi_j) + \sum_{j=1}^n m_{j,k}^{2z} Z^*(\zeta_j) + m_k^{2C} C + \gamma_2 &= 0 \quad k = \overline{1, n+1} \\ \kappa \sum_{j=1}^n m_{j,k}^{3y} Y^*(\xi_j) - \theta \sum_{j=1}^n m_{j,k}^{3z} Z^*(\zeta_j) + m_k^{3C} C &= 0 \quad k = \overline{1, n} \\ b^* \sum_{j=1}^n m_j^e Y^*(\xi_j) + (1-b^*) \sum_{j=1}^n m_j^e Z^*(\zeta_j) + m^e C &= 1 \end{aligned} \quad (17)$$

Выражения элементов матрицы системы не приводятся из-за ограничения объёма статьи.

Нетрудно заметить, что в систему введены две дополнительные неизвестные  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  с целью получить замкнутую систему. Поскольку, помимо явно присутствующих в (17) неизвестных, неизвестной остается еще и относительная длина зоны сцепления  $b^*$ , то обращение дополнительно введенных неизвестных  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  в ноль должно стать условием для определения  $b^*$ . Для установления этого факта вычислим значения  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  для различных значений  $b^*$  при разных порядках интерполяции  $n$  (рис. 2).

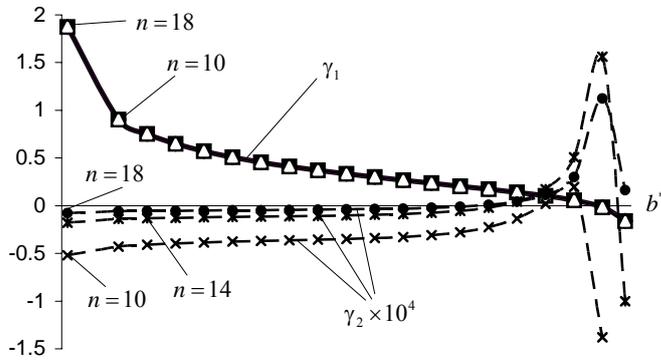


Рис.2

На рис.2 в виде графиков показаны зависимости регуляризирующих неизвестных  $\gamma_1$  (сплошная линия) и  $\gamma_2 \times 10^4$  (пунктирные линии) от параметра  $0 < b^* < 1$ , представляющего относительную длину зоны сцепления, при различных значениях порядка аппроксимации  $n = 10, 14, 18$ . Нетрудно заметить, что на рисунке лишь одна сплошная линия, но с разными маркерами, что означает практическую независимость величины  $\gamma_1$  от порядка аппроксимации.

Кроме того, замечаем, что эта линия только один раз меняет знак. В то время как вторая неизвестная  $\gamma_2$ , будучи малой величиной, существенно зависит от порядка аппроксимации и, можно сказать, стремится к нулю при его возрастании. Исходя из изложенного, можно заключить, что обращение в ноль неизвестной  $\gamma_1$  может служить условием для определения неизвестной длины зоны сцепления, а величина неизвестной  $\gamma_2$  – показателем близости приближённого решения к истинному решению.

Таблица 1.

$n$	$b^*$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$C$	$X^*(-1)$
6	0.68965	$8.3 \times 10^{-7}$	$-2.9 \times 10^{-4}$	-0.068995	$3.2 \times 10^{-4}$
8	0.6893	$6.5 \times 10^{-6}$	$-7.8 \times 10^{-5}$	-0.068918	$1.2 \times 10^{-4}$
10	0.6892	$4.6 \times 10^{-7}$	$-2.7 \times 10^{-5}$	-0.068894	$5.9 \times 10^{-5}$
14	0.68912	$1.2 \times 10^{-6}$	$-4.9 \times 10^{-6}$	-0.068877	$1.9 \times 10^{-5}$
18	0.689104	$2.4 \times 10^{-7}$	$-8.6 \times 10^{-7}$	-0.068871	$8.4 \times 10^{-6}$
22	0.689097	$2.7 \times 10^{-8}$	$6.7 \times 10^{-8}$	-0.068869	$4.3 \times 10^{-6}$
26	0.689092	$2.9 \times 10^{-7}$	$2.7 \times 10^{-7}$	-0.068867	$2.5 \times 10^{-6}$

С целью показать сходимость вычислительного процесса в таблице 1 приведены данные, полученные из результатов счёта для  $\nu = 0.3$ ,  $\theta = 0.3$ . Последние, в свою очередь, подтверждают сказанное о  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , а последний столбец указывает на обращение в ноль тангенциальных контактных напряжений в середине зоны контакта, обязательное в силу их нечётности.

В табл.2 представлены значения относительной длины зоны сцепления для различных значений коэффициента трения  $\theta$  при  $\nu = 0.3$ , полученные в настоящей работе при  $n = 14$  (второй столбец) и приведённые в работе [1] (третий столбец) и в работе [4] (четвёртый столбец). Сравнение второго и четвёртого столбцов показывает очень хорошее совпадение результатов, полученных методом дискретных особенностей и методом Винера-Хопфа.

На рис.3 показаны графики зависимости относительной длины зоны сцепления  $b^*$  от коэффициента трения  $\theta$  при  $\nu = 0.1, 0.2, 0.3$ , а на рис.4 – графики зависимости той же величины от коэффициента Пуассона  $\nu$  при  $\theta = 0.1, 0.2, 0.3$ . Как видно из рис. 3, при малых значениях коэффициента Пуассона  $\nu$  зона сцепления не может покрыть всю зону контакта независимо от величины коэффициента трения.

Таблица 2.

$\theta$	$b^*$	$a/l$	$a/b$
0.1	0.03645	0.0369	0.0365
0.15	0.17099		0.1710
0.2	0.36042	0.366	0.3604
0.25	0.54326		0.5432
0.3	0.68913	0.695	0.6891
0.4	0.86455	0.868	
0.5	0.94111	0.942	0.9410
0.7	0.98735	0.989	
1	0.99817	0.997	0.9979

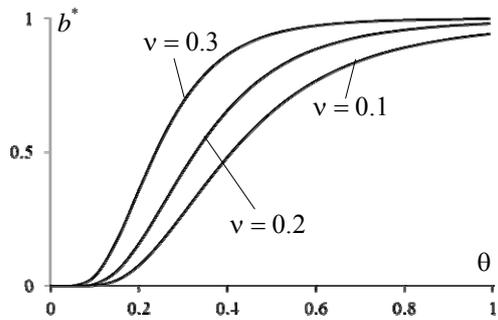


Рис.3

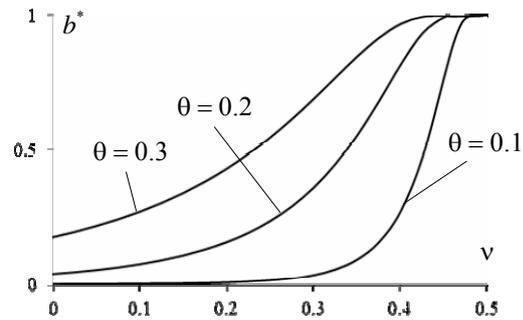


Рис.4

На рис.5 представлены кривые распределения контактного давления при  $\theta = 0.3$  и  $\nu = 0.2, 0.3, 0.35$ , на рис.6 – тангенциальных контактных напряжений при  $\nu = 0.3$  и  $\theta = 0.2, 0.3, 0.35$ . Пунктирной линией показано контактное давление при гладком контакте.

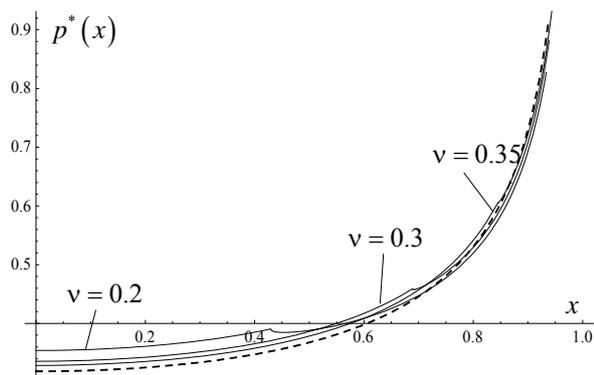


Рис.5

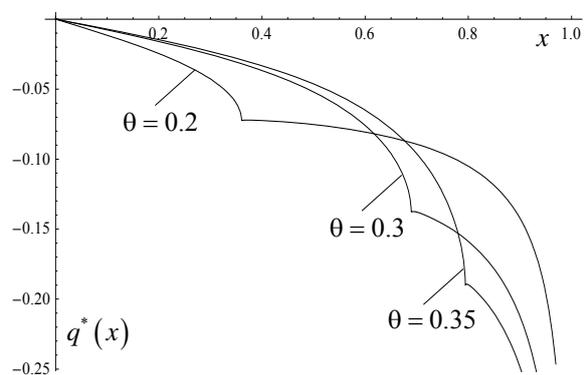


Рис.6

Автор выражает искреннюю благодарность А.А.Амирджянжу за плодотворное обсуждение работы и существенную помощь при её выполнении.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л.А. Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления. //ПММ. 1945. Т.IX. С.413-424.
2. Моссаковский В.И., Бискуп А.Г. Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления. //ДАН СССР. 1972. Т.206. №5. С.1068-1070.
3. Антипов Ю.А., Арутюнян Н.Х. Контактные задачи теории упругости при наличии трения и сцепления. //ПММ. 1991. Т.55. Вып.6. С.1005-1017.
4. Острик В.И., Улитко А.Ф. Метод Винера-Хопфа в контактных задачах теории упругости. Киев: Наукова Думка, 2006. 328с.
5. Саакян А.В. Квадратурные формулы типа Гаусса для сингулярных интегралов. //В сб. науч. трудов “Проблемы механики тонких деформируемых тел”, посв. 80-летию академика С.А.Амбарцумяна. Ереван: 2002, с. 259-265.
6. Sahakyan A.V. Method of Discrete Singularities for Solution of Singular Integral and Integro-Differential Equations. //Proc. of A.Razmadze Mathematical Institute. 156 (2011), p.101-111.

#### Сведения об авторе:

**Саакян Аветик Вараздатович** –

доктор физ.-мат. наук, зам.директора Института механики НАН РА,

Тел.: (37410) 568188, (37494)579348

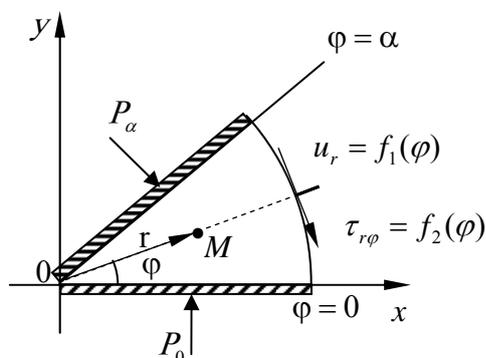
E-mail: [avsah@mechins.sci.am](mailto:avsah@mechins.sci.am), [avsahakyan@gmail.com](mailto:avsahakyan@gmail.com)

**О ВЛИЯНИИ ТИПА ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ  
НА ДУГОВУЮ ЧАСТЬ КОНТУРА КРУГОВОГО СЕКТОРА  
НА ПОВЕДЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В УСЛОВИЯХ  
ГЛАДКОГО КОНТАКТА НА РАДИАЛЬНЫХ СТОРОНАХ**  
Саргсян А.М.

Исследуется упругое равновесие тонкого кругового сектора с единичным радиусом и произвольным углом раствора  $\alpha$ , когда на дуговой части контура заданы нормальное перемещение и касательное напряжение, а на радиальных сторонах имеют место условия гладкого контакта. Замкнутое решение задачи получено с помощью метода разделения переменных.

В работах [1-5] исследовано упругое равновесие кругового сектора, когда на дуговой части контура заданы нормальные и касательные напряжения или нормальное напряжение и окружное перемещение. Было показано, что в обоих случаях, когда угол раствора клина стремится к  $\pi$  или  $2\pi$ , напряжения имеют степенную особенность типа  $r^{-1+\varepsilon}$  ( $\varepsilon \rightarrow +0$ ), а коэффициенты при такой особенности в условиях общего нагружения дуговой части границы в первой задаче отличны от нуля, а во второй задаче стремятся к нулю. Здесь анализируется другой случай нагружения дуговой части границы сектора.

Пусть в полярной системе координат имеем упругий сектор  $\Omega = \{0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \alpha, 0 < \alpha < 2\pi\}$ .



Фиг.1

Рассмотрим упругое состояние кругового сектора с единичным радиусом и произвольным углом раствора  $\alpha$  (фиг.1), определяемое решением бигармонического уравнения

$$\Delta\Delta\Phi(r, \varphi) = 0 \quad (1)$$

при следующих граничных условиях:

$$\tau_{r\varphi}(r, 0) = 0, u_\varphi(r, 0) = 0 \quad (2); \quad \tau_{r\varphi}(r, \alpha) = 0, u_\varphi(r, \alpha) = 0, \quad (3)$$

$$\tau_{r\varphi}(1, \alpha) = f_1(\varphi), u_\varphi(1, \alpha) = f_2(\varphi); \quad f_2(0) = f_2(\alpha) = 0. \quad (4)$$

Представим решение бигармонического уравнения (1) в виде [6]

$$\Phi(r, \varphi) = r^{\lambda+1} [AS_\varphi^+ + BC_\varphi^+ + CS_\varphi^- + DC_\varphi^-], \quad S_\varphi^\pm = \sin(\lambda \pm 1)\varphi, C_\varphi^\pm = \cos(\lambda \pm 1)\varphi. \quad (5)$$

Используя закон Гука, соотношение Коши, а также выражения компонентов напряжений через функции  $\Phi(r, \varphi)$  и удовлетворяя граничным условиям (2)–(3), получим однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных постоянных  $A, B, C, D$  [1–5]

$$\begin{aligned} \lambda^+ A + \lambda^- + C &= 0, \quad \lambda^+ \nu^+ A + (\lambda^- \nu^+ + 4)C = 0, \\ \lambda^+ C_\alpha^+ A - \lambda^+ S_\alpha^+ B + \lambda^- C_\alpha^- C - \lambda^- S_\alpha^- D &= 0, \\ \lambda^+ \nu^+ C_\alpha^+ A - \lambda^+ \nu^+ S_\alpha^+ B + (\lambda^- \nu^+ + 4)C_\alpha^- C - (\lambda^- \nu^+ + 4)S_\alpha^- D &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $\lambda^\pm = \lambda \pm 1$ ,  $\nu^\pm = 1 \pm \nu$ ,  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

Для существования нетривиального решения системы (6) необходимо, чтобы определитель

этой системы равнялся нулю. Из первых двух уравнений (6) вытекает, что  $A = C = 0$ . Тогда вычисляя определитель последних двух уравнений, получим

$$\sin(\lambda + 1)\alpha \cdot \sin(\lambda - 1)\alpha = 0,$$

корни которого действительные и простые

$$\lambda_k = \frac{\pi k}{\alpha} + 1, \quad \tilde{\lambda}_n = \frac{\pi n}{\alpha} - 1 \quad (k, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (7)$$

Требование конечности энергии упругой деформации в малой окрестности угловой точки сектора при конечной внешней нагрузке накладывает условие на корни (7)

$$\lambda_k > 0, \quad \tilde{\lambda}_n > 0. \quad (8)$$

Условие (8), в зависимости от величины угла раствора сектора  $\alpha$ , ограничивает пределы изменения  $k$  и  $n$ , а именно:

$$\text{I. } 0 < \alpha < 2\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (n = 2, 3, 4, \dots),$$

$$\text{II. } 0 < \alpha < \pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

$$\text{III. } \pi < \alpha < 2\pi \quad (k = -1, 0, 1, \dots), \quad (n = 2, 3, 4, \dots).$$

Учитывая, что функции

$$\Phi_{kn}(r, \varphi) = D_k r^{\lambda_k + 1} \cos(\lambda_k - 1)\varphi + B_n r^{\tilde{\lambda}_k + 1} \cos(\tilde{\lambda}_k + 1)\varphi$$

удовлетворяют уравнению (1) и граничным условиям (2)–(3), функции напряжений Эри для этих трёх случаев принимают вид:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \Phi_I \\ \Phi_{II} \\ \Phi_{III} \end{Bmatrix} &= D_{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos \alpha_0 \varphi \end{Bmatrix} \left\{ r^{2-\alpha_0} \right\} + D_0 r^2 + D_1 \begin{Bmatrix} \cos \alpha_0 \varphi \\ 0 \\ \cos \alpha_0 \varphi \end{Bmatrix} r^{2+\alpha_0} + \\ &+ \begin{Bmatrix} a=2 \\ a=1 \\ a=2 \end{Bmatrix} \sum_{k=a}^{\infty} [D_k r^{\lambda_k + 1} + B_k r^{\tilde{\lambda}_k + 1}] \cos \alpha_0 k \varphi. \end{aligned} \quad (9)$$

Для напряжений и перемещений  $u_r(r, \varphi)$  будем иметь:

$$\begin{aligned} \text{I. } \begin{Bmatrix} \sigma_\varphi \\ \tau_{r\varphi} \\ \sigma_r \end{Bmatrix} &= 2D_0 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} + D_1 \begin{Bmatrix} (1+\alpha_0)(2+\alpha_0)\cos \alpha_0 \varphi \\ \alpha_0(1+\alpha_0)\sin \alpha_0 \varphi \\ (1+\alpha_0)(2-\alpha_0)\cos \alpha_0 \varphi \end{Bmatrix} r^{\alpha_0} + \\ &+ \sum_{k=2}^{\infty} D_k \begin{Bmatrix} (\lambda_k + 1) \\ (\lambda_k - 1) \\ (3 - \lambda_k) \end{Bmatrix} \left\{ \lambda_k^* r^{\lambda_k - 1} + B_k \tilde{\lambda}_k (\tilde{\lambda}_k + 1) \right\} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} r^{\tilde{\lambda}_k - 1} \begin{Bmatrix} \cos \alpha_0 k \varphi \\ \sin \alpha_0 k \varphi \\ \cos \alpha_0 k \varphi \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (10')$$

$$\text{II. } \begin{Bmatrix} \sigma_\varphi \\ \tau_{r\varphi} \\ \sigma_r \end{Bmatrix} = 2D_0 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} + \sum_{k=1}^{\infty} D_k \begin{Bmatrix} (\lambda_k + 1) \\ (\lambda_k - 1) \\ (3 - \lambda_k) \end{Bmatrix} \left\{ \lambda_k r^{\lambda_k - 1} + B_k \tilde{\lambda}_k (\tilde{\lambda}_k + 1) \right\} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} r^{\tilde{\lambda}_k - 1} \begin{Bmatrix} \cos \alpha_0 k \varphi \\ \sin \alpha_0 k \varphi \\ \cos \alpha_0 k \varphi \end{Bmatrix} \quad (10'')$$

$$\text{III. } \begin{Bmatrix} \sigma_\varphi \\ \tau_{r\varphi} \\ \sigma_r \end{Bmatrix} = D_{-1} \begin{Bmatrix} (1-\alpha_0)(2-\alpha_0)\cos \alpha_0 \varphi \\ (1-\alpha_0)\alpha_0 \sin \alpha_0 \varphi \\ (1-\alpha_0)(2+\alpha_0)\cos \alpha_0 \varphi \end{Bmatrix} r^{-\alpha_0} + 2D_0 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} + D_1 \begin{Bmatrix} (1+\alpha_0)(2+\alpha_0)\cos \alpha_0 \varphi \\ \alpha_0(1+\alpha_0)\sin \alpha_0 \varphi \\ (1+\alpha_0)(2-\alpha_0)\cos \alpha_0 \varphi \end{Bmatrix} r^{\alpha_0} +$$

$$+ \sum_{k=2}^{\infty} \begin{bmatrix} D_k \begin{Bmatrix} (\lambda_k + 1) \\ (\lambda_k - 1) \\ (3 - \lambda_k) \end{Bmatrix} \lambda_k r^{\lambda_k - 1} + B_k \tilde{\lambda}_k (\tilde{\lambda}_k + 1) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} r^{\tilde{\lambda}_k - 1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \alpha_0 k \varphi \\ \sin \alpha_0 k \varphi \\ \cos \alpha_0 k \varphi \end{Bmatrix} \quad (10''')$$

$$\begin{Bmatrix} u_{rI} \\ u_{rII} \\ u_{rIII} \end{Bmatrix} = D_{-1} \cos \alpha_0 \varphi \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ (\lambda_1^+ \nu^+ - 4\nu) \end{Bmatrix} r^{1-\alpha_0} + 2D_0 \nu^- r - \quad (11)$$

$$- D_1 \cos \alpha_0 \varphi \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} (\lambda_1^+ \nu^+ - 4) r^{1+\alpha_0} - \begin{Bmatrix} a=2 \\ a=1 \\ a=2 \end{Bmatrix} \sum_{k=a}^{\infty} [D_k (\lambda_k^+ \nu^+ - 4) r^{\lambda_k} + B_k \lambda_k^- \nu^+ r^{\lambda_k - 2}] \cos \alpha_0 k \varphi.$$

Удовлетворяя граничным условиям (4), для определения  $D_k, B_k$  получим системы уравнений

$$\text{I.} \quad \begin{cases} D_1 \alpha_0 (1 + \alpha_0) \sin \alpha_0 \varphi + \sum_{k=2}^{\infty} [D_k \lambda_k (\lambda_k - 1) + B_k \tilde{\lambda}_k (\tilde{\lambda}_k + 1)] \sin \alpha_0 k \varphi = f_2(\varphi) \\ 2D_0 \nu^- - D_1 (\lambda_1^+ - 4) \cos \alpha_0 \varphi - \sum_{k=2}^{\infty} [D_k (\lambda_k^+ \nu^+ - 4) + B_k \lambda_k^- \nu^+] \cos \alpha_0 \varphi = Ef_1(\varphi) \end{cases}$$

$$\text{II.} \quad \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} [D_k \lambda_k (\lambda_k - 1) + B_k \tilde{\lambda}_k (\tilde{\lambda}_k + 1)] \sin \alpha_0 k \varphi = f_2(\varphi) \\ 2D_0 \nu^- - \sum_{k=1}^{\infty} [D_k (\lambda_k^+ \nu^+ - 4) + B_k \lambda_k^- \nu^+] \cos \alpha_0 k \varphi = Ef_1(\varphi) \end{cases}$$

$$\text{III.} \quad \begin{cases} D_{-1} \alpha_0 (1 - \alpha_0) \sin \alpha_0 \varphi + D_1 (1 + \alpha_0) \alpha_0 \sin \alpha_0 \varphi + \\ + \sum_{k=2}^{\infty} [D_k \lambda_k (\lambda_k - 1) + B_k \tilde{\lambda}_k (\tilde{\lambda}_k + 1)] \sin \alpha_0 k \varphi = f_2(\varphi) \\ D_{-1} (\lambda_1^+ \nu^+ - 4\nu) \cos \alpha_0 \varphi + 2D_0 \nu^- - D_1 \cos \alpha_0 \varphi (\lambda_1^+ \nu^+ - 4\nu) - \\ - \sum_{k=2}^{\infty} [D_k (\lambda_k^+ \nu^+ - 4) + B_k \lambda_k^- \nu^+] \cos \alpha_0 k \varphi = Ef_1(\varphi). \end{cases}$$

Поступая так же, как и в работах [1 – 5], для неизвестных  $D_k$  и  $B_k$  будем иметь

$$\text{I.} \quad D_0 = \frac{E}{2\alpha_0 \nu^-} \int_0^{\alpha} f_1(\varphi) d\varphi, \quad (k = 2, 3, 4, \dots), \quad D_1 = \frac{2}{\alpha} \frac{\tilde{f}_{21}}{\alpha_0 (1 + \alpha_0)} = \frac{-2}{\alpha} \frac{E}{\lambda_1^+ \nu^+ - 4} \tilde{f}_{11}, \quad (12')$$

$$D_k = \frac{2}{\alpha} \frac{E \tilde{f}_{1k} (\lambda_k - 2)(\lambda_k - 1) + \tilde{f}_{2k} (\lambda_k - 1) \nu^+}{2(\lambda_k - 1)(2\lambda_k + \nu - 3)}, \quad B_k = \frac{-2}{\alpha} \frac{E \lambda_k (\lambda_k - 1) \tilde{f}_{1k} + \tilde{f}_{2k} (\lambda_k^+ \nu^+ - 4)}{2(\lambda_k - 1)(2\lambda_k + \nu - 3)}.$$

При этом, имеет место соотношение

$$\tilde{f}_{11} E \alpha_0 (1 + \alpha_0) + \tilde{f}_{21} (\lambda_1^+ \nu^+ - 4) = 0, \quad (12^*)$$

$$\tilde{f}_{11} = \int_0^{\alpha} f_1(\varphi) \cos \alpha_0 \varphi d\varphi, \quad \tilde{f}_{21} = \int_0^{\alpha} f_2(\varphi) \sin \alpha_0 \varphi d\varphi.$$

Если  $\tilde{f}_{21} = 0$  ( $f_2(\varphi) = 0$  или  $f_2(\varphi)$  является нечётной функцией относительно точки  $\varphi = \alpha/2$  на дуге) или  $\lambda_1^+ \nu^+ - 4 = 0$ , то  $f_1(\varphi)$  является чётной функцией относительно линии  $\varphi = \alpha/2$ .

$$\text{II. } D_0 = \frac{E}{2\alpha_0\nu^-} \int_0^\alpha f_1(\varphi) d\varphi, \quad (k=1,2,3,\dots),$$

$$D_k = \frac{2}{\alpha} \frac{E\tilde{f}_{1k}(\lambda_k-2)(\lambda_k-1) + \tilde{f}_{2k}(\lambda_k-1)\nu^+}{2(\lambda_k-1)(2\lambda_k+\nu-3)}, \quad B_k = \frac{-2}{\alpha} \frac{E\lambda_k(\lambda_k-1)\tilde{f}_{1k} + \tilde{f}_{2k}(\lambda_k^+\nu^+ - 4)}{2(\lambda_k-1)(2\lambda_k+\nu-3)}. \quad (12'')$$

$$\text{III. } D_{-1} = \frac{-2}{\alpha\alpha_0(3-\nu)} \left[ \tilde{f}_{11}E\alpha_0(1+\alpha_0) + \tilde{f}_{21}(\lambda_1^+\nu^+ - 4) \right], \quad D_0 = \frac{E}{2\alpha_0\nu^-} \int_0^\alpha f_1(\varphi) d\varphi, \quad (k=1,2,3,\dots),$$

$$D_1 = \frac{2}{\alpha\alpha_0(3-\nu)} \left[ \tilde{f}_{11}E\alpha_0(1-\alpha_0) - \tilde{f}_{21}(\lambda_1^+\nu^+ - 4\nu) \right], \quad (12''')$$

$$D_k = \frac{2}{\alpha} \frac{\lambda_k^-\nu^+ \tilde{f}_{2k} + (\lambda_k-1)(\lambda_k-2)\tilde{f}_{1k} \cdot E}{(\lambda_k-1)(2\lambda_k+\nu-3)}, \quad B_k = -\frac{2}{\alpha} \frac{(\lambda_k^+\nu^+ - 4)\tilde{f}_{2k} + \lambda_k(\lambda_k-1)\tilde{f}_{1k} \cdot E}{(\lambda_k-1)(2\lambda_k+\nu-3)}.$$

В последних двух случаях отсутствует ограничение (12\*).

Итак, решение рассматриваемой задачи представлено в виде сходящихся рядов (10') – (10'''), коэффициенты которых определены в замкнутой форме (12') – (12''').

Исследуем поведение напряжений в окрестности угловой точки кругового сектора.

1.  $0 < \alpha < 2\pi$ . Как следует из (10'), окрестность вершины кругового сектора находится в нулевом напряжённом состоянии, если  $0 < \alpha \leq \pi$ . При  $\pi < \alpha < 2\pi$  в окрестности угловой точки сектора напряжения имеют степенную особенность типа  $r^{\tilde{\lambda}_k-1}$ , показатель которого изменяется в пределах  $-1 < \tilde{\lambda}_k - 1 < 0$  ( $k=2,3$ ), а коэффициенты при особенности в общем случае отличны от нуля. Но когда  $\alpha \rightarrow 2\pi$ , хотя показатель степенной особенности  $\tilde{\lambda}_k - 1$  стремится к  $-1$ , коэффициенты при возникшей особенности  $r^{-1+\varepsilon}$  ( $\varepsilon \rightarrow +0$ ) стремятся к нулю, благодаря наличию в них "компенсирующего" множителя  $\tilde{\lambda}_2 = 2\alpha_0 - 1$ .

Этот результат существенно отличается от той, который был получен в работе [1], где на дуговой части контура кругового сектора были заданы внешние усилия. Там, когда  $\alpha \rightarrow 2\pi$ , коэффициенты при такой особенности отличны от нуля.

2.  $0 < \alpha < \pi$ . В этом случае особенность напряжений появится уже при  $\alpha > \pi/2$ . Показатель особенности изменяется в пределах  $-1 < \tilde{\lambda}_k - 1 < 0$ , а коэффициенты при особенности в общем случае отличны от нуля. И здесь, когда  $\alpha \rightarrow \pi$ , хотя показатель степенной особенности стремится к  $-1$ , коэффициенты при такой особенности стремятся к нулю из-за наличия в них множителя  $\tilde{\lambda}_1 = \alpha_0 - 1$ .

Если между заданными функциями  $f_1(\varphi)$  и  $f_2(\varphi)$  имеет место соотношение (12\*), то, как видно из (12''),  $B_1 = 0$  для любого значения  $\alpha$  из области  $0 < \alpha \leq \pi$ . Т.е., в окрестности угловой точки отсутствует особенность напряжений и, поэтому, соотношение (12\*) является условием малонапряжённости окрестности вершины сектора [6].

3.  $\pi < \alpha < 2\pi$ . Окрестность вершины сектора находится в концентрационном состоянии [6], так как напряжения всегда имеют степенную особенность того или иного порядка. Причем, особенности напряжений обусловлены как первыми членами правой части (10'''), содержащими множители  $r^{-\alpha_0}$ , так и соответствующими членами рядов с множителями  $r^{\tilde{\lambda}_k-1}$ . Показатели особенностей могут меняться в пределах  $-1 < -\alpha_0 < -1/2$ ,  $-1 < \tilde{\lambda}_k - 1 < 0$  ( $k=2, k=3$ ).

Коэффициенты при особенности  $r^{-\alpha_0}$  в общем случае отличны от нуля, но если имеет место соотношение (12\*), то, как следует из (12'''),  $D_{-1} = 0$  и в формулах для напряжений

исчезают первые слагаемые. Более того, эти коэффициенты содержат множитель  $(1 - \alpha_0)$ , который при  $\alpha \rightarrow \pi$  стремится к нулю.

Аналогичная ситуация имеет место и для особенности типа  $r^{\lambda_{k-1}}$ . При  $\alpha \rightarrow 2\pi$  показатель особенности  $\tilde{\lambda}_k - 1 \rightarrow -1$ , а коэффициенты при этой особенности стремятся к нулю.

Таким образом, в вышерассмотренных всех трёх случаях, когда угол раствора сектора стремится к  $\pi$  или  $2\pi$ , напряжения имеют степенную особенность типа  $r^{-1+\varepsilon}$  ( $\varepsilon \rightarrow +0$  при  $\alpha \rightarrow \pi$  или  $2\pi$ ), т.е. порядок особенности напряжений может достигать до единицы, свойственное особенности напряжений под сосредоточенной силой. Однако, коэффициенты при такой особенности стремятся к нулю, благодаря наличию в них "компенсирующего" множителя  $\tilde{\lambda}_k - 1$  ( $k = 1, k = 2$ ).

Полученные в настоящей работе результаты показывают, что, с точки зрения прочности, для предотвращения хрупкого разрушения кругового сектора граничные условия (4), принятые в данной работе, физически более приемлемы, чем принятые в работах [1–3] граничные условия.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Саргсян А.М. Упругое равновесие кругового сектора при граничных условиях гладкого контакта на радиальных сторонах. // Актуальные проблемы механики сплошной среды (труды международной конференции, посвящ. 95-летию академика НАН Армении Н.Х. Арутюняна, 25–28 сентября 2007, Цахкадзор, Армения). С.368–372.
2. Саргсян А.М. Об упругом равновесии кругового сектора при граничных условиях гладкого контакта на радиальных сторонах. // Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред (труды VI Международной конференции, сентябрь 21–26, Горис – Степанакерт, 2008). С.394–398.
3. Саргсян А.М. О равновесии кругового сектора при граничных условиях гладкого контакта на радиальных сторонах. // Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. №4. С.31– 37.
4. Саргсян А.М. Влияние типа граничных условий, заданных на дуговой части контура кругового сектора, на поведение напряжений в условиях гладкого контакта на радиальных сторонах. // Актуальные проблемы механики сплошной среды (сборник научных трудов), 2010. С.116–119.
5. Саргсян А.М. Влияние типа граничных условий, заданных на дуговой части контура кругового сектора, на поведение напряжений в условиях гладкого контакта на радиальных сторонах. Часть II. // Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред (труды VII Международной конференции, сентябрь 19–23, Горис – Степанакерт, 2011). С. 366–371.
6. Чобанян К.С. Напряжения в составных упругих телах. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1987. 338с.
7. Gevorgyan S.Kh., Manukyan E.H., Mkhitarian S.M., Mkrtychyan M.S. // On a Mixed Problem For An Elastic Space With A Crack Under Antiplane And Plane Deformations. Collection of Papers. Yerevan–2005. 282p.
8. Саргсян А.М. Об особенности напряжений в одной задаче теории упругости для клина. // Изв. НАН Армении. Механика. 2008. Т.61. №1. С.48–53.

### Сведения об авторе:

**Саргсян Азат Мкртычевич** – кандидат физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении, 0019 Ереван, Баграмяна 24<sup>0</sup>, тел: (37410) 58-60-54  
**E-mail:** azat-sargsyan@mail.ru

# СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН НА ОСНОВЕ МИКРОПОЛЯРНОЙ ТЕОРИИ С НЕЗАВИСИМЫМИ ПОЛЯМИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И ВРАЩЕНИЙ

**Саркисян А. А.**

В работе на основе общих микрополярных динамических теорий с независимыми полями перемещений и вращений упругих тонких пластин изучены свободные колебания шарнирно-оп/ртых круглых пластин. Определение собственных частот приводится к решению трансцендентных уравнений. Эти уравнения решены численным методом. Проведен довольно разносторонний численный анализ. Приведены результаты численных вычислений, показывающие специфические особенности собственных колебаний тонких круглых пластин из микрополярного упругого материала.

**Свободные колебания микрополярных упругих тонких круглых пластин.** В работах [1,2] построена общая теория динамического изгиба микрополярных упругих тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений.

Основные уравнения свободных колебаний микрополярных, упругих, тонких, круглых пластин с независимыми полями перемещений и вращений в полярных координатах выражаются следующим образом [1,2]:

уравнения движения

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{13}}{\partial r} + \frac{1}{r} N_{13} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_{23}}{\partial \theta} &= 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial L_{11}}{\partial r} + \frac{1}{r} (L_{11} - L_{22}) + \frac{1}{r} \frac{\partial L_{21}}{\partial \theta} + N_{23} - N_{32} = 2Jh \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial t^2} \\ \frac{\partial L_{12}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial L_{22}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (L_{12} + L_{21}) + N_{31} - N_{13} &= 2Jh \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial t^2} \\ N_{31} - \left( \frac{\partial M_{11}}{\partial r} + \frac{1}{r} (M_{11} - M_{22}) + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{21}}{\partial \theta} \right) + \frac{2\rho h^3}{3} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} &= 0 \\ N_{32} - \left( \frac{1}{r} \frac{\partial M_{22}}{\partial \theta} + \frac{\partial M_{12}}{\partial r} + \frac{1}{r} (M_{12} + M_{21}) \right) + \frac{2\rho h^3}{3} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} &= 0 \\ L_{33} - \frac{\partial \Lambda_{13}}{\partial r} - \frac{1}{r} \Lambda_{13} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Lambda_{23}}{\partial \theta} - (M_{12} - M_{21}) + \frac{2Jh^3}{3} \frac{\partial^2 \iota}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

физико-геометрические соотношения

$$\begin{aligned} N_{13} &= 2h \left[ (\mu + \alpha) \frac{\partial w}{\partial r} + (\mu - \alpha) \psi_1 + 2\alpha \Omega_2 \right], \quad N_{23} = 2h \left[ (\mu + \alpha) \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + (\mu - \alpha) \psi_2 - 2\alpha \Omega_1 \right] \\ N_{31} &= 2h \left[ (\mu + \alpha) \psi_1 + (\mu - \alpha) \frac{\partial w}{\partial r} - 2\alpha \Omega_2 \right], \quad N_{32} = 2h \left[ (\mu + \alpha) \psi_2 + (\mu - \alpha) \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + 2\alpha \Omega_1 \right] \\ M_{11} &= D \left[ \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \psi_1 \right) \right], \quad M_{22} = D \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \psi_1 + \nu \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \right], \quad \text{где } D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} \\ M_{12} &= \frac{2h^3}{3} \left[ (\mu + \alpha) \frac{\partial \psi_2}{\partial r} + (\mu - \alpha) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \psi_2 \right) - 2\alpha \iota \right], \quad M_{21} = \frac{2h^3}{3} \left[ (\mu + \alpha) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \psi_2 \right) + (\mu - \alpha) \frac{\partial \psi_2}{\partial r} + 2\alpha \iota \right] \\ L_{11} &= 2h \left[ (\beta + 2\gamma) \frac{\partial \Omega_1}{\partial r} + \beta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega_2}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \Omega_1 \right) + \beta \iota \right], \quad L_{22} = 2h \left[ (\beta + 2\gamma) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega_2}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \Omega_1 \right) + \beta \frac{\partial \Omega_1}{\partial r} - \beta \iota \right] \\ L_{12} &= 2h \left[ (\gamma + \varepsilon) \frac{\partial \Omega_2}{\partial r} + (\gamma - \varepsilon) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega_1}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \Omega_2 \right) \right], \quad L_{21} = 2h \left[ (\gamma + \varepsilon) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega_1}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \Omega_2 \right) + (\gamma - \varepsilon) \frac{\partial \Omega_2}{\partial r} \right] \\ \Lambda_{13} &= \frac{2h^3}{3} \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \frac{\partial \iota}{\partial r}, \quad \Lambda_{23} = \frac{2h^3}{3} \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial \iota}{\partial \theta}, \quad L_{33} = 2h \left[ (\beta + 2\gamma) \iota + \beta \left( \frac{\partial \Omega_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega_2}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \Omega_1 \right) \right] \end{aligned} \quad (2)$$

граничные условия шарнирного опирания:

$$w = 0, \quad M_{ii} = 0, \quad L_{ij} = 0, \quad \Omega_i = 0, \quad \psi_j = 0, \quad \Lambda_{i3} = 0, \quad \text{при } x_i = 0; a \quad (3)$$

Ниже рассмотрим осесимметричную задачу динамического изгиба микрополярных круглых пластин. В этом случае приведённые выше уравнения и граничные условия расщепляются на две группы:

для первой группы имеем уравнения движения

$$\frac{\partial N_{13}}{\partial r} + \frac{1}{r} N_{13} = 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad N_{31} - \frac{\partial M_{11}}{\partial r} - \frac{1}{r} (M_{11} - M_{22}) + \frac{2\rho h^3}{3} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial L_{12}}{\partial r} + \frac{1}{r} (L_{12} + L_{21}) + N_{31} - N_{13} = 2Jh \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial t^2} \quad (4)$$

физико-геометрические соотношения

$$N_{13} = 2h \left[ (\mu + \alpha) \frac{\partial w}{\partial r} + (\mu - \alpha) \psi_1 + 2\alpha \Omega_2 \right], \quad N_{31} = 2h \left[ (\mu + \alpha) \psi_1 + (\mu - \alpha) \frac{\partial w}{\partial r} - 2\alpha \Omega_2 \right]$$

$$M_{11} = D \left[ \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{\nu}{r} \psi_1 \right], \quad M_{22} = D \left[ \frac{1}{r} \psi_1 + \nu \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \right], \quad L_{12} = 2h \left[ (\gamma + \varepsilon) \frac{\partial \Omega_2}{\partial r} - (\gamma - \varepsilon) \frac{1}{r} \Omega_2 \right] \quad (5)$$

и граничные условия шарнирного опирания

$$w = 0, \quad M_{11} = 0, \quad L_{12} = 0, \quad \text{при } r = R \quad (6)$$

для второй группы имеем уравнения движения

$$\frac{\partial L_{11}}{\partial r} + \frac{1}{r} (L_{11} - L_{22}) + N_{23} - N_{32} = 2Jh \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial t^2}, \quad N_{32} - \left( \frac{\partial M_{12}}{\partial r} + \frac{1}{r} (M_{12} + M_{21}) \right) + \frac{2\rho h^3}{3} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} = 0$$

$$L_{33} - \frac{\partial \Lambda_{13}}{\partial r} - \frac{1}{r} \Lambda_{13} - (M_{12} - M_{21}) + \frac{2Jh^3}{3} \frac{\partial^2 t}{\partial t^2} = 0 \quad (7)$$

физико-геометрические соотношения

$$N_{23} = 2h [(\mu - \alpha) \psi_2 - 2\alpha \Omega_1], \quad N_{32} = 2h [(\mu + \alpha) \psi_2 + 2\alpha \Omega_1], \quad L_{33} = 2h \left[ (\beta + 2\gamma) t + \beta \left( \frac{\partial \Omega_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \Omega_1 \right) \right]$$

$$M_{12} = \frac{2h^3}{3} \left[ (\mu + \alpha) \frac{\partial \psi_2}{\partial r} + (\mu - \alpha) \left( -\frac{1}{r} \psi_2 \right) - 2\alpha t \right], \quad M_{21} = \frac{2h^3}{3} \left[ (\mu + \alpha) \left( -\frac{1}{r} \psi_2 \right) + (\mu - \alpha) \frac{\partial \psi_2}{\partial r} + 2\alpha t \right] \quad (8)$$

$$L_{11} = 2h \left[ (\beta + 2\gamma) \frac{\partial \Omega_1}{\partial r} + \beta \frac{1}{r} \Omega_1 + \beta t \right], \quad L_{22} = 2h \left[ (\beta + 2\gamma) \frac{1}{r} \Omega_1 + \beta \frac{\partial \Omega_1}{\partial r} - \beta t \right], \quad \Lambda_{13} = \frac{2h^3}{3} \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \frac{\partial t}{\partial r}$$

и граничные условия шарнирного опирания

$$\Omega_1 = 0, \quad \psi_2 = 0, \quad \Lambda_{13} = 0, \quad \text{при } r = R \quad (9)$$

Отметим, что граничная задача (4)-(6) соответствует задаче изгиба, а (7)-(9) – задаче кручения микрополярных круглых пластин.

Граничные задачи (4)-(6) и (7)-(9) можно привести к граничным задачам относительно величин  $w, \Omega_2, \psi_1$  и  $\Omega_1, \psi_2, t$  соответственно. Далее будем изучать обе задачи.

Решение граничных задач (4)-(6) и (7)-(9) соответственно представим следующим образом:

$$w(r, t) = e^{ip_m t} \tilde{w}(r), \quad \Omega_2(r, t) = \tilde{\Omega}_2(r), \quad \psi_1(r, t) = \tilde{\psi}_1(r) \quad (10)$$

$$\Omega_1(r, t) = \tilde{\Omega}_1(r), \quad \psi_2(r, t) = \tilde{\psi}_2(r), \quad t(r, t) = \tilde{t}(r) \quad (11)$$

Также примем следующее обозначение:  $\mathcal{L} = d/dr + 1/r$ . Отметим, что здесь  $p_m$  – частоты собственных колебаний.

Тогда относительно функций  $\tilde{w}(r), \tilde{\Omega}_2(r), \tilde{\psi}_1(r)$  и  $\tilde{\Omega}_1(r), \tilde{\psi}_2(r), \tilde{t}(r)$  получим системы обыкновенных дифференциальных уравнений с соответствующими граничными условиями: для задачи изгиба:

$$(\mu + \alpha) \nabla^2 \tilde{w} + (\mu - \alpha) \mathcal{L} \tilde{\psi}_1 + 2\alpha \mathcal{L} \tilde{\Omega}_2 + \rho p_m^2 \tilde{w} = 0, \quad (\gamma + \varepsilon) \Delta \tilde{\Omega}_2 - 4\alpha \tilde{\Omega}_2 + 2\alpha (\tilde{\psi}_1 - d\tilde{w}/dr) + J p_m^2 \tilde{\Omega}_2 = 0$$

$$2h(\mu - \alpha) d\tilde{w}/dr - 4\alpha h \tilde{\Omega}_2 + 2h(\mu + \alpha) \tilde{\psi}_1 - D \Delta \tilde{\psi}_1 - \tilde{\psi}_1 2\rho h^3 p_m^2 / 3 = 0 \quad (12)$$

$$\tilde{w} = 0, \quad d\tilde{\psi}_1/dr + \nu \tilde{\psi}_1/r = 0, \quad (\gamma + \varepsilon) d\tilde{\Omega}_2/dr - (\gamma - \varepsilon) \tilde{\Omega}_2/r = 0, \quad \text{при } r = R \quad (13)$$

для задачи кручения

$$3(\mu + \alpha) \tilde{\psi}_2 - (\mu + \alpha) h^2 \Delta \tilde{\psi}_2 + 2\alpha \tilde{\Omega}_1 + 2\alpha h^2 d\tilde{t}/dr - \rho h^2 p_m^2 \tilde{\psi}_2 = 0$$

$$(\beta + 2\gamma) \Delta \tilde{\Omega}_1 - 4\alpha \tilde{\Omega}_1 - 2\alpha \tilde{\psi}_2 + \beta d\tilde{t}/dr + J p_m^2 \tilde{\Omega}_1 = 0 \quad (14)$$

$$3(\beta + 2\gamma) \tilde{t} - h^2 (4\gamma\varepsilon / (\gamma + \varepsilon)) \nabla^2 \tilde{t} + 4\alpha h^2 \tilde{t} + 3\beta \mathcal{L} \tilde{\Omega}_1 - 2\alpha h^2 \mathcal{L} \tilde{\psi}_2 - J h^2 p_m^2 \tilde{t} = 0$$

$$\tilde{\Omega}_1 = 0, \quad \tilde{\psi}_2 = 0, \quad d\tilde{t}/dr = 0, \quad \text{при } r = R \quad (15)$$

Здесь  $\Delta$  и  $\nabla^2$  операторы –  $\Delta = d\mathcal{L}/dr$ ,  $\nabla^2 = \mathcal{L}d/dr$ .

В случае задачи изгиба из (12) относительно  $\tilde{\psi}_1$  получим дифференциальное уравнение

$$\dot{A}_1\Delta\Delta\tilde{\psi}_1 + \dot{A}_2\Delta\Delta\tilde{\psi}_1 + \dot{A}_3\Delta\tilde{\psi}_1 + \dot{A}_4\tilde{\psi}_1 = 0 \quad (16)$$

$$\text{где } \dot{A}_1 = (\mu + \alpha)(\gamma + \varepsilon) \frac{Eh^2}{3(1-\nu^2)}, \quad \dot{A}_2 = \frac{Eh^2}{3(1-\nu^2)} s_1 + \frac{\mu + \alpha}{2\mu} (\gamma + \varepsilon) \frac{Eh^2}{3(1-\nu^2)} \rho p_m^2 - 2\mu s_2$$

$$\dot{A}_3 = -2\mu s_3 - s_1 \left( 2\mu - \frac{\rho h^2}{3} p_m^2 \right) - s_2 \rho p_m^2, \quad \dot{A}_4 = -\rho p_m^2 s_3, \quad s_1 = (\gamma + \varepsilon)(\mu - \alpha) \frac{\rho p_m^2}{2\mu} + 4\mu\alpha - (\mu - \alpha) J p_m^2 \quad (17)$$

$$s_2 = (\gamma + \varepsilon) \left( 2\alpha - \frac{\mu + \alpha}{2\mu} \frac{\rho h^2}{3} p_m^2 \right) - (J p_m^2 - 4\alpha) \frac{Eh^2}{3(1-\nu^2)}, \quad s_3 = (J p_m^2 - 4\alpha) \left( \mu + \alpha - \frac{\rho h^2}{3} p_m^2 \right) + 4\alpha^2$$

Если будем иметь решение дифференциального уравнения (16), то  $\tilde{w}$  и  $\tilde{\Omega}_2$  определятся следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{w} = & -\frac{2\mu}{s_1 \rho p_m^2} \left[ s_3 + \frac{s_1}{2\mu} \left( 2\mu - \frac{\rho h^2}{3} p_m^2 \right) \right] \mathcal{L} \tilde{\psi}_1 - \frac{1}{\rho p_m^2} \left\{ \frac{2\mu}{s_1} s_2 - \frac{Eh^2}{3(1-\nu^2)} \right\} \mathcal{L} \Delta \tilde{\psi}_1 + \\ & + \frac{\mu + \alpha}{s_1 \rho p_m^2} (\gamma + \varepsilon) \frac{Eh^2}{3(1-\nu^2)} \mathcal{L} \Delta \Delta \tilde{\psi}_1 \quad (18) \\ \tilde{\Omega}_2 = & \frac{\mu - \alpha}{2\alpha} \frac{d\tilde{w}}{dr} + \frac{1}{2\alpha} \left( \mu + \alpha - \frac{\rho h^2}{3} p_m^2 \right) \tilde{\psi}_1 - \frac{1}{2\alpha} \frac{Eh^2}{3(1-\nu^2)} \Delta \tilde{\psi}_1 \end{aligned}$$

Дифференциальное уравнение (16) можем представить в виде:

$$(\Delta - \lambda_1)(\Delta - \lambda_2)(\Delta - \lambda_3)\tilde{\psi}_1 = 0 \quad (19)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  – корни следующего уравнения третьей степени:

$$\dot{A}_1 \lambda^3 + \dot{A}_2 \lambda^2 + \dot{A}_3 \lambda + \dot{A}_4 = 0 \quad (20)$$

Решение дифференциального уравнения (19) для сплошной пластинки имеет вид

$$\tilde{\psi}_1(r) = C_i^1 J_1(-i\sqrt{\lambda_i} r) \quad (21)$$

Подставив (21) в (18), получим:

$$\tilde{w}(r) = C_i^2 J_0(-i\sqrt{\lambda_i} r), \quad \tilde{\Omega}_2(r) = C_i^3 J_1(-i\sqrt{\lambda_i} r) \quad (22)$$

где  $J_0(x), J_1(x)$  – функции Бесселя действительного аргумента нулевого и первого порядка.

$$C_n^2 = -\frac{i\sqrt{\lambda_n}}{s_1 \rho p_m^2} s_4 C_n^1, \quad C_n^3 = s_5 C_n^1, \quad s_5 = -\frac{Eh^2}{3(1-\nu^2)} \frac{\lambda_n}{2\alpha} - \frac{1}{2\alpha} \left( \frac{\rho h^2}{3} p_m^2 - (\mu + \alpha) \right) + \frac{\lambda_n(\mu - \alpha)}{2s_1 \alpha \rho p_m^2} s_4 \quad (23)$$

$$\begin{aligned} s_4 = & \lambda_n \frac{Eh^2}{3(1-\nu^2)} [s_1 + \alpha(\gamma + \varepsilon)\lambda_n] - 2\mu^2 (J p_m^2 - 4\alpha) - 2\mu s_1 - 2\mu J p_m^2 \left( \alpha - \lambda_n \frac{Eh^2}{3(1-\nu^2)} \right) - \\ & - \mu \lambda_n \left[ 4\alpha \left( \frac{2Eh^2}{3(1-\nu^2)} + \gamma + \varepsilon \right) - \frac{Eh^2}{3(1-\nu^2)} (\gamma + \varepsilon)\lambda_n \right] + \frac{\rho h^2}{3} p_m^2 [s_1 + 2\mu J p_m^2 - 8\mu\alpha + (\mu + \alpha)(\gamma + \varepsilon)\lambda_n] \end{aligned}$$

Удовлетворим граничным условиям (13), тогда относительно  $C_n^1$  получим однородные алгебраические уравнения. Далее потребовав ненулевое решение, в результате относительно собственных частот получим трансцендентное уравнение, которое представим в компактном виде:

$$\text{Det} |a_n^m| = 0, \quad n, m = 1, 2, 3 \quad (24)$$

$$\text{где } a_n^1 = s_4 i \sqrt{\lambda_n} I_0(R\sqrt{\lambda_n}), \quad a_n^2 = \sqrt{\lambda_n} I_0(R\sqrt{\lambda_n}) - \frac{(1-\nu)}{R} I_1(R\sqrt{\lambda_n}) \quad (25)$$

$$a_n^3 = -(\gamma + \varepsilon) s_5 i \sqrt{\lambda_n} I_0(R\sqrt{\lambda_n}) + \frac{\gamma}{s_1 R \rho p_m^2} \left\{ \alpha \lambda_n (\mu - \alpha) \left[ -2\mu [2\alpha(\gamma + \varepsilon)\lambda_n - 4\mu\alpha + (\mu + \alpha) J p_m^2] + \right. \right.$$

$$+ \left[ \lambda_n \frac{Eh^2}{3(1-\nu^2)} + \frac{\rho h^2}{3} p_m^2 \right] \left[ s_1 + (\mu + \alpha)(\gamma + \varepsilon)\lambda_n + 2\mu(Jp_m^2 - 4\alpha) \right] \left\{ - \right. \\ \left. - 2\mu\alpha(\mu - \alpha)s_1\lambda_n + \rho p_m^2 \mu s_1 \left[ (\mu + \alpha) - \lambda_n \frac{Eh^2}{3(1-\nu^2)} \right] - s_1 \mu \frac{\rho^2 h^2}{3} p_m^4 \right\} I_1(R\sqrt{\lambda_n})$$

Здесь  $I_0(x), I_1(x)$  - функции Бесселя чисто мнимого аргумента нулевого и первого порядка.

В случае задачи кручения обратимся к уравнениям (14). Относительно  $\tilde{\psi}_2$  получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\dot{A}_1 \Delta \Delta \Delta \tilde{\psi}_2 + \dot{A}_2 \Delta \Delta \tilde{\psi}_2 + \dot{A}_3 \Delta \tilde{\psi}_2 + \dot{A}_4 \tilde{\psi}_2 = 0 \quad (26)$$

где  $\dot{A}_1, \dot{A}_2, \dot{A}_3, \dot{A}_4$  задаются следующим образом:

$$\dot{A}_1 = (\mu + \alpha)(\beta + 2\gamma) \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \frac{h^4}{9}, \quad \dot{A}_2 = S_1 S_4 - S_2 \beta \frac{\mu + \alpha}{2\alpha} \frac{h^2}{3} - \frac{S_3}{S_1} A_1, \\ \dot{A}_3 = -S_1 S_3 + \left[ \frac{2\alpha h^2}{3} + \frac{\beta}{2\alpha} \left( \mu + \alpha - \frac{\rho h^2}{3} p_m^2 \right) \right] S_2 - S_3 S_4 \\ \dot{A}_3 = -S_1 S_3 + \left[ \frac{2\alpha h^2}{3} + \frac{\beta}{2\alpha} \left( \mu + \alpha - \frac{\rho h^2}{3} p_m^2 \right) \right] S_2 - S_3 S_4, \quad \dot{A}_4 = s_3 S_3 \quad (27)$$

$$S_1 = \frac{h^2}{3} \left( \beta + \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \right), \quad S_2 = 2\alpha \left[ \frac{h^2}{3} \frac{\beta + 2\gamma}{S_1} S_3 + (Jp_m^2 - 4\alpha) \frac{h^2}{3} - \beta \right], \quad S_3 = \beta + 2\gamma - (Jp_m^2 - 4\alpha) \frac{h^2}{3}$$

$$S_4 = (Jp_m^2 - 4\alpha)(\mu + \alpha) \frac{h^2}{3} + 2\alpha(\beta + 2\gamma) \frac{h^2}{3} \left[ \frac{2\alpha h^2}{3} + \frac{\beta}{2\alpha} \left( \mu + \alpha - \frac{\rho h^2}{3} p_m^2 \right) \right] \frac{1}{S_1} - (\beta + 2\gamma) \left( \mu + \alpha - \frac{\rho h^2}{3} p_m^2 \right)$$

После решения дифференциального уравнения (26), величины  $\tilde{\tau}$  и  $\tilde{\Omega}_1$  определяются соответствующим образом.

Дифференциальное уравнение (26) можем представить в виде:

$$(\Delta - \lambda_1)(\Delta - \lambda_2)(\Delta - \lambda_3)\psi_2 = 0 \quad (28)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  - корни уравнения третьей степени (20), а  $\dot{A}_1, \dot{A}_2, \dot{A}_3, \dot{A}_4$  определяются по (27).

Решив дифференциальное уравнение (28) для сплошной пластинки, удовлетворив граничным условиям (15) и, далее, потребовав ненулевое решение, в результате относительно собственных частот получим следующее трансцендентное уравнение:

$$J_1(-i\sqrt{\lambda_1}R)J_1(-i\sqrt{\lambda_2}R)J_1(-i\sqrt{\lambda_3}R) = 0 \quad (29)$$

Решение трансцендентного уравнения (29) эквивалентно тому, что

$$\dot{A}_1(t_m/R)^6 + \dot{A}_2(t_m/R)^4 + \dot{A}_3(t_m/R) + \dot{A}_4 = 0 \quad (30)$$

где  $t_m$   $m$  - отличный от нуля корень трансцендентного уравнения

$$J_1(t_m) = 0 \quad (31)$$

Итак, соответственно каждому корню трансцендентного уравнения (31), из уравнения (30) получаются три спектра собственных частот.

Отметим, что  $t_0 = 0$  является корнем трансцендентного уравнения (31). В этом случае относительно  $p_0$  получим

$$p_0 = \sqrt{3(\beta + 2\gamma)/Jh^2 + 4\alpha/J}, \quad J\rho h^2 p_0^4 - [3J(\mu + \alpha) + 4\alpha\rho h^2]p_0^2 + 12\mu\alpha = 0 \quad (32)$$

**Результаты численного анализа.** Во-первых, отметим, что по сравнению с классической моделью, по микрополярной модели получается дополнительный спектр собственных частот, это объясняется тем, что свободные вращения точек пластинки создают новые степени свободы. В этом направлении весьма важен следующий эффект - в микрополярной упругой пластинке имеется собственная частота материала пластинки, которая практически не зависит от её геометрических размеров. Этот эффект впервые был обнаружен в работе [3]

На рис.1 приведены зависимости самой низкой частоты свободных колебаний круглой пластинки от размера  $R$ . В качестве физических констант для микрополярного материала пластинки выбраны следующие величины:  $\alpha = 1,6$  МПа,  $\mu = 2$  МПа,  $\lambda = 3$  МПа,  $\gamma = \varepsilon = 150$  Н; плотность материала:  $\rho = 1114$  кг/м<sup>3</sup>; мера инерции при вращении:  $J = 5,31 \cdot 10^{-6}$  кг/м, а для относительной толщины пластинки выбрано значение  $\delta = h/R = 1/40$ . На этом рисунке сплошная линия соответствует классической модели, а пунктирная – микрополярной модели (1)-(3). При относительно малых размерах пластинки, нижние частоты, по этим двум моделям, значительно отличаются, а при больших размерах видно, как кривые приближаются и сливаются.

Далее, изучалось влияние на частоты колебаний микрополярной пластинки основной физической константы  $\alpha$  (рис. 2). На рис. 2 пунктирные линии 1,2,3 соответствуют микрополярной модели, когда физический параметр  $\alpha$  имеет соответственно значения  $\alpha = 1.6 \cdot 10^4$  Па,  $\alpha = 1.6 \cdot 10^3$  Па,  $\alpha = 1.6 \cdot 10^2$  Па, а сплошная линия 4 соответствует классической модели. Остальные физические параметры имеют прежние значения, а  $\delta = 1/40$ . Легко убедиться, что при повышении значения физического константа  $\alpha$ , низкая частота колебаний микрополярной пластинки резко возрастает. Это означает, что в выборе микрополярного материала есть определённая возможность регулировать значение низкой частоты колебаний балки, и тем самым, возможно достижение значительного разрыва частот собственных и вынужденных колебаний пластинки, что важно при явлении резонанса.

Отметим, что в случае круглых пластин, также, как и в случае прямоугольных пластин [4], имеется собственная частота, практически не зависящая от размеров пластинки. Это одна из частот, получаемая из второго уравнения (32). Эта частота при относительно больших размерах пластинки практически не зависит от толщины круглой пластинки (от радиуса круглой пластинки она и так не зависит, это видно из уравнения).

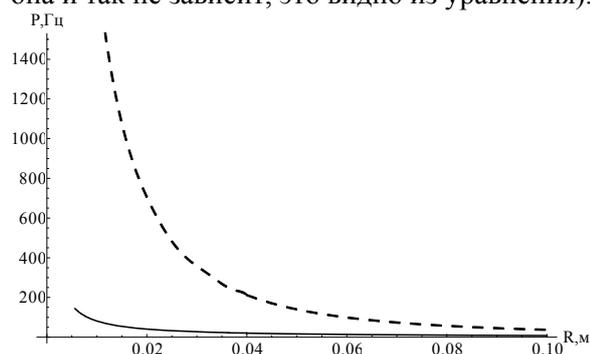


Рис. 1. Зависимость низкой частоты колебаний микрополярной круглой пластинки от её размера  $R$ .

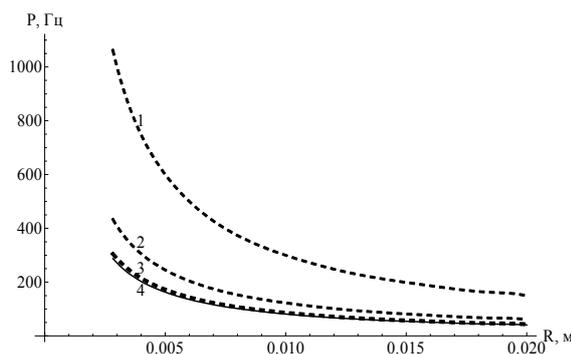


Рис. 2. Зависимость низкой частоты колебаний микрополярной пластинки от её размера  $R$  для разных значений  $\alpha$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Саркисян С.О. Общая динамическая теория микрополярных упругих тонких оболочек // Доклады АН России. 2011. Т.436. № 2. С.195-198.
2. Саркисян А.А. Асимптотический анализ начально-граничной динамической задачи несимметричной теории упругости со свободным вращением в тонкой области оболочки//Изв. НАН Армении. Механика. 2011. Т.64. № 2. С.39-50.
3. Варыгина М.П., Садовская О.В., Садовский В.М. Численное моделирование пространственных волновых движений в моментной упругой среде //Первая всероссийская конференция. Проблемы механики и акустики сред с микро- и наноструктурой: Наномех-2009. Нижний Новгород 21-23 сентября, 2009 года. Полные тексты докладов. С.39-51.
4. Саркисян С.О., Саркисян А.А. Общая динамическая теория микрополярных упругих тонких пластин со свободным вращением и особенности их свободных колебаний // Акустический журнал. 2011. Т.57. № 4. С.461-469.

### Сведения об авторе

Саркисян Арменуи Акоповна – к.ф.-м.н, Гюмрийский государственный педагогический институт, кафедра “математический анализ и дифф. уравнения”, Тел.: (374 95) 42 21 03, (374 94) 42 21 03

E-mail: [armenuhis@mail.ru](mailto:armenuhis@mail.ru), [armenuhis@gmail.com](mailto:armenuhis@gmail.com)

# КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПЛАСТИНЫ, УСИЛЕННОЙ ДВУМЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ БЕСКОНЕЧНЫМИ СТРИНГЕРАМИ, ОДИН ИЗ КОТОРЫХ КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫЙ

Саркисян К.С.

В работе рассматривается контактная задача для бесконечной пластины с двумя параллельными бесконечными стрингерами, причём один из них кусочно-однородный. Контактная пара (пластина-стрингер) деформируется равномерно распределёнными горизонтальными напряжениями постоянной интенсивности, действующими на пластину в бесконечности. Методом факторизации построено замкнутое решение поставленной контактной задачи. Получено асимптотическое представление тангенциальных контактных напряжений в точке неоднородности кусочно-однородного стрингера.

Пусть бесконечная однородная пластина малой постоянной толщины  $h$  усилена двумя параллельными бесконечными стрингерами, находящимися на расстоянии  $2a$ , один из которых кусочно-однородный и состоит из двух полубесконечных частей с разными механическими свойствами. Пластина и стрингеры деформируются под действием распределённых сил, приложенных равномерно на бесконечности при  $x = \pm\infty$ .

В исследуемой задаче относительно стрингеров принимается модель контакта по линии, то есть предполагается, что тангенциальные контактные усилия сосредоточены вдоль средней линии контактного участка, а для упругой однородной пластины справедлива модель обобщённого плоского напряжённого состояния. Задача заключается в определении контактных тангенциальных напряжений. В силу вышесказанного, дифференциальное уравнение равновесия однородного стрингера при  $y = a$  запишется в виде:

$$\frac{d^2 u_s(x; a)}{dx^2} - \frac{\tau(x; a)}{EF_s} = 0, \quad (1)$$

где  $F_s$  – площадь поперечного сечения стрингера,  $E$  – модуль упругости стрингера,  $\tau(x; a)$  – контактные тангенциальные усилия,  $u_s(x; a)$  – перемещения точек стрингера при  $y = a$ .

Уравнение равновесия кусочно-однородного стрингера при  $y = -a$  запишется в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_s(x; -a)}{dx^2} - \frac{1}{E_1 F_s} \tau(x; -a) &= 0 & (-\infty < x < 0), \\ \frac{d^2 u_s(x; -a)}{dx^2} - \frac{1}{E_2 F_s} \tau(x; -a) &= 0 & (0 < x < \infty), \end{aligned} \quad (2)$$

которое можно написать с помощью одного уравнения:

$$\frac{d^2 U_s(x)}{dx^2} = \delta(x) \left( \left. \frac{du_s(x; -a)}{dx} \right|_{x=+0} - \left. \frac{du_s(x; -a)}{dx} \right|_{x=-0} \right) + \frac{\tau^+(x)}{E_2 F_s} + \frac{\tau^-(x)}{E_1 F_s}, \quad (3)$$

где

$$U_s(x) = \theta(x)u_s(x; -a) + \theta(-x)u_s(x; -a); \quad \tau^+(x) = \theta(x)\tau(x; -a); \quad \tau^-(x) = \theta(-x)\tau(x; -a),$$

$\theta(x)$  – функция Хэвисайда,  $\delta(x)$  – функция Дирака.

Применив к (1) и (3) интегральное преобразование Фурье в смысле теории обобщённых функций, получим:

$$-\sigma^2 \bar{u}_s(\sigma; a) - \frac{1}{EF_s} \bar{\tau}(\sigma; a) = 0, \quad (4)$$

$$-\sigma^2 \bar{U}_s(\sigma) = \left( \left. \frac{du_s}{dx} \right|_{x=+0} - \left. \frac{du_s}{dx} \right|_{x=-0} \right) + \frac{\bar{\tau}^+(\sigma)}{E_2 F_s} + \frac{\bar{\tau}^-(\sigma)}{E_1 F_s}. \quad (5)$$

Условия контакта имеют вид:

$$\bar{u}(\sigma; a) = \bar{u}_s(\sigma; a) \quad \text{при} \quad y = a,$$

$$\bar{U}_s(\sigma) = \bar{U}(\sigma; -a) \quad \text{при} \quad y = -a, \quad (6)$$

где  $\bar{u}(\sigma; a)$  и  $\bar{U}(\sigma; -a)$  – трансформанты Фурье перемещения контактного участка пластинки, причём [1]:

$$\begin{aligned} \bar{u}(\sigma; a) = & \left[ \frac{\lambda^* + 3\mu}{2\mu(\lambda^* + 2\mu)|\sigma|H} - \frac{\lambda^* + \mu}{2\mu(\lambda^* + 2\mu)H} 2a \right] e^{-2a|\sigma|} \bar{\tau}(\sigma; -a) + \\ & + \frac{\lambda^* + 3\mu}{2\mu(\lambda^* + 2\mu)|\sigma|H} \bar{\tau}(\sigma; a) - 2\pi i A p \delta'(\sigma), \\ \bar{U}(\sigma; -a) = & \left[ \frac{\lambda^* + 3\mu}{2\mu(\lambda^* + 2\mu)|\sigma|H} - \frac{\lambda^* + \mu}{2\mu(\lambda^* + 2\mu)H} 2a \right] e^{-2a|\sigma|} \bar{\tau}(\sigma; a) + \\ & + \frac{\lambda^* + 3\mu}{2\mu(\lambda^* + 2\mu)|\sigma|H} \bar{\tau}(\sigma; -a) - 2\pi i A p \delta'(\sigma), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\lambda^* = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + \mu}$ ,  $\lambda$  и  $\mu$  – постоянные Ламе,  $A = \frac{\lambda^* + 2\mu}{4\mu(\lambda^* + \mu)}$ ,  $p$  – усилие, приложенное на

бесконечности,  $\delta'(\sigma)$  – производная функции  $\delta(\sigma)$ .

Сопоставлением формул (4) и (5) с учётом условий (6) получим функциональное уравнение относительно  $\bar{\tau}^+(\sigma)$  и  $\bar{\tau}^-(\sigma)$ :

$$\bar{K}(\sigma) \bar{\tau}^+(\sigma) + \bar{\tau}^-(\sigma) = \frac{X(T_1 - T_2)(|\sigma| + T)}{(|\sigma| + T_1)(|\sigma| + T) - (k\sigma^2 - |\sigma|)^2 e^{-4a|\sigma|}}, \quad (8)$$

где

$$\bar{K}(\sigma) = \frac{(|\sigma| + T_2)(|\sigma| + T) - (k\sigma^2 - |\sigma|)^2 e^{-4a|\sigma|}}{(|\sigma| + T_1)(|\sigma| + T) - (k\sigma^2 - |\sigma|)^2 e^{-4a|\sigma|}}, \quad (9)$$

$$T_1 = \frac{2\mu(\lambda^* + 2\mu)H}{(\lambda^* + 3\mu)E_1 F_s}, \quad T_2 = \frac{2\mu(\lambda^* + 2\mu)H}{(\lambda^* + 3\mu)E_2 F_s}, \quad T = \frac{2\mu(\lambda^* + 2\mu)H}{(\lambda^* + 3\mu)E F_s}, \quad k = \frac{2(\lambda^* + \mu)}{\lambda^* + 3\mu},$$

$$X = \sigma_x \Big|_{x=0} F_s = E_2 \frac{du_s}{dx} \Big|_{x=+0} F_s = E_1 \frac{du_s}{dx} \Big|_{x=-0} F_s,$$

которая определяется из равенства:

$$X = \bar{\tau}^-(0) + F_s E_1 A p.$$

Задача свелась к решению задачи Римана в теории аналитических функций [2]. Для решения функционального уравнения (8) факторизуем  $\bar{K}(\sigma)$ , представив её в виде:

$$\bar{K}(\sigma) = \bar{K}^+(\sigma) \bar{K}^-(\sigma), \quad (10)$$

где  $\bar{K}^+(\sigma)$  регулярна, не имеет нулей при  $\text{Im} \alpha > 0$ , а  $\bar{K}^-(\sigma)$  регулярна, не имеет нулей при  $\text{Im} \alpha < 0$  ( $\alpha = \sigma + i\tau$ ). Функции  $\bar{K}^\pm(\sigma)$  стремятся к единице в своих областях регулярности.

Здесь

$$\bar{K}^+(\sigma) = e^{\bar{R}^+(\sigma)}, \quad \bar{K}^-(\sigma) = e^{\bar{R}^-(\sigma)}, \quad (11)$$

где

$$\bar{R}(\sigma) = \ln \bar{K}(\sigma); \quad R(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{R}(\sigma) e^{-i\sigma x} d\sigma, \quad (12)$$

$$\bar{R}^+(\sigma) = \int_0^{\infty} R(x) e^{i(\sigma+i0)x} dx; \quad \bar{R}^-(\sigma) = \int_{-\infty}^0 R(x) e^{i(\sigma-i0)x} dx.$$

Имея в виду (10) функциональное уравнение (8) можно записать в виде:

$$\bar{K}^+(\sigma) \bar{\tau}^+(\sigma) + \frac{\bar{\tau}^-(\sigma)}{\bar{K}^-(\sigma)} = \frac{X(T_1 - T_2)(|\sigma| + T)}{\bar{K}^-(\sigma) \left[ (|\sigma| + T_1)(|\sigma| + T) - (ka\sigma^2 - |\sigma|)^2 e^{-4a|\sigma|} \right]}. \quad (13)$$

Обозначив

$$\bar{\Psi}(\sigma) = \frac{|\sigma| + T}{\bar{K}^-(\sigma) \left[ (|\sigma| + T_1)(|\sigma| + T) - (ka\sigma^2 - |\sigma|)^2 e^{-4a|\sigma|} \right]} \quad (14)$$

и представив функцию  $\bar{\Psi}(\sigma)$  в виде  $\bar{\Psi}(\sigma) = \bar{\Psi}^+(\sigma) + \bar{\Psi}^-(\sigma)$ , получим функциональное уравнение (8) в виде:

$$\bar{K}^+(\sigma) \bar{\tau}^+(\sigma) - X(T_1 - T_2) \bar{\Psi}^+(\sigma) = X(T_1 - T_2) \bar{\Psi}^-(\sigma) - \frac{\bar{\tau}^-(\sigma)}{\bar{K}^-(\sigma)}, \quad (15)$$

где

$$\bar{\Psi}^+(\sigma) = \int_0^{\infty} \Psi(x) e^{-i(\sigma+i0)x} dx; \quad \bar{\Psi}^-(\sigma) = \int_{-\infty}^0 \Psi(x) e^{-i(\sigma-i0)x} dx; \quad \Psi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\Psi}(\sigma) e^{i\sigma x} d\sigma. \quad (16)$$

Не останавливаясь на подробностях приведем решение функционального уравнения (15):

$$\bar{\tau}^+(\sigma) = \frac{X(T_1 - T_2) \bar{\Psi}^+(\sigma)}{\bar{K}^+(\sigma)}; \quad \bar{\tau}^-(\sigma) = X(T_1 - T_2) \bar{\Psi}^-(\sigma) \bar{K}^-(\sigma). \quad (17)$$

Так как при  $|\sigma| \rightarrow \infty$

$$\bar{\tau}(\sigma) = \bar{\tau}^+(\sigma) + \bar{\tau}^-(\sigma) \sim \frac{X(T_1 - T_2)}{|\sigma|},$$

то при  $|x| \rightarrow 0$   $\tau(x)$  имеет логарифмическую особенность, обусловленную неоднородностью стрингеров:

$$\tau(x) = \frac{X(T_1 - T_2)}{\pi} \ln \frac{1}{|x|} + O(1).$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Григорян Э.Х., Саркисян К.С. Контактная задача для упругой пластины, усиленной двумя параллельными полубесконечными стрингерами. // Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т.58. № 2. С.16-27.
2. Григорян Э.Х. Передача нагрузки от кусочно-однородной бесконечной накладке к упругой полуплоскости. // Уч. записки ЕГУ, естеств. науки. 1979. №3. С.29-34.

## Сведения об авторе:

**Саркисян Карен Самсонович** – канд. ф.-м. наук, доцент кафедры прикладной механики, директор научно-технической библиотеки Армянского Государственного Инженерного Университета (Политехник). **E-mail:** [sarkar1999@mail.ru](mailto:sarkar1999@mail.ru). **Тел:** (+ 374 91) 495-455.

# ТЕРМОУПРУГОСТЬ МИКРОПОЛЯРНЫХ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

Саркисян С.О.

Имея ввиду качественные результаты, установленные при помощи асимптотического интегрирования краевой задачи микрополярной термоупругости в трёхмерной тонкой области оболочки, формулируются адекватные гипотезы, на основе которых строится общая математическая модель микрополярной термоупругости тонких оболочек.

**Введение.** Основная проблема общей теории микрополярных упругих тонких оболочек и пластин заключается в приближённом сведении задачи трёхмерной микрополярной теории упругости или термоупругости к адекватной двумерной задаче [1].

В работах [2-4] с помощью метода гипотез, которые сформулированы на основе асимптотических свойств решений указанных граничных задач, построены общие прикладные теории микрополярных упругих тонких балок, пластин и оболочек.

В данной работе развивается этот подход и на основе качественных результатов асимптотического метода интегрирования граничной задачи термоупругости микрополярных тонких тел [5] построена общая прикладная теория термоупругости микрополярных оболочек.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим изотропную оболочку постоянной толщины  $2h$  как трёхмерное упругое изотропное микрополярное тело. Будем исходить из основных уравнений пространственной статической задачи линейной микрополярной теории термоупругости с независимыми полями перемещений и вращений [6]:

уравнения равновесия:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} (H_j \cdot \sigma_{ij}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_j} (H_i \cdot \sigma_{ji}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (H_i \cdot H_j \cdot \sigma_{3i}) + \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_j} \sigma_{ij} + H_j \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_3} \sigma_{i3} - \frac{\partial H_j}{\partial \alpha_i} \sigma_{jj} = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} (H_2 \cdot \sigma_{13}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_1 \cdot \sigma_{23}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (H_1 \cdot H_2 \cdot \sigma_{33}) - H_2 \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \sigma_{11} - H_1 \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} \sigma_{22} = 0, \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} (H_j \cdot \mu_{ij}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_j} (H_i \cdot \mu_{ji}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (H_i \cdot H_j \cdot \mu_{3i}) + \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_j} \mu_{ij} + \\ + H_j \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_3} \mu_{i3} - \frac{\partial H_j}{\partial \alpha_i} \mu_{jj} + H_i \cdot H_j (\sigma_{j3} - \sigma_{3j}) = 0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (H_2 \cdot \mu_{13}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_1 \cdot \mu_{23}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (H_1 \cdot H_2 \cdot \mu_{33}) - \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} \mu_{11} - H_1 \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} \mu_{22} + \\ + H_1 \cdot H_2 (\sigma_{12} - \sigma_{21}) = 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

физические соотношения термоупругости:

$$\begin{aligned} \gamma_{ii} = \frac{1}{E} [\sigma_{ii} - \nu(\sigma_{jj} + \sigma_{33})] + \alpha_t T, \quad \gamma_{33} = \frac{1}{E} [\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})] + \alpha_t T, \\ \gamma_{ij} = \frac{\mu + \alpha}{4\mu\alpha} \sigma_{ij} - \frac{\mu - \alpha}{4\mu\alpha} \sigma_{ji}, \quad \gamma_{i3} = \frac{\mu + \alpha}{4\mu\alpha} \sigma_{i3} - \frac{\mu - \alpha}{4\mu\alpha} \sigma_{3i}, \quad \gamma_{3i} = \frac{\mu + \alpha}{4\mu\alpha} \sigma_{3i} - \frac{\mu - \alpha}{4\mu\alpha} \sigma_{i3}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \chi_{ii} = \frac{\gamma + \beta}{\gamma(3\beta + 2\gamma)} \left[ \mu_{ii} - \frac{\beta}{2(\beta + \gamma)} (\mu_{jj} + \mu_{33}) \right], \quad \chi_{33} = \frac{\gamma + \beta}{\gamma(3\beta + 2\gamma)} \left[ \mu_{33} - \frac{\beta}{2(\beta + \gamma)} (\mu_{11} + \mu_{22}) \right], \\ \chi_{ij} = \frac{1}{4\gamma\epsilon} [(\gamma + \epsilon)\mu_{ij} - (\gamma - \epsilon)\mu_{ji}], \quad \chi_{i3} = \frac{1}{4\gamma\epsilon} [(\gamma + \epsilon)\mu_{i3} - (\gamma - \epsilon)\mu_{3i}], \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\chi_{3i} = \frac{1}{4\gamma\epsilon} [(\gamma + \epsilon)\mu_{3i} - (\gamma - \epsilon)\mu_{i3}];$$

геометрические соотношения:

$$\begin{aligned} \gamma_{ii} &= \frac{1}{H_i} \cdot \frac{\partial V_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_j} V_j + \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_3} V_3, & \gamma_{ij} &= \frac{1}{H_i} \cdot \frac{\partial V_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_j} V_i + (-1)^i \omega_3, \\ \gamma_{i3} &= \frac{1}{H_i} \cdot \frac{\partial V_3}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_3} V_i + (-1)^j \omega_j, & \gamma_{3i} &= \frac{\partial V_i}{\partial \alpha_3} + (-1)^i \omega_j, & \gamma_{33} &= \frac{\partial V_3}{\partial \alpha_3}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} \chi_{ii} &= \frac{1}{H_i} \cdot \frac{\partial \omega_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_j} \omega_j + \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_3} \omega_3, & \chi_{33} &= \frac{\partial \omega_3}{\partial \alpha_3}, \\ \chi_{i3} &= \frac{1}{H_j} \cdot \frac{\partial \omega_3}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} \omega_1, & \chi_{3i} &= \frac{\partial \omega_1}{\partial \alpha_3}, & \chi_{ij} &= \frac{1}{H_i} \cdot \frac{\partial \omega_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_j} \omega_i. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Уравнение температурного поля (для простоты будем пренебрегать термоэлектрическими эффектами и не будем учитывать термоупругое рассеяние энергии):

$$\frac{1}{H_1 H_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial T}{\partial \alpha_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial T}{\partial \alpha_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left( H_1 H_2 \frac{\partial T}{\partial \alpha_3} \right) \right] = 0. \quad (1.9)$$

Здесь  $\sigma_{ii}, \sigma_{ij}, \sigma_{i3}, \sigma_{3i}, \sigma_{33}, \mu_{ii}, \mu_{ij}, \mu_{i3}, \mu_{3i}, \mu_{33}$  – компоненты силового и моментного тензоров напряжений;  $\gamma_{ii}, \gamma_{ij}, \gamma_{i3}, \gamma_{3i}, \gamma_{33}, \chi_{ii}, \chi_{ij}, \chi_{i3}, \chi_{3i}, \chi_{33}$  – компоненты тензоров деформации и изгиба-кручений;  $\vec{V}(V_1, V_2, V_3)$ ,  $\vec{\omega}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ , соответственно, вектор перемещений, и вектор свободного поворота;  $T$  – функция температуры;  $E, \nu \left( \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \right), \alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$  – упругие константы микрополярного материала;  $\alpha_i$  – линейный коэффициент температурного расширения;  $i, j = 1, 2, i \neq j$ ;  $H_i = A_i \left( 1 + \frac{\alpha_3}{R_i} \right)$ ,  $H_3 = 1$  – коэффициенты Ляме криволинейной системы координат  $\alpha_i, \alpha_3$  – применяемой в теории оболочек,  $R_i$  – главные радиусы кривизны срединной поверхности оболочки.

К основным уравнениям микрополярной теории термоупругости (1.1)-(1.9) присоединим соответствующие граничные условия.

На лицевых поверхностях оболочки  $\alpha_3 = \pm h$  примем граничные условия первой граничной задачи микрополярной теории упругости:

$$\sigma_{3i} = \pm q_i^\pm, \quad \sigma_{33} = \pm q_3^\pm, \quad \mu_{3i} = \pm m_i^\pm, \quad \mu_{33} = \pm m_3^\pm. \quad (1.10)$$

На поверхности края оболочки  $\Sigma$  в зависимости от способа приложения внешней нагрузки или закрепления её точек, граничные условия записываются в силовых и моментных напряжениях, перемещениях и поворотах или в смешанном виде.

Для температурного поля оболочки, как на лицевых поверхностях  $\alpha_3 = \pm h$ , так и на поверхности края  $\Sigma$ , для простоты будем считать заданным значение температурной функции.

Следует отметить, что основной физической постоянной, удерживающей модель (1.1)-(1.9) на уровне микрополярной теории термоупругости, является упругий коэффициент  $\alpha$  (при  $\alpha = 0$  из указанной системы будет отделяться уравнение трёхмерной классической теории термоупругости).

Предполагается, что толщина оболочки мала по сравнению с характерными радиусами кривизны срединной поверхности оболочки. Будем исходить из следующей основной концепции: в статическом случае общее напряжённо-деформированное состояние тонкого трёхмерного тела, образующего оболочку, состоит из внутреннего напряжённо-деформированного состояния, охватывающего всю оболочку, и пограничных слоёв, локализирующихся вблизи поверхности края оболочки  $\Sigma$ . Построение общей прикладной-двумерной теории термоупругости микрополярных упругих тонких оболочек тесно связано с построением внутренней задачи.

Считая, что метод гипотез, наряду с чрезвычайной наглядностью, очень быстро и относительно просто для инженерной практики приводит к окончательным результатам, будем строить теорию термоупругости микрополярных оболочек на основе метода гипотез. Сами гипотезы будем формулировать на основе результата асимптотического анализа поставленной трёхмерной граничной задачи микрополярной теории термоупругости в тонкой трёхмерной области оболочки [5].

## 2. Общая теория термоупругости микрополярных тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений.

С учётом качественных результатов [5] асимптотического решения системы уравнений (1.1)-(1.9) с указанными выше граничными условиями и самого процесса асимптотического интегрирования этой граничной задачи, в основу предлагаемой ниже теории термоупругости микрополярных тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений можем прийти к следующим достаточно общим предположениям (гипотезам):

1. В процессе деформации первоначально прямолинейные и нормальные к срединной поверхности волокна свободно поворачиваются в пространстве как жёсткое целое на некоторый угол, не изменяя при этом своей длины и не оставаясь перпендикулярным к деформированной срединной поверхности.

Принятую гипотезу математически можем записать так: перемещения точек тела-оболочки распределены по толщине оболочки по линейному закону следующим образом

$$V_i = u_i(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 \psi_i(\alpha_1, \alpha_2), \quad V_3 = w(\alpha_1, \alpha_2). \quad (2.1)$$

Добавлением к этим, будем считать, что тангенциальные повороты и нормальный поворот также имеют линейное распределение по толщине оболочки следующего характера:

$$\omega_3 = \Omega_3(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 \iota(\alpha_1, \alpha_2), \quad \omega_i = \Omega_i(\alpha_1, \alpha_2). \quad (2.2)$$

Отметим, что с точки зрения перемещений принятая гипотеза (2.1) по сути дела, совпадает с кинематической гипотезой Тимошенко в классической теории упругих оболочек [7]. Гипотезу (2.1), (2.2), в целом, назовём обобщённой кинематической гипотезой Тимошенко в микрополярной теории оболочек.

2. Силовым напряжением  $\sigma_{33}$  в обобщённом законе Гука (1.5) можно пренебречь относительно силовых напряжений  $\sigma_{ii}$ , а также, моментным напряжением  $\mu_{3i}$  в обобщённом законе Гука (1.5) можно пренебречь относительно моментного напряжения  $\mu_{i3}$ .

3. При определении деформаций, изгиба-кручений, силовых и моментных напряжений, сначала для силовых напряжений  $\sigma_{3i}$  и моментного напряжения  $\mu_{33}$  примем

$$\sigma_{3i} = \sigma_{3i}^0(\alpha_1, \alpha_2), \quad \mu_{33} = \mu_{33}^0(\alpha_1, \alpha_2). \quad (2.3)$$

После вычисления указанных величин, значения  $\sigma_{3i}$  и  $\mu_{33}$  окончательно определим прибавлением к значениям (2.3) соответственно слагаемые, получаемые интегрированием уравнений равновесия (1.1), (1.4), для которых потребуем выполнение условия, чтобы усреднённые по толщине оболочки величины были равны нулю.

4. Принимаем, что температура по толщине оболочки меняется по линейному закону, а именно:

$$T = T_0(\alpha_1, \alpha_2) + \frac{\alpha_3}{h} \Delta T(\alpha_1, \alpha_2) \quad (2.4)$$

$$\text{где } T_0 = \frac{1}{2}(T^+ + T^-), \quad (\Delta T) = T^+ - T^-, \quad (2.5)$$

$T^+(\alpha_1, \alpha_2)$  и  $T^-(\alpha_1, \alpha_2)$  — температуры соответственно на внешней ( $\alpha_3 = h$ ) и внутренней ( $\alpha_3 = -h$ ) поверхностях оболочки.

5. Величинами  $\frac{\alpha_3}{R_i}$  по сравнению с единицей будем пренебрегать.

Основная система уравнений термоупругости микрополярных тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений будет на основе принятых гипотез выражаться так:

уравнения равновесия

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{A_i} \frac{\partial T_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} (T_{ii} - T_{jj}) + \frac{1}{A_j} \frac{\partial S_{ji}}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} (S_{ji} + S_{ij}) + \frac{N_{i3}}{R_i} = -(q_i^+ + q_i^-), \\
& \frac{1}{A_i} \frac{\partial M_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} (M_{ii} - M_{jj}) + \frac{1}{A_j} \frac{\partial H_{ji}}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} (H_{ji} + H_{ij}) - N_{3i} = -h(q_i^+ - q_i^-), \\
& \frac{T_{11}}{R_1} + \frac{T_{22}}{R_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial (A_2 N_{13})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial (A_1 N_{23})}{\partial \alpha_2} \right] = q_3^+ + q_3^-, \\
& \frac{1}{A_i} \frac{\partial L_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} (L_{ii} - L_{jj}) + \frac{1}{A_j} \frac{\partial L_{ji}}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} (L_{ji} + L_{ij}) + \frac{L_{i3}}{R_i} + \\
& \quad + (-1)^j (N_{j3} - N_{3j}) = -(m_i^+ + m_i^-), \\
& \frac{L_{11}}{R_1} + \frac{L_{22}}{R_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial (A_2 L_{13})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial (A_1 L_{23})}{\partial \alpha_2} \right] - (S_{12} - S_{21}) = (m_3^+ + m_3^-), \\
& L_{33} - \frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial (A_2 \Lambda_{13})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial (A_1 \Lambda_{23})}{\partial \alpha_2} \right] - (H_{12} - H_{21}) = h(m_3^+ - m_3^-);
\end{aligned} \tag{2.6}$$

физические соотношения термоупругости

$$\begin{aligned}
T_{ii} &= \frac{2Eh}{1-\nu^2} [(\Gamma_{ii} + \nu \Gamma_{jj}) - (1+\nu) \Gamma_T], \quad S_{ij} = 2h [(\mu + \alpha) \Gamma_{ij} + (\mu - \alpha) \Gamma_{ji}], \\
M_{ii} &= \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} [(K_{ii} + \nu K_{jj}) - (1+\nu) K_T], \\
H_{ij} &= \frac{2h^3}{3} [(\mu + \alpha) K_{ij} + (\mu - \alpha) K_{ji}], \quad N_{i3} = 2h(\mu + \alpha) \Gamma_{i3} + 2h(\mu - \alpha) \Gamma_{3i}, \\
N_{3i} &= 2h(\mu + \alpha) \Gamma_{3i} + 2h(\mu - \alpha) \Gamma_{i3}, \quad L_{ii} = 2h \left[ \frac{4\gamma(\beta + \gamma)}{\beta + 2\gamma} \kappa_{ii} + \frac{2\gamma\beta}{\beta + 2\gamma} \kappa_{jj} \right] + \frac{\beta}{\beta + 2\gamma} L_{33}, \\
L_{ij} &= 2h [(\gamma + \varepsilon) \kappa_{ij} + (\gamma - \varepsilon) \kappa_{ji}], \quad L_{33} = 2h [(\beta + 2\gamma) \iota + \beta(\kappa_{11} + \kappa_{22})], \\
L_{i3} &= 2h \cdot \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \kappa_{i3}, \quad \Lambda_{i3} = \frac{2h^3}{3} \cdot \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} l_{i3};
\end{aligned} \tag{2.7}$$

геометрические соотношения

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ii} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} u_j + \frac{w}{R_i}, \quad \Gamma_{ij} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial u_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} u_i, \quad K_{ii} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \psi_j, \\
K_{ij} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial \psi_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \psi_i, \quad \Gamma_{i3} = -\vartheta_i + (-1)^j \Omega_j, \quad \Gamma_{3i} = \psi_i - (-1)^j \Omega_j, \quad \vartheta_i = -\frac{1}{A_i} \frac{\partial w}{\partial \alpha_i} + \frac{u_i}{R_i}, \\
\kappa_{ii} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial \Omega_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \Omega_2 + \frac{\Omega_3}{R_i}, \quad \kappa_{ij} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \Omega_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \Omega_i, \quad \kappa_{i3} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \Omega_3}{\partial \alpha_i} - \frac{\Omega_i}{R_i}, \quad l_{i3} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \iota}{\partial \alpha_i}.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Здесь

$$\Gamma_T = \frac{1}{2h} \alpha_t \int_{-h}^h T d\alpha_3 = \alpha_t T_0, \quad K_T = \frac{3}{2h^3} \alpha_t \int_{-h}^h T \alpha_3 d\alpha_3 = \alpha_t \frac{\Delta T}{h}.$$

Представим “смягчённые” граничные условия на граничном контуре  $\Gamma$  срединной поверхности оболочки, считая, что этот контур совпадает с координатной линией  $\alpha_1 = \text{const}$  [4]:

$$\begin{aligned} T_{11} &= T_{11}^* \quad \text{или} \quad u_1 = u_1^*, \quad S_{12} = S_{12}^* \quad \text{или} \quad u_2 = u_2^*, \quad N_{13} = N_{13}^* \quad \text{или} \quad w = w^*, \\ M_{11} &= M_{11}^* \quad \text{или} \quad K_{11} = K_{11}^*, \quad H_{12} = H_{12}^* \quad \text{или} \quad K_{12} = K_{12}^*, \\ L_{11} &= L_{11}^* \quad \text{или} \quad \kappa_{11} = \kappa_{11}^*, \quad L_{12} = L_{12}^* \quad \text{или} \quad \kappa_{12} = \kappa_{12}^*, \\ L_{13} &= L_{13}^* \quad \text{или} \quad \kappa_{13} = \kappa_{13}^*, \quad \Lambda_{13} = \Lambda_{13}^* \quad \text{или} \quad l_{13} = l_{13}^*. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Система уравнений (2.6), (2.7), (2.8) и граничные условия (2.9) представляют собой математическую модель термоупругости микрополярных тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений. Эта модель представляет собой систему дифференциальных уравнений 18-го порядка с 9-ю граничными условиями на каждом из контуров  $\Gamma$  срединной поверхности оболочки. Это система из 52 уравнений, относительно 52 неизвестных функций:

$$u_i, w, \psi_i, \Omega_i, \Omega_3, \iota, \vartheta_i, T_{ij}, S_{ij}, N_{i3}, N_{3i}, M_{ii}, H_{ij}, L_{ii}, L_{ij}, L_{33}, L_{i3}, \Lambda_{i3}, \Gamma_{ii}, \Gamma_{ij}, \Gamma_{i3}, \Gamma_{3i}, K_{ii}, K_{ij}, \kappa_{ii}, \kappa_{ij}, \kappa_{i3}, l_{i3}.$$

На основе принципа Даламбера, если в уравнениях равновесия (2.12) будем включать силы и моменты инерции (соответственно:  $2\rho h \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$ ,  $2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ ,  $\frac{2\rho h^3}{3} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2}$ ,  $2Jh \frac{\partial^2 \Omega_i}{\partial t^2}$ ,  $2Jh \frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2}$ ,  $\frac{2Jh^3}{3} \frac{\partial^2 \iota}{\partial t^2}$ ), то получим общую прикладную теорию динамики термоупругости микрополярных тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений (конечно, в этом случае нужно задавать также соответствующие начальные условия).

Отметим, что при  $\alpha = 0$  из модели (2.6)-(2.9) будут отделяться система уравнений и граничные условия классической термоупругости тонких оболочек типа Тимошенко [7] (с некоторым отличием, связанной с нашей статической гипотезой 3)).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Altenbach J., Altenbach H., Eremeyev V. A. 2009. “On generalized Cosserat-tape theories of plates and shells: a short review and bibliography”. // Arch. Mech (Special Issue) DOI 10. 1007/s 00419-009-0365-3. Springer-Verlag.
2. Sargsyan S.H. Effective Manifestations of Characteristics of Strength and Rigidity of Micro polar Elastic Thin Bars// Journal of Materials Science and Engineering. 2012. Vol.2. №1. P.98-108.
3. Саркисян С.О. Математическая модель микрополярных упругих тонких пластин и особенности их прочностных и жёсткостных характеристик.// Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т.53. Вып. 2. С.148-156.
4. Саркисян С.О. Общая теория микрополярных упругих тонких оболочек //Физическая мезомеханика. 2011. Т.14. №1. С.55-66.
5. Sargsyan S.H. Thermoelasticity of Thin Shells on the Basis of Asymmetrical Theory of Elasticity//Journal of Thermal Stresses. 2009. Vol. 32. № 6. P.791-818.
6. Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford, etc.: Pergamon Press. 1986. 383p.
7. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Теория оболочек переменной жёсткости. Киев: Наукова думка, 1981. 544с.

### Сведения об авторе:

**Саркисян Самвел Оганесович** – чл-корр. НАН Армении, доктор физ-мат. наук, профессор, зав. каф. мат. анализа и дифференциальных уравнений Гюмрийского государственного педагогического института им. М. Налбандяна, (093) 15 16 98  
E-mail: [slusin@yahoo.com](mailto:slusin@yahoo.com)

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МИКРОПОЛЯРНЫХ ОРТОТРОПНЫХ УПРУГИХ СЛОИСТЫХ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

Саркисян С. О., Фарманян А. Ж.

В данной работе на основе метода гипотез построена теория микрополярных упругих ортотропных слоистых тонких оболочек несимметричного строения.

**Введение.** Теория анизотропных упругих слоистых тонких оболочек симметричного или несимметричного строения на основе классической теории упругости построена в работах [1-3 и др.].

В работе [4], принимая определённые гипотезы, для всего пакета оболочки, в целом, построена прикладная теория микрополярных ортотропных упругих слоистых оболочек симметричного строения. В работе [5] аналогичным подходом построена прикладная теория микрополярных ортотропных упругих слоистых тонких пластин несимметричного строения.

В данной работе развивается это направление и построена общая теория микрополярных ортотропных упругих слоистых тонких оболочек несимметричного строения.

**Постановка задачи.** Рассмотрим оболочку постоянной толщины  $2h$ , составленную из  $n$  однородных микрополярных ортотропных слоев. В качестве исходной поверхности примем внутреннюю поверхность какого-либо  $i$ -го слоя или поверхность контакта слоёв, которую отнесём к криволинейным ортогональным координатам  $\alpha_1, \alpha_2$ , отсчитываемым вдоль линии главных кривизн. Поперечную координату  $z$  будем отсчитывать в сторону возрастания внешней нормали к исходной поверхности.

Будем исходить из основных уравнений пространственной статической задачи линейной микрополярной теории упругости для ортотропного тела с независимыми полями перемещений и вращений [6,7]:

$$\begin{aligned}
 & \text{уравнения равновесия для } i\text{-го слоя оболочки} \\
 & \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (H_2 \sigma_{11}^i) + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_1 \sigma_{21}^i) + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial z} (H_1 H_2 \sigma_{31}^i) + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \sigma_{12}^i + \\
 & \quad + \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial z} \sigma_{13}^i - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \sigma_{22}^i = 0, \\
 & \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (H_2 \sigma_{12}^i) + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_1 \sigma_{22}^i) + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial z} (H_1 H_2 \sigma_{32}^i) + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \sigma_{21}^i + \\
 & \quad + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial z} \sigma_{23}^i - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \sigma_{11}^i = 0, \\
 & \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (H_2 \sigma_{13}^i) + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_1 \sigma_{23}^i) + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial z} (H_1 H_2 \sigma_{33}^i) - \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial z} \sigma_{11}^i - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial z} \sigma_{22}^i = 0, \\
 & \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (H_2 \mu_{11}^i) + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_1 \mu_{21}^i) + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial z} (H_1 H_2 \mu_{31}^i) + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \mu_{12}^i + \\
 & \quad + \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial z} \mu_{13}^i - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \mu_{22}^i + (\sigma_{23}^i - \sigma_{32}^i) = 0, \\
 & \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (H_2 \mu_{12}^i) + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_1 \mu_{22}^i) + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial z} (H_1 H_2 \mu_{32}^i) + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \mu_{21}^i + \\
 & \quad + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial z} \mu_{23}^i - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \mu_{11}^i + (\sigma_{31}^i - \sigma_{13}^i) = 0, \\
 & \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (H_2 \mu_{13}^i) + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_1 \mu_{23}^i) + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial z} (H_1 H_2 \mu_{33}^i) - \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial z} \mu_{11}^i - \\
 & \quad - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial z} \mu_{22}^i + \sigma_{12}^i - \sigma_{21}^i = 0;
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

физические соотношения для микрополярного ортотропного упругого тела

$$\begin{aligned}
\gamma_{11}^i &= a_{11}^i \sigma_{11}^i + a_{12}^i \sigma_{22}^i + a_{13}^i \sigma_{33}^i, & \gamma_{22}^i &= a_{12}^i \sigma_{11}^i + a_{22}^i \sigma_{22}^i + a_{23}^i \sigma_{33}^i, \\
\gamma_{33}^i &= a_{13}^i \sigma_{11}^i + a_{23}^i \sigma_{22}^i + a_{33}^i \sigma_{33}^i, & \gamma_{12}^i &= a_{77}^i \sigma_{12}^i + a_{78}^i \sigma_{21}^i, \\
\gamma_{21}^i &= a_{78}^i \sigma_{12}^i + a_{88}^i \sigma_{21}^i, & \gamma_{13}^i &= a_{56}^i \sigma_{31}^i + a_{66}^i \sigma_{13}^i, \\
\gamma_{31}^i &= \tilde{a}_{55}^i \sigma_{31}^i + a_{56}^i \sigma_{13}^i, & \gamma_{23}^i &= a_{44}^i \sigma_{23}^i + a_{45}^i \sigma_{32}^i, & \gamma_{32}^i &= a_{45}^i \sigma_{23}^i + a_{55}^i \sigma_{32}^i, \\
\chi_{11}^i &= b_{11}^i \mu_{11}^i + b_{12}^i \mu_{22}^i + b_{13}^i \mu_{33}^i, & \chi_{22}^i &= b_{12}^i \mu_{11}^i + b_{22}^i \mu_{22}^i + b_{23}^i \mu_{33}^i, \\
\chi_{33}^i &= b_{13}^i \mu_{11}^i + b_{23}^i \mu_{22}^i + b_{33}^i \mu_{33}^i, & \chi_{12}^i &= b_{77}^i \mu_{12}^i + b_{78}^i \mu_{21}^i, \\
\chi_{21}^i &= b_{78}^i \mu_{12}^i + b_{88}^i \mu_{21}^i, & \chi_{13}^i &= b_{56}^i \mu_{31}^i + b_{66}^i \mu_{13}^i, \\
\chi_{31}^i &= \tilde{b}_{55}^i \mu_{31}^i + b_{56}^i \mu_{13}^i, & \chi_{23}^i &= b_{44}^i \mu_{23}^i + b_{45}^i \mu_{32}^i, & \chi_{32}^i &= b_{45}^i \mu_{23}^i + b_{55}^i \mu_{32}^i;
\end{aligned} \tag{1.2}$$

геометрические соотношения

$$\begin{aligned}
\gamma_{11}^i &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial V_1^i}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} V_2^i + \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial z} V_3^i, & \gamma_{22}^i &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial V_2^i}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} V_1^i + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial z} V_3^i, \\
\gamma_{33}^i &= \frac{\partial V_3^i}{\partial z}, & \gamma_{12}^i &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial V_2^i}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} V_1^i - \omega_3^i, & \gamma_{21}^i &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial V_1^i}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} V_2^i + \omega_3^i, \\
\gamma_{13}^i &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial V_3^i}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial z} V_1^i + \omega_2^i, & \gamma_{31}^i &= \frac{\partial V_1^i}{\partial z} - \omega_2^i, & \gamma_{23}^i &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial V_3^i}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial z} V_2^i - \omega_1^i, \\
\gamma_{32}^i &= \frac{\partial V_2^i}{\partial z} + \omega_1^i, & \chi_{11}^i &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial \omega_1^i}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \omega_2^i + \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial z} \omega_3^i, \\
\chi_{22}^i &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial \omega_2^i}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \omega_1^i + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial z} \omega_3^i, & \chi_{33}^i &= \frac{\partial \omega_3^i}{\partial z}, & \chi_{31}^i &= \frac{\partial \omega_1^i}{\partial z}, & \chi_{32}^i &= \frac{\partial \omega_2^i}{\partial z}, \\
\chi_{12}^i &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial \omega_2^i}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \omega_1^i, & \chi_{21}^i &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial \omega_1^i}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \omega_2^i, \\
\chi_{13}^i &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial \omega_3^i}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial z} \omega_1^i, & \chi_{23}^i &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial \omega_3^i}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial z} \omega_2^i.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Здесь  $\hat{\gamma}^i, \hat{\mu}^i, \hat{\gamma}^i, \hat{\chi}^i$  – соответственно тензоры силовых и моментных напряжений, деформаций и изгибов-кручений,  $\hat{a}^i, \hat{b}^i$  – тензоры упругих постоянных микрополярного ортотропного материала для  $i$ -го слоя.

Будем считать, что слои оболочки жёстко связаны между собой и работают совместно без скольжения и отрыва. Условия сопряжения слоёв будем записывать в виде:

$$V_1^i = V_1^{i+1}, \quad V_2^i = V_2^{i+1}, \quad V_3^i = V_3^{i+1}, \quad \omega_1^i = \omega_1^{i+1}, \quad \omega_2^i = \omega_2^{i+1}, \quad \omega_3^i = \omega_3^{i+1}, \tag{1.4}$$

$$\sigma_{31}^i = \sigma_{31}^{i+1}, \quad \sigma_{32}^i = \sigma_{32}^{i+1}, \quad \sigma_{33}^i = \sigma_{33}^{i+1}, \quad \mu_{31}^i = \mu_{31}^{i+1}, \quad \mu_{32}^i = \mu_{32}^{i+1}, \quad \mu_{33}^i = \mu_{33}^{i+1}. \tag{1.5}$$

Будем считать, что на внешней и внутренней поверхностях оболочки выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned}
\sigma_{31}^n \Big|_{z=z_n} &= q_1^+, \quad \sigma_{32}^n \Big|_{z=z_n} = q_2^+, \quad \sigma_{33}^n \Big|_{z=z_n} = q_3^+, \quad \mu_{31}^n \Big|_{z=z_n} = m_1^+, \quad \mu_{32}^n \Big|_{z=z_n} = m_2^+, \quad \mu_{33}^n \Big|_{z=z_n} = m_3^+, \\
\sigma_{31}^0 \Big|_{z=z_0} &= -q_1^-, \quad \sigma_{32}^0 \Big|_{z=z_0} = -q_2^-, \quad \sigma_{33}^0 \Big|_{z=z_0} = -q_3^-, \quad \mu_{31}^0 \Big|_{z=z_0} = -m_1^-, \\
\mu_{32}^0 \Big|_{z=z_0} &= -m_2^-, \quad \mu_{33}^0 \Big|_{z=z_0} = -m_3^-.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

На поверхности края оболочки  $\Sigma$  будем рассматривать следующие три основных типа граничных условий: 1) когда заданы силовые и моментные напряжения; 2) когда точки поверхности  $\Sigma$  закреплены; 3) когда заданы трёхмерные смешанные условия типа шарнирного опирания.

Предположим, что общая толщина пакета оболочки ( $2h$ ) мала по сравнению с характерными радиусами кривизны срединной поверхности ( $R_1, R_2$ ).

**2. Построение общей теории микрополярных ортотропных упругих слоистых тонких оболочек несимметричного строения.** При построении математической модели микрополярных ортотропных упругих слоистых оболочек будем пользоваться гипотезами, суть которых состоит в следующем.

1. В процессе деформации прямолинейные и нормальные к исходной поверхности оболочки волокна поворачиваются как жёсткое целое на некоторый угол, не изменяя при этом своей длины и не оставаясь перпендикулярным к деформированной поверхности. Математически принятую гипотезу запишем так: тангенциальные перемещения и нормальный поворот распределены по толщине пакета по линейному закону

$$\begin{aligned} V_1^i &= u_1(\alpha_1, \alpha_2) + z\psi_1(\alpha_1, \alpha_2), & V_2^i &= u_2(\alpha_1, \alpha_2) + z\psi_2(\alpha_1, \alpha_2), \\ \omega_3^i &= \omega_3(\alpha_1, \alpha_2) + z\iota(\alpha_1, \alpha_2) \end{aligned} \quad (2.1)$$

а прогиб  $V_3^i$  и тангенциальные повороты  $\omega_1^i, \omega_2^i$  не зависят от поперечной координаты  $z$ , т.е.

$$V_3^i = w(\alpha_1, \alpha_2), \quad \omega_1^i = \Omega_1(\alpha_1, \alpha_2), \quad \omega_2^i = \Omega_2(\alpha_1, \alpha_2). \quad (2.2)$$

2. Силовым напряжением  $\sigma_{33}^i$ , а также моментными напряжениями  $\mu_{31}^i, \mu_{32}^i$  в обобщённом законе Гука (1.2) можно пренебречь соответственно относительно силовых напряжений  $\sigma_{11}^i, \sigma_{22}^i$  и моментных напряжений  $\mu_{13}^i, \mu_{23}^i$ .

3. Величинами  $\alpha_3/R_1, \alpha_3/R_2$  по сравнению с единицей можно пренебрегать.

4. При определении деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений в каждом слое, сначала для силовых напряжений  $\sigma_{31}^i, \sigma_{32}^i$  и моментного напряжения  $\mu_{33}^i$  примем

$$\sigma_{31}^i = \overset{0}{\sigma}_{31}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \sigma_{32}^i = \overset{0}{\sigma}_{32}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \mu_{33}^i = \overset{0}{\mu}_{33}(\alpha_1, \alpha_2). \quad (2.3)$$

После вычисления указанных величин, значения  $\sigma_{31}^i, \sigma_{32}^i$  и  $\mu_{33}^i$  в каждом слое окончательно определим прибавлением к соответствующим значениям (2.3) слагаемое, получаемое интегрированием первого, второго или шестого уравнения равновесия из (1.1), для каждого из которого потребуем выполнения условия, чтобы усреднённая по толщине слоя величина была равна нулю.

Принятые гипотезы дают возможность получить определенные распределения по толщине пакета оболочки для перемещений, поворотов, деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений. При этом удовлетворяются все условия сопряжения ((1.4), (1.5)). С целью приведения трехмерной задачи микрополярной теории упругости ((1.1)-(1.6)) к двумерным, вместо компонентов тензоров силовых и моментных напряжений введём статически эквивалентные им интегральные характеристики-усилия  $T_{11}, T_{22}, S_{12}, S_{21}; N_{13}, N_{23}, N_{31}, N_{32}$ , моменты  $L_{13}, L_{23}; M_{11}, M_{22}, L_{11}, L_{22}, L_{33}, L_{12}, L_{21}, H_{12}, H_{21}$  и гипермоменты  $\Lambda_{13}, \Lambda_{23}$ .

Основная система уравнений микрополярных ортотропных упругих слоистых тонких оболочек несимметричного строения с независимыми полями перемещений и вращений будет выражаться так:

$$\begin{aligned} & \text{уравнения равновесия} \\ & \frac{1}{A_1} \frac{\partial T_{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} (T_{11} - T_{22}) + \frac{1}{A_2} \frac{\partial S_{21}}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} (S_{21} + S_{12}) + \frac{N_{13}}{R_1} = -(q_1^+ + q_1^-), \\ & \frac{1}{A_2} \frac{\partial T_{22}}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} (T_{22} - T_{11}) + \frac{1}{A_1} \frac{\partial S_{12}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} (S_{12} + S_{21}) + \frac{N_{23}}{R_2} = -(q_2^+ + q_2^-), \\ & \frac{1}{A_1} \frac{\partial N_{13}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} N_{13} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial N_{23}}{\partial \alpha_2} - \frac{T_{11}}{R_1} - \frac{T_{22}}{R_2} = q_3^+ + q_3^-, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{31} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial M_{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} (M_{22} - M_{11}) - \frac{1}{A_2} \frac{\partial H_{21}}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} (H_{21} + H_{12}) &= h(q_1^+ - q_1^-), \\
N_{32} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial M_{22}}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} (M_{11} - M_{22}) - \frac{1}{A_1} \frac{\partial H_{12}}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} (H_{12} + H_{21}) &= h(q_2^+ - q_2^-), \\
\frac{1}{A_1} \frac{\partial L_{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} (L_{11} - L_{22}) + \frac{1}{A_2} \frac{\partial L_{21}}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} (L_{21} + L_{12}) + \frac{L_{13}}{R_1} + N_{23} - N_{32} &= -(m_1^+ + m_1^-), \\
\frac{1}{A_2} \frac{\partial L_{22}}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} (L_{22} - L_{11}) + \frac{1}{A_1} \frac{\partial L_{12}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} (L_{12} + L_{21}) + \frac{L_{23}}{R_2} + N_{31} - N_{13} &= -(m_2^+ + m_2^-), \\
\frac{1}{A_1} \frac{\partial L_{13}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} L_{13} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial L_{23}}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} L_{23} + S_{12} - S_{21} - \frac{L_{11}}{R_1} - \frac{L_{22}}{R_2} &= -(m_3^+ + m_3^-), \\
L_{33} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial \Lambda_{13}}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \Lambda_{13} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial \Lambda_{23}}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \Lambda_{23} + H_{12} - H_{21} &= h(m_3^+ - m_3^-);
\end{aligned} \tag{2.4}$$

соотношения упругости

$$\begin{aligned}
T_{11} &= C_{11} \Gamma_{11} + C_{12} \Gamma_{22} + R_{11} K_{11} + R_{12} K_{22}, & T_{22} &= C_{12} \Gamma_{11} + C_{22} \Gamma_{22} + R_{12} K_{11} + R_{22} K_{22}, \\
S_{12} &= C_{88} \Gamma_{12} + C_{78} \Gamma_{21} + R_{88} K_{12} + R_{78} K_{21}, & S_{21} &= C_{77} \Gamma_{21} + C_{78} \Gamma_{12} + R_{77} K_{21} + R_{78} K_{12}, \\
N_{13} &= \tilde{C}_{55} \Gamma_{13} + C_{56} \Gamma_{31}, & N_{23} &= C_{55} \Gamma_{23} + C_{45} \Gamma_{32}, & N_{31} &= C_{66} \Gamma_{31} + C_{56} \Gamma_{13}, \\
N_{32} &= C_{44} \Gamma_{32} + C_{45} \Gamma_{23}, & M_{11} &= D_{11} K_{11} + D_{12} K_{22} + R_{11} \Gamma_{11} + R_{12} \Gamma_{22}, \\
M_{22} &= D_{12} K_{11} + D_{22} K_{22} + R_{12} \Gamma_{11} + R_{22} \Gamma_{22}, & H_{12} &= D_{88} K_{12} + D_{78} K_{21} + R_{88} \Gamma_{12} + R_{78} \Gamma_{21}, \\
H_{21} &= D_{77} K_{21} + D_{78} K_{12} + R_{77} \Gamma_{21} + R_{78} \Gamma_{12}, \\
L_{11} &= d_{11} k_{11} + d_{12} k_{22} + d_{13} l, & L_{22} &= d_{12} k_{11} + d_{22} k_{22} + d_{23} l, & L_{33} &= d_{13} k_{11} + d_{23} k_{22} + d_{33} l, \\
L_{12} &= d_{88} k_{12} + d_{78} k_{21}, & L_{21} &= d_{78} k_{12} + d_{77} k_{21}, & L_{13} &= d_{66} k_{13} + \eta_{66} l_{13}, \\
L_{23} &= d_{44} k_{23} + \eta_{44} l_{23}, & \Lambda_{13} &= \lambda_{66} l_{13} + \eta_{66} k_{13}, & \Lambda_{23} &= \lambda_{44} l_{23} + \eta_{44} k_{23},
\end{aligned} \tag{2.5}$$

где

$$\begin{aligned}
C_{11} &= \sum_{i=1}^n \frac{a_{22}^i}{a_{11}^i a_{22}^i - (a_{12}^i)^2} (z_i - z_{i-1}), \dots & R_{11} &= \sum_{i=1}^n \frac{a_{22}^i}{a_{11}^i a_{22}^i - (a_{12}^i)^2} \frac{1}{2} (z_i^2 - z_{i-1}^2), \dots \\
D_{11} &= \sum_{i=1}^n \frac{a_{22}^i}{a_{11}^i a_{22}^i - (a_{12}^i)^2} \frac{1}{3} (z_i^3 - z_{i-1}^3), \dots & d_{11} &= \sum_{i=1}^n \frac{b_{22}^i}{b_{11}^i b_{22}^i - (b_{12}^i)^2} (z_i - z_{i-1}), \dots \\
\eta_{44} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \frac{1}{b_{44}^i} (z_i^2 - z_{i-1}^2), \dots & \lambda_{44} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{3} \frac{1}{b_{44}^i} (z_i^3 - z_{i-1}^3), \dots
\end{aligned} \tag{2.6}$$

геометрические соотношения

$$\begin{aligned}
K_{11} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \psi_2, & K_{22} &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \psi_1, & \Gamma_{13} &= -\vartheta_1 + \Omega_2, \\
\Gamma_{11} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_2 + \frac{w}{R_1}, & \Gamma_{22} &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u_1 + \frac{w}{R_2}, & \Gamma_{23} &= -\vartheta_2 - \Omega_1, \\
\Gamma_{31} &= \psi_1 - \Omega_2, & \Gamma_{32} &= \psi_2 + \Omega_1, & \vartheta_2 &= -\frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} + \frac{u_2}{R_2}, & \vartheta_1 &= -\frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} + \frac{u_1}{R_1}, \\
K_{12} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \psi_1 - \iota, & K_{21} &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \psi_2 + \iota, \\
\Gamma_{12} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_1 - \Omega_3, & \Gamma_{21} &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u_2 + \Omega_3, \\
k_{12} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \Omega_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \Omega_1, & k_{21} &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial \Omega_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \Omega_2,
\end{aligned} \tag{2.7}$$

$$k_{13} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \Omega_3}{\partial \alpha_2} - \frac{\Omega_1}{R_1}, \quad k_{23} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \Omega_3}{\partial \alpha_2} - \frac{\Omega_2}{R_2}, \quad l_{13} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial t}{\partial \alpha_1}, \quad l_{23} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial t}{\partial \alpha_2},$$

$$k_{11} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \Omega_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \Omega_2 + \frac{\Omega_3}{R_1}, \quad k_{22} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \Omega_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_2} \Omega_1 + \frac{\Omega_3}{R_2}, \quad k_{33} = t.$$

“Смягченные” граничные условия на граничном контуре  $\Gamma$  исходной поверхности (считая, что этот контур совпадает с координатной линией  $\alpha_1 = \text{const}$ ) будут выражаться так:

$$T_{11} = T_{11}^* \text{ или } u_1 = u_1^*, \quad S_{12} = S_{12}^* \text{ или } u_2 = u_2^*, \quad N_{13} = N_{13}^* \text{ или } w = w^*,$$

$$M_{11} = M_{11}^* \text{ или } K_{11} = K_{11}^*, \quad H_{12} = H_{12}^* \text{ или } K_{12} = K_{12}^*, \quad L_{11} = L_{11}^* \text{ или } \kappa_{11} = \kappa_{11}^*,$$

$$L_{12} = L_{12}^* \text{ или } \kappa_{12} = \kappa_{12}^*, \quad L_{13} = L_{13}^* \text{ или } \kappa_{13} = \kappa_{13}^*, \quad \Lambda_{13} = \Lambda_{13}^* \text{ или } l_{13} = l_{13}^*. \quad (2.8)$$

Система уравнений (2.4)-(2.7) и граничные условия (2.8) представляют математическую модель микрополярных ортотропных упругих тонких оболочек несимметричного строения.

Если от микрополярной модели перейти к классической модели, получим классическую модель ортотропных упругих слоистых оболочек несимметричного строения, построенную в работах [2,3] (с незначительным различием, связанной с нашей гипотезой 4).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М: Наука, 1974. 446с.
2. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Теория оболочек переменной жесткости. Киев: Наукова думка, 1981. 544с.
3. Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Многослойные армированные оболочки. Расчёт пневматических шин. М.: Машиностроение, 1988. 288с.
4. Саркисян С.О., Фарманян А.Ж. Теория микрополярной анизотропной (ортотропной) упругой слоистой оболочки, составленной из нечётного числа слоёв, симметрично расположенных относительно срединной поверхности // В сб.: “Проблемы механики деформируемого твердого тела”, посвящён. 90-летию С.А. Амбарцумяна. Ереван: Изд. НАН Армении. 2012. С.250-260.
5. Саркисян С.О., Фарманян А.Ж. Теория микрополярных ортотропных упругих слоистых тонких пластин // Изв.НАН Армении. Механика. 2012. Т.65. №4. (в печати).
6. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 862с.
7. Iesen D. Torsion of Anisotropic Micropolar Elastic Cylinders // Z Angew. Math. Mech (ZAMM). 1974. V. 54. №12. P. 773-779.

### Сведения об авторах:

**Саркисян Самвел Оганесович** – Чл-корр. НАН Армении, доктор физ-мат. наук, профессор, зав. каф. мат. анализа и дифференциальных уравнений Гюмрийского государственного педагогического института им. М. Налбандяна, (093) 15 16 98

**E-mail:** [slusin@yahoo.com](mailto:slusin@yahoo.com)

**Фарманян Анаит Жораевна** – Кандидат физ-мат наук, доцент, проректор по науке и внешним связям Гюмрийского государственного педагогического института им. М. Налбандяна, Тел.:(077) 80 24 25

**E-mail:** [afarmanyanyan@yahoo.com](mailto:afarmanyanyan@yahoo.com)

# О ПАРАДОКСЕ В ПОВЕДЕНИИ КРУТЯЩЕГО МОМЕНТА В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЕ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ ПРИЛОЖЕНИЯ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛЫ

Сейранян С.П.

Обсуждается предельный переход в компонентах решения Навье в форме повторного тригонометрического ряда для локально нагруженной на прямоугольной площадке равномерным давлением прямоугольной шарнирно-опёртой пластины. Устремлением сторон площадки к нулю при результирующей силе и центра площадки  $(\xi, \eta)$  неизменными, получено конечное предельное значение для второй смешанной частной производной от прогиба в точке  $(\xi, \eta)$ . Показано, что в точке  $(\xi, \eta)$  операции предельного перехода и двукратного смешанного дифференцирования, последовательно примененные к прогибу, перестановочны. Исследуется предельное поведение второй смешанной частной производной от прогиба названной пластины под сосредоточенной нагрузкой при приближении к точке  $(\xi, \eta)$  по некоторым кривым. Найдены различные кривые, движение по которым приводит к различным конечным предельным значениям. Отмеченное поведение величины, пропорциональной крутящему моменту – распределённой физической величине – в изотропном теле представляется парадоксом.

**Введение.** В краевых задачах механики известны парадоксы, когда нарушается физически обусловленная непрерывная зависимость решений от параметров задачи. К таковым относится, например, парадокс Циглера [1] и парадокс Бабушки – Сапонджяна [2]. Поэтому решение той или иной задачи, сформулированное предельным путем, требует всестороннего физико-математического анализа. К числу таковых относятся, например, обобщённые решения в [3], [4] и др. Так решение Навье для прогиба свободно опёртой прямоугольной пластины под сосредоточенной нагрузкой [4] (ниже СН) сформулировано им предельным переходом в им же полученном решении для прогиба данной, но локально нагруженной по прямоугольнику равномерным поперечным давлением пластины. Устремления сторон прямоугольника нагружения к нулю при поддержании полной нагрузки постоянной, получено предельное значение для прогиба, к-торое и было принято Навье за решение задачи для данной пластины под СН. При этом Навье не накладывал требований существования предельных значений для прочих величин НДС пластины с сохранением их физико-геометрических свойств.

В настоящей работе ограничиваемся исследованием предельного перехода от локально-равномерно распределённой нагрузки к сосредоточенной в выражениях для смешанной второй частной производной по переменным  $x$  и  $y$  от названного решения Навье для прогиба в центре  $(\xi, \eta)$  прямоугольника нагружения. Приводится анализ поведения решения Навье при СН.

Прежде автором исследован названный предельный переход в выражениях для первых и всех вторых частных производных от прогиба: первых в замкнутом прямоугольнике плана пластины  $G$  [5], а вторых – в  $G \setminus (\xi, \eta)$  [6]. Доказано существование предельных значений названных величин в отмеченных областях, их непрерывность как функций двух переменных, а также перестановочность операций частного дифференцирования и предельного перехода.

## 1. Исходные выражения для смешанных вторых частных производных от прогиба локально нагруженной прямоугольной пластины в центре прямоугольника нагружения.

В настоящем исследовании отправляемся от выражения для второй смешанной частной производной от решения Навье для прогиба нагруженной на прямоугольной площадке равномерным давлением прямоугольной шарнирно опёртой по торцам пластины [4] в форме почленно продифференцированного тригонометрического ряда (ТР) [7]. В центре площадки  $(\xi, \eta)$  имеем

$$\begin{aligned} \partial^2 w(\xi, \eta) / \partial x \partial y &= 1 / (4 \Delta \xi \Delta \eta) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin 2 \lambda_m \xi \sin 2 \mu_n \eta \sin \lambda_m \Delta \xi / 2 \sin \mu_n \Delta \eta / 2 = \\ &= 1 / 8 \sum_{i=0}^1 (-1)^i \psi(\lambda_1 (2 \xi + (-1)^i \Delta \xi / 2), \eta) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $\lambda_m = m\pi / a$ ,  $\mu_n = n\pi / b$ ,  $w_{mn} = B / (\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2$ , где  $a, b$  – длины сторон прямоугольника плана пластины,  $B = 16P / (Dab)$ ,  $D$  и  $P$  – изгибная жёсткость пластины и результирующая сила давления;  $(\xi, \eta)$  и  $\Delta \xi, \Delta \eta$  – координаты центра площадки нагружения и длины её сторон;

$$\begin{aligned} \psi(l, \eta) &= - \left( \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \chi_n^* \cos m l \right) / (\Delta \xi \Delta \eta), \quad l = \lambda_1 (2 \xi \pm \Delta \xi / 2), \\ \chi_n^* &= \sin 2 \mu_n \eta \sin \mu_n \Delta \eta / 2 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Переход через знак равенства в (1.1) связан со сходимостью рядов-слагаемых (1.2), так как

$$\begin{aligned} |w_{mn}\chi_n^* \cos ml| &\leq B/(4\lambda_m^2\mu_n^2), \\ |\cos ml \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}\chi_n^*| &\leq \left| \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}\chi_n^* \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |w_{mn}| \leq B \sum_{n=1}^{\infty} 1/(4\lambda_m^2\mu_n^2) = B/(4\lambda_m^2) \sum_{n=1}^{\infty} 1/\mu_n^2 \end{aligned} \quad (1.3)$$

и ординарные ряды в (1.2) мажорируются числовым сходящимся рядом, а значит сходятся.

## 2. Предельный переход в выражении для второй смешанной частной производной от прогиба нагруженной по прямоугольнику пластины.

Прежде отметим, что ординарный ТР с индексом суммирования  $m$  в повторном ТР (1.2) удовлетворяет обоим условиям применения преобразования Абеля (ПА) [8]. Действительно, из (1.3) следует, что коэффициенты названного ряда при  $m \rightarrow \infty$  стремятся к нулю. Условие же, накладываемое на аргумент  $l$ , также выполняется, так как

$$0 < \lambda_1(2\xi \pm \Delta\xi/2) = \lambda_1[\xi + (\xi \pm \Delta\xi/2)] < \pi(a+a)/a = 2\pi \quad (2.1)$$

Применяя ПА, получаем

$$\psi(l, \eta) = \left[ \sin l/2 \sum_{n=1}^{\infty} w_{1n}\chi_n^* + \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} E_{mn}^{ab}\chi_n^* \sin(m-0.5)l \right] / (2\Delta\xi\Delta\eta \sin l/2), \quad (2.2)$$

где

$$E_{mn}^{ab} = w_{mn} - w_{m-1,n} = \lambda_1(\lambda_1 - 2\lambda_m)[2\Delta_{mn} + \lambda_1(\lambda_1 - 2\lambda_m)] / (\Delta_{mn}^2 \Delta_{m-1,n}^2), \quad \Delta_{mn} = \lambda_m^2 + \mu_n^2 \quad (2.3)$$

Далее с использованием неравенства (1.2) в [7] приходим к оценкам

$$|E_{mn}^{ab}| = O(\lambda_m / \Delta_{mn}^3) \leq B_1 / (\lambda_m^{3\gamma-1} \mu_n^{6-3\gamma}) \Big|_{\gamma=7/6} = B_1 / (\lambda_m^{2.5} \mu_n^{2.5}) \quad (2.4)$$

Здесь  $B_1 > 0$  – некоторая константа.

Подставляя (2.2) в (1.1) и объединяя оба сходящихся повторных ТР в единый повторный ТР, приходим к представлениям

$$\begin{aligned} \partial^2 w(\xi, \eta) / \partial x \partial y &= 1/8 \sum_{i=0}^1 \psi_1(\lambda_1(2\xi + (-1)^i \Delta\xi/2), \eta) = 1/8 \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} E_{mn}^{ab} \chi_n^* / \Delta\eta \times \\ &\times \Omega_m / [2\sin[\lambda_1(2\xi + \Delta\xi/2)/2] \sin[\lambda_1(2\xi - \Delta\xi/2)/2]], \end{aligned} \quad (2.5)$$

где величина  $\Omega_m$  приводится к виду

$$\begin{aligned} \Omega_m &= \{ \lambda_m [\cos(2\lambda_{m-1}\xi + \lambda_m \Delta\xi/2) - \cos(2\lambda_{m-1}\xi - \lambda_m \Delta\xi/2)] / (\lambda_m \Delta\xi) - \\ &- \lambda_{m-1} [\cos(2\lambda_m \xi + \lambda_{m-1} \Delta\xi/2) - \cos(2\lambda_m \xi - \lambda_{m-1} \Delta\xi/2)] / (\lambda_{m-1} \Delta\xi) \} / 2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Представление (2.6) с применением к центральным разностям в них формулы конечных приращений Лагранжа [9] приводит к неравенству

$$|\Omega_m| \leq (\lambda_m + \lambda_{m-1}) / 2 \leq \lambda_m \quad (2.7)$$

Далее производная Шварца [9] для косинуса совпадает с его обычной производной. Поэтому

$$\lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} \Omega_m = [\lambda_{m-1} \sin(2\xi\lambda_m) - \lambda_m \sin(2\xi\lambda_{m-1})] / 2 \quad (2.8)$$

Неравенства (2.4), (2.7), позволяют получить следующие оценки для общего члена повторного ряда в (2.5)

$$\left| E_{mn}^{ab} \chi_n^* / \Delta\eta \Omega_m \right| \leq \lambda_m \left| E_{mn}^{ab} \chi_n^* / \Delta\eta \right| \leq \lambda_m \mu_n / 2 \left| E_{mn}^{ab} \right| \left| \sin(\mu_n \Delta\eta/2) / (\mu_n \Delta\eta/2) \right| \leq B_1 / (2\lambda_m^{1.5} \mu_n^{1.5}) \quad (2.9)$$

Из (2.9) видно, что простой ряд в повторном в (2.5) с индексом суммирования  $n$  мажорируется числовым сходящимся рядом, что приводит к его равномерной сходимости относительно  $\Delta\eta$  ([9],  $n^0$  430). Кроме того, существует конечный предел его общего члена

$$\lim_{\Delta\eta \rightarrow 0} E_{mn}^{ab} \chi_n^* / \Delta\eta = \mu_n / 2 E_{mn}^{ab} \sin 2\mu_n \eta \quad (2.10)$$

Значит [9], в данном ряде допустим предельный переход под знаком суммирования. Получаем

$$\lim_{\Delta\eta \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} E_{mn}^{ab} \chi_n^* / \Delta\eta = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n / 2 E_{mn}^{ab} \sin 2\mu_n \eta \quad (2.11)$$

Но с применением (2.9) приходим к мажоранте и для ординарного ряда с индексом  $m$  в (2.5).

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} E_{mn}^{ab} \chi_n^* / \Delta\eta \Omega_m \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| E_{mn}^{ab} \chi_n^* / \Delta\eta \Omega_m \right| \leq B_1 / (2\lambda_m^{1.5}) \sum_{n=1}^{\infty} 1/\mu_n^{1.5} < \infty \quad (2.12)$$

Откуда следует и его равномерная сходимость, но уже относительно обоих параметров  $\Delta\xi$ ,  $\Delta\eta$ . Далее существуют конечные двойной предел и общего члена данного ряда, что следует из (2.8), (2.11). Поэтому при любом выборе совместного закона стремления  $\Delta\xi, \Delta\eta$  к нулю становится применимой теорема 4 ([9],  $n^0 433$ ), что дает

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\Delta\xi \rightarrow 0 \\ \Delta\eta \rightarrow 0}} \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} E_{mn}^{ab} \chi_n^* / \Delta\eta \Omega_m &= \sum_{m=2}^{\infty} \lim_{\substack{\Delta\xi \rightarrow 0 \\ \Delta\eta \rightarrow 0}} \Omega_m \sum_{n=1}^{\infty} E_{mn}^{ab} \chi_n^* / \Delta\eta = \sum_{m=2}^{\infty} \lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} \Omega_m \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{\Delta\eta \rightarrow 0} E_{mn}^{ab} \chi_n^* / \Delta\eta = \\ &= 0.25 \sum_{m=2}^{\infty} (\lambda_{m-1} \sin 2\lambda_m \xi - \lambda_m \sin 2\lambda_{m-1} \xi) \sum_{n=1}^{\infty} E_{mn}^{ab} \mu_n \sin 2\mu_n \eta < \infty \end{aligned} \quad (2.13)$$

Но в (2.13) при суммировании по  $m$  допускается переход к суммированию слагаемых, так как построенные таким образом ряды сходятся, что непосредственно устанавливается учетом (2.4). Поэтому, переходя в (2.13) к сумме названных рядов, после операции замены индексов с приведением к единому повторному сходящемуся **ТР**, получаем

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\Delta\xi \rightarrow 0 \\ \Delta\eta \rightarrow 0}} \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} E_{mn}^{ab} \chi_n^* / \Delta\eta \Omega_m &= [-\lambda_2 \sin 2\lambda_1 \xi \sum_{n=1}^{\infty} E_{2n}^{ab} \mu_n \sin 2\mu_n \eta + \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_{m-1} E_{mn}^{ab} - \lambda_{m+1} E_{m+1,n}^{ab}) \mu_n \times \\ &\times \mu_n \sin 2\lambda_m \xi \sin 2\mu_n \eta] / 4 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Кроме того, коэффициенты повторного и ординарного рядов в (2.14) приводятся к виду

$$[\lambda_{m-1} E_{mn}^{ab} - \lambda_{m+1} E_{m+1,n}^{ab}] \mu_n = -[w_{m+1,n} \lambda_{m+1} - 2\lambda_m w_{mn} + w_{m-1,n} \lambda_{m-1}] \mu_n \quad (2.15)$$

$$\lambda_2 E_{2n}^{ab} \mu_n = (\lambda_2 w_{2n} - 2\lambda_1 w_{1n}) \mu_n \quad (2.16)$$

Если также принять во внимание, что с применением неравенства (1.2) в [7]

$$|w_{mn} \lambda_m \mu_n \sin 2\mu_n \eta| \leq w_{mn} \lambda_m \mu_n \leq B_3 [\lambda_m \mu_n / (\lambda_m^{2\gamma} \mu_n^{4-2\gamma})] \Big|_{\gamma=3/4} = B_3 / (\lambda_m^{0.5} \mu_n^{1.5}), \quad (2.17)$$

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \lambda_m \mu_n \sin 2\mu_n \eta \right| \leq B_3 / \lambda_m^{0.5} \sum_{n=1}^{\infty} 1 / \mu_n^{1.5} < \infty \text{ и } \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \lambda_m \mu_n \sin 2\mu_n \eta = 0, \quad (2.18)$$

где  $B_3 > 0$  – константа, то переходя к пределу в обеих частях равенства (2.5), с использованием (2.14) – (2.16), (2.18) и опять (2.18) как условия применения двукратного **ПА** [10], получаем

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\Delta\xi \rightarrow 0 \\ \Delta\eta \rightarrow 0}} \partial^2 \bar{w}(\xi, \eta) / \partial x \partial y &= 1/8 \lim_{\substack{\Delta\xi \rightarrow 0 \\ \Delta\eta \rightarrow 0}} \left[ \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} E_{mn} \Omega_m \chi_n^* / \Delta\eta \right] / \lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} [2 \sin[\lambda_1 (2\xi + \Delta\xi/2) / 2] \sin[\lambda_1 (2\xi - \Delta\xi/2) / 2]] = \\ &= [-\sin 2\lambda_1 \xi \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_2 w_{2n} - 2\lambda_1 w_{1n}) \mu_n \sin 2\mu_n \eta - \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [w_{m+1,n} \lambda_{m+1} - 2\lambda_m w_{mn} + w_{m-1,n} \lambda_{m-1}] \mu_n \sin 2\lambda_m \xi \sin 2\mu_n \eta] \\ &/ [64 \sin^2(\lambda_1 \xi)] = \left\{ -\sin 2\lambda_1 \xi \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_2 w_{2n} \mu_n \sin 2\mu_n \eta - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_1 w_{1n} \mu_n \sin 2\mu_n \eta \right] - \right. \\ &- \sum_{m=2}^{\infty} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} w_{m+1,n} \lambda_{m+1} \mu_n \sin 2\mu_n \eta - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_m w_{mn} \mu_n \sin 2\mu_n \eta + \sum_{n=1}^{\infty} w_{m-1,n} \lambda_{m-1} \mu_n \sin 2\mu_n \eta \right] \sin 2\lambda_m \xi \left. \right\} / \\ &/ (64 \sin^2 \lambda_1 \xi) = 1/16 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_m \mu_n w_{mn} \sin 2\lambda_m \xi \sin 2\mu_n \eta \end{aligned} \quad (2.19)$$

Итак, в правой части – почленно продифференцированное по  $x$  и  $y$  под символами суммирования решение Навье для прогиба  $\bar{w}(x, y)$  пластины при **СН** в точке  $(\xi, \eta)$  приложения **СН**.

### 3. О почленной дифференцируемости решения Навье при СН в точке приложения СН.

Докажем, что выражение (2.19) равно  $\partial^2 \bar{w}(x, y) / \partial x \partial y$  в  $(\xi, \eta)$ . Так как повторный **ТР** для  $\bar{w}(x, y)$  в  $G$  дифференцируется по  $y$  в сходящийся **ТР**[5], что приводит к стремлению коэффициентов его ординарного **ТР** с индексом суммирования  $n$  к нулю [9] и одновременно выполняется неравенство  $0 < \mu_n \eta < \pi$ , то с использованием **ПА** имеем

$$\begin{aligned} [\partial \bar{w}(\xi + \Delta x, \eta) / \partial y - \partial \bar{w}(\xi, \eta) / \partial y] / \Delta x &= 1/8 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_m \mu_n w_{mn} V_m \sin \lambda_m \xi \sin 2\mu_n \eta = 1/16 \sum_{m=1}^{\infty} V_m \lambda_m \sin \lambda_m \xi \times \\ &\times [\mu_1 \cos \mu_1 \eta w_{m1} + \sum_{n=2}^{\infty} \bar{E}_{mn} \cos \lambda_{2n-1} \eta] / \sin \mu_n \eta \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь

$$V_m = [\sin \lambda_m (\xi + \Delta x) - \sin \lambda_m \xi] / (\lambda_m \Delta x), \bar{E}_{mn} = \mu_n w_{mn} - \mu_{n-1} w_{m,n-1} = \mu_{n-1} E_{nm}^{ba} + \mu_1 w_{mn} \quad (3.2)$$

Тогда с применением формулы конечных приращений Лагранжа, оценок (2.4), (2.17), и неравенства (1.2) в [7] получаем

$$|V_m| \leq 1, |\bar{E}_{mn}| \leq \mu_n |E_{nm}^{ba}| + \mu_1 |w_{mn}| \leq B_1 / (\lambda_m^{2.5} \mu_n^{1.5}) + \mu_1 B_3 / (\lambda_m^{2\gamma} \mu_n^{4-2\gamma}) \Big|_{\gamma=5/4} = (B_1 + \mu_1 B_3) / (\lambda_m^{2.5} \mu_n^{1.5}) \quad (3.3)$$

Поэтому приходим к мажоранте для ординарного ТР в (3.1) с индексом суммирования  $m$

$$|V_m \lambda_m \sin \lambda_m \xi [\mu_1 \cos \mu_1 \eta w_{m1} + \sum_{n=2}^{\infty} \bar{E}_{mn} \cos \lambda_{2n-1} \eta]| \leq [B_3 / \mu_1^{0.5} + (B_1 + \mu_1 B_3) \sum_{n=2}^{\infty} 1 / \mu_n^{1.5}] / \lambda_m^{1.5} \quad (3.4)$$

Значит, названный ординарный ряд сходится равномерно относительно  $\Delta x$ . Далее существует конечный предел его общего члена при  $\Delta x \rightarrow 0$ . Отсюда, переходя к пределу в обеих частях равенства (3.1) при  $\Delta x \rightarrow 0$  и с учётом (2.17) применяя ПА, приходим к требуемому результату.

Но смешанная производная от прогиба пластины пропорциональна возникающему в ней изгибающему моменту. Поэтому предельный переход от локальной нагрузки к СН в точке  $(\xi, \eta)$  переводит крутящий момент в крутящий момент. Парадокс не обнаружен.

#### 4. О парадоксе в поведении крутящего момента в прямоугольной пластине в окрестности точки приложения СН.

Решение Навье для пластины при СН в форме ординарного ТР [4] представляем в виде

$$\begin{aligned} \bar{w}(x, y) = P / (Da) \sum_{m=1}^{\infty} [1 + b \alpha_m \operatorname{cth} \alpha_m b - \alpha_m (b - y) \operatorname{cth} \alpha_m (b - y) - \alpha_m \eta \operatorname{cth} \alpha_m \eta] \operatorname{sh} \alpha_m \eta \operatorname{sh} \alpha_m (b - y) \times \\ \times \sin \alpha_m \xi \sin \alpha_m x / (\alpha_m^3 \operatorname{sh} \alpha_m b) = P / (Da) \sum_{m=1}^{\infty} [\operatorname{sh} \alpha_m \eta \operatorname{sh} \alpha_m (b - y) - b \alpha_m \operatorname{sh} \alpha_m \eta \operatorname{sh} \alpha_m y / \operatorname{sh} \alpha_m b + \\ + \alpha_m (y - \eta) \operatorname{sh} \alpha_m \eta \operatorname{ch} \alpha_m (b - y) - \alpha_m \eta \operatorname{sh} \alpha_m (b - y - \eta)] \sin \alpha_m \xi \sin \alpha_m x / (\alpha_m^3 \operatorname{sh} \alpha_m b), \text{ при } b \geq y \geq \eta, \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \bar{w}(x, y) = P / (Da) \sum_{m=1}^{\infty} [\operatorname{sh} \alpha_m y \operatorname{sh} \alpha_m (b - \eta) - b \alpha_m \operatorname{sh} \alpha_m y \operatorname{sh} \alpha_m \eta / \operatorname{sh} \alpha_m b + \alpha_m (\eta - y) \operatorname{sh} \alpha_m (b - \eta) \times \\ \times \operatorname{ch} \alpha_m y - \alpha_m \eta \operatorname{sh} \alpha_m (b - y - \eta)] \sin \alpha_m \xi \sin \alpha_m x / (\alpha_m^3 \operatorname{sh} \alpha_m b), \text{ если } 0 \leq y \leq \eta \end{aligned} \quad (4.2)$$

Отметим, что ряды (4.1), (4.2) – решение Навье при СН в форме повторного ТР с просуммированным внутренним ТР [4] (ряд (4.2) получен из ряда (4.1) перестановкой в последнем  $y$  и  $\eta$ ). Но смешанная производная названного повторного ряда в  $G$  вычисляется его почленным дифференцированием по  $x$  и  $y$  (см. пп. 3 и [6]). Поэтому и ряды (4.1), (4.2) так же почленно дифференцируются. Получаем

$$\begin{aligned} \partial^2 \bar{w}(x, y) / \partial x \partial y = P / (Da) \sum_{m=1}^{\infty} [-\alpha_m \operatorname{sh} \alpha_m \eta \operatorname{ch} \alpha_m (b - y) - b \alpha_m^2 \operatorname{sh} \alpha_m \eta \operatorname{ch} \alpha_m y / \operatorname{sh} \alpha_m b + \alpha_m \operatorname{sh} \alpha_m \eta \times \\ \times \operatorname{ch} \alpha_m (b - y) - \alpha_m^2 (y - \eta) \operatorname{sh} \alpha_m \eta \operatorname{sh} \alpha_m (b - y) + \alpha_m^2 \eta \operatorname{ch} \alpha_m (b - y - \eta)] \sin \alpha_m \xi \cos \alpha_m x / (\alpha_m^2 \operatorname{sh} \alpha_m b) = \\ = P / (Da) [F_1(x, y) - F_2(x, y, \xi, \eta)], \text{ при } b \geq y \geq \eta, \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\partial^2 \bar{w}(x, y) / \partial x \partial y = P / (Da) [F_1(x, y) + F_2(x, \eta, \xi, y)], \text{ если } 0 \leq y \leq \eta \quad (4.4)$$

Здесь

$$F_1(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} [-b \operatorname{sh} \alpha_m \eta \operatorname{ch} \alpha_m y / \operatorname{sh} \alpha_m b + \eta \operatorname{ch} \alpha_m (b - y - \eta)] \sin \alpha_m \xi \cos \alpha_m x / \operatorname{sh} \alpha_m b, \quad (4.5)$$

$$F_2(x, y, \xi, \eta) = \sum_{m=1}^{\infty} (y - \eta) \operatorname{sh} \alpha_m \eta \operatorname{sh} \alpha_m (b - y) \sin \alpha_m \xi \cos \alpha_m x / \operatorname{sh} \alpha_m b \quad (4.6)$$

Но

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} \alpha_m \eta \operatorname{sh} \alpha_m (b - y) / \operatorname{sh} \alpha_m b = [\operatorname{ch} \alpha_m (b - y + \eta) - \operatorname{ch} \alpha_m (b - y - \eta)] / (2 \operatorname{sh} \alpha_m b) = \\ = [e^{-\alpha_m b} \operatorname{ch} \alpha_m (y - \eta) - \operatorname{ch} \alpha_m (b - y - \eta)] / (2 \operatorname{sh} \alpha_m b) + 1 / 2 e^{\alpha_m (\eta - y)} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Поэтому, подставляя (4.7) в (4.6) и используя формулу в [9, n<sup>o</sup> 418], получаем

$$\left. \begin{aligned} F_2(x, y, \xi, \eta) \\ F_2(x, \eta, \xi, y) \end{aligned} \right|_{\substack{b \leq y \leq \eta \\ 0 \leq y \leq \eta}} = \sum_{m=1}^{\infty} |y - \eta| [e^{-\alpha_m b} \operatorname{ch} \alpha_m (y - \eta) - \operatorname{ch} \alpha_m (b - y - \eta)] \sin \alpha_m \xi \cos \alpha_m x / (2 \operatorname{sh} \alpha_m b) +$$

$$+ 1/4 [I(e^{-\alpha_1|y-\eta|}, \alpha_1(x+\xi)) - I(e^{-\alpha_1|y-\eta|}, \alpha_1(x-\xi))], (x, y) \in G, \quad (4.8)$$

где

$$I(r, \theta) = -1/\alpha_1 \ln r \sum_{m=1}^{\infty} r^m \sin m\theta = -r/\alpha_1 \ln r \sin \theta / [(1-r)^2 + 4r \sin^2 \theta / 2], \quad 0 < r < 1, \quad I(1, \theta) = 0, \quad (4.9)$$

$$r = e^{-\alpha_1|y-\eta|}, \quad \theta = \alpha_1(x \pm \xi), \quad 0 < \alpha_1(x+\xi) < 2\pi, \quad -\pi < \alpha_1(x-\xi) < \pi \quad (4.10)$$

Заметим, что ряд (4.5) (в (4.8)) мажорируется суммой двух геометрических прогрессий со знаменателями  $e^{\alpha_1(\eta-b)}$  и  $e^{-\alpha_1\eta}$ . Значит, ряд (4.5) (в (4.8)) сходится равномерно относительно  $(x, y)$  в  $G$ . Но их общие члены – непрерывные в  $G$  функции  $x$  и  $y$ . Поэтому и сумма ряда (4.5) (в (4.8)) – непрерывные в  $G$  функции  $(x, y)$ .

Далее функция  $I$  в (4.8) – дробь, числитель и знаменатель которой – непрерывные в  $G$  функции, а знаменатель, когда при  $\xi$  выбран знак плюс, – отличен от нуля. В случае же  $(-\xi)$  лишь в точке  $(\xi, \eta)$  знаменатель обращается в нуль. Поэтому функция  $I$  – непрерывная функция  $(x, y)$ : в первом случае в  $G$ , а во втором – в  $G \setminus (\xi, \eta)$ .

Покажем теперь, что во втором случае предельное поведение  $I$  в окрестности  $(\xi, \eta)$  зависит от закона приближения  $(x, y)$  к точке  $(\xi, \eta)$ . Действительно, пусть  $r = 1 - \theta^\alpha$ ,  $\alpha > 0$  и  $\theta \rightarrow 0$ . Тогда из (4.10) следует, что  $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$ . Разлагая в (4.9) элементарные функции в ряды Тейлора и оставляя лишь члены первого приближения, получаем

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} I(r, \theta) = - \lim_{\theta \rightarrow 0} \left\{ (1 - \theta^\alpha) / \alpha_1 [-\theta^\alpha + o_1(\theta^\alpha)] [(\theta + o_2(\theta))] \right\} / [\theta^{2\alpha} + 4(1 - \theta^\alpha)(\theta/2 + o_3(\theta))^2] =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{при } \alpha \neq 1 \\ 1/(2\alpha_1), & \text{если } \alpha = 1 \end{cases}$$

Следовательно, предельный переход от локально распределённой равномерной нагрузки к СН в точке  $(\xi, \eta)$  переводит крутящий момент в крутящий момент, но с потерей непрерывности: найдены различные кривые, движение с предельным переходом по которым переменных  $(x, y)$  к точке  $(\xi, \eta)$  приводит к различным конечным предельным значениям второй смешанной производной от прогиба пластины при СН, пропорциональной крутящему моменту.

Отмеченное поведение распределённой физической величины – крутящего момента – в изотропном теле представляется парадоксом.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. М.: Мир, 1971. 192с.
2. Сапонджян О.М. Изгиб тонких упругих плит. Ереван: Айастан, 1975. 436с.
3. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1965. 433с.
4. Тимошенко С.П., Войновский – Кригер С. Пластинки и оболочки.– Пер. с англ. М.: Физматгиз, 1963. 635с.
5. Сейранян С.П. О предельном переходе от локально распределённой равномерной нагрузки к сосредоточенной в выражениях для компонент градиента прогиба прямоугольной свободно опертой пластины // Актуальные проблемы механики сплошной среды. Труды II международной конференции, г. Дилиджан, Армения, 4 – 8 октября. Т 2, 2010, с. 146 – 150.
6. Сейранян С.П. О предельном переходе от локальной равномерной нагрузки к сосредоточенной во вторых частных производных от прогиба прямоугольной пластины // Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Труды VII международной конференции, г. Горис – Степанакерт, Армения – Карабах, 19 – 23 сентября, 2011, с. 377 – 385.
7. Сейранян С.П. Об одном решении Навье для частично нагруженной прямоугольной пластины // Вестник Томского гос.-унта. Математика и механика. 2009. № 1(5). С.82 –95.
8. Бари Н.К. Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961. 936с.
9. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.2, 3. М.: Физматлит, 2008. 1690с.
10. Сейранян С.П. Ускорение сходимости в задаче об изгибе прямоугольной изотропной пластины поперечной силой // Изв. НАН Армении. Механика. 2001. Т.54. № 1. С.48–55.

### Сведения об авторе:

**Сейранян Суран Паруйрович** – к. ф.-м. н., с.н.с. Института механики НАН Армении.

**Адрес:** Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24<sup>б</sup>, Институт механики НАН Армении.

**Тел.:** (374 55) 54 28 38; **E-mail:** <[seysuren@yandex.ru](mailto:seysuren@yandex.ru)>.

## ПОЛЗУЧЕСТЬ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ПЕРЕМЕННОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ

Симолян А.М., Безоян Э.К.

В работе строятся соотношения ползучести при постоянном напряжении и переменной температуре. Затем используется принцип наследственности, позволяющий получить соотношения при переменной температуре и переменном напряжении. Приводится сравнение с экспериментальными данными.

Ползучесть материалов существенно зависит от температуры, при которой имеет место действие нагрузки. При постоянных температурах в соотношениях между деформацией ползучести и напряжением некоторые из экспериментально определённых постоянных заменяются функциями от температуры. Сложнее обстоит дело, когда сама температура является функцией времени.

В работе [1] была предложена замена времени так называемым приведённым временем, которое зависит от истории изменения температуры, для времени, которое зависит от истории изменения температуры. Для установившейся ползучести реологическое соотношение для переменных температур записывается так [1]:

$$\frac{\partial \varepsilon_c}{\partial t} = \exp\left(-\frac{c}{T}\right) T \cdot f(\sigma) \quad (1)$$

В работе [2] предлагалась зависимость

$$\frac{\partial \varepsilon_c}{\partial t} = \exp\left(-\frac{\alpha - \gamma \sigma}{T} c\right), \quad (2)$$

причём, как указано в [1], соотношение (2) оказывается более обоснованным в области умеренных температур.

Для большинства материалов теория установившегося течения вообще неприемлема вследствие затухания ползучести во времени. Вследствие этого было предложено видоизменённое соотношение теории наследственности [3]

$$\varepsilon_c(t) = \int_0^t F \int_{\tau}^t \varphi(T(\xi)) d\xi d\tau, \quad (3)$$

которое является сложным даже в линейном варианте.

В работе [4] предлагалось реологическое соотношение теории пластической наследственности в следующем виде:

$$\varphi(\varepsilon) = \sigma(t) + \int_0^t k(t-\tau) f[T(t), T(\tau)] d\tau, \quad (4)$$

где рассматриваются варианты зависимости  $T(t)$  от  $T(\tau)$ . Следует отметить, что для обоих вариантов соотношение (4) оказывается неприемлемым для случаев уменьшения температуры во времени, так как оно описывает деформации ползучести со скоростью обратного направления направлению действующей нагрузки.

Действительно, если считать функцию в зависящей только от  $T(t)$ , то при существенном уменьшении температуры сразу все достигнутые деформации ползучести исчезают, если же  $f$  зависит только от  $T(\tau)$ , то деформации ползучести уменьшаются во времени и, например, при экспоненциальном ядре или ядре Абеля для  $k(t-\tau)$  они устремляются к нулю, так что соотношение (4) может быть приемлемо лишь для температур, не убывающих во времени.

Отметим здесь также работу [5], где отличается эффект увеличения сырости ползучести при ступенчатом изменении температуры, как при её увеличении сырости ползучести при ступенчатом изменении температуры, как при её увеличении, так и уменьшении, и даже приводится выражение для зависимости деформации температурного последствия от времени. Однако, как выяснилось, этот „эффект” был связан с быстрым изменением температуры, что приводило к росту скорости деформаций ползучести.

В настоящей работе строится соотношение ползучести на основе принципа наложения деформаций в применении к аппроксимации деформаций ползучести при переменных температурах.

Итак, положим, что кривые ползучести при постоянных температурах и напряжениях подобны и, следовательно, могут быть представлены в виде

$$\varepsilon_c(t) = f(\sigma)F(T)\varphi(t), \quad (5)$$

где  $f, F$  и  $\varphi$  – некоторые функции, аппроксимирующие кривые ползучести при постоянных напряжениях и температурах.

Положим, что имеем  $\sigma = \sigma_0$  и  $\tau = \tau_0$ , при этом, очевидно, будем иметь

$$\varepsilon_c(t) = f(\sigma_0)F(T_0)\varphi(t).$$

При действии  $\sigma_0$  и  $T_0$  будем иметь

$$\varepsilon_c(t) = f(\sigma_0)F(T_0)\varphi(t^*), \quad (6)$$

$$\text{где } \varphi(t^*) = \frac{F(T_1)}{F(T_0)}\varphi(t). \quad (7)$$

Иначе говоря, вводим видеозменённое время  $t^*$ , которое изменяется в зависимости от температуры  $T$  так, что удовлетворяется (7). В случае, если температура изменяется во времени  $T(t)$ , то, естественно, соотношение (7) можно переписать так:

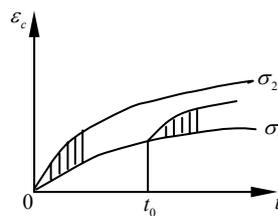
$$\Delta\varphi(t^*) = \frac{F[T(t)]}{F(T_0)}\Delta\varphi(t) \quad (8)$$

Осуществляя суммирование (8) для  $\Delta\varphi(t^*)$  на всех промежутках  $t$ , получим

$$\varepsilon_c(t) = f(\sigma_0) \cdot \int_0^t F[T(\tau)] \frac{\partial\varphi(\tau)}{\partial\tau} d\tau \equiv f(\sigma_0) \cdot c(t) \quad (9)$$

Выражение (9) представляет собой аппроксимацию кривых ползучести при постоянном напряжении  $\sigma_0$  и при переменной температуре  $T(t)$ .

Ниже рассмотрим принцип наложения деформаций, лежащий в основе теории наследственности. Как известно [6], согласно принципу наложения, если имеются кривые ползучести при напряжениях  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  (фиг.1), то



Фиг.1.

для изменения напряжения, согласно (10)

$$\sigma(t) = \begin{cases} \sigma_1, & 0 < t < t_0 \\ \sigma_2, & t > t_0 \end{cases} \quad (10)$$

при  $t > t_0$  будем иметь сложение ординат кривой при  $\sigma_1$  и разницы между кривыми при  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , начиная от  $t = 0$ , то есть

$$\varepsilon_c(t > t_0) = f\sigma_1 c(t) + [f(\sigma_2) - f(\sigma_1)]c(t - t_0) \quad (11)$$

Используя соотношение (11) для непрерывно изменяющегося  $\sigma(t)$ , получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ct} &= f[\sigma(0)]c(t) + \int_0^t \frac{\partial f[\sigma(\tau)]}{\partial \tau} c(t-\tau) d\tau = f[\sigma(0)]c(t) + \\ &+ \left\{ f[\sigma(\tau)]c(t-\tau) \right\} \Big|_0^t - \int_0^t f[\sigma(\tau)] \frac{\partial c(t-\tau)}{\partial \tau} d\tau = - \int_0^t f[\sigma(\tau)] \frac{\partial c(t-\tau)}{\partial \tau} d\tau \end{aligned} \quad (12)$$

С другой стороны, согласно (9), имеем

$$\begin{aligned} -\frac{\partial c(t-\tau)}{\partial \tau} &= -\frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^{t-\tau} F[T(\xi)] \frac{\partial \varphi(\xi)}{\partial \xi} d\xi = \\ &= F[T(t-\tau)] \cdot \frac{\partial \varphi(t-\tau)}{\partial (t-\tau)} = -F[T(t-\tau)] \frac{\partial \varphi(t-\tau)}{\partial \tau}. \end{aligned} \quad (13)$$

Подставляя (13) в соотношение (12), получим

$$\varepsilon_c(t) = - \int_0^t f[\sigma(\tau)] F[T(t-\tau)] \frac{\partial \varphi(t-\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (14)$$

Соотношение (14) описывает деформации ползучести согласно теории наследственности при переменных напряжениях  $\sigma(t)$  и температурах  $T(t)$ . Таким образом, в уравнении теории наследственности, в отличие от напряжения, температура должна быть взята в момент  $t-\tau$ , как и функцию времени.

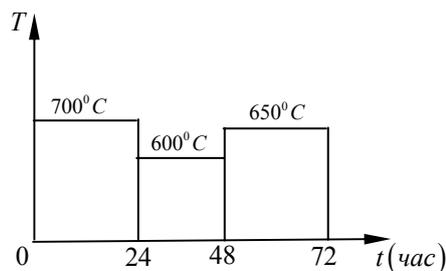
Соотношение (14) может быть видоизменено для ползучести при отсутствии условия подобия, то есть, когда аппроксимации ползучести вместо (5) имеют следующий вид:

$$\varepsilon_c(t) = \varphi(\sigma, T, t). \quad (15)$$

В этом случае, аналогично [7], при обобщении (15), согласно теории наследственности, будем иметь:

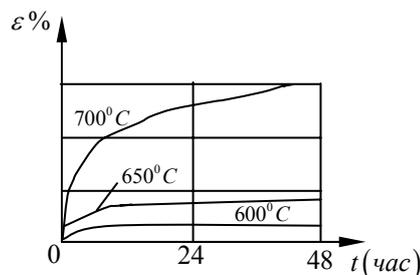
$$\varepsilon_c(t) = - \int_0^t \frac{\partial \varphi[\sigma(\theta), T(t-\theta), t-\tau]}{\partial \tau} \Big|_{\theta=\tau} d\tau \quad (16)$$

Рассмотрим экспериментальные данные, полученные при изучении ползучести стали X18H10T при напряжении 156МПа и при температуре, изменяющейся, согласно графику на фиг.2



Фиг.2

При постоянных температурах получены кривые ползучести, приведённые на фиг.3



Фиг.3

Кривые на фиг.3 аппроксимированы следующими выражениями:

$$\varepsilon(t, T, \sigma = 156 \text{ МПа}) = \varepsilon_0(T) + \alpha(T) + \beta(T)(1 - e^{-\gamma(T)t}), \quad (17)$$

где

$$\varepsilon_0(T) = (78 + 0,0199 \cdot e^{0,00892T}) \cdot 10^{-5}$$

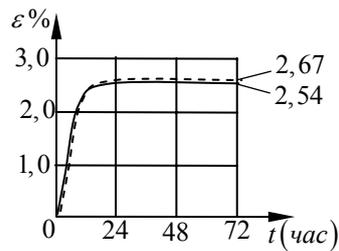
$$\alpha(T) = 2,705 \cdot e^{30 - \frac{26800}{T}} \cdot 10^{-5} \text{ час}^{-1}$$

$$\beta(T) = 5368 \cdot e^{30 - \frac{25925}{T}} \cdot 10^{-5}$$

$T$  – температура в градусах по Кельвину,

$$\gamma(600^\circ) = 0,06 \text{ час}^{-1}, \quad \gamma(650^\circ) = 0,13 \text{ час}^{-1}, \quad \gamma(700^\circ) = 0,9 \text{ час}^{-1}$$

Согласно программе изменения температуры (фиг.2), на фиг.4 приведены результаты испытаний

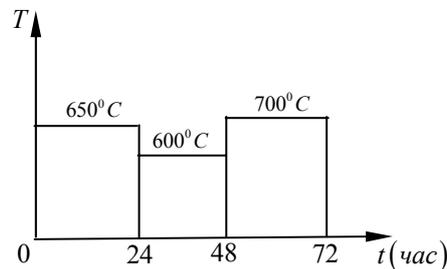


Фиг.4

Штриховыми линиями на фиг.4 показана кривая, рассчитанная, согласно соотношению

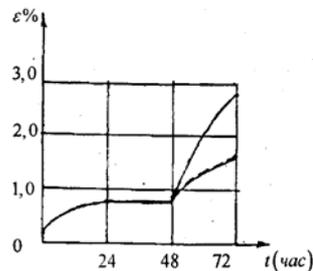
$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0(T) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} \{ \alpha [T(t-\theta)] + \beta [T(t-\theta)] \gamma [T(t-\theta)] \cdot e^{-\gamma [T(t-\theta)](t-\tau)} d\tau \quad (18)$$

Рассмотрим другую программу изменения температуры (фиг.5)



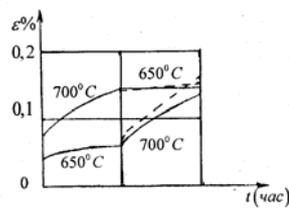
Фиг.5

На фиг.6 приведены экспериментальные данные о деформации хромоникелевой стали при напряжении  $\sigma = 156$  МПа и при изменении температуры, согласно фиг.5



Фиг. 6

На фиг.7 приведены экспериментальные данные о деформировании той же стали X18H10T при напряжении 96 МПа в сравнении с построенными по соотношению (16).



Фиг.7

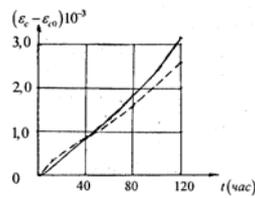
На фиг.8 приведены экспериментальные данные о ползучести хромоникелевой стали при действии напряжения 96МПа при температуре 700<sup>0</sup>С  $\varepsilon_c$  после двенадцатичасовой ползучести при 124МПа при температуре 650<sup>0</sup>С  $\varepsilon_{c0}$  в сравнении с теоретическими, построенными, согласно (16), при следующих данных, полученных из испытаний в условиях постоянных напряжений и температур:

$$\alpha(23\text{МПа}, 700^{\circ}\text{C}) = 0,0205 \text{ час}^{-1} \cdot 10^{-3}, \alpha(124\text{МПа}, 650^{\circ}\text{C}) = 0,0181 \text{ час}^{-1} \cdot 10^{-3}$$

$$\alpha(124\text{МПа}, 700^{\circ}\text{C}) = 0,115 \text{ час}^{-1} \cdot 10^{-3}, \alpha(93\text{МПа}, 650^{\circ}\text{C}) \ll \alpha(93\text{МПа}, 700^{\circ}\text{C})$$

$$\beta(93\text{МПа}, 700^{\circ}\text{C}) = 0,38 \cdot 10^{-3}, \beta(124\text{МПа}, 650^{\circ}\text{C}) = 0,78 \cdot 10^{-3},$$

$$\beta(124\text{МПа}, 700^{\circ}\text{C}) = 2,02 \cdot 10^{-3}, \beta(93\text{МПа}, 650^{\circ}\text{C}) \ll \beta(93\text{МПа}, 700^{\circ}\text{C}).$$



Фиг.8

Из сравнения теоретических и экспериментальных данных, несмотря на некоторые расхождения, мы делаем вывод, что уравнение (16), являющееся обобщением аппроксимации (15), может рассматриваться для описания ползучести при напряжениях и температурах, изменяющихся во времени.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752с.
2. Журков С.Н., Санфирова Т.П. Температурно-временная зависимость прочности чистых металлов.// ДАН СССР. 1955. Т.101. №2.
3. Москвитин В.В. Сопротивление вязкоупругих материалов. М.: Наука, Физматгиз. 1972. 327с.
4. Суворова Ю.В. Учёт температуры в наследственной теории упругопластических сред. //Проблемы прочности. 1977. 91. №2. С.43-48.
5. Лихачев В.А., Малыгин Г.А., Владимирова Г.В. Температурное последствие. Релаксационные явления в твердых телах. М.: Metallurgizdat, 1968.
6. Арутюнян Н.Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М.: Гостехтеориздат, 1952.
7. Симонян А.М. Исследование ползучести стали X18H10T при переменных температурах. //Иzv. АН Арм. ССР. Механика. 1972. Т.ХХV. №2. С.75-82.
8. Симонян А.М. К вопросу о неизотермической ползучести хромоникелевой стали. //Иzv. АН Арм.ССР. Механика. 1972. Т.ХХV. №6. С.61-69.

### Сведения об авторах:

**Симонян Арег Михайлович** – д.т.н., ведущий научный сотрудник Института механики НАН РА,

**Е-mail:** [simonyanareg@mail.ru](mailto:simonyanareg@mail.ru)

**Безоян Эдуард Коломбосович** – к.т.н., директор государственного учреждения по реализации программы “Дорожное строительство”, **Е-mail:** [lfroad@rambler.ru](mailto:lfroad@rambler.ru)

# АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАВНОВЕСНОЙ ПОПЕРЕЧНОЙ ТРЕЩИНЕ В СЛОЕ, УСИЛЕННОМ ТОНКОЙ ГИБКОЙ НАКЛАДКОЙ

Соболь Б. В., Краснощёков А. А.

Проведено исследование плоской статической задачи теории упругости для слоя, ослабленного прямолинейной поперечной трещиной. Верхняя граница слоя усилена тонкой гибкой накладкой. Рассмотрены различные варианты условий на нижней грани слоя. Трещина поддерживается в раскрытом состоянии нормальными усилиями, приложенными к её берегам. Задача сведена к решению сингулярного интегрального уравнения первого рода относительно производной функции раскрытия трещины. Решение интегрального уравнения построено методом коллокации, получены значения коэффициента интенсивности напряжений в окрестности краев трещины.

## Постановка задачи

Рассмотрена задача о равновесии упругого слоя  $-h_2 \leq y \leq 0$ , ослабленного прямолинейной поперечной трещиной длины  $2a$ , перпендикулярной к его границам. Центр трещины расположен на расстоянии  $h$  от поверхности. Верхняя граница слоя усилена тонкой гибкой накладкой. К берегам трещины приложены нормальные усилия интенсивности  $p(y)$ , поддерживающие её в раскрытом состоянии (Рис 1).

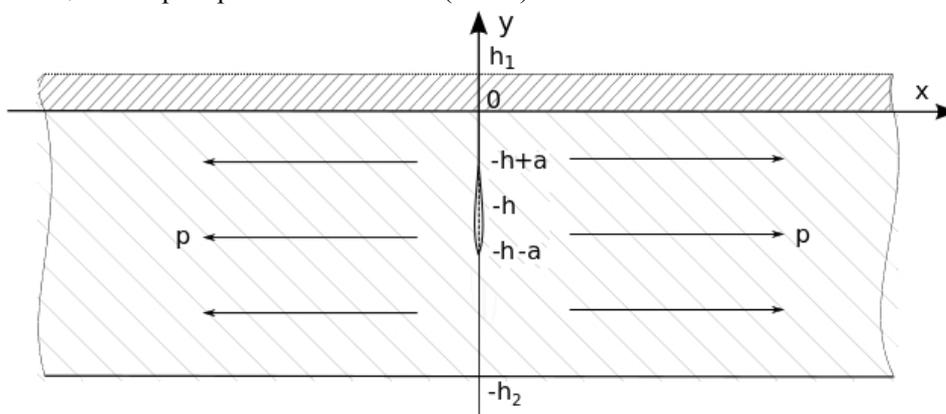


Рис.1. Слой, ослабленный прямолинейной поперечной трещиной.

Задача описывается уравнениями равновесия в перемещениях при следующих граничных условиях ( $y = 0$ ) [1]:

$$\begin{cases} 4G_1 h_1 u'' = (1 - \nu_1) \tau_{xy} + 2\nu_1 h_1 \sigma_y' \\ \sigma_y = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Здесь и далее  $G_i, \nu_i$  – модуль сдвига и коэффициент Пуассона, соответственно, накладке ( $i = 1$ ) и слоя ( $i = 2$ ),  $h_1$  – толщина накладки,  $\tau_{xy}, \sigma_y$  – компоненты тензора напряжений в слое. Производные берутся по переменной  $x$ .

На нижней границе слоя ( $y = -h_2$ ) одновременно с (1) действует одно из следующих условий:

- а) гладкий контакт, ( $\tau_{xy} = 0, v = 0$ )
- б) жёсткая заделка ( $u = 0, v = 0$ )
- в) свободная поверхность ( $\sigma_y = 0, \tau_{xy} = 0$ )

Данная постановка является обобщением изученной ранее задачи о равновесии поперечной трещины в полупространстве с накладкой [2]. Для случая полуплоскости наряду с численным было получено аналитическое решение при помощи метода малого параметра.

Для разрывов компонент вектора перемещений  $u$  и  $v$  на оси трещины введём обозначения:

$$u|_{-0}^{+0} = X(y), \quad \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{-0}^{+0} = \Psi(y) \quad (2)$$

Симметрия задачи относительно оси  $x = 0$  и отсутствие касательных напряжений на границах трещины позволяют установить связь между искомыми функциями:

$$\Psi(y) = -X'(y) \quad (3)$$

Применим к уравнениям равновесия в перемещениях обобщенное интегральное преобразование Фурье [3] по переменной  $x$  с учётом разрывов (2) и связи (3):

$$\begin{cases} (1-2\nu)U'' - 2(1-\nu)\alpha^2 U - i\alpha V' = 2(1-\nu)i\alpha X, \\ 2(1-\nu)V'' - (1-2\nu)\alpha^2 V - i\alpha U' = -2\nu X'; \end{cases} \quad (4)$$

Найдём общее решение системы (4):

$$\begin{cases} U = \frac{i \operatorname{sgn}(\alpha)}{4(\nu-1)} \int_{-h-a}^{-h+a} X(\eta) e^{-|\alpha||\eta-y|} (3-2\nu-|\alpha||\eta-y|) d\eta + \\ \quad + \cosh(\alpha y)(c_1 + \alpha c_2 y) + \sinh(\alpha y)(c_3 + \alpha c_4 y) \\ V = -\frac{1}{4(\nu-1)} \int_{-h-a}^{-h+a} X(\eta) e^{-|\alpha||\eta-y|} \operatorname{sgn}(\eta-y) (2\nu-|\alpha||\eta-y|) d\eta + \\ \quad + i(\sinh(\alpha y)(c_1 + \alpha c_2 y + \kappa c_4) + \cosh(\alpha y)(c_2 - \kappa + c_3 + \alpha c_4 y)) \end{cases} \quad (5)$$

Далее, выпишем вид граничного условия на верхней грани и выражений для компонент тензора напряжений в терминах трансформант Фурье:

$$\begin{cases} 4i\alpha^2 G_1 h_1 U - (1-\nu_1)T_{xy} + 2\nu_1 h_1 i\alpha \Sigma_y = 0, \\ \Sigma_y = \frac{2G}{1-2\nu} ((1-\nu)V' - i\alpha \nu U), \\ T_{xy} = G(U' - i\alpha V); \end{cases} \quad (6)$$

Составим и решим систему из 4 уравнений для каждого варианта граничных условий на нижней грани  $y = -h_2$ , используя (5) и (6). Каждая система включает 2 общих граничных условия при  $y = 0$ . Далее, определим константы  $c_{1-4}^{a-a}$ , исходя из (5) и (6).

### Интегральное уравнение

Удовлетворяя граничному условию на берегах трещины

$$\sigma_x = -p(y) \text{ при } x = 0, -h-a < y < -h+a, \quad (7)$$

Сводим задачу к решению сингулярного интегрального уравнения I рода :

$$\int_{-h-a}^{-h+a} X'(\eta) \left[ \frac{1}{\eta-y} + S(\eta, y, \alpha) \right] d\eta = \frac{2\pi(1-\nu_2)p}{G_2}, y \in (-h-a, -h+a) \quad (8)$$

Сингулярная часть ядра интегрального уравнения (8) соответствует задаче о трещине в неограниченной плоскости, а регулярная отвечает за влияние различных физических и геометрических параметров.

Введём обозначения:  $k_1 = G_1 h_1 (\nu-1)$ ,  $k_2 = G(\nu-1)$ .

Для случая гладкого контакта регулярная часть ядра интегрального уравнения имеет вид:

$$\begin{aligned}
S_3(\eta, y, \alpha) = & \int_{-\infty}^{\infty} [-e^{-3y\alpha-(h_2+\eta)\alpha}] (-2e^{(h_2+2y)\alpha} (-1+e^{2y\alpha})(2(1+e^{2h_2\alpha})k_1\eta + \\
& + h_2(2(1+e^{2h_2\alpha}) + 2e^{h_2\alpha+(h_2+2\eta)\alpha})k_1 - e^{h_2\alpha+(h_2+2\eta)\alpha}k_2\eta))\alpha^4 - \\
& - 2e^{(h_2+2y)\alpha} (-1+e^{2y\alpha})(2(1+e^{2h_2\alpha})k_1 + e^{h_2\alpha+(h_2+2\eta)\alpha}h_2k_2) |\alpha|^3 + \\
& + (-e^{2(h_2+y)\alpha+(h_2+2\eta)\alpha}) ((2h_2\alpha + (\alpha\eta+1)y\alpha - 2\eta\alpha - 1)k_2 + 4\alpha(3k_1 - k_1y\alpha)) + \\
& + ((2\alpha\eta + y\alpha(1-\alpha\eta) - 1)k_2 + 4(y\alpha - 3)k_1\alpha)e^{2y\alpha+(h_2+2\eta)\alpha} + (k_2((\alpha\eta+1)y\alpha + 2\eta\alpha + 1) - \\
& - 4k_1\alpha(y\alpha + 3))e^{4(h_2+y)\alpha+(h_2+2\eta)\alpha} - e^{2(h_2+2y)\alpha+(h_2+2\eta)\alpha} ((-y\eta\alpha^2 + 2h_2\alpha + y\alpha - 2\eta\alpha + 1)k_2 + \\
& + 4(y\alpha k_1 + 3k_1)\alpha) - e^{(h_2+2y)\alpha} k_2\alpha(2y\alpha - 3)(h_2 + \eta) + e^{(h_2+4y)\alpha} k_2\alpha(h_2 + \eta) + \\
& + e^{3h_2\alpha+2y\alpha} k_2\alpha(h_2 + \eta) + (2y\alpha + 3)e^{h_2\alpha+4y\alpha} k_2\alpha(h_2 + \eta)\alpha^2 + \\
& + (-e^{2(h_2+2y)\alpha+(h_2+2\eta)\alpha}) (4k_1\eta\alpha^2 + (2(\alpha\eta - 2)h_2\alpha + (\alpha\eta - 1)y\alpha + \eta\alpha - 2)k_2) + \\
& + (k_2((2y\alpha - 3)h_2\alpha + y\alpha - 2) - \\
& - 4k_1\alpha(h_2\alpha - y\alpha + 3))e^{(h_2+2y)\alpha} + (4k_1\alpha(h_2\alpha + y\alpha + 3) - k_2(h_2\alpha + y\alpha + 2))e^{(h_2+4y)\alpha} + \\
& + ((h_2\alpha + y\alpha - 2)k_2 + 4(h_2\alpha + y\alpha - 3)k_1\alpha)e^{3h_2\alpha+2y\alpha} + (((2y\alpha + 3)h_2\alpha - y\alpha - 2)k_2 + \\
& + 4(-h_2\alpha + y\alpha + 3)k_1\alpha)e^{3h_2\alpha+4y\alpha} - \\
& - e^{2(h_2+y)\alpha+(h_2+2\eta)\alpha} (4k_1\eta\alpha^2 + (2(\alpha\eta + 2)h_2\alpha + (\alpha\eta + 1)y\alpha - \alpha\eta - 2)k_2) + \\
& + e^{2y\alpha+(h_2+2\eta)\alpha} (k_2((\alpha\eta - 1)y\alpha - \alpha\eta + 2) - 4k_1\alpha^2\eta) + \\
& + e^{4(h_2+y)\alpha+(h_2+2\eta)\alpha} (k_2((\alpha\eta + 1)y\alpha + \eta\alpha + 2) - 4k_1\alpha^2\eta))\alpha |\alpha| - \\
& - e^{2y\alpha+(h_2+2\eta)\alpha} \alpha^2 (k_2(-e^{2h_2\alpha} (2h_2\alpha + y\alpha - 1) + (y\alpha + 1)e^{2(2h_2+y)\alpha} - \\
& - e^{2(h_2+y)\alpha} (2h_2\alpha + y\alpha + 1) + y\alpha - 1) - 4(1+e^{2h_2\alpha})(1+e^{2(h_2+y)\alpha})k_1\alpha)) / \\
& / ((4k_1\alpha(1+e^{2h_2\alpha})^2 + (4e^{2h_2\alpha}h_2\alpha + e^{4h_2\alpha} - 1)k_2)\alpha^2)] d\alpha
\end{aligned} \tag{10}$$

Здесь подлежит определению производная функции раскрытия трещины  $X'(\eta)$ .

Для случаев *б* и *в* регулярная часть имеет схожую структуру.

В каждом из рассмотренных случаев граничных условий регулярная часть ядра интегрального уравнения имеет устранимую особенность при  $\alpha = 0$ , так как:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} S_{1-3}(\eta, y, \alpha) = \frac{4k_1 - 2k_2(2\eta + h_2)}{h_2k_2 + 2k_1} = \text{const} \tag{11}$$

$S_{1-3}(\eta, y, \alpha)$  экспоненциально убывает на бесконечности.

### Метод коллокации

Решение интегрального уравнения (9) с ядром (10) строим методом коллокации в виде, явно учитывающем особенность в окрестности края трещины:

$$g'(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \sum_{n=1}^N X_n T_n(\zeta); \tag{12}$$

при этом имеем  $g(\zeta) = \sqrt{1-z^2} \sum_{n=1}^N X_n U_{n-1}(\zeta)$ ,

где  $T_n$ ,  $U_n$  – полиномы Чебышева, соответственно, I и II рода.

Из очевидного условия  $g(\pm 1) = 0$  определяем:  $X_0 = 0$ .

В качестве узловых точек принимаем корни полиномов Чебышева:

$$z_m = \cos \frac{\pi(2m-1)}{2N}, (m = 1, 2, \dots, N) \quad (13)$$

Реализация представлений (11) в интегральном уравнении (9,10) позволяет свести задачу к решению системы линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов представления (11):

$$AX = B \quad (14)$$

Вычисление коэффициентов  $a_{ij} = \int_{-1}^1 T_j(\zeta) \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left[ \frac{1}{(\zeta - z_i)} + K(\zeta, z_i) \right] d\zeta$  системы (14)

осуществляется в два этапа.

Сингулярная часть представляет собой табличный интеграл [4]

$$\int_{-1}^1 T_n(\zeta) \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = \pi U_{n-1}(z), \quad (15)$$

а регулярная часть находится численно.

### Численные результаты

Результаты проведённых исследований позволяют в каждом конкретном случае определить значения коэффициента интенсивности нормальных напряжений, являющегося важнейшей характеристикой в механике разрушения.

$$K_I = K_{I\infty} N \quad (16)$$

где  $K_{I\infty}$  – коэффициент интенсивности напряжений в предельном случае – задаче о трещине в неограниченной упругой плоскости [5],  $N$  – фактор влияния [6], множитель, характеризующий влияние на коэффициент интенсивности напряжений значений различных геометрических и физических параметров задачи.

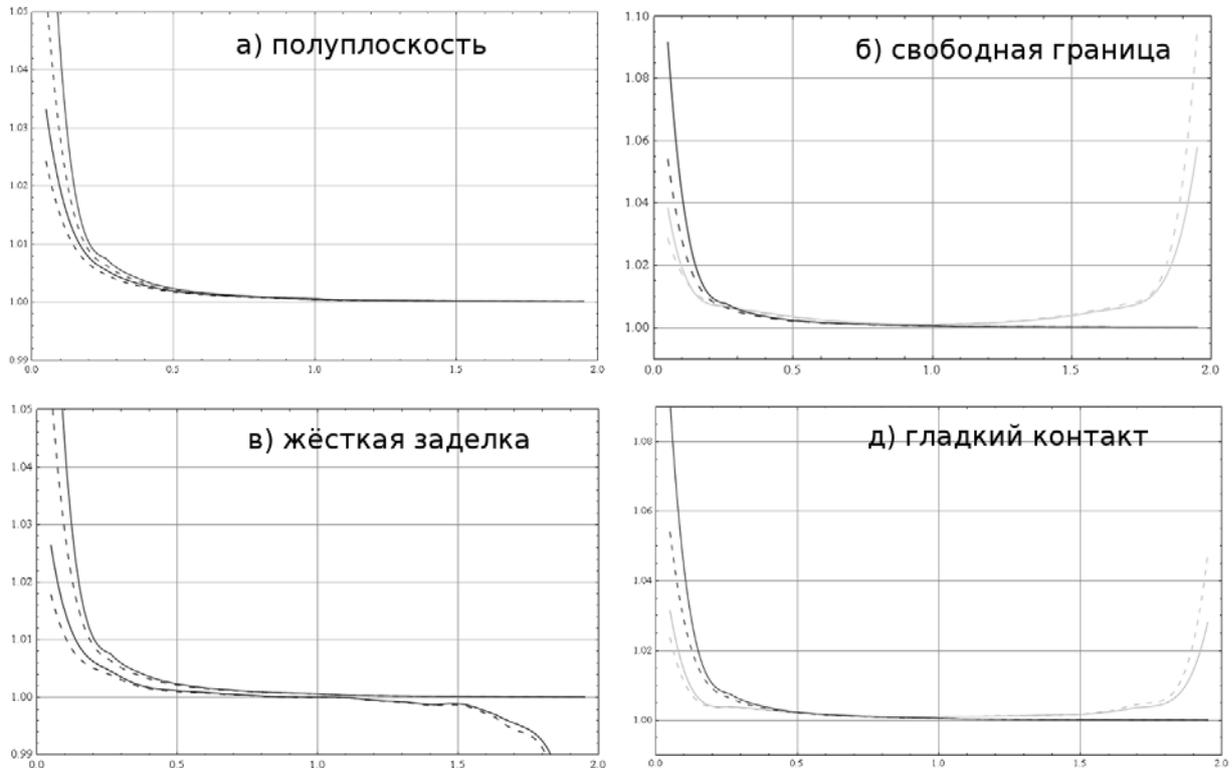


Рис. 2. Зависимость фактора влияния  $N$  от глубины: трещина  $h - a$  – для различных вариантов граничных условий. Толщина слоя  $h_2$  для всех случаев равна  $2 + a$

На рис. 2 представлены расчёты фактора влияния  $N$  для различных граничных условий на нижней грани слоя. Сплошные линии отражают значения  $N$  в верхней, а пунктирные – в нижней вершинах трещины. На всех графиках приведён эталонный случай полуплоскости без накладки.

В случае полуплоскости с накладкой [2] (рис. 2а) наблюдается уменьшение фактора влияния в вершинах трещины при её приближении к верхней границе за счёт воздействия накладки.

Далее, рассматривая слой со свободной нижней границей (рис. 2б), необходимо отметить, что за счёт свободной нижней грани прослеживается симметрия с эталонным случаем полуплоскости.

Жёсткая заделка на нижней грани существенно уменьшает фактор влияния и вместе с тем опасность трещины (рис. 2в.).

### **Результаты**

1. Рассматриваемая задача сведена к решению сингулярного интегрального уравнения первого рода.
2. Изучены различные варианты граничных условий на нижней грани слоя.
3. Получено численное решение методом коллокации.
4. Произведены численные эксперименты.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 10-08-00839а)

### **ЛИТЕРАТУРА**

1. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1979. 486с.
2. Соболев Б.В., Краснощёков А.А. Современные проблемы механики сплошной среды:// Тр. XV Междунар. конф. / ЮФУ. – Ростов н/Д, 2011. 219-224с.
3. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342с.
4. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Градштейн И.С., Рыжик И.М. 4-е изд. М.: Физматгиз, 1963. 1100с.
5. Александров В.М., Сметанин Б.И., Соболев Б.В. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. М.: Физматлит, 1993. 224с.
6. Соболев Б.В. Об асимптотических решениях трёхмерных статических задач теории упругости со смешанными граничными условиями // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4 (4). С.1778–1780.

### **Сведения об авторах:**

**Соболев Борис Владимирович** – заведующий кафедрой «Информационные технологии», проф. д.т.н., Донской государственный технический университет, факультет «ИиВТ», +7 632 738341

**E-mail:** [b.sobol@mail.ru](mailto:b.sobol@mail.ru)

**Краснощёков Александр Александрович** – аспирант кафедры «Информационные технологии», Донской государственный технический университет, факультет «ИиВТ», +7 989 6179555

**E-mail:** [akrasnoschekov@gmail.com](mailto:akrasnoschekov@gmail.com)

## ВЛИЯНИЕ ХАРАКТЕРА НАГРУЖЕНИЯ НА ДИНАМИКУ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТРЕЩИНЫ В ОРГАНИЧЕСКОМ СТЕКЛЕ

Судьенков Ю.В., Смирнов И.В.

Представлены результаты экспериментов по изучению распространения трещины в образцах ПММА при квазистатических и динамических нагрузках. Квазистатическое нагружение осуществлялось с помощью разрывной машины. Динамическое нагружение проводилось на установке взрыва проводников. Результаты динамических и квазистатических экспериментов показывают неустойчивое поведения локальной скорости трещины для любого характера нагружения.

Распространение трещины в хрупких и квазихрупких материалах изучается уже многие десятилетия. Однако, в настоящее время отсутствует полное понимание процесса развития трещины.

Согласно классическим представлениям механики разрушения скорость трещины является монотонной функцией времени. Данное представление основано на результатах многих экспериментов. В более поздних экспериментах, например [1,2], получено неустойчивое поведение скорости фронта трещины при квазистатическом разрыве листов ПММА или скачкообразное продвижение трещины в пластинах ПММА при импульсном нагружении на берегах разреза.

Результаты с неустойчивым поведением трещины были получены в разных лабораториях при различных условиях нагружения и методиках регистрации трещины. Поэтому представляет интерес проведение аналогичных испытаний при единой методике регистрации трещины.

В данной работе представлены результаты экспериментальных исследований динамики развития трещины в плоских образцах ПММА при квазистатическом и динамическом нагружении образцов [3]. Параметры исследуемого органического стекла (полиметилметакрилата): плотность  $\rho = 1180 \text{ кг/м}^3$ , продольная скорость звука  $C_L = 2750 \pm 25 \text{ м/с}$ , поперечная скорость звука  $C_{TR} = 1400 \pm 25 \text{ м/с}$ , модуль упругости  $E = 5.9 \text{ ГПа}$ . Схема экспериментов представлена на рис. 1.

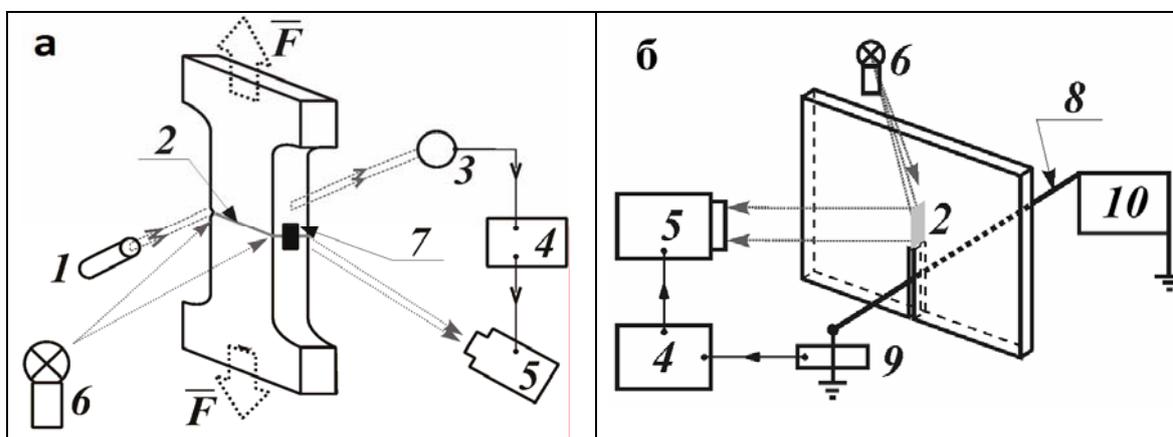


Рис.1. Схема эксперимента: а) квазистатические испытания; б) динамические испытания.

1 – лазер, 2 – трещина, 3 – фотоприемник, 4 – генератор импульсов, 5 – стрик-камера, 6 – осветитель, 7 – пьезодатчик; 8 – взрывающаяся проволочка, 9 – датчик тока, 10 – установка ЭВП.

Квазистатическое нагружение осуществлялось на разрывной машине. Плоские образцы ПММА имели гантелеобразную форму с размерами рабочей части  $93 \times 35 \times 5 \text{ мм}$ . Для инициации трещины в середине образца лезвием бритвы делался надрез глубиной  $0.4 - 1.3 \text{ мм}$ .

Динамическое нагружение образцов осуществлялось с помощью установки электрического взрыва проводников. Емкость конденсатора установки для электрического взрыва  $C = 1.0 \text{ мкФ}$ , напряжение заряда  $U \leq 25 \text{ кВ}$ , энергия  $E \leq 312 \text{ Дж}$ . Образцы ПММА имели форму квадратных

пластин с боковым разрезом. Размер образцов (200x200x5 мм) выбирался из условий отсутствия воздействия отражённых от боковых граней образца волн на процесс движения трещины за время регистрации. Ширина пропила равнялась 0.5 мм и длина 50 мм. Взрываема проволока ( $\varnothing 0.2$  мм) размещалась между берегов разреза перпендикулярно к плоскости пластины на расстоянии 24-31 мм от его начала. Лавсановая пленка использовалась для создания акустического контакта проволоочки и берегов пропила. Один и тот же образец мог быть использован несколько раз.

Регистрация продвижения фронта трещины осуществлялась стрик-камерой K008 по методу щелевой развёртки изображения. Регистрировалась пространственно-временная развёртка луча света, отражающегося от поверхности развивающейся трещины.

При квазистатических испытаниях образцов синхронизация камеры производилась по изменению интенсивности луча лазера, проходящего через вершину надреза. В случае динамического нагружения синхронизация осуществлялась по сигналу с датчика тока (пояса Роговского).

**Квазистатические испытания.** Типичная развёртка траектории фронта трещины представлена на рис.2,а. Скорость движения фронта трещины, полученная дифференцированием траектории, представлена на рис. 2,б.

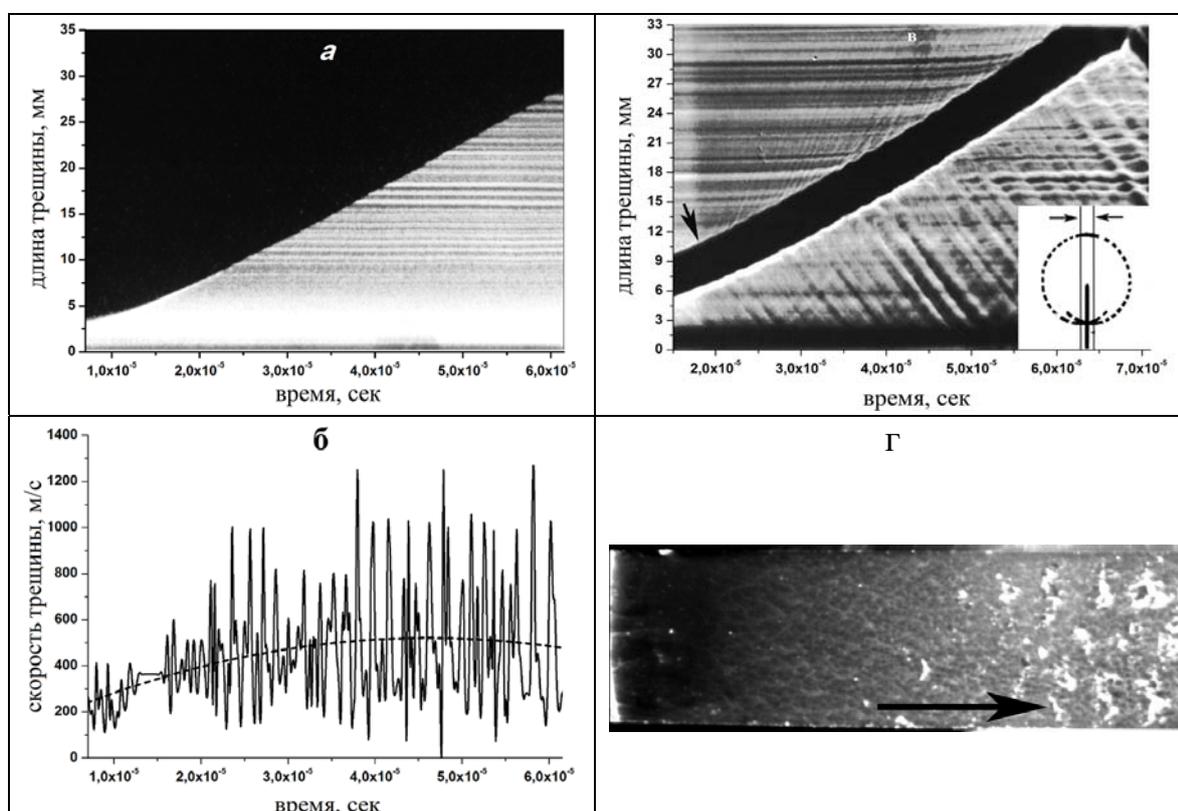


Рис.2. Распространение трещины при квазистатическом разрыве плоских образцов ПММА. а) щелевая развёртка траектории фронта трещины; б) колебания скорости фронта трещины (штриховая линия – средняя скорость); в) щелевая развёртка волновой картины в вершине трещины; г) поверхность разрушения (слева направо): зеркальная, параболическая, чешуйчатая, грубо-фрагментарная (ребристая).

Подобная зависимость скорости распространения трещины была получена в работе [1]. Было показано, что осцилляции фронта трещины коррелируют с профилем поверхности разрушения, а критическая скорость перехода на нестабильный режим  $V_c = 0.34C_R$  не зависит от геометрии, толщины образца и приложенной нагрузки.

Наш способ синхронизации давал возможность регистрировать только участок с нестабильным распространением трещины. Однако наблюдается аналогичная корреляция колебаний скорости трещины, профиля поверхности разрушения и частоты сигнала акустической эмиссии.

Начало наиболее выраженного нестабильного поведения трещины соответствует началу «ребристого» профиля поверхности [1] с расстоянием между ребрами порядка 1 мм. Наиболее выраженные частоты осцилляций скорости фронта трещины находятся в диапазоне 500-700 кГц. Динамическая картина полей напряжений в процессе распространения трещины показана на рис. 2,в. Видно, что сравнительно небольшие колебания диаметра каустики сопровождается эмиссией упругих волн напряжений. Черная стрелка показывает начало чётко выраженной эмиссии упругих волн из окрестности вершины трещины.

**Динамические испытания.** На рис. 3,а представлен характерный участок траектории развития трещины, полученный при динамических нагружениях пластин ПММА с разрезом. Рис. 3,б показывает изменение скорости фронта трещины.

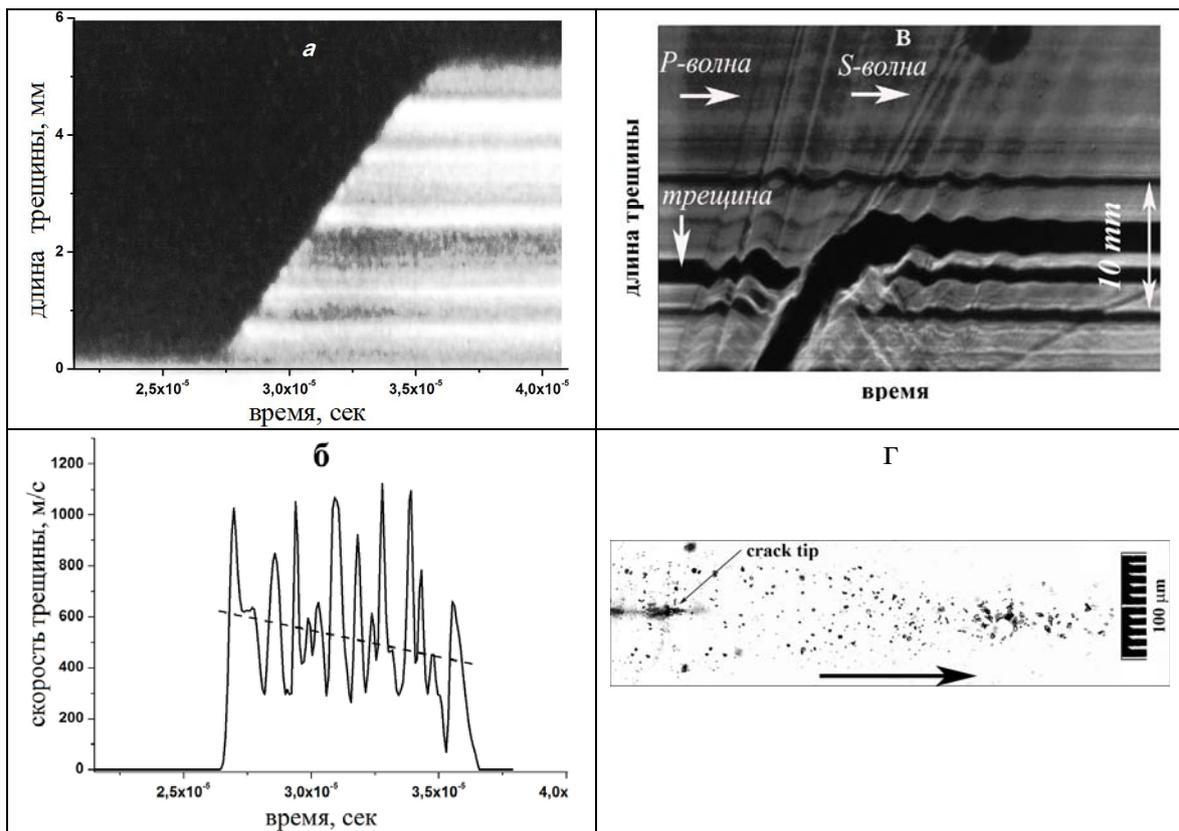


Рис. 3. Распространение трещины при импульсной нагрузке на берегах разреза образца. а) шелевая развёртка траектории фронта трещины; б) колебания скорости фронта трещины (штриховая линия – средняя скорость); в) поля напряжений при динамических испытаниях (две параллельные полосы – метки расстояния); г) область предразрушения перед фронтом трещины после её остановки в случае динамического воздействия (стрелка указывает направление развития трещины).

Стоит отметить, что условие нагружения соответствует задаче об локализованной нагрузке на берегах полубесконечной трещины [4]. Согласно аналитическому решению, трещина начинает распространяться после прихода волны Рэлея. Регистрируемые моменты старта трещины в эксперименте в хорошем согласии с теорией.

В динамических испытаниях более шероховатая область поверхности разрушения, так же, как и в квазистатических испытаниях соответствует максимальным колебаниям скорости. Однако, в отличие от квазистатических испытаний, здесь наблюдается обратный порядок формирования

характерных зон поверхности разрушения: грубо-фрагментарная, чешуйчатая, параболическая, зеркальная. То есть порядок следования характерных структур на поверхности разрушения связан с характером изменения скорости продвижения трещины (возрастание или замедление) и её значениями.

На рис.3,в показана щелевая развёртка полей напряжений при динамических испытаниях. Поскольку полиметилметакрилат вязкоупругий материал, то наблюдается небольшая каустика в вершине трещины до прихода импульса напряжений. Видно, что трещина стартует уже после прихода поперечной волны. Обращает внимание тот факт, что каустика распространяется не от вершины трещины, а вдоль берегов пропила. По-видимому, это связано с колебаниями берегов трещины и, соответственно, возникновением напряжения сжатия на её и берегах.

**Выводы.** Результаты исследований динамики трещины в пластинах из ПММА, полученные при единой методике регистрации, позволяют выделить сходство и различие в этапах процесса разрушения при квазистатических и динамических воздействиях на хрупкие материалы.

Средняя скорость распространения трещины в наших экспериментах, как при квазистатических, так и при динамических испытаниях, не превышала  $0.5C_R$ , но на скачках она могла приближаться к скорости волны Рэлея  $C_R$ .

Эксперименты демонстрируют общее свойство квазистохастического поведения трещины при больших скоростях продвижения её фронта и качественно совпадают с результатами, полученными другими авторами [1,2]. Результаты подтверждают, что скачки скорости фронта трещин коррелируют с изменениями структуры поверхности разрушения.

Наблюдаемая динамика развития трещины может быть связана с зоной предразрушения перед фронтом магистральной трещины [5-8], т.е. развитием ансамбля микроповреждений в области высокого напряжения. Характерный вид такой зоны микроповреждений после остановки трещины, зарегистрированный в ходе динамических испытаний, приведён на рис. 2,г.

Принципиальное отличие для двух способов нагружения заключается в поведении средней скорости фронта трещины. При квазистатическом нагружении средняя скорость относительно плавно выходит на своё максимальное значение. Данный факт хорошо согласуется с результатами [9]. В случае же динамического нагружения средняя скорость приобретает своё максимальное значение практически мгновенно, аналогично результатам [10].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Fineberg J., Gross S.P., Marder M., and Swinney H.L. Instability in the propagation of fast cracks. *Rhys. Review B*, 1992, Vol. 45(10), P. 5146-5154.
2. Костандов Ю.А., Федоркин С.И., Скоблин А.А. Методика исследования процесса разрушения полимерных материалов при динамическом нагружении. //Заводская лаборатория. 1986. № 9. С.65-67.
3. Смирнов И.В., Судьенков Ю.В. Исследование динамики трещин в пластинах ПММА при квазистатических и динамических нагрузках.// ЖТФ. 2011. Т. 81(12). С.114-117.
4. Freund L.B. The stress intensity factor due to normal impact loading of the faces of a crack.// *Int. J. Engng. Sci.*. 1974. V.12. P.179-189
5. Наймарк О.Б., Баранников В.А., Давыдова М.М. и др. Динамическая стохастичность и скейлинг при распространении трещины.// Письма в ЖТФ. 2000. Т.26(6). С.67-77.

6. Ravi-Chandar K. and Knauss W.G. An experimental investigation into dynamic fracture: II. Microstructural aspects //Int. J. Fract., 1984. Vol.26. P.65-80.
7. Костандов Ю.А., Федоркин С.И. Микромеханика разрушения твёрдых полимеров при динамическом нагружении.// Проблемы Прочности. 1990. № 2. С.80-85.
8. Лексовский А.М., Баскин Б.Л. Некоторые аспекты зарождения и развития трещин микро- и мезомасштаба и квазихрупкое разрушение однородных материалов.// ФТТ. 2011. Т.53(6). С.1157-1168.
9. Dally J.W., Fourney W.L. and Irwin G.R. On the uniqueness of the stress intensity factor - crack velocity relationship. //Int. J. of Fract., 1985. V.27. P.159-168.
10. Ravi-Chandar K., Knauss W.G. An experimental investigation into dynamic fracture: I. Crack initiation and arrest. //Int. J. of Fract., 1984. V.25. P.247-262.

**Сведения об авторах:**

**Судьенков Юрий Васильевич** – старший научный сотрудник, Санкт-Петербургский государственный университет, **E-mail:** [sudenkov@land.ru](mailto:sudenkov@land.ru)

**Смирнов Иван Валерьевич** – аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет, **E-mail:** [ivansmirnov@math.spbu.ru](mailto:ivansmirnov@math.spbu.ru)

# ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДВУХ СОПРЯЖЁННЫХ ПОЛЫХ ЦИЛИНДРОВ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Герзян С.А.

Предполагается, что на боковых поверхностях приложены произвольные нагрузки, на торцах заданы напряжения, а между цилиндрами осуществляется полное сцепление. Получено трансцендентное уравнение, характеризующее особенности напряжений на линии контакта.

**1.** Рассматривается осесимметричная контактная задача для двух сопряжённых друг с другом по цилиндрической поверхности полых цилиндров конечной длины.

Предполагается, что на боковых поверхностях приложены произвольные нагрузки, на торцах заданы напряжения, а между цилиндрами осуществляется полное сцепление (рис. 1).

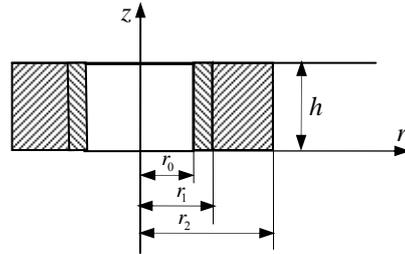


Рис. 1

Задача решается при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned}
 \tau_{rz}^{(1)}(r_0, z) = 0 & \quad \tau_{rz}^{(2)}(r_2, z) = 0 & (0 < z < h) \\
 \sigma_r^{(1)}(r_0, z) = f_0(z) & \quad \sigma_r^{(2)}(r_2, z) = f_2(z) & \\
 \tau_{rz}^{(1)}(r, h) = \psi_0^{(1)}(r) & \quad \tau_{rz}^{(2)}(r, h) = \psi_0^{(2)}(r) & (r_0 < r < r_1) \quad (r_1 < r < r_2) \\
 \sigma_z^{(1)}(r, h) = t_0^{(1)}(r) & \quad \sigma_z^{(2)}(r, h) = t_0^{(2)}(r) & \\
 \tau_{rz}^{(1)}(r, 0) = \psi_1^{(1)}(r) & \quad \tau_{rz}^{(2)}(r, 0) = \psi_1^{(2)}(r) & (r_0 < r < r_1) \quad (r_1 < r < r_2) \\
 \sigma_z^{(1)}(r, 0) = t_1^{(1)}(r) & \quad \sigma_z^{(2)}(r, 0) = t_1^{(2)}(r) &
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

и условиям контакта:

$$\begin{aligned}
 \tau_{rz}^{(1)}(r_1, z) = \tau_{rz}^{(2)}(r_1, z); & \quad \sigma_r^{(1)}(r_1, z) = \sigma_r^{(2)}(r_1, z) \\
 u_r^{(1)}(r_1, z) = u_r^{(2)}(r_1, z); & \quad u_z^{(1)}(r_1, z) = u_z^{(2)}(r_1, z)
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

**2.** Бигармонические функции для цилиндров ищем в виде:

$$\begin{aligned}
 \Phi^{(i)}(r, z) = z & [D_i \ln r + A_i r^2 + B_i z^2 + C_i z] + \\
 + \sum_{k=1}^{\infty} & \{E_k^{(i)} I_0(\lambda_k r) + F_k^{(i)} K_0(\lambda_k r) + \lambda_k r [G_k^{(i)} I_1(\lambda_k r) + H_k^{(i)} K_1(\lambda_k r)]\} \sin \lambda_k z + \\
 + \sum_{k=1}^{\infty} & [A_k^{(i)} \text{sh} \mu_k^{(i)} z + B_k^{(i)} \text{ch} \mu_k^{(i)} z + \mu_k^{(i)} z (C_k^{(i)} \text{sh} \mu_k^{(i)} z + D_k^{(i)} \text{ch} \mu_k^{(i)} z)] W_0^{(i)}(\mu_k^{(i)} r)
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

при  $i=1$   $r_0 < r < r_1$ ; при  $i=2$   $r_1 < r < r_2$ ;  $0 < z < h$ ;  $\lambda_k = \frac{k\pi}{h}$

Напряжения и перемещения через бигармоническую функцию выражаются формулами:

$$\begin{aligned}
 \sigma_r^{(i)}(r, z) = & -2(1 - 2\nu_i)A_i + 6\nu_i B_i + \frac{D_i}{r^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{(i)^3 \{ [A_k^{(i)} + D_k^{(i)}(1 + 2\nu_i)] \text{ch} \mu_k^{(i)} z + \\
 + [B_k^{(i)} + C_k^{(i)}(1 + 2\nu_i)] \text{sh} \mu_k^{(i)} z + \mu_k^{(i)} z [C_k^{(i)} \text{ch} \mu_k^{(i)} z + D_k^{(i)} \text{sh} \mu_k^{(i)} z] \} & W_0^{(i)}(\mu_k^{(i)} r) - \\
 - \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{(i)^3 \{ [A_k^{(i)} + D_k^{(i)}] \text{ch} \mu_k^{(i)} z + [B_k^{(i)} + C_k^{(i)}] \text{sh} \mu_k^{(i)} z + \mu_k^{(i)} z [C_k^{(i)} \text{ch} \mu_k^{(i)} z + D_k^{(i)} \text{sh} \mu_k^{(i)} z] \} & \frac{W_1^{(i)}(\mu_k^{(i)} r)}{\mu_k^{(i)} r} -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^3 \left\{ [E_k^{(i)} + G_k^{(i)}(1-2\nu_i)] I_0(\lambda_k r) + [F_k^{(i)} - H_k^{(i)}(1-2\nu_i)] K_0(\lambda_k r) - \right. \\
& \left. - \frac{1}{\lambda_k r} [E_k^{(i)} I_1(\lambda_k r) - F_k^{(i)} K_1(\lambda_k r)] + \lambda_k r [G_k^{(i)} I_1(\lambda_k r) + H_k^{(i)} K_1(\lambda_k r)] \right\} \cos \lambda_k z
\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_z^{(i)}(r, z) &= 4(2-\nu_i)A_i + 6(1-\nu_i)B_i + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{(i)^3} \left\{ [D_k^{(i)}(1-2\nu_i) - A_k^{(i)}] \operatorname{ch} \mu_k^{(i)} z + \right. \\
& + [C_k^{(i)}(1-2\nu_i) - B_k^{(i)}] \operatorname{sh} \mu_k^{(i)} z - \mu_k^{(i)} z [C_k^{(i)} \operatorname{ch} \mu_k^{(i)} z + D_k^{(i)} \operatorname{sh} \mu_k^{(i)} z] W_0^{(i)}(\mu_k^{(i)} r) + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^3 \left\{ [E_k^{(i)} + 2(2-\nu_i)G_k^{(i)}] I_0(\lambda_k r) + [F_k^{(i)} - 2(2-\nu_i)H_k^{(i)}] K_0(\lambda_k r) + \right. \\
& \left. + \lambda_k r [G_k^{(i)} I_1(\lambda_k r) + H_k^{(i)} K_1(\lambda_k r)] \right\} \cos \lambda_k z
\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{rz}^{(i)}(r, z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{(i)^3} \left\{ [A_k^{(i)} + 2\nu_i D_k^{(i)}] \operatorname{sh} \mu_k^{(i)} z + [B_k^{(i)} + 2\nu_i C_k^{(i)}] \operatorname{ch} \mu_k^{(i)} z + \right. \\
& + \mu_k^{(i)} z [C_k^{(i)} \operatorname{sh} \mu_k^{(i)} z + D_k^{(i)} \operatorname{ch} \mu_k^{(i)} z] W_1^{(i)}(\mu_k^{(i)} r) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^3 \left\{ [E_k^{(i)} + 2(1-\nu_i)G_k^{(i)}] I_1(\lambda_k r) - \right. \\
& \left. - [F_k^{(i)} - 2(1-\nu_i)H_k^{(i)}] K_1(\lambda_k r) + \lambda_k r [G_k^{(i)} I_0(\lambda_k r) + H_k^{(i)} K_0(\lambda_k r)] \right\} \sin \lambda_k z
\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}
u_r^{(i)}(r, z) &= -\frac{1}{2G} \left\{ 2A_i r + \frac{D_i}{r} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \left\{ [E_k^{(i)} I_1(\lambda_k r) - F_k^{(i)} K_1(\lambda_k r)] + \right. \right. \\
& \left. + \lambda_k r [G_k^{(i)} I_0(\lambda_k r) - H_k^{(i)} K_0(\lambda_k r)] \right\} \cos \lambda_k z - \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{(i)^2} \left\{ [A_k^{(i)} + D_k^{(i)}] \operatorname{ch} \mu_k^{(i)} z + \right. \\
& \left. + [B_k^{(i)} + C_k^{(i)}] \operatorname{sh} \mu_k^{(i)} z + \mu_k^{(i)} z [C_k^{(i)} \operatorname{ch} \mu_k^{(i)} z + D_k^{(i)} \operatorname{sh} \mu_k^{(i)} z] W_1^{(i)}(\mu_k^{(i)} r) \right\}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}
u_z^{(i)}(r, z) &= \frac{1}{2Gi} \left\{ 2(1-2\nu_i)C_i + [8(1-\nu_i)A_i + 6(1-2\nu_i)B_i] z + \right. \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \left\{ [E_k^{(i)} + 4(1-\nu_i)G_k^{(i)}] I_0(\lambda_k r) + [F_k^{(i)} - 4(1-\nu_i)H_k^{(i)}] K_0(\lambda_k r) + \right. \\
& \left. + \lambda_k r [G_k^{(i)} I_1(\lambda_k r) - H_k^{(i)} K_1(\lambda_k r)] \right\} \sin \lambda_k z + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{(i)^2} \left\{ [2(1-2\nu_i)D_k^{(i)} - A_k^{(i)}] \operatorname{sh} \mu_k^{(i)} z + \right. \\
& \left. + [2(1-2\nu_i)C_k^{(i)} - B_k^{(i)}] \operatorname{ch} \mu_k^{(i)} z - \mu_k^{(i)} z [C_k^{(i)} \operatorname{sh} \mu_k^{(i)} z + D_k^{(i)} \operatorname{ch} \mu_k^{(i)} z] W_0^{(i)}(\mu_k^{(i)} r) \right\}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

где  $I_n(\xi)$  и  $K_n(\xi)$  ( $n=0,1$ ) – функции Бесселя мнимого аргумента первого рода, а  $W_n^{(i)}(\xi)$  – функции Вебера, причём,

$$W_n^{(i)}(\xi)(\mu_k^{(i)} r) = I_n(\mu_k^{(i)} r) Y_1(\mu_k^{(i)} r_i) - I_1(\mu_k^{(i)} r_i) Y_n(\mu_k^{(i)} r), \quad W_n^{(i)}(\mu_k^{(i)} r_i) \equiv 0 \tag{2.7}$$

а  $\mu_k^{(i)}$  определяется из уравнения

$$W_1^{(i)}(\mu_k^{(i)} r_j) = 0 \quad i=1,2; \quad j=2(i-1)$$

**3.** Получены трансцендентные уравнения, характеризующие особенности напряжений на линии контакта. Удовлетворяя граничным условиям и условиям контакта, и введя новые неизвестные следующими формулами:

$$\begin{aligned}
\mu_p^{(1)^3} [D_p^{(1)} \operatorname{sh} \mu_p^{(1)} h + C_p^{(1)} \operatorname{ch} \mu_p^{(1)} h] &= X_p^{(1)}; \quad \mu_p^{(1)^3} C_p^{(1)} = Y_p^{(1)} \\
\mu_p^{(2)^3} [D_p^{(2)} \operatorname{sh} \mu_p^{(2)} h + C_p^{(2)} \operatorname{ch} \mu_p^{(2)} h] &= X_p^{(2)}; \quad \mu_p^{(2)^3} C_p^{(2)} = Y_p^{(2)} \\
\lambda_p^3 [G_p^{(1)} I_1^{(0)} + H_p^{(1)} K_1^{(0)}] &= Z_p^{(0)}; \quad \lambda_p^3 [G_p^{(1)} I_1^{(1)} + H_p^{(1)} K_1^{(1)}] = Z_p^{(1)} \\
\lambda_p^3 [G_p^{(2)} I_1^{(1)} + H_p^{(2)} K_1^{(1)}] &= T_p^{(1)}; \quad \lambda_p^3 [G_p^{(2)} I_1^{(2)} + H_p^{(2)} K_1^{(2)}] = T_p^{(2)}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь  $I_n^{(i)} = I_n(\lambda_k r_i)$ ;  $K_n^{(i)} = K_n(\lambda_k r_i)$

Для определения новых неизвестных получим восемь уравнений.

Пользуясь асимптотикой функции Вебера

$$\begin{aligned} w_0^{(1)}(\mu_k^{(1)} r_0) &\cong \frac{2(-1)^k}{\pi \mu_k^{(1)} \sqrt{r_0 r_1}}; & w_0^{(1)}(\mu_k^{(1)} r_0) &\cong (-1)^k \sqrt{\frac{r_1}{r_0}}; & w_0^{(1)}(\mu_k^{(1)} r_1) &\cong \frac{2}{\pi \mu_k^{(1)} r_1}; \\ \frac{w_0^{(2)}(\mu_k^{(2)} r_1)}{w_0^{(2)}(\mu_k^{(2)} r_2)} &\cong (-1)^k \sqrt{\frac{r_2}{r_1}}; & w_0^{(2)}(\mu_k^{(2)} r_1) &\cong -\frac{2(-1)^k}{\pi \mu_k^{(2)} \sqrt{r_1 r_2}}; & w_0^{(2)}(\mu_k^{(2)} r_2) &\cong -\frac{2}{\pi \mu_k^{(2)} r_2}; \\ \frac{r_1^2 w_0^{(1)^2}(\mu_k^{(1)} r_1)}{\Delta_k(\mu_k^{(1)})} &\cong \frac{2r_1}{r_1 - r_0}; & \frac{r_2^2 w_0^{(2)^2}(\mu_k^{(2)} r_2)}{\Delta_k(\mu_k^{(2)})} &\cong \frac{2r_2}{r_2 - r_1}; \end{aligned} \quad (3.2)$$

предполагая, что для больших значений номеров неизвестные имеют следующие порядки убывания:

$$\begin{aligned} u_k^{(1)} &= X_k^{(1)} r_1 w_0^{(1)}(\mu_k^{(1)} r_1) \cong \frac{u^{(1)}}{\mu_k^{(1)\alpha}}; & v_k^{(1)} &= Y_k^{(1)} r_1 w_0^{(1)}(\mu_k^{(1)} r_1) \cong \frac{v^{(1)}}{\mu_k^{(1)\alpha}} \\ u_k^{(2)} &= X_k^{(2)} r_2 w_0^{(2)}(\mu_k^{(2)} r_2) \cong \frac{(-1)^k u^{(2)}}{\mu_k^{(2)\alpha}}; & v_k^{(2)} &= Y_k^{(2)} r_2 w_0^{(2)}(\mu_k^{(2)} r_2) \cong \frac{(-1)^k v^{(2)}}{\mu_k^{(2)\alpha}} \\ z_k^{(0)} &\cong \frac{z^{(0)}}{\lambda_k^\beta}; & z_k^{(1)} &\cong \frac{(-1)^k z^{(1)}}{\lambda_k^\beta}; & T_k^{(1)} &\cong \frac{(-1)^k T^{(1)}}{\lambda_k^\beta}; & T_k^{(2)} &\cong \frac{T^{(2)}}{\lambda_k^\beta}; & (0 < \alpha < 1); & (0 < \beta < 1) \end{aligned} \quad (3.3)$$

и подставляя (3.2) и (3.3) в полученные уравнения, сохраняя при этом только главные части, получим:

$$-\frac{z^{(0)}}{k^\beta} = -\frac{4\lambda_k^2}{\sqrt{r_1 r_0} h} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p \mu_p^{(1)}}{(\mu_p^{(1)^2} + \lambda_k^2)^2} \left[ \frac{u^{(1)}}{\mu_p^{(1)\alpha}} (-1)^k - \frac{v^{(1)}}{\mu_p^{(1)\alpha}} \right] \quad (3.4)$$

$$\frac{T^{(2)}}{k^\beta} = -\frac{4\lambda_k^2}{r_2 h} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p \mu_p^{(2)}}{(\mu_p^{(2)^2} + \lambda_k^2)^2} \left[ \frac{u^{(2)}}{\mu_p^{(1)\alpha}} (-1)^k - \frac{v^{(2)}}{\mu_p^{(1)\alpha}} \right] \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} &-\frac{(-1)^k z^{(1)}}{\lambda_k^\beta} \left[ 1 + \frac{4(1-v_1)}{G-1} \right] - \frac{G(-1)^k T^{(1)}}{\lambda_k^\beta} \left[ 1 - \frac{4G(1-v_2)}{G-1} \right] = \\ &= \frac{4\lambda_k^2}{r_1 h} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\mu_p^{(1)^{-1}}}{(\mu_p^{(1)^2} + \lambda_k^2)^2} \left[ (2-v_1)\mu_p^{(1)^2} + (1-v_1)\lambda_k^2 \right] \left[ \frac{(-1)^k u^{(1)}}{\mu_p^{(1)\alpha}} - \frac{v^{(1)}}{\mu_p^{(1)\alpha}} \right] - \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} &-\frac{4G\lambda_k^2}{\sqrt{r_1 r_2} h} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\mu_p^{(2)^{-1}}}{(\mu_p^{(2)^2} + \lambda_k^2)^2} \left[ (2-v_2)\mu_p^{(2)^2} + (1-v_2)\lambda_k^2 \right] \left[ (-1)^k \frac{u^{(2)}}{\mu_p^{(2)\alpha}} - \frac{v^{(2)}}{\mu_p^{(2)\alpha}} \right] \\ &\frac{(-1)^k z^{(1)}}{\lambda_k^\beta} \left[ 1 + \frac{4(1-v_1)}{G-1} \right] + \frac{(-1)^k T^{(1)}}{\lambda_k^\beta} \left[ 1 - \frac{4G(1-v_2)}{G-1} \right] = \\ &= \frac{4\lambda_k^2}{r_1 h} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\mu_p^{(1)}}{(\mu_p^{(1)^2} + \lambda_k^2)^2} \left[ \frac{(-1)^k u^{(1)}}{\mu_p^{(1)\alpha}} - \frac{v^{(1)}}{\mu_p^{(1)\alpha}} \right] + \frac{4\lambda_k^2}{\sqrt{r_1 r_2} h} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\mu_p^{(2)}}{(\mu_p^{(2)^2} + \lambda_k^2)^2} \left[ \frac{(-1)^k u^{(2)}}{\mu_p^{(2)\alpha}} - \frac{v^{(2)}}{\mu_p^{(2)\alpha}} \right] \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\frac{u^{(1)}}{\mu_k^{(1)\alpha}} = \frac{4r_1}{r_1 - r_0} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\lambda_p}{\lambda_p^2 + \mu_k^{(1)2}} \left\{ \frac{(1-v_2)G T^{(1)}}{G-1} \frac{z^{(1)}}{\lambda_p^\beta} - \frac{(1-v_1)z^{(1)}}{G-1} \frac{z^{(1)}}{\lambda_p^\beta} + \right. \\ \left. + \frac{\mu_k^{(1)}}{\mu_k^{(1)2} + \lambda_p^2} \frac{z^{(1)}}{\lambda_p^\beta} - \frac{(-1)^k (-1)^p \mu_k^{(1)2}}{\mu_k^{(1)2} + \lambda_p^2} \sqrt{\frac{r_0}{r_1}} \frac{z^{(0)}}{\lambda_p^\beta} \right\} \quad (3.8)$$

$$\frac{u^{(2)}(-1)^k}{\mu_k^{(2)\alpha}} = -\frac{4r_2}{r_2 - r_1} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\lambda_p}{\lambda_p^2 + \mu_k^{(1)2}} \left\{ -(-1)^k \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \left[ \frac{(1-v_2)G T^{(1)}}{G-1} \frac{z^{(1)}}{\lambda_p^\beta} - \frac{(1-v_1)z^{(1)}}{G-1} \frac{z^{(1)}}{\lambda_p^\beta} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\mu_k^{(2)}}{\mu_k^{(2)2} + \lambda_p^2} \frac{T^{(1)}}{\lambda_p^\beta} \right] + \frac{\mu_k^{(2)}(-1)^p T^{(2)}}{(\mu_k^{(2)2} + \lambda_p^2) \lambda_p^\beta} \right\} \quad (3.9)$$

$$-\frac{v^{(1)}}{\mu_k^{(1)\alpha}} = -\frac{4r_1}{r_1 - r_0} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p \lambda_p}{\lambda_p^2 + \mu_k^{(1)2}} \left\{ \frac{(1-v_2)G T^{(1)}}{G-1} \frac{z^{(1)}}{\lambda_p^\beta} - \frac{(1-v_1)z^{(1)}}{G-1} \frac{z^{(1)}}{\lambda_p^\beta} + \right. \\ \left. + \frac{\mu_k^{(1)}}{\mu_k^{(1)2} + \lambda_p^2} \frac{z^{(1)}}{\lambda_p^\beta} - \frac{(-1)^k (-1)^p \mu_k^{(1)2}}{\mu_k^{(1)2} + \lambda_p^2} \sqrt{\frac{r_0}{r_1}} \frac{z^{(0)}}{\lambda_p^\beta} \right\} \quad (3.10)$$

$$-\frac{v^{(2)}(-1)^k}{\mu_k^{(2)\alpha}} = -\frac{4r_2}{r_2 - r_1} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p \lambda_p}{\lambda_p^2 + \mu_k^{(1)2}} \left\{ -(-1)^k \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \left[ \frac{(1-v_2)G T^{(1)}}{G-1} \frac{z^{(1)}}{\lambda_p^\beta} - \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(1-v_1)z^{(1)}}{G-1} \frac{z^{(1)}}{\lambda_p^\beta} + \frac{\mu_k^{(2)}}{(\mu_k^{(2)2} + \lambda_p^2) \lambda_p^\beta} \right] + \frac{(-1)^p \mu_k^{(2)2}}{\mu_k^{(2)2} + \lambda_p^2} \frac{T^{(2)}}{\lambda_p^\beta} \right\} \quad (3.11)$$

Используя асимптотическую оценку [6]

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} f\left(\frac{n}{k}\right) = \int_0^1 f(x) dx$$

и значения интегралов

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{2 \sin \frac{\pi\alpha}{2}}; \quad \int_0^{\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{\pi\alpha}{4 \sin \frac{\pi\alpha}{2}}$$

для рядов, входящих (3.4)–(3.11), получим

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\lambda_p^{1-\beta}}{\lambda_p^2 + \mu_k^{(1)2}} \cong \frac{r_1 - r_0}{2\mu_k^{(1)\beta} \sin \frac{\pi\beta}{2}}; \quad \mu_k^{(1)2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\lambda_p^{1-\beta}}{(\lambda_p^2 + \mu_k^{(1)2})^2} \cong \frac{\beta(r_1 - r_0)}{4\mu_k^{(1)\beta} \sin \frac{\pi\beta}{2}} \\ \lambda_k^2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\mu_p^{(1)1-\alpha}}{(\mu_p^{(1)2} + \lambda_k^2)^2} = \frac{\alpha h}{4\lambda_k^\alpha \sin \frac{\pi\alpha}{2}}; \quad \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\mu_p^{(1)1-\alpha}}{(\mu_p^{(1)2} + \lambda_k^2)^2} = \frac{h}{2\lambda_k^\alpha \sin \frac{\pi\alpha}{2}}$$

Сумма остальных рядов, входящих в (3.4)–(3.11) имеют порядок убывания больше единицы. Сохраняя члены порядка  $\lambda_k^\alpha, \mu_k^{(1)\beta}, \mu_k^{(2)\beta}$  [5] получим однородную систему для определения постоянных  $z^{(1)}, T^{(1)}, u^{(1)}, u^{(2)}$ .

$$\frac{\bar{u}^{(1)}}{\mu_k^{(1)\alpha}} = \frac{1-v_1}{(\mu-1) \sin \frac{\pi\beta}{2}} \frac{z^{(1)}}{\mu_k^{(1)\beta}} - \frac{\beta}{2 \sin \frac{\pi\beta}{2}} \frac{z^{(1)}}{\mu_k^{(1)\beta}} - \frac{G(1-v_2)}{G-1} \frac{1}{\sin \frac{\pi\beta}{2}} \frac{T^{(1)}}{\mu_k^{(1)\beta}} \quad (3.12)$$

$$\frac{\bar{u}^{(2)}}{\mu_k^{(2)\alpha}} = \frac{1-\nu_1}{G-1} \frac{1}{\sin \frac{\pi\beta}{2}} \frac{z^{(1)}}{\mu_k^{(1)\beta}} - \frac{G(1-\nu_2)}{G-1} \frac{1}{\sin \frac{\pi\beta}{2}} \frac{T^{(1)}}{\mu_k^{(1)\beta}} + \frac{\beta}{2 \sin \frac{\pi\beta}{2}} \frac{T^{(1)}}{\mu_k^{(1)\beta}} \quad (3.13)$$

$$-\frac{z^{(1)}}{\lambda_k^\beta} \left[ 1 + \frac{4(1-\nu_1)}{\mu-1} \right] - \frac{T^{(1)}}{\lambda_k^\beta} G \left[ 1 - \frac{4G(1-\nu_2)}{G-1} \right] = \left[ \frac{2\alpha}{\sin \frac{\pi\alpha}{2}} - \frac{4(1-\nu_1)}{\sin \frac{\pi\alpha}{2}} \right] \frac{\bar{u}^{(1)}}{\mu_k^{(1)\alpha}} - \quad (3.14)$$

$$-\left[ \frac{2\alpha G}{\sin \frac{\pi\alpha}{2}} - \frac{4(1-\nu_2)G}{\sin \frac{\pi\alpha}{2}} \right] \frac{\bar{u}^{(2)}}{\mu_k^{(2)\alpha}} - \frac{z^{(1)}}{\lambda_k^\beta} \left[ 1 + \frac{4(1-\nu_1)}{G-1} \right] + \frac{T^{(1)}}{\lambda_k^\beta} \left[ 1 - \frac{4G(1-\nu_2)}{G-1} \right] = -\frac{2\alpha}{\sin \frac{\pi\alpha}{2}} \frac{\bar{u}^{(1)}}{\mu_k^{(1)\alpha}} + \frac{2\alpha}{\sin \frac{\pi\alpha}{2}} \frac{\bar{u}^{(2)}}{\mu_k^{(2)\alpha}} \quad (3.15)$$

Здесь  $\bar{u}^{(1)} = \frac{u^{(1)}}{2r_1}$ ;  $\bar{u}^{(2)} = \frac{u^{(2)}}{2\sqrt{r_1 r_2}}$

Эта система должна иметь решение. Для этого необходимо, чтобы при  $\alpha = \beta$  определитель системы равнялся нулю. Это условие приводит к трансцендентному уравнению

$$\sin^4 \pi\theta \left[ 1 + \frac{4(1-\nu_1)}{G-1} \right] \left[ 1 - \frac{4G(1-\nu_2)}{G-1} \right] - 4 \sin^2 \pi\theta \left\{ 2\theta^2 \left[ 1 + \frac{2(1-\nu_1)}{G-1} - \frac{2G(1-\nu_2)}{G-1} \right] - \left[ \frac{1-\nu_1 + G(1-\nu_2)}{G-1} \right]^2 \right\} + 16\theta^2 \left\{ \theta^2 - \left[ \frac{1-\nu_1 - G(1-\nu_2)}{G-1} \right]^2 \right\} = 0; \quad \theta = \frac{\alpha}{2} \quad (3.16)$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамян Б.Л. Некоторые задачи равновесия круглого цилиндра. // Докл. АН Арм. ССР. 1958. Т.26. № 2.
2. Баблюян А.А., Тоноян В.С. Об одной задаче для полого конечного цилиндра. // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1970. Т.25. №2.
3. Баблюян А.А., Мкртчян А.М., Терзян С.А. Осесимметричные контактные задачи для конечного цилиндра. // II Всесоюзная конф. по теории упругости. Тбилиси: 1984. С.6-17.
4. Терзян С.А., Минасян М.А. Осесимметричная контактная задача для двух сопряженных полых цилиндров с цилиндрической трещиной. // Труды VII Межд. конф. „Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред.” Горис–Степанакерт, с.405-409.
5. Гринченко В.Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. Киев: Наукова Думка, 1978.
6. Поля Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. М.: 1978.

#### Сведения об авторе:

**Терзян Саркис Арутюнович** – к.ф.м.н., Институт механики НАН РА  
E-mail: [sat\\_and\\_21@yahoo.com](mailto:sat_and_21@yahoo.com)

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ УПРУГИХ СВОЙСТВ ТОНКИХ ПОКРЫТИЙ НА ОСНОВЕ РЕЗУЛЬТАТОВ МИКРО- И НАНОИНДЕНТИРОВАНИЯ

Торская Е.В.

Нанесение покрытий является одним из наиболее актуальных методов модификации поверхностей, используемых для увеличения ресурса в условиях фрикционного взаимодействия. Упругие свойства тонких покрытий могут отличаться от свойств однородных материалов, поскольку различны технологии их производства. Для покрытий, как и для однородных материалов, модуль упругости определяется по результатам индентирования. Принято считать, что при вдавливании индентора на глубину, не превышающую 1/10 толщины покрытия, влиянием подложки можно пренебречь. В настоящем исследовании определяются границы применимости подобного приближённого подхода. Предложен метод расчёта модуля Юнга и коэффициента Пуассона тонких упругих слоёв, основанный на решении контактной задачи для двухслойного упругого основания. На примере интерпретации и использования результатов индентирования для относительно жёстких и относительно мягких покрытий проанализированы возможности метода, причины появления погрешностей в определении упругих свойств материалов покрытий. На примере никель-фосфорного покрытия показана разница результатов, полученных при расчётах на основе данных микро- и наноиндентирования.

1. Нанесение покрытий является одним из наиболее актуальных методов модификации поверхностей, используемых для увеличения ресурса в условиях фрикционного взаимодействия. В приложении к тонким покрытиям существенным является вопрос об определении упругих свойств материалов, которые могут существенно отличаться от свойств тех же материалов в большом объёме, что связано с технологией нанесения. Для покрытий, как и для однородных материалов, модуль упругости определяется по результатам индентирования. Принято считать, что при вдавливании индентора на глубину, не превышающую 1/10 толщины покрытия, влиянием подложки можно пренебречь. Но в случае относительно твёрдых покрытий при интерпретации результатов индентирования необходимо учитывать деформацию более мягкой подложки. Работ, посвящённых данному вопросу, немного [1-3], все эти исследования опираются на эксперименты по индентированию одного типа покрытий, каждое из которых обладает определённым набором физических свойств – шероховатостью поверхности, дефектностью границы покрытия и подложки, степенью чистоты поверхности, поверхностной энергией, вызывающей адгезию, которая может существенно влиять на результаты эксперимента при сверхмалых внедрениях, и т.д. В данной работе приведён метод расчёта упругих характеристик тонких твёрдых покрытий, проанализированы возможности метода, причины появления погрешностей в определении упругих свойств материалов. На примере никель-фосфорного покрытия показана разница результатов, полученных при расчётах на основе данных микро- и наноиндентирования.

2. Эксперимент по наноиндентированию образцов с покрытиями проводили с помощью измерительного комплекса NanoTest 600 (MicroMaterialsLtd., Англия). В данном эксперименте применялся алмазный конический индентор с углом при вершине 60° и радиусом закругления 10 мкм, обеспечивалось разрешение по нагрузке 60 мкН и по глубине индентирования 0,04 нм. Вдавливание проводилось в режиме контролируемой нагрузки, с преднагрузкой 0,1 мН. Снимались зависимости нагрузка-глубина, на стадиях нагрузки и разгрузки. Разгрузка проводилась с той же скоростью, что и нагружение. Проводилось 10 экспериментов в разных точках поверхности. Максимальная нагрузка составляла 10, 100 и 500 мкН. Эксперименты по микроиндентированию проводились на УМТ «Cetr» с использованием стального сферического индентора с радиусом 6,35 мм. Максимальная нагрузка – 0,2Н. Все эксперименты по индентированию проводились в условиях антивибрационной защиты и отсутствия тепловых потоков.

3. Расчёт модуля упругости покрытия проводился на основе решения контактной задачи для двухслойного упругого полупространства и гладкого индентора (рис.4). При этом, предполагалось полное сцепление покрытия с подложкой:

$$\begin{aligned}w^{(1)} &= w^{(2)}; & u^{(1)} &= u^{(2)}; \\ \sigma_z^{(1)} &= \sigma_z^{(2)}; & \tau_{rz}^{(1)} &= \tau_{rz}^{(2)}; & \tau_{\theta z}^{(1)} &= \tau_{\theta z}^{(2)}, \\ i &= 1..2\end{aligned}\tag{3.1}$$

Здесь  $w$  и  $u$  – вертикальные и радиальные перемещения,  $i$  – слой (1) или основание (2),  $\sigma_z^{(i)}, \tau_{rz}^{(i)}, \tau_{\theta z}^{(i)}$  – компоненты тензора напряжений. На верхней границе упругого слоя выполняются условия контакта:

$$\begin{aligned} w^{(1)} + w^{(3)} &= f(r) + D, & 0 < r < a; \\ \sigma_z^{(1)} &= 0, & a < r < \infty; \\ \tau_{rz}^{(1)} &= 0, \quad \tau_{\theta z}^{(1)} = 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь  $f(r)$  – форма индентора,  $w^{(3)}$  – упругие перемещения поверхности индентора, которыми при исследовании твёрдых покрытий нельзя пренебречь,  $a$  – неизвестный радиус области контакта,  $D$  – внедрение.

Задача замыкается уравнением равновесия:

$$P = \int_0^{2\pi} \int_0^a p(r) r dr d\varphi, \quad (3.3)$$

где  $p(r)$  – неизвестное распределение давления под индентором, нагруженным силой  $P$ .

Метод решения задачи (3.1)-(3.3) подробно описан в [4], он основан на использовании интегральных преобразований Ханкеля и метода итераций. При этом, давление определяется в виде кусочно-постоянной функции. В данном случае обратить задачу (1)-(3) с тем, чтобы определить неизвестный модуль упругости при известных значениях  $P$  и  $D$ , невозможно, поскольку заранее неизвестен вид функции распределения давления. В то же время, возможно решить серию контактных задач с изменяющимся модулем упругости и остановиться на том значении, которое обеспечивает экспериментальное значение внедрения. Большое количество точек на кривой разгрузки позволяет получить и большое количество значений модуля упругости, которые при малой погрешности эксперимента и расчётов близки друг к другу. Использовался следующий алгоритм: из десяти кривых разгрузки выбирались пять, обеспечивающих наименьший разброс, затем вычислялась усреднённая экспериментальная кривая разгрузки, на которой выбирались десять точек с разными нагрузками. Для этих точек рассчитывался модуль упругости, после чего определялось среднее значение.

4. В данном разделе приведены результаты тестовых расчётов, полученные для относительно твёрдых и относительно мягких покрытий.

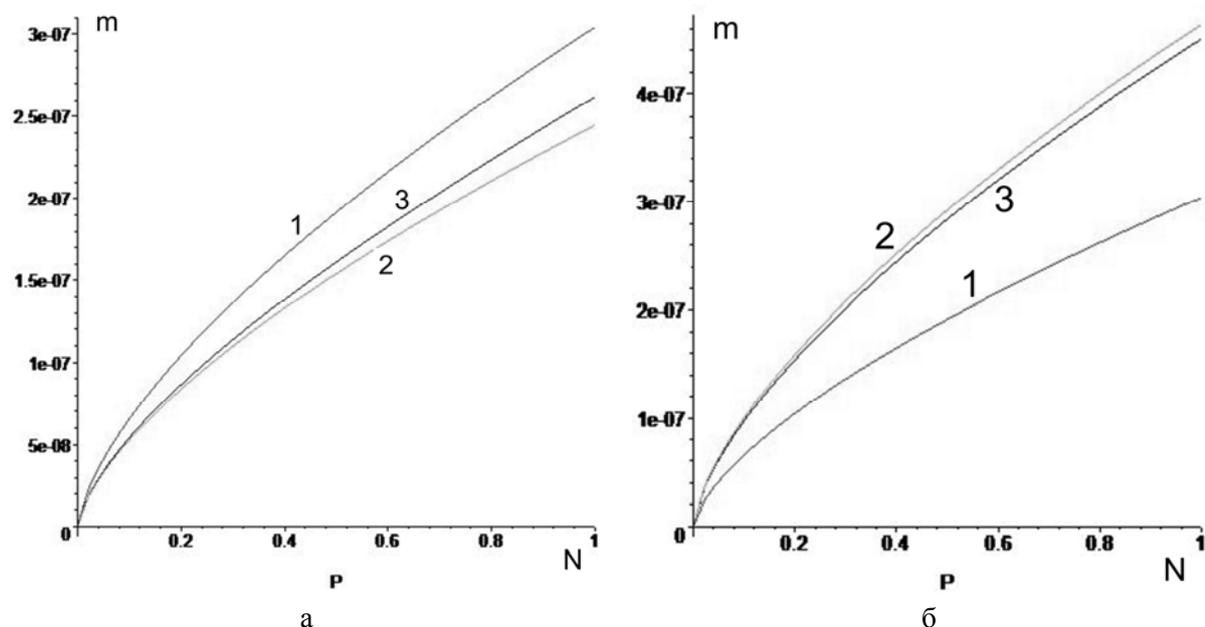
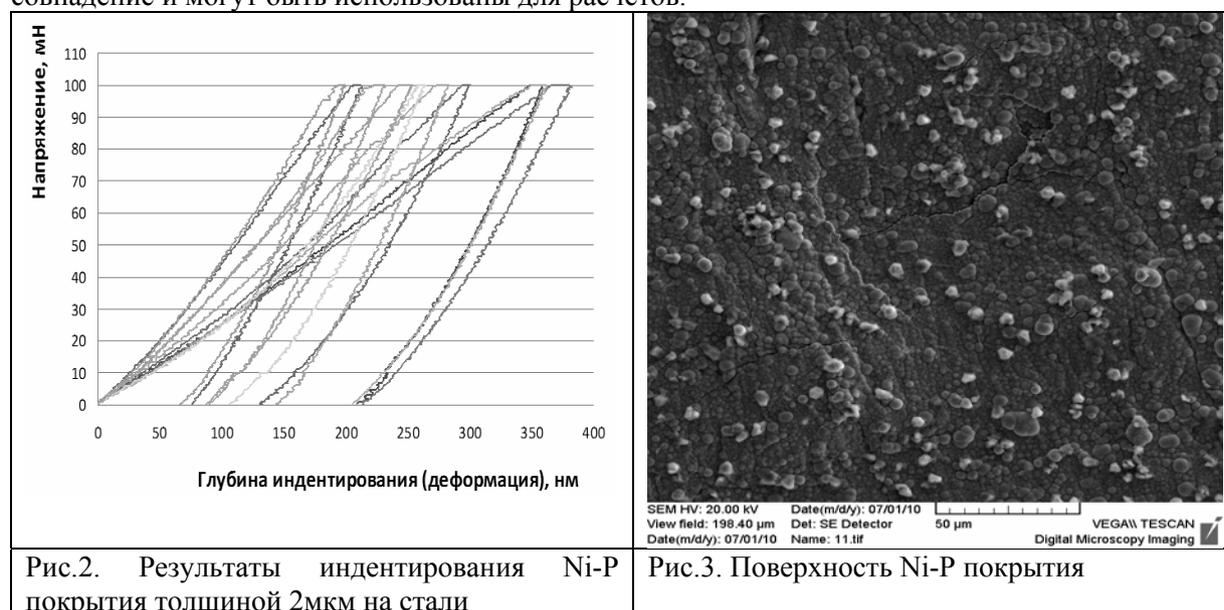


Рис.1. Зависимость внедрения от нагрузки, рассчитанная для внедрения стального шарика диаметром 3мм в сталь без покрытия (кривые 1) – модуль упругости стали 210ГПа; в покрытие толщиной 2мкм (кривые 3) на стали, отношение модулей упругости покрытия и подложки 2,5 (а) и 0,4 (б); в однородный материал с упругими характеристиками относительно твёрдых (а) и мягких (б) покрытий (кривые 2).

На рис.1 представлены примеры расчёта зависимости внедрения от нагрузки, полученные для относительно жёстких (а) и относительно мягких (б) покрытий (кривые 3). Для сравнения приведены кривые, полученные по теории Герца для однородных материалов со свойствами подложки (кривые 1) и покрытия (кривые 2). Очевидно, что для относительно мягких покрытий неучёт податливости подложки даёт ничтожно малую погрешность при расчётах для малых внедрений, тогда как для относительно жёстких покрытий погрешность может быть существенной даже при внедрении, не превышающем 10% от толщины покрытия.

5. В данном разделе представлены результаты индентирования Ni-P покрытий толщиной 3мкм, сформированных на стальной подложке. На рис. 2 представлены кривые нагружения-разгрузки, полученные на комплексе NanoTest 600 при максимальной нагрузке 100мкН. Нагрузка и геометрия контакта подбирались так, чтобы обеспечить упругое вдавливание, при котором кривые нагружения и разгрузки должны совпадать, тем не менее, результаты, на первый взгляд, соответствуют случаю упруго-пластической деформации. Тем не менее, следует отметить, что модуль упругости, рассчитанный программным комплексом прибора по теории Герца, мало отличается от модуля упругости стали, из чего можно сделать вывод, что несовпадение кривых нагружения и разгрузки обусловлено большой шероховатостью поверхности (см. рис.3). При этом, кривые разгрузки при наложении демонстрируют хорошее совпадение и могут быть использованы для расчётов.



На рис.4 представлены: 1 – экспериментальная кривая (средние значения, полученные из кривых нагружения рисунка 2); 2 – расчётная кривая, полученная для композиции сталь с модулем упругости 210 ГПа и коэффициентом Пуассона 0,3 и покрытие толщиной 2 мкм с модулем упругости 420 ГПа и коэффициентом Пуассона 0,22; 3 и 4 – расчётные кривые, полученные по теории Герца для однородных материалов с модулями упругости подложки и покрытия соответственно. Удовлетворительное совпадение кривых 1 и 2 позволяет использовать полученное значение модуля упругости для дальнейших расчётов.

На рис.5 представлены усреднённые результаты эксперимента и расчётов для случая микроиндентирования. В этом случае большой радиус кривизны индентора приводит к тому, что на площадке контакта оказывается большое количество неровностей, малая нагрузка на каждую неровность исключает микроразрушения неровностей (что возможно при вдавливании алмазного конуса), и в итоге кривые нагружения и разгрузки достаточно хорошо соответствуют случаю полной упругости. При этом, расчётный модуль упругости в случае микроиндентирования меньше (395ГПа), что несомненно вызвано наличием неровностей в области контакта.

Сравнение результатов эксперимента и расчётов для случая микро- и наноиндентирования показывает, что для данного покрытия каждый из методов имеет недостатки, и использование

одного либо другого расчётных модулей упругости должно определяться геометрией исследуемого контакта.

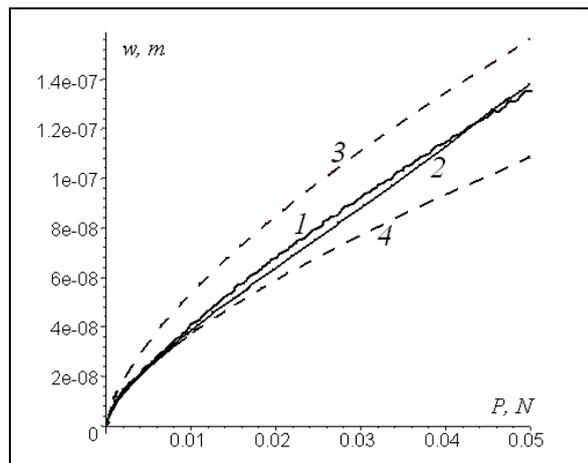


Рис.4. Зависимость внедрения от нагрузки для композиции Ni-P покрытие – стальная подложка (наноиндентирование); 1 – усреднённые результаты эксперимента, 2 – расчётная кривая, 3 и 4 – расчётные кривые для однородных материалов, Ni-P и стали соответственно.

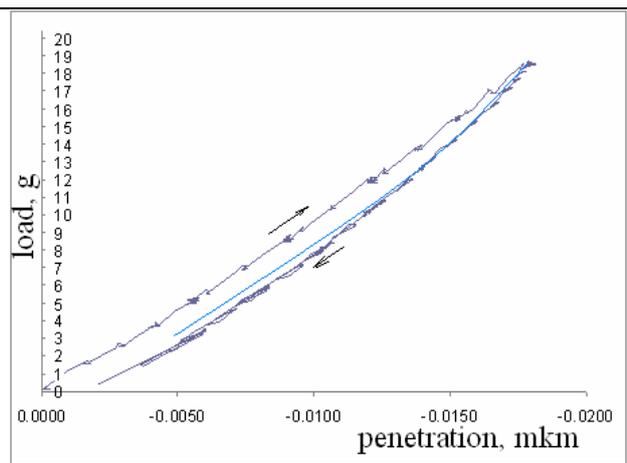
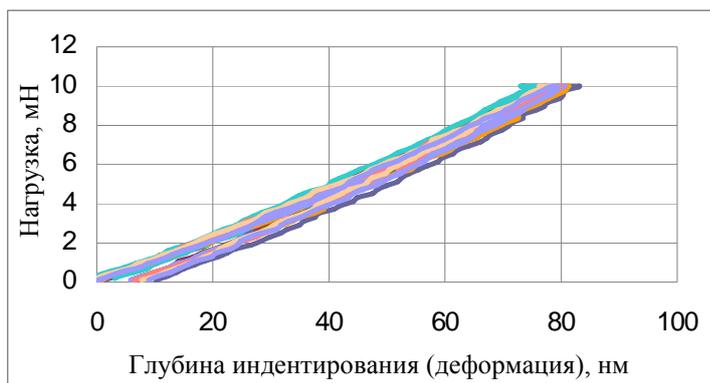
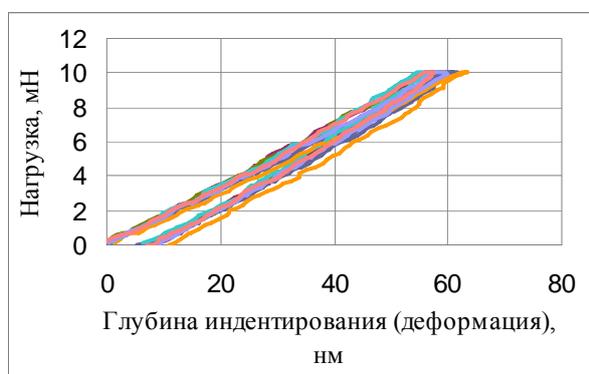


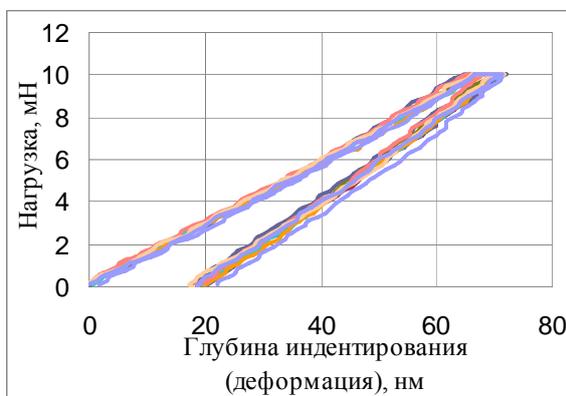
Рис.5. Зависимость внедрения от нагрузки для композиции Ni-P покрытие – стальная подложка (микроиндентирование); усреднённая экспериментальная (со стрелками) и расчётная кривые.



а



б



в

Рис.6. Результаты индентирования кварца без покрытия (а), кварца с покрытием из оксида циркония толщиной 300нм (б), кварца с покрытием из оксида алюминия толщиной 70нм (в)

6. Качество поверхности покрытия является важным, но не единственным условием успешного проведения эксперимента по упругому индентированию. Этот факт хорошо иллюстрируют результаты, полученные для покрытий, состоящих из оксидов металлов и полученных по технологии, разработанной для нанесения сверхтонких (от 60 нм) твёрдых покрытий [5]. Специально для эксперимента на комплексе NanoTest были подготовлены образцы покрытий на кварцевом стекле, шероховатость поверхности составила менее, чем 5нм. Также был подготовлен один образец без покрытия. Результаты индентирования представлены на рис. 6. На рис. 6а представлены результаты для кварца без покрытия. Расчётный модуль упругости, полученный с помощью программного обеспечения комплекса NanoTest, составил 100ГПа, что существенно больше табличного значения 70ГПа. Разница между кривыми нагрузки и разгрузки мала и сопоставима с общей погрешностью измерения, то есть индентирование является упругим и не разрушает поверхность кварца. Оксидные покрытия твёрже кварца, поэтому следовало ожидать, что и в случае кварца с покрытием кривые нагружения-разгрузки будут совпадать. В ряде случаев, например, для покрытия из оксида циркония (рис.6б), разница между кривыми не превысила погрешности измерения, модуль упругости был рассчитан с хорошей степенью точности и составил 220ГПа. В другом случае, когда эксперимент проводился с покрытием из оксида алюминия, были получены результаты, свидетельствующие о наличии податливого слоя, который после индентирования не восстановился (рис.6в). Поскольку это не может быть кварц и материал покрытия, следует предположить либо наличие загрязнений на поверхности, либо наличие дефектного слоя на границе раздела покрытия с подложкой. В этом случае полученное расчётное значение модуля упругости 280ГПа следует считать приблизительным.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 12-08-01171\_а).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Торская Е.В., Горячева И.Г., Чижик С.А., Сыроежкин С.В. Определение толщины упругого слоя на твёрдой подложке методом статической силовой спектроскопии //Методологические аспекты сканирующей зондовой микроскопии. VII Международный семинар. Сборник докладов. – Минск: ИТМО НАН Беларуси. 2006. С.241–245.
2. Aizikovich, S., Krenev, L., Sevostianov, I., Trubchik, I. and Evich, L. Evaluation of the elastic properties of a functionally-graded coating from the indentation measurements, *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.*, 91, 6, 2011, 493-515.
3. Горячева И.Г., Мышкин Н.К., Торская Е.В., Корнев Ю.В., Гуцев Д.М., Кудрицкий В.Г. Моделирование фрикционного взаимодействия композиционных покрытий триботехнического назначения. Трение и износ. 2012 (в печати).
4. E.V.Torskaya, I.G.Goryacheva, The effect of interface imperfection and external loading on the axisymmetric contact with a coated solid', *Wear* 254, 2003, 538-545.
5. Сахаров В.В., Басков П.Б., Берикашвили В.Ш., Ивкина О.В., Фролов Н.Н., Мосягина И.В., Шарипова М.А. Наноразмерное оксидное модифицирование поверхности неорганических материалов.// *Наноинженерия* №6, 2011. М.: Машиностроение, 2011. С.15-24.

### Сведения об авторе:

**Торская Елена Владимировна** – старший научный сотрудник лаборатории трибологии, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, +7 495 4343692

**E-mail:** [torskaya@mail.ru](mailto:torskaya@mail.ru)

# СТРУКТУРНО-ВРЕМЕННОЙ ПОДХОД К ИЗУЧЕНИЮ ОТКОЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ В НАНОСЕКУНДНОМ ДИАПАЗОНЕ ДЛИТЕЛЬНОСТЕЙ НАГРУЖЕНИЯ

Уткин А.А.

При помощи структурно-временного подхода изучается откольная прочность в широком диапазоне скоростей нагружения. Рассмотрены эффекты, обнаруженные при проведении экспериментов по отколу в наносекундном диапазоне длительностей нагружения. Показана возможность их описания при помощи структурно-временного подхода.

**1. Введение.** Откольное разрушение при воздействии кратковременных импульсов высокой интенсивности является важным объектом изучения закономерностей динамического разрушения материалов. Как правило, динамическую прочность связывают со скоростью нагружения, т.е. определяют скоростную зависимость прочности. При этом увеличение скорости ведёт к увеличению прочности. Такая картина наблюдалась в диапазоне микросекундных длительностях нагружения. В последнее время стало возможным увеличение интенсивности нагрузки до такой степени, что разрушение происходит в наносекундном диапазоне длительностей нагружения. При проведении испытаний по откольному разрушению алюминиевого сплава в наносекундном диапазоне длительностей нагружения обнаружено несколько эффектов, не укладывающихся в существующие представления [1,2]. Во-первых, был обнаружен эффект стабилизации прочности. Прочность материала растёт с увеличением скорости нагружения, а по достижении скорости нагружения  $10^7 \text{ с}^{-1}$  перестаёт увеличиваться. Авторы экспериментов объясняют это явление достижением материалом предельной динамической прочности (рис.1). (рисунки 1, 2 и 3 взяты из работ [1,2].) Далее, авторы этих работ провели изучение длительности действия нагрузки в сечении откола в зависимости от скорости деформирования. Было обнаружено, что упомянутая зависимость носит немонотонный характер (рис. 2). Авторы экспериментов связывают увеличение длительности нагрузки при высоких скоростях нагружения с упрочнением материала под действием интенсивной сжимающей нагрузки при прохождении сжимающей волны. Также было обнаружено, что в сечении откола к моменту разрушения напряжение может расти или разрушению может предшествовать временной интервал, на котором напряжение не меняется или даже слабо падает (рис.3). В этом случае авторы экспериментов вводят в рассмотрение два механизма разрушения – динамический и квазистационарный (квазидинамический). Разрушение происходит в результате конкуренции двух механизмов. Во втором случае разрушение уже нельзя связать со скоростью. Квазистационарный механизм разрушения требует изучения временной зависимости прочности. Таким образом, каждый из трёх новых обнаруженных эффектов потребовал отдельного объяснения.

**2. Анализ разрушения при отколе.** Как правило, динамическую прочность связывают со скоростью приложения нагрузки, не принимая во внимание длительность действия нагрузки. Тогда как критические характеристики разрушения в равной мере определяют продолжительность воздействия, форма и амплитуда приложенного импульса в том числе и скорость приложения нагрузки. Применение критерия инкубационного времени для анализа разрушения позволяет получить наблюдаемые при экспериментах эффекты в рамках единого подхода. Критерий инкубационного времени имеет вид: [3,4]

$$\int_{t-\tau}^t \sigma(s, x) ds < \sigma_c \tau, \quad (1)$$

где  $\sigma(s, x)$  – напряжение в точке с координатой  $x$  в момент времени  $s$ ,  $\tau$  – структурное (инкубационное) время – независимая характеристика материала размерности времени,  $\sigma_c$  – прочность материала в статике.

Координата сечения откола и момент разрушения определялись при помощи критерия инкубационного времени. При этом предполагалось, что моментом разрушения является то наименьшее время, при котором нарушается условие критерия (1). Соответственно пространственная координата, в которой нарушилось это условие, будет местом разрушения.

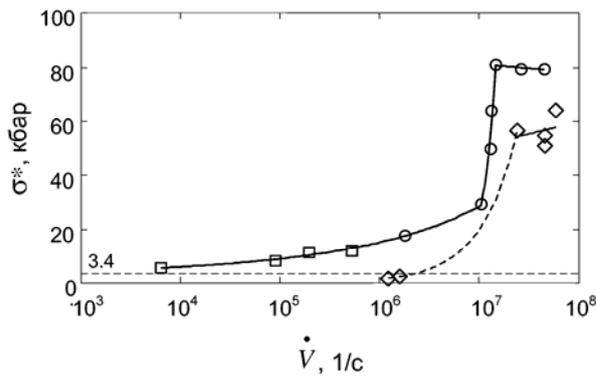


Рис.1.Скоростная зависимость прочности

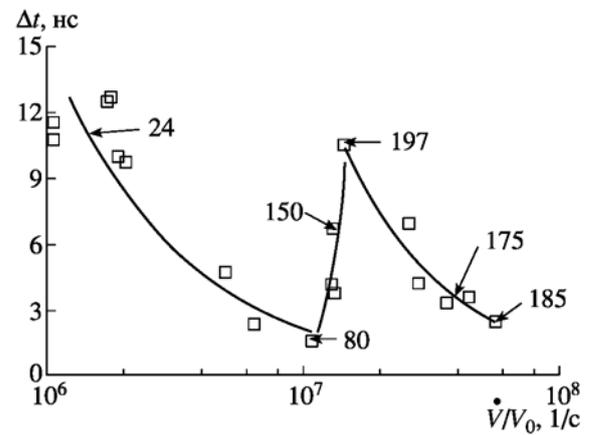


Рис.2. Длительность действия нагрузки в сечении откола в зависимости от скорости деформирования. Числа –максимальная амплитуда давления в плоскости откола

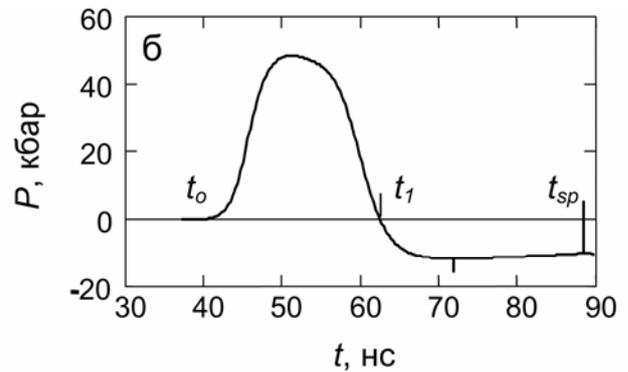
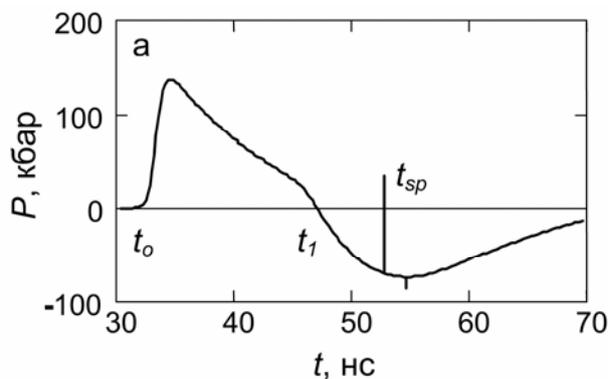


Рис.3. Напряжение (давление) в сечении откола: а – разрушение на участке роста напряжения, б – разрушение на участке слабо убывающего напряжения

Было изучено разрушение импульсами треугольной формы. Анализ разрушения при помощи критерия инкубационного времени показывает, что разрушение возможно не в момент достижения нагрузкой максимального значения, а некоторое время спустя, когда значение напряжений в сечении откола начинает уменьшаться. В этом случае связать прочность со скоростью нагружения уже не удаётся. В данном случае можно говорить только о временной зависимости прочности. Такая ситуация в работах [1,2] называется квазистационарным механизмом разрушения. На рис. 4 изображена зависимость напряжения от времени в сечении откола. В обоих импульсах одинаковы скорость приложения нагрузки и продолжительность участка роста нагрузки. Различаются продолжительности участка спада нагрузки. Время на рисунке нормировано так, что разрушение происходит в точке, абсцисса которой равна 1. Напряжение нормировано по отношению к амплитуде минимально необходимого для разрушения импульса. Таким образом, какой будет механизм разрушения – квазистационарный или динамический – определяется в первую очередь не скоростью приложения нагрузки и не конкуренцией двух механизмов, а амплитудой приложенного импульса и скоростью спада нагрузки.

На рис. 5 по оси абсцисс откладывается скорость нагружения, а по оси ординат– безразмерное время разрушения – отношение времени, в течении которого напряжение в сечении откола положительно к продолжительности участка нагружения. Если эта величина не превосходит единицы, то разрушение происходит на участке роста нагрузки. В противном случае, чем больше безразмерное время отличается от единицы, тем больше «степень квазистационарности». Здесь сплошной линией изображена зависимость времени разрушения

от скорости нагружения импульсом, амплитуда которого на участке роста нагрузки превышает минимальную в 1.2 раза, а участок роста нагрузки в 5 раз продолжительнее участка её спада. Точками – такой же импульс на участке роста, но участок спада нагрузки в 5 раз продолжительнее участка роста. И наконец, пунктиром – разрушение нагрузкой, у которой постоянны скорость спада нагрузки ( $36 \cdot 10^6 \text{ сек}^{-1}$ ) и величина приложенного импульса (72 Па·сек). В этом случае при увеличении скорости нагружения продолжительность участка роста нагрузки уменьшается, а участка спада увеличивается.

Расчёты показывают, что прочность при заданной скорости нагружения может изменяться в довольно больших пределах при изменении в приложенном импульсе максимальной амплитуды и продолжительности участка спада нагрузки. Если предположить, что скорость спада нагрузки близка к постоянной, то если скорости нагружения относительно невелики (менее  $10^7 \text{ с}^{-1}$ ), момент разрушения наступает на участке увеличения нагрузки. При более высоких скоростях нагружения разрушение происходит после достижения нагрузкой максимального значения, на спаде значений напряжений. При этом, участок спада нагрузки невелик. С этим явлением и связан эффект «стабилизации» прочности. На рис. 6 представлены результаты расчёта скоростной зависимости прочности в предположении, что постоянны величина приложенного импульса и скорость спада нагрузки. Кружками обозначены экспериментальные точки из [1,2].

Если форма приложенной нагрузки такова, что участок роста нагрузки превышает участок спада нагрузки, то возможно возникновение ситуации, при которой условие разрушения возникнет в двух сечениях образца одновременно. При этом, длительности действия нагрузки в сечениях откола будут отличаться. Если при увеличении скорости нагружения возникнет такая ситуация, то возможен скачок в длительности действия нагрузки. На рис. 7 представлена зависимость величины приложенного импульса в зависимости от координаты. Расчёт показывает, что условие разрушения во второй (более далекой) координате возникает, когда продолжительность достаточно мала, а значит скорость велика (продолжительность должна быть близка к величине инкубационного времени). При дальнейшем увеличении скорости точки максимума на рис. 6 будут сближаться. С этим явлением может быть связано появление скачка, представленного на рис. 2.

Наконец, на рис. 8 представлены результаты расчёта временной зависимости прочности. Расчет проводился для импульса, нагружение которым приводит к «квазистационарному» механизму разрушения (кривая из точек на рис. 5). Кружками обозначены экспериментальные точки из [1,2].

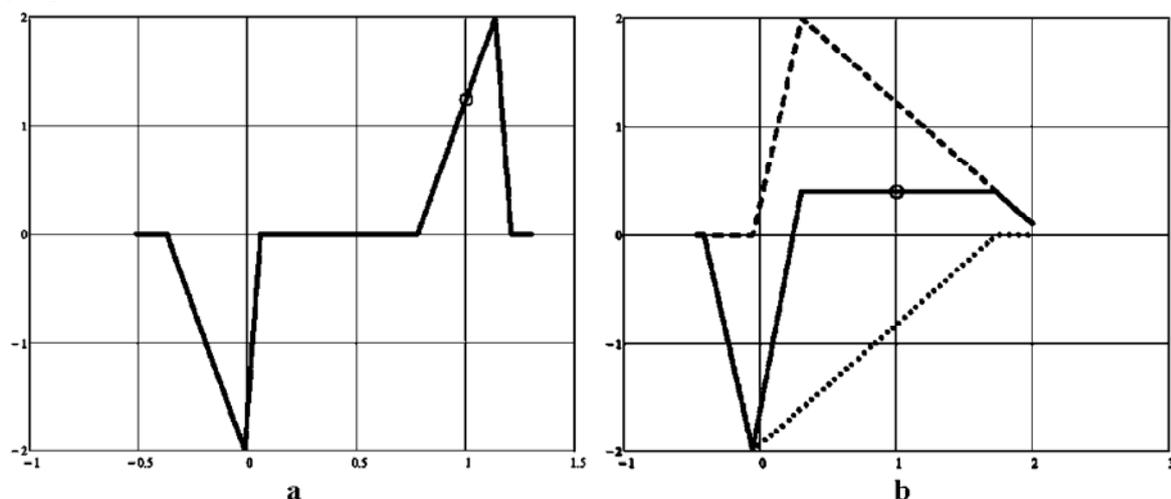


Рис.4. Зависимость напряжения от времени в сечении откола при разных продолжительностях участка спада нагрузки. Точки – падающая волна, пунктир – отражённая, сплошная линия – суммарная волна.

### 3. Выводы.

- Применение для анализа разрушения критерия инкубационного времени позволяет получить наблюдаемые при экспериментах эффекты, не связывая их с достижением материалом предельного значения прочности и не рассматривая два механизма разрушения;
- критерий инкубационного времени хорошо прогнозирует экспериментальные данные по отколу в наносекундном диапазоне длительностей воздействия;
- «динамическая» прочность материала, если принять в качестве таковой растягивающее напряжение в момент разрушения, не является константой, а зависит от длительности импульса; таким образом, материал может выдерживать любые напряжения, если они действуют в течение достаточно короткого времени.

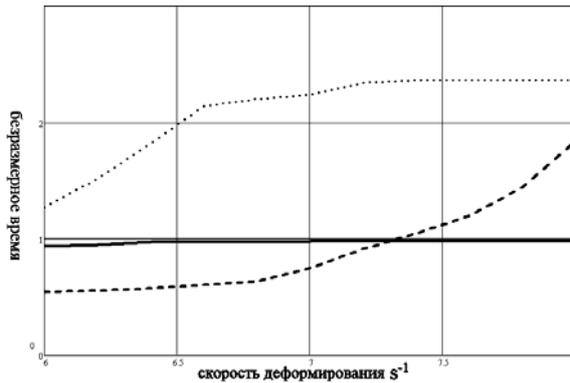


Рис.5. Квасистационарный и динамический механизмы разрушения в зависимости от скорости приложения нагрузки.

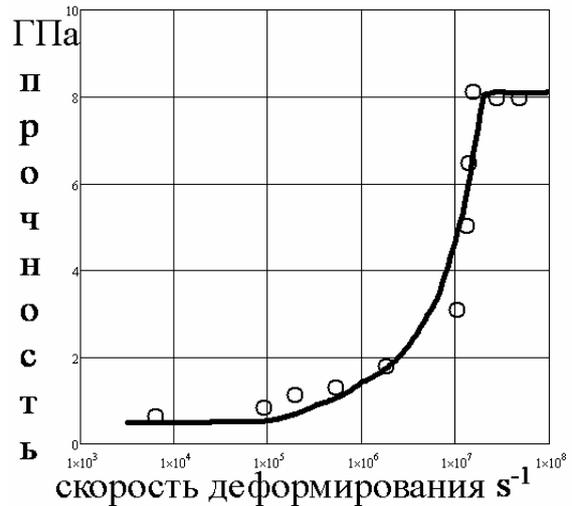


Рис.6. Скоростная зависимость прочности

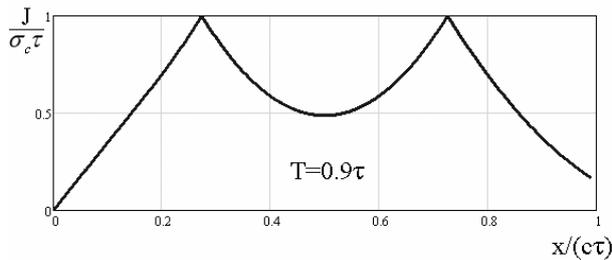


Рис.7. Зависимость величины приложенного импульса от координаты.

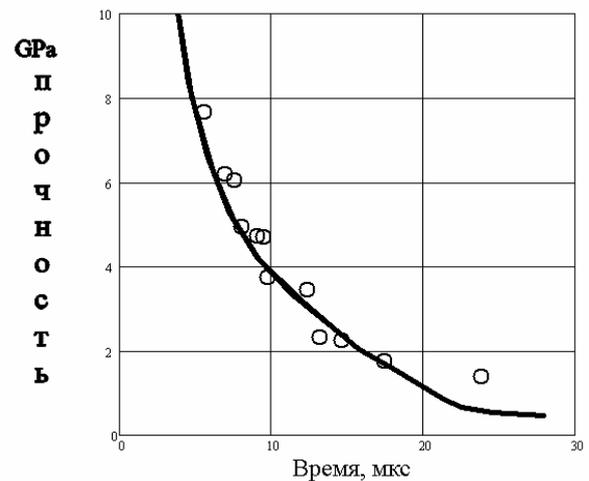


Рис.8. Временная зависимость прочности.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 10-01-00810-а, 11-01-00491-а и федеральных целевых программ.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Батани Д., Вовченко В.И., Канель Г.И., Кильпио А.В., Красюк И.К., Ломоносов И.В., Пашинин П.П., Семенов А.Ю., Фортвов В.Е., Шашков Е.В. // Докл. РАН. 2003. Т.389. №3. С.328–331.
2. Красюк И.К., Пашинин П.П., Семенов А.Ю., Фортвов В.Е.// Квантовая электроника. 2003. Т.3. №7. С.593-608.
3. Морозов Н.Ф., Петров Ю.В., Уткин А.А. Об анализе откола с позиций структурной механики разрушения //ДАН СССР. 1990. Т.313. № 2. С.276-279.
4. Morozov N., Petrov Y. Dynamics of Fracture. Springer-Verlag: Berlin-Heidelberg-New York, 2000.

#### Сведения об авторе:

**Уткин Александр Анатольевич** – ведущий научный сотрудник Института проблем машиноведения РАН; +7-812-3214778

**E-mail:** [a.utkin51@gmail.com](mailto:a.utkin51@gmail.com)

# АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ТРЁХМЕРНОЙ ВНУТРЕННЕЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ СЛОИСТОЙ ПЛАСТИНКИ

**Хачатрян А.М., Товмасын А.Б.**

Рассматривается вопрос определения напряжённо-деформированного состояния (НДС) слоистой анизотропной пластинки, слои которой обладают анизотропией общего вида (21 упругая постоянная). Исследование проводится методом асимптотического интегрирования уравнений трёхмерной задачи теории упругости без принятия каких-либо гипотез. Полное напряжённое состояние пластинки образуется из основного (внутреннего) и краевого напряжённых состояний [1].

Для решения задач слоистых балок, пластин и оболочек обычно используется та или иная гипотеза. В первых исследованиях принималась гипотеза недеформируемых нормалей для всего пакета в целом [2,3]. В последствии были предложены многочисленные модели, обзор которых можно найти, например, в [3-4]. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек построена в [5]. Вопрос определения НДС слоистой анизотропной пластинки, когда на её верхней и нижней лицевых плоскостях заданы значения компонентов тензора напряжений, рассмотрена в [6]. Решения задач определения НДС анизотропных слоистых пластин, на одной лицевой стороне которой заданы компоненты вектора перемещения, а на другой - условия первой, второй или смешанной задач теории упругости, приведены в [7]. Асимптотическое решение смешанной трёхмерной внутренней задачи для анизотропной термоупругой пластинки приведено в [8]. В работе асимптотическим методом построено решение, соответствующее внутренней задаче слоистой пластинки, когда на верхней лицевой плоскости пластинки заданы значения компонентов тензора напряжений, а на нижней - смешанные условия теории упругости.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим пластинку, состоящую из некоторого числа анизотропных слоёв. Будем считать, что слои имеют различные толщины  $h_k$ , коэффициенты упругости  $a_{ij}^{(k)}$ . Общая толщина пластинки  $-2h$ . Плоскость отсчёта выберем таким образом, чтобы над этой плоскостью располагались  $n$  слоёв, а под ней  $m$  слоёв;  $n, m$  – произвольные натуральные числа.

Будем пользоваться декартовой системой координат  $x, y, z$ , располагая оси  $Ox, Oy$  в плоскости отсчёта. Введём безразмерные переменные  $\xi = x/a, \eta = y/a, \zeta = z/h$  и безразмерные перемещения  $U^{(k)} = u^{(k)}/a, V^{(k)} = v^{(k)}/a, W^{(k)} = w^{(k)}/a$ , где  $a$  – характерный тангенциальный размер пластинки. Слои пластинки будут задаваться неравенствами  $\zeta_{k-1} \leq \zeta \leq \zeta_k$

$(k = 1, 2, \dots, n), \zeta_k \leq \zeta \leq \zeta_{k+1} \quad (k = -1, -2, \dots, -m)$ , где

$$\zeta_k = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^k h_i \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad \zeta_{-k} = -\frac{1}{h} \sum_{i=1}^k h_{-i} \quad (k = 1, 2, \dots, m) \quad (1.1)$$

Считается, что на верхней ( $\zeta = \zeta_n$ ) лицевой плоскости пластинки заданы значения компонентов тензора напряжений, а на нижней ( $\zeta = \zeta_{-m}$ ) – смешанные условия теории упругости. Соответствующие условия запишутся в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} &= \sigma_{xz}^+(x, y), \sigma_{yz} = \sigma_{yz}^+(x, y), \sigma_z = \sigma_z^+(x, y) && \text{при } \zeta = \zeta_n \\ w &= \varepsilon^{-1} w^-(x, y), \sigma_{xz} = \sigma_{xz}^-(x, y), \sigma_{yz} = \sigma_{yz}^-(x, y) && \text{при } \zeta = \zeta_{-m} \end{aligned} \quad (1.2)$$

На плоскости контакта слоёв необходимо удовлетворить следующим условиям полного контакта:

при  $\zeta = \zeta_k \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$

$$\sigma_{xz}^{(k)} = \sigma_{xz}^{(k+1)}, \sigma_{yz}^{(k)} = \sigma_{yz}^{(k+1)}, \sigma_z^{(k)} = \sigma_z^{(k+1)}, U^{(k)} = U^{(k+1)}, V^{(k)} = V^{(k+1)}, W^{(k)} = W^{(k+1)}$$

при  $\zeta = \zeta_{-k} \quad (k = 1, 2, \dots, m-1)$  (1.3)

$$\sigma_{xz}^{(-k)} = \sigma_{xz}^{(-k-1)}, \sigma_{yz}^{(-k)} = \sigma_{yz}^{(-k-1)}, \sigma_z^{(-k)} = \sigma_z^{(-k-1)}, U^{(-k)} = U^{(-k-1)}, V^{(-k)} = V^{(-k-1)}, W^{(-k)} = W^{(-k-1)}$$

при  $\zeta = \zeta_0 = 0$

$$\sigma_{xz}^{(-1)} = \sigma_{xz}^{(1)}, \sigma_{yz}^{(-1)} = \sigma_{yz}^{(1)}, \sigma_z^{(-1)} = \sigma_z^{(1)}, U^{(-1)} = U^{(1)}, V^{(-1)} = V^{(1)}, W^{(-1)} = W^{(1)}$$

Условия на боковой поверхности будем считать пока произвольными.

Требуется найти решение уравнений пространственной задачи теории упругости анизотропного тела [2-3] при граничных условиях (1.2), условиях полного контакта (1.3) и условиях краевых задач теории упругости на боковой поверхности (они пока не конкретизируются).

В системе безразмерных координат  $\xi, \eta, \zeta$  система уравнений теории упругости анизотропного тела превратится в новую систему, содержащий малый параметр  $\varepsilon = h/a$ . Эта система сингулярно-возмущённая и её решение складывается из решений внутренней задачи (основное решение) и пограничного слоя [1,5].

Решение внутренней задачи ищется в виде [1,5-7]

$$Q^{(k)} = \varepsilon^{q_k} \sum_{s=0}^S \varepsilon^s Q^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta) \quad (1.4)$$

где  $Q^{(k)}$  – любое из компонентов тензора напряжений или безразмерных перемещений  $k$ -го слоя. Целое число  $q$  для каждой величины выбирается так, чтобы получить непротиворечивую систему относительно  $Q^{(k,s)}$ . В нашем случае эта цель достигается при

$$q_k = -1 \text{ для } \sigma_x^{(k)}, \sigma_y^{(k)}, \sigma_z^{(k)}, \sigma_{xy}^{(k)}, U^{(k)}, V^{(k)}, W^{(k)}, \quad q_k = 0 \text{ для } \sigma_{xz}^{(k)}, \sigma_{yz}^{(k)} \quad (1.5)$$

Подставив (1.4) в преобразованные введением безразмерных координат и безразмерных компонент вектора перемещения уравнения теории упругости, с учётом (1.5), получим систему для определения  $Q^{(k,s)}$ . Интегрируя полученную систему по  $\zeta$ , для напряжений и перемещений получим следующие формулы:

$$\begin{aligned} \sigma_z^{(k,s)} &= \sigma_{z0}^{(k,s)} + \sigma_z^{*(k,s)}, \quad U^{(k,s)} = u^{(k,s)} + u^{*(k,s)}, \quad (U, V, W), \\ \sigma_x^{(k,s)} &= B_{11}^{(k)} \frac{\partial u^{(k,s)}}{\partial \xi} + B_{12}^{(k)} \frac{\partial v^{(k,s)}}{\partial \eta} + B_{16}^{(k)} \left( \frac{\partial u^{(k,s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{(k,s)}}{\partial \xi} \right) + a_3^{(k)} \sigma_{z0}^{(k,s)} + \sigma_x^{*(k,s)}, \quad (x, y; 1, 2; a, b) \\ \sigma_{xy}^{(k,s)} &= B_{16}^{(k)} \frac{\partial u^{(k,s)}}{\partial \xi} + B_{26}^{(k)} \frac{\partial v^{(k,s)}}{\partial \eta} + B_{66}^{(k)} \left( \frac{\partial u^{(k,s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{(k,s)}}{\partial \xi} \right) + c_3^{(k)} \sigma_{z0}^{(k,s)} + \sigma_{xy}^{*(k,s)}, \quad (1.6) \\ \sigma_{xz}^{(k,s)} &= -[L_{11}(B_{ij}^{(k)})u^{(k,s)} + L_{12}(B_{ij}^{(k)})v^{(k,s)}] \zeta - \left( a_3^{(k)} \frac{\partial \sigma_{z0}^{(k,s)}}{\partial \xi} + c_3^{(k)} \frac{\partial \sigma_{z0}^{(k,s)}}{\partial \eta} \right) + \sigma_{xz0}^{(k,s)} + \sigma_{xz}^{*(k,s)}, \\ & \hspace{15em} (x, y; 1, 2; a, b) \end{aligned}$$

где дифференциальные операторы  $L_{ij}(B_{ij}^{(k)})$  определяются по формулам

$$L_{11}(B_{ij}^{(k)}) = B_{11}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2B_{16}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + B_{66}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}, \quad (1, 2; \xi, \eta)$$

$$L_{12}(B_{ij}^{(k)}) = B_{16}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + (B_{12}^{(k)} + B_{66}^{(k)}) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + B_{26}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2},$$

а коэффициенты  $B_{ij}^{(k)}$ ,  $a_i^{(k)}$ ,  $b_i^{(k)}$ ,  $c_i^{(k)}$  – по известным формулам [3,5-7]

$$\begin{aligned} B_{11}^{(k)} &= (a_{22}^{(k)} a_{66}^{(k)} - (a_{26}^{(k)})^2) / \Omega_k, \quad B_{22}^{(k)} = (a_{11}^{(k)} a_{66}^{(k)} - (a_{16}^{(k)})^2) / \Omega_k, \quad B_{66}^{(k)} = (a_{11}^{(k)} a_{22}^{(k)} - (a_{12}^{(k)})^2) / \Omega_k, \\ B_{16}^{(k)} &= (a_{12}^{(k)} a_{26}^{(k)} - a_{16}^{(k)} a_{22}^{(k)}) / \Omega_k, \quad B_{26}^{(k)} = (a_{12}^{(k)} a_{16}^{(k)} - a_{11}^{(k)} a_{26}^{(k)}) / \Omega_k, \quad B_{12}^{(k)} = (a_{16}^{(k)} a_{26}^{(k)} - a_{12}^{(k)} a_{66}^{(k)}) / \Omega_k, \\ \Omega_k &= (a_{11}^{(k)} a_{22}^{(k)} - (a_{12}^{(k)})^2) a_{66}^{(k)} + 2a_{12}^{(k)} a_{16}^{(k)} a_{26}^{(k)} - a_{11}^{(k)} (a_{26}^{(k)})^2 - a_{22}^{(k)} (a_{16}^{(k)})^2, \\ a_i^{(k)} &= -(a_{1i}^{(k)} B_{11}^{(k)} + a_{2i}^{(k)} B_{12}^{(k)} + a_{i6}^{(k)} B_{16}^{(k)}), \quad b_i^{(k)} = -(a_{1i}^{(k)} B_{12}^{(k)} + a_{2i}^{(k)} B_{22}^{(k)} + a_{i6}^{(k)} B_{26}^{(k)}), \\ c_i^{(k)} &= -(a_{1i}^{(k)} B_{61}^{(k)} + a_{2i}^{(k)} B_{22}^{(k)} + a_{i6}^{(k)} B_{66}^{(k)}), \quad (i = 3, 4, 5) \end{aligned} \quad (1.7)$$

$\sigma_{xz}^{(k,s)}$ ,  $\sigma_{yz}^{(k,s)}$ ,  $\sigma_{z0}^{(k,s)}$ ,  $u^{(k,s)}$ ,  $v^{(k,s)}$ ,  $w^{(k,s)}$  – неизвестные функции интегрирования и будут определены ниже, с помощью условий (1.2), (1.3).

Величины со звездочками, как обычно, известны для каждого приближения  $s$ , поскольку выражаются через предыдущие приближения. Эти величины определяются по формулам (2.1) работы [8], в них необходимо лишь верхний индекс ( $s$ ) заменить на  $(k, s)$ . Там предполагается, что  $Q^{(k,s-i)} \equiv 0$ , если  $s < i$ .

Удовлетворив граничным условиям (1.2), а также условиям полного контакта (1.3) на плоскостях  $\zeta = \zeta_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n-1, -1, -2, \dots, -m+1$ ), все величины можно выразить через компоненты перемещения  $u^{(n,s)}$ ,  $v^{(n,s)}$ ,  $w^{(-m,s)}$  и напряжения  $\tau_0^{(n,s)}$ . Для определения перемещений  $u^{(n,s)}$ ,  $v^{(n,s)}$  получается следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} L_{11}(C_{ij}) u^{(n,s)} + L_{12}(C_{ij}) v^{(n,s)} &= p_1^{(s)} \\ L_{12}(C_{ij}) u^{(n,s)} + L_{22}(C_{ij}) v^{(n,s)} &= p_2^{(s)} \end{aligned} \quad (1.8)$$

В (1.8)  $p_1^{(s)}$ ,  $p_2^{(s)}$  играют роль обобщённых нагрузок, для вычисления которых получаются формулы

$$\begin{aligned} p_1^{(s)} &= -(\sigma_{xz}^{+(s)}(\xi, \eta) - \sigma_{xz}^{-(s)}(\xi, \eta)) + \sum_{k=1}^n (\sigma_{xz}^{*(k,s)}(\xi, \eta, \zeta_k) - \sigma_{xz}^{*(k,s)}(\xi, \eta, \zeta_{k-1})) - \\ &- \sum_{k=1}^m (\sigma_{xz}^{*(-k,s)}(\xi, \eta, \zeta_{-k}) - \sigma_{xz}^{*(-k,s)}(\xi, \eta, \zeta_{-k+1})) - \\ &- \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ (\zeta_k - \zeta_{k-1}) \left[ L_{11}(B_{ij}^{(k)}) \left( \sum_{j=k}^{n-1} U^{*(j,s)}(\zeta_j) \right) + L_{12}(B_{ij}^{(k)}) \left( \sum_{j=k}^{n-1} V^{*(j,s)}(\zeta_j) \right) \right] \right\} + \\ &+ \sum_{k=1}^m \left\{ (\zeta_{-k} - \zeta_{-k+1}) \left[ L_{11}(B_{ij}^{(-k)}) \left( \sum_{j=1}^{n-1} U^{*(j,s)}(\zeta_j) - \sum_{j=1}^{k-1} U^{*(-j,s)}(\zeta_{-j}) \right) + \right. \right. \\ &\left. \left. + L_{12}(B_{ij}^{(-k)}) \left( \sum_{j=1}^{n-1} V^{*(j,s)}(\zeta_j) - \sum_{j=1}^{k-1} V^{*(-j,s)}(\zeta_{-j}) \right) \right] \right\}, \quad (1, 2; x, y; U, V) \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$U^{*(\pm k, s)}(\zeta_{\pm k}) = u^{*(\pm(k+1), s)}(\zeta_{\pm k}) - u^{*(\pm k, s)}(\zeta_{\pm k}), \quad (u, v, w)$$

Дифференциальные операторы  $L_{ij}(C_{ij})$  имеют вид [1,5]

$$L_{11}(C_{ij}) = C_{11} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2C_{16} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + C_{66} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}, \quad (1,2; \xi, \eta)$$

$$L_{12}(C_{ij}) = C_{16} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + C_{26} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^n B_{ij}^{(k)}(\zeta_k - \zeta_{k-1}) - \sum_{k=1}^m B_{ij}^{(-k)}(\zeta_{-k} - \zeta_{-k+1})$$

После удовлетворения граничным условиям (1.2) определим также неизвестные функции  $\tau_{xz0}^{(n,s)}$ ,  $\tau_{z0}^{(n,s)}$  и  $w^{(-m,s)}$ :

$$\begin{aligned} \tau_{z0}^{(n,s)} &= \sigma_{xz}^{+(s)}(\xi, \eta) - \sigma_z^{*(n,s)}(\xi, \eta, \zeta_n), \quad w^{(-m,s)} = w^{-(s)}(\xi, \eta) - w^{*(-m,s)}(\xi, \eta, \zeta_{-m}) \\ \tau_{xz0}^{(n,s)} &= \sigma_{xz}^{+(s)}(\xi, \eta) - \sigma_{xz}^{*(n,s)}(\xi, \eta, \zeta_n) + [L_{11}(B_{ij}^{(n)})\mu^{(n,s)} + L_{12}(B_{ij}^{(n)})\nu^{(n,s)}] \zeta + \\ &+ \left( a_3^{(n)} \frac{\partial \sigma_{z0}^{(n,s)}}{\partial \xi} + c_3^{(n)} \frac{\partial \sigma_{z0}^{(n,s)}}{\partial \eta} \right), \quad (x, y; \xi, \eta; u, v; 1,2; a, b) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Перемещения остальных слоёв выражаются через  $u^{(n,s)}$ ,  $v^{(n,s)}$  и  $w^{(-m,s)}$  по формулам

$$u^{(k,s)} = u^{(n,s)} + \sum_{j=k}^{n-1} U^{*(j,s)}(\zeta_j), \quad u^{(-k,s)} = u^{(n,s)} + \sum_{j=1}^{n-1} U^{*(j,s)}(\zeta_j) - \sum_{j=1}^{k-1} U^{*(-j,s)}(\zeta_{-j}), \quad (u, v) \quad (1.11)$$

$$w^{(-k,s)} = w^{(-m,s)} + \sum_{j=k}^{m-1} W^{*(-j,s)}(\zeta_{-j}), \quad w^{(k,s)} = w^{(-m,s)} + \sum_{j=1}^{k-1} W^{*(j,s)}(\zeta_j) - \sum_{j=1}^{m-1} W^{*(-j,s)}(\zeta_{-j})$$

Из условий (1.3) полного контакта между слоями вытекают следующие рекуррентные формулы для определения  $\tau_{xz0}^{(k,s)}$ ,  $\tau_{yz0}^{(k,s)}$ ,  $\tau_{z0}^{(k,s)}$ :

$$\begin{aligned} \tau_{xz0}^{(k,s)} &= \tau_{xz0}^{(k+1,s)} + \sigma_{xz}^{*(k+1,s)}(\zeta_k) - \sigma_{xz}^{*(k,s)}(\zeta_k) - \\ &- \zeta_k [L_{11}(B_{ij}^{(k+1)})\mu^{(k+1,s)} + L_{12}(B_{ij}^{(k+1)})\nu^{(k+1,s)}] - [L_{11}(B_{ij}^{(k)})\mu^{(k,s)} + L_{12}(B_{ij}^{(k)})\nu^{(k,s)}] \\ \tau_{z0}^{(k,s)} &= \tau_{z0}^{(k+1,s)} + \sigma_z^{*(k+1,s)}(\zeta_k) - \sigma_z^{*(k,s)}(\zeta_k) \end{aligned} \quad (1.12)$$

В формулах (1.8)-(1.12) необходимо учитывать, что

$$\begin{aligned} \sigma_z^{+(n,0)} &= \sigma_z^+, \quad \sigma_{xz}^{\pm(0)} = \sigma_{xz}^+, \quad \sigma_{yz}^{\pm(0)} = \sigma_{yz}^{\pm}, \quad w^{-(0)} = w^- \\ \sigma_z^{\pm(s)} &= \sigma_{xz}^{\pm(s)} = \sigma_{yz}^{\pm(s)} = 0, \quad w^{-(s)} = 0 \quad \text{при } s > 0 \end{aligned} \quad (1.13)$$

После решения системы (1.8) по формулам (1.6)-(1.13) определяются все напряжения и перемещения.

Систему уравнений (1.8) можно свести к решению одного уравнения четвёртого порядка. Для этого применим к обеим частям первого уравнения оператор  $L_{22}$ , а ко второму –  $(-L_{12})$  и сложим, в результате получим уравнение

$$(L_{11}L_{22} - L_{12}^2)\mu^{(n,s)} = L_{22}P_1^{(s)} - L_{12}P_2^{(s)} \quad (1.14)$$

В заключении отметим, что мы здесь рассмотрели лишь внутреннюю задачу. Вопрос о пограничном слое и его взаимодействии с решением внутренней задачи можно осуществить указанным в [1,5] способом.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А.Л. Построение приближённой теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости //ПММ. 1962. Т.26. Вып.4. С. 668-686.
2. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. М.: Гостехиздат, 1957. 463с.
3. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1967. 268с.
4. Григолюк Э.И., Коган Ф.А. Современное состояние теории многослойных оболочек. //ПМ.1972. Т.8. Вып.6. С.3-17.
5. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 415с.
6. Агаловян Л.А., Багдасарян Ю.М., Хачатрян А.М. К определению напряжённо-деформированного состояния слоистых пластин с анизотропией общего вида// Изв. НАН РА. Механика. 1996. Т.49. №3. С.10-22.
7. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: Изд-во “Титутюн” НАН РА, 2005. 468с.
8. Агаловян Л.А., Товмасян А.Б. Асимптотическое решение смешанной трёхмерной внутренней задачи для анизотропной термоупругой пластинки/ /Изв. АН Армении. Механика. 1993. Т.46. №3-4. С.3-11.

#### Сведения об авторах:

**Хачатрян Александр Мовсесович** – Доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математики АрГУ. НКР, г. Степанакерт, Мхитара Гоша 5. Тел. (+37497)201949. E-mail: [alexkhach49@yandex.ru](mailto:alexkhach49@yandex.ru) .

**Товмасян Артур Бабкенович** – Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры инженерии АрГУ. НКР, г. Степанакерт, Мхитара Гоша 5. Тел. (+37497)203242.

**ОТРАЖЕНИЕ УПРУГИХ ВОЛН ОТ КРОМКИ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО  
НАПРЯЖЁННОЙ ПЛАСТИНКИ**  
Хачатрян Л.С.

Полубесконечная пластинка предполагается равномерно растянутой параллельно кромке. Рассматривается падение и отражение изгибных волн на закреплённую кромку пластин. Устанавливается возможность отражения слабо неоднородной волны.

1. Задачам отражения упругих волн от плоской границы среды посвящены многочисленные исследования [1]. Сравнительно мало работ связаны с вопросами отражения изгибных волн от плоской кромки тонкой пластинки [2]. В настоящей работе приводятся решения задачи отражения изгибных волн от кромки пластинки при различных граничных условиях. Для частного случая свободной кромки, как предельный случай отсутствия отраженной волны, получается решение задачи локализованных изгибных колебаний [3,4]. Задача была изучена и представлена при различных граничных условиях в [5,6] статьях.

Пусть упругая пластинка занимает область

$$-\infty < x < \infty, \quad 0 \leq y < \infty, \quad -h \leq z \leq h$$

Уравнение изгибных колебаний изотропной пластинки растянутой вдоль **от**  $x$  по теории Кирхгофа имеет вид [7].

$$D\Delta^2 W - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (1.1)$$

где  $w$  – функция прогиба пластины,  $\rho$  – плотность материала,  $D$  – жёсткость на изгиб.

Если представить решение уравнения (1.1) в виде гармонических волн [2]

$$W = W_0 \exp i(\omega t - k_1 x + k_2 y), \quad (1.2)$$

то получается следующее характеристическое уравнение:

$$(k_1^2 + k_2^2)^2 + \frac{\rho}{D} k_1^2 - \frac{2\rho h \omega^2}{D} = 0 \quad (1.3)$$

Согласно (1.3)

$$k_2^2 = -k_1^2 \pm \sqrt{\Omega^2 - \frac{\rho}{D} k_1^2}, \quad (1.4)$$

где

$$\Omega^2 = 2\rho h \omega^2 D^{-1} \quad (1.5)$$

Очевидно, что для существования падающей волны необходимо условие

$$\Omega^2 > \frac{P}{D} k_1^2 \quad (1.6)$$

Из (1.3) можно определить волновое число  $k_2$  посредством  $k_1$  и  $\omega$  в виде четырёх корней.

$$\begin{aligned} k_{21} &= -k_{22} = \left( \sqrt{\Omega^2 - \frac{P}{D} k_1^2} - k_1^2 \right)^{1/2} \\ k_{23} &= -k_{24} = i \left( \sqrt{\Omega^2 - \frac{P}{D} k_1^2} - k_1^2 \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Из (1.2) и (1.7), с учётом (1.6), следует, что решение для падающей волны имеет вид:

$$W_n = A \exp i(\omega t - k_1 x - k_{21} y), k_1 \geq 0 \quad (1.8)$$

и для отражённой волны

$$W_{otr} = B \exp i(\omega t - k_1 x - k_{21} y) + C \exp i(\omega t - k_1 x + k_{23} y) \quad (1.9)$$

Слагаемое в (1.9) с амплитудой  $C$  является неоднородной волной, т.е. она затухает по глубине. Амплитуды отражённых волн  $B$  и  $C$  должны определяться удовлетворением граничными условиями при  $y = 0$ .

**2. Случай жёстко закреплённого края –**

$$W = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

Подстановка –

$$W = W_n + W_{otr} \quad (2.2)$$

Согласно (1.8), (1.9), граничные условия (2.1) приводятся к системе алгебраических уравнений относительно искомых постоянных  $B$  и  $C$ , откуда и получается

$$\begin{aligned} B &= - \frac{k_1^2 + i \sqrt{\Omega^2 - \frac{P}{D} k_1^2} - k_1^4}{\sqrt{\Omega^2 - \frac{P}{D} k_1^2}} A \\ C &= - \frac{\sqrt{\Omega^2 - \frac{P}{D} k_1^2} - k_1^2 - i(\Omega^2 - \frac{P}{D} k_1^2 - k_1^4)^{1/2}}{\sqrt{\Omega^2 - \frac{P}{D} k_1^2}} \end{aligned} \quad (2.3)$$

В случае отсутствия предварительного напряжения  $p = 0$  получается

$$\begin{aligned}
B &= -\Omega^{-1}(k_1^2 + i\sqrt{\Omega^2 - k_1^4})A \\
C &= -\Omega^{-1}(\Omega - k_1^2 - i\sqrt{\Omega^2 - k_1^4})A
\end{aligned}
\tag{2.4}$$

Из выражения (2.4) следует, что при условии  $\Omega = 2k_1^2$  фаза отражённой волны меняется на  $0.5\pi$ . В (2.4) частный случай  $k_1 = 0$  соответствует нормально падающей волне.

3. Если край пластинки шарнирно закреплён, то должны выполняться условия.

$$W = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = 0 \tag{3.1}$$

Требую, чтобы решение (2.2) удовлетворяло условию (3.1), получим

$$B = -A, C = 0 \tag{3.2}$$

т.е. при шарнирном закреплении неоднородная волна не существует. Решение для этого случая приводится в монографии [2].

4. Для варианта граничных условий скользящего контакта

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 0, \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0 \tag{4.1}$$

Решение имеет вид

$$B = A, C = 0 \tag{4.2}$$

Граничные условия свободного края имеют вид:  $M_y = 0, N_y = 0$  при  $y = 0$  или согласно [2].

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial y^2} = 0 \tag{4.3}$$

$$y = 0$$

Удовлетворение граничным условиям (4.3) приводит к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}
&(\sqrt{\eta^2 - \alpha^2} - 1 + \nu)A + (\sqrt{\eta^2 - \alpha^2} - 1 + \nu)B - (\sqrt{\eta^2 - \alpha^2} - 1 + \nu)C = 0 \\
&(\sqrt{\eta^2 - \alpha^2} - 1 + \nu)(\sqrt{\eta^2 - \alpha^2} - 1)^{1/2}A - (\sqrt{\eta^2 - \alpha^2} + 1 - \nu)(\sqrt{\eta^2 - \alpha^2} - 1)^{1/2}B - \\
&-i(\sqrt{\eta^2 - \alpha^2} - 1 - \nu)(\sqrt{\eta^2 - \alpha^2} + 1)^{1/2}C,
\end{aligned}
\tag{4.4}$$

где  $\eta = k_1^{-2}\Omega$ .

Получим решение системы уравнений в виде

$$\frac{2i(\sqrt{\eta^2 - \alpha^2} - 1)^{1/2}(\sqrt{\eta^2 - \alpha^2} + 1 - \nu)}{(\sqrt{\eta^2 - \alpha^2} - 1 + \nu)((\sqrt{\eta^2 - \alpha^2} - 1)^{1/2} + (\sqrt{\eta^2 - \alpha^2} + 1)^{1/2})} + 1)A$$

$$C = -\left(\frac{2i(\sqrt{\eta^2 - \alpha^2} - 1)^{1/2}(\sqrt{\eta^2 - \alpha^2} + 1 - \nu)}{(\sqrt{\eta^2 - \alpha^2} - 1 - \nu)((\sqrt{\eta^2 - \alpha^2} - 1)^{1/2} + (\sqrt{\eta^2 - \alpha^2} + 1)^{1/2})}\right)A$$
(4.5)

Как видно, для граничных условий шарнирного закрепления и скользящего контакта, в отличие от граничных условий жёсткого закрепления и свободного края, неоднородная волна не отражается ( $C = 0$ ).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Achenbach J. D. Wave Propagation in Elastic Solids. Amsterdam, North-Holl. Publ. Co, 1984, p.425.
2. Бреховских Л.М., Гончаров В.В. Введение в механику сплошных сред (в приложении к теории волн) М.: Наука, 1982. 332 с.
3. Коненков Ю.К. Об изгибной волне “рэлеевского” типа. //Акуст.журн. 1960. №1. С.124-126.
4. Амбарцумян С.А., Белубекян М.Б. К вопросу об изгибных волнах, локализованных вдоль кромки пластинки.//ПМ. 1994. Т.30. № 2. С.61-68
5. Белубекян М.Б., Хачатрян Л.С. Отражение изгибной волны от кромки пластинки //Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. №1. С. 30-33.
6. Хачатрян Л.С. О задаче отражения изгибной волны от упругого закрепления. //Труды II Межд. конф. «Актуальные проблемы механики сплошной среды» Дилижан, Армения, 4-8 октября 2010. Т.2. С.209-212.
7. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360 с.

**Хачатрян Лейли Самвеловна** –Ереванский колледж права, экономики и управления, преподаватель, тел.: (+37410)66-69-88,

**E-mail:** [Khachatryan@mail.am](mailto:Khachatryan@mail.am)

# КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СЛОИСТЫХ ОСНОВАНИЙ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ, ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ И СФЕРИЧЕСКОЙ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ

Чебаков М.И.

Изучены задачи механики контактного взаимодействия для слоистых упругих плоских, цилиндрических и сферических оснований, слои жестко соединены между собой и с жестким или упругим бесконечным основанием. Предполагается также, что в свободную поверхность слоистых оснований внедряется штамп, подошва которого имеет форму прямоугольника, параболы, цилиндра или шара в зависимости от рассматриваемой системы координат. В зоне контакта для некоторых задач нормальные и касательные напряжения могут быть связаны законом Кулона, а на штамп действуют нормальные и сдвигающие нагрузки, при этом система штамп - слоистое основание находится в условиях предельного равновесия, для некоторых задач на штамп действует только нормальная нагрузка. Для поставленных задач с помощью программ аналитических вычислений получены точные интегральные уравнения первого рода с ядрами, представленными в явном аналитическом виде. Изучены основные свойства ядер интегральных уравнений, в том числе показано, что числитель и знаменатель символов ядер могут быть представлены в виде разложения по произведениям степеней модулей сдвига и пространства, при этом выражения при этих произведениях содержат показательные и степенные функции от относительных толщин слоев и их коэффициентов Пуассона. Предложены эффективные схемы решения интегральных уравнений, на основе которых произведен расчёт контактных напряжений, размеров области контакта, взаимосвязи перемещения штампа и действующих на него сил.

Подробный обзор публикаций, посвященных контактным задачам для многослойных оснований, дан в [1-2].

**1. Контактные задачи в прямоугольных координатах.** В качестве примера рассмотрим на плоскости область  $y \leq 0$ , состоящую из нескольких упругих слоев толщины  $h_i$  жестко соединённых между собой и с упругой полуплоскостью  $y = -H$  ( $x, y$  – декартовы координаты,  $H$  – суммарная толщина слоев,  $\nu_i, G_i$  – соответственно коэффициент Пуассона и модуль сдвига  $i$ -го слоя). Пусть грань  $y = 0$  взаимодействует со штампом, находящимся под действием нормальной силы  $P$  и горизонтальной силы  $T = \mu P$ , а в зоне контакта нормальные и касательные напряжения связаны законом Кулона  $\tau_{xy} = \mu \sigma_y$  ( $\mu$  – коэффициент трения).

Будем рассматривать два случая: штамп имеет подошву в виде параболы с радиусом кривизны  $R$  в вершине (задача 1.1) и штамп имеет плоскую подошву (задача 1.2). В задаче 1.1 зона контакта переменна, а в задаче 1.2 фиксирована. Рассматривается случай предельного равновесия, сила  $P$  приложена к штампу с некоторым эксцентриситетом  $e$  таким образом, что он не поворачивается в процессе деформирования слоя.

С помощью преобразования Фурье, поставленные задачи сводятся относительно неизвестных нормальных контактных напряжений под штампом  $\sigma_y = -q(x)$  к следующему интегральному уравнению (ИУ):

$$\int_{-a}^b q(\xi) k \left( \frac{\xi - x}{h_1} \right) d\xi = \pi \theta \delta(x), \quad (-a \leq x \leq b), \quad \theta = \frac{G_1}{1 - \nu_1}, \quad (1.1)$$

$$k(t) = k_1(t) - \vartheta k_2(t), \quad \vartheta = \frac{(1 - 2\nu_1)}{2(1 - \nu_1)}, \quad \delta(x) = \delta - \frac{x^2}{2R}, \quad (\text{задача 1.1}), \quad \delta(x) = \delta \quad (\text{задача 1.2}). \quad (1.2)$$

$$k_1(t) = \int_0^\infty \frac{L_1(u)}{u} \cos ut du, \quad k_2(t) = \int_0^\infty \frac{L_2(u)}{u} \sin ut du, \quad L_i(u) = L_{i1}(u) / L_{i2}(u),$$

где  $\delta$  – перемещение штампа в вертикальном направлении.

Для функций  $L_{ij}(u)$  ( $i, j = 1, 2$ ), когда число слоев не больше трёх, получены явные аналитические выражения. Например, в случае трех слоев на полупространстве функции  $L_{ij}(u)$  представимы в виде разложений по величинам относительных модулей сдвига  $G_{i1} = G_i / G_1$ , где  $G_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) – соответственно модули сдвига слоёв 1, 2, 3 и полупространства,

$$\begin{aligned} L_{ij}(u) = & N_{022}^{ij} + N_{031}^{ij} + N_{040}^{ij} + N_{112}^{ij} + N_{121}^{ij} + N_{122}^{ij} + N_{130}^{ij} + N_{131}^{ij} + N_{140}^{ij} + N_{202}^{ij} + N_{211}^{ij} + N_{212}^{ij} + \\ & + N_{220}^{ij} + N_{221}^{ij} + N_{222}^{ij} + N_{230}^{ij} + N_{231}^{ij} + N_{240}^{ij} + N_{302}^{ij} + N_{311}^{ij} + N_{312}^{ij} + N_{320}^{ij} + N_{321}^{ij} + N_{330}^{ij} + \\ & + N_{402}^{ij} + N_{411}^{ij} + N_{420}^{ij}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь  $N_{klm}^{ij} = n_{klm}^{ij}(u)G_{21}^k G_{31}^l G_{41}^m$ , а  $L_{12}(u) = (1-2\nu_1)L_{22}(u)/2$ .

Функции  $n_{klm}^{ij}(u)$  получены в явном виде, содержат гиперболические и степенные функции аргумента, зависят только от коэффициентов Пуассона и относительных толщин слоёв  $H_i = h_i/h_1$ . Функции  $n_{klm}^{ij}(u)$  довольно громоздки, но их вид позволяет изучить основные свойства трансформант ядер интегрального уравнения (1.2), в том числе и поведение в нуле и на бесконечности. Показано, что

$$\begin{aligned} L_1(u)/u &= A_{-1}u^{-1} + A_0 + O(u) \quad (u \rightarrow 0), \quad L_1(u) = 1 \quad (u \rightarrow \infty), \quad A_{-1} = (1-\nu_4)/(1-\nu_1)/G_{41}, \\ A_0 &= n_1/d_1, \quad L_2(u)/u = B_{-1}u^{-1} + B_0 + O(u) \quad (u \rightarrow 0), \quad L_2(u) = 1 \quad (u \rightarrow \infty), \\ B_{-1} &= -\frac{1-2\nu_4}{G_{41}(1-2\nu_1)}, \quad B_0 = -\frac{2(1-\nu_4)n_2}{d_2}, \quad d_1 = 2G_{21}G_{31}G_{41}^2(1-\nu_1)^2(1-\nu_2)(1-\nu_3), \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$n_1 = n_{012}G_{31}G_{41}^2 + n_{102}G_{21}G_{41}^2 + n_{110}G_{21}G_{31} + n_{111}G_{21}G_{31}G_{41} + n_{112}G_{21}G_{31}G_{41}^2 + n_{120}G_{21}G_{31}.$$

Отметим, что при  $G_{41} \rightarrow \infty$   $A_{-1} \rightarrow 0$ ,  $B_{-1} \rightarrow 0$ ,  $B_0 \rightarrow 0$ , а  $A_0$  примет более простой вид

$$A_0 = \frac{n_{01}G_{31} + n_{10}G_{21} + n_{11}G_{21}G_{31}}{2G_{21}G_{31}(1-\nu_1)^2(1-\nu_2)(1-\nu_3)}, \quad n_{01} = H_2(1-\nu_1)(1-\nu_3)(1-2\nu_2), \quad (1.5)$$

$$n_{10} = H_3(1-\nu_1)(1-\nu_2)(1-2\nu_3), \quad n_{11} = (1-\nu_2)(1-\nu_3)(1-2\nu_1).$$

Формулы (1.3) позволяют путём предельного перехода при  $G_{41} \rightarrow \infty$  прийти к задаче для трех слоев на жёстком основании. Также аналогично выполняется предельный переход к двум слоям и одному слою на жестком основании.

В случае задачи для трех слоев, жестко соединённых между собой и с недеформируемым основанием, функции  $L_{ij}(u)$  ( $i=1,2$ ) принимают более простой вид

$$\begin{aligned} L_{ij}(u) &= n_{02}^{ij}(u)G_{31}^2 + n_{11}^{ij}(u)G_{21}G_{31} + n_{12}^{ij}(u)G_{21}G_{31}^2 + n_{20}^{ij}(u)G_{21}^2 + n_{21}^{ij}(u)G_{21}^2G_{31} + \\ &+ n_{22}^{ij}(u)G_{21}^2G_{31}^2 + n_{30}^{ij}(u)G_{21}^3 + n_{31}^{ij}(u)G_{21}^3G_{31} + n_{40}^{ij}(u)G_{21}^4. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Функции  $n_{km}^{ij}(u)$  имеют здесь менее громоздкую структуру, чем в задачах для трех слоев на полуплоскости. Если положить  $G_{i1} = 1$  ( $i=2,3$ ),  $\nu_2 = \nu_1$ ,  $\nu_3 = \nu_1$ , получим задачи для одного слоя толщины  $h = h_1 + h_2 + h_3$ , и функции  $L_i(u)$  примут известный вид [3].

Некоторые из функций  $n_{km}^{i1}(u)$ ,  $n_{km}^{i2}(u)$  с одинаковыми нижними индексами имеют одинаковые функции-множители, что позволяет легко проследить отмеченный выше последовательный предельный переход при  $G_{31} \rightarrow \infty$  и  $G_{21} \rightarrow \infty$  и получить ранее известные соотношения [3-5].

Ядро ИУ (1.1) имеет логарифмическую особенность и для случая  $G_4 = \infty$  может быть представлено в виде [6]

$$k(t) = -\ln|t| + F(t), \quad F(t) = -F_1(t) - \mathcal{G}\left[\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(t) - F_2(t)\right], \quad (1.7)$$

$$F_1(t) = \int_0^\infty \frac{[1-L_1(u)] \cos ut - e^{-u}}{u} du, \quad F_2(t) = \int_0^\infty \frac{1-L_2(u)}{u} \sin ut du.$$

где интегралы  $F_i(t)$  сходятся при любых значениях  $t$  из промежутка  $-2a/h_1 \leq t \leq 2b/h_1$ .

**2. Контактные задачи в цилиндрических координатах.** В цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$  рассмотрим основание, состоящее из набора бесконечных цилиндрических слоев  $R_i \leq r \leq R_{i+1}$  ( $1 \leq i \leq N$ ), которые жестко соединены между собой, а поверхность  $r = R_N$  неподвижна. Пусть в поверхность  $r = R_1$  силой  $P$  вдавливается штамп в форме цилиндра радиуса  $R_0 = R_1 - \Delta$  с точкой первоначального касания  $\varphi = 0$ ,  $r = R_1$  (задача 2). Предполагается также, что на штамп действует момент  $M$  и между штампом и цилиндрическим слоем действуют силы Кулоновского трения. Сила  $P$  направлена вдоль луча

$\varphi = 0$ , момент  $M$  стремится повернуть штамп против часовой стрелки вокруг его оси, величина  $\Delta$  мала. Рассматривается случай предельного равновесия.

Для задачи получим следующее интегральное уравнение:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\theta_1}^{\theta_2} q(t)k(t-\varphi)dt = f(\varphi) \quad (-\theta_1 \leq \varphi \leq \theta_2), \quad k(y) = k_1(y) + \mathcal{G}k_2(y), \quad (2.1)$$

$$k_1(y) = \sum_{k=0}^{\infty} L_1(k) \cos ky, \quad k_2(y) = \sum_{k=1}^{\infty} L_2(k) \sin ky,$$

$$L_i(u) = \frac{L_{i1}(u)}{L_{i2}(u)} \quad \mathcal{G} = \mu \frac{1-2\nu_1}{2(1-\nu_1)}, \quad f(\varphi) = \frac{G_1}{R_1(1-\nu_1)} [(\delta + \Delta) \cos \varphi - \Delta], \quad (2.2)$$

где  $G_i$  – модуль сдвига,  $\nu_i$  – коэффициент Пуассона для слоя  $i$ .

В интегральном уравнении (2.1) трансформанты ядер  $L_i(u)$  получены с использованием программы аналитических вычислений MAPLE, они довольно громоздки, но основные свойства их ядер ИУ позволяют изучить. Например, функции  $L_{ij}(u)$  в случае двух слоев представимы в виде

$$L_{ij}(u) = G^2 \eta_{i,j}^2(u) + G \eta_{i,j}^1(u) + \eta_{i,j}^0(u), \quad (2.3)$$

где  $G = G_2 / G_1$ , а найденные функции  $\eta_{i,j}^n(u)$  содержат степенные и экспоненциальные функции, зависят только от коэффициентов Пуассона материала слоев и отношения радиусов  $r_i = R_i / R_1$ .

Функция  $L_1(u)$  на бесконечности и в нуле имеет следующее поведение:

$$L_1(u) = 1/u + O(1/u^2) \quad (u \rightarrow \infty), \quad L_1(0) = A = A_1 / A_2, \quad (2.4)$$

$$A_1 = (1-2\nu_1)(r_2^2 - 1)[r_2^2 + (1-2\nu_2)r_3^2]G + (1-2\nu_2)(r_2^2 + 1 - 2\nu_1)(r_3^2 - r_2^2),$$

$$A_2 = 2(1-\nu_1)\{[r_2^2 + (1-2\nu_2)r_3^2][1 + (1-2\nu_1)r_2^2]G + (1-2\nu_2)(r_2^2 - 1)(r_3^2 - r_2^2)\}.$$

Отметим, что при  $G \rightarrow \infty$  получаем задачу для однослойного цилиндра.

Если положить  $L_1 = 1/u + L(u)$  и воспользоваться значением известного ряда

$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} \cos kt = -\ln|2 \sin(t/2)|$ , то в ядре ИУ (2.1) можно выделить логарифмическую особенность

и представить его в виде

$$k(t) = \frac{A}{2} - \ln \left| 2 \sin \frac{t}{2} \right| + \sum_{n=1}^{\infty} L(n) \cos nt + \mathcal{G} \sum_{n=1}^{\infty} L_2(n) \sin nt. \quad (2.5)$$

**3. Контактные задачи в сферической системе координат.** В сферических координатах  $(r, \theta, \varphi)$  рассмотрим основание, состоящее из набора сферических слоев  $R_i \leq r \leq R_{i+1}$  ( $1 \leq i \leq N$ ) с различными упругими постоянными и жестко соединённых между собой, поверхность  $r = R_N$  неподвижна. Пусть в поверхность  $r = R_1$  силой  $P$  вдавлируется штамп в форме шара радиуса  $R_0 = R_1 - \Delta$  с точкой первоначального касания  $\varphi = 0$ ,  $r = R_1$  (задача 3). Предполагаем, что трение между штампом и сферическим слоем отсутствует, сила  $P$  направлена вдоль прямой  $\varphi = 0$ , а величина  $\Delta$  мала.

Решение задачи может быть сведено к исследованию следующего ИУ относительно неизвестных контактных напряжений  $\sigma_r(R_1, \varphi) = q(\varphi)$ :

$$\int_0^{\gamma} q(\psi)k(\psi, \varphi)d\psi = f(\varphi) \quad (0 \leq \varphi \leq \gamma), \quad (3.1)$$

$$k(\psi, \varphi) = \sin \psi \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k K(\alpha_k) P_k(\cos \psi) P_k(\cos \varphi), \quad (3.2)$$

где  $P_k(\cos \varphi)$  – полиномы Лежандра,  $\alpha_k = k + 1/2$ .

В ИУ (3.1) функция  $K(u)$  также получена с использованием программы аналитических вычислений MAPLE, она имеет также довольно громоздкую структуру, но основные ее свойства изучены. Например, в случае двух слоев функция  $K(u)$  представима в виде

$$K(u) = K_1(u) / K_2(u), \quad K_i(u) = G^2 \eta_{i2}(u) + G \eta_{i1}(u) + \eta_{i0}(u); \quad G = G_2 / G_1, \quad (3.3)$$

функции  $\eta_{ij}(u)$  содержат степенные и экспоненциальные функции, они зависят только от коэффициентов Пуассона материала слоев и относительных радиусов  $r_2 = R_2 / R_1$ ,  $r_3 = R_3 / R_1$ . Функция  $K(u)$  имеет следующее поведение на бесконечности и в нуле:

$$K(u) = 1/u + O(1/u^2) \text{ при } u \rightarrow \infty, \quad K(0) = A = \text{const} \quad (3.4)$$

Ядро  $k(\psi, \varphi)$  можно представить в виде двух слагаемых:

$$k(\psi, \varphi) = k_0(\psi, \varphi) + k_1(\psi, \varphi), \quad k_0(\psi, \varphi) = \sin \psi \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\cos \psi) P_k(\cos \varphi), \quad (3.5)$$

$$k_1(\psi, \varphi) = \sin \psi \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k L(\alpha_k) P_k(\cos \psi) P_k(\cos \varphi); \quad L(u) = K(u) - 1/u \quad (3.6)$$

Ряд (3.7) сходится при любых значениях параметров, а ряд в (3.6) может быть просуммирован:

$$k_0(\psi, \varphi) = \frac{\sqrt{2} \sin \psi}{\pi \sqrt{1 - \cos(\psi + \varphi)}} \mathbf{K} \left( \sqrt{\frac{2 \sin \psi \sin \varphi}{1 - \cos(\psi + \varphi)}} \right). \quad (3.7)$$

Здесь  $\mathbf{K}(k)$  – полный эллиптический интеграл первого рода. На основе свойства эллиптического интеграла можно показать, что ядро ИУ имеет логарифмическую особенность

$$k_0(\psi, \varphi) = -\frac{1}{\pi} \ln |\psi - \varphi| + O(1), \quad \psi \rightarrow \varphi. \quad (3.9)$$

**4. Решение интегральных уравнений.** Решение полученных здесь ИУ с логарифмическим ядром может быть получено с использованием широкого спектра аналитических и численных методов. С учетом широкого распространения быстродействующих компьютеров приведем здесь схему решения ИУ прямым методом коллокаций [7] на примере задач 1.1 и 1.2. Для других задач схема будет аналогична.

Проведем дискретизацию ИУ (1.1) с ядром (1.7) по следующей схеме:

$$\varepsilon \sum_{j=1, j \neq i}^N q_j k \left( \frac{\xi_j - x_i}{h_1} \right) + q_i \int_{x_i - \varepsilon/2}^{x_i + \varepsilon/2} k \left( \frac{\xi - x_i}{h_1} \right) d\xi = \pi \theta \delta(x_i) \quad (1 \leq i \leq N), \quad (4.1)$$

где  $q_j = q(\xi_j)$  – значения контактных напряжений в узлах коллокации  $\xi_j = -a + \varepsilon/2 + \varepsilon(j-1)$ ,  $x_i = -a + \varepsilon/2 + \varepsilon(i-1)$ ,  $\varepsilon = (a+b)/N$  – интервал коллокации,  $N$  – число узлов коллокации.

Интеграл в (4.1) с учетом малости  $\varepsilon$  может быть заменен [4] интегралом

$$I_i = - \int_{x_i - \varepsilon/2}^{x_i + \varepsilon/2} \ln \left| \frac{\xi - x_i}{h_1} \right| d\xi = \varepsilon \left( \ln \frac{\varepsilon}{2h_1} - 1 \right). \quad (4.2)$$

Окончательно для нахождения значений контактных напряжений  $q(x)$  в узлах коллокации  $x = x_i = -a + \varepsilon/2 + \varepsilon(i-1)$  получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\varepsilon \sum_{j=1}^N a_{ij} q_j = b_i \quad (i=1, \dots, N), \quad a_{ij} = a_{ij}^1 - \mathcal{D} a_{ij}^2, \quad (4.3)$$

$$a_{ij}^m = k_m \left( \frac{\xi_j - x_i}{h_1} \right) \quad (i \neq j, m=1,2), \quad a_{ii} = I_i, \quad b_i = \pi \theta \delta(x_i). \quad (4.4)$$

Отличительной особенностью системы (3.5)–(3.6) является то, что она имеет диагональную структуру. Между коэффициентами системы существует следующая связь:  $a_{i+1, j+1}^m = a_{ij}^m$  ( $j \geq i, m=1,2$ ),  $a_{ij}^1 = a_{ji}^1$ ,  $a_{ij}^2 = -a_{ji}^2$ , следовательно, достаточно вычислить только

коэффициенты первой строки, а именно:  $a_{1j}^m, m=1,2$ , все остальные элементы будут их линейными комбинациями. Как показывают числовые эксперименты, для получения результатов с относительной погрешностью менее 3% в системе (3.5) достаточно ограничиться числом уравнений не более пятисот, при этом требуется не более полминуты работы современного компьютера средней мощности.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (11-08-00909, 11-08-12087-офи-м-2011, 12-08-90022).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Никишин В.С. Статические контактные задачи для многослойных упругих тел// Механика контактных взаимодействий. Под ред. Воровича И.И., Александрова В.М. М.: Физматлит, 2001. С. 214-233.
2. Айзикович С.М. Статические контактные задачи для неоднородного по глубине основания //Механика контактных взаимодействий. Под ред. Воровича И.И., Александрова В.М. М.: Физматлит, 2001. С.199-213.
3. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
4. Иваночкин П.Г., Колесников В.И., Флек Б.Н., Чебаков М.И. Контактная прочность двухслойного покрытия при наличии сил трения в области контакта// Изв. РАН. МТТ. 2007. №1. С.183–192.
5. Чебаков М.И. Взаимодействие штампа и двухслойного основания при наличии сил трения в области контакта // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2006. № 1. С.60-66.
6. Александров В.М., Коваленко Е.В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 336 с.
7. Воронин В.В., Цецецо В.А. Численное решение интегрального уравнения 1 рода с логарифмической особенностью методом интерполяции и коллокации// Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 1981. Т.21. №1. С.40-53.

### Сведения об авторе:

**Чебаков Михаил Иванович** – доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. отделом НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И.И. Южного федерального университета.  
[chebakov@math.sfedu.ru](mailto:chebakov@math.sfedu.ru), (+7 863 297 52 55)

# ВЛИЯНИЕ ЗАРЯЖЁННЫХ ДИСЛОКАЦИЙ В ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КРИСТАЛЛАХ НА УПРУГУЮ ВОЛНУ

**Шекоян А.В.**

Выведена система уравнений, описывающая распространение упругой волны в диэлектрических кристаллах, которые содержат заряженные дислокации. Получены коэффициенты поглощения и скорость линейной волны. В случае нелинейной волны, когда учитывается только квадратичная нелинейность, получены формулы для амплитуды и фазы волны в пространстве.

В последние годы появились работы, изучающие движение заряженных дислокаций с учётом его влияния на различные свойства диэлектрических или полупроводниковых кристаллов [1,2,3,4].

Целью настоящего доклада является исследование линейной и нелинейной волн в диэлектрических кристаллах с заряженными дислокациями с использованием идей, развитых в работах [6-9].

Пусть имеется диэлектрический кристалл, где есть заряженные дислокации. Будет использована струнная модель дислокаций, однако учитывается, что дислокации заряжены. Последнее создает в кристалле электрическое поле  $E_i$ .

Под влиянием волнового поля упругой волны в диэлектрическом кристалле, дислокация будет колебаться. Для описания этого процесса будет использован метод, предложенный в статье [6], в которой развиты идеи, изложенные в работах [7,8].

Согласно [6] уравнения распространения ультразвуковой волны записываются в виде:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}, \quad (1)$$

$$A \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial t^2} + B \frac{\partial \xi_i}{\partial t} = f_i, \quad (2)$$

где  $\rho$  – плотность среды, а  $u_i$  – смещения,  $A$  и  $B$  – постоянные коэффициенты, характеризующие массу и затухание колебаний дислокации,  $\xi_i$  – компоненты смещения дислокаций под воздействием ультразвуковой волны.

Так как дислокации создают в среде электрическое поле, которое меняется в пространстве и во времени, то уравнения (1) и (2) следует добавить уравнениями Максвелла

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0 \quad (3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad (4)$$

где  $\mathbf{D}$  – вектор электрического смещения.

Тензор напряжения  $\sigma_{ik}$ , компоненты силы  $f_i$ , действующие на дислокацию и компоненты электрического смещения  $D_i$ , определяются из соотношений

$$\sigma_{ik} = \left( \frac{\partial F}{\partial u_{ik}} \right)_{\xi_i, E_i}, \quad f_i = - \left( \frac{\partial F}{\partial \xi_i} \right)_{E_i, u_{ik}}, \quad D_i = - \left( \frac{\partial F}{\partial E_i} \right)_{\xi_i, u_{ik}}, \quad (5)$$

где  $F$  – свободная энергия единицы среды,  $u_{ik}$  – тензор деформации.

Свободная энергия записывается по методу, изложенному в книге [9]. Тогда выражение свободной энергии примет следующий вид:

$$F = F_0 + \frac{1}{2} c_{ijkl} u_{ij} u_{kl} + \frac{1}{2} \lambda_{jk} \xi_j \xi_k + \frac{1}{2} \beta_{ijkl} (b_i \xi_j + b_j \xi_i) u_{ik} + \\ + \frac{1}{2} p_{mk} \xi_k E_m + \frac{1}{2} \varepsilon_{jk} E_j E_k + \frac{1}{2} m_{pj} E_p u_{jk} + \frac{1}{3!} Q_{iklm} u_{ik} u_{lm} u_{pq} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{3!} \gamma_{jkl} \xi_j \xi_k \xi_l + \frac{1}{3!} q_{ijklpq} (b_i \xi_j + b_j \xi_i) (b_k \xi_l + b_l \xi_k) u_{pq} + \frac{1}{3!} d_{mkj} E_m E_k \xi_j + \\
& + \frac{1}{3!} a_{jkm} E_j \xi_k \xi_m + n_{jklm} E_j E_k u_{lm},
\end{aligned} \tag{6}$$

где  $c_{ijkl}$  и  $Q_{ijklpq}$  – линейные и нелинейные модули упругости,  $\lambda_{ik}$  и  $\gamma_{jkl}$  – тензоры линейной и нелинейной “жесткости” дислокаций,  $\beta_{ijkl}, q_{ijklpq}$  – тензоры линейного и нелинейного акустодислокационного взаимодействия,  $\varepsilon_{ik}$  – диэлектрический тензор,  $m_{pjk}, P_{ik}, d_{mkj}, a_{jkm}, n_{jklm}$  – тензоры, обусловленные электрическим, акустическим и дислокационным взаимодействием,  $b_i$  – компоненты вектора Бюргерса,  $F_0$  – свободная энергия до возмущений.

В выражении (6) ограничено слагаемыми, которые дадут в уравнениях квадратичные нелинейные члены.

Воспользовавшись выражениями (5) и (6) и ограничиваясь одномерным приближением  $\left(\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2} = 0\right)$ , отбрасывая индексы для простоты записи, получится следующая система уравнений:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta b \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{m}{2} \frac{\partial E}{\partial x} + (3c + Q) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{4}{3} q b^2 \xi \frac{\partial \xi}{\partial x} + n E \frac{\partial E}{\partial x}, \tag{7}$$

$$A \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + B \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\lambda \xi - b \beta \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{P}{2} E - \frac{1}{2} b \beta \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{2} \gamma \xi^2 - \frac{4}{3} q b^2 \xi \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{d}{6} E^2 - \frac{a}{3} E \xi, \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} P \frac{\partial \xi}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{1}{2} m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{d}{6} E \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{d}{6} \xi \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{a}{3} \xi \frac{\partial \xi}{\partial x} + 2n \frac{\partial E}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \\
& + 2n E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2} m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x} = 0.
\end{aligned} \tag{9}$$

Уравнения (7)–(9) написаны в лагранжевых координатах.

Из уравнения (4) следует, что в одномерном приближении  $E_1$  и  $E_2$  – постоянные, поэтому в системе уравнений (6) – (9) не фигурируют. Оценки показывают, что с ускорением движений заряд дислокаций излучает ничтожно слабое электромагнитное излучение, которым можно пренебречь.

Линеаризуя уравнения (7)–(9), решение линейной системы уравнений ищется в виде бегущей волны, поэтому можно получить дисперсионное уравнение в следующем виде:

$$-\omega^2 \rho + c k^2 = - \frac{k^2 \left[ b \beta \left( \frac{mp}{2\varepsilon} - \beta b \right) + \frac{m^2}{4\varepsilon} (\lambda - \omega^2 A - i\omega B) \right]}{\lambda - \omega^2 A - i\omega B + \frac{P^2}{4\varepsilon}}, \tag{10}$$

где  $k$  – волновое число,  $\omega$  – комплексная частота,  $\omega = \omega_0 + \omega_1 + i\alpha = \omega_0 + \omega_2$ ,  $\omega_1$  – действительная частота,  $\alpha$  – коэффициент поглощения, а  $\omega_2$  – комплексное приращение частоты. Разделяя действительные и мнимые части выражения (10), учитывая малость дисперсии и диссипацию, можно получить

$$\omega_1 = \omega_0 \left\{ 1 - \frac{1}{2\nu_0^2 \beta} \cdot \frac{\left[ \beta b \left( \frac{mp}{4\varepsilon} - \beta b \right) - \frac{m^2}{4\varepsilon} (\lambda - \omega_0^2 A) \right] \left( \lambda - \omega_0^2 A - \frac{P^2}{4\varepsilon} \right) - \frac{m^2 \omega_0^2}{4\varepsilon} B^2}{\left( \lambda - \omega_0^2 A - \frac{P^2}{4\varepsilon} \right)^2 + \omega_0^2 B^2} \right\} \tag{11}$$

$$\alpha = -\frac{k^2 B}{2\beta} \cdot \frac{b\beta \left( \frac{mp}{4\varepsilon} - b\beta \right) - \frac{m^2}{4\varepsilon} (\lambda - \omega_0^2 A) + \frac{m^2 \omega_0^2}{4\varepsilon} \left( \lambda - \omega_0^2 A - \frac{p^2}{4\varepsilon} \right)}{\left( \lambda - \omega_0^2 A - \frac{p^2}{4\varepsilon} \right)^2 + \omega_0^2 B^2}, \quad (12)$$

где  $\omega_0^2 = v_0^2 k^2 = \frac{c}{\rho} k^2$ .

Если в соотношениях (11) и (12) пренебрегать величинами, обусловленными электрическим зарядом дислокаций и электрическими свойствами диэлектрика, то они совпадут с соответствующими величинами, полученными в статье [6].

Решение уравнений (7)–(9), которые имеют квадратичные нелинейные члены, из-за наличия дисперсии и диссипации, можно искать в виде квазимонохроматических волн, имеющих вид [6,9,10]:

$$(u, \xi, E) = \frac{1}{2} \left[ (u_0, \xi_0, E_0) e^{i\varphi} + (u'_0, \xi'_0, E'_0) e^{2i\varphi} + (u''_0, \xi''_0, E''_0) + \text{компл. сопр.} \right], \quad (13)$$

где  $\varphi = kx - \omega t$ .

Подставив (13) в систему уравнений (7)–(9), можно получить новую систему уравнений для медленно меняющихся амплитуд.

Полученная новая система упрощается. В качестве основной функции берём  $u_0$ , а  $k$  считается большой. Малость дисперсии и диссипации даёт соотношение  $\omega_2 \sim k^{\varepsilon_1} u_0$ ,  $\omega_0 \sim k$ , причём  $0 < \varepsilon_1 < 1$ ,  $\xi_0 \sim E_0 \sim k^{\varepsilon} u_0$ . Эти оценки позволяют в уравнениях для амплитуд  $\xi_0$  и  $E_0$  пренебречь нелинейными слагаемыми и исключить их с помощью линейных уравнений. В уравнении для  $u_0$  нелинейные слагаемые, обусловленные  $\xi_0$  и  $E_0$ , малы, остаются упругие, геометрические нелинейности и нелинейность, обусловленная свободным членом. В уравнениях для амплитуд второй гармоники оставляются только нелинейные слагаемые, пропорциональные  $u_0^2$ . Согласно [11]  $\frac{\partial}{\partial t} \sim \frac{\partial \omega}{\partial k} \frac{\partial}{\partial x}$ , тогда из уравнений для  $u''$  легко найти

$\frac{\partial u''_0}{\partial x}$ . Итак, получаются следующие уравнения для амплитуд:

$$-2ikc \frac{\partial u_0}{\partial x} - 2i\omega\rho \frac{\partial u_0}{\partial t} - \frac{m}{2} \frac{\partial E_0}{\partial x} - \beta b \frac{\partial \xi_0}{\partial x} = ik^3 (3c + Q) e^{2\alpha t} u'_0 u_0^* - k^2 (3c + Q) u_0 \frac{\partial u''_0}{\partial x}, \quad (14)$$

$$4(k^2 c - \omega^2 \rho) u'_0 = -\frac{ik^3}{2} (3c + Q) u_0^2 + 2ikb\beta \xi'_0 + ikmE_0^2, \quad (15)$$

$$-A\omega^2 \xi_0 - i\omega B \xi_0 - ikb\beta u_0 + \frac{p}{2} E_0 + \lambda \xi_0 = 0, \quad (16)$$

$$(-4\omega^2 A - 2i\omega B + \lambda) \xi'_0 = -2ik\beta b u'_0 - \frac{p}{2} E'_0 + \frac{1}{4} b\beta k^2 u_0^2, \quad (17)$$

$$ik \frac{p}{2} \xi_0 + i\varepsilon k E_0 + \frac{mk^2}{2} u = 0, \quad (18)$$

$$2ip\xi'_0 + 2i\varepsilon E'_0 - 2km u_0^2 = -\frac{imk^2}{2} u_0^2, \quad (19)$$

$$\frac{\partial u''_0}{\partial x} = \frac{k^3 (3c + Q) e^{2\alpha t}}{2\rho v_0} \frac{\partial \omega_2}{\partial k} |u_0|^2 \quad (20)$$

Последовательно исключая все функции из системы уравнений (14)–(20), переходя к новой координате  $\tau = \frac{x}{v} - t$ , где  $v = \frac{\omega}{k}$ , получится следующее уравнение относительно  $u_0$ :

$$-i \frac{du_0}{dx} = (e_1 + ie_2) |u_0|^2 u_0, \quad (21)$$

где

$$e_1 = \frac{k^3 (3c + Q)^2 e^{2\alpha t}}{c'} \left\{ \left[ \frac{\Re_4 \Re_5 + 32\omega_0^2 B^2 \rho (v^2 - v_0^2)}{N_3} + \frac{\omega_n}{2\rho v_0 (\omega_n^2 + \alpha_n^2)} \right] \right\} = \Omega_1 e^{\frac{2\alpha}{v} x}$$

$$e_2 = \frac{k^3 (3c + Q)^2 e^{2\alpha t} \omega_0 B}{c'} \left[ \frac{\Re_4 + 16\rho (v_1^2 - v_0^2) - 2\Re_5}{N_3} - \frac{\alpha_n}{2\rho v_0 (\omega_n^2 + \alpha_n^2)} \right] = \Omega_2 e^{\frac{2\alpha}{v} x}$$

$$\Re_4 = -\lambda + 4\omega_0^2 A - \frac{p^2}{2\varepsilon} + 2b^2 \beta^2 - \frac{m^2 p^2}{2\varepsilon^2}$$

$$\Re_5 = -\frac{1}{8} \rho (v^2 - v_0^2) \left( \lambda - 4\omega_0^2 A + \frac{p^2}{2\varepsilon} \right) + 2 \left( 2b\beta - \frac{mp}{\varepsilon} \right) \left( \frac{mp}{2\varepsilon} - 2b\beta \right)$$

$$\omega_n = \frac{\partial \omega_1}{\partial k}, \quad \alpha_n = \frac{\partial \alpha}{\partial k}$$

$$N_3 = \Re_5^2 + 256\rho^2 (v^2 - v_0^2)^2 \omega^2 B^2$$

$$c' = 2c - \frac{1}{\beta b - \frac{mp}{4\varepsilon}} \left[ m^2 \beta b + (mp\rho + 4\rho b\beta) (v^2 - v_0^2) - \frac{m^2 \beta b}{4\varepsilon} \right]$$

Обычно дислокации исследуют в ультразвуковом диапазоне, тогда  $\omega t$  и  $kx$  велики, а  $kx - \omega t$  конечно для любых заданных волн, т.е.  $|kx - \omega t| \ll kx$  и  $|kx - \omega t| \ll \omega t$ , тогда в показателях экспоненты можно подставлять  $t = x/v$ , что и сделано в выражениях коэффициентов  $e_1$  и  $e_2$ .

В уравнении (21) коэффициент  $e_1$  обусловлен нелинейностями, а  $e_2$  – нелинейной диссипацией.

Сделаем в уравнении (21) подстановку

$$u = L(x) \exp[-iS(k)],$$

где  $L(x)$  – действительная амплитуда, а  $S$  – эйконал.

Тогда получим два уравнения

$$\frac{dL}{dx} = -\Omega_2 e^{\frac{2\alpha}{v} x} L^3, \quad (22)$$

$$\frac{dS}{dx} = -\Omega_1 e^{\frac{2\alpha}{v} x} L^2. \quad (23)$$

Решение уравнения (22) имеет вид

$$L = L_0 \left( 1 + 2L_0^2 \Omega_2 x \right)^{-1/2}. \quad (24)$$

Выражение (24) показывает, как меняется амплитуда в пространстве. Если  $x > 0$ , а  $\Omega_2 < 0$ , то

в точке  $x_1 = -\frac{1}{2L_0^2 \Omega_2}$  может быть особенность. Когда  $|L_2 \Omega_2| \ll 1$ ,  $x_1$  выходит из области

реального наблюдения и можно сказать особенности нет, но когда  $|L_2^2 \Omega_2| \sim 1$ , особенность есть, которая может быть результатом резонанса или неустойчивости волны.

Решение уравнения (23) имеет вид

$$S = -\frac{\Omega_1}{2\Omega_2} \ln(1 + 2L_0^2 \Omega_2 x). \quad (25)$$

При выводе (24), (25) было учтено, что  $\frac{2\alpha}{v} x \ll 1$  и экспоненты были разложены в ряд.

Из выражения (25) видно, что время прохождения импульса волны при  $\frac{\Omega_1}{\Omega_2} > 0$  уменьшается, а при  $\frac{\Omega_1}{\Omega_2} < 0$  увеличивается. При  $x = x_1$ , как и для амплитуды  $L$ , в решении (25) есть

особенность и всё сказанное для амплитуды  $L$ , остается в силе и для эйконала.

Автор благодарит член-корр. НАН Армении, проф. А.Г. Багдоева за полезные обсуждения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Хирт Дж., Лотке И., Теория дислокаций. М.: Атомиздат, 1972. 509с.
2. Тяпунина Н.А., Белозерова Э.П. Заряжённые дислокации и свойства щёлочно-галоидных кристаллоов. //УФН. 1988. Т.156. Вып.4. С.683-717.
3. Зуев Л.Б. Физика электропластичности щелочно-галоидных кристаллов. М.: Наука, 1999. 119с.
4. Скворцов А.А., Орлов А.М., Фролов В.А., Соловьев А.А. Электростимулированное движение краевых дислокаций в кремнии при комнатных температурах. //ФТТ. 2000. Т.42. Вып.11. С.1998-2003.
5. Granato A., Lucke K. Theory of mechanical Damping Due to Dislocations. //J.appl. Phys. 1956. V.27. N6. P.583-593.
6. Шекоян А.В. Нелинейные волновые пучки в кристаллах с дислокациями. // Письма в ЖТФ. 2009. Т.35. Вып.7. С.93-97.
7. Бурак Г.Н., Островский И.В. Гистерезисные акустические явления, связанные с дислокационной нелинейностью в кристаллах.// Письма в ЖТФ. 1997. Т.23. Вып. 18. С.69-74.
8. Ерофеев В.И. Самомодуляция акустической волны в твёрдом теле с дислокациями. //Письма в ЖТФ. 2008. Т.34. Вып.4. С.32-36.
9. Багдоев А.Г., Ерофеев В.И., Шекоян А.В. Линейные и нелинейные волны в диспергирующих сплошных средах. М.: Физматлит, 2009. 318с.
10. Шекоян А.В. Влияние дислокаций на устойчивость и фокусирование пучков нелинейных ультразвуковых волн. //Изв. АН Арм. ССР. Физика. 1988. Т.23. Вып.5. С.283-287.
11. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622с.

### Сведение об авторе:

**Шекоян Ашот Вазгенович** – ст.н.с. Института механики НАН РА, 0019 Ереван, Армения

E-mail: [ashotshek@mechins.sci.am](mailto:ashotshek@mechins.sci.am)

## К ВОПРОСУ РАСЧЁТА ГИБКОГО ЗУБЧАТОГО КОЛЕСА ВОЛНОВОЙ ПЕРЕДАЧИ ПО ПОЛУБЕЗМОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ

Шекян Г.Г., Геворкян В.Р.

В работе рассмотрен метод расчёта гибкого зубчатого колеса волновой передачи по полубезмоментной теории с учётом краевого эффекта соединения зубчатого венца с оболочкой. Получены функции напряжений и рекуррентные соотношения для определения усилий, моментов и силовых факторов в произвольном сечении оболочки.

Зубчатая волновая передача (рис.1) отличается от других зубчатых механизмов тем, что один из её элементов – гибкое колесо – во время работы претерпевает волновую деформацию, за счёт чего происходит передача движения. Волновая зубчатая передача состоит из трёх основных элементов: гибкого колеса 1, жёсткого колеса 2 и генератора волн 3. Гибкое колесо представляет собой тонкостенную оболочку, один конец которого соединён с валом или жёстко закреплён и сохраняет цилиндрическую форму, а на другом конце насажен зубчатый венец.

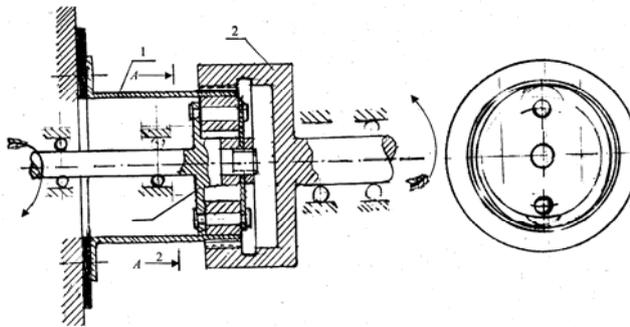


Рис.1. Волновая зубчатая передача

В торцевом сечении оболочка с зубчатым венцом под действием генератора волн 3 принимает криволинейную форму – форму эллипса, где разность диаметров большой и малой полуосей составляет величину, равную высоте зуба –  $W_0$ .

У двухволновых передач число зубьев гибкого и жёсткого колёс связаны соотношением  $z_2 - z_1 = 2$ , что обеспечивает большие передаточные отношения ( $u = z_2 / (z_2 - z_1)$ ).

Основным элементом волновой передачи, подвергнутым силовому воздействию, является гибкое зубчатое колесо.

Здесь основной нагрузкой является радиальная сила, передаваемая волнообразователем оболочке, вызывая радиальную деформацию, тем самым, обеспечивая зацепление зубьев гибкого и жёсткого колёс.

Отделяя оболочку от зубчатого венца, расчёт оболочки выполним на основе полубезмоментной теории. Распределение усилия взаимодействия оболочки и зубчатого венца определяется из условия совместности их деформации: на линии контакта окружные перемещения оболочки и венца должны быть одинаковыми. Напряжённое состояние оболочки является результатом действия крутящего момента и краевого эффекта на стыке оболочки и зубчатого венца.

Краевой эффект возникает в результате неравномерной деформации при контакте зубчатого венца и диска генератора волн. Исходя из определяющей роли изгибных напряжений, краевая задача для функций напряжений согласно В.З. Власову должна удовлетворять условию [1-4]

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + \xi \left( \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \theta^8} + 2 \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \theta^6} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \theta^4} \right) = 0 \quad (1)$$

Усилия и моменты, приложенные к элементу оболочки (рис.2), отнесённые к единице длины координатных линий средней поверхности, являются частными производными функции напряжения  $\Phi$  [3].

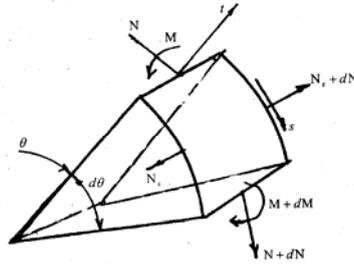


Рис.2. Силы и моменты, приложенные к элементу оболочки

$$\begin{aligned}
 N_x &= \frac{Eh}{R^3} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; \quad N_\theta = \frac{Eh^3}{12R^4} \left( \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^6 \theta}{\partial \theta^6} \right); \\
 M_\theta &= \frac{Eh}{12R^3} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^4 \theta}{\partial \theta^4} \right); \quad \frac{\partial S}{\partial \theta} = \frac{Eh}{R^3} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3}; \\
 \frac{\partial S}{\partial x} &= \frac{Eh^3}{R^2} \left( \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \theta^3} + 2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \theta^3} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \right)
 \end{aligned} \quad (2)$$

Деформации средней поверхности оболочки также являются производными функции напряжения

$$U = \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad V = \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}; \quad W = \frac{l}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \quad (3)$$

Функция напряжений будет определена, если заданы условия на торцах оболочки, т.к. осевые силы на торцах зубчатого венца равны нулю, то

$$(N_x)_{x=0} = 0, \quad \text{и} \quad N_x \Big|_{x=\frac{l}{R}} = 0, \quad (4)$$

где  $l$  – длина оболочки,  $R$  – средний диаметр оболочки.

Считая смещение точек венца в окружном направлении, равным нулю [5], можем написать

$$V \Big|_{x=\frac{l}{R}} = 0 \quad (5)$$

Следующее граничное условие получим из взаимодействия зубчатого венца и оболочки при их деформации

$$S = 2E\xi^3 \sqrt{3} \left( \frac{b_1}{R} \right) \left( \frac{h_1}{h} \right)^3 \left( \frac{\partial^5 W}{\partial \theta^5} + 2 \frac{\partial^3 W}{\partial \theta^3} \frac{\partial W}{\partial \theta} \right) + \frac{dq_n}{d\theta} \Big|_{x=0} = 0, \quad (6)$$

где  $h$  – толщина оболочки,  $b_1$  – ширина зубчатого венца,  $h_1$  – толщина венца,  $q_n$  – интенсивность нагрузки, представленная через обобщённую  $\delta$ -функцию Дирака  $q_n = \frac{P}{R} [\delta(\theta) + \delta(\theta - \pi)]$ .

Решения уравнения (1), удовлетворяющие граничным условиям, будут:

$$\Phi = \frac{W_0 R}{R_\Delta} \sum_{k=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{ch m_k (2\alpha - x) \cos m_k x - ch m_k x \cos m_k (2\alpha - x) \cos k\theta}{(ch m_k \alpha - \cos m_k \alpha) + \lambda_k (ch 2m_k \alpha - \sin m_k \alpha) k^2 (k-1)^2} \quad (7)$$

$W_0$  – максимальная радиальная деформация,  $\alpha = \frac{l}{R} m_k$ ,  $\lambda_k$ ,  $R_\Delta$ ,  $\xi$  подсчитываются по формулам:

$$m_k = k\sqrt{\frac{k^2-1}{2}}\xi; \quad \xi = \frac{h/R}{2\sqrt{3(1-\mu^2)}}$$

$$\lambda_k = \frac{(R/h)(h/h_1)^3}{k\sqrt{2\xi(k^2-1)}}; \quad R_\Delta = \sum_{k=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{1}{(k^2-1)^2 \left[ 1 + \lambda_k \frac{\operatorname{sh}2m_k\alpha - \sin^2 m_k\alpha}{\operatorname{ch}2m_k\alpha - \cos 2m_k\alpha} \right]}$$

После подстановки (7) в (2) получим

$$N_x = \frac{4EW_0\xi\sqrt{3}}{R_\Delta} \sum_{k=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}m_k(2\alpha-x)\sin m_kx - \operatorname{sh}m_kx\sin m_k(2\alpha-x)m_k^2\cos k\theta}{(\operatorname{ch}2m_k\alpha - \sin 2m_k\alpha) + \lambda_k(\operatorname{sh}2m_k\alpha - \sin 2m_k\alpha)k^2(k^2-1)}$$

$$N_\theta = \frac{2EW_0\xi^3\sqrt{3}}{R_\Delta} \sum_{k=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{\operatorname{ch}m_k(2\alpha-x)\operatorname{cos}m_kx - \operatorname{ch}m_kx\operatorname{cos}m_k(2\alpha-x)k^2\cos k\theta}{\operatorname{ch}2m_k\alpha - \cos 2m_k\alpha + \lambda_k(\operatorname{sh}2m_k\alpha - \sin 2m_k\alpha)(k^2-1)}$$

$$N_x = \frac{4E\xi W_0\sqrt{3}}{R_\Delta} \sum_{k=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{m_k \left[ \operatorname{sh}m_k(2\alpha-x)\operatorname{cos}m_kx - \operatorname{ch}m_kx(2\alpha-x)\sin m_kx - \right.}{\left. \left[ \operatorname{ch}2m_k\alpha - \cos 2m_k\alpha + \right. \right.} \times$$

$$\left. \left. \frac{-\operatorname{ch}m_kx\sin m_k(2\alpha-x) + \operatorname{sh}m_kx\operatorname{cos}m_k(2\alpha-x) \right] \sin k\theta}{+ \lambda_k(\operatorname{sh}2m_k\alpha - \sin 2m_k\alpha) \right] k^3(k^2-1)^2};$$

$$M_\theta = \frac{2ERW_0\xi^3\sqrt{3}}{R_\Delta} \sum_{k=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{\left[ \operatorname{ch}m_k(2\alpha-x)\operatorname{cos}m_kx - \operatorname{ch}m_kx\operatorname{cos}m_k(2\alpha-x) \right] \cos k\theta}{\left[ \operatorname{ch}2m_k\alpha - \cos 2m_k\alpha + \lambda_k(\operatorname{sh}2m_k\alpha - \sin 2m_k\alpha) \right] (k^2-1)}$$

Усилия и моменты  $M_\theta$  могут быть рассчитаны при любом  $x$ .

Поскольку перемещения известны, то не представляет труда определение силовых факторов и напряжённое состояние оболочки.

Нами были выполнены расчёты для гибкого колеса волнового редуктора привода перефутеровки рудоразмольной мельницы. Расчёты проводились в двух вариантах: для реального редуктора и редуктора с уменьшённой в два раза толщиной оболочки гибкого колеса при неизменных остальных параметрах. Результаты сравнительных расчётов показали, что учёт краевого эффекта при толщине оболочки, уменьшённой в 2 раза, благоприятствует созданию более низкого уровня нормальных напряжений и позволяет снизить энергозатраты на непрерывную деформацию оболочки.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П. и др. Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 635с.
2. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложение в технике. М.: Гостехиздат, 1949. 784с.
3. Колкунов Н.В. Основы расчета упругих оболочек. М.: Высшая школа, 1963. 278с.
4. Демидов С.П. Теория упругости. М.: Высшая школа, 1979. 432с.
5. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1977. 486с.
6. Руденко В.Н. Волновые передачи. –М.: МСИ. 1978. –245с.

#### Сведения об авторах:

**Шекян Гамлет Гургенович** – доктор техн. наук. Институт механики НАН Армении.

Тел.+374 562315; E-mail: [hamlet@mechins.sci.am](mailto:hamlet@mechins.sci.am)

**Геворкян Ваган Рубенович** – аспирант

Адрес: Германия, г. Илменау;

# THE BOUNDARY-CONTACT PROBLEM ELECTROELASTICITY FOR PIEZO-ELECTRIC MATERIAL WITH INCLUSION

**Bantsuri Revaz, Shavlakadze Nugzar**

**Abstract.** A contact problem of the theory of electroelasticity of infinite plate from piezo-elastic material with an elastic finite inclusion of variable rigidity is considered. The problem is reduced to the system of integral differential equations with variable coefficient of singular operator. Using the method of orthogonal polynomials we obtain the dual infinite system of linear algebraic equations. We can manage to investigate the obtained system on the quasi-regularity and the method of reduction for approximate solution is developed.

It is considered the problem of finding of mechanical and electric fields, in piezo-elastic body of hexagonal class 6mm, which is strengthened with rigid or elastic inclusions. In conditions of plane deformation, in infinity, on plate acts the homogeneous fields of mechanical and electrical stresses:  $\sigma_{11}^\infty, \sigma_{33}^\infty, \tau_{13}^\infty, E_1^\infty = E_3^\infty = 0$ , on boundary of inclusion it is given electrical field's potential  $\varphi^+ = \varphi^- = \varphi$ .

The inclusion is loaded by horizontal forces with intensity  $\tau_0(x)$ , i. e. the inclusion is being only stretched and vertical elastic displacements are constant along the horizontal axis. When crossing segment  $(-a, a)$  the stress field undergoes a jump. It is required to determinate the law of distribution of tangential and normal contact stresses along the line of the contact.

According to the equilibrium equations of inclusion element and Hooke's law we have

$$\frac{du^{(1)}(x)}{dx} = \frac{1}{E(x)} \int_{-a}^x [\tau^{(1)}(t) - \tau_0(t)] dt \quad (1)$$

$$\frac{dw^{(1)}(x)}{dx} = 0, \quad -a < x < a$$

and the equilibrium equations of the inclusion has the form

$$\int_{-a}^a [\tau^{(1)}(t) - \tau_0(t)] dt = 0, \quad \int_{-a}^a p^{(1)}(t) dt = 0 \quad (2)$$

where  $u^{(1)}(x)$  and  $v^{(1)}(x)$  are the horizontal and vertical displacements of inclusion points;  $\tau^{(1)}(x)$  and  $p^{(1)}(x)$  are respectively the jumps of tangential and normal contact strains, subjects to determination:  $\tau^{(1)}(x) = \tau_-^{(1)}(x) - \tau_+^{(1)}(x)$ ,  $p^{(1)}(x) = p_-^{(1)}(x) - p_+^{(1)}(x)$ ,  $E(x) = \frac{h_0(x)E_0(x)}{1 - \nu_0^2}$

is rigidity of the material of inclusion.

In plane  $x_1 O x_3$  for stress function  $\varphi_1$  and electrical field's potential  $\varphi_2$  we obtain the system of differential equations[1-2]:

$$l_{11}\varphi_1 + l_{12}\varphi_2 = 0, \quad l_{13}\varphi_1 + l_{22}\varphi_2 = 0 \quad (3)$$

where

$$l_{11} = a_{10}\partial_1^4 + a_{12}\partial_1^2\partial_3^2 + a_{14}\partial_3^4, \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \partial_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$l_{12} = l_{21} = a_{21}\partial_1^2\partial_3 + a_{23}\partial_3^3, \quad l_{22} = a_{20}\partial_1^2 + a_{22}\partial_3^2, \quad a_{10} = s_{33} - s_{13}^2s_{11}^{-1}$$

$$a_{12} = s_{44} + 2s_{13}(1 - s_{12}s_{11}^{-1}), \quad a_{14} = s_{11} - s_{12}^2s_{11}^{-1}, \quad a_{21} = s_{13}d_{13}s_{11}^{-1} - d_{33} + d_{15}$$

$$a_{23} = d_{13}(s_{12}s_{11}^{-1} - 1), \quad a_{20} = \varepsilon_{11}, \quad a_{22} = \varepsilon_{33} - d_{13}^2s_{11}^{-1}.$$

$s_{ik}, d_{ik}, \varepsilon_{ik}$  are elastic tractability, piezoelectric modules and dielectric constants, respectively.

Functions  $\varphi_1$  and  $\varphi_2$  are connected with following formulas to mechanical stress components and electrical field's stress

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \partial_3^2 \varphi_1, & \sigma_{33} &= \partial_1^2 \varphi_1, & \tau_{13} &= -\partial_1 \partial_3 \varphi_1, \\ E_1 &= -\partial_1 \varphi_2, & E_3 &= -\partial_3 \varphi_2 \end{aligned} \quad (4)$$

General solutions of equations (3) are represented using three analytical functions

$$\varphi_1 = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \gamma_k \int \Phi_k(z_k) dz_k, \quad \varphi_2 = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \lambda_k \Phi_k(z_k) \quad (5)$$

$$z_k = x_1 + \mu_k x_3, \quad \mu_{3+k} = \bar{\mu}_k, \quad \gamma_k = a_{20} + a_{22} \mu_k^2, \quad \lambda_k = a_{21} \mu_k + a_{23} \mu_k^3$$

$\mu_k$  are roots of characteristic equation:

$$((a_{10} + a_{12} \mu^2 + a_{14} \mu^4)(a_{20} + a_{22} \mu^2) - \mu^2 (a_{21} + a_{23} \mu^2)^2) = 0. \quad \operatorname{Im} \mu_k \neq 0$$

Using formulas (4),(5) we obtain representation for stress component, displacements, vectors of electrical stress and of electrical inductive:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \gamma_k \mu_k^2 \Phi_k'(z_k), & \sigma_{33} &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \gamma_k \Phi_k'(z_k) \\ \tau_{13} &= -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \gamma_k \mu_k \Phi_k'(z_k), & u &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 p_k \Phi_k(z_k), \\ w &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 q_k \Phi_k(z_k), & E_1 &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \lambda_k \Phi_k'(z_k), \end{aligned} \quad (6)$$

$$E_3 = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \lambda_k \mu_k \Phi_k'(z_k), \quad D_1 = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 r_k \mu_k \Phi_k'(z_k), \quad D_3 = -\operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 r_k \Phi_k'(z_k),$$

$$p_k = a_{14} \gamma_k \mu_k^2 + \frac{1}{2} (a_{12} - s_{44}) \gamma_k - a_{23} \lambda_k \mu_k,$$

$$q_k = \frac{1}{2} (a_{12} s_{44}) \gamma_k \mu_k + a_{10} \gamma_k \mu_k^{-1} - (a_{21} - d_{15}) \lambda_k, \quad r_k = a_{20} \lambda_k \mu_k^{-1} - d_{15} \gamma_k.$$

The boundary-contact problem has the following form:

$$2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \Phi_k'(t) \right\}^{\pm} = W_n^{\pm}(t), \quad n = 1, 2, 3. \quad t \in (-a, a)$$

$$W_1^{\pm}(t) = \mp \tau^{(1)}(t), \quad W_2^{\pm}(t) = \mp p^{(1)}(t), \quad W_3^{\pm}(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt}, \quad (7)$$

$$\varphi^+(t) = \varphi^-(t) = \varphi(t)$$

$$a_{1k} = -\gamma_k \mu_k, \quad a_{2k} = -\gamma_k, \quad a_{3k} = -\lambda_k$$

The solution of boundary problem (7) we find by following form

$$\Phi_k'(z_k) = A_k + \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{\omega_k(t) dt}{t_k - z_k}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (8)$$

where constants  $A_k$  satisfies the given conditions in infinity.

From condition (7) we have

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 a_{nk} \omega_k(t) = W_n^{(1)}(t), \quad W_n^{(1)}(t) = -2\tau^{(1)}(t), \quad W_n^{(2)}(t) = -2p^{(1)}(t), \quad W_n^{(3)} = 0$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 a_{nk} \left[ 2A_k + \frac{1}{\pi i} \int_{-a}^a \frac{\omega_k(t) dt}{t - t_0} \right] = W_n^{(2)}(t_0) \quad W_1^{(2)} = W_2^{(2)} = 0, \quad W_3^{(2)} = 2 \frac{d\varphi(t)}{dt}$$

$$\sum_{k=1}^3 \frac{2a_{nk}}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\Omega_k(t) dt}{\sqrt{1-t^2}(t-t_0)} = N_n(t_0), \quad n=1,2,3. \quad \omega_k^0(t) = \omega_k(at) = \frac{\Omega_k(t)}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$N_1(t_0) = -\frac{2}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\tau^{(1)}(s) ds}{s-t_0} - 2\tau_{13}^\infty, \quad N_2(t_0) = -\frac{2}{\pi i} \int_{-a}^a \frac{p^{(1)}(s) ds}{s-t_0} + 2\sigma_{33}^\infty, \quad N_3(t_0) = 2 \frac{d\varphi}{dt} \equiv \varphi_0(t_0)$$

The problem (7) is reduced to system of singular integral and linear algebraic equations:

$$\frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{Q_n(t) dt}{\sqrt{1-t^2}(t-t_0)} = N_n(t_0), \quad n=1,2,3 \tag{9}$$

$$\sum_{k=1}^3 2a_{nk} \Omega_k(t) = Q_n(t)$$

$$Q_n(s_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{N_n(t) \sqrt{1-t^2} dt}{t-s_0} + i\delta_n, \quad n=1,2,3$$

$$Q_1(s_0) = -2T_0 - 2\tau^{(1)}(s_0) \sqrt{1-s_0^2} + i\delta_1 + \frac{2\tau_{13}^\infty s_0}{\pi i}, \quad Q_2(s_0) = -2p^{(1)}(s_0) \sqrt{1-s_0^2} - \frac{2\sigma_{33}^\infty s_0}{\pi i} + i\delta_2,$$

$$Q_3(s_0) = \frac{2}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_0(s) \sqrt{1-s^2}}{s-s_0} ds + i\delta_3 \equiv C(s_0) + i\delta_3, \quad T_0 = \int_{-a}^a \tau_0(t) dt,$$

$$\operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 p_{nk} \int_{-1}^1 \omega_k(t) dt = 0, \quad n=1,2,3$$

$$p_{1k} = p_k, \quad p_{2k} = q_k, \quad p_{3k} = r_k.$$

For determination of constants  $\delta_n$  we obtain the system of linear algebraic equations

$$C_{n1}\delta_1 + C_{n2}\delta_2 + C_{n3}\delta_3 = f_n, \quad n=1,2,3$$

$$C_{nj} = \pi \sum_{k=1}^3 \operatorname{Im}\{p_{nk} b_{jk}\}, \quad j=1,2,3$$

$$f_n = 2(1+\pi)T_0 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 p_{nk} b_{1k} + \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 p_{nk} b_{3k} L, \quad L = \int_{-1}^1 \frac{C(t) dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

The solution of system (9) has the form

$$\Omega_k(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^3 b_{nk} Q_n(t), \quad B = \{b_{nk}\}_{3 \times 3} = A^{-1}, \quad A = \{a_{nk}\}_{3 \times 3}$$

$$\omega_k^0(t) = -b_{1k} \tau(t) - b_{2k} p(t) + (b_{1k} \tau_{13}^\infty - b_{2k} \sigma_{33}^\infty) \frac{1}{\pi i} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{b_{1k}(-2T_0 + i\delta_1) + b_{2k} i\delta_2 + b_{3k}(C(t) + i\delta_3)}{2\sqrt{1-t^2}}$$

$$\Phi_k'(z_k) = A_k - \frac{b_{1k}}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{\tau(t) dt}{t-z_k} - \frac{b_{2k}}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{p(t) dt}{t-z_k} + (b_{1k} \tau_{13}^\infty - b_{2k} \sigma_{33}^\infty) \frac{2}{\pi} \left( i + \frac{z_k}{\sqrt{a^2 - z_k^2}} \right) +$$

$$\frac{b_{1k}(2T_0 + i\delta_1) + b_{2k} i\delta_2 + b_{3k} i\delta_3}{4\sqrt{a^2 - z_k^2}} a + b_{3k} \tilde{C}(z_k), \quad \tilde{C}(z_k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{C(t) dt}{\sqrt{a^2 - t^2}(t-z_k)}$$

and by foreseeing of equilibrium (1) and contact continuum conditions of inclusion, for unknown contact stresses  $\tau(t)$ ,  $p(t)$  we obtain the system of singular integral differential equations

$$\frac{\lambda_1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\varphi'(t) dt}{t-x} + \frac{\lambda_2}{\pi} \int_{-a}^a \frac{p(t) dt}{t-x} = \frac{\varphi(x)}{E(x)} + f_1(x), \quad (10)$$

$$\frac{\lambda_3}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\varphi'(t) dt}{t-x} + \frac{\lambda_4}{\pi} \int_{-a}^a \frac{p(t) dt}{t-x} = f_2(x), \quad -a < x < a$$

where

$$\lambda_1 = \text{Im} \sum_{k=1}^3 p_k b_{1k}, \quad \lambda_2 = \text{Im} \sum_{k=1}^3 p_k b_{2k}, \quad \lambda_3 = \text{Im} \sum_{k=1}^3 q_k b_{1k}, \quad \lambda_4 = \text{Im} \sum_{k=1}^3 q_k b_{2k},$$

If  $T_0 = 0$ ,  $\varphi(x) = \text{const}$ , we have

$$f_1(x) = a_{14} \sigma_{11}^\infty + \frac{1}{2} (a_{12} - s_{44}) \sigma_{33}^\infty + 2 \text{Re} \sum_{k=1}^3 \frac{p_k}{\pi i} (\tau_{13}^\infty b_{1k} - \sigma_{33}^\infty b_{2k}) \left( i + \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right),$$

$$f_2(x) = -\frac{1}{2} (a_{12} - s_{44}) \tau_{13}^\infty + 2 \text{Re} \sum_{k=1}^3 \frac{q_k}{\pi i} (\tau_{13}^\infty b_{1k} - \sigma_{33}^\infty b_{2k}) \left( i + \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right).$$

In the case of a semi-infinite inclusion, using the method of theory of analytical functions the system of equations (10) will be solved effectively [3].

Proved that if  $\text{Re} \mu_k = 0$  ( $k = 1, 2, 3$ ), then  $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ .

Using the method of orthogonal polynomials the system of equations (10) is reduced to the dual infinite system of linear algebraic equations. We can manage to investigate the obtained system on the quasi-regularity [4-6].

### References

- [1] V. Parton, B. Kudryatsev.: Electromagnetoelasticity of piezo-electrics and electrically conductive solids. (Russian) Nauka, Moscow, 1988.
- [2] L. Belokopitova, L. Filshtinskii.: Two-dimensional boundary-value problem of electroelasticity for a piezoelectric medium with cuts. (Russian) PMM, v. 43, 1979, 138-143.
- [3] N. Shavlakadze.: Solution of system of integral differential equations and its application in the theory of elasticity. Journal of Applied Mathematics and Mechanics. ZAMM. Z. Angew. Math. Mech.. 91 (2011), No. 12, 979-992.
- [4] G. Szego.: Orthogonal polynomials. (in Russian). Fizmatgiz, Moscow(1962), 500.
- [5] L. Kantorovich, V. Krylov.: Approximate methods of higher analysis (in Russian). Fizmatgiz, Moscow-Leningrad(1962), 708 p.
- [6] L. Kantorovich, G. Akilov.: Functional analysis (in Russian). Nauka, Moscow(1977), 741 p.

### Information about authors

**Bantsuri Revaz** - Iv. Javakhishvili Tbilisi State University, A. Razmadze Mathematical Institute, Head of the Department of Mathematical theory of elasticity, Doctor of Physical and Mathematical sciences, University St. 2, 0186, Tbilisi, Georgia, (995 32) 2536764, **E-mail:** [rebant@rmi.ge](mailto:rebant@rmi.ge)

**Shavlakadze Nugzar** - Iv. Javakhishvili Tbilisi State University, A. Razmadze Mathematical Institute, Senior Researcher of the Department of Mathematical theory of elasticity, Doctor of Physical and Mathematical sciences, University St. 2, 0186, Tbilisi, Georgia, (995 32) 2942950, **E-mail:** [nusha@rmi.ge](mailto:nusha@rmi.ge)

# ON THE RESONANCE OSCILLATIONS OF LONGITUDINALLY VIBRATING GROWING ROD

Fedotov Igor, Manzhurov Alexander, Shatalov Michael

*Annotation* — The theory of growing structures is a new and fast developing branch of analytical mechanics basing on the theory of partial differential and integral equations. In the present paper the authors analyze qualitative properties of growing rods subjected to longitudinal vibrations. This problem is described in terms of the linear classical, Rayleigh-Love and Rayleigh-Bishop models. It is assumed that the rod is fixed at one end and free at the other end and its length is increasing. For solution of this problem we make a special change of variables which transforms the original equations into new equations with variable coefficients. It is shown that these equations are hyperbolic and possess several interesting and important properties. First of all, the amplitudes of vibration of the rod are growing with time. For example, if the rod length is increasing proportionally to time the amplitudes are also growing proportionally to time. Secondly, if a particular mode is excited it excites other modes. In this case the mechanism of the modes excitation is asymmetric, which means that the low frequency modes possess higher amplitudes compared to the higher frequency modes. The physical explanation of these phenomena is proposed and discussed.

## INTRODUCTION

Let us consider the longitudinally vibrating rod, which is fixed at its left end and free at the right end, and assume that its length is increasing from the free end. Dynamics of this model is investigated in the present paper. There exist many different models describing the longitudinal vibration of slender rods. In the simplest case the lateral effects are neglected at the longitudinal vibration and the dynamics of such rod is described in terms of the wave equation. This is the classical model of the longitudinal vibration of the rod. In the more advanced Rayleigh-Love model the effect of lateral inertia of the longitudinally vibrating rod is taken into consideration. This model is described by the equation with mixed partial derivative of the fourth order. Another, the Rayleigh-Bishop model takes into account both lateral inertia and shear stresses effects and described by equations with mixed and  $x$  – derivatives of the fourth order. Development of these three models of the growing longitudinally vibrating rods is described in the present paper. The boundary conditions of the growing rods are described by the non-conventional time dependent expressions. For conversion of the boundary problems to the conventional formulations a special transformation is introduced. The tradeoff of this approach is a substantial sophistication of the equations of motion of the rods which become non-autonomous with variable coefficients. The corresponding partial differential equations are transformed into the systems of ordinary differential equations by the Galerkin-Kantorovich method. This method is demonstrated on the classical model of the vibrating rod which grows proportionally to time. The infinite system of ordinary differential equations describing the dynamics of this rod is truncated and solved numerically. It is shown that this rod demonstrates the resonance behaviour and increases its amplitude proportionally to time. To explain this behaviour we analyze the modelling equation of the Euler type which describes the dynamics of an insulated vibrating mode.

## EQUATIONS AND BOUNDARY CONDITIONS OF THE ROD DESCRIBED BY THE CLASSICAL MODEL

In the classical case the longitudinal motions of the vibrating rod its dynamics is described by the wave equation:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(t, x) \quad (1)$$

where  $u = u(t, x)$  is longitudinal displacement of the rod,  $F(t, x)$  is exciting force and  $c^2 = \sqrt{E/\rho}$  is speed of the wave propagation. It is assumed that the left end of the rod is fixed and its right end is free. The process of the rod growth is realized by means of deposition of the material of the rod on its right end. Hence, the boundary conditions are:

$$\begin{aligned} x=0: & \quad u(t, 0) = 0 \\ x=1+\varepsilon \cdot f(t): & \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t, 1+\varepsilon \cdot f(t)) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

where  $\varepsilon$  is a small parameter proportional to the speed of growth of the rod.

To represent the boundary value problem (1) – (2) in the standard form it is necessary to use transformation  $(t, x) \rightarrow (\tau, y)$ :

$$t = \tau; \quad x = y \cdot [1 + \varepsilon \cdot f(t)] \quad (3)$$

In new parameters  $(\tau, y)$  equation (1) is as follows:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tau^2} - \frac{2\varepsilon y f'(\tau)}{1 + \varepsilon \cdot f(\tau)} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tau \partial y} - \frac{c^2 - \varepsilon^2 y^2}{[1 + \varepsilon \cdot f(\tau)]^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} - \left\{ \frac{\varepsilon y f''(\tau)}{1 + \varepsilon \cdot f(\tau)} - \frac{2\varepsilon^2 y [f'(\tau)]^2}{[1 + \varepsilon \cdot f(\tau)]^2} \right\} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} = \tilde{F}(\tau, y) \quad (4)$$

where  $f'(\tau) = \frac{df(\tau)}{d\tau}$ ,  $f''(\tau) = \frac{d^2 f(\tau)}{d\tau^2}$ ,  $\tilde{u}(\tau, y) = u[t = \tau, x = y \cdot (1 + \varepsilon \cdot f(\tau))]$ ,

$\tilde{F}(\tau, y) = F[t = \tau, x = y \cdot (1 + \varepsilon \cdot f(\tau))]$ . In this case boundary conditions (2) becomes:

$$y = 0: \quad \tilde{u}(\tau, 0) = 0; \quad y = 1: \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}(\tau, 1) = 0 \quad (5)$$

In the particular case  $f(\tau) = \tau$  (linear growth of the rod) equation (4) is:

$$A^{(Cl)} \tilde{u}(\tau, y) = \tilde{F}(\tau, y) \quad (6)$$

where the classical linear differential hyperbolic operator is:

$$A^{(Cl)} = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{2\varepsilon y}{1 + \varepsilon \tau} \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial y} - \frac{c^2 - \varepsilon^2 y^2}{(1 + \varepsilon \tau)^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{2\varepsilon^2 y}{(1 + \varepsilon \tau)^2} \frac{\partial}{\partial y} \quad (7)$$

### THE RAYLEIGH-LOVE MODEL OF VIBRATING ROD

Original equation of the vibrating rod in this model is:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} = F(t, x) \quad (8)$$

where  $a^2 = \frac{\nu^2 I_p}{S}$ ,  $\nu$  is the Poisson ratio,  $I_p$  is the polar moment of inertia and  $S$  is area of the cross-section of the rod.

Transforming equation (8) by (3) we obtain:

$$\left[ A^{(Cl)} - a^2 A^{(R-L)} \right] \tilde{u}(\tau, y) = \tilde{F}(\tau, y) \quad (9)$$

where  $A^{(R-L)} = \frac{1}{(1 + \varepsilon \tau)^2} \left\{ \frac{\partial^4}{\partial \tau^2 \partial y^2} - \frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon \tau} \left[ y \frac{\partial^4}{\partial \tau \partial y^3} + 2 \frac{\partial^3}{\partial \tau \partial y^2} \right] + \frac{\varepsilon^2}{(1 + \varepsilon \tau)^2} \left[ y^2 \frac{\partial^4}{\partial y^4} + 6y \frac{\partial^3}{\partial y^3} + 6 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \right\}$  (10)

### THE RAYLEIGH-BISHOP MODEL OF VIBRATING ROD

Original equation of the vibrating rod in this model is:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} + b^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = F(t, x) \quad (11)$$

where  $b^2 = \frac{\nu^2 G I_p}{\rho S}$ ,  $G$  is the shear modulus of elasticity and  $\rho$  is the mass density of the rod.

Transforming equation (11) by (3) we obtain:

$$\left[ A^{(Cl)} - a^2 A^{(R-L)} + b^2 A^{(R-B)} \right] \tilde{u}(\tau, y) = \tilde{F}(\tau, y) \quad (12)$$

where

$$A^{(R-B)} = \frac{1}{(1 + \varepsilon \tau)^4} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \quad (13)$$

## SOLUTION OF EQUATION (4) OF THE ROD IN THE CLASSICAL MODEL

The numerical solution is obtained using the Galerkin-Kantorovich method with base functions  $\sin\left[\frac{(2k+1)\pi}{2}y\right]$ , satisfying boundary conditions (5). The following representation of solution is used:

$$\tilde{u}(\tau, y) = \sum_{m=1}^N C_m(\tau) \sin\left[\frac{(2m-1)\pi}{2}y\right] \quad (14)$$

where  $C_m(\tau)$  are unknown functions of time. Furthermore we assume that in equation (4)  $\tilde{F}(\tau, y) = 0$  (free vibrations). Let us substitute expression (14) into equation (4), multiply it by  $2\sin\left[\frac{(2n-1)\pi}{2}y\right]$ , where  $n = 1, 2, \dots, N$ , and integrate the result over  $y$  in the limits from 0 to 1. As a result we obtain the system of coupled ordinary differential equations:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 C_m}{dt^2} + \frac{\tilde{\omega}_m^2(\tau)}{[1 + \varepsilon \cdot f(\tau)]^2} C_m - \frac{\varepsilon \cdot f'(\tau)}{1 + \varepsilon \cdot f(\tau)} \frac{dC_m}{dt} + \frac{\varepsilon \cdot f'(\tau)}{1 + \varepsilon \cdot f(\tau)} \sum_{\substack{n=1 \\ (n \neq m)}}^N \frac{(1)^{m+n} \cdot (2n-1)^2}{(m-n)(m+n-1)} \frac{dC_n}{dt} \\ + \left[ \frac{\varepsilon \cdot f'(\tau)}{1 + \varepsilon \cdot f(\tau)} \right]^2 \frac{(2m-1)^2}{2} \sum_{\substack{n=1 \\ (n \neq m)}}^N \frac{(1)^{m+n+1} \cdot (2n-1)^2}{(m-n)^2 (m+n-1)^2} C_n \approx 0 \end{aligned} \quad (15)$$

where  $m = 1, 2, \dots, N$  and

$$\tilde{\omega}_m^2(\tau) = \frac{c^2 \pi^2 (2m-1)^2}{4} - \frac{\varepsilon (1 + \varepsilon \cdot f(\tau)) f''(\tau)}{2} - \frac{\varepsilon^2 \{ \pi^2 (2m-1)^2 - 6 \} [f'(\tau)]^2}{12} \quad (16)$$

Let us consider a particular case of the linear growth  $f(\tau) = \tau$  of the rod. In this case the system of ordinary differential equations (15) is rewritten as follows (we restrict our consideration by  $N = 4$ ):

$$\begin{aligned} m=1: \quad & \left\{ \frac{d^2 C_1}{dt^2} - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon \tau} \frac{dC_1}{dt} + \frac{\omega_1^2}{(1 + \varepsilon \tau)^2} C_1 \right\} + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon \tau} \left\{ \frac{9}{2} \frac{dC_2}{dt} - \frac{25}{6} \frac{dC_3}{dt} + \frac{49}{12} \frac{dC_4}{dt} \right\} + \\ & \left( \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon \tau} \right)^2 \left\{ \frac{9}{8} C_2 - \frac{25}{72} C_3 + \frac{49}{288} C_4 \right\} \approx 0 \\ m=2: \quad & \left\{ \frac{d^2 C_2}{dt^2} - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon \tau} \frac{dC_2}{dt} + \frac{\omega_2^2}{(1 + \varepsilon \tau)^2} C_2 \right\} + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon \tau} \left\{ -\frac{1}{2} \frac{dC_1}{dt} + \frac{25}{4} \frac{dC_3}{dt} - \frac{49}{10} \frac{dC_4}{dt} \right\} + \\ & \left( \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon \tau} \right)^2 \left\{ \frac{9}{8} C_1 + \frac{225}{32} C_3 - \frac{441}{200} C_4 \right\} \approx 0 \\ m=3: \quad & \left\{ \frac{d^2 C_3}{dt^2} - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon \tau} \frac{dC_3}{dt} + \frac{\omega_3^2}{(1 + \varepsilon \tau)^2} C_3 \right\} + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon \tau} \left\{ \frac{1}{6} \frac{dC_1}{dt} - \frac{9}{4} \frac{dC_2}{dt} - \frac{49}{6} \frac{dC_4}{dt} \right\} + \\ & \left( \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon \tau} \right)^2 \left\{ -\frac{25}{72} C_1 + \frac{225}{32} C_2 + \frac{1225}{72} C_4 \right\} \approx 0 \\ m=4: \quad & \left\{ \frac{d^2 C_4}{dt^2} - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon \tau} \frac{dC_4}{dt} + \frac{\omega_4^2}{(1 + \varepsilon \tau)^2} C_4 \right\} + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon \tau} \left\{ -\frac{1}{12} \frac{dC_1}{dt} + \frac{9}{10} \frac{dC_2}{dt} - \frac{25}{6} \frac{dC_3}{dt} \right\} + \\ & \left( \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon \tau} \right)^2 \left\{ \frac{49}{288} C_1 - \frac{441}{200} C_2 + \frac{1225}{72} C_3 \right\} \approx 0 \end{aligned} \quad (17)$$

where  $\omega_1^2 = \frac{1}{12}[3\pi^2 c^2 - \varepsilon^2(\pi^2 - 6)]$  ,  $\omega_2^2 = \frac{1}{4}[9\pi^2 c^2 - \varepsilon^2(3\pi^2 - 2)]$ ,  $\omega_3^2 = \frac{1}{12}[75\pi^2 c^2 - \varepsilon^2(25\pi^2 - 6)]$ ,  
 $\omega_4^2 = \frac{1}{12}[147\pi^2 c^2 - \varepsilon^2(49\pi^2 - 6)]$ .

MODELLING EQUATION FOR THE VIBRATING ROD

It follows from system (17) that for all modes the following modelling equation could be composed:

$$\frac{d^2W(\tau)}{d\tau^2} - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon\tau} \frac{dW(\tau)}{d\tau} + \frac{\omega^2}{(1+\varepsilon\tau)^2} W(\tau) = 0 \tag{18}$$

This equation belongs to the Euler type of ordinary differential equation and its general solution is :

$$W(\tau) = (1+\varepsilon\tau) \{ C_1 \cos[\alpha \cdot \ln(1+\varepsilon\tau)] + C_2 \sin[\alpha \cdot \ln(1+\varepsilon\tau)] \} \tag{19}$$

where  $\alpha = \sqrt{(\omega/\varepsilon)^2 - 1}$ . From solution (19) one can conclude that amplitude of linear vibration of the linearly growing undamped rod grows proportionally to time  $\tau$ .

NUMERICAL ANALYSIS

For the purposes of numerical analysis of the linearly growing rod we composed the truncated system of  $N = 10$  ordinary differential equations of type (17). The initial conditions correspond to deformation of the rod on the first form of the corresponding non-growing rod of the unit length:

$$\tau = 0: \quad \tilde{u}(0, y) = \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right), \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau}(0, y) = 0 \tag{20}$$

Solution of equations for the first four modes is shown in Fig. 1 - 4.

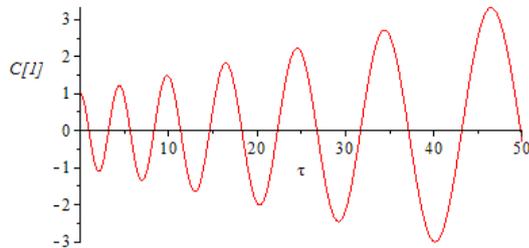


Figure 1. Resonant behavior of vibration of the rod at the first mode (solution of the classical rod's modelling equation)

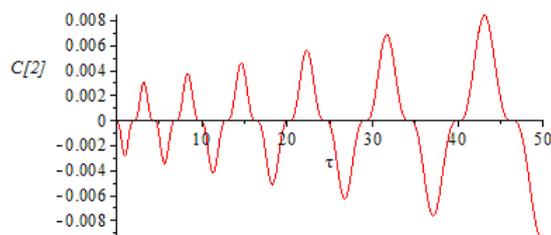


Figure 2. Resonant behavior of vibration of the classical rod at the first mode.

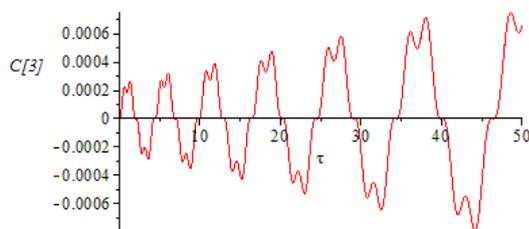


Figure 3. Resonant behavior of vibration of the classical rod at the third mode

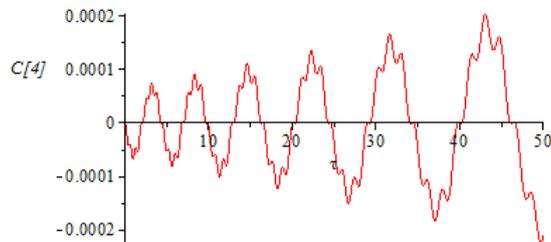


Figure 4. Resonant behavior of vibration of the classical rod at the fourth mode

Further the similar solutions with initial conditions (20) were performed for  $4 \leq N < 10$ . It was found that solutions for the first four modes are visually indistinguishable from solutions in Fig. 1 - 4. Moreover, the graph

of solution (19) of modelling equation (18) with initial conditions  $W(0)=1$ ,  $dW/d\tau(0)=0$  is visually indistinguishable from the plot in Fig. 1. Results of numerical analysis of equations (8) and (11) of the Rayleigh-Love and Rayleigh-Bishop models obtained by the described method of transformation of the original partial differential to the systems of the ordinary differential equations demonstrate the qualitative similarities with the classical model.

## CONCLUSIONS

In this article, the problem of vibration of growing rod is considered. Three different models: linear classical, Rayleigh-Love and Rayleigh-Bishop models are analyzed. It is assumed that the rod is fixed at one end and free at the other end and its length is increasing. It is demonstrated that these equations are hyperbolic and the amplitudes of vibration of the rod are growing with time. In a particular case, if the rod length is increasing proportionally to time the amplitudes are also growing proportionally to time. Further investigation demonstrates the second interesting effect: if a particular mode is excited it excites other modes and the mechanism of the modes excitation is asymmetric: the low frequency modes have higher amplitudes in comparison with the higher frequency modes.

## REFERENCES

- [1] A.V. Manzhurov, S.A. Lychev, On the Equilibrium of Accreted Plates, Preprint of the Institute for Problems in Mechanics of Russian Academy of Sciences, Moscow (2010).
- [2] A.D. Polyanin, A.V. Manzhurov, Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists, Chapman and Hall (CRC), (2006).
- [3] Kuznetsov, A.V. Manzhurov, S.A. Fedotov, Heat Conduction Problem for a Growing Ball, *Mechanics of Solids*, Vol. 46, No. 6, pp. 929-936 (2011)

### Information about authors

**Igor Fedotov** Department of Mathematics and Statistics, Tshwane University of Technology, Private Bag X680, Pretoria 0001, South Africa  
e-mail: fedotovi@tut.ac.za

**Alexander Manzhurov** Institute for Problems in Mechanics of Russian Academy of Science & Prospekt Vernadskogo, 101, Moscow, Russia  
e-mail: manzh@ipmnet.ru

**Michael Shatalov** Department of Mathematics and Statistics, Tshwane University of Technology, Private Bag X680, Pretoria 0001 and Sensor Science and Technology (SST) of CSIR Material Science and Manufacturing, P.O. Box 395, Pretoria 0001, CSIR, South Africa

e-mail: mshatlov@csir.co.za

## CREEP OF CEMENTOSOILS DURING COMPRESSION

Hayroyan S., Attarpury A.

The current investigation is devoted to the main questions of the creep of the cementosoil. The object of exploration is clayey bottom soils, which is the main element of the cementosoils, taken from the territories of Araq town of Eqyabad region of Islamic Republic of Iran. The soils of different ages - 7, 21, 28, and 60 days old and with 1.68, 1.60, 1.55, 1.50 g/cm<sup>3</sup> density of soil skeleton, mixture of 93 % of soil and 7% of cement were tested on temporary compressive strength and on parameters of creep.

During the test were taken into consideration the role of deformations of shrinkage in the compressive deformations. The creep deformation is taken as the differences between the full deformation and deformation of shrinkage. At the same stress increase of the age initiate decrease of creep deformations because of the rise of the strength during the time at cementosoils of different ages.

As a result of the current investigation it has been established that cementosoils of the same age under the conditions of equal relative compressive strength (independent of initial compactness) for the same periods the relative deformations of creep are practically equal to each other.

Many scientists dealt with the issue of concrete and soils creep deformations [1-5]. Unfortunately scientific investigations of creep deformations of cementosoils are practically absent. This work aims to study the creep properties of cementosoils that widely applied in road-building construction in the territory of Eqyabad city of Iran Islamic Republic.

In the engineering practice in addition to road-building application, the cementosoils are widely applied as a base for different buildings.

Application of the cementosoil produces high economical effects in case of basement arrangement, than the caisson or the pile bases. The cement soils undergo high pressing tensions when applied as a basis of heavy buildings. They bring to long-lasting pressure deformations (creep). In this condition, it is necessary to investigate not only their temporal pressure tension but also the issue of their long-lasting deformation in static tense state. The factors affecting cementosoils creep are various. Particularly it depends on the cement type, the particle-size composition, initial humidity and the physical state of cementosoil. Unlike disperse soils, during age growth the mechanical properties of cement soils undergo changes. Clay soils of the territory of Araq city, Eqyabad region of Iranian Islamic Republic, served as an object of this investigation. Before getting the mixture of cement and soil, the particle size composition, water and physical properties of soils have been determined in the geotechnical laboratory of the Azat University of Araq City (Iran). The average values of geotechnical properties of soils are given in table 1 and 2.

Table 1

Diameter of particles, mm	20-10	10-5	5-2	2-1	1-0.5	0.5-0.25	0.25-0.1	0.1-0.05	0.05-0.005	<0.0005
Composition, %	7.6	2.6	2.9	1.5	1.0	1.9	0.8	19.3	38.9	23.5

Table 2

Natural humidity (W %)	Specific gravity of the mineral particles ( $\rho_s$ g/cm <sup>3</sup> )	Upper limit of plasticity (W <sub>L</sub> %)	Lower limit of plasticity (W <sub>P</sub> %)	Plasticity index (I <sub>P</sub> )	Optimum humidity (W %)	Maximum specific gravity of the soil skeleton ( $\rho_{dmax}$ g/cm <sup>3</sup> )	Soluble salt content composition, %
8.0	2.68	31,3	22,2	9,1	20,5	1.68	0.510

According to laboratory tests, the soils are considered to be as aleuro-pelitic dominant clays with a minor sandy mixture. The Portland cement of mark 400 was used in prepared cementosoils' mixtures. The cement content in the mixture was defined 7 percent and the soil content was 93 percent. The optimal humidity of the cementosoil was determined as  $W=19.3\%$  and the maximum skeleton density was  $\rho_d=1.65 \text{ g/cm}^3$ . The lab tests of the temporal resistance to pressure and of creep deformations of cementosoils of different initial skeleton density ( $\rho_d=1.65$ ;  $1.60$ ;  $1.55$ ;  $1.50 \text{ g/cm}^3$ ) and different ages (7, 21, 28, and 60 days old) have been conducted on the press, using cylindrical specimen with 5cm diameter and 12.5cm of height. The loading speed in all experiments was 3mm/min. The average values of temporal resistance to pressure of triple experiments of the cementosoils of different ages and skeleton density are shown in table 3.

Table 3

Age, days	Temporal resistance to pressure ( $\sigma$ , kg/cm <sup>2</sup> ), if the skeleton density ( $\rho_d$ ) is:			
	$\rho_d=1.65 \text{ g/cm}^3$	$\rho_d=1.60 \text{ g/cm}^3$	$\rho_d=1.55 \text{ g/cm}^3$	$\rho_d=1.50 \text{ g/cm}^3$
60	56.4	56.8	53.4	51.1
28	--	54.0	52.2	--
21	43.3	47.4	45.3	43.5
14	42.9	42.8	40.0	38.4
7	33.4	32.6	31.7	30.2

To estimate the influence of age and initial skeleton density on creep deformations, a question has been put forward to study the relationship between the creep deformations and relative resistance to pressure  $\sigma/\sigma_{trp}$  ( $\sigma_{trp}$  -temporal resistance to pressure) on prepared samples of the cementosoils of different ages and skeleton density. The samples with 1.50; 1.55; 1.60, and  $1.68 \text{ g/cm}^3$  skeleton density and of daily age 7, 21, 28, and 60 day old were tested respectively.

The cement soils creep deformations are conditioned by the relationship between relative pressure tension  $\sigma/\sigma_{temp.pr.res}$  and time (t) which were studied by two-curve graphical method [5]. In the first case it was assumed the constant relative pressure tension  $\sigma/\sigma_{temp.pr.res}=0.25$ , and in the second case the gradual loading was applied  $\sigma/\sigma_{temp.pr.res}=0.25, 0.50, \text{ and } 0.75$ . The duration of creep experiment was continued 60 days. The creep deformations of the cementosoil samples are result of shrinkage and external loadings. Conditioned by pressure tensions, the creep deformations have been calculated by the difference between total and shrinkage deformations. To separate the shrinkage deformation, the shrinkage deformations were registered on the samples of different ages and different skeleton density for different periods. The experimental curves of the creep samples with different initial skeleton density and age are given on figure 1a; b and 2a; b obtained by constant  $\sigma/\sigma_{temp.pr.res}=0.25$  and gradual loading  $\sigma/\sigma_{temp.pr.res}=0.25, 0.50, \text{ and } 0.75$  respectively. The creep curves of cementosoils of the same age are represented in the way of single family of the curves.

The mechanical properties of the cementosoils undergo changes because of getting older during the time. As it is seen from creep curves conditioned by the factor of aging (making firmer during of the long-term period), in the cases of all levels of pressing tensions the creep deformations are put out during the time. Independent of the initial density degree of the cementooils the creep relative deformations is equal in case of equal relative pressure strength (figure. 1a, b, 2 a, b).

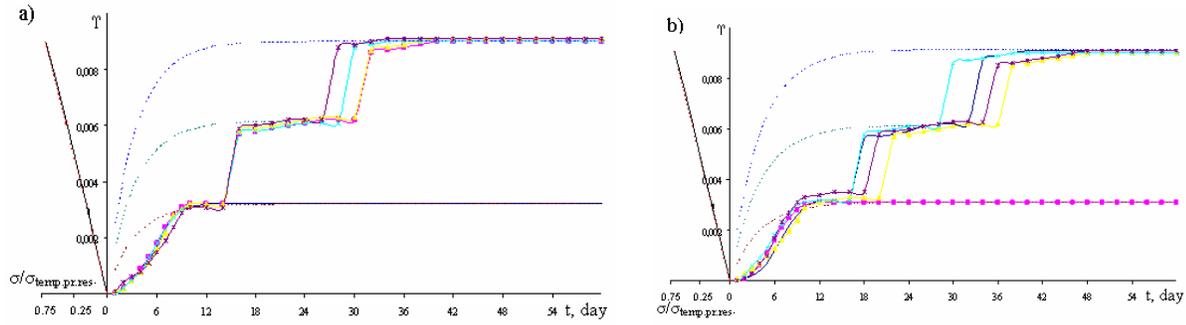


Figure 1: Family of the experimental creep curves:

- a) 7 days old: the skeleton density respectively is 1.68, 1.60, 1.55, and 1.50g/cm<sup>3</sup>
- b) 14 days old: the skeleton density respectively is 1.68, 1.60, 1.55, and 1.50g/cm<sup>3</sup>

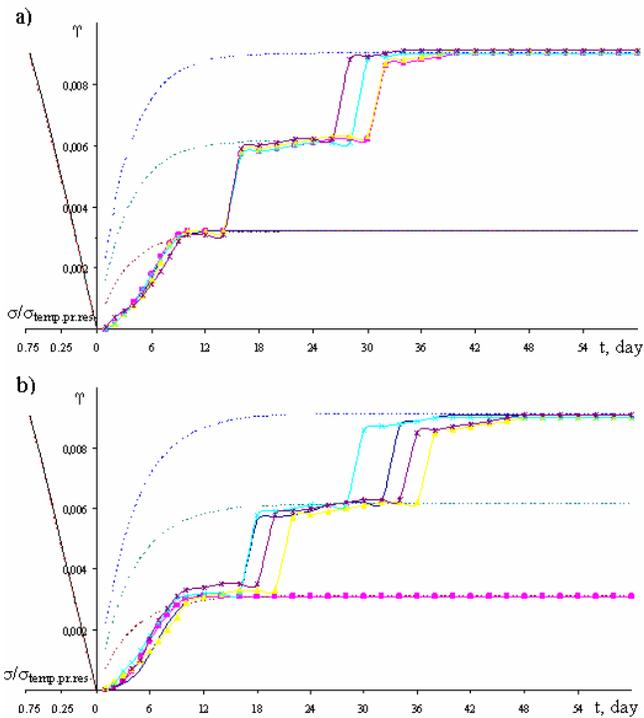


Figure 2: Family of the experimental creep curves:

- a) 21 days old: the skeleton density respectively is 1.68, 1.60, 1.55, and 1.50g/cm<sup>3</sup>
- b) 60 days old: the skeleton density respectively is 1.68, 1.60, 1.55, and 1.50g/cm<sup>3</sup>

Based on the obtained results, in case of any density of the skeleton with the same age it is possible to extend the obtained indexes into other samples of the cementosoils with the same age but with another initial skeleton density. Hence, it is necessary to substitute the pressing tensions ( $\sigma$ ) with relative pressing tensions ( $\sigma/\sigma_{temp.pr.res}$ ) in the creep equations. Particularly the calculations of creep parameters of 14 days old cementosoil were carried out for the samples with  $\rho_d=1.55g/cm^3$ . Taking into consideration the changes of initial skeleton density and non-linear

creep deformations to register the experimental curves it has been use the formula of aging theory:

$$\varepsilon(\sigma / \sigma_{\text{temp.pr.res.}}, t) = \omega(t) \times F(\sigma / \sigma_{\text{temp.pr.res.}}), \quad (1)$$

where the  $\omega(t)$  is the creep deformation in case of a unit of the relative pressure strength.

The  $F(\sigma / \sigma_{\text{temp.pr.res.}})$  is the function of the relative pressing tensions, which takes into consideration dependence of the relative pressing tension and the non-linear creep deformation. This meets to the condition of  $F(\sigma / \sigma_{\text{temp.pr.res.}}) = 1$ .

In the case of likeness of the curves, it gives an opportunity to pass from one curve to another.

As the creep deformations put out in some period for approximation, we have made use of the exponential function suggested by Kolraush:

$$\omega(t) = c_0 (1 - \exp[-\eta t]). \quad (2)$$

As a result of approximation, the creep equation has been obtained for 14 days old cementosoil with  $\rho_d = 1.55 \text{ g/cm}^3$ :

$$\omega(t) = 0.003(1 - \exp[-0.2482t]) \quad (3)$$

In the figure 1a the (1) curve equation is represented by the dotted line (in the right side).

The approximation of the creep deformation- relative pressing tension dependence for a certain day we have made use of:

$$\varepsilon(\sigma / \sigma_{\text{temp.pr.res.}}, t = \text{const}) = B(\sigma / \sigma_{\text{temp.pr.res.}}) \quad (4)$$

gradual function, on the basis of which it has been calculated the following tension function:

$$f(\sigma / \sigma_{\text{temp.pr.res.}}) = B(\sigma / \sigma_{\text{temp.pr.res.}}) / \omega(t, \sigma / \sigma_{\text{temp.pr.res.}} = \text{const})$$

As a result of approximation of the experimental creep curve for 42 days old cementosoil, the following expression is obtained:

$$\varepsilon(\sigma / \sigma_{\text{temp.pr.res.}}, t = 42) = 0.0121(\sigma / \sigma_{\text{temp.pr.res.}})^{0.9802} \quad (5)$$

In the figure 1a and 1b the curve of this expression is drawn by dotted lines on the left side of the sketch.

The function of the tension will be calculated by the following relation:

$$f(\sigma / \sigma_{\text{temp.pr.res.}}) = 0.0121(\sigma / \sigma_{\text{temp.pr.res.}})^{0.9802} / \omega(t=42 \text{ days}; \sigma / \sigma_{\text{temp.pr.res.}} = 0.25) \quad (6)$$

As well as  $\omega(t=42 \text{ days old}; \sigma / \sigma_{\text{temp.pr.res.}} = 0.25) = 0.0031$  the function of tension will be defined by the following expression:

$$f(\sigma / \sigma_{\text{temp.pr.res.}}) = 3.9032(\sigma / \sigma_{\text{temp.pr.res.}})^{0.9802} \quad (7)$$

For the 14 days old cementosoil skeleton density  $\rho_d = 1.55 \text{ g/cm}^3$  we will get the following generalized equalization:

$$\varepsilon(\sigma / \sigma_{\text{temp.pr.res.}}, t) = 0.0121[1 - \exp[-0.2482 t]] \times (\sigma / \sigma_{\text{temp.pr.res.}})^{0.9802} \quad (8)$$

In the same way, the generalized creep equations for the cementosoils of other ages have been calculated:

for 7 days old cementosoils with skeleton density  $\rho_d = 1.65 \text{ g/cm}^3$

$$\varepsilon(\sigma / \sigma_{\text{temp.pr.res.}}, t) = 0.0119 [1 - \exp[-0.2153 t]] \times (\sigma / \sigma_{\text{temp.pr.res.}})^{0.9233} \quad (9);$$

for 21 days old cementosoils with skeleton density  $p_d= 1.65\text{g/cm}^3$   
 $\varepsilon(\sigma/\sigma_{\text{temp.pr.res.}}, t) = 0,0162 [1 - \exp[-0,2517 t]] \times (\sigma/\sigma_{\text{temp.pr.res.}})^{0,9566}$  (10);

for 28 days old cementosoils with skeleton density  $p_d= 1.55\text{g/cm}^3$   
 $\varepsilon(\sigma/\sigma_{\text{temp.pr.res.}}, t) = 0,0165 [1 - \exp[-0,183 t]] \times (\sigma/\sigma_{\text{temp.pr.res.}})^{1,015}$  (11)

for 60 days old cementosoils with skeleton density  $p_d= 1.65\text{g/cm}^3$   
 $\varepsilon(\sigma/\sigma_{\text{temp.pr.res.}}, t) = 0,0163 [1 - \exp[-0,2169 t]] \times (\sigma/\sigma_{\text{temp.pr.res.}})^{0,9431}$  (12)

The creep curves that are drawn according to expressions of 8, 9, 10, 11, and 12 in the right side of the figures 1 and 2 are depicted by dotted lines on the right side of the sketches.

### Conclusion

1. The attenuation creep deformations are put out during the time regardless of the age of the cementosoils and the initial skeleton density under the conditions of constant external pressing tensions.
2. The relative creep deformations of the cementosoils of the same age under the same constant relative pressing tensions are equal in practice.
3. When studying the creep properties of cementosoils of the same age, it is important to determine the equation of creep for any initial skeleton density and obtained parameters apply to other soils of the same age. Hence, it is necessary only to replace the pressing tension  $\sigma$  in equation into relative pressing tensions  $\sigma/\sigma_{\text{temp.pr.res.}}$ .

### References

1. Арутюнян Н.Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М.-Л.: Гостехтеориздат, 1952. 323с.
2. Гольдехблат И.И., Николаенко Н.А. Теория ползучести строительных материалов и её приложения. М.: Госстройиздат, 1960. 256 с.
3. S.S.Vyalov Rheological principles of soil mechanics Higher Schools Publishing House, Moscow, 1978 p. 447
4. Маслов Н.Н. Физико-техническая теория ползучести глинистых грунтов в практике строительства. М.: Стройиздат, 1984. 176с.
5. S.R.Meschyan Experimental foundation of clayey soils rheology. Gitutyun publisher, Yerevan 2008 p.805

### Information about authors

**Sargis Hayroyan** – senior researcher, Institute of Mechanics NAS RA, PhD, [hairoyan@ysu.am](mailto:hairoyan@ysu.am)

**Azizolla Attarpury** – post graduate, Azad University, Iran

# THIN-WALLED TUBE UNDER RADIAL EDGE LOAD

Kolesnikov A.M.

This work treats the problem describing the equilibrium of a thin-walled cylindrical non-linearly elastic membrane which is subjected to an outward radial extension applied to one of its ends only. The material of membrane is hyperelastic, isotropic and incompressible. We carefully formulated the geometrically exact equations from the variational principle of minimum potential energy within the framework of nonlinear membrane theory. For Bartenev-Khazanovich and Chernykh-Shubina strain energy functions the solutions were obtained explicitly. It follows from results that these materials have limit value of stretching which depend on the material constants and the initial radius.

## 1. INTRODUCTION

We consider the thin-walled tube made of hyperelastic isotropic incompressible materials. The tube is subjected to an outward radial extension applied to one of its ends only. The problem is solved within the framework of nonlinear membrane theory. The equilibrium equation and boundary conditions are derived from the variational principle of minimum potential energy for arbitrary hyperelastic isotropic incompressible material. The solutions obtained explicitly for Bartenev-Khazanovich material [1] and Chernykh-Shubina material. The similar problem was studied by C.-H. Wu [2]. In [2] the problem of stretching a tube into an annulus was considered and the exact solutions was obtained for both Mooney material and neo-Hookean material.

## 2. FORMULATION

Consider a thin-walled cylindrical tube of radius  $r_0$ , length  $l$  and thickness  $h$ . The tube is subjected to an outward radial extension applied to one of its ends so that the outer radius is  $A > r_0$  in the deformed configuration. We assume that the deformed configuration is an axisymmetric. It follows from the equilibrium equations that the deformed membrane may consists from two parts: the first part is undeformed and the second part is an annulus (Figure 1). In this case the boundary between these parts is unknown. If the outer radius  $A$  is large enough then the whole tube can be stretched into an annulus. We suppose that the tube is long such that there is the undeformed part in deformed configuration.

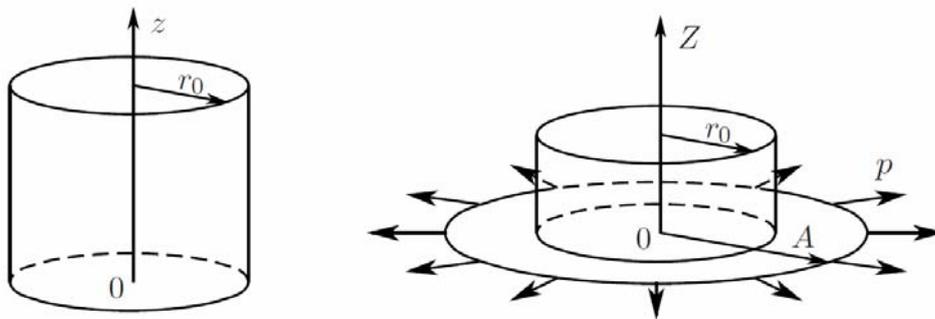


Figure 1. Initial and deformed configuration.

We choose a cylindrical coordinate system  $(r, \varphi, z)$ . The any point  $\{r_0, \varphi, s\}$  ( $s \in [0, l], \varphi \in [0, 2\pi]$ ) in middle surface of tube is carried by the deformation to the point  $\{\hat{R}(s), \varphi, \hat{Z}(s)\}$  in deformed middle surface, where

$$\hat{R}(s) = \begin{cases} R(s), & s \in [0, s_c], \\ r_0, & s \in [s_c, l]; \end{cases} \quad \hat{Z}(s) = \begin{cases} 0, & s \in [0, s_c], \\ s - s_c, & s \in [s_c, l]; \end{cases} \quad (2.1)$$

In this problem the principal extension ratios in the radial and circumferential directions are, respectively,

$$\lambda_s = -\frac{dR(s)}{ds}, \quad \lambda_\varphi = \frac{R(s)}{r_0}. \quad (2.2)$$

The principal extension ratio in the direction normal to middle surface is  $\lambda_n = (\lambda_s \lambda_\phi)^{-1}$  for incompressible materials. The equilibrium equation and the boundary conditions may be derived from the variational principle of minimum potential energy. The equilibrium equation may be reduced to the form

$$W - \lambda_s \frac{\partial W}{\partial \lambda_s} = C. \quad (2.3)$$

Here  $W(\lambda_s, \lambda_\phi)$  is the strain energy density,  $C$  is a constant of integration. This equation may be derived from the equilibrium equations of nonlinear elastic membrane using the first integral of Pipkin [4].

We obtain from the variational principle that the boundary conditions are

$$R(0) = A, \quad R(s_c) = r_0, \quad C = 0. \quad (2.4)$$

### 3. BARTENEV–KHAZANOVICH MATERIAL

The strain energy function has form [3]

$$W = 2\mu \left( \lambda_s + \lambda_\phi + \frac{1}{\lambda_s \lambda_\phi} - 3 \right). \quad (3.1)$$

The equilibrium equation (2.3) may be rewritten for Bartenev–Khazanovich material (3.1) in the following form

$$\frac{dR}{ds} = -\frac{2r_0^2}{R(3r_0 - R)}. \quad (3.2)$$

The solution of problem may be written in the form

$$s(R) = \frac{3}{4r_0} (A^2 - R^2) - \frac{1}{6r_0^2} (A^3 - R^3), \quad s_c = s(r_0) = \frac{3}{4r_0} (A^2 - r_0^2) - \frac{1}{6r_0^2} (A^3 - r_0^3). \quad (3.3)$$

The nonzero stress resultants in the radial and circumferential direction are, respectively,

$$T_s(R) = \frac{h}{\lambda_\phi} \frac{\partial W}{\partial \lambda_s} = \frac{\mu h}{2Rr_0^2} (4r_0 - R)(R - r_0)^2, \quad T_\phi(R) = \frac{h}{\lambda_s} \frac{\partial W}{\partial \lambda_\phi} = \frac{3\mu h}{2r_0^2} (3r_0 - R)(R - r_0). \quad (3.4)$$

We introduce the dimensionless radial edge load and the dimensionless outer radius as

$$p^* = \frac{r_0 T_s(A)}{\mu h}, \quad A^* = \frac{A}{r_0}. \quad (3.5)$$

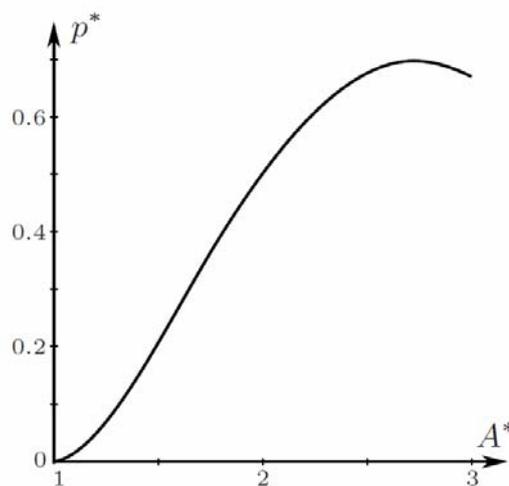


Figure 2. Outer radius vs radial edge load for Bartenev–Khazanovich material.

The dependence between the load  $p^*$  and the outer radius  $A^*$  is shown in figure 2. We note that the physically possible solution exists for  $A < 3r_0$  from  $\lambda_s > 0$  and equations (2.2), (3.2), i.e. for a membrane made of Bartenev–Khazanovich material  $A^* < 3$ . The dependence “load–outer radius” is not monotonic. There is the maximum load which do not corresponds to the maximum outer radius.

#### 4. CHERNYKH–SHUBINA MATERIAL

The strain energy function has form [4]

$$W = \mu \left[ (1 + \beta) \left( \lambda_s + \lambda_\varphi + \frac{1}{\lambda_s \lambda_\varphi} - 3 \right) + (1 - \beta) \left( \lambda_s \lambda_\varphi + \frac{1}{\lambda_s} + \frac{1}{\lambda_\varphi} - 3 \right) \right], \quad |\beta| \leq 1. \quad (4.1)$$

The equilibrium equation (2.3) may be rewritten for Chernykh–Shubina material (4.1) in the following form

$$\frac{dR}{ds} = \frac{2r_0((1 - \beta)R + (1 + \beta)r_0)}{(1 + \beta)R^2 + r_0^2(1 - \beta) - 6r_0R}. \quad (4.2)$$

The solution may be obtained in the explicit form for any  $|\beta| < 1$ .

$$s(R) = \left( \frac{\beta + 1}{\beta - 1} \right) \frac{R^2 - A^2}{4r_0} - \frac{\beta^2 - 4\beta + 7}{2(\beta - 1)^2} (R - A) + \frac{4r_0}{(\beta - 1)^3} \ln \left( \frac{(1 - \beta)R + (1 + \beta)r_0}{(1 - \beta)A + (1 + \beta)r_0} \right). \quad (4.3)$$

The nonzero stress resultants in the radial and circumferential direction are, respectively,

$$T_s = \frac{\mu h (R - r_0)^2 (2Rr_0(7 + \beta^2) - R^2(1 + \beta)^2 - r_0^2(1 - \beta)^2)}{4R^2r_0((1 - \beta)R + (1 + \beta)r_0)},$$

$$T_\varphi = \frac{\mu h (R - r_0) (R^2(1 + \beta)^2 - r_0^2(1 - \beta)^2 - 2Rr_0(\beta^2 + \beta + 4)) (r_0^2 - 2R^2)(1 - \beta) - r_0R(5 + \beta)}{4R^2r_0((1 - \beta)R + (1 + \beta)r_0)^2}. \quad (4.4)$$

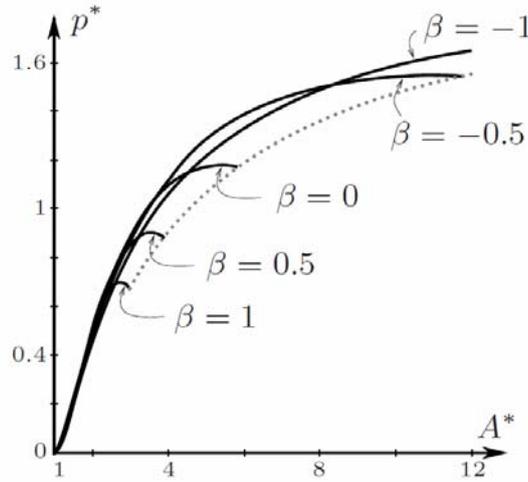


Figure 3. Outer radius vs radial edge load for Chernykh–Shubina materials.

The solution has the simpler form for  $\beta = -1$

$$s(R) = \frac{3}{2}(A - R) + \frac{r_0}{2} \ln \frac{R}{A}, \quad s_c = \frac{3}{2}(A - r_0) + \frac{r_0}{2} \ln \frac{r_0}{A}. \quad (4.5)$$

The nonzero stress resultants in the radial and circumferential direction are, respectively,

$$T_s = \frac{\mu h}{2R^3} (4R - r_0)(R - r_0)^2, \quad T_\varphi = \frac{\mu h}{R^3} (R - r_0)(2R^2 + 2Rr_0 - r_0^2). \quad (4.6)$$

The dependences between the dimensionless radial edge load  $p^*$  and dimensionless outer radius  $A^*$  for membranes made of Chernykh–Shubina material are shown in figure 3. For  $-1 < \beta \leq 1$  the dependence “load–outer radius” is not monotonic. There is the maximum of pressure which do not corresponds to the maximum outer radius for  $-1 < \beta \leq 1$ . For  $\beta = -1$  the dependence “load–outer radius” is monotonically increasing and the load  $p^*$  has the limit  $2r_0$  when  $A^*$  tends to infinity.

From  $\lambda_s > 0$ , (2.2) and (3.2) the physically possible solution exists for

$$A < \frac{3 + \sqrt{8 + \beta^2}}{1 + \beta} r_0. \quad (4.7)$$

The dotted line in figure 3 shown the dependence between dimensionless maximum outer radius  $A^*$  which is possible and dimensionless radial edge load  $p^*$  for  $-1 \leq \beta \leq 1$ . For  $\beta = -1$  the outer radius  $A$  has not restriction.

## 5. CONCLUSIONS

In this work, the finite deformations of an isotropic circular cylindrical membrane subjected to a finite extension were investigated. The solution of problem was obtained in the explicit form for Bartenev–Khazanovich and Chernykh–Shubina strain energy functions. These functions give a simple and adequate description of the elastic properties of rubber-like materials over a wide range of deformations (extension ratios of less than 2 – 3) [4]. Analysis of the problem has shown that there are the limits on the amount of strain for the considered materials. But they lie outside the range of deformations which usually describe these material models.

## Acknowledgements

This research was supported by the President of the Russian Federation (grant MK-439.2011.1), by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (the federal target program “Scientific and scientific-pedagogical personnel of innovative Russia” in 2009-2013, the state contract No. P596) and by the Russian Foundation for Basic Research (grant 12-01-00038-a).

## REFERENCE

1. Kolesnikov A. M. Radial deformation of the cylindrical membrane, Proceeding of the XXXIX summer School–Conference “Advanced Problems in Mechanics”, 2011.
2. Wu C.-H. Tube to Annulus - an Exact Nonlinear Membrane Solution, Quarterly of Applied Mathematics, vol. XXVII(4), 1970.
3. Bartenev G. M., Khazanovich T. N. Law of Highly Elastic Deformation of Grid Polymers [in Russian], Vysokomolekulyarnye Soedineniya, vol. 2(1), 1960.
4. Chernykh K. F. Nonlinear Theory of Elasticity in Mechanical Engineering Calculations [in Russian], Mashinostroenie, Leningrad, 1986.
5. Pipkin A. C. Integration of an Equation in Membrane Theory, ZAMP, vol. 19(5), 1968.

## Information about authors

Kolesnikov Alexei Mikhailovich – lecturer, Southern Federal University, Faculty of Mathematics, Mechanics and Computer Science, Department of Theory of Elasticity  
E-mail [Alexei.M.Kolesnikov@gmail.com](mailto:Alexei.M.Kolesnikov@gmail.com)

## Love Waves in an FGPM Layered Structure Manukyan G.A., Manukyan Z.K.

**Abstract:** An analytical approach is used to investigate the existence and propagation behavior of surface electro-elastic Love waves in an ideally layered structure consisting of a functionally graded piezoelectric substrate and a dielectric layer. The piezoelectric substrate is polarized in the direction perpendicular to the wave propagation plane and its material parameters change continuously along the thickness direction. The dispersion equations for the existence of surface Love waves with respect to phase velocity are obtained for electrically open and shorted cases, respectively. A detailed investigation of the effects of material gradient on dispersion curve, phase velocity, group velocity, and electromechanical coupling factor is carried out. Numerical results show that material gradient significantly affects the fundamental mode of Love waves but has only negligible effects on the high order modes. Large electromechanical coupling factors could be achieved by an appropriate adjustment of gradient coefficients, which is of practical interest for designing acoustic wave devices.

Transverse surface waves (e.g., Love wave and Bleustein- Gulyaev wave) are attractive for designing signal-processing devices due to their high performance and simple particle motion. To achieve high performance, many such devices adopt layered piezoelectric structures consisting of a piezoelectric layer and an elastic substrate or an elastic layer and a piezoelectric substrate. Much research work has been done on the propagation of transverse surface waves in such layered structures [1-9]. Much earlier, Curtis and Redwood [1] investigated the existence of transverse surface waves in a piezoelectric substrate carrying a finite-thickness metal layer. Subsequently, Danoyan and Piliposian [2-4] successively studied the existence of surface electro-elastic waves in a class of piezoelectric layered structures with different material constituents. Due to the intrinsic brittle property of ceramic materials and the thermal mismatch between layer and substrate, however, initial stresses appear inevitable during the manufacture process and have significant effects on the propagation behavior of transverse surface waves [1-10].

A concept that may be used to reduce the magnitude of residual and thermal stresses would be the introduction of functionally graded materials (FGMs). An FGM is a special kind of composite material made up of two or more basic materials, and the composition would vary continuously. It is well known that FGMs have the potential to reduce the stress concentration near the material edges or ends and increase the material fracture toughness. The idea of FGM has been applied successfully to piezoelectric materials to be functionally graded piezoelectric materials (FGPMs), and also can be adopted in layered structures to form many kinds of graded layered structures.

Liu and Tani [6-13] investigated successively the characteristics of wave propagation, surface waves, SH surface waves, and dispersion of waves in functionally gradient piezoelectric material plates by using a hybrid numerical method and finite element method. Li et al. [10] studied the features of Love waves in a layered functionally graded piezoelectric structure consisting of an FGPM layer and an elastic substrate, where the variations of material constants are independent through the thickness of the layer. Following the work by Li et al. [10], Liu and Wang [11] did a similar work but assumed a different mathematic model for the material gradient of FGPMs in their work. For the same structure, Du et al. [12] also studied the propagation of Love waves but assumed the same exponential function variation for all material parameters along the thickness direction of the layer. Recently, Liu et al. [13] investigated again the Love waves in a smart functionally graded piezoelectric composite structure in which an FGPM layer is placed between a pure piezoelectric material layer and a metal substrate. To the best of the authors' knowledge, the piezoelectric Love wave propagation in a layered structure consisting of an FGPM substrate and a dielectric layer has not been investigated yet. In this paper, we study the Love waves in such structure analytically from the linear elasticity.

Consider a structure consisting of a homogeneous dielectric layer with uniform thickness of  $h$  bonded perfectly to a functionally graded piezoelectric substrate. The coordinate system  $O-x$  is chosen in such a way that the  $z$ -axis is directed along the piezoelectric poling direction perpendicular to the  $x-y$  plane, the plane  $x=0$  occupies the boundary between the layer and the substrate, and the  $x$ -axis points down into the substrate, as shown in Figure 1. The domain  $x=0$  is assumed to be a vacuum or air space, and the surface  $x=0$  is free of external forces (mechanically traction free). The material parameters in the substrate change gradually along the  $x$ -axis direction.

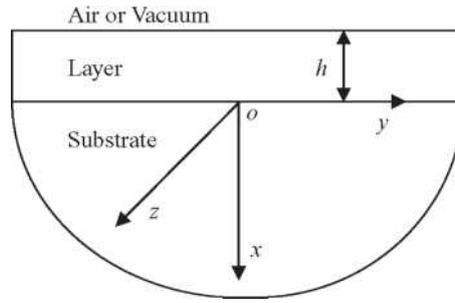


Fig.1

Here, Love wave propagation in such layered structure will be taken into account. It is assumed without loss of generality that the wave propagation is in the positive direction of the y-axis, such that the mechanical displacement components and electrical potential function representing the motion can be written in the following form:

$$\mathbf{u} \equiv \mathbf{v} \equiv \mathbf{0}, w = w(x, y, t), -h \leq x \leq +, \quad \varphi = \varphi(x, y, t), -\infty \leq x \leq + \quad (1)$$

For the dielectric layer in the region  $-h \leq x \leq +$ , let  $w$  and  $\varphi$  denote the mechanical displacement and electrical potential function. If the layer is anisotropic, we assume it to be the same anisotropy as the substrate and with axis of polarization parallel to that of the substrate. Otherwise, the layer is assumed to be isotropic. Then we have the following governing field equations

$$\begin{cases} \nabla^2 w_1 = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \varphi_1 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

and the nonzero stress and electric displacement components

$$\begin{cases} \sigma_{yz}^{(1)} = \mu \frac{\partial w_1}{\partial y}, \quad \sigma_{zx}^{(1)} = \mu \frac{\partial w_1}{\partial x} \\ D_x^{(1)} = -\varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \quad D_y^{(1)} = -\varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \end{cases} \quad (3)$$

where  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  and is  $c_1$  the shear wave velocity, and  $\mu$  and  $\varepsilon$  being the shear modulus and the dielectric constant in the layer.

It is well known that elastic and electric excitations in a piezoelectric media are interconnected and are described in a quasi-static approximation by the following governing field equations,

$$\begin{cases} \sigma_{ij,i} = \rho \ddot{u}_j \\ D_{i,j} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

and constitutive relations

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = c_{ijkl} u_{k,l} + e_{ij} \varphi_{,l} \\ D_i = e_{ikl} u_{k,l} - \varepsilon_{il} \varphi_{,l} \end{cases} \quad (5)$$

where  $u_j$  are the mechanical displacement components,  $\varphi$  the electrical potential,  $\rho$  the mass density of the medium,  $\sigma_{ij}$  and  $D_i$  are the stress and electric displacement fields,  $c_{ijkl}$ ,  $e_{ikl}$  and  $\varepsilon_{il}$  are the elastic, piezoelectric, and dielectric constants, respectively.

For the functionally graded piezoelectric substrate in the region  $x > 0$ , let  $w_2$  and  $\varphi_2$  denote the mechanical displacement and electrical potential function, then from Eqs. (4) and (5), we have the following coupled electro-mechanical field equations

$$\begin{cases} \frac{dc_{44}(x)}{dx} \frac{\partial w_2}{\partial x} + c_{44}(x) \nabla^2 w_2 + \frac{de_{15}(x)}{dx} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + e_{15}(x) \nabla^2 \varphi_2 = \rho(x) \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} \\ \frac{de_{15}(x)}{dx} \frac{\partial w_2}{\partial x} + e_{15}(x) \nabla^2 w_2 - \frac{d\varepsilon_{11}(x)}{dx} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \varepsilon_{11}(x) \nabla^2 \varphi_2 = 0 \end{cases} \quad (6)$$

and the nonzero stress and electric displacement components

$$\begin{cases} \sigma_{yz}^{(2)} = c_{44}(x) \frac{\partial w_2}{\partial y} + e_{15}(x) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}, \sigma_{zx}^{(2)} = c_{44}(x) \frac{\partial w_2}{\partial x} + e_{15}(x) \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \\ D_x^{(2)} = e_{15}(x) \frac{\partial w_2}{\partial x} - \varepsilon_{11}(x) \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, D_y^{(2)} = e_{15}(x) \frac{\partial w_2}{\partial y} - \varepsilon_{11}(x) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \end{cases} \quad (7)$$

where  $c_{44}(x)$ ,  $e_{15}(x)$ , and  $\varepsilon_{11}(x)$  are the elastic, piezoelectric and dielectric constants in the substrate, respectively.

When Love waves propagate in the layered structure, as shown in Fig.1, the related mechanical and electrical quantities must satisfy the boundary conditions and the continuity conditions along the interface, which are described as follows,

1. The mechanical traction-free condition at  $x = -h$ ,

$$\sigma_{zx}^{(1)}(-h, y) = 0$$

2. The electrical boundary conditions at  $x = -h$ ,

$$\begin{cases} \varphi_0(-h, y) = \varphi_1(-h, y) \\ D_x^{(0)}(-h, y) = D_x^{(1)}(-h, y) \end{cases} \quad \text{for electrically open case, and}$$

$\varphi_1(-h, y) = 0$  for electrically shorted case.

3. The continuity conditions at  $x = 0$ ,

$$\begin{cases} w_1(0, y) = w_2(0, y) \\ \sigma_{zx}^{(1)}(0, y) = \sigma_{zx}^{(2)}(0, y) \\ \varphi_1(0, y) = \varphi_2(0, y) \\ D_x^{(1)}(0, y) = D_x^{(2)}(0, y) \end{cases}$$

4. For  $x \rightarrow +\infty$ ,  $w_2 \rightarrow 0$ ,  $\varphi_2 \rightarrow 0$  For  $x \rightarrow -\infty$ ,  $\varphi_0 \rightarrow 0$ .

In this paper, we give the dispersion relations for the existence and propagation of surface electro-elastic Love waves in an FGPM layered structure consisting of an FGPM substrate and a dielectric layer. Through the numerical examples, the following conclusions can be drawn:

The effect of gradient coefficient on the fundamental mode is more obvious than that on the high-order modes. Furthermore, the effect of gradient coefficient on dispersion curves is sign sensitive. Positive gradient dominates the cutoff frequency while negative gradient dominates the phase velocity.

The gradient coefficient has a strong influence on the electromechanical coupling factor, which appears more obvious in the case of negative gradient coefficients than in the case of positive ones. And negative gradient coefficients have positive effects on the electromechanical coupling factor while positive gradient coefficients have negative effects.

Negative gradient coefficients can change the dispersion state of the fundamental mode, i.e., from the totally normal dispersion to partly normal dispersion together with partly anomalous dispersion.

The above conclusions are very applicable and could be expected to be utilized designing SAW devices.

## REFERENCES

1. R.G. Curtis and M. Redwood, Transverse Surface Waves on a Piezoelectric Material Carrying a Metal Layer of Finite Thickness, *J. Appl. Phys.*, vol. 44, pp. 2002-2007, 1973.
2. Z.N. Danoyan and G.T. Piliposian, Surface Electro-Elastic Love Waves in a Layered Structure with a Piezoelectric Substrate and a Dielectric layer, *Int. J. Solids Struct.* vol. 44, pp. 5829-5847, 2007.
3. Z.N. Danoyan and G.T. Piliposian, Surface Electro-Elastic Shear Horizontal Waves in a Layered Structure with a Piezoelectric Substrate and a Hard Dielectric Layer, *Int. J. Solids Struct.* vol. 45, pp. 43i-44i, 2008.
4. G.T. Piliposian and Z.N. Danoyan, Surface Electro-Elastic Love Waves in a Layered Structure with a Piezoelectric Substrate and Two Isotropic Layers, *Int. J. Solids Struct.* vol. 46, pp. i345-i353, 2009.
5. H. Liu, Z.K. Wang, and T.J. Wang, Effect of Initial Stresses on the Propagation Behaviour of Love Waves in a Layered Piezoelectric Structure, *Int. J. Solid. Struct.* vol. 38, pp. 37-5i, 200i.
6. G.R. Liu and J. Tani, Characteristic of wave Propagation in Functionally Gradient Piezoelectric Material Plates and its Response Analysis Part i: Theory; Part 2: Calculation Results, *Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng.* vol. 57A (54i), pp. 2i22-2i27, 199i.
7. G.R. Liu and J. Tani, SH Surface Waves in Functionally Gradient Piezoelectric Material Plates, *Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng.* vol. 58A (547), pp. 504-507, 1992.
8. G.R. Liu and J. Tani, Surface Waves in Functionally Gradient Piezoelectric Plates, *Trans. ASME J. Vib. Acoust.* vol. ii6, pp. 440^48, 1994.
9. G.R. Liu, K.Y. Dai, X. Han, and T. Ohyoshi, Dispersion of Waves and Characteristic Wave Surfaces in Functionally Graded Piezoelectric Plates, *J. Sound Vib.* vol. 268, pp. i3i-i47, 2003.
10. X.Y. Li, Z.K. Wang, and S.H. Huang, Love Waves in Functionally Graded Piezoelectric Materials, *Int. J. Solids Struct.* vol. 4i, pp. 7309-7328, 2004.
11. J. Liu and Z.K. Wang, The Propagation Behavior of Love Waves in a Functionally Graded Layered Piezoelectric Structure, *Smart Mater. Struct.* vol. i4, pp. i37-i46, 2005.
12. J. Du, X. Jin, J. Wang, et al. Love Wave Propagation in Functionally Graded Piezoelectric Material Layer, *Ultrasonics* vol. 46, pp. i3-22, 2007.
13. J. Liu, X.S. Cao, and Z.K. Wang, Propagation of Love Waves in a Smart Functionally Graded Piezoelectric Composite Structure, *Smart Mater. Struct.* vol. i6, pp. i3-24, 2007.

### **Information about authors:**

Gohar Aslan Manukyan –Cand.phys.-math. sci. Institute of Mechanics NAS of Armenia

Adress: Gr.Artzruny 10/4, Yerevan Armenia, 0012

E-mail: [avetisus@yahoo.com](mailto:avetisus@yahoo.com)

Zarine Kliment Manukyan – PhD YSU, Yerevan, Armenia, Alek Manukyan 1.

E-mail: [zarulka88000@yahoo.com](mailto:zarulka88000@yahoo.com)

### THREE-DIMENSIONAL PROBLEM OF WAVE PROPAGATION STONELEY

**Sarkisyan S. V., Melkonyan A.V.**

The question of existence of Stoneley surface wave in a three-dimensional formulation is considered. At the interface between two half-spaces are given conditions for the continuity of two displacements, the normal stress, a shear stress and the restriction of the third displacement. Characteristic equation for the phase speed of surface waves is obtained. The special cases are considered

Investigations on the Stoneley surface waves are presented in numerous papers [1-11]. Suppose we have two isotropic elastic half-spaces separated by a plane  $z=0$  (in the coordinate system  $oxyz$ ). Half-space characterized by the Lamé coefficients  $\lambda, \mu$  and density  $\rho$ . Suppose that at the interface of two half-spaces are given conditions for the continuity of two displacements, the normal stress, a shear stress as well as restriction of the third displacement. For displacement by introducing the transformation Lamé

$$\vec{u}_\alpha = \text{grad } \varphi_\alpha + \text{rot } \vec{\psi}_\alpha \quad (\text{div } \vec{\psi}_\alpha = 0) \quad (1)$$

of dynamic equations of elasticity theory for dynamic potentials  $\varphi_\alpha(x, y, z, t)$  and  $\vec{\psi}_\alpha(x, y, z, t)$  come to the wave equations, the general solution of which is represented as [12]

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha(x, y, z, t) &= \varphi_\alpha^*(z) \cdot \exp i(k_1 x + k_2 y - ckt) \\ \psi_{\alpha i}(x, y, z, t) &= \psi_{\alpha i}^*(z) \cdot \exp i(k_1 x + k_2 y - ckt) \end{aligned} \quad (2)$$

where  $k_1$  and  $k_2$  the wave numbers,  $k^2 = k_1^2 + k_2^2$ ,  $c < \min(c_{t1}, c_{t2})$  – the unknown phase speed of surface waves,  $c_{t\alpha}^2 = \mu_\alpha \cdot \rho_\alpha^{-1}$  – square speed of shear waves in a half-space number  $\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ).

Dynamic potentials that satisfy the conditions of damping  $z \rightarrow \pm\infty$  will take the form: half-space to number 1

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y, z, t) &= B_1 e^{-v_{11}z} \cdot \exp i(k_1 x + k_2 y - ckt) \\ \psi_{1i}(x, y, z, t) &= D_{1i} e^{-v_{21}z} \cdot \exp i(k_1 x + k_2 y - ckt) \end{aligned} \quad (3)$$

half-space to number 2

$$\begin{aligned} \varphi_2(x, y, z, t) &= A_2 e^{v_{12}z} \cdot \exp i(k_1 x + k_2 y - ckt) \\ \psi_{2i}(x, y, z, t) &= C_{2i} e^{v_{22}z} \cdot \exp i(k_1 x + k_2 y - ckt) \end{aligned} \quad (4)$$

where

$$v_{1\alpha}^2 = k^2(1 - \eta_\alpha \theta_\alpha), v_{2\alpha}^2 = k^2(1 - \eta_\alpha), \eta_\alpha = \frac{c^2}{c_{t\alpha}^2}, \theta_\alpha = \frac{c_{t\alpha}^2}{c_{l\alpha}^2}, \gamma = \frac{c_{t2}^2}{c_{t1}^2}, \eta_\alpha \in (0, 1), c_{l\alpha}^2 = (\lambda_\alpha + 2\mu_\alpha) \cdot \rho_\alpha^{-1}$$

– square of the speed of longitudinal wave propagation in a half-space,  $A_\alpha, B_\alpha, C_{\alpha i}, D_{\alpha i}$  – unknown constants of integration.

At the boundary between two isotropic half-spaces have the following conditions:

$$u_1^{(1)} = u_1^{(2)}, u_2^{(1)} = u_2^{(2)} = 0, u_3^{(1)} = u_3^{(2)}, \sigma_{31}^{(1)} = \sigma_{31}^{(2)}, \sigma_{33}^{(1)} = \sigma_{33}^{(2)} \quad (5)$$

Using the dependence of displacement (1) and through dynamic stresses potentials [12], the boundary conditions (5) and the connection  $\text{div } \vec{\psi}_\alpha = 0$  we obtained the following system of eight linear homogeneous equations with constant  $A_\alpha, B_\alpha, C_{\alpha i}, D_{\alpha i}$  and unknown phase speed of surface waves:

$$\begin{aligned}
ik_1 B_1 + ik_2 D_{31} + v_{21} D_{21} &= ik_1 A_2 + ik_2 C_{32} - v_{22} C_{22} \\
ik_2 B_1 - ik_1 D_{31} - v_{21} D_{11} &= 0 \\
ik_2 A_2 - ik_1 C_{32} + v_{22} C_{12} &= 0 \\
-v_{11} B_1 + ik_1 D_{21} - ik_2 D_{11} &= v_{12} A_2 + ik_1 C_{22} - ik_2 C_{12} \\
(2\mu_1 v_{11}^2 - \lambda_1 (k^2 - v_{11}^2)) B_1 - 2ik_1 \mu_1 v_{21} D_{21} + 2ik_2 \mu_1 v_{21} D_{11} &= \\
= (2\mu_2 v_{12}^2 - \lambda_2 (k^2 - v_{12}^2)) A_2 + 2ik_1 \mu_2 v_{22} C_{22} - 2ik_2 \mu_2 v_{22} C_{12} &= \quad (6) \\
-2v_{11} ik_1 B_1 + k_1 k_2 D_{11} - v_{21} ik_2 D_{31} - (v_{21}^2 + k_1^2) D_{21} &= \\
= \frac{\mu_2}{\mu_1} (2v_{12} ik_1 A_2 + k_1 k_2 C_{12} + v_{22} ik_2 C_{32} - (v_{22}^2 + k_1^2) C_{22}) &= \\
ik_1 D_{11} + ik_2 D_{21} - v_{21} D_{31} &= 0 \\
ik_1 C_{12} + ik_2 C_{22} + v_{22} C_{32} &= 0
\end{aligned}$$

From the condition of compatibility of the system of homogeneous linear equations, we obtain the relation from which the given values  $\rho, \lambda, \mu$  and  $k$  can be found phase speed of surface waves:

$$\begin{aligned}
&(\beta(2 - \eta_2) - (2 - \eta_1))(\beta - 1) + (2\beta - 1)(2 - 2\beta - \eta_1)\sqrt{(1 - \eta_2\theta_2)(1 - \eta_2)} + \\
&+\beta(\beta(2 - \eta_2(1 + \xi)) - (2 - \eta_1))(1 - \eta_2) + (\beta - 2)(2 - \beta(2 - \eta_2))\sqrt{(1 - \eta_1\theta_1)(1 - \eta_1)} \\
&+\left(4(\beta - 1)^2\sqrt{(1 - \eta_2\theta_2)(1 - \eta_1)} - \beta\eta_2(\eta_1(1 + \xi) - \xi)\right)\sqrt{(1 - \eta_1\theta_1)(1 - \eta_2)} + \\
&+\beta(2 - 2\beta + (1 + \xi)\beta\eta_2)(1 - \eta_2)\sqrt{(1 - \eta_1\theta_1)(1 - \eta_1)} - \xi\beta(\eta_1 + \eta_2)\sqrt{(1 - \eta_1)(1 - \eta_2)} + \quad (7) \\
&+(1 - \eta_1)((1 + \xi)(2 - \eta_1) - \beta(2 - \eta_2) - ((1 + \xi)(2 - \eta_1) - 2\beta)\sqrt{(1 - \eta_2\theta_2)(1 - \eta_2)} - \\
&-2\xi(1 - \sqrt{(1 - \eta_2\theta_2)(1 - \eta_2)})) - \beta\eta_1(\eta_2(1 + \xi) - \xi)\sqrt{(1 - \eta_2\theta_2)(1 - \eta_1)} = 0, \\
\beta &= \mu_2 \cdot \mu_1^{-1}, \xi = k_2 \cdot k_1^{-1}
\end{aligned}$$

In the case where there is only one half-space ( $\rho_2 = 0$  or  $\rho_1 = 0$ ) and  $\xi = 0$  the equations of Rayleigh surface waves are obtained [4,5,8]:

$$R(\eta_1) \equiv (2 - \eta_1)^2 - 4\sqrt{1 - \eta_1}\sqrt{1 - \eta_1\theta_1} = 0$$

or

$$R(\eta_2) \equiv (2 - \eta_2)^2 - 4\sqrt{1 - \eta_2}\sqrt{1 - \eta_2\theta_2} = 0,$$

But if  $\xi \neq 0$  the equation (7) goes to the following equations [10,11]:

$$R(\eta_\alpha) - \xi\eta_\alpha(1 - \eta_\alpha) = 0$$

We investigate the special case when

$$c_{i1} = c_{i2} = c_i, c_{11} = c_{12} = c_1, \eta_1 = \eta_2 = \eta, \theta_1 = \theta_2 = \theta, \gamma = 1, v_{11} = v_{12} = v_1, v_{21} = v_{22} = v_2.$$

The characteristic equation (7) reduces to

$$\begin{aligned}
F(n, \eta, \xi) &\equiv (2 - \eta)(n - 1)^2 + 4r^2(n - 1)^2 + r((n - 1)^2(\eta - 6) - 2n\eta(1 + \eta)) + \\
&+ (1 - \eta)(2 - \eta)(n - 1)^2 + r(1 - \eta)(\eta(n^2 + 1) - 2(n - 1)^2) + \\
&+ \xi(r(1 - \eta)(\eta(n^2 + 1) - 4) + \eta^2(n - 1)^2 - \eta(n^2 + 3) + 2) = 0, \\
r &= \sqrt{(1 - \eta)(1 - \eta\theta)}, \quad n = \rho_2 \cdot \rho_1^{-1}
\end{aligned} \tag{8}$$

We investigate the properties of the function  $F(n, \eta, \xi)$  at  $\eta \in (0, 1)$ . In the case where  $\rho_1 = \rho_2 = \rho$  ( $n = 1$ ) from (8) we have

$$F(1, 0, \xi) = -2\xi < 0, \quad F(1, 1, \xi) = -2\xi < 0$$

where it can be assumed that the surface wave can exist. Numerical investigation of equation  $F(1, \eta, \xi) = 0$  has shown that in this case the surface wave does not exist. If  $\xi = 0$ , however, then it follows from (8) phase speed of surface waves either, or both  $c = 0$ ,  $c = c_t$  and  $c = c_l$ .

Function  $F(n, \eta, \xi)$  at the ends of the interval  $\eta \in (0, 1)$  takes the following values:

$$F(n, 0, \xi) = -2\xi < 0, \quad F(n, 1, \xi) = (n - 1)^2 - 2n\xi \tag{9}$$

Numerical investigation of equation  $F(n, \eta, \xi) = 0$  depending on the relationship  $n$  with  $\theta = \frac{1}{3}$ . The table shows the values of the dimensionless phase speed of surface waves  $\eta$ .

$n \backslash \xi$	0.1	0.3	0.5	0.8	1
0.3	0.9715	0.9862	0.9952	0.9999	-
0.4	0.9879	0.9979	-	-	-
0.5	0.9966	-	-	-	-
0.7	-	-	-	-	-
0.9	-	-	-	-	-
2	0.9966	-	-	-	-
2.5	0.9881	0.9980	-	-	-
3	0.9784	0.9918	0.9984	-	-
$\frac{10}{3}$	0.9721	0.9868	0.9954	0.9999	-

#### REFERENCE

1. Stoneley R. Elastic waves on the surface of separation of two solids. Proceedings of the Royal Society, S. A. vol. 106, № A73, 1924, p. 416-428.
2. Гоголадзе В.Г. Отражение и преломление упругих волн. Общая теория граничных волн. Труды Сейсмологического Института АН СССР, 1947, № 125, с. 1-48.
3. Cagniard L. Reflection and refraction of progressive seismic waves. Mc-Graw-Hill, New York, 1962, p. 281.
4. Achenbach J.D., Epstein H.J. Dynamic interaction of a layer and a half-space. Proc. Amer. Soc. Civil Eng. Mech J. Eng. Mech, 1967, 93, № 5, p. 27-42.
5. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова Думка, 1981. 283 с.

6. Miklowitz J. The theory of elastic waves and waveguides. Amsterdam, N. Y., Oxford, North – Holland, 1984, 618 p.
7. Белубекян М.В. Об условии существования волны Стоунли при скользящем контакте. //Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1990.Т.43. № 4. С. 52–56.
8. Белубекян М.В. Поверхностные волны в упругих средах. // В сб.: “Проблемы механики деформируемого твердого тела”. Ереван: Институт механики НАН Армении, 1997. С.79-100.
9. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В., Казарян К.Б. Магнитоупругие поверхностные волны на границе раздела проводящих сред. //Механика. Межвуз. сб. науч. тр., ЕГУ. 1986. Вып.4. С.5–10.
10. Белубекян В. М., Белубекян М.В. Трёхмерная задача поверхностных волн Релея. // Докл. НАН Армении. 2005. Т.105. №4. С. 362 –369.
11. Knowles J. K. A note on surface waves. //J. of Geophysical Research. 1966, vol.21, №22, p.5480 – 5481.
12. Саркисян С.В., Мелконян А.В. К трёхмерной задаче распространения поверхностных волн Стоунли. Проблемы механики деформируемого твердого тела. //Сборник научных трудов, посвящённый 90-летию академика НАН Армении С.А.Амбарцумяна. Ереван: Институт механики НАН РА, 2012. С.245-249.

### **Information about authors**

#### **Саркисян Самвел Владимирович**

доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой механики, Ереванский государственный университет, факультет математики и механики

**Адрес:** ул. Алека Манукяна 1, ЕГУ, Ереван, Армения

Тел.: (+374 91) 38-43-67, E-mail: [vas@ysu.am](mailto:vas@ysu.am)

#### **Мелконян Аветик Варданович**

кандидат физ.-мат. наук

**Адрес:** ул. Маршала Баграмяна 24<sup>б</sup>, Институт механики НАН Армении

Тел.: (+37491) 31-50-57, E-mail: [avetikmelkonyan@gmail.com](mailto:avetikmelkonyan@gmail.com)

# STUDY OF THE DEPENDENCE OF EFFECTIVE COMPLIANCES OF A PLANE WITH AN ARRAY OF ROUND HOLES ON ARRAY PARAMETERS

Mokryakov V.V.

**Abstract.** Regular structure materials are used in different technological processes. Therefore, investigation of the mechanical properties of these materials is of considerable practical interest. These mechanical properties are represented by the relationship between average stresses and effective strains, which can be obtained from the solution of the problem for elastic plane. In this paper, we employ the model of an elastic plane having a biaxial periodic system of round holes to analyze the dependence of the effective elastic parameters on the direction of applied loads and the geometrical characteristics of the system. Parameters anisotropy is demonstrated. The abnormally high values of Poisson's ratio, which are impossible in isotropic media but observed in some anisotropic media, are found.

## Introduction

In the current paper the method of multiple expansion is proposed to apply for a problem on an elastic plane containing a bi-axial grid of round holes (see, for example, [1]). Also dependences of effective compliances and Poisson's ratios on the periods parameters (in case of a quadratic grid), and the outer loads' directions are studied, as well as their anisotropy. An existence of the effective Poisson's ratio's values, greater  $\frac{1}{2}$ , becomes apparent. Such effects are known for some anisotropic materials; see [2-4] for instance. An appearance of longitudinal strains under tangential loads (and vice versa, tangential strains under longitudinal loads) is noted.

## Problem statement

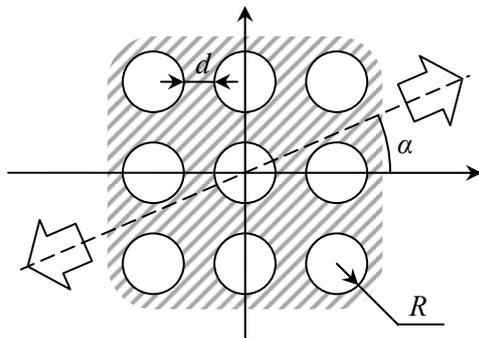


Fig. 1. A quadratic grid of round holes in an elastic plane

An infinite elastic plane contained the regular system of round holes is considered (fig. 1). The holes centers form the quadratic grid. Loads on the holes' contours are zero.

The current study aims to find the effective elastic properties (connections of average stresses with effective strains) and their dependencies on geometric parameters of the grid.

### Nomenclature:

- $R$  is a hole's radius;
- $d$  is a distance between the neighboring holes;
- $\alpha$  is an outer load's orientation.

## Effective compliance dependence on the quadratic grid period

Values of the effective compliances are calculated for different orientations of the holes grid (the analytic solution and the numerical method are published in [5, 6]). In view of the problem symmetry, it is enough to examine the orientation angles from  $0^\circ$  to  $45^\circ$  inclusive. The calculation results are presented in fig. 2 .

In case of  $d \geq 10R$ , an anisotropy influence on the effective compliance distribution is negligible. Decreasing the distance  $d$ , the anisotropy influence begins to behave as a sinusoidal distribution with extrema in the orientation angles  $0^\circ/45^\circ$ , or  $22.5^\circ$  (for the "mixed" compliances like  $S_{1112}$ ).

If  $d < 0.5R$  the effective compliance distribution form changes, a local maximum appears in range  $\approx 25^\circ-28^\circ$  ( $\approx 17^\circ-20^\circ$  for  $S_{1212}$ ) and a local minimum in range  $\approx 28^\circ-33^\circ$  ( $\approx 12^\circ-17^\circ$  for  $S_{1212}$ ). The "mixed" compliances extremum at  $22.5^\circ$  becomes sharper.

The dependences of the effective compliance  $S_{1111}$  on the distance  $d$  for different grid orientations are presented in fig. 3a. Obviously, the compliance  $S_{1111}$  tends to the plane compliance with distance increasing. So, a difference  $\Delta S_{1111}$  between  $S_{1111}$  and the plane compliances is presented in fig. 3b. The log-log plot demonstrates that the dependence  $\Delta S_{1111}(d)$  tends to a power-like function  $\Delta S_{1111}(d) \approx E^{-1} \cdot 3.22 \cdot d^{-1.67}$ . The compliance difference behavior for a diagonal orientation ( $45^\circ$ ) is the closest form to this function.

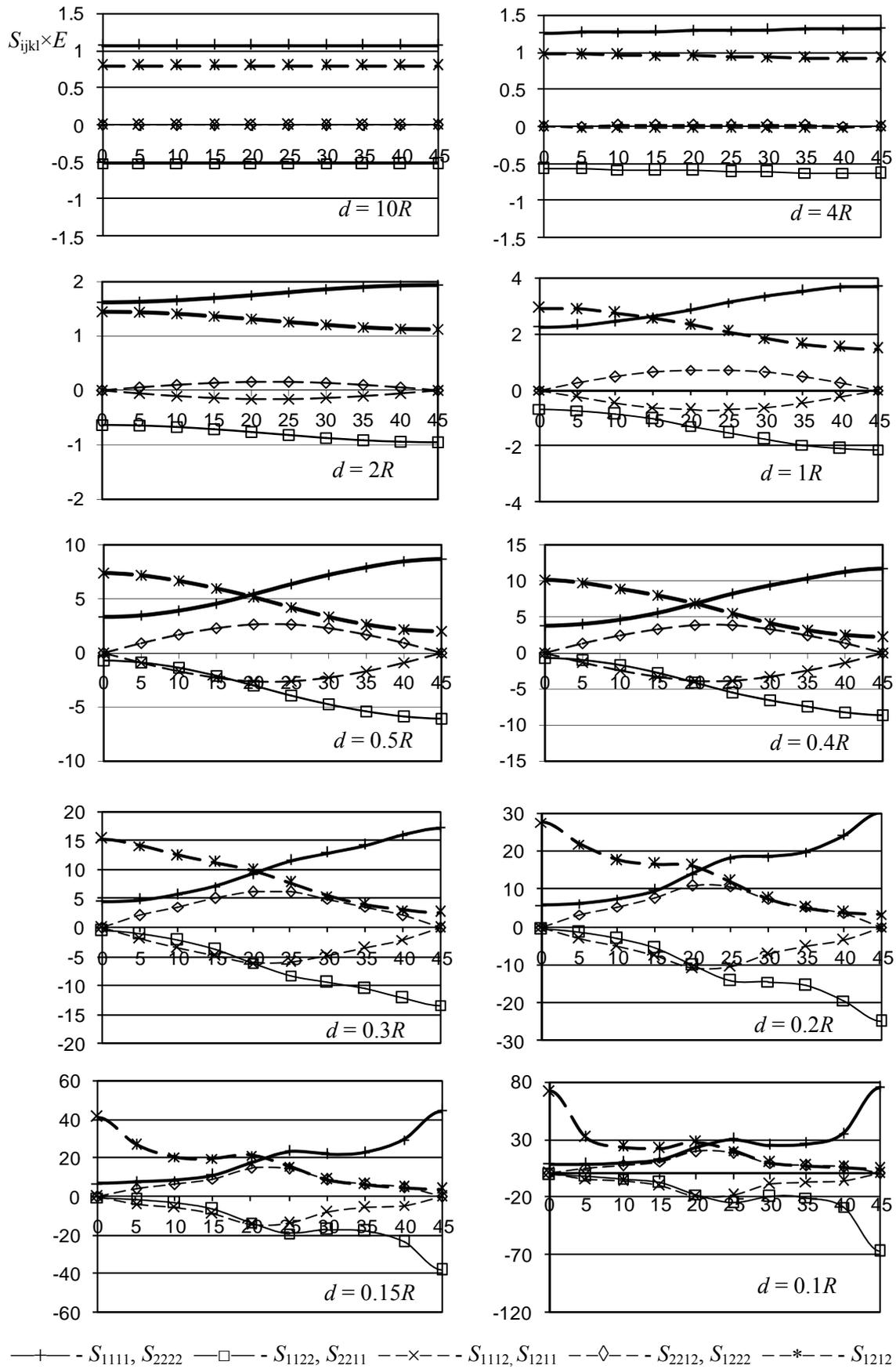


Fig. 2. Effective compliances  $S_{ijkl}$  vs. grid orientation angle ( $^\circ$ ) for the distances  $d/R = 10, 4, 2, 1, 0.5, 0.4, 0.3, 0.2, 0.15, 0.1$

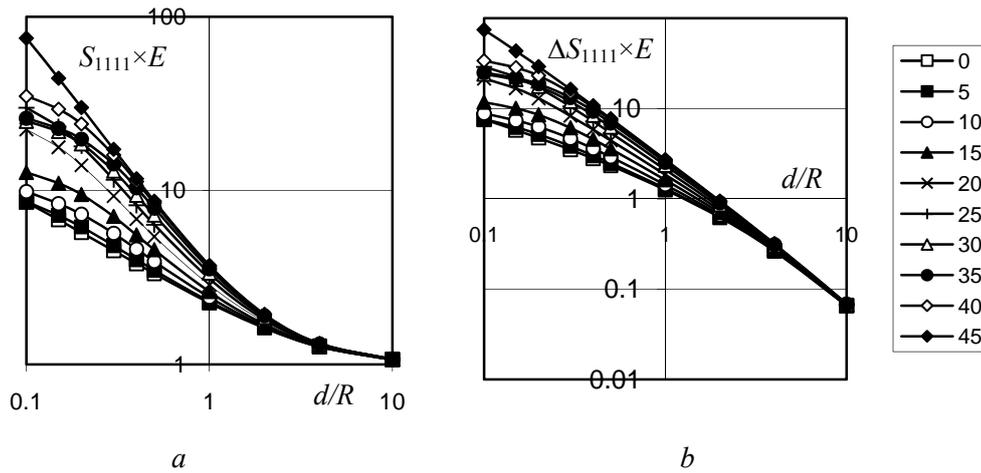


Fig. 3. Dependence of  $S_{1111}$  (a) and  $\Delta S_{1111}$  (b) on the distance  $d/R$  for different grid orientations.

### Dependences of an effective Poisson's ratio on the distance $d$

An effective Poisson's ratio  $\nu_{\text{eff}} = -S_{1122}/S_{1111}$ , and its dependence on the plane's Poisson's ratio  $\nu$ , are studying in this section. Values of  $\nu_{\text{eff}}$  for different  $\nu$  and different grid geometric parameters are presented in fig. 4 (see next page).

Note that the effective Poisson's ratio demonstrates a behavior similar  $S_{1111}$ . In case of  $d > 10R$  the anisotropy influence is insignificant that means  $\nu_{\text{eff}}$  is almost constant and closed to  $\nu$ . For  $0.5R < d < 10R$  the anisotropy manifests itself as sinusoidal dependence on an orientation of the grid; for  $d < 0.5R$  the sinusoidal behavior changes, a local maximum appears at orientation values  $\approx 24^\circ$ - $26^\circ$ , and a local minimum near  $\approx 33^\circ$ .

It's worth noting that the influence of the plane's Poisson's ratio  $\nu$  decreases when the distance  $d$  increases. Thus the effective Poisson's ratio  $\nu_{\text{eff}}$  becomes substantially depending on a grid orientation. Plots of dependences of the effective Poisson's ratio  $\nu_{\text{eff}}$  on the distance  $d$  for  $\nu = 0$  and  $\nu = 0.5$  are presented in fig. 5. The plots demonstrate that the dependences can have quite complex form. For example, in case of  $\nu = 0.5$ , at first the effective Poisson's ratio decreases when the distance  $d$  decreasing. Then, reaching the minimum in range from  $d/R = 0$  to 4, it becomes to grow (excluding the orientation angle  $0^\circ$ ). So, if outer loads are known, it is possible to calculate such geometric system parameters as make a transverse strain minimal under the longitudinal stress conditions.

It's important to note that there are wide areas of grid orientation values (on condition  $d < 2R$ ), where the effective Poisson's ratio  $\nu_{\text{eff}}$  exceeds the maximal value 0.5 in isotropic materials. Such a behavior is known for some anisotropic materials. Surveys of materials with anomalous effective Poisson's ratio ( $\nu_{\text{eff}} > 0.5$  or  $\nu_{\text{eff}} < 0$ ), and a theoretic rationale of this effect, can be found in [2-4]. In particular it is demonstrated that a reason is a structural peculiarity of a crystalline lattice of these materials.

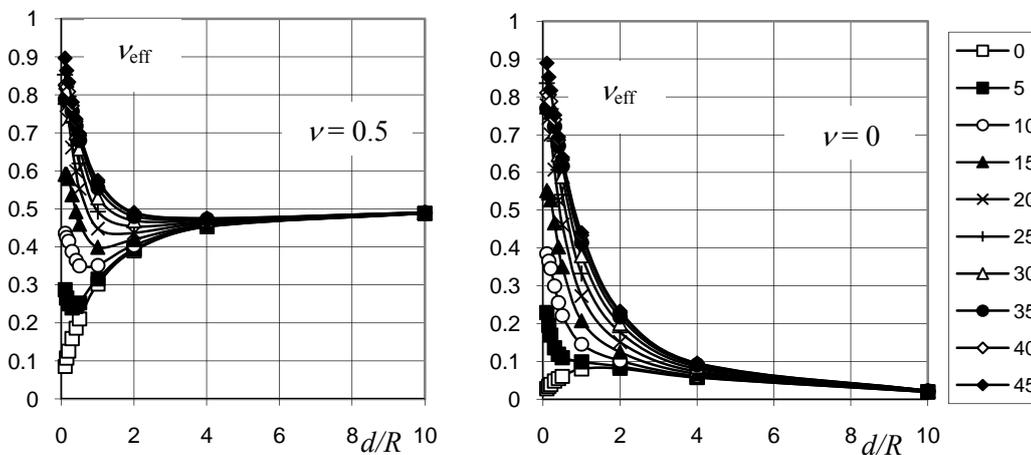


Fig. 5. Dependence of  $\nu_{\text{eff}}$  on the distance  $d$  for different orientations ( $\nu$  of the plane is 0.5 and 0)

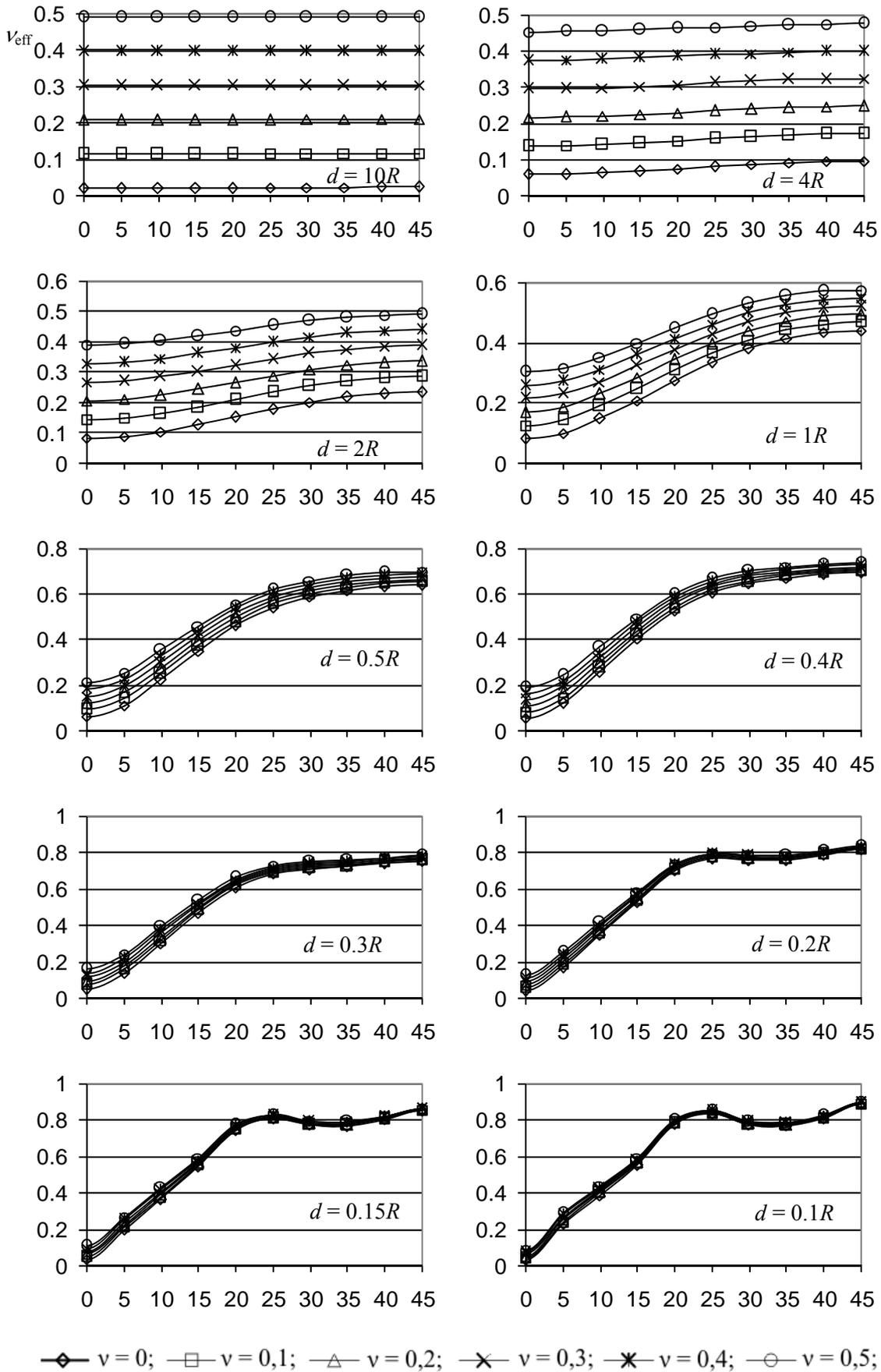


Fig. 4. Effective Poisson's ratio  $\nu_{\text{eff}}$  vs. grid orientation angle ( $^\circ$ ) for the distances  $d/R = 10, 4, 2, 1, 0.5, 0.4, 0.3, 0.2, 0.15, 0.1$

## Conclusion

A behavior of effective elastic parameters (compliances and Poisson's ratio) of an elastic plane containing a quadratic array of round holes is studied in the given paper.

Anisotropy of the effective elastic parameters is demonstrated. Three areas of values of a ratio  $d/R$  are defined, where the anisotropy character differs substantially. In first area ( $d/R \geq 10$ ) the anisotropy is negligible (although the effective elastic parameters can differ from the plane's parameters). In second area ( $0.5 \leq d/R \leq 10$ ) the anisotropy has an expressed sinusoidal kind. In third area ( $d/R \leq 0.5$ ) the sinusoidal kind gets broken; local extrema appear at grid orientations different from longitudinal ( $0^\circ$ ) and diagonal ( $45^\circ$ ).

Difference between the effective and plane's longitudinal compliances is studied. The power kind of the dependence of this difference on the ratio  $d/R$  is shown.

Lowering of the influence of the plane's Poisson's ratio on the effective Poisson's ratio is demonstrated: in case of  $d \rightarrow 0$ ,  $\nu_{\text{eff}}$  substantially depends on the grid orientation. It is necessary to note a wide range of grid orientations where  $\nu_{\text{eff}} > 0.5$ . Such anomalously high values are impossible for isotropic materials but found for some anisotropic materials.

A possible further work development is proposed at two directions:

- (1) a study of strength properties (stress concentrations in the material structure);
- (2) an extension of the problem into a case of 3D medium [7].

The work is carried out in Project РФФИ 08-01-00696.

## References

- [1] E.I. Grigolyuk and L.A. Fil'shtinskiy: Perforated planes and shells (Nauka, Moscow 1970), in Russian.
- [2] V.A. Gorodtsov and D.S. Lisovenko: To mechanics of carbon and other layered nanowhiskers. *Inzhenernaya fizika*, **4** (2009), pp. 36-38, in Russian.
- [3] R.V. Goldstein, V.A. Gorodtsov and D.S. Lisovenko: On negativity of Poisson's ratio for anisotropic materials. *DAN*, Vol. 429, **5** (2009), pp. 614-616, in Russian.
- [4] R.V. Goldstein, V.A. Gorodtsov and D.S. Lisovenko: Auxetic mechanics of crystalline materials. *Mech. Solids*. Vol. 45, **4** (2010), pp. 529-545.
- [5] V.V. Mokryakov: Application of the multipole method to the problem on two close holes. *Mech. Solids*. Vol. 42, **5**, (2007), pp. 771-785.
- [6] V.V. Mokryakov: Study of the dependence of effective compliances of a plane with an array of circular holes on array parameters. *Comp. Continuum Mech*. Vol. 3, **3** (2010), pp. 90-101, in Russian.
- [7] R.V. Goldstein and P.S. Shushpannikov: Application of the method of multipole expansions in the 3D-elasticity problem for a medium with ordered system of spherical pores. *ZAMM*. V.89, **6** (2009), pp. 504-510.

## Сведения об авторе

**Мокряков Вячеслав Викторович** – научный сотрудник Лаборатории механики прочности и разрушения материалов и конструкций, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, +7 (495) 434-00-17(тел), +7 (499) 739-95-31(факс).

e-mail: [mokr@ipmnet.ru](mailto:mokr@ipmnet.ru)

# DISTRIBUTION OF ENERGY STORAGE RATE IN AREA OF PLASTIC STRAIN LOCALIZATION DURING TENSION

Oliferuk W., Maj M.

**Annotation:** The presented work is devoted to the new method of energy storage rate determination that allows to obtain distribution of this quantity on the surface of deformed specimen. The method is based on the experimental procedure for simultaneous measurements of temperature, and displacement distributions on the surface of tested specimen during tensile deformation. This procedure involves two complementary imaging techniques: CCD technique and infrared thermography (IRT). It has been shown experimentally that during evolution of plastic strain localization the energy storage rate in some zones of deformed specimen drops to zero end even to negative values. To interpret this result in terms of micro-mechanisms, microstructural observations using electron back scattered diffraction (EBSD) and transmission electron microscopy (TEM) were performed on specimens in different states of deformation.

## 1. Introduction

When a material deforms plastically, a part of the mechanical energy  $w_p$  expended on plastic deformation is converted into heat  $q_d$  while the remainder  $e_s$  is stored within the material.

$$e_s = w_p - q_d. \quad (1.1)$$

The measure of energy conversion at each instant of the plastic deformation process is the rate of energy storage  $Z$  defined as the ratio of the stored energy increment  $\Delta e_s$  to the plastic work increment

$\Delta w_p$ :

$$Z = \frac{\Delta e_s}{\Delta w_p}. \quad (1.2)$$

The stored energy increment is equal to the difference between  $\Delta w_p$  and the increment of energy dissipated as a heat  $\Delta q_d$ ,

$$\Delta e_s = \Delta w_p - \Delta q_d.$$

Therefore:

$$Z = \frac{\Delta e_s}{\Delta w_p} = 1 - \frac{\Delta q_d}{\Delta w_p}. \quad (1.3)$$

The entire deformation process, from initial state to the fracture of the tested specimen, can be divided into two stages: homogeneous deformation and heterogeneous one. Two indicators of appearance of plastic strain localization are usually applied. There are: non-uniform temperature distribution on the specimen surface and non-uniform strain field on the opposite surface of this specimen.

In the previous works by Oliferuk and co-workers it has been shown that during heterogeneous deformation (localization of plastic strain) of polycrystalline material, the energy storage rate rapidly decreases reaching the 0 value and then becomes negative [1, 2]. But up to now, only the average value of the energy storage rate for the gauge part of deformed specimen was estimated [3]. The questions appear: a) What is the energy storage rate distribution along the gauge length of the strained specimen during development of plastic strain localization? b) What is relation between distribution of energy storage rate and microstructure evolution of deformed material? The purpose of the present work is to answer these questions. To reach the purpose the new method of energy storage rate determination has been designed. The method allows to obtain distribution of this quantity along the gauge length of the specimen.

## 2. Method of determining the distribution of energy storage rate in the area of plastic strain localization

The method is based on the experimental procedure for simultaneous measurements of temperature, and strain distributions on the surface of tested specimen during tensile deformation. This procedure involves two complementary imaging techniques: CCD technique and infrared thermography (IRT). In order to determine the strain distribution, markers in form of graphite dots were plotted on one surface

of the specimen. In this way, the surface was divided into sections, whose sizes are specified by the distance between the dots (Fig. 1).

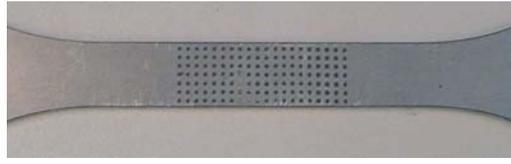


Fig. 1. The graphite dots on the gauge part of the specimen.

Displacements of the dots were recorded by means of CCD camera during deformation process. Taking into account the distance between the centers of the dots is  $l_0$  and recording distance between these centers as a function of deformation time  $l(t)$ , the true local strain  $\varepsilon_y(t)$  in the direction of tension was calculated:

$$\varepsilon_y(t) = \ln\left(\frac{l_y(t)}{l_0}\right). \quad (2.1)$$

The true stress  $\sigma_y$  was determined dividing the load by the current cross-sectional area of the specimen corresponding to the given section. Assuming that a dependence of Young's modulus on strain is negligibly small, local plastic strain  $\varepsilon_y^p$  was obtained from the following formula:

$$\varepsilon_y^p(t) = \varepsilon_y(t) - \frac{\sigma_y(t)}{E}, \quad (2.2)$$

where  $E$  is Young's modulus of the tested material.

The strain and stress distributions along the axis of the tested specimen were used to calculate surface distribution of specific plastic work.

$$w_p = \frac{1}{\rho_0} \int_0^{\varepsilon_y^p} \sigma_y \cdot d\varepsilon_y^p, \quad (2.3)$$

where  $\rho_0$  is the mass density of the tested material.

Temperature distribution on the opposite surface of the specimen was measured by means of IR Thermographic System. The surface was covered with soot, to ensure its homogeneity in terms of emissivity. For each section along the axis of the specimen, the average temperature  $T$  was determined. This temperature is a function of deformation time. Taking into account, the heat flux between neighbouring sections, the heat  $\Delta q_n$  generated during time  $\Delta t$  in  $n$ -th section has been calculated according to the Fourier's law:

$$\Delta q_n(t) = c_w \cdot \Delta T + \frac{s(t) \cdot \lambda \cdot \Delta t}{\rho_0 \cdot V} \cdot \left[ \frac{T(t, y_n) - T(t, y_{n+1})}{y_{n+1} - y_n} + \frac{T(t, y_n) - T(t, y_{n-1})}{y_n - y_{n-1}} \right], \quad (2.4)$$

where:  $\lambda$  is the coefficient of thermal conductivity,  $c_w$  is the specific heat,  $y_n$  is a coordinate of the centre of the given section,  $s$  and  $V$  are its cross section and volume, respectively. Adding to each other the heat  $\Delta q_n$  in the successive time intervals, the time dependence of the energy dissipated as the heat  $\Delta q_n(t)$  for each tested section has been obtained. Having  $w_p(t)$  and  $\Delta q_n(t)$  for considered sections the distribution of the energy storage rate can be determined.

**3. Experiments and results** Experiments were performed on austenitic stainless steel (304L). From the sheets of annealed material the specimens for tensile testing were cut out using electro-spark machining. In order to remove the technological surface layer, the specimens were electropolished. Optical metallographic and TEM observations of tested material indicated complete recrystallization and average grain size about  $50 \mu\text{m}$ . The dislocation density in the specimens before deformation was low; dislocations were randomly distributed in the matrix and in the grain boundaries, and no regular dislocation arrangements were observed. Grains were randomly oriented (Fig. 2).

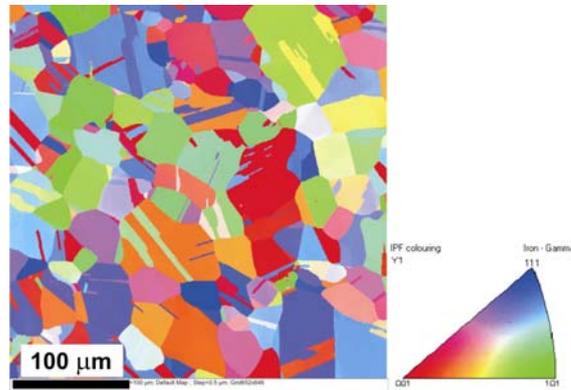


Fig. 2. Distribution of grain orientation in specimen before deformation

All specimens were strained using an MTS 858 testing machine at speeds of grip displacement:  $v = 1000 \text{ mm/min}$ . As mentioned above, temperature distribution on the surface of the specimen, displacement field and straining force were measured as a function of deformation time  $t$ . On the basis of experimental data the energy storage rate as a function of strain was calculated for selected, local sections lying on the axis of deformed specimen (Fig. 3). The calculation was performed using MATLAB.

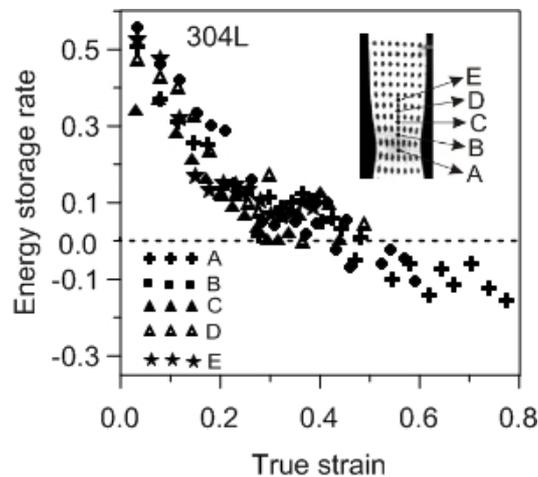


Fig. 3. The energy storage rate as a function of plastic work for selected sections lying on the axis of the specimen.

The obtained results shown that the energy storage rate for all tested sections decreases with strain. During evolution of plastic strain localization some sections cease to deform, while the energy storage rate in the others drops to zero and even to negative values.

To identify micro-mechanisms corresponding to appearance and evolution of plastic strain localization microstructural characterization was performed by electron back scattered diffraction (EBSD) with orientation imaging microscopy and transmission electron microscopy (TEM). Microstructural observations were performed on specimens in different states of deformation namely: in non-deformed

state, after homogeneous deformation, in the area of plastic strain localization corresponding to non-uniform surface distribution of temperature and in area plastic strain localization corresponding to non-uniform displacement field. Typical microstructure of the strain localization area is presented in Fig. 4.

There is also a noticeable trend in the evolution of the orientation of individual grains in the direction of the two dominant texture component. The development of strain localization is accompanied by further rotation of individual grains in the direction of the two texture components. Rotation of grains proceeds in such a way, that the  $\{111\}$  type planes become parallel to the planes of maximum shear stress. The angle between the trace of these planes and the tension direction is about  $50^\circ$  (Fig. 5). This type of texture seems to be a condition for the formation of shear bands, which corresponds to the loss of stability of plastic deformation. The macroscopic manifestation of such state was the zero value of the energy storage rate. Then, authors of the present work believe that the macroscopic criterion of plastic instability is zero value of energy storage rate.

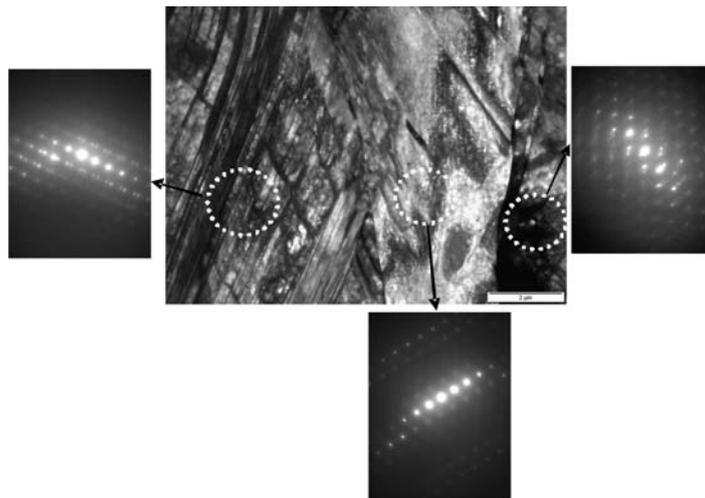


Fig. 4. Typical microstructure of the strain localization zone, It is seen two sets of intersecting deformation twins on the background of the dislocation cell structure.

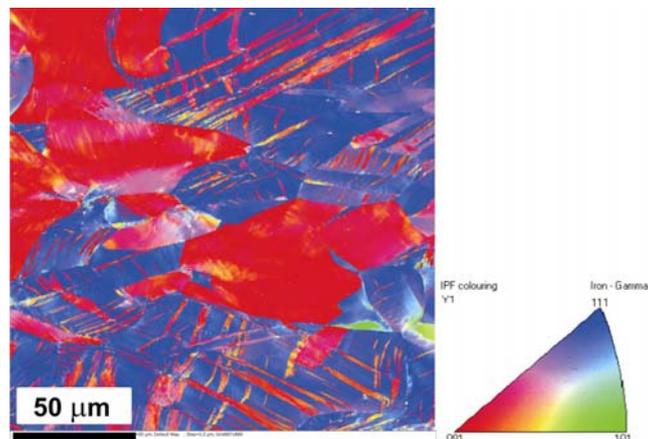


Fig. 5. Distribution of grain orientation in the neck zone. It is seen two dominant components of the texture.

#### 4. Conclusions

a) Experimental method of determination of energy storage rate distribution in the area of heterogeneous deformation has been proposed. b) In the plastic strain localization area material reaches the state, where energy storage rate reaches the 0 value and then becomes negative. This means that the material loses an ability to store the energy. Though energy supply the internal energy of the

specimen decreases. Thus, the 0 value of the energy storage rate could be regarded as the plastic instability criterion based on the energy conversion.

c) On the basis of microstructure observation it is believed that 0 value of energy storage rate corresponds to the state in which only two dominant components of the texture appear, creating conditions to crystallographic shear-banding

#### REFERENCES

1. Oliferuk W., Korbel A., W. Bochniak (2001) Energy balance and macroscopic strain localization during plastic deformation of polycrystalline metals, *Material Science and Engineering*, **A319-321**, 2001, p. 250–253.
2. Oliferuk W., Maj M., Plastic instability criterion based on energy conversion, *Materials Science and Engineering*, **A462**, 2007, p. 363-366.
3. Oliferuk W., Maj M., Energy storage rate and plastic instability, *Archives Metallurgy and Materials*, vol. **52**, 2007, p. 250-256.

#### Information about authors

**Oliferuk Wiera** – professor, Białystok University of Technology, Faculty of Mechanics, Wiejska 45A, 15-351 Białystok, and Institute of Fundamental Technological Research, Polish Academy of Sciences, Laboratory of Thermoplasticity, Pawinskiego 5B; 02-106 Warszawa, Poland,

phone: +48 22 826 12 81 ext.: 177,

E-mail: [wolif@ippt.gov.pl](mailto:wolif@ippt.gov.pl)

**Maj Michał** – Ph.D., Institute of Fundamental Technological Research, Polish Academy of Sciences, Laboratory of Thermoplasticity, Pawinskiego 5B; 02-106 Warszawa, Poland,

phone: +48 22 826 12 81 ext.: 177,

E-mail: [mimaj@ippt.gov.pl](mailto:mimaj@ippt.gov.pl)

# DYNAMIC FRACTURE AND PULSED STRENGTH OF CONTINUUM

**Petrov Y.V.**

**Annotation** Some of the principal features of the behavior of materials subjected to impact actions are common for a number of seemingly quite different physical processes, such as dynamic fracture (starting cracks and spalling), cavitation in liquids, and electrical breakdown in solids. The examples of different physical processes considered in the paper show the fundamental importance of investigating incubation processes preparing abrupt structural changes (fracture, yielding and phase transitions) in continua under intense pulsed actions.

1. Experiments on the dynamic fracture of solids, liquids, conductors, and insulators that is caused by fast intense actions of environment or directed energy fluxes reveal a number of effects indicating a fundamental difference between the fast dynamic rupture (breakdown) of materials and a similar process under slow quasi-static actions. For example, one of the basic problems in testing the dynamic-strength properties of materials is associated with the dependence of the limiting characteristics on the duration, amplitude, and growth rate of an external action, as well as on a number of other factors. Whereas a critical value is a constant for a material in the static case, experimentally determined critical characteristics in dynamics are strongly unstable, and as a result, their behavior becomes unpredictable. In this paper, we analyze examples illustrating typical dynamic effects inherent in these processes. We propose a unified interpretation for the fracture of solids and liquids and electrical breakdown in insulators using the structural-time approach [1-4] based on the concept of the fracture incubation time.

2. Though for several decades it was known and generally recognized that static critical conditions (i.e. critical stress criterion for fracture of intact media and Irwin's critical stress intensity factor criterion for fracture of bodies with cracks) are not applicable to study fracture induced by dynamic range loads, no conventional approach to the problem was formed. In [1-4] a new powerful approach able to describe all the variety of experimentally observed effects typical for dynamic fracture was proposed. The incubation time criterion of fracture proposed in [1, 2] gives a possibility to predict complicated and unstable behavior of dynamic-strength characteristics. For some of cases incubation time critical condition of fracture can be generalized:

$$\frac{1}{\tau} \cdot \int_{t-\tau}^t \left( \frac{F(t')}{F_c} \right)^\alpha dt' \leq 1, \quad (1)$$

Here,  $F(t)$  is the intensity (ex. local mean stress, stress intensity factor, pressure, etc.) of a local force field causing the fracture (or structural transformation) of the medium,  $F_c$  is the static limit for the local force field (ex. ultimate stress, critical stress intensity factor, etc.), and  $\tau$  is the incubation time associated with the dynamics of a relaxation process preceding rupture. The fracture time is defined as the time at which condition (1) becomes equality. The parameter  $\alpha$  characterizes the sensitivity of a material to the intensity of the force field causing fracture.

Using the example of a mechanical break in a material, one of the possible methods to interpret and determine the parameter  $\tau$  is presented. It is assumed that a standard sample is subjected to tensile loading suddenly applied at  $t = 0$ . Force applied to the sample is  $F(t) = PH(t)$ , where  $H(t)$  is the Heaviside step function. It is supposed the sample is broken into two parts at stress  $P$ . If quasi-brittle fracture is supposed, the material should unload after the rupture happened and the local stress at the break point should decrease rapidly (but not instantaneously) from  $P$  to 0. In this case, a corresponding unload wave is generated. The wave propagates along the sample, and can be detected by variety of widely used (e.g., interferometric) methods. The stress time dependency at the break point can be conditionally represented by the following dependence:  $\sigma(t) = P - Pf(t)$ , where the function  $f(t)$  is smoothly and monotonically varying from 0 to 1 within a certain time interval  $T$ . The "step" case  $f(t) = H(t)$  reflects the classical strength theory. In other words, according to classical approach, break occurs instantaneously ( $T = 0$ ). In practice, the break of a material (sample)

is a process occupying some time, and the function  $f(t)$  is describing the *micro-scale level* kinetics of material transformation from conditionally defect-free state ( $f(0) = 0$ ) to completely broken state at the given point ( $f(0) = 1$ ). On the other hand, applying fracture criterion (1) to *macro-scale level*  $F(t) = PH(t)$ , one can receive at a relation for time to fracture  $t_* \equiv T = \tau$  for  $P = F_c$ .

In other words, the incubation time introduced above is equal to the duration of the fracture process after the stress in a material has reached the static ultimate strength. This time can be measured in experiments with statically loaded samples using variety of methods, e.g., by measuring the time of the pressure increase in the *unload wave* front, which can be determined by interferometric (visar-based) methods using the velocity profile of points of a sample surface.

It was shown in [1-4], that staying within the frames of linear elastic fracture mechanics it is possible to describe all the observed features of fracture caused by high rate loads. And even more attractive is the fact that the same critical fracture condition based on the notion of the incubation time can be used for all load rates – from quasistatic situations, when incubation time criterion repeats classical fracture criteria, to extreme dynamic conditions, when incubation time criterion is in very good qualitative and quantitative agreement with experimentally observed processes.

3. A typical example illustrating the complicated behavior of the dynamic strength of solids is the time dependence of strength observed under scabbing conditions [5] (see Fig. 1). This dependence of the

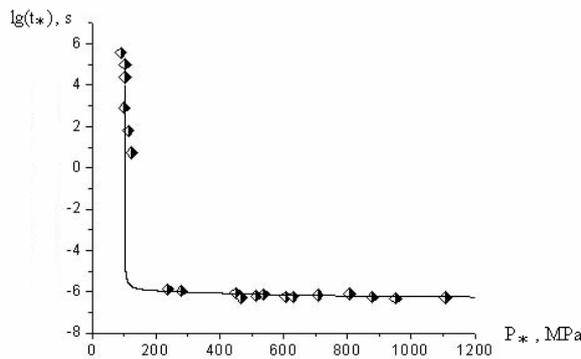


Fig. 1. Logarithm of the fracture-process duration  $t_*$  vs. the threshold amplitude  $P_*$  of a stress pulse that causes spalling in an aluminum (Zlatin et al [5]).

of strength nor known time criteria explains this phenomenon.

The total time dependence of strength can be obtained on the basis of incubation time criterion (1). For the scabbing fracture under consideration, this criterion takes the form of the limiting condition previously proposed in [1]:

$$\frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t \sigma(t') dt' \leq \sigma_c \quad (2)$$

where  $\sigma(t)$  is the time dependence of the local stress at the break point. The scheme for the application of criterion (2) to split problems is given in [3,4].

An example of a calculation using criterion (2) for the time dependence of the strength of aluminum ( $\tau = 0.75 \mu s$ ,  $\sigma_c = 103 MPa$ ) for triangular pulses realized in the experiments reported by Zlatin et al. (Zlatin et al, 1974) is represented in Fig. 1 by the solid curve.

fracture time  $t_*$  on the critical pulse amplitude  $P_*$  for different pulse durations shows that the dynamic strength is not a material constant but depends on the time to fracture (i.e., sample "lifetime").

The criterion of critical stress  $\sigma(t) \leq \sigma_c$ , where  $\sigma_c$  is the static strength, describes well long-term quasistatic fracture caused by long-duration wave pulses  $\sigma(t) = P \varphi(t)$ , where  $P$  is the amplitude and  $\varphi(t)$  is the time profile function. However, in the case of short-duration pulses, the fracture time weakly depends on the threshold pulse amplitude, and this dependence has a certain asymptote. This effect is called the phenomenon of the mechanical branch of the strength time dependence. Neither the conventional theory

Effects in the behavior of the dynamic fracture toughness [2,3] can be analyzed in a similar manner. Rate dependences  $K_{I_d}$  of the dynamic fracture toughness, which were observed in experiments, are characterized by a strong instability and can noticeably change when varying the duration of the load rise stage, the shape of the time profile of a loading pulse, sample geometry, and the method of load application (Ravi-Chandar and Knauss [6]; Kalthoff [7]; Dally and Barker [8]). The calculations based on the concept of the incubation time corresponding to the conditions of a number of experiments were carried out by Petrov and Morozov (Petrov and Morozov, 1994.). The results show that the dynamic fracture toughness is not an intrinsic characteristic of a material. Therefore, the employment of both the criterion of the critical intensity coefficient  $K_I(t) \leq K_{I_d}$  and the characteristic  $K_{I_d}$  as a material parameter defining the dynamic fracture (in analogy to the static parameter  $K_{I_c}$ ) are incorrect.

5. Cavitation is the violation of the continuity of a liquid (i.e., the initial stage of fracture) in the field of tensile stresses. This phenomenon is accompanied by the growth of vapor bubbles on cavitation nuclei, which are virtually always present in liquids in the form of microscopic bubbles of free gas, microparticles, or their combinations (Besov et al [9]; Besov et al [10]).

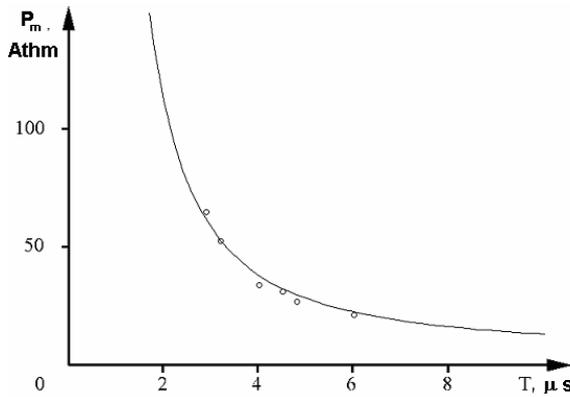


Fig. 2. Mechanical strength measured and calculated for water as a function of the pulse duration (Besov et al [10]). □

One of the parameters characterizing the cavitation strength of water is the cavitation threshold. This threshold is a certain negative pressure above which cavitation nuclei intensely grow, and as a consequence, the dynamics of the free surface of the liquid, the intensity of light scattering, etc., change abruptly.

Fig. 2 shows the experimental data obtained by Besov [10] by using the capacity method of detecting the cavitation threshold through the dynamics of the free surface of the liquid when a shock wave is reflected from this surface. According to this procedure, the shock wave is produced in a shock tube by a pressure of a pulsed magnetic field onto the

conducting membrane transferring the pressure pulse to the liquid. The pressure pulse that was realized in the experiment with water and caused the cavitation on the free surface had the form

$$\sigma(t) = -P_A \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right) \cdot e^{-\frac{t}{T_1}}, \quad T_1 = 2.85 \cdot 10^{-6} s. \quad \text{The maximum pulse amplitude } P_m \text{ was reached}$$

at the time  $t = \frac{T}{\pi} \cdot \arctg\left(\frac{\pi T_1}{T}\right)$  and determined by the formula

$$P_m = \frac{\pi T_1 P_A}{\sqrt{T^2 + \pi^2 T_1^2}} \cdot \exp\left(-\frac{T}{\pi T_1} \cdot \arctg\left(\frac{\pi T_1}{T}\right)\right).$$

In order to analyze the initial stage of the cavitation fracture, we make use of incubation time criterion (1). In this case, we take into account that tensile stresses in mechanics of a deformed body are positive, whereas tensile pressures in liquids are negative. In addition, compressing pressure must be taken into account. Therefore, condition (1) for a liquid takes the form

$$\frac{1}{\tau} \cdot \int_{t-\tau}^t \text{sign}(\sigma(t')) \cdot \left( \text{abs}\left(\frac{\sigma(t')}{\sigma_c}\right) \right)^\alpha dt' \leq 1. \quad (3)$$

The strength of water, which was calculated in accordance with criterion (3), is shown by the solid curve in Fig. 3 as a function of the pulse duration  $T$  for  $\sigma_c = 1 \text{ atm}$ ,  $\alpha = 0.5$ , and  $\tau = 19 \mu\text{s}$  (Besov et al [12]).

Thus, the experiments show that the cavitation strength of liquids increases nonlinearly with decreasing loading-pulse duration. Using the incubation time criterion makes it possible to calculate the experimentally observed increase in the cavitation threshold with decreasing the pulse duration.

6. The above effects are also observed in pulsed electrical breakdown in insulators, which is an urgent problem in the development and exploitation of high-voltage facilities and other electrical equipment. For example, the typical feature of pulsed breakdown is an increase in the breakdown voltage with reducing pulse duration. The breakdown channel in alkali-halide crystals, which is produced by a pulsed electric field with a duration of 10 ns, arises at voltages exceeding quasistatic ones by several

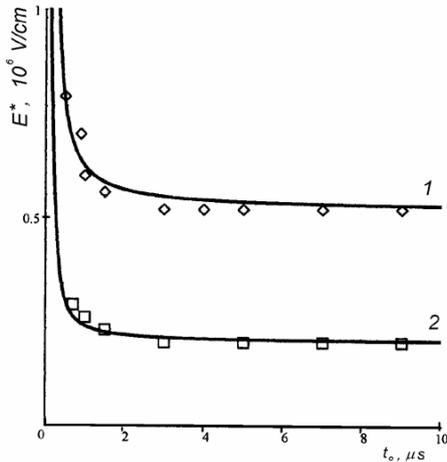


Fig. 3. Electrical strength  $E^*$  of ammonium perchlorate vs. the duration  $t_0$  of the leading edge of an electrical pulse for the interelectrode distance  $L = 0.1$  (curve 1) and  $0.03$  (curve 2) cm (Khanefts [12]).

times (i.e., with durations of  $1\mu s$  and more) (Vorob'evs [11]). The same effect is typical of ionic compounds. As an example, the breakdown electric field  $E^*$  measured by Khanefts [12] for ammonium perchlorate single crystals is presented in Fig. 3 as a function of the duration  $t_0$  of the leading edge of the pulse. This dependence also characterizes the electrical strength as a function of the voltage growth rate in a sample and can be called the time dependence of strength by analogy with the above examples of scabbing, starting cracks, and cavitation. In the experiment reported by Khanefts [12], thin single-crystal ammonium perchlorate plates were placed in a pulsed electric field. The electrical breakdown of samples resulted in their burning out accompanied by the appearance of a through channel. The experimental data shown in Fig. 3 correspond to distances between electrodes of  $0.01$  and  $0.03$  cm.

As is seen, for times  $t_0 \leq 1.5\mu s$ , the electrical strength of a material increases with a reduction in the duration of the leading edge of a voltage pulse (with an increase in the voltage growth rate in a sample). For  $t_0 > 1.5\mu s$ , the breakdown electric field becomes virtually independent of  $t_0$ .

In the case under consideration, the electrical-breakdown criterion corresponding to relationship (1) can be written in the form

$$\frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t E(t') dt' \leq E_c \quad (4)$$

Here,  $E_c$  is the static electrical strength of a material, which can depend on the interelectrode distance, and  $\tau$  is the incubation time for the electrical breakdown of the material, which is determined by the kinetics of the electron multiplication in the electric discharge. The curves in Fig. 3 are the time dependences for the electrical strength of ammonium perchlorate calculated according to criterion (4) in [13] with the parameters  $\tau = 0.33\mu s$  and  $E_c = 0.52 \times 10^6$  V/cm and  $0.2 \times 10^6$  V/cm for  $L=0.01$  and  $0.03$  cm, respectively.

The onset time of increasing the breakdown field in the dependences plotted in Fig. 3 is entirely determined by the  $\tau$  value. As it was shown experimentally [14] this time was virtually independent of the interelectrode distance. This indicates that the incubation time in the case under discussion may be considered as a material characteristic.

7. Thus, the examples of different physical processes considered above show that the fracture incubation time is evidently a universal basic characteristic of the dynamic strength and must become

one of the main material parameters to be experimentally determined (measured). The above results show that the incubation-time approach is fundamental and makes it possible to adequately represent the dynamics of both the fracture of solids and liquids and electrical breakdown in insulators.

*Acknowledgements.* This research was supported by RFBR research grants (11-01-00491, 10-01-91154-GFEN), Russian Federation State contracts and academic program of Presidium of the Russian Academy of Sciences

## REFERENCES

1. Petrov, Yu.V., On “quantum” nature of dynamic fracture in brittle solids. *Sov. Phys. Dokl.*, 36, 802-804, 1991.
2. Petrov Y., Morozov N.: On the Modeling of Fracture of Brittle Solids. *ASME J. Appl Mech* 61:710–712, 1994.
3. Morozov N, Petrov Y.: *Dynamics of Fracture*. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 2000.
4. Petrov Y.V., Morozov N.F., Smirnov V.I.: Structural Macromechanics Approach in Dynamics of Fracture. *Fatigue Fract Eng Mater Struct* 26:363–372, 2003.
5. Zlatin, N.A., Mochalov, S.M., Pugachev, G.S., and Bragov, A.M., Temporal features of fracture in metals under pulsed intense actions. *Sov. Phys. Solid State*, 16, 1137-1140, 1974.
6. Ravi-Chandar K. and Knauss, W.G., An experimental investigation into dynamic fracture: 1. Crack initiation and arrest. *Int. J. Fract.* 25, 247-262, 1984.
7. Kalthoff, J.F., Fracture behaviour under high rates of loading. *Engng. Fract. Mech.* 23, 289-298, 1986.
8. Dally J.W. and Barker, D.B. Dynamic measurements of initiation toughness at high loading rates. *Exp. Mech.* 28, 298-303, 1988.
9. Besov, A.S., Kedrinskii, V.K., Morozov, N.F., Petrov, Y.V., and Utkin A.A. On the analogy of initial stage of cavitation and fracture in solids. *Dokl. Phys.* 46, 363-365, 2001.
10. Besov, A.S., Kedrinskii, V.K., Matsumoto U., et al., Microinhomogeneity structures and hysteresis effects in cavitating liquid. In: *Din. Splshnoi Sredy*, No. 104, 16-21, 1992.
11. Vorob'ev, A.A. and Vorob'ev, G. A., *Electrical Breakdown and Destruction of Solid Dielectrics*, Vysshaya Shkola, Moscow, 1966.
12. Khanef, I.G. and Khanef, A.V., Electrical strength of ammonium perchlorate in pulsed electrical field. *Tech. Phys.* 45, 423-427, 2000.
13. Bratov V.A., Morozov N.F., Petrov Y.V. *Dynamic Strength of Continuum*. St.-Petersburg Univ. Press, 2009.

### **Information about author**

**Petrov, Yuri Victorovich** – Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences (RAS), Head of Department of Extreme States of Materials and Constructions of the Inst. Probl. Mech. Engng. RAS, Director of the Research Centre of Dynamics at the St.-Petersburg State University (SPbSU), Professor of the SPbSU, (812) 321 47 88, (812) 428 69 89

**E-mail:** [yp@YP1004.spb.edu](mailto:yp@YP1004.spb.edu)

# WAVE PROPAGATION IN PIEZOELECTRIC WAVEGUIDES WITH PERIODIC INTERFACE CONDITIONS

Piliposyan D.G

**Annotation.** The propagation of electro-magneto-elastic coupled shear waves in a piezoelectric waveguide is considered within a full system of the Maxwell's equations. Two different conditions along the guide walls have been studied in the case of periodic electrically shorted interfaces. It has been shown that under electrically shorted periodic transmission conditions the Bloch-Floquet waves exist only at acoustic frequencies. The results demonstrate the significant effect of piezoelectricity on the widths of band gaps at acoustic frequencies.

**1. Introduction.** Many smart structures such as piezoelectric or piezomagnetic composites are periodically made up of two or more different constituents. Compared with the purely elastic crystals they exhibit electric or magnetic effects and thus new acoustic properties. Through careful modulation of the refractive indices of constituent materials in these composites it is possible to prevent electromagnetic or acoustic wave propagation in a specific frequency range and give rise to photonic or phononic band gaps. Considerable interest in the transport properties of waves propagating in periodic structures are due to possibilities for controlling light and sound propagation. Other applications include confinement of acoustic energy in defect modes, manufacture of high efficiency acoustic waveguides and enhancement of sound light interactions. Electro-mechanical coupling in piezoelectric phononic crystals offers a wider range of applications in engineering. Therefore waves in such crystals have recently received much attention. The problems concerning the propagation of acoustic waves both in two and three dimensional piezoelectric periodic structures are considered in [1-7]. In particular in the paper [7] the dispersion relations for shear horizontal (SH) wave propagation in a periodic layered piezoelectric structure studied for the cases of wave propagation in the directions normal and tangential to the interfaces.

**2. Statement of the problem.** The propagation of electro-magneto-elastic coupled SH wave in a one dimensional infinite periodic waveguide made from periodic piezoelectric hexagonal material is considered. The crystallographic axis directed along the Oz direction. Waveguide is referred to axes x, y as described in figure 1. The problem is considered in the framework of the full system of Maxwell's equations (non quasi stationary) which will give an opportunity to study the wave dispersion equation in both acoustic and optic wave frequency regions.

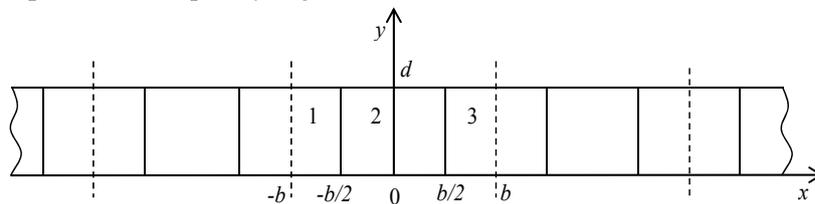


Figure 1. Waveguide with periodic interface conditions at  $x = \pm b/2$

Harmonic time dependence  $\exp(-i\omega t)$ , is assumed understood, and henceforth suppressed.

Using relations that describe elastic and electro-magnetic excitations the following coupled system of equations for displacement  $u(x, y)$  and magnetic field  $H(x, y)$  can be written as [8]

$$G \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \right) + \rho \omega^2 u(x, y) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 H(x, y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H(x, y)}{\partial x^2} + \varepsilon \mu \omega^2 H(x, y) = 0, \quad (2)$$

where

$$G = c_{44} + \frac{e^2}{\varepsilon}, \quad e = e_{15}, \quad \varepsilon = \varepsilon_{11}, \quad \mu = \mu_{33}$$

The electrical field and stresses can also be expressed via the magnetic field and the displacement as

$$E_x = -\frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial H}{\partial y} + e \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad E_y = \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial H}{\partial x} - e \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (3)$$

$$\sigma_{xz} = G \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{e}{\varepsilon} \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \sigma_{yz} = G \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{e}{\varepsilon} \frac{\partial H}{\partial x}.$$

Equations (1), (2) and (3) admit solutions in the form

$$H(x, y) = H_0(x) \sin(p_n y), \quad u(x, y) = u_0(x) \cos(p_n y), \quad (4)$$

or

$$H(x, y) = H_0(x) \cos(py), \quad u(x, y) = u_0(x) \sin(py) \quad (5)$$

where  $p_n = \pi n/d$   $n=0,1,2,\dots$

For solutions (4) the mode  $n=0$  leads to a solution  $u(x, y) = u(x)$  independent of  $y$  and a trivial solution for magnetic field function, therefore we have the case of pure elastic wave propagation.

For solutions (5) the mode  $n=0$  leads to a solution  $H(x, y) = H(x)$  independent of  $y$  and a trivial solution for elastic field function, therefore we have the case of pure electromagnetic wave propagation.

These solutions correspond to the following boundary conditions along the guide walls (edges)  $y = 0$  and  $y = d$ .

I. Traction free and magnetically closed edges

$$\sigma_{xz}(x, 0) = 0, \quad H(x, 0) = 0, \quad \sigma_{xz}(x, d) = 0, \quad H(x, d) = 0. \quad (6)$$

II. Clamped and electrically shorted edges

$$E_x(x, 0) = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad E_x(x, d) = 0, \quad u(x, d) = 0. \quad (7)$$

We shall consider the wave propagation in homogeneous waveguide in the case of periodic electrically shorted interfaces with the full contact transmission conditions. The boundary conditions at interfaces  $x = \pm b/2$  can be written in following form.

$$E_{y0}^{(1)}(-b/2) = 0, \quad E_{y0}^{(2)}(-b/2) = 0, \quad E_{y0}^{(2)}(b/2) = 0, \quad E_{y0}^{(3)}(b/2) = 0 \quad (8)$$

$$u_0^{(1)}(-b/2) = u_0^{(2)}(-b/2), \quad u_0^{(1)}(b/2) = u_0^{(3)}(b/2), \quad (9)$$

$$\sigma_{0xz}^{(1)}(-b/2) = \sigma_{0xz}^{(2)}(-b/2), \quad \sigma_{0xz}^{(1)}(b/2) = \sigma_{0xz}^{(3)}(b/2). \quad (10)$$

According to the Floquet theory equations (1)-(2) defined on an infinite interval can be considered on the period finite interval  $-b \leq x \leq b$  with the special boundary conditions of quasi-periodicity

$$\sigma_{yz}^{(1)}(-b) = \lambda \sigma_{yz}^{(3)}(b), \quad u_0^{(1)}(-b) = \lambda u_0^{(3)}(b), \quad (11)$$

$$H_0^{(1)}(-b) = \lambda H_0^{(3)}(b), \quad E_{y0}^{(1)}(-b) = \lambda E_{y0}^{(3)}(b), \quad (12)$$

where  $\lambda = e^{2ik_n b}$ .

The solutions for the magnetic field and the elastic displacement can be written as

$$H_0^{(i)} = C_{in} \sin(q_n x) + B_{in} \cos(q_n x), \quad u_0^{(i)} = A_{in} \sin(r_n x) + F_{in} \cos(r_n x), \quad i=1,2,3, \quad n=0,1,2,3 \quad (13)$$

Where

$$q_n = \sqrt{\omega^2 \varepsilon \mu - \pi^2 n^2 / d^2}, \quad r_n = \sqrt{\rho \omega^2 / G - \pi^2 n^2 / d^2}, \quad n=1,2,3,\dots \quad (14)$$

Substituting solutions (13) into boundary conditions (8)-(12) produces the dispersion equation which is valid for both cases (I) and (II).

$$\lambda_n^2 - 2 \frac{g_n(p, \omega)}{f_n(p, \omega)} \lambda_n + 1 = 0, \quad (15)$$

where

$$g_n(p, \omega) = q^2 r^2 \cos(2bq_n) \sin(br_n)^2 + p_n^2 \gamma \left[ -2q_n r_n \sin(bq_n) + 2q_n r_n \cos(bq_n) \sin(2bq_n) \right. \\ \left. + p_n^2 \gamma \cos(2bq_n) \sin(br_n) \right] \sin(ar_n),$$

$$f_n(p, \omega) = \left[ d^2 q_n r_n \sin(bq_n) + \pi^2 n^2 \gamma \sin(br_n) \right]^2, \text{ and } \gamma = \frac{e^2}{G\varepsilon}.$$

Using trigonometric identities and taking into account the value of  $\lambda$  (15) can be written as

$$\cos(k_n b)^2 = \left( \frac{g_n(p, \omega)}{f_n(p, \omega)} \right)^2 + 1 \quad (16)$$

which then can be simplified to

$$\cos(bk_n) = \frac{d^2 q_n r_n \cos(br_n) \sin(bq_n) + \pi^2 n^2 \gamma \cos(bq_n) \sin(br_n)}{d^2 q_n r_n \sin(bq_n) + \pi^2 n^2 \gamma \sin(br_n)}. \quad (17)$$

For  $n=0$  equation (17) converts to

$$\cos(bk_0) = \cos\left(b \omega \sqrt{\rho / G}\right).$$

For this mode the propagating wave is purely elastic and there are no band gaps.

**3. Numerical results.** For given values of  $n$  and  $\omega$  the dispersion equation (17) defines the wave number  $k$ . The regions of  $\omega$  where values of  $k$  are complex  $|\cos(bk_n)| > 1$  correspond to band gaps. The appearance of band gaps depends on the dimensionless parameter wave number  $\alpha = \pi n b / d$ .

Material	Elastic constant $c_{44}$ $10^{10} \text{ N/m}^2$	Piezoelectric constant $e_{15}$ $\text{C/m}^2$	Permittivity $\varepsilon_{11}$ $10^{-11} \text{ F/m}$	Density $\rho$ $10^3 \text{ kg/m}^3$
PZT-4	2.56	12.7	646	7.6
BaTiO <sub>3</sub>	4.3	11.6	1.264	5.7

Figure 2 shows the effect of piezoelectricity when the unit cell is made of identical piezoelectric materials. In Figure 2.1 due to higher piezoelectric constant of BaTiO<sub>3</sub> the band gaps are wider than in Figure 2.2 where PZT-4 material is considered. In this both cases while clearly there are no band gaps without piezoelectric effect the electrically shorted interface conditions cause an opening of band gaps in the waveguide. Figure 8 and 9 show that the widths of these band gaps are significant at low frequencies and gradually disappear at higher frequencies. Since these bad gaps are solely due to piezoelectricity this shows that the effect of piezoelectricity at higher frequencies. Changing the polarization of one of the identical piezoelectric materials in the unit cell to the opposite direction does not affect the above mentioned results since the dispersion equation contains the square of the piezoelectric constants. Numerical calculations also show that electrically shorted boundary conditions do not allow propagation of electromagnetic waves in piezoelectric periodic structures. The dynamic setting of the problem in this case provides the Bloch-Floquet solutions only for phononic crystals.

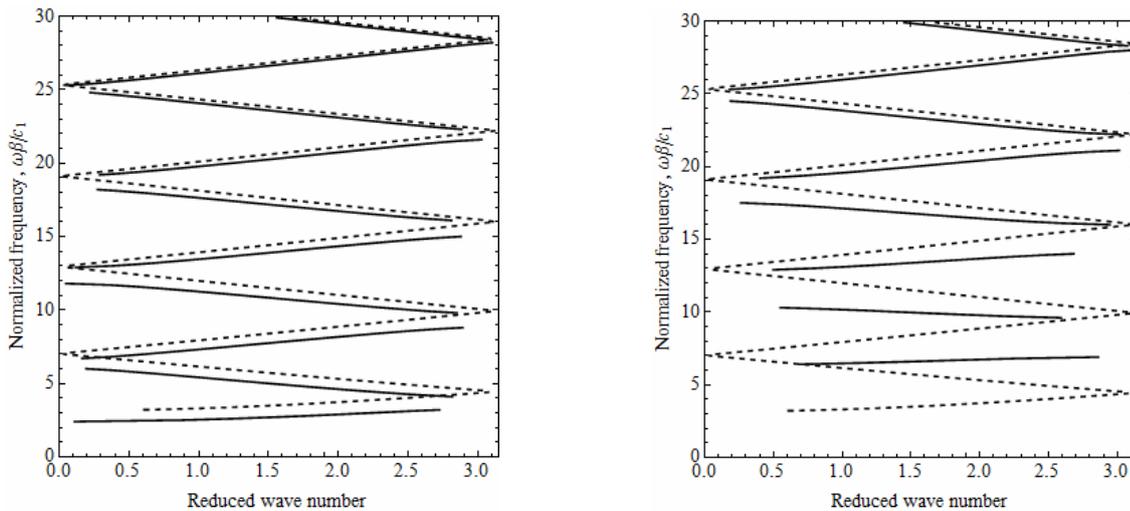


Fig.2 Band structure of piezoelectric phononic crystal of PZT-4 and BaTiO<sub>3</sub> materials. Solid lines and the dashed lines show the band structure with and without piezoelectric effect for  $n=2$ .

Figure 3 shows the propagation of different modes of the Bloch-Fouquet waves. It can be seen that for higher modes the cut off increases, the band gaps become wider and shift to right. However it can be seen that for all waves the band gaps gradually disappear at significantly higher frequencies.

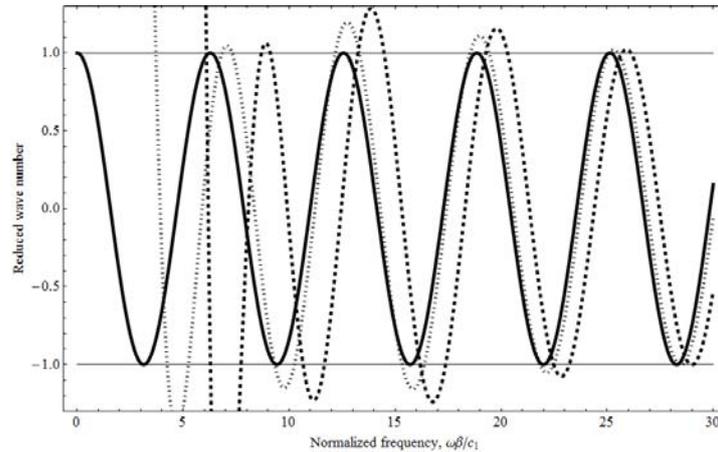


Fig.3 Band structure of piezoelectric phononic crystal (material PZT-4). Solid lines, dashed and dotted lines show respectively the band structure with  $n=0$ ,  $n=3$  and  $n=6$  for  $d=\pi b$

**4. Conclusion.** The propagation of electro-magneto-elastic coupled SH waves in one dimensional infinite periodic piezoelectric waveguides are considered within a full system of the Maxwell's equations. Such setting of the problem allows investigating of the Block-Floquet waves in a wide range of frequencies.

The partial periodic contact with electrically shorted interfaces, continuous displacements and tractions on Bloch- Floquet waves in both acoustic and optic frequency regions have been studied. The problem has been solved for the following wall conditions for waveguides:

- (I) Neumann boundary condition for the displacement with Dirichlet boundary condition for the magnetic field function.
- (II) Dirichlet boundary condition for the displacement with Neumann boundary condition for the magnetic field function.

The results show that the partial periodic interface conditions in one-dimensional homogeneous piezoelectric waveguides can allow spectral gaps only at acoustic frequencies. These band gaps vanish at high frequencies confirming that the piezoelectricity does not play noticeable role at such frequencies.

The structure and widths of band gaps are not affected by changing the polarization of one of the piezoelectric materials in the unit cell to the opposite direction because the dispersion equation contains the square of the piezoelectric constants.

#### REFERENCES

1. Hou, Z.L., Wu, F.G., and Liu, Y.Y., 2004 "Phononic crystals containing piezoelectric material," *Solid State Communications* 130, 745-749.
2. Vashishth A.K., and Gupta, V., 2009, "Wave propagation in transversely isotropic porous piezoelectric materials," *International Journal of Solids and Structures* 46, 3620-3632.
3. Wang, Y.Z., Li, F.M., Kishimoto, K., Wang, Y.S, and Huang, W.H., 2008, "Wave localization in randomly disordered periodic piezoelectric rods with initial stress," *Acta Mechanica Solida Sinica* 21, 529-535.
4. Wang, Y.Z., Li, F.M., Kishimoto, K., Wang, Y.S., and Huang, W.H., 2009," Wave band gaps in three-dimensional periodic piezoelectric structures," *Mechanics Research Communications* 36, 461-468.
5. Wu, T.T., Hsu, Z.C., and Huang, Z.G., 2005, "Band gaps and the electromechanical coupling coefficient of a surface acoustic wave in a two-dimensional piezoelectric phononic crystal," *Physical Review B* 71, 064303.

6. Yan, Z.Z., and Wang, Y.S., 2008, “Calculation of band structures for surface waves in two dimensional phononic crystals with a wavelet-based method,” *Physical Review B* 78, 094306.
7. Qian, Z.H., Jin, F., Wang, Z.K., and Kishimoto, K., 2004, “Dispersion relations for SH-wave propagation in periodic piezoelectric composite layered structures,” *International Journal of Engineering Science* 42, 673–689.
8. Ghazaryan, K.B., and Piliposyan, D.G., 2011, “Interfacial effects for shear waves in one dimensional periodic piezoelectric structure,” *Journal of Sound and Vibrations*, V. 330(26), 6456–6466.

**Information about author:**

Davit Piliposyan – PhD student. Institute of Mechanics of National Academy of Sciences of Armenia, Tel: (374 91) 24 11 11, E-mail [davitpiliposyan@gmail.com](mailto:davitpiliposyan@gmail.com), [piliposyan@mechins.sci.am](mailto:piliposyan@mechins.sci.am)

# INFLUENCE OF STRENGTHENING ON DESTRUCTION OF REINFORCED CONCRETE ELEMENTS OF DESIGNS AT DYNAMIC LOADING

**Radchenko P., Goncharov M., Baldin I., Plevkov V., Radchenko A.**

This paper presents results of experimental and numerical research of reinforced concrete columns and joints at short-term vertical dynamic loading, which have yielded new results of the stressedly-deformed condition and schemes of fracture.

1. Recently questions of an assessment of durability and a deformability of concrete columns and their joints of multystoried buildings become more and more actual. At building of concrete structures of multystoried residential and civil buildings defects of manufacturing and an errors of installation which, reducing bearing ability of columns and their joints, can lead to failure of construction designs or buildings as a whole [1]. Besides, dynamic influences can perceive designs which didn't pay off earlier on dynamic loadings that is caused by seismicity increase for many regions of Russia and, especially for the cities of Western Siberia. Results of pilot and numerical studies of concrete columns and their joints are given in this work at the vertical short-term dynamic loading, which results allowed to receive new results of stressedly-deformed condition and the fracture scheme. During the review and ordering of literary data it was established that the question of studying of work of concrete columns and their joints at dynamic loading is insufficiently studied [2]. The program of pilot studies which included three series of samples was developed for studying of this problem. Each series consisted of five samples executed on the scale of 1:4 to natural columns, with a variation of existence of a joint, reinforcing in a joint and external strengthening in the form of metal elements. All experimental samples were reinforced by spatial knitted structures and cross-section fittings, in near-bearing zones there was an indirect reinforcing in the form of grids. The working reinforcement were executed in class A-III bars with diameter of 8 mm. Indirect reinforcement (collars and grids) is executed from a bars of Vr-I with diameter of 3 mm. For prevention of local fracture in near-bearing zones indirect reinforcing in the form of 5 grids with a step of 20 mm is established. Because of the weakened section in a zone of a joint five grids with a step of 20 mm were established. The geometrical sizes and reinforcing of experimental samples is provided on Fig. 1.

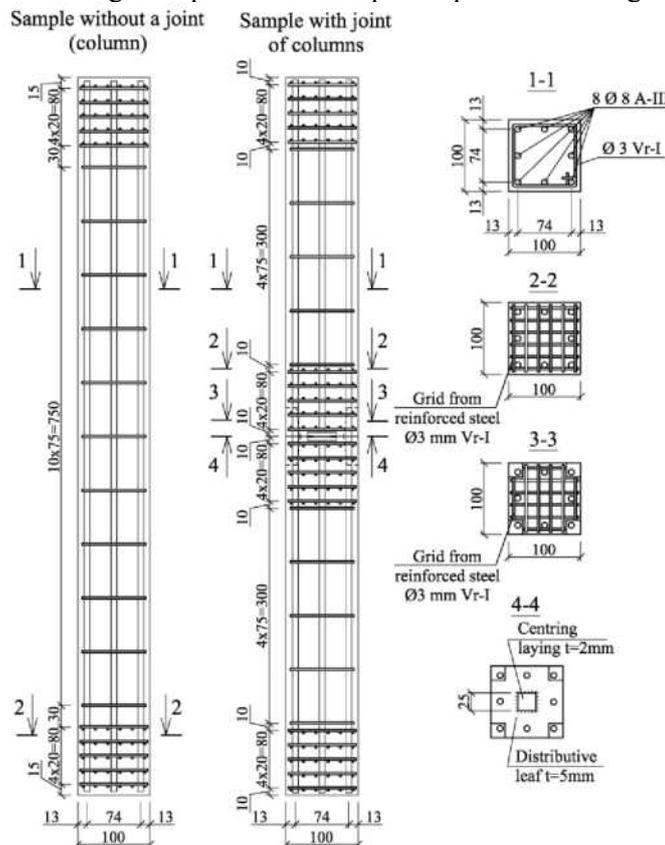


Figure 1. Experimental samples.

All prototypes were made of concrete which corresponded to the class B20. Tests of concrete elements were carried out in laboratory of chair of concrete and stone designs of Tomsk State University of Architecture and Building. For obtaining information on behavior of elements the patented installation with system of the measuring devices [3] presented on Fig. 2 was used.

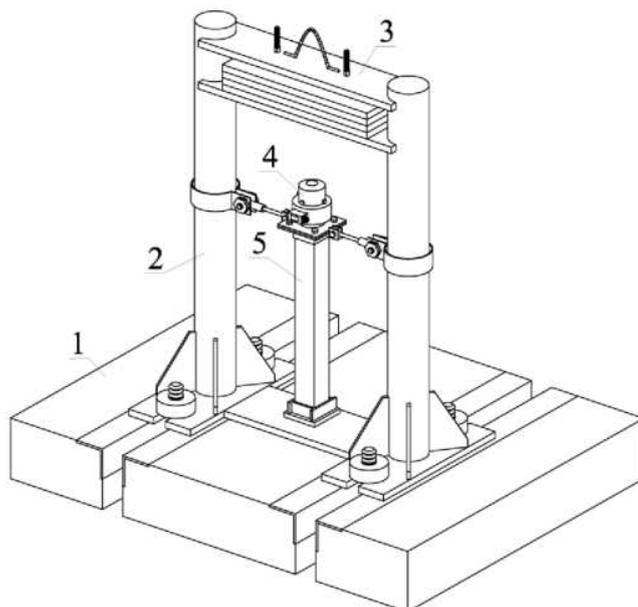


Figure 2. Patented installation: 1- power floor; 2- stand for tests; 3- weight; 4- dynamometer; 5- experimental sample.

The stand represents the installation, which placed on a power floor, consisting of runners, rigidly attached to a power floor. On runners the loading element with mass of 510 kg, attached by a crab and fixed at necessary height by safety collars is freely moves. The tested sample is fixed in vertical situation with the help bottom and top heads. In a bottom the basic ball which is fixing in a basic plate which densely lies on a power floor gives articulated conditions of fixing. Top head is connected with runners through the system of rods and cylindrical nozzles. Cylindrical nozzles fastened to runners by means of fixing couplings. Cargo was fixed at the set height - 1,5 m. Then, by means of a bomb-release gear, there was an unhitching of cargo which struck on an experimental sample through system of damped rubber laying. The size of loading was measured by the sensor of a dynamometer DST 412 of tensoresistive type. For measurement of deformations of concrete and reinforcement steel tensoresistor with base of 5 mm and resistance of 200 Ohm on reinforcement steel and base of 20 mm and resistance of 100 Ohm on concrete was used. On concrete tensoresistors were established on two perpendicular parties in joint level with a step of 125 mm on height. On reinforcement steel tensoresistors were established on four angular cores in a place of a joint of columns. Also they were established on other reinforcement steels slightly above and slightly lower than joint level. Indications of tensoresistors were registered by 64-channel tensometrical system for measurement of dynamic and static deformations MIC-400D. By means of the same system indications of a dynamometer and moving sensors were registered. For definition of movements 2 sensors of movements with the tensoresististical bridge scheme of measurement were used. For fixation of acceleration 6 accelerometers of type 4382 were established. Their indications registered by means of the 16-channel digital registrar MIC- 300M. The experimental researches allowed to reveal nature of deformation and a formation of cracks in concrete columns and in their joints at dynamic loading, and also an ultimate load of experimental samples.

The ultimate load of experimental samples is:

- for sample without joint (column) 305 kN (31.1 tonne);
- for sample with joint of columns 253 kN (25.8 tonne).

Nature of fracture and formation of cracks of experimental samples is given on Fig. 3, level and character of the applied load - on Fig. 4.

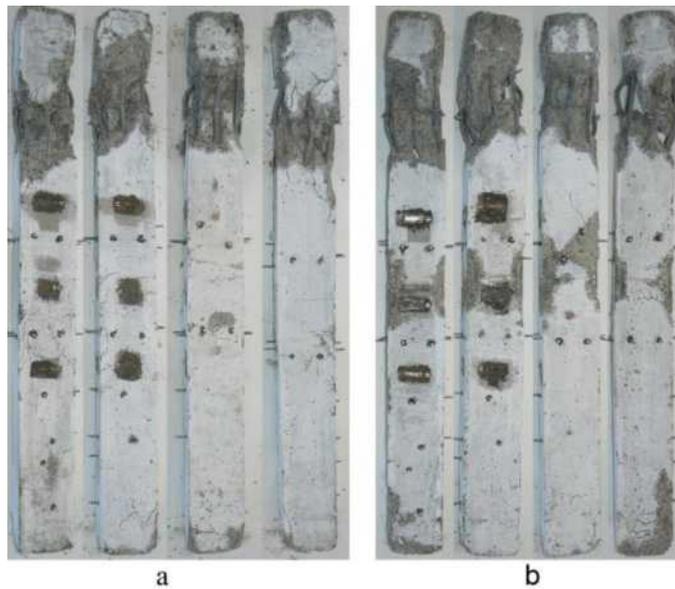


Figure 3. Nature of failure of experimental samples: a - sample without a joint (column); b - sample with a joint of columns.

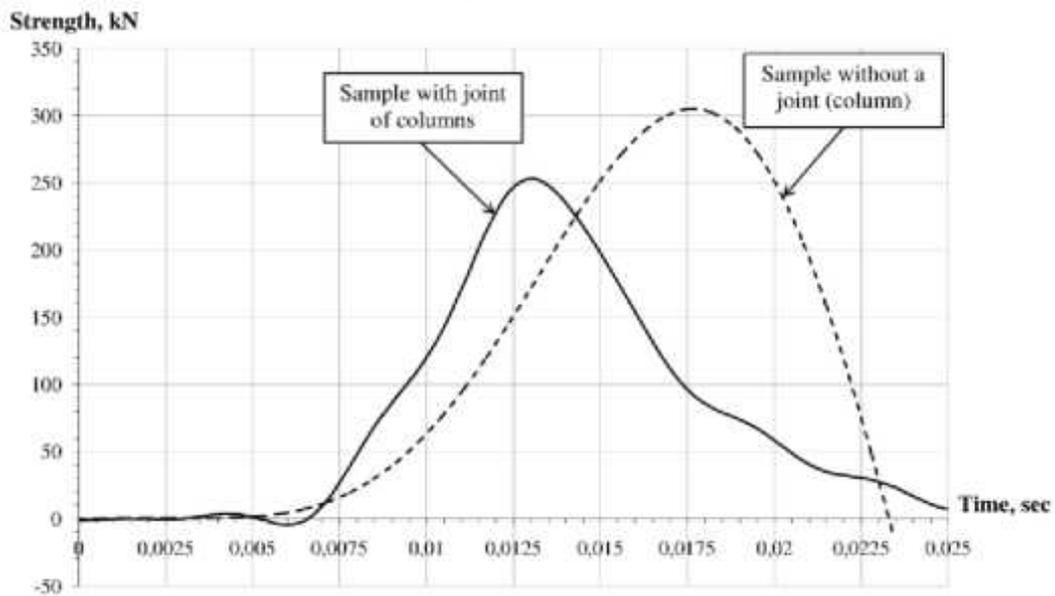


Figure 4. Dependence of the level of applied load on time: a - sample without a joint (column); b - sample with a joint of columns.

2. Also numerical modeling of process of dynamic interaction of the projectile with the samples which are completely similar experimental was carried out. The finite-difference scheme of a method of the finite elements, offered by G. Johnson [4] was applied. This approach allows to reveal the mechanism of fracture of studied samples in dynamics. On free surfaces boundary conditions of lack of tangential stress, on contact surfaces - sliding conditions without a friction are realized. Initial speed of the projectile coincided with experimental speed and form 4.43 m/s. The massive basis of the stand was realized by a condition of a rigid wall. The total of elements in calculation area reached 1-10. The behavior of the steel projectile was described by elastic-plastic model. For the description of behavior of samples the model of elastic-brittle behavior of a material was used. The material was assumed as the quasi-homogeneous [4]. As criterion of fracture of a material of samples Hoffman's criterion is used. This criterion allows to use various strength characteristics of a material on compression and tension [5]. It is supposed that fracture of a material of a concrete sample in the conditions of intensive dynamic loadings occurs as follows [6]. On Fig. 5 and Fig. 6. values of relative volume of fracture  $V_f/V_{sum}$  in samples by gray-scale color map is showed. It is necessary to explain that values  $V_f$  and  $V_{sum}$  are given to nodes of a mesh:  $V_f$  is volume of elements

incorporating in node in which the condition of fracture was satisfied;  $V_{sum}$  is total volume of the elements containing this node. Value corresponds  $V_f/V_{sum} = 1$  to final fracture of a material in node of a calculation mesh. Nodes in which the material is completely fractured are removed from calculation mesh for descriptive reasons. Calculations show that for a case of sample with joint fracture of the near-bearing zones is less, and column fracture more evenly, than for case of sample without joint. Fracture of a sample in the first case occurs on the strongly pronounced planes directed under various angles to a longitudinal axis of a column. In bigger the part of volume of the fractured material criteria of durability is broken at tension in the plane, perpendicular to the impact direction. The presented calculation scheme allows to receive good quality comparison with experiment and allows to track developments of fracture in time.

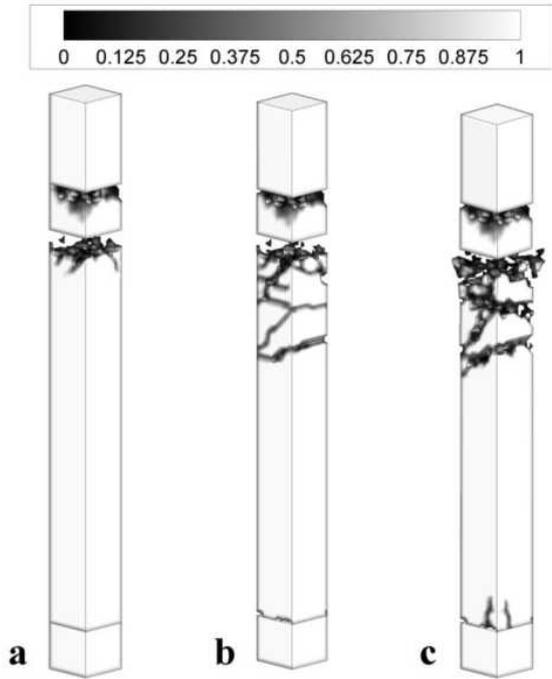


Figure 5. Distribution of relative volume of fracture in material of a sample without a joint (column): a -  $t=0.4$  ms; b -  $t=2$  ms; c -  $t=8$  ms.

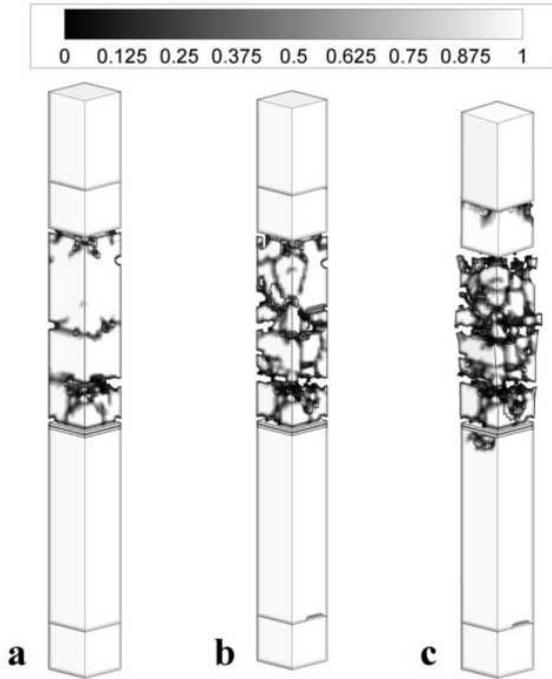


Figure 6. Distribution of relative volume of fracture in material of a sample with a joint of columns: a -  $t=0.4$  ms; b -  $t=2$  ms; c -  $t=8$  ms.

## REFERENCE

1. V.S. Plevkov, I.V. Baldin, and M.E. Goncharov, “Restoration of bearing ability of a ferro-concrete structure of the Cardiological center to Kemerovo”, Accident prevention of buildings and constructions, 2010. <http://pamag.ru/prensa/reviving-nsjk>.
2. V.S. Plevkov, I.V. Baldin, M.E. Goncharov, V.B. Maksimov, and I.A. Botieva, “Technique and results of pilot studies of joints of the ferroconcrete columns strengthened by metal elements”, TSUAB, 2010, p. 43.
3. V.S. Plevkov, G.I. Odnokopilov, I.V. Baldin, D. Y. Sarkisov, M.E. Goncharov, and P.V. Dzuba, Patent of Russia for invention № 2401424 MPK G01N 3/30 (2006/01), “The stand for test of ferro-concrete elements for short-term dynamic compression”, TSUAB, 2010.
4. G.R. Johnson, “High Velocity Impact Calculations in Three Dimension”. Journal of Applied Mechanics, Vol. 3, 1977, pp. 95-100.
5. A.V. Radchenko, S.V. Kobenko, I.N. Marcenuk, I.E. Khorev, G.I. Kanel, and V.E. Fortov, “Research on features of behaviour of isotropic and anisotropic materials under impact”, International Journal of Impact Engineering, Vol. 23, No. 1, 1999, pp. 745-756.
6. A.V. Radchenko, and P.A. Radchenko, “Numerical modeling of development of fracture in anisotropic composite materials at low- velocity loading”, Journal of Materials Science, Vol. 46, No. 8, 2011, pp. 2720-2725.
7. G.I. Kanel, S.V. Razorenov, A.V. Utkin, and V.E. Fortov, “Shock wave phenomena in condensed media”, 1996, Yanus-K, Moscow.

### Information about authors

**Radchenko Pavel** – research assistant, Institute of Strength Physics and Materials Science of SB RAS, +7(3822)286701; **E-mail:** [radchenko@live.ru](mailto:radchenko@live.ru)

**Goncharov Maxim** – post graduate student, Tomsk State University of Architecture and Building

**Baldin Igor** - associate professor, Tomsk State University of Architecture and Building

**Plevkov Vasiliy** - professor, Tomsk State University of Architecture and Building

**Radchenko Andrey** – director of Institute of Geoifomation and Cadastre, Tomsk State University of Architecture and Building

## **ESTIMATION OF HYDRAULIC STRUCTURES SAFETY BY COMPARISON OF STRENGTH AND STABILITY THEORIES**

**Sarukhanyan A.A, Varanyan G. G., Mkhitaryan L. S.**

Hydraulic structures being structures of first class require meeting the safety operation conditions. To secure safety operation conditions of earthfill dams it is important to evaluate their coefficients of stability and strength factor by calculation of mode of deformation of dam body. To complete these calculations the dam body soil actual state observation has to be carried out by experiments. Based on experimental data the mode of deformation of dam body is revealed by software modeling investigations, and safety operation conditions are evaluated. The mode of deformation is defined by nonlinear equations, which specify elasto-plastic state of dam body soil. Hydraulic structures safety and stability evaluation methods are elaborated in case of dynamic impact.

Hydraulic structures being structures of first class require meeting the safety operation conditions. Periodic complex checkup of technical state and based on its analyses specification of the given structure's safe operation evaluation is drawn up. Within the framework of the specification engineering estimates are given on technical state of the structure under study and conclusions are drawn for its further safe operation.

Often based on these conclusions implementations of a number of measures are planned which create conditions for further safe operation of the structure.

Accurate and optimal assessment of dams strength and stability is especially important in the design stage. More precise estimation of external influences and by their employing accurate estimation of strength and stability of structures create guarantees for further safe operation of dams.

However it is necessary to check again safety and stability of already erected and operating hydraulic structures. It especially is conditioned by time-dependent variation of physical-and-mechanical properties of soils. External influences acting on the given structure are also changed with the passage of time. As a characteristic example is seismic conditions change represented to existing dams foundations resulting in increase of horizontal acceleration in the entire area of the Republic of Armenia.

Estimation of safety factor and stability margin is possible only after obtaining physical-and-mechanical properties of the dam body soil. To this end it is necessary that during monitoring, as a mandatory condition, laboratory analyses [1,2] for obtaining physical-and-mechanical properties of tested soil specimen taken from the dam body must be borne in mind. Naturally, the period and necessity of such analyses depend on the characteristics of the given structure. Based on laboratory tests it is necessary to develop a mathematical model of stress-strain behavior of the soil and use it as a tool for carrying out computer-based experimental research to determine the field of deformation mode of the dam body. Having the clear picture of the stress-strain field of the dam body its safety factor and stability margin are computed.

To carry out research on stress-strain behavior of ground dams equations [3] of linear and non-linear elasto-plastic deformation theories are used. Dam slopes stability calculations are made making use of equations of solid bodies boundary equilibrium. For calculation of the dam safety and stability margins there should exist a limit for which the safety and stability of a structure are satisfied, that is one kind of calculations serve as a base for other kinds of calculations. As for conclusions, they should be interrelated.

It is well known that there are not clearly specified mathematical models designed for accurate estimation of hydraulic structures' stability, therefore stability problems of hydraulic structures have not yet been completely studied. It means that we have only approximate stability estimation of dams based on a plane problem, while it is necessary to checkup stability of the dam based on a three-dimensional problem. The latter is connected to a number of practical and theoretical complexities. Even in this case the accepted approximations do not ensure satisfactory accuracy.

As stated above the accurate estimation of hydraulic structures' stress-strain behavior can be a strong base for accurate and reliable estimation of their stability.

Theoretical footing of this method in case of the plane problem employing finite elements principles have already been used in practice. This method enables checking up dam slopes stability for different values of porous pressure ( $u$ ) and seismic loads. In this case using finite elements both the stress-strain field and the field of filtration gradients and porous pressure are calculated in the dam body under static and dynamic loads and then they are transferred to the sliding mass.

With this end in view the obtained values are averaged out at finite elements grid nodes and after that using Mohr relationships at the center of each layer's footing normal and tangent stresses (1.1,1.2) are obtained. Supporting forces appearing on the slip surface are obtained by Coulomb's law (1.3)

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta, \quad (1.1)$$

$$\tau_m = \tau_{xy} \cos 2\theta - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta, \quad (1.2)$$

$$S_r = \tau\beta = c' + (\sigma_n - u)tg\phi', \quad S_m = \beta\tau_m, \quad (1.3)$$

In case of finite elements employing [6,7,8] we have the dam slope stability factor  $K_{FEM} = \frac{\sum S_r}{\sum S_m}$

The same approach can be employed for three-dimensional problem which for the continuum should be solved if the given law of the material is known. Laws of materials are obtained by laboratory tests. The more accurate results are obtained by stabilometric tests. Boundary surfaces of materials are also obtained by stabilometric tests.

Accurate estimation of stability of hydraulic structures is especially important from seismic impacts considerations. Toward this end it is necessary to solve a dynamic equilibrium equation in matrix form

$$[M]\{\ddot{a}\} + [D]\{\dot{a}\} + [K]\{a\} = \{F\}$$

where  $[M] = \int_s \rho \{N\}^T \{N\} dS$  is the matrix of the mass,  $\rho$  is the specific mass,  $[D] = \alpha[M] + \beta[K]$

is the damping matrix representing resistance of the material (extinction forces),  $[K] = \int_s [B]^T [C] [B] dS$  is the stiffness matrix,  $\{F\} = \{F_b\} + \{F_L\} + \{F_n\} + \{F_g\}$  is the force vector at the node,  $\{F_g\}$  is gravitation force,  $\{\ddot{a}\}$  is the acceleration vector at the node,  $\{\dot{a}\}$  is the velocity vector at the node, and  $\{a\}$  is the node displacement matrix [9].

In case of elastic linear problems the constructive matrix ( $[C]$ ) is calculated according to Eq. (1.4) [4,5]. Since real soils have non-linear properties, then the constructive matrix is calculated for each loading stage.

$$[C] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} : \quad (1.4)$$

Dynamic (cyclic) loading increases porous pressure leading to the effective stress-strain state change of the body. That change is conditioned by respective change of mechanical properties of the material, i.e. the strength of soil material in case of dynamic loading acquires kinematic properties.

The stress-strain state is approximated with high degree of accuracy by a hyperbolic curve (5) given by the initial shear modulus ( $G_{max}$ ), which corresponds to small deformations and shear stress asymptote to which tend maximum values of shear stresses [12]. When in case of alternate loading a hysteresis deviation occurs, then the dependency curve becomes hyperbolic. Loading, unloading, and even reloading are carried out by the same hyperbolic curve [10, 11]. The advantage of this model is in

that that only a few parameters such as  $G_{\max}$ ,  $\varphi$  and  $C$  are required for carrying out calculations, as for the mechanism it is quite simple

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{\varepsilon_1}{a + b\varepsilon_1}, \quad (1.5)$$

For accurate calculation of a non-linear model an assumption (MES) is made which enables to calculate dependency of porous pressure on the number of repeated cycles. It is assumed that loading is made in drainless conditions, therefore the increase of porous pressure is conditioned by the increase of volumetric deformation of dry soil. The increase of the porous pressure is

$$\Delta u = E_r \Delta \varepsilon_{vd},$$

where  $\Delta u$  is the increase of porous pressure,  $\Delta \varepsilon_{vd}$  is the volumetric deformation increase of which dependency on the number of cycles and is determined by laboratory experiments,  $E_r$  is the module of reconstruction volumetric deformation which depends on the stress and is determined experimentally.

Such assumption enables in case of Coulomb-Mohr boundary surface on the hyperbolic model to provide displacement of the hydrostatic axis in the field of the principal stresses both for plane and three-dimensional problems.

If at any point of a soil structure the soil does not resist to shear stresses then one can conclude that there is no general destruction, possibly due to plastic deformations at those points redistribution of stress-strain state occurs in the body. At the expense of such redistribution the neighboring points undertake external load ensuring the stability of the entire structure. Hence, calculations of strength and stability of soil structures should be considered in a unity. Here static and dynamic loads as well as different theories applicability limitations should be taken into account.

Otherwise speaking, if stability calculations based on the boundary equilibrium condition immediately give a picture on the dam slope stability but does not take into account stresses redistribution due to deformations development in the material, then the study of stress-strain behavior of the dam soil material comprehensively characterizes distribution of stresses and deformations in the body but does not give a clear idea on the dam and dam slopes stability. We can arrive to a conclusion that in the process of soil dams design or study these two problems need complex solution, providing strength, stability, and economic profit of dams.

Between the dam stress-strain field and quantitative estimation of its slopes stability there is an organic relation -  $q'/p'$  ratio field of which isolines coincide with dangerous sliding surfaces. It should be noted that to each value of  $q'/p'$  ratio corresponds one value of sliding deformations irrespective of  $q'$  and  $p'$  values.

This approach will allow to make a clear picture of a dam stability loss for both cases of plane and three-dimensional problems.

## REFERENCES

1. Косте Ж., Санглера Г. Механика грунтов//Перевод с французкого Барвашова В.А.//Москва Сройиздат 1981. С.7-451.
2. Тер-Мартirosян З.Г. Механика грунтов//Издательство Ассоциации сройтелних вузов Москва 2005, -477С.
3. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела//Москва "Наука"- Главная редакция физико-математической литературы 1988г.-С.16-42.,208-278,323-359,480-575,.
4. Глушков Г.И Статика и динамика сооружений, заглубленных в грунт. – Москва: Изд. литературы по строительству, 1967. – С. 171-207.
5. Зарецкий Ю.К., Ломбардо В.Н. Статика и динамика грунтовых плотин. – Москва: Энергоатомиздат, 1983. - 247с.
6. Harr M.E. Reliability-Based Design in Civil Engineering. - McGraw-Hill Book Company, 1987. - 290 p.
7. Lapin L.L. Probability and Statistics for Modern Engineering. - Duxbury Press, PWS Publishers, 1983. - P. 624.

8. Griffiths D.V., Lane P.A. Slope Stability Analysis by Finite Elements// Geotechnique. - 1999. N 49(3). - P. 387-403.
9. Gu W.H., Morgenstern N.R., Robertson P.K. Post Earthquake Deformation Analysis of Wildlife Site// ASCE Journal of Geotechnical Engineering. - 1994. - Vol.120, No. 2. - P. 333-349.
10. Hardin B.O., Vincent P. D. Shear Modulus and Damping In Soils: Design Equations and Curves// Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE. – 1972. - SM7. - P. 667-691.
11. Martin G.R., Finn W.D.L., Seed H.B. Fundamentals of Liquefaction Under Cyclic Loading// Journal of The Geotechnical Engineering Division, ASCE. – 1975. - No. GT5. - P. 423-438.
12. Yong R.N., McKyes E. Yield and failure of a clay under triaxial stresses// Proc. ASCE. – 1971. - No. SM 1. - P. 159-176.

### **About authors**

Sarukhanyan Arestak Aramays-Doctor of technical science, Vice-rector of Yerevan State University of Architecture and Construction, (374 10) 54 77 23, (374 93) 94 40 40

E-mail [asarukhanyan@ysuac.am](mailto:asarukhanyan@ysuac.am)

Varanyan Gevorg Gagik-PhD of Yerevan State University of Architecture and Construction, (374 93) 44 84 33

Mkhitarian Levon Suren-PhD of Yerevan State University of Architecture and Construction, Chair of Strength of Materials, (374 10) 27 67 89, (374 93) 39 91 77

E-mail [levon-mxitarian@yandex.ru](mailto:levon-mxitarian@yandex.ru)

# PARADOX OF NICOLAI AND SIMILAR EFFECTS IN STABILITY PROBLEMS

Seyranian A.P., Mailybaev A.A.

**Abstract.** We present a general approach to the paradox of Nicolai and similar effects analyzed as a singularity of the stability boundary. We study potential systems with arbitrary degrees of freedom and two coincident eigenfrequencies disturbed by small non-conservative positional and damping forces. The instability region is obtained in the form of a cone having a finite discontinuous increase in the general case when arbitrarily small damping is introduced. This is a new destabilization phenomenon, which is similar to the effect of the discontinuous increase of the combination resonance region due to addition of infinitesimal damping. Then we reconsider the paradox of Nicolai: the instability of a uniform axisymmetric elastic column loaded by an axial force and a tangential torque. It is shown that the paradox of Nicolai is related to the conical singularity of the stability boundary which transforms to a hyperboloid with the addition of small dissipation.

**Introduction.** In 1928 Evgenii L. Nicolai [1] formulated a problem of stability of an elastic column with equal basic moments of inertia loaded by a tangential torque and axial force. For the case of cantilever boundary conditions he found that there is no static form of equilibrium of the column except the straight one. Then he studied stability of the straight form of equilibrium using dynamic method and came to the conclusion that it is unstable for arbitrary small magnitude of the torque. This effect is called the paradox of Nicolai. For the stability study he used a discrete model with a lumped mass attached to the free end of a massless cantilever column. In the same paper Nicolai introduced a small viscous damping and found that it has a stabilizing effect. In his next paper [2], Nicolai introduced geometrical imperfections related to non-equal basic moments of inertia. He used the same discrete model for the stability study and came to the conclusion that the geometrical imperfections are also stabilizing. That was the beginning of the era of non-conservative stability problems. Later these two papers of Nicolai were published in his selected works [3]. An account of the Nicolai papers is given in [4]. In 1950-60's Bolotin [4] and Ziegler [5] explained absence of static forms of the loss of stability in several contemporary problems by non-conservative nature of loading leading to dynamic forms of instability (flutter). A number of destabilization paradoxes due to dissipation have been discovered in such systems: Ziegler's destabilization paradox, destabilization effect for combination resonance, destabilization of a Hamiltonian system. Recently, these destabilization paradoxes have been associated with generic singularities of the stability boundary, see, e.g., [6]. We continue this list by showing that the paradox of Nicolai is related to the conical singularity of the stability boundary.

## 1. Destabilization of a conservative system by small circulatory forces.

A linear vibrational system of arbitrary dimension with non-conservative positional forces can be written in the form

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} = 0, \quad \mathbf{C} = \mathbf{P} + \mathbf{N} \quad (1)$$

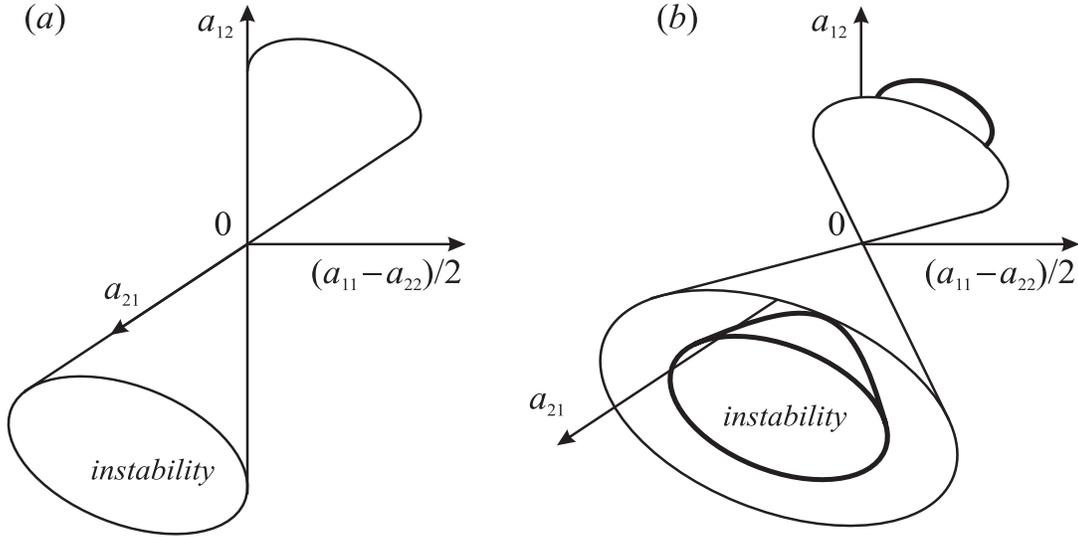
where  $\mathbf{q}$  is the vector of generalized coordinates,  $\mathbf{M}$  is the real symmetric positive definite mass matrix, the real matrices  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$  and  $\mathbf{N} = -\mathbf{N}^T$  describe, respectively, potential and nonconservative (also called circulatory) forces. We study the case of a general small perturbation  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \delta\mathbf{M}$  and  $\mathbf{C} = \mathbf{P}_0 + \delta\mathbf{C}$  of the stable conservative system with a double frequency  $\omega_0 > 0$ . The two linearly independent eigenvectors  $\mathbf{u}_1$  and  $\mathbf{u}_2$  of the unperturbed system are determined by the equations and normalization conditions

$$\mathbf{P}_0\mathbf{u}_i = \mu_0\mathbf{M}_0\mathbf{u}_i, \quad \mathbf{u}_i^T\mathbf{M}_0\mathbf{u}_j = \delta_{ij}, \quad \mu_0 = \omega_0^2, \quad i, j = 1, 2. \quad (2)$$

For small perturbations, we derive the asymptotic destabilization condition as

$$\left(\frac{a_{11} - a_{22}}{2}\right)^2 + a_{12}a_{21} < 0 \quad (3)$$

with the coefficients  $a_{ij} = \mathbf{u}_i^T (\delta \mathbf{C} - \omega_0^2 \delta \mathbf{M}) \mathbf{u}_j$ . This inequality determines the internal part of a cone in the space  $(a_{12}, a_{21}, (a_{11} - a_{22})/2)$ , see Fig 1 (a).



**Fig 1.** (a) The cone singularity of the instability domain in the case of a perturbed conservative system with a double frequency. (b) The stability boundary for a system with finite damping (bold lines) and infinitesimal damping (thin lines).

When small damping forces  $\delta \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}}$  with positive definite symmetric matrix  $\delta \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}}$  are added to the left-hand side of equation (1.1), the instability condition takes the form

$$(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} + 4\omega_0^2 d^2 (1 - \eta_1^2 - \eta_2^2) < \quad (4)$$

$$< [\eta_1(a_{11} - a_{22}) + \eta_2(a_{12} + a_{21})]^2,$$

$$d = (d_{11} + d_{22})/2, \quad \eta_1 = (d_{11} - d_{22})/(d_{11} + d_{22}), \quad \eta_2 = 2d_{12}/(d_{11} + d_{22}) \quad (5)$$

with the damping coefficients  $d_{kj} = \mathbf{u}_k^T \delta \mathbf{D} \mathbf{u}_j$ . If  $\eta_1 \neq 0$  or  $\eta_2 \neq 0$  the limiting instability region with infinitely small damping ( $d \rightarrow 0$ ) is larger than the instability region with zero damping given by equation (3), so that instability region undergoes a finite (discontinuous) increase, Fig.1 (b). This destabilization phenomenon is similar to the discontinuous increase of a combination resonance region due to infinitesimal damping in the theory of parametric resonance, see, e.g., [5].

## 2. Instability of a column loaded by an axial force and tangential torque.

Consider a straight cantilever elastic column of length  $l$  loaded at the free end by a tangential torque  $L$  and an axial force  $P$ , see Fig. 2. The column has variable cross-section characterized by the mass per unit length  $m(x)$ , the matrix of moments of inertia  $\mathbf{J}(x)$ , Young's modulus  $E$ , the external and internal (the Kelvin-Voigt model) damping coefficients  $\gamma$  and  $\eta$ . Using variational analysis we derive the instability condition, similar to {4}, for a straight and twisted equilibrium as

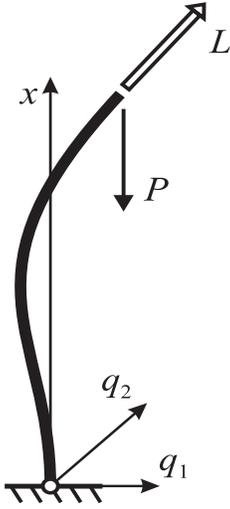


Fig. 2. Elastic column loaded by a tangential torque  $L$  and an axial force  $P$ .

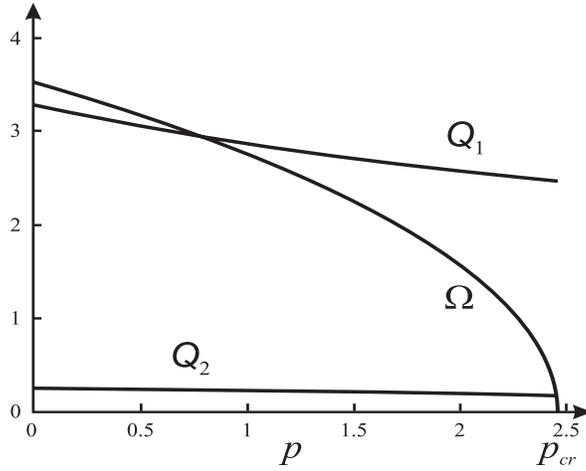


Fig. 3. Dependence of the coefficients  $Q_1$  and  $Q_2$  on axial force  $P$ .

$$L^2 > b_1^2 + b_2^2 + \omega_0^2 (d + \gamma / m_0)^2 / \beta^2 \quad (6)$$

The instability region is determined by the sum of instability regions (4) taken for all eigenmodes of the column. Formula (6) shows that the perfect column with no damping ( $b_1 = b_2 = d = \gamma = 0$ ) is destabilized by an arbitrarily small tangential torque  $L$ . This effect is known as the paradox of Nicolai, see [1-3] and [4]. The quantities  $b_1$  and  $b_2$  describe the effect of geometric imperfections of the column. When  $d = \gamma = 0$  (no damping), the instability region corresponds to the interior of the cone in the space  $b_1, b_2, L$ . Addition of damping has stabilizing effect, which corresponds to the degenerate case  $\eta_1 = \eta_2 = 0$  in equation (4).

As an example, we analyze numerically the case when a circular cross-section of a uniform column with the radius  $R$  is slightly changed to elliptic cross-section with semi-axes  $R + \delta R$  and  $R$ . Then the moments of inertia will take the increments

$$\delta J_x = \frac{3J_0 \delta R}{R}, \quad \delta J_y = \frac{J_0 \delta R}{R}, \quad \delta J_{xy} = 0. \quad (7)$$

For this case formula (6) takes the form

$$\left( \frac{Ll}{EJ_0} \right)^2 > Q_1^2 \left( \frac{\delta R}{R} \right)^2 + \left( \frac{Q_1 \Omega \eta}{l^2} \sqrt{\frac{EJ_0}{m_0}} + \frac{Q_2 \Omega \gamma l^2}{\sqrt{m_0 EJ_0}} \right)^2 \quad (8)$$

where dependence of the coefficients  $Q_1$  and  $Q_2$  on axial force  $P$  is shown in Fig. 3.

### 3. Conclusion

We developed a general approach to the paradox of Nicolai and related effects analyzed from the point of view of singularity theory. Geometrical interpretation of the obtained results is that the boundary of the instability region represents a conical surface in the reduced three-dimensional space of nonconservative disturbance parameters. It is shown that damping forces change the conical instability region to a hyperboloid with two sheets increasing or decreasing the instability region. We confirmed and extended the results of Nicolai showing that the uniform cantilever column with equal principal moments of inertia loaded by an axial force loses stability under the action of an arbitrary small tangential torque, but it is stabilized by small geometric imperfections and internal and external damping forces. The same result holds when the tangential torque is substituted by the axial torque, since the corresponding eigenvalue problems are adjoint. Full paper of the authors on this topic is published in [7].

### REFERENCES

1. Николаи Е.Л. Об устойчивости прямолинейной формы равновесия сжатого и скрученного стержня.// Изв. Ленинградского политехнического института.1928. Т.31. С.201-231.
2. Николаи Е.Л. К вопросу об устойчивости прямолинейной скрученного стержня.//Вестник прикладной математики и механики. 1929. Т.1. С.41-58.
3. Николаи Е.Л. Труды по механике. М.: Гос. изд-во техн.-теор. лит-ры, 1955. 583 с.
4. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
5. Ziegler H. Principles of Structural Stability. Blaisdell, Waltham, Massachusetts, 1968. 250 p.
6. Seyranian A.P. and Mailybaev A.A. Multiparameter Stability Theory with Mechanical Applications. World Scientific, New Jersey, 2003. 420 p.
7. Seyranian A.P. and Mailybaev A.A. Paradox of Nicolai and related effects. ZAMP, vol. 62, pp. 539-548, 2011.

### Information about the authors

#### **Alexander P. Seyranian**

Academician of Russian Academy of Natural Sciences and National Academy of Sciences of Armenia  
Institute of Mechanics,  
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia  
[seyran@imec.msu.ru](mailto:seyran@imec.msu.ru)

#### **Alexei A. Mailybaev**

Doctor of Physico-Mathematical Sciences  
Institute of Mechanics,  
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia  
[mailybaev@imec.msu.ru](mailto:mailybaev@imec.msu.ru)

# ELASTO-HYDRO-DYNAMIC FRICTION OF A CIRCULAR CYLINDER AND OF A CYLINDRICAL BUSH WITH ELLIPTICAL CROSS-SECTION

Shekyan L., Verlinski S., Shekyan A., Aidun D., Marzocca P.

The framework of elasto-hydro-dynamic lubrication theory [1] is discussed in this paper. The theoretical plane contact problem of a liquid friction rotating about a cylindrical axis with a fixed non-deformable elastic cylindrical bush is presented. An elliptical ring cross-sectional shape is considered for the bush. The particular case of plane contact problem, when the interaction of these bodies is in the boundary lubrication regime was discussed in [2]. The problem is reduced to a closed system of nonlinear integral equations. A complete mathematical analysis of this system is carried out on the principle of contracting mappings developed in [3] and a numerical analysis is used in the design of sliding bearings.

## 1. Problem statement and basic equations

Constantly rotating around its axis, an undeformable cylinder with radius  $R$  (Fig. 1) is under external forces pressing on a fixed elastic cylindrical bush 2, with constant thickness  $\delta$ . The internal surface of the bush in the cross section has ellipse form with semi-axis  $a$  and  $b$  ( $a \geq b > R$ ). It is also supposed that in the narrow gap between the cylinder and bush there is a small amount of viscous fluid with a thin layer of lubricant and the wearing surface of these bodies are separated from each other (limited lubrication regime [4]).

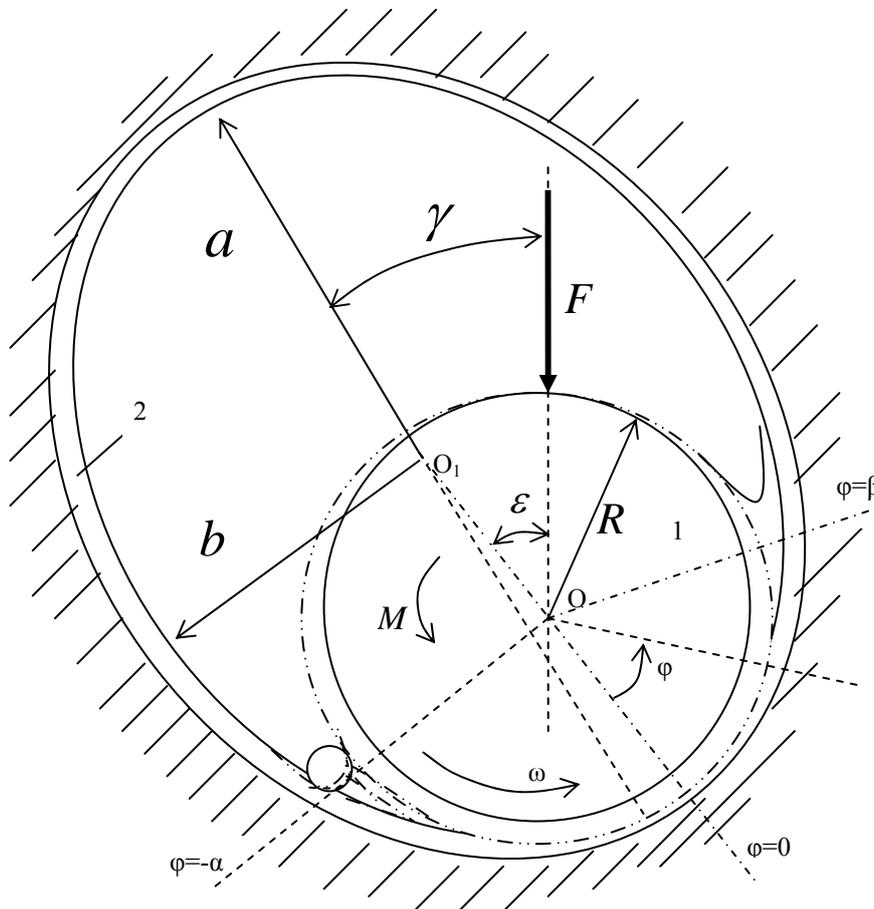


Figure 1. Problem scheme

The goal is to determine the thickness of the lubricant film in the friction zone, the sizes of the friction region of these bodies, the laws of distribution of pressure and shear stresses in the friction zone, the magnitude and direction of the rigid displacement of the cylinder, as well as loss of power in the friction.

Lubrication is described by equations of a viscous incompressible Newtonian fluid [1], whose coefficient of viscosity  $\eta$  varies exponentially as a function of pressure in the lubricant

$$\eta = \eta^0 \cdot \exp(k \cdot p). \quad (1)$$

Herein  $\eta^0$  is viscosity coefficient of lubricant in the absence of pressure, and  $k$  is the piezo-coefficient of viscosity of lubrication, both given in [5].

In the friction zone  $\varphi \in (-\alpha, \beta)$  pressure in the lubrication  $p(\varphi)$  and the thickness of lubrication layer  $h(\varphi)$  connected by Reynolds equation [6]

$$\frac{d}{d\varphi} \left\{ \frac{h^3(\varphi)}{\exp[k \cdot p(\varphi)]} \cdot \frac{dp(\varphi)}{d\varphi} \right\} = 6R^2 \omega \eta^0 \cdot \frac{dh(\varphi)}{d\varphi}, \quad (2)$$

with the boundary conditions at the inlet ( $\varphi = -\alpha$ ) and outlet ( $\varphi = \beta$ ) of the friction region [4]

$$p(-\alpha) = 0, \quad \left. \frac{dp(\varphi)}{d\varphi} \right|_{\varphi=-\alpha} = 2R^2 \omega \eta^0 \cdot [h(-\alpha)]^{-2}, \quad (3)$$

$$p(\beta) = 0, \quad \left. \frac{dp(\varphi)}{d\varphi} \right|_{\varphi=\beta} = -9(R^2 \omega \eta^0)^{\frac{2}{3}} \cdot (2T)^{\frac{1}{3}} [h(\beta)]^{-2}, \quad (4)$$

where  $\omega$  is the angular velocity of the cylinder,  $\alpha$  and  $\beta$  are coordinates defining the beginning and end of friction region, while  $T$  is the surface tension of the lubricant.

Contrarily to the classical contact conditions, the condition of the normal displacements of the friction region  $\varphi \in [-\alpha, \beta]$  has the form:

$$u(\varphi) - h(\varphi) = R + l \cos(\varphi + \varepsilon) - ab[a^2 \cos^2(\varphi + \gamma) + b^2 \sin^2(\varphi + \gamma)]^{0.5}, \quad (5)$$

where  $l = OO_1$  is the distance between centers  $O$  and  $O_1$  (Fig.1),  $\varepsilon$  and  $\gamma$  are angles, which form a line of action of F forces with lines passing through the large axis of the ellipse and through the centers  $O$  and  $O_1$ ,  $u(\varphi)$  is the elastic displacement of the points of the inner surface of the bush in the direction of inside normal as a result of deformation of the pressure in the lubrication  $p(\varphi)$  and shear stress  $\tau(\varphi)$ .

Since the bush is thin (Fig. 1), following [7], the displacement  $u(\varphi)$  is defined according to the Winkler model:

$$u(\varphi) = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)\delta}{(1-\nu)E} p(\varphi), \quad \varphi \in [-\alpha, \beta], \quad (6)$$

where  $E$  and  $\nu$  are bush material Young modulus and Poisson's ratio, respectively.

The equilibrium equations of a cylinder have the form:

$$\int_{-\alpha}^{\beta} [p(\varphi) \sin(\varphi + \varepsilon) + \tau(\varphi) \cos(\varphi + \varepsilon)] d\varphi = 0, \quad (7)$$

$$R \int_{-\alpha}^{\beta} [p(\varphi) \cos(\varphi + \varepsilon) - \tau(\varphi) \sin(\varphi + \varepsilon)] d\varphi = F, \quad (8)$$

$$R^2 \int_{-\alpha}^{\beta} \tau(\varphi) d\varphi = M, \quad (9)$$

where  $F$  and  $M$  are the resultant of the given external compressive forces and the total momentum of rotating pairs, acting on each unit length of the cylinder. In this case, the force  $F$  is given, but the momentum  $M$  and power losses  $N = \omega \cdot M$  are unknown.

Tangential stresses  $\tau(\varphi)$  on the cylinder surface in the friction zone is defined by the formula [6]:

$$\tau(\varphi) = \frac{h(\varphi)}{2R} \cdot \frac{dp(\varphi)}{d\varphi} + \frac{\omega R}{h(\varphi)} \eta^0 \exp[k \cdot p(\varphi)], \quad (\varphi \in [-\alpha, \beta]). \quad (10)$$

Equations (2) through (10) are the basic equations of the problem, which form a complete system of nonlinear equations in the unknowns of the problem:  $h(\varphi)$ ,  $p(\varphi)$ ,  $\tau(\varphi)$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $l$ ,  $\varepsilon$ ,  $M$ .

## 2. Investigation of the system of equations (2)-(10).

From equation (2) with the boundary conditions (3), one obtains:

$$p(\varphi) = -\frac{1}{k} \ln \left\{ 1 - 6R^2 \omega k \eta^0 \int_{-\alpha}^{\varphi} \left[ \frac{1}{h^2(\psi)} - \frac{2h(-\alpha)}{3h^3(\psi)} \right] d\psi \right\}. \quad (11)$$

On the basis of (11) expression (10) takes the form:

$$\tau(\varphi) = \frac{2R\omega\eta^0}{h(\varphi)} \left[ 2 - \frac{h(-\alpha)}{h(\varphi)} \right] \exp[k \cdot p(\varphi)], \quad (\varphi \in [-\alpha, \beta]), \quad (12)$$

and from the boundary conditions (4):

$$\int_{-\alpha}^{\beta} \left[ \frac{1}{h^2(\psi)} - \frac{2h(-\alpha)}{3h^3(\psi)} \right] d\psi = 0, \quad (13)$$

$$\frac{h(-\alpha)}{h(\beta)} = \frac{3}{2} + \frac{9}{4} \left( \frac{2T}{\omega R \eta^0} \right)^{1/3}. \quad (14)$$

The dimensionless values are introduced:

$$\xi = \frac{\alpha + \varphi}{\alpha + \beta}, \quad b_0 = \frac{b}{R} > 1, \quad a_0 = \frac{a}{R} \geq b_0, \quad h_0(\xi) = \frac{h(\varphi)}{R}, \quad u_0(\xi) = \frac{u(\varphi)}{R}, \quad \theta = \sqrt{1 - (b_0/a_0)^2} < 1, \quad (15)$$

$$p_0(\xi) = k \cdot p(\varphi), \quad \tau_0(\xi) = k \cdot \tau(\varphi), \quad \omega_0 = 6k\omega\eta^0, \quad \delta_0 = \delta/R, \quad l_0 = l/R, \quad (15)$$

$$F_0 = \frac{k \cdot F}{(\alpha + \beta)R}, \quad h_* = \frac{2h(-\alpha)}{3R}, \quad N_0 = \frac{k \cdot N}{(\alpha + \beta)\omega R^2}, \quad E_0 = \frac{(1-\nu)RkE}{(1-2\nu)(1+\nu)\delta}, \quad T_0 = \frac{9}{4} \left( \frac{2T}{\omega R \eta^0} \right)^{1/3}.$$

therefore from (5) through (9) and (11) through (14), the relative dimensionless unknowns  $h_0(\xi)$ ,  $p_0(\xi)$ ,  $\tau_0(\xi)$ ,  $u_0(\xi)$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $l_0$ ,  $\varepsilon$ ,  $N_0$  are used to obtain the complete system of nonlinear equations:

$$h_0(\xi) = u_0(\xi) + \frac{b_0}{\sqrt{1 - \theta^2 \sin^2[-\alpha + (\alpha + \beta)\xi + \varepsilon]}} - 1 - l_0 \cos[-\alpha + (\alpha + \beta)\xi + \varepsilon], \quad \xi \in [0, 1], \quad (16)$$

$$u_0(\xi) = \frac{p_0(\xi)}{E_0}, \quad \xi \in [0, 1], \quad (17)$$

$$\int_0^1 \{ p_0(\xi) \sin[\varepsilon - \alpha + (\alpha + \beta)\xi] + \tau_0(\xi) \cos[\varepsilon - \alpha + (\alpha + \beta)\xi] \} d\xi = 0, \quad (18)$$

$$F_0 = \int_0^1 \{ p_0(\xi) \cos[\varepsilon - \alpha + (\alpha + \beta)\xi] - \tau_0(\xi) \sin[\varepsilon - \alpha + (\alpha + \beta)\xi] \} d\xi, \quad (19)$$

$$N_0 = \int_0^1 \tau_0(\xi) d\xi, \quad (20)$$

$$p_0(\xi) = -\ln \left\{ 1 - \omega_0 \int_0^{\xi} [h_0^{-2}(\zeta) - h_* \cdot h_0^{-3}(\zeta)] d\zeta \right\}, \quad \xi \in [0, 1], \quad (21)$$

$$\tau_0(\xi) = \frac{\omega_0}{3} [3h_0^{-1}(\xi) - h_* \cdot h_0^{-2}(\xi)] \cdot \exp[p_0(\xi)], \quad \xi \in [0, 1], \quad (22)$$

$$\int_0^1 [h_0^{-2}(\xi) - h_* \cdot h_0^{-3}(\xi)] d\xi = 0, \quad (23)$$

$$\frac{h_0(0)}{h_0(1)} = 1.5 + T_0. \quad (24)$$

The unknown dimensionless power loss  $N_0$  is only present in (20). Hence, relations (16) through (24) without (20) can be considered as a separate system independent on  $N_0$ . In this case, the system will be solved to find a function  $\tau_0(\xi)$ , and by integration, with the help of (20),  $N_0$  can be found.

Noting that the dimensionless compressive force  $F_0$  appears only in the relation (19), that for reasons of convenience, in the system of equations (16)–(19) and (21)–(24), it was temporarily supposed that the value of  $F_0$  is unknown. The dimensionless distance of the centers  $l_0$  has some value  $(l_0)^*$  at which the considered friction node is in fluid friction regime. This can occur when the value  $(l_0)^*$  satisfies the condition:

$$0 < (l_0)^* \leq b_0 - 1 - \lambda, \quad (25)$$

where  $\lambda = h_m/R$ , and  $h_m$  is the lower limit of the thickness of lubricating layer at which the cylinder and bush are in the mode of fluid friction. Then, for the accepted value  $(l_0)^*$  from (19), the corresponding value  $F_0$  will be defined. Thus, the determined values  $F_0$  for different values  $(l_0)^*$  of satisfying (25), the required dependency  $l_0$  from  $F_0$  is set.

The investigation of this system made by analogy given in [3], carried out in a metric space  $X$  with metric

$$\rho(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = |\alpha_1 - \alpha_2| + |\beta_1 - \beta_2| + |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + |F_{01} - F_{02}| + |N_{01} - N_{02}| + \max_{0 \leq \xi \leq 1} \{ |h_{01}(\xi) - h_{02}(\xi)| + |p_{01}(\xi) - p_{02}(\xi)| + |\tau_{01}(\xi) - \tau_{02}(\xi)| + |u_{01}(\xi) - u_{02}(\xi)| \}, \quad (26)$$

where  $\vec{x}_i = \{ \alpha_i, \beta_i, \varepsilon_i, F_{0i}, N_{0i}, h_{0i}(\xi), p_{0i}(\xi), \tau_{0i}(\xi), u_{0i}(\xi) \}$ ,  $(i=1,2)$ —two arbitrary elements of the space  $X$ .

### 3. Numerical results analysis

Applying method of successive approximations, the numerical solution of the system of equations (16) through (24) is obtained, for a system with the following characteristics:  $b_0 = 1.02$ ,  $E_0 = 1000$ ,  $T_0 = 0.0014$ ,  $\omega_0 = 0.01$ ,  $F_0 = 0.071$  and for selected values of the dimensionless geometric parameters  $a_0$  and  $\gamma$ . The results displayed in Table 1 shows the values of the dimensionless thickness of the lubricating layer  $h_0(\xi)$ .

Table 1

$\xi$	$a_0 = 1.02$	$a_0 = 1.03$ $\gamma = 0.2$	$a_0 = 1.03$ $\gamma = 0$	$a_0 = 1.04$ $\gamma = 0.2$	$a_0 = 1.04$ $\gamma = 0$
0	0.015553	0.016152	0.017354	0.017848	0.017693
0.1	0.014355	0.014976	0.016360	0.016508	0.016270
0.2	0.013201	0.013920	0.015153	0.014928	0.014860
0.3	0.012593	0.012992	0.014044	0.013724	0.013963
0.4	0.012023	0.012197	0.013042	0.012810	0.012335
0.5	0.011511	0.011540	0.012154	0.011897	0.011591
0.6	0.011000	0.011022	0.011388	0.011192	0.010943
0.7	0.010537	0.010546	0.010747	0.010682	0.010690
0.8	0.010099	0.010158	0.010184	0.010229	0.010269
0.9	0.010352	0.010807	0.010853	0.010871	0.010853
1	0.010648	0.011737	0.011802	0.011925	0.011653

As can be seen from this table, the minimum dimensionless thickness for the bearing occurs for an elliptical bush ( $a_0 > b_0$ ), when compared with the corresponding circular bush ( $a_0 = b_0$ ). This result implies that improved mechanical properties (load capacity, wear resistance, durability, etc.) can be obtained with sliding bearing by replacing a circular bush with an elliptical one.

## REFERENCE

1. Moore D.F. Principles and applications of Tribology. 1975, Pergamon Press Ltd, Oxford, pp. 280.
2. Verlinski S.V., Shekyan A.L., Shekyan L.A, Boundary friction of elastic cylinder with cylindrical hole. Second International Conference “Topical problems of continuum mechanics”, Dilijan, Armenia, 4-8 Oct. 2010, pp.158-162.
3. Mkhitarian S.M., Shekyan L.A. Plane contact problem for two rough solids, made of gradually hardening materials // Izvestia ArmSSR. Mechanics. 1977. V. 30. №3. Pp. 15 - 32. (in Russian)
4. Aleksandrov V. M. Contact problems in tribology//Contact problems in tribology// Mechanics and scientific-technical progress. V.3. Solid Mechanics. M.: Nauka, 1988, pp. 170 – 180. (in Russian)
5. Friction, wear and lubrication. Handbook. Book.1. M.: Nauka, 1978, Pp. 400. (in Russian)
6. Shekyan L.A. On the problem of Elasto-hydrodynamic Lubrication // Modern Problems of Deformable Bodies Mechanics Collection of Papers. Vol.1, Yerevan, 2005. Pp.254-260.
7. Aleksandrov V.M., Mkhitarian S.M., Contact Problems for Bodies with Thin Coatings and Layers, Nauka, Moscow (1983), pp.488 (in Russian)

### Information about authors

**Shekyan Lavrenti** - Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor of State Engineering University of Armenia, Faculty of Mechanics and Mechanical Engineering  
Address: 0009, Armenia, Yerevan, Teryan str., 105  
Ph.: (+374 10) 39 89 01; (+374 99) 28 34 40; E-mail: [lshekyan@mail.ru](mailto:lshekyan@mail.ru)

**Verlinski Sergey** - Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor of State Engineering University of Armenia, Faculty of Mechanics and Mechanical Engineering  
Address: 0009, Armenia, Yerevan, Teryan str., 105  
Ph.: (+374 10) 44 83 62; (374 93) 52 77 35; E-mail: [sergeyver@mail.ru](mailto:sergeyver@mail.ru)

**Shekyan Artyom** - Ph.D. in Physics and Mathematics, Assistant researcher of Institute of Mechanics of National Academy of Sciences of Armenia  
Address: 0019, Armenia, Yerevan, Baghramyan ave, 24b  
Ph.: (37410) 39 89 01; (374 55) 85 72 27; E-mail: [artyom.sh.83@mail.ru](mailto:artyom.sh.83@mail.ru)

**Aidun Daryush.** - Professor and Chair, 259 CAMP Clarkson University  
Address: PO Box 5727, Potsdam, NY, USA, 13699-5727  
Ph.: 315-268-6518/6586; E-mail: [dka@clarkson.edu](mailto:dka@clarkson.edu)

**Marzocca Pier** - Associate Professor - Clarkson University, The Wallace H. Coulter School of Engineering, Mechanical and Aeronautical Engineering Department  
Address: 8 Clarkson Ave, CAMP 234, Potsdam, New York, USA, 13699-5725  
Ph.: 315-268-3875; E-mail: [pmarzocc@clarkson.edu](mailto:pmarzocc@clarkson.edu); web <http://www.clarkson.edu/~pmarzocc/>

# PROTECTION OF THE ELASTIC RECTANGULAR STRUCTURE FROM SEISMICALLY GENERATED OSCILLATIONS BY A VISCOELASTIC STRATUM

Sumbatyan M.A., Ciarletta M., Zampoli V., Vaccaro M.

We study the problem about harmonic oscillations of the elastic structure of rectangular shape upon a foundation, in the case when oscillations are caused by a seismic wave arriving from below. The structure is placed on the elastic half-space. In order to protect the structure from the incoming seismic waves, there is applied a special isolation from vibrations by some damping media modeled by a classical viscoelastic material of Kelvin-Voigt type.

1. Let us study harmonic vibrations (with factor  $e^{-i\omega t}$ ) of the rectangular elastic structure above an elastic half-space foundation, generated by a seismic wave arriving from below at a certain incident angle  $\theta$ . In order to protect the structure from the incoming seismic wave, there is applied a special isolation by a viscoelastic stratum of Kelvin-Voigt type, see Fig. 1.

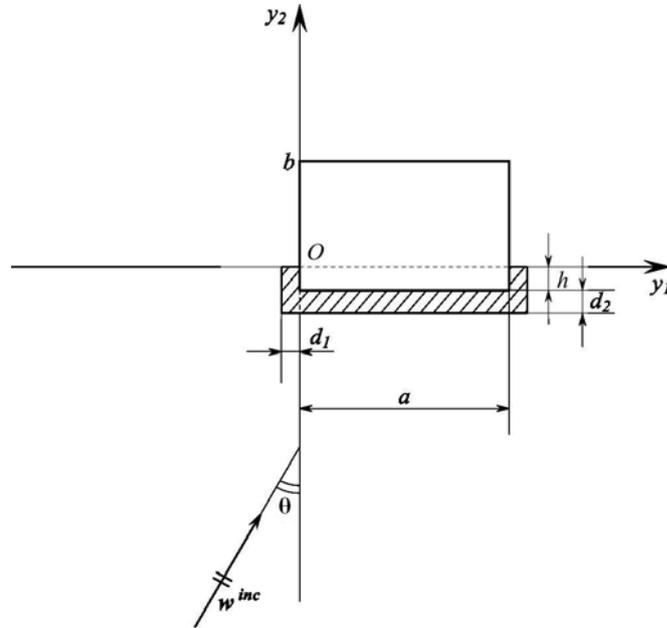


Fig.1. Protection of the elastic rectangular structure from seismic waves by a viscoelastic stratum

The problem is studied in both anti-plane and in-plane formulation. Let us give the basic equations in the latter case. Let us introduce such notations, when all super-scripts ``1'' are related to the viscoelastic medium, and ``2'' is related to the upper rectangular structure. The lower elastic half-space (ground) is either marked as ``0'' or free of any super-script. For every domain the dynamic equations are

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + c^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + (1 - c^2) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + k_p^2 u_1 = 0, \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + c^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + (1 - c^2) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + k_p^2 u_1 = 0 \quad (1.1)$$

where  $c = c_s / c_p < 1$ . The components of the stress tensor have the form

$$\frac{\sigma_{11}}{\rho c_p^2} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + (1 - 2c^2) \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \frac{\sigma_{22}}{\rho c_p^2} = (1 - 2c^2) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \frac{\sigma_{12}}{\rho c_p^2} = c^2 \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \quad (1.2)$$

Let  $b$  denote the height of the part of the rectangular structure towered above the ground level, then the size of the rectangular construction is  $a \times b_h$ ,  $b_h = b + h$ . Equations of motion (1.1), (1.2) are the same for all three media, the ``ground'', the viscoelastic protective stratum, and the rectangular construction, taken with respective physical parameters for every elastic medium.

It is clear, both physically and mathematically, that the wave process in the viscoelastic material decays with distance. In frames of the Kelvin-Voigt model of viscoelastic materials, this leads to respective complex-valued wave numbers:  $k_{*p,s}^{(1)} = k_{p,s}^{(1)}(1 + i\beta)$  where, to be more specific, we

assume the same damping constant  $\beta$  for the longitudinal and transverse wave numbers. By introducing this damping viscoelastic material, we model a possible way of protection of civil engineering constructions from seismic vibrations.

Regarding boundary conditions, contact zones, between the rectangular construction and the viscoelastic stratum, as well as between the stratum and the ground, all are accepted with absolute coupling between neighbor solids. This means that four physical quantities, two components of the displacement vector as well as normal and tangential components of the stress tensor remain continuous when crossing any common boundary line. Besides, the horizontal parts  $y_2 = 0$  of the ground surface, outside the construction, are free of load:  $\sigma_{12} = \sigma_{22} = 0$ . At last, both normal and tangential components of the stress tensor are trivial over the free part of the rectangle's boundary.

2. If the plane incident wave is longitudinal then

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^{inc} \\ \mathbf{u}_2^{inc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} e^{ik_p(x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta)}, \quad \frac{\sigma_{11}^{inc}}{\rho c_p^2} = ik_p(1 - 2c^2 \cos^2 \theta) e^{ik_p(x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta)}$$

$$\frac{\sigma_{22}^{inc}}{\rho c_p^2} = ik_p(1 - 2c^2 \sin^2 \theta) e^{ik_p(x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta)}, \quad \frac{\sigma_{12}^{inc}}{\rho c_p^2} = ik_p c^2 \sin 2\theta e^{ik_p(x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta)}$$
(2.1)

Besides, Betti's integral theorem (principle of reciprocity of work) implies

$$\frac{\mathbf{u}_1(x)}{2} = \int_{\ell} [U_{11}(y, x)T_1(y) + U_{12}(y, x)T_2(y)] d\ell_y - \int_{\ell} [\Sigma_{11}(y, x)\mathbf{u}_1(y) + \Sigma_{12}(y, x)\mathbf{u}_2(y)] d\ell_y$$

$$\frac{\mathbf{u}_2(x)}{2} = \int_{\ell} [U_{21}(y, x)T_1(y) + U_{22}(y, x)T_2(y)] d\ell_y - \int_{\ell} [\Sigma_{21}(y, x)\mathbf{u}_1(y) + \Sigma_{22}(y, x)\mathbf{u}_2(y)] d\ell_y$$
(2.2)

where points  $x = (x_1, x_2)$ ,  $y = (y_1, y_2)$  both belong to boundary curve of the considered domain:  $x, y \in \ell$ . Here vector  $\bar{T} = \{T_1, T_2\}$  denotes the outer load applied over  $\ell$ .

Fundamental Green's displacement tensor here is

$$U_{11}(y, x) = \frac{1}{4\rho\omega^2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} [Y_0(k_p r) - Y_0(k_s r)] - k_s^2 Y_0(k_s r) \right\}$$

$$U_{12}(y, x) = U_{21}(y, x) = \frac{1}{4\rho\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} [Y_0(k_p r) - Y_0(k_s r)]$$

$$U_{22}(y, x) = \frac{1}{4\rho\omega^2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} [Y_0(k_p r) - Y_0(k_s r)] - k_s^2 Y_0(k_s r) \right\}$$
(2.3)

and the stress tensor is ( $m = 1, 2$ )

$$\bar{\Sigma}_m(y, x) = 2\mu \frac{\partial \bar{U}_m}{\partial n_y} + \lambda \bar{n} \operatorname{div}_y(\bar{U}_m) + \mu [\bar{n} \times \operatorname{rot}_y(\bar{U}_m)]$$
(2.4)

Unfortunately, such a direct approach yields too complex equations, since for domains  $D^{(0)}$  and  $D^{(1)}$  this must also include respective parts of the free boundary surface  $y_2 = 0$ . For this reason in domains  $D^{(0)}$  and  $D^{(1)}$  we apply a special form of Green's tensor which automatically satisfies the trivial boundary condition over straight line  $y_2 = 0$ . Therefore, the classical form of the displacement and stress tensors in Eqs. (2.3), (2.4) is used only in domain  $D^{(2)}$ .

3. Such Green's tensor is defined as a solution to basic governing equations when certain point sources are applied at point  $x$  in a medium. This can directly be constructed by using Fourier transform along  $y_1 = 0$ . After some routine transformations one obtains for the Fourier transform of the displacement tensor's components ( $s$  is the Fourier parameter):

$$\tilde{U}_{11}(y, x) = C_1 e^{\gamma_p y_2} + C_2 \frac{\gamma_s}{is} e^{\gamma_s y_2} + \left( \frac{s^2}{\gamma_p} e^{-\gamma_p |y_2 - x_2|} - \gamma_s e^{-\gamma_s |y_2 - x_2|} \right) \frac{e^{isx_1}}{2\rho\omega^2} \quad (3.1)$$

$$\tilde{U}_{12}(y, x) = -C_1 \frac{\gamma_p}{is} e^{i\gamma_p y_2} + C_2 e^{i\gamma_s y_2} + \left( e^{-\gamma_s |y_2 - x_2|} - e^{-\gamma_p |y_2 - x_2|} \right) \frac{is e^{isx_1}}{2\rho\omega^2} \text{sign}(y_2 - x_2)$$

with

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{e^{isx_1}}{2\rho\omega^2 \Delta} \left\{ 4s^2 \gamma_s (2s^2 - k_s^2) e^{\gamma_s x_2} - \frac{s^2}{\gamma_p} [(2s^2 - k_s^2)^2 + 4s^2 \gamma_p \gamma_s] e^{\gamma_p x_2} \right\} \\ C_2 &= \frac{is e^{isx_1}}{2\rho\omega^2 \Delta} \left\{ 4s^2 (2s^2 - k_s^2) e^{\gamma_p x_2} - [(2s^2 - k_s^2)^2 + 4s^2 \gamma_p \gamma_s] e^{\gamma_s x_2} \right\} \\ \Delta &= \Delta(s) = (2s^2 - k_s^2)^2 - 4s^2 \gamma_p \gamma_s \end{aligned} \quad (3.2)$$

By analogy, one obtains

$$\tilde{U}_{21}(y, x) = D_1 e^{\gamma_p y_2} + D_2 \frac{\gamma_s}{is} e^{\gamma_s y_2} + \left( e^{-\gamma_s |y_2 - x_2|} - e^{-\gamma_p |y_2 - x_2|} \right) \frac{is e^{isx_1}}{2\rho\omega^2} \text{sign}(y_2 - x_2) \quad (3.3)$$

$$\tilde{U}_{22}(y, x) = -D_1 \frac{\gamma_p}{is} e^{\gamma_p y_2} + D_2 e^{\gamma_s y_2} + \left( \frac{s^2}{\gamma_s} e^{-\gamma_s |y_2 - x_2|} - \gamma_p e^{-\gamma_p |y_2 - x_2|} \right) \frac{e^{isx_1}}{2\rho\omega^2}$$

with

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{is e^{isx_1}}{2\rho\omega^2 \Delta} \left\{ [(2s^2 - k_s^2)^2 + 4s^2 \gamma_p \gamma_s] e^{\gamma_p x_2} - 4s^2 (2s^2 - k_s^2) e^{\gamma_s x_2} \right\} \\ D_2 &= \frac{e^{isx_1}}{2\rho\omega^2 \Delta} \left\{ 4s^2 \gamma_p (2s^2 - k_s^2) e^{\gamma_p x_2} - \frac{s^2}{\gamma_s} [(2s^2 - k_s^2)^2 + 4s^2 \gamma_p \gamma_s] e^{\gamma_s x_2} \right\} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Obviously, the constructed Green's displacement tensor is not symmetric. It is used in domains  $D^{(0)}$  and  $D^{(1)}$ .

4. Let us present the basic system of boundary integral equations (BIE). The unknown functions are:

$\mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{u}_1^{(1)} = \mathbf{u}_1^{(0)}$ ,  $\mathbf{w}^{(1)} = \mathbf{u}_2^{(1)} = \mathbf{u}_2^{(0)}$ ,  $t^{(1)} = T_1^{(1)} = T_1^{(0)}$ ,  $s^{(1)} = T_2^{(1)} = T_2^{(0)}$ ,  $y \in \ell_1$ . By analogy,  $\mathbf{v}^{(2)} = \mathbf{u}_1^{(2)} = \mathbf{u}_1^{(1)}$ ,  $\mathbf{w}^{(2)} = \mathbf{u}_2^{(2)} = \mathbf{u}_2^{(1)}$ ,  $t^{(2)} = T_1^{(2)} = T_1^{(1)}$ ,  $s^{(2)} = T_2^{(2)} = T_2^{(1)}$ ,  $y \in \ell_2$ . These quantities are defined by continuity of displacement and stress when crossing any interior boundary line,  $\ell_1$  or  $\ell_2$ . The two last unknown quantities are components of the displacement vector over the free part  $\ell_3$  of the rectangle's boundary:  $\mathbf{v}^{(3)} = \mathbf{u}_1^{(2)}$ ,  $\mathbf{w}^{(3)} = \mathbf{u}_2^{(2)}$ ,  $y \in \ell_3$ . For these 10 unknown boundary functions one should formulate a system of 10 BIEs. First two equations are obtained as equations of (2.2) type when point  $x$  approaches to line  $\ell_1$  from domain  $D^{(0)}$ . Next two equations are obtained by analogy when point  $x$  approaches to line  $\ell_1$  from domain  $D^{(1)}$ . One thus obtains first 4 BIEs. In the same way, 4 other BIEs can be obtained over curve  $\ell_2$ . As a result, one arrives at a system of 8 BIEs. The remaining two equations are obtained from (2.2) if one allows point  $x$  to approach free boundary line  $\ell_3$  from domain  $D^{(2)}$ . It is obvious, that in this way the complete system of BIEs consists of 10 equations regarding 10 unknown functions. Recall that Green's tensor in the classical form (2.3) is used only for components with superscript (2). For domains  $D^{(0)}$  and  $D^{(1)}$  the specially constructed form (3.1) – (3.4) of the tensor is used.

The important remark for the constructed  $10 \times 10$  system of integral equations is that for domain  $D^{(0)}$  respective equations may be written, due to radiation condition, not for full wave field

but only for the scattered one. Then, if being treated directly, as certain integrals over the (complex) boundary of domain  $D^{(0)}$ , the right-hand sides in the first two equations of the  $10 \times 10$  system appear in too complicated form. To avoid such a trouble, we prove that these integrals can be rewritten as integrals over horizontal axis  $y_2 = 0$  that allows us to calculate them analytically in an explicit form.

5. The numerical treatment of the basic system of BIEs is performed by the so-called *collocation* technique, when the set of the "internal" nodes  $y^{(j)} = (y_1^{(j)}, y_2^{(j)})$ ,  $j = 1, \dots, N$  coincides with the set of "external" nodes  $x^{(i)} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)})$ ,  $i = 1, \dots, N$ . When constructing the numerical algorithm, we assume that all ten unknown functions are constant over each elementary subinterval on the grid.

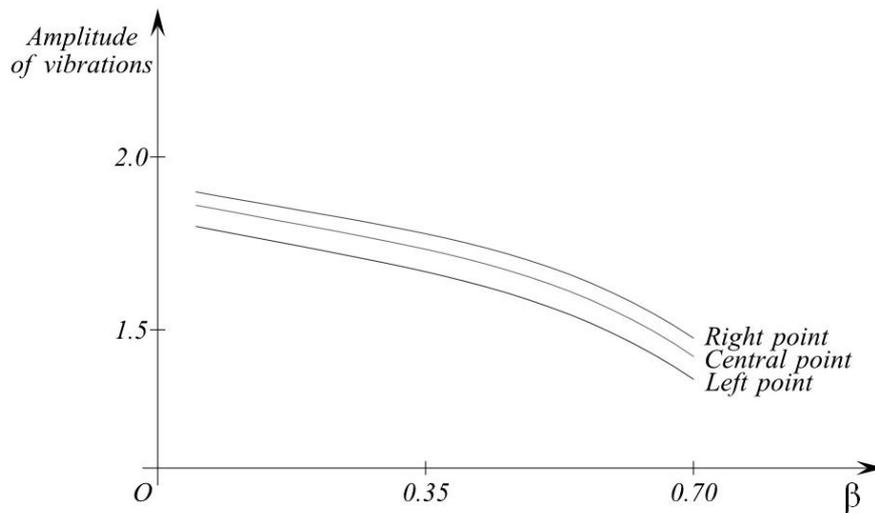


Fig.2. Vibration amplitude versus  $\beta$  at three points on the top of the construction:  
 $a = 10m$ ,  $b = 5m$ ,  $h = 2m$ ,  $d_1 = d_2 = 1m$ ,  $c_0 = c_1 = c_2 = 300m/sec$ ,  
 $\rho_0 = \rho_1 = \rho_2 = 1g/cm^3$ ,  $\omega = 50rad/sec$ ,  $\theta = 45^\circ$

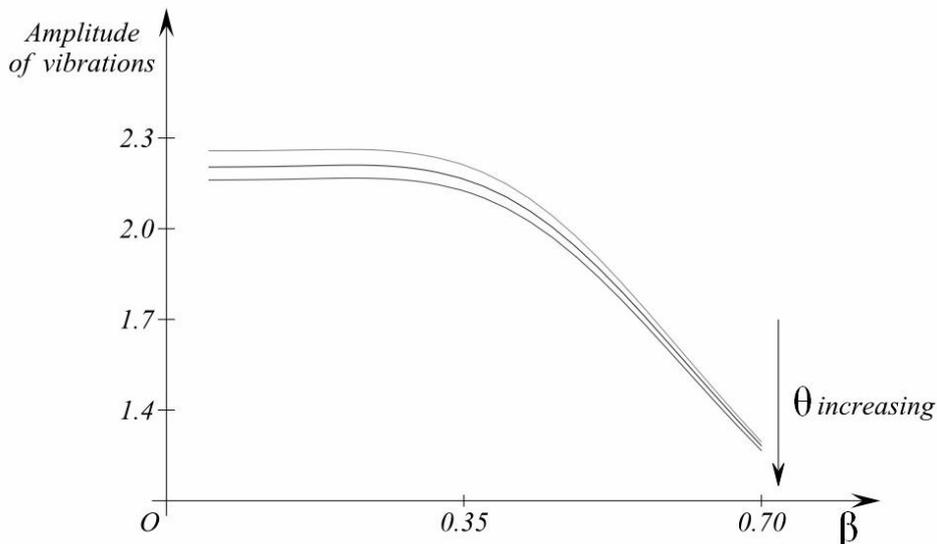


Fig.3. Vibration amplitude versus  $\beta$  for different incident angles at the central point of the base:  
 $a = 10m$ ,  $b = 5m$ ,  $h = 2m$ ,  $d_1 = d_2 = 1m$ ,  $c_0 = 300m/sec$ ,  $c_1 = 600m/sec$ ,  $c_2 = 1000m/sec$ ,  
 $\rho_0 = 1g/cm^3$ ,  $\rho_1 = 2g/cm^3$ ,  $\rho_2 = 3g/cm^3$ ,  $\omega = 10rad/sec$

According to classical results, all kernels containing any singularity must be integrated accurately since, in order to provide stable computations for the elements forming the diagonal terms in the discrete matrix. We calculate this principal diagonal-terms contribution numerically. Such an approach has been applied both to anti-plane and in-plane problems. Some figures, calculated for the anti-plane problem, demonstrate the results of the numerical simulation as diagrams.

Fig.2 shows dependence of the vibration amplitude calculated at three points on the upper face of the elastic rectangle, versus damping coefficient  $\beta$ . It can be seen that with significant growth of  $\beta$  the amplitude of oscillations decreases in two times approximately.

Fig.3 demonstrates analogous dependence of the vibration amplitude at the central point of the construction' base versus damping coefficient  $\beta$ , for a number of incident angles. There is used another combination of physical parameters, and for significantly lower frequency of oscillations. It is interesting to notice that lower frequencies provide greater suppression of the vibration with damping materials. It is also interesting that damping efficiency weakly depends on the angle of incidence.

Fig.4 is related to the same physical parameters like in Fig.2. Here we study the influence of the thickness of protective stratum. Thicker stratum evidently leads to greater vibration protections.

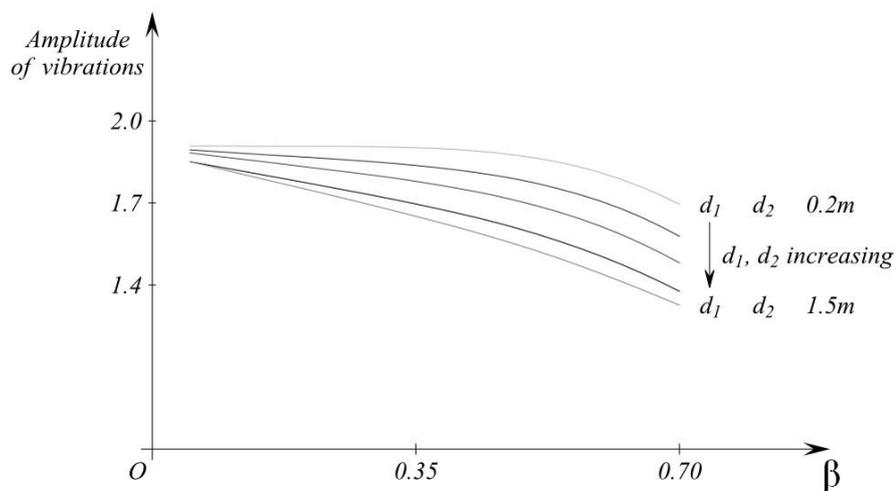


Fig.4. Vibration amplitude versus  $\beta$  for different thickness of the protecting stratum, central point on the top:

$$a = 10m, \quad b = 5m, \quad h = 2m, \quad c_0 = c_1 = c_2 = 300m/sec, \quad \rho_0 = \rho_1 = \rho_2 = 1g/cm^3, \quad \omega = 50rad/sec, \quad \theta = 45^\circ$$

### **Information about authors**

**Sumbatyan Mezhlum** – professor, Russia, Southern Federal University, Faculty of Mathematics, Mechanics and Computer science (+7) 928 70 67

**Ciarletta Michele**–professor, Italy, University of Salerno, Faculty of Engineering (+39 089) 96 42 51

**Zampoli Vittorio**–researcher, Italy, University of Salerno, Faculty of Engineering (+39 089) 96 42 52

**Vaccaro Massimo**–researcher, Italy, University of Salerno, Faculty of Engineering (+39 089)9642 51  
E-mail [sumbat@math.rsu.ru](mailto:sumbat@math.rsu.ru) [ciarlett@diima.unisa.it](mailto:ciarlett@diima.unisa.it) [yzampoli@unisa.it](mailto:yzampoli@unisa.it) [massimo\\_vaccaro@libero.it](mailto:massimo_vaccaro@libero.it)

# INVESTIGATION OF THE INFLUENCE OF AGEING ON THE DISSIPATIVE PROPERTIES OF GETINACKS SUBJECTED TO REPEATED STATIC LOADING

Valesyan S.

The effect of ageing on the dissipative properties of getinacks subjected to repeated static loading has been investigated. Specimens were tested at the age of 1, 4, and 8 years. The approximation of experimental data is done, and the energy of dissipation is calculated. The hysteresis characteristics have been obtained at the values of strength close to the values of its ultimate strength. Based on the investigation of getinacks manufactured by the technology of regulated thermo-pressing, this technology can be recommended for the manufacturing of appropriate products.

## Introduction.

According to the data of works received by testing of oriented fibreglasses [1,2], fiberglass on a basis chopped glass-cord [3,4], fiber-glass plastic [2], the mechanical behavior of these materials both at short-term, and at long force influences is rather sensitive to "age".

The data about dissipative properties of the polymeric composites determined as a result of their repeated - static loading, considering technology factors and temperature-moisture conditions of an environment are known from works [5,6].

Studying of the influence of "age" (ageing) on durability, deformability and dissipative properties of getinacks applicable in various branches of engineering is of a great interest.

## Experimental part.

Experimental samples as double-sided blades, which sizes satisfy the requirements of ST CMEA 1199-78, were cut out from sheet of getinacks with thickness  $\approx 5\text{mm}$ , received by regulated thermopressing technology [7].

Sheet getinacks of all three parties received from sulfate - cellulose paper impregnated with the phenol – formaldehyde binding solution, after polymerization cooled down in the switched off furnace to avoid temperature pressure, and then were stored in a laboratory at temperature  $20\text{-}25^{\circ}\text{C}$ .

Experimental researches were carried out in 1, 4 and 8 years after manufacturing of the experimental samples.

During the repeated static loading samples were tested with the step of loading  $0,1\sigma_u$  ( $\sigma_u$  - ultimate strength of samples). The maximal value of the applied loading was  $0,9\sigma_u$ . Approximation of experimental data ( $\sigma$  and  $\varepsilon$ ) on the sites of ascending ( $\rightarrow$ ) and descending ( $\leftarrow$ ) branches of hysteresis loop is defined by equation:

$$\sigma = \alpha \varepsilon + \beta \varepsilon^n \quad (1)$$

where  $\varepsilon$  – value of the strain determined from the value of permanent set, and  $\alpha, \beta, n$  - parameters of approximation defined for every ascending ( $\rightarrow$ ) and descending ( $\leftarrow$ ) branches of hysteresis loop given in the table.

Based on the known formula given in [8], the non-elastic deformation of material subjected to the repeated static loading can be estimated through the coefficient of energy dissipation  $\psi$ .

$$\psi = \frac{\Delta W}{W} \quad (2)$$

where  $\Delta W$  - value of dissipated energy per a cycle, and  $W$  - value of the full energy of deformation of samples.

Applying equations (1) and (2), and taking into account that values  $\Delta W$  and  $W$  are the area of hysteresis loop and the area restricted between the ascending branch of hysteresis loop and the axis  $\varepsilon$ , correspondingly, the coefficient of energy dissipation  $\psi$  can be defined by the following equation:

$$\psi = \frac{\Delta W}{W} = \frac{\int_0^{\varepsilon_{\max}} (\alpha \varepsilon + \beta \varepsilon^n) d\varepsilon - \int_0^{\varepsilon_{\max}} (\alpha \varepsilon + \beta \varepsilon^n) d\varepsilon}{\int_0^{\varepsilon_{\max}} (\alpha \varepsilon + \beta \varepsilon^n) d\varepsilon} \quad (3)$$

Integrating equation (3), the value of the coefficient of energy dissipation  $\psi$  can be obtained by equation (4):

$$\psi = \frac{\frac{\varepsilon_{\max}^2}{2} (\bar{\alpha} - \bar{\alpha}) + \bar{\beta} \frac{\varepsilon_{\max}^{\bar{n}+1}}{\bar{n}+1} - \bar{\beta} \frac{\varepsilon_{\max}^{\bar{n}+1}}{\bar{n}+1}}{\frac{\bar{\alpha}}{2} \varepsilon_{\max}^2 + \bar{\beta} \frac{\varepsilon_{\max}^{\bar{n}+1}}{\bar{n}+1}} \quad (4)$$

### Results and discussion.

Results of testing are given in the table and on figure.

According to the data of table, the ageing practically has not affected tensile strength of getinacks' test pieces 1 and 4 years of age. The value of the tensile strength for the above-mentioned test pieces has been changed less than in 1%. Meanwhile, the value of tensile strength has decreased in 5.5% and 6.3% for test pieces 8 years of age in comparison with test pieces 1 and 4 years of age, correspondingly.

Table

Value of applied load	Age of samples $\tau$ , year	Tensile strength, MPa	Coefficient of energy dissipation $\psi$ , %	Approximation parameters for the ascending ( $\rightarrow$ ) branch of the hysteresis loop			Approximation parameters for the descending ( $\leftarrow$ ) branch of the hysteresis loop		
				$\bar{\alpha}$	$\bar{\beta}$	$\bar{n}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\beta}$	$\bar{n}$
0,9 $\sigma_u$	1	117,3 $\pm$ 1.322	10.6	1.067	11.99	0.32	1.59	7.99	0.105
	4	118,4 $\pm$ 1.334	8	0.999	7.77	0.337	1.32	5.77	0.102
	8	110.9 $\pm$ 1.25	15.1	5.035	5.99	0.799	1.77	2.39	1.458

Using approximation parameters for samples tested 1, 4, and 8 years of age, the theoretical curves of experimental data of the hysteresis loop are drawn. On the same figure the experimental data of repeated static loading of test pieces as a dependence strain  $\varepsilon$  on strength  $\sigma$  are shown by dots.

Investigating the influence of ageing on the deformation properties of getinacks subjected to a repeated static loading, the value of energy dissipation coefficient should be considered. Comparing test pieces 4 years of age with the test pieces 1 year of age, it is noticeable that the coefficient of energy dissipation is decreased in 24.5%. Consequently, the influence of ageing on getinacks 4 years of age subjected to the repeated static loading will cause the increase of design reliability. However, the influence of ageing on getinacks 8 years of age is significant. The value of energy dissipation coefficient of the test pieces of 8-year old getinacks is increased in 29.8% and 47% in comparison with the test pieces of getinacks 1 and 4 years of age, correspondingly. So that, in the case of 8-year old getinacks' samples, the inversive effect takes place.

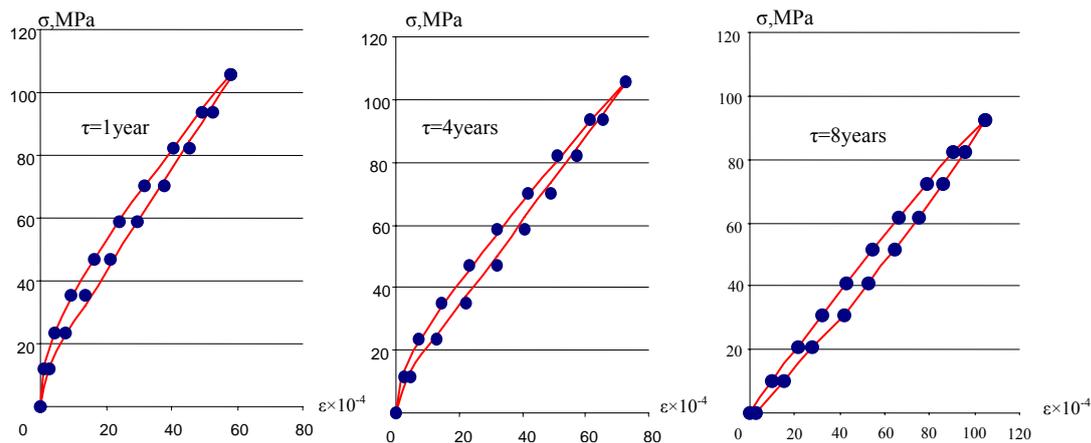


Fig. Curves of the hysteresis loop.

### Conclusions.

1. The technology of regulated thermopressing allows manufacturing getinacks, dissipation energy of which appears only at pressures close to its durability. For this reason, the above-mentioned technology can be recommended for the production of appropriate constructions and products.
2. Applying equation (1), the approximations of experimental data both for the ascending ( $\rightarrow$ ) and for the descending ( $\leftarrow$ ) branches of the hysteresis loops can be obtained.
3. Influence of ageing on the dissipative properties of getinacks manufactured by the technology of regulated thermopressing subject to the pressing pressure should be insignificant.

### Reference

1. Martirosyan M.M. Creepage of fiberglass CBAM in the different period after manufacturing of material // Proceed. of Academy of Sci. of Arm. SSR, Ser. of Phys.-Math. Sci., 1964. V.17. N5. p. 51-60.(Russian)
2. Ogibalov P.M., Tuneeva I.M. Influence of long-term storage on the mechanical properties of reinforced plastics // Mech. of Polymer, 1969 N3. p. 556-558. (Russian)
3. Smirnova Z.A., Vlasov P.V. Strength properties and ageing of sheet fibreglasses in the various climatic conditions // Mech. of Polymer, 1971. N3. p. 554-558. (Russian)
4. Grakova T.S., Kiseleva G.I., Kochueva L.I. Research of natural ageing of fiberglass materials in various climatic areas // Sci.-tech. proceed., 1980. Ser. XXIV. V.31. p.35-37. (Russian)
5. Karapetyan K.A. Deformation properties of fiberglass pipes at repeated-static single-axial and combined loading // Reports of NAS RA-Mechanics.-2001.-V.101.-N4.- p.317-323. (Russian)
6. Limonov V.A., Perevozchikov V.G., Tamuzh V.P. Fatigue of layered composites with various schemes of reinforcement // Mech. of Comp. Mater. Lat. AS-1988.-N5.-p.786-796. (Russian)
7. Simonyan A.M., Valesyan S.Sh. Design of rims for regulated self-pressing of composites during polymerization // Proceed. of NAS RA, Ser. of Tech Sci., 1999.N1.p.14-19. (Russian)
8. Panovko Ja.G. Internal friction under the waving of elastic systems. M.: State Pub. of Phys.-Math. Literature, 1960, 193p.(Russian)

**Information about author:** Sona Sh. Valesyan – senior researcher, PhD of Engineering Institute of Mechanics of NAS RA, E-mail: [svalesyan@mechins.sci.am](mailto:svalesyan@mechins.sci.am)

## TO SURVEY OF SOME RESULTS FROM ZAVRIEV IN THE VISCOUS-ELASTICITY

Vashakmadze Tamaz S., Gvinchidze Guram I.

In the first part we give the generalized form for kernels when the mathematical models for elasto-creeping materials are linear and homogeneous. The foundations of these results are some achievements gathered by groups of engineers and mathematicians from *Zavriev Institute of SM & EE and Vekua IAM in the period 1968-2005 from great influences of Arutiunian's heritage*. In the second part we present the method of constructing 2Dim with respect to spatial coordinates nonlinear dynamical for a mathematical models of von *von Kármán -Reissner-Mindlin* type for viscous -elastic thin-walled structures and corresponding governing relations without any simplify hypothesis of mechanical or geometrical meanings and *Volterra's* principle.

### I. Universal Creep Kernel for Materials with Constant, Instantly or Monotonously Decreasing in Time and Zero “Memory” of Previous Load History

First investigations in the sphere of long-term deformation of aging materials were conducted on concretes in the beginning of last century. While this property of the concrete did not provoke the particular interest of investigators at the beginning, at present the content of the theoretical investigations in the sphere of the creep of aging materials (as a material for experiments remains the concrete) includes three main conceptually established creep theories (theory of aging, hereditary theory of aging, theory of elastic heredity) and the certain number of modernizations, whose goal is more visible reflection of some additional physical peculiarities of this process in the elaborated analytical dependences of these modernizations of generalized Hooke law. Quickly increased number of investigations, considerable volume and the wide variety of the accumulated material for a comparatively short period from the beginning of the first investigations up to practical realization of results is natural. About significance of the consideration of the concrete long-term deformations, *Arutiunian* figuratively expressed: “The high arch dams could not exist, but for concrete creep deformation.” The sense of this expression is that creep deformations, redistributing the strength, cut the peaks of their concentration, those would be inevitable considering the uneven settlements of soils under the dams all along their length. It is clear that it is only part of the global mater consisting in interaction and deformation in time of bearing structural elements - components of the complexes ‘structure-basis.’ The targets in assigned task are the results of this interaction: the long-term deformation mode (LTDM) of the bearing structural elements (in result of strength redistribution and deformation) and the long-term strength (LTS) of both the complex ‘structure-basis’ integrally and its separate parts. Of course, the sphere of concrete creep considering is not confined to arch dams. Into following short list of objects of design- engineering practice, demanding the continuous consideration of concrete creep, there are included a few, by our opinion, the most important ones: analysis and design of aqueducts, bridges and over bridges, large span floor structures, consideration of losses in production and operation of prestressed structures etc., what is reflected in corresponding articles of any national or pan-European codes. However, here must be emphasized the paradoxicality of present situation: though, out of existing today theories of creep (with respect to concrete) the most precise one - the theory of elastic- creeping body and the considerable number of its more or less successful modifications are elaborated, in spite of this, during more than half a century, up to day - the only theory whose parameters of the kernel are standardized - is the classic theory of aging. Its analytical dependence  $\sigma - \varepsilon$  is the first (and for the time being, only) brought into the normative documents and adopted in design practice. It is the most old and less precise, giving the large-scale errors in determination of the concrete long-term deformations under the cyclic force actions, not fixing the deformation at unloading, using in construction the principle of parallelism of the creep deformation curve that is not able to describe the creep deformations of old concrete that contradicts the experimental data. However, should be given credit to this theory - most simple and convenient for practical use. From the variety of the theory of long-term deformation, the theory of elastic-creeping body (or the hereditary theory of aging) describes the experiment most precisely. We have elaborated the hereditary theory of aging, based on the idea of universality of its analytical dependence, allowing to use it for description of long-term process’ of different building materials (aging, non-aging and very old concretes). It is characterized by simplicity, optimum number of creep kernel parameters that

makes it usable simply enough in practical calculations. The corresponding analytical dependence  $\sigma - \varepsilon$  for the concrete, loaded at age  $\tau$  in the  $t$  instant time is shown below

$$\varepsilon(t, \tau_n) = \frac{\sigma(\tau_n)}{E_{bn}} \{1 + \Theta_0 - m \cdot \varphi(\tau_n) + [\varphi(t) - \varphi(\tau_n)] \cdot [1 + \omega(\tau_n)]\} + \frac{1}{E_{bn}} \cdot \int_{\tau_n}^t \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} \{1 + \Theta_0 - m \cdot \varphi(\tau) + [\varphi(t) - \varphi(\tau)] \cdot [1 + \omega(\tau)]\} d\tau \quad (1.1)$$

where  $\Theta_0 - m \cdot \varphi(\tau)$  is the characteristic of quick deformation of concrete creep, loaded at the age  $\tau$ ;  $[\varphi(t) - \varphi(\tau_n)] \cdot [1 + \omega(\tau_n)]$  - characteristic of slow deformation of concrete creep, loaded at the age  $\tau$  at the instant time  $t$ ;

$\omega(\tau) = (u \cdot (1 + m) \cdot \varphi(\tau)) / (\varphi_k - \varphi(\tau))$  - coefficient regulating the lack of parallelism of the creep deformation curves of test specimen twins (of the same batching) loaded at different ages;  $m = (\chi \cdot \Theta_0) / (\varphi_k) + k_0$  - total coefficient of proportionality regulating the limit decreasing of the quick creep and the history of concrete elasticity module;  $\omega(\tau_n)$  - coefficient regulating the nonparallelism of creep deformation curves of the twin samples (made of one batching) loaded at different ages. Demonstrably, in  $\omega(\tau_n)$  the coefficient “ $u$ ” basically regulates the level of the parallelism of the creep curves. This feature of the creep kernel characterizes the process of long term deformation, described by the hereditary theory of aging and the theory of elastic heredity. Let us determine the range, wherein the coefficient “ $u$ ” varies. It is clear that at the lower limit, when  $u = 0$ , the creep kernel (1.1) transits into the creep kernel of the modified aging theory. For determination of the upper limit of “ $u$ ” the stipulation of disjointness of the creep curves of the identical samples is used. Below is given composed by us inequality of full creep deformations for two concretes, loaded at ages  $\tau_{n-1}$  and  $\tau_n$ , in instance of sampling, when  $\varphi(t) = \varphi_k$ .

$$\Theta_0 - m \cdot \varphi(\tau_{n-1}) + [\varphi_k - \varphi(\tau_{n-1})] \cdot \left[1 + \frac{u \cdot (1 + m) \cdot \varphi(\tau_{n-1})}{\varphi_k - \varphi(\tau_{n-1})}\right] > \Theta_0 - m \cdot \varphi(\tau_n) + [\varphi_k - \varphi(\tau_n)] \cdot \left[1 + \frac{u \cdot (1 + m) \cdot \varphi(\tau_n)}{\varphi_k - \varphi(\tau_n)}\right] \quad (1.2)$$

Transforming (1.2), we will get  $u < 1$ . Hereby, the lower and upper limits of the coefficient  $u$  are  $0 < u < 1$ . In this range the process of hereditary aging is valid. It is clear that at  $u = 0$ ,  $\Theta_0 = 0$ ,  $m = 0$  we have got the creep kernel of the classic theory of aging. At  $u = 1$  the creep kernel (1) describes the process of elastic heredity. Of course, it can be supposed that in the ultimate transformation of the creep kernel  $\Theta_0 \neq 0$ , but this supposal requires the experimental confirmation, as far as the information, that soils of foundation suffer the fast creep is not available, however, if such information exists in results of some investigations, or in the standards, the analytical infrastructure for their use have been ready.

Hereby, the principle of universality laying in (1.1) has one, but by our opinion, very significant goal: description the long term deformations of aging and non-aging materials in one analytical dependence that considerably simplifies the determination of the long term deformation mode and the long term strength of the bearing complexes “structure-base.” Let us show this in more detail in below given transformation of (1.1). After transformation the expressions (1.1) and (1.2) will have appearance:

$$E_{bn} \cdot \varepsilon(t, \tau_n) = \sigma(\tau_n) \cdot \left[1 + \Theta_0 - m \cdot \varphi_k \cdot (1 - e^{-\beta \tau_n}) + \varphi_k \cdot (A + B \cdot e^{-\beta \tau_n}) \cdot (1 - e^{-\beta(t-\tau_n)})\right] + \int_{\tau_n}^t \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} \cdot \left[1 + \Theta_0 - m \cdot \varphi_k \cdot (1 - e^{-\beta \tau}) + \varphi_k \cdot (A + B \cdot e^{-\beta \tau}) \cdot (1 - e^{-\beta(t-\tau)})\right] d\tau \quad (1.3)$$

Using the symbols:  $S_F(\tau) = \Theta_0 - m \cdot \varphi_k (1 - e^{-\beta \tau})$ ,  $S_L(t, \tau) = \varphi_k \cdot (A + B \cdot e^{-\beta \tau}) \cdot (1 - e^{-\beta(t-\tau)})$ ,

$$A = u \cdot (1 + m); B = 1 - u \cdot (1 + m),$$

from (1.3) by partial integration we will get the expression that represents one of modified versions of the generalized Hook's Law for the materials with the creep property under the permanent and variable in time force action:

$$E_{bn} \cdot \varepsilon(t, \tau_n) = \sigma(t) \cdot [1 + \Theta_0 - m \cdot \varphi_k \cdot (1 - e^{-\beta t})] + \varphi_k \cdot \beta \cdot (m + B) \cdot \int_{\tau_n}^t \sigma(\tau) \cdot e^{-\beta \tau} d\tau + \varphi_k \cdot \beta \cdot A \cdot \int_{\tau_n}^t \sigma(\tau) \cdot e^{-\beta(t-\tau)} d\tau. \quad (1.4)$$

Above expressions (1.3) and (1.4) was stated that proposed by us modification of the hereditary theory of aging is characterized by simplicity, low number of parameters and universality. Long term deformations running in the concrete in time and the influence of this process on long term mode of deformation and long-term strength of cross-sections of RC structural element, subjected to flexure, central and eccentric compression, represent the objects of multiple investigations, however, existing hypotheses about the mechanical and chemical mechanisms of the creep deformation process in construction materials (in given case, concrete) in spite of their diversity, are not reflected directly in the analytical descriptions of these theories. Moreover, the abundance of the hypotheses emphasizes only the absence of the full clearness in this issue. Nowadays the analytical creep theories are based on the description of the geometry of forms, experimentally obtained curves  $\varepsilon - t$ , i.e. stating the result, without the disclosure and analytical description of physical-mechanical, and likely, the chemical basis of the phenomena. Experiments register the peculiarities of the long term deformation of the dry and wet concretes, influence of the variable environmental temperature and humidity on this process, however, in the theories all this is described by using the phenomenological dependences and parameters. It can be noted that such approach quietly acceptable in solution of practical engineering tasks, as far as it gives the answer to the main question about the substance of influence of the creep deformation on the long term deformation mode and long-term strength of structural elements.

## II. To Problems of Constructing of *von Kármán* type Nonlinear Mathematical Models for Viscous-Elastic Thin-Walled Structures

In the work [1] exposed the first step for constructing two or one dimensional theory for the beam, plate, or column when the creep stress-strain relations (which generally include the possibility of elastic and plastic strains) are nonlinear. Using some results for elastic case of Reissner, Wang and Prager in [1] pp.117-119 formulated Variational Principle(VP) for viscous-elastic bodies. By VP these Authors did main conclusion that *von Kármán* system's analogical relation is true too. Now we try to analyze the difficulties arising with immediate representation of the corresponding methodology elaborated by *von Kármán-A.Föppl*. In this aim we must repeat some results and new one from our publications.

One of the most principal objects in development of mechanics and mathematics is a system of nonlinear differential equations for elastic isotropic plate constructed by *von Kármán*. This system represents the most essential part of the main manuals in elasticity theory [2, 3]. In spite of this in 1978 *Truesdell* expressed an idea about neediness of "Physical Soundness" of *von Kármán* system. This circumstance generated the problem of justification of *von Kármán* system. Afterwards this problem is studied by many authors, but with most attention it was investigated by *Ciarlet* [4]. In particular, he wrote: "the *von Kármán* equations may be given a full justification by means of the leading term of a formal asymptotic expansion" [4, p.368]. This result obviously is not sufficient for a justification of "Physical Soundness" of *von Kármán* system as representations by asymptotic expansions is dissimilar: leading terms are only coefficients of power series without any physical meaning.

*von Kármán von Kármán von Kármán* This fact was verified also by *Podio-Guidugli* recently. In the presented model we demonstrated a correct equation that is especially important for dynamic problems. The corresponding system in this case contains wave processes not only in the vertical, but also in the horizontal direction. The equations have the following form [6]:

$$\begin{aligned} (D\Delta^2 + 2h\rho\partial_{tt} - 2DE^{-1}(1+\nu)\rho\partial_{tt}\Delta)w &= \left(1 - \frac{h^2(1+2\gamma)(2-\nu)}{3(1-\nu)}\Delta\right)(g_3^+ - g_3^-) + \\ 2h\left(1 - \frac{2h^2(1+2\gamma)}{3(1-\nu)}\Delta\right)[u_3^*, F_*] &+ h(g_{\alpha,\alpha}^+ - g_{\alpha,\alpha}^-) \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\left(\Delta^2 - \frac{1-\nu^2}{E}\rho_1\Delta\partial_{tt}\right)\Phi = -\frac{E}{2}[w, w] + \frac{\nu}{2}\left(\Delta - \frac{2\rho_1}{E}\partial_{tt}\right)(g_3^+ + g_3^-) + \frac{1+\nu}{2h}f_{\alpha,\alpha} \quad (2.2)$$

From (2.1)-(2.2) follows *von Kármán* equations if in (2.1)  $\gamma = -0.5$ ,  $g_\alpha^\pm = 0$  and in (2.2):  $f_\alpha = \rho_1 = \Delta g_3^\pm = 0$ . In addition, an equation corresponding to (2.2) by *von Kármán A. Föppl, Love, Lukaszewicz, Tomoshenko, Donnell, Landau, Ciarlet, Antman et al.* were constructed by the condition  $\varepsilon_{11,22} - 2\varepsilon_{12,12} + \varepsilon_{22,11} = -0.5[u_{3,\alpha}, u_{3,\alpha}]$  and Hooke's law (but without using the equilibrium equations!). As we prove in works [6], the form (2.2) follows immediately for more general cases, when thin-walled elastic structures are anisotropic and if we use Hooke's law, equilibrium equations with a nonlinear relations between strain tensor and displacement vector:  $\varepsilon_{\alpha\beta} = 0.5(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + u_{3,\alpha}u_{3,\beta})$ . Now we shall prove that equations (2.2) in dynamical case has the following form:

$$\left(-\frac{1-\nu^2}{E}\rho_1\Delta\partial_{tt}\right)\Phi = \frac{\nu}{2}\left(\Delta - \frac{2\rho_1}{E}\partial_{tt}\right)(g_3^+ + g_3^-) + \frac{1+\nu}{2h}f_{\alpha,\alpha}. \quad (2.3)$$

Thus we must demonstrate, that both way are the same to form the expression:  $\Delta^2\Phi - 0.5E[w, w]$ . To construct (2.2) we must use such relation [4]:

$$\begin{aligned} (\lambda^* + 2\mu)\Delta(\bar{\varepsilon}_{11} + \bar{\varepsilon}_{22}) &= (2\mu(3\lambda + 2\mu))^{-1}(\lambda + 2\mu)(\lambda^* + 2\mu)\Delta(\bar{\sigma}_{11} + \bar{\sigma}_{22}) + \dots \\ &= \mu\left((-1)^{\alpha+\beta}\partial_{3-\alpha}\partial_{3-\beta}\bar{u}_{3,\alpha}\bar{u}_{3,\beta}\right) + \dots, \end{aligned}$$

where dots denote the different members from (2.2). If we denote  $\bar{\sigma}_{\alpha\beta} = (-1)^{\alpha+\beta}\partial_{3-\alpha}\partial_{3-\beta}\Phi$ , from preliminary equation follows (2.2) or:  $\Delta^2\Phi = -0.5E[w, w] + \dots$

Now it is evident that from St. Venant-Beltrami compatibility conditions, as

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11,22} - 2\varepsilon_{12,12} + \varepsilon_{22,11} &= \\ (2\mu(3\lambda + 2\mu))^{-1}[2(\lambda + \mu)\Delta\bar{\sigma}_{\alpha\alpha} - \lambda\bar{\sigma}_{\alpha\alpha,\alpha\alpha}] - (\mu)^{-1}\bar{\sigma}_{12,12} &= 2E^{-1}\Delta^2\Phi, \end{aligned}$$

or  $\Delta^2\Phi + 0.5E[w, w] \equiv 0$ .

Now let us consider the problem of creating and justifying 2Dim mathematical models (with respect to spatial coordinates) of *KMR* type for viscous-elastic thin-walled structures in the above sense. In this aim by using The General Variational Theorem of [1, pp. 117-119] in dynamic case we have:

$$\partial_t(\sigma_{ij,j} + \partial_j(\sigma_{ik}u_{j,k}) - f_i) = \partial_t(\rho\partial_{tt}u_i), (t, x) \in (0, T) \times \Omega_h(x)$$

and other same basic relations (the first order Evolutionary System of DEs-EVSDEs- corresponding to "pure" creep processes) then (after indicated integration with respect to  $t$ -creeping time) the creation and justification of refined theories of *KMR* type didn't contain any difficulties and are realized similarly as an elastic case. Preliminary we must prepare EVSDEs for using abstract numerical schemes for Cauchy problems of pseudo ODEs. For completeness, we remark that it is easy to define initial value of second order derivative from inertial member on each preliminary step of numerical integrations.

At last we would like to express our thanks to our young colleagues Mrs. Neli Eremadze and Mr. Yusuf Fuat Gülver for helping us to prepare this article.

## REFERENCES

- [1] Sanders J. L., Jr., G.MCComb H. G. ,Jr., and Schlechte R. F. : A Variational Theorem for Creep with Applications to Plates and Columns”, Report 1342,NACA,(1957),117-123,
- [2] Antman S. S.: Nonlinear Problems of Elasticity, Springer, 2nd ed., 2005, 856p.
- [3]Antman S. S.: Theodore von Kármán, in A Panaroma of Hungarian Mathematics in the Twentieth Century (János Horváth ed.), Bolyai Society Mathematical Studies, 14, 2005, pp.373-382.
- [4].Ciarlet P.: *Mathematical Elasticity:II, Theory of Plates*. Elsevier: Amsterdam/London/ New-York, 1997,498p.
- [5] Vashakmadze T.: *The Theory of Anisotropic Elastic Plates*, Kluwer Acad. Publ&Springer. Dortrecht /Boston/ London, 2010,256 p.
- [6] Vashakmadze T.:On the Basic Systems of Equations of Continuum Mechanics and Some Mathematical Problems for Anisotropic Thin-walled Structures,*IUTAM, Symposium on Relations of Shell, Plate, Beam and 3D Model, dedicated to the Centerary of Ilia Vekua’s Birth (Edited by G.Jaiani, P.Podio-Guidugli)*, Springer Science+Business MediaB.V.9,2008,207-217.

### **Information about authors:**

**Tamaz S.Vashakmadze** – I.Vekua Institute of Applied Mathematics of I.Javakhishvili Tbilisi State University, 75/3/4 Chavchavadze Av.,0179,Tbilisi,Georgia,  
+995322230918(h), +995599536554(mob.),  
E-mail: [tamazvashakmadze@gmail.com](mailto:tamazvashakmadze@gmail.com)

**Guram I.Gvinchidze** – K.Zavriev Institute of Structural Mechanics&Earthquake Engineering, Fl.45,I korp.,IIquat.,III micro-region of Nutsubidze, 0183,Tbilisi,Georgia,  
+995322945773(h),+995577344(mob.),  
E-mail: [guramgvinchidze@gmail.com](mailto:guramgvinchidze@gmail.com)

# THE PROBLEM OF INTRAOCULAR PRESSURE MEASUREMENT MODELING BY A PNEUMOTONOMETRIC METHOD

Yakushev V.L.

The procedure of measuring the intraocular pressure by an optical analyzer is numerically simulated. The cornea and the sclera are considered as axisymmetrically deformable shells of revolution with fixed boundaries; the space between these shells is filled with incompressible fluid. Nonlinear shell theory is used to describe the stressed and strained state of the cornea and sclera. The optical system is calculated from the viewpoint of the geometrical optics. Dependences between the pressure in the air jet and the area of the surface reflecting the light into a photodetector are obtained. The shapes of the regions on the cornea surface are found from which the reflected light falls on the photodetector. First, the light is reflected from the center of the cornea, but then, as the cornea deforms, the light is reflected from its periphery. The numerical results make it possible to better interpret the measurement data. Two types of boundary conditions are compared; for each of them, the relation between the pressure in the air jet and the area of the surface from which the reflected light is recorded by the photodetector is analyzed.

1. The intraocular pressure has important physiological functions—it smoothes the intraocular shells and gives the eyeball the shape required by the optical eye system. From the level of the intraocular pressure, one can judge the development of such pathological processes as glaucoma or opacity of aqueous humor and vitreous body. The intraocular fluid feeds the internal structures of the eye. It provides for the exchange processes between the internal structures and the tissue structures. Tonometry is the measurement of the intraocular pressure (IOP) to determine the ability of the eyeball to deform under the influence of an external mechanical action, which can be applied to the cornea and the sclera. The IOP is measured using specially designed devices. There are finger, impression, and applanation methods of tonometry. One variant of the applanation tonometry assumes that a jet of air is directed to the cornea center (air-puff tonometry), and the displacement of the cornea is measured by the reflected beam of light (optical method). This displacement is then used to calculate the IOP.

2. The IOP is measured using specially designed devices. In this report, we numerically simulate the eye deformation when the pressure is measured using ORA (the Ocular Response Analyzer) developed by the USA company Reichert (see [1]). The measurement procedure is described in [3-5]. A special positioning system is used to direct a narrow light beam at a certain angle to the center of the cornea. Then an air jet is directed to the cornea center and the pressure in the jet increases from zero to a certain value. The cornea gets deformed and the reflected light flux changes depending on the cornea shape. The measurement results are displayed on the device screen as a curve illustrating the dependence of the reflected light flux on the pressure in the jet. Numerous experiments in which the results obtained with the ORA were compared with the results obtained by other methods for measuring the intraocular pressure underlay the development of a method used to interpret the ORA results as values of the intraocular pressure.

The eye apple shell consists of two parts, the cornea and the sclera, whose mechanical properties differ significantly. The sclera and the cornea are separated from each other by a thin membrane. The front chamber between the cornea and the membrane is filled with aqueous humor, and the rear chamber is filled with vitreous body. In the calculations, it is taken into account that the eye apple is filled with an incompressible liquid but the influence of the intermediate membrane is neglected. The cornea and the sclera are treated as shells of revolution uniformly loaded by an internal pressure  $p_i$  (Fig. 1) and rigidly fixed at the points where they meet. A uniform external pressure  $p_e$  is applied at the cornea center along a circle of radius  $r_p$ , and this pressure increases from zero to a certain value. As the external pressure in the air jet increases, the cornea deforms, and part of the intraocular liquid flows into the sclera making it expand so that the intraocular pressure increases. The value of the pressure is determined from the condition that the internal volume of the eye remains constant.

3. Assume that the cornea and sclera shapes are axially symmetric with respect to the vertical axis  $Z$  (Fig. 2), and the air pressure in the air jet is also distributed axially symmetrically with respect to the same axis. This results in an axially symmetric problem for calculating both shells. The cornea and

the sclera are treated as elastic shells whose strains are described by a geometrically nonlinear theory in the case of finite displacements and rotation angles [2]. So, only the basic equations of the theory of shells of revolution under the action of an axially symmetric load are used [2]. These equations are the same for the cornea and the sclera; they only differ in geometric and mechanical parameters [3-5].

We solve this problem using the additional viscosity technique (see [2]). A simple creep model that makes it possible to model the continuous process of passing from the subcritical to the supercritical state without taking into account the inertia forces is the Voigt solid. As a result, one obtains a system of six partial differential equations whose form corresponds to the canonical form of hyperbolic-type equations [2]:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial s_0 \partial t} + A \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{\tau} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial s_0} + B \right\} = 0. \quad (3.1)$$

The components  $\Phi$  are unknown functions of the spatial coordinate  $s_0$  and time  $t$ . The 6 x 6 matrices A and B are functions of the components of  $\Phi$ , which, in turn, are functions of the time  $t$  and coordinate  $s_0$ .

The solution was carried out using a stepwise method, and the iterative process was terminated when the rate  $|\partial \Phi / \partial t|$  became less than some prescribed value determining the error of computations. The entire process of numerical solution is described in detail in [2].

**4.** Two problems with different boundary conditions (Fig. 1) were considered. In the first of them, the point where the cornea and sclera meet was fixed. The lower point of the cornea can move freely. This problem was studied in detail in [4]. On the contrary, in the second problem considered here, this point can move in the vertical direction, while the lower point is fixed [5].

**5.** To determine the dependence between the external pressure and the reflected light flux that hits the photodetector, we should consider the passage of the light rays between the light source and the photodetector (see [3, 4]). The scheme of the optical system is shown in Fig. 2. To calculate the passage of the incident and the reflected light beams, we put a grid on the cornea surface that is finer near the center. First, each point of the grid was connected by a straight line with the source O and it was checked if the ray passes through the aperture A. Thus, we constructed the illuminated region of the cornea (see Fig. 1). The incident and the reflected rays must lie in one plane with the unit normal  $\mathbf{n}$  to the cornea surface. Furthermore, the angle between the incident ray and  $\mathbf{n}$  must be identical to the angle between the reflected ray and  $\mathbf{n}$ . From these conditions, we constructed the reflected ray and checked if it hits the photodetector. Since the photodetector has a limited size, it captures only the part of the light flux reflected from the cornea in the region Q. This region can be multiply connected (see Fig. 4).

**6.** Since the problem was solved numerically, the cornea and sclera shapes could be prescribed as numerical values at a sequence of points. However, since the amount of initial data was insufficient, their shape corresponded to spherical segments [3]. The calculations were performed for the following data: the cornea radius was 0.008 m, the elevation height was 0.00493 m, the base radius was 0.00739 m, the sclera radius was 0.012 m, Poisson's ratios were both 0.45, the elasticity modules were  $1.2 \cdot 10^6$  Pa and  $6.0 \cdot 10^6$  Pa, respectively, the cornea thickness was 0.00045 m and sclera thickness was 0.001 m.

The calculations were performed for the values of the intraocular pressure from  $p_i = 15$  to  $p_i = 50$  mmHg with the interval of 5 mmHg. Figure 4 shows the shapes of the regions in the central part of the cornea corresponding to the unlit part (black), the illuminated part that reflects the light not hitting the photodetector (gray), and the illuminated part that reflects the light hitting the photodetector (white).

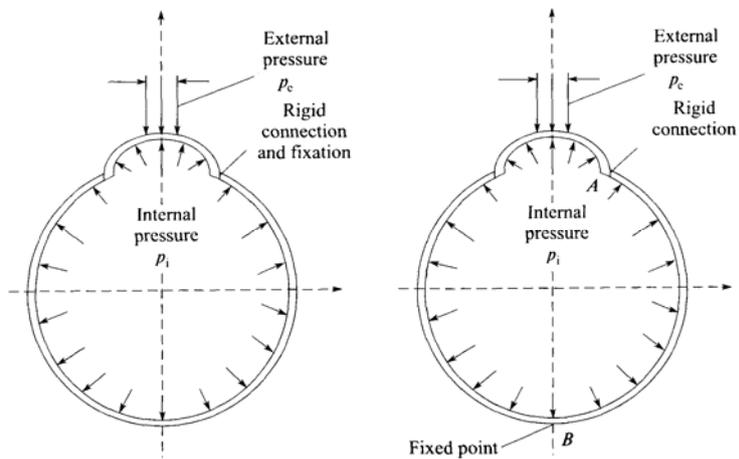


Fig. 1.

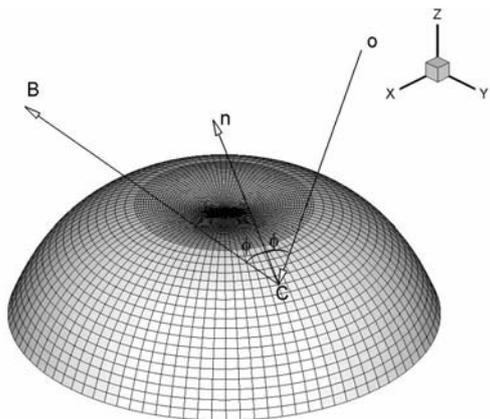


Fig. 2.

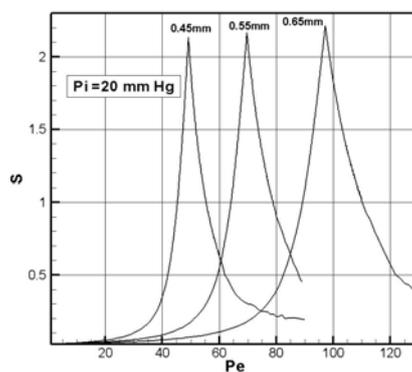


Fig. 3.

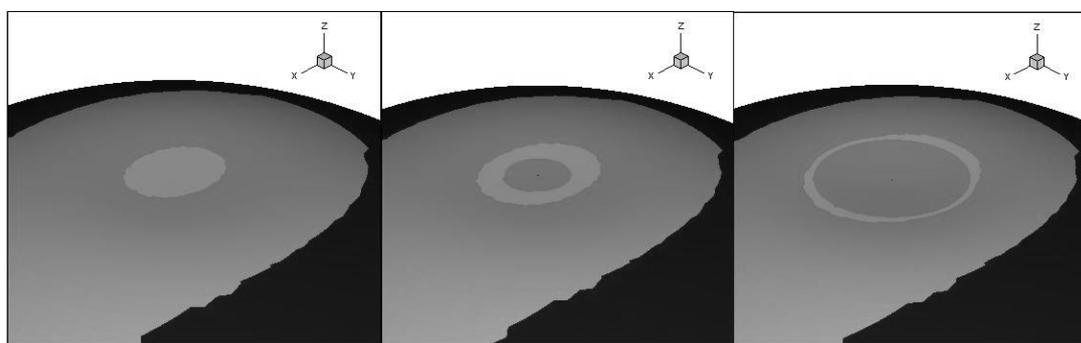


Fig. 4.

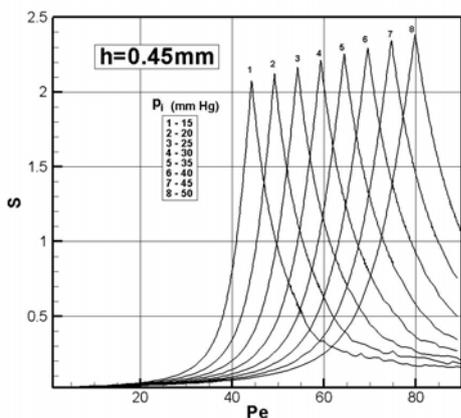


Fig. 5.

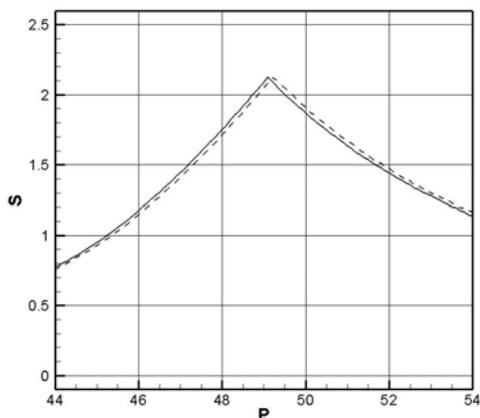


Fig. 6.

It is seen that the light is first reflected from the center of the cornea; then, as the cornea deforms, it is reflected only from its periphery. This is a very important result because no experiments on investigating the shape of the region for the reflected light were earlier carried out, while this is necessary for the correct interpretation of measurement results. Figure 3 illustrates the dependences between the pressure in the air jet  $p_e$  (in mmHg) and the area  $S$  (sq. mm) of the region  $Q$  that reflects the light hitting the photodetector for three values of the cornea thickness 0.45 mm, 0.55 mm, and 0.65 mm for the initial internal pressure  $p_i = 20$  mmHg.

To analyze the influence of the initial internal pressure on the location of the curves in the dependence  $S - p_e$ , calculations for eight values of  $p_i$  were performed with the cornea 0.45 mm thick (see Fig. 5). It is seen that the maximum of the dependence  $S - p_e$  moves to the right as  $p_i$  increases. This fact can be used to interpret the measurement results.

7. The calculations for the second problem (see Fig. 1) were performed for the intraocular pressure  $p_i = 20$  mmHg. The solutions of the first and second problems were compared. Figure 6 displays the pressure in the air jet  $p_e$  (mmHg) against the area  $S$  (sq. mm) of the surface of the domain  $Q$  from which the reflected light comes to the photodetector. The solid line corresponds to the second problem and the dashed line corresponds to the first problem. It is apparent from the graphs that the change of the boundary conditions did not cause significant changes in the results.

The author wishes to thank his teacher **Vladimir Nikolaevich Kukudzhanov** for his support of the research into modeling of mechanical actions on living systems, including the intraocular pressure measurements. Vladimir Nikolaevich made a number of valuable remarks and actively participated in the discussion of the obtained results.

## REFERENCE

1. D. Lusce and D. Taylor, Reichert Ocular Response Analyzer Measures Corneal Biomechanical Properties and IOP, Reichert Ophthalmic Instruments (2006).
2. V.L. Yakushev, Nonlinear Deformations and Stability of Thin Shells (Nauka, Moscow, 2004) [in Russian].
3. V. L. Yakushev, V. R. Tsibul'skii, and R. R. Khusainov, Numerical Simulation of Light Fluxes in Intraocular Pressure Measurements Using an Optical Method, Vestnik Kibernet. (IPOS SO RAN), No. 9, 74-84 (2010).
4. R. R. Khusainov, V. R. Tsibul'skii, and Y. L. Yakushev, Simulation of Eye Deformation in the Measurement of Intraocular Pressure, Zh. Vych. Mat. Mat. Fiz. 51 (2), 349-362 (2011) [Comput. Math. Math. Phys. (Engl. Transl.) 51 (2), 326-338 (2011)].
5. V.L. Yakushev, Statement of the Problem of Intraocular Pressure Measurement Modeling by a Pneumotometric Method. Mechanics of Solids. Volume 46, Number 6, 937-945.

### **Information about author:**

**Yakushev Vladimir** – councilor of ICAD RAS, chief scientist, Institute for Computer Aided Design, Russian Academy of Sciences, +7 499 2500892

**E-mail:** [yakushev@icad.org.ru](mailto:yakushev@icad.org.ru)

## CONTENTS AND ABSTRACTS

- Manzhirov A.V.** ..... 5  
***Developments of N. Kh. Arutyunyan ideas in contemporary mechanics***  
The influence of Academician Arutyunyan ideas on contemporary mechanics and the development of his ideas in modern science are under consideration. Three main areas of Solid Mechanics are studied in details. They are viscoelasticity, contact mechanics, and mechanics of growing solids. The development of the theory of viscoelasticity is closely connected with ideas of aging and inhomogeneous aging. New directions in contact mechanics are defined by concepts of multi-body non-simultaneous contact and discrete accretion. Mechanics of growing solids progresses on the basis of modern geometry and use notions of physics and chemistry. These areas have numerous intersections and generate new problems which are of great importance both from the point of view of fundamental research as well as from the point of view of applications. The development of each area is illustrated by the statement of new problems, utilization of new methods and formulation of new mechanical phenomena.
- Manzhirov A.V., Lychev S.A., Fedotov I.A., Joubert S.V.** ..... 14  
***Nonstationary heat transfer problem for a growing ball***  
The evolution the temperature field in the growing ball is studied in present paper. The law of the motion of growing surface that allow expressing the solution of the initial-boundary problem in closed form is determined. The spectrum of a linear differential operator generated by the problem is obtained.
- Margaryan L.M.** ..... 19  
***The construction of applied dynamic model of micropolar orthotropic elastic thin bars with the help of the asymptotic method***  
In the present paper initial-boundary problem of plane linear micropolar theory of elasticity is considered in thin rectangular domain for orthotropic bar. It is assumed that the general stress-strain state can be divided to internal problem and boundary layers by coordinates and time. The internal one-dimensional problem and boundary layers by coordinates and time are constructed with the help of the asymptotic method. Corresponding boundary and initial conditions are obtained on the basis of interaction of the internal problem and mentioned boundary layers. As a result mathematical model with free fields of displacements and rotations of micropolar orthotropic elastic thin bars is constructed and the corresponding model of micropolar bars, constructed on the basis of hypotheses method, is justified.
- Martirosyan A.N., Dinunts A.S., Davtyan A.V.** ..... 24  
***Unsteady problem of healing of crack moving with variable speed***  
An analytical solution for problem of healing of crack moving with arbitrary speed is done. The character of curves of healing process is investigated.
- Martirosyan S.R.** ..... 29  
***On the problem of the stability of a rectangular plate in a supersonic gas flow***  
The linear problem of the static stability of an elastic rectangular plate in a supersonic gas flow is investigated. The flow is in a direction from the free edge to the hinge joint edge. At the two edges parallel to the flow are hinge joint. Its solution shows that the divergence is possible. There are two limiting cases, which can be reduced to this problem: the case of an elongated plate and the case of a semi-infinite plate-strip. In the latter case the phenomenon of the localized divergence instability arising in the vicinity of the free edge is observed. The critical values of the flow velocity have been found, which results in the divergence instability, depending on the sides of a plate and the Poisson's ratio.

- Mikaelyan H.H.** .....34  
***The problem of stability of compound beam with the concentrated mass***  
 In the work the problem of stability of a compound beam with the concentrated mass is considered.  
 In the first paragraph of the work the problem is considered with unalterable direction load in which the critical force is determined. In the second paragraph the problem is considered with the following load. In the third paragraph the problem is considered with concentrated mass when the load is following. In this task the critical load of divergence instability is determined and in order to determine the critical load of flutter instability particular cases are considered. After this the values of critical load of divergence and flutter instability are compared.
- Minasyan A.F.** .....39  
***The axial symmetric contact problems for semi space with vertical cut finite or semi finite cylindrical cut***  
 The two mixed boundary problems of elasticity are considered: Contact problem for elastic isotropy half space weakened by cylindrical deformable hole of finite length, passing on the boundary of semi space perpendicularly to it, is considered. On boundary of semi space the rigid circular stamp with arbitrary shape of its base is applied. The hole is in position under the stamp. The boundary of half space and of interior part of hole is free from stresses. The same contact problem is solved for half space, when upper surface of cylindrical hole is on finite distance from the boundary of half space and the hole is semi-infinite. For both problems on boundary of half space is applied the rigid stamp. The solution is done by two biharmonic functions for cylindrical hole and half space in the form of sum of integral Fourier–Bessel and series of Fourier–Dini for first function and of integrals of Fourier–Macdonald and Weber for the second. For unknown coefficients functions one obtains system of dual integral equations with kernels in form of trigonometric functions and the Weber functions. This system by method of transforming operators is reduced to standard Fredholm integral equation. The expressions for normal stresses under the stamp and on outer surface of hole with separated singularity including coefficients of stress intensity, as well as of values of displacements of half space boundary out of stamp and on surface of hole are obtained. Equating to zero coefficient of stress intensity of normal stress is obtained size of external radius of hole.
- Mirzoyan S.E., Hakopyan V.V.** .....42  
***On periodical problem of contact interaction between rectangle and stringers taking into account the creep***  
 In the theory of creep of non-homogeneous inherently-ageing bodies a problem of contact interaction between rectangle and stringers is considered. In various viscoelastic characteristics rectangle and stringers in the presence of definite external load, the law of contact tangential stress distribution is determined. The solution of the problem is brought to the solution of set of Volterra second type integral equation and infinite linear algebraic systems.
- Mikhin M.N.** .....46  
***On the bending of viscoelastic growing curvilinear beam***  
 The theory of bend for growing problems of growing solids mechanics is developed in this paper. Three main stages of deformation of a body are investigated: prior to the beginning of building, in process and after a growth stop. The method of the decision based on use of function of tension is offered.
- Mkrtchyan M.M., Mkrtchyan M.S.** .....50  
***On the solution of problem of torsion of elastic prismatic bar with a cross-section in form of an unequal angle bar by the boundary integral equations method***  
 N. Kh. Arutyunyan's well-known problem on torsion of an elastic prismatic bar with a cross section in form of an unequal angle bar is considered from the point of view of application of boundary integral equations.

<b>Movsisyan L.A.</b> .....	<b>55</b>
<b><i>About stability of rectangular plate and circular ring</i></b>	
The stability of a rectangular plate and circular ring filled with power and thermal effects are investigated. The problem of stability under the influence of hard punches is also studied for the ring. The critical parameters-the instant and long-term (elasticity, viscoelasticity) are determined.	
<b>Movchan A.A., Silchenko T.L., Klimov K.Ju, Kazarina S.A.</b> .....	<b>60</b>
<b><i>Shape memory alloys: rheonomic properties and stability</i></b>	
Experimental data is described following which shape memory alloys (SMA) have rheonomic properties. Two model of rheonomic behavior of SMA are proposed. Question about the influence of rheonomic properties on stability the simplest parts containing SMA is investigated.	
<b>Morozov N.F., Semenov B.N.</b> .....	<b>65</b>
<b><i>Selected problems of nanomechanics</i></b>	
In the study of nanoscale objects is necessary to consider the growing influence of the surface. A number of classical problems of elasticity for nanoscale structures, taking into account surface stresses, are considered. The results of analysis are compared with classical results. The effect of taking into account surface stresses on the effective stiffness of nanoporous rod and the stability of a plate with a circular cut in tension is investigated.	
<b>Mkhitarian D. A.</b> .....	<b>70</b>
<b><i>The results of investigations of protected deformed properties of layer damping elements of antiseismic foundation</i></b>	
The analysis of results of the investigation of protracted deformed processes subject to ageing of materials allows to make a conclusion on the possibility of the use of these elements for the solution of engineering problems. Therefore in the capacity of criteria estimation of construction the insignificant influence of protracted compression may be accepted on the behavior of multi-layer rubber cushions reinforced by plates	
<b>Mkhitarian S.M.</b> .....	<b>74</b>
<b><i>On contact between an infinite stringer and an elastic semi-infinite plate with a vertical crack</i></b>	
In the framework of Melan's well-known one-dimensional elastic model of stringer contact between an infinite stringer and an elastic semi-infinite plate containing a vertical crack of finite length with one end on the stringer is considered.	
<b>Mkhitarian S.M., Tokmagyan O.V.</b> .....	<b>79</b>
<b><i>On hydraulic calculation of the established filtration of the liquid in the porous multilayered ground</i></b>	
A plane problem on determination of basic hydraulic characteristics of the established filtration of the liquid in the porous multilayered ground mass, when from the upper boundary of the mass the liquid injects toward the interior of the mass with a certain speed, is considered.	
<b>Nadolin K.A.</b> .....	<b>84</b>
<b><i>Distinctive features of the shearing stream flows and their mathematical models</i></b>	
In work the peculiarities of the water flows in the lengthy bed-stream are discussed as well as approaches to deriving their mathematical models. The specific model equations that describe bed-stream flow as 3D phenomenon are under consideration but they are more simple then general hydrodynamic equations. In contrast to the averaged equations, these reduced models are taking into account the stream cross-structure that allows us to study the effects of the river-bed and river-banks shapes as well as some surface phenomena like the wind action.	

- Nazarova L.A., Nazarov L.A., Epov M.I., Eltsov I.N.**.....89  
***Multidisciplinary model of borehole environment for description of physical fields of different nature***  
A 3D model describing the hydrodynamical and geomechanical fields' evolution under deep borehole drilling was designed. The zones of irreversible deformation may occur in the vicinity of borehole at definite relation between rock strength properties, drilling mud pressure and magnitude of virgin horizontal stresses. These zones influence considerably on borehole surveying apparatus readings that has to be taken into account in course of log data interpretation.
- Hovhannisyan E.G.** .....94  
***Strained-deformed state of two rugged under the corner of lines in field of gravity force***  
In field of gravity force body limited by two lines and situated in position when the line of crossing these stripes perpendicular by direction of self-weight vector is considered. The problem is solved by the method of finite elements. The values of normal and tangent pressure in studied surfaces are resulted.
- Hovhannisyan H. V.** .....98  
***A contact problem for a composite plate with two different semi-infinite stringers***  
In the present paper a contact problem is considered for an elastic composite (piecewise-homogeneous) infinite plate, consisting of two semi-infinite plates with different elastic properties, that are attached to each other along the common straight border, and strengthened with two different semi-infinite elastic stringers with different rectangular cross-section, which are parallel to the mentioned plate's heterogeneity line and are at the same line. The considered contact problem is formulated as a singular integral equation with kernel, consisting of singular and regular parts. By means of Fourier generalized integral real transform the integral equation is reduced to a functional equation with respect to the Fourier transformants of unknown functions of intensities of tangential contact forces and deformation of intermediate finite segment between the stringers. Then, it is shown, that the solution of the functional equation is reduced to the solution of a singular integral equation with respect to the deformation of intermediate finite segment between the stringers, with kernel consisting of singular and regular parts, the solution of which is reduced to the solution of a quasi-regular infinite system of linear algebraic equations.
- Hovhannisyan H.V., Beglaryan A.A.**.....103  
***On a contact problem for an elastic composite infinite plate with two finite elastic stringers***  
In the present paper a contact problem is considered for elastic composite (piecewise-homogeneous) infinite plate, consisting of two semi-infinite plates with different elastic properties, attached to each other along common straight bound, strengthened with two finite elastic stringers, which are on different sides of the heterogeneity line of the mentioned semi-infinite plates and welded (glued) to those semi-infinite plates. It is assumed, that one of the stringer is parallel, the other is perpendicular to the heterogeneity line of the semi-infinite plates, have different elastic properties and cross-sectional areas. The contacting pair (plate-stringer) is deformed by concentrated forces applied on the stringer's bounds. The problem is formulated as a system of singular integral equations under some conditions, the kernels of which are consisted from singular and regular parts. Then, that system is solved by means of well-known mathematical method of Chebishev orthogonal polynomials, which reduces the system of integral equations to a regular infinite system of linear algebraic equations. Formulas for determining normal stresses in finite elastic stringers are obtained.
- Osipov M.N., Chekmenev A.N., Sheglov Yu.D.** .....108  
***Research of dynamic processes on the basis of the analysis of dynamics of the single speckle***  
In work application single speckles for research of dynamic normal displacements of elements of constructions is considered. The optical scheme for realization of the offered method of

measurements is offered. Restrictions imposed on the offered optical scheme are considered. The assessment of a range of measurements of values of displacements is given.

**Papayan A.A.** ..... 113

***To the problem of plate vibration in the longitudinal magnetic field***

In the present article the problem of magneto-elastic vibrations for plate is solved. On the basis of Kirchhoff's theory and the theory of magnetoelasticity of thin bodies three-dimensional problem of magneto-elastic vibrations is reduced to the two-dimensional equations. However, these equations also contain unknown values of the components of intensity of magnetic field on the front surfaces of the plate. In order to find the unknown values, we need to solve the equations of electrodynamics for plate surrounding medium. Therefore, the problem of plate vibrations is spatial. For the details of the final three-dimensional problem to two simple two-dimensional approach is proposed:-it is assumed that surface values of the components of intensity of magnetic field can be determined according to the model of perfect conductor: it is assumed that surface values of the components of intensity of magnetic field equal to zero.

**Perelmuter M.N.** ..... 118

***An interface crack with non-linear bonds in a bridged zone***

The system of non-linear singular integral-differential equations is obtained for determining the stresses in the nonlinear bonds in the bridged zone of a crack at the interface of materials. A procedure for the numerical solution of the system obtained is considered, based on the method of variable elasticity parameters. Numerical experiments have been conducted to investigate the influence of the parameters of the non-linear part of the bond deformation curve, the size of the crack bridged zone and the magnitude of the external load on the convergence of the iteration process of the solution of the system.

**Petrosyan T.L.** ..... 123

***Influence of aging on dissipative properties of concrete***

The dissipative properties of concrete using the theory of heredity are investigated taking into account the aging. There are obtained the relations which define dependence between the dissipation coefficient and characteristics of periodical loading taking into account of change of physical-mechanical properties of concrete because of its aging.

**Peshkhoev I.M.** ..... 127

***Equilibrium of prestressed elastic layer with an elliptical crack in the middle surface***

The crack theory problem of normal pressure loading of the borders of flat elliptical crack, located in the middle surface of the elastic layer, is considered. The crack is being opened under the loading. The layer is subjected to preliminary uniform biaxial tension or compression in the crack surface. Face of the layer being prestressed rest upon a rigid foundation without friction. A model of an incompressible neo-Hookean material is considered. An asymptotic expansion of solution is built in two parameters: the large parameter which is equal to the relative layer thickness and the small parameter equal to the difference of pre-stretch coefficients.

**Pogosian A.K., Bakhshyan A.O.** ..... 132

***Vibrostatic determination of disk brake of automobile with anti-lock braking system***

On the basis of automobile braking mathematical model the calculation method of disk-pad brake vibrostaticity is carried out, taking into account the influence of anti-lock braking system which describes the oscillatory process of brake pads. As a result the algorithm for solving differential equations is suggested, which describes the dynamics of automobile braking process. The considered model of brake dynamics establish interaction between braking and tire-road coupling moments. Vibrostaticity calculations of disk-pad brake are carried out taking into account the influence of anti-lock braking system operation.

- Poghosyan A.K., Meliksetyan N.G.**.....136  
***Tribological investigation of asbestos-free friction materials***  
 It is shown that the functionability of frictional braking materials in the conditions of high-temperature friction is determined by the stress-strain state of contacting thin surface layers where acting tension and compressive stresses which exceeding the limit of strength at shearing. It is also denoted that a properties of reinforcing filling materials have a significant importance. The results of tribological investigation of new asbestos-free friction materials are reduced.
- Poghosyan A.S., Minasyan D.M.**.....140  
***The Investigation of longitudinal waves propagation in electroconductive plates at the presence of longitudinal magnetic field***  
 With the help of equations obtained on the basis of refinements of electromagnetic part of magnetoelasticity hypothesis of thin bodies the propagation of longitudinal waves in electroconductive plates in longitudinal magnetic field is investigated. Asymptotic expansion of the unknown quantity is carried out for weak and strong conductive plates.
- Poghosyan D. M.**.....144  
***On a problem of stability of compressed rectangular plate***  
 The problem of stability of the perturbed motion of a plate loaded "follower" force, in the presence of concentrated inertial mass is investigated. It is shown that when the other three edges of the plate are hinged, there is a divergent instability. And when the two opposite edges hinged, and the third - is clamped, then the divergent instability does not exist. A special case of this problem is the task of Bolotin, who were the first calculated the critical force for stability of a flexible rod clamped at one end and loaded at the other end of the tangential compressive force. Problem of stability of elastic system loaded with follower forces, first explored E.L.Nikolai. Nikolai, Bolotin and Beck are known for their problems of stainability of the rod, loaded follower forces.
- Popov V.G.** .....149  
***Research of the stress state near two cracks, which begin of one point, under the longitudinal shear wave interaction.***  
 The problem of determination the dynamic SIF for two cracks, which begin of one point is solved. The harmonic longitudinal shear wave interacts with the cracks. The original problem is reduced to the system of two singular integro-differential equations with the fixed singularity. The numerical method of this system solving which considers real asymptotic unknown function and special quadrature formulas for singular integrals is proposed.
- Prychina O.D., Smirnova A.V., Samoilov M.V.**.....154  
***Anti-plane vibrations of the multilayered piezoelectric medium free from defects at the interface between layers***  
 The work studies a problem about shear vibrations of the multilayered piezoelectric medium. The formulae for calculating basic dynamic characteristics of the problem have been obtained taking into account the cohesiveness of electrical and mechanical fields.
- Radayev Y.N.** .....157  
***Equations of thermodynamic orthogonality in non-linear hyperbolic thermoelasticity***  
 The present study is devoted to formulations of constitutive equations for the non-linear Green–Naghdi type-III thermoelastic continuum consistent with the principle of thermodynamic (or thermomechanical) orthogonality. The principle of thermodynamic orthogonality proposed by Ziegler as a generalization of the Onsager linear irreversible thermodynamics states that the irreversible constituent parts of thermodynamic currents (velocities) are orthogonal to the convex dissipation potential level surface in the space of thermodynamic forces for any process of heat transport in a solid. The principle of the thermomechanical orthogonality takes its origin from the von Mises maximum principle of the perfect plasticity, where it provides existence of a

yield surface, its convexity, and the associated flow rule. Non-linear constitutive laws of heat propagation as of type-III thermoelasticity complying with the principle of thermomechanical orthogonality are discussed. Important for applied thermoelasticity cases covered by type-III theory are studied: GNI/CTE – conventional thermoelasticity based on the Fourier heat conduction law and GNII – dissipationless hyperbolic thermoelasticity. In the latter case the internal entropy production equals zero for any heat transport process having the form of the undamped thermoelastic wave propagating at finite speed.

**Radchenko A. V., Radchenko P. A. .... 162**

***Influence of orientation of the vector of velocity of the striker on destruction of the anisotropic barrier at high-velocity interaction***

The problem of normal and oblique interaction of the extended steel isotropic cylindrical striker with an orthotropic plate in a range of velocities of impact to 2000 m/sec in a case when the vector of velocity of the striker doesn't coincide with its longitudinal axis is considered. Influence of the angle of a nutation on destruction of a plate and on behavior of the striker in the process of penetration is investigated. The task is solved numerically, by method of final elements in three-dimensional statement. The behavior of a material of the striker is described by elastic-plastic model; the behavior of the material of a barrier is described within elastic-fragile model.

**Sahakyan A.V. .... 166**

***The solution of a contact problem with slipping and adhesion zones (Galín's problem) by the method of discrete singularities***

In this work the contact problem of an indentation of a flat punch into an elastic half-plane, when the contact region is divided into slipping and adhesion zones, is considered. A solution of this problem is reduced to a system of three singular integral equations respect normal and tangential stresses in the adhesion zone and contact pressure in the slipping zones. The solution of this system is built by the direct numerical integration with method of discrete singularities. Numerical analysis is shown a convergence of the computational process in dependence of degree of interpolation formulas. The graphs of contact stresses distribution is plotted. Dependence of a length of adhesion zone on a friction coefficient and Poisson ratio is investigated.

**Sargsyan A.M. .... 171**

***On the influence of the boundary conditions type on the arc part of the circular sector contour on the behaviour of the stresses in the conditions of smooth contact on the radial sides***

An elastic equilibrium of a thin circular sector with unit radius and arbitrary angle of opening  $\alpha$ , when on the arc part of the contour normal displacement and tangential stress are given, and on the radial sides the conditions of the smooth contact takes place, is studied. A closed solution of the problem is obtained with the help of the method of variables separation. It was shown that in both cases, when the angle of the wedge tends to  $\pi$  or  $2\pi$ , the stresses have degree characteristics of  $r^{-1+\varepsilon}$  ( $\varepsilon \rightarrow +0$ ) type, and the coefficients with such singularity in the conditions of general loading of the boundary arc part in the first problem are different from zero and in the second problem tend to zero. Here another case of loading of the arc part of the boundary sector is being analyzed.

**Sargsyan A. H. .... 176**

***Natural vibrations of round plates based on the micropolar theory with independent fields of transitions and rotations***

In this paper on the basis of general theories of micropolar dynamic thin elastic plates with independent fields of transitions and rotations free vibrations of hinged-simply supported round plates are studied. Determination of natural frequencies is reduced to the solution of

transcendental equations. These equations are solved by numerical method. A multilateral numerical analysis was carried out. The results of numerical calculations are presented, that show the specific features of natural vibrations of thin round plates of micropolar elastic material.

**Sargsyan K.S.**.....181

***A contact problem for a plate, strengthened with two parallel infinite stringers, one of which is piecewise-homogeneous***

In the present paper a contact problems is considered for infinite plate with two parallel infinite stringers, one of which is piecewise-homogeneous. Contacting pair (plate-stringers) is deformed by horizontal stretching stresses of constant intensity, uniformly distributed at the infinity of plate. By means of factorization method the closed-form solution of the considered contact problem is constructed. An asymptotic representation for tangential contact stresses is obtained near the point of heterogeneity of the piecewise-homogeneous stringer.

**Sargsyan S.H.**.....184

***Thermoelasticity of micropolar elastic thin shells***

Taking into consideration qualitative results of the asymptotic integration of boundary-value problem of micropolar thermoelasticity in thin three-dimensional domain of the shell, adequate hypotheses are formulated. On the basis of these hypotheses general mathematical model of micropolar thermoelasticity of thin shells is constructed.

**Sargsyan S.H., Farmanyan A.J.**.....189

***Mathematical model of micropolar orthotropic elastic multi-layered thin shells***

In the present paper on the basis of hypotheses method the theory of micropolar orthotropic elastic multilayered thin shells of nonsymmetric structure is constructed.

**Seyranyan S.P.**.....194

***Limiting transition from local loading to concentrated force in expression for the gradient of deflection of the simply supported rectangular plate***

Limiting transition in the Navier solution for locally loaded on a rectangular platform uniform external pressure rectangular a simply supported plate to the Navier solution at the concentrated loading is discussed. The extreme values for the first private derivatives of a deflection on variables  $x$  and  $y$  by tending the sides of rectangular of loading platform to zero with remaining the total force constant are obtained. The continuity of these values in the closed rectangular of the plan of a plate as a function of two variables is proved. It is established that private differentiation on  $x$  or  $y$  and limiting transition from local loading to concentrated, consistently enclosed to a deflection, are interchangeable. The theorem of differentiation of the sums of slowly converging sinus trigonometrical series is proved.

**Simonyan A.M., Bezoyan E.K.**.....199

***Creep of materials at variable temperature***

In the present article the creep relations at the variable stress and temperature are obtained. They are based on transformed time and on the theory of heredity. The comparison with the experimental results is realized.

**Sobol B. V., Krasnoschekov A. A.**.....204

***Analytical solution of the problem of equilibrium of transverse crack in a coated layer***

The investigation of plane static problem of elasticity theory for the layer weakened by a straight transverse crack was carried out. The upper limit of the layer is reinforced with a thin flexible lining. Different versions of the boundary conditions on the bottom edge of the layer were considered. The crack is maintained in the opened state by normal forces applied to its shores. The problem was reduced to the singular integral equation of the first kind with respect to the derivative of function of crack opening. The solution of the integral equation was obtained

by collocation method, the values of the coefficient of stress intensity near the edges of the crack were found.

**Sudakov Yu.V., Smirnov I.V. .... 209**

***Effect of loading conditions on dynamics of crack propagation in organic glass***

The results of experiments on study of crack propagation in plate samples of organic glass under quasi-static and dynamic loading are presented. The quasi-static loading was carried out using a tensile-testing machine. The dynamic loading was carried out by means of the setup of conductor explosion. The results of both dynamic and quasi-static experiments show the unstable behavior of the instantaneous crack velocity. However the mean velocity of the crack tip depends on the type of the loading.

**Terzyan S.A. .... 214**

***An axisymmetric problem for two coupled hollow cylinders of finite length***

It is assumed that on the cylinders lateral surfaces the arbitrary loads are applied while at the cylinder ends the stresses are given and between the cylinders a full clutch is implemented. A transcendental equation is deduced that characterizes the stresses secularities at the contact line.

**Torskaya E.V. .... 219**

***Determination of elastic properties of thin coatings from micro and nano indentation tests***

The study is devoted to determination of elastic properties of thin hard coatings from indentation data: the calculations are based on the contact problem solution for two-layered elastic half space. The results obtained for different hard coatings are presented and analyzed.

**Utkin A.A. .... 224**

***Structural - temporal approach for investigation of spall fracture caused by loads with durations in nanosecond range***

Utilizing the structural-temporal approach, spall strength of materials is studied for a wide range of loading rates. Effects observed in experiments on spall fracture caused by loads with durations in nanosecond range are examined. A possibility to describe these effects utilizing the structural-temporal approach is demonstrated.

**Khachatryan A.M., Tovmasyan A.B. .... 229**

***Asymptotic solution of mixed three dimensional interior problem for anisotropic plate***

The question of determination stress-strain state of anisotropic sandwich-type plate is considered, when on one of the face surfaces are given values of stresses, and on the other surface-normal component of displacement vector of transference and tangential stresses. Investigation is led by the method of asymptotic integration equations of three dimension problem of theory of elasticity. Founded asymptotic and build solution, which appropriate to interior problem. Received recurrent formulas, which allow determine all components of stresses tensor and vectors displacement of interior problem.

**Khachatryan L.S. .... 234**

***Reflection of elastic waves from the edge of a pre-stressed plate.***

Semi-infinite plate is assumed to be uniformly stretched along the edge. Falling and reflection of flexural waves on the fixed edge of plate is considered. The possibility of reflection of slightly inhomogeneous wave is being established.

**Chebakov M.I. .... 238**

***Contact problems for layered bases in rectangular, cylindrical and spherical coordinate systems***

The problems of contact mechanics for layered elastic plane, cylindrical and spherical bases are considered. It is assumed that the layers are rigidly connected to each other and with rigid or elastic infinite foundation. It is also assumed that the free surface of the layered base interacts

with a stamp. The base of the stamp is rectangular, parabola, cylinder or sphere according to the system of coordinates. In the contact area for some problems are normal and shear stresses can be related to Coulomb's law. Normal and shear stress act on the stamp, stamp-base system is in terms of limiting equilibrium, for some problems on the stamp only normal load is applied. Through programs of analytical calculations are obtained integral equations of the first kind whose kernels are presented in explicit analytic form. The main properties of the kernels of integral equations are studied. It is shown that the numerator and denominator of the kernels symbols can be represented as a polynomial relatively the shear modules of the layers and space. The coefficients of these polynomials contain exponential and power function of the relative layers thicknesses and Poisson's ratio. Efficient schemes for solution of integral equations are proposed. The contact stresses, the size of the contact area, the relationship moving stamp and forces acting on it are calculated.

**Shekoyan A.V. ....243**

***The influence of charged dislocations in dielectric crystals on elastic wave***

The system of equations describing propagation of elastic wave in dielectric crystals, which contain charged dislocations is derived. The coefficients of absorption and of velocity of linear wave are obtained. In case of nonlinear wave, when only quadratic nonlinearities are taken into account, the formulae for variation of amplitude and phase of wave with coordinate of wave probation direction are obtained.

**Shekoyan H.G. ....248**

***To the problem of calculation of flexible gear wheels of a wave transmission by semi-momentless theory***

In the work is considered the calculation method of flexible gear wheels of a wave transmission by semi-momentless theory with taking into account of the boundary effect of the connection of a gear crown by shells. The functions of the stresses and recurrent relations for to determination of an efforts, moments and force factors in arbitrary section of shells are obtained.

**Bantsuri R., Shavlakadze N. ....251**

***The boundary-contact problem electroelasticity for piezo-electric material with inclusion***

A contact problem of the theory of electroelasticity of infinite plate from piezo-elastic material with an elastic finite inclusion of variable rigidity is considered. The problem is reduced to the system of integral differential equations with variable coefficient of singular operator. Using the method of orthogonal polynomials we obtain the dual infinite system of linear algebraic equations. We can manage to investigate the obtained system on the quasi-regularity and the method of reduction for approximate solution is developed.

**Fedotov I, Manzhurov A., Shatalov M. ....255**

***On the resonance oscillations of longitudinally vibrating growing rod***

The theory of growing structures is a new and fast developing branch of analytical mechanics basing on the theory of partial differential and integral equations. In the present paper the authors analyze qualitative properties of growing rods subjected to longitudinal vibrations. This problem is described it terms of the linear classical, Rayleigh-Love and Rayleigh-Bishop models. It is assumed that the rod is fixed at one end and free at the other end and its length is increasing. For solution of this problem we make a special change of variables which transforms the original equations into new equations with variable coefficients. It is shown that these equations are hyperbolic and possess several interesting and important properties. First of all, the amplitudes of vibration of the rod are growing with time. For example, if the rod length is increasing proportionally to time the amplitudes are also growing proportionally to time. Secondly, if a particular mode is excited it excites other modes. In this case the mechanism of the modes excitation is asymmetric, which means that the low frequency modes possess higher amplitudes compared to the higher frequency modes. The physical explanation of these phenomena is proposed and discussed.

<b>Hayroyan S., Attarpury A. ....</b>	<b>260</b>
<b><i>Creep of cementosoils during compression</i></b>	
The current investigation is devoted to the main questions of the creep of the cementosoil. The object of exploration is clayey bottom soils, which is the main element of the cementosoils, taken from the territories of Araq town of Eiqabad region of Islamic Republic of Iran. The soils of different ages - 7, 21, 28, and 60 days old and with 1.68 , 1.60 , 1.55 , 1.50 g/cm <sup>3</sup> density of soil skeleton, mixture of 93 % of soil and 7% of cement were tested on temporary compressive strength and on parameters of creep. During the test were taken into consideration the role of deformations of shrinkage in the compressive deformations. The creep deformation is taken as the differences between the full deformation and deformation of shrinkage. At the same stress increase of the age initiate decrease of creep deformations because of the rise of the strength during the time at cementosoils of different ages. As a result of the current investigation it has been established that cemntosoils of the same age under the conditions of equal relative compressive strength (independent of initial compactness) for the same periods the relative deformations of creep are practically equal to each other.	
<b>Kolesnikov A.M. ....</b>	<b>265</b>
<b><i>Thin-walled tube under radial edge load</i></b>	
This work treats the problem describing the equilibrium of a thin-walled cylindrical non-linearly elastic membrane which is subjected to an outward radial extension applied to one of its ends only. The material of membrane is hyperelastic, isotropic and incompressible. We carefully formulated the geometrically exact equations from the variational principle of minimum potential energy within the framework of nonlinear membrane theory. For Bartenev-Khazanovich and Chernykh-Shubina strain energy functions the solutions were obtained explicitly. It follows from results that these materials have limit value of stretching which depend on the material constants and the initial radius.	
<b>Manukyan G.A., Manukyan Z.K. ....</b>	<b>269</b>
<b><i>Love Waves in an FGPM Layered Structure</i></b>	
An analytical approach is used to investigate the existence and propagation behavior of surface electro-elastic Love waves in an ideally layered structure consisting of a functionally graded piezoelectric substrate and a dielectric layer. The piezoelectric substrate is polarized in the direction perpendicular to the wave propagation plane and its material parameters change continuously along the thickness direction. The dispersion equations for the existence of surface Love waves with respect to phase velocity are obtained for electrically open and shorted cases, respectively. A detailed investigation of the effects of material gradient on dispersion curve, phase velocity, group velocity, and electromechanical coupling factor is carried out. Numerical results show that material gradient significantly affects the fundamental mode of Love waves but has only negligible effects on the high order modes. Large electromechanical coupling factors could be achieved by an appropriate adjustment of gradient coefficients, which is of practical interest for designing acoustic wave devices.	
<b>Sarkisyan S. V., Melkonyan A.V. ....</b>	<b>273</b>
<b><i>Three-dimensional problem of Stoneley wave propagation</i></b>	
The question of existence of Stoneley surface wave in a three-dimensional formulation is considered. At the interface between two half-spaces are given conditions for the continuity of two displacements, the normal stress, a shear stress and the restriction of the third displacement. Characteristic equation for the phase speed of surface waves is obtained. The special cases are considered	
<b>Mokryakov V.V. ....</b>	<b>277</b>
<b><i>Study of the dependence of effective compliances of a plane with an array of round holes on array parameters</i></b>	

Regular structure materials are used in different technological processes. Therefore, investigation of the mechanical properties of these materials is of considerable practical interest. These mechanical properties are represented by the relationship between average stresses and effective strains, which can be obtained from the solution of the problem for elastic plane. In this paper, we employ the model of an elastic plane having a biaxial periodic system of round holes to analyze the dependence of the effective elastic parameters on the direction of applied loads and the geometrical characteristics of the system. Parameters anisotropy is demonstrated. The abnormally high values of Poisson's ratio, which are impossible in isotropic media but observed in some anisotropic media, are found.

**Oliferuk W., Maj M. ....282**

***Distribution of energy storage rate in area of plastic strain localization during tension***

The presented work is devoted to the new method of energy storage rate determination that allows to obtain distribution of this quantity on the surface of deformed specimen. The method is based on the experimental procedure for simultaneous measurements of temperature, and displacement distributions on the surface of tested specimen during tensile deformation. This procedure involves two complementary imaging techniques: CCD technique and infrared thermography (IRT). It has been shown experimentally that during evolution of plastic strain localization the energy storage rate in some zones of deformed specimen drops to zero and even to negative values. To interpret this result in terms of micro-mechanisms, microstructural observations using electron back scattered diffraction (EBSD) and transmission electron microscopy (TEM) were performed on specimens in different states of deformation.

**Petrov Y.V. ....287**

***Dynamic fracture and pulsed strength of continuum***

Some of the principal features of the behavior of materials subjected to impact actions are common for a number of seemingly quite different physical processes, such as dynamic fracture (starting cracks and spalling), cavitation in liquids, and electrical breakdown in solids. The examples of different physical processes considered in the paper show the fundamental importance of investigating incubation processes preparing abrupt structural changes (fracture, yielding and phase transitions) in continua under intense pulsed actions.

**Piliposyan D.G. ....292**

***Wave propagation in piezoelectric waveguides with periodic interface conditions***

The propagation of electro-magneto-elastic coupled shear waves in a piezoelectric waveguide is considered within a full system of the Maxwell's equations. Two different conditions along the guide walls have been studied in the case of periodic electrically shorted interfaces. It has been shown that under electrically shorted periodic transmission conditions the Bloch-Floquet waves exist only at acoustic frequencies. The results demonstrate the significant effect of piezoelectricity on the widths of band gaps at acoustic frequencies.

**Radchenko P., Goncharov M., Baldin I., Plevkov V., Radchenko A. ....297**

***Influence of strengthening on destruction of reinforced concrete elements of designs at dynamic loading***

This paper present results of experimental and numerical research of reinforced concrete columns and joints at short-term vertical dynamic loading, which have yielded new results of the stressedly-deformed condition and schemes of fracture.

**Sarukhanyan A.A, Varanyan G. G., Mkhitarian L. S. ....302**

***Estimation of hydraulic structures safety by comparison of strength and stability theories***

Hydraulic structures being structures of first class require meeting the safety operation conditions. To secure safety operation conditions of earthfill dams it is important to evaluate their coefficients of stability and strength factor by calculation of mode of deformation of dam body. To complete these calculations the dam body soil actual state observation has to be carried

out by experiments. Based on experimental data the mode of deformation of dam body is revealed by software modeling investigations, and safety operation conditions are evaluated. The mode of deformation is defined by nonlinear equations, which specify elasto-plastic state of dam body soil. Hydraulic structures safety and stability evaluation methods are elaborated in case of dynamic impact.

**Seyranian A.P., Mailybaev A.A..... 306**

***Paradox of Nicolai and similar effects in stability problems***

We present a general approach to the paradox of Nicolai and similar effects analyzed as a singularity of the stability boundary. We study potential systems with arbitrary degrees of freedom and two coincident eigenfrequencies disturbed by small non-conservative positional and damping forces. The instability region is obtained in the form of a cone having a finite discontinuous increase in the general case when arbitrarily small damping is introduced. This is a new destabilization phenomenon, which is similar to the effect of the discontinuous increase of the combination resonance region due to addition of infinitesimal damping. Then we reconsider the paradox of Nicolai: the instability of a uniform axisymmetric elastic column loaded by an axial force and a tangential torque. It is shown that the paradox of Nicolai is related to the conical singularity of the stability boundary which transforms to a hyperboloid with the addition of small dissipation.

**Shekyan L., Verlinski S., Shekyan A., Aidun D., Marzocca P. .... 307**

***Elasto-hydro-dynamic friction of a circular cylinder and of a cylindrical bush with elliptical cross-section***

The framework of elasto-hydro-dynamic lubrication theory [1] is discussed in this paper. The theoretical plane contact problem of a liquid friction rotating about a cylindrical axis with a fixed non-deformable elastic cylindrical bush is presented. An elliptical ring cross-sectional shape is considered for the bush. The particular case of plane contact problem, when the interaction of these bodies is in the boundary lubrication regime was discussed in [2]. The problem is reduced to a closed system of nonlinear integral equations. A complete mathematical analysis of this system is carried out on the principle of contracting mappings developed in [3] and a numerical analysis is used in the design of sliding bearings.

**Sumbatyan M.A., Ciarletta M., Zampoli V., Vaccaro M..... 3115**

***Protection of the elastic rectangular structure from seismically generated oscillations by a viscoelastic stratum***

We study the problem about harmonic oscillations of the elastic structure of rectangular shape upon a foundation, in the case when oscillations are caused by a seismic wave arriving from below. The structure is placed on the elastic half-space. In order to protect the structure from the incoming seismic waves, there is applied a special isolation from vibrations by some damping media modeled by a classical viscoelastic material of Kelvin-Voigt type.

**Valesyan S. Sh..... 320**

***Investigation of the influence of ageing on the dissipative properties of getinacks subjected to repeated static loading***

The effect of ageing on the dissipative properties of getinacks subjected to repeated static loading has been investigated. Specimens were tested at the age of 1, 4, and 8 years. The approximation of experimental data is done, and the energy of dissipation is calculated. The hysteresis characteristics have been obtained at the values of strength close to the values of its ultimate strength. Based on the investigation of getinacks manufactured by the technology of regulated thermo-pressing, this technology can be recommended for the manufacturing of appropriate products.

**Vashakmadze T. S. , Gvinchidze G. I. .... 323**

***To survey of some results from Zavriev in the viscous-elasticity***

In the first part we give the generalized form for kernels when the mathematical models for elasto-creeping materials are linear and homogeneous. The foundations of these results are some achievements gathered by groups of engineers and mathematicians from Zavriev Institute of SM & EE and Vekua IAM in the period 1968-2005 from great influences of Arutiunian's heritage. In the second part we present the method of constructing 2Dim with respect to spatial coordinates nonlinear dynamical for a mathematical models of von Kármán -Reissner-Mindlin type for viscous -elastic thin-walled structures and corresponding governing relations without any simplify hypothesis of mechanical or geometrical meanings and Volterra's principle.

**Yakushev V.L. ....328**

***The problem of intraocular pressure measurement modeling by a pneumotometric method***

The procedure of measuring the intraocular pressure by an optical analyzer is numerically simulated. The cornea and the sclera are considered as axisymmetrically deformable shells of revolution with fixed boundaries; the space between these shells is filled with incompressible fluid. Nonlinear shell theory is used to describe the stressed and strained state of the cornea and sclera. The optical system is calculated from the viewpoint of the geometrical optics. Dependences between the pressure in the air jet and the area of the surface reflecting the light into a photodetector are obtained. The shapes of the regions on the cornea surface are found from which the reflected light falls on the photodetector. First, the light is reflected from the center of the cornea, but then, as the cornea deforms, the light is reflected from its periphery. The numerical results make it possible to better interpret the measurement data. Two types of boundary conditions are compared; for each of them, the relation between the pressure in the air jet and the area of the surface from which the reflected light is recorded by the photodetector is analyzed.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Манжиров А. В.</b> Развитие идей Н.Х. Арутюняна в современной механике .....	5
<b>Манжиров А.В., Лычев С.А., Федотов И.А., Юбер С.В.</b> Нестационарная задача теплопроводности для растущего шара .....	14
<b>Маргарян Л.М.</b> Построение прикладной динамической модели микрополярных ортотропных упругих тонких балок асимптотическим методом .....	19
<b>Мартirosян А.Н., Динуц А.С., Давтян А.В.</b> Нестационарная задача залечивания трещины, движущейся с переменной скоростью .....	24
<b>Мартirosян С.Р.</b> Об устойчивости прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа .....	29
<b>Микаелян А.О.</b> Задачи устойчивости составной балки со сосредоточенной массой .....	34
<b>Минасян А.Ф.</b> Осесимметричная контактная задача с вертикальным конечным цилиндрическим разрезом .....	39
<b>Мирзоян С.Е., Акопян В.В.</b> О периодической задаче контактного взаимодействия прямоугольников со стрингерами с учётом фактора старения .....	42
<b>Михин М.Н.</b> Изгиб растущей вязкоупругой криволинейной балки .....	46
<b>Мкртчян М.М., Мкртчян М.С.</b> О решении задачи кручения упругого призматического стержня с поперечным сечением в виде неравнобокого уголка методом граничных интегральных уравнений .....	50
<b>Мовсисян Л.А.</b> К устойчивости прямоугольной пластинки и кругового кольца .....	55
<b>Мовчан А.А., Сильченко Т.Л., Климов К.Ю., Казарина С.А.</b> Сплавы с памятью формы: реономные свойства и устойчивость .....	60
<b>Морозов Н.Ф., Семенов Б.Н.</b> Избранные проблемы наномеханики .....	65
<b>Мхитарян Д.А.</b> Результаты исследований длительных деформационных процессов слоистых демпфирующих элементов антисейсмического фундамента .....	70
<b>Мхитарян С.М.</b> О контакте между бесконечным стрингером и упругой полубесконечной пластиной с вертикальной трещиной .....	74
<b>Мхитарян С.М., Токмаджян О.В.</b> О гидравлическом расчёте установившейся фильтрации жидкости в пористом многослойном грунте .....	79
<b>Надолин К.А.</b> Особенности русловых сдвиговых течений и их математические модели .....	84
<b>Назарова Л.А., Назаров Л.А., Эпов М.И., Ельцов И.Н.</b> Мультидисциплинарная модель околоскважинного пространства для описания эволюции физических полей различной природы .....	89
<b>Оганесян Э.К.</b> Напряжённо-деформированное состояние двух пересечённых под углом полос, находящихся в поле сил тяжести .....	94
<b>Оганисян Г.В.</b> Контактная задача для составной пластины с двумя разнородными полубесконечными стрингерами .....	98
<b>Оганисян Г.В., Бегларян А.А.</b> Об одной контактной задаче для упругой составной бесконечной пластины с двумя упругими конечными стрингерами .....	103
<b>Осипов М.Н., Чекменев А.Н., Щеглов Ю.Д.</b> Исследование динамических процессов на основе анализа динамики одиночного спекла .....	108
<b>Папян А.А.</b> К задаче колебаний пластинки в продольном магнитном поле .....	113
<b>Перельмутер М.Н.</b> Трещина с нелинейными связями в концевой области на границе раздела материалов .....	118
<b>Петросян Т.Л.</b> Влияние старения на диссипативные свойства бетона .....	123
<b>Пешхоев И.М.</b> О равновесии предварительно-напряжённого упругого слоя с эллиптической трещиной в срединной плоскости .....	127
<b>Погосян А.К., Бахсян А.О.</b> Определение виброустойчивости дискового тормоза автомобиля с антиблокировочной системой .....	132
<b>Погосян А.К., Меликсетян Н.Г.</b> Трибологические исследования безасбестовых фрикционных материалов .....	136
<b>Погосян А.С., Минасян Д.М.</b> Исследование задачи распространения продольных волн в проводящей пластинке при наличии продольного магнитного поля .....	140

<b>Погосян Д.М.</b> Об одной задаче устойчивости сжатой прямоугольной пластинки.....	144
<b>Попов В.Г.</b> Исследование напряжённого состояния возле двух трещин, выходящих из одной точки, при воздействии волной продольного сдвига .....	149
<b>Пряхина О.Д., Смирнова А.В., Самойлов М.В.</b> Антиплоские колебания многослойных пьезоэлектрических сред без дефектов на стыке слоёв.....	154
<b>Радаев Ю.Н.</b> Условия связанной термодинамической ортогональности в нелинейных гиперболических теориях термоупругости.....	157
<b>Радченко А.В., Радченко П.А.</b> Влияние ориентации вектора скорости ударника на разрушение анизотропной преграды при высокоскоростном взаимодействии .....	162
<b>Саакян А.В.</b> Решение контактной задачи с зонами трения и сцепления (задача Галина) методом дискретных особенностей.....	166
<b>Саргсян А.М.</b> О влиянии типа граничных условий на дуговую часть контура кругового сектора на поведение напряжений в условиях гладкого контакта на радиальных сторонах .....	171
<b>Саркисян А.А.</b> Собственные колебания круглых пластин на основе микрополярной теории с независимыми полями перемещений и вращений .....	176
<b>Саркисян К.С.</b> Контактная задача для пластины, усиленной двумя параллельными бесконечными стрингерами, один из которых кусочно-однородный.....	181
<b>Саркисян С.О.</b> Термоупругость микрополярных тонких оболочек .....	184
<b>Саркисян С.О., Фарманян А.Ж.</b> Математическая модель микрополярных ортотропных упругих слоистых тонких оболочек .....	189
<b>Сейранян С.П.</b> О парадоксе в поведении крутящего момента в прямоугольной пластине в окрестности точки приложения сосредоточенной силы .....	194
<b>Симонян А.М., Безоян Э.К.</b> Ползучесть материалов при переменной температуре .....	199
<b>Соболь Б. В., Краснощёков А. А.</b> Аналитическое решение задачи о равновесной поперечной трещине в слое, усиленном тонкой гибкой накладкой.....	204
<b>Судьенков Ю.В., Смирнов И.В.</b> Влияние характера нагружения на динамику распространения трещины в органическом стекле.....	209
<b>Терзян С.А.</b> Осесимметричная задача для двух сопряжённых полых цилиндров конечной длины.....	213
<b>Торская Е.В.</b> Определение упругих свойств тонких покрытий на основе результатов микро- и наноиндентирования .....	219
<b>Уткин А.А.</b> Структурно-временной подход к изучению откольной прочности в наносекундном диапазоне длительностей нагружения.....	224
<b>Хачатрян А.М., Товмасын А.Б.</b> Асимптотическое решение смешанной трёхмерной внутренней задачи для анизотропной слоистой пластинки .....	229
<b>Хачатрян Л.С.</b> Отражение упругих волн от кромки предварительно напряжённой пластинки .....	233
<b>Чебаков М.И.</b> Контактные задачи для слоистых оснований в прямоугольной, цилиндрической и сферической системах координат .....	238
<b>Шекоян А.В.</b> Влияние заряжённых дислокаций в диэлектрических кристаллах на упругую волну.....	243
<b>Шекян Г.Г., Геворкян В.Р.</b> К вопросу расчёта гибкого зубчатого колеса волновой передачи по полубезмоментной теории.....	248
<b>Bantsuri Revaz, Shavlakadze Nugzar</b> The boundary-contact problem electroelasticity for piezo-electric material with inclusion .....	251
<b>Fedotov Igor, Manzhirov Alexander, Shatalov Michael</b> On the Resonance Oscillations of Longitudinally Vibrating Growing rod .....	255
<b>Hayroyan S., Attarpury A.</b> Creep of Cementsoils During Compression .....	260
<b>Kolesnikov A.M.</b> Thin-Walled Tube under Radial Edge Load.....	265
<b>Manukyan G.A., Manukyan Z.K.</b> Love Waves in an FGPM Layered Structure .....	269
<b>Sarkisyan S. V., Melkonyan A.V.</b> Three-Dimensional Problem of Wave Propagation Stoneley .....	273
<b>Mokryakov V.V.</b> Study of The Dependence of Effective Compliances of a Plane with an Array of Round Holes on Array Parameters.....	277

<b>Oliferuk W., Maj M.</b> Distribution of Energy Storage Rate in Area of Plastic Strain Localization During Tension.....	282
<b>Petrov Y.V.</b> Dynamic Fracture and Pulsed Strength of Continuum.....	287
<b>Piliposyan D.G</b> Wave Propagation In Piezoelectric Waveguides With Periodic Interface Conditions .....	292
<b>Radchenko P., Goncharov M., Baldin I., Plevkov V., Radchenko A.</b> Influence of Strengthening on Destruction of Reinforced Concrete Elements of Designs at Dynamic Loading...	297
<b>Sarukhanyan A.A, Varanyan G. G., Mkhitaryan L. S.</b> Estimation of Hydraulic Structures Safety by Comparison of Strength and Stability Theories .....	302
<b>Seyranian A.P., Mailybaev A.A.</b> Paradox of Nicolai and Similar Effects in Stability Problems ....	306
<b>Shekyan L., Verlinski S., Shekyan A., Aidun D., Marzocca P.</b> Elasto-Hydro-Dynamic Friction of a Circular Cylinder and of a Cylindrical Bush with Elliptical Cross-Section .....	310
<b>Sumbatyan M.A., Ciarletta M., Zampoli V., Vaccaro M.</b> Protection of the Elastic Rectangular Structure from Seismically Generated Oscillations by a Viscoelastic Stratum .....	315
<b>Valesyan S.</b> Investigation of the Influence of Ageing on the Dissipative Properties of Getinacks Subjected to Repeated Static Loading.....	320
<b>Vashakmadze Tamaz S., Gvinchidze Guram I.</b> To Survey of Some Results from Zavriev in the Viscous-Elasticity.....	323
<b>Yakushev V.L.</b> The Problem of Intraocular Pressure Measurement Modeling by a Pneumotonometric Method .....	328
<b>CONTENTS AND ABSTRACTS</b> .....	332