ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ
НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

МЕХАНИКА 2013

труды международной школы-конференции молодых ученых,
посвященной 70-летию Национальной Академии Наук Армении

1-4 октября 2013, Цахкадзор, Армения

ЕРЕВАН – 2013

Министерство науки и образования Армении
Национальный комитет по теоретической и прикладной механики Армении
Российский национальный комитет по теоретической и прикладной механике
Институт механики НАН РА
Институт проблем механики РАН
Ереванский государственный университет
Ереванский государственный университет архитектуры и строительства
Ереванский государственный инженерный университет

Сопредседатели: д.ф.-м.н. В.Н.Акопян (Армения),
д.ф.-м.н. А.В.Манжиров (Россия)

Зам. председателя: д.ф.-м.н. А.В.Саакян (Армения),
д.ф.-м.н. М.А.Сумбатян (Россия)

Учёный секретарь: к.ф.-м.н. Л.Л.Даштоян (Армения)

Ответственный редактор: д.ф.-м.н. В.Н.Акопян

Технический редактор: к.ф.-м.н. Г.З.Геворкян

Дизайн обложки: к.ф.м.н. Д.М.Минасян

Редакторы: Ж.А.Авдалян и С.С.Овсепян

В сборник включены доклады, представленные на международную школу-конференцию молодых учёных «Механика 2013», посвященную 70-летию Национальной Академии Наук Армении.

ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ

ՄԵԽԱՆԻԿԱ 2013

Հայաստանի Գիտությունների Ազգային Ակադեմիայի 70-ամյակին նվիրված երիտասարդ գիտնականների միջազգային դպրոց - գիտաժողովի նյութեր

1-4 հոկտեմբերի 2013, Ծաղկաձոր, Հայաստան

ԵՐԵՎԱՆ – 2013

INSTITUTE OF MECHANICS
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA

MECHANICS **2013**

Proceedings of International School-Conference of Young Scientists
dedicated to the 70th anniversary of the National Academy of Sciences of Amenia

1-4 October, 2013, Tsakhkadzor, Armenia

YEREVAN – 2013

О КОНЦЕНТРАТОРАХ НАПРЯЖЕНИЙ ТИПА СТРИНГЕРОВ И ТРЕЩИН В БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЕ И ПОЛОСЕ

Агаян К.Л.

Представлены некоторые работы, относящиеся к контактным и смешанным задачам теории упругости, в которых исследуются вопросы взаимовлияния двух типов концентраторов напряжений в бесконечной пластине и полосе. Подходящим выбором взаимного расположения стрингеров и трещин иногда удается значительно уменьшить коэффициент интенсивности разрушающих напряжений на концах трещин.

Контактные и смешанные задачи теории упругости о подкреплении надрезов, полостей и трещин, содержащихся в массивных телах, при помощи различных армирующих элементов типа штампов, полос, стрингеров, включений и др., вследствие их важности для различных отраслей инженерной практики, всегда представляются актуальными. Своеобразное место в этой области теории упругости занимают контактные задачи о передаче нагрузки от тонкостенных элементов в виде стрингеров к бесконечным пластинам и полосам, ослабленных трещинами, на которые и уделено основное внимание доклада.

Для предотвращения катастрофического развития трещины и полного разрушения конструкций и сооружений, образованные или существующие в них трещины обычно подкрепляют стрингерами, препятствующими, в какой-то мере, их распространению. Работоспособность такой конструкции в значительной мере зависит как от взаимного расположения стрингеров и трещин, так и от упругих свойств контактирующих тел. Подходящим выбором взаимного расположения стрингеров и трещин, а также их характерных параметров, иногда удаётся значительно уменьшить значение коэффициента интенсивности напряжений на концах трещины.

С другой стороны, стрингеры, как и трещины, сами являются концентраторами напряжений. Поэтому эти подкрепляющие элементы, которые могут иметь также и конструктивный характер, в зависимости от их расположения могут не улучшать условия работы трещины, а наоборот – ухудшать. Вследствие чего изучение эффектов взаимовлияния указанных двух различных типов концентраторов напряжений, а также разработка методов, позволяющих более точный расчёт напряжённого состояния в порождённом ими локальном поле концентрации напряжений, и способов снижения коэффициента концентрации имеет важное практическое значение и представляет собой актуальную научную проблему.

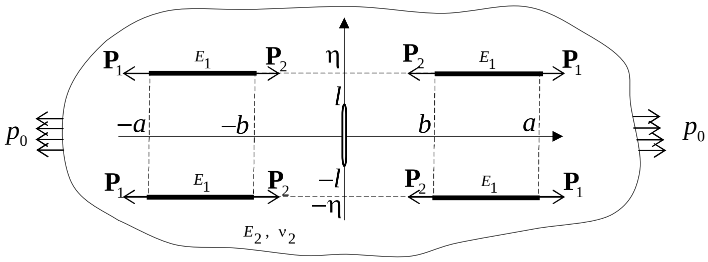
Первая работа в этой области, насколько нам известно, принадлежит Сандерсу [1]. В ней исследовано снятие напряжений в концах трещины при помощи непрерывным образом закреплённого бесконечного стрингера, перпендикулярного к трещине и симметрично простирающегося по обе её стороны. При этом предполагалось, что пластина по направлению трещины не удлиняется. В работе [2] решение аналогичной задачи для симметричной и несимметричной трещины сведено к интегральному уравнению, которое решено численно. Впоследствии, задачи о подкреплении трещины в бесконечной пластине и полосе, при иных постановках были рассмотрены другими авторами, в частности, в работах [3–12]. В этих работах задачи о передаче нагрузки от стрингеров к упругим массивным телам, расслабленным трещинами, рассматривались либо случаи бесконечного стрингера, когда пластина или полоса с конечной трещиной растягивается на бесконечности, либо случаи, когда конечный стрингер моделировался сосредоточенными силами [6,7].

Однако, во многих областях прикладной механики, например, при расчёте инженерных конструкций, подкреплённых или армированных тонкостенными элементами и ослабленных трещинами, при проектировании различных деталей летательных аппаратов, в тензометрии, в практике сварочных и клеевых соединений и др., где приходится иметь дело со стрингерами различных длин, разнообразно ориентированными относительно концов и берегов трещин, исследование необходимо проводить в иных постановках. А именно, необходимо в точной математической постановке теории упругости и в рамках принятых физических гипотез для тонкостенных элементов выяснить характерные закономерности взаимодействия стрингеров с трещинами. Для этого, при построении решений разрешающих интегральных уравнений следует точно учитывать возможные особенности, присущие искомым величинам при данном расположении стрингеров и трещин.

Некоторые конкретные задачи для бесконечной пластины и полосы в рамках указанной выше постановки были рассмотрены в [13-22]. Во всех рассмотренных задачах предполагалось, что линии расположения трещин и стрингеров перпендикулярны, и в достаточно широком диапазоне изменения физических и геометрических параметров выяснены характерные закономерности и особенности взаимовлияния стрингеров и трещин. Получены простые расчётные формулы для основных механических характеристик, таких как тангенциальные контактные напряжения, возникающие под стрингерами, осевые напряжения в них, коэффициенты интенсивности напряжений в концах стрингеров и трещин.

Не останавливаясь здесь отдельно на этих работах, что, по мере возможности, будет сделано во время доклада, на примере работы [13] представим характерные особенности решения подобных задач.

Пусть бесконечная пластина ослаблена трещиной вдоль отрезка $[-l,l]$ оси Oy , а по конечным отрезкам $[-a,a]$ линий $y=\pm¦$ подкреплена упругими стрингерами прямоугольного поперечного сечения. Берега трещины предполагаются свободными от внешних нагрузок. Стрингеры на своих концах нагружены разными по величине и противоположными по направлению силами P_1 и P_2. Кроме того, пластина на бесконечности подвержена равномерному растяжению силами интенсивности p_0 по направлению оси Ox (фиг.1).



Фиг. 1

При известных предположениях относительно стрингеров решение задачи сводится к сингулярному интегро-дифференциальному уравнению следующего типа:

$$\int_0^a \left[\frac{1}{¶-x}+K(x,¶)\right] ²(¶)\,d¶ = f(x), \quad (0<x<a)$$

при определённых граничных условиях.

Здесь $²(x)\equiv ²(x,¦)$ $\left(²(x)=-²(-x)\right)$ – неизвестные контактные напряжения, возникающие под стрингерами, а $K(x,¶)$ и $f(x)$ – известные функции [12] .

Очевидно, что изменением параметров b и ¦ можно получить различные расположения стрингеров относительно трещины.

Представим поведение контактных напряжений при некоторых из них:

1) Если $b>0$ и $¦\geq 0$, то контактные напряжения на концах стрингера имеют корневую особенность: $²(x)\sim(x-b)^{-\frac{1}{2}}$ при $x\to b+0$, $²(x)\sim(a-x)^{-\frac{1}{2}}$ при $x\to a-0$.

2) Если $b=0$ и $¦>l$, то $²(0)=0$ и $²(x)\sim(a-x)^{-\frac{1}{2}}$ при $x\to a-0$.

3) Если $b=0$ и $0\leq ¦<l$, то возможны следующие две постановки задачи:

а) стрингеры с обеих сторон доходят до берегов трещины и не взаимодействуют между собой (разорванный стрингер);

б) стрингеры проходят через трещину (цельный стрингер). В этом случае P_2 представляет собой неизвестное осевое усилие в сечении $\left(x=0;\ y=\pm¦\right)$ стрингеров и определяется из дополнительного условия $u\left(0,\pm¦\right)=0$, где $u\left(x,y\right)$–перемещение точек пластины по направлению оси Ox.

Метод решения уравнения (1) в последних двух случаях существенно зависит от поведения ядра $K\left(x,¶\right)$ около точки $x=¶=0$, поскольку в этой точке оно имеет неподвижную особенность. При этом

$$²\left(x\right)\sim x^{-¢}\ \ (0<¢<1) \text{ при } x\to 0,\ ²\left(x\right)\sim(a-x)^{-\frac{1}{2}} \text{ при } x\to a-0,$$

а показатель ¢ определяется из известного трансцендентного уравнения [13].

4) Если $b=0$ и $¦=l$, т.е. стрингер проходит через вершину трещины, поведение контактных напряжений совпадает с предыдущим случаем, но показатель особенности ¢ определяется из уравнения

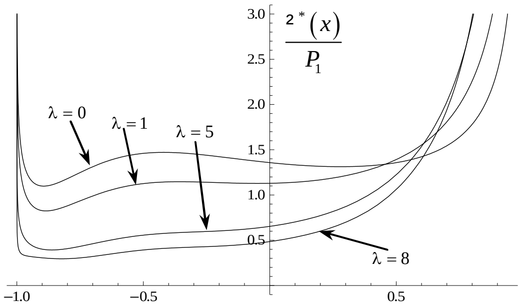
$$\cos ®¢-\frac{(1+¬)^2 ¢^2-4}{(3-¬)(1+¬)}=0.$$

Однако, следует иметь в виду, что напряжённое состояние в окрестности концов стрингеров очевидно двухосное. Следовательно, применяя модель «контакта по линии» для контактных касательных напряжений вплоть до концов стрингеров, мы допускаем определённую неточность, которая, в свою очередь, приводит к несогласованности с действительной физической задачей. Это обстоятельство приобретает бо́льшую значимость в том случае, когда стрингер проходит через конец трещины. Так что, при исследовании подобных задач следует применять, по мере возможности, более точные и адекватные с физической задачей подходы.

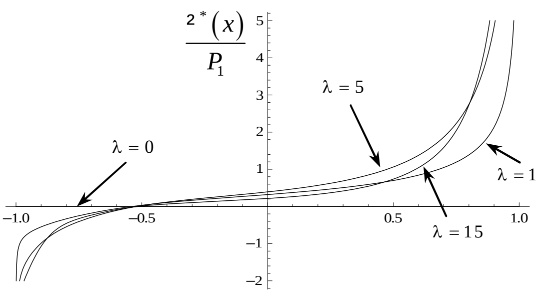
В конце приведём два результата численной реализации указанной выше задачи в случае $¦=0$ и $b=0$, т.е. при наличии лишь одного стрингера, приваренного к пластине на конечном отрезке $\left[-a,a\right]$, показывающие изменение основных характерных механических величин в зависимости от параметров задачи.

Расчёты проводились при постоянном значении коэффициента Пуассона $¬=0.3$ и различных значениях, известного [13], параметра ª и отношения l/a. Предполагается, что растяжение на бесконечности отсутствует $\left(p_0=0\right)$.

На фиг.2 и 3 показаны распределения контактных напряжений соответственно под разорванным и цельным стрингером при $l/a=0.5$ и различных значениях параметра ª.



Фиг.2. Разорванный стрингер



Фиг.3. Цельный стрингер

В табл. 1 и 2 приведены значения коэффициента концентрации напряжений в вершине трещины, осевого усилия в среднем сечении в случае цельного стрингера и перемещения средней точки берега трещины в случае, когда имеем разорванный стрингер.

Таблица 1. Цельный стрингер

l/a	0.3		0.5		1		2	
a	$\frac{ahK_1}{P_1\sqrt{\text{®}l}}$	$\frac{P_2}{P_1}$	$\frac{ahK_1}{P_1\sqrt{\text{®}l}}$	$\frac{P_2}{P_1}$	$\frac{ahK_1}{P_1\sqrt{\text{®}l}}$	$\frac{P_2}{P_1}$	$\frac{ahK_1}{P_1\sqrt{\text{®}l}}$	$\frac{P_2}{P_1}$
0.5	1.392	0.772	1.347	0.787	1.251	0.820	1.133	0.860
1	1.629	0.628	1.563	0.652	1.415	0.701	1.226	0.762
4	2.118	0.302	2.031	0.337	1.801	0.409	1.473	0.501
8	2.264	0.186	2.182	0.221	1.954	0.292	1.580	0.385

Таблица 2. Разорванный стрингер

l/a	0.3		0.5		1		2	
a	$\frac{ahK_1}{P_1\sqrt{\text{®}l}}$	$\frac{4\text{«}h}{P_1}u_0$	$\frac{ahK_1}{P_1\sqrt{\text{®}l}}$	$\frac{4\text{«}h}{P_1}u_0$	$\frac{ahK_1}{P_1\sqrt{\text{®}l}}$	$\frac{4\text{«}h}{P_1}u_0$	$\frac{ahK_1}{P_1\sqrt{\text{®}l}}$	$\frac{4\text{«}h}{P_1}u_0$
0	4.712	3.814	3.676	4.698	2.704	6.630	1.985	9.672
0.5	4.469	3.473	3.562	4.353	2.677	6.275	1.982	9.293
1	4.276	3.203	3.469	4.077	2.653	5.987	1.980	8.985
4	3.636	2.314	3.150	3.145	2.567	4.993	1.971	7.908
8	3.293	1.826	2.969	2.618	2.514	4.413	1.965	7.268

ЛИТЕРАТУРА

1. Sanders G.J. Ir. Effect on a Stringer on the Concentration one to a Crack in a Thin Sheet. NASA Techn. Rep. –13.1959.
2. Грейф Р., Сэндерс-мл. Влияние стрингера на распределение напряжений в листе с трещиной.// Прикл. мех. Тр. Америк. о-ва инж.–мех., сер. Е. 1965. Т.32. №1. С.66-74.
3. Bloom J.M. The Effect of a Riveded Stringer on the Stress in a Sheet with a Crack or a Cutout. ONR Techn.Rept. №20, Harvard Univ., June 1964.
4. Блум Дж., Сэндерс-мл. Влияние приклёпанного стрингера на распределение напряжений в листе с трещиной.// Прикл. мех. Труды ASME, сер.Е. 1966. №3. С.97-106.
5. Каландия А.И. К задаче об усилении пластинок. //Труды Тбил. мат. ин-та АН Груз.ССР. 1967. Т.33. №3.
6. Морозова Е.А., Партон В.З. О влиянии подкрепляющих рёбер на распространение трещин. //ПМТФ. 1961. №5. С.112-114.
7. Черепанов Г.П., Мурсалимов В.М. О воздействии рёбер жёсткости на развитие трещины. //Изв. АН Аз.ССР. Сер. физ-тех. и мат.наук. 1969. №1.

8. Жоржолиани Г.Т. Влияние стрингера на распределение напряжений около разреза. //Сообщения АН Груз.ССР. 1974. №3.
9. Каландия А.И. Математические методы двумерной упругости. М.: Наука, 1973. 304с.
10. Isida, M. On the determination of stress intensity factors for some common structural problems. // Eng. Fract. Mech., 2 (1970). Pp. 61–79.
11. Саркисян В.Г., Хачикян А.С. Плоское деформированное состояние предварительно напряжённого прямоугольника. //Изв.АН Арм.ССР. Сер. техн. наук. 1973. №1. С.3-10.
12. Лакшмикантам К. Поперечная трещина в ортотропной полосе с боковыми рёбрами жёсткости.// Прикл. мех. Труды амер. общ. инж.-мех., сер Е. 1973. №1. С.236-241.
13. Агаян К.Л. Об одной контактной задаче для бесконечной пластины с трещиной, усиленной упругими накладками. //Изв.АН Арм.ССР. Механика. 1976. Т.29. №4. С.3-15.
14. Агаян К.Л. Об одной периодической задаче контактного взаимодействия стрингеров с упругой пластиной, расслабленной трещинами. //Докл. АН Арм.ССР. 1977. Т.65. №2. С.115-121.
15. Мхитарян С.М., Агаян К.Л. Об одной периодической контактной задаче для упругой полосы, расслабленной трещинами и усиленной упругими стрингерами. //Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1978. Т.31. №3. С.3-17.
16. Агаян К.Л. Взаимодействие стрингеров с бесконечной пластиной, ослабленной двоякопериодической системой трещин. //В сб.: «Механика деформируемых тел и конструкций». Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1985. С.26-32.
17. Агаян К.Л. Контактная задача для полуплоскости с трещиной, усиленной конечным или бесконечным стрингером. //Тезисы докл. III Всесоюз. конф. «Смешанные задачи механики деформируемого тела». Харьков: 1985. С.127.
18. Агаян К.Л., Саркисян В.Г. Контактная задача упругой плоскости с трещинами, армированной бесконечными включениями. //В сб.: «Механика деформируемого твёрдого тела». Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1993. С.63-78.
19. Агаян К.Л., Члигарян Г.С. Контактая задача о взаимодействии тонкостенных стрингеров с бесконечной пластиной, ослабленной полубесконечной трещиной. //Труды II международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды». Дилижан, Армения, 2010. С.38-42.
20. Акопян В.Н., Мирзоян С.Е., Мхитарян С.М. О некоторых вопросах контактного взаимодействия концентраторов напряжения типа накладок и разрезов. // Тезисы докл. научной конф., посвящённой 65-летию кафедры механики ЕрГу.- Ереван: 1995. С.36.
21. Мхитарян С.М. О контакте между бесконечным стрингером и упругой полубесконечной пластиной с вертикальной трещиной. //Труды межд. конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды», посвящённой 100-летию академика НАН Армении Н.Х.Арутюняна. Ереван: 2012. С.74-78
22. Соболь Б.В., Краснощёков А.А. Аналитическое решение задачи о равновесной поперечной трещине в слое, усиленном тонкой гибкой накладкой. //Труды межд. конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды», посвящённой 100-летию академика НАН Армении Н.Х.Арутюняна. Ереван: 2012. С.204-208.

Сведения об авторе:

Агаян Каро Леренцович – доктор физ-мат.наук, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении,
E-mail: karo.aghayan@gmail.com

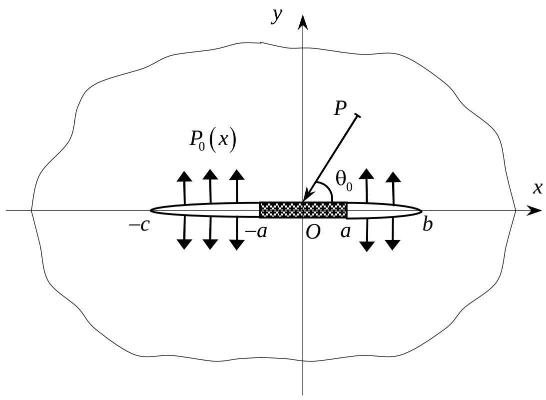
ПЛОСКО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ОРТОТРОПНОЙ ПЛОСКОСТИ С РАЗРЕЗАМИ И АБСОЛЮТНО ЖЁСТКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Акопян В.Н., Даштоян Л.Л.

Изучению плоско-деформированного состояния упругой ортотропной плоскости с дефектами посвящено огромное количество работ отечественных и зарубежных исследователей. В частности, в монографии [1] исследовано плоско-деформированное состояние упругой ортотропной плоскости с дефектами на одном из главных направлений ортотропии. На основе этих результатов в настоящей работе построено точное решение одной смешанной задачи для ортотропной плоскости с абсолютно жёстким включением и двумя разрезами на одном из главных направлений ортотропии, когда разрезы составляют непосредственное продолжение включения от его обоих концов.

1. Постановка задачи и вывод определяющих уравнений

Пусть ортотропная упругая плоскость, отнесённая к декартовой системе координат Oxy, направления осей которой совпадают с главными направлениями ортотропии материала, на интервале $(-a, a)$ оси Ox усилена абсолютно жёстким тонким включением и по линии $L = (-c, -a) \cup (a, b)$ расслаблена двумя разрезами. Будем считать, что плоскость деформируется под воздействием распределённых нормальных нагрузок $P_0(x)$, действующих на берегах разрезов и сосредоточенной нагрузки P, действующей на включение в точке с координатой x_0 и составляющей угол γ_0 с осью координат Ox (фиг.1).



Фиг.1

Ставится задача: определить контактные напряжения, действующие под включением, коэффициент интенсивности напряжений в концевых точках разреза $x = -c$ и $x = b$, а также раскрытие разрезов. Мысленно разделим плоскость на верхнюю и нижнюю полуплоскости и снабдим индексами "+" и "-" компоненты тензора напряжений и смещений соответствующих полуплоскостей. Тогда, сохранив все обозначения работ [1-2], поставленную задачу математически можно сформулировать в виде следующей граничной задачи:

$$
\begin{aligned}
&\sigma_y^{(+)}(x,+0)=\sigma_y^{(-)}(x,-0)\\
&\tau_{xy}^{(+)}(x,+0)=\tau_{xy}^{(-)}(x,-0) \qquad \left(x\notin(-c,b)\right)\\
&U_+(x,+0)=U_-(x,-0)\\
&V_+(x,+0)=V_-(x,-0)
\end{aligned}
\tag{1.1a}
$$

$$
\begin{aligned}
&U_\pm(x,0)=0 && (-a<x<a)\\
&V_\pm(x,0)=\gamma x+\delta && (-a<x<a)\\
&\sigma_y^{(\pm)}(x,0)=-P_0(x) && (x\in L)\\
&\tau_{xy}^{(\pm)}(x,0)=0 && (x\in L)
\end{aligned}
\tag{1.1b}
$$

Известно [1-2], что задача (1.1) эквивалентна задаче Римана для двух функций

$$
\begin{cases}
\Omega_1^+(x)=\nu_1(x)\Omega_2^-(x)+F_1(x)\\
\Omega_2^+(x)=\nu_2(x)\Omega_1^-(x)+F_2(x)
\end{cases}
\qquad (-c<x<b)
\tag{1.2}
$$

где $\Omega_j^\pm(x)\ (j=1,2)$ – граничные значения аналитических функций

$$
\Omega_j(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-c}^{b}\frac{\chi(s)+k_jW'(s)}{s-z}ds,\quad \left(k_j=\frac{2(-1)^{j+1}c_1}{\alpha-2(-1)^j a_1}\right)\quad (j=1,2)
\tag{1.3}
$$

соответственно на верхнем и нижнем берегах интервала $(-c,b)$

$$
\nu_1(x)=\begin{cases}\nu, & x\in L\\ -1, & (-a<x<a)\end{cases},\qquad
\nu_2(x)=\begin{cases}1/\nu, & x\in L\\ -1, & (-a<x<a)\end{cases},
$$

$$
F_1(x)=\begin{cases}-(1+\nu)P_0(x), & x\in L\\ i\gamma_*, & (-a<x<a)\end{cases},\qquad
F_2(x)=\begin{cases}\dfrac{(1+\nu)}{\nu}P_0(x), & x\in L\\ i\gamma_*, & (-a<x<a)\end{cases}
$$

постоянные a_1, c_1, b_1 и ν даются формулами, приведёнными в [1-2], а ¥$_* =$ ¥ $/\, b_1$ – неизвестная постоянная, описывающая поворот включения. Функции же $W'(x)$ и ¡(x) – комплексные комбинации производных от скачков смещений $U(x)$, $V(x)$ и скачков напряжений $\sigma(x)$, $\tau(x)$, записываются в следующем виде [1-2]:

$$
\begin{aligned}
&W'(x)=U'(x)+i\alpha V'(x),\quad \chi(x)=\sigma(x)-i\alpha\tau(x),\\
&\sigma_y^{(+)}(x,+0)-\sigma_y^{(-)}(x,-0)=\sigma(x),\quad \tau_{xy}^{(+)}(x,+0)-\tau_{xy}^{(-)}(x,-0)=\tau(x)\quad (-a<x<a),\\
&U_+(x,+0)-U_-(x,-0)=U(x),\quad V_+(x,+0)-V_-(x,-0)=V(x)\qquad (x\in L)
\end{aligned}
$$

При этом должны быть удовлетворены также условия непрерывности смещений в концевых точках разреза и условия равновесия включения:

$$\int_{-c}^{-a} W'(x)\,dx = 0, \quad \int_{a}^{b} W'(x)\,dx = 0, \quad \int_{-a}^{a} \text{¡}\,(x)\,dx = P^*,$$
$$\operatorname{Re}\int_{-a}^{a} x\cdot \text{¡}\,(x)\,dx = x_0 P \sin \mathrm{g}_0, \quad \left(P^* = P\left(\sin \mathrm{g}_0 - i\text{~}\cos \mathrm{g}_0\right)\right). \tag{1.4}$$

2.Решение системы определяющих уравнений

Общее решение задачи Римана (1.2) запишем в следующем виде [3]:

$$\Omega_j(z) = \mathrm{X}_j(z)\left\{\frac{1}{4\text{®}i}\int_{-c}^{b}\frac{\Phi_0(s)\,ds}{(s-z)} - \frac{(-1)^j B(z)}{4\text{®}i}\int_{-c}^{b}\frac{\Phi_1(s)\,ds}{B^+(s)(s-z)} + \right.$$
$$\left. +(-1)^{j+1}\sqrt{z^2-a^2}\left[C_1\exp\left((-1)^{j+1}\Gamma(z)/2\right) + C_2\exp\left((-1)^j\,\Gamma(z)/2\right)\right] + C_3\right\}, \tag{2.1}$$

где

$$\mathrm{X}_j(z) = (-1)^{j+1}\exp\left[(-1)^{j+1}\Gamma_0(z)/2\right]/\sqrt{\mu(z)},$$

$$\Phi_j(x) = \frac{F_1(s)}{\mathrm{X}_1^+(s)} + (-1)^j\frac{F_2(s)}{\mathrm{X}_2^+(s)}, \qquad (j = 0{,}1)$$

$$\Gamma_0(z) = \ln\text{¬}\left[1 - \frac{B(z)}{\text{®}i}\int_{-a}^{a}\frac{dt}{B^+(t)(t-z)}\right], \quad \Gamma(z) = \text{®}i\Gamma_0(z)/\ln\text{¬},$$

$$\left(B(z) = \sqrt{(z+c)(z-b)},\ \mu(z) = B(z)\sqrt{z^2-a^2}\right),$$

C_j $(j = 1-3)$ – неизвестные постоянные, подлежащие определению. Для определения этих постоянных заметим, что используя представления (1.3) и (2.1) и условия (1.4) для функций $\Omega_j(z)$ $(j = 1{,}2)$ при больших значениях z, справедливы следующие две формулы [4]:

$$\Omega_j(z) = -\frac{P^*}{2\pi i z} + O\left(1/z^2\right), \quad \Omega_j(z) = \frac{C_1 e^{(-1)^{j+1}\alpha_1 b_*} + C_2 e^{(-1)^{j+1}\alpha_2 b_*}}{z} + O\left(1/z^2\right) \quad (j = 1{,}2)$$

$$\left(\begin{array}{l}\alpha_j = \dfrac{\ln\nu - (-1)^j\pi i}{2},\ b_* = \dfrac{1}{4}\left[\arcsin\left(\dfrac{a-p}{k}\right) + \arcsin\left(\dfrac{a+p}{k}\right)\right], \\ \qquad\quad \left(p = (b-c)/2, \quad k = (b+c)/2\right).\end{array}\right)$$

Сравнивая эти два представления, найдём

$$C_1 = -\frac{P^*\operatorname{sh}(\alpha_2 b_*)}{2\pi\sin(\pi b_*)}, \quad C_2 = \frac{P^*\operatorname{sh}(\alpha_1 b_*)}{2\pi\sin(\pi b_*)} \tag{2.2}$$

Для определения постоянных C_3 и γ_* используем первое и последнее соотношения из (1.4). С этой целью заметим, что [1-2]

$$W'(x) = \frac{\Omega_1^+(x) - \Omega_2^+(x)}{k_1}, \qquad (x \in L) \tag{2.3}$$

$$\chi(x) = \Omega_1^+(x) - \Omega_2^+(x), \qquad (-a < x < a) \tag{2.4}$$

Теперь, по этим формулам вычислим производную от скачка смещений и скачок напряжений. Получим

$$\begin{aligned} &k_1 W'(x) = \gamma_* N_1^*(x) + iC_3 N_2^*(x) - iQ_1^*(x), \quad (x \in L) \\ &\chi(x) = \gamma_* M_1^*(x) + iC_3 M_2^*(x) - iQ_2^*(x), \qquad (-a < x < a) \end{aligned} \tag{2.5}$$

Здесь введены обозначения

$$N_1^*(x) = \frac{\cos(p_1(x))}{\text{®}\,\mathrm{sgn}(x)\sqrt{\mu(x)}} \int_{-a}^{a} \frac{\sqrt{\mu(s)}\sin(p_1(s))}{(s-x)} ds - \frac{\sqrt{\neg}\,\sin(p_1(x))}{\text{®}\,\mathrm{sgn}(x)\sqrt{x^2-a^2}} \int_{-a}^{a} \frac{\sqrt{a^2-s^2}\cos(p_1(s))}{(s-x)} ds,$$

$$N_2^*(x) = \frac{2\sqrt{\neg}\,\cos(p_1(x))}{\mathrm{sgn}(x)\sqrt{\mu(x)}}, \quad M_2^*(x) = -\frac{2\sin(p_1(x))}{\sqrt{\mu(x)}},$$

$$M_1^*(x) = \frac{\sin(p_1(x))}{\text{®}\sqrt{\mu(x)}} \int_{-a}^{a} \frac{\sqrt{\mu(s)}\sin(p_1(s))}{(s-x)} ds + \frac{\cos(p_1(x))}{\text{®}\sqrt{a^2-x^2}} \int_{-a}^{a} \frac{\sqrt{a^2-s^2}\cos(p_1(s))}{(s-x)} ds,$$

$$Q_1^*(x) = -\frac{(1+\neg)}{\text{®}\,\mathrm{sgn}(x)} \left\{ \frac{\cos(p_1(x))}{\sqrt{\mu(x)}} \int_L \frac{\sqrt{\mu(s)}\cos(p_1(s))P_0(s)}{\mathrm{sgn}(s)(s-x)} ds - \right.$$

$$\left. - \frac{\sin(p_1(x))}{\sqrt{x^2-a^2}} \int_L \frac{\sqrt{s^2-a^2}\cos(p_1(s))P_0(s)}{\mathrm{sgn}(s)(s-x)} ds \right\} + \sum_{j=1}^{2} \frac{(-1)^j \sqrt{\neg}\,C_j \cos(\sim_j p_1(x)/\sim_3)}{\sqrt{(c+x)(b-x)}},$$

$$Q_2^*(x) = \frac{i(1+\neg)}{\text{®}\sqrt{\neg}} \left\{ \frac{\sin(p_1(x))}{\sqrt{\mu(x)}} \int_L \frac{\sqrt{\mu(s)}\cos(p_1(s))P_0(s)}{\mathrm{sgn}(s)(s-x)} ds - \right.$$

$$\left. - \frac{\cos(p_1(x))}{\sqrt{a^2-x^2}} \int_L \frac{\sqrt{s^2-a^2}\sin(p_1(s))P_0(s)}{\mathrm{sgn}(s)(s-x)} ds \right\} - \sum_{j=1}^{2} \frac{2iC_j \cos(\sim_j p_1(x)/\sim_3)}{\sqrt{(c+x)(b-x)}},$$

$$p_1(x) = \frac{B^+(x)}{4\text{®}} \int_0^a \frac{dt}{B^+(t)(t-x)} = -\frac{1}{4\text{®}} \ln\left| \frac{(x+a)}{(x-a)} g(x) \right|,$$

$$g(x) = \frac{k^2 + (a-p)(p-x) + \sqrt{l_1(x+c)(b-x)}}{k^2 - (a+p)(p-x) + \sqrt{l_2(x+c)(b-x)}},$$

$$\sim_3 = \ln\neg/2; \quad \left(l_1 = (a+c)(b-a), \; l_2 = (c-a)(b+a)\right),$$

$$\mu(x) = \sqrt{\left|(x+c)(b-x)(a^2-x^2)\right|}.$$

Далее, удовлетворим первому и последнему из условий (1.4). В итоге для определения постоянных C_3 и $¥_*$ придём к системе уравнений:

$$\begin{cases} ¥_* N_1 + iC_3 N_2 = iQ_1 \\ \operatorname{Re}\left[¥_* M_1 + iC_3 M_2 \right] = \operatorname{Re}\left[Q_2 \right] \end{cases} \tag{2.6}$$

где

$$N_j = \int_{-c}^{-a} N_j^*(x)\,dx,\ M_j = \int_{-a}^{a} xM_j^*(x)\,dx,\quad Q_1 = \int_{-a}^{a} Q_1^*(x)\,dx,\ Q_2 = x_0 P \sin g_0 - \int_{-a}^{a} xQ_2^*(x)\,dx.$$

Отметим также, что в случае, когда сосредоточенная нагрузка на включение отсутствует, то $C_j \equiv 0\ (j=1,2)$. Следовательно, используя действительность чисел N_j, M_j, $Q_1\ (j=1,2)$ и мнимость числа Q_2, систему (2.4) можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} ¥_* N_1 - N_2 \operatorname{Im}\left[C_3 \right] = 0 \\ ¥_* M_1 - M_2 \operatorname{Im}\left[C_3 \right] = 0 \\ N_2 \operatorname{Re}\left[C_3 \right] = Q_1 \end{cases}$$

откуда найдём

$$¥_* = \operatorname{Im}\left[C_3 \right] = 0, \quad \operatorname{Re}\left[C_3 \right] = Q_1 / N_2.$$

Таким образом, определив из системы уравнений (2.6) постоянные C_3 и $¥_*$ по формулам (2.3)-(2.4), найдём производные от скачка смещений и скачок напряжений. Кроме того, по формулам, приведённым в [1-2], легко определим также контактные напряжения, действующие под включением и коэффициенты интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hakobyan V.N. Stress concentration near defects in homogeneous and compound bodies.// LAP LAMBERT Academic Publishing, Germany 2011, 148pp.
2. Hakobyan V., Simonyan A. Mixed problem for orthotropic plane with crack // Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute Vol. 156 (2011), pp. 37-48.
3. Черепанов Г.П. Решение одной линейной краевой задачи Римана для двух функций и ее приложение к некоторым смешанным задачам плоской теории упругости. // ПММ. 1962. Т.26. Вып.5. С.907-912.
4. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.708с.

Сведения об авторах:

Акопян В.Н. – д.ф.-м.н., директор Института механики НАН Армении,
e-mail: vhakobyan@sci.am

Даштоян Л.Л. – к.ф.-м.н., учёный секретарь Института механики НАН Армении,
e-mail: Lilit_Dashtoyan@mechins.sci.am

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ПРОЦЕССА РАЗРУШЕНИЯ ОКСИДНЫХ И ФТОРОКСИДНЫХ СТЁКОЛ

Князян Н.Б.

Экспериментальными исследованиями выявлено, что на микротвёрдость оксифторидных стёкол свой вклад вносят не только температура стеклования и степень заполнения трёхмерного каркаса стекла, но и энергия отдельных связей элементов каркаса. При изменении соотношения компонентов в широких пределах, приводящем к существенным структурным изменениям, микротвёрдость не может всегда являться линейной функцией состава.

При хрупком разрушении твёрдых тел, вплоть до разрушения, наблюдается деформация, состоящая из упругой и замедленно упругой части, а необратимая деформация (вязкая или «пластичная») практически отсутствует. У неорганических стёкол предел текучести очень высок, независимо от того, имеются микротрещины или нет. Стёкла с низкой прочностью разрушаются хрупко вследствие того, что разрушающее напряжение достигается раньше, чем предел текучести.

В процессе эксплуатации стеклообразные материалы подвергаются различным механическим воздействиям в широком интервале температур и основной причиной, препятствующей более широкому их применению, является хрупкость и низкая стойкость к ударным воздействиям. Однако, сравнительная легкоплавкость и высокие значения микротвердости стекол определяют возможность спаивания различных по физико-химическим свойствам материалов, получения поверхностей высокой чистоты и прозрачности с высокой устойчивостью к истиранию и т.п. В этих условиях особое значение приобретают исследования микротвёрдости стёкол новых систем, перспективных для получения спаев разнородных материалов (стекло, керамика, металлы) и не использовавшихся ранее для этих целей.

При хрупком разрушении стёкол, вплоть до разрушения, наблюдается деформация, состоящая из упругой и замедленно упругой частей, а необратимая “пластичная” отсутствует. У неорганических стёкол предел текучести очень высок, независимо от того, имеются микротрещины или нет, а стекла, содержащие высокие концентрации катионов-модификаторов, разрушаются хрупко, вследствие того, что разрушающее напряжение достигается раньше, чем предел текучести [1]. Практически все исследованные стёкла имеют микротвёрдость выше 2000 МН/м^2 и, согласно [1], механизм их разрушения должен быть отличен от механизма хрупкого разрушения. Маршем в работе [2] приведены прямые доказательства появления остаточных деформаций в стёклах при введении индентора, а “пластические” деформации стекла, возникшие при вдавливании, частично или полностью исчезают при нагревании. Исследование микротвёрдости стёкол статическим методом с помощью пирамиды Виккерса позволило сравнить полученные результаты с данными микротвёрдости стёкол других систем, в том числе, фторсодержащих фосфатных и германатных. Для уменьшения влияния поверхностных дефектов и напряжённых областей стекла на воспроизводимость результатов образцы были отлиты одинакового размера в виде призм размерами 20х20х10мм и отжигались (с огневой полированной поверхностью) при температуре 15-20^0 ниже температуры стеклования.

Зависимости микротвёрдости от состава исследованных стёкол представлены на рис.1-2. При одновременном присутствии в стекле двух катионов с высокой напряжённостью поля первые добавки фторида (до 20мол.%) приводят к увеличению Hv на $50 \div 100$ МН/м^2, далее значения микротвёрдости стёкол монотонно снижаются. Наиболее сильно проявляется характер уменьшения микротвердости стекол при введении фторидов стронция, бария и свинца, т.е. существует определённая связь между величиной вводимого катиона (силой поля) и значением микротвёрдости. Высокими значениями микротвёрдости в алюмооксидных системах отличаются магниевые стёкла. Повышенные значения Hv магниевых стёкол, по сравнению с аналогичными кальциевыми, стронциевыми и бариевыми стеклами, отмечены также в [3]. Прочность химических связей, степень связности структуры, плотность упаковки должны оказывать такое же влияние на микротвёрдость, какое они оказывают на температуру стеклования, вязкость и т.д. Как видно из приведённых зависимостей, введение Al_2O_3 приводит к монотонному увеличению микротвёрдости, свидетельствуя о постоянстве координационного

числа алюминия, и при содержании $40 \div 50$мол.% достигает до $6500 \div 6700$ МН/м^2, приближаясь к значениям микротвёрдости алюмосиликатных стекол.

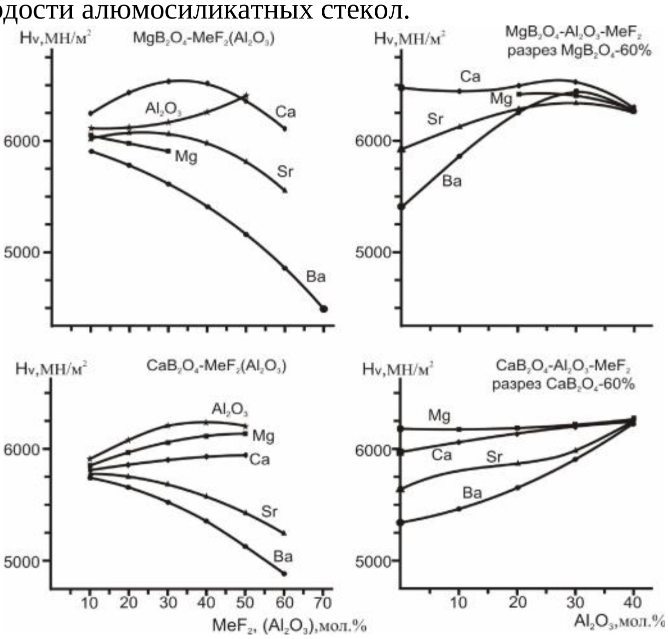


Рис.1 Зависимость микротвёрдости стёкол систем MeB_2O_4-Al_2O_3-MeF_2 (Me- Mg,Ca,Sr,Ba) от состава

Прочность химических связей, степень связности структуры, плотность упаковки должны оказывать такое же влияние на микротвёрдость, какое они оказывают на температуру стеклования, вязкость и т.д. Как видно из приведённых зависимостей, введение Al_2O_3 приводит к монотонному увеличению микротвердости, свидетельствуя о постоянстве координационного числа алюминия, и при содержании $40 \div 50$мол.% достигает до $6500 \div 6700$ МН/м^2, приближаясь к значениям микротвёрдости алюмосиликатных стекол. Высокие концентрации MeO в двойных алюмоборатных стеклах способствуют образованию более высокой степени связности стеклообразной сетки, увеличению силы связи катиона модификатора с кислородом и упрочнению структуры стекла, проявляющейся в повышении не только вязкости и температуры стеклования, но и микротвёрдости. В тройных системах, при постоянном содержании боратов замена фторидов на оксид алюминия увеличивает значения Hv с образованием слабовыраженного максимума при содержании $20 \div 30$мол.% Al_2O_3 (рис.1), что связывается с увеличением компактности упаковки структурных групп в структуре стёкол. Среди фторсодержащих бинарных систем высокие значения микротвердости стёкол магниево- и кальциевоборатных систем связаны, по-видимому, с более выгодным распределением ионов разных размеров в каркасе стекла. Как видно из зависимостей, между величиной микротвёрдости и силовым полем (ионным радиусом) вводимого катиона имеется вполне определённая связь – с ростом радиуса вводимого катиона значения микротвёрдости стёкол увеличиваются. Обращает на себя внимание тот факт, что эта закономерность сохраняется при постоянном содержании основного стеклообразующего оксида B_2O_3 и вклад Al_2O_3 в величину Hv становится очевидной [4,5]. Одной из основных причин резкого понижения величины микротвёрдости стёкол с PbF_2 в системах с ZnO, CdO и PbO является деполимеризация каркаса стекол с увеличением количества фторида. Указанные оксиды по их способности увеличивать микротвёрдость можно расположить в следующий ряд ZnO>CdO>PbO [6]. При малых концентрациях фторида свинца и одновременном присутствии в стекле двух оксидов уменьшение микротвёрдости небольшое. При дальнейшем замещении оксида бора на PbF_2 и образовании более “открытой” структуры облегчается перемещение структурных единиц в среде при вдавливании индентора. В средней области составов систем MeB_2O_4-PbF_2(Me-Zn,Cd,Pb) при концентрации PbF_2 более 40мол.% наблюдается резкое снижение микротвёрдости, что объясняется образованием пространственной структуры, где определяющими в анионном каркасе стекол являются группировки $Pb(O,F)_4$ с низкой энергией единичных связей.

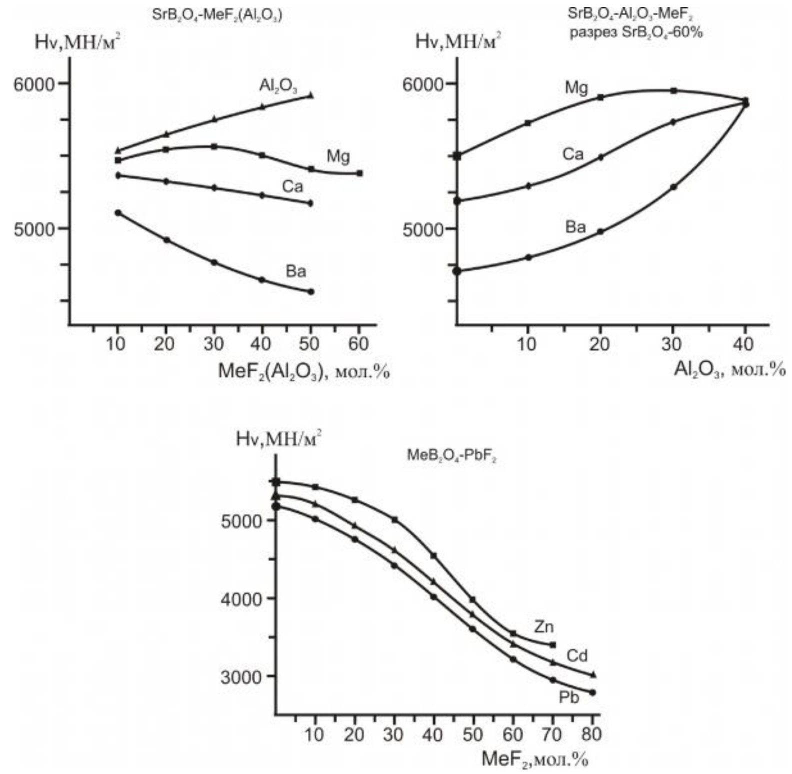


Рис.2 Зависимость микротвёрдости стёкол систем MeB_2O_4-PbF_2 (Me-Zn,Cd,Pb) от состава

Следовательно, низкие значения микротвердости свинцовых стёкол объясняются тем, что процесс вдавливания, как и вязкость, лимитируются наличием наиболее ослабленных связей свинца и фтора.

Физические свойства стекол во многом определяются структурой, которая фиксируется в области стеклования, и поэтому во многих работах на основе классических представлений “дырочной” теории жидкостей оцениваются прочностные характеристики стёкол. Под такими свойствами понимаются свободные микрообъёмы, которые возникают и исчезают в стеклообразующем расплаве из-за тепловых флуктуаций и фиксируются в стёклах при температуре стеклования.

Для стёкол различных систем объём микропустот изменяется в интервале $5 \div 10$ Å^3, а энергия образования микропустот ~$4{,}2 \div 50$ кДж/моль [1,7]. Рассматривая $p_k = E_0 / V^*$ уравнение (E_0 – энергия образования микропустот объёмом V^*), сходное с уравнением Ван-дер-Ваальса, авторы указанных работ p_K рассматривают как “внутреннее давление” вещества, обусловленное взаимным притяжением кинетических единиц, а, следовательно, как мера прочностных характеристик аморфного вещества. Под микропустотами понимаются свободные микрообъёмы, которые возникают и исчезают в стеклообразующем расплаве из-за тепловых флуктуаций и фиксируются в стеклах при температуре стеклования (Tg). Принимая, что энергия образования микропустот пропорциональна температуре стеклования Tg, т.е. $E_0 = 3kT_g$, где k -постоянная Больцмана, а критическое давление, как прочностная характеристика стекла. Бартеневым и Сандитовым предложено соотношение, связующее микротвёрдость стекла с температурой стеклования и объёмом микропустот $H_V = \dfrac{3kT_g}{V^*}$. Величина V^* для стёкол одного класса, точнее, одной системы, меняется в узком интервале, т.е. практически постоянна, в частности для силикатных стекол $\dfrac{3k}{V^*} = 0.8$ кгс/мм^2·град [7]. Рассчитанный по указанной формуле объём микропустот для исследованных фторборатных и фторалюмоборатных стёкол составляет $5{,}2 \div 6{,}4\text{Å}^3$, $5{,}3 \div 7{,}0\text{Å}^3$ соответственно, а для свинецсодержащих стёкол - $7{,}5 \div 9{,}3\text{Å}^3$. Анализ значений V^* стёкол изученных систем показывает, что с введением и увеличением количества модифицирующих катионов и ионов фтора в стекле усиливается степень деполимеризации пространственной структуры по сравнению с исходными боратами.

Структурными исследованиями было выявлено, что в области высокого содержания MeF_2 определяющими в каркасе стекла являются оксифторные группы модификаторов, отличающиеся низкими значениями межмолекулярных связей, приводящих к снижению вязкости и микротвёрдости стёкол. Вероятнее всего, низкие значения микротвёрдости фторсодержащих стекол, как и их вязкость, являются следствием того, что оба эти процесса лимитируются наличием наиболее слабых химических связей и осуществляются по ослабленным связям фтора в сетке стекла [8]. Учитывая это обстоятельство, предельную прочность стёкол можно оценить по их температурам стеклования, и, следовательно, можно ожидать корреляцию между микротвёрдостью стёкол с их температурой стеклования. Отсюда по аналогии микропустоты V^* можно рассматривать как свободный объем (межполиэдрический, внутриполиэдрический), и, следовательно, можно ожидать также корреляцию между микротвёрдостью и объёмной долей ионов в одном моле стекла, вычисленный по плотности $\frac{V_T}{V_C}$.

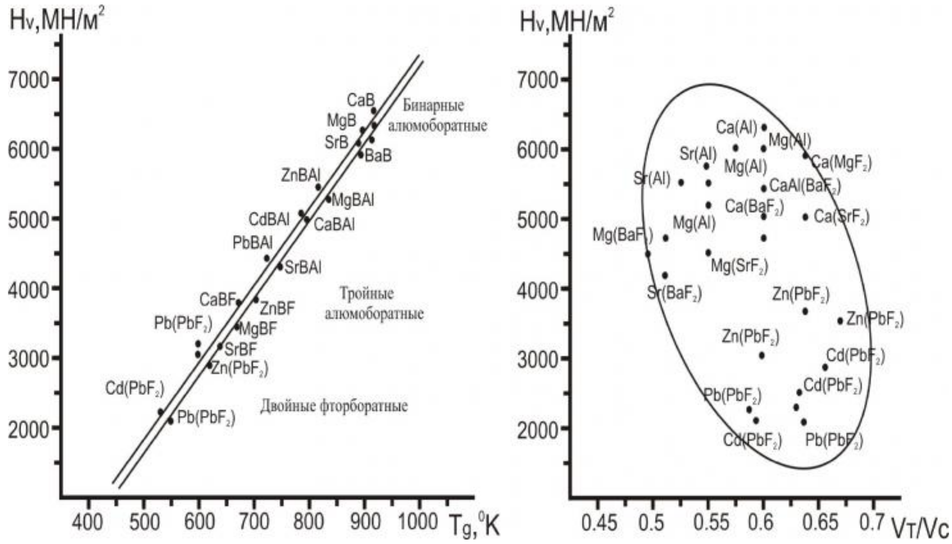


Рис. 3. Зависимость микротвёрдости от температуры стеклования стёкол и $\frac{V_T}{V_C}$

Плотность стёкол определяется с достаточной надежностью, а чтобы исключить влияние массы образца на свойства, рассчитаны также мольные объёмы стекол. При исследовании зависимостей плотности и расчётах мольного объёма стекол были применены также рассчётные данные теоретического мольного объема стекол, вычисленные из размеров ионов (для плотноупакованных структур). Неравноколичественное замещение атомов в составе стёкол при эквимолекулярном замещении боратов на фториды или оксиды искажает действительную картину структурных изменений в стекле. В связи с этим, нами было предложено в стёклах сложного состава структурные изменения и компактность структуры оценивать по объёмной доле ионов в одном моле стекла по уравнению:

$$\frac{V_T}{V_C} = \frac{\sum \frac{4}{3} \text{®} \cdot r^3 \cdot X_i \cdot N}{\sum X_i \cdot \frac{M_i}{d}} \qquad (1.1)$$

где V_T – теоретический объём всех ионов в одном моле стекла, V_C – молярный объём стекла, вычисленный по плотности. Наличие в структуре стекла свободных объёмов между основными, пространственный каркас образующими элементами предопределяет возможность оптимального перераспределения ионов разных размеров.

Как видно из приведённых зависимостей, между микротвёрдостью и температурой стеклования исследованных оксифторидных стекол наблюдается корреляция. Алюмоборатные стекла имеют наибольшую температуру стеклования и соответственно наиболее высокие значения микротвёрдости только между температурой стеклования и микротвердостью. Существует также корреляция между микротвёрдостью и свободным объёмом стекла. Чистой обратной пропорциональности не наблюдается, но тенденция всё же сохраняется. Такой вывод противоречит представлениям об увеличении значения микротвёрдости при уменьшении суммарного свободного объёма стекла. Микротвердость обычно оценивают как работу по перемещению единицы объема вещества. Введение в стеклообразную систему крупных катионов приводит к ослаблению мостиковых связей пространственной сетки стекла, нарушая пространственную непрерывность структуры. С увеличением концентрации крупных катионов в стекле величина работы по перемещению уменьшается, так как силовое поле ионов Ca^{2+}, Sr^{2+}, Ba^{2+}, Cd^{2+}, Pb^{2+} примерно в 3,5-4,0 раза слабее поля ионов B^{3+} и Al^{3+}, которых они замещают в структуре стекла. Следовательно, отношение V_T / V_C (свободный объём) не может служить мерой компактности структуры стекла, так как свободный межтетраэдрический объём уменьшается не за счёт уплотнения упаковки мостиковых ионов кислорода и фтора, а благодаря заполнению полостей структуры крупными металлическими катионами. В этой связи следует отметить, что натриевосиликатные, свинцовосиликантые и свинцовоборосиликатные стёкла гораздо менее проницаемы для газов (гелий, водород), чем стеклообразный кремнезём.

Представленные экспериментальные данные приводят к выводу, что на механические свойства стекол одновременно свой вклад вносит не только температура стеклования, которая часто рассматривается как мера стабильности стекла, и степень заполнения трёхмерного пространства стекла, но и энергия отдельных связей и степень связности стеклообразного каркаса. По крайней мере, можно считать, что без учёта структурного положения того или иного катиона в решётке стекла трудно представить его роль на изменение микротвёрдости. По-видимому, в многокомпонентных стёклах при изменении соотношения компонентов в широких пределах, приводящего к резким структурным изменениям, микротвёрдость не может всегда являться линейной функцией состава.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бартенев Г.М. Сверхпрочные и высокопрочные неорганические стекла. М.: Наука, 1974. 203с.
2. Marsh D. Flow and fracture in glass. Fracture Solids, New York, 1963, p.142.
3. Милюков Е.В., Державин С.Н., Иванов А.В. Зависимость микротвёрдости стёкол от напряжённости поля катиона.// Физ. и хим. стекла. 1989. Т.5. С.552.
4. Кумкумаджян Е.В., Князян Н.Б. Микротвёрдость и химическая устойчивость стёкол магниевоборатной системы. //Арм. хим. журнал. 1997. Т.50. №6. С.27.
5. Держанин С.Н., Иванов А.В., Касымова С.С., Милюков Е.М. Микротвёрдость хрупких оптических материалов. Ташкент: Изд. Фан., 1993. 160с.
6. Никоноров Н.В., Евстропьев С.К. Оптическое материаловедение: основы прочности стекла. СПбГУ ИТМО, 2009. 102с.
7. Сандитов Д.С. Оценка объёма флуктуационных микропустот в силикатных стеклах. //Физ. и химия стекла. 1987. Т.3. № 6. С.580-584.
8. Князян Н.Б. Особенности структуры и свойств фторалюмоборатных стекол, содержащих двухвалентные элементы. //Сб.мат. Межд.конф. по хим. и хим.тех., Ереван: 2010, с.31.

Сведения об авторе:

Князян Николай Бабкенович – доктор технических наук, Институт общей и неорганической химии им. М.Г. Манвеляна НАН РА, (374 10) 23 07 38, (374 10) 23 03 86, (374 10) 22 31 19

E-mail: knigo51@mail.ru , noraharout@yahoo.com , ionx@sci.am

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ С УЧЁТОМ ЭФФЕКТА НЕЛОКАЛЬНОСТИ

Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю.

Предложена термомеханическая модель материалов с малоразмерной структурой, учитывающая временные эффекты при аккумуляции и распространении теплоты и деформировании, а также эффекты пространственной нелокальности и вращательных степеней свободы элементов структуры.

1. Развитие техники постоянно предъявляет новые, более высокие требования к существующим конструкционным и функциональным материалам, чем стимулирует создание новых материалов. Успехи последних лет в создании новых материалов с использованием микро- и наноструктурных элементов требуют создания и новых математических моделей, описывающих термомеханические поля в деталях и элементах конструкций из таких структурно-чувствительных материалов [1, 2]. Методология построения моделей ещё далека от завершения, так как к таким материалам в чистом виде неприменима методология континуума. Тем не менее, зачастую бывает допустимым распространение методов и математических моделей классической механики сплошной среды на нано- и микроуровень. Такой приём распространения взглядов классической механики сплошной среды на среду с микро- и наноструктурой называют методом непрерывной аппроксимации [3]. Область науки, в которой поведение материалов с микро- и наноструктурой изучают с использованием метода непрерывной аппроксимации, иногда называют обобщённой механикой сплошной среды [3]. В методе непрерывной аппроксимации используют такие понятия, как полярность (микрополярность) и нелокальность. Важным этапом в создании и использовании рассматриваемого класса материалов является построение математических моделей, позволяющих описать поведение этих материалов в широком диапазоне изменения внешних воздействий.

Для получения определяющих уравнений воспользуемся соотношениями, полученными в [4] для микрополярной среды с внутренними параметрами состояния. Достаточно полный обзор работ по микрополярной теории упругости приведён в работах [5, 6]. Однако в этих работах или не упоминают о влиянии температуры на напряжённо-деформированное состояние, или учитывают это влияние в классической постановке [7, 8]. В настоящей работе дано обобщение и распространение полученных ранее результатов по построению математических моделей сплошной среды с внутренними параметрами состояния на микрополярную нелокальную среду с внутренним трением.

Определяющие уравнения нелокальной среды с внутренними параметрами состояния можно получить, используя закон сохранения энергии [5-9]

$$\rho\dot{u} = \sigma_{jk}\frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_j} - e_{jkm}\sigma_{km}\dot{\varphi}_j + m_{jk}\frac{\partial\dot{\varphi}_k}{\partial x_j} - \frac{\partial q_k}{\partial x_k} + q_V, \quad i,j,k,m = 1,2,3, \tag{1.1}$$

где ρ – плотность материала; u – массовая плотность внутренней энергии; $\dot{(\,)} = \partial(\,)/\partial t$, t – время; $\sigma_{jk} \neq \sigma_{kj}$ – компоненты тензора напряжений; u_k – проекции вектора перемещения на оси $O\text{x}_k$ прямоугольной системы координат; x_j – декартовы координаты; e_{jkm} – символы Леви-Чивиты; φ_j – проекции вектора микроповорота; m_{jk} – компоненты тензора моментных напряжений; q_k – проекции вектора плотности теплового потока; q_V – объемная плотность мощности внутренних источников (стоков) теплоты. После использования преобразования Лежандра [9] $u = A + Th$, где A, h – массовые плотности свободной энергии и энтропии; T – абсолютная температура, уравнение (1.1) принимает вид

$$\rho T\dot{h} = -\frac{\partial q_k}{\partial x_k} + q_V + \delta_D, \tag{1.2}$$

где $\delta_D = \sigma_{jk}\frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_j} - e_{jkm}\sigma_{km}\dot{\varphi}_j + m_{jk}\frac{\partial\dot{\varphi}_k}{\partial x_j} - \rho(\dot{A} + \dot{T}h)$ – диссипативная функция.

Комбинируя (1.2) с неравенством Клаузиуса-Дюгема [9]

$$\rho T\dot{h} + \frac{\partial q_k}{\partial x_k} - \frac{q_k}{T}\frac{\partial T}{\partial x_k} - q_V \geqslant 0 \tag{1.3}$$

и принимая в качестве реактивных переменных тензор микродеформации с компонентами

$$e_{kl} = \varepsilon_{kl} + e_{klm}(\omega_m - \varphi_m) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} - \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right) + e_{lkm}\varphi_m, \quad k, l, m = 1, 2, 3,$$

где $\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right)$ – компоненты симметричного тензора малой деформации, градиент вектора микроповорота с компонентами $\zeta_{kl} = \partial\varphi_k/\partial x_l$, абсолютную температуру T и её градиент с проекциями $\vartheta_k = \partial T/\partial x_k$, а также внутренние параметры термодинамического состояния: скалярный κ, векторный с проекциями κ_k и два тензорных с компонентами $\kappa_{kl}^{(1)}$ и $\kappa_{kl}^{(2)}$, получим

$$\sigma_{jk} = \rho\frac{\partial A}{\partial e_{kj}}, m_{jk} = \rho\frac{\partial A}{\partial \zeta_{kj}}, h = -\frac{\partial A}{\partial T}, \frac{\partial A}{\partial(\partial T/\partial x_k)} = 0 \tag{1.4}$$

и вместо (1.3) –

$$-\frac{q_k}{T}\frac{\partial T}{\partial x_k} + \delta_D \geqslant 0,\ \delta_D = -\rho\left(\frac{\partial A}{\partial \kappa}\dot{\kappa} + \frac{\partial A}{\partial \kappa_k}\dot{\kappa}_k + \frac{\partial A}{\partial \kappa_{jk}^{(1)}}\dot{\kappa}_{jk}^{(1)} + \frac{\partial A}{\partial \kappa_{jk}^{(2)}}\dot{\kappa}_{jk}^{(2)}\right).$$

Так как в дальнейшем рассматриваем геометрически линейную среду, то $|e_{ij}| \ll 1$, $|\zeta_{ij}|^{-1} \ll L)$, где L – характерный размер рассматриваемого тела. Положим также, что κ – термодинамическая температура, ассоциированная с локально неравновесными процессами аккумуляции теплоты; κ_k – проекции вектора, характеризующего распространение теплоты и ассоциированного с решёточным (фононным) или другим преобладающим физическим процессом теплопроводности, $|\kappa_k| \ll 1$; $\kappa_{jk}^{(1)}$ и $\kappa_{jk}^{(2)}$ – компоненты тензоров, определяющих на микроуровне эффекты вязкости, $|\kappa_{jk}^{(1)}| \ll 1$ и $|\kappa_{jk}^{(2)}| \ll 1$.

Зададим объёмную плотность свободной энергии в виде разложения в ряд Тейлора в окрестности нулевых значений аргументов e_{ij}, ζ_{ij}, $\kappa_{ij}^{(1)}$ и $\kappa_{ij}^{(2)}$ при температуре $T = T_0$ естественного состояния, а также примем $\partial A/\partial\kappa_i = 0$. Тогда для окрестности точки с радиусом-вектором $\mathbf{x}$, принадлежщей области V, занимаемой элементом микро- или наноструктуры, получаем

$$\rho A(e_{kl}, \zeta_{kl}, \kappa_{kl}^{(1)}, \kappa_{kl}^{(2)}, T, \kappa) = \rho A_0 + \int_V (\tilde{B}_{ji}(\mathbf{x},\mathbf{x}')e_{ij}(\mathbf{x}') + \tilde{D}_{ji}(\mathbf{x},\mathbf{x}')\zeta_{ij}(\mathbf{x}'))dV(\mathbf{x}') +$$

$$+1/2\int_V dV(\mathbf{x}')\int_V (\tilde{C}_{jikl}(\mathbf{x},\mathbf{x}',\mathbf{x}'')e_{kl}(\mathbf{x}')e_{ij}(\mathbf{x}'') + \tilde{G}_{jikl}(\mathbf{x},\mathbf{x}',\mathbf{x}'')\zeta_{kl}(\mathbf{x}')\zeta_{ij}(\mathbf{x}'') + \tilde{R}_{jikl}^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{x}',\mathbf{x}'')\kappa_{kl}^{(1)}(\mathbf{x}')\kappa_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}'') +$$

$$+\tilde{R}_{jikl}^{(2)}(\mathbf{x},\mathbf{x}',\mathbf{x}'')\kappa_{kl}^{(2)}(\mathbf{x}')\kappa_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}'') + 2\tilde{F}_{jikl}(\mathbf{x},\mathbf{x}',\mathbf{x}'')\zeta_{kl}(\mathbf{x}')e_{ij}(\mathbf{x}'') + 2\tilde{F}_{jikl}^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{x}',\mathbf{x}'')\kappa_{kl}^{(1)}(\mathbf{x}')e_{ij}(\mathbf{x}'') +$$

$$+2\tilde{F}_{jikl}^{(1)}\kappa_{kl}^{(2)}(\mathbf{x}')\zeta_{ij}(\mathbf{x}'') + 2\tilde{R}_{jikl}(\mathbf{x},\mathbf{x}',\mathbf{x}'')\kappa_{kl}^{(1)}(\mathbf{x}')\kappa_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}'') - 2\tilde{C}_{jikl}(\mathbf{x},\mathbf{x}',\mathbf{x}'')e_{kl}^{(T)}(\mathbf{x}')e_{ij}(\mathbf{x}'') -$$

$$-2\tilde{H}_{jikl}(\mathbf{x},\mathbf{x}',\mathbf{x}'')e_{kl}^{(\kappa)}(\mathbf{x}')e_{ij}(\mathbf{x}''))dV(\mathbf{x}'') + \rho(T - T_0)B_0(\kappa), \tag{1.5}$$

где $e_{kl}^{(T)}$, $e_{kl}^{(\copyright)}$ – компоненты тензора температурной микродеформации и тензора, зависящего только от термодинамической температуры, $|e_{kl}^{(T)}| \ll 1$ и $|e_{kl}^{(\copyright)}| \ll 1$; в естественном состоянии $A_0 = 0$, $B_0 = 0$ и $B = 0$. Положим также, что $\tilde{B}_{ji}(\mathbf{x},\mathbf{x}') = B_{ji}\varphi(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|)$, $\tilde{D}_{ji}(\mathbf{x},\mathbf{x}') = D_{ji}\varphi(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|)$, $\tilde{C}_{jikl}(\mathbf{x},\mathbf{x}',\mathbf{x}'') = C_{jikl}\varphi(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|)\varphi(|\mathbf{x}'' - \mathbf{x}|),\ldots,$ $\tilde{H}_{jikl}(\mathbf{x},\mathbf{x}',\mathbf{x}'') = H_{jikl}\varphi(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|)\varphi(|\mathbf{x}'' - \mathbf{x}|)$. Здесь $\varphi(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|)$, $\varphi(|\mathbf{x}'' - \mathbf{x}|)$ – функции влияния, определяющие эффект пространственной "памяти", и

$$\int_V \varphi(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|)dV(\mathbf{x}') = \int_V \varphi(|\mathbf{x}'' - \mathbf{x}|)dV(\mathbf{x}'') = 1,$$

а также $\varphi(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \neq 0$ только при $(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \in V(\mathbf{x}')$ и $\varphi(|\mathbf{x}'' - \mathbf{x}|) \neq 0$ только при $(|\mathbf{x}'' - \mathbf{x}|) \in V(\mathbf{x}'')$.

Тогда в силу первого и второго равенств из (1.4) имеем:

$$\sigma_{ji} = B_{ji} + \int_V C_{jikl}\varphi(|\mathbf{x'}-\mathbf{x}|)(e_{kl}(\mathbf{x'}) - e_{kl}^{(T)}(\mathbf{x'}))dV(\mathbf{x'}) + \int_V F_{jikl}\varphi(|\mathbf{x'}-\mathbf{x}|)\zeta_{kl}(\mathbf{x'})dV(\mathbf{x'}) +$$
$$+\int_V E_{jikl}^{(1)}\varphi(|\mathbf{x'}-\mathbf{x}|)\kappa_{kl}^{(1)}(\mathbf{x'})dV(\mathbf{x'}) - \int_V H_{jikl}\varphi(|\mathbf{x'}-\mathbf{x}|)e_{kl}^{(\kappa)}(\mathbf{x'})dV(\mathbf{x'}), \quad (1.6)$$
$$m_{ji} = D_{ji} + \int_V G_{jikl}\varphi(|\mathbf{x'}-\mathbf{x}|)\zeta_{kl}(\mathbf{x'})dV(\mathbf{x'}) + \int_V F_{jikl}\varphi(|\mathbf{x'}-\mathbf{x}|)e_{kl}(\mathbf{x'})dV(\mathbf{x'}) + \int_V E_{jikl}^{(2)}\varphi(|\mathbf{x'}-\mathbf{x}|)\kappa_{kl}^{(2)}(\mathbf{x'})dV(\mathbf{x'}).$$

Так как массовую плотность энтропии определяет третье равенство из (1.4), то, используя (1.5), получаем

$$h = \frac{1}{\rho}\int_V C_{jikl}\,\varphi(|\mathbf{x'}-\mathbf{x}|)\frac{\partial e_{kl}^{(T)}(\mathbf{x})}{\partial T}e_{ij}(\mathbf{x'})dV(\mathbf{x'}) - B_0(\kappa). \quad (1.7)$$

Соотношения (1.6) являются достаточно общими, поэтому необходимо установить ограничения на коэффициенты B_{ji}, C_{jikl}, F_{jikl}, $E_{jikl}^{(1)}$, D_{ji} и G_{jikl} и $E_{jikl}^{(2)}$. Объёмная плотность свободной энергии инвариантна к выбору направлений осей принятой системы координат, поэтому при изменении направления любой из осей координат на противоположное, в силу равенства $\zeta_{kl} = \partial\varphi_k/\partial x_l$, компоненты ζ_{kl} градиента вектора микроповорота изменяют знак на противоположный. Поэтому изменяется и величина ρA. Следовательно, $D_{ji} = 0$, $F_{jikl} = 0$. Кроме того, можно показать, что $C_{jikl} = C_{klji}$, $G_{jikl} = G_{klji}$, $E_{jikl}^{(1)} = E_{klji}^{(1)}$, $E_{jikl}^{(2)} = E_{klji}^{(2)}$, и число компонент C_{jikl}, G_{jikl}, $E_{jikl}^{(1)}$ и $E_{jikl}^{(2)}$ составляет 45; B_{ji} – 9; B_{ji} задают начальные напряжения в недеформированном теле. Таким образом,

$$\sigma_{ji} = B_{ji} + \int_V C_{jikl}\varphi(|\mathbf{x'}-\mathbf{x}|)(e_{kl}(\mathbf{x'}) - e_{kl}^{(T)}(\mathbf{x'}))dV(\mathbf{x'}) +$$
$$+\int_V E_{jikl}^{(1)}\varphi(|\mathbf{x'}-\mathbf{x}|)\kappa_{kl}^{(1)}(\mathbf{x'})dV(\mathbf{x'}) - \int_V H_{jikl}\varphi(|\mathbf{x'}-\mathbf{x}|)e_{kl}^{(\kappa)}(\mathbf{x'})dV(\mathbf{x'}), \quad (1.8)$$
$$m_{ji} = \int_V G_{jikl}\varphi(|\mathbf{x'}-\mathbf{x}|)\zeta_{kl}(\mathbf{x'})dV(\mathbf{x'}) + \int_V E_{jikl}^{(2)}\varphi(|\mathbf{x'}-\mathbf{x}|)\kappa_{kl}^{(2)}(\mathbf{x'})dV(\mathbf{x'}).$$

Предположим, что вязкие свойства микрополярной среды проявляются только при ненулевых значениях градиента вектора микроповорота с компонентами ζ_{mn} и разности компонент тензоров линейного поворота $\omega_{mn} = e_{mnp}\,\omega_p$ $(p = 1,2,3)$ и линейного микроперемещения $\varphi_{mn} = e_{mnp}\varphi_p$ $(\omega_{mn} - \varphi_{mn} \neq 0)$. Кроме того, $\kappa_{kl}^{(1)}$ зависят только от разности $(\omega_{mn} - \varphi_{mn})$, а $\kappa_{kl}^{(2)}$ – только от ζ_{kl}. Таким образом, вязкие свойства среды, определяемые этими параметрами, проявляются только при макро- и микроповоротах и наличии градиента вектора микроповорота. Для определения $\kappa_{kl}^{(1)}$ и $\kappa_{kl}^{(2)}$ зададим кинетические уравнения в виде

$$\begin{aligned} t_\sigma^*\dot{\kappa}_{kl}^{(1)} + \kappa_{kl}^{(1)} &= \int_V K_{klmn}^{(1)}\varphi(|\mathbf{x'}-\mathbf{x}|)(\omega_{mn}(\mathbf{x'},t) - \varphi_{mn}(\mathbf{x'},t))dV(\mathbf{x'}), \\ t_m^*\dot{\kappa}_{kl}^{(2)} + \kappa_{kl}^{(2)} &= \int_V K_{klmn}^{(2)}\varphi(|\mathbf{x'}-\mathbf{x}|)\zeta_{mn}(\mathbf{x'},t)dV(\mathbf{x'}), \end{aligned} \quad (1.9)$$

где $t_\pm^*$, t_m^* – времена релаксации параметров состояния.

Решения уравнений (1.9) при соответствующих начальных условиях ($t = 0$ $\omega_{mn} = \varphi_{mn} = 0$, $\zeta_{mn} = 0$) и соотношения (1.7), (1.8) определяют математическую модель стандартной линейной нелокальной микрополярной среды с учётом температурной микродеформации $(e_{kl}^{(T)})$ и деформации, обусловленной неравновесностью процесса аккумуляции теплоты $(e_{kl}^{(©)})$.

Если в материале определяющим является только один, фононный, процесс теплопроводности, то кинетические уравнения, описывающие изменение $\mathbf{k}$ – вектора, характеризующего процесс распространения теплоты, и κ – термодинамической температуры, ассоциированной с локально неравновесным процессом аккумуляции теплоты во времени в линейном приближении, можно принять в виде [10, 11]

$$t_q^*\dot{\kappa}_i + A_{ij}\kappa_j = \bar{\kappa}_i,\; t_T^*\dot{\kappa} + A_{44}\kappa = \bar{\kappa}, \qquad (1.10)$$

где t_q^*, t_T^* – времена релаксации соответствующих параметров состояния; $\bar{\kappa}_i$, $\bar{\kappa}$ – функции, определяющие равновесные значения параметров состояния; $A_{ij} = A_{ji}$, $\det(A_{ij}) > 0$. Термодинамическую температуру определяет спектр частот и амплитуд колебаний атомов на свободной поверхности микро- и наноструктурных элементов.

2. Для получения уравнения теплопроводности необходимо конкретизировать выражения для равновесных значений $\bar{\kappa}_i$ и $\bar{\kappa}$ параметров состояния и проекций вектора плотности теплового потока q_i, приняв их, например, в виде

$$\begin{gathered}\bar{\kappa}_i = -\int_V Z_{ij}^{(1)}\varphi(|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|)\frac{\partial T(\mathbf{x}',t)}{\partial x_j'}dV(\mathbf{x}') - \int_V Z_{ij}^{(2)}\varphi(|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|)\frac{\partial \kappa(\mathbf{x}',t)}{\partial x_j'}dV(\mathbf{x}'),\\ \bar{\kappa} = \int_V \varphi(|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|)T(\mathbf{x}',t)dV(\mathbf{x}'), \quad q_i = \int_V \varphi_{ij}\varphi(|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|)\kappa_j(\mathbf{x}',t)dV(\mathbf{x}').\end{gathered} \qquad (2.1)$$

Равенства (2.1) не противоречат основным принципам рациональной термодинамики необратимых процессов [12]. Решив систему уравнений (1.10) относительно κ_i и κ с начальными условиями ($\kappa_i = 0$ и $\kappa = T_0$ при $t = 0$), закон сохранения энергии (1.2) с учётом (1.7) и равенства (2.1), принимает вид

$$\begin{gathered}\rho c_\varepsilon \frac{\partial \kappa}{\partial t} = -T\int_V dV(\mathbf{x}')\int_V C_{jikl}\varphi(|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|)\varphi(|\mathbf{x}''-\mathbf{x}'|)\frac{\partial \varepsilon_{kl}^{(T)}(\mathbf{x}')}{\partial T}\frac{\partial e_{ij}(\mathbf{x}'',t)}{\partial t}dV(\mathbf{x}'') +\\ +\frac{\partial}{\partial x_i}\int_V \varphi(|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|)dV(\mathbf{x}')\int_V \lambda_{ij}^{(T)}\varphi(|\mathbf{x}''-\mathbf{x}'|)\left(\frac{\partial T(\mathbf{x}'',t)}{\partial x_j''} - \int_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{t_q^*}\right)\frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{\partial T(\mathbf{x}'',t')}{\partial x_j''}\right)dt'\right)dV(\mathbf{x}'') \quad (2.2)\\ +\frac{\partial}{\partial x_i}\int_V \varphi(|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|)dV(\mathbf{x}')\int_V \lambda_{ij}^{(\kappa)}\varphi(|\mathbf{x}''-\mathbf{x}'|)\left(\frac{\partial \kappa(\mathbf{x}'',t)}{\partial x_j''} - \int_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{t_q^*}\right)\frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{\partial \kappa(\mathbf{x}'',t')}{\partial x_j''}\right)dt'\right)dV(\mathbf{x}'') + \delta_D + q_V,\end{gathered}$$

где $c_\varepsilon = -T\, dB_0/d\kappa$ – удельная массовая теплоёмкость при постоянной деформации, характеризующая аккумуляцию теплоты при изменении абсолютной и термодинамической температур; $\lambda_{ij}^{(T)} = \varphi_{ik}Z_{kj}^{(1)}$, $\lambda_{ij}^{(\kappa)} = \varphi_{ik}Z_{kj}^{(2)}$ – компоненты тензоров теплопроводности, обусловленные абсолютной и термодинамической температурами.

Краевые условия для получения однозначного решения системы уравнений (2.2) и второго из (1.10) имеют следующий вид:

$t = 0 \quad T(\mathbf{x},0) = \kappa(\mathbf{x},0) = T_0,\quad \dot{T}(\mathbf{x},0) = 0,\ \dot{\kappa}(\mathbf{x},0) = -(1-A_{44})T_0/t_T^*$;

на граничной поверхности S

$$\begin{gathered}\int_V \varphi(|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|)dV(\mathbf{x}')\int_V (\lambda_{ij}^{(T)}\varphi(|\mathbf{x}''-\mathbf{x}'|)\left(\frac{\partial T(\mathbf{x}'',t)}{\partial x_j''} - \int_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{t_q^*}\right)\frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{\partial T(\mathbf{x}'',t')}{\partial x_j''}\right)dt'\right) +\\ +\lambda_{ij}^{(\kappa)}\varphi(|\mathbf{x}''-\mathbf{x}'|)\left(\frac{\partial \kappa(\mathbf{x}'',t)}{\partial x_j''} - \int_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{t_q^*}\right)\frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{\partial \kappa(\mathbf{x}'',t)}{\partial x_j''}\right)dt'\right)\Bigg)dV(\mathbf{x}'')n_i(\mathbf{x},t) = \alpha(\mathbf{x},t)(T_c(\mathbf{x},t) - T(\mathbf{x},t)),\\ \frac{\partial \kappa}{\partial x_j} = \frac{1}{A_{44}}\frac{\partial}{\partial x_j}\int_V \varphi(|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|)\left(T(\mathbf{x}',t) - \int_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{t_T^*/A_{44}}\right)\frac{\partial T(\mathbf{x}',t')}{\partial t'}dt'\right)dV(\mathbf{x}'),\end{gathered}$$

где n_i – направляющие косинусы внешней нормали к поверхности S, ограничивающей рассматриваемую область V; α и T_c – коэффициент теплообмена и температура окружающей среды.

Необходимо заметить, что аналогичный подход к получению уравнения теплопроводности для нелокальной среды изложен в [11], там же приведены и некоторые численные результаты решения соответствующей краевой задачи. Отличие полученных выше результатов от [8] состоит в более полном учёте эффектов термомеханической связанности и диссипации энергии при деформировании.

Работа выполнена по гранту НШ-255.2012.8 программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ и гранту Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых — кандидатов наук (проект МК–6618.2013.8).

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Gleiter, Nanostructured materials: basic concepts and microstructure, Acta Mater., vol. 48 (2000), 1-29.
2. Старостин В.В. Материалы и методы нанотехнологий. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. 431с.
3. Введение в микромеханику / Онами М., Ивасимидзу С., Гэнка К. и др. / Пер. с япон. М.: Металлургия, 1987. 280 с.
4. Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Математическая модель микрополярной среды с внутренними параметрами состояния // Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана. Сер. Естественные науки, 2011. Спец. выпуск "Прикладная математика". С. 51-62.
5. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. Прикладная микрополярная теория упругих оболочек. Ереван: Гитутюн, 2010. 136 с.
6. Кривцов А.М. Деформирование и разрушение твёрдых тел микроструктурой. М.: Физматлит, 2007. 304 с.
7. Эринген А.К. Теория микрополярной упругости / В кн. Разрушение. Т.2. М.: Мир, 1975. С.646-751.
8. Eringen A.C. Nonlocal Continuum Field Theories. New York - Berlin - Heidelberg: Springer Verlag, 2002. 393 pp.
9. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2008. 512с.
10. Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Математическая модель теплопроводности новых конструкционных материалов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2010. 3. С.72-85.
11. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Нелокальная математическая модель теплопроводности в твердых телах // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2011. 3. С.20-30.
12. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред: Пер. с англ. М.: Мир, 1975. 592с.

Сведения об авторах:

Кувыркин Георгий Николаевич – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Прикладная математика» Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана, (499) 263-63-26
E-mail: fn2@bmstu.ru

Савельева Инга Юрьевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Прикладная математика» Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана, (499) 263-63-26
E-mail: Inga.Savelyeva@gmail.com

ТРЁХМЕРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В “ПОЛУПЛАСТИЧЕСКИХ” И “ВПОЛНЕ ПЛАСТИЧЕСКИХ” СОСТОЯНИЯХ

Радаев Ю. Н.

В работе получены новые трёхмерные тензорные представления напряжений для состояний, характеризуемых либо как “полностью пластическое”, либо как “полупластическое”. Указанные представления получены с помощью понятия об асимптотических директорах симметричного тензора напряжений. Проведено их дальнейшее обобщение для так называемых “непластических” состояний, когда главные нормальные напряжения заранее не подчинены никакой дополнительной алгебраической связи. Работа в целом опирается на терминологию и обозначения, характерные для математической теории пластичности, динамики и статики сыпучих сред, однако её основные результаты остаются справедливыми и в самом общем случае теории и механики сплошных сред. Найдены отличные от спектральных простые и эффективные формы тензора напряжений для “полностью пластических”, “полупластических” и “непластических” трёхмерных состояний. Асимптотические оси напряжений при этом выступают как наиболее естественный репер, обеспечивающий новые симметричные тензорные представления напряжений в смешанных диадах асимптотических директоров. Полученные тензорные формы напряжений неизбежно диктуют и новые формы уравнений равновесия континуума. Так, уравнение равновесия, сформулированное с помощью одного асимптотического директора для “вполне пластических” состояний, позволяет существенно развить трёхмерную теорию предельного равновесия идеально пластического тела, причём независимо от уравнений кинематики, в терминах нелинейной системы уравнений в частных производных гиперболического аналитического типа. Асимптотический директор при этом указывает ось конуса характеристических направлений. Уравнение баланса импульса, сформулированное в терминах двух асимптотических директоров в самом общем случае “непластических” состояний, оказывается единственной известной универсальной альтернативой традиционных форм подобных уравнений механики континуума.

1. Механика *сжимаемых* континуумов в настоящее время выступает как теоретическая основа исследования механического поведения (почти всегда аномального) высокоэластичных материалов, горных пород, грунтов, пористых и сыпучих сред, метаматериалов. Например, резина обладает аномальным термоупругим поведением. Так, каучуковый образец в форме ленточки, если поддерживать его при постоянном растягивающем напряжении, будет сокращаться при нагревании и растягиваться при охлаждении. Методы механики сжимаемых континуумов во многом соприкасаются с методами математической теории пластичности, поэтому присущие теории пластичности понятия и методы служат той естественной основой, на которой могут быть сформулированы фундаментальные уравнения для сжимаемых сплошных сред. Математические теории таких континуумов нуждаются в новых подходах и специальных формах уравнений, составляющих математическое оформление моделей сплошных сред. Механика континуума всегда в явной или неявной форме учитывает функциональные или дифференциальные связи, ограничивающие тензорные поля, применяющиеся для представления деформации и передающихся через двумерные плоские элементы силовых воздействий (внутренних напряжений). Весьма показательным в этом смысле является идеально пластическое тело: в состоянии пластического течения главные напряжения связаны некоторым “конечным” уравнением (так называемым условием пластичности), а главные приращения деформаций образуют нулевую сумму (условие несжимаемости течения). То же самое относится к моделям неплотно связанных сред, в частности, песку или сухому грунту, которые служат обобщением представлений об идеально пластическом теле. Например, в теории идеально сыпучей среды Мора (O. Mohr) в случае скольжения идеально сыпучего материала постоянным принимается отношение наибольшего и наименьшего главных нормальных напряжений. Через такого рода теории Прандтль (L. Prandtl) в 1921 г. пришел к понятию обобщённого идеально пластического тела; деформация такого тела начинается и продолжается неопределённо долго, если максимальное касательное напряжение достигает предельного значения, зависящего от средней величины (полусуммы) наибольшего и наименьшего главных нормальных напряжений.

Целью настоящей работы является, во-первых, вывод трёхмерных тензорных представлений напряжений в сжимаемых континуумах, не зависящих от специфики определяющего закона, точно предписывающего характер механического поведения континуума. Во-вторых, построение таких специальных форм уравнений, которые учитывали бы характер состояния континуума: “полностью пластическое”, “полупластическое” или “непластическое”. В-третьих, дальнейшее развитие теории обобщённого *сжимаемого* идеально пластического тела Прандтля.

2. В трёхмерных формулировках математической теории пластичности всегда используются специальные представления тензора напряжений и соответствующие формы дивергентного уравнения равновесия [1], [2]. Обозначим через $\pm$ трёхмерный тензор напряжений Коши. Симметрия тензора напряжений влечёт возможность его канонического спектрального представления. Если $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ – ортонормированный базис из собственных векторов тензора напряжений, σ_1, σ_2, σ_3 – главные напряжения (собственные значения тензора напряжений), то его каноническое разложение будет иметь следующую хорошо известную форму:

$$\pm = \sigma_1 \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + \sigma_2 \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \sigma_3 \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}\,. \tag{2.1}$$

Это представление достаточно широко используется в современной механике деформируемого твёрдого тела в различных вопросах, связанных с анализом трёхмерного напряжённого состояния тела в данной точке [3-5].

Для тех пространственных состояний, для которых a priori имеется некоторое конечное соотношение между главными напряжениями σ_1, σ_2, σ_3, вместо канонического спектрального разложения (2.1) могут быть получены новые, более компактные и удобные, по сравнению с (2.1), представления в асимптотических осях. Такое положение дел характерно прежде всего для теории идеально пластического тела. Поэтому такие напряжённые состояния, когда a priori нельзя указать никаких конечных соотношений между главными напряжениями σ_1, σ_2, σ_3, будем называть “непластическими”. Одним из существенных элементов данного исследования выступает поиск новых форм основного уравнения равновесия механики континуума

$$\mathrm{div}\pm = \mathbf{0}\,, \tag{2.2}$$

которые учитывали бы заранее заданные “конечные” связи между главными напряжениями.

3. Рассмотрим, прежде всего, “полностью пластические” состояния. Как хорошо известно, если перенумеровать главные оси тензора напряжений так, чтобы выполнялись неравенства

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3\,, \tag{3.1}$$

то критерий текучести Треска можно выразить с помощью следующего уравнения (k – предел текучести в состоянии чистого сдвига):

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = k\,. \tag{3.2}$$

В пространстве главных напряжений критерий текучести Треска представляется шестигранной призмой Кулона–Треска, ребрам которой соответствуют “полностью пластические” состояния Хаара–Кармана [6]. Произвольное “полностью пластическое” состояние можно охарактеризовать условиями

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k \tag{3.3}$$

Используя (3.3) и тензорное разбиение единицы

$$\mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} = \mathbf{I}\,, \tag{3.4}$$

каноническое представление тензора напряжений (2.1) преобразуется к виду

$$\pm = (\sigma_3 \pm 2k)\mathbf{I} \mp 2k\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}\,, \tag{3.5}$$

откуда заключаем, что тензор напряжений с точностью до шарового тензора определяется диадой асимптотического директора $\mathbf{n}$.

Уравнение равновесия (2.2) для трёхмерных “полностью пластических” состояний, следовательно, приводится к

$$\text{ď}\sigma_3 + 2k(\mathbf{n}\,\mathrm{div}\mathbf{n} - \mathbf{n} \times \mathrm{rot}\mathbf{n}) = \mathbf{0} \tag{3.6}$$

и интегрируемо (в поверхностно односвязной трёхмерной области) только при условии исчезновения вихря векторного поля $\mathbf{n}\,\mathrm{div}\mathbf{n} - \mathbf{n} \times \mathrm{rot}\mathbf{n}$, т.е.

$$\mathrm{rot}(\mathbf{n}\,\mathrm{div}\mathbf{n} - \mathbf{n} \times \mathrm{rot}\mathbf{n}) = \mathbf{0}\,. \tag{3.7}$$

Таким образом, для асимптотического директора $\mathbf{n}$ получается отдельное дифференциальное уравнение. Математическая теория пластичности на основе уравнения (3.6) излагается в монографии [2].

Как нетрудно проверить, векторное дифференциальное уравнение (3.6) принадлежит к гиперболическому аналитическому типу, поскольку имеется ровно три уравнения для вектора единичной нормали $\mathbf{N}$ к характеристической поверхности:

$$\mathbf{N}\cdot\mathbf{n} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \mathbf{N}\cdot\mathbf{n} = 0. \tag{3.8}$$

Данные уравнения определяют в пространстве характеристические конусы с общей осью, задаваемой асимптотическим директором $\mathbf{n}$.

4. Исследуем далее "непластические" состояния, т.е. будем считать, что главные напряжения заранее не подчинены никаким связям. В этом случае аналитически наиболее простое и эффективное представление тензора напряжений получается в смешанных диадах асимптотических директоров $‘\mathbf{l},\ ‘\mathbf{n}$. Эти директоры получаются путем следующего преобразования собственных директоров тензора напряжений $\mathbf{l},\ \mathbf{n}$ в плоскости, ортогональной собственному вектору $\mathbf{m}$, соответствующему "промежуточному" главному напряжению σ_2:

$$\begin{cases} \mathbf{l} = \dfrac{1}{\sqrt{2(1+\cos ‘\iota)}}(‘\mathbf{l} + ‘\mathbf{n}), \\ \mathbf{n} = \dfrac{1}{\sqrt{2(1-\cos ‘\iota)}}(-‘\mathbf{l} + ‘\mathbf{n}). \end{cases} \tag{4.1}$$

В отличие от пары $\mathbf{l},\ \mathbf{n}$, директоры $‘\mathbf{l},\ ‘\mathbf{n}$, вообще говоря, не ортогональны друг другу. Собственный вектор $\mathbf{l}$ всегда делит пополам угол между векторами $‘\mathbf{l},\ ‘\mathbf{n}$. Ясно, что в формулах преобразования (4.1) $\cos ‘\iota = ‘\mathbf{l}\cdot ‘\mathbf{n}$.

Можно показать, что за счёт выбора угла $‘\iota$ в (4.1) в соответствии с уравнением

$$\cos ‘\iota = -\mu, \tag{4.2}$$

где μ есть параметр Лоде [7]

$$\mu = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}, \tag{4.3}$$

удается получить весьма простое представление трёхмерного тензора напряжений в смешанных диадах асимптотических директоров

$$\pm = \sigma_2\mathbf{I} + \tau_{\max}(‘\mathbf{l}\otimes ‘\mathbf{l} + ‘\mathbf{n}\otimes ‘\mathbf{n}). \tag{4.4}$$

Проведённые рассуждения и формула (4.4) показывают, что симметричный тензор напряжений $\pm$ *всегда* гиперболичен, в том смысле, что за вычетом определённого шарового тензора его всегда можно представить исключительно через смешанные диады всего двух единичных векторов, которые указывают асимптотические направления в плоскости, ортогональной направлению собственного вектора $\mathbf{m}$.

Заметим, что "промежуточное" главное напряжение σ_2 вычисляется на основании

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \cos ‘\iota\,\tau_{\max} \tag{4.5}$$

или

$$\sigma_2 = s - \cos ‘\iota\,\tau_{\max}, \tag{4.6}$$

где введено медианное напряжение

$$s = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}. \tag{4.7}$$

“Полупластические” состояния, следуя [6], определим выполнением “условия грани” призмы Кулона–Треска $\tau_{\max} = k$. В этом случае вместо (4.4) получим следующее, очевидно более простое, представление:

$$\pm = \sigma_2 \mathbf{I} + k(\text{‘}\mathbf{l} \otimes \text{‘}\mathbf{l} + \text{‘}\mathbf{n} \otimes \text{‘}\mathbf{n}) . \tag{4.8}$$

Тензорным представлениям (4.4) и (4.8) естественно соответствуют и новые формы уравнения равновесия (2.2). Так, подставляя (4.4) в (2.2), после ряда преобразований приходим к векторному дифференциальному уравнению

$$\begin{gathered} \text{ď}\sigma_2 + \text{‘}\mathbf{l}(\text{‘}\mathbf{n} \cdot \text{ď})\tau_{\max} + \text{‘}\mathbf{n}(\text{‘}\mathbf{l} \cdot \text{ď})\tau_{\max} - \tau_{\max} \sin \text{‘}\iota \text{ď} \text{‘}\iota + \\ + \tau_{\max} (\text{‘}\mathbf{l}(\text{ď} \cdot \text{‘}\mathbf{n}) + \text{‘}\mathbf{n}(\text{ď} \cdot \text{‘}\mathbf{l}) - \text{‘}\mathbf{l} \times (\text{ď} \times \text{‘}\mathbf{n}) - \text{‘}\mathbf{n} \times (\text{ď} \times \text{‘}\mathbf{l})) = \mathbf{0}. \end{gathered} \tag{4.9}$$

Заменяя в этом уравнении “промежуточное” главное напряжение σ_2 согласно (4.6), находим, что

$$\begin{gathered} \text{ď}s + \text{‘}\mathbf{l}(\text{‘}\mathbf{n} \cdot \text{ď})\tau_{\max} + \text{‘}\mathbf{n}(\text{‘}\mathbf{l} \cdot \text{ď})\tau_{\max} - \cos \text{‘}\iota \text{ď}\tau_{\max} + \\ + \tau_{\max} (\text{‘}\mathbf{l}(\text{ď} \cdot \text{‘}\mathbf{n}) + \text{‘}\mathbf{n}(\text{ď} \cdot \text{‘}\mathbf{l}) - \text{‘}\mathbf{l} \times (\text{ď} \times \text{‘}\mathbf{n}) - \text{‘}\mathbf{n} \times (\text{ď} \times \text{‘}\mathbf{l})) = \mathbf{0}. \end{gathered} \tag{4.10}$$

Последнее уравнение в случае “полупластических” состояний преобразуется к следующему виду:

$$\text{ď}\varsigma + \text{‘}\mathbf{l}(\text{ď} \cdot \text{‘}\mathbf{n}) + \text{‘}\mathbf{n}(\text{ď} \cdot \text{‘}\mathbf{l}) - \text{‘}\mathbf{l} \times (\text{ď} \times \text{‘}\mathbf{n}) - \text{‘}\mathbf{n} \times (\text{ď} \times \text{‘}\mathbf{l}) = \mathbf{0} , \tag{4.11}$$

где вводится безразмерное медианное напряжение согласно $\varsigma = s / k$.

Отметим, что условие интегрируемости векторного дифференциального уравнения (4.11) может быть сформулировано в форме уравнения

$$\text{ď} \times (\text{‘}\mathbf{l}(\text{ď} \cdot \text{‘}\mathbf{n}) + \text{‘}\mathbf{n}(\text{ď} \cdot \text{‘}\mathbf{l}) - \text{‘}\mathbf{l} \times (\text{ď} \times \text{‘}\mathbf{n}) - \text{‘}\mathbf{n} \times (\text{ď} \times \text{‘}\mathbf{l})) = \mathbf{0} , \tag{4.12}$$

которое связывает только асимптотические директоры $\text{‘}\mathbf{l}$, $\text{‘}\mathbf{n}$.

5. Уравнение равновесия в форме (4.10) оказывается весьма удобным в теории обобщённого идеально пластического тела Прандтля (см., например, [8]). Модель Прандтля охватывает чрезвычайно широкий спектр механического поведения деформируемых сред; в частности, это касается процессов течения сыпучих сред, взаимодействие элементов которых сопровождается трением и сцеплением. Деформация обобщённого идеально пластического тела возможна, только если максимальное касательное напряжение $\tau_{\max}$ достигает предельного значения, зависящего от медианного напряжения s. Поэтому условие предельного равновесия может быть сформулировано в форме уравнения

$$\tau_{\max} = F(s) . \tag{5.1}$$

Замечая, что форма (4.10) наиболее удобна с точки зрения исключения с помощью критерия предельного равновесия (5.1) максимального касательного напряжения $\tau_{\max}$, сразу же получаем векторное дифференциальное уравнение равновесия для обобщённого идеально пластического тела Прандтля:

$$\begin{gathered} \text{ď}s + F'(s)(\text{‘}\mathbf{l}(\text{‘}\mathbf{n} \cdot \text{ď})s + \text{‘}\mathbf{n}(\text{‘}\mathbf{l} \cdot \text{ď})s - (\text{‘}\mathbf{l} \cdot \text{‘}\mathbf{n})\text{ď}s) + \\ + F(s)(\text{‘}\mathbf{l}(\text{ď} \cdot \text{‘}\mathbf{n}) + \text{‘}\mathbf{n}(\text{ď} \cdot \text{‘}\mathbf{l}) - \text{‘}\mathbf{l} \times (\text{ď} \times \text{‘}\mathbf{n}) - \text{‘}\mathbf{n} \times (\text{ď} \times \text{‘}\mathbf{l})) = \mathbf{0}. \end{gathered} \tag{5.2}$$

Приведённое уравнение связывает медианное напряжение s и единичные асимптотические директоры $\text{‘}\mathbf{l}$, $\text{‘}\mathbf{n}$. В том случае, когда директоры $\text{‘}\mathbf{l}$, $\text{‘}\mathbf{n}$ ортогональны, уравнение (5.2) несколько упрощается

$$\begin{gathered} \text{ď}s + F'(s)(\text{‘}\mathbf{l}(\text{‘}\mathbf{n} \cdot \text{ď})s + \text{‘}\mathbf{n}(\text{‘}\mathbf{l} \cdot \text{ď})s) + \\ + F(s)(\text{‘}\mathbf{l}(\text{ď} \cdot \text{‘}\mathbf{n}) + \text{‘}\mathbf{n}(\text{ď} \cdot \text{‘}\mathbf{l}) - \text{‘}\mathbf{l} \times (\text{ď} \times \text{‘}\mathbf{n}) - \text{‘}\mathbf{n} \times (\text{ď} \times \text{‘}\mathbf{l})) = \mathbf{0}. \end{gathered} \tag{5.3}$$

Одной из важнейших с прикладной точки зрения моделей является идеально сыпучая среда Кулона–Мора, которая достаточно хорошо описывает механическое поведение сухих грунтов и песков. В состоянии течения такой среды должно выполняться предельное условие (ϕ^* – угол трения)

$$\tau_{\max} = -\sin \phi^* s . \tag{5.4}$$

Кроме того, наименьшее главное напряжение σ_3 должно быть неположительным; то же самое справедливо и для наибольшего главного напряжения σ_1. Из предельного условия (5.4) можно заключить также, что деформация среды Кулона–Мора возможна, только если *отношение* “крайних” главных напряжений равно предельной постоянной:

$$0 \le \frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{1-\sin\phi^*}{1+\sin\phi^*} \le 1. \tag{5.5}$$

Векторное дифференциальное уравнение равновесия (5.3) в случае идеально сыпучей среды Кулона–Мора будет иметь следующий вид:

$$\begin{gathered}\mathrm{E}\,\mathrm{cosec}\,\phi^*\,\text{ď} - \text{‘}\mathbf{l}(\text{‘}\mathbf{n}\cdot\text{ď}) - \text{‘}\mathbf{n}(\text{‘}\mathbf{l}\cdot\text{ď}))\ln s - \\ -\text{‘}\mathbf{l}(\text{ď}\cdot\text{‘}\mathbf{n}) - \text{‘}\mathbf{n}(\text{ď}\cdot\text{‘}\mathbf{l}) + \text{‘}\mathbf{l}\times(\text{ď}\times\text{‘}\mathbf{n}) + \text{‘}\mathbf{n}\times(\text{ď}\times\text{‘}\mathbf{l}) = \mathbf{0}.\end{gathered} \tag{5.6}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232 с.
2. Радаев Ю.Н. Пространственная задача математической теории пластичности (2-е изд., перераб. и доп.). Самара: Изд-во Самарского гос. университета, 2006. 340 с.
3. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420с.
4. Соколовский В.В. Теория пластичности. М.: Высш. шк., 1969. 608с.
5. Ильюшин А.А. Пластичность. Часть первая. Упруго-пластические деформации. М.–Л.: Гостехтеоретиздат, 1948. 376с.
6. Хаар А., Карман Т. К теории напряжённых состояний в пластических и сыпучих средах. Теория пластичности: //Сб. статей (ред. Ю.Н. Работнов). М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. С. 41-56. (Оригинальная работа: Haar A., Karman Th. Zur Theorie der Spannungszustande in plastischen und sandartigen Medien. Nachr., kgl. Ges. Wiss. Gott. Math.-phys. Kl., 1909. H. 2. S. 204-218.)
7. Лоде В. Влияние среднего главного напряжения на текучесть металлов. Теория пластичности: //Сб. статей (ред. Ю.Н. Работнов). М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. С.168-205.
8. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. Т.2. М.: Мир, 1969. 864с.

Сведения об авторе:

Радаев Юрий Николаевич – ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, + 7 (495) 4343592
E-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

СОЧЕТАНИЕ МЕТОДОВ ОПТИМИЗАЦИИ И ГИУ ДЛЯ РАСПОЗНАВАНИЯ ДЕФЕКТОВ В УПРУГИХ СРЕДАХ С ПОМОЩЬЮ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ВОЛН

Сумбатян М.А.

Рассматриваются задачи идентификации дефектов в упругих средах с помощью сканирования ультразвуковыми волнами. В динамической постановке проблема может быть сведена к системе граничных интегральных уравнений (ГИУ) по граничной поверхности дефектов. При решении прямой задачи дифракции геометрия дефектов известна заранее, в этом случае решение задачи строится численно стандартным методом коллокации. Однако в обратной задаче распознавания геометрии дефектов их форма заранее неизвестна и представляет собой дополнительный набор неизвестных функций, подлежащих определению. В итоге приходим к системе нелинейных уравнений, которые решаются с использованием современных методов оптимизации. Приведены примеры идентификации дефектов сложной формы.

1. Постановка задачи и основные ГИУ. Задачи идентификации неизвестных дефектов в объектах ответственного назначения являются предметом современного неразрушающего контроля (НК). Одним из эффективных методов НК является ультразвуковой (УЗ) метод, состоящий в зондировании области с помощью УЗ датчика (сенсора). Датчик излучает УЗ импульс внутрь упругой среды и принимает отражённый от дефекта сигнал-отклик в эхо-режиме. При этом целью УЗ НК является идентификация дефекта по измеренной амплитуде отражённого импульса (рис.1). Предполагается, что амплитуда отраженного (рассеянного) сигнала может быть измерена в достаточно широком диапазоне углов $¯ \in (0,2®)$.

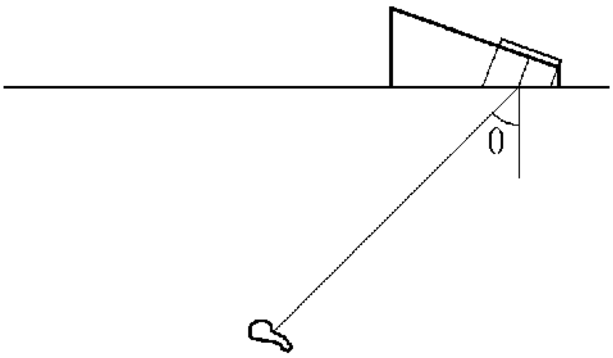


Рис.1. Распознавание дефекта в упругой среде с помощью УЗ датчика

Ограничимся для простоты двумерной задачей. Если граничный контур дефекта был бы известен заранее, то мы имели бы **прямую** задачу дифракции: по заданному контуру дефекта определить диаграмму рассеяния на дефекте, т.е. амплитуду отражённой УЗ волны как функцию полярного угла на заданной частоте колебаний μ .

Математические соотношения выпишем в рамках *скалярной модели*. Она основана на упрощённой классической модели УЗ НК, что продольная волна после отражения остаётся продольной, а поперечная – поперечной [1]. Таким образом, если датчик работает на продольных волнах, тогда все расчёты проводятся для продольной волны, а если датчик генерирует внутрь среды поперечную волну, то все расчёты проводятся для поперечной волны. Очевидно, в обоих случаях имеем скалярную теорию – либо для продольного, либо для поперечного волнового потенциала. Задача дифракции при этом сводится к одному граничному интегральному уравнением (ГИУ) [2]:

$$\begin{gathered}\int_0^{2®} \ln[r(¯,\sim)]\,g(\sim)\,d\sim \, = e^{ik°(¯)\cos ¯}, \qquad 0 \le ¯ \le 2® \\ r(¯,\sim) = [°^2(¯) + °^2(\sim) - 2°(¯)°(\sim)\cos(¯ - \sim)]^{1/2}\end{gathered} \tag{1.1}$$

где для простоты считаем граничный контур дефекта звёздным, при этом он описывается однозначной функцией полярного радиуса $°(¯), ¯ \in (0,2®)$. Заметим, что также для простоты ядро ГИУ здесь выписано в низкочастотном приближении для малых k, где $k = \mu / c$ – волновое число, взятое для соответствующего типа волн. Если частота колебаний произвольна (не мала), то уравнение (1.1) сохраняет свой вид с единственной заменой в ядре, состоящей в том, что вместо функции $\ln[r(¯,\sim)]$ должна стоять функция Ханкеля $H_0^{(1)}[kr(¯,\sim)]$. Уравнение (1.1) для определённости выписано для случая акустически мягкой границы, при этом неизвестная функция $g(\sim)$ связана с давлением на граничном контуре. Ясно, что в прямой задаче функция $°(¯)$ является известной. После того, как ГИУ (1.1) решено, т.е. функция $g(\sim)$ найдена, вещественная амплитуда рассеяния УЗ импульса вычисляется по следующей формуле:

$$\left| \int_0^{2®} g(\sim) e^{-ik°(\sim)\cos(¯-\sim)} d\sim \right| = F(¯), \qquad 0 \le ¯ \le 2® \tag{1.2}$$

Если граничный контур дефекта имеет произвольную форму, а не является звездным, то ГИУ задачи низкочастотной дифракции имеет вид

$$\int_\ell \ln|x-y|\, g(y) dl_y = e^{ikx_1}, \qquad x \in \ell, \qquad x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2)$$
$$r = |x-y| = [(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]^{1/2} \tag{1.3}$$

При этом диаграмма рассеянного волнового поля даётся формулой

$$\left| \int_\ell g(y) e^{-ik(y_1\cos\theta + y_2\sin\theta)} dl_y \right| = F(\theta), \quad 0 \le \theta \le 2\pi \tag{1.4}$$

Если дефект является не объёмной полостью, а тонкой трещиной, возможно, искривленной, то уравнение (1.3) по-прежнему имеет место, однако вместо логарифма в ядре будет стоять функция

$$\frac{\partial^2 \ln r}{\partial n_x \partial n_y} = -\frac{(n_x \cdot n_y) + 2\cos(y-x, n_y)\cos(y-x, n_x)}{r^2} \tag{1.5}$$

где n_x и n_y – единичные вектора внешней нормали, соответственно, в граничных точках x и y. При этом диаграмма рассеяния имеет вид

$$\left| \int_\ell [n_1(y)\cos¯ + n_2(y)\sin¯] e^{-ik(y_1\cos¯ + y_2\sin¯)} g(y) d\ell_y \right| = F(¯), \quad 0 \le ¯ \le 2® \tag{1.6}$$

Качественный анализ выписанных выше ГИУ показывает, что для дефекта в виде полости, уравнения (1.1) и (1.3), ядро имеет логарифмическую особенность, а для трещины (1.5) – гиперсингулярную особенность при $y \to x$. Известно [3], что устойчивые численные методы могут быть применены к уравнениям обоих классов. Следовательно, прямая задача не создает проблем неустойчивости, характерных для некорректных задач, которые обычно не могут быть решены напрямую и требуют особых подходов в духе регуляризации.

Очевидно, что постановка прямой задачи дифракции не решает задачу идентификации граничного контура дефекта ℓ, который заранее не известен. Для идентификации граничного контура следует использовать результаты измерений для функции рассеяния вида (1.2), (1.4), (1.6) – в зависимости от типа исследуемой задачи. Т.е. приходим к типичной **обратной** задаче. Заметим, что все функции рассеяния выражаются некоторым нелинейным компактным оператором, действующим на функцию, определяющую граничное уравнение контура, если этот оператор рассматривать в любом естественном функциональном пространстве, например, в $C(\ell)$ или $L_2(\ell)$. Из классических результатов функционального анализа следует, что такой оператор не имеет непрерывного обратного. Это значит, что малым возмущениям во входной функции $F(\theta)$ могут соответствовать большие возмущения самого контура. Таким образом, как и большинство известных обратных задач, данная задача является некорректной по А.Н.Тихонову [4]. Как правило, это свойство приводит к сильной неустойчивости при численной реализации. Очевидно, математически все рассматриваемые обратные задачи могут быть сведены к сильно нелинейной некорректной системе двух интегральных уравнений, типа (1.1) – (1.2) или (1.3) – (1.4).

2. Сведение обратных задач к задачам оптимизации. Разобьём граничный контур ℓ на достаточно большое число дуг $\ell_j, j=1,...,J$ и на каждой дуге выберем узел: $x^j = y^j \in \ell_j, \quad j=1,...,J$. В результате получим на этом контуре достаточно плотную сетку узлов. Запишем основное ГИУ прямой задачи дифракции, т.е. уравнения вида (1.1), (1.3) в символическом операторном виде

$$A(\ell_j)g = f\ , \tag{1.7}$$

где мы указали в явном виде, что вид оператора A зависит от контура ℓ, что в дискретном виде эквивалентно зависимости от всего набора элементарных дуг $\ell_j, \quad j=1,...,J$. Данная запись фактически означает некоторую систему алгебраических уравнений для нахождения значений функции неизвестного давления в точках $y^j \in \ell_j, \quad j=1,...,J$. При этом правая часть этой системы, а также вид матричного оператора A известны. В формуле (1.7) мы подчеркнули в явном виде, что конечномерный оператор задачи дифракции после дискретизации зависит от положения всех элементарных дуг ℓ_j .

Как было отмечено выше, операторное уравнение прямой задачи (1.7) корректно разрешимо, поэтому можно записать результат решения матричной системы (1.7) в виде

$$g = A^{-1}(\ell_j)f \tag{1.8}$$

Тогда на примере функции рассеяния (1.6), если считать, что результаты измерения этой функции проведены для углов $\theta_m, F(\theta_m) = F_m, \quad m=1,2,...,M$ и дают массив входных данных размерности M , приходим к соотношениям

$$\left| \int_\ell [n_1(y)\cos\theta_m + n_2(y)\sin\theta_m] e^{-ik(y_1\cos\theta_m + y_2\sin\theta_m)} [A^{-1}(\ell_j)f](y)d\ell_y \right| = F(\theta_m), \quad m=1,...,M \tag{1.9}$$

представляющим собой сильно нелинейную некорректную алгебраическую систему. Ясно, как записать подобную систему для двух других выписанных выше задач, где диаграмма рассеяния даётся формулами (1.2) и (1.4).

Заметим, что общие результаты функционального анализа [4] показывают, что формально конечномерная система (1.9), в отличие от исходной континуальной, является корректно разрешимой в смысле А.Н.Тихонова. Однако с достаточно плотной сеткой узлов она приближает исходное континуальное уравнение и, следовательно, имеет операторные свойства, схожие с теми, которыми обладает исходный вполне непрерывный оператор. Тем не менее, при разумном выборе небольшого числа параметров, определяющих геометрию граничного контура, нелинейная конечномерная система (1.9), полученная таким образом, допускает прямое устойчивое решение.

Следует отметить, что соотношение между числом неизвестных J и числом уравнений M в системе (1.9) может быть любым. Однако надёжную реконструкцию дают методы, при которых размерность вектора входных данных не меньше, чем размерность вектора неизвестных: $M \geq J$. При выборе численного метода решения сильно нелинейной системы (1.9) одним из наиболее эффективных представляется метод, сводящий её к задаче оптимизации. Более конкретно, можно поставить задачу минимизации функционала невязки между левой и правой частью (1.9), записанного, например, в квадратичной метрике:

$\min[\Omega(\ell_j)]$:

$$\Omega(\ell_j) = \sum_{m=1}^{M}\left[\left|\int_{\ell}[n_1(y)\cos{}^{-}{}_{m} + n_2(y)\sin{}^{-}{}_{m}]e^{-ik(y_1\cos{}^{-}{}_{m} + y_2\sin{}^{-}{}_{m})}[A^{-1}(\ell_j)f](y)d\ell_y\right| - F_m\right]^2 \qquad (1.10)$$

3. Решение задачи оптимизации и примеры восстановления образа дефектов. Конкретные вычисления показывают, что, как правило, в обратных задачах идентификации дефектов по известному рассеянному полю функционал вида (1.10) является сильно осциллирующей функцией своих аргументов. При этом он может иметь большое число локальных минимумов. Заметим, что $\Omega \geq 0$, при этом, если у него есть истинное решение (что по физическому смыслу подразумевается по умолчанию), то значение $\Omega = 0$ в виде глобального минимума достигается или почти достигается при переходе от континуальной к дискретной формулировке, по крайней мере, на истинном решении. При этом локальные минимумы весьма далеки от глобального $\Omega = 0$. Вопрос о том, существуют ли другие точки, в которых $\Omega = 0$, связан с вопросом единственности восстанавливаемого контура – вопрос, который практически не исследован, и здесь мы его не рассматриваем. Таким образом, необходимо построить численный алгоритм решения оптимизационной задачи (1.10), который обеспечивает устойчивое нахождение глобального минимума.

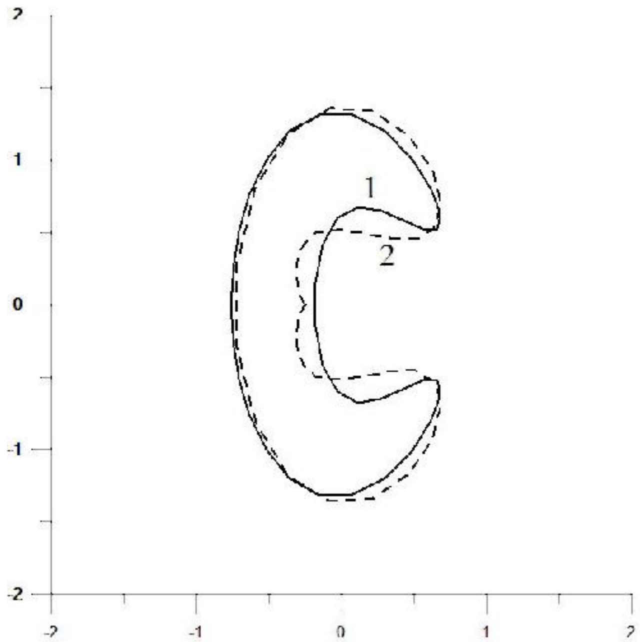


Рис.2. Пример реконструкции дефекта в виде «бублика»: сплошная линия – истинный контур; штриховая линия – восстановленный контур

Среди известных методов решения оптимизационных задач неплохо зарекомендовали себя градиентные методы. В применении к задаче минимизации, на каждом шаге итерационного процесса следующее приближение ищется в направлении, на котором достигается максимальная скорость убывания функции [5]. Эти методы приводят к поиску экстремума за разумное время. Для ускорения сходимости некоторые авторы применяют методы второго порядка, требующие вычисления матрицы Гессе вторых производных: метод Ньютона-Канторовича, метод Левенберга-Марквардта и подобные [5]. Доказывается, что методы этого вида обеспечивают наивысшую скорость сходимости, однако в задачах с плохой обусловленностью они могут давать неустойчивые результаты.

Главным недостатком описанных регулярных методов является то, что они приводят лишь к одному из локальных минимумов, в то время, как решение задачи находится в глобальном минимуме. В связи с этим мы применяли метод глобального случайного поиска [6], родственный современным генетическим алгоритмам. Эффективность алгоритма основана на следующих двух его особенностях: 1) случайный выбор значений в окрестности точек с наименьшими значениями функционала происходит более часто, чем в окрестности точек с большими значениями; 2) области, в которых выбираются значения случайного поиска, постепенно стягиваются к малым окрестностям точек с наименьшими значениями функции. Этот метод демонстрирует удивительную сходимость. Все приведённые ниже примеры восстановления построены на его основе.

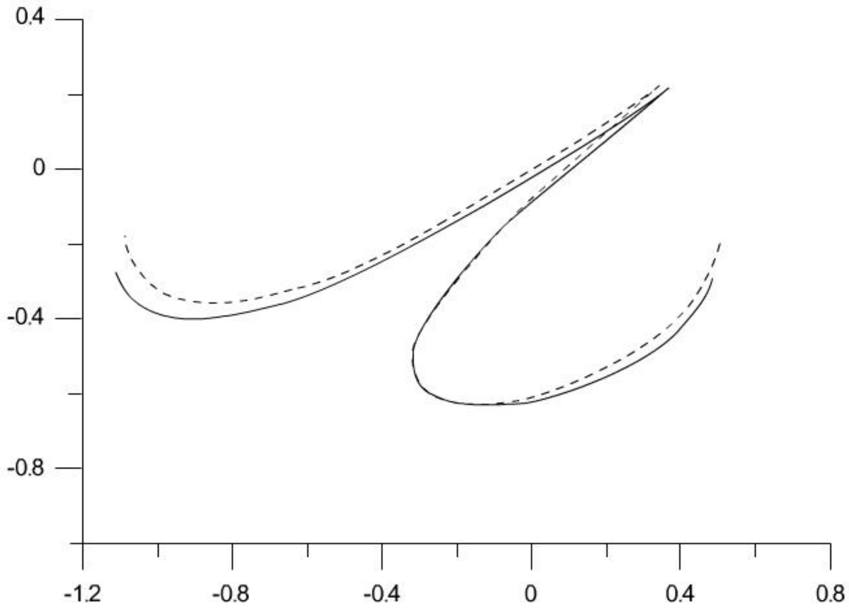


Рис.3. Пример реконструкции трещины с острым углом: сплошная линия – истинный контур; штриховая линия – восстановленный контур

ЛИТЕРАТУРА

1. Ермолов И.Н. Теория и практика ультразвукового контроля. М.: Машиностроение, 1981. 240с.
2. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987. 312с.
3. Sumbatyan M.A., Scalia A. Equations of mathematical diffraction theory. CRC Press: Boca Raton (Florida), 2005. 292p.
4. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 284с.
5. Гилл Ф. , Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. М.: Мир, 1985. 509 с.
6. Жиглявский А.А. Математическая теория глобального случайного поиска. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985. 293с.

Сведения об авторе:

Сумбатян Межлум Альбертович – зав. каф. теоретической и компьютерной гидроаэродинамики, Южный федеральный университет, факультет математики, механики и компьютерных наук, г. Ростов-на-Дону, +7 (928) 139 70 67

E-mail: sumbat@math.rsu.ru

INTERDISCIPLINARY PROBLEMS IN MECHANICS OF GROWING SOLIDS

Alexander V. Manzhirov

Problems of growing solids mechanics which need additional information from physics, chemistry, biology, and other sciences to be solved are under discussion. They arise from mathematical modeling of various technological and natural processes and very important for practical applications.

Introduction

Let us consider a growth of 3D solid phase due to the influx of 2D surfaces. This influx may occur due to phase transition, spraying, electroforming, deposition and some other processes. To describe the process of growth it is necessary to determine the position of a moving surface of a 3D solid, the stress-strain state of deposited surfaces, and boundary conditions on fixed part of the outer surface. We suppose that the position of moving boundary is known at any instant of time, e.g., from the solution of the generalized Stefan problem. We will show as well that in order to solve the complete growth problem one has to determine the stress-strain state of deposited surfaces. This can be done from experiments or from the solution of some specific physical, chemical, biological or some other problem. Here we don't deal with these specific problems from other sciences. We want only to underline their importance and necessity of their development. Here we suppose that such problems have been already solved and we know the stress strain state of depositing 2D surfaces Using this information let us determine the stress-strain state of a solid in the process of growth.

Basics of growing solids mechanics

Deformation processes in a solid whose composition, mass, or volume varies in a piecewise continuous manner due to the accretion of new material to the outer surface of a body have been studied in many works. Numerous problems of solid mechanics which arise in the modeling of such processes are completely new and form a separate field of research known as mechanics of growing or accreted solids. The importance of this field is determined by the fact that the fabrication of almost all objects in solid mechanics (e.g. buildings, structures, structural elements, machine members, etc.) provides accretion. Specific examples include concrete structures building-up, metal solidification, spray deposition of semiconducting films, and crystal growth. One could easily continue this list. The majority of papers which deal with the mechanics of growing solids contain a theory which is constructed as some special replicas of the theory of deformable solids in three-dimensional Euclidean space. Nevertheless the geometric properties of Euclidean space are not enough to describe the stress-strain state of a body which was formed by the continuous joining of pre-stressed parts. It is extremely important that the growing body can be considered as a special class of inhomogeneous body in which inhomogeneity arises as a result of nonholonomic distortion caused by the deposition of new incompatible pre-stressed parts. Mechanics of growing solids from this point of view have much in common with the theory of defects, in particular, with the geometric theory of continuously distributed dislocations. In this context geometric concepts such as connection, curvature, torsion, parallelism are among the basic concepts of the general theory of growing solids. The continuous growth is a process of continuous deposition of infinitesimal elements to a body. One can consider an infinitely thin layers, threads, and points. Since such infinitesimal elements are continuous bodies of various dimensions, they can carry the stress–strain state corresponding to their dimension. In this regard, the distribution of stresses in a continuously growing body depends on geometric class of joined infinitesimal elements which implies the construction of different versions of the theory of growing solids. Here we consider a body which grows due to continuous deposition of two-dimensional material surfaces. The theory of fiber bundles of differentiable manifolds is taken as the geometric foundation of mathematical theory of growing solids. Analytic properties of differentiable manifolds are determined without utilization of prescribed connection. This fact allows one to formulate an appropriate boundary value problem in terms of modern geometry and determine the particular type of connectivity a posteriori taking into account specific kinematic and static characteristics of the accretion process. Furthermore the geometrical concept of a fiber bundle corresponds to key features of a growing solid whose growth is modeled as a continuous deposition of deformed material elements. Such an assembly generates a nontrivial fiber bundle of material manifold. The structure of this bundle is completely determined by the scenario of accretion.

Main axioms

In classical mechanics of solids bodies are treated as invariant sets [1]. Mechanics of growing solids admit the *evolution* of the set B that represents body and treat it as *variable* set [2-15]. In following we will refer to the bodies of invariable composition as to *permanent bodies*. If a permanent body has more than one configuration (up to rigid motion), i.e. undergoes deformation in physical space, we call it *permanent solid*. We will distinguish the permanent bodies and growing bodies, and respectively permanent solids and growing solids. Now according to W. Noll we introduce the definition of continuous permanent body. The body B is *continuous body of class* C^p, ($p \geq 1$), if a class of configurations C satisfies the following axioms:

B1. Every configuration $\gamma \in \mathsf{C}$ is homeomorphism, and its range is an open subset of affine space E , which is called *region* occupied by the body B configuration χ.

B2. If $\gamma, \chi \in \mathsf{C}$ are configurations, then their composition $\lambda = \gamma \circ \chi^{-1}$ belongs to class C^p, i.e. functions λ are continuous and their derivatives up to order p are continuous also.

B3. If $\chi \in \mathsf{C}$ is a configuration and if $\lambda : \chi(\mathsf{B}) \to E$ is a deformation of class C^p, then $\lambda \circ \chi \in \mathsf{C}$.

By virtue of axioms B1 - B3 the class of mapping C gives rise on the body B the structure of C^p manifold. Since all configuration are homeomorphisms all their images, as well as the body B itself, are topologically indistinguishable. Thus the class of admissible configurations defines the topological structure of solid.

In order to describe the topological structure of growing solid we have to take into account one more internal structure, namely the bundle of manifold B. This structure naturally defines the topological properties of body parcels, that continuously adhered to it during the growing process. We introduce material manifold M as a fibre bundle of a smooth three-dimensional manifold. As one knows from differential geometry, a fibre bundle is defined by base N which is a smooth manifold itself, structure group G, and projection mapping π. Under this assumptions the dimension of base N is equal to one and material manifold M is represented as bundle over interval.

One may define a permanent body B as an open subset of a material manifold M bounded by non-identical fibers. In this case the body B can be represented as a union of fibers whose indices are in the open interval (α, β), i.e.

$$\mathsf{B} = \mathsf{B}(\alpha, \beta) = \bigcup_{x^3 \in (\alpha, \beta)} \mathsf{M}_{x^3}.$$

A growing body can be defined as a parametric family of such sets

$$\mathsf{C} = \left\{ \mathsf{B}_\gamma = \mathsf{B}(\alpha, \gamma) \mid \gamma \in (\alpha, \beta) \right\},$$

where γ is a parameter of the family. While $\alpha \to \beta$ the body degenerates into an infinitely thin ply or a point. Obviously this definition may be generalize to the next one

$$\mathsf{C} = \left\{ \mathsf{B}_\gamma = \mathsf{B}(\alpha_\gamma, \beta_\gamma) \mid (\alpha_\gamma, \beta_\gamma) \subset (\alpha, \beta) \right\},$$

where $(\alpha_\gamma, \beta_\gamma)$ are nested intervals.

According to the above definitions the boundary of growing solid should be topologically equivalent to the typical fiber which is smooth manifold itself and hence the growing boundary should be geometrically closed surface. If the growing boundary is topologically equivalent to the *manifold with edge* then a growing body can be defined as follows

$$\mathsf{C} = \left\{ \mathsf{B}_\gamma = \mathsf{B}_0 \cap \mathsf{B}(\alpha_\gamma, \beta_\gamma) \,|\, (\alpha_\gamma, \beta_\gamma) \subset (\alpha, \beta) \right\}.$$

Here B_0 is fixed subset of M with smooth boundary.

Equations and boundary conditions of the mathematical theory of growing solids

Recall some facts from classical theory of hyperelasticity. The elastic potential of the permanent hyperelastic solid $W_{\diamond}$ may be represent as follows

$$W_\chi^{\chi_0} = W_{\chi\diamond}\left(\mathbf{F}_\chi^{\chi_0}, \mathsf{X}\right),$$

where $\mathbf{F}_\chi^{\chi_0}$ is a deformation gradient which is the gradient of the mapping of stress free (natural) shape $\chi_0(\mathsf{B})$ on actual shape $\chi(\mathsf{B})$), i.e.

$$\mathbf{F}_\chi^{\chi_0} = \nabla_{\chi_0}\chi = \nabla\left(\chi \circ \chi_0^{-1}\right).$$

The distribution of stored energy that is determined by the elastic potential $W_\chi^{\chi_0}$ induces the stress field $\mathbf{T}_\chi^{\chi_0}$ (first Piola-Kirchhoff stresses) in accordance with the constitutive relation

$$\mathbf{T}_\chi^{\chi_0} = \frac{\partial W_\chi^{\chi_0}}{\partial \mathbf{F}_\chi^{\chi_0}}.$$

Here and in follows the subscript χ indicates that considered field corresponds to the configuration χ, the shape $\chi(\mathsf{B})$ and appropriate external fields that cause it.

In order to obtain particular approximations of $W_\chi^{\chi_0}$ one has to proceed the *gauge*. If the deformed solid possesses *natural* (i.e. free of stresses) shape then the gauge leads to the following conditions:

$$W_\chi^{\chi_0}(\mathbf{1}, \mathsf{X}) = 0, \quad \frac{\partial W_\chi^{\chi_0}}{\partial \mathbf{F}_\chi^{\chi_0}}\Big|_{\mathbf{F}_\chi^{\chi_0} = \mathbf{1}} = \mathbf{0}.$$

The first condition expresses the fact that a stored elastic energy differs from zero only in a deformed (i.e., a non-natural) shape and the second condition shows that stresses in natural shape vanish.

In common case the natural shape may not exists. This leads to so-called theory of *inhomogeneous bodies* that was developed by W. Noll, C.C. Wang and others. So, one can find the configuration that relax neighborhood of fixed point locally, but there is no configuration that carries the whole body to natural state. Let the reference shape $\chi_R(\mathsf{B})$ is the image of body B under the mapping χ_R. It is stressed. One can associate with each material point the deformation that carries the neighborhood of the point to stress-free state. However, these deformations for different points correspond to different configurations. One may construct the collection of such local deformations associated with all material points and obtain the tensor field $\mathbf{K}^{-1}$ over set B that is not in general a gradient of any vector field. The corresponding tensor field of local configurations we denote by κ. It's clear that $\kappa = \mathbf{K}^{-1} \circ \chi_R$. We can determine the connection coefficients $\Gamma_{\gamma\alpha}^{\beta}$ on material manifold M in the form $\Gamma_{\gamma\alpha}^{\beta} = \partial_\alpha \left(\mathbf{K}^{-1}\right)_{\cdot\gamma}^{\rho} K_{\cdot\rho}^{\beta}.$ The corresponding connection can be nontrivial having nonzero torsion. Note that material manifold is a bundle and each its fiber $\mathsf{M}_{\mathsf{X}^3}$ is associated with a material surface strained before its adhesion to a body. From the mechanical point of view it means that each fiber was deformed from natural state before adhesion. So each individual fiber has a a global two-dimensional natural reference configuration.

Taking into account this, we introduce the tensor field $\mathbf{K}(\mathsf{X}^1, \mathsf{X}^2; \mathsf{X}^3)$ as a local deformation associated with individual material surface $\mathsf{M}_{\mathsf{X}^3}$. It can be quantify as pre-deformation of a surface from natural reference configuration onto configuration that match its position in reference shape. Thus, at each point of the material manifold tensor field $\mathbf{K}(\mathsf{X})$ is defined. This field is continuously differentiable due to the continuity of accretion process. Moreover the field $\mathbf{K}^{*}\cdot\mathbf{K}$ specifies a metric on a surface embedded in three-dimensional Euclidean space on each fiber $\mathrm{M}_{\mathrm{X}^3}$. The complete distortion has the form $\mathbf{H}=\mathbf{K}\cdot\mathbf{F}$ and elastic potential $W_{\chi}^{\chi_0}(\mathbf{H},\mathrm{X})$ can be defined on the configuration χ_0 only locally. The stress tensor $\mathbf{T}_{\chi}^{\chi_0}$ relevant to χ_0 can be defined fiber-by-fiber as follows

$$\mathbf{T}_{\chi}^{\chi_0}=\frac{\partial W_{\chi}^{\chi_0}}{\partial \mathbf{H}}.$$

Elastic potential can be determined globally with respect to the configuration χ_R. Introduce elastic potential $W_{\chi}^{\chi_R}$ that is an elastic energy per unit volume in the reference state χ_R and can be interpreted as a function of three arguments $\mathbf{F}$, $\mathbf{K}$, X, i.e.

$$W_{\chi}^{\chi_R}(\mathbf{K},\mathbf{F},\mathrm{X})=J_{\mathbf{K}}^{-1}W_{\chi}^{\chi_0}(H,\mathrm{X})=J_{\mathbf{K}}^{-1}W_{\chi}^{\chi_0}(\mathbf{K}\cdot\mathbf{F},\mathrm{X}).$$

Even if the functional $W_{\chi}^{\chi_0}$ is uniform (i.e., it does not depend explicit on material coordinates X), functional $W_{\chi}^{\chi_R}$ is not uniform because $\mathbf{K}$ depends on X. This yields the expression for Piola stress tensor $\mathbf{T}_{\chi}^{\chi_R}$ field relevant to χ_R by the formula

$$\mathbf{T}_{\chi}^{\chi_R}=\frac{\partial W_{\chi}^{\chi_R}}{\partial \mathbf{F}}=J_{\mathbf{K}}^{-1}\mathbf{K}^{*}\cdot\frac{\partial W_{\chi}^{\chi_0}}{\partial \mathbf{H}}.$$

The boundary value problem for an accreted solid is determined by the equations of equilibrium in $V(t)$ with boundary $\Omega(t)$ parametrically dependent on time, i.e.

$$\nabla_{\chi_R}\cdot\left[J_{\mathbf{K}}^{-1}\mathbf{K}^{*}\cdot\frac{\partial W_{\chi}^{\chi_C}(\mathbf{H},\mathrm{X})}{\partial \mathbf{H}^{*}}\Big|_{\mathbf{H}=\mathbf{K}\cdot\mathbf{F}}\right]+\rho_{\chi_R}\mathbf{b}=\mathbf{0},$$

and boundary conditions stated on $\Omega(t)$:

$$\mathbf{n}_{\chi_R}\cdot\left[J_{\mathbf{K}}^{-1}\mathbf{K}^{*}\cdot\frac{\partial W_{\chi}^{\chi_C}(\mathbf{H},\mathrm{X})}{\partial \mathbf{H}^{*}}\Big|_{\mathbf{H}=\mathbf{K}\cdot\mathbf{F}}\right]\Big|_{\Omega(t)}=\mathbf{p}.$$

At the first glance a formal statement of the boundary value problem differs from the classical one only by the fact that the boundary of domain depends parametrically on time. However, there is more profound difference: the elastic potential depends on the tensor field of distortion the determination of which requires additional conditions. If the growth of a body occurs due to continuous influx of pre-stressed material surfaces then this condition can be written in the form

$$\mathbf{P}_{\chi_R}\cdot\left[J_{\mathbf{K}}^{-1}\mathbf{K}^{*}\cdot\frac{\partial W_{\chi}^{\chi_C}(\mathbf{H},\mathrm{X})}{\partial \mathbf{H}^{*}}\Big|_{\mathbf{H}=\mathbf{K}\cdot\mathbf{F}}\right]\cdot\mathbf{P}_{\chi_R}\Big|_{\Omega(t)}=\mathrm{T}.$$

Here $\mathbf{P}_{\chi_R}=\left(\mathbf{E}-\mathbf{n}_{\chi_R}\otimes\mathbf{n}_{\chi_R}\right)$ is a projector onto the tangent plane to $\Omega(t)$. This equation expresses the fact that the fibers align with the specified tension determined by the surface tensor T, i.e., two-dimensional tensor of second rank defined in the tangent space of the adhering material surface.

Summary

We show the necessity of solving specific interdisciplinary problems on moving boundary of a growing solid for obtaining complete solution of growing mechanics problems. We want to attract attention of young researches to these very interesting problems and to encourage them to work in new interdisciplinary areas which we believe present the future of science.

Acknowledgements

This research was financially supported by the Russian Foundation for Basic Research (grants Nos 11-01-00669, 11-08-93967, 12-01-92696, 12-08-01119), by the Department of Energetics, Mechanical Engineering, Mechanics and Control Processes of the Russian Academy of Sciences (Program No. 12), and by the Program of the President of the Russian Federation for Supporting Leading Scientific Schools (grant No. 3288.2010.1).

References

1. W. Noll Materially uniform simple bodies with inhomogeneities, Arch. Rat. Mech. Anal. 2: 1-32. 1967.
2. N.Kh. Aruyunyan, A.V. Manzhirov, Contact Problems in the Theory of Creep [in Russin]. Izd-vo NAN RA, Erevan, 1991, 1999.
3. N.Kh. Aruyunyan, A.V. Manzhirov, and V.E. Naumov, Contact Problems in Mechanics of Growing Solids [in Russin]. Nauka Publ., Moscow, 1991.
4. A.V. Manzhirov and S. A. Lychev, Mathematical Modeling of Growth Processes in Nature and Engineering: A Variational Approach. Journal of Physics: Conference Series 181(1):012018. 2009.
5. A.V. Manzhirov and S.A. Lychev, Residual Stresses in Growing Bodies, in: A.V. Manzhirov, N.K. Gupta, D.A. Indeitsev, eds. Topical problems in solid and fluid mechanics, New Delhi : Elite Pub. House, pp. 66-79, 2011.
6. S.A. Lychev, T.N. Lycheva and A.V. Manzhirov, Unsteady Vibration of a Growing Circular Plate. Mech. Solids 46(2): 325-333. 2011.
7. S.A. Lychev, Universal Deformations of Growing Solids. Mech. of Solids 46(6): 495-507. 2011.
8. A.V. Manzhirov and S.A. Lychev, Mathematical Theory of Growing Solids. Finite Deformations. Doklady Physics. 57(4): 160-163. 2012.
9. S. A. Lychev, T. N. Lycheva, and A. V. Manzhirov, Unsteady vibration of a growing circular plate. *Mechanics of Solids, Vol.* 46: No. 2, 2011. PP. 325-333.
10. S. I. Kuznetsov, A. V. Manzhirov and I. Fedotov, Heat conduction problem for a growing ball. *Mechanics of Solids, Vol.* 46: No. 6, 2011. PP. 929-936.
11. A. V. Manzhirov and S. A. Lychev, The mathematical theory of growing solids: Finite deformations. Doklady Physics, Vol. 443, No. 4, 2012. PP. 160-163.
12. A.L. Levitin, S.A. Lychev, A.V. Manzhirov and M.Yu. Shatalov**,** Nonstationary vibrations of a discretely accreted thermoelastic parallelepiped. *Mechanics of Solids, Vol.* 47: No. 6, 2012. PP. 677-689.
13. A. V. Manzhirov, Mechanics of growing solids and phase transitions. Key Engineering Materials, Vols. 535-536, 2013. PP. 89-93.
14. S. A. Lychev and A. V. Manzhirov, The mathematical theory of growing solids. Finite deformations. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 77, No. 4, 2013. PP. 585-604.
15. S. A. Lychev and A. V. Manzhirov, Reference configurations in growing solids. *Mechanics of Solids, Vol.* 48: No. 5, 2013 (in press).

Information about the author

Manzhirov Alexander Vladimirovich – Ph.D., D.Sc., Professor, Head of the Laboratory for Modeling in Solid Mechanics, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Vernadsky Ave 101 Bldg1, Moscow, 119526, Russia, Tel.: +7 495 4344138, Fax: +7 499 7399531.

E-mail: manzh@ipmnet.ru, manzh@inbox.ru

О ДВУХ СМЕЖНЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ И ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО НЕОДНОРОДНОЙ ПОЛОСЫ

Аветисян С.А.

Рассматриваются две смежные граничные задачи плоской теории установившейся фильтрации жидкости и теории упругости при антиплоской деформации для экспоненциально неоднородной полосы.

Теория фильтрации жидкости в пористых грунтовых массивах с многочисленными её приложениями изложена в [1,2]. Задача напорной фильтрации при плоском установившемся течении жидкости в пористом грунтовом слое, коэффициент фильтрации которого по глубине изменяется по экспоненциальному закону, исследована в работе [3]. В настоящей статье в постановке плоской теории установившейся фильтрации жидкости рассматривается граничная задача о фильтрации жидкости в пористую полосу с указанным коэффициентом фильтрации. При этом нижняя грань полосы водонепроницаема, а на верхней грани задана вертикальная компонента скорости. Во второй задаче, смежной с первой, рассматривается упругое равновесие полосы при антиплоской деформации, когда нижняя грань жёстко защемлена, на верхней грани действуют распределённые касательные силы, а модуль сдвига полосы по глубине опять изменяется по экспоненциальному закону. При помощи интегрального преобразования Фурье определяются фильтрационные и упругие характеристики поставленных смежных задач.

1. Пусть отнесённый к правой прямоугольной системе координат Oxy (ось Oy направлена вниз) пористый грунтовый массив высотой H имеет форму полосы $\Omega=\{-\infty<x<\infty;0<y<H\}$ и обладает коэффициентом фильтрации k, изменяющимся по вертикальной координате по экспоненциальному закону

$$k=k(y)=k_0\exp(\sim y)\quad(0\le y\le H;\ k_0,\sim=\mathrm{const})\tag{1}$$

Пусть далее грань $y=H$ полосы Ω водонепроницаема, а через систему отрезков $L=\bigcup_{j=1}^{n}[a_j,b_j]$ верхней грани $y=0$ жидкость с заданной скоростью $\mathrm{v}_y\big|_{y=0}=\mathrm{v}(x)\quad(x\in L)$ впрыскивается во внутрь грунтового массива. При плоской установившейся фильтрации для компонент скорости $\mathrm{v}_x,\mathrm{v}_y$ по закону Дарси имеем [1,2,4]

$$\mathrm{v}_x=-k(y)\frac{\partial h}{\partial x},\quad \mathrm{v}_y=-k(y)\frac{\partial h}{\partial y};\quad h=h(x,y)=p(x,y)/¥-y\tag{2}$$

где $p(x,y)$–давление в жидкости, ¥ – её удельный вес, $h(x,y)$– пьезометрическое давление, а $k(y)$ выражается формулой (1). Запишем также уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial y}=0\quad((x,y)\in\Omega)\tag{3}$$

Теперь, принимая во внимание (1) и подставляя (2) в (3), получаем, что функция $h(x,y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}+\sim\frac{\partial h}{\partial y}=0\quad((x,y)\in\mu)\tag{4}$$

Далее введём в рассмотрение сопряжённую с $h(x,y)$ функцию $\cdot(x,y)$ – аналог функции тока, при помощи следующих обобщённых условий Коши-Римана:

$$\frac{\partial h}{\partial x}=e^{-\sim y}\frac{\partial\cdot}{\partial y},\quad \frac{\partial h}{\partial y}=-e^{-\sim y}\frac{\partial\cdot}{\partial x}\tag{5}$$

отсюда

$$\frac{\partial\cdot}{\partial x}=-e^{\sim y}\frac{\partial h}{\partial y},\quad \frac{\partial\cdot}{\partial y}=e^{\sim y}\frac{\partial h}{\partial x}\tag{6}$$

и следовательно, по (2)

$$v_x = -k_0 \frac{\partial \cdot}{\partial y}, \quad v_y = k_0 \frac{\partial \cdot}{\partial x} \tag{7}$$

Исходя из (5)-(6), легко показать, что функция $h(x, y)$ опять удовлетворяет дифференциальному уравнению (4), а функция $\cdot\ (x, y)$ – уравнению

$$\frac{\partial^2 \cdot}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \cdot}{\partial y^2} - \sim \frac{\partial \cdot}{\partial y} = 0 \quad \left((x, y) \in \Omega\right) \tag{8}$$

Очевидно, что в случае однородного грунтового основания $\sim = 0$ и тогда уравнения (4) и (8) переходят в уравнение Лапласа, а условия (5)-(6) – в обычные условия Коши-Римана.

Теперь описанная выше задача фильтрации жидкости в несколько общем случае математически формулируется в виде следующей граничной задачи для функции $h(x, y)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \sim \dfrac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad \left((x, y) \in \Omega\right) \\ \left.\dfrac{\partial h}{\partial y}\right|_{y=0} = -\dfrac{v(x)}{k_0}; \quad \left.\dfrac{\partial h}{\partial y}\right|_{y=H} = 0 \quad \left(-\infty < x < \infty; \quad k_0 = k(0)\right) \end{cases} \tag{9}$$

На основании (7) и (8) обсуждаемая задача формулируется также в виде граничной задачи для функции $\cdot\ (x, y)$, эквивалентной граничной задаче (9):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \cdot}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \cdot}{\partial y^2} - \sim \dfrac{\partial \cdot}{\partial y} = 0 \quad \left((x, y) \in \Omega\right) \\ \left.\dfrac{\partial \cdot}{\partial x}\right|_{y=0} = \dfrac{v(x)}{k_0}; \quad \left.\dfrac{\partial \cdot}{\partial x}\right|_{y=H} = 0 \quad \left(-\infty < x < \infty\right) \end{cases} \tag{10}$$

Решения этих задач построим при помощи интегрального преобразования Фурье, для чего, например, для задачи (9) введём трансформанты Фурье

$$\bar{h}(y, \mathsf{a}) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) e^{i\mathsf{a}x} dx; \quad \bar{v}(\mathsf{a}) = \int_{-\infty}^{\infty} v(x) e^{i\mathsf{a}x} dx \tag{11}$$

В результате, граничная задача (9) в частных производных в трансформантах Фурье преобразуется в граничную задачу для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 \bar{h}}{dy^2} + \sim \dfrac{d\bar{h}}{dy} - \mathsf{a}^2 \bar{h} = 0 \quad \left(0 < y < H\right) \\ \left.\dfrac{d\bar{h}}{dy}\right|_{y=0} = -\dfrac{\bar{v}(\mathsf{a})}{k_0}; \quad \left.\dfrac{d\bar{h}}{dy}\right|_{y=H} = 0 \end{cases} \tag{12}$$

Уравнение из (12) обладает общим решением

$$\bar{h}(y, \mathsf{a}) = \exp\left(-\sim y/2\right)\left[C\,\mathrm{ch}\left(\mathsf{a}_* y/2\right) + D\,\mathrm{sh}\left(\mathsf{a}_* y/2\right)\right] \left(0 \le y \le H;\ \mathsf{a}_* = \sqrt{\sim^2 + 4\mathsf{a}}\right) \tag{13}$$

Неизвестные коэффициенты C и D определим из граничных условий задачи (12):

$$C = \frac{2\bar{v}(\mathsf{a})}{4k_0 \mathsf{a}^2}\left[\mathsf{a}_* \mathrm{cth}\left(\mathsf{a}_* H/2\right) - \sim\right]; \quad D = -\frac{2\bar{v}(\mathsf{a})}{k_0\left(\mathsf{a}_*^2 - \sim^2\right)}\left[\mathsf{a}_* - \sim \mathrm{cth}\left(\mathsf{a}_* H/2\right)\right]$$

Подставляя эти выражения в (13), после простых преобразований получим

$$\bar{h}(y, \mathsf{a}) = \frac{\bar{v}(\mathsf{a})}{2k_0 \mathsf{a}^2} \frac{\exp\left(-\sim y/2\right)}{\mathrm{sh}\left(\mathsf{a}_* H/2\right)}\left\{\mathsf{a}_* \mathrm{ch}\left[\mathsf{a}_*\left(H - y\right)/2\right] - \sim \mathrm{sh}\left[\mathsf{a}_*\left(H - y\right)/2\right]\right\} \quad \left(0 \le y \le H\right)$$

отсюда по формуле обратного преобразования находим

$$h(x,y)=\frac{\exp(-\kappa y/2)}{2\pi k_0}\int_{-\infty}^{\infty}K(|x-s|,y)\nu(s)\,ds \qquad \left(\lambda_*=\sqrt{\kappa^2+4\lambda^2};0\le y\le H\right)$$

$$K(x,y)=\int_0^{\infty}\frac{\cos(\lambda x)}{\lambda^2\operatorname{sh}(\lambda_* H/2)}\left\{\lambda_*\operatorname{ch}\left[\lambda_*(H-y)/2\right]-\kappa\operatorname{sh}\left[\lambda_*(H-y)/2\right]\right\}d\lambda \tag{14}$$

Теперь исходя из (14), по формулам (2) вычислим компоненты скорости. После несложных преобразований получим

$$\nu_x(x,y)=\frac{\exp(\kappa y/2)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\langle\int_0^{\infty}\frac{\sin\left[\lambda(x-s)\right]}{\lambda\operatorname{sh}(\lambda_* H/2)}\left\{\lambda_*\operatorname{ch}\left[\lambda_*(H-y)/2\right]-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\kappa\operatorname{sh}\left[\lambda_*(H-y)/2\right]\right\}d\lambda\right\rangle\nu(s)\,ds \qquad (-\infty<x<\infty,\quad 0<y<H) \tag{15}$$
$$\nu_y(x,y)=\frac{\exp(\kappa y/2)}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_0^{\infty}\frac{\cos\left[\lambda(x-s)\right]}{\operatorname{sh}(\lambda_* H/2)}\operatorname{sh}\left(\lambda_*(H-y)/2\right)d\lambda\right\}\nu(s)\,ds$$

Таким же способом получим решение граничной задачи (10):

$$\psi(x,y)=\frac{\exp(\kappa y/2)}{\pi k_0}\int_{-\infty}^{\infty}L(x-s,y)\nu(s)\,ds \qquad (-\infty<x<\infty;\quad 0\le y\le H)$$
$$L(x,y)=\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\left[\lambda_*(H-y)/2\right]\sin(\lambda x)\,d\lambda}{\lambda\operatorname{sh}(\lambda_* H/2)} \tag{16}$$

Эту формулу можно получить также при помощи (14) и обобщённых условий Коши-Римана (6). Отметим еще, что компоненты скорости можно вычислить также по формулам (7), исходя из (16). В результате, опять получаются формулы (15).

Из (15), в частности, будем иметь

$$\nu_x(x,0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\nu(s)\,ds\int_0^{\infty}\sin\left[\lambda(x-s)\right]\left[\lambda_*\operatorname{cth}(\lambda_* H/2)-\kappa\right]/\lambda\ d\lambda \qquad (-\infty<x<\infty)$$

$$\nu_x(x,H)=\frac{\exp(\kappa H/2)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\nu(s)\,ds\int_0^{\infty}\frac{\lambda_*\sin\left[\lambda(x-s)\right]}{\lambda\operatorname{sh}(\lambda_* H/2)}d\lambda$$

Вычислим важную фильтрационную характеристику задачи – расход жидкости $Q(x)$ через поперечное сечение $\ell=\{-\infty<x<\infty;0\le y\le H\}$ грунтовой полосы за единицу времени. По первой формуле (15) можем записать

$$Q(x)=\int_0^H\nu_x(x,y)\,dy=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\nu(s)\,ds\int_0^{\infty}\frac{\sin\left[\lambda(x-s)\right]d\lambda}{\lambda\operatorname{sh}(\lambda_* H/2)}\int_0^{\infty}\left\{\lambda_*\operatorname{ch}\left[\lambda_*(y-H)/2\right]-\right.$$
$$\left.-\kappa\operatorname{sh}\left[\lambda_*(H-y)/2\right]\right\}\exp(\kappa y/2)\,dy \qquad (-\infty<x<\infty)$$

Последний интеграл легко вычисляется и, в результате, после несложных преобразований получим весьма простую формулу:

$$Q(x)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sign}(x-s)\nu(s)\,ds \text{ или } Q(x)=\frac{1}{2}\int_L\operatorname{sign}(x-s)\nu(s)\,ds \qquad (-\infty<x<\infty) \tag{17}$$

Пусть, в частности, L состоит из одного отрезка $L=[-a,a]$ и

$$\nu(x)=\begin{cases}\nu_0=\text{const} & (-a<x<a);\\ 0 & (|x|>a);\end{cases}$$

Тогда по (17) ($H(x)$ – функция Хевисайда)

$$Q(x)=\begin{cases} v_0 x & (-a<x<a); \\ v_0 a\left[H(x-a)-H(a-x)\right]=v_0 a\,\mathrm{sign}(x-a) & (|x|>a); \end{cases}$$

Отметим, что по (17) расход жидкости $Q(x)$ не зависит от физических свойств грунта.

Чтобы получить нужные величины и функции в случае грунтового основания в виде нижней полуплоскости, в формулах (14)-(16) совершим предельный переход $H\to\infty$. Обозначив в этом случае соответствующие величины нулевым индексом, верхним или нижним, будем иметь

$$h_0(x,y)=\frac{\exp(-\gamma y/2)}{2\pi k_0}\int_{-\infty}^{\infty}K_0(|x-s|,y)v(s)\,ds \quad (y>0)$$

$$K_0(x,y)=\int_0^{\infty}(\lambda_*-\gamma)\exp(-\lambda_* y/2)\cos(\lambda x)\big/\lambda^2\,d\lambda;$$

$$v_x^0(x,y)=\frac{\exp(\gamma y/2)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}v(s)\,ds\int_0^{\infty}(\lambda_*-\gamma)\exp(-\lambda_* y/2)\sin\left[\lambda(x-s)\right]\big/\lambda\,d\lambda; \quad (y>0)$$

$$v_y^0(x,y)=\frac{\exp(\gamma y/2)}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}v(s)\,ds\int_0^{\infty}\exp(-\lambda_* y)\cos\left[\lambda(x-s)\right]d\lambda$$

$$\psi_0(x,y)=\frac{\exp(\gamma y/2)}{\pi k_0}\int_{-\infty}^{\infty}v(s)\,ds\int_0^{\infty}\exp(-\lambda_* y)\sin\left[\lambda(x-s)\right]\big/\lambda\,d\lambda$$

Подчеркнём, что входящие в эти формулы интегралы Фурье следует, вообше говоря, рассматривать в смысле теории обобщённых функций.

2. Перейдём ко второй задаче. Пусть отнесённое к правой прямоугольной системе координат $Oxyz$ упругий слой $\Pi=\{-\infty<x,z<\infty;0<y<H\}$ обладает модулем сдвига G, изменяющемся по высоте слоя по экспоненциальному закону $G(y)=G_0\exp(\gamma y)$ $(0\le y\le H;G_0,\gamma=\mathrm{const})$. Пусть далее на верхней грани $y=H$ слоя Π приложены независящие от координаты z касательные силы интенсивности $\tau(x)$, которые вне системы отрезков $L=\bigcup_{j=1}^{n}[a_j,b_j]$, в частности, могут обращаться в ноль. Считается, что под действием этих сил слой Π находится в условиях антиплоской деформации в направлении оси Oz с базовой плоскостью Oxy. Требуется определить единственную отличную от нуля компоненту упругих перемещений точек слоя в направлении оси Oz, т.е. функцию $u_z(x,y)=w(x,y)$ при $(x,y)\in\Pi_0=\{-\infty<x<\infty;0<y<H\}$, а также распределение касательных напряжений τ_{xz} и τ_{yz} в полосе Π_0, когда нижняя грань полосы Π_0 жёстко защемлена.

Для математической формулировки описанной задачи обратимся к дифференциальному уравнению равновесия бесконечно малого элемента при антиплоской деформации:

$$\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}=0 \quad ((x,y)\in\Pi_0) \tag{18}$$

и закону Гука

$$\tau_{xz}=G(y)\frac{\partial w}{\partial x}=G_0\exp(\gamma y)\frac{\partial w}{\partial x}; \quad \tau_{yz}=G(y)\frac{\partial w}{\partial y}=G_0\exp(\gamma y)\frac{\partial w}{\partial y} \quad ((x,y)\in\Pi_0) \tag{19}$$

Подставляя теперь выражения напряжений из (19) в (18), после простых выкладок для $w(x,y)$ получим дифференциальное уравнение и, в результате, описанную выше задачу теории упругости математически можем сформулировать в виде следующей смешанной граничной задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\sim\dfrac{\partial w}{\partial y}=0 & \left((x,y)\in\Omega\right) \\ w(x,y)\big|_{y=0}=0;\ \ \left.\dfrac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=H}=\exp(-\sim H)\text{²}\,(x)/G_0 & (-\infty<x<\infty) \end{cases} \qquad (20)$$

Решение граничной задачи (20), как выше, построим методом интегрального преобразования Фурье. Далее поступив совершенно аналогично сделанному в пункте 1, получим:

$$w(x,y)=\frac{2\exp\left[-\sim(y+H)/2\right]}{\text{®}G_0}\int_{-\infty}^{\infty}R\left(|x-s|,y\right)\text{²}\,(s)\,ds$$

$$R(x,y)=\int_0^{\infty}\frac{\cos(\text{ª}x)\,\mathrm{sh}(\text{ª}_*y/2)\,d\text{ª}}{\text{ª}_*\mathrm{ch}(\text{ª}_*H/2)-\sim\mathrm{sh}(\text{ª}_*H/2)}\quad\left(\text{ª}_*=\sqrt{\sim^2+4\text{ª}^2};-\infty<x<\infty;0\le y\le H\right) \qquad (21)$$

$$\text{²}_{xz}=-\frac{2}{\text{®}}\exp\left[\sim(y-H)/2\right]\int_{-\infty}^{\infty}\text{²}\,(s)\,ds\int_0^{\infty}\frac{\sin\left[\text{ª}(x-s)\right]\mathrm{sh}(\text{ª}_*y/2)\,\text{ª}\,d\text{ª}}{\text{ª}_*\mathrm{ch}(\text{ª}_*H/2)-\sim\mathrm{sh}(\text{ª}_*H/2)}$$

$$\text{²}_{yz}=\frac{1}{\text{®}}\exp\left[\sim(y-H)/2\right]\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\text{ª}_*\mathrm{ch}(\text{ª}_*y/2)-\sim\mathrm{sh}(\text{ª}_*y/2)}{\text{ª}_*\mathrm{ch}(\text{ª}_*H/2)-\sim\mathrm{sh}(\text{ª}_*H/2)}\cos\left[\text{ª}(x-s)\right]d\text{ª}$$

В случае однородного упругого слоя, когда $\sim=0$, эти формулы упрощаются. В частности, первая формула (21) при $y=H$ в этом случае с использованием выражения известного косинус-интеграла Фурье из [5] (стр. 39, ф-ла (28)) принимает вид

$$w(x,H)=\frac{1}{\text{®}G_0}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\mathrm{cth}\left(\frac{\text{®}\,|x-s|}{4H}\right)\text{²}\,(s)\,ds\quad(-\infty<x<\infty).$$

На основании полученных здесь результатов в дальнейшем будут рассмотрены смежные между собой две смешанные граничные задачи плоской теории установившейся фильтрации жидкости и теории упругости при антиплоской деформации, сводящиеся к сингулярным интегральным уравнениям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аравин В.И., Нумеров С.Н. Теория движения жидкостей и газов в недефомируемой пористой среде. М.: Гостехиздат, 1953. 616с.
2. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
3. Tokmajyan H.V., Mkhitaryan S.M., Grigoryan M.S. On two Plane Problems Steady–State Fluid Filtration in Porous Heterogeneous Soil Laer. //Proceedings of 3rd International Conference on Contemporary Problems in Architecture and Construction. November 20-24, 2011, Beijing, China. Edited by Guo-hua SONG, Lin-an LIU, Tao CHEN and Fei LI, p. 2-14–2-19.
4. Фильчаков П.Ф. Теория фильтрации под гидротехническими сооружениями. Т.1. Киев: 1959. 308 с.
5. Бейтмен Г., Эрдейи А. и др. Таблицы интегральных преобразований Т.I. М.: Наука, 1969. 344с.

<u>Сведения об авторе:</u>

Аветисян Сирануш Араратовна – соискатель Института механики НАН РА, преподаватель кафедры высшей математики ЕрГУАС, **e-mail:** ashonik@rambler.ru, тел. (374 94) 99 98 42.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДВУХСЛОЙНОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНЫ С ЭЛЕКТРОУПРУГИМ СЛОЕМ

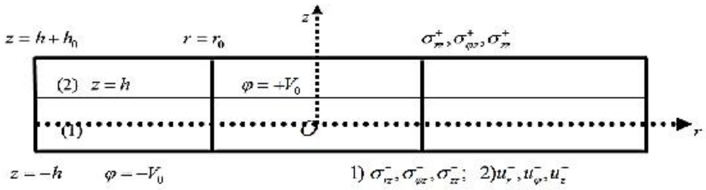
Азатян Г.Л., Геворкян Р.С., Погосян А.М.

Асимптотическим интегрированием уравнений трехмерной задачи теории упругости и электроупругости выведены рекуррентные формулы для определения компонент тензора напряжений, вектора перемещения и электрического потенциала двухслойной пластины бесконечных продольных размеров с круговым отверстием. Один слой пластины считается электропроводящим с нулевым омическим сопротивлением, а другой слой – пьезокерамический и поляризованный по толщине. Рассмотрены случаи, когда на его лицевых поверхностях заданы электрические потенциалы вместе с условиями первой и смешанной краевых задач теории упругости. Получены дисперсионные уравнения резонансных частот колебаний. Вычислена часть резонансных частот пластины.

Асимптотический метод решения краевых задач теории термоупругости с неклассическими граничными условиями, впервые применённый в [1,2], оказался эффективным для решения статических и динамических задач для балок пластин и оболочек [1-4]. Этим же методом решён ряд задач со связанными полями для пластин. В предлагаемой работе в цилиндрических координатах асимптотическим методом решены краевые задачи электроупругости для двухслойных пластин бесконечных размеров с круговым отверстием, состоящих из пьезокерамического слоя, поляризованного по толщине, и идеально (с нулевым омическим сопротивлением) электропроводящего слоя. Аналогичные задачи для тонкой однослойной пластины решены разными авторами, в частности, [5,6]. Выведенные в данной работе несложные рекуррентные формулы позволяют определить компоненты вектора перемещения и тензора механических напряжений, а также напряжение электрического поля с любой асимптотической точностью при механических граничных условиях первой и смешанной краевых задач теории упругости.

1.Постановка краевых задач. Имеем двухслойную кольцевую пластину бесконечных размеров $r_0 \le r < \infty$. Один из слоёв (1) пластины $|z| \le h$ из пьезокерамического материала класса $6mm$ и поляризована по толщине, а второй слой (2) $h \le z \le h + h_0$ из электропроводящего материала с нулевым омическим сопротивлением. Между слоями выполняются условия полного контакта

$$z = h:\ \ \pm^{*(1)}_{jz} = \pm^{*(2)}_{jz},\ u^{*(1)}_{jz} = u^{*(2)}_{jz},\ \ j = r, \bar{\ }, z;\ \ \ddot{\ }^{*} = V_0 e^{i\mu t} \qquad (1.1)$$



Фиг. 1.

Требуется определить напряжённо-деформированное состояние пакета и потенциал электрического поля в керамическом слое, если заданы потенциалы на поверхностях слоёв

$$h \le z \le h + h_0:\ \ddot{\ }^{*} = V_0 e^{i\mu t},\quad z = -h:\ \ddot{\ }^{*} = -V_0 e^{i\mu t}\ , \qquad (1.2)$$

а на лицевых поверхностях пакета заданы граничные условия задач теории упругости:

а. (первой) $\quad z = h + h_0:\ \ \pm^{*(2)}_{jz} = \pm^{+}_{jz} e^{i\mu t},\quad z = -h: \pm^{*(1)}_{jz} = \pm^{-}_{jz} e^{i\mu t},\ \ j = r, \bar{\ }, z \qquad (1.3)$

б. (смешанной) $\quad z = h + h_0:\ \ \pm^{*(2)}_{jz} = \pm^{+}_{jz} e^{i\mu t},\quad z = -h: u^{*(1)}_{j} = u^{-}_{j} e^{i\mu t},\ \ j = r, \bar{\ }, z \qquad (1.4)$

Граничные условия на торцах тонкого пакета не ставятся. Это будет обосновано позже. Не ставятся также начальные условия, предполагая, что рассматривается установившийся процесс. Решение поставленных краевых задач подразумевает найти удовлетворяющее условиям (1.1)-(1.3) либо (1.1),(1.2),(1.4) решение полной системы уравнений и соотношений электроупругости пьезокерамической среды для первого (пьезокерамического) слоя

$$\frac{\partial \pm^{*}_{rr}}{\partial r} + \frac{\pm^{*}_{rr} - \pm^{*}_{\bar{}\bar{}}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \pm^{*}_{r\bar{}}}{\partial \bar{}} + \frac{\partial \pm^{*}_{rz}}{\partial z} = {}^{\circ}\ddot{u}^{*}_{r},\ \frac{\partial \pm^{*}_{rj}}{\partial r} + \frac{2\pm^{*}_{rj}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \pm^{*}_{\bar{}j}}{\partial \bar{}} + \frac{\partial \pm^{*}_{\bar{}j}}{\partial z} = {}^{\circ}\ddot{u}^{*}_{j},\ j = \bar{\ }, z \qquad (1.5)$$

$$\mathrm{div}\vec{D}^{*} = 0,\quad \vec{E}^{*} = -\mathrm{grad}\,\ddot{\ }^{*} \qquad (1.6)$$

$$\sigma^*_{rr}=c^E_{11}\varepsilon^*_{rr}+c^E_{12}\varepsilon^*_{\theta\theta}+c^E_{13}\varepsilon^*_{zz}-e_{31}E^*_z;\ \sigma^*_{\theta\theta},\sigma^*_{zz},\sigma^*_{rz},\sigma^*_{\theta z};\ D^*_r=\varepsilon^S_{11}E^*_r+e_{51}\varepsilon^*_{rz},\ D^*_\theta,\ D^*_z$$

$$\varepsilon^*_{rr}=\frac{\partial u^*_r}{\partial r},\ \varepsilon^*_{\theta\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial u^*_\theta}{\partial\theta}+\frac{u^*_r}{r},\ \varepsilon^*_{zz}=\frac{\partial u^*_z}{\partial z},\ \varepsilon^*_{\theta z}=\frac{\partial u^*_\theta}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial u^*_z}{\partial\theta};\ \varepsilon^*_{rz},\ \varepsilon^*_{r\theta} \tag{1.7}$$

где обозначены: $\sigma_{ij},\varepsilon_{ij},u_j$ $(i,j=r,\theta,z)$ – компоненты тензоров механических напряжений, деформаций и вектора перемещения; φ – потенциал электрического поля, E_j, D_j $(j=r,\theta,z)$ – компоненты векторов напряжённости электрического поля и электрической индукции керамической пластины; $c^E_{11},c^E_{12},c^E_{13},c^E_{33},c^E_{44}$ – коэффициенты упругости керамики при постоянном (нулевом) электрическом поле; $\varepsilon^S_{11},\varepsilon^S_{33}$ –электрические проницаемости при постоянной (нулевой) деформации; e_{31},e_{15},e_{33} – пьезомодули керамики. А для второго (электропроводящего) слоя решение должно удовлетворить и уравнениям, и соотношениям упругости, т.е. (1.5),(1.7) при условии $\varepsilon^S_{11}=\varepsilon^S_{33}=e_{31}=e_{15}=e_{33}=0$. Считается, что все физико-механические коэффициенты слоёв, в общем случае, могут быть функциями от тангенциальных координат (r,θ).

2. Вывод системы разрешающих уравнений. Для решения поставленных краевых задач предположим, что все искомые и заданные выше функции имеют вид

$$Q^*(r,\theta,z,t)=Q(r,\theta,z)e^{i\omega t},Q=\left\{\sigma_{ij},\sigma^{\sigma}_{ij},\varepsilon_{ij},u_{ij},u^{\sigma}_{ij}D_j,E_j,\varphi,V^{\sigma}\right\},i,j=r,\theta,z \tag{2.1}$$

Одновременно во всех уравнениях и соотношениях перейдём к системе безразмерных координат ξ,η,ζ и безразмерным перемещениям по формулам:

$$\xi=\frac{r}{r_0},\eta=\theta,\zeta=\frac{z}{h}=\varepsilon^{-1}\frac{z}{r_0},\varepsilon=\frac{h}{r_0},u=\frac{u_r}{r_0},v=\frac{u_\theta}{r_0},w=\frac{u_z}{r_0},\varepsilon=\frac{h}{r_0},\zeta=\frac{z}{h},\zeta_0=\frac{h+h_0}{h} \tag{2.2}$$

в результате получим систему уравнений равновесия и геометрические соотношения упругого тела для обоих слоев:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial\xi}+\frac{1}{\xi}\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial\zeta}+\frac{1}{\xi}\left(\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}\right)+\rho\omega^2h^2u=0\\ \frac{\partial\sigma_{rj}}{\partial\xi}+\frac{1}{\xi}\frac{\partial\sigma_{\theta j}}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{jz}}{\partial\zeta}+\frac{\sigma_{rj}}{\xi}+\rho\omega^2h^2i=0,\ \ j=\theta,z;\ i=v,w\end{gathered} \tag{2.3}$$

$$\varepsilon_{rr}=\frac{\partial u}{\partial\xi},\ \varepsilon_{\theta\theta}=\frac{1}{\xi}\left(\frac{\partial v}{\partial\eta}+u\right),\ \varepsilon_{zz}=\varepsilon^{-1}\frac{\partial w}{\partial\zeta},\ \varepsilon_{r\theta}=\frac{1}{\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}-v\right)+\frac{\partial v}{\partial\xi};\ \varepsilon_{\theta z},\ \varepsilon_{rz}$$

а также уравнения и соотношения электроупругости для (первого) пьезокерамического слоя

$$\varepsilon^{-1}\frac{\partial D_z}{\partial\zeta}+\frac{1}{\xi}\frac{\partial D_\theta}{\partial\eta}+\frac{D_r}{\xi}+\frac{\partial D_r}{\partial\xi}=0$$

$$\sigma_{rr}=c^E_{11}\varepsilon_{rr}+c^E_{12}\varepsilon_{\theta\theta}+c^E_{13}\varepsilon_{zz}-e_{31}E_z;\ \sigma_{\theta\theta},\ \sigma_{r\theta},\ \sigma_{zz},\ \sigma_{\theta z},\ \sigma_{rz},\ \sigma_{\theta z},\ \sigma_{rz},\ \sigma_{r\theta} \tag{2.4}$$

$$D_r=\varepsilon^S_{11}E_r+e_{51}\varepsilon_{rz},\ D_\theta,\ D_z\qquad E_r=-\frac{\partial\psi}{\partial\xi},\ E_\theta=-\frac{1}{\xi}\frac{\partial\psi}{\partial\eta},\ E_z=-\frac{\partial\psi}{\partial\zeta},\ \psi=\frac{\varphi}{h}$$

и соотношения упругости для электропроводящего (второго) слоя

$$\begin{gathered}\sigma^{(2)}_{rr}=c^{(2)}_{11}\varepsilon^{(2)}_{rr}+c^{(2)}_{12}\varepsilon^{(2)}_{\theta\theta}+c^{(2)}_{13}\varepsilon^{(2)}_{zz},\quad\sigma^{(2)}_{\theta\theta}=c^{(2)}_{12}\varepsilon^{(2)}_{rr}+c^{(2)}_{11}\varepsilon^{(2)}_{\theta\theta}+c^{(2)}_{13}\varepsilon^{(2)}_{zz}\\ \sigma^{(2)}_{zz}=c^{(2)}_{13}\left(\varepsilon^{(2)}_{rr}+\varepsilon^{(2)}_{\theta\theta}\right)+c^{(2)}_{33}\varepsilon^{(2)}_{zz},\quad\sigma^{(2)}_{\theta z}=c^{(2)}_{55}\varepsilon^{(2)}_{\theta z},\ \ \sigma^{(2)}_{rz}=c^{(2)}_{55}\varepsilon^{(2)}_{rz},\ \ \sigma^{(2)}_{r\theta}=c^{(2)}_{66}\varepsilon^{(2)}_{r\theta}\end{gathered} \tag{2.5}$$

Система уравнений и соотношений (2.3),(2.4) сингулярно возмущена геометрическим малым параметром ε. Её решение складывается из двух видов решений ($I^{\text{int}}+I^b$) [3,4,7,8]. I^{int} – решение внутренней задачи, удовлетворяет граничным условиям, заданным на лицевых поверхностях тонкого тела, а I^b является решением задачи пограничного слоя, на лицевых поверхностях тела удовлетворяет соответствующим однородным (нулевым) условиям и в сумме с решением внутренней задачи удовлетворяет граничным условиям, заданным на боковой поверхности (торцах) пластины. Поскольку рассматриваемая предварительно поляризованная трансверсально-изотропная пьезокерамика тонкая $(2h+h_0 \ll r_0)$, ось Oz совпадает с осью упругой симметрии и направлением поля предварительной поляризации, на торце $r=r_0$ пакета условия не ставлены. Считается, что их действия на электрическое поле внутри керамики и напряжённо-деформированное состояние пакета незначительны. Это равносильно, чтобы пластина имела бесконечные продольные размеры $\left(r_0 \le r < \infty\right)$.

Решение внутренней задачи ищем в виде асимптотического разложения

$$Q\ \left(x,y,z\right) = £^{¡_Q} \sum_{s=0}^{S} £^s Q^{(s)}\left(¶,¦,¸\right) \qquad (2.6)$$

где Q – любая из неизвестных величин: компоненты u_j векторов перемещений в слоях, потенциал электрического поля $·\ (¨/h)$ в первом слое и компоненты тензоров напряжений $±_{ij}$ в слоях; $¡_Q$ – асимптотический порядок соответствующей величины, причём для всех перемещений $¡_u = 0$ и $¡_· = ¡_E = ¡_± = -1$ для потенциала и напряжённости электрического поля и для всех механических напряжений. Подставив (2.6) в систему уравнений (2.3)–(2.5) и приравняв коэффициенты при $£^s$ в левых и правых частях уравнений, получим систему разрешающих уравнений для слоёв, при этом следует учесть, что $£_{11}^{±} = £_{33}^{±} = e_{31} = e_{15} = e_{33} = 0$ – для электропроводящего слоя.

$$\frac{\partial^2 u^{(i,s)}}{\partial ¸^2} + ~^{(i)2} u^{(i,s)} = R_u^{(i,s)} \quad (u,v,w;~^{(i)},\ \ ^{(i)},¥^{(i)}),\quad ~^{(i)} = \ \ ^{(i)} = \sqrt{°^{(i)} µ^2 h^2 / c_{55}^{(i)}}$$

$$\frac{\partial ·^{(s)}}{\partial ¸} = A^{(s)} + \frac{e_{33}}{£_{33}^{±}} \frac{\partial w^{(1,s)}}{\partial ¸} + R_·^{(1,s)},\quad ¥^{(i)} = \sqrt{°^{(i)} µ^2 h^2 / ¢_{33}^{(i)}},\quad ¢_{33}^{(1)} = ¢_{33} = \frac{c_{33}^{E} £_{33}^{±} + e_{33}^{2}}{£_{33}^{±}} \qquad (2.7)$$

$$¢_{33}^{(2)} = c_{33}^{(2)},\ c_{55}^{(1)} = c_{55}^{E},\quad i=1,2;\quad Q^{(1,s)} = Q^{(s)}$$

Здесь обозначены:

$$R_u^{(i,s)} = -\frac{\partial^2 w^{(i,s-1)}}{\partial ¶ \partial ¸} - \left(\frac{\partial ±_{rr}^{(i,s-1)}}{\partial ¶} + \frac{1}{¶}\frac{\partial ±_{r¯}^{(i,s-1)}}{\partial ¦} + \frac{1}{¶}(±_{rr}^{(i,s-1)} - ±_{¯¯}^{(i,s-1)}) + e_{15}\frac{\partial^2 ·^{(s-1)}}{\partial ¶ \partial ¸} \right) \Big/ c_{55}^{(i)}$$

$$±_{rr}^{(i,s)} = c_{11}^{(i)} \frac{\partial u^{(i,s-1)}}{\partial ¶} + c_{12}^{(i)} \frac{1}{¶}\left(\frac{\partial v^{(i,s-1)}}{\partial ¦} + u^{(i,s-1)} \right) + c_{13}^{(i)} \frac{\partial w^{(i,s)}}{\partial ¸} - e_{31}\frac{\partial ·^{(s)}}{\partial ¸} \quad (r,¯;11,12) \qquad (2.8)$$

$$D_z^{(s)} = -£_{33}^{±} A^{(1,s)} - I_D^{(1,s)}(¸),\quad I_D^{(1,s)}(¸) = \int_0^{¸} \left(\frac{1}{¶}\frac{\partial D_¯^{(s-1)}}{\partial ¦} + \frac{D_r^{(s-1)}}{¶} + \frac{\partial D_r^{(s-1)}}{\partial ¶} \right) d¸$$

$R_v^{(i,s)}, R_w^{(i,s)}, R_·^{(1,s)}; ±_{zz}^{(i,s)}, ±_{r¯}^{(i,s)}, ±_{rz}^{(i,s)}, ±_{¯z}^{(i,s)};\ D_r^{(s)}, D_¯^{(s)};\quad A^{(1,s)}$ – неизвестная пока функция.

3.Решения поставленных краевых задач. Проинтегрировав систему разрешающих уравнений (2.7), получим общий интеграл поставленных краевых задач (1.1)–(1.4) в виде

$$u^{(i,s)} = M_u^{(i,s)} \sin ~^{(i)} ¸ + N_u^{(i,s)} \cos ~^{(i)} ¸ + I_u^{(i,s)}(¸) \quad (u,v,w;~,\ \ ,¥)\quad i=1,2$$

$$·^{(s)} = A^{(s)} ¸ + B^{(s)} + \frac{e_{33}}{£_{33}^{±}} w^{(s)} + I_·^{(s)},\quad I_·^{(s)} = \int_0^{¸} R_·^{(s)} d¸ \qquad (3.1)$$

где $I_u^{(i,s)}$ (u,v,w) – частные решения неоднородной системы уравнений, определённые, в частности, методом вариации постоянных

$$I_u^{(i,s)} = \frac{1}{~} \int_0^{¸} R_u^{(i,s)} \sin ~ (¸ - ²) d² \quad (u,v,w;~,\ \ ,¥) \qquad (3.2)$$

Общий интеграл (3.1) содержит неопределённые пока функции интегрирования $M_u^{(i,s)}, N_u^{(i,s)}$ (u,v,w), $A^{(s)}, B^{(s)}$, которые однозначно определяются из комбинаций граничных условий (1.1)–(1.4).

а. Удовлетворив электрическим граничным условиям (1.1)-(1.3), получим постоянные интегрирования температурной функции для сформулированных выше обеих краевых задач в виде $A^{(s)} = \dfrac{V_0}{h} - \dfrac{e_{33}}{2£_{33}^{±}}\left[2M_w^{(s)}\sin ¥ + I_w^{(s)}(¸)\Big|_{¸=-1}^{¸=1}\right] - \dfrac{1}{2} I_{\cdot}^{(s)}(¸)\Big|_{¸=-1}^{¸=1}$

$$B^{(s)} = -\frac{e_{33}}{2£_{33}^{±}}\left[2N_w^{(s)}\cos ¥ + I_w^{(s)}(¸=1) + I_w^{(s)}(¸=-1)\right] -$$
$$-\frac{1}{2}\left[I_{\cdot}^{(s)}(¸=1) + I_{\cdot}^{(s)}(¸=-1)\right],\ V_0^{(0)} = V_0,\ \ V_0^{(s)} = 0,\ s \neq 0 \tag{3.3}$$

А для амплитуд компонент вектора перемещения произвольной точки слоёв однозначно получим функции интегрирования, которые представляем в детерминантном виде

$$X_{uj}^{(s)} = \frac{1}{\bar{\Delta}_u}\sum_{i=1}^{4} A_{uij}U_{ui}^{(s)},\quad \bar{\Delta}_{ua} = \det\left\|a_{uij}\right\|_{4\times 4}\quad (u,v,w)$$
$$X_{u1}^{(s)} = M_u^{(s)},\ X_{u2}^{(s)} = N_u^{(s)},\ X_{u3}^{(s)} = M_u^{(2,s)},\ X_{u4}^{(s)} = N_u^{(2,s)}\quad (u,v,w)$$
$$U_{u1}^{(s)} = ±_{rz}^{-(s)} - \left(c_{44}^{E}\frac{\partial I_u^{(s)}}{\partial ¸} + ±_{rz*}^{(s)}\right)\Bigg|_{¸=-1},\ \ (r,¯;\ u,v); U_{u2}^{(s)}, U_{u3}^{(s)}, U_{u4}^{(s)} \tag{3.4}$$
$$U_{w1}^{(s)} = ±_{zz}^{-(s)} - \left(¢_{33}\frac{\partial I_w^{(s)}}{\partial ¸} + T_{zz}^{(s)}\right)\Bigg|_{¸=-1},\ U_{w3}^{(s)}, U_{w2}^{(s)}$$
$$T_{zz}^{(s)} = e_{33}\frac{V_0}{h} + e_{33}R_{\cdot}^{(1,s)} + ±_{zz*}^{(1,s)} - \frac{e_{33}^2}{2£_{33}^{±}}\left[I_w^{(s)}(¸=1) - I_w^{(s)}(¸=-1)\right] -$$
$$-\frac{e_{33}}{2}\left[I_{\cdot}^{(s)}(¸=1) - I_{\cdot}^{(s)}(¸=-1)\right],\ ±_{jz}^{±(0)} = £±_{jz}^{±},\ \ ±_{jz}^{±(s)} = 0,\ \ s\neq 0,\ \ \ j = r,¯,z$$

где $\bar{\Delta}_{ua}$ – определитель четвёртого порядка с элементами a_{uij}, которые определяются формулами:

$$a_{w11} = a_{w21} = \frac{\Delta(¥)}{£_{33}^{±}},\quad a_{w12} = -a_{w22} = ¥¢_{33}\sin ¥,\ a_{u11} = a_{u21} = \sim c_{44}^{E}\cos\sim,$$
$$a_{u12} = -a_{u22} = \sim c_{44}^{E}\sin\sim,\ a_{u13} = a_{u14} = a_{u41} = a_{u42} = 0,\ a_{u23} = -\sim^{(2)}c_{44}^{(2)}\cos\sim^{(2)}$$
$$a_{u24} = \sim^{(2)}c_{44}^{(2)}\sin\sim^{(2)},\ a_{u31} = \sin\sim,\ a_{u32} = \cos\sim,\ a_{u33} = -\sin\sim^{(2)},\ a_{u34} = \cos\sim^{(2)} \tag{3.5}$$
$$a_{u43} = \sim^{(2)}c_{44}^{(2)}\cos\sim^{(2)}¸_0,\ a_{u44} = -\sim^{(2)}c_{44}^{(2)}\sin\sim^{(2)}¸_0,\ (\sim^{(2)},\sim^{(2)},¥^{(2)};\ u,v,w;\ c_{44}^{(2)}, c_{44}^{(2)}, c_{33}^{(2)})$$
$$\Delta(¥) = \left(c_{33}^{E}£_{33}^{±} + e_{33}^{2}\right)¥\cos ¥ - e_{33}^{2}\sin ¥,\ \Delta \neq 0,\ \sin ¥ \neq 0,\ \ \sin 2\sim\ \neq 0$$

A_{uij} – алгебраическое дополнение элемента a_{uij}, причём

$$\bar{\Delta}_{wa} = -2\frac{\Delta(¥)}{£_{33}^{±}}¢_{33}¥\sin ¥\left(c_{33}^{(2)}¥^{(2)}\right)\cos\left(¥^{(2)}\frac{h_0}{h}\right) - \frac{\Delta(2¥)}{2£_{33}^{±}}\left(c_{33}^{(2)}¥^{(2)}\right)^2\sin\left(¥^{(2)}\frac{h_0}{h}\right) \neq 0$$
$$\bar{\Delta}_{ua} = -\left(\sim c_{44}^{E}\right)^2\sin 2\sim\left(c_{44}^{(2)}\sim^{(2)}\right)\cos\left(\sim^{(2)}\frac{h_0}{h}\right) - \left(\sim c_{44}^{E}\right)\cos 2\sim\left(c_{44}^{(2)}\sim^{(2)}\right)^2\sin\left(¥^{(2)}\frac{h_0}{h}\right) \neq 0$$

Для пьезокерамического слоя дисперсионные уравнения резонансных частот и их решения для пьезокерамики $BaTiO_3$ приведены в [9], а дисперсионными уравнениями резонансных частот нормальных и сдвиговых колебаний пакета в целом являются соответственно $\bar{\Delta}_{ub} = \bar{\Delta}_{wb} = 0$, т.е.

$$\frac{4\Delta(¥)}{\Delta(2¥)}¢_{33}¥\sin¥ = -\left(c_{33}^{(2)}¥^{(2)}\right)\mathrm{tg}\left(¥^{(2)}\frac{h_0}{h}\right), \quad \left(\sim c_{44}^{E}\right)\mathrm{tg}2\sim = -\left(c_{44}^{(2)}\sim^{(2)}\right)\mathrm{tg}\left(\sim^{(2)}\frac{h_0}{h}\right) \qquad (3.6)$$

б. Удовлетворив условиям (1.1),(1.2),(1.4), получим функции интегрирования для амплитуд компонент вектора перемещения произвольной точки слоёв, которые также представляем в детерминантном виде (3.4),(3.5), где следует иметь в виду, что меняются некоторые элементы в левой и правой частях только первой строки, которые получают следующие значения:

$$U_{u1}^{(s)} = I_u^{(s)}(¸ = -1) - u_r^{-(s)}, \quad a_{u11} = \sin\sim, \quad a_{u12} = -\cos\sim \;, \; (r, ¯, z; \sim, \sim, ¥; u, v, w)$$

$$u_j^{-(0)} = \frac{u_j^{-}}{l}, \quad u_j^{-(s)} = 0, \quad s \neq 0, \quad j = r, ¯, z \qquad (3.7)$$

При этом должны выполняться условия

$$\bar{\Delta}_{wb} = \frac{\Delta(2¥)}{2£_{33}^{\pm}}\left(c_{33}^{(2)}¥^{(2)}\right)\cos\left(¥^{(2)}\frac{h_0}{h}\right) - \sin 2¥\left(c_{33}^{(2)}¥^{(2)}\right)^2\sin\left(¥^{(2)}\frac{h_0}{h}\right), \quad \bar{\Delta}_{wb} \neq 0$$

$$\bar{\Delta}_{ub} = \left(\sim c_{44}^{E}\right)\cos 2\sim\left(c_{44}^{(2)}\sim^{(2)}\right)\cos\left(\sim^{(2)}\frac{h_0}{h}\right) - \sin 2\sim\left(c_{44}^{(2)}\sim^{(2)}\right)^2\sin\left(¥^{(2)}\frac{h_0}{h}\right), \quad \bar{\Delta}_{ub} \neq 0 \qquad (3.8)$$

Дисперсионные уравнения резонансных частот и их решения пьезокерамического слоя также приведены в [9], а дисперсионные уравнения резонансных частот нормальных и сдвиговых колебаний для пакета в целом получаются из условий $\bar{\Delta}_{ub} = \bar{\Delta}_{wb} = 0$ и имеют вид:

$$\frac{\Delta(2¥)}{2£_{33}^{\pm}} = \sin 2¥\left(c_{33}^{(2)}¥^{(2)}\right)\mathrm{tg}\left(¥^{(2)}\frac{h_0}{h}\right), \quad \left(\sim c_{44}^{E}\right)\mathrm{ctg}2\sim = \left(c_{44}^{(2)}\sim^{(2)}\right)\mathrm{tg}\left(¥^{(2)}\frac{h_0}{h}\right) \qquad (3.9)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаловян Л.А. О структуре решения одного класса плоских задач теории упругости анизотропного тела// Механика. Ереван: Изд-во ЕГУ, 1982. С. 7–12.
2. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи пластин с общей анизотропией //Сб. тр. 4-го Всес. Симп. по механике конструкций из композиционных материалов. Новосибирск: Наука, 1984. С.105–110.
3. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М: Наука. Физматлит, 1997. 414с.
4. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек: Ереван: Гитутюн, 2005. 468с.
5. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. Киев: Наукова думка, 1988. 472с.
6. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Электроупругость. Киев: Наукова думка, 1989. 279с.
7. Агаловян Л.А. Упругий пограничный слой для одного класса плоских задач // Межвузовский сборник н.трудов. Механика. Ереван: Изд-во ЕГУ, 1984. С.51-58.
8. Геворкян Р.С. Асимптотика пограничного слоя для одного класса краевых задач анизотропных пластин // Изв.АН АрмССР. Механика. 1984. Т.37. №6. С. 3-15.
9. Азатян Г.Л., Геворкян Р.С., Погосян А.М. Асимптотическое решение задачи электроупругости пьезокерамической неоднородной пластины с круговым отверстием и толщённой поляризацией //Изв. НАН Армении. Механика**.** 2012. Т.65. № 2. С.14–25.

Сведения об авторах:

Азатян Григор Леваевич − кандидат физ-мат. наук, научный сотрудник Института механики НАН Армении, (374 91) 38 88 36, **E-mail**: grigor_a@bk.ru

Геворкян Рубен Степанович − профессор, доктор физ-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении, (374 10) 27 08 28, **E-mail:** gevorgyanrs@mail.ru

Погосян Айк Меникович − кандидат физ-мат. наук, научный сотрудник Института механики НАН Армении, (374 10) 29 02 09, **E-mail:** nssp_haykp@yahoo.com

ПРИБЛИЖЁННОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ПО ГЛУБИНЕ МЯГКОГО УПРУГОГО СЛОЯ

Айзикович С.М., Васильев А.С., Волков С.С., Митрин Б.И.

Аналитические решения контактных задач для упругого однородного слоя были получены в работах [1-4]. Область применимости этих решений ограничивалась случаями слоя большой толщины [1, 2], малой толщины [3] и слоя, толщина которого соизмерима с размером штампа [4].

В связи с распространением в промышленности функционально-градиентных материалов и покрытий интерес представляют контактные задачи, в которых свойства среды изменяются по глубине. Современные результаты по контактным задачам для неоднородных по глубине материалов получены, в основном, при специальных предположениях о законе изменения упругих свойств (линейный, степенной, экспоненциальный и др.), которые дают возможность использовать явные аналитические решения для соответствующих дифференциальных уравнений [5-7]. Случай произвольного изменения упругих свойств по глубине покрытия рассмотрен в работах Y.-S. Wang и др. [8] и Айзиковича С.М. и др. [9-12].

При моделировании мягкого упругого слоя подложка обычно считается недеформируемой [1-7]. Однако, даже самые жёсткие материалы обладают упругими свойствами, например, модуль Юнга алмаза равен 1000 ГПа. Модуль Юнга мягких металлов (алюминий, медь, свинец, серебро и др.) изменяется в пределах 16-125 ГПа, модуль Юнга полимеров – в пределах 1-4 ГПа (оргстекло, полистирол, поливинилхлорид). Обычно, отношение модулей Юнга слоя и жёсткой подложки находится в диапазоне 10-100 и в редких случаях может доходить до 1000 и более.

В настоящей работе рассмотрен неоднородный по глубине мягкий слой, лежащий на деформируемом основании, упругие свойства которого более чем на порядок отличаются от упругих свойств слоя. Построены решения контактных задач о кручении и вдавливании жёсткого штампа с плоским основанием, и проанализировано влияние жёсткости основания и неоднородности слоя на механические характеристики контактного взаимодействия.

1. Рассмотрим следующую задачу. Недеформируемый круглый штамп с плоским основанием контактирует с верхней гранью Γ упругого неоднородного полупространства Ω. С полупространством связана цилиндрическая система координат *r*, *φ*, *z*, штамп контактирует с полупространством по поверхности $z=0, r\le a$. Коэффициенты Ламе полупространства изменяются по законам:

$$\Lambda=\begin{cases}\Lambda_{(1)}(z) & -H\le z\le 0\\ \Lambda_{(2)}=\text{const} & -\infty<z<-H\end{cases},\quad G=\begin{cases}G_{(1)}(z) & -H\le z\le 0\\ G_{(2)}=\text{const} & -\infty<z<-H\end{cases}$$

где $\Lambda_{(1)}(z), G_{(1)}(z)$ – непрерывно-дифференцируемые или кусочно-постоянные функции, определяющие закон изменения упругих свойств в слое ($-H\le z\le 0$). Здесь и далее индексы (1) и (2) соответствуют слою и основанию.

Наряду с парой коэффициентов Ламе для описания упругого поведения тела используются модуль Юнга $E(z)$ и коэффициент Пуассона $\nu(z)$. Для описания жёсткости основания введём параметр, равный скачку модуля сдвига на границе стыка слоя и основания

$$\beta=G_{(2)}\big/G_{(1)}(-H)$$

Задача А. К штампу приложен крутящий момент *M*, ось которого совпадает с осью *z* и нормальна к поверхности Γ. Штамп жёстко сцеплён с поверхностью Γ. Под действием момента *M* штамп повернется относительно оси *z* на угол *ε*, вызвав деформацию кручения Ω. Требуется определить закон распределения контактных касательных напряжений под штампом:

$$\tau_{\varphi z}\big|_{z=0}=\tau_a(r),\quad r\le a$$

Задача Б. К штампу приложена вдавливающая сила *P*, ось которой совпадает с осью *z* и нормальна к поверхности Г. Силы трения между штампом и полупространством отсутствуют. Под действием силы P штамп переместится в направлении оси z на величину $-\delta$. Требуется определить распределение контактных нормальных напряжений под штампом:

$$\sigma_z\big|_{z=0}=-q_a(r),\ \ r\le a$$

2. Используя технику интегральных преобразований, поставленные задачи сводятся к решению следующих интегральных уравнений [9, 10]:

Задача А:

$$\int_0^1 \tau(\rho)\rho \int_0^\infty L(u)\,\mathrm{J}_1(ur'\lambda^{-1})\,\mathrm{J}_1(u\rho\lambda^{-1})du d\rho = \lambda G(0) r'\varepsilon,\ \ r' \le 1 \qquad (1)$$

Задача Б:

$$\int_0^1 q(\rho)\rho \int_0^\infty L(u)\,\mathrm{J}_0(ur'\lambda^{-1})\,\mathrm{J}_0(u\rho\lambda^{-1})du d\rho = \lambda \Theta(0)\delta,\ \ r' \le 1 \qquad (2)$$

Здесь $\Theta(0) = 2G(0)\big(\Lambda(0)+G(0)\big)\big(\Lambda(0)+2G(0)\big)^{-1}$, $\lambda = H/a$ – геометрический параметр задачи, обозначающий относительную толщину слоя; $L(u)$ – трансформанта ядра интегрального уравнения, значения которой находятся численно [9,10]. Здесь использована замена переменных $r' = r/a$, $q(\rho) = q_a(\rho a)$, $\tau(\rho) = \tau_a(\rho a)$.

Используя двухсторонний асимптотический метод [13], можно получить приближённые аналитические решения интегральных уравнений (1), (2) в виде [9,10]

$$\tau(r') = \frac{4}{\pi}\varepsilon G(0)\left\{ L_N^{-1}(0)\frac{r'}{\sqrt{1-r'^2}} + \sum_{i=1}^{N} C_i Z_A(r', A_i\lambda^{-1}) \right\} \qquad (3)$$

$$q(r') = \frac{2}{\pi}\delta\Theta(0)\left\{ L_N^{-1}(0)\frac{1}{\sqrt{1-r'^2}} + \sum_{i=1}^{N} C_i Z_B(r', A_i\lambda^{-1}) \right\} \qquad (4)$$

Здесь

$$Z_A(x,y) = \frac{\mathrm{sh}(xy)}{x} + \frac{x\,\mathrm{sh}\,y}{\sqrt{1-x^2}\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)} - xy\int_x^1 \frac{\mathrm{ch}(yt)dt}{\sqrt{t^2-x^2}\left(t+\sqrt{t^2-x^2}\right)}$$

$$Z_B(x,y) = \frac{\mathrm{ch}\,y}{\sqrt{1-x^2}} - y\int_x^1 \frac{\mathrm{sh}(yt)dt}{\sqrt{t^2-x^2}}$$

постоянные C_i определяются из системы линейных алгебраических уравнений, $L_N(u)$ – аппроксимация трансформанты ядра интегрального уравнения в виде:

$$L_N(u) = \prod_{i=1}^{N} \frac{u^2 + A_i^2}{u^2 + B_i^2} \qquad (5)$$

Решения (3), (4) являются асимптотически точными при $\lambda \to 0$ и $\lambda \to \infty$ [13]. Точность решения для произвольного значения λ зависит от точности аппроксимации трансформанты ядра функцией (5). Алгоритм построения аппроксимаций высокой точности и связь между погрешностями решения и аппроксимации описаны в работе [14].

3. Приведем сравнение с известными ранее результатами. Рассмотрим задачу Б для однородного слоя и основания. Положим β=100 или 1000, коэффициент Пуассона слоя и основания считаем равным 0.3.

Контактные напряжения для β=1000 близки к значениям, полученным другими методами для недеформируемого основания [4] – при λ=0.25, 1 и 4 – величина $\Delta_\tau = \max_r \left|1 - q_1(r)/q_2(r)\right| \cdot 100\%$ равна 2.7%, 0.9% и 0.4% соответственно.

Для λ>0.5 контактные напряжения, соответствующие случаям β=100 и β=1000 близки, например, для λ=1 и λ=4 значения Δ_τ равны 3% и 0.5% соответственно. Однако величина Δ_τ

увеличивается с уменьшением λ и для очень тонких покрытий ($\lambda \to 0$) значение Δ_τ достигает 900%. Таким образом, использование модели упругого слоя на недеформируемом основании для описания случаев β=100 или 1000 приводит к существенных погрешностям в области малых значений параметра λ.

4. Далее приведём численные результаты для задачи А, когда модуль сдвига слоя изменяется по одному из следующих законов:

1) $f_G(z) = f_0 + (f_0 - 1)\dfrac{z}{H}$, 2) $f_G(z) = \dfrac{1}{f_0} - \dfrac{f_0 - 1}{f_0}\dfrac{z}{H}$,

3) $f_G(z) = \dfrac{f_0 + 1}{2} - \dfrac{f_0 - 1}{2}\cos\left(2\pi\dfrac{z}{H}\right)$, 4) $f_G(z) = \dfrac{f_0 + 1}{2 f_0} + \dfrac{f_0 - 1}{2 f_0}\cos\left(2\pi\dfrac{z}{H}\right)$

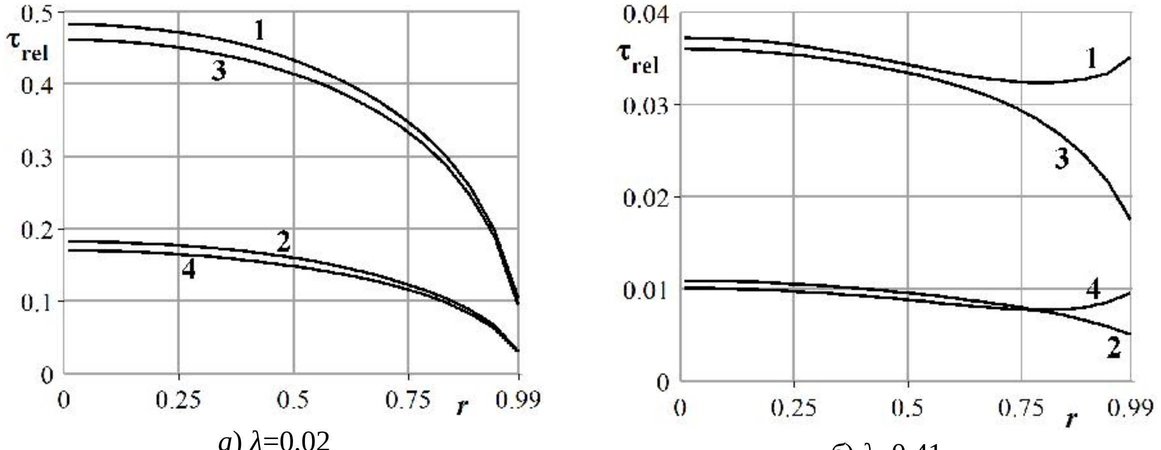
Параметр неоднородности $f_0 > 0$ характеризует максимальное отличие модуля сдвига в покрытии. Законы 1 и 2 описывают линейное изменение упругих свойств в покрытии, законы 3 и 4 – немонотонное, гармоническое изменение. Далее анализируется случай $f_0 = 3.5$, β = 100.

Для законов 1-4 удаётся построить аппроксимации трансформант ядер с погрешностью $\Delta_L = \max\left|L_N(u)/L(u) - 1\right| \cdot 100\%$, не превышающей 0.64%.

На рис.1 изображены графики величины $\tau_{\rm rel}(\lambda, r) = \tau(\lambda, r)/\tau_{\rm hom}(r)$ для законов 1-4. Здесь $\tau(\lambda, r)$ – контактные напряжения под штампом для неоднородного полупространства, $\tau_{\rm hom}(r)$ – контактные напряжения для однородного полупространства с модулем сдвига, равным модулю сдвига основания $G_{(2)}$.

При λ>8 (толщина покрытия значительно больше радиуса штампа) распределение контактных напряжений под штампом практически не отличается от случая однородного полупространства с модулем сдвига, равным $G_{(1)}(0)$. Следовательно, при построении решений для больших значений параметра λ можно не учитывать неоднородность покрытия и использовать более простые модели.

При $\lambda \in [0.0001, 8]$ неоднородность существенно влияет на распределение контактных напряжений под штампом. Для законов 1, 4 на краю штампа наблюдается возрастание величины $\tau_{\rm rel}$ при $r \to 1$, для законов 2, 3 – убывание (рис. 1*б*). Наибольшее влияние неоднородности слоя наблюдается при $\lambda \in (0.0001, 0.1)$ (рис. 1*а*).



а) λ=0.02 *б*) λ=0.41

Рис. 1. Относительные контактные напряжения под штампом для законов 1-4

Отметим, что зная распределение контактных напряжений на поверхности, можно легко восстановить напряжённо-деформированное состояние слоя [15].

5. Из полученных численных результатов следует вывод о том, что предположение о недеформируемости основания может привести к существенным погрешностям в решениях контактных задач для относительно тонких покрытий.

Предлагаемый подход позволяет учесть упругие свойства основания. Полученные решения эффективны для любого значения геометрического параметра задачи λ (т.е. для слоёв любой толщины). Аналогично можно построить решения других контактных задач теории упругости для неоднородного слоя [11, 12].

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (соглашения № 14.B37.21.1131, № 14.132.21.1693), Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 13-07-00952-а, № 13-07-00954-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ворович И.И., Устинов Ю.А. О давлении штампа на слой конечной толщины.// ПММ. 1959. Т.23. № 3. С.445-455.
2. Грилицкий Д.В. Кручение двухслойной упругой среды. //Прикладная механика. 1961. Т.7. №1. С.89–94.
3. Александров В.М., Бабешко В.А., Кучеров В.А. Контактные задачи для упругого слоя малой толщины. //ПММ. 1966. Т.30. №1. С.124-142.
4. Александров В.М., Пожарский А.Д. Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел. М.: Факториал, 1998. 288с.
5. Gibson R.E., Sills G.C. Settlement of a Strip Load on a Non-homogeneous Orthotropic Incompressible Elastic Half-Space. //Quart. J. Mech. And Appl. Math. 1975. V.28. № 2. P.233–243.
6. Kassir M.K. The Reissner–Sagoci problem for a non-homogeneous solid. //Int.J. Engng Sci. 1970. V.8. P.875-885.
7. Guler M.A., Erdogan F. Contact mechanics of graded coatings.//Int. J. Solids Struct. 2004. № 41. P.3865–3889.
8. Liu T.-J., Wang Y.-S. Reissner–Sagoci problem for functionally graded materials with arbitrary spatial variation of material properties. //Mechanics Research Communications. 2009. V.36. P.322–329.
9. Vasiliev A., Sevostianov I., Aizikovich S., Jeng Y.-R. Torsion of a punch attached to transversely-isotropic half-space with functionally graded coating. //Intern. J. Engng. Sci. 2012. V.61. P.24–35.
10. Айзикович С.М., Александров В.М. Осесимметричная задача о вдавливании круглого штампа в упругое, неоднородное по глубине полупространство. //Изв. РАН. МТТ. 1984. №2. С.73–77.
11. Айзикович С.М.. Асимптотическое решение задачи о взаимодействии пластины с неоднородным по глубине основанием.//ПММ. 1995. Т.59. №4. С.688–697.
12. Айзикович С.М., Александров В.М., Трубчик И.С., Кренев Л.И. Внедрение сферического индентора в полупространство с функционально-градиентным упругим покрытием. //Доклады РАН. 2008. Т.418. №2. С.188–192.
13. Айзикович С.М. Асимптотическое решение одного класса парных уравнений. //ПММ. 1990. Т.54. С.872–877.

14. Айзикович С.М., Васильев А.С. Двухсторонний асимптотический метод решения интегрального уравнения контактной задачи о кручении неоднородного по глубине упругого полупространства. //ПММ. 2013. Т.77. №1. С.129–137.
15. Айзикович С. М., Кренев Л.И., Трубчик И.С. Деформирование полупространства при действии произвольной осесимметричной нагрузки. //ПММ. 2008. Т.72. №4. С.644–651.

Сведения об авторах:

Айзикович Сергей Михайлович – доктор физ.-мат. наук, с.н.с., заведующий лабораторией теории контактных взаимодействий, НИИ механики и прикладной математики им. И.И. Воровича, Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия,
(7 928) 934 13 98
E-mail: saizikovich@gmail.com

Васильев Андрей Сергеевич – кандидат физ.-мат. наук, младший научный сотрудник, НИИ механики и прикладной математики им. И.И. Воровича, Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия,, (7 905) 455 92 37
E-mail: andre.vasiliev@gmail.com

Волков Сергей Сергеевич – младший научный сотрудник, Научно-образовательный центр «Материалы», Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Россия,
(7 950) 847 69 39
E-mail: fenix_rsu@mail.ru

Митрин Борис Игоревич – младший научный сотрудник, Научно-образовательный центр «Материалы», Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Россия,
(7 928) 366 41 42
E-mail: boris.mitrin@gmail.com

КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИНЫ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ГАЗА

Акопян А.А., Егиазарян Т.А.

Рассмотрена по двум краям шарнирно опертая пластина размерами a и b, обтекаемая сверхзвуковым потоком газа скоростью U. Для аэродинамической силы, действующей на пластину, принимаются выражения, полученные по "поршневой" теории и уточнённой теории. Были получены результаты для плоской одномерной задачи методами Галёркина и Ритца и проведено сравнение результатов.

Рассматриваются колебания шарнирно опертой по передней и задней кромкам пластины размерами (a,b), обтекаемой потоком газа со сверхзвуковой скоростью U.
Уравнение колебания пластины имеет следующий вид:

$$D\nabla^2\nabla^2 w+\rho_0 h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\rho_0 h\varepsilon\frac{\partial w}{\partial t}+p\left(x,y,t\right)=0 \qquad (1)$$

где w(x,y,t) – прогиб пластины, D – цилиндрическая жёсткость, ρ_0 – плотность материала, ε – коэффициент затухания, p(x, y, t) –составляющая аэродинамического давления, обусловленная отклонением пластинки от невозмущённого состояния. Аэродинамическая сила, действующая на пластину, представляется выражением, полученным по "поршневой" теории [2].

$$p\left(x,y,t\right)=\frac{\kappa p_\infty}{c_\infty}\left(\frac{\partial w}{\partial t}+U\frac{\partial w}{\partial x}\right) \qquad (2)$$

где κ – показатель политропа, p_∞ – давление в невозмущённом потоке газа, c_∞ –скорость звука в невозмущённом потоке газа.

Не учитывая затухание и вводя $w\left(x,t\right)=W\left(x\right)e^{i\Omega t}$, для плоской одномерной задачи уравнение (1) представится в виде:

$$D\frac{d^4W}{dx^4}-\rho_0 h\Omega^2 W+\kappa p_\infty M\frac{dW}{dx}=0 \qquad (3)$$

Представим решения данной задачи в виде:

$$W\left(x\right)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k\sin\frac{k\pi x}{a} \qquad (4)$$

Исполняя первое приближение (учитывая только первый член (4)) и используя вариационный метод Галёркина, флаттер не обнаруживается, поэтому учтём два первых члена (4) :

$$\begin{cases}\dfrac{4}{3}\kappa p_\infty M f_1+\left(\dfrac{8\pi^4 D}{a^3}-\dfrac{a\rho_0 h\Omega^2}{2}\right)f_2=0\\[2ex]\left(\dfrac{\pi^4 D}{2a^3}-\dfrac{a\rho_0 h\Omega^2}{2}\right)f_1-\dfrac{4}{3}\kappa p_\infty M f_2=0\end{cases} \qquad (5)$$

откуда:

$$9a^8\rho_0^2h^2\Omega^4-153D\rho_0 h\pi^4a^4\Omega^2+64\kappa^2p_\infty^2M^2a^6+144D^2\pi^8=0 \qquad (6)$$

Для Ω получим:

$$\Omega=\pm\sqrt{\frac{1}{a_1}\left(\frac{1}{2}a_2\pm\frac{1}{2}\sqrt{a_2^2-4a_1a_3}\right)} \qquad (7)$$

где $a_1=9a^8\rho_0^2h^2$; $a_2=-153D\rho_0 h\pi^4a^4$; $a_3=64\kappa^2p_\infty^2M^2a^6+144D^2\pi^8$.

Как видно из (7), при $a_2^2<4a_1a_3$ Ω примет мнимые значения, что означает присуствие флаттера:

$$10{,}02\left(D\rho_0 h\pi^4a^4\right)^2<a^8\rho_0^2h^2\left(\kappa^2\rho_\infty^2M^2a^6+2{,}25D^2\pi^8\right)$$

Отсюда получается критическое значение числа Маха

$$M_{kp} = \frac{2.8\text{®}^4 D}{\text{¡}\, p_\infty a^3} \tag{8}$$

Сделаем следующее обозначение:

$$\text{´} = \frac{M_{kp}\, \text{¡}\, \text{°}_\infty a^3}{D}, \tag{9}$$

тогда $\text{´} = 2.81\text{®}^4 \approx 273,2$.

Представим решение уравнения (3) следующим образом:

$$W(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k p_k(x) \tag{10}$$

Учитывая граничные условия и используя метод Ритца, получим, что при учёте только первого члена (10), флаттер не обнаруживается. Сделаем второе приближение, учитывая два первых члена :

$$W(x) = f_1 p_1(x) + f_2 p_2(x) \tag{11}$$

где $p_1(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$; $p_2(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^4 + b_4 x^5$

Учитывая граничные условия, используя вариационный метод Ритца и интегрируя эти выражения, получим:

$$-\frac{a^9 \text{°}_0^2 h^2}{154130}\Omega^4 + \frac{D\text{°}_0 h a^5}{91.4}\Omega^2 - \left(D^2 a + \frac{\text{¡}^2 p_\infty^2 M^2 a^7}{21418.5}\right) = 0, \tag{12}$$

откуда для Ω получим:

$$\Omega = \pm\sqrt{\frac{1}{a_1}\left(\frac{1}{2}a_2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{a_2^2 - 4a_1 a_3}\right)}, \tag{13}$$

где $a_1 = -\frac{a^9 \text{°}_0^2 h^2}{154130}$; $a_2 = \frac{D\text{°}_0 h a^5}{91.4}$; $a_3 = D^2 a + \frac{\text{¡}^2 p_\infty^2 M^2 a^7}{21418.5}$.

Из (13) следует, что при $a_2^2 < 4a_1 a_3$ Ω принимает мнимые значения, что указывает на присутствие флаттера:

$$\frac{a^9 \text{°}_0^2 h^2}{154130}\left(D^2 a + \frac{\text{¡}^2 p_\infty^2 M^2 a^7}{21418.5}\right) > \left(\frac{D\text{°}_0 h a^5}{91.4}\right)^2 \tag{14}$$

Отсюда получим критическое значение цифры Маха:

$M_{kp} = \frac{277D}{\text{¡}\,\text{°}_\infty a^3}$; в этом случае $\text{´} = 277$.

Теперь представим аэродинамическую силу, действующую на пластину по уточнённой теории в виде предложенной в [1]–[3]. В этом случае вместе с уравнением колебания пластины получим систему следующих уравнений:

$$\begin{cases} D\nabla^2\nabla^2 w + \text{°}_0 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \text{°}_0 h\text{£} \frac{\partial w}{\partial t} + p(x,t) = 0 \\ \frac{dp}{dt} = \frac{\text{¡}\, p_\infty}{c_\infty}\frac{d^2 w}{dt^2} + \frac{\text{¡}\, p_\infty a_0^2}{c_\infty}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x} \end{cases} \tag{15}$$

где °_0, a_0 – невозмущённые параметры газа, выбирается из условия наилучшего согласования некоторых критических параметров, вычисленных на основе системы (15).

Пренебрегая затуханием и поставив

$$w(x,t) = W(x)e^{i\Omega t};\ p(x,t) = P(x)e^{i\Omega t}, \tag{16}$$

для плоской одномерной задачи система (15) примет вид:

$$
\begin{cases}
D\dfrac{d^4W}{dx^4} - {}^\circ{}_0 h\Omega^2 W + P(x) = 0 \\
i\Omega P + U\dfrac{dP}{dx} = \dfrac{\text{¡}\, p_\infty}{c_\infty}\left(-W\Omega^2 + 2Ui\Omega\dfrac{dW}{dx} + U^2\dfrac{d^2W}{dx^2} \right) + \quad \dfrac{\text{¡}\, p_\infty a_0^2}{c_\infty}\dfrac{d^2W}{dx^2}
\end{cases} \tag{17}
$$

Разделив обе части второго уравнения на скорость потока и не учитывая мнимые члены, получим:

$$
\begin{cases}
D\dfrac{d^4W}{dx^4} - {}^\circ{}_0 h\Omega^2 W + P(x) = 0 \\
M\dfrac{dP}{dx} = -\dfrac{\text{¡}\, p_\infty}{c_\infty{}^2} W\Omega^2 + M^2\, \text{¡}\, {}^\circ{}_\infty \dfrac{d^2W}{dx^2} + \quad \dfrac{\text{¡}\, p_\infty a_0^2}{c_\infty{}^2}\dfrac{d^2W}{dx^2}
\end{cases} \tag{18}
$$

Так как порядок этой системы на порядок выше степени уравнения колебания пластины, то необходимы ещё одно граничное и начальное условия. Что касается начального условия, то оно естественным образом связано с начальным распределением аэродинамического давления. В этом случае важен вопрос граничного условия. Учитывая, что аэродинамические возмущения входят в систему через переднюю по потоку сверхзвуковую кромку, то, естественно, на этой кромке нужно ставить дополнительное граничное условие. В качестве дополнительного граничного условия примем формулу Аккерета для сверхзвуковой передней кромки обтекания угла:

$$
P(0) = kM\, \text{¡}\, {}^\circ{}_\infty \frac{\partial W(0)}{\partial x} \tag{19}
$$

где коэффициент k определяется теорией подобия сверхзвуковых потоков (при больших скоростях k=1). Из первого уравнения системы (18) выражение P(x) подставим во второе уравнение, получим:

$$
DM\frac{d^5w}{dx^5} + \left(M^2\, \text{¡}\, {}^\circ{}_\infty + \quad \frac{\text{¡}\, p_\infty a_0^2}{c_\infty{}^2} \right)\frac{d^2W}{dx^2} - M\, {}^\circ{}_0 h\Omega^2 \frac{dW}{dx} - \frac{\text{¡}\, p_\infty}{c_\infty^2} W\Omega^2 = 0 \tag{20}
$$

Представим решение уравнения (20) в виде:

$$
W(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k\, p_k(x) \tag{21}
$$

$$
f_1\, p_1(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 \tag{22}
$$

Учитывая граничные условия (3) и (19), получим:

$$
W(x) = f_1\, p_1(x) = a_1\left(x - \left(2Ta + \frac{10\left(1 - Ta^3\right)}{7a^2} \right)x^3 + Tx^4 + \frac{3\left(1 - Ta^3\right)}{7a^4}x^5 \right) \tag{23}
$$

где $T = -k\dfrac{M\, \text{¡}\, p_\infty}{24D}$.

Используем метод Ритца

$$
\int_0^a L\left(a_1\left(x - \left(2Ta + \frac{10\left(1 - Ta^3\right)}{7a^2} \right)x^3 + Tx^4 + \frac{3\left(1 - Ta^3\right)}{7a^4}x^5 \right)\right) \cdot
$$

$$
\cdot\left(x - \left(2Ta + \frac{10\left(1 - Ta^3\right)}{7a^2} \right)x^3 + Tx^4 + \frac{3\left(1 - Ta^3\right)}{7a^4}x^5 \right)dx = 0 \tag{24}
$$

Упростив это выражение и игнорируя значения малого порядка, получим

$$
-0.035\left(6{,}15Mh\, {}^\circ{}_0 ac^2 + \text{¡}\, p_\infty a^2 \right)\Omega^2 + \text{¡}\, p_\infty M^2 c^2 + \quad \text{¡}\, p_\infty M^2 a_0^2 = 0,
$$

откуда для Ω получим:

$$\Omega = \sqrt{\frac{M^2 ¡ p_\infty \left(c^2 + \quad a_0^2\right)}{0.035\left(6,15 M h °_0 a c^2 + ¡ p_\infty a^2\right)}} \ . \tag{25}$$

Из (25) следует, что Ω всегда принимает вещественные значения, а это значит, что при учёте только первого члена флаттер не обнаруживается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белубекян В.М., Минасян М.М. О нелинейном флаттере пластин в сверхзвуковом потоке газа. //Изв. НАН Армении. Механика. 1999. Т.52. №4. С.38-45.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой неустойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339с.
3. Минасян М.М. Нелинейные волны и колебания в физически активных деформируемых средах. Ереван: Изд.-во ЕГУ, 2007. 256с.

Сведения об авторах:

Акопян Айк Ованнесович – магистр Института механики НАН Армении, инженер в компании “МИКАПРОГРЕССТЕХ” ООО, (374 94) 37 1210
E-mail: hayk85hayk@mail.ru

Егиазарян Татевик Айказовна – инженер в компании “МИКАПРОГРЕССТЕХ” ООО
(374 10) 267082, (374 91) 491788
E-mail: tatevik_ygh@yahoo.com

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ С ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМ РАЗРЕЗОМ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНО ВЫХОДЯЩИМ НА ТРЕЩИНУ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Акопян Л.В.

Рассмотрено плоское деформированное состояние однородной упругой плоскости, ослабленной полубесконечным разрезом, перпендикулярно выходящим на середину трещины конечной длины и деформирующейся двумя одинаковыми абсолютно жёсткими штампами, приложенными к симметричным областям противоположенных берегов полубесконечного разреза. Выведена определяющая система сингулярных интегральных уравнений относительно производных функций разностей смещений точек берегов конечной трещины и контакного давления, действующего под штампами. Решение системы построено численно-аналитическим методом дискретных особенностей.

1. Пусть упругая плоскость, отнесённая к полярной системе координат $Or\varphi$, на линии $\varphi = 0.5\pi$ ослаблена полубесконечным разрезом $(0 < r < \infty)$, а на отрезке $(0 < r < a)$ линий $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ конечной трещиной длины $2a$, деформируется под воздействием двух одинаковых абсолютно жёстких гладких штампов с плоскими основаниями, вдавливаемыми в плоскость на симметрично расположенных участках берегов полубесконечного разреза (c, d) сосредоточенными нагрузками величины Q_0 и нормальных напряжений $\pm_0(r)$, действующих на берега конечной трещины. Учитывая симметричность задачи относительно оси Oy, её математически можно представить в виде следующей граничной задачи:

$$\begin{cases} \pm^{+}_{\cdot\cdot}\left(\frac{\text{®}}{2}, r\right) = 0 \quad r \notin (c, d) \\ \text{²}^{+}_{r\cdot\cdot}\left(\frac{\text{®}}{2}, r\right) = U^{-}_{\cdot\cdot}\left(-\frac{\text{®}}{2}, r\right) = \text{²}^{-}_{r\cdot\cdot}\left(-\frac{\text{®}}{2}, r\right) = 0 \quad (0 < r < \infty) \\ U^{-}_{\cdot\cdot}\left(-\frac{\text{®}}{2}, r\right) = 0, \quad \text{²}^{-}_{r\cdot\cdot}\left(-\frac{\text{®}}{2}, r\right) = 0 \quad (0 < r < \infty) \end{cases} \tag{1.1а}$$

$$\begin{cases} U^{+}_{\cdot\cdot}(0, r) = U^{-}_{\cdot\cdot}(0, r), \quad U^{+}_{r}(0, r) = U^{-}_{r}(0, r) \\ \pm^{+}_{\cdot\cdot}(0, r) = \pm^{-}_{\cdot\cdot}(0, r), \ \text{²}^{+}_{r\cdot\cdot}(0, r) = \text{²}^{-}_{r\cdot\cdot}(0, r) \quad (a < r < \infty) \end{cases} \tag{1.1б}$$

$$\begin{cases} U^{+}_{\cdot\cdot}\left(\frac{\text{®}}{2}, r\right) = \text{¢} = \text{const} \quad (c < r < d) \\ \pm^{+}_{\cdot\cdot}(0, r) = \pm^{-}_{\cdot\cdot}(0, r) = -\pm_0(r) \quad (0 < r < a) \\ \text{²}^{+}_{r\cdot\cdot}(0, r) = \text{²}^{-}_{r\cdot\cdot}(0, r) = 0 \quad (0 < r < a) \end{cases} \tag{1.1в}$$

Здесь $U^{\pm}_{\cdot\cdot}(\text{¨}, r)$ и $U^{\pm}_{r}(\text{¨}, r)$ – угловые и радиальные компоненты смещений точек верхней и нижней четверть-плоскостей соответственно, удовлетворяющие в областях своего определения уравнениям Ламэ, $\pm^{\pm}_{\cdot\cdot}(\text{¨}, r)$ и $\text{²}^{\pm}_{r\cdot\cdot}(\text{¨}, r)$ – компоненты напряжений, действующие в этих четверть-плоскостях, а ¢ – жёсткое смещение штампов.

Чтобы получить определяющие уравнения поставленной задачи введем в рассмотрение разность смещений точек берегов конечной трещины и контактные напряжения, действующие под штампами по формулам

$$
\begin{cases}
U_\theta^+\left(0,r\right)-U_\theta^-\left(0,r\right)=U\left(r\right) & \left(0<r<a\right)\\
U_r^+\left(0,r\right)=U_r^-\left(0,r\right)=V\left(r\right) & \left(0<r<a\right)\\
\sigma_\theta^+\left(\dfrac{\pi}{2},r\right)=-P\left(r\right) & \left(c<r<d\right)
\end{cases}
\qquad (1.2)
$$

Сначала, в полярной системе координат решим вспомогательную граничную задачу для уравнений Ламэ, состоящую из условий (1.1а), (1.1б) и (1.2) и выразим напряжения на берегах конечного разреза и смещения в участках берегов полубесконечного разреза $\left(c,d\right)$ через функции скачков смещений и контактные напряжения, действующие под штампом. Используя результаты работы [1], после некоторых выкладок можем записать:

$$
\sigma_\theta^+\left(0,r\right)=\frac{\gamma_1}{\pi}\int_0^a K_{11}\left(r,r_0\right)U'\left(r_0\right)dr_0+\frac{\gamma_1}{\pi}\int_0^a K_{12}\left(r,r_0\right)V'\left(r_0\right)dr_0+\frac{1}{\pi}\int_c^d K_{13}\left(r,r_0\right)P\left(r_0\right)dr_0, \qquad (1.3)
$$

$$
\tau_{r\theta}^+\left(0,r\right)=\frac{\gamma_1}{\pi}\int_0^a K_{21}\left(r,r_0\right)U'\left(r_0\right)dr_0+\frac{\gamma_1}{\pi}\int_0^a K_{22}\left(r,r_0\right)V'\left(r_0\right)dr_0+\frac{1}{\pi}\int_c^d K_{23}\left(r,r_0\right)P\left(r_0\right)dr_0, \qquad (1.4)
$$

$$
\frac{dU_\theta^+\left(\dfrac{\pi}{2},r\right)}{dr}=\frac{1}{\pi}\int_0^a K_{31}\left(r,r_0\right)U'\left(r_0\right)dr_0+\frac{1}{\pi}\int_0^a K_{32}\left(r,r_0\right)V'\left(r_0\right)dr_0-\frac{1}{2\pi\gamma_1}\int_c^d K_{33}\left(r,r_0\right)P\left(r_0\right)dr_0, \qquad (1.5)
$$

где

$$
K_{11}\left(r,r_0\right)=\frac{2r_0}{r_0^2-r^2}-\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr}\left(\frac{2rr_0}{r_0^2-r^2}-\frac{\sqrt{rr_0}}{r_0-r}\right),\quad K_{12}\left(r,r_0\right)=\frac{d}{dr}\left\{r\frac{d}{dr}\left(\frac{\sqrt{rr_0}}{r_0+r}\right)+\frac{\sqrt{rr_0}}{r_0+r}\right\},
$$

$$
K_{13}\left(r,r_0\right)=\frac{d}{dr}\left[\frac{\sqrt{2r_0r}\left(r_0-r\right)}{2\left(r_0^2+r^2\right)}\right]=K_{31}\left(r,r_0\right),\quad K_{21}\left(r,r_0\right)=-\frac{d}{dr}\left\{r\frac{d}{dr}\left(\frac{\sqrt{rr_0}}{r_0+r}\right)-\frac{\sqrt{rr_0}}{r_0+r}\right\},
$$

$$
K_{22}\left(r,r_0\right)=\frac{\sqrt{rr_0}}{r(r_0-r)}+\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr}\left(\frac{2r_0^2}{r_0^2-r^2}-\frac{\sqrt{rr_0}}{r_0-r}\right),\quad K_{23}\left(r,r_0\right)=-\frac{1}{2r}\left(r\frac{d}{dr}-1\right)\left[\frac{\sqrt{2r_0r}\left(r_0+r\right)}{\left(r_0^2+r^2\right)}\right],
$$

$$
K_{32}\left(r,r_0\right)=\frac{1}{2r}\left(r\frac{d}{dr}+1\right)\left[\frac{\sqrt{2r_0r}\left(r_0+r\right)}{\left(r_0^2+r^2\right)}\right],\quad K_{33}\left(r,r_0\right)=\frac{\sqrt{r_0r}}{r\left(r_0-r\right)};\gamma_1=\frac{\mu\left(\lambda+\mu\right)}{\left(\lambda+2\mu\right)}.
$$

Используя полученные выражения, удовлетворим условиям (1.1в), первоначально дифференцируя первое из них. В итоге, для определения функций $U'\left(r\right)$, $W'\left(r\right)$ и $P\left(r\right)$ получим следующую систему сингулярных интегральных уравнений с обобщённым ядром Коши:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\gamma_1}{\pi}\displaystyle\int_0^a K_{11}\left(r,r_0\right)U'\left(r_0\right)dr_0+\dfrac{\gamma_1}{\pi}\int_0^a K_{12}\left(r,r_0\right)V'\left(r_0\right)dr_0+\dfrac{1}{\pi}\int_c^d K_{13}\left(r,r_0\right)P\left(r_0\right)dr_0=-\sigma_0\left(r\right) & \left(0<r<a\right)\\
\dfrac{\gamma_1}{\pi}\displaystyle\int_0^a K_{21}\left(r,r_0\right)U'\left(r_0\right)dr_0+\dfrac{\gamma_1}{\pi}\int_0^a K_{22}\left(r,r_0\right)V'\left(r_0\right)dr_0+\dfrac{1}{\pi}\int_c^d K_{23}\left(r,r_0\right)P\left(r_0\right)dr_0=0 & \left(0<r<a\right)\\
\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^a K_{31}\left(r,r_0\right)U'\left(r_0\right)dr_0+\dfrac{1}{\pi}\int_0^a K_{32}\left(r,r_0\right)V'\left(r_0\right)dr_0-\dfrac{1}{2\pi\gamma_1}\int_c^d K_{33}\left(r,r_0\right)P\left(r_0\right)dr_0=0 & \left(c<r<d\right)
\end{cases}
\qquad (1.6)
$$

которую нужно рассматривать при условиях равновесия штампов, непрерывности смещений в концевой точке $x=a$ конечной трещины и ограниченности смещений в точке $x=0$, т.е. при условиях

$$\int_c^d P(r)\,dr = Q_0,\quad U(a) = V(a) = 0,\quad U(0) = u_0 < \infty,\quad V(0) = v_0 < \infty \tag{1.7}$$

где u_0, v_0 – неизвестные постоянные, подлежащие определению.

2. Приступим к решению системы интегральных уравнений (1.6). С этой целью заметим, что, как и в работе [1], в точке $r = a$ функции $W'(r)$, $V'(r)$ и в точках $r = c, d$ функция $P(r)$ имеют обычную корневую особенность. В точке же $r = 0$ функции $W'(r)$ и $V'(r)$ ограничены [1].

Теперь, чтобы построить решение системы (1.6) методом дискретных особенностей [2], при помощи замены переменных сформулируем её на интервале $(-1,1)$ и, введя следующие безразмерные функции

$$\varphi_1(x) = U'\left(\frac{x+1}{2}a\right),\quad \varphi_2(x) = V'\left(\frac{x+1}{2}a\right),\quad \varphi_3(x) = \frac{P(a_* x + b_*)}{E},$$

придём к следующей системе сингулярных интегральных уравнений:

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{s-x}\delta_{ij} + K_{ij}^*(x,s)\right]\varphi_i(s)\,ds = F_j^*(x)\quad (-1 < x < 1;\ j = 1-3) \tag{2.1}$$

Условия (1.7) при помощи введённых функций можно записать в виде

$$U^*(x) = -\int_x^1 \varphi_1(x)\,dx,\quad V^*(x) = -\int_x^1 \varphi_2(x)\,dx,\quad \int_{-1}^{1}\varphi_3(x)\,dx = Q_0'. \tag{2.2}$$

При этом последние два соотношения (1.4) примут вид

$$\int_{-1}^{1}\varphi_1(x)\,dx = -u_0^*,\quad \int_{-1}^{1}\varphi_2(x)\,dx = -v_0^* \tag{2.3}$$

Здесь введены обозначения

$$K_{11}^*(x,s) = \frac{d}{dx}(x+1)\frac{d}{dx}\frac{\left(\sqrt{(s+1)} - \sqrt{(x+1)}\right)\sqrt{(x+1)(s+1)}}{(x+s+2)\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{s+1}\right)} + \frac{1}{s+x+2},$$

$$K_{12}^*(x,s) = \frac{d}{dx}\left\{(x+1)\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{(x+1)(s+1)}}{s+x+2}\right) + \frac{\sqrt{(x+1)(s+1)}}{s+x+2}\right\},$$

$$K_{13}^*(x,s) = \frac{\alpha_1 E}{\gamma_1}\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{(x+1)(\alpha_1 s + \alpha_2)}\,(\alpha_1 s + \alpha_2 - (x+1)/2)}{\left((\alpha_1 s + \alpha_2)^2 + (x+1)^2/4\right)}\right),$$

$$K_{21}^*(x,s) = -\frac{d}{dx}\left\{(x+1)\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{(x+1)(s+1)}}{s+x+2}\right) - \frac{\sqrt{(x+1)(s+1)}}{s+x+2}\right\},$$

$$K_{22}^*(x,s) = -\frac{d}{dx}(x+1)\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{x+1}}{\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{s+1}\right)} + \frac{x+1}{s+x+2}\right) + \frac{1}{\left(\sqrt{(s+1)} + \sqrt{(x+1)}\right)\sqrt{(x+1)}},$$

$$K_{23}^*(x,s) = \frac{\alpha_1 E}{\gamma_1(x+1)}\left((x+1)\frac{d}{dx} - 1\right)\left(\frac{\sqrt{(x+1)(\alpha_1 s + \alpha_2)}\,(\alpha_1 s + \alpha_2 + (x+1)/2)}{\left((\alpha_1 s + \alpha_2)^2 + (x+1)^2/4\right)}\right),$$

$$K_{31}^{*}(x,s)=-\frac{\gamma_1}{8E\alpha_1}\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{(\alpha_1x+\alpha_2)(s+1)}\,(s+1-2\alpha_1x-2\alpha_2)}{\left((\alpha_1x+\alpha_2)^2+(s+1)^2/4\right)}\right),$$

$$K_{32}^{*}(x,s)=\frac{\gamma_1}{8E(\alpha_1x+\alpha_2)}\left((x+\alpha_3)\frac{d}{dx}+1\right)\left(\frac{\sqrt{(\alpha_1x+\alpha_2)(s+1)}\,(s+1+2\alpha_1x+2\alpha_2)}{\left((\alpha_1x+\alpha_2)^2+(s+1)^2/4\right)}\right),$$

$$K_{33}^{*}(x,s)=\frac{1}{\sqrt{x+\alpha_3}\left(\sqrt{x+\alpha_3}+\sqrt{s+\alpha_3}\right)},\quad F_1(x)=-\frac{\delta_0\left(a(x+1)/2\right)}{\gamma_1},\ F_2(x)=F_3(x)=0,$$

$$U^{*}(x)=2U\left(a(x+1)/2\right)/a,\quad V^{*}(x)=2V\left(a(x+1)/2\right)/a,$$

$$a_*=(d-c)/2,\ b_*=(d+c)/2,\ \alpha_1=a_*/a,\ \alpha_2=b_*/a,\ \alpha_3=b_*/a_*,$$

$$u_0^*=2u_0/a,\ v_0^*=2v_0/a.$$

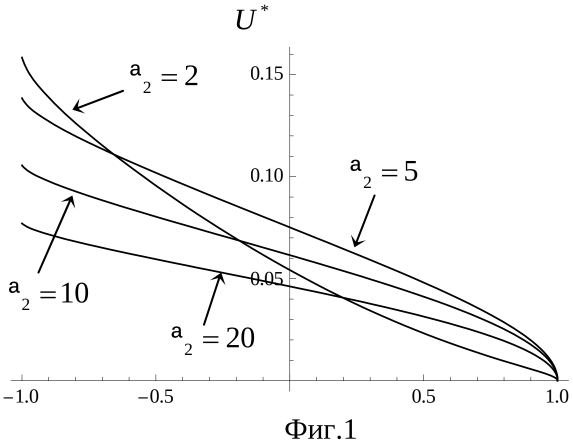
Далее, представив искомые функции $\varphi_j(x)$ $(j=1-3)$ в виде

$$\varphi_j(x)=\frac{\varphi_j^*(x)}{\sqrt{1-x}}\ (j=1,2),\quad \varphi_3(x)=\frac{\varphi_3^*(x)}{\sqrt{1-x^2}} \tag{2.4}$$

где $\varphi_i^*(x)$ $(i=1-3)$ – непрерывные гладкие функции, ограниченные вплоть до концов интервала $(-1,1)$ и, используя формулы (1.3) – (1.5) для безразмерных коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений получим ту же формулу, что и в [1]:

$$K_{\mathrm{I}}^*(1)-iK_{\mathrm{II}}^*(1)=-\frac{\varphi_1^*(1)-i\varphi_2^*(1)}{2(1-\nu)} \tag{2.5}$$

Далее, методом дискретных особенностей [4] проведён численный анализ поставленной задачи и изучены закономерности изменения раскрытия трещины и коэффициента интенсивности разрушающих напряжений в концевой точке трещины в зависимости от приведённого расстояния центральной точки штампа α_2 от начала координат, в случае, когда $\delta_0(r)=0,\ Q_0'=0.1$, $\alpha_1=0.5$ и $\nu=0.3$. Результаты вычислительных работ приведены в виде табл.1 и фиг.1. В табл.1 приведены значения коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений в концевой точке трещины.



Фиг.1

Таблица 1

a_2	0.8	1	1.77	2	3	5	8	12	20
$10^2 K_{\mathrm{I}}^{*}(1)$	-3.22	-2.611	0	0.517	1.713	2.186	2.092	1.863	1.534
$10^2 K_{\mathrm{II}}^{*}(1)$	-11.658	-9.738	-5.226	-4.577	-3.16	-2.263	-1.768	-1.45	-1.132

Из них явствует, что при приближении штампа к началу координат, т.е. к свободному концу конечной трещины, $K_{\mathrm{I}}^{*}(1)$ уменьшается и меняет знак при $a_2 < 1.77$. При удалении же нагрузки КИН возрастает до определённого значения $a_2 = 5.77$, а затем уменьшается, стремясь к нулю. На фиг.1 приведены графики нормальных составляющих раскрытия трещины. Из них явствует, что при $a_2 < 1.77$ нормальная составляющая раскрытия в некоторой области вблизи точки $r = a$ отрицательна. Это обстоятельство позволяет утверждать, что для этих значений параметра a_2 , как и в работе [1], вблизи точки $r = a$ берега трещины соприкасаются и, следовательно, постановку задачи нужно поменять.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акопян В.Н., Даштоян Л.Л., Акопян Л.В. О напряжённом состоянии упругой плоскости с полубесконечным разрезом, перендикулярно выходящим на трещину конечной длины // В сб. трудов межд. школы-конференции: «Механика – 2009», Ереван: 2009. С.118-124.
2. Саакян А.В. Метод дискретных особенностей в применении к решению сингулярных интегральных уравнений с неподвижной особенностью. // Изв. НАН Армении. Механика. 2000. Т.53. No3. С.12-19.

Сведения об авторе:

Акопян Лусине – младший научный сотрудник Института механики НАН Армении.
Тел: (+37410) 52-48-90

О КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ИЗГИБА БАЛКИ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ НА УПРУГОЙ ПОЛОСЕ С УЧЁТОМ СДВИГАЮЩИХ СИЛ

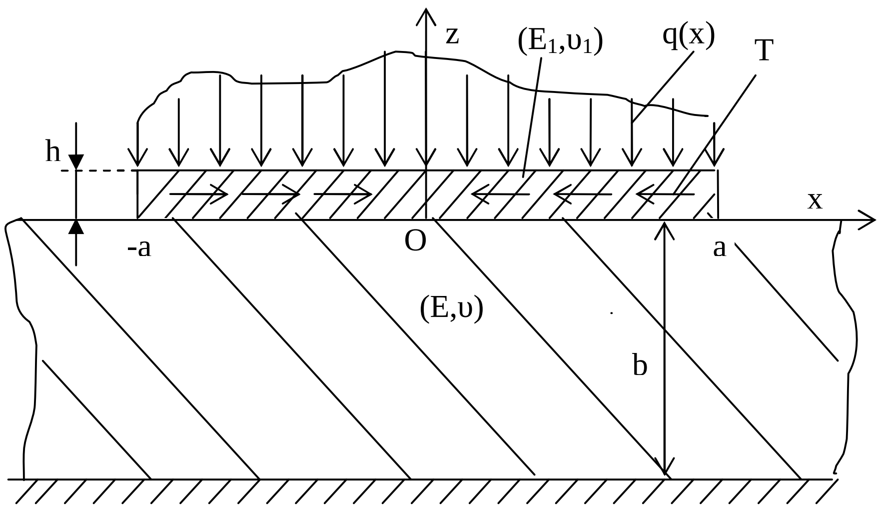
Амирбекян А.Н., Шекян А.Л., Шекян Л.А.

Рассматривается контактная задача об изгибе балки конечной длины на упругом основании в виде полосы, находящейся в условиях плоской деформации, по обобщённой модели изгиба в рамках теории С.П.Тимошенко [1,2], где помимо вертикальных сил, осевые сжимающие или растягивающие силы также влияют на прогибы балки.

Методом сингулярных интегральных уравнений (СИУ) в сочетании с известным численно-аналитическим методом решения СИУ, задача сведена к системе линейных алгебраических уравнений.

Проблемы, связанные с расчётом конструкций, лежащих на упругом основании, представляют собой одну из актуальных, сложных и интересных задач теории упругости. Всё более возрастающий интерес к этим задачам связан, в частности, с расчётами прочности и устойчивости зданий повышенной этажности, сложности условий работы их фундаментных плит. Обширные классы задач об изгибе тонкостенных элементов в виде балок, плит, оболочек на деформируемых основаниях различных форм и в рамках различных физических допущений, тесно примыкающие к классическим контактным задачам теории упругости, ввиду их актуальности и практической значимости стали предметом исследования многих авторов [3-9] и др.

1. Пусть балка, отнесённая к правой прямоугольной системе координат Oxz, длиной $2a$, высотой h, модуля упругости E_1 и коэффициента Пуассона $\neg_1$ под действием распределённых вертикальных сил интенсивности $q(x)$ $(-a \le x \le a)$ изгибаясь вдавливается в упругую полосу $\Omega = \{x \in (-\infty;\infty), z \in [-b;0]\}$ толщиной b, с модулем упругости E и коэффициентом Пуассона $\neg$, нижний край которой жёстко защемлён (фиг.1). Требуется определить законы распределения контактных давлений $p(x)$, действующих между балкой и полосой, изгибающих моментов $M(x)$ и поперечных сил $Q(x)$ в сечениях балки.



Фиг. 1

Дифференциальное уравнение изгиба балки с поперечными силами $q(x)$ и $p(x)$, учитывая, при этом, по теории С.П. Тимошенко ([2], стр.422, формула (217), $T = -N_x, w = -\mathrm{v}_1,\ N_y = N_{xy} = 0$) влияние сжимающих касательных сил интенсивности T, равномерно распределённых вдоль срединной линии балки, имеет вид [10]

$$D\frac{d^4\mathrm{v}_1}{dx^4} + T\frac{d^2\mathrm{v}_1}{dx^2} = p(x) - q(x), \quad (-a < x < a) \tag{1}$$

где $D = E_1 h^3 / 12\left(1 - \neg_1{}^2\right)$ – жёсткость балки на изгиб, $\mathrm{v}_1 = \mathrm{v}_1(x)$ – вертикальные смещения точек балки. При этом, функции $\mathrm{v}_1(x)$, $M(x)$ и $Q(x)$ связаны между собой соотношениями

$$M(x) = D\frac{d^2\mathrm{v}_1}{dx^2}, \quad Q(x) = D\frac{d^3\mathrm{v}_1}{dx^3}. \tag{2}$$

В случае растягивающих сил в уравнении (1) следует T заменить на $-T$.
Уравнение (1) рассматривается при следующих граничных условиях:

$$M(x)\big|_{x=\pm a} = 0, \tag{3}$$

указывающих на то, что в концевых точках балки $x = \pm a$ отсутствуют изгибающие моменты $M(x)$. При этом условия равновесия балки имеют вид:

$$\int_{-a}^{a}[p(x) - q(x)]dx = 0 \ \Rightarrow \ \int_{-a}^{a} p(x)dx = \int_{-a}^{a} q(x)dx = P, \tag{4}$$

$$\int_{-a}^{a} x[p(x) - q(x)]dx = 0 \ \Rightarrow \ \int_{-a}^{a} xp(x)dx = \int_{-a}^{a} xq(x)dx = M. \tag{5}$$

2. Введя обозначения

$$k = \sqrt{T/D}, \ g(x) = [p(x) - q(x)]/D, \ y = d^2\mathrm{v}_1/dx^2, \tag{6}$$

дифференциальное уравнение (1) запишем в форме

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2 y = g(x), \quad (-a < x < a). \tag{7}$$

Общее решение дифференциального уравнения (7) представляется формулой

$$y(x) = C_1\cos kx + C_2\sin kx + \frac{1}{2k}\int_{-a}^{a}\sin\left(k|x-s|\right)g(s)ds, \ (-a < x < a), \tag{8}$$

где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования. На основании (8), (6) и (2), из граничных условий (3) находим

$$C_1 = -\frac{\operatorname{tg}(ka)}{2k}\int_{-a}^{a}\cos(ks)\,g(s)\,ds, \ C_2 = \frac{\operatorname{ctg}(ka)}{2k}\int_{-a}^{a}\sin(ks)\,g(s)\,ds. \tag{9}$$

Теперь выражения C_1 и C_2 из (9), подставляя в (8) и учитывая (6), примут вид:

$$\frac{d^2\mathrm{v}_1}{dx^2} = \frac{1}{k\sin 2ka}\int_{-a}^{a}\left(\cos^2 ka\sin kx\sin ks - \sin^2 ka\cos kx\cos ks\right)g(s)ds +$$

$$+\frac{1}{2k}\int_{-a}^{a}\sin\left(k|x-s|\right)g(s)ds. \tag{10}$$

$$\frac{d^3\mathrm{v}_1}{dx^3} = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a}\left[\operatorname{tg}(ka)\sin(kx)\cos(ks) + \operatorname{ctg}(ka)\cos(kx)\sin(ks)\right]g(s)\,ds +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}\cos\left[k(x-s)\right]\operatorname{sign}(x-s)\,g(s)\,ds. \tag{11}$$

В частности, из (11) и (2) получим

$$Q(\pm a) = D\frac{d^3\mathrm{v}_1}{dx^3}\bigg|_{x=\pm a} = \pm\frac{D}{\sin 2ka}\int_{-a}^{a}\sin[k(a \pm s)]g(s)ds. \tag{12}$$

На основании (12) убедимся, что условия отсутствия поперечных сил $Q(x)$ на концах балки, вообще, не удовлетворяются. Но если в (12) совершить предельный переход $k \to 0$ и принять во внимание условия равновесия балки (4)-(5) и обозначение $g(x)$ из (6), то

$$\left.\frac{d^3 \mathrm{v}_1}{dx^3}\right|_{x=\pm a} = \pm\int_{-a}^{a} \frac{(a \pm s)}{2a} g(s)ds = \pm\frac{1}{2}\int_{-a}^{a} g(s)ds + \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} sg(s)ds = 0,$$

и, следовательно, в классической теории изгиба балки условия $Q(\pm a) = 0$, как следствие условий равновесия балки, выполняются.

Следует также отметить, что если постоянные C_1 и C_2 определим из условий $Q(\pm a) = 0$, то получим

$$\left.\frac{d^2 \mathrm{v}_1}{dx^2}\right|_{x=\pm a} = -\frac{1}{k \sin 2ka}\int_{-a}^{a} \{1 - \cos[k(a \pm s)]\} g(s)ds.$$

Откуда, следует, что при $k \to 0$

$$\left.\frac{d^2 \mathrm{v}_1}{dx^2}\right|_{x=a} = \left.\frac{d^2 \mathrm{v}_1}{dx^2}\right|_{x=-a} = -\frac{1}{4a}\int_{-a}^{a} s^2 g(s)ds,$$

т.е. условия $M(\pm a) = 0$ классической теории изгиба балки не выполняются. Поэтому дифференциальное уравнение изгиба балки по теории С.П. Тимошенко (1) будем рассматривать только при условиях (3), так как решение этой граничной задачи при предельном переходе $k \to 0$ переходит в известное решение классической теории изгиба балки и, следовательно, при достаточно малых k, при которых и здесь будет, в основном, рассматриваться контактная задача об изгибе балки на упругом основании, величины $Q(\pm a)$ сколь угодно малы. При более совершенных, но довольно непростых моделях изгиба балки [7], можно достичь точного удовлетворения обеих пар граничных условий $M(\pm a) = 0$, $Q(\pm a) = 0$.

Отметим, что в случае осевых растягивающих сил T во всех предыдущих формулах следует параметр k формально заменить на ik, где i – мнимая единица, постоянную C_1 оставить без изменения, постоянную C_2 заменить на постоянную $-iC_2$ и везде от тригонометрических функций перейти к соответствующим гиперболическим функциям.

Далее проинтегрируя уравнение (10), получим

$$\frac{d\mathrm{v}_1}{dx} = \frac{1}{2k^2}\int_{-a}^{a} H(x,s) g(s)ds + C, \quad (-a \le x \le a) \tag{13}$$

где

$$H(x,s) = \{1 - \cos[k(x-s)]\} \operatorname{sign}(x-s) + \operatorname{ctg}(ka)[1 - \cos(kx)]\sin(ks) - \operatorname{tg}(ka)\sin(kx)\cos(ks).$$

3. Теперь рассмотрим равновесие упругой полосы $\Omega = \{x \in (-\infty;\infty), z \in [-b;0]\}$, нижняя грань которой $z = -b$ жёстко защемлена (фиг.1), а на участке $-a \le x \le a$ границы $z = 0$ приложены нормальные контактные давления $p(x)$. Тогда, согласно [11], вертикальные перемещения $\mathrm{v}(x)$ граничных точек грани $z = 0$ полосы выражаются формулой

$$\mathrm{v}(x) = -\frac{2(1-\nu^2)}{\theta E}\int_{-a}^{a} U\left(\frac{s-x}{b}\right) p(s)ds, \quad (-\infty < x < \infty), \tag{14}$$

где ядерная функция $U(z)$ выражается формулой

$$U(z) = \int_{0}^{\infty} \frac{(2\varepsilon \operatorname{sh} 2u - 4u)\cos uz}{\varepsilon(2\varepsilon \operatorname{ch} 2u + 1 + \varepsilon^2 + 4u^2)} du, \quad (\kappa = 3 - 4\nu) \tag{15}$$

Далее запишем условие контакта балки и упругой полосы: $\mathrm{v}(x) = \mathrm{v}_1(x)$, $(-a \le x \le a)$, которое после дифференцирования примет вид

$$\frac{d\mathrm{v}}{dx}=\frac{d\mathrm{v}_1}{dx}, \quad (-a<x<a)\,. \tag{16}$$

Теперь представляя функцию $U(z)$ в виде суммы её главной и регулярной частей

$$U(z)=\ln\frac{1}{|z|}+R(z), \tag{17}$$

условие (16) на основании (13)-(15) и (17) сводится относительно $p(x)$ к следующему СИУ:

$$\frac{2\left(1-¬^2\right)}{®E}\int_{-a}^{a}\left[\frac{1}{s-x}+R_1(s-x)\right]p(s)ds=-\frac{1}{2k^2D}\int_{-a}^{a}H(x,s)\left[p(s)-q(s)\right]ds+C,\ (-a<x<a)\,, \tag{18}$$

где $R_1(z)=dR(z)/dz$.

Таким образом, неизвестная функция $p(x)$ должна удовлетворять СИУ (18) и условиям равновесия балки (4)-(5).

Далее, после введения безразмерных величин

$$\varphi(\xi)=\frac{p(a\xi)}{E}\,,\ ¡=ka\,,\ ª=\frac{3®E}{\left(1-¬^2\right)¡^2E_1}\left(\frac{a}{h}\right)^3,\ ¥=\frac{C}{2\left(1-¬^2\right)},\ \left(-1<¶,¦<1\right) \tag{19}$$

СИУ (18) преобразуется к виду

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\eta)d\eta}{\eta-\xi}+\frac{\lambda}{\pi}\int_{-1}^{1}K(\xi,\eta)\varphi(\eta)d\eta=\frac{\lambda}{\pi}f(\xi)+\gamma\,, \tag{20}$$

а условия равновесия (4)-(5) – к виду

$$\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)d\xi=P_0\,,\ \left(P_0=\frac{P}{aE}\right),\ \int_{-1}^{1}\xi\varphi(\xi)d\xi=M_0\,,\ \left(M_0=\frac{M}{a^2E}\right). \tag{21}$$

Здесь $K(¶,¦)$ и $f(¶)$– известные функции.

Далее СИУ (20) при условиях (21) известным численно-аналитическим методом [12-14] сведём к системе линейных алгебраических уравнений. С этой целью положим

$$\varphi(\xi)=\frac{\Phi(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}\,,\ \left(-1<¶<1\right), \tag{22}$$

где функция $\Phi(¶)$ определена на отрезке $\left[-1<¶<1\right]$ и принадлежит гельдеровскому классу функций. В результате, придём к следующей системе линейных уравнений:

$$\begin{gathered}\sum_{m=1}^{N}\frac{1}{N}\left[\frac{1}{¦_m-¶_r}+ªK(¶_r,¦_m)\right]\Phi(¦_m)=\frac{ª}{®}f(¶_r)+¥\ \ (r=1,2,...,N-1),\\ \frac{®}{N}\sum_{m=1}^{N}\Phi(¦_m)=P_0,\qquad \frac{®}{N}\sum_{m=1}^{N}¦_m\Phi(¦_m)=M_0.\end{gathered} \tag{23}$$

Система (23) состоит из $(N+1)$ линейных алгебраических уравнений относительно $(N+1)$ неизвестных $\Phi(¦_1),\ \Phi(¦_2),...,\Phi(¦_N),\ ¥$, где

$$¦_m=\cos\left(\frac{2m-1}{2N}®\right)\ (m=1,2,...,\ N\ ),\ ¶_r=\cos\left(\frac{®r}{N}\right)\ (r=1,2,...,N-1)$$

– известные чебышевские узлы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С. П. Сопротивление материалов. Т.2. М.: Наука, 1965. 480с.
2. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М.: Наука, 1966. 636с.
3. Клубин П.К. Расчёт балочных и круглых плит на упругом основании. //"Инженерный сборник". ИМ АН СССР. 1952. Т.12. С.95-135.
4. Коренев Б.Г. Вопросы расчёта балок и плит на упругом основании. М.: Госстройиздат, 1954. 232с.
5. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: Физматгиз, 1960. 491с.
6. Развитие теории контактных задач в СССР. М.: Наука. 1976. 493с.
7. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488с.
8. Агаян К.Л., Григорян Э.Х., Гулян К.Г. Изгиб балки на границе упругой полуплоскости. // Труды международной конференции “Актуальные проблемы механики сплошной среды”. Цахкадзор, Армения. 25-28 сентября 2007. С. 32-36.
9. Агаян К.Л., Григорян Э.Х. О задаче изгиба полубесконечной балки на границе упругой полуплоскости. // Изв. НАН Армении. Механика. 2008. Т.61. №4. С.5-19.
10. Амирбекян А.Н. О контактном взаимодействии изгибающейся по теории С.П. Тимошенко балки конечной длины с упругой полуплоскостью. //Труды II Межд. конференции “Актуальные проблемы механики сплошной среды”, 4–8 октября, Дилижан, Армения. Т.1, Ереван: 2010. С.76-80.
11. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455с.
12. Erdogan F.,Gupta G. D.,Gook T. S. The numerical solutions of singular integral equations. Methods of Analysis and Solution of Crack Problems. // Intern.Publ., Leyden, 1973. P. 368-425.
13. Theocaris P. S., Ioakimidis N. I. Numerical Integration Methods for the Solution of Singular Integral Equations. // Quart. Appl.Math., vol. 35, №1,1997. P. 173-185.
14. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова думка, 1976. 443с.

Сведения об авторах:

Амирбекян Аревик Норайровна – мл. научн. сотр. Института механики НАН Армении
Тел.: (37410) 52-48-90**.** **E-mail:** a.amirbekyan@mail.ru

Шекян Артём Лаврентьевич – канд. физ.-мат. наук, ассистент Государственного инженерного университета Армении
Тел: (+37410)39 89 01; (+37499) 85 72 27; **E-mail:** artyom.sh.83@mail.ru

Шекян Лаврентий Арамович – докт. физ.-мат. наук, доцент Государственного инженерного университета Армении
Тел: (+37410)39 89 01; (+37499) 28 34 40; **E-mail:** lshekyan@mail.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ИЗГИБАЕМОЙ ПЛАСТИНКИ В ОКРЕСТНОСТИ ШАРНИРНО ЗАКРЕПЛЁННОГО КРАЯ

Антонян С.С., Василян Н.Г

В статье исследовано напряжённо-деформированное состояние изгибаемой пластинки в окрестности шарнирно закреплённого и свободно опёртого края, применяя подход Надаи [1]. Теория С.А. Амбарцумяна, учитывающая поперечные сдвиговые деформации, позволяет выявить различие граничных условий. Получено различие для перерезывающих усилий в окрестности закреплённого края пластинки между результатами, полученными по теории Кирхгофа и теории Амбарцумяна С.А.

Для пространственной задачи теории упругости условия шарнирного закрепления и свободного опирания соответствует один вариант по теории Кирхгофа. Для указанных граничных условий теории, учитывающие поперечные сдвиги, приводят к различным граничным условиям. В этой работе определяются перерезывающие усилия на краю с указанными граничными условиями по теории С.А. Амбарцумяна. Для перерезывающих усилий устанавливается наличие существенных отличий.

1. В последнее время много внимания уделяется исследованиям по обоснованию и применению теорий, учитывающих поперечные сдвиги [1,2,4]. Известны два варианта граничных условий задачи изгиба прямоугольной пластинки в трёхмерной постановке:
а) $u_2 = u_3 = 0,\ \ \sigma_{11} = 0$ (шарнирное закрепление);
б) $u_3 = 0,\ \ \sigma_{11} = 0,\ \ \sigma_{12} = 0$ (свободное опирание) [6].

Этим условиям в теории Кирхгофа соответствуют условия:

а) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$;

б) $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \nu \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0, \qquad \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad w = 0, \quad \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0$.

Относительно функции прогиба w в теории Кирхгофа получаются три граничных условия вместо необходимых двух. При удовлетворении условию самосопряжённости задачи здесь возможны два варианта граничных условий для свободного операния: либо удовлетворяются первые два условия для w, что будет соответствовать задаче с шарнирным закреплением, либо удовлетворяются первое и третье условия, что совпадает с задачей для свободного опирания. Неоднозначность постановки задачи такими граничными условиями по теории Кирхгофа показывает очевидность необходимости применения уточнённых теорий. С помощью теории С.А. Амбарцумяна [7], которая учитывает поперечные сдвиговые деформации, выявляется различие граничных условий шарнирного закрепления и свободного опирания.

Для исследования напряжённо-деформированного состояния для данных граничных условий на кромке пластинки применяется подход Надаи [8,9], согласно которому для достаточно удлинённых пластин можно пренебречь влиянием граничных условий противоположной кромки. Решение Надаи [8] задачи изгиба пластинки на основе теории Кирхгофа приводится в монографии [9].

2. Имеем полубесконечную пластинку–полосу постоянной толщины 2h, которая в прямоугольной декартовой системе координат занимает область $0 \le x < \infty$, $0 \le y \le b$, $-h \le z \le h.$ На пластинку действует распределённая нагрузка интенсивностью $q(y)$. Согласно теории С.А. Амбарцумяна [6,7], уравнения задачи изгиба пластинки с учётом поперечных сдвигов имеют вид

$$\frac{4h}{3}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right) + q\left(y\right) = 0\ ,$$

$$D\frac{\partial}{\partial x}\Delta w-\frac{8h^3}{15}\left[\Delta\varphi_1+\theta\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)\right]+\frac{4h}{3}\varphi_1=0\,, \tag{2.1}$$
$$D\frac{\partial}{\partial y}\Delta w-\frac{8h^3}{15}\left[\Delta\varphi_2+\theta\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)\right]+\frac{4h}{3}\varphi_2=0\,.$$

где w – функция прогиба, φ_1,φ_2 – функции, определяющие перерезывающие усилия, $D=\dfrac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}$, $\theta=\dfrac{1+\nu}{1-\nu}$, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона.

Предполагается, как и в задаче Надаи, что края пластинки $y=0,b$ шарнирно закреплены, что позволяет решение системы уравнений (2.1) представить в виде

$$w=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\sin\lambda_n y,\ \ \varphi_1=\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n(x)\sin\lambda_n y,\ \varphi_2=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(x)\cos\lambda_n y, \tag{2.2}$$

где $\lambda_n=\dfrac{n\pi}{b}$. Следуя подходу Надаи, потребуем, чтобы решения (2.2) при удалении от кромки $x=0$ стремились к решению задачи цилиндрического изгиба.

Уравнения изгиба пластин в форме цилиндрической поверхности, согласно (2.1), имеют вид $\left(\partial/\partial x\approx 0\right)$

$$\frac{4h}{3}\frac{d\varphi_{20}}{dy}+q(y)=0\,,$$
$$-\frac{2h^2}{5}\frac{d^2\varphi_{10}}{dy^2}+\varphi_{10}=0\,, \tag{2.3}$$
$$D\frac{d^3w_0}{dy^3}-\frac{16h^3}{15}\frac{d^2\varphi_{20}}{dy^2}+\frac{4h}{3}\varphi_{20}=0$$

Решение системы (2.3), удовлетворяющее условиям шарнирного закрепления при $y=0,b$, представляется в виде тригонометрических рядов и будет иметь вид

$$w_{0n}=\frac{q_n}{D\lambda_n^4}\left[1+\frac{4h^2\lambda_n^2}{5(1-\nu)}\right]$$
$$\varphi_{1n}=0,\ \ \varphi_{2n}=\frac{3q_n}{4h\lambda_n}. \tag{2.4}$$

Согласно (2.4), указанные условия будут иметь вид:

$$\lim_{x\to\infty}f_n(x)=\frac{q_n}{D\lambda_n^4}\left[1+\frac{4h^2\lambda_n^2}{5(1-\nu)}\right],$$
$$\lim_{x\to\infty}\Phi_n(x)=0 \tag{2.5}$$
$$\lim_{x\to\infty}F_n(x)=\frac{3q_n}{4h\lambda_n}.$$

Подстановка (2.2) в (2.1) приводит к последовательной системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно искомых функций $f_n(x),\ \Phi_n(x),\ F_n(x)$.

$$F_n=\frac{1}{\lambda_n}\left[\Phi_n'+\frac{3q_n}{4h}\right],$$

$$D\left(f_n'''-\lambda_n^2 f_n'\right)-\frac{8h^3}{15}\left[\frac{2}{1-\nu}\Phi_n''-\eta_n^2\Phi_n-\frac{1+\nu}{1-\nu}\lambda_n F_n'\right]=0\,, \tag{2.6}$$

$$D\lambda_n\left(f_n''-\lambda_n^2 f_n\right)-\frac{8h^3}{15}\left[F_n''-\frac{5}{2h^2}\left(\zeta_n+1\right)F_n+\frac{1+\nu}{1-\nu}\lambda_n\Phi_n'\right]=0\,.$$

где приняты следующие обозначения:

$$\zeta_n=\frac{4\lambda_n^2h^2}{5(1-\nu)}\,,\qquad \eta_n=h^{-1}\sqrt{2.5+\lambda_n^2h^2}\,. \tag{2.7}$$

Решение системы (2.6) подробно был приведён ещё в работе [3]

$$f_n=A_n\,e^{-\lambda_n x}+B_n\,x e^{-\lambda_n x}+\frac{q_n}{D\lambda_n^4}\left(1+\zeta_n\right)$$

$$\Phi_n=D_n\,e^{-\eta_n x}-\frac{5E}{4(1+\nu)}\zeta_n\,B_n\,e^{-\lambda_n x} \tag{2.8}$$

$$F_n=-\frac{\eta_n}{\lambda_n}D_n\,e^{-\eta_n x}+\frac{5E}{4(1+\nu)}\zeta_n\,B_n\,e^{-\lambda_n x}+\frac{3q_n}{4h\lambda_n}$$

Таким образом, решением уравнения (2.1), удовлетворяющим условиям (2.2) и (2.5), будет (2.8).

Задача изгиба конечной пластинки с граничными условиями типа шарнирное закрепление и свободное опирание была решена в работе [5].

Произвольные постоянные A_n, B_n и D_n должны определяться удовлетворением граничным условиям на кромке $x=0$.

3. В трёхмерной постановке задач изгиба пластин на кромке пластинки $x=0$ рассматриваются два варианта граничных условий:

$$u_2=u_3=0,\ \ \sigma_{11}=0 \tag{3.1}$$

$$u_3=0,\ \ \sigma_{11}=0,\ \ \sigma_{12}=0 \tag{3.2}$$

По теории Кирхгофа граничные условия имеют вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad v=0,\quad w=0,\quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \tag{3.1*}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\nu\frac{\partial v}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0,\quad w=0,\quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0,\quad \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=0 \tag{3.2*}$$

В теории С.А.Амбарцумяна условиям (3.1*) и (3.2*) соответствуют [4]

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad v=0,\quad w=0,\quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{4}{5G}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}=0,\ \varphi_2=0, \tag{3.1**}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial x}+\nu\frac{\partial v}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0,\quad w=0,\quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{4}{5G}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\nu\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)=0,\\ \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}-\frac{2}{5G}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)=0,\end{gathered} \tag{3.2**}$$

Подставляя (2.2) в (3.1**) и учитывая (2.4) и (2.5), находим неизвестные постоянные

$$A_n=-\frac{q_n}{D\lambda_n^4}(1+\zeta_n),\ \ B_n=-\frac{q_n}{2D\lambda_n^3}\,,\ \ D_n=0. \tag{3.3}$$

Для случая свободного опирания (3.2**) получим

$$\begin{gathered}A_n=-\frac{q_n}{D\lambda_n^4}(1+\zeta_n),\\ B_n=-\frac{q_n}{D\lambda_n^3}\left\{\frac{1+\zeta_n}{(1+(1+\nu)\zeta_n)}+\frac{\left(\lambda_n^2+\nu\,\eta_n^2\right)}{2\left(\lambda_n\eta_n(1-\nu)-\lambda_n^2-\nu\,\eta_n^2\right)}\right\},\end{gathered} \tag{3.4}$$

$$D_n=-\frac{3q_n\lambda_n}{4\zeta_n h}(1+(1+\nu)\zeta_n)\left[\lambda_n\eta_n(1-\nu)-\lambda_n^2-\nu\eta_n^2\right]^{-1}$$

Для сравнения результатов решения с вариантами (3.1**) и (3.2**) достаточно рассмотреть частный случай задания нагрузки

$$q(y)=q_0\sin\lambda_1 y\,. \tag{3.5}$$

Для случая граничных условий (3.1**) решение задачи будет иметь вид

$$\begin{aligned}
w&=\frac{q_0}{2D\lambda_1^4}\left[1+\zeta_1-2(1+\zeta_1)e^{-\lambda_1 x}-\lambda_1 x e^{-\lambda_1 x}\right]\sin\lambda_1 y,\\
\varphi_1&=\frac{3q_0}{4\lambda_1 h}e^{-\lambda_1 x}\sin\lambda_1 y,\\
\varphi_2&=\frac{3q_0}{4\lambda_1 h}\left[1-e^{-\lambda_1 x}\right]\cos\lambda_1 y.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Для случая свободного опирания (3.2**) искомое решение задачи будет иметь вид

$$\begin{aligned}
w=-\frac{q_0}{D\lambda_1^4}\Bigg\{&\ 1+\zeta_1-\lambda_1^2(1+\zeta_1)e^{-\lambda_1 x}-\\
&-\lambda_1\left[\frac{\left(\lambda_1^2+\nu\eta_1^2\right)}{2\left(\lambda_1\eta_1(1-\nu)-\lambda_1^2-\nu\eta_1^2\right)}+\frac{1+\zeta_1}{(1+(1+\nu)\zeta_1)}\right]xe^{-\lambda_1 x}\Bigg\}\sin\lambda_1 y,\\
\varphi_1=\frac{3q_0}{2h}\Bigg[&\frac{\lambda_1}{2\left(\lambda_1\eta_1(1-\nu)-\lambda_1^2-\nu\eta_1^2\right)\zeta_1}(1+(1+\nu)\zeta_1)e^{-\eta_1 x}+\\
&+\frac{1}{\lambda_1}\left[\frac{\left(\lambda_1^2+\nu\eta_1^2\right)}{2\zeta_1\left(\lambda_1\eta_1(1-\nu)-\lambda_1^2-\nu\eta_1^2\right)}+\frac{1+\zeta_1}{(1+(1+\nu)\zeta_1)}\right]e^{-\lambda_1 x}\Bigg]\sin\lambda_1 y\\
\varphi_2=\frac{3q_0}{4\lambda_1 h}\Bigg\{&\frac{\lambda_1\eta_1}{\zeta_1\left(\lambda_1\eta_1(1-\nu)-\lambda_1^2-\nu\eta_1^2\right)}\left(1+(1+\nu)\zeta_1\right)e^{-\eta_1 x}-\\
&-2\left[\frac{\left(\lambda_1^2+\nu\eta_1^2\right)}{2\left(\lambda_1\eta_1(1-\nu)-\lambda_1^2-\nu\eta_1^2\right)}+\frac{1+\zeta_1}{\left(1+(1+\nu)\zeta_1\right)}\right]e^{-\lambda_1 x}+1\Bigg\}\cos\lambda_1 y.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Можно определить все характерные величины задачи. Найденные решения будут совпадать с теорией Кирхгофа, если принять $\zeta_1 << 1$для случая граничных условии (3.1**). Рассмотрим выражение для перерезывающих усилий при граничных условиях (3.1**) и (3.2**) в точке (0,0.5b)

$$N_1(0{,}0.5b)=q_0/\lambda_1\,. \tag{3.8*}$$

$$N_1(0{,}0.5b)=\frac{q_0}{\lambda_1}\left[1+\frac{5+3\nu}{4\sqrt{2.5}\lambda_1^2 h(1-\nu)}\right]. \tag{3.8**}$$

По теории С.А.Амбарцумяна эти граничные условия отличаются.

Опорные реакции для граничных условий (3.1**) и (3.2**) будут соответственно

$N_2(0,y)=0$,

$$N_2(0,y)=\frac{q_0}{\lambda_1}\left[\frac{\lambda_1 h}{\zeta_1\left(\lambda_1 h(1-\nu)-\sqrt{2.5\nu}\right)}-1\right]\cos\lambda_1 y,\ \left(N_2(0{,}0.5b)=0\right)$$

что также с точностью $¸_1 << 1$ совпадают с теорией Кирхгофа ($N_2(0{,}0)=0$).

Таким образом, получаем, что результаты классической теории совпадают с результатами уточнённой теории при граничных условиях шарнирного закрепления с точностью пренебрежения квадратом относительной толщины. Но в случае стеснённо свободного опирания различия существенны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Costanda C. A mathematical analysis of bending of plates with transverse shear deformation. Longman Scientific Technical. 1992,170p.
2. Karama M., Afag K.S., Mistou S. A refinement of Ambartsumian multi-layer beam theory. //Computers&Structures. 2008. №86. P. 839-849.
3. Антонян С.С., Василян Н.Г. Исследование напряжённо-деформированного состояния изгибаемой пластинки в окрестности края пластинки граничным условием скользящего контакта. //Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред /Труды VII международной конференции, Горис-Степанакерт, Ереван: сентябрь 19–23 2011. С.44-48.
4. Баблоян А.А., Токмаджян В.О. Смешанная задача изгиба пластины с учётом поперечных сдвигов. //Изв. НАН Армении. Механика. 2008. Т.61. №4. С.44-51.
5. Багдасарян З.Р. Влияние учёта поперечных сдвигов в задачах изгиба прямоугольной пластины. //Дисс. на соискание уч. степени к. ф.-м.н., Ереван. 2008. 116с.
6. Белубекян М.В. Об уравнениях теории пластин, учитывающих поперечные сдвиги. //В сб.: ”Проблемы механики тонких деформируемых тел”. Ереван: Изд. НАН Армении. 2002. С.67-88.
7. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360с.
8. Nadai A. Elastische Platten. Берлин: 1925.72с.
9. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Изд.физ.-мат.лит., 1963. 636с.

Сведения об авторах:

Антонян Саят Сержикович – соискатель Института механики НАН РА,
Тел.: (+374 99) 339299,(+374 10)624802
Адрес: Даниела Варужана 9, 29, Ереван, Армения, 0060.
E-mail: sayatantonyan@rambler.ru

Василян Нарине Гургеновна – научн. сотр. Института механики НАН РА, к. ф.-м. н.
Тел.: (+374 91) 707939,(+374 10)624802.
Адрес: Даниела Варужана 9, 29, Ереван, Армения, 0060.
E-mail: narine@mechins.sci.am

ТРЁХМЕРНАЯ ВОЛНА РЭЛЕЯ В СЛУЧАЕ СМЕШАННЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА ПОВЕРХНОСТИ ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Ардазишвили Р.В.

О существовании поверхностных волн впервые было отмечено в 1885 г. английским ученым Дж. Рэлеем. Им была рассмотрена плоская задача для упругого полупространства, поверхность которого свободна от напряжений [1]. В данной работе исследуются трёхмерные поверхностные волны для различных случаев смешанных граничных условий на поверхности полупространства. Для описания колебаний применяются трёхмерные уравнения теории упругости, что позволяет получить соответствующее дисперсионное уравнение для каждого вида граничных условий. Показано, что дисперсионное уравнение имеет корень лишь для двух видов граничных условий: свободная поверхность и поверхность, на которой запрещено перемещение в одном из касательных направлений. Для второго случая представлены графики зависимости фазовой скорости данной волны от угла её распространения, а также от коэффициента Пуассона среды. Для каждого из двух граничных условий, для которых поверхностная волна существует, представлены графики зависимости напряжённо-деформированного состояния от координаты, нормальной к границе полупространства.

1. Рассмотрим гармонические колебания полупространства, занимающего в декартовых координатах (x, y, z) область $0 \leqslant x < \infty, |y| < \infty, |y| < \infty$. Для описания колебаний пластины примем трёхмерные уравнения теории упругости. Введём безразмерные переменные по следующим формулам:

$$x = h®^{-1}\tilde{x},\ y = h®^{-1}\tilde{y},\ z = h®^{-1}\tilde{z}, \{u_x, u_y, u_z\} = h®^{-1}\{\tilde{u}_x \tilde{u}_y, \tilde{u}_z\},$$
$$\tilde{\mu} = h®^{-1}\mu c_2^{-1}, \{\pm_x, \pm_y, \pm_z, \pm_{xy}, \pm_{xz}, \pm_{yz}\} = E[2(1+\neg)]^{-1}\{\tilde{\pm}_x, \tilde{\pm}_y, \tilde{\pm}_z, \tilde{\pm}_{xy}, \tilde{\pm}_{xz}, \tilde{\pm}_{yz},\} \tag{1}$$

где $\mathbf{u} = \{u_x, u_y, u_z\}$ – вектор перемещения, $\pm_x, \pm_y, \pm_z, \pm_{xy}, \pm_{xz}, \pm_{yz}$ – компоненты тензора напряжений, E – модуль Юнга, $\neg$ – коэффициент Пуассона, c_2 – скорость волны сдвига, μ – круговая частота. Временной множитель $e^{i\mu t}$ и знак << $\sim$ >>, обозначающий безразмерные переменные, далее опущены. Запишем выражения перемещений через упругие потенциалы Ламе ¨ и · :

$$\mathbf{u} = \mathrm{grad}\,¨ + \mathrm{rot}\,·\,. \tag{2}$$

Выражения напряжений через потенциалы ¨ и · могут быть найдены в работе [2]. Представление (2) следует дополнить условием

$$\mathrm{div}\,· = 0. \tag{3}$$

Условие (3) является достаточным для получения однозначного представления компонентов вектора перемещения в упругом теле в виде (2). Функции ¨ и · должны удовлетворять уравнениям Гельмгольца

$$\Delta ¨ + ©^2\mu^2 ¨ = 0,\ \Delta\overline{·} + \mu^2\overline{·} = 0, \tag{4}$$

где Δ – трёхмерный оператор Лапласа, $© = \sqrt{(1-2\neg)/2(1-\neg)}$. При $x = 0$ возможны следующие виды граничных условий:

а) граница полупространства свободна от напряжений

$$\pm_x = \pm_{xy} = \pm_{xz} = 0 \tag{5}$$

б) запрещено перемещение в одном из касательных направлений

$$\pm_x = u_y = \pm_{xz} = 0 \text{ или } \pm_x = \pm_{xy} = u_z = 0 \tag{6}$$

в) запрещено перемещение в обоих касательных направлениях

$$\pm_x = u_y = u_z = 0 \tag{7}$$

г) запрещено перемещение в нормальном направлении

$u_x = ±_{xy} = ±_{xz} = 0$ (8)

д) запрещено перемещение в одном из касательных направлений и в нормальном направлении

$u_x = u_y = ±_{xz} = 0$ или $u_x = ±_{xy} = u_z = 0$ (9)

е) запрещено перемещение во всех направлениях

$u_x = u_y = u_z = 0.$ (10)

Воспользуемся первым из граничных условий (6).

Частные решения уравнений (4) ищем в виде:

$$¨ = C_1 e^{-r_1 x} e^{i(µt-(¥y+sz))}, \quad \overline{·} = \overline{C} e^{-r_2 x} e^{i(µt-(¥y+sz))}, \qquad (11)$$

где $\overline{C}^T = C_3, C_4, C_2$ – вектор произвольных констант.

Подставляя (11) в (4), найдём r_1, r_2:

$$r_1 = \sqrt{¥^2 + s^2 - ©^2 µ^2}, \quad r_2 = \sqrt{¥^2 + s^2 - µ^2}. \qquad (12)$$

Подставим (11) в выражения для напряжений и перемещений через потенциалы ¨ и · , а последние затем подставим в первое из граничных условий (6) и в условие (3), получив, тем самым, систему однородных линейных уравнений относительно постоянных C_1, C_2, C_3, C_4:

$$\begin{cases} (2s^2 + 2¥^2 - µ^2) C_1 + 2ir_2 ¥ C_2 - 2ir_2 s C_4 = 0, \\ 2ir_1 s C_1 - ¥ s C_2 - ir_2 ¥ C_3 + (r_2^2 + s^2) C_4 = 0, \\ -i¥ C_1 + r_2 C_2 - isC_3 = 0, \\ -isC_2 - r_2 C_3 - i¥ C_4 = 0 \end{cases} \qquad (13)$$

Для того, чтобы система имела нетривиальные решения, определитель данной системы должен быть равен нулю. Получим дисперсионное уравнение:

$$((2s^2 + 2¥^2 - µ^2)^2 - 4r_1 r_2 s^2)(µ^2 - ¥^2) - (¥^2 + s^2 - µ^2)(6s^2 ¥^2 + 4¥^4 - 4¥^2 µ^2) + 2r_1 r_2 ¥^2 s^2 = 0. \qquad (14)$$

Введём параметры: $¥_1 = \sqrt{s^2 + ¥^2}$, $s = ¥_1 \sin ~$, $¥ = ¥_1 \cos ~$. Дисперсионное уравнение преобразуется к виду:

$$(2 - ¯)(2\sin^2 ~ - ¯) + ¯ \cos ~ - 4\tilde{r}_1 \tilde{r}_2 \sin^2 ~ = 0, \qquad (15)$$

где $\tilde{r}_1 = \sqrt{1 - ©^2 ¯}$, $\tilde{r}_2 = \sqrt{1 - ¯}$.

Покажем, что уравнение (15) имеет единственный корень, которому соответствует нетривиальное решение системы. Введём функцию:

$$D(¯, ©, ~) = (2 - ¯)(2\sin^2 ~ - ¯) + ¯ \cos ~ - 4\tilde{r}_1 \tilde{r}_2 \sin^2 ~. \qquad (16)$$

Вычисляя первую и вторую производные данной функции и используя методы математического анализа, нетрудно доказать, что при $\alpha \neq 0$ уравнение (15) имеет единственный корень, которому соответствует нетривиальное решение системы (13).

Следовательно, искомая волна существует при всех значениях ~ кроме $~ = 0$. Далее считаем, что ¯ – корень уравнения (15). Найдём постоянные:

$$C_1 = C, \; C_2 = -\frac{¥}{2ir_2} C, \; C_3 = -\frac{¥}{2s} C, \; C_4 = -\frac{s^2 + r_2^2}{2ir_2 s} C \qquad (17)$$

Подставляя (17) в выражения для напряжений и перемещений через потенциалы ¨ и · , получим форму колебаний в трёхмерной поверхностной волне.

Второй вариант граничных условий (6) аналогичен первому с точностью до замены осей координат. В случае граничных условий (7)-(10) дисперсионное уранение не имеет корней на промежутке [0,1]. В случае граничных условий (5) получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$(\bar{} - 2)^2 - 4\tilde{r}_1\tilde{r}_2 = 0 \qquad (18)$$

Аналогично показывается, что данное уравнение имеет единственный корень на промежутке [0,1] и находится решение системы алгебраических уравнений. Данное решение подставляется в выражения для напряжений и перемещений через потенциалы ¨ и · . Таким образом, получаем форму колебаний в трёхмерной поверхностной волне, в данном случае, граничных условий на границе полупространства.

Итак, кромочные волны, распространяющиеся по поверхности полупространства, существуют в случае, когда граница полупространства свободна от напряжений, а также когда запрещено перемещение в одном из касательных направлений. Во всех остальных случаях граничных условий кромочные волны не найдены, так как соответствующее дисперсионное уравнение не имеет корней.

2. Были построены графики зависимости скорости поверхностной волны от угла её распространения, а также форма трёхмерной поверхностной волны в случае, когда граница полупространства свободна от напряжений и в случае, когда в одном из касательных направлений ставится условие жёсткой заделки.

Рассмотрим трёхмерную поверхностную волну в случае, когда на поверхности полупространства запрещено перемещение в одном из касательных направлений.

При данных граничных условиях было получено уравнение (15) для определения фазовой скорости трёхмерной волны Рэлея. Зависимость фазовой скорости от угла распространения и от различных значений коэффициента Пуассона представлена на рис.1. Графики функций (жирные линии) выходят из точки (0,1) и приходят к значению классической волны Рэлея при данных значениях коэффициента Пуассона (тонкие линии).

На рис. 2,3 представлены результаты расчёта формы трёхмерной поверхностной волны при $\neg = 0.25$ и $\sim = \frac{®}{3}$ (сплошные линии), $\sim = \frac{®}{6}$ (штрихпунктирные линии). На рис.2.a,b и рис.3.a,b представлены графики зависимости от x компонентов тензора напряжений. На рис.2.c и рис.3.c представлены аналогичные графики перемещений u_x, u_y, u_z при тех же значениях параметров.

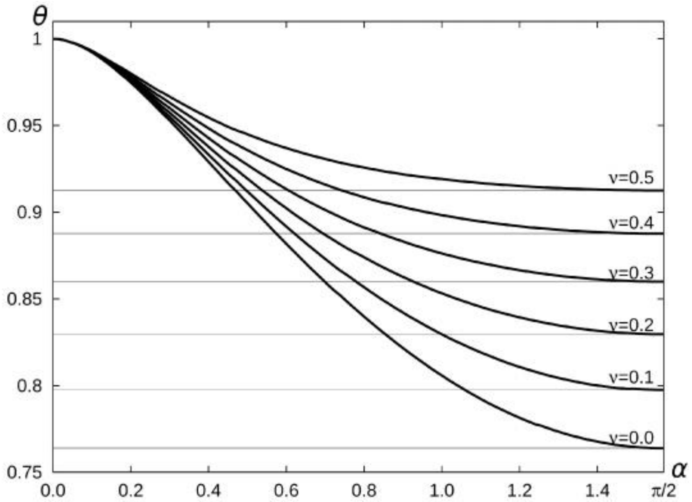
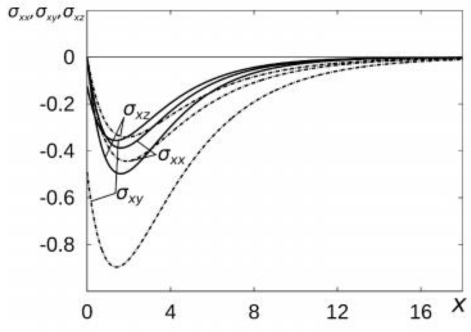
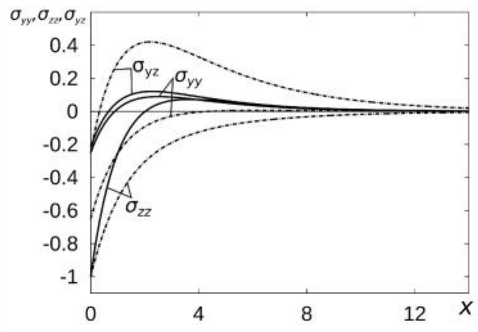


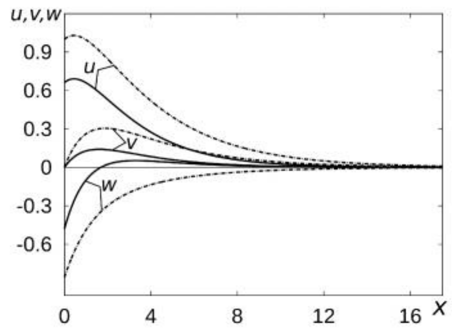
Рис. 1. Графики зависимости фазовой скорости трёхмерной поверхностной волны от угла распространения для различных значений коэффициента Пуассона



a)

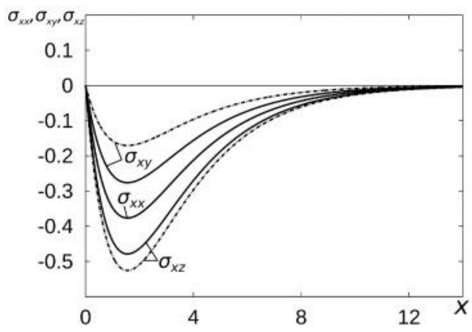


b)

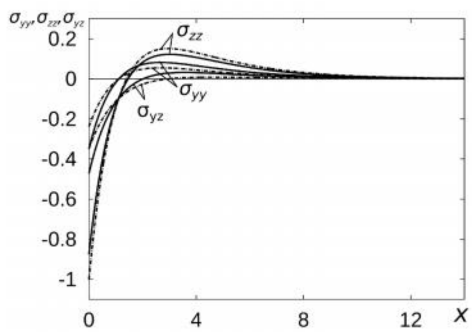


c)

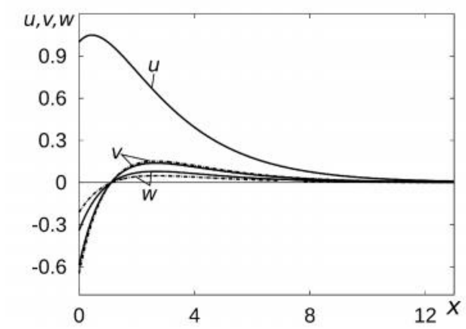
Рис. 2. Форма поверхностной волны в случае закрепления границы полупространства в одном из касательных направлений



a)



b)



c)

Рис. 3. Форма поверхностной волны в случае границы полупространства, свободной от напряжений.

Сравнение графиков на рис. 2 и 3 показывает, что в случае смешанных условий на поверхности угол распространения волны оказывает существенное влияние на скорость затухания НДС при удалении от поверхности. С уменьшением этого угла скорость затухания волны уменьшается. При $\alpha = \pi/2$ волна в точности соответствует классической волне Рэлея.

Изученные в данной работе волны рассматривались также в работе [3] с использованием другого метода вывода дисперсионного уравнения. Расхождения в виде дисперсионного уравнения для случая поверхности, закрепленной в одном из касательных направлений, объясняются незначительной технической ошибкой, допущенной в работе [3]. В работе [4] рассмотрена аналогичная волна в случае упруго-стеснённой границы.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (*грант* №11-01-00545-а)

ЛИТЕРАТУРА

1. Rayleigh J. On waves propagated along the surface of an elastic solid // Proc. Lond. Math. Soc. 1885. V. 17. № 253. P. 4–11.
2. Вильде М.В., Каплунов Ю. Д., Коссович Л. Ю. Краевые и интерфейсные резонансные явления в упругих телах. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 280 с.
3. Белубекян В.М., Белубекян М.В. Трёхмерная задача распространения поверхностных волн Рэлея. //Докл. НАН Армении. 2005. Т.105. № 4. С.362-368.
4. Белубекян М.В. Волна Рэлея в случае упруго-стеснённой границы // Изв. НАН Армении. Механика. 2011. Т.64. №4. С.3–6.

Сведения об авторах:

Ардазишвили Роман Вячеславович – аспирант кафедры математической теории упругости и биомеханики, механико-математический факультет, Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского. 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, 83; **Тел.:** (8452)210755.

E-mail: ardazishvili.roman@yandex.ru

\КОМПЛЕКСНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ТОНКОЛЕЗВИЙНОЙ ОБРАБОТКИ ЦВЕТНЫХ МЕТАЛЛОВ И СПЛАВОВ

Арзуманян А.М., Акопян С.А.

В условиях жёсткой конкуренции в машиностроении и приборостроении совершенствование способов лезвийной обработки цветных металлов и сплавов, направленное на повышение эффективности процесса резания, точности обработки, качества обработанной поверхности, а также производительности обработки, представляет актуальную проблему для развития различных отраслей машиностроения.

Анализ направлений развития науки и техники показывает, что сверхточное производство предъявляет особые требования к качеству обработанных поверхностей многочисленных деталей из цветных металлов и сплавов, получивших широкое распространение в машиностроении и приборостроении, а также к точности получаемых размеров, которые, в основном, обеспечиваются при окончательной тонколезвийной обработке алмазными инструментами.

Особое место при тонколезвийной обработке цветных металлов и сплавов занимают алмазные инструменты, с применением которых можно обеспечить высокую точность и чистоту обработанных поверхностей. Однако алмазные инструменты используются для изготовления только сверхточных деталей, чем и обусловлены их высокая стоимость и расходы на переточку.

Исследованиями различных авторов обосновано, что взамен алмазных инструментов могут применяться инструменты, оснащённые режущими пластинами из синтетического корунда (сикорд), которые имеют свои особенности: практически они имеют наиболее высокие размеры режущего лезвия и возможности заточки и переточки; качество обработанных поверхностей и высота микронеровностей эквивалентны алмазным инструментам; себестоимость пластин из сикорда достаточно низка по сравнению с алмазными инструментами.

Имея в виду, что доминирующими направлениями развития промышленности Республики Армения являются приборостроение и производство ювелирных изделий, применение инструментов, оснащенных режущими пластинами из сикорда, даст возможность пополнить нехватку алмазных инструментов, а повышение эксплуатационных свойств корундовых пластин будет способствовать получению наиболее эффективного процесса резания.

Таким образом, исследование процесса тонколезвийной обработки цветных металлов и сплавов режущими пластинами из сикорда для выявления особенностей стружкообразования, определения температуры в зоне резания, возможностей повышения износостойкости режущего инструмента и качества обработанной поверхности является одной из актуальных задач современного приборостроения.

Основной целью исследования явилась разработка математических моделей для определения температуры в зоне резания T, составляющих силы резания P_z и P_y, величин износа $h_з$ и $h_{ез}$ по задней поверхности режущей пластины, высоты микронеровностей обработанной поверхности R_a, степени наклепа H и его глубины h и диаметра завитка стружки D в процессе тонкого фрезерования цветных металлов и сплавов однозубой фрезой, оснащённой режущими пластинами из сикорда, под воздействием электромагнитного поля и без него.

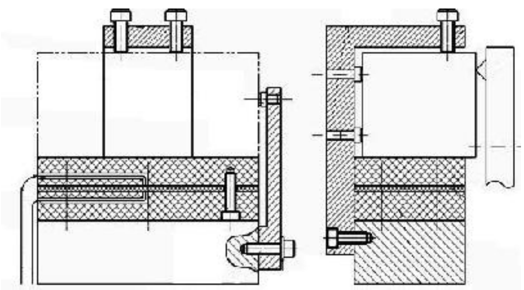


Рис.1. Схема динамометра [1].

В качестве режущего инструмента использовали торцевые фрезы диаметрами $D = 140$ мм и $D = 165$ мм, оснащённые режущими пластинами из сикорда, а в качестве режущих пластин – лейкосапфир и рубин “Роза”. При тонком фрезеровании были использованы режущие пластины размерами $7 \times 7 \times 21$ мм и $6 \times 6 \times 6$ мм, имеющие геометрию $\sim = 6^0$, $¥ = -6^0$, $ª = 6^0$, $\varphi = \varphi_1 = 45^0$, $= 90^0$, $r = 0,3...0,5$ мм.

Для измерения составляющих сил резания спроектирован специальный динамометр, схема которого приведена на рис. 1[1].

Во время экспериментов тонкому торцевому фрезерованию подвергались дюралюминий марок Д1 и Д16, алюминий марки Ал9, медь марки М3, латунь марки ЛС59-1, бронзы марок БрАЖ9-4, БрОЦС6-6-6 и БрА5, однако результаты исследований приведены, в основном, для бронзы марки БрАЖ9-4 и дюралюминия марки Д1.

Осуществлён выбор наилучшей ориентации режущих пластин из сикорда и проведено исследование влияния электромагнитного поля на повышение их хрупкой прочности и износостойкости с учётом физико–механических свойств сикорда и особенностей тонколезвийной обработки цветных металлов и сплавов.

Проведёнными исследованиями обосновано, что при обработке сплавов алюминия и меди режущими пластинами из сикорда с режимами резания $v = 250$ м/мин, $s = 0{,}022$ мм/об, $t = 0{,}05$ мм и геометрией ~ $= 6^0$, ¥ $= -6^0$, $= 90^0$, ª $= 6^0$, $\varphi = \varphi_1 = 45^0$ радиус закругления вершины режущей пластины из сикорда, а также оптимальные значения переднего и заднего углов соответственно должны составлять: $r = 0{,}3...0{,}6$ мм, ¥ $= -5...-7^0$, ~ $= 5...7^0$.

При малых углах заострения характеристикой режущей пластины из сикорда является предел прочности на растяжение. При выбранной оптимальной форме режущей пластины из сикорда, когда угол заострения равен 90^0 и пластина ориентирована так, что передний угол отрицателен, характеристикой хрупкой прочности будет служить предел прочности на сжатие, величина которого составляет ±$_{-в} = 0{,}5...1{,}96$ ГПа.

При тонколезвийной обработке высота микронеровностей обрабатываемой поверхности, её качество и точность, в основном, зависят от прочности и износостойкости режущего инструмента. Это послужило основой для исследования износа режущей пластины при тонколезвийной прерывистой обработке цветных металлов и сплавов.

Обработка режущими пластинами из синтетического корунда является финишной, поэтому пластины должны обладать максимальной износостойкостью и прочностью режущего лезвия.

Известны различные способы повышения износостойкости и хрупкой прочности материалов с кристаллическим строением путём воздействия физических явлений. Наиболее эффективным из них является воздействие источника света и электромагнитного поля.

Известно также, что электромагнитное поле оказывает эффективное воздействие на прочность полупроводниковых кристаллов. Экспериментами доказано, что вследствие включения и отключения электричества в кристалле происходят циклические изменения значения напряжений.

Причём после отключения происходит уменьшение прочности кристалла, а после включения – её резкое увеличение.

При пропускании электрического тока внутри режущей пластины из сикорда создается электромагнитное поле, благодаря чему износостойкость режущей пластины возрастает в 1,3…1,5 раза.

С точки зрения физики твёрдого тела, повышение прочности и износостойкости режущей пластины из сикорда под воздействием электромагнитного поля объясняется тем, что его воздействие во много раз увеличивает вероятность процесса рекомбинации дырок и электронов в режущей пластине из сикорда. А так как в процессе рекомбинации исчезают электроны и дырки, то при включённом электромагнитном поле возрастут прочность и износостойкость режущей пластины.

При тонкой лезвийной обработке цветных металлов и сплавов под воздействием электромагнитного поля микротвёрдость режущей пластины из сикорда определяется выражением

$$HV = \frac{HV_0}{2} + \left(M \cdot \left(P_z + \frac{P \cdot \tau}{d} \right) + \frac{HV_0^{\ 2}}{4} \right)^{1/2}.$$

Полученное выражение представляет собой математическую модель, позволяющую определить микротвёрдость режущей пластины из сикорда.

Проведены теоретические и экспериментальные исследования явлений в зоне стружкообразования при тонком торцевом фрезеровании цветных металлов и сплавов режущими пластинами из сикорда.

В результате исследований обосновано, что изменением режимов резания можно управлять явлениями, происходящими в зоне контакта заготовки из цветных металлов и сплавов и режущей пластины из сикорда. Рассчитаны и получены размеры зоны контакта.

Для анализа технологических процессов широко применяются автоматизированные методы расчёта по качественным моделям, которые путем управления режимными параметрами приводят к повышению производительности обработки и качества без значительных материальных и трудовых расходов.

Длина поверхности контакта обработанной части заготовки с задней поверхностью резца определялось по полученному нами выражению [2]:

$$l_з = 0.021\cdot H\cdot\left[1.06\cdot\left(1-\frac{T}{2000}\right)+0.93\cdot\left(1-\frac{T}{2000}\right)^{39}-\left(1-\frac{T}{2000}\right)^{28}\right]\cdot\left[0.17+\frac{0.74\cdot\sin{}_1}{\left(0.995\cdot\cos{}_1+0.1\cdot\sin{}_1\right)}\right]$$

Для радиуса кривизны стружки получено следующее выражение [3]:

$$R = C\cdot r^{c_1}\cdot E\cdot h_1\cdot K_c\Bigg/\left(2\cdot\pm{}_s\cdot\left[A\cdot\left(1-\frac{T}{2\cdot T_h}\right)+B\cdot\left(1-\frac{T}{2\cdot T_h}\right)^{k_1}-\left(1-\frac{T}{2\cdot T_h}\right)^{k_2}\right]\right)$$

Доказано и обосновано, что главная составляющая силы резания при тонколезвийной обработке цветных металлов и сплавов находится в степенной зависимости от температуры зоны резания и режимов обработки.

Для тонкого фрезерования однозубой торцевой фрезой получена зависимость вида [4]:

$$P_z = 1.155\cdot\sigma_s\cdot\left[A\cdot\left(1-\frac{T}{2T_h}\right)+B\cdot\left(1-\frac{T}{2T_h}\right)^{k_1}-\left(1-\frac{T}{2T_h}\right)^{k_2}\right]\cdot s\cdot t\cdot u\times$$

$$\times\left[\left(1+\mu\left(1-\mathrm{tg}\gamma\right)+\frac{\left(0.5+\mu\right)\cdot u}{2K_c}\right)\cdot\cos\gamma+\frac{K_c}{4u\cdot\cos\gamma}+\mu\cdot\sin\gamma+\frac{\mu\cdot h_з}{u\cdot s}+\frac{K_c\cdot s\cdot\sin^2\varphi'}{4u\cdot t\cdot\cos\gamma}\right]$$

Для нормальных и касательных напряжений, действующих на передней и задней поверхностях режущей пластины, получено [5]:

$$\sigma_x = \beta_L\cdot\sigma_s\cdot\left(\mu\cdot\frac{l_n}{h_2}+\left(0.5+\mu\right)\cdot\left(\frac{u\cdot h_1}{h_2}-\frac{x}{h_2}\right)\right),\quad \tau_x = \beta_L\cdot\sigma_s\cdot\left(\mu-\left(\frac{0.5+\mu}{h_1}\right)\cdot x\right),$$

$$\sigma_y = \beta_L\cdot\sigma_s\cdot\left(\mu\cdot\frac{l_3}{h_1}+\left(0.5+\mu\right)\cdot\left(\frac{u\cdot h_1}{h_2}-\frac{y}{h_1}\right)\right),\quad \tau_y = \beta_L\cdot\sigma_s\cdot\left(\mu-\left(\frac{0.5+\mu}{h_2}\right)\cdot y\right)$$

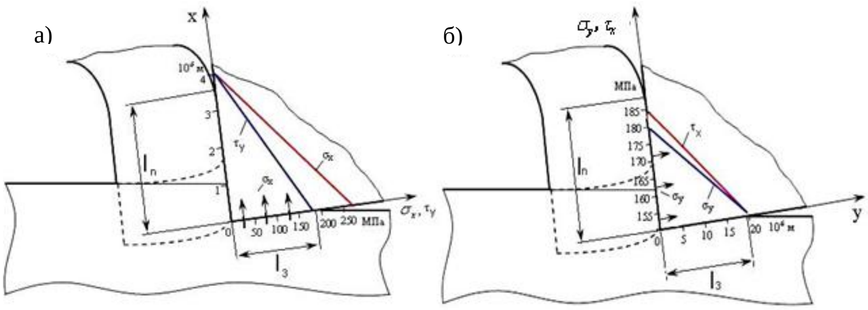


Рис.2. Графики изменения нормальных и касательных напряжений на передней (а) и задней (б) поверхностях режущей пластины при обработке латуни ЛС59-1

На рис. 2 приведены графики изменения нормальных и касательных напряжений, возникающих на передней и задней поверхностях режущей пластины из сикорда, при обработке латуни ЛС59-1 (режимы резания: $v = 4.17(м/с)$, $s = 0.022\cdot 10^{-3}(м/об)$, $t = 0{,}06\cdot 10^{-3}(м)$).

Приведены результаты теоретических и экспериментальных исследований по определению температуры в зоне резания при тонком фрезеровании цветных металлов и сплавов.

Процесс резания сопровождается выделением определённого количества теплоты, которое распространяется в заготовке, инструменте и окружающей среде, оказывая влияние на качество обработанной поверхности, износостойкость инструмента и точность обработки.

Для локальных температур в заготовке нами получена следующая формула [6]:

$$T_{i,n,m}^{k+1}=[1-2\cdot(a\cdot\Delta^2/\Delta x^2+a\cdot\Delta^2/\Delta y^2+a\cdot\Delta^2/\Delta z^2)]\cdot T_{i,n,m}^{k}+a\cdot\Delta^2/\Delta x^2\cdot(T_{i-1,n,m}^{k}+$$
$$+T_{i+1,n,m}^{k})+a\cdot\Delta^2/\Delta y^2\cdot(T_{i,n-1,m}^{k}+T_{i,n+1,m}^{k})+a\cdot\Delta^2/\Delta z^2\cdot(T_{i,n,m-1}^{k}+T_{i,n,m+1}^{k})+q_v\cdot\Delta^2/{}^\circ c\,,$$

Условия сопряжения при этом имеют следующий вид [6]:

$$\begin{cases} T_{o,n,m}^{k+1}=(a\cdot T_0-0{,}5\lambda/\Delta x\cdot T_{2,n,m}^{k+1}+2\lambda/\Delta x\cdot T_{1,n,m}^{k+1})/(\alpha+1{,}5\lambda/\Delta x), \\ T_{R_1,n,m}^{k+1}=(a\cdot T_0-0{,}5\lambda/\Delta x\cdot t_{R_1-2,n,m}^{k+1}+2\lambda/\Delta x\cdot T_{R_1-1,n,m}^{k+1})/(\alpha+1{,}5\lambda/\Delta x), \\ Tt_{i,R_2,m}^{k+1}=(a\cdot T_0-0{,}5\lambda/\Delta y\cdot t_{i,R_2-2,m}^{k+1}+2\lambda/\Delta y\cdot T_{i,R_2-1,m}^{k+1})/(\alpha+1{,}5\lambda/\Delta y), \\ T_{i,n,0}^{k+1}=(a\cdot T_0-0{,}5\lambda/\Delta z\cdot T_{i,n,2}^{k+1}+2\lambda/\Delta z\cdot T_{i,n,1}^{k+1})/(\alpha+1{,}5\lambda/\Delta z), \\ T_{i,n,R_3}^{k+1}=(a\cdot T_0-0{,}5\lambda/\Delta z\cdot T_{i,n,R_3-2}^{k+1}+2\lambda/\Delta z\cdot T_{i,n,R_3-1}^{k+1})/(\alpha+1{,}5\lambda/\Delta z), \\ T_{i,0,m}^{k+1}=T_0+\eta\cdot(k+1)\cdot\Delta\tau. \end{cases}$$

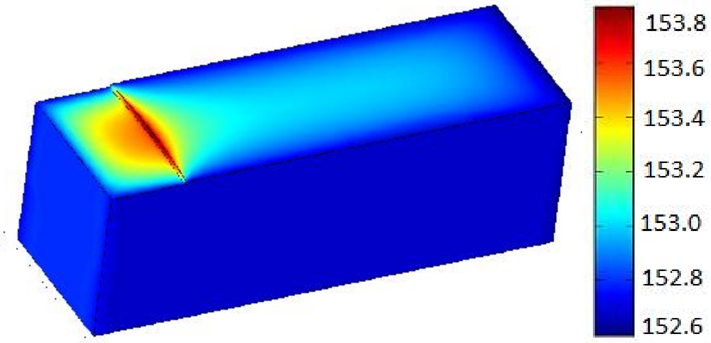


Рис.3. График распределеления температур в заготовке из латуни ЛС59-1 при её фрезеровании однозубой фрезой, оснащённой режущей пластиной из сикорда, когда $\tau = 20$ мин.

Разработанный расчётный метод позволяет получить температурные поля в заготовке при фрезеровании цветных металлов и сплавов.

На рис. 3 показано распределение температур в обрабатываемой заготовке из латуни ЛС59-1.

Применением уравнения первого закона термодинамики к механическим процессам резания получена математическая модель определения средней температуры резания при тонколезвийной обработке цветных металлов и сплавов режущими пластинами из сикорда [7]:

$$T=T_0+\frac{P_z\cdot\tau\cdot v\cdot(1-\alpha)-\dfrac{m_{р.и.}v^2}{2}-\dfrac{m_{дет}v_{дет}^2}{2}}{\tau\cdot\left[\dfrac{\lambda_{р.и.}}{b}\cdot a\cdot c+\dfrac{\lambda_{дет.}}{\sqrt{2}}\cdot a'\cdot\sin\beta\right]+m_{р.и.}\cdot c_{р.и.}+m_{дет.}\cdot c_{дет.}}$$

График зависимости средней температуры зоны резания при обработке бронзы марки БрАЖ9-4 и дюралюминия Д1 от режимов резания показан на рис.4. Проведённые исследования

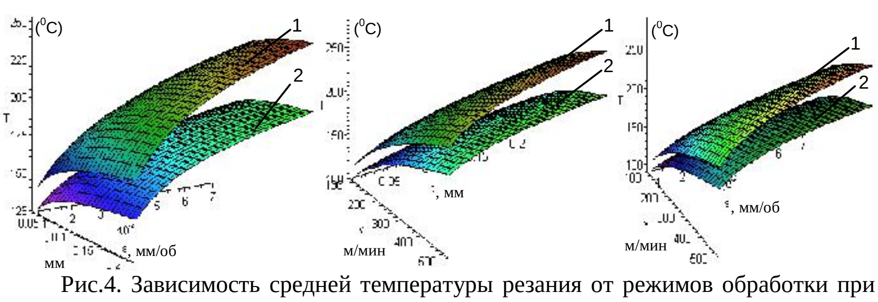


Рис.4. Зависимость средней температуры резания от режимов обработки при фрезеровании 1 – дюралюминия марки Д1, 2 – бронзы марки БрАЖ9-4.

показывают, что высокие значения средней температуры получаются с повышением скорости и подачи, причём влияние скорости резания выражено более интенсивно.

Таким образом, на основании проведённых исследований можно сделать следующие выводы:

1. Экспериментами доказано и обосновано, что воздействие электромагнитного поля приводит к повышению хрупкой прочности и износостойкости режущих пластин из сикорда при тонколезвийной прерывистой обработке цветных металлов и сплавов в 1,3…1,5 разов вследствие рекомбинации свободных электронов и дырок.
2. Разработаны и исследованы математические модели для определения радиуса завитка стружки, длины контакта между обрабатываемой заготовкой и задней поверхностью режущей пластины, высоты начальной зоны стружкообразования, распределения напряжений на передней и задней поверхностях пластины, микротвёрдости режущих пластин из сикорда и главной составляющей силы резания, которые полностью описывают процесс резания и обеспечивают высокую точность и минимальное отклонение от имеющихся экспериментальных данных.
3. Для оптимизации и управления процессом тонколезвийной прерывистой обработки цветных металлов и сплавов разработаны математические модели по определению локальной и средней температур в зоне резания, совпадение которых с имеющимися экспериментальными данными составляет 5...6%.

ЛИТЕРАТУРА

1. ÐÐ ³ñ ï áÝ ³ ·Çñ № 190 U. ¸ÇÝ ³ ÙáÙ» ï ñ ². ²ñ½áõÙ ³ ÝÛ ³ Ý, ê. Î ³ ñ ³ å» ï Û ³ Ý, ê. Ð ³ Ïáµ Û ³ Ý, Ð. Ø ³ Ýáõ Ï Û ³ Ý. -2010:
2. Арзуманян А.М., Акопян С.А. Математическая модель контактного взаимодействия обработанной поверхности детали с рабочими поверхностями режущей пластины. //Труды международной школы-конференции молодых учёных “Механика – 2009”. – Агавнадзор, Армения. 28 сентября –1 октября, 2009. С.156-160.
3. Арзуманян А.М., Акопян С.А. Математическая модель радиуса кривизны стружки при обработке металлов резанием // “Справочник. Инженерный журнал”. М.: 2010. С.43-45.
4. Арзуманян А.М., Акопян С.А., Манукян О.С. Определение сил резания P_z и P_y при тонком торцевом фрезеровании цветных металлов и сплавов в зависимости от параметров резания. //Материалы конференции, посвящённой 40-летию образования Арцахского государственного университета. Т.2. Степанакерт: 2009. С.166-168.
5. Арзуманян А.М., Минасян З.А., Акопян С.А., Манукян О.С. Теоретическое исследование напряжений на передней и задней поверхностях режущей пластины из синтетического корунда при обработке цветных металлов и сплавов. //Механика в XXI веке. IX Всероссийская научно-техническая конференция с международным участием: сборник докладов. ГОУ ВПО “БрГУ” - Братск: 2010. С.33 – 35.
6. Арзуманян А.М., Акопян С.А. Математическая модель переноса тепла при тонкой прерывистой лезвийной обработке металлов // Вестник инженерной академии Армении. Т.5. № 4. Ереван: 2008. С.537-540.
7. Арзуманян А.М., Минасян З.А., Акопян С.А. Применение первого начала термодинамики к параметроуправляемым процессам обработки металлов // Материалы Международной научно-технической конференции “Автоматизация: проблемы, идеи, решения (АПИР-13)”. Тула: Изд.ТулГУ, 2008. С.190-192.

Сведения об авторах:

Арзуманян Алексан Мкртычевич – докт.техн.наук, декан факультета технологии и отраслевой экономики Гюмрийского филиала Государственного Инженерного Университета Армении. Республика Армения, г.Гюмри, ул. М.Мкртчяна 2. Гюмрийский филиал ГИУА. Тел. +374 0312 4 5060. **E-mail:** arzal@yandex.ru

Акопян Сергей Амаякович – ассистент кафедры “Технология художественной обработки материалов” Гюмрийского филиала Государственного инженерного университета Армении (политехник). 2602, Республика Армения, Шираки Марз, г.Ахурян, ул. Ахурянская 10, кв. 3. **E-mail:** serghakob@mail.ru.

РАДИАЦИОННОЕ СТАРЕНИЕ, ПОЛЗУЧЕСТЬ И ДЛИТЕЛЬНАЯ ПРОЧНОСТЬ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ СПЛАВОВ

Арутюнян А.Р., Арутюнян Р.А., Якимова К.С.

Для учёта старения в уравнениях теории ползучести рассмотрен параметр, характеризующий изменение объёмной доли упрочняющих фаз. На основе концепции повреждённости Качанова-Работнова сформулировано реологическое уравнение для скорости ползучести, зависящее от температуры, напряжения и дозы облучения. При отсутствии радиации это уравнение совпадает с законом ползучести для среды стабильного состава. При нулевом уровне напряжения уравнение описывает накопление деформации вследствие радиационного распухания. Получено решение уравнения для случая постоянства напряжения и температуры. Для сравнения теоретических кривых ползучести с результатами опытов использованы данные по ползучести различных сплавов, используемых в атомной энергетике. Кривые ползучести определялись в опытах без радиации и с радиацией. Согласно выполненным расчётам наблюдается хорошее согласие между теоретическими и экспериментальными кривыми ползучести. С учётом полученных уравнений и первого закона термодинамики разработан критерий длительной высокотемпературной прочности. Построены кривые длительной прочности без учёта и с учётом радиации. Как показывают расчёты, и в согласии с опытами, термодинамический критерий длительной прочности описывает хорошо качественную картину процессов длительного разрушения металлических сплавов под воздействием и без воздействия радиационного облучения. В случае радиационного воздействия наблюдается значительное снижение длительной прочности рассматриваемых сплавов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных исследований (проект № 11-08-00763).

Под воздействием тепловых, радиационных и силовых полей металлические стали и сплавы, используемые в современном машиностроении, в частности, в конструкциях атомных энергетических установок претерпевают существенные фазовые изменения. Изменяются также физико-механические свойства рассматриваемых материалов [1,2]. Изменения фазового состава (старение) способствуют разупрочнению материала, увеличению скорости ползучести и ускорению процесса разрушения.

Для учёта старения в уравнениях теории ползучести рассмотрим переменную $= \dfrac{c_0 - c}{c_0 - c_\infty}$, характеризующую изменение объёмной доли упрочняющих фаз [2]. Здесь c_0, c, c_∞ – начальная, текущая и конечная концентрация легирующего элемента, ведущего превращение.

Скорость изменения -фазы зададим следующим уравнением:

$$\frac{d}{dt} = (1- \quad) f(\pm, T, \ddot{}, t), \qquad (1)$$

где T – температура, $\pm$ – напряжение, φ – доза облучения, t – время.

При анализе экспериментальных данных для стареющих сталей и сплавов используют обычно степенную аппроксимацию $f(t) = k_0 t^n$ (k_0, n – постоянные) [2]. В этом случае решение уравнения (1) при начальном условии $t = 0$, $= 0$ имеет вид

$$= 1 - e^{-k_1 t^{n+1}}, \qquad (2)$$

где $k_1 = k_0(n+1)$.

Рассматривая кинетическое уравнение первого порядка, т.е. считая $n = 0$, примем, следуя концепции повреждённости [4], следующее уравнение для скорости ползучести $\dot{\varepsilon}$:

$$\dot{\varepsilon} = B e^{\phi} e^{a\sigma} (1-\beta)^{-m}, \qquad (3)$$

где a, m – постоянные, B=$B(T)$, $\phi = \phi(\varphi)$ – некоторые функции от температуры и дозы облучения.

С учётом (2) (при $n = 0$), уравнение (3) запишем в виде

$$\pounds = Be^{(a\pm+\phi)}\,e^{bt}, \tag{4}$$

где $b = m\,k_0$.

При постоянном напряжении, температуре и постоянных коэффициентах решение уравнения (4) с учётом начальных условий $t = 0$, $\pounds = 0$ имеет вид

$$\pounds = \frac{Be^{(a\pm+\phi)}}{b}\left[e^{bt} - 1\right] \tag{5}$$

Для сравнения с результатами опытов воспользуемся кривыми ползучести сплава $03X20H45M4БРЦ$ при температуре $650^0 C$ [5]. По этим кривым конкретизированы параметры уравнения (5) после облучения дозой $1{,}1\cdot10^{21}$ $н/см^2$: $B = 9{,}203\cdot10^{-9}\,[ч]^{-1}$, $a = 0{,}041\,[МПа]^{-1}$, $b = 3{,}4\cdot10^{-4}\,[ч]^{-1}$, $\phi = c_1\varphi$, $c_1 = 2{,}2\cdot10^{-21}\,[н/см^2]^{-1}$.

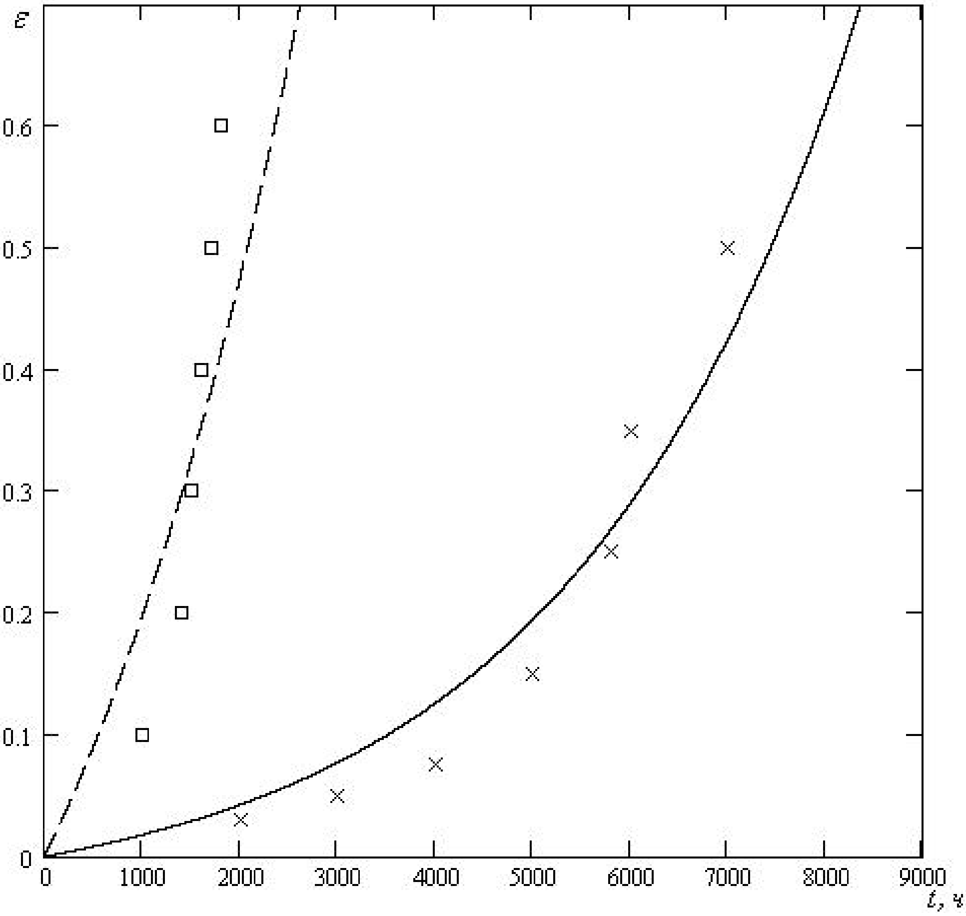


Рис. 1. Кривые ползучести (сплошная линия без учёта радиации, пунктирная линия с учётом радиации). Точки – данные работы [5].

На рис. 1 сплошной и пунктирной линиями показаны теоретические кривые ползучести (при $\pm = 180\ МПа$), соответственно, без учёта радиации и с учётом радиации согласно формуле (5). Точками на этих кривых отмечены выборочные точки соответствующих экспериментальных кривых ползучести [5].

Критерий длительной высокотемпературной прочности сформулирован на основе первого закона термодинамики

$$du = \text{¢}w - \text{¢}q + \text{¢}R \quad , \tag{6}$$

где du – приращение внутренней энергии, $\text{¢}q$ – приращение тепловой энергии, $\text{¢}R$ – приращения радиационной энергии, $\text{¢}w = \pm_{ij} d\pounds_{ij}$ ($d\pounds_{ij} = \pounds_{ij}\,dt$) – плотность работы сил, действующих на элемент среды, $\pm_{ij}$ – компоненты тензора напряжения, $d\pounds_{ij}$ – компоненты тензора приращения деформаций.

Проинтегрируем соотношение (6) от начального состояния (соответствующие величины отмечены индексом 0) до момента разрушения (соответствующие величины отмечены индексом *). Тогда из (6) имеем

$$\Delta u_* = w_* - \Delta q_* + \Delta R_* \quad , \tag{7}$$

где

$$\text{a}u_* = \int_{u_0}^{u_*} d\,u = u_* - u_0\,,\ w_* = \int_0^{w_*} \text{¢}\,w\,,\ \Delta q_* = \int_{q_0}^{q_*} \text{¢}\,q\,,\ \text{a}R_* = \int_{R_0}^{R_*} \text{¢}R \tag{8}$$

Далее введём обозначения $\text{a}q_* = w_{*1}$, $\text{a}u_* = w_{*2}$, $\text{a}R_* = w_{*3}$, тогда закон сохранения энергии (8) запишется $w_* + w_{*3} = w_{*1} + w_{*2}$. В случае простого растяжения $\pounds_{ij} = \pounds$, $\pm_{ij} = \pm$, где $\sigma = \text{const}$, энергия деформации может быть рассчитана по формуле $w_* = \pm\pounds_*$, из которой следует

$$\pounds_* = \frac{w_*}{\pm} = \frac{w_{*1} + w_{*2} - w_{*3}}{\pm} \tag{9}$$

Сравнивая деформации ползучести $\pounds = \pounds_*$ в момент разрушения $t = t_p$ в соотношениях (5), (9), получим критерий длительной прочности, обобщающий полученный ранее критерий без учёта радиации [6]

$$t_p = \frac{1}{b}\ln\left[1 + \frac{b(w_{*1} + w_{*2} - w_{*3})}{B\sigma\, e^{(a\,\sigma + ф)}}\right] \tag{10}$$

Кривые длительной прочности согласно (10) показаны на рис. 2: кривая 1 – с учётом радиации, кривая 2 – без учёта радиационного воздействия.

При построении кривых 1 и 2 на рис. 2 были использованы следующие величины коэффициентов: $a = 0{,}041\ [МПа]^{-1}$, $B = 9{,}203 \cdot 10^{-9}\ [ч]^{-1}$, $b = 3{,}4 \cdot 10^{-4}\ [ч]^{-1}$, $c = 4 \cdot 10^{-22}\ [н/см^2]^{-1}$, $ф = 5 \cdot 10^{22} н/м^2$, $w_{*2} = 10^8\ Дж/м^3$, $w_{*3} = 8 \cdot 10^{10}\ Дж/м^3$ согласно опытным данным из различных публикаций [7, 8].

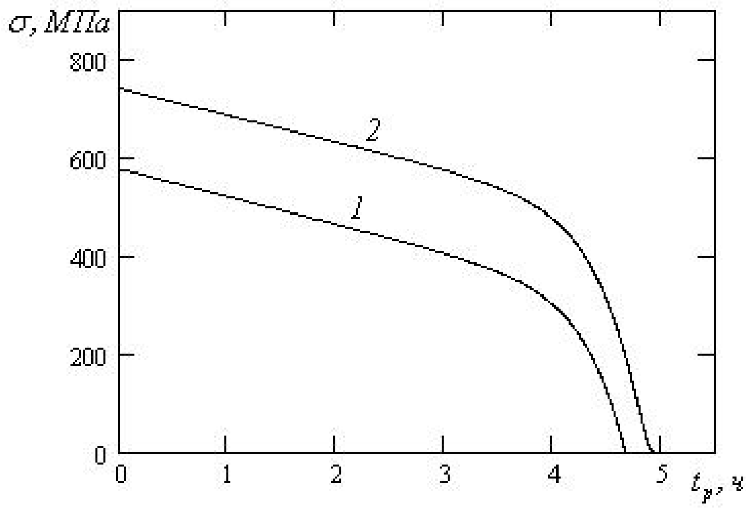


Рис. 2. Кривые длительной прочности с учётом (кривая 1) и без учёта радиации (кривая 2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ибрагимов Ш.Ш., Кирсанов В.В., Пятилетов Ю.С. Радиационные повреждения металлов и сплавов. М.: Энергоатомиздат, 1985. 240с.
2. Старение сплавов. М.: Металлургиздат, 1962. 493с.
3. Арутюнян Р.А. Проблема деформационного старения и длительного разрушения в механике материалов. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2004. 252с.
4. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752с.
5. Горынин И.В., Паршин А.М., Ибрагимов Ш.Ш., Ярошевич В.Д., Кожевников О.А., Айтхожин Э.С., Науменко Г.А., Андреев В.В., Лапин А.Н., Кусаинов С.К. Особенности ползучести высоконикелевого сплава в условиях нейтронного облучения // Радиационные дефекты в металлических кристаллах. (Материалы Всесоюзного совещания, Алма-Ата, 14-16 июня 1977). Алма-Ата: Изд-во "Наука", Казах. ССР. 1978. С.153-158.
6. Robert A. Arutyunyan. Energy consumption for creep fracture of metallic materials // Acta Mechanica Sinica. 2008. Vol. 24. N 4. P.469-472.
7. Максимкин О.П., Гусев М.Н. Изменения напряжений течения и латентной энергии при деформации нержавеющей стали 12Х18Н10Т, облучённой нейтронами // Письма в ЖТФ. 2003. Т.29. Вып.3. С.1-7.
8. Гусев М.Н., Токтогулова Д.А. Диссипативные процессы при пластической деформации армко-железа и стали 12Х18Н10Т, облучённых нейтронами до $1{,}3 \cdot 10^{20}\ н/см^2$ //Вестник удмуртского университета. Физика. 2007. N4. С.113-121.

Сведения об авторах:

Арутюнян Александр Робертович – старший научный сотрудник, математико-механический факультет, Санкт-Петербургский государственный университет
E-mail: Robert.Arutyunyan@paloma.spbu.ru
Арутюнян Роберт Ашотович – ведущий научный сотрудник, математико-механический факультет, Санкт-Петербургский государственный университет
E-mail: Robert.Arutyunyan@paloma.spbu.ru
Якимова Кира Саввовна – старший научный сотрудник, Институт проблем машиноведения РАН
E-mail: kyakimova@yandex.ru

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ АНИЗОТРОПНОЙ ДВУХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНКИ

Баласанян Е.С., **Петросян Г.А.**

Обсуждается вопрос определения напряжённо-деформированного состояния в трёхмерной задаче для анизотропной двухслойной пластинки, на лицевых плоскостях которой заданы смешанные краевые условия теории упругости, при полном контакте между слоёв. С применением асимптотического метода построены решения внутренней задачи. Рассмотрены конкретные примеры.

1. В работе [1] асимптотическим методом построена приближённая теория изгиба пластин из изотропных материалов. Классические статические краевые задачи анизотропных полос, пластин и оболочек асимптотическим методом решены в [2]. Асимптотический метод использован для решения второй и смешанных краевых задач в [3]. В [4] тем же методом определено напряжённо-деформированное состояние слоистой пластинки, слои которой обладают анизотропией общего вида. Было проведено сопоставление выведенных основных уравнений с соответствующими уравнениями классической теории слоистых пластин, когда имеется плоскость упругой симметрии. Смешанная краевая задача для анизотропной пластинки решена в [5].

Рассматривается задача теории упругости для двухслойной анизотропной пластинки: $\Omega = \{(x,y,z): 0 \le x \le a, 0 \le y \le b, -h_2 \le z \le h_1, h_1 + h_2 << a\}$. Величины, относящиеся к верхнему слою, отметим индексом (1), а к нижнему слою – индексом (2). Предполагается, что толщины и коэффициенты упругости слоёв разные и равны, соответственно h_k и $a_{ij}^{(k)}, (k = 1,2)$. Выберем координатные плоскости таким образом, чтобы плоскость Oxy располагалась между слоями.

На лицевых плоскостях пластинки заданы следующие граничные условия:

$$\pm_{xz}^{(2)} = \pm_{xz}^{-}(x,y), \quad \pm_{yz}^{(2)} = \pm_{yz}^{-}(x,y), \quad w^{(2)} = \frac{l}{h} w^{-}(x,y) \qquad \text{при } z = -h_2$$
$$u^{(1)} = \frac{l}{h} u^{+}(x,y), \quad v^{(1)} = \frac{l}{h} v^{+}(x,y), \quad \pm_{z}^{(1)} = \frac{l}{h} \pm_{Z}^{+}(x,y) \quad \text{при } z = h_1. \tag{1.1}$$

Краевые условия на торцах $x = 0, a$ пока произвольные, а между слоями выполняется полный контакт, то есть:

$$U^{(1)} = U^{(2)}, \; V^{(1)} = V^{(2)}, \; W^{(1)} = W^{(2)}, \; \pm_{xz}^{(1)} = \pm_{xz}^{(2)}, \; \pm_{yz}^{(1)} = \pm_{yz}^{(2)}, \; \pm_{z}^{(1)} = \pm_{z}^{(2)}. \tag{1.2}$$

Для решения поставленной задачи будем исходить из трёхмерных уравнений теории упругости [7]. Вводя безразмерную координатную систему $¶ = x/l, \; ¦ = y/l, \; ¸ = z/h$ и безразмерные перемещения $U = u/l$, $V = v/l$, $W = w/l$, получим систему, которая содержит малый геометрический параметр $£ = h/l$, где $l = \max(a,b)$. Также используются следующие обозначения: $¸_1 = h_1/h, \; ¸_2 = -h_2/h$. Решение полученной системы состоит из решений внутренней задачи и пограничного слоя. Для решения внутренней задачи используется асимптотический метод интегрирования и все напряжения и перемещения представляются в виде рядов [1-4]:

$$Q^{(k)} = £^{q} \sum_{s=0}^{S} £^{s} Q^{(s,k)} \tag{1.3}$$

где $Q^{(k)}$ – любое из напряжений или безразмерных перемещений.

Значения для q подбирается таким образом, чтобы получить непротиворечивую систему относительно напряжений и перемещений. Для рассматриваемой задачи эта цель достигается лишь при [5]:

$$q = -1 \;\; \text{äëÿ} \;\; \sigma_x^{(k)}, \sigma_y^{(k)}, \sigma_{xy}^{(k)}, \sigma_z^{(k)}, U^{(k)}, V^{(k)}, W^{(k)}; \qquad q = 0 \;\; \text{äëÿ} \;\; \sigma_{xz}^{(k)}, \sigma_{yz}^{(k)} \tag{1.4}$$

Подставляя (1.3), с учётом (1.4), в преобразованные уравнения теории уругости и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях £ , получим систему:

$$\frac{\partial ±_x^{(k,s)}}{\partial ¶}+\frac{\partial ±_{xy}^{(k,s)}}{\partial ¦}+\frac{\partial ±_{xz}^{(k,s)}}{\partial ¸}=0,\ (x,y;¶,¦),$$

$$\frac{\partial ±_{xz}^{(k,s-2)}}{\partial ¶}+\frac{\partial ±_{zy}^{(k,s-2)}}{\partial ¦}+\frac{\partial ±_z^{(k,s)}}{\partial ¸}=0,$$

$$\frac{\partial U^{(k,s)}}{\partial ¶}=a_{11}^{(k)}±_x^{(k,s)}+a_{12}^{(k)}±_y^{(k,s)}+a_{13}^{(k)}±_z^{(k,s)}+a_{14}^{(k)}±_{yz}^{(k,s-1)}+a_{15}^{(k)}±_{xz}^{(k,s-1)}+a_{16}^{(k)}±_{xy}^{(k,s)}$$

$$\frac{\partial V^{(k,s)}}{\partial ¦}=a_{12}^{(k)}±_x^{(k,s)}+a_{22}^{(k)}±_y^{(k,s)}+a_{23}^{(k)}±_z^{(k,s)}+a_{24}^{(k)}±_{yz}^{(k,s-1)}+a_{25}^{(k)}±_{xz}^{(k,s-1)}+a_{26}^{(k)}±_{xy}^{(k,s)}, \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial W^{(k,s)}}{\partial ¸}=a_{13}^{(k)}±_x^{(k,s-1)}+a_{23}^{(k)}±_y^{(k,s-1)}+a_{33}^{(k)}±_z^{(k,s-1)}+a_{34}^{(k)}±_{yz}^{(k,s-2)}+a_{35}^{(k)}±_{xz}^{(k,s-2)}+a_{36}^{(k)}±_{xy}^{(k,s-1)},$$

$$\frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial ¶}+\frac{\partial U^{(k,s)}}{\partial ¸}=a_{15}^{(k)}±_x^{(k,s-1)}+a_{25}^{(k)}±_y^{(k,s-1)}+a_{35}^{(k)}±_z^{(k,s-1)}+a_{45}^{(k)}±_{yz}^{(k,s-2)}+a_{55}^{(k)}±_{xz}^{(k,s-2)}+$$

$$+a_{56}^{(k)}±_{xy}^{(k,s-1)},\ \ (u,v;¶,¦;5,4;1,2;x,y)$$

$$\frac{\partial U^{(k,s)}}{\partial ¦}+\frac{\partial V^{(k,s)}}{\partial ¶}=a_{16}^{(k)}±_x^{(k,s)}+a_{26}^{(k)}±_y^{(k,s)}+a_{36}^{(k)}±_z^{(k,s)}+a_{46}^{(k)}±_{yz}^{(k,s-1)}+a_{56}^{(k)}±_{xz}^{(k,s-1)}+a_{66}^{(k)}±_{xy}^{(k,s)}.$$

Интегрируя полученную систему по ¸ , получим

$$±_z^{(k,s)}=±_z^{*(k,s)}+±_{z0}^{(k,s)},\qquad ±_x^{(k,s)}=±_x^{*(k,s)}+²_{x0}^{(k,s)}+a_3±_{z0}^{(k,s)},\ \ (x,y;a,b),$$

$$U^{(k,s)}=u^{*(k,s)}+u_0^{(sk,)}\ \ (U,V,W), \tag{1.6}$$

$$±_{xy}^{(k,s)}=±_{xy}^{*(k,s)}+²_{xy0}^{(k,s)}+c_3^{(k)}±_{z0}^{(k,s)},\qquad ±_{xz}^{(k,s)}=±_{xz}^{*(k,s)}+²_{xz1}^{(k,s)}¸+±_{xz0}^{(k,s)},\ \ (x,y)$$

где

$$²_{x0}^{(k,s)}=B_{11}^{(k)}£_1^{(k,s)}+B_{12}^{(k)}£_2^{(k,s)}+B_{16}^{(k)}µ^{(k,s)},(1,2;\ x,y),\ \ ²_{xy0}^{(k,s)}=B_{16}^{(k)}£_1^{(k,s)}+B_{26}^{(k)}£_2^{(k,s)}+B_{66}^{(k)}µ^{(k,s)}$$

$$²_{xz1}^{(k,s)}=-\left(\frac{\partial ²_{x0}^{(k,s)}}{\partial ¶}+\frac{\partial ²_{xy0}^{(k,s)}}{\partial ¦}+a_3^{(k)}\frac{\partial ±_{z0}^{(k,s)}}{\partial ¶}+c_3^{(k)}{}_3\frac{\partial ±_{z0}^{(k,s)}}{\partial ¦}\right),\ \ (x,y;\ ¶,¦;\ a,b) \tag{1.7}$$

$$£_1^{(k,s)}=\frac{\partial u_0^{(k,s)}}{\partial ¶},\qquad £_2^{(k,s)}=\frac{\partial v_0^{(k,s)}}{\partial ¦},\qquad µ^{(k,s)}=\frac{\partial u_0^{(k,s)}}{\partial ¦}+\frac{\partial v_0^{(k,s)}}{\partial ¶}.$$

Коэффициенты $B_{ij}^{(k)},\ a_i^{(k)},b_i^{(k)},c_i^{(k)}$ определяются по известным формулам [4,6].

$±_{xz0}^{(k,s)},±_{yz0}^{(k,s)},±_{z0}^{(k,s)},u_0^{(k,s)},v_0^{(k,s)},w_0^{(k,s)}$ – неизвестные функции интегрирования и будут определены ниже с помощью условий (1.1) è (1.2).

Решением (1.6) удовлетворив условиям полного контакта слоёв (1.2), для этих неизвестных величин получим:

$$±_{z0}^{(s,1)}=±_{z0}^{(s,2)},\ u_0^{(s,1)}=u_0^{(s,2)},\ v_0^{(s,1)}=v_0^{(s,2)},\ w_0^{(s,1)}=w_0^{(s,2)},\ ±_{xz0}^{(s,1)}=±_{xz0}^{(s,2)},\ ±_{yz0}^{(s,1)}=±_{yz0}^{(s,2)}. \tag{1.8}$$

Величины со звездочками, входящие в выражения (1.6), известны для каждого приближения s и определяются по формулам:

$$±_z^{*(k,s)}=-\int_0^{¸}\left(\frac{\partial ±_{xz}^{(k,s-2)}}{\partial ¶}+\frac{\partial ±_{yz}^{(k,s-2)}}{\partial ¦}\right)d¸,\quad ±_{xz}^{*(k,s)}=-\int_0^{¸}\left(\frac{\partial ±_x^{*(k,s)}}{\partial ¶}+\frac{\partial ±_{xy}^{*(k,s)}}{\partial ¦}\right)d¸,\ (x,y;\ ¶,¦)$$

$$u^{*(k,s)}=\int_0^{¸}\Big(a_{15}^{(k)}±_x^{(k,s-1)}+a_{25}±_y^{(k,s-1)}+a_{35}±_z^{(k,s-1)}+a_{45}±_{yz}^{(k,s-2)}+a_{55}±_{xz}^{(k,s-2)}+a_{56}±_{xy}^{(k,s-1)}-$$

$$-\frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial\xi}\Bigg)d\zeta\quad (u,v;1,2;5,4;\xi,\eta;x,y)$$

$$w^{*(k,s)}=\int_0^{\zeta}\Big(a_{13}^{(k)}\sigma_x^{(k,s-1)}+a_{23}^{(k)}\sigma_y^{(k,s-1)}+a_{33}^{(k)}\sigma_z^{(k,s-1)}+a_{34}^{(k)}\sigma_{yz}^{(k,s-2)}+a_{35}^{(k)}\sigma_{xz}^{(k,s-2)}+a_{36}^{(k)}\sigma_{xy}^{(k,s-1)}\Big)d\zeta\,,$$

$$\sigma_x^{*(k,s)}=B_{11}^{(k)}\varepsilon_1^{*(k,s)}+B_{12}^{(k)}\varepsilon_2^{*(k,s)}+B_{16}^{(k)}\omega^{*(k,s)}+a_3^{(k)}\sigma_z^{*(k,s)}+a_4^{(k)}\sigma_{yz}^{(k,s-1)}+a_5^{(k)}\sigma_{xz}^{(k,s-1)}, \qquad (1.9)$$

$$\sigma_y^{*(k,s)}=B_{12}^{(k)}\varepsilon_1^{*(k,s)}+B_{22}^{(k)}\varepsilon_2^{*(k,s)}+B_{26}^{(k)}\omega^{*(k,s)}+b_3^{(k)}\sigma_z^{*(k,s)}+b_4^{(k)}\sigma_{yz}^{(k,s-1)}+b_5^{(k)}\sigma_{xz}^{(k,s-1)},$$

$$\sigma_{xy}^{*(k,s)}=B_{16}^{(k)}\varepsilon_1^{*(k,s)}+B_{26}^{(k)}\varepsilon_2^{*(k,s)}+B_{66}^{(k)}\omega^{*(k,s)}+c_3^{(k)}\sigma_z^{*(k,s)}+c_4^{(k)}\sigma_{yz}^{(k,s-1)}+c_5^{(k)}\sigma_{xz}^{(k,s-1)},$$

$$\varepsilon_1^{*(k,s)}=\frac{\partial u^{*(k,s)}}{\partial\xi},\qquad \varepsilon_2^{*(k,s)}=\frac{\partial v^{*(k,s)}}{\partial\eta},\qquad \omega^{*(k,s)}=\frac{\partial u^{*(k,s)}}{\partial\eta}+\frac{\partial v^{*(k,s)}}{\partial\xi}.$$

Предполагается, что $Q^{(k,s-i)}\equiv 0$, если $s<i$.

Удовлетворив поверхностным условиям (1.1), определим все неизвестные функции интегрирования:

$$u_0^{(1,s)}=u^{+(1,s)}-u^{*(1,s)}(\zeta_1),\ (u,v)\qquad w_0^{(1,s)}=w^{-(2,s)}-w^{*(2,s)}(\zeta_2),$$

$$\sigma_{z0}^{(1,s)}=\sigma_z^{+(1,s)}-\sigma_z^{*(1,s)}(\zeta_1), \qquad (1.10)$$

$$\sigma_{xz0}^{(1,s)}=\sigma_{xz}^{-(2,s)}+\left(L_{11}\big(B_{ij}^{(2)}\big)u^{+}+L_{12}\big(B_{ij}^{(2)}\big)v^{+}+a_3^{(2)}\frac{\partial\sigma_z^{+}}{\partial\xi}+c_3^{(2)}\frac{\partial\sigma_z^{+}}{\partial\eta}\right)\zeta_2-$$
$$-\left(L_{11}\big(B_{ij}^{(2)}\big)u^{*(1,s)}(\zeta_1)+L_{12}\big(B_{ij}^{(2)}\big)v^{*(1,s)}(\zeta_1)+a_3^{(2)}\frac{\partial\sigma_z^{*(1,s)}(\zeta_1)}{\partial\xi}+c_3^{(2)}\frac{\partial\sigma_z^{*(1,s)}(\zeta_1)}{\partial\eta}\right)\zeta_2-\sigma_{xz}^{*(2,s)}(\zeta_2)$$

$$\sigma_{yz0}^{(1,s)}=\sigma_{yz}^{-(2,s)}+\left(L_{12}\big(B_{ij}^{(2)}\big)u^{+}+L_{22}\big(B_{ij}^{(2)}\big)v^{+}+c_3^{(2)}\frac{\partial\sigma_z^{+}}{\partial\xi}+b_3^{(2)}\frac{\partial\sigma_z^{+}}{\partial\eta}\right)\zeta_2-$$
$$-\left(L_{12}\big(B_{ij}^{(2)}\big)u^{*(1,s)}(\zeta_1)+L_{22}\big(B_{ij}^{(2)}\big)v^{*(1,s)}(\zeta_1)+c_3^{(2)}\frac{\partial\sigma_z^{*(1,s)}(\zeta_1)}{\partial\xi}+b_3^{(2)}\frac{\partial\sigma_z^{*(1,s)}(\zeta_1)}{\partial\eta}\right)\zeta_2-\sigma_{yz}^{*(2,s)}(\zeta_2)$$

Здесь $L_{ij}\big(B_{ij}^{(k)}\big)$– известные дифференциальные операторы второго порядка [6].

Окончательное решение внутренней задачи представится в виде:

$$U^{(k,s)}=u^{+(1,s)}+u^{*(k,s)}-u^{*(1,s)}(\zeta_1),\ (u,v),$$

$$W^{(k,s)}=w^{-(2,s)}+w^{*(k,s)}-w^{*(2,s)}(\zeta_2)$$

$$\sigma_z^{(k,s)}=\sigma_z^{+(1,s)}+\sigma_z^{*(k,s)}-\sigma_z^{*(1,s)}(\zeta_1),$$

$$\sigma_x^{(k,s)}=B_{11}^{(k)}\frac{\partial u^{+(1,s)}}{\partial\xi}+B_{12}^{(k)}\frac{\partial v^{+(1,s)}}{\partial\eta}+B_{16}^{(k)}\left(\frac{\partial u^{+(1,s)}}{\partial\eta}+\frac{\partial v^{+(1,s)}}{\partial\xi}\right)+a_3^{(k)}\sigma_z^{+(1,s)}-$$
$$-B_{11}^{(k)}\frac{\partial u^{*(1,s)}(\zeta_1)}{\partial\xi}-B_{12}^{(k)}\frac{\partial v^{*(1,s)}(\zeta_1)}{\partial\eta}-B_{16}^{(k)}\left(\frac{\partial u^{*(1,s)}(\zeta_1)}{\partial\eta}+\frac{\partial v^{*(1,s)}(\zeta_1)}{\partial\xi}\right)+ \qquad (1.11)$$
$$+\sigma_x^{*(k,s)}-a_3^{(k)}\sigma_z^{*(1,s)}(\zeta_1),\quad \big(x,y;1,2;u,v;\xi,\eta;a_3^{(k)},b_3^{(k)}\big)$$

$$\sigma_{xy}^{(k,s)}=B_{16}^{(k)}\frac{\partial u^{+(1,s)}}{\partial\xi}+B_{26}^{(k)}\frac{\partial v^{+(1,s)}}{\partial\eta}+B_{66}^{(k)}\left(\frac{\partial u^{+(1,s)}}{\partial\eta}+\frac{\partial v^{+(1,s)}}{\partial\xi}\right)+c_3^{(k)}\sigma_z^{+(1,s)}-B_{16}^{(k)}\frac{\partial u^{*(1,s)}(\zeta_1)}{\partial\xi}-$$
$$-B_{26}^{(k)}\frac{\partial v^{*(1,s)}(\zeta_1)}{\partial\eta}-B_{66}^{(k)}\left(\frac{\partial u^{*(1,s)}(\zeta_1)}{\partial\eta}+\frac{\partial v^{*(1,s)}(\zeta_1)}{\partial\xi}\right)+\sigma_{xy}^{*(k,s)}-c_3^{(k)}\sigma_z^{*(1,s)}(\zeta_1)$$

$$\sigma_{xz}^{(k,s)}=\sigma_{xz}^{-(2,s)}-\left(L_{11}\left(B_{ij}^{(k)}\right)u^{+(1,s)}+L_{12}\left(B_{ij}^{(k)}\right)v^{+(1,s)}+a_3^{(k)}\frac{\partial\sigma_z^{+(1,s)}}{\partial\xi}+c_3^{(k)}\frac{\partial\sigma_z^{+(1,s)}}{\partial\eta}\right)\zeta+$$

$$+\left(L_{11}\left(B_{ij}^{(2)}\right)u^{+(1,s)}+L_{12}\left(B_{ij}^{(2)}\right)v^{+(1,s)}+a_3^{(2)}\frac{\partial\sigma_z^{+(1,s)}}{\partial\xi}+c_3^{(2)}\frac{\partial\sigma_z^{+(1,s)}}{\partial\eta}\right)\zeta_2+$$

$$+\left(L_{11}\left(B_{ij}^{(k)}\right)u^{*(1,s)}\left(\zeta_1\right)+L_{12}\left(B_{ij}^{(k)}\right)v^{*(1,s)}\left(\zeta_1\right)+a_3^{(k)}\frac{\partial\sigma_z^{*(1,s)}\left(\zeta_1\right)}{\partial\xi}+c_3^{(k)}\frac{\partial\sigma_z^{*(1,s)}\left(\zeta_1\right)}{\partial\eta}\right)\zeta-$$

$$-\left(L_{11}\left(B_{ij}^{(2)}\right)u^{*(1,s)}\left(\zeta_1\right)+L_{12}\left(B_{ij}^{(2)}\right)v^{*(1,s)}\left(\zeta_1\right)+a_3^{(2)}\frac{\partial\sigma_z^{*(1,s)}\left(\zeta_1\right)}{\partial\xi}+c_3^{(2)}\frac{\partial\sigma_z^{*(1,s)}\left(\zeta_1\right)}{\partial\eta}\right)\zeta_2+$$

$$+\sigma_{xz}^{*(k,s)}-\sigma_{xz}^{*(2,s)}\left(\zeta_2\right),\quad\left(x,y;1,2;u,v;\xi,\eta;a_3^{(k)},b_3^{(k)}\right)$$

В формулх (1.11) необходимо учитывать, что

$$u^{+(k,0)}=u^+,\ v^{+(k,0)}=v^+,\ w^{-(k,0)}=w^-,\ \pm_z^{+(k,0)}=\pm_z^+,\ \pm_{xz}^{-(k,0)}=\pm_{xz}^-,\ \pm_{yz}^{-(k,0)}=\pm_{yz}^-$$

$$u^{+(k,s)}=v^{+(k,s)}=w^{-(k,s)}=0\ ,\quad \pm_z^{+(k,s)}=\pm_{xz}^{-(k,s)}=\pm_{yz}^{-(k,s)}=0,\qquad \text{при}\quad s>0$$

2. В качестве иллюстрации рассмотрим частные примеры.

а) Пусть

$$\pm_z^+=-q,\ u^+=v^+=0,\qquad \pm_{xz}^-=\pm_{yz}^-=0,\ w^-=0 \tag{2.1}$$

В рассматриваемой задаче асимптотический процесс обрывается при $s=2$.

С помощью решений (1.11), и рекуррентных формул (1.9) определим все величины внутренней задачи. Точное решение задачи имеет вид:

$$\pm_x^{(k)}=-a_3^{(k)}q,\ \pm_y^{(k)}=-b_3^{(k)}q,\ \pm_{xy}^{(k)}=-c_3^{(k)}q\ ,\ \pm_{xz}^{(k)}=0,\ \pm_{yz}^{(k)}=0,\ \pm_z^{(k)}=-q,\ \left(k=1,2\right),$$

$$u^{(1)}=-\left(a_{15}^{(1)}a_3^{(1)}+a_{25}^{(1)}b_3^{(1)}+a_{56}^{(1)}c_3^{(1)}+a_{35}^{(1)}\right)\left(z-h_1\right)q\ , \tag{2.2}$$

$$v^{(1)}=-\left(a_{14}^{(1)}a_3^{(1)}+a_{24}^{(1)}b_3^{(1)}+a_{46}^{(1)}c_3^{(1)}+a_{34}^{(1)}\right)\left(z-h_1\right)q\ ,$$

$$w^{(1)}=-\left(a_{13}^{(1)}a_3^{(1)}+a_{23}^{(1)}b_3^{(1)}+a_{36}^{(1)}c_3^{(1)}+a_{33}^{(1)}\right)qz-\left(a_{13}^{(2)}a_3^{(2)}+a_{23}^{(2)}b_3^{(2)}+a_{36}^{(2)}c_3^{(2)}+a_{33}^{(2)}\right)qh_2;$$

$$u^{(2)}=-\left(a_{15}^{(2)}a_3^{(2)}+a_{25}^{(2)}b_3^{(2)}+a_{56}^{(2)}c_3^{(2)}+a_{35}^{(2)}\right)qz+\left(a_{15}^{(1)}a_3^{(1)}+a_{25}^{(1)}b_3^{(1)}+a_{56}^{(1)}c_3^{(1)}+a_{35}^{(1)}\right)qh_1,$$

$$v^{(2)}=-\left(a_{14}^{(2)}a_3^{(2)}+a_{24}^{(2)}b_3^{(2)}+a_{46}^{(2)}c_3^{(2)}+a_{34}^{(2)}\right)qz+\left(a_{14}^{(1)}a_3^{(1)}+a_{24}^{(1)}b_3^{(1)}+a_{46}^{(1)}c_3^{(1)}+a_{34}^{(1)}\right)qh_1,$$

$$w^{(2)}=-\left(a_{13}^{(2)}a_3^{(2)}+a_{23}^{(2)}b_3^{(2)}+a_{36}^{(2)}c_3^{(2)}+a_{33}^{(2)}\right)q\left(z+h_2\right).$$

б) Рассмотрим другой пример. Допустим

$$\pm_z^+=0,\ u^+=v^+=0,\ \pm_{xz}^-=\mathbf{2}_1,\ \pm_{yz}^-=\mathbf{2}_2,\ w^-=0 \tag{2.3}$$

В данной задаче отличны от нуля лишь первые три приближения. В результате получим

$$\pm_x^{(k)}=\frac{h}{l}\left(a_4^{(k)}\mathbf{2}_2+a_5^{(k)}\mathbf{2}_1\right),\quad \pm_y^{(k)}=\frac{h}{l}\left(b_4^{(k)}\mathbf{2}_2+b_5^{(k)}\mathbf{2}_1\right),\quad \pm_{xy}^{(k)}=\frac{h}{l}\left(c_4^{(k)}\mathbf{2}_2+c_5^{(k)}\mathbf{2}_1\right),$$

$$\pm_{xz}^{(k)}=\mathbf{2}_1,\qquad \pm_{yz}^{(k)}=\mathbf{2}_2,\qquad \pm_z^{(k)}=0\ ,\quad \left(k=1,2\right), \tag{2.4}$$

$$u^{(1)}=\frac{h}{l}\left[\left(a_{15}^{(1)}a_5^{(1)}+a_{25}^{(1)}b_5^{(1)}+a_{56}^{(1)}c_5^{(1)}+a_{55}^{(1)}\right)\mathbf{2}_1+\left(a_{15}^{(1)}a_4^{(1)}+a_{25}^{(1)}b_4^{(1)}+a_{56}^{(1)}c_4^{(1)}+a_{45}^{(1)}\right)\mathbf{2}_2\right]\left(z-h_1\right),$$

$$v^{(1)}=\frac{h}{l}\left[\left(a_{14}^{(1)}a_5^{(1)}+a_{24}^{(1)}b_5^{(1)}+a_{46}^{(1)}c_5^{(1)}+a_{45}^{(1)}\right)\mathbf{2}_1+\left(a_{14}^{(1)}a_4^{(1)}+a_{24}^{(1)}b_4^{(1)}+a_{46}^{(1)}c_4^{(1)}+a_{44}^{(1)}\right)\mathbf{2}_2\right]\left(z-h_1\right),$$

$$w^{(1)}=\frac{h}{l}\left[\left(a_{13}^{(1)}a_5^{(1)}+a_{23}^{(1)}b_5^{(1)}+a_{36}^{(1)}c_5^{(1)}+a_{35}^{(1)}\right)\tau_1+\left(a_{13}^{(1)}a_4^{(1)}+a_{23}^{(1)}b_4^{(1)}+a_{36}^{(1)}c_4^{(1)}+a_{34}^{(1)}\right)\tau_2\right]z+$$

$$+\frac{h}{l}\left[\left(a_{13}^{(2)}a_5^{(2)}+a_{23}^{(2)}b_5^{(2)}+a_{36}^{(2)}c_5^{(2)}+a_{35}^{(2)}\right)\tau_1+\left(a_{13}^{(2)}a_4^{(2)}+a_{23}^{(2)}b_4^{(2)}+a_{36}^{(2)}c_4^{(2)}+a_{34}^{(2)}\right)\tau_2\right]h_2;$$

$$u^{(2)}=\frac{h}{l}\left[\left(a_{15}^{(2)}a_5^{(2)}+a_{25}^{(2)}b_5^{(2)}+a_{56}^{(2)}c_5^{(2)}+a_{55}^{(2)}\right)\tau_1+\left(a_{15}^{(2)}a_4^{(2)}+a_{25}^{(2)}b_4^{(2)}+a_{56}^{(2)}c_4^{(2)}+a_{45}^{(2)}\right)\tau_2\right]z-$$

$$-\frac{h}{l}\left[\left(a_{15}^{(1)}a_5^{(1)}+a_{25}^{(1)}b_5^{(1)}+a_{56}^{(1)}c_5^{(1)}+a_{55}^{(1)}\right)\tau_1+\left(a_{15}^{(1)}a_4^{(1)}+a_{25}^{(1)}b_4^{(1)}+a_{56}^{(1)}c_4^{(1)}+a_{45}^{(1)}\right)\tau_2\right]h_1,$$

$$v^{(2)}=\frac{h}{l}\left[\left(a_{14}^{(2)}a_5^{(2)}+a_{24}^{(2)}b_5^{(2)}+a_{46}^{(2)}c_5^{(2)}+a_{45}^{(2)}\right)\tau_1+\left(a_{14}^{(2)}a_4^{(2)}+a_{24}^{(2)}b_4^{(2)}+a_{46}^{(2)}c_4^{(2)}+a_{44}^{(2)}\right)\tau_2\right]z-$$

$$-\frac{h}{l}\left[\left(a_{14}^{(1)}a_5^{(1)}+a_{24}^{(1)}b_5^{(1)}+a_{46}^{(1)}c_5^{(1)}+a_{45}^{(1)}\right)\tau_1+\left(a_{14}^{(1)}a_4^{(1)}+a_{24}^{(1)}b_4^{(1)}+a_{46}^{(1)}c_4^{(1)}+a_{44}^{(1)}\right)\tau_2\right]h_1,$$

$$w^{(2)}=\frac{h}{l}\left[\left(a_{13}^{(2)}a_5^{(2)}+a_{23}^{(2)}b_5^{(2)}+a_{36}^{(2)}c_5^{(2)}+a_{35}^{(2)}\right)\tau_1+\left(a_{13}^{(2)}a_4^{(2)}+a_{23}^{(2)}b_4^{(2)}+a_{36}^{(2)}c_4^{(2)}+a_{34}^{(2)}\right)\tau_2\right](z+h_2).$$

При $a_{ij}^{(1)}=a_{ij}^{(2)}$, $h_1=h_2$ полученные решения совпадают с соответствующими решениями для однослойной пластинки [5].

В заключение отметим, что решение внутренней задачи не содержит произвольных постоянных для удовлетворения торцевым условиям. Для удовлетворения торцевым условиям при $x=0,a$ необходимо построить решения типа пограничного слоя вблизи этих торцов [2-4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А.Л. Построение приближённой теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости //ПММ. 1962. Т.26. Вып. 4. С.668-686.
2. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 415с.
3. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: Изд-во “Гитутюн” НАН РА, 2005. 468с.
4. Агаловян Л.А., Багдасарян Ю.М., Хачатрян А.М. К определению напряжённо-деформированного состояния слоистых пластин с анизотропией общего вида // Изв. НАН Армении. Механика. 1996. Т.49. N3. С.10-22.
5. Петросян Г.А., Хачатрян А.М. Асимптотическое решение одной смешанной краевой задачи анизотропной пластинки. // Изв. НАН Армении. Механика. 2009. Т.62. N4. С.65-72.
6. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1967. 268с.

Сведения об авторах:

Баласанян Евгения Самвеловна – преподаватель кафедры математики АрÃÓ, ÍÊÐ, Ñòåïàíàêåðò, óë. Ì õèòàðа Ãî øà 5. Òåë.: (374 97) 24 06 20, (374 94) 97 06 20,
E-mail: majvazyan@mail.ru

Петросян Гаянэ Альбертовна – ê.ô.ì.í., ñòàðøèé преподаватель кафедры математики АрÃÓ, ÍÊÐ, Ñòåïàíàêåðò, óë. Ì õèòàðа Ãî øà 5. Òåë.: (374 97) 23 83 10, (374 94) 95 02 93,
E-mail: gayane-petrosian@mail.ru

ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО СЛОЯ ИЗ ИДЕАЛЬНО-ПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА ПРИ ТРАНСЛЯЦИОННОЙ АНИЗОТРОПИИ, СЖАТОГО ШЕРОХОВАТЫМИ ПЛИТАМИ

Балашникова А. В.

В работе рассматривается сжатие анизотропного идеальнопластического слоя жёсткими шероховатыми плитами в случае плоской деформации [1], [2].

Запишем условие пластичности в виде

$$\left(\frac{\pm_x - \pm_y}{2} - \frac{k_1 - k_2}{2}\right)^2 + \left(\text{²}_{xy} - k_3\right)^2 = \copyright_0^2. \tag{1}$$

Уравнению (1) удовлетворим, полагая

$$\begin{aligned} &\pm_x = \pm + \copyright\cos 2\text{¨}, \\ &\pm_y = \pm - \copyright\cos 2\text{¨}, \\ &\text{²}_{xy} = \copyright\sin 2\text{¨}. \end{aligned} \tag{2}$$

Используя (2), найдём зависимость $\copyright$, подставив в (1)

$$\copyright = \circ\cos 2\left(\text{¨} - \sim\right) + \sqrt{\copyright_0^2 - \circ^2\sin^2 2\left(\text{¨} - \sim\right)}, \tag{3}$$

где

$$\circ^2 = \left(\frac{k_1 - k_2}{2}\right)^2 + k_3^2, \ \mathrm{tg}\sim = \frac{2k_3}{k_1 - k_2}.$$

Предположим, что

$$\text{¨} = \text{¨}\left(y\right) \tag{4}$$

с учётом (3) следует

$$\copyright = \copyright\left(y\right).$$

Уравнения равновесия имеют вид

$$\frac{\partial\pm_x}{\partial x} + \frac{\partial\text{²}_{xy}}{\partial y} = 0, \ \frac{\partial\text{²}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\pm_y}{\partial y} = 0. \tag{5}$$

исходя из (2), примут вид

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\pm}{\partial x} + \frac{d\left(\copyright\sin 2\text{¨}\right)}{dy} = 0, \\ &\frac{\partial\pm}{\partial y} - \frac{d\left(\copyright\cos 2\text{¨}\right)}{dy} = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Из (2), (5) найдём

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\pm}{\partial x} = C, \ C - \mathrm{const}, \\ &\frac{d\left(\copyright\sin 2\text{¨}\right)}{dy} = -C. \end{aligned} \tag{7}$$

Из (7) найдём

$$\begin{aligned} &\pm = Cx + F\left(y\right), \\ &\copyright\sin 2\text{¨} = -Cy + d_1. \end{aligned} \tag{8}$$

Согласно (8), получим

$$\frac{dF}{dy}=\frac{d\left(\text{©}\cos 2\text{¨}\right)}{dy},\qquad (9)$$
$$F=\text{©}\cos 2\text{¨}+d_2.$$

Используя (9), подставим в (2), получим

$$\pm_x = Cx+2F\left(y\right)-d_2,$$
$$\pm_y = Cx+d_2, \qquad (10)$$
$$\text{²}_{xy}=-Cy+d_1.$$

Из последнего соотношения (8) согласно выражению (3), получим

$$\left[\left(a\cos 2\text{¨}+b\sin 2\text{¨}\right)+\sqrt{\text{©}_0^2-\left(a\sin 2\text{¨}-b\cos 2\text{¨}\right)^2}\right]2\sin 2\text{¨}=2\left(-Cy+d_1\right). \qquad (11)$$

Из уравнения (11) найдём

$$\mathrm{tg}2\text{¨}=\frac{l\pm\sqrt{l^2+m^2-n^2}}{m+n}, \qquad (12)$$

где

$$l\left(y\right)=4Cay-4ad_1,m\left(y\right)=-4Cby+4bd_1-2b^2+2\text{©}_0^2-2a^2,$$
$$n\left(y\right)=2\text{©}_0^2-2a^2-b^2-\left(2Cy-2d_1+b\right)^2.$$

С учётом решения (12) соотношения (11) примут вид

$$\pm_x=Cx+2\left(-Cy+d_1\right)\frac{m+n}{l\pm\sqrt{l^2+m^2-n^2}}+d_2,$$
$$\pm_y=Cx+d_2, \qquad (13)$$
$$\text{²}_{xy}=-Cy+d_1.$$

Соотношения связи между напряжениями и скоростями деформаций согласно ассоциированному закону течения, имеют вид

$$\text{£}_x=\text{ª}\cdot\left(\frac{\pm_x-\pm_y}{2}-\frac{k_1-k_2}{2}\right),$$
$$\text{£}_y=\text{ª}\cdot\left(\frac{\pm_x-\pm_y}{2}-\frac{k_1-k_2}{2}\right), \qquad (14)$$
$$2\cdot\text{£}_{xy}=2\text{ª}\cdot\left(\text{²}_{xy}-k_3\right).$$

$$\text{£}_x+\text{£}_y=0. \qquad (15)$$

Имеют место формулы Коши

$$\text{£}_x=\frac{\partial u}{\partial x},\ \ \text{£}_y=\frac{\partial v}{\partial y},\ \ \text{£}_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right). \qquad (16)$$

Возьмём v пропорционально y

$$v=a_1y$$

с учётом (15) получим

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-a_1,\ \ \frac{\partial v}{\partial y}=a_1,\ \ \text{£}_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right). \qquad (17)$$

Из (17) найдем

$$u=-a_1x+\Phi\left(y\right). \qquad (18)$$

Из первых соотношений (16), (17) найдём

$$a = \frac{-a_1}{F(y) - d_2 - \frac{k_1 - k_2}{2}}. \quad (19)$$

Используя последние соотношения (16), (17), с учётом (19) получим

$$\Phi(y) = \int \frac{-2a_1(-Cy + d_1 - k_3)}{F(y) - d_2 - \frac{k_1 - k_2}{2}} dy. \quad (20)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ивлев Д.Д. Об обобщениях решения Прандтля о сжатии пластического слоя шероховатыми плитами / Д.Д. Ивлев, Л.В. Ершов, А.В. Романов // Современные проблемы механики и авиации. – М.: Машиностроение, 1982.
2. Балашникова А.В. О сжатии идеальнопластического слоя жёсткими шероховатыми плитами в случае трансляционной анизотропии / А.В. Балашникова // Вестник Чуваш. гос. пед. ун-т им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. 2011. № 2 (10). С.115–118.

Сведения об авторе:

Балашникова Анжелика Вениаминовна – аспирант кафедры математического анализа, Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева, физико-математический факультет, (927) 847 60 16

E-mail: info3006@yandex.ru

ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ ПОЭТАПНО МЕНЯЮЩЕЙСЯ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Барсегян Т.В.

В работе изложен подход к решению задач управления поэтапно меняющейся одной линейной системы с неразделенными промежуточными условиями. Приведено решение конкретной задачи.

1. Постановка задачи. Рассмотрим управляемую динамическую систему, движение которой описывается следующими системами:

$$\dot{x} = A_1(t)x + B_1(t)u_1; \qquad t_0 \le t \le t_1 \tag{1.1}$$

$$\dot{y} = A_2(t)y + B_2(t)u_2; \qquad t_1 \le t \le t_2 \tag{1.2}$$

$$\dot{z} = A_3(t)z + B_3(t)u_3; \qquad t_2 \le t \le t_3 = T \tag{1.3}$$

Здесь $x(t) \in R^{n_1}$, $y(t) \in R^{n_2}$, $z(t) \in R^{n_3}$; x, y, z – фазовые векторы системы (1.1)-(1.3) соответственно, $A_k(t)$ и $B_k(t)$, $k = 1, 2, 3$ – матрицы параметров системы (1.1)-(1.3) (модели объекта) с размерностями ($n_k \times n_k$) и ($n_k \times r_k$) соответственно; $u_k(t)$ – ($r_k \times 1$)-мерный вектор управляющих воздействий. В общем случае будем предполагать, что элементы матриц $A_k(t)$ и $B_k(t)$ и компоненты вектор-столбцов $u_k(t)$ являются измеримыми ограниченными функциями.

Пусть заданы начальное

$$x(t_0) = x_0 \tag{1.4}$$

и конечное

$$z(T) = z_T \tag{1.5}$$

состояния системы.

Преемственность между системами (1.1)-(1.3) (стыковки траекторий) обеспечивается выполнением следующих условий в промежуточные моменты времени t_1 и t_2

$$E_1 x(t_1) + F_1 y(t_1) = \sim \tag{1.6}$$

$$E_2 y(t_2) + F_2 z(t_2) = \tag{1.7}$$

где $E_k - (n_{k+1} \times n_k)$ -мерные, $F_k - (n_{k+1} \times n_{k+1})$ -мерные матрицы, а $\sim$ и $-(n_{k+1} \times 1)$ -мерный вектор-столбец $k = 1, 2$. Предполагается, что матрицы E_k, F_k и векторы $\sim$, известны, а матрицы F_k такие, что существуют обратные матрицы F_k^{-1}, т.е. $\det F_k \ne 0$, $k = 1, 2$.

Требуется найти условия, при которых существуют программные управляющие воздействия $u_1(t) \in [t_0, t_1]$, $u_2(t) \in [t_1, t_2]$ и $u_3(t) \in [t_3, T]$, переводящие движения системы (1.1)–(1.3) из начального состояния (1.4) при условии (1.6), (1.7) в конечное состояние (1.5) в промежутке времени $[t_0, T]$, а также построить их.

2. Решение задачи. Для решения поставленной задачи, записывая формулу Коши для системы (1.1)-(1.3) соответственно и учитывая условия (1.6), (1.7), получим

$$x(t) = X[t, t_0]x(t_0) + \int_{t_0}^{t} H_1[t, ^2]u_1(^2)d^2 \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= Y[t, t_1]F_1^{-1}\sim - Y[t, t_1]F_1^{-1}E_1 X[t_1, t_0]x(t_0) - \\ &- Y[t, t_1]F_1^{-1}E_1 \int_{t_0}^{t_1} H_1[t_1, ^2]u_1(^2)d^2 + \int_{t_1}^{t} H_2[t, ^2]u_2(^2)d^2 \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$z(t) = Z[t,t_2]F_2^{-1} \quad - Z[t,t_2]F_2^{-1}E_2Y[t_2,t_1]F_1^{-1}\sim + Z[t,t_2]F_2^{-1}E_2Y[t_2,t_1]F_1^{-1}E_1X[t_1,t_0]x(t_0) +$$
$$+Z[t,t_2]F_2^{-1}E_2Y[t_2,t_1]F_1^{-1}E_1\int_{t_0}^{t_1} H_1[t_1,²]u_1(²)d² - Z[t,t_2]F_2^{-1}E_2\int_{t_1}^{t_2} H_2[t_2,²]u_2(²)d² + \tag{2.3}$$
$$+\int_{t_2}^{t} H_3[t,²]u_3(²)d²$$

где

$$H_1[t,²] = X[t,²]B_1(²)\,,\ H_2[t,²] = Y[t,²]B_2(²)\,,\ H_3[t,²] = Z[t,²]B_3(²) \tag{2.4}$$

а через $X[t,²]$, $Y[t,²]$ и $Z[t,²]$ обозначены нормированные фундаментальные матрицы решений однородной части уравнении (1.1)-(1.3) в промежутке времени $[t_0,t_1]$, $[t_1,t_2]$ и $[t_2,T]$ соответственно.

Таким образом, имея управляющие воздействия $u_k(t)$, с помощью формул (2.1)-(2.3) можно определить фазовое состояние движения системы (1.1)-(1.3) для произвольного момента времени t из любого промежутка времени $[t_{k-1},t_k]$, $k = 1, 2$.

Из формулы (2.3) при $t = T$ получим

$$z(T) = Z[T,t_2]F_2^{-1} \quad - Z[T,t_2]F_2^{-1}E_2Y[t_2,t_1]F_1^{-1}\sim + Z[T,t_2]F_2^{-1}E_2Y[t_2,t_1]F_1^{-1}E_1X[t_1,t_0]x(t_0) +$$
$$+Z[T,t_2]F_2^{-1}E_2Y[t_2,t_1]F_1^{-1}E_1\int_{t_0}^{t_1} H_1[t_1,²]u_1(²)d² - Z[T,t_2]F_2^{-1}E_2\int_{t_1}^{t_2} H_2[t_2,²]u_2(²)d² +$$
$$+\int_{t_2}^{T} H_3[T,²]u_3(²)d² \tag{2.5}$$

Вводя следующие обозначения [1]:

$$\bar{H}_1[t_1,²] = \begin{cases} H_1[t_1,²], t_0 \le ² \le t_1 \\ 0, \quad t_1 \le ² \le T \end{cases}, \quad \bar{H}_2[t_2,²] = \begin{cases} 0, \quad t_0 \le ² \le t_1 \\ H_2[t_2,²], t_1 \le ² \le t_2 \\ 0, \quad t_2 \le ² \le T \end{cases}$$
$$\bar{H}_3[t_3,²] = \begin{cases} 0, \quad t_0 \le ² \le t_2 \\ H_3[t_3,²], t_2 \le ² \le T \end{cases} \tag{2.6}$$

соотношение (2.5) можно представить в виде

$$Z[T,t_2]F_2^{-1}E_2Y[t_2,t_1]F_1^{-1}E_1\int_{t_0}^{T} \bar{H}_1[t_1,²]u_1(²)d² -$$
$$-Z[T,t_2]F_2^{-1}E_2\int_{t_1}^{T} \bar{H}_2[t_2,²]u_2(²)d² + \int_{t_2}^{T} \bar{H}_3[T,²]u_3(²)d² = ¦ \tag{2.7}$$

где

$$¦ = z(T) - Z[T,t_2]F_2^{-1} \quad + Z[T,t_2]F_2^{-1}E_2Y[t_2,t_1]F_1^{-1}\sim -$$
$$- Z[T,t_2]F_2^{-1}E_2Y[t_2,t_1]F_1^{-1}E_1X[t_1,t_0]x(t_0) \tag{2.8}$$

Обозначим

$$H[²] = (H_1[²], H_2[²], H_3[²])\,,\ u(²) = (u_1(²), u_1(²), u_1(²))^T \tag{2.9}$$

где

$$H_1[²] = Z[T,t_2]F_2^{-1}E_2Y[t_2,t_1]F_1^{-1}E_1\bar{H}_1[t_1,²]\,,\ H_2[²] = -Z[T,t_2]F_2^{-1}E_2\bar{H}_2[t_2,²]\,,\ H_3[²] = \bar{H}_3[T,²]$$

Учитывая обозначения (2.9), соотношение (2.7) запишем в виде

$$\int_{t_0}^{T} H[\tau]u(\tau)d\tau = \text{¦} \qquad (2.10)$$

Из формулы (2.10) следует, что система (1.1)-(1.3) вполне управляема тогда и только тогда, когда для любого вектора ¦ (2.8) можно найти управление $u(\tau) = (u_1(\tau), u_1(\tau), u_1(\tau))^T$, удовлетворяющее условию (2.10).

Следуя [2,3] , имеет место следующее утверждение.

Для того, чтобы система (1.1)-(1.3) была вполне управляемой на отрезке времени $[t_0, T]$, необходимо и достаточно, чтобы вектор-столбцы матрицы

$H[\tau] = (Z[T,t_2]F_2^{-1}E_2Y[t_2,t_1]F_1^{-1}E_1\bar{H}_1[t_1,\tau], -Z[T,t_2]F_2^{-1}E_2\bar{H}_2[t_2,\tau], \bar{H}_3[T,\tau])$

были линейно независимыми на этом отрезке.

Функцию $u(\tau)$, $\tau \in [t_0, T]$, удовлетворяющую (2.10), ищем в виде

$$u(\tau) = H^T[\tau]C + v(\tau) \qquad (2.11)$$

где $C -$ постоянный вектор, подлежащий определению, $v(\tau) -$ некоторая вектор функция такая, что

$$\int_{t_0}^{T} H[\tau]v(\tau)d\tau = 0 \qquad (2.12)$$

Подставляя (2.11) в (2.10), получим

$$Q(t_0, t_1, t_2, T)C = \text{¦} \qquad (2.13)$$

где

$$Q(t_0, t_1, t_2, T) = \int_{t_0}^{T} H[\tau]H^T[\tau]dt \qquad (2.14)$$

Уравнение (2.13) является системой алгебраических уравнений относительно неизвестных C_i, $i = 1,\ldots, n_1 + n_2 + n_3$. (2.13) имеет решение, если $\det Q \neq 0$, либо ранг матрицы Q совпадает с рангом расширенной матрицы $\{Q, \text{¦}\}$.

Пусть $\det Q \neq 0$, тогда решение уравнения (2.13) будет

$$C = Q^{-1}\text{¦} \qquad (2.15)$$

Подставляя (2.15) в (2.11), имеем

$$u(\tau) = H^T[\tau]Q^{-1}\text{¦} + v(\tau) \qquad (2.16)$$

$$\begin{pmatrix} u_1(\tau) \\ u_2(\tau) \\ u_3(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z[T,t_2]F_2^{-1}E_2Y[t_2,t_1]F_1^{-1}E_1\bar{H}_1[t_1,\tau] \\ -Z[T,t_2]F_2^{-1}E_2\bar{H}_2[t_2,\tau] \\ \bar{H}_3[T,\tau] \end{pmatrix} Q^{-1}\text{¦} + v(\tau) \qquad (2.17)$$

Подставляя (2.6) и (2.4) в (2.17) при $v(\tau) = 0$ будем иметь

$$u_1(\tau) = Z[T,t_2]F_2^{-1}E_2Y[t_2,t_1]F_1^{-1}E_1X[t_1,\tau]B_1(\tau)Q^{-1}\text{¦};\ t_0 \le \tau \le t_1 \qquad (2.18)$$

$$u_2(\tau) = -Z[T,t_2]F_2^{-1}E_2Y[t_2,\tau]B_2(\tau)Q^{-1}\text{¦};\ t_1 \le \tau \le t_2 \qquad (2.19)$$

$$u_3(\tau) = Z[T,\tau]B_3(\tau)Q^{-1}\text{¦};\ t_2 \le \tau \le T \qquad (2.20)$$

3. Пример. Для иллюстрации полученных результатов рассмотрим модель управляемого объекта, описанной в [4], динамика которого поэтапно меняется:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = b^{(1)}u_1 \end{cases} \qquad t \in [t_0, t_1] \qquad (3.1)$$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = a_2^{(2)}y_2 + b^{(2)}u_2 \end{cases} \qquad t \in [t_1, t_2] \qquad (3.2)$$

$$\begin{cases} \dot z_1 = z_2 \\ \dot z_2 = a_1^{(3)} z_1 + a_2^{(3)} z_2 + b^{(3)} u_3 \end{cases} \qquad t \in [t_2, T] \tag{3.3}$$

где $a_2^{(2)}, a_1^{(3)}, a_2^{(3)}, b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)}$ – параметры объекта.

Системы (3.1)-(3.3) можно представить в следующем виде:

$$\dot x = A_1 x + B_1 u_1 ,\ t \in [t_0, t_1] \tag{3.4}$$

$$\dot y = A_2 y + B_2 u_2 ,\ t \in [t_1, t_2] \tag{3.5}$$

$$\dot z = A_3 z + B_3 u_3 ,\ \ t \in [t_2, T] \tag{3.6}$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a_2^{(2)} \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_1^{(3)} & a_2^{(3)} \end{pmatrix},\ B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ b^{(1)} \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ b^{(2)} \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ b^{(3)} \end{pmatrix}$$

Пусть заданы начальное и конечное фазовые состояния:

$$x(t_0) = \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ z(T) = \begin{pmatrix} z_1(T) \\ z_2(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

а в условиях (1.6) и (1.7) матрицы E_k и F_k ($k = 1, 2$) имеют следующий вид:

$$E_1 = E_2 = F_1 = F_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Нормированные фундаментальные матрицы решения однородных частей системы (3.1)–(3.3) соответственно имеют следующий вид:

$$X[t, t_0] = \begin{pmatrix} 1 & t - t_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ Y[t, t_1] = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{a_2^{(2)}} (e^{a_2^{(2)}(t - t_1)} - 1) \\ 0 & e^{a_2^{(2)}(t - t_1)} \end{pmatrix},$$

$$Z[t, t_2] = \begin{pmatrix} -\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 (t - t_2)} + \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 (t - t_2)} & \dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 (t - t_2)} - \dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 (t - t_2)} \\ -\dfrac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 (t - t_2)} + \dfrac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 (t - t_2)} & \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 (t - t_2)} + \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 (t - t_2)} \end{pmatrix}$$

Чтобы избежать громоздких математических выражений, предположим, что $b^{(1)} = b^{(2)} = b^{(3)} = 1$, $a_2^{(2)} = 1$, $a_1^{(3)} = -2$, $a_2^{(3)} = 3$, из этого получим $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$.

$$H_1[t_1, t] = \begin{pmatrix} t_1 - t \\ 1 \end{pmatrix},\ H_2[t_2, t] = \begin{pmatrix} e^{t_2 - t} - 1 \\ e^{t_2 - t} \end{pmatrix},\ H_3[T, t] = \begin{pmatrix} e^{2(t_3 - t)} - e^{t_3 - t} \\ 2e^{2(t_3 - t)} + e^{t_3 - t} \end{pmatrix}$$

Учитывая (2.6), обозначим:

$$\bar H_1[t_1, t] = \begin{pmatrix} h_{11}(t_1, t) \\ h_{12}(t_1, t) \end{pmatrix},\ \bar H_2[t_2, t] = \begin{pmatrix} h_{21}(t_2, t) \\ h_{22}(t_2, t) \end{pmatrix},\ \bar H_3[T, t] = \begin{pmatrix} h_{31}(t_3, t) \\ h_{32}(t_3, t) \end{pmatrix}$$

Согласно (2.9) получим

$$H[\tau] = \begin{pmatrix} e(-(e-2)h_{11}(t_1, \tau) + 2(e-1)h_{12}(t_1, \tau)) & e((e-2)h_{21}(t_2, \tau) - (e-1)h_{22}(t_2, \tau)) & h_{31}(t_3, \tau) \\ e(-2(e-1)h_{11}(t_1, \tau) + (5e-2)h_{12}(t_1, \tau)) & e(2(e-1)h_{21}(t_2, \tau) - (2e+1)h_{22}(t_2, \tau)) & h_{32}(t_3, \tau) \end{pmatrix}$$

Подставляя $H[\tau]$ и $H^T[\tau]$ в (2.14), вычисляя соответствующие интегралы при $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $T = 3$, и учитывая значение числа e, получаем

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0.83 & -0.24 \\ -0.24 & 0.07 \end{pmatrix}$$

Предполагается, что

$$\sim \, = \begin{pmatrix} \sim_1 \\ \sim_2 \end{pmatrix}, \qquad = \begin{pmatrix} {}_1 \\ {}_2 \end{pmatrix}$$

Согласно (2.8) будем иметь

$$¦ = \begin{pmatrix} -1.44 - 1.95\sim_1 + 9.34\sim_2 + 1.95 \ {}_1 - 4.67 \ {}_2 \\ -9.82 - 9.341\sim_1 + 31.5\sim_2 + 9.34 \ {}_1 - 17.49 \ {}_2 \end{pmatrix}$$

Таким образом, согласно (2.18)-(2.20), будем иметь явные выражения управляющих воздействий

$$\begin{aligned} u_1(²) = 0.89 - 1.02² + (0.42 - 0.59²)\sim_1 + (0.56 + 0.16²)\sim_2 + \\ +(-0.42 + 0.59²) \ {}_1 + (0.06 - 0.43²) \ {}_2 \end{aligned}, \quad 0 \le ² \le 1$$

$$\begin{aligned} u_2(²) = 1.03 - 2.42e^{-²} + (0.59 - 1.15e^{-²})\sim_1 + (-0.16 - 1.53e^{-²})\sim_2 + \\ +(-0.59 + 1.15e^{-²}) \ {}_1 + (0.43 - 0.16e^{-²}) \ {}_2 \end{aligned}, \quad 1 \le ² \le 2$$

$$\begin{aligned} u_3(²) = 195.05 - 31.57e^{²} + (104.36 - 17.33e^{²})\sim_1 + (28.82 - 1.15e^{²})\sim_2 - \\ -(104.36 + 17.33e^{²}) \ {}_1 + (55.37 - 10.53e^{²}) \ {}_2 \end{aligned}, \quad 2 \le ² \le 3$$

Учитывая формулы (2.1)-(2.3), можно получить соответствующие движения для систем (3.1)-(3.3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Барсегян В.Р. Конструктивный подход к исследованию задач управления линейными составными системами.// Проблемы управления. 2012. № 4. С.11-17.
2. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476с.
3. Зубов В.И. Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975. 496с.
4. Матвейкин В.Г., Муромцев Д.Ю. Теоретические основы энергосберегающего управления динамическими режимами установок производственно-технического назначения. М.: 2007. 128с.

<u>Сведения об авторе:</u>

Барсегян Тигран Ваняевич – аспирант кафедры механики, Ереванский государственный университет, (374 98) 27 41 42
E-mail: t.barseghyan@mail.ru

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ В СИСТЕМЕ ВСТРЕЧНО СКОЛЬЗЯЩИХ СЛОЯ И ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Белубекян М.В., Давтян А.А., Мгерян Д.Э.

Предполагается, что на поверхностях, ограничивающих слой, имеют место условия скользящего контакта. Слой и полупространство движутся относительно друг друга с постоянной скоростью V. Получено дисперсионное уравнение, определяющее фазовую скорость поверхностной волны. Установлено условие существования поверхностной волны в частном случае одинаковых материалов слоя и полупространства. Исследованы коротковолновые и длинноволновые приближения, для которых определены фазовые скорости в зависимости от упругих свойства материалов слоя и полупространства.

1. В прямоугольной декартовой системе координат (x, y, z) упругое полупространство занимает область $-\infty < x < \infty, 0 < y < \infty, -\infty < z < \infty$, упругий слой-область $-\infty < x < \infty, 0 \le y < \infty, -\infty < z < \infty$. Слой и полупространство двигаются относительно друг друга параллельно плоскости раздела $y = 0$ с постоянной скоростью V. Рассматривается задача плоской деформации. Величины, относящиеся к слою, отмечаются индексом (1), а величины, относящиеся к полупространству – индексом (2).

Уравнения движения слоя и полупространства имеют вид [1]:

$$c_{t1}^2 \Delta u_1 + \left(c_{l1}^2 - c_{t1}^2\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial t} + V^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2},$$

$$c_{t1}^2 \Delta v_1 + \left(c_{l1}^2 - c_{t1}^2\right)\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial t} + V^2\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}. \tag{1.1}$$

$$c_{t2}^2 \Delta u_2 + \left(c_{l2}^2 - c_{t2}^2\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 u2}{\partial t^2},$$

$$c_{t2}^2 \Delta v_2 + \left(c_{l2}^2 - c_{t2}^2\right)\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2}, \tag{1.2}$$

где приняты обозначения

$$c_{t1}^2 = \frac{«_i}{°_i}, c_{l1}^2 = \frac{ª_i + 2«_i}{°_i} \quad i = 1, 2. \tag{1.3}$$

Здесь $u_{i,} v_i$ – компоненты вектора упругих перемещений в плоскости (x, y), $ª_i, «_i$ – коэффициенты Ламе, $°_i$ – плотности материалов слоя и полупространства соответственно.

Предполагается, что на плоскостях ограничивающих слой, осуществляются условия скользящего контакта. На внешней границе слоя [2]

$$¬_1 = 0, ±_{21}^{(1)} = 0 \text{ при } y = -h, \tag{1.4}$$

а на стыке слоя и полупространства

$$¬_1 = ¬_2,\ ±_{21}^{(1)} = 0,\ ±_{21}^{(2)} = 0,\ ±_{22}^{(1)} = ±_{22}^{(2)} \quad \text{при } y = 0. \tag{1.5}$$

Требуется найти решения систем уравнений (1.1) и (1.2), удовлетворяющих граничным условиям (1.4), (1.5) и условиям затухания

$$\lim_{y\to\infty} u_2 = 0, \lim_{y\to\infty} v_2 = 0. \tag{1.6}$$

Для решения представленной задачи удобно использовать преобразование Ламе [1,2]

$$u_i = \frac{\partial ¨_i}{\partial x} + \frac{\partial ·_i}{\partial y},\quad v_i = \frac{\partial ¨_i}{\partial y} - \frac{\partial ·_i}{\partial x}. \tag{1.7}$$

С помощью (1.7) системы уравнений (1.1), (1.2) преобразуются к виду

$$c_{l1}^2\Delta\varphi_1=\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2}+2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x\partial t}+V^2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2},$$

$$c_{t1}^2\Delta\psi_1=\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}+2\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x\partial t}+V^2\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}. \qquad (1.8)$$

$$c_{l2}^2\Delta\varphi_2=\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2},\ \ c_{t2}^2\Delta\psi_2=\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2}. \qquad (1.9)$$

Граничные условия(1.4), (1.5) заменяются следующими условиями:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}=0,\ \psi_1=0 \text{ при } y=-h, \qquad (1.10)$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y}-\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x}=\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y}-\dfrac{\partial\psi_2}{\partial x}\\ 2\dfrac{\partial^2\psi_i}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2\psi_i}{\partial y^2}-\dfrac{\partial^2\psi_i}{\partial x^2}=0\\ (\lambda_1+2\mu_1)\dfrac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2}+\lambda_1\dfrac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}-2\mu_1\dfrac{\partial^2\psi_1}{\partial x\partial y}=(\lambda_2+2\mu_2)\dfrac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2}+\lambda_2\dfrac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2}-2\mu_2\dfrac{\partial^2\psi_2}{\partial x\partial y}\end{cases} \text{ при } y=0 \qquad (1.11)$$

Условия затухания вместо (1.6) будут:

$$\lim_{y\to\infty}\varphi_2=0,\ \lim_{y\to\infty}\psi_2=0. \qquad (1.12)$$

2. Искомые функции задачи представляются в виде гармонических функций для волн, распространяющихся вдоль координатной линии x. Решение системы уравнений (1.9), удовлетворяющее условиям затухания(1.12), получается в виде

$$\varphi_2=A_2e^{-\gamma_2ky}\exp i(\omega t-kx),$$

$$\psi_2=C_2e^{-S_2ky}\exp i(\omega t-kx). \qquad (2.1)$$

В (2.1) A_2, C_2 – произвольные постоянные

$$\gamma_2=\sqrt{1-\theta_2\xi^2},\ S_2=\sqrt{1-\xi^2},\ \ \xi=\frac{\omega}{kc_{t2}},\ \ \theta_2=\frac{c_{t2}^2}{c_{l2}^2}. \qquad (2.2)$$

Отсюда также следует, что безразмерная характеристика искомой фазовой скорости поверхностной волны ξ должна удовлетворять условию

$$|\xi|<1. \qquad (2.3)$$

Для системы уравнений (1.8) решение, удовлетворяющее условиям(1.4), будет иметь вид

$$\varphi_1=A_1\,\mathrm{ch}\left[\gamma_1k(h+y)\right]\exp i(\omega t-kx),$$

$$\psi_1=C_1\,\mathrm{sh}\left[S_1k(h+y)\right]\exp i(\omega t-kx). \qquad (2.4)$$

где

$$\gamma_1=\sqrt{1-\theta\theta_1(\xi-x)^2},\ S_1=\sqrt{1-\theta(\xi-x)^2},\ \ x=\frac{V}{c_{t2}},\ \ \theta_1=\frac{c_{t1}^2}{c_{l1}^2},\ \ \theta=\frac{c_{t2}^2}{c_{t1}^2}. \qquad (2.5)$$

Подстановка (2.4) во второе граничное условие из системы четырёх условий (1.11) и (2.1) в третье граничное условие из (1.11) даёт

$$C_1=\frac{2i\nu_1}{2-\theta(\eta-x)^2}\frac{\operatorname{sh}\nu_1 kh}{\operatorname{sh}S_1 kh}A_1,\quad C_2=-\frac{2i\nu_2}{2-\eta^2}A_2. \tag{2.6}$$

Удовлетворение первому и четвёртому из граничных условий (1.11) приводит к уравнениям

$$\nu_1 A_1\operatorname{sh}\nu_1 kh+iC_1\operatorname{sh}S_1 kh=-\nu_2 A_2+iC_2, \tag{2.7}$$

$$\left[2-\theta(\eta-x)^2\right]A_1\operatorname{ch}\nu_1 kh+2iS_1C_1\operatorname{ch}S_1 kh=\chi\left[\left(2-\eta^2\right)A_2-2iS_2C_2\right],$$

где принято новое обозначение

$$\chi=\frac{\mu_2}{\mu_1}. \tag{2.8}$$

С помощью (2.6) задача приводится к решению системы двух однородных алгебраических решений относительно произвольных постоянных A_1, A_2

$$\frac{\nu_1\theta(\eta-x)^2}{2-\theta(\eta-x)^2}A_1\operatorname{sh}\nu_1 kh+\frac{\nu_2\eta^2}{2-\eta^2}A_2=0,$$

$$\frac{\left[2-\theta(\eta-x)^2\right]^2\operatorname{ch}\nu_1 kh-4S_1\nu_1\operatorname{sh}\nu_1 kh\operatorname{cth}S_1 kh}{2-\theta(\eta-x)^2}A_1+\chi\frac{\left(2-\eta^2\right)^2-4\nu_2 S_2}{2-\eta^2}A_2=0. \tag{2.9}$$

Равенство нулю детерминанта системы (2.9) приводит к следующему уравнению, определяющему безразмерный параметр η, характеризующий фазовую скорость поверхностной волны

$$\chi\nu_1\theta(\eta-x)^2\left[\left(2-\eta^2\right)^2-4\nu_2S_2\right]\operatorname{sh}\nu_1 kh+\nu_2\eta^2\left\{\left[2-\theta(\eta-x)^2\right]^2\operatorname{ch}\nu_1 kh-4\nu_1S_1\operatorname{sh}\nu_1 kh\operatorname{cth}S_1 kh\right\}=0 \tag{2.10}$$

В предельном случае $kh\to\infty$, т.е. для двух встречно движущихся полупространств из (2.10) получается уравнение

$$\chi\nu_1\theta(\eta-x)^2\left[\left(2-\eta^2\right)^2-4\nu_2S_2\right]+\nu_2\eta^2\left\{\left[2-\theta(\eta-x)^2\right]^2-4\nu_1S_1\right\}=0. \tag{2.11}$$

которое исследовано в статьях [3,4]. Вопрос существования поверхностных волн в системе слой-полупространство при отсутствии скольжения $(V=0)$ рассмотрен в статье [5].

Уравнение (2.10) имеет корень $\eta=x$. Нетрудно проверить, что этому корню соответствует тривиальное решение $u_i\equiv 0, v_i\equiv 0$. Действительно, согласно (2.9) при $\eta=x$ следует $A_2=0$, а из (2.6) следует $C_2=0, C_1=iA_1$. Затем из (2.1) следует $\varphi_2=0, \psi_2=0$ и согласно (1.7) при $i=2$ получается $u_2\equiv 0,\ v_2\equiv 0$. Согласно (2.5) $v_1=s_1=1$, откуда из (2.4) получается

$$\varphi_1=A_1\operatorname{ch}k(h+y)\exp i(\omega t-kx),$$

$$\psi_1=C_1\operatorname{sh}k(h+y)\exp i(\omega t-kx). \tag{2.12}$$

Подстановка (2.12) в (1.7) даёт $\varphi_1\equiv 0,\ \psi_1\equiv 0$.

Уравнение (2.10) имеет также корень $\eta=0$. Аналогичным образом можно показать, что и этому корню соответствует тривиальное решение.

3. В частном случае, когда материалы слоя и полупространства одинаковы

$$\mu_1=\mu_2=\mu,\quad \lambda_1=\lambda_2=\lambda,\quad \rho_1=\rho_2=\rho, \tag{3.1}$$

в уравнении (2.10) следует принять $\chi=1,\ \theta=1$, а в выражениях для ν_i, s_i

$$\text{¯}_1 = \text{¯}_2 = \frac{\text{«}}{\left(\text{ª} + 2\text{«}\right)} = \text{¯}_*. \qquad (3.2)$$

Если в приведённом примере рассматривать длинноволновое приближение

$$k^2h^2 \ll 1, \qquad (3.3)$$

то уравнение (2.10) приведётся к виду

$$P_2\left\{\left[2-\left(\text{¦}-x\right)^2\right]^2 - 4P_1^2\right\} = 0, \qquad (3.4)$$

где

$$P_1 = \sqrt{1-\text{¯}_*\left(\text{¦}-x\right)^2}, \; P_2 = \sqrt{1-\text{¯}_*\text{¦}}. \qquad (3.5)$$

Из равенства $P_2 = 0$ получается корень $\text{¦} = \text{¯}_*^{-1}$, который не удовлетворяет условию затухания (2.3). Равенство нулю второго сомножителя из (3.4) приводит к уравнению

$$\left(\text{¦}-x\right)^2\left[\left(\text{¦}-x\right)^2 - 4\left(1-\text{¯}_*\right)\right] = 0. \qquad (3.6)$$

Так как $\text{¦} = x$ является тривиальным корнем, то решение уравнения (3.6) при $x > 0$ и ограничении (2.3) имеет вид

$$\text{¦} = x - 2\sqrt{1-\text{¯}_*} \qquad (3.7)$$

если имеет место условия

$$2\sqrt{1-\text{¯}_*} - 1 < x < 2\sqrt{1-\text{¯}_*} + 1. \qquad (3.8)$$

В частности, если $\text{¯}_* = 0$, то поверхностная волна существует при $1 < x < 3$ (скорость движения слоя больше скорости сдвиговой объёмной волны). Если же $\text{¯}_* = 0.5$, то поверхностная волна существует при $x > \sqrt{2} - 1 \approx 0.41$.

Из (3.7) и (3.9) следует, что поверхностная волна может распространяться в противоположенном направлении по сравнению с направлением движения слоя.

Необходимо отметить, что в случае отсутствия движения $\left(x = 0\right)$ для тонкого слоя (или в длинноволновом приближении) поверхностная волна не существует.

4. Если допустить, что материал слоя не обладает жёсткостью на сдвиг $\text{¦}_1 = 0$, то вместо уравнения (2.10) для определения безразмерного параметра фазовой скорости ¦ получается следующее уравнение:

$$\text{«}_2\left[\left(2-\text{¦}^2\right)^2 - 4\text{ך}_2S_2\right] + \text{ª}_1\text{ך}_2\text{¯}_*\left(\text{¦}-x\right)^2\text{¦}^2 \operatorname{cth}\text{~}kh = 0, \qquad (4.1)$$

где

$$\text{¯}_* = \frac{c_{t2}^2}{c_{l1}^2}, \; \text{~} = \sqrt{1-\text{¯}_*\left(\text{¦}-x\right)^2}. \qquad (4.2)$$

Уравнение (4.1) имеет решение $\text{¦} = x$, если x есть решение известного уравнения Релея

$$\left(2-x^2\right)^2 - 4\sqrt{1-\text{¯}_2x^2}\sqrt{1-x^2} = 0 \qquad (4.3)$$

при условии $x^2 < 1$. В частности, при $\text{¯}_2 = 1/3$ следует $\text{¦} = x = 2 - 2\sqrt{3} \approx 0{,}8453$.

В предельном случае $kh \to \infty$ уравнение (4.1) приводится к виду

$$L\left(\text{¦}\right) \equiv \left(2-\text{¦}^2\right)^2 - 4\nu_2S_2 - \text{°}_1\text{°}_2^{-1}\left(\text{¦}-x\right)^2\text{¦}^2 = 0. \qquad (4.4)$$

Исключая из уравнения (4.4) тривиальный корень $\text{¦} = 0$ [6], получим:

$$L(¦) \equiv ¦^2 - \frac{41-¯_2\sqrt{1-¦^2}}{\sqrt{1-¦^2}+\sqrt{1-¯_2¦^2}} - \frac{\circ_1}{\circ_2}(¦-x)^2 = 0. \qquad (4.5)$$

Уравнение (4.5) имеет следующие свойства:

$$L(-1) = 1 - \frac{\circ_1}{\circ_2}(1+x)^2 = 0, L(1) = 1 - \frac{\circ_1}{\circ_2}(1-x)^2 = 0, \qquad (4.6)$$

$$L_1(0) = -2(1-¯_2) - \circ_1\circ_2^{-1}x^2 < 0.$$

Из (4.6) следует, что для того, чтобы уравнение (4.4) имело корни в интервалах $-1 < ¦ < 0$ и $0 < ¦ < 1$, достаточно наличие условий

$$\circ_1(1+x)^2 < \circ_2 \text{ и } \circ_1(1-x)^2 < \circ_2. \qquad (4.7)$$

Так как в случае $x = 0 (v = 0)$ из (4.7) следует, что поверхностная волна существует, то движение слоя может привести к устранению поверхностной волны.

Нетрудно показать, что в длинноволновом приближении $(k^2h^2 \ll 1)$, согласно (4.1) поверхностная волна не существует.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Теория упругости М.: Мир, 1975. 872с.
2. Miklowitz J. The theory of elastic wave and waveguides-Amsterdam: North-Holland, 1978, 648p.
3. Заславский Ю.М. Дисперсия поверхностных волн, бегущих вдоль плоской границы встречно-скользящих полупространства и слоя. //Акуст. журн. 1994. Т.40. №6. С.950-952.
4. Белубекян М.В. Особенности распространения поверхностных волн вдоль границы встречно-скользящих полупространств // Акуст. журнал. 1999. Т.45. №3. С. 418-419.
5. Белубекян М.В., Давтян А.А. Упругие волны в системе слой-полупространство при условии скользящего контакта на плоскостях, ограничивающих слой. //В сб.: "Актуальные проблемы механики сплошной среды" (посв. Н.Х. Арутюняну). Ереван: Изд. ЕГУАС. 2012. Т.1. С.116-120.
6. Белубекян М.В. Поверхностные волны в упругих средах. //В сб.: "Проблемы механики деформированного твёрдого тела". Ереван: Ин-т механики НАН Армении. 1997. С.79-96.

Сведения об авторах:

Белубекян Мелс Вагаршакович – гл. научный сотрудник Института механики НАН Армении.
E-mail: mbelubekyan@yahoo.com

Давтян Артем Алексанович – магистрант Института механики НАН Армении, специалист конструкторского отделении “Мика-Прогресстех” ООО, (+37477)732734
E-mail: artyom.davtyan@yahoo.com

Мгерян Давид Энзелович – кандидат физ.-мат. наук, научный сотрудник Института механики НАН Армении, (+374)96946444
E-mail: davidmher@mail.ru

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЩЕЛЕВЫХ АКУСТОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВОЛН В ПЬЕЗОСТРУКТУРЕ, СОДЕРЖАЩЕЙ СЛОЙ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДУИРОВАННОГО МАТЕРИАЛА

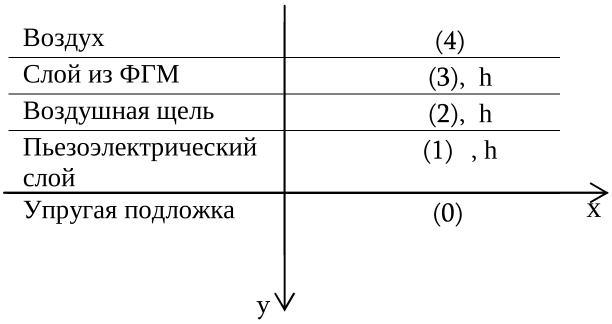
Берберян А.Х.

Исследовано распространение электроупругих щелевых волн в структуре, содержащей упругую подложку, пьезоэлектрический слой, слой из функционально-градуированного пьезоэлектрического материала (ФГПМ) с воздушной прослойкой между ними.Получено дисперсионное уравнение задачи, которое исследовано численно.

Для решения проблем термозащиты в аэрокосмических системах, начиная с 1980-ых годов, стали применяться материалы нового типа, называемые ФГМ (функционально-градуированный материал). С тех пор ФГМ стали применять и в других областях, а с усовершенствованием производства пьезоэлектрических аппаратов и устройств [1], ими стали пользоваться в микроэлектронике и механике, где они используются в различных акустоэлектрических устройствах.

В данной работе рассматривается распространение щелевой акустоэлектрической сдвиговой волны в системе, содержащей слой из ФГМ.

1. Постановка задачи. Пусть через слоистую систему распространяется SH-волна. Система состоит из упругой подложки, пьезоэлектрического слоя класса 6mm, воздушной щели и функционально-градуированного пьезоэлектрического (ФГМ) слоя класса 6mm с главной осью L_6. Пьезоэлектрическая структура в декартовой системе координат $Oxyz$ занимает область $-3h \le y < \infty$ (фиг.1). Главные оси симметрии кристаллов L_6 параллельны и направлены по оси Oz. Поверхность верхнего слоя свободна от напряжений и граничит с воздухом, толщины всех слоев и щели равны h.



Фиг.1

Рассматривается антиплоское деформируемое состояние структуры, т.е.

$$u_1^{(i)} = u_2^{(i)} = 0, \quad u = u_3^{(i)} = u_3^{(i)}\left(x, y, t\right) \quad \varphi = \varphi^{(i)} = \varphi^{(i)}\left(x, y, t\right). \tag{1.1}$$

Волна распространяется с цикличной частотой ω и фазовой скоростью $v = \omega / k$, где k – волновое число, $u_3^{(i)}$ – компонента вектора перемещений в направлении оси Oz, $\varphi^{(i)}$ – потенциалы электрического поля в соответствующих средах с индексами $i = 0,1,2,3,4$ в скобках (фиг. 1).

Для ФГМ среды имеем следующие функциональные зависимости [2]:

$$\begin{gathered}\sigma_{xz} = c_{44}(y)\frac{\partial u}{\partial x} + e_{15}(y)\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \ \sigma_{yz} = c_{44}(y)\frac{\partial u}{\partial y} + e_{15}(y)\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ D_y = e_{15}(y)\frac{\partial u}{\partial y} - \varepsilon_{11}(y)\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \ D_x = e_{15}(y)\frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon_{11}(y)\frac{\partial \varphi}{\partial x}.\end{gathered} \tag{1.2}$$

Если коэффициенты в (1.2) не зависят от y, то получаются соотношения для однородной пьезоэлектрической среды.

Допустим, что ФГМ меняется экспоненциально по оси Oy.

$$\rho(y) = \rho^{(3)}e^{\beta y},\ c_{44}(y) = c_{44}^{(3)}e^{\beta y},\ e_{15}(y) = e_{15}^{(3)}e^{\beta y},\ \varepsilon_{11}(y) = \varepsilon_{11}^{(3)}e^{\beta y} \tag{1.3}$$

2. Решение задачи. Для вышеуказанных сред решения могут быть представлены в виде следующих гармонических волн:

для упругой и пьезоэлектрических сред:

$$\begin{aligned} u &= A, B\ e^{-ikby}\cos(kx - \mu\, t), \\ \ddot{\ } &= A, B\ e^{-ikby}\cos(kx - \mu\, t) \end{aligned} \tag{2.1}$$

для электрического потенциала и электрической индукции в щели

$$\begin{aligned} \ddot{\ } &= \{C_1(\sinh(-ky) + C_2\cosh(-ky)\}\cos(kx - \mu\, t), \\ D &= k\pounds^{(2)}\{C_1(\cosh(-ky) + C_2\sinh(-ky)\}\cos(kx - \mu\, t) \end{aligned} \tag{2.2}$$

где $\pounds^{(2)}$ – электрическая проницаемость воздуха.

После преобразования

$$\Psi = \varphi - u\, e_{15} / \varepsilon_{11} \tag{2.3}$$

будем иметь следующие уравнения, описывающие состояние среды:

1) в области $y > 0$ (в упругой среде, в подложке):

$$\begin{aligned} & c_{44}^{(0)}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \rho^{(0)}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ & \frac{\partial^2 \ddot{\ }}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{\ }}{\partial y^2} = 0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

2) в области $-h < y < 0$ (в пьезоэлектрической среде):

$$\Delta u = \frac{1}{S_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \Delta\Psi = 0, \tag{2.5}$$

3) в области $-2h < y < -h$ (в воздушной щели):

$$\Delta \ddot{\ } = 0 \tag{2.6}$$

4) в области $-3h < y < -2h$ (в слое из ФГМ):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\circ^{(3)}}(C_{44}^{(3)} + (e_{15}^{(3)})^2 / \pounds_{11}^{(3)})\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \Delta u\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ & \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \Delta u = 0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

5) в вакууме в виде уравнения Лапласа (2.6).

Упругие смещения и электрический потенциал должны удовлетворять условиям затухания:

$$\begin{aligned} & \ddot{\ } \to 0 \ \text{ при } \ y \to -\infty \\ & u \to 0,\ \ddot{\ } \to 0 \ \text{ при } \ y \to +\infty \end{aligned} \tag{2.8}$$

Требуется найти решения уравнений (2.4) – (2.7), удовлетворяющие следующим граничным условиям (2.9)-(2.12) и условиям затухания (2.8):

$$\ddot{\ }^{(0)} = \ddot{\ }^{(1)},\ D_y^{(0)} = D_y^{(1)},\ \pm_{yz}^{(0)} = \pm_{yz}^{(1)},\ u_3^{(0)} = u_3^{(1)} \quad \text{при} \quad y = 0 \tag{2.9}$$

$$\ddot{\ }^{(1)} = \ddot{\ }^{(2)},\ D_y^{(1)} = D_y^{(2)},\ \pm_{yz}^{(1)} = 0 \quad \text{при} \quad y = -h \tag{2.10}$$

$$\text{¨}^{(2)} = \text{¨}^{(3)},\ D_y^{(2)} = D_y^{(3)},\ \pm_{yz}^{(3)} = 0 \quad \text{при} \quad y=-2h \tag{2.11}$$

$$\pm_{yz}^{(3)} = 0,\ \text{¨}^{(3)} = \text{¨}^{(4)}, D_y^{(3)} = D_y^{(4)} \quad \text{при} \quad y=-3h \tag{2.12}$$

Выше приняты следующие обозначения:

$$S_i = \sqrt{c_{44}^{(i)}(1+\text{¡}_i^2)/\circ^{(i)}},\quad \text{¡}_i^2 = (e_{15}^i)^2/\pounds_{11}^{(i)}\cdot c_{44}^{(i)},\quad \Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 \tag{2.13}$$

S_i – скорость сдвиговых объёмных волн в пьезоэлектрической среде, χ_i – коэффициент электромеханической связи, $c_{44}^{(i)}$ – упругая постоянная, $e_{15}^{(i)}$ – пьезомодуль, $\varepsilon_{11}^{(i)}$ – диэлектрическая проницаемость, $\circ^{(i)}$ – массовая плотность.

Подставляя выражения (2.1)–(2.2) в диференциальные уравнения (2.4)-(2.7) и удовлетворяя условиям затухания (2.8) и граничным условиям (2.9)-(2.12), мы можем найти неизвестные константы и характеристическое уравнение задачи. Из характеристического уравнения находим фазовую скорость щелевой волны в зависимости от частоты, волнового числа, физико-механических и геометрических параметров рассматриваемой слоистой структуры при электрически открытом граничном условии.

В результате численного анализа характеристического уравнения щелевой волны установлено, что скорость волны увеличивается при увеличении степени функциональной зависимости неоднородности ФГМ. Мы также показали, что сдвиговые напряжения уменьшаются при увеличении параметра .

Фазовая скорость может быть также численно исследована при различных толщинах слоёв и волновых чисел.

3. Заключение. Аналитически исследовано распространение щелевой волны между слоями пьезоэлектрической структуры и ФГПМ в случае электрически открытого граничного условия. Эффект воздействия ФГМ на фазовую скорость исследовано численно, в результате мы видим, что скорость щелевой волны увеличивается при увеличении степени функциональной зависимости ФГМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. T.Kavai, S.Muyazaki, M.Araragi. A new method for forming piezoelectric FGM using a dual dispenser system. Yamanouchi et al. (Ed.), Prosidings of the First Internation Simposium on Functional Gradient Materials, Sendai, Japan, 1990, pp.191-196.
2. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н. Электромагнитоупругие волны. Ереван: Изд. ЕГУ, 2006. 492 с.
3. Берберян А.Х. Волна Лява в пьезосистеме, содержащей ФГМ. //Труды VII международной конференции, Горис-Степанакерт: 2011. С.101-103.

Сведения об авторе:

Берберян Армен Хачатурович – научный сотрудник Института механики НАН РА
Адрес: Армения, Ереван, ул. Ширака, дом 7/, кв.10; **тел:** 46-20-96, (094) 19-19-86
E-mail: arm.berberyan@gmail.com , slavia555@yahoo.com

ПОЛУАНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ДЛЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА В ЗАДАЧЕ ОБТЕКАНИЯ ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНКИ ОДНОРОДНЫМ ПОТОКОМ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Бердник Я.А.

Решению данной задачи в рамках теории пограничного слоя посвящены многочисленные работы (например, [1],[2]). Новизна нашего решения этой задачи заключается в том, что в качестве исходных уравнений нами берутся точные уравнения Навье-Стокса. Также нов и подход к исследованию данной задачи. Для решения применяется итерационный метод по возмущениям на фоне основного потока. Возмущения на каждом последующем шаге предполагаются малыми по сравнению с предыдущими приближениями, и по этим возмущениям производится линеаризация. На каждом шаге решается интегральное уравнение относительно функции вязкого трения на пластине. Полученное решение на каждом шаге сравнивается с классическим решением Блазиуса ([3]).

1. Постановка задачи и основные гипотезы

Рассмотрим обтекание бесконечно тонкой плоской пластины длины l безграничным однородным потоком вязкой несжимаемой жидкости. Скорость набегающего на пластину потока постоянна и равна некоторому известному значению U_0. В поставленной задаче требуется определить полную силу трения, действующую на пластину, и найти распределение скоростей потока, обтекающего пластину.

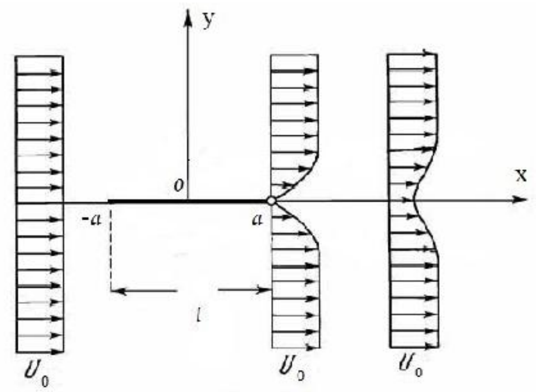


Рис. 1.1

Расположим начало координат в $l/2$, ось Oy направим по нормали к поверхности пластины, ось Ox направим вдоль пластины (рис.1.1). Рассматриваем верхнюю полуплоскость. Течение жидкости считаем стационарным и описываем уравнением неразрывности и двумя уравнениями Навье-Стокса:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \upsilon_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \upsilon_y}{\partial y} = 0, \\ \upsilon_x \dfrac{\partial \upsilon_x}{\partial x} + \upsilon_y \dfrac{\partial \upsilon_x}{\partial y} - \nu \Delta \upsilon_x + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \upsilon_x \dfrac{\partial \upsilon_y}{\partial x} + \upsilon_y \dfrac{\partial \upsilon_y}{\partial y} - \nu \Delta \upsilon_y + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

где ρ – плотность, р – гидродинамическое давление, ν – коэффициент кинематической вязкости.

Граничные условия задачи имеют следующий вид:

1) прилипания жидкости на поверхности пластины (при $y = 0, |x| \le a$): $\upsilon_x = \upsilon_y = 0$;

2) вне пластины, эквивалентные условиям симметрии (при $y = 0, |x| \ge a$): $\upsilon_y = 0, \dfrac{\partial \upsilon_x}{\partial y} = 0$.

2. Построение алгоритма решения задачи и основные математические соотношения

Задача решается методом последовательных приближений. Представим продольную и поперечную компоненты скорости в виде суммы скорости некоторого основного потока и скорости малых на его фоне искомых возмущений со штрихами, т.е.:

$$\begin{cases} ³_x(x, y) = U(x, y) + ³'_x(x, y) \\ ³_y(x, y) = V(x, y) + ³'_y(x, y) \end{cases} \tag{2.1}$$

Введём функцию тока $\cdot = \cdot(x, y)$ соотношениями $³_x = \frac{\partial \cdot}{\partial y}, ³_y = -\frac{\partial \cdot}{\partial x}$ и представим выражение для функции тока аналогично представлению скоростей: $\cdot(x, y) = \Psi(x, y) + \cdot'(x, y)$. Выразим функции скоростей основного потока $U(x, y), V(x, y)$ следующим образом: $U = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, V = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$. Исключая давление из системы (1.1), учитывая приведённые выше представления и линеаризуя получившееся уравнение по малым возмущениям $\cdot'(x, y)$, получаем линейное дифференциальное уравнение в частных производных, вид которого одинаков для всех итераций:

$$-U\Delta V + U\frac{\partial \Delta \cdot'}{\partial x} - \Delta V\frac{\partial \cdot'}{\partial y} + V\Delta U + V\frac{\partial \Delta \cdot'}{\partial y} - \Delta U\frac{\partial \cdot'}{\partial x} - ¬\Delta^2\Psi - ¬\Delta^2 \cdot' = 0 \tag{2.2}$$

Реализуем первое приближение к решению задачи. На нулевом шаге полагаем, что $U(x, y) = U_0 = \text{const}$, $V(x, y) = 0$. Тогда в первом приближении рассматриваются возмущения скоростей (с одним штрихом) на фоне постоянной скорости U_0, т.е.:

$$\begin{cases} ³_x(x, y) = U_0 + ³'_x(x, y) \\ ³_y(x, y) = ³'_y(x, y) \end{cases} \tag{2.3}$$

Перепишем дифференциальное уравнение (2.2) с учётом выражений скоростей (2.3) и применим к получившемуся уравнению преобразование Фурье по переменной x. Получаем обыкновенное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, решаемое аналитически:

$$¬\frac{d^4 \tilde{\cdot}'(\sim, y)}{dy^4} - \left(U_0 i\sim + 2¬\sim^2\right)\frac{d^2 \tilde{\cdot}'(\sim, y)}{dy^2} + \left(¬\sim^4 + U_0 i\sim^3\right)\tilde{\cdot}'(\sim, y) = 0, \tag{2.4}$$

где $\tilde{\cdot}'(\sim, y)$ – трансформанта Фурье функции $\cdot'(x, y)$, $\sim$ – параметр преобразования Фурье.

С помощью поставленных граничных условий и введения функции вязкого трения на пластине $²(x) = «\frac{\partial ³_x}{\partial y}\Big|_{y=0}$ получаем граничное интегральное уравнение относительно функции $²(¶)$ вида:

$$\frac{¬}{2®i«U_0}\int_{-a}^{a} ²(¶)d¶\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\sim| - \sqrt{\sim^2 + \frac{i\sim U_0}{¬}}}{\sim}\cdot e^{i\sim(¶ - x)}d\sim = -U_0, |x| \le a \tag{2.5}$$

Также определяются в явном виде компоненты продольной и поперечной скоростей:

$$³_x(x, y) = U_0 - \frac{1}{2®i°U_0}\int_{-a}^{a} ²(¶)d¶\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\sqrt{\sim^2 + \frac{i\sim U_0}{¬}}e^{-\sqrt{\sim^2 + \frac{i\sim U_0}{¬}}y} - |\sim|e^{-|\sim|y}\right)e^{i\sim(¶ - x)}\frac{d\sim}{\sim} \tag{2.6}$$

$$³_y(x, y) = -\frac{1}{2®i°U_0}\int_{-a}^{a} ²(¶)d¶\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{-|\sim|y} - e^{-\sqrt{\sim^2 + \frac{i\sim U_0}{¬}}y}\right)e^{i\sim(¶ - x)}\frac{d\sim}{\sim} \tag{2.7}$$

Рис. 2.1 «Зависимость силы трения от x»

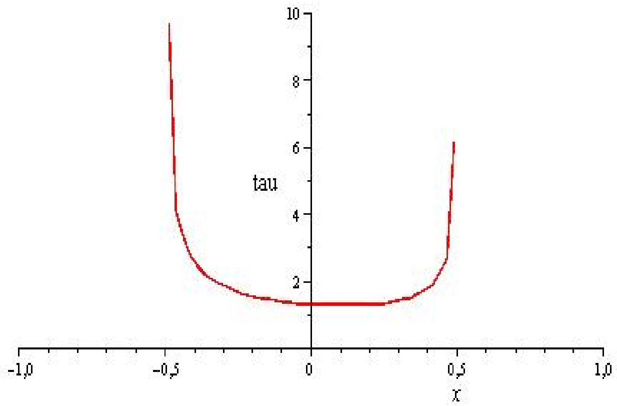
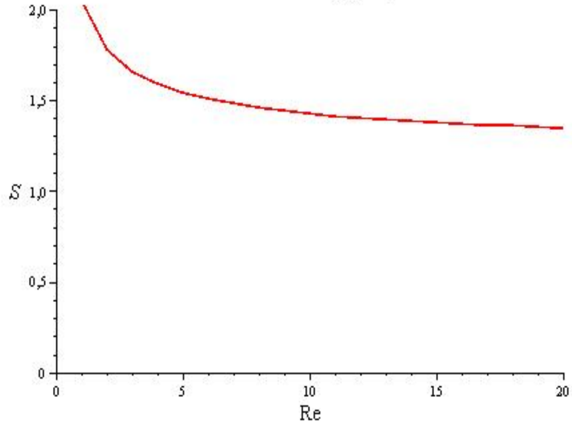


Рис. 2.2 «Зависимость коэффициента S от Re»



Интегральное уравнение (2.5) решается с использованием численных методов. С помощью метода коллокации оно приводится к СЛАУ относительно функции τ, которая решается методом Гаусса. Результатом расчёта является график распределения силы трения действующей на пластину, обтекаемую потоком с одной стороны (рис.2.1), при следующем задании исходных данных в системе СИ: $l = 2a = 1м; d = 1м; U_0 = 1м/с; \nu = 1м^2/с; \rho = 1кг/м^3$ (где d – ширина пластины). Также представлены графики распределения продольной и поперечной компонент скоростей в середине пластины (рис. 2.3 и рис. 2.4, соответственно) при всех тех же значениях, кроме изменяемой скорости U_0.

Формула Блазиуса для силы трения, действующей на пластину, обтекаемую потоком с одной стороны, имеет вид: $W_{шл} = 0.664 d \rho U_0^2 \sqrt{\frac{2a\nu}{U_0}}$. С учётом этого при получении нами полной силы трения, действующей на пластину, W рассматриваем следующую величину $S = 0.664 W / W_{шл}$. Если положить все исходные данные, кроме U_0, единичными, то величина S должна быть всегда равна значению 0.664. На рис.2.2 представлен график зависимости безразмерного коэффициента трения S от чисел Рейнольдса Re.

Рис.2.3 «Зависимость υ_x от y при Re=1,10»

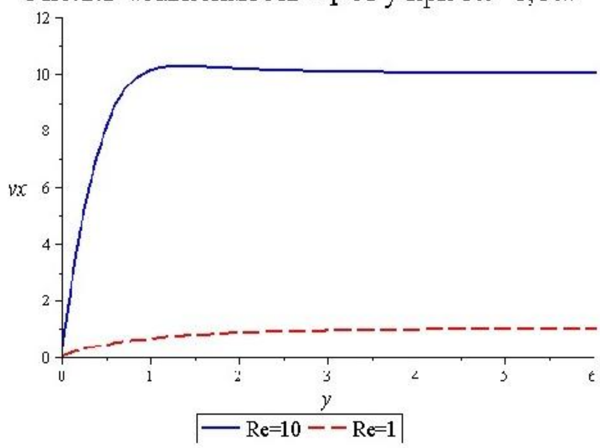
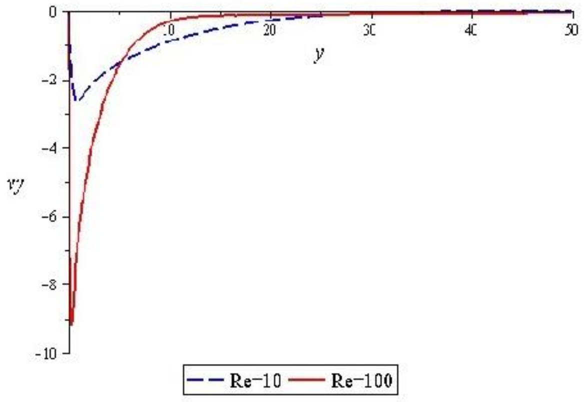


Рис. 2.4 «Зависимость υ_y от y при Re=10,100»



Так как построенное выше решение не даёт хорошей точности при вычислении полной силы трения по сравнению с решением Блазиуса, что видно на рис.2.2 (кривая графика S(Re) выходит на значение, равное примерно 1.19, вместо 0.664, что даёт погрешность около 79%), необходимо реализовать построение второго приближения.

Переходим ко второму шагу итерации. Рассматриваем функции малых возмущений (с двумя штрихами) на фоне функций, найденных на предыдущем шаге:

$$\begin{cases} ³_x(x,y) = U_0 + ³'_x(x,y) + ³''_x(x,y) = U(x,y) + ³''_x(x,y) \\ ³_y(x,y) = ³'_y(x,y) + ³''_y(x,y) = V(x,y) + ³''_y(x,y) \end{cases} \tag{2.8}$$

Используя уравнение (2.2) для второй итерации и вводя предположение о малой вязкости жидкости, получим дифференциальное уравнение относительно функции $\cdot''(x,y)$:

$$U(x,y)\left(\frac{\partial^3 \cdot''(x,y)}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \cdot''(x,y)}{\partial x \partial y^2}\right) - \frac{\partial \cdot''(x,y)}{\partial x}\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y^2} - v\left(\frac{\partial^4 \cdot''(x,y)}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \cdot''(x,y)}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4 \cdot''(x,y)}{\partial y^4}\right) = ¬\frac{\partial^3 U(x,y)}{\partial y^3} \tag{2.9}$$

Используем принцип «замораживания» функции $U(x,y)$ по переменной x в левой части уравнения (2.9). После этого применим преобразование Фурье по x к уравнению (2.9). В результате получим неоднородное линейное ОДУ четвёртого порядка с переменными коэффициентами:

$$\tilde{\cdot}''^{(IV)} - \frac{2}{¬}\left(\sim^2 ¬ + \frac{i\sim U(y)}{2}\right)\tilde{\cdot}''^{(II)} + \frac{1}{¬^2}\left(\sim^4 ¬^2 + i\sim^3 ¬ U(y) + i\sim ¬ U^{(II)}(y)\right)\tilde{\cdot}'' = -\tilde{U}^{(III)}(\sim, y), \tag{2.10}$$

где $\tilde{\cdot}''(\sim, y), \tilde{U}(\sim, y)$ – трансформанты Фурье функций $\cdot''(x,y)$ и $U(x,y)$, соответственно.

Поставим краевую задачу для дифференциального уравнения (2.10) со следующими краевыми условиями:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\cdot}''(\sim, y)}{\partial y^2}\Big|_{y=0} = \frac{\tilde{²}''(\sim)}{«};\ \tilde{\cdot}''(\sim, y) = 0\Big|_{y=0}, \sim \in (-\infty, +\infty);\ \tilde{\cdot}''(\sim, y)\Big|_{y\to+\infty} \to 0,\ \frac{\partial \tilde{\cdot}''(\sim, y)}{\partial y}\Big|_{y\to+\infty} \to 0, \tag{2.11}$$

$²''(x)$ – возмущённая функция вязкого трения на фоне основной силы трения, характеризующейся функцией $²'(x)$ (обозначаемой как $²(x)$ в расчётах первой итерации), $\tilde{²}''(\sim)$ – трансформанта Фурье функции $²''(x)$.

Краевая задача решается методом стрельбы на основе метода Рунге-Кутты четвёртого порядка с постоянным шагом для малых и средних параметров $\sim$. Для больших параметров $\sim$ ($|\sim| > 10$) используется асимптотический метод. Дифференциальное уравнение (2.10) для этого случая преобразовывается к обыкновенному линейному неоднородному дифференциальному уравнению (2.12) с постоянными коэффициентами и решается аналитически с учётом поставленных граничных условий и условий затухания функции $\tilde{\cdot}''(\sim, z)$ на бесконечности:

$$\sim^4 \frac{d^4 \tilde{\cdot}''(\sim, z)}{dz^4} - 2\sim^4 \frac{d^2 \tilde{\cdot}''(\sim, z)}{dz^2} + \sim^4 \tilde{\cdot}''(\sim, z) = -\tilde{U}'''(\sim, z),\ z = |\sim| y \tag{2.12}$$

После сращивания численного и аналитического методов получаем следующее граничное интегральное уравнение относительно функции $²''$, $\forall \sim \in (-\infty, +\infty)$:

$$¥_2(x,0) + \frac{1}{«}\int_{-a}^{a} ²''(¶)\,\ddot{}_2(x-¶,0)\,d¶ = 0;\ x \in [-a, a], \tag{2.13}$$

где функции $¥_2(x,0)$ и $\ddot{}_2(x-¶,0)$ находятся при решении краевых задач для дифференциальных уравнений (2.10) и (2.12) и сращивании этих решений.

3.Заключение.

Таким образом, полностью была проведена работа по нахождению искомых величин при первом приближении. Несмотря на то, что первое решение не дало хорошей точности для силы трения, действующей на пластину, оно дало хорошие результаты для распределения скоростей, что можно отметить, посмотрев на графики скоростей (рис.2.3, рис.2.4). Было получено, что основная скорость потока в продольном направлении U(x,y), удовлетворяя граничным условиям прилипания, на бесконечности выходит на постоянную величину продольной скорости потока вдали от пластины U_0. Основная скорость потока в поперечном направлении V(x,y) незначительно возрастает по сравнению с величиной U_0 и затем, удовлетворяя условиям прилипания, становится бесконечно малой. Также можно отметить, что с точки зрения физики график распределения сил трения также правдоподобен (рис. 2.1), так как сила трения в средней части пластины практически одна и та же величина, а влияние концов пластины способствует её «возмущению» и резкому возрастанию.

Кроме того, были произведены расчёты для силы сопротивления трения пластины на второй итерации. Значительное улучшение наблюдается по сравнению с первой итерацией на промежутке Re=[1,10]. Погрешность по сравнению с решением Блазиуса падает, начиная с 85 % (Re=1) до 30% (Re=10), затем же опять начинает возрастать при больших числах Рейнольдса. Это может быть связано с особенностью метода, который необходимо модифицировать. Но, так или иначе, результаты, полученные на первом шаге, логично построенный второй шаг и корректность подхода к решению задачи в целом дают убедиться в перспективности метода решения при его дальнейшем развитии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Anya Brunschwig. Carrie-Anne Rondi. Laminar Flow Across a Flat Plate. //Journal of Numerical Analysis for Engineering. April 10, 2001. MEAE-4960;
2. Massey, B. S, "Mechanics of fluids". 8^{th} edition. Tylor & Francis Group, 2006 –696 p.;
3. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. Пер. с нем. / Г. Шлихтинг. – под ред. Лойцянского Л.Г. М.: Наука, 1974. 711с.

Сведения об авторе:

Бердник Янина Александровна – аспирантка кафедры теоретической и компьютерной гидроаэродинамики, Южный Федеральный университет, факультет математики, механики и компьютерных наук, Ростов-на-Дону. +(7)9281084327

E-mail: yaninaberdnik@mail.ru

ОЦЕНКА РАЗРУШАЮЩИХ НАГРУЗОК В ЛЕДОВЫХ ТОРОСИСТЫХ ОБРАЗОВАНИЯХ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ С ГИДРОТЕХНИЧЕСКИМИ СООРУЖЕНИЯМИ

Вакуленко А.М.

Работа посвящена расчёту ледовых нагрузок на гидротехнические сооружения континентального шельфа и разработке методики моделирования в конечно-элементной программе PLAXIS 2D. Рассмотрены существующие аналитические методы расчёта нагрузок от киля тороса на вертикальные шельфовые сооружения согласно зарубежным и отечественным нормативным документам. В этих документах отсутствуют методы расчёта нагрузки от киля тороса на наклонные сооружения. Даны рекомендации и допущения использования аналитических методов в случае вертикальных сооружений. Для таких сооружений результаты численного и аналитического решений находятся в хорошем соответствии между собой и являются приемлемыми для оценки нагрузки. Основным достоинством разработанного численного метода является возможность расчёта разрушающей ледовой нагрузки в случае взаимодействия киля тороса с сооружениями любых форм и конфигураций.

Риск взаимодействия с ледовыми образованиями, особенно с однолетними торосами, представляет существенную угрозу для шельфовых сооружений Арктики, строительство и эксплуатация которых стали особенно интенсивными в последнее время в связи с открытием больших запасов нефти и газа. Торос – ледовая формация, состоящая из ледяных блоков-обломков, образовавшихся в результате сжимающих или сдвиговых процессов в ледяном поле [1]. Торосы непрерывно перемещаются под действием ветра и течения и могут оказывать значительные нагрузки на шельфовые сооружения, что, в свою очередь, ведёт к существенным затратам при их строительстве и эксплуатации. Так же торосы существенно препятствуют навигации в регионах, покрытых льдом, рыскают и пропахивают морское дно на мелководье. Торос принято разделять на три части: парус, консолидированный слой и киль тороса. Существующие методы расчета сил от воздействия льда на сооружение, в основном, представляют собой эмпирические или полуэмпирические формулы. Эти методы оказываются недостаточно точными в случаях, когда сооружения находятся в атипичных или нехарактерных ледовых условиях, а также в случае конструкций нестандартной формы. Необходимо отметить также, что в российских и зарубежных нормативных документах отсутствуют методы расчёта нагрузки при взаимодействии киля тороса с наклонными сооружениями.

Цель настоящей работы – разработка методики численного расчета в программном комплексе (ПК) PLAXIS 2D разрушающей нагрузки от воздействия киля тороса на сооружения произвольной формы и сравнение с существующими аналитическими подходами.

Киль тороса – подводная часть тороса, расположенная ниже его консолидированного слоя [2]. Осадка тороса может достигать более 25 м в глубину [1]. Теории разрушения киля тороса и блоков-обломков основаны на методах механики грунтов [3]. По результатам наблюдений выявлено, что разрушение в результате сдвига является доминирующей моделью разрушения неконсолидированных или частично консолидированных обломков льда. Эти обломки представляют собой зернистый материал, состоящий из беспорядочно ориентированных частей, схожих с грунтом, поэтому для его описания используют модель Мора-Кулона с прочностью на сдвиг (²) [4]. Сцепление (c), угол внутреннего трения (¨) и эффективное нормальное давление (¢′) – это параметры, определяющие прочность на сдвиг неконсолидированных или частично консолидированных блоков-обломков, согласно формуле:

$$\tau = c + \delta' \mathrm{tg}\varphi. \qquad (1)$$

Использование метода конечных элементов (МКЭ) позволяет избавиться от части недостатков, связанных с эмпирическими методами расчёта. В частности, метод конечных элементов может быть эффективно использован для изучения влияния граничных условий, геометрии и толщины ледяного образования и других физико-механических параметров на значения разрушающих нагрузок. Практическая ценность результатов численного моделирования зависит от двух факторов: точности континуальной модели льда и вида разрушения ледяного образования перед сооружением. Дальнейшее развитие в данной области исследований существенно зависит от качества взаимодействия экспериментаторов и исследователей-расчётчиков, так как определение свойств ледяного образования в натурных условиях является необходимым не только для расчёта разрушающих нагрузок в образовании, но и для обретения физического понимания его поведения.

Для проверки численных результатов, полученных в ПК PLAXIS 2D, нагрузки от киля тороса были рассчитаны по формулам Долгополова и др. 1975 г., Croasdale и др. 1994 г. [4], СНиП 2.06.04-82* с изм. 2003 г. [5], ISO/FDIS 19906 от 2010 г. [6], а также согласно методике, разработанной К.Н. Шхинеком (СПбГПУ).

Процесс разрушения киля тороса в ПК PLAXIS 2D [7] моделируется в рамках теории сдвиговой прочности Кулона-Мора. Наиболее важными параметрами при моделировании являются: свойства материала, граничные условия, геометрия киля тороса и сооружения, а также трение между льдом и сооружением.

На основании выполненных расчётов взаимодействия киля тороса с сооружениями в ПК PLAXIS 2D определено напряжённо-деформированное состояние киля тороса, а также найдены максимальные силы от воздействия киля тороса. Проведено сравнение полученных результатов с аналитическими решениями.

В табл. 1 представлены результаты расчётов для случая взаимодействия тороса с вертикальными сооружениями при различных эффективных ширинах сооружения (D). Коэффициент трения между льдом и сооружением полагается равным « $= 0{,}18$.

Таблица 1. Сводная таблица результатов

№	Автор/документ	Максимальная горизонтальная нагрузка, МН			
		$D = 1м$	$D = 10м$	$D = 50м$	$D = 100м$
1	Долгополов (1975 г.)	0,276	1,104	4,784	9,383
2	ISO/FDIS 19906 (2010 г.)	0,138	0,966	4,646	9,245
3	Croasdale (1994 г.)	0,156	0,716	3,206	6,318
4	СНиП 2.06.04-82* (изм. 2003 г.)	0,074	0,743	3,716	7,433
5	Шхинек	0,090	0,898	4,489	8,979
6	ПК PLAXIS 2D	0,078	0,780	3,900	7,800

Как видно из табл. 1, результаты численного решения находятся в хорошем соответствии с результатами, полученными согласно СНиП 2.06.04-82* с изм. 2003 г. и методикой, разработанной К.Н. Шхинеком (СПбГПУ), и являются приемлемыми для расчёта.

Следует отметить, что нагрузка, полученная численным методом в случае взаимодействия тороса с наклонными сооружениями, с увеличением угла наклона сооружения значительно уменьшается. Согласно же аналитической формуле, разработанной К.Н. Шхинеком (СПбГПУ), с увеличением угла наклона сооружения нагрузка линейно увеличивается. Данное расхождение свидетельствует о недостаточном понимании процесса разрушения при контакте киля тороса с наклонными сооружениями. Поэтому данный процесс требует более тщательного анализа.

В результате данного исследования была разработана методика моделирования взаимодействия киля тороса с ГТС произвольной формы и наклона в ПК PLAXIS 2D; проведена параметрическая оценка, дано сравнение с аналитическими методами. Предложенная методика позволяет провести серию расчётов в случае наклонных сооружений и, таким образом, создать базу для разработки соответствующих аналитических методов. Дальнейшее исследование предполагает проведение расчётов в 3D согласно разработанной методике с целью уточнения разрушающей нагрузки и выявления характера разрушения киля тороса в случае сооружений различных форм и конфигураций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лосет С. Воздействие льда на морские и береговые сооружения: [Текст] : Учебное пособие / С. Лосет, К.Н. Шхинек, О. Гудместадт, К. Хойланд – СПб.: Лань, 2010. – 272 с.
2. Свод правил 38.13330.2012. Нагрузки и воздействия на гидротехнические сооружения (волновые, ледовые и от судов). Министерства регионального развития Российской Федерации, Москва, 2013.

3. Иванов П.Л. Грунты и основания гидротехнических сооружений. Механика грунтов [Текст]: Учеб. для гидротехн. спец. вузов / П.Л. Иванов; 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1991. 447с.
4. Brown T.G., El Seify M. A unified model for rubble ice load and behavior. PERD/CHC 5-119., 2005 – 12. Mode of access: ftp://ftp2.chc.nrc.ca/CRTReports/PERD/Ice_Rubble_Model_05.pdf.
5. СНиП 2.06.04-82* с изменениями 2003 году «Нагрузки и воздействия на гидротехнические сооружения (волновые, ледовые и от судов)».
6. ISO/FDIS 19906:2010(E) Petroleum and natural gas industries – Arctic offshore structures.
7. PLAXIS. 2D, V.11. Руководство пользователя.

Сведения об авторе:

Вакуленко Алексей Михайлович – аспирант кафедры «Водохозяйственное и гидротехническое строительство»; Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, Инженерно-строительный институт; 195251, ул. Политехническая, 29, Санкт-Петербург, Россия; **e-mail:** aleksej-vakulenko@yandex.ru

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМАЦИОННОГО И ТЕМПЕРАТУРНОГО СОСТОЯНИЯ ПОДШИПНИКА СКОЛЬЖЕНИЯ В ПРОГРАММЕ ANSYS

Верлинский С.В., Левонян А.Л., Шекян А.Л.

В задаче смоделирован подшипник скольжения с конечной длиной. На подшипник действуют нагрузка в виде вращающего момента и радиальных сил. Учитывается износ и тепловыделение от трения. Требуется определить температуру, возникающую при различных режимах работы данного подшипника, а также напряжённо-деформированное состояние, зависящее от возникающей температуры.

1. Рассмотрим подшипник скольжения (рис.1) с вкладышем из антифрикционного материала, который в данном случае будет бронза, с масленным зазором и валом.

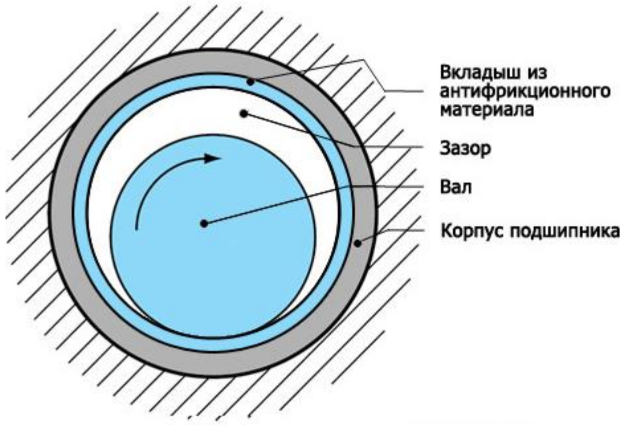


Рис.1. Модель подшипника скольжения

Необходимо определить температуру, которая выделяется в течение работы подшипника.

Трение скольжения возникает, когда $F_t>\mu F_n$, где F_n – действующая сила, F_t –сила трения, μ – коэффициент трения. Между контактом, валом и втулкой, испытывающими трение, а также между втулкой и корпусом возникает тепловой поток, плотность которого вычисляется по следующей формуле:

$$q = FHTG * TAU * V \qquad (1.1)$$

где FHTG – коэффициент рассеивания энергии, TAU – напряжение трения, V – скорость трения. Распределение тепла, образующегося от трения между контактной и целевой поверхностями, зависит от весового коэффициента распределения тепла FWGT, от которого зависит, какая доля тепла уйдет на контактную и какая - на целевую поверхность:

$$q_c = FWGT * q,$$
$$q_t = (1 - FWGT) * q. \qquad (1.2)$$

2. Задача решалась в пакете метода конечных элементов ANSYS Workbench 14.0, расчётный модуль – Transient Structural. Был смоделирован подшипник скольжения со следующими геометрическими параметрами: внешний диаметр D=38 мм, внутренний диаметр вкладыша – 29 мм, а диаметр вала d=28 мм. Введены также температурные и прочностные постоянные бронзы и стали.

Использовалось последовательное решение термопорчностной задачи. Для решения данной задачи был выбран элемент связных полей Solid 5. В контактную пару был введён коэффициент трения μ=0.05. Введены коэффициент рассеивания энергии, равный 15, а также коэффициент распределения тепла, равный 18 [5], что позволит равномерно распределить по поверхности соответствующие параметры.

Создана сетка из 4345 узлов и 2772 элементов. Для вращения вала применён момент 100 Н*м. Для того, чтобы была решена теплопрочностная задача, была написана подпрограмма, которая позволила в одном модуле получить искомую температуру.

3. На рис.2 приведена эпюра полученных напряжений. Из результатов видно, что в течение 1 секунды температура поднимается с комнатной до 44^0 С.

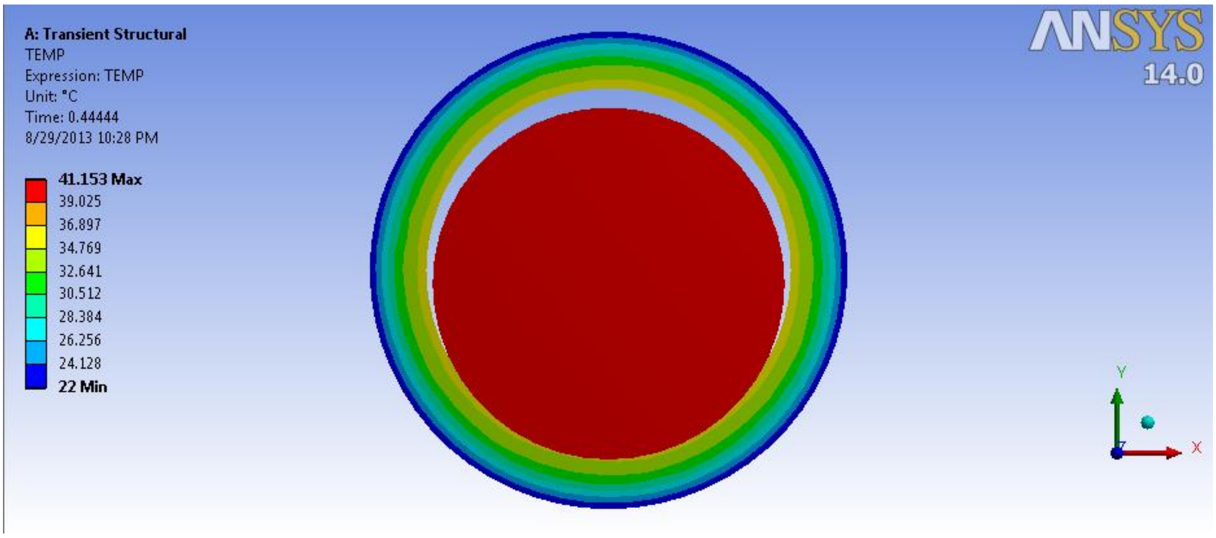


Рис.2. Эпюра распределения температуры

Длина подшипника изменялась с 10 до 20 мм. Проведён компьютерный эксперимент, вследствие чего установлено, что длинные подшипники нагреваются более сильно, чем короткие, что приведено в таблице. Изменение привело к изменению выделенной температуры на 4 ^{0}С в течение 1с.

Таблица

	Длина подшипника, мм	Образующаяся температура (1 с), ^{0}С
1.	10	34.153
2.	15	35.868
3.	20	37.019

Для данной модели посчитано усреднённое напряжение von-Mises (рис.3).

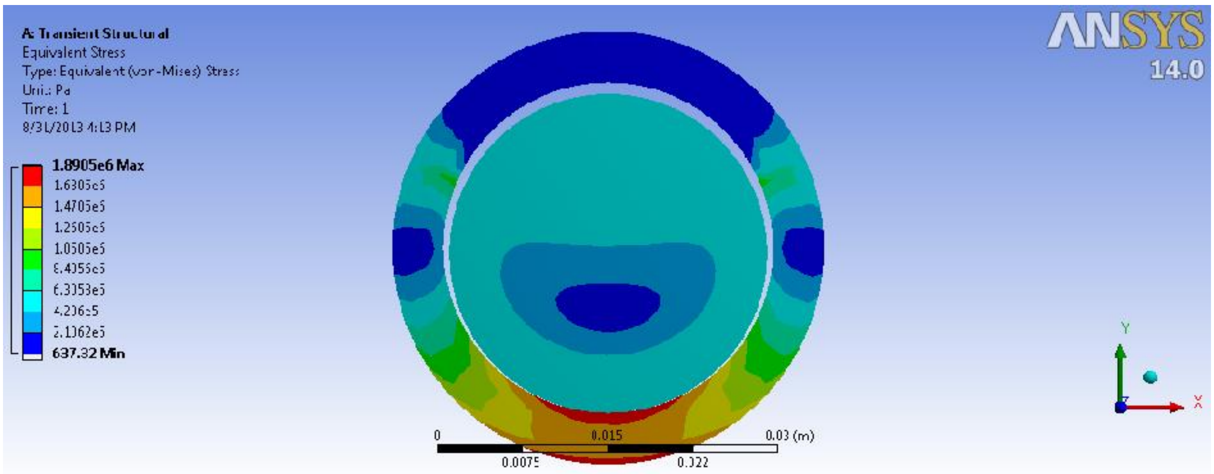


Рис.3. Полученная эпюра напряжений

Из результатов можно найти критическое значение нагрузки на подшипник представленных геометрических параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Платонов В.Ф. Подшипники из полиамидов. М.: Машгиз,1961.111с.
2. Shekyan L.A. On the problem of Elastohydrodynamic Lubrucation // Modern Problems of Deformable Bodies Mechanics Collection of Papers. Vol.1, Yerevan, 2005. Pp.254-260.
3. Шекян А.Л., Шекян Л.А., Верлинский С.В. Об уравнениях плоской контактной задачи теории упругости с учётом шероховатости, износа и тепловыделения от трения // Годичная научная конференция ГИУА. Сб. материалов. Ереван: Изд-во ГИУА, 2005. Т.2. С. 421– 423.
4. Шекян А.Л., Шекян Л.А., Верлинский С.В. Плоская контактная задача теории упругости с учётом трибологических факторов. //Материалы 11-ой Всероссийской научно-технической конф. ”Аэрокосмическая техника, высокие технологии и инновации–2008”. Изд. Пермского гос. техн. унив. Пермь: 2008. С.411–413.
5. Фролов Д.А. Нагрев трением в ANSYS Mechanical. ANSYS Inc, 2011

Сведения об авторах:

Verlinski Sergey – Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor of State Engineering University of Armenia, Faculty of Mechanics and Mechanical Engineering
Address: 0009, Armenia, Yerevan, Teryan str., 105
Ph.: (+374 10) 44 83 62; (374 93) 52 77 35; **E-mail:** sergeyver@mail.ru

Levonyan Hayk – Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor of State Engineering University of Armenia, Faculty of Mechanics and Mechanical Engineering
Address: 0009, Armenia, Yerevan, Teryan str., 105
Ph.: (374 91) 88 44 64; **E-mail:** hayk_levonyan@mail.ru

Shekyan Artyom – Ph.D. in Physics and Mathematics, Assistant Professor of State Engineering University of Armenia, Faculty of Mechanics and Mechanical Engineering
Address: 0009, Armenia, Yerevan, Teryan str., 105
Ph.: (37410) 39 89 01; (374 55) 85 72 27; **E-mail:** artyom.sh.83@mail.ru

МАГНИТОУПРУГИЕ СДВИГОВЫЕ ВОЛНЫ
В ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕМ СЛОЕ

Гараков В.Г., Мартиросян Э. В.

Рассматривается распространение чисто сдвиговых магнитоупругих волн в идеально проводящем слое в случае, когда магнитное поле параллельно плоскости распространения волны. Наличие продольной и поперечной к направлению волны компонент вектора напряжённости магнитного поля приводит к появлению в волновом уравнении члена со смешанной производной. Задача решается для различных вариантов граничных условий на поверхностях слоя. На основе полученных дисперсионных уравнений определяются фазовые и групповые скорости. Исследуется влияние магнитного поля на частоты колебаний, при которых магнитоупругая волна не может распространяться.

Исследованию распространения упругих волн в волноводах посвящено большое число работ [1]. Эти работы обсуждены в содержательных обзорах [2,3]. Наиболее простые упругие волноводы представляют из себя бесконечный слой, в котором распространяется чисто сдвиговая волна. Здесь приводится исследование влияния магнитного поля на характер распространения упругих сдвиговых волн в волноводе из идеально проводящего материала. Аналогичная задача для плоской деформации в частном случае задания магнитного поля рассматривалась в [4].

1. Пусть упругий слой в прямоугольной декартовой системе координат занимает область $-\infty < x < \infty, \quad 0 \le y \le h, \quad -\infty < z < \infty$. Уравнение распространения сдвиговых магнитоупругих волн (антиплоская задача) в начальном постоянном магнитном поле

$$\bar{H}_0 = H_{01}\hat{\tau} + H_{02}\hat{j} \tag{1.1}$$

имеет вид [5,6]

$$\left(c_t^2 + \mathrm{V}_1^2\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(c_t^2 + \mathrm{V}_2^2\right)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\mathrm{V}_1\mathrm{V}_2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \tag{1.2}$$

В (1.2) приняты обозначения

$$c_t^2 = \frac{G}{\rho}, \quad \mathrm{V}_k^2 = \frac{\mu H_{0k}^2}{4\pi\rho}, \quad k = 1,2 \tag{1.3}$$

где G – модуль сдвига, μ – магнитная проницаемость, ρ – плотность материала слоя.

Решение уравнения (1.1) представляется в виде

$$w = f(y)\exp i(\omega t - kx). \tag{1.4}$$

Подстановка (1.4) в (1.2) приводит к решению обыкновенного дифференциального уравнения относительно функции $f(y)$

$$(1 + x_2) f'' - 2ik\sqrt{x_1 x_2} f' + k^2\left[\eta - (1 + x_1)\right] f = 0 \tag{1.5}$$

где

$$x_k = \mathrm{V}_k^2 c_t^{-2}, \quad k = 1,2, \quad \eta = \omega^2 k^{-2} c_t^{-2} \tag{1.6}$$

Общее решение уравнения (1.5) получается в виде

$$f(y) = \left(c_1\cos\beta_2 ky + c_2\sin\beta_2 ky\right)\exp\left(ik\beta_1 y\right) \tag{1.7}$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные

$$\beta_1 = \frac{\sqrt{x_1 x_2}}{1 + x_2}, \quad \beta_1 = \frac{\sqrt{(1 + x_2)\eta - 1 - x_1 - x_2}}{1 + x_2}. \tag{1.8}$$

2. С целью определения фазовой скорости волны рассматриваются различные варианты граничных условий на плоскостях $y = 0, h$, ограничивающих волновод. Наиболее простой случай, когда границы волновода закреплены

$$w = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, h \tag{2.1}$$

Подстановка (1.4), с учётом (1.7) в граничные условия (2.1) приводит к уравнению

$$\sin\beta_2 kh = 0 \tag{2.2}$$

откуда и определяется фазовая скорость

$$\frac{\omega_n^2}{k^2} = c_t^2\left[1+\frac{x_1}{1+x_2}+\left(1+x_2\right)\left(\frac{n\pi}{kh}\right)^2\right], \quad n=1,2,... \tag{2.3}$$

Согласно (2.3) получается формула для определения групповой скорости

$$\frac{\partial\omega_n}{\partial k} = c_t\left(1+\frac{x_1}{1+x_2}\right)\left[1+\frac{x_1}{1+x_2}+\left(1+x_2\right)\left(\frac{n\pi}{kh}\right)^2\right]^{-1/2}. \tag{2.4}$$

Из (2.3), (2.4) следует, что при ограничениях на напряжённость начального магнитного поля, например, $x_1 \ll 1$, $x_2 \ll 1$, влияние магнитного поля на фазовую и групповую скорости незначительно.

Выражение для волновго числа (длины волны) определяется из (2.3) следующим образом,

$$k^2 = \left(1+\frac{x_1}{1+x_2}\right)^{-1}\left[\frac{\omega_n^2}{c_t^2}-\left(1+x_2\right)\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2\right], \tag{2.5}$$

отсюда следует, что волны с частотой

$$\omega_n \le c_t\sqrt{1+x_2}\left(n\pi/h\right) \tag{2.6}$$

не могут распространяться.

Пусть слой с одной стороны закреплён, а другая сторона свободна от нагрузки и экранирована относительно магнитного поля [7]. В этом случае граничные условия имеют вид

$$w=0 \quad \text{при} \quad y=0$$

$$\left(1+x_2\right)\frac{\partial w}{\partial y}+\sqrt{x_1x_2}\,\frac{\partial w}{\partial y}=0 \ \text{ при } \ y=h \tag{2.7}$$

или, с учётом (1.4)

$$f=0 \quad \text{при} \quad y=0$$

$$f'-\beta_1 ikf=0 \ \text{ при } \ y=h \tag{2.8}$$

Подстановка общего решения (1.7) в граничные условия (2.8) приводит к следующему уравнению, определяющему фазовые скорости

$$\cos\beta_2 kh = 0 \tag{2.9}$$

3. Рассмотрим приведённую выше задачу для случая, когда на границе слоя $y=h$ экран магнитного поля отсутствует. Тогда необходимо потребовать, чтобы на свободной границе слоя продольная компонента вектора напряжённости индуцированного электрического поля e_1 была бы непрерывна. Согласно [5,7], эти граничные условия имеют вид

$$w=0 \quad \text{при} \quad y=0$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial w}{\partial y}+\beta_1\frac{\partial w}{\partial x}=\sqrt{\frac{x_2}{4\pi\mu G}}\left(1+x_2\right)^{-1}h_3\\&\frac{\mu}{c}H_{02}\frac{\partial w}{\partial t}=e_1\end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad y=h \tag{3.1}$$

Т.к. в граничных условиях (3.1) присутствуют значения компонент индуцированного электромагнитного поля e_1, h_3 при $y=h$, то необходимо рассматривать также уравнения электромагнитного поля в области $y>h$. Для рассматрваемой здесь плоской задачи имеют место следующие уравнения:

$$\Delta h_3 = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 h_3}{\partial t^2}, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial e_1}{\partial t}=\frac{\partial h_3}{\partial y} \tag{3.2}$$

Решение системы уравнений (3.2) в виде гармонических волн и при условии затухания

$$\lim_{y\to\infty} h_3 = 0 \tag{3.3}$$

имеет вид

$$\begin{gathered} h_3 = B\exp\left(-k\sqrt{1-\theta_1\eta}\,y\right)\exp i\left(\omega t - kx\right) \\ e_1 = i\frac{kc}{\omega}B\sqrt{1-\theta_1\eta}\exp\left(-k\sqrt{1-\theta_1\eta}\,y\right)\exp i\left(\omega t - kx\right) \end{gathered} \tag{3.4}$$

где B – произвольная постоянная,

$$\theta_1 = c_t^2 c^{-2} \tag{3.5}$$

Подстановка (1.4), с учетом (1.7) и (3.4) в граничные условия (3.1) приводит к системе однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных A_1, A_2, B. Из условия равенства нулю детерминанта указанной системы получается следующее дисперсионное уравнение

$$\sqrt{1-\theta_1\eta\beta_2}\cos\beta_2 kh = x_2\theta_1\eta\sin\beta_2 kh \tag{3.6}$$

Уравнение (3.6) имеет для каждого значения относительной толщины kh бесконечное множество решений для η (фазовой скорости), которые определяют соответствующую моду волны в волноводе [1]. Возникает вопрос: существует ли решение удовлетворяющее условию

$$0 < \eta < 1 + x_1\left(1 + x_2\right)^{-1} \tag{3.7}$$

Такая волна обычно локализована в окрестности свободного края слоя. При условии (3.7) дисперсионное уравнение (3.6) преобразуется к виду

$$N_2\left(\eta, kh\right) \equiv \sqrt{1-\theta_1\eta\beta_3} - x_2\theta_1\eta\,\mathrm{th}\beta_3 kh = 0 \tag{3.8}$$

где

$$\beta_3 = \left(1 + x_2\right)^{-1}\sqrt{1 + x_1 + x_2 - \left(1 + x_2\right)\eta} \tag{3.9}$$

Уравнение (3.8) имеет корень

$$\eta_* = 1 + x_1\left(1 + x_2\right)^{-1} \tag{3.10}$$

соответствующий условию $\beta_3 = 0$. Для исключения корня η_* вместо уравнения (3.8) рассматривается уравнение

$$N_3\left(\eta, kh\right) \equiv \sqrt{1-\theta_1\eta} - x_2\theta_1\eta\beta_3^{-1}\mathrm{th}\beta_3 kh = 0 \tag{3.11}$$

Функция $N_3\left(\eta, kh\right)$ обладает следующими свойствами:

$$\begin{gathered} N_3\left(0, kh\right) = 1 > 0 \\ \lim_{\eta\to\eta_*} N_3\left(\eta, kh\right) = \sqrt{1-\theta_1\eta_*} - x_2\theta_1\eta_* kh \end{gathered} \tag{3.12}$$

Отсюда следует, что уравнение (3.11) будет иметь решение, удовлетворяющее условию (3.7), если

$$kh > \left(x_2\theta_1\eta_*\right)^{-1}\sqrt{1-\theta_1\eta_*} \tag{3.13}$$

В частности, при $kh \to \infty$ уравнение (3.8) или же (3.11) совпадает с уравнением, определяющим фазовую скорость сдвиговой магнитоупругой поверхностной волны для полупространства [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Miklowitz J. The theory of elastic waves and wavequides. Amsterdam, N.Y. Oxford, North–Holland 1984. 618p.

2. Мелешко В.В., Бондаренко А.А., Довгий С.А., Трофимчук А.Н., Гван Хейст Я.Ф. Упругие волноводы: история и современность. I Математические методы и физико–механические поля. 2008. Т.51. №2. С.86-104.
3. Мелешко В.В., Бондаренко А.А., Трофимчук А.Н., Абасов Р.З. Упругие волноводы: история и современность. II Математические методы и физико-механические поля. 2008. Т.51. №2. С.86-104.
4. Вартанов А.Г. Магнитоупругие колебания идеально-проводящего слоя в постоянном магнитном поле.// Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. №3. С.33-40.
5. Белубекян М.В. Введение в теорию магнитоупругости. Ереван: Изд. ЕГУ, 1996. 98с.
6. Белубекян М.В., Мартиросян Э.В. Щелевые магнитоупругие сдвиговые волны в косом магнитном поле.// Докл. НАН Армении. 2006. Т.106. №2. С.129-135.
7. Белубекян М.В., Мартиросян Э.В. Экранированная магнитоупругая поверхностная волна Рэлея. // Вестник РАУ. Сер. физ.–мат. наук, 2007. №1. С.107-119.

Сведения об авторах:

Гараков Владимир Герасимович – старший научный сотрудник Института механики НАН Армении, (374 10) 54 33 15, (374 93) 33 81 66
E-mail: vova. garakov@gmail.com

Мартиросян Эдуард Валерьевич – внештатный научный сотрудник Института механики НАН Армении, (374 10) 58 26 78, (374 94) 59 00 63
E-mail: lucile@yandex.ru

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Гаспарян А.В.

В работе кратко приведены результаты по применению метода конечно-разностных уравнений в краевых задачах теории упругости различных слоистых композитов при антиплоской деформации.

Применения метода конечно-разностных уравнений в задачах математический физики и механики сплошных сред почти не существуют. Но этот метод, в сочетании с методом интегральных преобразований, оказывается весьма эффективным в определённых смешанных граничных задачах теории упругости [1-3], а также в задачах об определении напряженно-деформированного состояния упругих многослойных композитов различных геометрических форм [4-7]. Ниже в этом направлении излагаются некоторые результаты.

1. Конечно-разностные уравнения. Приведём несколько определений теории конечноразностных уравнений, являющихся дискретным аналогом дифференциальных уравнений [8].

Конечной разностью первого порядка функции $f(x)$ в точке x является выражение

$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x)$, где h – некоторое фиксированное число. Соответсвенно, конечной разностью k-ого порядка функции $f(x)$ в точке x является выражение

$\Delta_h^{(k)} f(x) = \Delta_h^{(k-1)} f(x+h) - \Delta_h^{(k-1)} f(x)$.

Простейшее линейное конечно-разностное уравнение первого порядка имеет вид

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) = \ddot{}\,(x), \qquad (1.1)$$

где x может принимать целые значения 0,1,2,… Решением этого уравнения является функция

$$f(x) = \ddot{}\,(0) + \ddot{}\,(1) + ... + \ddot{}\,(x-1) .$$

Теперь рассмотрим следующее линейное неоднородное уравнение первого порядка:

$$\Delta f(x) + P(x) f(x) = Q(x) . \qquad (1.2)$$

Решением неоднородного уравнения (1.2), как и при дифференциальных уравнениях, является сумма общего решения соответствующего однородного уравнения

$$\Delta f(x) + P(x) f(x) = 0$$

и частного решения неоднородного уравнения (1.2). Общее решение (1.2) имеет вид

$$f(x) = \prod_{i=0}^{x-1} [1 - P(i)] \left\{ \sum_{t=0}^{x-1} \frac{Q(t)}{\prod_{l=0}^{t-1} [1 - P(l)]} + f(0) \right\},$$

где $f(0)$ – начальное значение функции $f(x)$.

2. Применение метода конечных разностей в задаче о напряжённо-деформорованном состоянии слоистого композита при антиплоской деформации. Пусть композит, отнесённый к правой прямоугольной системе координат $Oxyz$, представляет собой пакет из произвольного конечного числа n упругих слоёв [4]:

$$\Omega_k = \{-\infty < x < \infty, \quad h_{k-1} \le y \le h_k\} \quad (k = \overline{1,n})$$

с модулями сдвига G_k. Пусть далее к нижней и верхней плоскостям $y = h_0$ и $y = h_n$ приложены касательные силы интенсивностей $\tau_0(x)$ и $\tau_n(x)$, соответственно, т. е.

$$\tau_{yz}\big|_{y=h_0} = \tau_0(x), \qquad \tau_{yz}\big|_{y=h_n} = \tau_n(x) \qquad (-\infty < x < \infty)$$

обеспечивающие состояние антиплоской деформации с базовой плоскостью Oxy. Здесь τ_{yz} – компонента касательных напряжений. Требуется определить компоненты напряжений и смещений в композите, когда на крайних гранях композита функции напряжения $\tau_0(x)$ и $\tau_n(x)$ наперёд заданы. Для вывода определяющих уравнений поставленной задачи обозначим через $w_k = w_k(x,y)$ единственную отличную от нуля компоненту смещений в направлении оси Oz, а неизвестные касательные контактные напряжения на гранях $y = h_{k-1}$ и $y = h_k$ $(k=\overline{1,n})$ слоя Ω_k – через $\tau_{k-1}(x)$ и $\tau_k(x)$, соответственно. Тогда, воспользовавшись законом Гука для слоя Ω_k, придём к следующей граничной задаче:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w_k}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w_k}{\partial y^2} = 0 \quad (-\infty < x < \infty, \quad h_{k-1} < y < h_k) \\ G_k \left.\dfrac{\partial w_k}{\partial y}\right|_{y=h_{k-1}} = \tau_{k-1}(x), \quad G_k \left.\dfrac{\partial w_k}{\partial y}\right|_{y=h_k} = \tau_k(x) \ (-\infty < x < \infty, \ k=\overline{1,n}). \end{cases} \tag{2.1}$$

При помощи трансформантов Фурье

$$\left\{\overline{\tau}_k(\lambda); \overline{w}_k(\lambda, y)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{\tau_k(x); w_k(x,y)\right\} e^{i\lambda x} dx,$$

где а – спектральный параметр Фурье, (2.1) перейдёт в следующую краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 \overline{w}_k}{dy^2} - \lambda^2 \overline{w}_k = 0 \quad (h_{k-1} < y < h_k, k=\overline{1,n}) \\ G_k \left.\dfrac{d\overline{w}_k}{dy}\right|_{y=h_{k-1}} = \overline{\tau}_{k-1}(\lambda), \quad G_k \left.\dfrac{d\overline{w}_k}{dy}\right|_{y=h_k} = \overline{\tau}_k(\lambda). \end{cases} \tag{2.2}$$

Решение задачи (2.2) имеет вид

$$\overline{w}_k = \overline{w}_k(\lambda, y) = A_k \operatorname{ch}\lambda y + B_k \operatorname{sh}\lambda y \qquad (h_{k-1} \le y \le h_k), \tag{2.3}$$

где A_k и B_k определяются из граничных условий краевой задачи (2.2)

$$\begin{pmatrix} A_k \\ B_k \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda G_k \operatorname{sh}\lambda(h_{k-1} - h_k)} \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\lambda h_k & -\operatorname{ch}\lambda h_{k-1} \\ -\operatorname{sh}\lambda h_k & \operatorname{sh}\lambda h_{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\tau}_{k-1} \\ \overline{\tau}_k \end{pmatrix} \quad (k=\overline{1,n}). \tag{2.4}$$

Далее, из условия непрерывности смещений на линии контакта $y = h_k$ слоёв Ω_k и Ω_{k+1},

$$\left(\operatorname{ch}\lambda h_k \ \operatorname{sh}\lambda h_k\right) \begin{pmatrix} A_k \\ B_k \end{pmatrix} = \left(\operatorname{ch}\lambda h_k \ \operatorname{sh}\lambda h_k\right) \begin{pmatrix} A_{k+1} \\ B_{k+1} \end{pmatrix} \quad (k=\overline{1,n-1}). \tag{2.5}$$

с учётом (2.4) относительно трансформантов Фурье неизвестных касательных напряжений $\overline{\tau}_k(\lambda)$ получим следующую систему конечно-разностных уравнений второго порядка:

$$a_k \overline{\tau}_{k-1} - (b_k + b_{k+1})\overline{\tau}_k + a_{k+1}\overline{\tau}_{k+1} = 0 \quad (k=\overline{1,n-1})$$

$$a_k = \frac{1}{G_k \operatorname{sh}(\lambda d_k)}, \quad b_k = \frac{\operatorname{cth}(\lambda d_k)}{G_k}, \ d_k = h_k - h_{k-1} \quad (k=\overline{1,n}). \tag{2.6}$$

Здесь d_k $(k=\overline{1,n})$ – высота k-ого слоя Ω_k.

Для сведения (2.6) к конечно-разностным уравнениям первого поядка положим

$$a_k \overline{\tau}_{k-1} - b_k \overline{\tau}_k = \omega_k \tag{2.7}$$

$$a_{k+1}\bar{\tau}_{k+1}-b_{k+1}\bar{\tau}_k=\chi_{k+1} \qquad (k=\overline{1,n-1}). \tag{2.8}$$

Тогда система уравнений (2.6) перейдёт в систему

$$\omega_k+\chi_{k+1}=0 \qquad (k=\overline{1,n-1}). \tag{2.9}$$

Таким образом, решение поставленной здесь задачи сводится к решению конечно-разностных уравнений первого порядка (2.7), (2.8) и (2.9).

После того, как построены решения этих уравнений, по формуле (2.4) определяются коэффициенты A_k и B_k, а затем по формуле (2.3) – функции $\bar{w}_k(\lambda,y)$. Наконец, при помощи обратного интегрального преобразования Фурье определяются функции $w_k(x,y)$ $(k=\overline{1,n})$, а при помощи последних – напряжения в любой точке композита.

3. Решение определяющих конечно-разностных уравнений первого порядка. Решения определяющих конечно-разностных уравнений (2.7) и (2.8) построим известным методом [8]. Сначала уравнение (2.7) представим в виде

$$\bar{\tau}_k=\left[1-P(k)\right]\bar{\tau}_{k-1}+Q(k),\quad P(k)=\frac{b_k-a_k}{b_k},\quad Q(k)=-\frac{\omega_k}{b_k} \qquad (k=\overline{1,n-1}) \tag{3.1}$$

и рассмотрим однородное уравнение

$$\bar{\tau}_k=\left[1-P(k)\right]\bar{\tau}_{k-1} \qquad (k=\overline{1,n-1}). \tag{3.2}$$

Отсюда можем записать

$$\bar{\tau}_1=\left[1-P(1)\right]\bar{\tau}_0,\quad \bar{\tau}_2=\left[1-P(2)\right]\bar{\tau}_1,\ \ldots\ \bar{\tau}_k=\left[1-P(k)\right]\bar{\tau}_{k-1}.$$

Перемножая почленно эти равенства, получим решение однородного уравнения (3.2) в виде

$$\bar{\tau}_k=\bar{\tau}_0\prod_{j=1}^{k}\left[1-P(j)\right] \qquad (k=\overline{1,n-1}). \tag{3.3}$$

Далее, исходя из (3.3), методом вариации находим решение неоднородного уравнения (3.1):

$$\bar{\tau}_k=-\sum_{i=1}^{k}A_i\frac{C_i}{C_k}\omega_i+\frac{\bar{\tau}_0}{C_k} \qquad (k=\overline{1,n-1}),$$

$$A_i=G_i\,\mathrm{th}(\lambda d_i),\quad C_i=\prod_{r=1}^{i}\mathrm{ch}(\lambda d_r) \quad (i=\overline{1,n}). \tag{3.4}$$

Таким же образом решение уравнения (2.8) с учётом (1.9) представляется формулой

$$\bar{\tau}_k=\sum_{i=k}^{n-1}B_i\frac{D_{i+1}}{D_k}\omega_i+\frac{\bar{\tau}_n}{D_k} \qquad (k=\overline{1,n-1}),$$

$$B_i=G_{i+1}\mathrm{sh}(\lambda d_{i+1}),\quad D_i=\prod_{r=i}^{n-1}\mathrm{ch}(\lambda d_{r+1}). \tag{3.5}$$

Теперь приравнивая выражения (3.4) и (3.5), относительно неизвестных ω_i $(i=\overline{1,n-1})$ получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$-\sum_{i=1}^{k}A_i\frac{C_i}{C_k}\omega_i+\frac{\bar{\tau}_0}{C_k}=\sum_{i=k}^{n-1}B_i\frac{D_{i+1}}{D_k}\omega_i+\frac{\bar{\tau}_n}{D_k} \quad (k=\overline{1,n-1}). \tag{3.6}$$

Преобразуем систему (3.6) в систему с левой треугольной матрицей. С этой целью представим ее в виде

$$A_k\omega_k+\sum_{i=1}^{k-1}\frac{A_iC_i}{C_k}\omega_i+\sum_{i=k}^{n-1}\frac{B_iD_{i+1}}{D_k}\omega_i=\frac{\bar{\tau}_0}{C_k}-\frac{\bar{\tau}_n}{D_k} \qquad (k=\overline{1,n-1}) \tag{3.7}$$

Тогда легко видеть, что

$$D_{i+1} = \prod_{r=i+1}^{n-1} \mathrm{ch}(\lambda d_{r+1}) = \frac{K_n}{\mathrm{ch}(\lambda d_{i+1}) C_i}, \qquad K_n = \prod_{r=1}^{n} \mathrm{ch}(\lambda d_r)$$

$$D_k = \prod_{j=k}^{n-1} \mathrm{ch}(\lambda d_{r+1}) = \frac{K_n}{C_k} = \prod_{r=k+1}^{n} \mathrm{ch}(\lambda d_r) \;\; (i = \overline{k, n-1}; \;\; k = \overline{1, n-1}).$$

В результате, система (3.7) перейдёт в систему

$$\sum_{i=1}^{k} A_i C_i \omega_i + C_k{}^2 \sum_{i=k}^{n-1} \frac{A_{i+1}}{C_i} \omega_i = \bar{\tau}_0 - \frac{C_k{}^2}{K_n} \bar{\tau}_n \quad (k = \overline{1, n-1}). \tag{3.8}$$

Далее положив

$$X_n = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{A_{i+1}}{C_i} \omega_i, \tag{3.9}$$

обнаружим, что

$$\sum_{i=k}^{n-1} \frac{A_{i+1}}{C_i} \omega_i = X_n - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{A_{i+1}}{C_i} \omega_i.$$

С учётом последнего система уравнений (3.8) окончательно преобразуется в следующую систему линейных уравнений с левой треугольной матрицей:

$$\sum_{i=1}^{k} L_{ki} \omega_i = g_k \qquad (k = \overline{1, n-1})$$

$$L_{ki} = \begin{cases} A_i C_i - \dfrac{C_k{}^2}{C_i} A_{i+1} & (i = \overline{1, k-1}) \\ A_k C_k & (i = k) \end{cases}; \qquad g_k = \bar{\tau}_0 - C_k{}^2 \left(X_n + \frac{\bar{\tau}_n}{K_n} \right). \tag{3.10}$$

Чтобы определить X_n из (3.9), решение системы (3.9) при правой части $g_k^{(1)}$ – вектора-столбца из к строк, состоящего только из единиц, обозначим через $\omega_i^{(1)}$ $(i = \overline{1, n-1})$, а при правой части $g_k^{(2)} = C_k^2$ – через $\omega_i^{(2)}$ $(i = \overline{1, n-1})$. Тогда решение системы (3.10) выразится формулой

$$\omega_i = \bar{\tau}_0 \omega_i^{(1)} - \left(X_n + \frac{\bar{\tau}_n}{K_n} \right) \omega_i^{(2)} \quad (i = \overline{1, n-1}).$$

Подставляя выражение μ_i в (3.9), находим

$$X_n = \frac{\bar{2}_0 K_n S_n^{(1)} - \bar{2}_n S_n^{(2)}}{K_n \left[1 + S_n^{(2)} \right]}, \qquad S_n^{(j)} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{A_{i+1}}{C_i} \mu_i^{(j)} \qquad (j = 1, 2).$$

Система уравнений (3.10) легко решается. Известным способом можно построить также её аналитическое решение. А именно: введём в рассмотрение левую треугольную матрицу

$$L = (L_{ki}) \quad (i = \overline{1, k}; \;\; k = \overline{1, n-1}).$$

Тогда элементы обратной матрицы $M = (M_{ki}) = L^{-1}$, которая также левотреугольная, определятся формулами:

$$M_{ii} = \frac{1}{L_{ii}}, \quad M_{ki} = 0 \;\; (k < i), \qquad M_{ki} = -\sum_{j=i}^{k-1} \frac{L_{kj} M_{ji}}{L_{kk}} \;\; (k > i).$$

Из последних равенств элементы M_{ki} обратной матрицы L^{-1} определяются последовательно.

Проведен численный анализ задачи.

Этим методом получены эффективные решения граничных задач о напряжённо-деформированном состоянии слоистого композита, состоящего из конечного числа разнородных упругих круговых или кольцевых цилиндров при антиплоской деформации в [5], спаянных по своим боковым повехностям, а также в задачах о стеснённом кручении слоистых сплошных и полых цилиндров конечной длины [6, 7]. Отметим, что конечно-разностные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами весьма просто решаются при помощи дискретного преобразования Лапласа [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. Мхитарян С.М., Петросян С.З. Об одной смешанной задаче для упругого полупространства.// Докл. АН Арм.ССР. 1986. Т.82. N1. С.28-32.
2. Мхитарян С.М., Петросян С.З. О решении одной смешанной краевой задачи для неоднородного полупространства с прямой линией раздела граничных условий.// Докл. АН Арм.ССР. 1988. Т.87. N1. С.16-21.
3. Мхитарян С.М., Петросян С.З. Об одной смешанной краевой задаче для полупространства с круговой линией раздела граничных условий.// Докл. АН Арм.ССР. 1988. Т.87. N2. С.65-69.
4. Гаспарян А.В., Мхитарян С.М. О напряжённом состоянии композита в виде пакета из произвольного конечного числа упругих слоёв при антиплоской деформации.// Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. N2. С.10-20.
5. Гаспарян А.В., Давтян З.А О напряжённом состоянии композита в виде пакета из произвольного конечного числа упругих круговых цилиндров при антиплоской деформации.//В сб. научных трудов международной конференции: “Актуальные проблемы механики сплошной среды”. 4-8 октября 2010, Дилижан, Армения. Т.1. С.167-171.
6. Гаспарян А.В., Давтян З.А. Кручение круглого слоистого цилиндра конечной длины. // Сборник трудов международной школы-конференции молодых ученых. 28 сентября – 1 октября 2009. Агавнадзор, Армения. С.186-189.
7. Гаспарян А.В., Давтян З.А. Кручение полого кусочно-однородного круглого цилиндра конечной длины.//В сб. докладов II международной научно-технической конференции: «Архитектура и строительство – актуальные проблемы», 30 сентября – 3 октября 2010, Ереван – Джермук: Т.1. С.324-328.
8. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967. 375с.
9. Мышкис А.Д. Прикладная математика для инженеров. Специальные курсы. М.: Физматлит, 2007. 687с.

<u>Сведения об авторе:</u>

Гаспарян Ануш Вараздатовна – к. ф.-м. н., научный сотрудник Института механики НАН Армении
Адрес: 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24^{Б}
Тел.: (+37410) 52-48-90,
E-mail: anush@mechins.sci.am, anushgasp@gmail.com.

О ДВУХ СМЕЖНЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ И ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ КЛИНОВИДНОЙ ОБЛАСТИ

Григорян М.С.

Для клиновидной области рассматриваются граничная задача плоской теории установившейся фильтрации и смежная задача в постановке теории упругости при антиплоской деформации.

Основные уравнения плоской теории установившейся фильтрации жидкости в пористых грунтовых массивах и многочисленные их приложения в расчётах разнообразных гидротехнических сооружений приведены в [1,2]. В настоящей статье рассматривается граничная задача плоской теории установившейся фильтрации жидкости в пористом клиновидном грунтовом массиве, когда одна грань клина водонепроницаема, а через систему интервалов другой грани жидкость впрыскивается в клиновидное основание. Ставится задача об определении компоненты нормальной скорости фильтрации на этих интервалах, при которой давление на них имеет наперёд заданную величину. Эта задача формулируется в виде сингулярного интегрального уравнения (СИУ), после решения которого определяются фильтрационные характеристики.

Во второй задаче, смежной описанной фильтрационной задаче, в постановке теории упругости при антиплоской деформации рассматривается задача об упругом равновесии клина, когда его одна грань жёстко защемлена, а на другой грани заданы смешанные граничные условия. Решение задачи опять сведено к решению СИУ.

1. Пусть пористый грунтовый массив отнесён к полярной системе координат (r,g) и имеет форму клиновидной области с углом раствора $\sim$ $(0<\sim<\text{®})$. Полюс этой системы поместим в вершине клина, а полярную ось направим по положительной полуоси Ox правой прямоугольной системы координат Oxy. Будем считать, что грань клина $\mathrm{g}=0$, совпадающая с положительной полуосью Ox, водонепроницаема. При этом через систему отрезков $L=\bigcup_{j=1}^{n}\left[a_j,b_j\right]$ жидкость со скоростью $\mathrm{v}_{\mathrm{g}}\big|_{\mathrm{g}=\sim}=-\mathrm{v}(r)$ $(r\in L)$ впрыскивается в грунтовый массив. Требуется определить потенциал скоростей $\ddot{}\,(r,\mathrm{g})$, связанный с давлением $p(r,\mathrm{g})$ и зависимостью $\ddot{}\,(r,\mathrm{g})=-kp(r,\mathrm{g})$, где k –коэффициент фильтрации грунта [1]. Для компонент скоростей имеем:

$$\mathrm{v}_r=\frac{\partial\ddot{}}{\partial r},\quad \mathrm{v}_{\mathrm{g}}=\frac{1}{r}\frac{\partial\ddot{}}{\partial\mathrm{g}},\qquad \left((r,\mathrm{g})\in\Omega=\{r>0;\ 0<\mathrm{g}<\sim\}\right)$$

Описанная задача плоской теории стационарной фильтрации в клиновидном грунтовом массиве математически формулируется в виде следующей граничной задачи:

$$\begin{cases}\Delta\ddot{}=\dfrac{\partial^2\ddot{}}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\ddot{}}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2\ddot{}}{\partial\mathrm{g}^2}=0 & \left((r,\mathrm{g})\in\Omega\right)\\ \mathrm{v}_{\mathrm{g}}\big|_{\mathrm{g}=0}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\ddot{}}{\partial\mathrm{g}}\Big|_{\mathrm{g}=0}=0;\quad \mathrm{v}_{\mathrm{g}}\big|_{\mathrm{g}=\sim}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\ddot{}}{\partial\mathrm{g}}\Big|_{\mathrm{g}=\sim}=-\mathrm{v}(r) & (0<r<\infty)\\ \operatorname{grad}\ddot{}\to 0\quad \text{при}\quad r\to\infty & \end{cases}\tag{1a,d}$$

Сначала будем считать, что вертикальная компонента скорости v_{g} на грани клина $\mathrm{g}=\sim$ задана на полубесконечном интервале $0<r<\infty$, а затем примем $\mathrm{v}(r)\equiv 0$ при $r\in(0,\infty)\setminus L$.

Решение граничной задачи (1a,d) построим при помощи интегрального преобразования Меллина, для чего введём в рассмотрение трансформанты Меллина

$$\bar{\Phi}(\gamma, p) = \int\limits_0^\infty \Phi(r,\gamma) r^{p-1} dr;\ \bar{v}_\gamma(\gamma, p) = \int\limits_0^\infty v_\gamma(r,\gamma) r^p dr \quad (\varepsilon - 1 < \operatorname{Re} p < 0)$$

Здесь полоса регулярности $\varepsilon - 1 < \operatorname{Re} p < 0$ преобразования Меллина, как в [3], определяется из условий сходимости интеграла Меллина и из физических предположений относительно поведения компонент скоростей на бесконечности и в вершине клина. По аналогии с [3] здесь примем, что $v_r, v_\gamma = O(1/r)$ при $r \to \infty$ и $v_r, v_\gamma = O(r^{-\varepsilon})$ $(\varepsilon > 0)$ при $r \to 0$.

Далее обе части дифференциального уравнения (1a) умножим на r^{p+1}, а обе части граничных условий (1b) и (1c) – на r^p и полученные результаты проинтегрируем от 0 до ∞. Приняв во внимание (1d), после интегрирования по частям граничную задачу (1a,d) преобразуем в следующую граничную задачу для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\bar{\Phi}}{d\gamma^2} + p^2\bar{\Phi} = 0 \quad (0 < \gamma < \alpha) \\ \left.\dfrac{d\bar{\Phi}}{d\gamma}\right|_{\gamma=0} = 0;\ \left.\dfrac{d\bar{\Phi}}{d\gamma}\right|_{\gamma=\alpha} = -\bar{v}(p);\ \bar{v}(p) = \int\limits_0^\infty v(r) r^p dr \end{cases} \tag{2a,d}$$

Общее решение уравнения (2a) выражается формулой

$$\bar{\Phi}(\gamma, p) = A(p)\sin(p\gamma) + B(p)\cos(p\gamma) \quad (0 \le \gamma \le \alpha).$$

После определения постоянных $A(p)$ и $B(p)$ из граничных условий (2b) и (2c) это решение запишется в виде

$$\bar{\Phi}(\gamma, p) = \bar{v}(p)\cos(p\gamma)/p\sin(p\alpha) \quad (0 \le \gamma \le \alpha).$$

Теперь по формуле обратного преобразования Меллина

$$\Phi(r,\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \bar{\Phi}(\gamma, p) r^{-p} dp = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left[r^{-p}\bar{v}(p)\cos(p\gamma)/p\sin(p\alpha) \right] dp \quad (\varepsilon - 1 < c < 0).$$

Отсюда

$$\frac{\partial\Phi(r,\gamma)}{\partial r} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \bar{\Phi}(\gamma, p)\, p r^{-p-1} dp = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\cos(p\gamma)}{\sin(p\alpha)}\bar{v}(p) r^{-p-1} dp$$

Полагая в этой формуле $\gamma = \alpha$, будем иметь:

$$\frac{d\Phi(r,\alpha)}{dr} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \operatorname{ctg}(p\alpha)\bar{v}(p) r^{-p-1} dp \quad (0 < r < \infty;\ \varepsilon - 1 < c < 0) \tag{3}$$

Далее подставим выражение $\bar{v}(p)$ из (2d) в (3) и поменяем порядок интегрировния. После простых преобразований получим

$$\frac{d\Phi(r,\alpha)}{dr} = -\frac{1}{r}\int\limits_0^\infty K(r, r_0) v(r_0) dr_0;\ K(r, r_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \operatorname{ctg}(p\alpha)\left(\frac{r_0}{r}\right)^p dp \quad (0 < r < \infty) \tag{4a,b}$$

Займёмся вычислением интеграла (4b). Подынтегральная функция $h(p) = \operatorname{ctg}(p\alpha)$ в нулевой точке имеет простой полюс, а ближайшим левым полюсом будет точка $p = -\pi/\alpha$. Следовательно, первоначальная полоса регулярности можно расширить до полосы $-\pi/\alpha < \operatorname{Re} p < 0$ и, поэтому, $-\pi/\alpha < c < 0$. Теперь прямую интегрирования $(c - i\infty, c + i\infty)$ (4b) можем перенести на мнимую ось $(-i\infty, i\infty)$ и из полученного результата вычтем полувычет подынтегральной функции в нулевой точке. Таким путём находим

$$K\left(r,r_0\right)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\mathrm{ctg}\left(p\alpha\right)\left(\frac{r_0}{r}\right)^p dp=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\mathrm{ctg}\left(p\alpha\right)\left(\frac{r_0}{r}\right)^p dp-\frac{1}{2\alpha}$$

Полагая в этой формуле $p=i\tau$, $\left(-\infty<\tau<\infty\right)$, после очевидных простых преобразований и при помощи известной формулы из [4] (стр. 85, ф.-ла 2.9(3)) получим:

$$K\left(r,r_0\right)=r^{\pi/\alpha}\Big/\alpha\left(r_0^{\pi/\alpha}-r^{\pi/\alpha}\right)\quad\left(0<r,r_0<\infty\right)\tag{5}$$

С учётом (5) формула (4а) примет вид

$$\frac{d\varphi\left(r,\alpha\right)}{dr}=-\frac{1}{\alpha r}\int\limits_0^\infty\frac{r^{\pi/\alpha}v\left(r_0\right)dr_0}{r_0^{\pi/\alpha}-r^{\pi/\alpha}}\quad\left(0<r<\infty\right)$$

или вид

$$\frac{d\varphi\left(r,\alpha\right)}{dr}=-\frac{r^{(\pi/\alpha)-1}}{\alpha}\int\limits_L\frac{v\left(r_0\right)dr_0}{r_0^{\pi/\alpha}-r^{\pi/\alpha}}\quad\left(0<r<\infty\right)\tag{6}$$

Теперь поставим задачу: какова должна быть вертикальная компонента $v\left(r\right)$ впрыскиваемой в клиновидное грунтовое основание жидкости, чтобы на системе отрезков L давление $p\left(r,\alpha\right)$ равнялось наперёд заданной функции $f\left(r\right)$, т.е. $p\left(r,\alpha\right)=f\left(r\right)\ \left(r\in L\right)$. В производных это условие запишется в виде

$$\frac{d\varphi\left(r,\alpha\right)}{dr}=-k\frac{dp\left(r,\alpha\right)}{dr}=-kf'\left(r\right)\quad\left(r\in L\right)$$

Подставляя сюда (6), придём к определяющему сингулярному интегральному уравнению (СИУ) поставленной задачи

$$\frac{r^{(\pi/\alpha)-1}}{\alpha}\int\limits_L\frac{v\left(r_0\right)dr_0}{r_0^{\pi/\alpha}-r^{\pi/\alpha}}=kf'\left(r\right)\quad\left(r\in L\right)\tag{7}$$

где интеграл при $r=r_0$ понимается в смысле главного значения по Коши.

Для полноты постановки задачи необходимо ещё задать расходы Q_j жидкости через каждый отрезок системы L:

$$\int\limits_{a_j}^{b_j}v\left(r\right)dr=Q_j\quad\left(j=\overline{1,n}\right)\tag{8}$$

Далее определяющее СИУ (7) и условия (8) представим в безразмерных координатах и величинах, для чего положим

$$x=\left(\frac{r}{a}\right)^{\pi/\alpha};\quad s=\left(\frac{r_0}{a}\right)^{\pi/\alpha};\quad \alpha_j=\left(\frac{a_j}{a}\right)^{\pi/\alpha};\quad \beta_j=\left(\frac{b_j}{a}\right)^{\pi/\alpha}\quad\left(j=\overline{1,n}\right);\quad L_0=\bigcup_{j=1}^n\left[\alpha_j,\ \beta_j\right]$$

$$\chi\left(x\right)=\frac{1}{k}x^{(\alpha/\pi)-1}v\left(ax^{\alpha/\pi}\right);\qquad g\left(x\right)=x^{(\alpha/\pi)-1}f'\left(ax^{\alpha/\pi}\right)$$

В результате, СИУ (7) преобразуется к виду

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{L_0}\frac{\chi\left(s\right)ds}{s-x}=g\left(x\right)\quad\left(x\in L_0\right)\tag{9}$$

а условия (8) – к виду

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{a_j}^{b_j}\chi\left(x\right)dx=Q_j^{(0)}\quad\left(j=\overline{1,n};\ Q_j^{(0)}=\frac{Q_j}{ak\alpha}\right)\tag{10}$$

Итак, решение СИУ (9) должно удовлетворять условиям (10).

Отметим, что через СИУ (9) при условиях (10) описывается классическая контактная задача теории упругости о вдавливании системы штампов в упругую полуплоскость, допускающее замкнутое решение [5]. С другой стороны, решение СИУ (9)-(10) известным численно-аналитическим методом [6], основанным на квадратурных формулах Гаусса, как в [7], можно свести к решению системы систем линейных алгебраических уравнений простой структуры.

2. Перейдём к смежной задаче теории упругости в постановке антиплоской деформации. Пусть отнесённое к правой прямоугольной системе координат $Oxyz$ упругое пространственное тело с модулем сдвига G, бесконечно простирающееся в обоих направлениях оси Oz, сечение которого с плоскостью $z=0$ представляет собой клиновидную область Ω, рассмотренную в предыдущем пункте, по грани $\theta=0$ жестко защемлено, а на грани $\theta=\alpha$ заданы смешанные граничные условия. А именно, на системе отрезков L задана компонента упругого перемещения в направлении оси Oz, а на остальной части грани $\theta=\alpha$ касательные напряжения равны нулю. Предполагается, что при таких условиях тело находится в режиме антиплоской деформации в направлении оси Oz с базовой плоскостью Oxy или в полярной системе координат с базовой плоскостью (r,θ), где расположена клиновидная область Ω. Описанная задача математически формулируется в виде следующей смешанной граничной задачи:

$$\begin{cases} \Delta w=\dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}=0 \quad \left((r,\theta)\in\Omega\right) \\ w(r,\theta)\big|_{\theta=0}=0 \quad (0<r<\infty); \quad w(r,\theta)\big|_{\theta=\alpha}=f(r) \quad (r\in L); \\ \tau_{\theta z}\big|_{\theta=\alpha}=\dfrac{G}{r}\dfrac{\partial w}{\partial\theta}\bigg|_{\theta=\alpha}=0 \quad \left(r\in(0,\infty)\setminus L\right); \quad \tau_{rz},\tau_{\theta z}\to 0 \quad \text{при} \quad r\to\infty \end{cases} \tag{11a,e}$$

где $w(r,\theta)$ – единственная отличная от нуля компонента перемещений точек упругого клина Ω в направлении оси Oz, $f(r)$ – заданная функция, а $\tau_{rz},\tau_{\theta z}$ – компоненты касательных напряжений.

Решение граничной задачи опять сформулируем в виде СИУ и с этой целью предварительно построим решение вспомогательной граничной задачи:

$$\begin{cases} \Delta w=\dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}=0 \quad \left((r,\theta)\in\Omega\right) \\ w(r,\theta)\big|_{\theta=0}=0; \quad \tau_{\theta z}\big|_{\theta=\alpha}=\dfrac{G}{r}\dfrac{\partial w}{\partial\theta}\bigg|_{\theta=\alpha}=\tau(r) \quad (0<r<\infty); \quad \tau_{rz},\tau_{\theta z}\to 0 \quad \text{при} \quad r\to\infty \end{cases} \tag{12a,d}$$

где функцию $\tau(r)$ пока будем считать заданной.

Решение задачи (12a,d), как в предыдущем пункте, построим при помощи преобразования Меллина. В результате получим

$$w(r,\alpha)=\frac{1}{\pi G}\int_L \ln\operatorname{cth}\left|\pi\ln\left(r_0/r\right)/4\alpha\right|\tau(r_0)\,dr_0 \quad (0<r<\infty) \tag{13}$$

Теперь при помощи (13) реализуем граничное условие (11c), в результате чего придём к определяющему интегральному уравнению поставленной задачи:

$$\frac{1}{\pi G}\int_L \ln\operatorname{cth}\left|\pi\ln\left(r_0/r\right)/4\alpha\right|\tau(r_0)\,dr_0=f(r) \quad (r\in L) \tag{14}$$

Для полноты постановки задачи необходимо ещё задать равнодействующие T_j на отрезках $\left[a_j,b_j\right]$ системы L, т.е.

$$\int_{a_j}^{b_j} 2\left(r_0\right)dr_0 = T_j \quad \left(j=\overline{1,n}\right) \tag{15}$$

Далее в (14)-(15) перейдём к безразмерным величинам, полагая

$$x=\ln\left(r/a\right);\quad t=\ln\left(r_0/a\right);\quad \sim_j=\ln\left(a_j/a\right);\quad {}_j=\ln\left(b_j/a\right);\quad L_0=\bigcup_{j=1}^{n}\left[\sim_j,\ {}_j\right]$$

$$\ddot{}\left(t\right)=\ddot{}\left(ae^t\right)e^t/G;\quad g\left(x\right)=f'\left(ae^x\right);\quad T_j^{(0)}=T_j/aG_j \quad \left(j=\overline{1,n}\right)$$

В результате, уравнение (15) преобразуется к виду

$$\frac{1}{®}\int_L \ln\operatorname{cth}\left|\frac{®\left(x-t\right)}{4\sim}\right| \ddot{}\left(t\right)dt = g\left(x\right) \quad \left(x\in L_0\right) \tag{16}$$

а условия (15) – к виду

$$\int_{\sim_j}^{{}_j} 2\left(t\right)dt = T_j^{(0)} \quad \left(j=\overline{1,n}\right) \tag{17}$$

После дифференцирования обеих частей (16) по переменной x и при помощи простых преобразований можно перейти к ядру Коши и, в результате, уравнение (16) преобразуется в СИУ (9) при условиях (17). Далее подробно исследуется частный случай одного отрезка, $\left(n=1\right)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аравин В.И., Нумеров С.Н. Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде. М.: Гос. изд. техн. теор. лит. 1953. 616 с.
2. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
3. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Ленинград: Наука, 1977. 402с.
4. Бейтмен Г., Эрдейи А. и др. Таблицы интегральных преобразований. Т.I. М.: Наука, 1969. 344с.
5. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. М.–Ленинград: 1949. 270с.
6. Erdogan F., Gupta G.D., Cook T.S. The numerical solutions of singular integral equations. //Methods of Analysis an solution of crack problems, pp 368-425, Noordhoff Intern. Publ., Leyden, 1973.
7. Григорян М.С. Об одной смешанной граничной задаче для упругого клина при антиплоской деформации. Актуальные проблемы механики сплошной среды // Труды II Международной конференции: Дилижан, Армения. 4-8 октября, 2010. Т.1. С.209-213.

Сведения об авторе:

Григорян Марине Самвеловна – мл.н.сотр. ИМ НАН РА, преподаватель кафедры высшей математики ЕрГУАС. **Тел.:** (374 222) 3 61 36, (374 91) 63 97 58. **E-mail:** gmarinchka@mail.ru

ОЦЕНКА РАЦИОНАЛЬНЫХ КОНСТРУКТИВНЫХ ПАРАМЕТРОВ В МЕТАЛЛО-КОМПОЗИТНЫХ БОЛТОВЫХ СОЕДИНЕНИЯХ

Гришин В.И., Качарава И.Н.

Рассматриваются вопросы местной прочности в металло-композитных болтовых соединениях стыка консоли крыла с центропланом самолета. Решается задача выбора рациональных конструктивных параметров по условию максимальной несущей способности соединения.

В современных авиационных конструкциях растёт доля компонентов, изготавливаемых из полимерных композиционных материалов (ПКМ). Развиваются соответствующие вычислительные методы на основе различных теорий разрушения композиционного материала в регулярной зоне и соединениях агрегатов летательного аппарата (ЛА) [1]. Несмотря на это, остаются открытыми вопросы местной прочности в зонах стыка металлической и композитной части конструкции. На данном этапе прочность и долговечность таких конструкций требует подтверждения на конструктивно подобных образцах натурных узлов и агрегатов ЛА. В частности, в ЦАГИ проводились испытания конструктивно подобных образцов варианта узла стыковки отъемной части крыла с центропланом перспективного пассажирского самолета (рис.1). Конструкция образца стыковочного узла состоит из двух основных деталей: захвата − из титанового сплава и композитной панели − из углепластика, соединённых между собой. Детали соединяются двухрядным набором болтов: диаметр $d = 16$ и 20 мм, материал − сталь 30ХГСА (рис.1).

При испытаниях наиболее слабыми элементами в конструкции оказались болты. Несмотря на то, что диаметры болтов были выбраны из условия равнопрочности по сопротивлению срезу, конструкция оказалась неравнопрочной по причине изгибной деформации болтов от растягивающих усилий ***P*** и возрастающей осевой нагрузки, вызванной усилиями затяжки гайки ***N*** (рис.1).

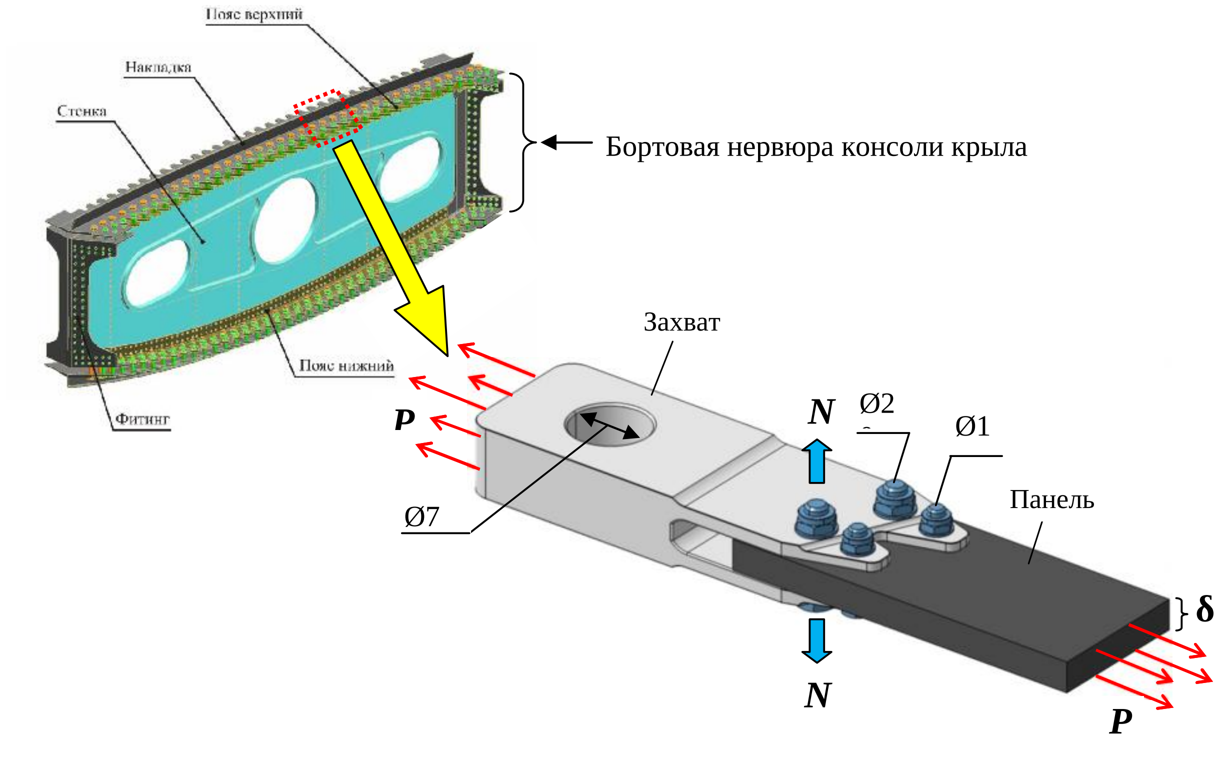
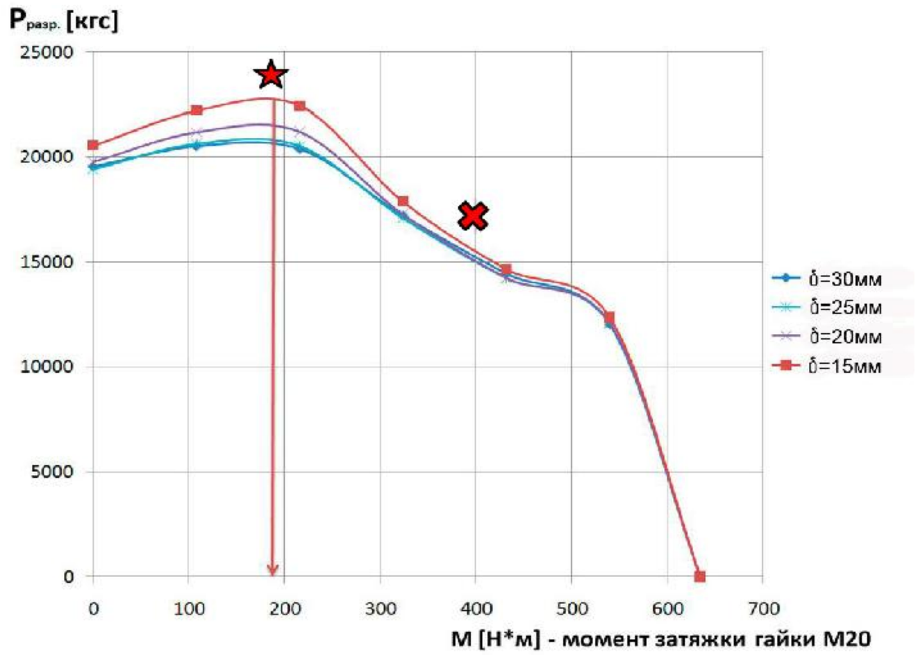


Рис.1. Конструктивно подобный образец стыка отъемной части крыла с центропланом самолета

На основе упрощённой модели одноточечного болтового соединения получена оценка максимальной несущей способности $\boldsymbol{P}_{разр.}$[кгс] в зависимости от момента затяжки M [Н·м] и толщины композитной панели δ [мм] (рис.2).

Из рис.2 видно, что по обоим проектным параметрам существуют оптимальные значения. В частности, оптимальная затяжка болта (d=20мм) лежит в области 200 Н·м (показано звездочкой на рис.2а). На начальном этапе затяжки гайки прочность болта возрастает, а в дальнейшем – падает до нуля, когда напряжения от растяжения достигают предельно допустимого значения.

а)



б)

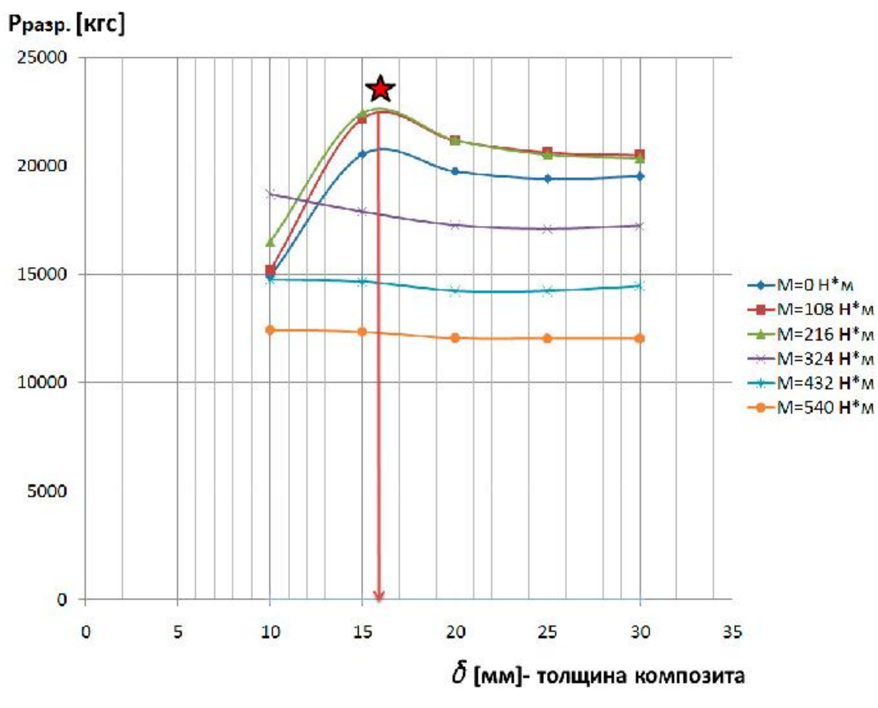


Рис.2. График зависимости несущей способности одноточечного болтового соединения *а*) от момента затяжки **M**, *б*) от толщины композитной панели **δ**

Также существует оптимальное соотношение диаметра болта к толщине панели крыла (рис.2б),

$$d / \delta = 20 / 16 = 1,25$$

Близкие по характеру зависимости реализуются в болтовых соединениях авиационных конструкций из древесины [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Сироткин О.С., Гришин В.И., Литвинов В.Б. Проектирование, расчёт и технология соединений авиационной техники. М.: Машиностроение, 2006.
2. Астахов М.Ф., Караваев А.В., Макаров С.Я., Суздальцев Я.Я. и др. /Справочная книга по расчёту самолета на прочность. Государственное издательство оборонной промышленности. 1954.

Сведения об авторах:

Гришин Вячеслав Иванович – доктор технических наук, профессор, Центральный аэрогидродинамический институт имени проф. Н.Е.Жуковского, главный научный сотрудник отделения прочности (НИО-3 ЦАГИ), 8-495-556-47-06
E-mail: Iraklykacharava@rambler.ru

Качарава Ираклий Нугзарович – аспирант по специальности прочность и тепловые режимы летательных аппаратов, Центральный аэрогидродинамический институт имени проф. Н.Е.Жуковского, начальник сектора прочности НТЦ НПК ЦАГИ, 8-495-556-38-27
E-mail: Iraklykacharava@rambler.ru

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УСТОЙЧИВОСТИ ДВУХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНКИ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ГАЗА

Гришко А. М.

В настоящей работе рассматривается несимметрично неоднородная по толщине пластинка в сверхзвуковом потоке газе. Несимметричность понимается в смысле, что если функции механических характеристик материала пластинки непрерывны по толщинной координате, то они несимметричны относительно срединной плоскости. Если же они кусочно-непрерывны (слоистые пластинки), то задача несимметрична относительно любой плоскости раздела слоёв и срединной поверхности. При данной постановке задачи уравнения изгибных и планарных колебаний не отделяются [1]. Выводится зависимость критической скорости флаттера несимметрично-неоднородной по толщине пластинки от параметра неоднородности пластинки. По полученным результатам приводятся численные примеры для двухслойной пластинки.

1. Модель панельного флаттера. Упругая пластинка в прямоугольной декартовой системе координат (x, y, z) занимает область $0 \le x \le a$, $0 \le y \le l$, $-h_2 \le z \le h_1$. Верхняя поверхность панели подвергается воздействию сверхзвукового потока газа. Модуль Юнга E, коэффициент Пуассона ν и плотность материала ρ являются функциями координаты z. Согласно [1] колебания тонких пластин, в соответствии с теорией Кирхгофа, описываются следующей системой уравнений:

$$C\Delta\varphi = m\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}, \quad B_0\Delta\psi = m\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{1}$$

$$D\Delta^2 w + m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - K\Delta^2\varphi = p_i - p_e \tag{2}$$

где C – эффективная жёсткость на растяжение (сжатие), B_0 – эффективная жёсткость на сдвиг, m – приведённая масса, D –эффективная жёсткость пластинки на изгиб (D>0):

$$C = \int_{-h_2}^{h_1} \frac{E}{1-\nu^2}dz; \quad B_0 = \frac{1}{2}\int_{-h_2}^{h_1} \frac{E}{1+\nu}dz$$

$$D = D_0 - C^{-1}K^2; \quad D_0 = \int_{-h_2}^{h_1} \frac{z^2E}{1-\nu^2}dz$$

$$K = \int_{-h_2}^{h_1} \frac{zE}{1-\nu^2}dz; \quad m = \int_{-h_2}^{h_1} \rho\, dz .$$

p_i – величина давления на панель при z < 0, p_e – величина давления на панель при z > 0. При больших сверхзвуковых скоростях, согласно «поршневой теории» [2]:

$$p = p_e + \frac{\varkappa p_\infty}{c_\infty}\left(\frac{\partial w}{\partial t} + v\frac{\partial w}{\partial y}\right) \tag{3}$$

где v – скорость невозмущённого потока газа вдоль оси Y., w = w(y) – прогиб пластинки.

Рассмотрим задачу динамической неустойчивости несимметрично-неоднородной по толщине прямоугольной пластинки при следующих граничных условиях шарнирного закрепления кромки y = 0 и l:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = 0; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0; \quad w = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 .$$

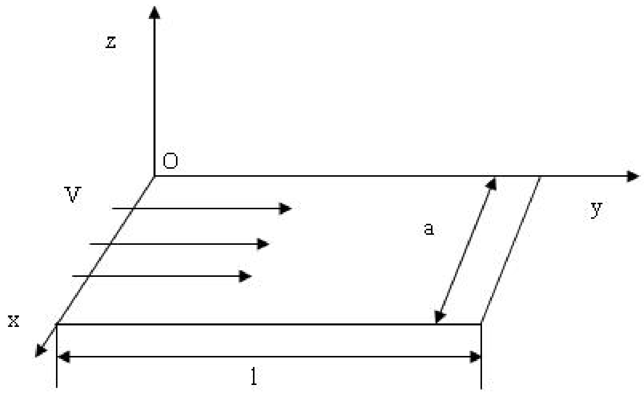


Рис. 1 Схема действия воздушного потока на упругую пластинку

2. **Анализ устойчивости**. Точным решением задачи устойчивости является тривиальное решение уравнений (1), (2): w ≡ 0, φ ≡ 0, ψ ≡ 0. Приближённым решением уравнений (1), (2) является:

$$w(x,y,t) = w_1(x,y)\exp(\lambda t);$$

$$\varphi(x,y,t) = \varphi_1(x,y)\exp(\lambda t);$$

$$\psi(x,y,t) = \psi_1(x,y)\exp(\lambda t).$$

В данном случае анализ собственных частот проводится относительно экспоненты λ.
Разложение решения уравнений (1) - (2) в ряд представлен в следующем виде:

$$w(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) f_n(x,y) \qquad (4)$$

где $q_n(t)$ – приведённая координата.

3. **Метод решения**. Для упрощения примем a >> l, что разрешает рассмотреть цилиндрический изгиб срединной поверхности неоднородной по толщине пластинки относительно координаты y.
Из условия цилиндрического изгиба пластинки получаем:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0; \quad w = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0; \quad y = \mathrm{const}.$$

Колебания неоднородной по толщине пластинки при условии цилиндрического изгиба:

$$C\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = m\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad B_0\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = m\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \qquad (5)$$

$$D\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - K\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = p_i - p_e \qquad (6)$$

Решение уравнений (5), (6), согласно (4), представим в виде:

$$w(y,t) = \sum_n w_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}y;$$

$$\varphi(y,t)=\sum_n \varphi_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}y\,; \tag{7}$$

$$\cdot\,(y,t)=\sum_n \cdot\,_n(t)\sin\frac{® n}{l}y\,.$$

В случае задачи динамической неустойчивости минимальным количеством членов в уравнениях (7) является 2:

$$w(y,t)=w_1(t)\sin\frac{®}{l}y+w_2(t)\sin\frac{2®}{l}y\,; \tag{8}$$

$$\varphi(y,t)=\varphi_1(t)\sin\frac{\pi}{l}y+\varphi_2(t)\sin\frac{2\pi}{l}y\,; \tag{9}$$

$$\cdot\,(y,t)=\cdot\,_1(t)\sin\frac{®}{l}y+\cdot\,_2(t)\sin\frac{2®}{l}y\,. \tag{10}$$

Подставляя выражения (9) и (10) в (5) и применяя метод Галёркина, получим:

$$\ddot{\varphi}_1(t)+k^2\varphi_1(t)=0\,;\,\ddot{\varphi}_2(t)+4k^2\varphi_2(t)=0 \tag{11}$$

$$\ddot{\cdot}\,_1(t)+\sim^2\cdot\,_1(t)=0\,;\,\ddot{\cdot}\,_2(t)+4\sim^2\cdot\,_2(t)=0 \tag{12}$$

где

$$k^2=C\frac{®^2}{ml^2}\,;\quad \sim^2=B_0\frac{®^2}{ml^2}\,.$$

Решая уравнения (11) и (12):

$$\varphi_1(t)=\overline{\varphi}_1e^{ikt}+\overline{\varphi}_2e^{-ikt}\,; \tag{13}$$

$$\varphi_2(t)=\overline{\overline{\varphi}}_1e^{2ikt}+\overline{\overline{\varphi}}_2e^{-2ikt}\,; \tag{14}$$

$$\cdot\,_1(t)=\overline{\cdot}\,_1e^{i\sim t}+\overline{\cdot}\,_2e^{-i\sim t}\,;$$

$$\cdot\,_2(t)=\overline{\overline{\cdot}}\,_1e^{2i\sim t}+\overline{\overline{\cdot}}\,_2e^{-2i\sim t}\,.$$

Подставляя уравнения (3), (8) и (9) в уравнение (6) и применяя метод Галёркина, получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{ml}{2}\ddot{w}_1(t)+\frac{fl}{2}\dot{w}_1(t)+\frac{D\pi^4}{2l^3}w_1(t)-\frac{4fv}{3}w_2(t)-\frac{K\pi^4}{2l^3}\varphi_1(t)=0 \tag{15}$$

$$\frac{ml}{2}\ddot{w}_2(t)+\frac{fl}{2}\dot{w}_2(t)+\frac{8D\pi^4}{l^3}w_2(t)+\frac{4fv}{3}w_1(t)-\frac{8K\pi^4}{l^3}\varphi_2(t)=0 \tag{16}$$

где

$$f=\frac{\text{i}\,p_\infty}{c_\infty}\,.$$

4. Численный анализ. Общий случай решения системы дифференциальных уравнений (15) и (16) при условиях $\varphi_1(t)\neq 0$, $\varphi_2(t)\neq 0$ рассмотрен в [3].

Рассмотрим частный случай динамической неустойчивости несимметрично-неоднородной по толщине прямоугольной пластинки при условиях: $\varphi_1(t) = \varphi_{10}\cos kt, \quad \varphi_2(t) \equiv 0$.

Решение системы уравнения дифференциальных уравнений (15) и (16) представим в виде:

$$w_1(t) = A_1 \sin kt + A_2 \cos kt + B_1 \sin 2kt + B_2 \cos 2kt$$

$$w_2(t) = A_3 \sin kt + A_4 \cos kt + B_3 \sin 2kt + B_4 \cos 2kt \tag{17}$$

Подставляя данное решение в систему дифференциальных равнений (15) и (16), получим:

$$\begin{cases} \left(-\frac{ml}{2}k^2 + \frac{\pi^4 D}{2l^3}\right)A_1 - \frac{fl}{2}kA_2 - \frac{4fv}{3}A_3 = 0 \\ \frac{fl}{2}kA_1 + \left(-\frac{ml}{2}k^2 + \frac{\pi^4 D}{2l^3}\right)A_2 - \frac{4fv}{3}A_4 = \frac{\pi^4 K}{2l^3}\varphi_{10} \\ \frac{4fv}{3}A_1 + \left(-\frac{ml}{2}k^2 + \frac{8\pi^4 D}{l^3}\right)A_3 - \frac{fl}{2}kA_4 = 0 \\ \frac{4fv}{3}A_2 + \frac{fl}{2}kA_3 + \left(-\frac{ml}{2}k^2 + \frac{8\pi^4 D}{l^3}\right)A_4 = 0 \end{cases} \tag{18}$$

$$\begin{cases} \left(-2mlk^2 + \frac{\circledR^4 D}{2l^3}\right)B_1 - flkB_2 - \frac{4fv}{3}B_3 = 0 \\ flkB_1 + \left(-2mlk^2 + \frac{\circledR^4 D}{2l^3}\right)B_2 - \frac{4fv}{3}B_4 = 0 \\ \frac{4fv}{3}B_1 + \left(-2mlk^2 + \frac{8\circledR^4 D}{l^3}\right)B_3 - flkB_4 = 0 \\ \frac{4fv}{3}B_2 + flkB_3 + \left(-2mlk^2 + \frac{8\circledR^4 D}{l^3}\right)B_4 = 0 \end{cases} \tag{19}$$

Из условия равенства нулю детерминанта системы дифференциальных уравнений (18) получим:

$$v_1^2 = \frac{9}{64}\left(k^2l^2 - \frac{k^4l^2m^2}{f^2} + \frac{17Dk^2\circledR^4 m}{f^2l^2} - \frac{16D^2\circledR^8}{f^2l^6} - \frac{\sqrt{-f^6k^6l^{28}m^2 + 68Df^6k^4l^{24}\circledR^4 m - 289D^2f^6k^2l^{20}\circledR^8}}{f^4l^{12}}\right) \tag{20}$$

$$v_2^2 = \frac{9}{64}\left(k^2l^2 - \frac{k^4l^2m^2}{f^2} + \frac{17Dk^2\circledR^4 m}{f^2l^2} - \frac{16D^2\circledR^8}{f^2l^6} + \frac{\sqrt{-f^6k^6l^{28}m^2 + 68Df^6k^4l^{24}\circledR^4 m - 289D^2f^6k^2l^{20}\circledR^8}}{f^4l^{12}}\right)$$

Из условия равенства нулю детерминанта системы дифференциальных уравнений (19) получим:

$$v_3^2 = \frac{9}{16}\left(k^2l^2 - \frac{4k^4l^2m^2}{f^2} + \frac{17Dk^2\circledR^4 m}{f^2l^2} - \frac{4D^2\circledR^8}{f^2l^6} - \frac{\sqrt{-64f^6k^6l^{28}m^2 + 272Df^6k^4l^{24}\circledR^4 m - 289D^2f^6k^2l^{20}\circledR^8}}{2f^4l^{12}}\right) \tag{21}$$

$$v_4^2 = \frac{9}{16}\left(k^2 l^2 - \frac{4k^4 l^2 m^2}{f^2} + \frac{17Dk^2 \circledR^4 m}{f^2 l^2} - \frac{4D^2 \circledR^8}{f^2 l^6} - \frac{\sqrt{-64 f^6 k^6 l^{28} m^2 + 272 D f^6 k^4 l^{24} \circledR^4 m - 289 D^2 f^6 k^2 l^{20} \circledR^8}}{2 f^4 l^{12}} \right)$$

Минимальная величина из (20), (21) будет критической скоростью динамической неустойчивости несимметрично неоднородной по толщине пластинки:

$$v_{cr}^2 = \min(v_1^2, v_2^2, v_3^2, v_4^2) .$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Белубекян М.В. К вопросу колебаний неоднородной по толщине пластинки. //Изв.НАН Армении. Механика. 2002. Т.55. №3. С.34-41.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: ФМ, 1961.
3. M.V. Belubekyan, A.M. Grishko. The problem of flutter of a non-symmetric non-homogeneous over thickness rectangular plate. Shell Structures: Theory and Applications. Proceedings of the 10th SSTA Conference, Gdansk, Poland, 16 – 18 October 2013 (in printing).

Сведения об авторе:

Гришко Анна Микаеловна – аспирант кафедры механики, Ереванский государственный университет, факультет математики и механики. (374 98) 15 28 20.
E-mail: ann.gevorgyan@gmail.com, annochka1986@gmail.com

ХАРАКТЕР СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ОРТОТРОПНОЙ ОБОЛОЧКИ В ЗОНЕ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ПРИ НАЛИЧИИ ВЯЗКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

Гулгазарян Л.Г.

На основе уравнений пространственной задачи теории упругости получены асимптотические решения неклассических краевых задач о собственных колебаниях ортотропных оболочек в зоне пограничного слоя при наличии вязкого внутреннего сопротивления, когда на верхней лицевой поверхности оболочки заданы два варианта пространственных граничных условий, а на нижней лицевой поверхности задан вектор перемещения. Определены функции типа пограничного слоя, установлены характеристические уравнения для определения скорости затухания пограничных колебаний при удалении от боковой поверхности во внутрь оболочки.

Среди различных причин затухания колебаний механических систем одной из важнейших является рассеяние энергии внутри самой колебательной системы, в частности, вязкое трение, которое обычно принимается пропорциональным скорости перемещения точек [1]. Для определения и анализа напряжённо-деформированных состояний тонких тел (балки, стрежни, пластины, оболочки) в последние десятилетия широко используется асимптотический метод решения сингулярно возмущённых дифференциальных уравнений [2,3]. Поскольку один из геометрических размеров оболочки резко отличается от остальных, при переходе к безразмерным координатам в уравнениях и соотношениях трехмерной задачи появляется малый геометрический параметр и преобразованные уравнения являются сингулярно возмущёнными относительно этого параметра [3,4].

Рассматриваются собственные колебания в зоне пограничного слоя вблизи боковой поверхности $\alpha=\alpha_0$ ортотропной оболочки толщины $2h$: $D=\{\sim,\ ,\text{¥};\sim,\ \in D_0,\ -h\le\text{¥}\le h\}$ при наличии вязкого сопротивления, где D_0 – срединная поверхность, $\sim,\ $ – линии кривизны срединной поверхности оболочки, ¥ – прямолинейная ось, направленная перпендикулярно к срединной поверхности. Для упрощения выкладок будем пользоваться компонентами несимметричного тензора напряжений $^2{}_{ij}$. Требуется найти решения динамических уравнений теории упругости в выбранной триортогональной системе координат при следующих граничных условиях на лицевых поверхностях $\text{¥}=\pm h$ [2,3]:

Имеем: уравнения движения

$$\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\sim}\left(B^2{}_{\sim\sim}\right)-k\,^2\quad+\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial}\left(A^2\ {}_{\sim}\right)+k_{\sim}{}^2{}_{\sim}\ +\left(1+\frac{\text{¥}}{R_1}\right)\frac{\partial^2{}_{\sim\text{¥}}}{\partial\text{¥}}+\frac{2^2{}_{\sim\text{¥}}}{R_1}-$$

$$-k_1\left(1+\frac{\text{¥}}{R_1}\right)\left(1+\frac{\text{¥}}{R_2}\right)\frac{\partial U}{\partial t}=\,^\circ\left(1+\frac{\text{¥}}{R_1}\right)\left(1+\frac{\text{¥}}{R_2}\right)\frac{\partial^2U}{\partial t^2},\quad (A,B;\ \sim,\ ;\ R_1,R_2;\ U,V)$$

$$\frac{\partial^2{}_{\text{¥¥}}}{\partial\text{¥}}-\left(\frac{^2{}_{\sim\sim}}{R_1}+\frac{^2}{R_2}\right)+\frac{1}{A}\frac{\partial^2{}_{\sim\text{¥}}}{\partial\sim}+\frac{1}{B}\frac{\partial^2\ {}_{\text{¥}}}{\partial}+k\,^2{}_{\sim\text{¥}}+k_{\sim}{}^2\ {}_{\text{¥}}-k_1\left(1+\frac{\text{¥}}{R_1}\right)\left(1+\frac{\text{¥}}{R_2}\right)\frac{\partial W}{\partial t}=$$

$$=\,^\circ\left(1+\frac{\text{¥}}{R_1}\right)\left(1+\frac{\text{¥}}{R_2}\right)\frac{\partial^2W}{\partial t^2}\tag{1}$$

$$\left(1+\frac{\text{¥}}{R_1}\right)^2{}_{\sim}\ =\left(1+\frac{\text{¥}}{R_2}\right)^2\ {}_{\sim}\quad\text{(условие симметрии)}$$

уравнения состояния (соотношения упругости)

$$\left(1+\frac{\text{¥}}{R_2}\right)\left(\frac{1}{A}\frac{\partial U}{\partial\sim}+k_{\sim}V+\frac{W}{R_1}\right)=\left(1+\frac{\text{¥}}{R_1}\right)a_{11}{}^2{}_{\sim\sim}+\left(1+\frac{\text{¥}}{R_2}\right)a_{12}{}^2\quad+a_{13}{}^2{}_{\text{¥¥}}$$

$$(A,B;\ \sim\leftrightarrow\ ;\ R_1\leftrightarrow R_2;\ U\leftrightarrow V;\ a_{11},a_{22};\ a_{13},a_{23})$$

$$\left[1+\yen\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)+\frac{\yen^2}{R_1R_2}\right]\frac{\partial W}{\partial\yen}=\left(1+\frac{\yen}{R_1}\right)a_{13}{}^{2}{}_{\sim\sim}+\left(1+\frac{\yen}{R_2}\right)a_{23}{}^{2}\quad+a_{33}{}^{2}{}_{\yen\yen}$$

$$\left(1+\frac{\yen}{R_1}\right)\left(\frac{1}{B}\frac{\partial U}{\partial}-k\ V\right)+\left(1+\frac{\yen}{R_2}\right)\left(\frac{1}{A}\frac{\partial V}{\partial\sim}-k_{\sim}U\right)=\left(1+\frac{\yen}{R_1}\right)a_{66}{}^{2}{}_{\sim} \tag{2}$$

$$\left[1+\yen\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)+\frac{\yen^2}{R_1R_2}\right]\frac{\partial U}{\partial\yen}-\left(1+\frac{\yen}{R_2}\right)\frac{U}{R_1}+\frac{1}{A}\left(1+\frac{\yen}{R_2}\right)\frac{\partial W}{\partial\sim}=\left(1+\frac{\yen}{R_1}\right)a_{55}{}^{2}{}_{\sim\yen}$$

$$(A,B;\ \sim,\ ;\ R_1\leftrightarrow R_2;\ U,V;\ a_{55},a_{44})$$

где $k_{\sim},k$ – геодезические кривизны, A,B – коэффициенты первой квадратичной формы, R_1,R_2 – главные радиусы кривизны срединной поверхности, k_1 – коэффициент вязкого внутреннего сопротивления (считается, что сопротивление пропорционально скорости точек), ° – плотность, a_{ij} – постоянные упругости.

На лицевой поверхности $\yen=h$ задана одна из следующих групп условий:

$$^{2}{}_{\sim\yen}(h)=0,\ ^{2}{}_{\yen}(h)=0,\ ^{2}{}_{\yen\yen}(h)=0 \tag{3}$$

или

$$U(h)=0,\quad V(h)=0,\quad W(h)=0 \tag{4}$$

а на поверхности $\yen=-h$

$$U(-h)=0,\ V(-h)=0,\ W(-h)=0 \tag{5}$$

Общее решение задачи складывается из решений внутренней (interior) задачи и пограничных (boundary) слоёв [2,3]: $I=Q^{\text{int}}+R_b$, где Q^{int} – решение внутренней задачи, R_b – решение пограничного слоя. Несмотря на то, что пограничный слой локализован вблизи торцов, в общем случае, пограничный слой через граничные условия при $\alpha=\alpha_0,\alpha_1$ влияет на решение внутренней задачи.

Перейдём к безразмерным компонентам вектора перемещения $U=Ru,\ V=R\mathrm{v},\ W=Rw$, где R – характерный размер оболочки (наименьший из радиусов кривизны и линейных размеров срединной поверхности), $\varepsilon=h/R$ – малый параметр, и введём новые независимые переменные по формулам $\alpha-\alpha_0=h\xi,\ \beta=R\eta,\ \gamma=h\zeta$. Разложим величины

$$\frac{1}{A},\frac{1}{B},\ k_\alpha=\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta},\ k_\beta=\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha},$$
$$\frac{1}{R_1},\ \frac{1}{R_2},\ 2H=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2},\ \ K=\frac{1}{R_1R_2} \tag{6}$$

в ряд Тейлора вблизи $\alpha=\alpha_0$, предполагая, что они удовлетворяют условиям разложения. Если Q – любое из этих величин, то

$$Q=Q_n(\alpha-\alpha_0)^n=Q_nR^n\varepsilon^n\xi^n \tag{7}$$

Q_n – коэффициент тейлоровского разложения, по немому индексу “n” происходит суммирование в пределах $[0,+\infty)$. Примем также обозначения: $R^n(1/R_1)_n\xi^n=R_{1n}$, $R^n(1/R_2)_n\xi^n=R_{2n}$, $n=\overline{0,+\infty}$. Имеют место представления:

$$\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}=\frac{\varepsilon^{n-1}}{R}\xi^nd_{1n},\ \ d_{1n}=\left(\frac{1}{A}\right)_nR^n\frac{\partial}{\partial\xi},\ \ \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}=\frac{\varepsilon^n}{R}\xi^nd_{2n},\ \ d_{2n}=\left(\frac{1}{B}\right)_nR^n\frac{\partial}{\partial\eta} \tag{8}$$

Решение преобразованных уравнений будем искать в виде

$$Q_{\sim}\ =Q_{mk}(¶,¦,¸)e^{\mu t}\qquad(\sim,\ \ ,\yen);\ m,k=1,2,3$$

где Q – любая из величин напряжений и перемещений, μ – частота собственных колебаний. В результате получим сингулярно возмущённую малым параметром ε систему относительно Q_{mk}, решение которой ищем в виде асимптотического представления [2, 3]

$$²_{mk} = £^{-1+s} ²^{(s)}_{mk}, \quad m,k = 1,2,3; \quad s = \overline{0,N}; (u, \mathrm{v}, w) = £^{s}\left(u^{(s)}, \mathrm{v}^{(s)}, w^{(s)}\right), \; \mu_{*} = £^{s}\mu_{*s} \tag{9}$$

и припишем всем искомым величинам индекс b (от слова boundary).

$s = \overline{0, N}$ означает, что по немому (повторяющемуся) индексу s происходит суммирование в пределах целочисленных $0, N$, $\mu_*^2 = °h^2\mu^2$, $2K = k_1 h/\sqrt{°}$.

Из решения внутренней задачи определяются главные значения частот собственных колебаний:

при граничных условиях (3), (5): $\mu_{*0n} = -K \pm \sqrt{K^2 - \frac{®^2}{16a_{55}}(2n+1)^2}$, $n \in N_0$ $(a_{55}, a_{44}, \Delta/\Delta_{12})$

при граничных условиях (2), (5): $\mu_{*0n} = -K \pm \sqrt{K^2 - \frac{®^2 n^2}{4a_{55}}}$, $n \in N$ $(a_{55}, a_{44}, \Delta/\Delta_{12})$

После подстановки (9) получается следующая система уравнений:

$$A_0 \frac{\partial \tau^{(s)}_{11b}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau^{(s)}_{13b}}{\partial \zeta} - 2K\omega_{*s} u_b^{(s)} - c^{(j)} u_b^{(s-j)} = R^{(s-1)}_{1\tau} \quad (11b, 12b, 13b;\ 13b, 23b, 33b;\ u, \mathrm{v}, w;\ 1\tau, 2\tau, 3\tau)$$

$$A_0 \frac{\partial u_b^{(s)}}{\partial \xi} - \sum\nolimits^{(s)}_{1b} = R_u^{(s-1)}, \quad \sum\nolimits^{(s)}_{2b} = R_{\mathrm{v}}^{(s-1)}, \quad \frac{\partial w_b^{(s)}}{\partial \zeta} - \sum\nolimits^{(s)}_{3b} = R_w^{(s-1)}, \; A_0 = A(\alpha_0)$$

$$\frac{\partial \mathrm{v}_b^{(s)}}{\partial \zeta} - a_{44}\tau^{(s)}_{23b} = R^{(s-1)}_{4\tau}, \; A_0 \frac{\partial w_b^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial u_b^{(s)}}{\partial \zeta} - a_{55}\tau^{(s)}_{13b} = R^{(s-1)}_{5\tau}, \; c^{(j)} = \sum_{n=0}^{j} \omega_{*(j-n)}\omega_{*(n)} \tag{10}$$

$$A_0 \frac{\partial \mathrm{v}_b^{(s)}}{\partial \xi} - a_{66}\tau^{(s)}_{12b} = R^{(s-1)}_{6\tau}, \; \tau^{(s)}_{12b} - \tau^{(s)}_{21b} = R^{(s-1)}_{7\tau}, \; j = \overline{0, s}, \; \sum\nolimits^{(s)}_{ib} = a_{i1}\tau^{(s)}_{11b} + a_{i2}\tau^{(s)}_{22b} + a_{i3}\tau^{(s)}_{33b}$$

где $R^{(s-1)}_{i\tau}$ – функции, известные для каждого приближения, если известны величины предыдущих приближений, в частности, $R^{(k)}_{i\tau} \equiv 0$ при $k < 0$.

Из системы (10) компоненты тензора напряжений выражаются через $u_b^{(s)}, \mathrm{v}_b^{(s)}, w_b^{(s)}$:

$$\tau^{(s)}_{23b} = \frac{1}{a_{44}}\left[\frac{\partial \mathrm{v}_b^{(s)}}{\partial \zeta} - R^{(s-1)}_{4\tau}\right], \; \tau^{(s)}_{12b} = \frac{1}{a_{66}}\left[A_0 \frac{\partial \mathrm{v}_b^{(s)}}{\partial \xi} - R^{(s-1)}_{6\tau}\right], \; \tau^{(s)}_{12b} - \tau^{(s)}_{21b} = R^{(s-1)}_{7\tau}$$

$$\tau^{(s)}_{13b} = \frac{1}{a_{55}}\left[A_0 \frac{\partial w_b^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial u_b^{(s)}}{\partial \zeta} - R^{(s-1)}_{5\tau}\right] \tag{11}$$

$$\tau^{(s)}_{11b} = \frac{1}{\Delta}\left[\left(A_0 \frac{\partial u_b^{(s)}}{\partial \xi} - R_u^{(s-1)}\right)\Delta_{23} + R_{\mathrm{v}}^{(s-1)}\Delta_1 + \left(\frac{\partial w_b^{(s)}}{\partial \zeta} - R_w^{(s-1)}\right)\Delta_2\right] \tag{12}$$

$$(11b, 22b, 33b;\quad \Delta_{23}, \Delta_1, \Delta_2;\quad \Delta_1, \Delta_{13}, \Delta_3;\quad \Delta_2, \Delta_3, \Delta_{12})$$

а для определения компонент вектора перемещения получаются уравнения

$$\frac{A_0^2}{a_{66}} \frac{\partial^2 \mathrm{v}_b^{(s)}}{\partial ¶^2} + \frac{1}{a_{44}} \frac{\partial^2 \mathrm{v}_b^{(s)}}{\partial ¸^2} - 2K\mu_{*s}\mathrm{v}_b^{(s)} - c^{(j)}\mathrm{v}_b^{(s-j)} = T_{\mathrm{v}}^{(s-1)}, \quad j = \overline{0, s} \tag{13}$$

$$\frac{\Delta_{23}}{\Delta} A_0^2 \frac{\partial^2 u_b^{(s)}}{\partial \xi^2} + A_0\left(\frac{\Delta_2}{\Delta} + \delta_1\right)\frac{\partial^2 w_b^{(s)}}{\partial \xi \partial \zeta} + \frac{1}{a_{55}} \frac{\partial^2 u_b^{(s)}}{\partial \zeta^2} - 2K\omega_{*s} u_b^{(s)} - c^{(j)} u_b^{(s-j)} = T_u^{(s-1)} \tag{14}$$

$$(u, w;\quad \Delta/\Delta_{23}, a_{55};\quad a_{55}, \Delta/\Delta_{12}), \; \delta_1 = 1/a_{55}$$

Уравнение (13) и соотношения (11) описывают антиплоский, а (12) и (14) – плоский пограничные слои. Особый интерес представляет исходное приближение. При $s=0$ правые части уравнений (13) и (14) обращаются в нуль.

Решение уравнения (13) при $s=0$ будем искать в виде

$$\mathrm{v}_b^{(0)}(\xi,\eta,\zeta)=\exp(-\lambda_a\xi)C^{(0)}(\eta)\mathrm{v}_{1b}^{(0)}(\zeta) \tag{15}$$

После подстановки выражения (15) в уравнение (13), получим однородное обыкновенное дифференциальное уравнение, общее решение которого имеет вид

$$\mathrm{v}_{1b}^{(0)}(\zeta)=C_1^{(0)}\sin\alpha_a\zeta+C_2^{(0)}\cos\alpha_a\zeta,\quad \alpha_a=\sqrt{a_{44}(A_0^2\lambda_a^2/a_{66}-2K\omega_{*0}-\omega_{*0}^2)} \tag{16}$$

Индекс a означает, что λ_a относится к антиплоскому пограничному слою.

Удовлетворив соответствующим граничным условиям (3), (5), получим

$$\cos 2\alpha_0=0 \ \Rightarrow\ \lambda_{ank}=\pm\sqrt{a_{66}/A_0^2\left(\pi^2(1+2n)^2/(16a_{44})+2K\omega_{*0k}+\omega_{*0k}^2\right)} \tag{17}$$

Удовлетворив соответствующим граничным условиям (4), (5), получим

$$\sin 2\alpha_0=0 \ \Rightarrow\ \lambda_{ank}=\pm\sqrt{a_{66}/A_0^2\left(\pi^2n^2/(4a_{44})+2K\omega_{*0k}+\omega_{*0k}^2\right)} \tag{18}$$

В силу свойства пограничного слоя необходимо ограничиться значениями λ_{ank} с $\operatorname{Re}\lambda_{ank}>0$. Собственными функциями при условиях (3), (5) будут

$$\mathrm{v}_{bnk}^{(0)}(\xi,\eta,\zeta)=C^{(0)}(\eta)\exp(-\lambda_{ank}\xi)\cos\pi(2n+1)(1-\zeta)/4 \tag{19}$$

а при граничных условиях (4), (5):

$$\mathrm{v}_{bnk}^{(0)}(\xi,\eta,\zeta)=C^{(0)}(\eta)\exp(-\lambda_{ank}\xi)\sin\pi n(1+\zeta)/2 \tag{20}$$

После некоторых преобразований системы (14) получим следующее уравнение для определения $u^{(0)}$:

$$B_1\frac{\partial^4u_b^{(0)}}{\partial\xi^4}+B_2\frac{\partial^4u_b^{(0)}}{\partial\zeta^4}+B_3\frac{\partial^4u_b^{(0)}}{\partial\xi^2\partial\zeta^2}+B_4\frac{\partial^2u_b^{(0)}}{\partial\xi^2}+B_5\frac{\partial^2u_b^{(0)}}{\partial\zeta^2}-(2K\omega_{*0}+\omega_{*0}^2)^2u_b^{(0)}=0 \tag{21}$$

$$B_1=A_0^4\Delta_{23}/(\Delta a_{55}),\ B_2=\Delta_{12}/(\Delta a_{55}),\ B_3=\left((\Delta_{23}\Delta_{12}-\Delta_2^2)/\Delta^2-2\Delta_2/(\Delta a_{55})\right)A_0^2$$

$$B_4=-\left(\Delta_{23}/\Delta+1/a_{55}\right)A_0^2(2\mathrm{K}\omega_{*0}+\omega_{*0}^2),\quad B_5=-\left(\Delta_{12}/\Delta+1/a_{55}\right)(2\mathrm{K}\omega_{*0}+\omega_{*0}^2) \tag{22}$$

решение которого будем искать в виде

$$u_b^{(0)}(\xi,\eta,\zeta)=K_b^{(0)}(\eta)\exp(-\lambda_p\xi+k\zeta),\quad w_b^{(0)}(\xi,\eta,\zeta)=LK_b^{(0)}(\eta)\exp(-\lambda_p\xi+k\zeta) \tag{23}$$

где L – неопределённый пока множитель, k – корень характеристического уравнения

$$B_2k^4+(\lambda_p^2B_3+B_5)k^2+\lambda_p^4B_1+\lambda_p^2B_4-(2K\omega_{*0}+\omega_{*0}^2)^2=0$$

Отсюда следует

$$\begin{gathered}k_{1,2}^2=(-\lambda_p^2B_3-B_5\pm\sqrt{D})/(2B_2)\\ D=\lambda_p^4(B_3^2-4B_1B_2)+2\lambda_p^2(B_3B_5-2B_2B_4)+B_5^2+4B_2(2K\omega_{*0}+\omega_{*0}^2)^2\end{gathered} \tag{24}$$

$$L_i=\frac{\Delta_{23}a_{55}\lambda_p^2A_0^2+\Delta k_i^2-\Delta a_{55}(2K\omega_{*0}+\omega_{*0}^2)}{(\Delta+\Delta_2a_{55})\mathrm{A}_0\lambda_pk_i}$$

В результате решение уравнения (21) примет вид

$$u_b^{(0)}(\xi,\eta,\zeta)=\sum_{i=1}^4K_{ib}^{(0)}(\eta)\exp(-\lambda_p\xi+k_i\zeta),\quad w_b^{(0)}(\xi,\eta,\zeta)=\sum_{i=1}^4L_iK_{ib}^{(0)}(\eta)\exp(-\lambda_p\xi+k_i\zeta) \tag{25}$$

При граничных условиях (3), (5) λ_p является корнем уравнения

$$\sum_{(1,2,3,4)}(-1)^1S_1\left[Q_2(L_3-L_4)+Q_3(L_4-L_2)+Q_4(L_2-L_3)\right]=0 \tag{26}$$

$$S_i=\left(\Delta_{12}k_iL_i-\Delta_2{}^{\text{a}}{}_pA_0\right)\exp(2k_i),\ \ Q_i=\left(k_i-{}^{\text{a}}{}_pA_0L_i\right)\exp(2k_i),\ \ i=1,2,3,4$$

Суммирование в левой части равенства (24) ведётся по круговой перестановке индексов при учёте чередования знаков слагаемых.
При граничных условиях (4), (5) λ_p является корнем уравнения

$$(L_2-L_3)(L_4-L_1)\mathrm{ch}(k_2+k_3-k_1-k_4)+(L_1-L_3)(L_2-L_4)\mathrm{ch}(k_1+k_3-k_2-k_4)+ \\ +(L_1-L_2)(L_4-L_3)\mathrm{ch}(k_1+k_2-k_3-k_4)=0 \tag{27}$$

Каждому значению ω_{*0} будет соответствовать счётное множество λ_a и λ_p. Таким образом, каждому собственному значению ω_{*0} соответствует своё семейство пограничных функций. При этом, собственные колебания одного типа порождают в пограничном слое колебания и другого типа.
Из полученных решений следует, что в зоне пограничного слоя имеется достаточно пёстрая картина колебательного процесса и практически нет чисто сдвиговых и продольных колебаний. Тип граничных условий на лицевых поверхностях обуславливает не только асимптотику решения внутренней задачи, но и тип трансцендентных уравнений для пограничных слоёв, корни которых характеризуют скорости убывания величин пограничного слоя (антиплоского и плоского). Решение же внутренней задачи влияет на значения величин (амплитуд) пограничного слоя, но не на скорость убывания (показатель экспоненты).
В отличие от пластин, в случае оболочек при $s \geq 1$ через граничные условия пограничный слой влияет на решение внутренней задачи [5,6], которое порядка $O(\pounds)$. Взаимовлияют также антиплоский и плоский пограничные слои. Судя по уравнениям (17), (18) и (26), (27) при наличии вязкого сопротивления затухание пограничного слоя происходит быстрее.
Сопряжение решений внутренней задачи и пограничного слоя проводится по той же схеме, как и в работе [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Пановко Я.Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. М.: Физматгиз, 1960. 196с.
2. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512с.
3. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 414с.
4. Агаловян Л.А., Гулгазарян Л.Г. Асимптотические решения неклассических краевых задач о собственных колебаниях ортотропных оболочек. //ПММ. 2006. Т.70. Вып.1. С.111-125.
5. Агаловян Л.А., Гулгазарян Л.Г. К определению решений одного класса динамических пространственных задач математической теории упругости для ортотропных оболочек. //Учёные записки АГПУ им. Х. Абовяна. 2012. N 2(17). С.29-42.
6. Гулгазарян Л.Г. Собственные пространственные колебания ортотропных оболочек в зоне пограничного слоя при условиях первой краевой задачи. //В сб. тр. межд. конф. “Актуальные проблемы механики сплошной среды”. Ереван: Изд. ЕГУАС, 2012. Т.1. С.201-205.
7. Агаловян Л.А., Гулгазарян Л.Г. Неклассические краевые задачи о вынужденных колебаниях ортотропных оболочек. //Международный научный журнал “Прикладная механика”. 2009. Т.45. N8. С.105-122.

Сведения об авторе:

Гулгазарян Лусине Гургеновна – кандидат физ.-мат. наук, доцент АГПУ им. Х. Абовяна, Институт механики НАН Армении
Адрес: пр. Маршала Баграмяна 24^{Б}, 0019, Ереван, Армения
Тел: (+37410) 61-81-55; (+37491) 30-25-54;
E-mail: lusina@mail.ru

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ЗАЛЕЧИВАНИЯ ТРЕЩИНЫ В ОТСУТСТВИИ ТРЕНИЯ

Давтян А.В.

Рассматриваются задачи о наращивании слоя примесей, содержащихся в жидкости (флюиде), поступающей в трещину в бесконечной термоупругой плоскости. Основное внимание уделено эффектам термодиффузии и термоупругости в среде. Задача решается методом интегральных преобразований Лапласа и Фурье с решением уравнений Винера-Хопфа с приведением решения к форме Смирнова-Соболева. Получены аналитические формулы для вертикальных перемещений на границе трещины.

Рассматривается задачи о наращивании слоя примесей, содержащихся в жидкости (флюиде), поступающей в трещину со скоростью v в начальный момент t=0. Жидкость (флюид) при $t = 0$ поступает в трещину малой толщины $2b_1$, причём в силу симметрии уравнение трещины в момент t будет $y = \pm b_1(x,t),\ b_1(x,t) = b_0 + V(x,t), y \approx 0,$ где U, V есть компоненты перемещений термоупругой среды. В дальнейшем выбирается только верхний знак. Тогда в линейном приближении можно, следуя [1], [2], записать приближённое соотношение при $y = 0$

$$°_s \frac{\partial b_1}{\partial t} = q¥ \frac{\partial T}{\partial x} - K±_{yy} - i_0 H(x) H(t)$$

где левая часть представляет массу осадка, выпавшего в единицу времени и пропорционально скорости залечивания трещины, первое слагаемое правой части плотность потока массы вдоль оси y [1] растворённого компонента, переданная раствором в единицу времени за счёт градиента температуры по x, второе слагаемое представляет трибологический член [2], где $K = \text{const}$ есть экспериментальная постоянная, $°_s$ – плотность выпавшего осадка, i_0 – плотность диффузионного потока по оси y, c – концентрация примесей в жидкости, $¥ = \partial c / \partial T,\ \gamma = \text{const}$ [3], в линейном приближении q и i_0 взяты такими же, как в начальном сечении $x = 0,\ q = °_j v b_0$, где v – скорость флюида, $°_j$ – плотность жидкости, слагаемое в граничном условии, содержащее i_0, соответствует плотности потока концентрации примесей по оси y, имеющей место при входе флюида в трещину. Уравнение трещины имеет вид $y = b_0 + V(x,t), 0 < x < \infty$.

Уравнение движения для изотропной термоупругой среды в плоском случае имеет вид

$$\bar{a}^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + b^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + (\bar{a}^2 - b^2) \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}; \bar{a}^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + b^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + (\bar{a}^2 - b^2) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \tag{1}$$

где $\bar{a}^2 = a^2 + \bar{¢}$, $\bar{¢} = \frac{K_4}{°} \frac{C_◦ - C_v}{C_v}$, $K_4 = ª + \frac{2}{3}«$ – обьёмный модуль, a, b – скорости продольных и поперечных волн, $°$ – плотность упругой среды, $C_◦, C_v$ – теплоемкости, $ª, «$ – коэффициенты Ляме. При $t = 0$ имеем нулевые начальные условия $U = V = \partial U / \partial t = \partial V / \partial t = 0$. Граничные условия на трещине и вне её с учётом наращивания трещины за счёт примесей в жидкости концентрации c, $\frac{\partial c}{\partial y} = \text{const}$, $-i_0 = {}^\circ D\frac{\partial c}{\partial y}$ – постоянный диффузионный поток примесей в жидкости [4] $(y=0)$

$$\pm_{xy} = 0, -\infty < x < \infty$$

$$V = 0, x<0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -K_2 \frac{\partial U}{\partial x} - K_3\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{i_0}{\circ_s} H(x)H(t)H(vt-x), 0<x<\infty$$

где $K_2 = \frac{\circ}{\circ_s}K\left(\bar a^2 - 2b^2\right)+\P; K_3 = \frac{\circ}{\circ_s}K\bar a^2 + \P$, D – коэффициент диффузии, $\mathrm{v} = \text{const}$ есть скорость движения флюида.

Решение ищется методом интегральных преобразований Лапласа по t и Фурье по x. Обозначив через $\overline{U},\overline{V}$ преобразования Лапласа по t от U,V и через $\overline{\overline{U}},\overline{\overline{V}}$ – преобразование Фурье по x от $\overline{U},\overline{V}$, можно записать

$$\overline{U};\overline{V} = \sum_{n=1}^{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\bar{\sim} x + i\bar{\ }_n y}\,\overline{\overline{U}}_n;\overline{\overline{V}}_n\, d\bar{\sim}, \quad \bar{\ }_n = \sqrt{\frac{\mu^2}{c_n^2} - \bar{\sim}^2}, c_1 = \bar a, c_2 = b \qquad (3)$$

где $s = -i\mu$ есть параметр преобразования Лапласа.

Подставляя (3) в уравнениях движения для термоупругой среды (1), получаем

$$\overline{\overline{V}}_1 = \frac{\bar{\ }_1}{\bar{\sim}}\overline{\overline{U}}_1, \quad \overline{\overline{V}}_2 = -\frac{\bar{\sim}}{\bar{\ }_2}\overline{\overline{U}}_2 \qquad (4)$$

Подставляя (3) в (2) и обращая преобразование Фурье по x, можно получить

$$\overline{\overline{V}}_1+\overline{\overline{V}}_2 = V^-, \quad \bar{\ }_1\overline{\overline{U}}_1 + \bar{\ }_2\overline{\overline{U}}_2 + \bar{\sim} V^- = 0 \qquad (5)$$

$$s\left(\overline{\overline{V}}_1+\overline{\overline{V}}_2\right) = -K_2 i\bar{\sim}\left(\overline{\overline{U}}_1+\overline{\overline{U}}_2\right) - K_3 i\left(\bar{\ }_1\overline{\overline{V}}_1 + \bar{\ }_2\overline{\overline{V}}_2\right) - \frac{i_0}{2\circledR s \circ_s \left(sv+i\bar{\sim}\right)} + \Omega_2^+$$

где

$$\Omega_2^+ = \frac{1}{2\circledR}\int_{-\infty}^0 \left(s\overline{V} + K_2\frac{\partial\overline{U}}{\partial x} + K_3\frac{\partial \overline{V}}{\partial y}\right)\Big|_{y=0} e^{-i\bar{\sim} x}dx, V^- = \frac{1}{2\circledR}\int_0^\infty \overline{V}\Big|_{y=0} e^{-i\bar{\sim} x}dx$$

Здесь индекс (+) даёт аналитические функции в верхней полуплоскости $\bar{\sim}$, а индекс (-) даёт аналитические функции в нижней полуплоскости.

Из уравнений (5) с учётом (4) получим уравнение Винера-Хопфа

$$\Omega_2^+ - \frac{i_0}{2\circledR s\circ_s\left(\frac{s}{v}+i\bar{\sim}\right)} = \frac{R\left(\bar{\sim}\right)}{-i\frac{\mu^2}{b^2}\bar{\ }_1}V^- \qquad (6)$$

$$R\left(\bar{\sim}\right)=-\bar{\ }_{1}\frac{\mu^{3}}{b^{2}}+2\bar{\sim}^{2}\bar{\ }_{1}\bar{\ }_{2}\left(K_{3}-K_{2}\right)+\left(K_{3}\frac{\mu^{2}}{\bar{a}^{2}}-\left(K_{3}-K_{2}\right)\bar{\sim}^{2}\right)\left(\frac{\mu^{2}}{b^{2}}-2\bar{\sim}^{2}\right) \qquad (7)$$

где $R\left(\bar{\sim}\right)$ – функция типа Рэлея, которая в комплексной плоскости $\bar{\sim}$ имеет два и только два корня: $\pm\sim_{1}\frac{\mu}{\bar{a}},\sim_{1}\in R$.

Факторизация функции $R\left(\bar{\sim}\right)$ имеет вид

$$R\left(\bar{\sim}\right)=R_{+}\left(\bar{\sim}\right)R_{-}\left(\bar{\sim}\right), \qquad (8)$$

$$R_{+}\left(\bar{\sim}\right)=\frac{\mu^{2}\left(K_{2}+K_{3}\right)}{\bar{a}^{2}}\left(\bar{\sim}_{1}+\bar{\sim}\right)D_{+}\left(\bar{\sim}\right), \qquad R_{-}\left(\bar{\sim}\right)=\left(\bar{\sim}_{1}-\bar{\sim}\right)D_{-}\left(\bar{\sim}\right) \qquad (9)$$

где

$$D_{\pm}\left(\bar{\sim}\right)=\exp\left\{\frac{1}{\text{®}}\int_{1}^{\bar{a}/b}\operatorname{arctg}\frac{\frac{\bar{a}^{2}}{b^{2}}\sqrt{¸^{2}-1}-\frac{2\left(K_{3}-K_{2}\right)}{\bar{a}}¸^{2}\sqrt{¸^{2}-1}\sqrt{\frac{\bar{a}^{2}}{b^{2}}-¸^{2}}}{\left(\frac{\bar{a}^{2}}{b^{2}}-2¸^{2}\right)\left(\frac{K_{2}}{\bar{a}}¸^{2}+\frac{K_{3}}{\bar{a}}\left(1-¸^{2}\right)\right)}\frac{d¸}{¸\pm\bar{\sim}\frac{\bar{a}}{\mu}}\right\} \qquad (10)$$

Подставляя (8) в уравнение (6) и учитывая (9), получим

$$\Omega_{2}^{+}-\frac{i_{0}}{2\text{®}s\,°_{s}\left(\frac{s}{v}+i\bar{\sim}\right)}=\frac{ib^{2}\left(K_{2}+K_{3}\right)}{\bar{a}^{2}}\frac{\bar{\sim}_{1}^{2}-\bar{\sim}^{2}}{\sqrt{\frac{\mu^{2}}{\bar{a}^{2}}-\bar{\sim}^{2}}}D_{+}\left(\bar{\sim}\right)D_{-}\left(\bar{\sim}\right)V^{-} \qquad (11)$$

Уравнение (11) Винера-Хопфа решается известным методом в виде [5]

$$\Omega_{2}^{+}=\frac{i_{0}}{2\text{®}is\,°_{s}\left(\bar{\sim}-\frac{\mu}{v}\right)}\left(1-\frac{\left(\bar{\sim}_{1}+\bar{\sim}\right)\sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}}+\frac{\mu}{v}}D_{+}\left(\bar{\sim}\right)}{\left(\bar{\sim}_{1}+\frac{\mu}{v}\right)\sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}}+\bar{\sim}}D_{+}\left(\frac{\mu}{v}\right)}\right), \qquad (12)$$

$$V^{-}=\frac{\frac{\bar{a}^{2}}{b^{2}}i_{0}}{2\text{®}°_{s}\left(K_{2}+K_{3}\right)}\frac{\sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}}-\bar{\sim}}\sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}}+\frac{\mu}{v}}}{s\left(\bar{\sim}-\frac{\mu}{v}\right)\left(\bar{\sim}_{1}+\frac{\mu}{v}\right)\left(\bar{\sim}_{1}-\bar{\sim}\right)D_{+}\left(\frac{\mu}{v}\right)D_{-}\left(\bar{\sim}\right)}$$

Обратные преобразования Лапласа и Фурье от (12) дают решение задачи в форме Смирнова-Соболева $[6]$ и при $y=0$ имеем:

$$\frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}}V=\frac{\bar{a}^{4}i_{0}}{\text{®}x\,°_{s}b^{2}\left(K_{2}+K_{3}\right)}\operatorname{Re}\frac{\sqrt{\frac{\bar{a}t}{x}-1}\sqrt{1+\frac{\bar{a}}{v}}}{\left(\frac{\bar{a}t}{x}-\frac{\bar{a}}{v}\right)\left(\sim_{1}+\frac{\bar{a}}{v}\right)\left(\sim_{1}-\frac{\bar{a}t}{x}\right)D_{+}\left(\frac{\bar{a}}{v}\right)D_{-}\left(\frac{\bar{a}t}{x}\right)}$$

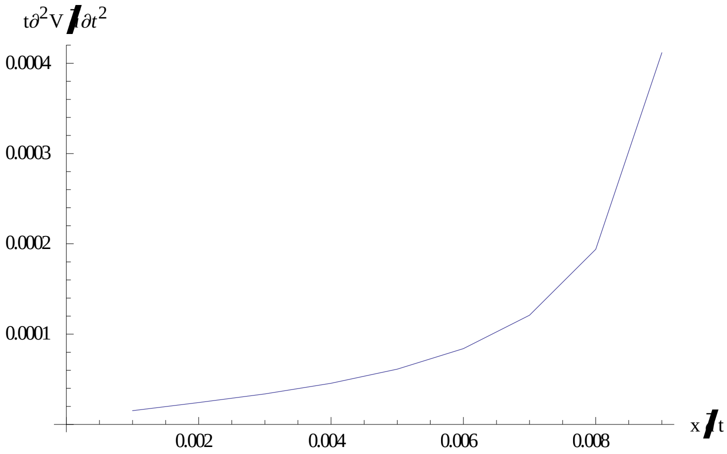
$$V(x,t)=\frac{x}{\overline{a}}\frac{i_0\frac{\overline{a}^2}{b^2}\sqrt{1+\overline{a}/v}}{2®°_s\left(\sim_1+\overline{a}/v\right)D_+\left(\overline{a}/v\right)\frac{K_2+K_3}{\overline{a}}}\operatorname{Re}\int_0^{\sim_0}\frac{\left(\sim_0-\sim'\right)\sqrt{\sim'-1}d\sim'}{\left(\sim_1-\sim'\right)\left(\sim'-\frac{\overline{a}}{v}\right)D_-\left(\sim'\right)},\ \sim_0=\frac{\overline{a}t}{x} \qquad (13)$$

где $D_{\pm}(\sim)$ получаются из (10) с заменой $\overline{\sim}$ на $\sim\frac{\mu}{\overline{a}}$.

Сделаны расчёты для неподвижной задачи при значениях параметров:

$$\frac{K_2}{\overline{a}}=0,8,\frac{K_3}{\overline{a}}=0,3;\ \frac{\overline{a}}{b}=\sqrt{3},\sim_0=0,981431,\frac{i_0}{°_s\overline{a}}=\frac{1}{2\cdot 10^5},\overline{a}=1000\frac{см}{сек},\frac{\overline{a}}{v}=100,$$

и построен график зависимости от функции $\frac{t}{\overline{a}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}V$ от $x/\overline{a}t$ (фиг.1).



Фиг. 1

Автор благодарит доктора физико-математических наук, профессора А.Н. Мартиросяна за ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Глико А.О. Влияние процесса осаждения твёрдой фазы из гидротермального раствора на залечивание системы плоско-параллельных трещин. //Труды VI межд. конференции. Горис-Степанакерт. 2008. С.170-177.
2. Горячева И.Г., Добычин М.Н. Контактные задачи в трибологии. М.: 1988. 253с.
3. Ландау, Лифшиц. Механика сплошных сред. М.: 1954.
4. Martirosyan G.A., Bagdoev A.G., Martirosyan A.N., Dinunts A.S., Davtyan A.V. The investigation of problem of closing of crack in thermoelastic media //Arcakh, 2009.
5. Нобл Б. Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений с частными производными. М.: ИЛ., 1962. С. 278.
6. Мартиросян А.Н. Математические исследования нестационарных линейных граничных задач для сплошных сред. Ерреван:‘’Зангак-97’’, 2007. 244с.

Сведения об авторе:

Давтян Ануш В. – преподаватель кафедры математики Горисского государственного университета

E-mail: davtyananush@gmail.com

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ЗАЛЕЧИВАНИЯ ТРЕЩИНЫ, ДВИЖУЩЕЙСЯ С ПЕРЕМЕННОЙ СКОРОСТЬЮ

Динунц А.С., Давтян А.В., Мартиросян Г.А.

В данном докладе рассматривается полубесконечная трещина, в которой содержится жидкость с примесями, край которой движется по произвольному закону $x=\ell(t)$. В граничных условиях учитывается наращивание границы трещины и показано, что на краю трещины особенностей не имеется.

Рассмотрим задачу о распространяющейся трещине, в которой содержится жидкость (флюид) с примесями. Уравнения термоупругости в перемещениях для изотропной среды в плоском случае имеют вид:

$$\overline{a}^2\frac{\partial^2U}{\partial x^2}+b^2\frac{\partial^2U}{\partial y^2}+(\overline{a}^2-b^2)\frac{\partial^2V}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2U}{\partial t^2},\qquad \overline{a}^2\frac{\partial^2V}{\partial y^2}+b^2\frac{\partial^2V}{\partial x^2}+(\overline{a}^2-b^2)\frac{\partial^2U}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2V}{\partial t^2} \qquad (1)$$

где $\overline{a}^2=a^2+\overline{¢}$, $\overline{¢}=\frac{K_4}{°}\frac{C_{°}-C_v}{C_v}$, $K_4=ª+\frac{2}{3}«$ – объёмный модуль, $ª,«$ – коэффициенты Ляме, a,b – скорости продольных и поперечных волн, $°$ – плотность упругой среды, $C_{°},C_v$ – теплоёмкости. При $t=0$ имеем нулевые начальные условия $U=V=\partial U/\partial t=\partial V/\partial t=0$. Граничные условия на трещине и вне её с учётом наращивания трещины за счёт примесей в жидкости концентрации c, $\frac{\partial c}{\partial y}=\mathrm{const}$, $-i_0=°D\frac{\partial c}{\partial y}$ – постоянный диффузионный поток примесей в жидкости, имеют вид $(y=0)$:

$$\begin{gathered}±_{xy}=0,-\infty<x<\infty,\\ V=V^-(t,x)=0,x<\ell(t),\\ \frac{\partial V}{\partial t}+K_2\frac{\partial U}{\partial x}+K_3\frac{\partial V}{\partial y}=±^+(t,x,¶,²)=-\frac{i_0}{°_s}H(t-²)H\left(v(t-²)-(x-¶)\right)H(x-¶),x>\ell(t),\\ K_2=\frac{°}{°_s}K\left(\overline{a}^2-2b^2\right)+¶;K_3=\frac{°}{°_s}K\overline{a}^2+¶,\end{gathered} \qquad (2)$$

где t – время, x – координата вдоль границы полуплоскости, K – трибологическая постоянная границы трещины, D –коэффициент диффузии, v – скорость движения флюида, $\ell(t)$ – некоторая гладкая функция-положение линии раздела граничных условий. Значения функций $±=±_-(t,x)$ при $x<\ell(t)$ и $V=V_+(t,x)$ при $x>\ell(t)$ неизвестны. Решение ищется методом интегральных преобразований Лапласа по t и Фурье по x. Обозначив через $\overline{U},\overline{V}$ преобразования Лапласа по t от U,V и через $\overline{\overline{U}},\overline{\overline{V}}$ – преобразование Фурье по x от $\overline{U},\overline{V}$, можно записать

$$\overline{U};\overline{V}=\sum_{n=1}^{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\overline{~}x+i\overline{}_n y}\overline{\overline{U}}_n;\overline{\overline{V}}_n d\overline{~},\quad \overline{}_n=\sqrt{\frac{µ^2}{c_n^2}-\overline{~}^2},c_1=\overline{a},c_2=b \qquad (3)$$

где $s=-iµ$ есть параметр преобразований Лапласа по t и Фурье по x. Обозначая изображения функций $±(t,x),V(t,x)$ через $\overline{\overline{±}}(s,\overline{~}),\overline{\overline{V}}$ соответственно, и учитывая (1), (2), можно получить

$$\overline{\overline{V}}(s,\overline{~})=\overline{\overline{S}}(s,\overline{~})\overline{\overline{±}}(s,\overline{~}), \qquad (4)$$

$$\overline{\overline{S}}(s,\overline{~})=\frac{-s^2\overline{}_1}{ib^2R(\overline{~})},R(\overline{~})=\frac{-\overline{}_1µ^3}{b^2}+K_2\left(\overline{}_2^2-\overline{~}^2-2\overline{}_1\overline{}_2\right)\overline{~}^2+K_3\overline{}_1\left(\overline{}_2^2-\overline{~}^2\right)+2K_3\overline{}_1\overline{}_2\overline{~}^2,$$

где $R\left(\overline{\sim}\right)$– функция типа Рэлея. Показано, что функция $R\left(\overline{\sim}\right)$ имеет только два корня, находящихся на вещественной оси. Оригинал $S(t,x)$, соответствующий $\overline{S}$, равен $V(t,x)$ при $\pm(t,x) = ¢(t)¢(x)$ ($¢$ – функция Дирака). Так как $\pm$ – нормальное напряжение, а V – нормальное перемещение на границе полуплоскости, то $S(t,x)$– решение плоской задачи Ламба для сосредоточенного импульса.

Факторизация функции $\overline{\overline{S}}\left(s,\overline{\sim}\right)$ имеет вид

$$\overline{\overline{S}}\left(s,\overline{\sim}\right) = \overline{\overline{S}}_{+}\left(s,\overline{\sim}\right)\overline{\overline{S}}_{-}\left(s,\overline{\sim}\right),$$

$$\overline{\overline{S}}_{+}\left(s,\overline{\sim}\right) = \frac{-\overline{a}^{2}}{b^{2}(K_{2}+K_{3})}\frac{\sqrt{s}\sqrt{\frac{1}{\overline{\overline{a}}}-\frac{i\overline{\sim}}{s}}}{\left(\frac{\overline{\sim}_{0}}{\overline{\overline{a}}}-\frac{i\overline{\sim}}{s}\right)D^{+}\left(\frac{i\overline{\sim}}{s}\right)},\quad \overline{\overline{S}}_{-}\left(s,\overline{\sim}\right) = \frac{\sqrt{s}\sqrt{\frac{1}{\overline{\overline{a}}}+\frac{i\overline{\sim}}{s}}}{\left(\frac{\overline{\sim}_{0}}{\overline{\overline{a}}}+\frac{i\overline{\sim}}{s}\right)D^{-}\left(\frac{i\overline{\sim}}{s}\right)}, \tag{5}$$

$$D_{\pm}\left(\frac{i\overline{\sim}}{s}\right) = \exp\left[\frac{1}{2®i}\int_{\sim_{1}}^{\sim_{2}}\ln\frac{R(¸)}{\overline{\overline{R(¸)}}}\frac{d¸}{¸\mp\frac{i\overline{\sim}}{s}}\right],\quad \sim_{n} = \frac{1}{c_{n}},\; c_{1} = a,\;\; c_{2} = b$$

Здесь $\pm\sim_{0}$ – корни функции типа Рэлея $R\left(\overline{a}\sim/\mu\right)$ (4). Функции $\overline{\overline{S}}_{+}\left(s,\overline{\sim}\right)$ и $\overline{\overline{S}}_{-}\left(s,\overline{\sim}\right)$– аналитические функции соответственно в верхней и нижней полуплоскости плоскости $\overline{\sim}$, а функции $D_{\pm}\left(\frac{i\overline{\sim}}{s}\right), D_{\pm}^{-1}\left(\frac{i\overline{\sim}}{s}\right)$ можно представить в виде

$$D^{\pm}\left(\frac{i\overline{\sim}}{s}\right) = 1+\int_{\frac{1}{\overline{\overline{a}}}}^{\frac{1}{b}}F_{1}(u)\frac{du}{u\mp\frac{i\overline{\sim}}{s}},\; D_{\pm}^{-1}\left(\frac{i\overline{\sim}}{s}\right) = 1+\int_{\frac{1}{\overline{\overline{a}}}}^{\frac{1}{b}}F_{2}(u)\frac{du}{u\mp\frac{i\overline{\sim}}{s}}\;, \tag{6}$$

$$F_{1}(u) = «(u)\exp ¡(u),\;\; ¡(u) = \frac{1}{2®i}\int_{\frac{1}{\overline{\overline{a}}}}^{\frac{1}{b}}\ln\frac{R(¸)}{\overline{\overline{R(¸)}}}\frac{d¸}{¸-u}\;,\; F_{2}(u) = -«(u)\exp\left(-¡(u)\right), \tag{7}$$

$$«(u) = \frac{1}{®}\frac{\frac{1}{b^{2}}\sqrt{u^{2}-\frac{1}{\overline{a}^{2}}}+2(K_{2}-K_{3})u^{2}\sqrt{u^{2}-\frac{1}{\overline{a}^{2}}}\sqrt{\frac{1}{b^{2}}-u^{2}}}{\left[\left(\frac{1}{b^{2}}\sqrt{u^{2}-\frac{1}{\overline{a}^{2}}}+2(K_{2}-K_{3})u^{2}\sqrt{u^{2}-\frac{1}{\overline{a}^{2}}}\sqrt{\frac{1}{b^{2}}-u^{2}}\right)^{2}+\left((K_{2}+K_{3})u^{2}-K_{3}\frac{1}{\overline{a}^{2}}\right)^{2}\left(\frac{1}{b^{2}}-2u^{2}\right)^{2}\right]^{1/2}}$$

Обозначим $\overline{\overline{P}}_{\pm} = 1/\overline{\overline{S}}_{\pm}$ и вычислим оригиналы $P_{-}(t,x), S_{-}(t,x)$ по формуле обращения

$$S_{-}(t,x) = \frac{1}{8®^{3}i}\int_{\pm_{0}-i\infty}^{\pm_{0}+i\infty}ds\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\overline{S}}_{-}\left(s,\overline{\sim}\right)\exp\left(st+i\overline{\sim}x\right)d\overline{\sim} \tag{8}$$

Подставляя (5) в (8) и заменяя $\overline{\sim}$ через $is\sim$ соответственно, и учитывая формулы $s^{ª} = \frac{1}{\Gamma(-ª)}\int_{0}^{\infty}\frac{\exp(-st')}{(t')^{ª+1}}dt'$, получим

$$S_-\left(t,x\right)=\frac{1}{\sqrt{®}}\left(\frac{1}{\bar{a}}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\right)\left\{H\left(x\right)\sqrt{x}\left[A_2¢\left(t-\frac{x}{a}\right)+\int\limits_{1/a}^{1/b}F_4\left(h\right)¢\left(t-hx\right)dh\right]\right\}$$

$$A_2=1+\int\limits_{1/a}^{1/b}\frac{F_2\left(u\right)}{u-\frac{1}{\bar{a}}}du,\ F_4\left(h\right)=\frac{1}{2}\int\limits_{h}^{1/b}\frac{F_2\left(u\right)}{\frac{\sim_0}{\bar{a}}-u}\frac{du}{\sqrt{u-h}} \qquad (9)$$

$$P_-\left(t,x\right)=\frac{2}{\sqrt{®}}\left(\frac{\sim_0}{\bar{a}}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\right)\left\{\frac{H\left(x\right)}{\sqrt{x}}\left[A_1¢\left(t-\frac{x}{a}\right)+\int\limits_{1/a}^{1/b}F_3\left(h\right)¢\left(t-hx\right)dh\right]\right\}$$

$$A_1=1+\int\limits_{1/a}^{1/b}\frac{F_1\left(u\right)}{u-\frac{1}{\bar{a}}}du,\ F_3\left(h\right)=\int\limits_{h}^{1/b}\frac{d}{du}\left(\frac{F_1\left(u\right)}{\sqrt{u-\frac{1}{\bar{a}}}}\right)\frac{du}{\sqrt{u-h}}-\frac{F_1\left(\frac{1}{b}\right)}{\sqrt{\frac{1}{b}-\frac{1}{\bar{a}}}\sqrt{\frac{1}{b}-h}} \qquad (9')$$

где $F_1\left(u\right),F_2\left(u\right)$ даются формулой (7).

Подобные формулы получаются для S_+ и P_+, заменяя соответственно в (9), (9') x через $-x$ и умножая на постоянную (5).

Как видно из (9), имеет место

$$S_-\left(t,x\right)=P_-\left(t,x\right)=0 \text{ при } x<bt,\quad S_+\left(t,x\right)=P_+\left(t,x\right)=0 \text{ при } x>-bt \qquad (10)$$

Отметим, что факторизация $\bar{S}=\bar{S}_+\cdot\bar{S}_-$, которая даётся формулой (5), соответствует случаю, когда $\left|\dot{\ell}\left(t\right)\right|<b.$

Тогда неизвестные функции $V_+\left(t,x\right),±_-\left(t,x\right)$, с учётом (10), определяются так [1]:

$$V_+=S_-**\left[\left(S_+**±_+\right)H\left(x-\ell\right)\right],\quad ±_-=-P_+**\left[\left(S_+**±_+\right)H\left(\ell-x\right)\right], \qquad (11)$$

где символ $(**)$ означает свёртку по переменным t,x и $H-$ функция Хевисайда.

По формуле (11) определим напряжения на продолжении трещины при постоянной сосредоточенной силе, действующей на берегах трещины

$$±_+^0\left(t,²,x,¶\right)=-\frac{i_0}{°_s}H\left(t-²\right)H\left(v\left(t-²\right)-\left(x-¶\right)\right)H\left(x-¶\right),¶>\ell\left(²\right) \qquad (12)$$

Вычислим свёртку $S_+**±_+^0$ по формуле

$$S_+**±_+^0=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_0^t S_+\left(t',x'\right)±_+^0\left(t-t',x-x'\right)dt'dx' \qquad (13)$$

Подставляя (12) и выражение функции $S_+\left(t,x\right)$, полученное из (9), в (13), после нескольких преобразований (интегрирование по частям и дифференцирование по параметру под знаком интеграла) получим

$$S_+**±_-^0=\frac{\bar{a}^{-2}}{2\sqrt{®}b^2\left(K_2+K_3\right)}\frac{i_0}{°_s}H\left(v\left(t-²\right)-\left(x-¶\right)\right)\left(1+\frac{v}{\bar{a}}\right)\sqrt{v\left(t-²\right)-\left(x-¶\right)}\Psi \qquad (14)$$

$$\Psi=\frac{A_2}{\left(1+v/\bar{a}\right)^3}+\int\limits_{1/a}^{1/b}\frac{F_4\left(h\right)}{\left(1+hv\right)^{3/2}}dhH\left(\frac{t-²+h\left(x-¶\right)}{1+hv}\right)$$

Из формул (9), (11), (14) следует

$$V_{+}=-\frac{i_0}{°_s}\left(1+\frac{v}{a}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t\left(\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t'}+\frac{\partial}{\partial x'}\right)\left\{H(x')\sqrt{x'}\left[A_2¢\left(t'-\frac{x'}{a}\right)+\right.\right. \tag{15}$$

$$\left.\left.+\int_{1/a}^{1/b}F_4(h)¢(t'-hx')dh\right]\right\}\left[\frac{A_2}{\left(1+v/a\right)^3}+\int_{1/a}^{1/b}\frac{F_4(h)}{(1+hv)^{3/2}}dh\right]\sqrt{v(t-t'-²)-(x-x'-¶)}\cdot$$

$$\cdot H\left(v(t-t'-²)-(x-x'-¶)\right)H\left(x-x'-\ell(t-t')\right)dx'dt'$$

Уравнение (15), проинтегрировав по частям и вычисляя интеграл от ¢ -функции, получим

$$V_{+}=\frac{i_0}{°_s}\left(1+\frac{v}{a}\right)\left[\frac{A_2}{\left(1+v/a\right)^3}+\int_{1/a}^{1/b}\frac{F_4(h)}{(1+hv)^{3/2}}dh\right]\left[A_2N^0\left(t,²,x,¶,\frac{1}{a}\right)+\right.$$

$$\left.+\int_{1/a}^{1/b}F_4(h)N^0(t,²,x,¶,h)dh\right]H\left(L_0-\frac{1}{v}\right),$$

$$N^0\left(t,²,x,¶,\frac{1}{a}\right)=\frac{\frac{\dot{\ell}}{a}-1}{h\dot{\ell}-1}\sqrt{v(x-\ell)(l-¸)\left(L_0-\frac{1}{v}\right)}+\frac{1}{2}\frac{1-\frac{v}{a}}{1-hv}\sqrt{v(x-\ell)(l-¸)\left(L_0-\frac{1}{v}\right)}+$$

$$+\frac{v(x-¶)\left(T-\frac{1}{v}\right)\left(1-\frac{v}{a}\right)}{2(1-hv)^{3/2}}\ln\frac{\sqrt{\frac{x-\ell}{(l-¸)(L_0-1/v)}}-\sqrt{\frac{v}{1-hv}}}{\sqrt{\frac{x-\ell}{(l-¸)(L_0-1/v)}}+\sqrt{\frac{v}{1-hv}}},L_0=\frac{t_0-²}{\ell-¶},T=\frac{t-²}{x-¶}, \tag{16}$$

$$t-t_0=h\left(x-\ell(t_0)\right),\ell=\ell(t_0)$$

Таким же образом получим

$$±_{-}^{0}=-\frac{4i_0}{®°_s}\left(1+\frac{v}{a}\right)\left[\frac{A_2}{\left(1+v/a\right)^3}+\int_{1/a}^{1/b}\frac{F_4(h)}{(1+hv)^{3/2}}dh\right]\left[A_1M^0\left(t,²,x,¶,\frac{1}{a}\right)+\right.$$

$$\left.+\int_{1/a}^{1/b}F_3(h)M^0(t,²,x,¶,h)dh\right]H\left(T-\frac{1}{v}\right), \tag{17}$$

$$M^0\left(t,²,x,¶,\frac{1}{a}\right)=H\left((t_0-²)v-(l-¸)\right)\left(M_0^1+M_0^2\right),$$

$$M_0^2=-\frac{\frac{\tilde{}_0}{a}v+1}{\sqrt{hv+1}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{(t_0-²)v-(l-¸)}{(\ell-x)(hv+1)}}, \tag{18}$$

$$M_0^1=-\frac{\tilde{}_0\overline{a}^{-1}\dot{\ell}+1}{h\dot{\ell}+1}\frac{1}{\sqrt{(\ell-x)}\sqrt{(t_0-²)v-(\ell-¸)}},$$

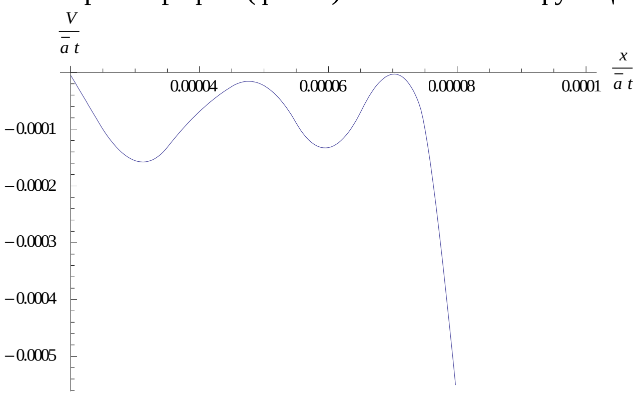
$$L_0=\frac{t_0-²}{\ell-¶},t-t_0=h\left(x-\ell(t_0)\right),\ell=\ell(t_0),T=\frac{t-²}{x-¶} \tag{19}$$

Задачу можно решать также при произвольной нагрузке $\pm_{+}(t,x)$.

Как видно из формулы (19), при $x \to \ell(t)$ особенностей нет, которые нам известны из других задач статики и динамики [2], [3], [4].

Сделаны расчёты для неподвижной задачи при значениях параметров $\frac{K_2}{\bar{a}} = 0,8, \frac{K_3}{\bar{a}} = 0,3; \frac{\bar{a}}{b} = \sqrt{3}, \sim_0 = 0,981431, \frac{i_0}{\circ_s \bar{a}} = \frac{1}{2\cdot 10^5}, \bar{a} = 1000\frac{см}{сек}, \frac{\bar{a}}{v} = 100,$

и построен график (фиг. 1) в зависимости функции $V/\bar{a}t$ от $x/\bar{a}t$.



Фиг. 1.

Взяв очень тонкую микротрещину $b_0 = 10^{-5}$ см, можно увидеть, что, в частности, при $\frac{x}{\bar{a}t} = 2\cdot 10^{-5}, \frac{V}{\bar{a}t} = -5.1\cdot 10^{-6}$ и условии залечивания $b_1(x,t) = b_0 + V(x,t) = 0$ [5] имеет вид $10^{-5} = 5.1\cdot \bar{a}t\cdot 10^{-6}$; при $t = 2\cdot 10^{-3}$ сек. трещина залечивается в точке $x = 4\cdot 10^{-5}$ см или при $\frac{x}{\bar{a}t} = 10^{-4}, \frac{V}{\bar{a}t} = -0.00326$; при $t = \frac{10^{-5}}{3}$ сек. трещина залечивается в точке $x = \frac{10^{-6}}{3}$ см.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мартиросян А.Н. Математические исследования нестационарных линейных граничных задач для сплошных сред. Ереван: ”Зангак-97’’, 2007. 244с.
2. Мхитарян С.М., Шекян А.Л., Шекян Л.А. //Труды VI Межд. конф. «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред». Горис-Степанакерт, 2008. С.345-349.
3. Багдоев А.Г., Мартиросян А.Н., Динунц А.С., Давтян А.В.// Доклады НАН Армении. 2010. Т.110. N.2. С.151-162.
4. Bagdoev A.G., Martirosyan G.A., Martirosyan A.N., Dinunts A.S., Davtyan A.V.//В сб. VII Int. Conf. ”The problems of dynamics of interaction of deformable media” Goris. Armenia, 2011,8.
5. Глико А.О. Влияние процесса осаждения твёрдой фазы из гидротермального раствора на залечивание системы плоско-параллельных трещин. //Труды VI межд. конф., Горис-Степанакерт. 2008. С.170-177.

Сведения об авторах

Динунц А.С. - кандидат физ.-мат. наук, доцент Горисского государственного университета
E-mail: dinuntsas@gmail.com

Давтян А.В. - преподаватель кафедры математики Горисского государственного университета
E-mail: davtyananush@gmail.com

Мартиросян Г.А.- кандидат физ.-мат. наук, доцент Горисского государственного университета
E-mail: ayk9911@rambler.ru

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СТЕПЕННЫХ РЯДОВ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ТОНКИХ БАЛОК

Жамакочян К. А.

Рассматриваются уравнения, граничные и начальные условия динамики плоского напряжённого состояния микрополярной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений в тонком прямоугольнике[1]. Принимая метод разложений по толщине прямоугольника в степенные ряды [2], на основе исходного приближения построена прикладная-одномерная модель динамического изгиба микрополярных упругих тонких балок. Показывается, что построенная модель полностью совпадает с аналогичной моделью микрополярных балок, построенной на основе асимптотически обоснованного метода гипотез [3,4].

1. Рассмотрим параллелепипед постоянной высоты $2h$, длины a и постоянной толщины $2h_1$. Координатную плоскость x_1x_3 разместим в срединной плоскости параллелепипеда, которая разделит толщину $2h_1$ на две равные части. Ось x_3 направим по высоте параллелепипеда, ось x_1 – по длине параллелепипеда, так чтобы она делила высоту $2h$ пополам. Будем считать, что в параллелепипеде по направлению оси x_2 (по направлению толщины $2h_1$) осуществляется обобщённое плоское напряжённое состояние, и задача определения напряжённо-деформированного состояния сводится к краевой задаче в срединной плоскости параллелепипеда x_1x_3, т.е. к изучению задачи в прямоугольнике $(0 \le x_1 \le a, \quad -h \le x_3 \le h)$. Для дальнейшего рассмотрения примем $2h_1 = 1$. Будем исходить из основных уравнений динамической задачи обобщённого плоского напряжённого состояния микрополярной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений [1]:

уравнения движения

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_3}=\rho\frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2},\quad \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3}=\rho\frac{\partial^2 V_3}{\partial t^2},\quad \frac{\partial\mu_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial\mu_{32}}{\partial x_3}-(\sigma_{13}-\sigma_{31})=J\frac{\partial^2\omega_2}{\partial t^2}; \tag{1.1}$$

физические соотношения упругости

$$\sigma_{11}=\frac{E}{1-\nu^2}(\gamma_{11}+\nu\gamma_{33}),\ \sigma_{33}=\frac{E}{1-\nu^2}(\gamma_{33}+\nu\gamma_{11}),$$
$$\sigma_{13}=(\mu+\alpha)\gamma_{13}+(\mu-\alpha)\gamma_{31},\ \sigma_{31}=(\mu-\alpha)\gamma_{13}+(\mu+\alpha)\gamma_{31},\ \mu_{12}=B\chi_{12},\ \mu_{32}=B\chi_{32}; \tag{1.2}$$

геометрические соотношения

$$\gamma_{11}=\frac{\partial V_1}{\partial x_1},\ \gamma_{33}=\frac{\partial V_3}{\partial x_3},\ \gamma_{13}=\frac{\partial V_3}{\partial x_1}+\omega_2,\ \gamma_{31}=\frac{\partial V_1}{\partial x_3}-\omega_2,\ \chi_{12}=\frac{\partial\omega_2}{\partial x_1},\ \chi_{32}=\frac{\partial\omega_2}{\partial x_3}. \tag{1.3}$$

Здесь $\sigma_{11}, \sigma_{33}, \sigma_{31}, \sigma_{13}$ – силовые напряжения; μ_{12}, μ_{32} – моментные напряжения; $\gamma_{11}, \gamma_{33}, \gamma_{13}, \gamma_{31}$ – деформации; χ_{12}, χ_{32} – изгибы-кручения; V_1, V_3 – перемещения, ω_2 – независимый поворот точек прямоугольника вокруг оси x_2; E,ν,α,B – упругие постоянные микрополярного тела.

На лицевых линиях прямоугольника $x_3 = \pm h$ считаются заданными силовые и моментные граничные условия (далее будем рассматривать задачу изгиба)

$$\sigma_{31} = p_1,\quad \sigma_{33} = \pm p_3,\quad \mu_{32} = \pm m_2 \quad \text{при}\ x_3 = \pm h \tag{1.4}$$

Граничные условия на кромках прямоугольника $(x_1 = 0, x_1 = a)$ в зависимости от способа приложения внешней нагрузки или закрепления её точек записываются либо в силовых и моментных напряжениях, либо в перемещениях и поворотах, либо в смешанном виде.

Будем считать, что $2h << a$ (т.е. рассматриваемый прямоугольник тонкий).

2. Метод степенных рядов. Если выражения (1.3) подставим в формулы (1.2), то силовые и моментные напряжения выразятся через перемещения V_1, V_3 и поворот ω_2. Для построения одномерной модели применим метод приведения [2]. Аппроксимируем V_1, V_3 и ω_2 степенными рядами относительно x_3:

$$V_1=\sum_{n=0}^{\infty}V_{1,n}x_3^n,\quad V_3=\sum_{n=0}^{\infty}V_{3,n}x_3^n,\quad \omega_2=\sum_{n=0}^{\infty}\omega_{2,n}x_3^n. \tag{2.1}$$

Подставляя ряды (2.1) в основные уравнения и вышеприведённые граничные условия плоской задачи микрополярной теории упругости имеющие место в тонком прямоугольнике, получим рекуррентные соотношения и условия, связывающие коэффициенты частичных сумм (полиномов) (2.1) любой степени, причём число соотношений равно числу неизвестных коэффициентов.

На самом деле, на основании формул (1.2), (1.3), с учётом (2.1), для силовых напряжений σ_{33}, σ_{31} и моментного напряжения μ_{32} получим:

$$\sigma_{33}=\frac{E}{1-\nu^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)V_{3,n+1}+\nu\frac{\partial V_{1,n}}{\partial x_1}\right]x_3^n, \tag{2.2}$$

$$\sigma_{31}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(\mu-\alpha)\frac{\partial V_{3,n}}{\partial x_1}+(\mu+\alpha)(n+1)V_{1,n+1}-2\alpha\omega_{2,n}\right]x_3^n, \tag{2.3}$$

$$\mu_{32}=\sum_{n=0}^{\infty}B(n+1)\omega_{2,n+1}x_3^n. \tag{2.4}$$

Используя формулы (2.2)-(2.4), и имея в виду граничные условия (1.4) на лицевых линиях прямоугольника $x_3=\pm h$, после некоторых преобразований придём к следующим шести равенствам:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[(\mu-\alpha)\frac{\partial V_{3,2k}}{\partial x_1}+(\mu+\alpha)(2k+1)V_{1,2k+1}-2\alpha\omega_{2,2k}\right]h^{2k}=\frac{p_1^+-p_1^-}{2}, \tag{2.5}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[(\mu-\alpha)\frac{\partial V_{3,2k+1}}{\partial x_1}+(\mu+\alpha)(2k+2)V_{1,2k+2}-2\alpha\omega_{2,2k+1}\right]h^{2k+1}=\frac{p_1^++p_1^-}{2}, \tag{2.6}$$

$$\frac{E}{1-\nu^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left[(2k+1)V_{3,2k+1}+\nu\frac{\partial V_{1,2k}}{\partial x_1}\right]h^{2k}=\frac{p_3^+-p_3^-}{2}, \tag{2.7}$$

$$\frac{E}{1-\nu^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left[(2k+2)V_{3,2k+2}+\nu\frac{\partial V_{1,2k+1}}{\partial x_1}\right]h^{2k+1}=\frac{p_3^++p_3^-}{2}, \tag{2.8}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[B(2k+1)\omega_{2,2k+1}\right]h^{2k}=\frac{m_2^+-m_2^-}{2}, \tag{2.9}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[B(2k+2)\omega_{2,2k+2}\right]h^{2k+1}=\frac{m_2^++m_2^-}{2}. \tag{2.10}$$

Далее, подставляя выражения (1.3) в формулы обобщённого закона Гука (1.2), силовые напряжения σ_{11}, σ_{13} и моментное напряжение μ_{12} будут выражаться через перемещения V_1, V_3 и свободный поворот ω_2. Принимая в виду разложения (2.1), полученные таким образом формулы для σ_{11}, σ_{13} и μ_{12}, подставляя в уравнения движения (1.1), придём к следующей системе дифференциальных уравнений относительно коэффициентов разложения (2.1):

$$\frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial^2 V_{1,n}}{\partial x_1^2}+\nu(n+1)\frac{\partial V_{3,n+1}}{\partial x_1}\right]+(\mu-\alpha)(n+1)\frac{\partial V_{3,n+1}}{\partial x_1}+$$

$$+(\mu+\alpha)(n+2)(n+1)V_{1,n+2}-2\alpha(n+1)\omega_{2,n+1}=\rho\frac{\partial^2 V_{1,n}}{\partial t^2}, \tag{2.11}$$

$$\frac{E}{1-\neg^2}\left[(n+2)(n+1)V_{3,n+2}+\neg(n+1)\frac{\partial V_{1,n+1}}{\partial x_1}\right]+(\text{«}+\sim)\frac{\partial^2 V_{3,n}}{\partial x_1^2}+$$

$$+(\text{«}-\sim)(n+1)\frac{\partial V_{1,n+1}}{\partial x_1}+2\sim\frac{\partial^2 \mu_{2,n}}{\partial x_1^2}=\circ\frac{\partial^2 V_{3,n}}{\partial t^2}, \qquad (2.12)$$

$$B\frac{\partial^2 \mu_{2,n}}{\partial x_1^2}+B(n+2)(n+1)\mu_{2,n+2}-2\sim\left[\frac{\partial V_{3,n}}{\partial x_1}-(n+1)V_{1,n+1}+2\mu_{2,n}\right]=J\frac{\partial^2 \mu_{2,n}}{\partial t^2}. \qquad (2.13)$$

Отметим, что уравнения (2.11)-(2.13) и условия (2.5)-(2.10) распадаются на две части: симметричные относительно x_3 (соответствующие продольным колебаниям) и обратно-симметричные (соответствующие поперечным колебаниям).

Поперечные колебания микрополярного тонкого прямоугольника (балки), на основании вышеперечисленных уравнений и условий, в исходном приближении метода степенных рядов описываются следующей системой уравнений:

$$(\text{«}-\sim)\frac{\partial V_{3,0}}{\partial x_1}+(\text{«}+\sim)V_{1,1}-2\sim\mu_{2,0}+\left[(\text{«}-\sim)\frac{\partial V_{3,2}}{\partial x_1}+3(\text{«}+\sim)V_{1,3}-2\sim\mu_{2,2}\right]h^2=\frac{p_1^+-p_1^-}{2},$$

$$\frac{E}{1-\neg^2}\left[2V_{3,2}+\neg\frac{\partial V_{1,1}}{\partial x_1}\right]h=\frac{p_3^++p_3^-}{2},$$

$$2B\mu_{2,2}h=\frac{m_2^++m_2^-}{2}, \qquad (2.14)$$

$$\frac{E}{1-\neg^2}\left[\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_1^2}+2\neg\frac{\partial V_{3,2}}{\partial x_1}\right]+2(\text{«}-\sim)\frac{\partial V_{3,2}}{\partial x_1}+6(\text{«}+\sim)V_{1,3}-4\sim\mu_{2,2}=\circ\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial t^2},$$

$$\frac{E}{1-\neg^2}\left[2V_{3,2}+\neg\frac{\partial V_{1,1}}{\partial x_1}\right]+(\text{«}+\sim)\frac{\partial^2 V_{3,0}}{\partial x_1^2}+(\text{«}-\sim)\frac{\partial V_{1,1}}{\partial x_1}+2\sim\frac{\partial^2 \mu_{2,0}}{\partial x_1^2}=\circ\frac{\partial^2 V_{3,0}}{\partial t^2},$$

$$B\frac{\partial^2 \mu_{2,0}}{\partial x_1^2}+2B\mu_{2,2}-2\sim\left[\frac{\partial V_{3,0}}{\partial x_1}-V_{11}+2\mu_{2,0}\right]=J\frac{\partial^2 \mu_{2,0}}{\partial t^2}.$$

Подставляя $V_{3,2}$ и $\mu_{2,2}$ из второго и третьего уравнений (2.14) в пятое и шестое уравнения, получим:

$$(\text{«}+\sim)\frac{\partial^2 V_{3,0}}{\partial x_1^2}+(\text{«}-\sim)\frac{\partial V_{1,1}}{\partial x_1}+2\sim\frac{\partial^2 \mu_{2,0}}{\partial x_1^2}=\circ\frac{\partial^2 V_{3,0}}{\partial t^2}-\frac{p_3^++p_3^-}{2h}, \qquad (2.15)$$

$$B\frac{\partial^2 \mu_{2,0}}{\partial x_1^2}+2\sim V_{1,1}-2\sim\frac{\partial V_{3,0}}{\partial x_1}-4\sim\mu_{2,0}=J\frac{\partial^2 \mu_{2,0}}{\partial t^2}-\frac{m_2^++m_2^-}{2h}. \qquad (2.16)$$

Подставив (2.1) в (1.2), для $\pm_{11}$ получим:

$$\sigma_{11}=\frac{E}{1-\nu^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\nu(n+1)V_{3,n+1}+\frac{\partial V_{1,n}}{\partial x_1}\right]x_3^n, \qquad (2.17)$$

откуда, для случая изгиба в исходном приближении будем иметь:

$$\sigma_{11}=\frac{E}{1-\nu^2}\left[2\nu V_{3,2}+\frac{\partial V_{1,1}}{\partial x_1}\right]x_3. \qquad (2.18)$$

Для силового напряжения σ_{31} сначала примем

$$\overset{0}{\pm}_{31}=(\text{«}-\sim)\frac{\partial V_{3,0}}{\partial x_1}+(\text{«}+\sim)V_{1,1}-2\sim\mu_{2,0}. \qquad (2.19)$$

Подставив выражение $\pm_{11}$ из (2.18) в первое уравнение равновесия (1.1), проинтегрировав по x_3, получим:

$$\tilde{\pm}_{31} = \frac{x_3^2}{2}\left(\circ \frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial t^2} - \frac{E}{1-\neg^2}\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_1^2} - 2\frac{E\neg}{1-\neg^2}\frac{\partial V_{3,2}}{\partial x_1} \right) + \bar{\pm}_{31}(x_1,t), \tag{2.20}$$

где $\bar{\pm}_{31}(x_1,t)$ – постоянная интегрирования. Для определения этой величины потребуем, чтобы усреднённая по высоте прямоугольника величина $\tilde{\pm}_{31}$ была равна нулю:

$$\int_{-h}^{h} \tilde{\pm}_{31} dx_3 = 0. \tag{2.21}$$

Подставив выражение (2.20) в (2.21), получим:

$$\bar{\pm}_{31}(x_1,t) = \frac{h^2}{6}\left(\frac{E}{1-\neg^2}\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_1^2} + 2\frac{E\neg}{1-\neg^2}\frac{\partial V_{3,2}}{\partial x_1} - \circ \frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial t^2} \right). \tag{2.22}$$

Таким образом, подставив (2.22) в (2.20), для $\tilde{\pm}_{31}$ получим следующее выражение:

$$\tilde{\pm}_{31} = \left(\frac{x_3^2}{2} - \frac{h^2}{6} \right)\left(\circ \frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial t^2} - \frac{E}{1-\neg^2}\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_1^2} - 2\frac{E\neg}{1-\neg^2}\frac{\partial V_{3,2}}{\partial x_1} \right). \tag{2.23}$$

Итак, будем иметь:

$$\pm_{31} = \overset{0}{\pm}_{31} + \tilde{\pm}_{31}. \tag{2.24}$$

Подставив (2.19) и (2.23) в (2.24), получим окончательную формулу для $\pm_{31}$:

$$\begin{aligned} \pm_{31} &= (« - \sim)\frac{\partial V_{3,0}}{\partial x_1} + (« + \sim)V_{1,1} - 2\sim \mu_{2,0} + \\ &+ \left(\frac{x_3^2}{2} - \frac{h^2}{6} \right)\left(\circ \frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial t^2} - \frac{E}{1-\neg^2}\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_1^2} - 2\frac{E\neg}{1-\neg^2}\frac{\partial V_{3,2}}{\partial x_1} \right), \end{aligned} \tag{2.25}$$

где $V_{3,2}$ выражается с помощью $V_{1,1}$ $\left(V_{3,2} = \frac{1-\neg^2}{2E}\frac{p_3^+ + p_3^-}{2h} - \frac{\neg}{2}\frac{\partial V_{1,1}}{\partial x_1}\right)$.

При помощи формул (2.25), удовлетворяя соответствующим граничным условиям из (1.4), получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} &(« - \sim)\frac{\partial V_{3,0}}{\partial x_1} + (« + \sim)V_{1,1} - 2\sim \mu_{2,0} - \frac{h^2}{3}E\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_1^2} - \neg \frac{h^2}{3}\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{p_3^+ + p_3^-}{2h} = \\ &= \frac{p_1^+ - p_1^-}{2} - \circ \frac{h^2}{3}\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial t^2}. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Объединив (2.15), (2.16) и (2.26), окончательным образом придём к следующей системе дифференциальных уравнений относительно $V_{3,0}$, $V_{1,1}$, $\mu_{2,0}$:

$$\begin{aligned} &(« - \sim)\frac{\partial V_{3,0}}{\partial x_1} + (« + \sim)V_{1,1} - 2\sim \mu_{2,0} - \frac{h^2}{3}E\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_1^2} \underline{- \neg \frac{h^2}{3}\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{p_3^+ + p_3^-}{2h}} = \frac{p_1^+ - p_1^-}{2} - \circ \frac{h^2}{3}\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial t^2}, \\ &(« + \sim)\frac{\partial^2 V_{3,0}}{\partial x_1^2} + (« - \sim)\frac{\partial V_{1,1}}{\partial x_1} + 2\sim \frac{\partial^2 \mu_{2,0}}{\partial x_1^2} = \circ \frac{\partial^2 V_{3,0}}{\partial t^2} - \frac{p_3^+ + p_3^-}{2h}, \\ &B\frac{\partial^2 \mu_{2,0}}{\partial x_1^2} + 2\sim V_{1,1} - 2\sim \frac{\partial V_{3,0}}{\partial x_1} - 4\sim \mu_{2,0} = J\frac{\partial^2 \mu_{2,0}}{\partial t^2} - \frac{m_2^+ + m_2^-}{2h}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Система уравнений (2.27) представляет собой математическую модель динамики микрополярных упругих тонких балок при изгибной деформации. Это – система дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа шестого порядка. К системе (2.27) следует присоединить граничные условия на концах балки $(x_1 = 0, x_1 = a)$ [3] и начальные условия – для $V_{3,0}$, $V_{1,1}$, $\mu_{2,0}$, $\frac{\partial V_{3,0}}{\partial t}$, $\frac{\partial V_{1,1}}{\partial t}$, $\frac{\partial \mu_{2,0}}{\partial t}$.

Теперь сравним полученную модель динамики микрополярной упругой тонкой балки с аналогичной моделью [3], построенной на основе метода гипотез, имеющих асимптотическое подтверждение [4]:

уравнения движения

$$\frac{\partial N_{13}}{\partial x_1} = 2°h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2\tilde{p}_3, \quad N_{31} - \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{2°h^3}{3}\frac{\partial^2 ·_1}{\partial t^2} = 2h\tilde{p}_1,$$
$$\frac{\partial L_{12}}{\partial x_1} + N_{31} - N_{13} = 2Jh\frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial t^2} - 2\tilde{m}_2; \tag{2.28}$$

соотношения упругости

$$N_{13} = 2h[(« + \sim)\Gamma_{13} + (« - \sim)\Gamma_{31}], \quad N_{31} = 2h[(« + \sim)\Gamma_{31} + (« - \sim)\Gamma_{13}],$$
$$M_{11} = \frac{2Eh^3}{3}K_{11}, \quad L_{12} = 2Bhk_{12}; \tag{2.29}$$

геометрические соотношения

$$\Gamma_{13} = \frac{\partial w}{\partial x_1} + \Omega_2, \quad \Gamma_{31} = ·_1 - \Omega_2, \quad K_{11} = \frac{\partial ·_1}{\partial x_1}, \quad k_{12} = \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1}. \tag{2.30}$$

Если (2.30) подставить в соотношения упругости (2.29) и последние в уравнения движения (2.28), получим основные уравнения в перемещениях и поворотах модели микрополярных упругих балок работы [3]. Сравнивая уравнения этой системы с полученными уравнениями (2.27), на основе метода степенных рядов $(V_{3,0} = w, V_{1,1} = ·_1, \mu_{2,0} = \Omega_2)$ легко убедиться, что разница только в подчёркнутом члене в (2.27). Но эта величина – результат того, что в физическом уравнении для $¥_{ii}$ $(i = 1,2)$ было удержано силовое напряжение $±_{33}$, которым, как известно, в теории балок принято пренебрегать. Таким образом, модель динамики микрополярных упругих тонких балок, построенная в работе [3] на основе метода гипотез [4], обосновывается также методом степенного разложения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 862с.
2. Селезов І. Т. Дослідження поперечних коливань пластини//Прикладна механіка. 1960. Т.VI. Вып.5. С.319-327.
3. Саркисян А.А. Математическая модель динамического изгиба микрополярных упругих тонких стержней// Докл. НАН Армении. 2011. Т.11. №4. С.342-351.
4. Саркисян С.О. Построение математической модели микрополярных упругих тонких стержней асимптотическим методом// Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2012. №5. С.31-37

Сведение об авторе:

Жамакочян Кнарик Араратовна – аспирант кафедры мат.анализа и дифференциальных уравнений Гюмрийского государственного педагогического института имени М. Налбандяна, (374 93) 87 32 94.

E-mail: knarikzhamakochyan@mail.ru.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВКЛЮЧЕНИЙ И МАТРИЦЫ КОМПОЗИТА

Зарубин В.С., Савельева И.Ю.

Построена математическая модель переноса тепловой энергии в композите с включениями шаровой формы. Получены расчётные формулы для коэффициента теплопроводности такого композита. Рассмотрены случай идеального теплового взаимодействия включений и матрицы, случай полного отсутствия теплового контакта на поверхности раздела между включением и матрицей, а также случай наличия промежуточного слоя между включением и матрицей.

1. В качестве конструкционных и строительных материалов, а также функциональных материалов в различных приборных устройствах находят широкое применение композиты, состоящие из матрицы и включений различной формы. К композитам можно отнести большинство применяемых в технике материалов, являющихся гетерогенными твёрдыми телами. Исследованию теплопроводности таких тел посвящено значительное количество работ, проанализированных, например, в [1-3]. Расчётные формулы в этих работах получены, как правило, либо в результате обработки экспериментальных данных применительно к конкретным материалам, либо путём априорного задания распределения температуры и теплового потока в моделях структуры гетерогенных тел.

Если включения в композите имеют близкие размеры во всех направлениях, то в первом приближении их можно рассматривать как шаровые, поскольку шар является статистически усреднённой формой таких включений. Близкую к шаровой форму имеют некоторые наноструктурные элементы (в том числе, фуллерены), которые в последнее время рассматриваются как включения для композитов различного назначения [4].

Для композита с шаровыми включениями удаётся построить адекватные математические модели, позволяющие достаточно достоверно прогнозировать зависимость его эффективного коэффициента теплопроводности от коэффициентов теплопроводности матрицы и включений и от объёмной концентрации включений. Наряду с идеальным тепловым контактом между включениями и матрицей возможно возникновение неидеального теплового контакта, а также образование промежуточного слоя между включением и матрицей.

В большинстве работ, в которых рассмотрена теплопроводность композитов, модифицированных дисперсными частицами, форма этих частиц принята в виде шара, а тепловой контакт между ними и матрицей предполагается идеальным [1-4]. В общем случае шаровое включение может иметь полость с воздухом или другим газом. При малых размерах полости конвективное движение газа, вызванное разностью температур в различных точках поверхности полости, практически отсутствует. Поэтому конвективным теплообменом на этой поверхности можно пренебречь. В случае малого изменения температуры поверхности полости пренебрежимо мала и интенсивность радиационного теплообмена [1].

Математическую модель переноса тепловой энергии в композите построим в предположении, что шаровые включения не контактируют между собой, т.е. отделены друг от друга слоем материала матрицы. Композит считаем состоящим из множества составных шаровых частиц, каждая из которых включает полый шар, окруженный слоем материала матрицы. Примем, что такая составная частица с наружным радиусом R является представительным элементом структуры композита и в тепловом отношении взаимодействует с неограниченным массивом однородного материала, коэффициент теплопроводности λ которого подлежит определению как эффективная характеристика композита. Таким образом, рассматриваемая модель композита содержит три фазы: включение, слой матрицы и неограниченный массив однородного материала [5].

Рассмотрим тепловое взаимодействие отдельно взятой составной частицы и окружающего её однородного материала, полагая коэффициенты теплопроводности λ_0 и λ_m материалов соответственно полого шара и матрицы заданными. Центр полого шара с внутренним радиусом R_0 и наружным радиусом $R_1 < R$ поместим в начале сферической системы координат. Примем, что на большом расстоянии r от начала координат задан вектор градиента температурного поля в однородном материале, направленный по оси сферической системы координат, от которой происходит отсчёт угловой координаты θ, т.е. при $r \to \infty$ распределение температуры в этом материале описывает функция $T_\infty(r,\theta) = Gr\cos\theta$, где G – модуль вектора градиента. Эта функция удовлетворяет уравнению Лапласа, которое в сферических координатах имеет вид

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial\phi^2} = 0. \quad (1.1)$$

В данном случае благодаря коллинеарности заданного вектора градиента температурного поля оси отсчёта угловой координаты θ распределение температуры симметрично относительно этой оси и не зависит от угловой координаты ϕ, т.е. $\partial^2 T/\partial\phi^2 \equiv 0$.

По мере приближения к составной шаровой частице температурное поле в однородном материале претерпевает возмущение, описываемое также удовлетворяющим уравнению (1.1) дополнительным слагаемым [6] $\Delta T(r,\theta) = (B/r^2)\cos\theta$, где B – подлежащий определению постоянный коэффициент. Таким образом, температурное поле в однородном материале, удовлетворяющее заданному условию при $r \to \infty$ и уравнению (1.1), описывает функция

$$T(r,\theta) = T_\infty(r,\theta) + \Delta T(r,\theta) = (Gr + B/r^2)\cos\theta. \quad (1.2)$$

Аналогичные зависимости описывают распределения температуры в шаровом включении

$$T_0(r,\theta) = (A_0 r + B_0/r^2)\cos\theta \quad (1.3)$$

и в слое материала матрицы

$$T_m(r,\theta) = (A_m r + B_m/r^2)\cos\theta \quad (1.4)$$

Из равенств (1.2)...(1.4) следует, что в плоскости при $\theta = \pi/2$ $T(r,\pi/2) = T_m(r,\pi/2) = T_0(r,\pi/2) = 0$. В эти равенства входят 5 неизвестных коэффициентов, которые необходимо найти из граничных условий на сферических поверхностях. При $r = R_0$ в предположении отсутствия теплообмена в полости шарового включения из условия идеальной теплоизоляции сферической поверхности радиусом R_0, при $r = R_1$ и $r = R$ из условий непрерывности радиальной составляющей вектора плотности теплового потока и распределения температуры следуют соотношения:

$$A_0 = 2B_0/R_0^3,\quad \bar\lambda(A_0 - 2B_0/R_1^3) = A_2 - 2B_2/R_1^3,\quad A_0 + B_0/R_1^3 = A_m + B_m/R_1^3,$$

$$A_m - 2B_m/R^3 = (\lambda/\lambda_m)(G - 2B/R^3),\quad A_m + B_m/R^3 = G + B/R^3. \quad (1.5)$$

где $\bar\lambda = \lambda_0/\lambda_m$. Последовательным исключением из равенств (1.5) четырёх коэффициентов A_0, B_0, A_m и B_m, находим

$$\frac{B}{R^3} = 3G\tilde\lambda\frac{1 + b(R_1/R)^3}{2\tilde\lambda + 1 + 2b(\tilde\lambda - 1)(R_1/R)^3} - G, \quad (1.6)$$

где $\tilde\lambda = \lambda/\lambda_m$, $b = (1 - \bar\lambda + (1 + 2\bar\lambda)\bar R_0^3/2)/(2 + \bar\lambda + (1 - \bar\lambda)\bar R_0^3)$, $\bar R_0 = R_0/R_1$. В случае сплошного шарового включения $\bar R_0 = 0$ и $b = b_0 = (1 - \bar\lambda)/(2 + \bar\lambda)$.

Замена составной частицы равновеликим шаром радиусом R приведёт к исчезновению возмущения температурного поля в окружающем её однородном материале. Тогда в равенстве (1.2) следует положить $\Delta T(r,\theta) = 0$, что равносильно условию $B = 0$, которое с учётом формулы (1.6) позволяет записать

$$\tilde\lambda = (1 - 2bC_V)/(1 + bC_V), \quad (1.7)$$

где $C_V = (R_1/R)^3$ – объёмная концентрация включений в композите.

Для абсолютно нетеплопроводных включений ($\lambda_0 = 0$) имеем $b = 1/2$ и из формулы (1.7) находим

$$\tilde\lambda = 1 - 3C_V/(2 + C_V).$$

Эта формула применима к материалу с коэффициентом теплопроводности λ_m, содержащему поры с объёмной концентрацией C_V. Отметим, что при включениях в виде полых шаров из равенства $\lambda_0 = \lambda_m$ не следует $\lambda = \lambda_m$.

При абсолютно теплопроводных включениях ($\lambda_0 \to \infty$) $b = 1$ и из формулы (1.7) следует

$\tilde{\lambda} = 1 + 3C_V/(1 - C_V)$.

В случае включений в виде сплошных шаров ($\bar{R}_0 = 0$) получим $b = b_0 = (1 - \bar{\lambda})/(2 + \bar{\lambda})$ и формула (1.7) примет вид

$$\tilde{\lambda} = \left(2 + \bar{\lambda} - 2(1 - \bar{\lambda})C_V\right) \Big/ \left(2 + \bar{\lambda} + (1 - \bar{\lambda})C_V\right) \qquad (1.8)$$

Эта формула совпадает с известной формулой Максвелла, приведённой в [6] и полученной на основе более простой двухфазной модели, состоящей из включения в виде сплошного шара и окружающего его материала матрицы.

На рис. 1.1 и 1.2 представлены построенные по формуле (1.7) графики зависимости $\tilde{\lambda}$ от C_V при значениях параметра $b \in [-1; 0,5]$.

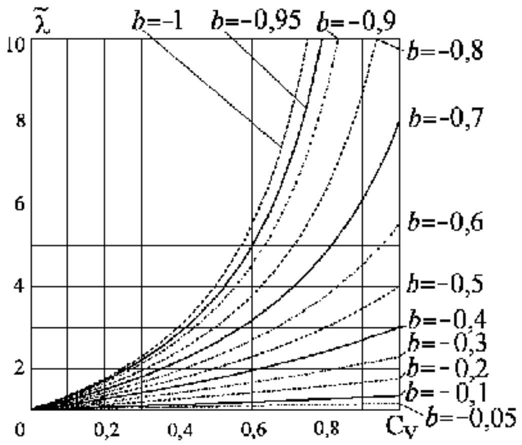


Рис. 1.1

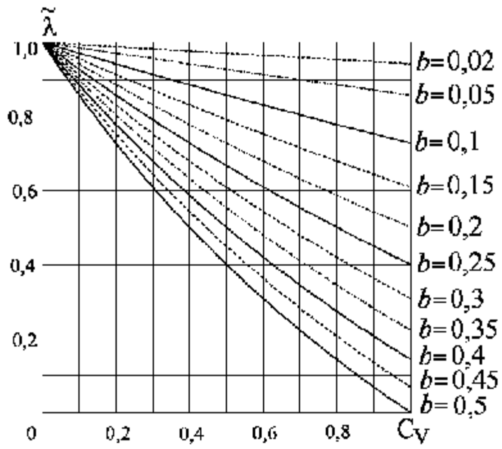


Рис. 1.2

2. Идеальный тепловой контакт является лишь одним из предельных случаев теплового взаимодействия включения и матрицы. Вторым предельным случаем можно считать полное отсутствие теплового контакта на поверхности раздела между включением и матрицей, что равносильно образованию в матрице нетеплопроводных пор с объёмной концентрацией, равной объёмной концентрации включений.

Представительный элемент структуры композита с неидеальным тепловым контактом между шаровыми включениями и матрицей выберем, как и в предыдущем случае, в виде составной шаровой частицы, содержащей шар (в общем случае полый), окружённый шаровым слоем материала матрицы. Термическое сопротивление между включением и матрицей, характеризующее неидеальный тепловой контакт на разделяющей их поверхности радиусом R_1, является величиной, обратной коэффициенту α контактного теплообмена. При $\alpha \to \infty$ тепловой контакт на этой поверхности становится идеальным. Тепловой контакт на сферической поверхности радиусом R, отделяющей составную частицу от массива однородного материала с искомым значением λ эффективного коэффициента теплопроводности композита, примем идеальным.

Построение математической модели теплового взаимодействия представительного элемента структуры композита с окружающим его однородным материалом аналогично построению модели в п.1. Отличие будет заключаться в граничных условиях на сферической поверхности радиусом R_1: на этой поверхности при неидеальном тепловом контакте распределение температуры терпит разрыв, но сохраняет силу условие непрерывности радиальной составляющей вектора плотности теплового потока. Таким образом, можно получить следующее соотношение:

$$\tilde{\lambda} = 2(C_1 - C_2 C_V)/(2C_1 + C_2 C_V) , \qquad (2.1)$$

где $C_1 = \bar{\lambda}(2 + \beta)(1 - \bar{R}_0^3) + \beta(2 + \bar{R}_0^3)$, $C_2 = 2\bar{\lambda}(1 - \beta)(1 - \bar{R}_0^3) + \beta(2 + \bar{R}_0^3)$, $\beta = \alpha R_1/\lambda_m$.

В случае абсолютно нетеплопроводных включений ($\lambda_0 = 0$) из равенства (2.1) следует

$\tilde{\lambda} = 2(1 - C_V)/(2 + C_V) = 1 - 3C_V/(2 + C_V)$.

При абсолютно теплопроводных включениях ($\lambda_0 \to \infty$) из (2.1) получим

$\tilde{\lambda} = \left(2 + \beta - 2(1-\beta)C_V\right) \big/ 2 + \beta + (1-\beta)C_V$.

3. На тепловой контакт между включением и матрицей может повлиять химическое взаимодействие между ними, приводящее к образованию промежуточного слоя с коэффициентом теплопроводности, отличным от коэффициентов теплопроводности как включения, так и матрицы [7]. При этом возможно непрерывное изменение коэффициента теплопроводности промежуточного слоя по его толщине [8].

В случае наличия промежуточного слоя при построении математической модели переноса тепловой энергии в композите в качестве представительных элементов структуры композита положим шаровые частицы с наружным радиусом R, каждая из которых включает полый шар с наружным радиусом R_1, окруженный промежуточным шаровым слоем толщиной $R_* - R_1$, и шарового слоя толщиной $R - R_*$ из материала матрицы. Таким образом, модель композита содержит четыре фазы: включение, промежуточный слой, слой матрицы и неограниченный массив однородного материала. При этом отношение R_1^3/R^3 будем считать объёмной концентрацией C_V включений в композите. Тепловой контакт на каждой сферической поверхности, разделяющей контактирующие фазы, примем идеальным.

Построение математической модели теплового взаимодействия представительного элемента структуры композита с окружающим его однородным материалом аналогично построению модели в п.1. Таким образом, можно получить следующее соотношение:

$$\tilde{\lambda} = (1 - 2\bar{R}_*^3 d)/(1 + \bar{R}_*^3 d) , \qquad (3.1)$$

где $d = 3\left(1 + b^* C_V/\bar{R}_*^3\right) \Big/ \left(2 + \bar{\lambda}_* + 2b^*(1 - \bar{\lambda}_*)C_V/\bar{R}_*^3\right) - 1$, $\bar{\lambda}_* = \lambda_*/\lambda_m$, λ_* – заданый коэффициент теплопроводности промежуточного слоя, $b^* = \left(1 - \bar{\lambda}/\bar{\lambda}_* + (1 + 2\bar{\lambda}/\bar{\lambda}_*)\bar{R}_0^3/2\right) \Big/ \left(2 + \bar{\lambda}/\bar{\lambda}_* + (1 - \bar{\lambda}/\bar{\lambda}_*)\bar{R}_0^3\right)$, $\bar{R}_* = R_*/R$.

Эта формула сохраняет смысл при условии $C_V \leqslant C_V^* = (R_1/R_*)^3$, поскольку при $C_V = C_V^*$ в составной частице уже отсутствует шаровой слой матрицы. В частном случае отсутствия промежуточного слоя $\bar{R}_*^3 = C_V$ и равенство (3.1) при $\bar{\lambda}_* = \bar{\lambda}$ и $\bar{R}_0 = 0$ переходит в известную формулу Максвелла вида (1.8), что может служить косвенным подтверждением корректности процедуры получения формулы (3.1).

4. Вариационная форма рассмотренных моделей в виде пары альтернативных (минимизируемого и максимизируемого) функционалов, достигающих на истинных распределениях температуры и плотности теплового потока совпадающих по значению экстремумов, позволяет установить не только зависимости для эффективного коэффициента теплопроводности композита, но и получить двусторонние (сверху и снизу) оценки этого коэффициента. В работе [9] представлен детальный параметрический анализ полученных зависимостей и в случае идеального теплового контакта проведено их сравнение с известными в литературе результатами.

Работа выполнена по гранту НШ-255.2012.8 программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ и гранту Президента РФ для государственной поддержки молодых российских учёных — кандидатов наук (проект МК–6618.2013.8).

ЛИТЕРАТУРА

1. Чудновский А.Ф. Теплофизические характеристики дисперсных материалов. М.: Физматгиз, 1962. 456 с.
2. Миснар А. Теплопроводность твёрдых тел, жидкостей, газов и их композиций: Пер. с франц. М.: Мир, 1968. 464 с.
3. Дульнеев Г.Н., Заричняк Ю.П. Теплопроводность смесей и композиционных материалов. Л.: Энергия, 1974. 264 с.
4. Кац Е.А. Фуллерены, углеродные нанотрубки и нанокластеры. Родословная форм и идей. М.: Изд-во ЛКИ, 2008. 296 с.
5. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Эффективный коэффициент теплопроводности композита с шаровыми включениями // Тепловые процессы в технике. 2012. № 10. С.470-474.
6. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твёрдых тел: Пер. с англ. М.: Наука, 1961. 488с.
7. Савельева И.Ю. Эффективный коэффициент теплопроводности композита при наличии промежуточного слоя между шаровыми включениями и матрицей // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия «Естественные науки». 2012. Спецвыпуск «Математическое моделирование в технике». С.180-186.
8. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Эффективный коэффициент теплопроводности композита при непрерывном изменении теплопроводности между шаровыми включениями и матрицей // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия «Естественные науки». 2012. Спецвыпуск «Прикладная математика и механика». С.95-102.
9. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Теплопроводность композитов с шаровыми включениями. LAP LAMBERT Academic Publishing. 2013. 85 с.

<u>Сведения об авторах:</u>

Зарубин Владимир Степанович – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Прикладная математика» Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана, (499) 263-63-26
E-mail: fn2@bmstu.ru

Савельева Инга Юрьевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Прикладная математика» Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана, (499) 263-63-26
E-mail: Inga.Savelyeva@gmail.com

КОРОТКОВОЛНОВАЯ ДИФРАКЦИЯ НА СИСТЕМЕ ПРЕПЯТСТВИЙ КАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЫ В ОГРАНИЧЕННОЙ АКУСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

Ивченко С.В.

На основе геометрической теории дифракции исследованы траектория многократно отраженных высокочастотных волн и их амплитуда в акустической среде, ограниченной параллелепипедом с твердыми стенками, содержащим отражатели цилиндрической и сферической формы. Осуществлен количественный анализ используемой в задачах прикладной акустики модели замены граничных поверхностей отражателей набором плоских граней вписанных или описанных многогранников.

1. В акустической среде ограниченного объёма, например, в помещении в виде параллелепипеда, грани которого могут содержать поверхности канонической формы (рис. 1), от источника x_0 распространяется сферическая высокочастотная волна. В указанном объёме, отнесённом к глобальной декартовой системе координат $OXYZ$ (рис. 1), может содержаться конечное число отражателей, ограниченных замкнутыми гладкими поверхностями. Задача рассматривается в локальной постановке. Это значит, что рассматривается распространение высокочастотной волны вдоль луча $x_0 - y_1^* - y_2^* - y_3^* - ... - y_N^* - x_{N+1}$, где точки зеркального отражения $y_1^*,\ y_2^*,\ y_3^*,..., y_N^*$, могут принадлежать как поверхности одного рассеивателя, так и граничным поверхностям различных N рассеивателей (рис.1). Однако, возможны и случаи последовательного расположения по несколько точек зеркального отражения на поверхностях отдельных рассеивателей, в то время как на других присутствует только одна точка отражения. Волна принимается в точке x_{N+1} акустической среды. В высокочастотном режиме колебаний давление в точке приёма определяется отражением волны от малых окрестностей $S_1^*,\ S_2^*,..., S_N^*$ граничных поверхностей отражателей в точках зеркального отражения $y_1^*,\ y_2^*,\ y_3^*,..., y_N^*$. Цель исследования: построить траекторию многократно переотражённого луча и вычислить значение давления в многократно отражённой волне в точке приёма.

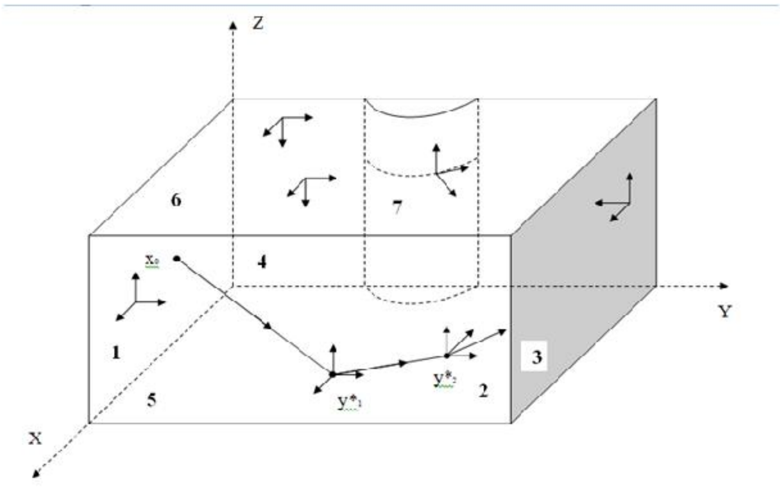


Рис.1 Распространение высокочастотной акустической волны в ограниченном объеме в виде параллелепипеда с цилиндрическим граничным включением

2. Амплитуда давления в точке y акустической среды, порождённой круговой волной от точечного источника, находящегося в точке x_0, задается соотношением: $p^{inc}(y) = |x_0 - y|^{-1} e^{ik|x_0 - y|}$, $k = \mu / c$ – волновое число, c – скорость акустической волны.

В дальнейшем рассматривается высокочастотный режим колебаний, а поэтому параметры μ и k являются большими. Исследуемая проблема сводится к геометрической и механической задачам.

Первая задача – геометрическая. Она состоит в расчёте траектории N-кратно переотражённого луча, которая представляет собой пространственную ломаную линию, вдоль которой распространяется акустическая волна. Объём конечных размеров отнесён к глобальной декартовой системе координат, в которой считается известными граничная поверхность и поверхности отражателей, находящихся внутри объёма. По уравнению поверхности в каждой её точке определяются базисные орты локальной декартовой системы координат, определяемой нормалью к поверхности и касательными к линиям кривизны поверхности. В конкретных расчетах кроме плоских отражателей в объёме присутствуют отражатели канонической формы: цилиндрические и сферические. Базисы цилиндрической и сферической систем координат выражаются через базис глобальной системы координат. Расчёт траектории луча основан на решении геометрических задач нахождения точек пересечения прямой с поверхностью, законах отражения лучей от поверхности.

Вторая задача – механическая. Она состоит в расчёте давления в конечной точке построенного луча. Эта задача в общей постановке исследована в работах Сумбатяна М.А. и Боева Н.В.[1,2,3]. В них построено асимптотическое решение на основе модификации физической теории дифракции Кирхгофа [4], основанной на использовании интегрального представления Кирхгофа для отражённого от препятствия поля. Этот подход приводит к 2N-мерному дифракционному интегралу от быстроосциллирующей функции.

$$p(x_{N+1}) = \left(\frac{ik}{2\text{®}}\right)^N \prod_{n=1}^{N} L_n \cos\text{¥}_n^* \iint_{S_N^*} \iint_{S_{N-1}^*} \ldots \iint_{S_1^*} e^{ik\text{¨}}\, dS_1 \ldots dS_{N-1} dS_N ,$$
$$\text{¨} = |x_0 - y_1| + |y_1 - y_2| + \ldots + |y_{N-1} - y_N| + |y_N - x_{N+1}|, \tag{2.1}$$

$$L_0 = |x_0 - y_1^*|, L_{n-1} = |y_{n-1}^* - y_n^*|, n = 2, 3, \ldots, N, L_n = |y_N^* - x_{N+1}|.$$

Здесь $S_1^*, S_2^*, \ldots, S_{N-1}^*, S_N^*$ – малые окрестности точек зеркального отражения $y_1^*, y_2^*, \ldots, y_{N-1}^*, y_N^*$;

$y_1, y_2, \ldots, y_{N-1}, y_N$ – текущие точки отражения указанных окрестностей; ¥_n^* – угол между направлением падения луча и нормалью к поверхности в точке зеркального отражения y_n^*.

Применением для оценки 2N-кратного интеграла (2.1) метода многомерной (2N-мерной) стационарной фазы в [5] получена амплитуда давления в точке x_{N+1} в N раз отражённой волне.

$$p(x_{N+1}) = \prod_{n=1}^{N} \cos\text{¥}_n^* \frac{\exp(i(k\sum_{n=0}^{N} L_n + \frac{\text{®}}{4}(\text{¢}_{2N} + 2N)))}{(\prod_{n=0}^{N} L_n)\sqrt{|\det(D_{2N})|}} . \tag{2.2}$$

Матрица Гессе $D_{2N}=(d_{ij}), i, j=1,2,...,2N$ – ленточная матрица (с шириной ленты равной семи) и симметричной $d_{ij}=d_{ji}$ со следующими ненулевыми элементами $d_{ij}, i<j$:

диагональные элементы:

$$d_{2n-1,2n-1}=(L_{n-1}^{-1}+L_N^{-1})(1-(\mathbf{q_n^0},\mathbf{i_n})^2)+2k_1^{(n)}(\mathbf{q_n^0},\mathbf{k_n}),$$

$$d_{2n,2n}=(L_{n-1}^{-1}+L_N^{-1})(1-(\mathbf{q_n^0},\mathbf{j_n})^2)+2k_2^{(n)}(\mathbf{q_n^0},\mathbf{k_n});$$

недиагональные элементы :

$$d_{2n-1,2n}=-(L_{n-1}^{-1}+L_N^{-1})(\mathbf{q_n^0},\mathbf{i_n})(\mathbf{q_n^0},\mathbf{j_n}); d_{2n-1,2n+1}=L_N^{-1}((\mathbf{q_n^0},\mathbf{i_n})(\mathbf{q_n^0},\mathbf{i_{n+1}})-(\mathbf{i_n},\mathbf{i_{n+1}}));$$

$$d_{2n-1,2n+2}=L_N^{-1}((\mathbf{q_n^0},\mathbf{i_n})(\mathbf{q_n^0},\mathbf{j_{n+1}})-(\mathbf{i_n},\mathbf{j_{n+1}})), d_{2n,2n+1}=L_N^{-1}((\mathbf{q_n^0},\mathbf{j_n})(\mathbf{q_n^0},\mathbf{i_{n+1}})-(\mathbf{j_n},\mathbf{i_{n+1}}));$$

$$d_{2n,2n+2}=L_N^{-1}((\mathbf{q_n^0},\mathbf{j_n})(\mathbf{q_n^0},\mathbf{j_{n+1}})-(\mathbf{j_n},\mathbf{j_{n+1}}));$$

где $k_1^{(n)},k_2^{(n)}(n=1,2,...,N)$ – главные кривизны поверхности в точке y_n^* . Переменная n принимает последовательно значения 1,2,3, … с условием, что каждый из индексов i и j элементов $d_{ij}(i, j=1,2,...,N)$ не превосходит числа $2N$. $\mathbf{i_n},\mathbf{j_n},\mathbf{k_n}$ – базис локальной системы координат в точке зеркального отражения y_n^* . $\mathbf{q_n^0}$ – направление падения волны в точке y_n^* . Выражение для давления (2.2) соответствует геометрической теории дифракции. В прикладных задачах акустики поверхности неплоских отражателей заменяются обычно набором плоских граней вписанных или описанных многогранников. Если грани такого многогранника расположены в касательных плоскостях к поверхностям отражателей в точках зеркального отражения, то давление $p_{пл}(x_{n+1})$ имеет вид: $p_{пл}(x_{N+1})=(\sum_{n=0}^{N}L_n)^{-1}$ (2.3)

На рис. 2,3,4 представлены пространственные траектории лучей многократно переотражённых волн с числом переотражений, равным 50 в ограниченном объёме, содержащем отражатели канонической формы. При этом направление исходного луча от источника волны задаётся. На рис.2 изображена траектория распространения акустической волны в ограниченном объёме в форме параллелепипеда со сторонами $a=5, b=5, c=2$, одна из граней которого содержит цилиндрическую часть, описываемую уравнением $x^2+(y-2.5)^2=1$. Число отражений – 50. Отражений от цилиндра – 4: в точках $x_5, x_{15}, x_{30}, x_{50}$. В точках сравниваются амплитуды давления от цилиндрической поверхности $p(x_6), p(x_{15}), p(x_{30}), p(x_{50})$ и от плоских отражателей, помещённых в точках зеркального отражения: $p_{пл}(x_6), p_{пл}(x_{15}), p_{пл}(x_{30}), p_{пл}(x_{50})$ Приведём результаты сравнения в точках :

$$p_{пл}(x_6)=0.08550542815,\ p(x_6)=0.06984907828,\ \frac{p_{пл}(x_6)}{p(x_6)}=1.224145404$$

$$p_{пл}(x_{16})=0.02850180941,\ p(x_{16})=0.003246754718,\ \frac{p_{пл}(x_{16})}{p(x_{16})}=8.778553320$$

$$p_{пл}(x_{31})=0.0003922892651,\ p(x_{31})=0.01502062989,\ \frac{p_{пл}(x_{31})}{p(x_{31})}=38.28967863$$

$$p_{пл}(x_{51})=4.08048320e^{-5},\ p(x_{51})=9.206524059e^{-3},\ \frac{p_{пл}(x_{51})}{p(x_{51})}=225.6233167$$

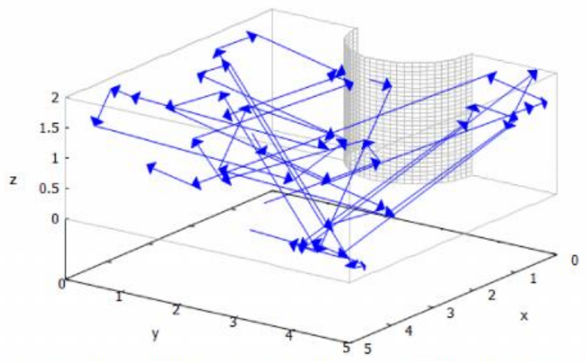


Рис.2 Траектория распространения акустической волны в ограниченном объеме с цилиндрическим включением

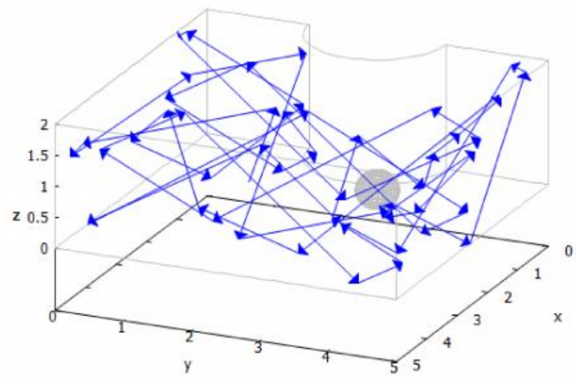


Рис.3 Траектория луча в ограниченном объеме, содержащем одно сферическое включение

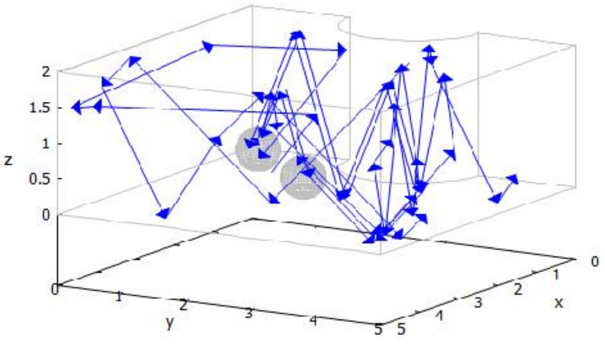


Рис.4 Траектория распространения луча в ограниченном объеме с двумя сферическими включениями

На рис. 3 изображена траектория луча в том же объёме, но содержащем внутри дополнительно одно сферическое препятствие $(x-4.5)^2+(y-4.5)^2+(z-1.5)^2=0.3^2$. Число отражений от сферы – 1, а от цилиндра – 3. Приведём сравнение тех же величин в данном случае. Отражение от шара:

$p_{пл}(x_{12})=0.00196118588,\ p(x_{12})=0.03212295149,\ \dfrac{p_{пл}(x_{12})}{p(x_{12})}=16.37935079$. Отражение от цилиндра :

$$p_{пл}(x_{21}) = 0.02149181284,\ \ p(x_{21}) = 0.000320811,\ \frac{p_{пл}(x_{21})}{p(x_{21})} = 66.99214075$$

$$p_{пл}(x_{30}) = 0.01578488801,\quad p(x_{30}) = 1.792e^{-5},\ \frac{p_{пл}(x_{30})}{p(x_{30})} = 880.4649078$$

$$p_{пл}(x_{51}) = 0.009406141161,\quad p(x_{51}) = 8.780078582e^{-7},\ \frac{p_{пл}(x_{51})}{p(x_{51})} = 10713.04895.$$

На рис. 4 в том же объёме содержатся два шаровых препятствия: первое – $(x-4)^2+(y-2.5)^2+(z-1)^2=0.3^2$, второе – $(x-3.25)^2+(y-2.75)^2+(z-1)^2=0.3^2$. Отражение от первого шарового препятствия

$p_{пл}(x_7) = 0.05529818664,\ p(x_7) = 0.006660297525,\ \frac{p_{пл}(x_7)}{p(x_7)} = 8.302660119.$ Отражение от второго шарового препятствия:

$$p_{пл}(x_{10}) = 0.04755666731,\ p(x_{10}) = 0.000669281,\ \frac{p_{пл}(x_{10})}{p(x_{10})} = 71.05636276.$$

От цилиндрической поверхности:

$$p_{пл}(x_{30}) = 0.01433379368,\ p(x_{30}) = 3.459811e^{-6},\ \frac{p_{пл}(x_{30})}{p(x_{30})} = 4142.940347$$

$$p_{пл}(x_{50}) = 0.009009342152,\ p(x_{50}) = 4.47788512e^{-7},\ \frac{p_{пл}(x_{50})}{p(x_{50})} = 20119.63664$$

3. Для произвольного числа переотражений в ограниченном объёме с кусочно-гладкой границей, содержащем внутри твёрдые отражатели канонической формы, разработан в рамках геометрической теории дифракции метод расчёта траектории волны, которая представляет собой пространственную ломаную линию. На основе результатов, полученных в работах Сумбатяна М.А. и Боева Н.В., вычислены амплитуды давления акустических волн в точках приёма переотражённой волны. На примере рассматриваемых задач проведен качественный и количественный сравнительный анализ проблемы замены неплоских отражателей плоскими в прикладных задачах акустики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sumbatyan M.A., Boyev N. . High-frequency diffraction by nonconvex obstacles. // J. Acoust. Soc. Am. – 1994. – 95, N 5. (Part 1). – P. 2347 – 2353.
2. Боев Н.В. Рассеяние высокочастотных волн на поверхностях в сплошных средах с учётом переотражений. //Акуст. журн. 2004. 50. N 6. С.756 – 761.
3. Боев Н.В., Сумбатян М.А. Коротковолновая дифракция на телах, ограниченных произвольной гладкой поверхностью. // Доклады РАН. 2003. 392. N 5. С. 614 – 617.
4. Боровиков В.А., Кинбер Б.Е. Геометрическая теория дифракции. М.: Связь, 1978. 248 с.
5. Федорюк М.В. Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368с.

Сведения об авторе:

Ивченко Сергей Владимирович – аспирант кафедры автоматики и телемеханики, Ростовский Государственный Университет Путей Сообщения, факультет автоматики, телемеханики и связи, +7(988)543-87-19. **E-mail:** sergey.ivchenko89@yandex.ru

ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОУПРУГОЙ СДВИГОВОЙ ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ НА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ МЕТАЛЛИЧЕСКОМ СЛОЕ В ПРОСТРАНСТВЕ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИК-ДИЭЛЕКТРИК

Казарян А.А.

Задача дифракции поверхностной электроупругой волны сводится к решению задачи типа Римана в теории аналитических функций. Наличие полубесконечного металлического слоя приводит к распространению дифрагированных объёмных и поверхностных электроупругих волн.

Рассматривается задача дифракции поверхностной волны сдвига в составном пространстве, отнесённом к декартовой системе координат $Oxyz$, когда пьезоэлектрическая среда-пьезоэлектрик класса $6mm$ гексагональной симметрии с совпадающей с осью Oz главной осью кристалла, занимает полупространство $y > 0$, а диэлектрическая среда-полупространство– $y < 0$. Диэлектрическая среда (вакуум) граничит с пьезоэлектрическим полупространством без акустического контакта в плоскости Oxz. В диэлектрическом полупространстве тонкий заземлённый металлический слой занимает полуплоскость $y = -h$, $x < 0$. Из бесконечности распространяется эелектроупругая поверхностная сдвиговая волна, обусловленная наличием пьезоэффекта в полупространстве y>0

$$\tilde{w}_\infty(x,y,t) = w_\infty(x,y)e^{-i\mu t}$$
$$\tilde{\Phi}_\infty(x,y,t) = \Phi_\infty(x,y)e^{-i\mu t}, \qquad y>0 \qquad (1)$$
$$\tilde{\Phi}_{1\infty}(x,y,t) = \Phi_{1\infty}(x,y)e^{-i\mu t} \qquad y<0$$

со следующими значениями амплитудных составляющих перемещения и электрических потенциалов, соответственно:

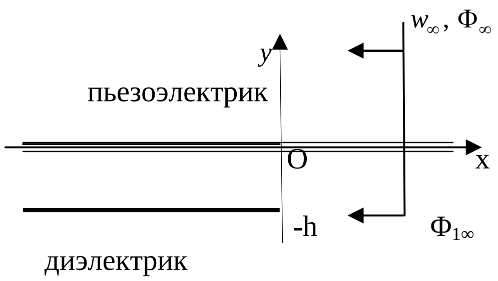
$$w_\infty(x,y) = w_0(y)e^{-i\pm_1 x}$$
$$w_0(y) = e^{-\sqrt{\pm_1^2 - k^2}\,y}$$
$$\Phi_\infty(x,y) = \frac{e_{15}}{\pounds_{11}}\Phi_0(y)e^{-i\pm_1 x}$$
$$\Phi_0(y) = e^{-\sqrt{\pm_1^2 - k^2}\,y} - \frac{\pounds_0}{\pounds_{11}+\pounds_0}e^{-\pm_1 y} \qquad (2)$$
$$\Phi_{1\infty}(x,y) = \frac{e_{15}}{\pounds_{11}+\pounds_0}\Phi_{10}(y)e^{-i\pm_1 x}$$
$$\Phi_{10}(y) = e^{\pm_1 y}$$

В этих соотношениях μ – частота колебаний, t – параметр времени, $k = \mu/c$, $c = \sqrt{c_{44}(1+\text{¡})/°}$, $\text{¡} = e_{15}^2/\pounds_{11}c_{44}$ – волновое число, скорость распространения сдвиговой электроупругой волны и коэффициент электромеханической связи в пьезоэлектрической среде, соответственно, $e_{15}, \pounds_{11}, c_{44}$ – пьезоэлектрическая, диэлектрическая и упругая постоянные пьезоэлектрика, а $°$ – плотность, $\pounds_0$ -диэлектрическая постоянная среды $y < 0$. Волновое число падающей поверхностной волны $\pm_1 = k(1+\text{¡})(\pounds_0+\pounds_{11})/\sqrt{(1+\text{¡})^2(\pounds_0+\pounds_{11})^2 - \pounds_0\text{¡}^2} > k$.

Рассматриваемая среда находится в условиях антиплоской деформации. Задача заключается в определении электроупругого волнового поля для пьезоэлектрического полупространства $(y > 0)$ и электрического потенциала в диэлектрической среде $(y < 0)$. Отметим, что учитывается гармоническая зависимость от времени всех составляющих волнового поля (временной множитель $e^{-i\mu t}$), и задача решается в амплитудах. Для определения амплитуды перемещения точек в полупространстве y>0 и амплитуд электрических потенциалов (в квазистатическом приближении) в двух полупространствах имеем следующие уравнения [1] :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)w+k^2w=0 \qquad y>0 \qquad (3)$$
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Phi+k^2\frac{e_{15}}{£_{11}}w=0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Phi_1=0 \qquad y<0 \qquad (4)$$



Решения уравнений должны удовлетворять следующим условиям при $y=0$ и $y=-h$:

$$±_{yz}(x,+0)=0,$$
$$\Phi(x,+0)=\Phi_1(x,-0), \qquad (5)$$
$$D_2(x,+0)=D_{12}(x,-0).$$

$$\Phi_1(x,-h+0)=\Phi_1(x,-h-0)=\Phi^+(x),$$
$$D_{12}(x,-h+0)-D_{12}(x,-h-0)=-£_0\Psi^-(x). \qquad (6)$$

Здесь $±_{yz}(x,y)$ – амплитуда напряжения в пьезоэлектрике, $D_2(x,y)$, $D_{12}(x,y)$ – составляющие вектора электрической индукции в пьезоэлектрике и диэлектрике, соответственно:

$$±_{yz}=c_{44}\frac{\partial w}{\partial y}+e_{15}\frac{\partial\Phi}{\partial y}$$
$$D_2=e_{15}\frac{\partial w}{\partial y}-£_{11}\frac{\partial\Phi}{\partial y} \qquad (7)$$
$$D_{12}=-£_0\frac{\partial\Phi}{\partial y}$$

В соотношениях (6) введены функции

$\Phi^+(x)=\Phi_1(x_1,-h)g(x)$, $£_0\cdot^{-}(x)=d(x)g(-x)$,

где $d(x)$ представляет разницу значений $D_{12}(x,y)$ на $y=-h+0$ и $y=-h-0$ при $x<0$,

$g(x)$ – функция Хэвисайда.

Введём функции

$$u(x,y)=w(x,y)-w_\infty(x,y),$$
$$¨(x,y)=\Phi(x,y)-\Phi_\infty(x,y), \qquad (8)$$

$\ddot{}_1(x,y)=\Phi_1(x,y)-\Phi_{1\infty}(x,y)$

Для решения поставленной задачи применяем действительное преобразование Фурье по координате x. Относительно трансформантов Фурье получим уравнения:

$$\frac{d^2\bar{u}}{dy^2}-(\pm^2+k^2)\bar{u}=0$$

$$\frac{d^2\text{ˉ}}{dy^2}-\pm^2\text{ˉ}+k^2\frac{e_{15}}{\text{£}_{11}}\bar{u}=0 \qquad y>0 \qquad (9)$$

$$\frac{d^2\text{ˉ}_1}{dy^2}-\pm^2\text{ˉ}_1=0 \qquad y<0$$

Для трансформант искомых функций получим

$$\bar{w}(x,y)=\bar{u}(\pm,y)+2\text{®}\,w_0(y)\text{¢}(\pm-\pm_1)$$

$$\bar{\Phi}(\pm,y)=\text{ˉ}(\pm,y)+2\text{®}\frac{e_{15}}{\text{£}_{11}}\Phi_0(y)\text{¢}(\pm-\pm_1) \qquad (10)$$

$$\bar{\Phi}_1(\pm,y)=\text{ˉ}_1(\pm,y)+2\text{®}\frac{e_{15}}{\text{£}_{11}}\Phi_{10}(y)\text{¢}(\pm-\pm_1)$$

$\text{¢}(\pm)$ – известная функция Дирака.

Следовательно, решения представляются в виде:

$$w(x,y)=w_\infty(x,y)+\frac{1}{2\text{®}}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{u}(\pm,y)e^{-i\pm x}d\pm$$

$$\Phi(x,y)=\Phi_\infty(x,y)+\frac{1}{2\text{®}}\int_{-\infty}^{\infty}\text{ˉ}(\pm,y)e^{-i\pm x}d\pm \qquad y>0 \qquad (11)$$

$$\Phi_1(x,y)=\Phi_{1\infty}(x,y)+\frac{1}{2\text{®}}\int_{-\infty}^{\infty}\text{ˉ}_1(\pm,y)e^{-i\pm x}d\pm \qquad y<0$$

Ограниченные и представляющие уходящую волну решения уравнений имеют вид:

$$\bar{u}(\pm,y)=A(\pm)e^{-\sqrt{\pm^2-k^2}\,y}$$

$$\text{ˉ}(\pm,y)=B(\pm)e^{-|\pm|y}+\frac{e_{15}}{\text{£}_{11}}\bar{u}(\pm,y) \qquad y>0$$

$$\text{ˉ}_1(\pm,y)=C(\pm)e^{|\pm|y}+De^{-|\pm|y} \qquad -h<y<0 \qquad (12)$$

$$\text{ˉ}_1(\pm,y)=E(\pm)e^{|\pm|y} \qquad y<-h\,,$$

здесь $\text{¥}(\pm)=\sqrt{\pm^2-k^2}\to|\pm|$ при $|\pm|\to\infty$, $\sqrt{\pm^2-k^2}=-i\sqrt{k^2-\pm^2}$,

т.е. действительная ось комплексной плоскости $\sim=\pm+i\text{²}$ обходит точку $\pm=-k$ сверху, а точку $\pm=k$ снизу [2].

Условия на границе разделов двух сред $y=0$ и на плоскости $y=-h$ принимают вид

$$c_{44}\frac{d\bar{u}}{dy}+e_{15}\frac{d\text{ˉ}}{dy}=0 \qquad y=+0$$

$$e_{15}\frac{d\bar{u}}{dy}-\text{£}_{11}\frac{d\text{ˉ}}{dy}=-\text{£}_0\frac{d\text{ˉ}_1}{dy} \qquad y=0$$

$$\text{ˉ}(\pm,+0)=\text{ˉ}_1(\pm,-0)\,,$$

$$\text{ˉ}_1(\pm,-h+0)=\text{ˉ}_1(\pm,-h-0) \qquad (13)$$

$$\text{¯}_1(\pm,-h+0)=\Phi^+(\pm)-2\text{®}e_1\text{¢}(\pm-\pm_1)$$

$$\frac{d\,\text{¯}_1(\pm,-h+0)}{dy}-\frac{d\,\text{¯}_1(\pm,-h-0)}{dy}=\bar{\Psi}^-(\pm),$$

где $e_1=\dfrac{e_{15}}{\pounds_{11}+\pounds_0}e^{-\pm_1 h}$.

Из этих условий получим:

$$A(\pm)=-\frac{2\pounds_{11}\pounds_0(1+\text{¡}-K_0(\pm))D(\pm)}{e_{15}(\pounds_0+\pounds_{11}(1+\text{¡}))K_1(\pm)}$$

$$B(\pm)=\frac{2\pounds_0(1+\text{¡})D(\pm)}{(\pounds_0+\pounds_{11}(1+\text{¡}))K_1(\pm)}$$

$$C(\pm)=(1-\frac{2\pounds_{11}(1+\text{¡})}{(\pounds_0+\pounds_{11}(1+\text{¡}))K_1(\pm)})D(\pm) \qquad (14)$$

$$D(\pm)=-\frac{\bar{\cdot}^-(\pm)}{2|\pm|\operatorname{ch}\pm h}$$

$$E(\pm)=2e^{|\pm|h}\operatorname{ch}\pm h\frac{K_2(\pm)}{K_1(\pm)}D(\pm)$$

Здесь

$$(\pounds_0+\pounds_{11}(1+\text{¡}))K_1(\pm)=\pounds_0K_0(\pm)+\pounds_{11}(1+\text{¡})$$

$$(\pounds_0+\pounds_{11}(1+\text{¡}))K_2(\pm)=\pounds_0K_0(\pm)+\pounds_{11}(1+\text{¡})\operatorname{th}|\pm|h \qquad (15)$$

$$\sqrt{\pm^2-k^2}K_0(\pm)=(1+\text{¡})\sqrt{\pm^2-k^2}-\text{¡}|\pm|$$

Относительно функций $\bar{\Phi}^+(\pm)$ и $\bar{\Psi}^-(\pm)$ получим следующее функциональное уравнение, которое можно рассматривать как краевую задачу типа Римана на действительной оси [3-6]:

$$|\pm|K(\pm)(2\text{®}e_1\text{¢}(\pm-\pm_1)-\bar{\Phi}^+(\pm))=\bar{\Psi}^-(\pm) \qquad (16)$$

$$K(\pm)=\frac{K_1(\pm)}{K_2(\pm)}.$$

Функция $K(\pm)$ имеет нули только в точках $\pm\pm_1$, т.к. $\pm_1$ – единственный положительный корень уравнения $K_1(\pm)=0$ и действительные полюсы только в точках $\pm\pm_2$; $\pm_2$ – единственный положительный корень уравнения $K_2(\pm)=0$.

Очевидно, что $K_2'(\pm)>0, K_1'(\pm)>0, K_0'(\pm)>0$ при $\pm>k$, $k<\pm_1<\pm_2<\pm_0$, $\pm_0=k(1+\text{¡})/\sqrt{1+2\text{¡}}$; $\pm\pm_0$ – единственные нули функции $K_0(\pm)$. Следовательно, принимается, что в данной задаче типа Римана действительная ось обходит не только точки ветвления $\pm k$ функции $\sqrt{\sim^2-k^2}$, но и точки $\pm=-\pm_1, \pm=-\pm_2$ сверху, а точки $\pm=\pm_1, \pm=\pm_2$ снизу, обеспечивая условия уходящей волны [2,3].

Функциональное уравнение (16) решается, используя такую же методику, как в [4,5,6], решения строятся, факторизируя функцию $|\pm|K(\pm)$, т.к $K(\pm)\to 1$ при $|\pm|\to\infty$, представляя $K(\pm)=K^+(\pm)K^-(\pm)$, где функции $K^\pm(\sim)$ регулярны и не имеют нулей при $\operatorname{Im}\sim>0$ и $\operatorname{Im}\sim<0$, соответственно.

Отметим, что $K_{1,2}(\pm)\to 1$ при $|\pm|\to\infty$, $K_{1,2}(\pm)=K_{1,2}^+(\pm)K_{1,2}^-(\pm)$.

Используя представления

$$2\text{®}i\text{¢}(\pm - \pm\ ) = (\pm - \pm_1 - i0)^{-1} - (\pm - \pm_1 + i0)^{-1},$$

$$\left|\pm\right| = (\pm - i0)^{\frac{1}{2}}(\pm + i0)^{\frac{1}{2}}, \tag{17}$$

$$(\pm - i0)^{-1} = \pm^{-1} + \text{®}i\text{¢}(\pm),$$

получим

$$\bar{\Phi}^{+}(\pm) = ie_1 \frac{K^{+}(\pm_1)\sqrt{\pm_1}}{K^{+}(\pm)(\pm + i0)^{\frac{1}{2}}(\pm - \pm_1 + i0)}$$

$$\bar{\Psi}^{-}(\pm) = -ie_1 \frac{K^{+}(\pm_1)\sqrt{\pm_1}(\pm - i0)^{\frac{1}{2}}K^{-}(\pm)}{\pm - \pm_1 - i0}. \tag{18}$$

Таким образом, имея в виду (11,)(12),(17),(18), получили волновое поле в рассматриваемой составной среде. В пьезоэлектрическом полупространстве кроме дифрагированных объёмных электроупругих волн распространяются также поверхностные (локализованные) волны, обусловленные дифракцией падающей электроупругой волны сдвига и пьезоэффектом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука, 1982. 240с.
2. Нобл Б. Метод Винера – Хопфа. М.: Мир, 1962. 279 с.
3. Григорян Э.Х., Джилавян С.А., Казарян А.А. Дифракциа сдвиговой плоской волны на полубесконечной трещине в пространстве пьезоэлектрик–диэлектрик. //Тр.межд. конф. “Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред”. Горис, 2011, с.137-143.
4. Григорян Э.Х., Джилавян С.А. Дифракция плоской сдвиговой волны на полубеско-нечной трещине в пьезоэлектрическом пространстве. // Известия НАН Армении. Механика. 2005. Т.58. №1. С.38-50.
5. Григорян Э.Х. Передача нагрузки от кусочно-однородной бесконечной накладки к упругой полуплоскости. // Учёные записки ЕГУ. Естественные науки. 1979. № 3. С.29-34.
6. Григорян Э.Х., Синанян С.С. Дифракция сдвиговой поверхностной электроупругой волны на полубесконечном металлическом слое в пьезоэлектрическом пространстве с бесконечным металлическим слоем. // Изв. НАН Армении. Механика. 2012. Т.65. № 1. С.51-61.

Сведение об авторе:

Казарян Айказ Арменович – аспирант, Институт механики НАН Армении,
Tel.: (+374 10) 48 96 34. **E-mail:** HaykazGhazaryan@gmail.com

УПРУГИЕ ВОЛНЫ В СИСТЕМЕ СЛОЙ-ПОЛУПРОСТРАНСТВО В ПРИСУТСТВИИ ПРОДОЛЬНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Калиджян Л.Р.

Рассматривается возможность появления и распространения волн типа Релея в бесконечном электропроводящем упругом слое-полупространстве, когда на поверхностях слоя осуществляются условия скользящего контакта. Слой-полупространство в начальном состоянии находится в постоянном магнитном поле. Установлено, что появление поверхностных волн зависит как от коэффициента Пуассона, так и от отношения толщины слоя и длины волны.

1. В прямоугольной декартовой координатной системе (x,y,z) полупространство занимает область ($-\infty < x < \infty$, $0 < y < b$, $-\infty \le z \le \infty$), а слой – ($-\infty < x <\infty$, $-b\le y <0$, $-\infty\le z \le\infty$). На внешней границе слоя и на стыке слоя и полупространства имеют место условия скользящего контакта. Принимается, что материалы полупространства и слоя упругие и идеально проводящие. На основе задачи плоской деформации исследуется вопрос существования поверхностной волны типа Рэлея в слой-полупространстве в присутствии продольного магнитного поля, где волны не зависят от координаты z.

Вектор напряжённости магнитного поля задаётся в виде

$$\overline{H_{01}^{(i)}} = H_{01}^{(i)}\hat{i} \qquad i = 1,2$$

Уравнение магнитоупругих волн для идеального проводника имеет вид [2]:

$$c_t^2 \triangle u + \left(c_l^2 - c_t^2\right)\text{graddiv}\bar{u} + \frac{\text{«}}{4\text{®°}}\left[\text{rotrot}(\bar{u}\times\overline{H}_0)\right]\times\overline{H}_0 = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Проектируя и имея в виду, что $\frac{\partial}{\partial z} = 0$, получим уравнения распространения волн для задач плоской деформации в системе слой-полупространство.

Уравнения в слое

$$c_{t1}^2\triangle u_1 + \left(c_{l1}^2 - c_{t1}^2\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \qquad v_1^2 = \frac{H_{01}^{(1)^2}\text{«}_1}{4\text{®°}_1} \tag{1.1}$$

$$\left(c_{t1}^2 + v_1^2\right)\triangle v_1 + \left(c_{l1}^2 - c_{t1}^2\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}$$

и в полупространстве

$$c_{t2}^2\triangle u_2 + \left(c_{l2}^2 - c_{t2}^2\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \qquad v_2^2 = \frac{H_{01}^{(2)^2}\text{«}_2}{4\text{®°}_2} \tag{1.2}$$

$$\left(c_{t2}^2 + v_2^2\right)\triangle v_2 + \left(c_{l2}^2 - c_{t2}^2\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2}$$

°_1 и °_2 – плотности материалов в слое и полупространства [1].

На внешней границе слоя принимаются условия скользящего контакта

$$v_1 = 0, \quad \text{±}_{21} + t_{21} = t_{21}^{(e)}, \quad \text{«}h_2 = h_2^{(e)} \quad \text{при} \quad y = -b \tag{1.3}$$

где

$$t_{21} = \frac{H_{01}^{(1)^2}\text{«}_1}{4\text{®}}\frac{\partial v_1}{\partial x}, \quad t_{21}^{(e)} = \frac{H_{01}^{(1)}}{4\text{®}}h_2^{(e)}, \quad e = 1,2 \tag{1.4}$$

Уравнения электродинамики в области вне пластинки [3]

$$\frac{\partial h_2^{(e)}}{\partial x}-\frac{\partial h_1^{(e)}}{\partial y}=\frac{1}{c}\frac{\partial e_3^{(e)}}{\partial t},\qquad \frac{\partial h_1^{(e)}}{\partial x}+\frac{\partial h_2^{(e)}}{\partial y}=0$$
$$\frac{\partial e_3^{(e)}}{\partial y}=-\frac{1}{c}\frac{\partial h_1^{(e)}}{\partial t},\qquad \frac{\partial e_3^{(e)}}{\partial x}=\frac{1}{c}\frac{\partial h_2^{(e)}}{\partial t} \tag{1.5}$$

Компоненты возмущённого электромагнитного поля в слое определяются следующим образом:

$$e_1=0,\ e_2=-\frac{\text{«}_1}{c}H_{01}^{(1)}\frac{\partial w_1}{\partial t},\ e_3=\frac{\text{«}_1}{c}H_{01}^{(1)}\frac{\partial v_1}{\partial t},$$
$$h_1=-H_{01}^{(1)}\frac{\partial v_1}{\partial y},\ h_2=H_{01}^{(1)}\frac{\partial v_1}{\partial x},\ h_3=H_{01}^{(1)}\frac{\partial w_1}{\partial x}. \tag{1.6}$$

С учётом (1.4) и (1.6) граничные условия (1.3) будут :

$$v_1=0 \qquad \frac{\partial u_1}{\partial y}=0 \quad \text{при} \quad y=-b \tag{1.7}$$

то есть нет необходимости решения внешней задачи.
Условия скользящего контакта на стыке имеют вид [3]:

$$v_1=v_2,\ \sigma^{(1)}{}_{22}+t^{(1)}{}_{22}=\sigma^{(2)}{}_{22}+t^{(2)}{}_{22},\ \sigma^{(1)}{}_{21}+t^{(1)}{}_{21}=0,\ \sigma^{(2)}{}_{21}+t^{(2)}{}_{21}=0 \ \text{при} \ y=0 \tag{1.8}$$

где

$$t^{(1)}{}_{21}=\frac{\text{«}_1}{4\text{®}}H_{01}^{(1)^2}\frac{\partial v_1}{\partial x},\ t^{(2)}{}_{21}=\frac{\text{«}_2}{4\text{®}}H_{01}^{(2)^2}\frac{\partial v_2}{\partial x}$$
$$t^{(1)}{}_{22}=\frac{\text{«}_1}{4\text{®}}H_{01}^{(1)^2}\frac{\partial v_1}{\partial y},\ t^{(2)}{}_{22}=\frac{\text{«}_2}{4\text{®}}H_{01}^{(2)^2}\frac{\partial v_2}{\partial y} \tag{1.9}$$

Используя (1.9) и закон Гука, условия (1.8) имеют вид:

$$y=0$$
$$\begin{cases} v_1=v_2 \\ (2G_1+\text{ª}_1+\frac{\text{«}_1}{4\text{®}}H_{01}^{(1)^2})\frac{\partial v_1}{\partial y}+\text{ª}_1\frac{\partial u_1}{\partial x}=(2G_2+\text{ª}_2+\frac{\text{«}_2}{4\text{®}}H_{01}^{(2)^2})\frac{\partial v_2}{\partial y}+\text{ª}_2\frac{\partial u_2}{\partial x} \\ (G_1+\frac{\text{«}_1}{4\text{®}}H_{01}^{(1)^2})\frac{\partial v_1}{\partial x}+G_1\frac{\partial u_1}{\partial y}=0 \\ (G_2+\frac{\text{«}_2}{4\text{®}}H_{01}^{(2)^2})\frac{\partial v_2}{\partial x}+G_2\frac{\partial u_2}{\partial y}=0 \end{cases} \tag{1.10}$$

Необходимо найти решения уравнений (1.1) и (1.2), удовлетворяющие условиям (1.7) и (1.10) и ещё условиям затухания [1]:

$$\lim_{y\to\infty}u_2=0,\ \lim_{y\to\infty}v_2=0 \tag{1.11}$$

2.Решение задачи. Искомые решения задачи представим в виде :

$$u_1=u_{01}(y)\exp i(\mu t-kx) \qquad v_1=v_{01}(y)\exp i(\mu t-kx)$$
$$u_2=u_{02}(y)\exp i(\mu t-kx) \qquad v_2=v_{02}(y)\exp i(\mu t-kx) \tag{2.1}$$

Вставляя эти решения в (1.1) и (1.2) получим:

$$\begin{cases} u_{01}''+k^2\text{¯}_1^{-1}(\text{¯}_3\text{¦}-1)u_{01}-ik\text{¯}_1^{-1}(1-\text{¯}_1)v_{01}'=0 \\ v_{01}''+k^2\frac{\text{¯}_1}{1+\text{¯}_1\text{~}_1}(\text{¯}_4\text{¦}-1-\text{~}_1)v_{01}-ik\frac{1-\text{¯}_1}{1+\text{¯}_1\text{~}_1}u_{01}'=0 \end{cases} \tag{2.2}$$

$$\begin{cases} u''_{02} + k^{2}\text{¯}^{-1}\left(\text{¯}\,\text{¦} - 1\right)u_{02} - ik\text{¯}^{-1}\left(1-\text{¯}\right)v'_{02} = 0 \\ v''_{02} + k^{2}\dfrac{\text{¯}}{1+\text{¯}\sim_2}\left(\text{¦} - 1 - \sim_2\right)v_{02} - ik\dfrac{1-\text{¯}}{1+\text{¯}\sim_2}u'_{02} = 0 \end{cases} \qquad (2.2)^*$$

где

$$\text{¦} = \frac{\mu^2}{k^2 c_t^2}, \qquad \frac{v_{1i}^2}{c_{ti}^2} = \sim_i, \qquad \frac{c_{ti}^2}{c_{li}^2} = \text{¯}, \qquad i = 1,2$$

$$\theta_3 = \frac{c_{t2}^2}{c_{l1}^2}, \qquad \theta_1 = \frac{c_{t1}^2}{c_{l1}^2}, \qquad \theta_4 = \frac{c_{t2}^2}{c_{t1}^2} \qquad (2.3)$$

Ищем решения систем (2.2) и (2.2)* в виде

$$u_{01} = Ae^{kp_1y}, \qquad v_{01} = Be^{kp_1y}$$
$$u_{02} = Ce^{kp_2y}, \qquad v_{02} = De^{kp_2y} \qquad (2.4)$$

Подстановка (2.4) в (2.2) и (2.2)* даёт:

$$\begin{cases} \left[p_1^{\,2} + \text{¯}_1^{-1}\left(\text{¯}_3\text{¦} - 1\right)\right]A - i\text{¯}_1^{-1}\left(1-\text{¯}_1\right)p_1 B = 0 \\ \left[p_1^{\,2} + \dfrac{\text{¯}_1}{1+\text{¯}_1\sim_1}\left(\text{¦}\,\text{¯}_4 - 1 - \sim_1\right)\right]B - i\dfrac{1-\text{¯}_1}{1+\text{¯}_1\sim_1}p_1 A = 0 \end{cases} \qquad (2.5)$$

$$\begin{cases} \left[p_2^{\,2} + \text{¯}^{-1}\left(\text{¯}\,\text{¦} - 1\right)\right]C - i\text{¯}^{-1}\left(1-\text{¯}\right)p_2 D = 0 \\ \left[p_2^{\,2} + \dfrac{\text{¯}}{1+\text{¯}\sim_2}\left(\text{¦} - 1 - \sim_2\right)\right]D - i\dfrac{1-\text{¯}}{1+\text{¯}\sim_2}p_2 C = 0 \end{cases} \qquad (2.5)^*$$

Равенство нулю детерминанта системы (2.5)* даёт:

$$p_2^{\,4} - \left[1 - \text{¦} + \sim_2 - \frac{\text{¯}\,\text{¦} - 1}{1-\text{¯}\sim_2} + \frac{\sim_2^{\,2}\text{¯}}{1+\text{¯}\sim_2}\right]p_2^{\,2} + \frac{\left(\text{¦} - 1 - \sim_2\right)\left(\text{¯}\,\text{¦} - 1\right)}{1+\text{¯}\sim_2} = 0 \qquad (2.6)$$

Сделав следующие обозначения:

$$p_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\;\; + \sqrt{\;\;^2 - 4\text{¥}}\right)^{1/2} \qquad\qquad p_{22} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\;\; - \sqrt{\;\;^2 - 4\text{¥}}\right)^{1/2}$$

где

$$=1 - \text{¦} - \sim_2 - \frac{\text{¯}\,\text{¦} - 1}{1+\text{¯}\sim_2} + \frac{\sim_2^{\,2}\text{¯}}{1+\text{¯}\sim_2} \qquad\qquad \text{¥} = \frac{\left(\text{¦} - 1 - \sim_2\right)\left(\text{¯}\,\text{¦} - 1\right)}{1+\text{¯}\sim_2} \qquad (2.7)$$

получим , что корни уравнения (2.6) будут

$$\pm p_{21}, \quad \pm p_{22} \qquad (2.8)$$

Следовательно, общее решение системы (2.2)* будет

$$u_{02} = C_1 e^{kp_{21}y} + C_2 e^{-kp_{21}y} + C_3 e^{kp_{22}y} + C_4 e^{-kp_{22}y}$$
$$v_{02} = D_1 e^{kp_{21}y} + D_2 e^{-kp_{21}y} + D_3 e^{kp_{22}y} + D_4 e^{-kp_{22}y} \qquad (2.9)$$

где постоянные C_i и D_i $(i = \overline{1,4})$ связаны между собой согласно (2.5)*

$$D_1 = \frac{p_{21}^2 + \text{¯}^{-1}(\text{¯}\,\text{¦} - 1)}{i\text{¯}^{-1}(1-\text{¯})p_{21}}C_1, \qquad D_2 = -\frac{p_{21}^2 + \text{¯}^{-1}(\text{¯}\,\text{¦} - 1)}{i\text{¯}^{-1}(1-\text{¯})p_{21}}C_2,$$
$$D_3 = \frac{p_{22}^2 + \text{¯}^{-1}(\text{¯}\,\text{¦} - 1)}{i\text{¯}^{-1}(1-\text{¯})p_{22}}C_3, \qquad D_4 = -\frac{p_{22}^2 + \text{¯}^{-1}(\text{¯}\,\text{¦} - 1)}{i\text{¯}^{-1}(1-\text{¯})p_{22}}C_4 \qquad (2.10)$$

Уравнения (2.2)* имеют решения, удовлетворяющие условиям затухания (1.11), если
$0<\eta<1$

Очевидно, что эти решения будут

$$
\begin{aligned}
u_{02} &= C_2 e^{-kp_{21}y} + C_4 e^{-kp_{22}y} \\
v_{02} &= D_2 e^{-kp_{21}y} + D_4 e^{-kp_{22}y}
\end{aligned} \tag{2.11}
$$

В частном случае, когда $\sim_2 = 0$

$$p_{21} = \sqrt{1-¦} \qquad p_{22} = \sqrt{1-¯¦}$$

Аналогичным образом найдём решения системы (2.4)

$$p_1^4 + \left[¯_4¦ - 1 - \sim_1 + \frac{¯_3¦ - 1}{1+¯_1\sim_1} - \frac{\sim_1^2 ¯_1}{1+¯_1\sim_1} \right] p_1^2 + \frac{\left(¯_4¦ - 1 - \sim_1\right)\left(¯_3¦ - 1\right)}{1+¯_1\sim_1} = 0 \tag{2.12}$$

$$p_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-' + \sqrt{'^2 - 4¥'} \right)^{1/2}, \qquad p_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-' - \sqrt{'^2 - 4¥'} \right)^{1/2} \tag{2.13}$$

где

$$' = ¯_4¦ - 1 - \sim_1 + \frac{¯_3¦ - 1}{1+¯_1\sim_1} - \frac{\sim_1^2 ¯_1}{1+¯_1\sim_1}, \qquad ¥' = \frac{\left(¯_4¦ - 1 - \sim_1\right)\left(¯_3¦ - 1\right)}{1+¯_1\sim_1}$$

получим , что корни уравнения (2.12) будут
$\pm ip_{11}, \quad \pm ip_{12}$

общее решение системы (2.2) будет

$$
\begin{aligned}
u_{01} &= A_1 \cos kp_{11} y + A_2 \sin kp_{11} y + A_3 \cos kp_{12} y + A_4 \sin kp_{12} y \\
v_{01} &= B_2 \cos kp_{11} y + B_1 \sin kp_{11} y + B_4 \cos kp_{12} y + B_3 \sin kp_{12} y
\end{aligned} \tag{2.14}
$$

где постоянные A_i и B_i $(i=\overline{1,4})$ связаны между собой согласно (2.5)

$$
\begin{aligned}
B_1 &= -\frac{p_{11}^2 - ¯_1^{-1}(¯_3¦ - 1)}{i¯_1^{-1}(1-¯_1)p_{11}} A_1 \qquad & B_2 &= \frac{p_{11}^2 - ¯_1^{-1}(¯_3¦ - 1)}{i¯_1^{-1}(1-¯_1)p_{11}} A_2 \\
B_3 &= -\frac{p_{12}^2 - ¯_1^{-1}(¯_3¦ - 1)}{i¯_1^{-1}(1-¯_1)p_{12}} A_3 \qquad & B_4 &= \frac{p_{12}^2 - ¯_1^{-1}(¯_3¦ - 1)}{i¯_1^{-1}(1-¯_1)p_{12}} A_4
\end{aligned} \tag{2.15}
$$

В частном случае, когда $\sim_1 = 0$,

$$p_{11} = \sqrt{¯_4¦ - 1} \qquad p_{12} = \sqrt{¯_3¦ - 1} \tag{2.16}$$

3. Граничные условия. Решения (2.14) должны удовлетворять граничным условиям (1.7) на внешней границе слоя при $y=-b$, тогда решения (2.14) заменятся на

$$
\begin{aligned}
u_{01} &= A_1 \cos kp_{11}(y+b) + A_3 \cos kp_{12}(y+b) \\
v_{01} &= B_1 \sin kp_{11}(y+b) + B_3 \sin kp_{12}(y+b)
\end{aligned} \tag{2.17}
$$

Получены решения уравнения (1.1) и (1.2) в виде (2.11) и (2.17), которые удовлетворяют условиям затухания (1.11) и условиям на границе слоя $y=-b$.

Подставляя эти решения в граничные условия (1.10) на стыке $y=0$, и имея в виду (2.10) и (2.15), получим четыре однородных уравнения относительно четырёх произвольных постоянных A_1, A_3, C_2, C_4.

$$\begin{cases} q_3C_2 + q_4C_4 = q_1A_1 \sin kbp_{11} + q_2A_3 \sin kbp_{12} \\ (a_1 p_{11}q_1 - i\text{ª}_1)A_1 \cos kbp_{11} + (a_1 p_{12}q_2 - i\text{ª}_1)A_3 \cos kbp_{12} = \\ = -(a_2 p_{21}q_3 + i\text{ª}_2)C_2 - (a_2 p_{22}q_4 + i\text{ª}_2)C_4 \\ ((1+\sim_1)q_1 i + 1)A_1 \cos kbp_{11} + ((1+\sim_1)q_2 i + 1)A_3 \cos kbp_{12} = 0 \\ ((1+\sim_2)q_3 i + 1)C_2 + ((1+\sim_2)q_1 i + 1)C_4 = 0 \end{cases} \qquad (2.19)$$

где

$$q_1 = -\frac{p_{11}^2 - \text{¯}_1^{-1}(\text{¯}_3\text{¦} - 1)}{ip_{11}\text{¯}_1^{-1}(1-\text{¯}_1)} \qquad q_2 = -\frac{p_{12}^2 - \text{¯}_1^{-1}(\text{¯}_3\text{¦} - 1)}{ip_{12}\text{¯}_1^{-1}(1-\text{¯}_1)} \qquad (2.19)$$

$$q_3 = -\frac{p_{21}^2 + \text{¯}^{-1}(\text{¯}\text{¦} - 1)}{ip_{21}\text{¯}^{-1}(1-\text{¯})} \qquad q_4 = -\frac{p_{22}^2 + \text{¯}^{-1}(\text{¯}\text{¦} - 1)}{ip_{22}\text{¯}^{-1}(1-\text{¯})}$$

$$a_1 = 2G_1 + \frac{H_{01}^{(1)^2}\text{«}_1}{4\text{®}} + \text{ª}_1 \qquad a_2 = 2G_2 + \frac{H_{01}^{(2)^2}\text{«}_2}{4\text{®}} + \text{ª}_2 \qquad (2.20)$$

Равенство нулю детерминанта системы (2.18) определяет уравнение относительно безразмерного параметра ¦ , характеризующий фазовую скорость поверхностной волны.

В частном случае, когда материалы слоя и полупространства одинаковы, исследовано влияние напряжённости магнитного поля на фазовую скорость поверхностной волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белубекян М.В., Давтян А.А. Упругие волны в слой-полупространстве при условии скользящего контакта на плоскостях, ограничивающих слой. //В сб. научных трудов международной конференции <<Актуальные проблемы механики сплошной среды>>. Ереван: 2012. С.116-120.
2. Белубекян М.В. Введение в теорию магнитоупругости. Ереван: 1997. 34с.
3. Калиджян Л.Р. Магнитоупругие волны в идеально проводящем слое в присутствии продольного магнитного поля. //В сб. научных трудов международной конференции: <<Актуальные проблемы механики сплошной среды>>. Ереван: 2012. С. 267-271.
4. Гринченко В.Т. , Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах: Киев: <<Наукова думка>>, 1981. С.53-71, С.109-118.

Сведения об авторе:

Калиджян Лилит Размиковна,
Тел.: (37493) 74-04-41 , (37491) 16-32-22
E-mail: lilit_k@mail.ru

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА В ЗАДАЧЕ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Мелконян А. В., Саркисян С. В.

В работе на основе интегрального преобразования Радона исследован вопрос о распространении волн в упругом полупространстве, когда на границе полупространства заданы условия стеснённого свободного края. Получено дисперсионное уравнение для определения скорости распространения поверхностной волны.

Исследования по распространению поверхностных волн представляют собой отдельный научный интерес. При изучении поверхностных волн, в основном, рассматривались плоские и антиплоские деформации. Решение пространственной задачи, обобщающая задачу Рэлея, получено в [1], результаты которой приведены также в монографии [2]. В работе [3] исследованы трёхмерные задачи распространения упругих поверхностных волн в изотропном полупространстве с двумя вариантами условий на границе полупространства: свободная граница или на границе полупространства одно касательное перемещение, одно из касательных напряжений и нормальное напряжение равны нулю. Применение интегрального преобразования Радона [4] к пространственной задаче теории упругости приводит к плоской задаче относительно образов преобразования. В работе [5] рассмотрен вопрос о введении упругих потенциалов при решении класса задач трёхмерной теории упругости, в которых не учитывается антиплоское движение, (например, задача приповерхностной динамики упругого полупространства, когда вклад волны Рэлея является доминирующим) с использованием интегрального преобразования Радона, позволяющего перейти к плоской задаче теории упругости в образах. Получено естественное представление в терминах трёх потенциалов, рассмотрено применение этого представления на примере волн Рэлея.

Рассмотрим изотропное упругое полупространство $-\infty < x < \infty,\ -\infty < y < \infty,\ 0 \le z < \infty.$ Векторное уравнение движения изотропной среды в перемещениях имеет вид

$$\left(\lambda+\mu\right)\mathrm{graddiv}\vec{u}+\mu\Delta\vec{u}=\rho\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}, \tag{1}$$

где $\lambda,\ \mu-$ параметры Ламэ, $\rho-$ объёмная плотность. Применяя к уравнению (1) интегральное преобразование Радона

$$f^{(\alpha)}\left(\chi,\alpha,z,t\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(\chi\cos\alpha-\xi\sin\alpha,\chi\sin\alpha+\xi\cos\alpha,z,t\right)d\xi$$

и исключая из рассмотрения решение антиплоской задачи, уравнение движения (1) преобразуется в следующую систему уравнений в образах преобразования Радона [5]:

$$\left(\lambda+2\mu\right)\frac{\partial^2 u_\chi^{(\alpha)}}{\partial\chi^2}+\mu\frac{\partial^2 u_\chi^{(\alpha)}}{\partial z^2}+\left(\lambda+\mu\right)\frac{\partial^2 u_z^{(\alpha)}}{\partial\chi\partial z}=\rho\frac{\partial^2 u_\chi^{(\alpha)}}{\partial t^2},$$

$$\left(\lambda+\mu\right)\frac{\partial^2 u_\chi^{(\alpha)}}{\partial\chi\partial z}+\mu\frac{\partial^2 u_z^{(\alpha)}}{\partial\chi^2}+\left(\lambda+2\mu\right)\frac{\partial^2 u_z^{(\alpha)}}{\partial z^2}=\rho\frac{\partial^2 u_z^{(\alpha)}}{\partial t^2},$$

где $\chi=x\cos\alpha+y\sin\alpha,\ \xi=-x\sin\alpha+y\cos\alpha,\ \alpha\in\left[0;2\pi\right),\ u_\chi^{(\alpha)}=u_x^{(\alpha)}\cos\alpha+u_y^{(\alpha)}\sin\alpha.$

Введём представление [5]

$$\vec{u}=\mathrm{grad}\,\varphi-\frac{\partial}{\partial z}\left(\vec{\psi}\right)+\vec{k}\,\mathrm{div}\,\vec{\psi}, \tag{2}$$

где φ и $\vec{\psi}=\vec{i}\,\psi_1+\vec{j}\psi_2-$ динамические потенциалы, $\vec{i},\vec{j},\vec{k}-$ координатные орты. Если положить $\vec{\Psi}=-\vec{i}\,\psi_2+\vec{j}\psi_1$, то представление (2) можно записать в традиционном виде:

$$\vec{u} = \operatorname{grad}\varphi + \operatorname{rot}\vec{\Psi}.$$

Подстановка (2) в уравнение движения (1) приводит к следующим волновым уравнениям:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta\vec{\psi} - \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2\vec{\psi}}{\partial t^2} = 0. \tag{3}$$

Здесь Δ – оператор Лапласа, $c_1 = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}$ и $c_2 = \left(\frac{\mu}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}$ – скорости продольной и поперечной волн.

Примем, что на границе полупространства $z = 0$ задано следующее граничное условие: стеснённый свободный край:

$$\sigma_{zz} = 0,\ \sigma_{zx} = 0,\ u_y = 0. \tag{4}$$

Здесь в отличие от условия свободной границы ставится ограничение на перемещение вдоль оси Oy [3].

Граничное условие (4), с учётом закона Гука и (2), запишется через динамические потенциалы следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\theta^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \left(\theta^2 - 2\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right) + 2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x} + \frac{\partial\psi_2}{\partial y}\right) = 0,\\
&2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2\psi_1}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x} + \frac{\partial\psi_2}{\partial y}\right) = 0, \qquad \text{при } z = 0\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi_2}{\partial z} = 0, \quad \theta^2 = \frac{c_1^2}{c_2^2},
\end{aligned} \tag{5}$$

Решение для динамических потенциалов с учётом уравнений (3) представим в форме бегущих волн:

$$\begin{aligned}
&\varphi(x,y,z,t) = A\exp\left[ik\left(x\cos\gamma + y\sin\gamma - ct\right) - k\alpha z\right],\\
&\vec{\psi}(x,y,z,t) = \vec{B}\exp\left[ik\left(x\cos\gamma + y\sin\gamma - ct\right) - k\beta z\right],
\end{aligned} \tag{6}$$

где k – волновое число, $\alpha^2 = 1 - \frac{\eta}{\theta}$, $\beta^2 = 1 - \eta$, $\eta = \frac{c^2}{c_2^2}$.

Подстановка (6) в граничные условия (5) приводит к следующей системе однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных A и $\vec{B}$:

$$\begin{aligned}
&2i\alpha\cos\gamma\cdot A + \left(\beta^2 + \cos^2\gamma\right)\cdot B_1 + \sin\gamma\cos\gamma\cdot B_2 = 0,\\
&\left(\theta^2\alpha^2 - \theta^2 + 2\right)\cdot A - 2i\beta\cos\gamma\cdot B_1 - 2i\beta\sin\gamma\cdot B_2 = 0,\\
&i\sin\gamma\cdot A + \beta\cdot B_2 = 0.
\end{aligned}$$

Из данной системы уравнений после некоторых преобразований приходим к следующему дисперсионному уравнению:

$$D(\eta) \equiv 4\alpha\beta - \left(1 + \beta^2\right)^2 + \operatorname{tg}^2\gamma\cdot\beta^2\left(1 - \beta^2\right) = 0. \tag{7}$$

В данном случае поверхностная волна в отличие от волн Рэлея обладает свойством дисперсии (зависит от γ).

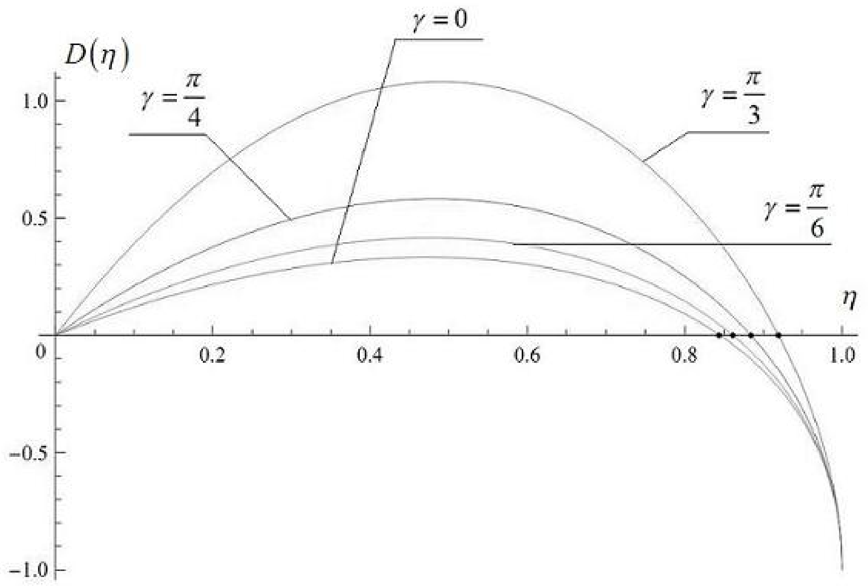
Из уравнения (7) можно определить безразмерную фазовую скорость поверхностной волны $\eta < 1 < \theta.$

Исследуем дисперсионное уравнение (7). При $\gamma = 0$ (плоская деформация) из (7) получим известное уравнение Рэлея.

Функция $D(\eta)$ на концах промежутка $0 < \eta < 1$ принимает значения

$D(0) = 0,\ D(1) = -1 < 0.$

При $\eta = 0$ $D'(\eta) = 2\left(1 - \theta^{-1}\right) + \mathrm{tg}^2\,\gamma > 0.$ Отсюда следует, что дисперсионное уравнение (7) имеет действительный корень, удовлетворяющий условию затухания $0 < \eta < 1.$ На рисунке приведены кривые $D(\eta)$ при разных значениях γ и $\theta = 3.$



Рисунок

В таблице приведены значения η в зависимости от γ при фиксированном значении $\theta = 3.$

Таблица

γ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
η	0.8453	0.8617	0.8843	0.9195

Из таблицы видно, что наличие дисперсии приводит к возрастанию безразмерной фазовой скорости поверхностной волны.

Таким образом, граничные условия стеснённого свободного края приводят к существованию поверхностной волны, которое, в отличие от поверхностной волны Рэлея, обладает свойством дисперсии. Аналогично можно исследовать волны Рэлея–Лэмба в пластинке и получить соответствующее дисперсионное уравнение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Knowless J.K. A note on surface waves.// J. of Geophysical Research. 1966. Vol. 21. № 22. Pp. 5480−5481.
2. Achenbach J.D. Wave propagation in elastic solids. Amsterdam, North Holland: 1984. 425p.
3. Белубекян В.М., Белубекян М.В. Трёхмерная задача поверхностных волн Рэлея.// Докл. НАН Армении. 2005. Т.105. № 4. С.362−369.
4. Georgiadis H. G., Lykotrafitis G. A method based on the Radon transform for three−dimensional elastodynamic problems of moving loads.// J. of Elasticity. 2001. Vol.65. Pp.87−129.
5. Приказчиков Д.А., Коваленко Е.В. Выбор потенциалов в трёхмерных задачах динамической теории упругости.// Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. “Естественные науки”. 2012. С.131–137.

Сведения об авторах:

Мелконян Аветик Варданович – кандидат физ.-мат. наук, ассистент кафедры высшей математики, Ереванский государственный университет архитектуры и строительства

Тел.: (+374 10) 63 06 92, (+374 95) 31 50 57
E-mail: avetikmelkonyan@gmail.com

Саркисян Самвел Владимирович – доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой механики, факультет математики и механики, Ереванский государственный университет

Тел.: (+374 10) 61 17 78, (+374 91) 38 43 67
E-mail: vas@ysu.am

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧ КРУЧЕНИЯ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ С ПОПЕРЕЧНЫМИ СЕЧЕНИЯМИ В ВИДЕ СЕГМЕНТА И ТРЕУГОЛЬНИКА МЕТОДОМ ГИУ

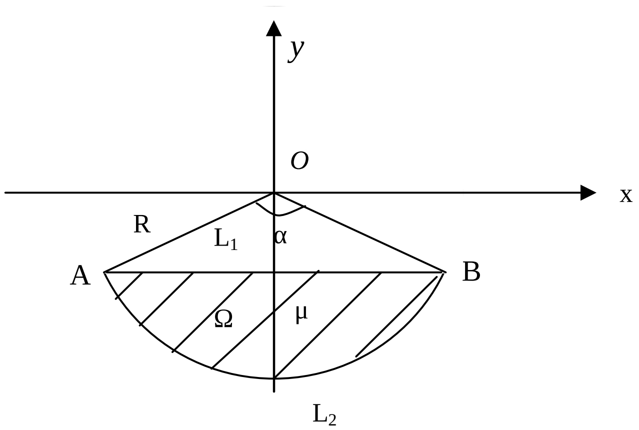
Мкртчян М.М

Рассматриваются две задачи о кручении упругих призматических стержней с поперечными сечениями в виде произвольного кругового сегмента и равнобедренного треугольника, которые решаются при помощи метода граничных интегральных уравнений (ГИУ), связанного с краевыми задачами для гармонических функций.

На основании известной связи между интегралом типа Коши и логарифмическими потенциалами простого и двойного слоёв с одной стороны, и при помощи известных результатов Н.И. Мусхелишвили о поведении интеграла типа Коши вблизи угловых точек на контуре с другой стороны, предельным переходом из известного представления гармонической функции [1] в работе [2] выведено определяющее граничное интегральное уравнение краевых задач для двухмерного уравнения Лапласа в случае произвольных областей. Далее определяющие ГИУ, в соответствии с граничными задачами для рассмотренной области, дискретизируются. В результате, получаются соответствующие системы линейных уравнений. При этом угловые точки – вершины данных областей – включаются в число узлов.

В настоящей статье на основании результатов [2] строятся численно–аналитические решения двух задач о кручении призматических стержней с поперечными сечениями в форме кругового сегмента и равнобедренного треугольника.

1. Многие результаты по исследованию обширных классов задач о кручении однородных и кусочно-однородных стержней изложены в монографиях [3–5]. Здесь рассмотрим задачу о кручении упругого призматического стержня с поперечными сечениями в виде произвольного кругового сегмента (фиг.1)



Фиг.1

Пусть отнесённое к правой прямоугольной системе координат $Oxyz$ призматический стержень обладает модулем сдвига « и имеет поперечное сечение в виде кругового сегмента Ω с хордой AB и радиусом R (фиг.1). Центр окружности O совпадает с началом координат, а ось стержня совпадает с осью Oz.

Следуя [5], запишем граничную задачу кручения с поперечным сечением в виде кругового сегмента:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\Phi_0(x,y)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\Phi_0(x,y)}{\partial y^2} = -2; \;\; (x,y)\in\Omega; \\ \qquad \Phi_0(x,y)\big|_L = 0; \quad L = L_1 \cup L_2, \end{cases} \tag{1}$$

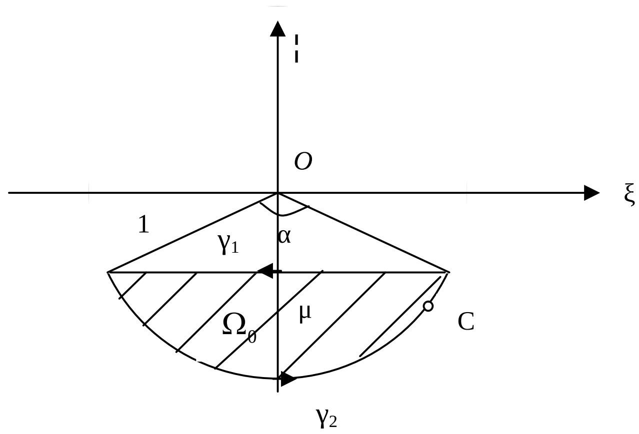
где $\Phi_0(x, y)$ – известная функция напряжения или функция Прандтля.

Далее в граничной задаче (1) введём безразмерные координаты и величины: $¶ = x/R$, $¦ = y/R$; $v(¶, ¦) = \Phi_0(R¶, R¦)/R^2$; (2)

после чего она примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v(¶,¦)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v(¶,¦)}{\partial y^2} = -2; \ (¶,¦) \in \Omega_0; \\ v(¶,¦)\big|_\Gamma = 0; \quad \Gamma = ¥_1 \cup ¥_2. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь $\Gamma, ¥_1, ¥_2$ и Ω_0 – образы контуров L, L_1, L_2 и Ω, соответственно, при преобразовании (2) (фиг.2)



Фиг.2

Теперь решение задачи (3) представим в виде

$$v(¶,¦) = ·_0(¶,¦) - \frac{¶^2 + ¦^2}{2},$$

где $·_0(¶,¦)$ –неизвестная гармоническая функция. В результате, обсуждаемая задача формулируется как задача Дирихле для гармонической функции $·_0(¶,¦)$ в сегменте Ω_0 с единичным радиусом:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 ·_0(¶,¦)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 ·_0(¶,¦)}{\partial y^2} = 0; \ (¶,¦) \in \Omega_0; \\ ·_0(¶,¦)\big|_{¥_1} = 1/2; \\ ·_0(¶,¦)\big|_{¥_2} = \left(¶^2 + \cos^2(~/2)\right)/2; \quad \left(-\sin(~/2) \le ¶ \le \sin(~/2)\right) \end{cases} \tag{4}$$

После нахождения решения системы (4) основные характеристики задачи: безразмерные касательные напряжения $±_{xz}$ и $±_{yz}$, безразмерная жёсткость при кручении D_0 будут определяться формулами [3]

$$\begin{gathered} ±_{xz} = \frac{±_{xz}}{«R²} = \frac{\partial ·_0}{\partial ¦} - ¦; \quad ±_{yz} = \frac{±_{yz}}{«R²} = ¶ - \frac{\partial ·_0}{\partial ¶}; \\ D_0 = \frac{D}{«R^4} = \iint_{\Omega_0} \left(¶^2 + ¦^2\right) d\Omega_0 + \frac{1}{2}\oint_\Gamma \left(¶^2 + ¦^2\right) \frac{\partial ·_0}{\partial n} ds; \end{gathered} \tag{5}$$

где ² – постоянная степень закручивания стержня, $±_{xz}$ и $±_{yz}$ – касательные напряжения, D – жёсткость кручения, а n – внутренняя к Ω_0 нормаль на контуре Γ.

Далее используя результаты работы [6] к граничной задаче (4), получим следующее определяющее ГИУ для данной задачи:

$$\int_0^l \ln\sqrt{[¶(s)-¶(±)]^2+[¦(s)-¦(±)]^2}\,\frac{\partial ·_0}{\partial n}\,ds =$$
$$=¥(±)\Phi(±)-\int_0^l \frac{\partial}{\partial s}\left\{\operatorname{arctg}\left[\frac{¦(s)-¦(±)}{¶(s)-¶(±)}\right]\right\}·_0(s)ds \qquad \left(±\in[0,l]\right) \tag{6}$$

где l – длина контура, а

$$¥(±)=\begin{cases} ®, & \text{если } ± \text{ – точка на гладкой части } \Gamma; \\ \sim, & \text{если } ± \text{ – угловая точка контура } \Gamma \text{ и } \sim \text{ – величина угла} \\ & \text{в этой точке слева от } \Gamma \;\; 0\le \sim \le 2®. \end{cases}$$

Таким образом, решение исходной задачи кручения сводится к решению задачи Дирихле, а последняя, в свою очередь, сводится к решению ГИУ (6). После нахождения решения на границе Γ области Ω_0 значение функции во внутренней точке M_0 области Ω_0 находим по следующей формуле:

$$·_0(M_0)=-\frac{1}{2®}\int_L \ln\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial ·_0}{\partial n}ds+\frac{1}{2®}\int_L ·_0\frac{\partial}{\partial n}\ln\left(\frac{1}{r}\right)ds;$$

$$r=\sqrt{[¶(s)-¶_0]^2+[¦(s)-¦_0]^2}; \qquad \left(M_0\left(¶_0,¦_0\right)\in\Omega_0\right)$$

2. Приступим к решению задачи Дирихле для области Ω_0 с границей Γ (фиг. 2). Решения этой задачи построим по известной методике Н.М Крылова и Н.И.Боголюбова [6]. Согласно (6) в данном случае придём к ГИУ

$$\int_0^l \ln\sqrt{[¶(s)-¶(±)]^2+[¦(s)-¦(±)]^2}\,¡(s)ds =$$
$$=¥(±)\Phi(±)-\int_0^l \frac{\partial}{\partial s}\left\{\operatorname{arctg}\left[\frac{¦(s)-¦(±)}{¶(s)-¶(±)}\right]\right\}·_0(s)ds \qquad \left(±\in[0,l]\right) \tag{7}$$

Здесь $l=\sim+2\sin\left(\sim/2\right)$, а $¡(s)=\dfrac{\partial ·_0}{\partial n}$ – неизвестная функция, s – дуговая координата, причём значению $s=0$ соответствует начальная точка отсчёта

$C\left(\cos\left(\dfrac{\sin\left(\sim/2\right)}{M_1-1}+\dfrac{®-\sim}{2}\right),-\sin\left(\dfrac{\sin\left(\sim/2\right)}{M_1-1}+\dfrac{®-\sim}{2}\right)\right)$ ($M_1>2$ –произвольное натуральное число), а направление контура выбирается в сторону возрастания параметра s. Тогда внутренние точки области будут находиться в левой стороне контура при её обходе.

Теперь промежуток интегрирования в уравнении (7) разделим на две части $[l_{i-1},l_i]$ $(i=\overline{1,2})$, полагая

$$l_0=0;\quad l_1=2\sin\left(\sim/2\right)+\frac{2\sin\left(\sim/2\right)}{M_1-1};\quad l=l_2=\sim+2\sin\left(\sim/2\right)$$

Далее введём обозначения:

$$\Delta¦^{(r)}=\frac{l_r-l_{r-1}}{M_r}\quad (r=\overline{1,2});\qquad ¦_j^{(r)}=l_{r-1}+\frac{2j-1}{2}\Delta¦^{(r)}\qquad (j=\overline{1,N_r};\ r=\overline{1,2})$$

где M_1, M_2 – наперёд заданные натуральные числа. Отметим, что при таком разделении промежуток интегрирования делится на две части, притом первое из них содержит две угловые точки контура области, соответствующие значениям $¦_1^{(1)}$ и $¦_{M_1}^{(1)}$.

При сделанных предположениях относительно координат контура, его параметрическими уравнениями будут $¶ = ¶(s), ¦ = ¦(s)$, причём

$$¶(s) = \begin{cases} \cos\left(\dfrac{\Delta ¦^{(1)}}{2} - s + \dfrac{® - \sim}{2}\right) & 0 \le s \le \dfrac{\Delta ¦^{(1)}}{2}; \\ \sin\dfrac{\sim}{2} - s + \dfrac{\Delta ¦^{(1)}}{2} & \dfrac{\Delta ¦^{(1)}}{2} < s \le \dfrac{\Delta ¦^{(1)}}{2} + 2\sin\dfrac{\sim}{2}; \\ -\cos\left(s - \dfrac{\Delta ¦^{(1)}}{2} - 2\sin\dfrac{\sim}{2} + \dfrac{® - \sim}{2}\right) & \dfrac{\Delta ¦^{(1)}}{2} + 2\sin\dfrac{\sim}{2} < s \le \sim + 2\sin\dfrac{\sim}{2}; \end{cases}$$

$$¦(s) = \begin{cases} -\sin\left(\dfrac{\Delta ¦^{(1)}}{2} - s + \dfrac{® - \sim}{2}\right) & 0 \le s \le \dfrac{\Delta ¦^{(1)}}{2}; \\ -\cos\dfrac{\sim}{2} & \dfrac{\Delta ¦^{(1)}}{2} < s \le \dfrac{\Delta ¦^{(1)}}{2} + 2\sin\dfrac{\sim}{2}; \\ -\sin\left(s - \dfrac{\Delta ¦^{(1)}}{2} - 2\sin\dfrac{\sim}{2} + \dfrac{® - \sim}{2}\right) & \dfrac{\Delta ¦^{(1)}}{2} + 2\sin\dfrac{\sim}{2} < s \le \sim + 2\sin\dfrac{\sim}{2}; \end{cases}$$

Теперь ГИУ (7) по известному методу Н.М. Крылова и Н.Н. Боголюбова [6] сводится к следующей системе линейных алгебраических уравнений (ЛАУ):

$$\sum_{r=1}^{2}\sum_{j=1}^{M_r}\left\{\int\limits_{¦_j^{(r)} - \frac{\Delta ¦^{(r)}}{2}}^{¦_j^{(r)} + \frac{\Delta ¦^{(r)}}{2}} \ln\sqrt{[¶(s) - ¶(¦_i^{(k)})]^2 + [¦(s) - ¦(¦_i^{(k)})]^2}\,ds\right\} ¡(¦_j^{(r)}) =$$

$$= ¥(\bar{¦}_i^{(k)}) \cdot_0(\bar{¦}_i^{(k)}) - \int\limits_0^l \frac{\partial}{\partial s}\left\{\operatorname{arctg}\left[\frac{¦(\bar{s}) - ¦(\bar{¦}_i^{(k)})}{¶(\bar{s}) - ¶(\bar{¦}_i^{(k)})}\right]\right\} \cdot_0(\bar{s})d\bar{s} \tag{8}$$

$$(i = \overline{1, M_k};\ k = \overline{1,2}).$$

где

$$\bar{s} = s - \frac{\Delta ¦^{(1)}}{2}, \quad \bar{¦}_i^{(k)} = ¦_i^{(k)} - \frac{\Delta ¦^{(1)}}{2} \quad (i = \overline{1, M_k};\ k = \overline{1,2}).$$

После численного решения ЛАУ (8) по формуле (6) после простых преобразований для безразмерной жёсткости D_0 находим

$$D_0 = \frac{\sim}{4} - \frac{1}{6}\sin\sim - \frac{1}{24}\sin(2\sim) +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{M_1}\left\{\int\limits_{¦_j^{(1)} - \frac{\Delta ¦^{(1)}}{2}}^{¦_j^{(1)} + \frac{\Delta ¦^{(1)}}{2}}\left[\left(s - \sin\frac{\sim}{2}\right)^2 + \cos^2\frac{\sim}{2}\right]ds\right\} ¡\left(¦_j^{(1)}\right) + \frac{\Delta ¦^{(2)}}{2}\sum_{j=1}^{M_2} ¡\left(¦_j^{(2)}\right) \tag{9}$$

Результаты вычислений по формуле (9) для различных $\sim$ приведены в таблице

Значения безразмерной жёсткости при кручении D_0

Таблица

~	®/6	®/4	®/3	®/2	2®/3	3®/4	5®/6	19®/20	®
D_0	0,00002	0,0001	0,0005	0,0055	0,0325	0,0649	0,1169	0,2319	0,2978

Очевидно, что с возрастанием ~ (0 < ~ ≤ ®) возрастает D_0. Отметим, что при ~ = ® имеем частный случай задачи о кручении упругого призматического стержня с поперечными сечениями в виде полукруга, рассмотренной в [3], где получены также численные результаты для D_0. Эти результаты с большой точностью совпадают с результатами таблицы.

В заключение отметим также, что аналогичным образом рассмотрена задача кручения упругого призматического стержня с поперечными сечениями в виде равнобедренного треугольника и получена соответствующая ЛАУ и решение этой задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.
2. Мхитарян С.М., Мкртчян М.С. О решении основных краевых задач теории гармонических функций для прямоугольной области методом граничных интегральных уравнений. //Избранные труды международной научной конференции «Образование, наука и экономика в вузах. Интеграция в международное образовательное пространство» – 26-30 сентября, 2011, Ереван, 2012, с.145-154.
3. Арутюнян Н.Х., Абрамян Б.Л. Кручение упругих тел. М.: Физматгиз, 1963. 686с.
4. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707с.
5. Новожилов В.В. Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 370с.
6. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближённые методы высшего анализа. М:. Гостехиздат, 1952. 695 с.

<u>Сведения об авторе:</u>

Мкртчян Мгер Мушегович – мл. науч. сотрудник Института механики НАН РА,
Адрес: Армения, 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, $24^{б}$, Институт механики. НАН РА
Тел: (37410)-43-16-52**;** **E-mail:** mher_1982@mail.ru

К СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УПРУГОЙ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ (СОСТАВНОЙ) ПЛОСКОСТИ С ДВУМЯ КОНЕЧНЫМИ ТРЕЩИНАМИ

Оганисян Г.В., Агабекян П.В., Хуршудян М.Ж.

В работе рассматривается смешанная задача теории упругости для упругой составной (кусочно-однородной) плоскости с двумя конечными прямолинейными трещинами. Предполагается, что несимметрично относительно линии разнородности двух полуплоскостей расположенные конечные прямолинейные трещины перпендикулярны к ней и находятся на одной линии. Плоскость деформируется под действием нормальных усилий, приложенных на берегах трещин и одновременно равномерно распределенные горизонтальными напряжениями кусочно–постоянной интенсивности, действующими на бесконечности составной плоскости. Задача сформулирована в виде системы сингулярных интегральных уравнений при определённых условиях, налагаемых на искомые функции, решение которой при помощи известного математического аппарата ортогональных многочленов Чебышева сводится к решению совокупности квазивполне регулярных бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Определены коэффициенты интенсивностей разрушающих напряжений в концевых точках трещин.

1. Пусть упругая составная (кусочно–однородная) изотропная плоскость, состоящая из сцеплённых между собой вдоль общей прямолинейной границы двух полуплоскостей с различными упругими характеристиками, расслаблена двумя конечными прямолинейными трещинами. Предполагается, что несимметрично относительно линии разнородности двух полуплоскостей расположенные конечные прямолинейные трещины перпендикулярны к линии раздела указанных полуплоскостей и находятся на одной линии.

Предполагая, что для упругой составной (кусочно–однородной) плоскости справедлива модель плоской деформации, требуется определить разрушающие напряжения в составной плоскости, а также коэффициенты интенсивностей напряжений в концевых точках конечных прямолинейных трещин, и тем самым выявить взаимовлияние конечных трещин в зависимости от их геометрических характеристик и физических свойств материала основания, когда составная плоскость деформируется нормальными разрушающими напряжениями с интенсивностями $p(y)\ (a<y<b;\ a,b>0)$ и $q(y)\ (-c<y<-d;\ d,c>0)$, действующими на берегах конечных прямолинейных трещин, и одновременно равномерно распределёнными горизонтальными растягивающими напряжениями кусочно-постоянной интенсивности $\pm_0(y)$, действующими на бесконечности составной (кусочно–однородной) плоскости.

Исходя из условий рассматриваемой смешанной задачи, кусочно-постоянная функция интенсивности распределения $\pm_0(y)$ определяется следующей формулой:

$$\sigma_0(y)=\frac{\sigma_0}{E\left(1-\nu_1^2\right)}\left[E\left(1-\nu_1^2\right)\theta(y)+E_1\left(1-\nu^2\right)\theta(-y)\right]\ \left(|x|\to\infty;\ -\infty<y<\infty\right), \quad (1.1)$$

где $\theta(y)-$ известная единичная ступенчатая функция Хэвисайда, $0<E;\ E_1;\nu;\ \nu_1;\sigma_0=\text{const}$.

Рассматриваемую смешанную задачу математически можно сформулировать в виде следующей смешанной граничной задачи:

$$\sigma_x(+0;y)=\sigma_x(-0;y)=p(y) \qquad (a<y<b), \qquad (1.2)$$

$$\tau_{xy}(+0;y)=\tau_{xy}(-0;y)=0 \qquad (a<y<b), \qquad (1.3)$$

$$u(+0;y)-u(-0;y)=u_0(y)\neq 0 \qquad (a<y<b), \qquad (1.4)$$

$$v(+0;y)-v(-0;y)=0 \qquad (a<y<b), \qquad (1.5)$$

$$\sigma_x^{(1)}(+0;y)=\sigma_x^{(1)}(-0;y)=q(y) \qquad (-c<y<-d), \qquad (1.6)$$

$$\tau_{xy}^{(1)}(+0;y)=\tau_{xy}^{(1)}(-0;y)=0 \qquad (-c<y<-d), \qquad (1.7)$$

$$u^{(1)}(+0;y)-u^{(1)}(-0;y)=u_0^{(1)}(y)\neq 0 \qquad (-c<y<-d), \qquad (1.8)$$

$$v^{(1)}(+0;y)-v^{(1)}(-0;y)=0 \qquad (-c<y<-d). \qquad (1.9)$$

здесь $u_0(y)$ и $u_0^{(1)}(y)-$нормальные, пока что неизвестные скачки функций горизонтальных перемещений при переходе через трещины $(a<y<b)$ и $(-c<y<-d)$, соответственно; а $\left\{\sigma_x(x;y);\ \tau_{xy}(x;y);\ u(x;y);\ v(x;y)\right\}$ и $\left\{\sigma_x^{(1)}(x;y);\ \tau_{xy}^{(1)}(x;y);\ u^{(1)}(x;y);\ v^{(1)}(x;y)\right\}$ – нормальные и касательные напряжения, горизонтальные и вертикальные перемещения верхней $\left(|x|<\infty;\ y\geq 0\right)$ и нижней $\left(|x|<\infty;\ y\leq 0\right)$ полуплоскостей, соответственно.

С другой стороны, руководствуясь идеями работы [1], для нормальных напряжений упругой составной (кусочно-однородной) плоскости, расслабленной двумя конечными прямолинейными трещинами, которая деформируется нормальными разрушающими напряжениями с интенсивностями $p(y)$ $(a<y<b)$ и $q(y)$ $(-c<y<-d)$, действующими на берегах трещин, и одновременно равномерно распределёнными горизонтальными растягивающими напряжениями кусочно–постоянной интенсивности $\pm_0(y)$ имеем:

$$\sigma_x(0;y)=\frac{1}{\pi}\int_a^b\left[\frac{1}{\eta-y}+K_{11}(\eta;y)\right]\varphi(\eta)\,d\eta+\frac{1}{\pi}\int_{-c}^{-d}K_{12}(t;y)\varphi^{(1)}(t)\,dt+\sigma_0,$$

$$(0<y<\infty), \tag{1.10}$$

$$\sigma_x^{(1)}(0;y)=\frac{1}{\pi}\int_{-c}^{-d}\left[\frac{1}{t-y}+K_{22}(t;y)\right]\varphi^{(1)}(t)\,dt+\frac{1}{\pi}\int_a^b K_{21}(\eta;y)\varphi(\eta)\,d\eta+\frac{E_1\left(1-\nu^2\right)}{E\left(1-\nu_1^2\right)}\sigma_0,$$

$$(-\infty<y<0). \tag{1.11}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$K_{11}(\eta;y)=-\frac{a_1}{\eta+y}+\frac{a_2\eta(\eta-y)}{(\eta+y)^3};\quad K_{12}(t;y)=\frac{a_3}{t-y}-\frac{a_4 t}{(t-y)^2},$$

$$K_{22}(t;y)=-\frac{c_1}{t+y}+\frac{c_2 t(t-y)}{(t+y)^3};\quad K_{21}(\eta;y)=\frac{c_3}{\eta-y}-\frac{c_4\eta}{(\eta-y)^2},$$

$$a_1\equiv a_1(k;\nu;\nu_1)=\frac{k^2\left[(1-2\nu)^2+4(1-\nu)^2\right]-2k(1-2\nu)(1-2\nu_1)-(3-4\nu_1)}{\left[1+k(3-4\nu)\right]\left[k+(3-4\nu_1)\right]},$$

$$a_2\equiv a_2(k;\nu)=\frac{2(k-1)}{1+k(3-4\nu)};\quad a_3\equiv a_3(k;\nu;\nu_1)=\frac{8(1-\nu_1)\left[k(1-\nu)+(1-\nu_1)\right]}{\left[1+k(3-4\nu)\right]\left[k+(3-4\nu_1)\right]}, \tag{1.12}$$

$$a_4\equiv a_4(k;\nu;\nu_1)=\frac{8(1-\nu_1)\left[k(1-2\nu)-(1-2\nu_1)\right]}{\left[1+k(3-4\nu)\right]\left[k+(3-4\nu_1)\right]};\quad k=\frac{\mu_1}{\mu}=\frac{E_1(1+\nu)}{E(1+\nu_1)},$$

$$c_1=a_1\left(\frac{1}{k};\nu_1;\nu\right);\ c_2=a_2\left(\frac{1}{k};\nu_1\right);\ c_3=a_3\left(\frac{1}{k};\nu_1;\nu\right);\ c_4=a_4\left(\frac{1}{k};\nu_1;\nu\right),$$

$$\varphi(y)=\frac{E}{4\left(1-\nu^2\right)}\frac{du_0(y)}{dy};\quad \varphi^{(1)}(y)=\frac{E_1}{4\left(1-\nu_1^2\right)}\frac{du_0^{(1)}(y)}{dy},$$

где $(E;\ \mu;\ \nu)$ и $(E_1;\ \mu_1;\ \nu_1)$ – модули упругости, модули сдвига и коэффициенты Пуассона материалов верхней и нижней полуплоскостей, соответственно.

Если теперь, иметь в виду условия (1.2) и (1.6), а также соотношения (1.10) и (1.11), относительно неизвестных функций $\varphi(\eta)$ и $\varphi^{(1)}(t)$, являющихся основными неизвестными функциями рассматриваемой смешанной задачи, получим следующую систему сингулярных интегральных уравнений с ядрами, состоящими из сингулярной и регулярной частей:

$$\frac{1}{\pi}\int_a^b\left[\frac{1}{\eta-y}+K_{11}(\eta;y)\right]\varphi(\eta)d\eta+\frac{1}{\pi}\int_{-c}^{-d}K_{12}(t;y)\varphi^{(1)}(t)dt=p(y)-\sigma_0, \tag{1.13}$$

$$(a<y<b),$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-c}^{-d}\left[\frac{1}{t-y}+K_{22}(t;y)\right]\varphi^{(1)}(t)dt+\frac{1}{\pi}\int_a^b K_{21}(\eta;y)\varphi(\eta)d\eta=q(y)-\frac{E_1(1-\nu^2)}{E(1-\nu_1^2)}\sigma_0,$$

$$(-c<y<-d), \tag{1.14}$$

которые необходимо решить с условиями непрерывности продолжений смещений $u(\pm 0;y)$ и $u^{(1)}(\pm 0;y)$ в концевых точках трещин, то есть вместе со следующими условиями:

$$\int_a^b\varphi(\eta)d\eta=0; \qquad \int_{-c}^{-d}\varphi^{(1)}(t)dt=0. \tag{1.15(a;b)}$$

Отметим, что в системе сингулярных интегральных уравнений (1.13) и (1.14) интегралы с ядрами Коши при $\eta=y$ и $t=y$ трактуются в смысле их главных значений по Коши.

После решения системы сингулряных интегральных уравнений (1.13) и (1.14) при условиях (1.15), для разрушающих напряжений верхней и нижней полуплоскостей будем иметь:

$$\sigma_x(0;y)=\frac{1}{\pi}\int_a^b\left[\frac{1}{\eta-y}+K_{11}(\eta;y)\right]\varphi(\eta)d\eta+\frac{1}{\pi}\int_{-c}^{-d}K_{12}(t;y)\varphi^{(1)}(t)dt+\sigma_0,$$

$$\left(y\in[0,a]\cup[b,\infty)\right), \tag{1.16}$$

$$\sigma_x^{(1)}(0;y)=\frac{1}{\pi}\int_{-c}^{-d}\left[\frac{1}{t-y}+K_{22}(t;y)\right]\varphi^{(1)}(t)dt+\frac{1}{\pi}\int_a^b K_{21}(\eta;y)\varphi(\eta)d\eta+\frac{E_1(1-\nu^2)}{E(1-\nu_1^2)}\sigma_0,$$

$$\left(y\in(-\infty,-c]\cup[-d,0]\right). \tag{1.17}$$

Таким образом, решение рассматриваемой смешанной задачи сводится к решению системы сингулярных интегральных уравнений первого рода (1.13) и (1.14) при условиях (1.15).

2. С целью решения системы сингулярных интегральных уравнений (1.13) и (1.14) при наличии условий (1.15), имея в виду, что вблизи концов конечных прямолинейных трещин неизвестные функции $\varphi(\eta)$ $(a<\eta<b)$ и $\varphi^{(1)}(t)$ $(-c<t<-d)$ имеют особенности квадратного корня интегрируемого порядка, их можно представить в форме разложения бесконечных рядов по ортогональным многочленам Чебышева первого рода с неизвестными коэффициентами X_n и Y_n $(n=0,1,2,...)$, соответственно [1, 4]:

$$\varphi(\eta)=\frac{1}{\sqrt{1-h^2(\eta)}}\sum_{n=0}^{\infty}X_nT_n\left[h(\eta)\right]; \quad h(\eta)=\frac{2\eta-b-a}{b-a}; \quad |h(\eta)|<1, \tag{2.1}$$

$$\varphi^{(1)}(t)=\frac{1}{\sqrt{1-g^2(t)}}\sum_{n=0}^{\infty}Y_nT_n\left[g(t)\right]; \quad g(t)=\frac{2t+d+c}{c-d}; \quad |g(t)|<1. \tag{2.2}$$

Подставляя значения выражений $\varphi(\eta)$ и $\varphi^{(1)}(t)$ из разложений (2.1) и (2.2) в систему СИУ (1.13) и (1.14), пользуясь следующими спектральными интегральными соотношениями [1–4]:

$$\frac{1}{®}\int_a^b\sqrt{1-w^2(t)}U_{n-1}\left[w(t)\right]U_{m-1}\left[w(t)\right]dt=\begin{cases}0; & n\neq m,\\ \dfrac{b-a}{4}; & n=m,\end{cases} \quad (n,m=1,2,3,...),$$

$$\frac{1}{\text{®}}\int_a^b \frac{1}{t-x}\frac{T_n\left[w(t)\right]}{\sqrt{1-w^2(t)}}dt=\begin{cases}0; & n=0,\\ U_{n-1}\left[w(x)\right]; & n=1,2,3,...,\end{cases} \qquad (a<x<b), \tag{2.3}$$

$$\frac{1}{\text{®}}\int_a^b \frac{T_n\left[w(t)\right]T_m\left[w(t)\right]}{\sqrt{1-w^2(t)}}dt=\begin{cases}0; & n\neq m,\\ \dfrac{b-a}{4}; & n=m\neq 0, \qquad (n,m=1,2,3,...),\\ \dfrac{b-a}{2}; & m=n=0,\end{cases}$$

где $T_n(t)=\cos(n\cdot\arccos t)$ и $U_{n-1}(t)=\dfrac{\sin(n\cdot\arccos t)}{\sin(\arccos t)}$ – многочлены Чебышева первого и второго родов, соответственно, и поступив традиционным образом [1,4], получим следующую совокупность квазивполне регулярных бесконечных систем линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов X_n и Y_n $\left(n=\overline{1;\infty}\right)$:

$$\left[\begin{array}{l} X_m+\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_{nm}X_n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}B_{nm}Y_n=\alpha_m\ , \\ Y_m+\sum\limits_{n=1}^{\infty}C_{nm}Y_n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}D_{nm}X_n=\beta_m\ , \end{array}\right. \qquad (m=1,2,3,...)\ . \tag{2.4}$$

Здесь ядра при неизвестных и свободные члены совокупности бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (2.4) определяются по следующим формулам:

$$A_{nm}=\frac{4}{\pi^2(b-a)}\int_a^b\int_a^b\frac{\sqrt{1-h^2(y)}}{\sqrt{1-h^2(\eta)}}K_{11}(\eta;y)T_n\left[h(\eta)\right]U_{m-1}\left[h(y)\right]d\eta dy\,,$$

$$B_{nm}=\frac{4}{\pi^2(b-a)}\int_a^b\int_{-c}^{-d}\frac{\sqrt{1-h^2(y)}}{\sqrt{1-g^2(t)}}K_{12}(t;y)T_n\left[g(t)\right]U_{m-1}\left[h(y)\right]dtdy\,,$$

$$C_{nm}=\frac{4}{\pi^2(c-d)}\int_{-c}^{-d}\int_{-c}^{-d}\frac{\sqrt{1-g^2(y)}}{\sqrt{1-g^2(t)}}K_{22}(t;y)T_n\left[g(t)\right]U_{m-1}\left[g(y)\right]dtdy\,,$$

$$D_{nm}=\frac{4}{\pi^2(c-d)}\int_{-c}^{-d}\int_a^b\frac{\sqrt{1-g^2(y)}}{\sqrt{1-h^2(\eta)}}K_{21}(\eta;y)T_n\left[h(\eta)\right]U_{m-1}\left[g(y)\right]d\eta dy\,,$$

$$\alpha_m^{(1)}=\frac{4}{\pi(b-a)}\int_a^b p(y)\sqrt{1-h^2(y)}\,U_{m-1}\left[h(y)\right]dy\,, \tag{2.5}$$

$$\beta_m^{(1)}=\frac{4}{\pi(c-d)}\int_{-c}^{-d}q(y)\sqrt{1-g^2(y)}\,U_{m-1}\left[g(y)\right]dy\,, \qquad (n;m=1,2,3,...),$$

$$\begin{array}{l}\alpha_m=\alpha_m^{(1)}+\alpha_m^{(2)}\,;\\ \beta_m=\beta_m^{(1)}+\beta_m^{(2)}\,;\end{array} \quad \alpha_m^{(2)}=\begin{cases}0; & m\neq 1,\\ -\sigma_0\,; & m=1,\end{cases}; \quad \beta_m^{(2)}=\begin{cases}0; & m\neq 1,\\ -\dfrac{E_1\left(1-\nu^2\right)}{E\left(1-\nu_1^2\right)}\sigma_0\,; & m=1.\end{cases}$$

Отметим, что при получении совокупности бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (2.4) были использованы условия (1.15), которые привели к $X_0=0$; $Y_0=0$.

Определим теперь коэффициенты интенсивностей разрушающих напряжений (КИН) в концевых точках прямолинейных трещин. Для этой цели подставляя разложения функций $\varphi(\eta)$ и $\varphi^{(1)}(t)$ из (2.1) и (2.2) в (1.16) и (1.17), соответственно будем иметь [1–5]:

$$K(a)=\lim_{y\to a-0}\left\{\sqrt{a-y}\,\sigma_x(0;y)\right\}=\frac{1}{2}\sqrt{b-a}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}X_n,$$
$$K(b)=\lim_{y\to b+0}\left\{\sqrt{y-b}\,\sigma_x(0;y)\right\}=-\frac{1}{2}\sqrt{b-a}\sum_{n=1}^{\infty}X_n; \tag{2.6}$$

$$K(-c)=\lim_{y\to -c-0}\left\{\sqrt{-c-y}\,\sigma_x^{(1)}(0;y)\right\}=\frac{1}{2}\sqrt{c-d}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\Upsilon_n,$$
$$K(-d)=\lim_{y\to -d+0}\left\{\sqrt{y+d}\,\sigma_x^{(1)}(0;y)\right\}=-\frac{1}{2}\sqrt{c-d}\sum_{n=1}^{\infty}\Upsilon_n. \tag{2.7}$$

И так, решение рассматриваемой смешанной задачи свелось к решению совокупности бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (2.4) с ядрами A_{nm}, B_{nm}, C_{nm} и D_{nm} $\left(n,\ m=\overline{1;\infty}\right)$ и свободными членами α_m и β_m $\left(m=\overline{1;\infty}\right)$, определяющиеся из (2.5).

В конце отметим, что исследование совокупности бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (2.4) в смысле его квазиполне регулярности, можно проводить аналогично [1,4], поскольку регулярные ядра сингулярных интегральных уравнений (СИУ) (1.13) и (1.14) со своими частными производными – квадратично интегрируемые функции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорян Э.Х., Оганисян Г.В. Смешанная задача для упругой кусочно-однородной плоскости с двумя конечными трещинами, одна из которых ортогонально выходит на линию раздела двух полуплоскостей с различными упругими свойствами.// Межвузовский сборник научных трудов. “Механика”. Ереван: 1991. Вып.8. С.75–87.
2. Храпков А.А. Первая основная задача для кусочно-однородной плоскости с разрезом, перпендикулярным к прямой раздела. // ПММ. 1968. Т.32. № 4. С.647–659.
3. Ситник В.А., Тихоненко Л.Я. Решение задачи о краевой трещине, ортогонально выходящей на прямую раздела двух полуплоскостей с различными упругими постоянными. // ПМ. 1988. Т.24. № 1. С.96–101.
4. Григорян Э.Х., Оганисян Г.В. Об одной контактной задаче для кусочно-однородной пластины с конечными стрингерами. // Межвузовский сборник научных трудов. “Механика”. Ереван: 1984. Вып.3. С.130–137.
5. Cook T.S., Erdogan F. Stresses in bonded materials with a crack perpendicular to the interface. // Int. J. Eng. Sci.. 1972. V.10. № 8. Pp.677–697.

Сведения об авторах

Оганисян Гамлет Вараздатович – кандидат физико–математических наук, старший научный сотрудник, преподаватель кафедры механики факультета математики и механики ЕГУ. Ереван, ул.Алека Манукяна, 1. **Тел:** (+374 93) 27–26–26.
E-mail: HovhannisyanHamlet@yandex.ru
Агабекян Пайкар Вараздатович – кандидат физико–математических наук, научный сотрудник Института механики НАН Армении. **Тел:** (+374 93) 24–85–47.
E-mail: mechins@sci.am
Хуршудян Мартирос Жораевич – исследователь в исследовательском центре CNR NANO S3, аспирант факультета физики, информатики и математики университета Модены. Италия, Модена, 41125, Кампи 213a. **Тел:** (+374 99) 70–35–30. **E-mail:** martiros.khurshudyan@nano.cnr.it

МАГНИТОУПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ ПРОВОДЯЩЕЙ ПЛАСТИНКИ–ПОЛОСЫ В ПРОДОЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Папян А. А.

На основе гипотезы Кирхгофа и гипотезы магнитоупругости тонких тел С.А. Амбарцумяна, Г.Е. Багдасаряна и М.В. Белубекяна [1] решается задача магнитоупругих колебаний для пластинки-полосы. Получены уравнения планарных и поперечных колебаний. Определены частоты колебаний в зависимости от напряжённости магнитного поля.

1. Упругая изотропная пластинка-полоса с постоянной толщиной 2h и конечной электропроводностью σ находится во внешнем постоянном магнитном поле $\vec{H}_0 = \left(H_{01}, 0, 0\right)$. Пластинка-полоса в декартовой системе координат 0xyz занимает следующую область: $-\infty < x < \infty$, $0 \le y \le b$ и $-h \le z \le h$.

Уравнения движения упругой среды имеют вид [1,2]:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + R_1 = \rho \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + R_2 = \rho \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + R_3 = \rho \frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2} \tag{1.1}$$

Уравнения электродинамики имеют вид [1]:

$$\mathrm{rot}\vec{h} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}, \ \mathrm{rot}\vec{e} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \vec{h}}{\partial t}, \ \mathrm{div}\vec{e} = \frac{4\pi}{\varepsilon}\rho_{(e)}, \mathrm{div}\vec{h} = 0 \tag{1.2}$$

$$\vec{R} = \frac{\mu}{c}\left(\vec{j} \times \vec{H}_0\right) \tag{1.3}$$

К уравнениям (1.2) и (1.3) необходимо присоединить функциональную связь:

$$\vec{j} = \sigma\left(\vec{e} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \times \vec{H}_0\right) \tag{1.4}$$

Здесь $\sigma_{ij} -$ компоненты тензора напряжения, $\vec{R} -$ пондермоторная сила (объёмная сила), $\vec{h} -$ вектор напряжённости магнитного поля, $\vec{e} -$ вектор напряжённости электрического поля, $\vec{j} -$ ток проводимости, $\mu -$ магнитная проницаемость, $c -$ скорость света, $U_i -$ компоненты перемещения, $\rho -$ плотность.

Граничные условия на лицевых поверхностях пластинки-полосы $z = \pm h$ имеют вид:

$$\sigma_{3i} = 0, \ \mu h_3 = h_3^{(e)}, \ e_1 = e_1^{(e)} \ \ e_2 = e_2^{(e)} \tag{1.5}$$

где $i = 1, 2, 3$

Уравнения электродинамики для окружающей среды имеют вид:

$$\mathrm{rot}\vec{h}^{(e)} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{e}^{(e)}}{\partial t}, \ \mathrm{rot}\vec{e} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{h}^{(e)}}{\partial t}, \ \mathrm{div}\vec{e}^{(e)} = 0, \ \mathrm{div}\vec{h}^{(e)} = 0 \tag{1.6}$$

Для пластинки-полосы предполагается, что справедливы гипотеза Кирхгофа и гипотеза магнитоупругости тонких тел, которые запишутся в следующем виде [1,2]:

$$U_1(x,y,z,t) = U(x,y,t) - z\frac{\partial w(x,y,t)}{\partial x}, \ U_2(x,y,z,t) = V(x,y,t) - z\frac{\partial w(x,y,t)}{\partial y},$$

$$U_3(x,y,z,t) = w(x,y,t) \tag{1.7}$$

$$e_1 = \varphi(x,y,t), \ \mathrm{e}_2 = \psi(x,y,t), \ \mathrm{h}_3 = f(x,y,t) \tag{1.8}$$

Для задачи магнитоупругих колебаний в продольном магнитном поле из уравнений (1.2) имеем [1]:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\mu}{c}\frac{\partial f}{\partial t}=0\,,\ \frac{\partial f}{\partial y}-\frac{4\pi\sigma}{c}\varphi=\frac{h_2^+-h_2^-}{2h}\,,\ \frac{\partial f}{\partial x}+\frac{4\pi\sigma}{c}\left(\psi+\frac{\mu}{c}H_{01}\frac{\partial w}{\partial t}\right)=\frac{h_1^+-h_1^-}{2h} \tag{1.9}$$

где $h_2^+=h_2\big|_{z=h}$, $h_2^-=h_2\big|_{z=-h}$, $h_1^+=h_1\big|_{z=h}$, и $h_1^-=h_1\big|_{z=-h}$

Компоненты h_1 и h_2 определяются из уравнений:

$$h_2=\frac{h_2^++h_2^-}{2h}+z\left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{4\pi\sigma}{c}\varphi\right),\ h_1=\frac{h_1^++h_1^-}{2h}+z\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{4\pi\sigma}{c}\left(\psi+\frac{\mu}{c}H_{01}\frac{\partial w}{\partial t}\right)\right) \tag{1.10}$$

Учитывая уравнения (1.1) – (1.10), для планарных и поперечных колебаний получим:

$$\Delta U+\theta\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\right)=\frac{\rho}{G}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

$$\Delta V+\theta\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\right)+\frac{\sigma\mu H_{01}}{cG}\left(\frac{c}{8\pi\sigma}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(h_2^++h_2^-\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(h_1^++h_1^-\right)\right)\right)=\frac{\rho}{G}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \tag{1.11}$$

$$D\Delta^2 w-\frac{2h\mu\sigma}{c}\left(-H_{01}\psi-\frac{\mu}{c}H_{01}^2\frac{\partial w}{\partial t}-\frac{h^3}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left(H_{01}F\right)\right)+2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \tag{1.12}$$

где $F=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+\dfrac{\partial\psi}{\partial y}+\dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial}{\partial t}\left(H_{01}\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)$, $\theta=\dfrac{1+\nu}{1-\nu}$ и $D=\dfrac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}$.

Итак, мы получили шесть уравнений (1.9), (1.11) и (1.12), которые являются двумерными уравнениями относительно шести искомых функций: U , V , w , φ , ψ и f (от x, y, t). Однако эти уравнения содержат также неизвестные поверхностные значения h_1^+, h_1^-, h_2^+ и h_2^-. Для полного замыкания системы уравнений необходимо рассматривать также уравнения электродинамики в окружающей пластинки-полосы среде (1.6) с соответствующими поверхностными условиями. Для окончательного сведения пространственной задачи магнитоупругих колебаний пластинки-полосы к двумерным были предложены различные подходы [1-5]. Здесь предлагается другой подход: принимается, что поверхностные значения h_1^+, h_1^-, h_2^+ и h_2^- можно определить согласно модели идеального проводника [6].

Согласно модели идеального проводника для установившихся колебаний возмущенное магнитное поле определяется следующим образом [2,3]:

$$\vec{h}=\operatorname{rot}\left(\vec{U}\times\vec{H}_0\right) \tag{1.13}$$

Из (1.13), с учётом (1.7, 1.8), следуют:

$$h_1=\frac{\partial}{\partial y}\left(-H_{01}V+zH_{01}\frac{\partial w}{\partial y}\right),\ h_2=\frac{\partial}{\partial x}\left(H_{01}V-zH_{01}\frac{\partial w}{\partial y}\right) \tag{1.14}$$

Из (1.9) следуют:

$$h_1^++h_1^-=-2H_{01}\frac{\partial V}{\partial y}\,,\ h_2^++h_2^-=2H_{01}\frac{\partial V}{\partial x}\,,\ h_1^+-h_1^-=2hH_{01}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\,,$$

$$h_2^+-h_2^-=-2h\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}H_{01} \tag{1.15}$$

Значение (1.13), подставляя в уравнения (1.9), (1.11) и (1.12), для планарных и поперечных (изгибных) колебаний получим следующие уравнения:

$$\Delta U+\theta\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\right)=\frac{\rho}{G}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

$$\Delta V+\theta\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\right)+\frac{\mu}{4\pi G}H_{01}^2\Delta V=\frac{\rho}{G}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \qquad (1.16)$$

$$D\Delta^2 w-\frac{2h\mu\sigma}{c}\left(-H_{01}\psi-\frac{\mu}{c}H_{01}^2\frac{\partial w}{\partial t}-\frac{h^2}{3}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(H_{01}F\right)\right)\right)+2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \qquad (1.17)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\mu}{c}\frac{\partial f}{\partial t}=0 \qquad (1.18)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{4\pi\sigma}{c}\varphi+\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}H_{01}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{4\pi\sigma}{c}\left(\psi+\frac{\mu}{c}H_{01}\frac{\partial w}{\partial t}\right)-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}H_{01}=0 \qquad (1.19)$$

2. Рассмотрим уравнение планарных колебаний (1.16). Решение системы (1.16) будем искать в следующем виде:

$$U=U_0e^{i(\omega t-kx)},\ V=V_0e^{i(\omega t-kx)} \qquad (2.1)$$

Подставляя искомое решение (2.1) в (1.16), получим следующую систему уравнений:

$$U_0''-k^2\left(1+\theta-\eta\right)U_0=ik\theta V_0'$$

$$\left(1+\theta+\gamma\right)V_0''-k^2\left(1+\gamma-\eta\right)V_0=ik\theta U_0', \qquad (2.2)$$

где сделаны следующие обозначения: $\gamma=\dfrac{\mu}{4\pi G}H_{01}^2,\ \eta=\dfrac{\rho\omega^2}{Gk^2}$.

Из системы (2.2) для U_0 получим следующее дифференциальное уравнение:

$$U_0^{IV}-2k^2\left(1-\frac{\eta\left(2+\gamma\right)+\theta\left(\eta-\gamma\right)}{2\left(1+\theta+\gamma\right)}\right)U_0''+k^4\left(1-\eta+\frac{\gamma\theta-\eta\left(1-\eta\right)}{1+\theta+\gamma}\right)U_0=0 \qquad (2.3)$$

Решение дифференциального уравнения (2.3) запишется в виде:

$$U_0=C_1\sin\left(S_1ky\right)+C_2\cos\left(S_1ky\right)+C_3\sin\left(S_2ky\right)+C_4\cos\left(S_2ky\right) \qquad (2.4)$$

где $S_1=\sqrt{-\sqrt{\dfrac{\left(\eta\gamma+\theta\left(\eta-\gamma\right)\right)^2-4\theta\eta\gamma}{4\left(1+\theta+\gamma\right)^2}}-\left(1-\dfrac{\eta\left(2+\gamma\right)+\theta\left(\eta-\gamma\right)}{2\left(1+\theta+\gamma\right)}\right)}$

$$S_2=\sqrt{\sqrt{\frac{\left(\eta\gamma+\theta\left(\eta-\gamma\right)\right)^2-4\theta\eta\gamma}{4\left(1+\theta+\gamma\right)^2}}-\left(1-\frac{\eta\left(2+\gamma\right)+\theta\left(\eta-\gamma\right)}{2\left(1+\theta+\gamma\right)}\right)}$$

Имея решение U_0 из системы (2.2), для V_0 получим следующее решение:

$$V_0=iC_1A_1\cos\left(S_1ky\right)-iC_2A_1\sin\left(S_1ky\right)-iC_3A_2\cos\left(S_2ky\right)+iC_4A_2\sin\left(S_2ky\right) \qquad (2.5)$$

где $A_1=-\dfrac{S_1^2+1+\theta-\eta}{S_1\theta},\quad A_2=\dfrac{S_2^2+1+\theta-\eta}{S_2\theta}$

3. Для планарных колебаний рассмотрим граничные условия жёсткого закрепления, которое запишется в следующем виде:

при $y=0,b \qquad U_0=0,\ V_0=0$ (3.1)

Удовлетворяя граничным условиям (3.1), получим:

$$C_2+C_4=0$$

$$C_1A_1-C_3A_2=0$$

$$C_1\sin\left(S_1kb\right)+C_2\cos\left(S_1kb\right)+C_3\sin\left(S_2kb\right)+C_4\cos\left(S_2kb\right)=0$$

$$C_1A_1\cos\left(S_1kb\right)-C_2A_1\sin\left(S_1kb\right)-C_3A_2\cos\left(S_2kb\right)+C_4A_2\sin\left(S_2kb\right)=0 \tag{3.2}$$

Чтобы система (3.2) имела ненулевое решение, необходимо, чтобы детерминант системы (3.2) был равен нулю, откуда получим:

$$2A_1A_2\left(1-\cos\left(S_1kb\right)\cos\left(S_2kb\right)\right)+\left(A_1^2+A_2^2\right)\sin\left(S_1kb\right)\sin\left(S_2kb\right)=0 \tag{3.3}$$

Если магнитное поле отсутствует, получим:

$$\frac{2S_{1*}}{S_{2*}}\left(1-\cos\left(S_{1*}kb\right)\cos\left(S_{2*}kb\right)\right)+\left(S_{1*}^2+\frac{1}{S_{2*}^2}\right)\sin\left(S_{1*}kb\right)\sin\left(S_{2*}kb\right)=0 \tag{3.4}$$

где $S_{1*}=\sqrt{\alpha_*\eta-1}$, $S_{2*}=\sqrt{\eta-1}$ и $\alpha_*=\dfrac{1}{1+\theta}$.

4. Для планарных колебаний рассмотрим граничные условия Навье, которые запишутся в следующем виде:

при $y=0,b$ $\qquad U_0=0$, $\dfrac{\partial V_0}{\partial y}=0$ (4.1)

$$\frac{\partial V_0}{\partial y}=-iC_1B_1\sin\left(S_1ky\right)-iC_2B_1\cos\left(S_1ky\right)+iC_3B_2\sin\left(S_2ky\right)+iC_4B_2\cos\left(S_2ky\right) \tag{4.2}$$

где $B_1=A_1S_1$, $B_2=A_2S_2$

Удовлетворяя граничным условиям (4.1), получим:

$$C_2+C_4=0$$

$$-C_2B_1+C_4B_2=0$$

$$C_1\sin\left(S_1kb\right)+C_2\cos\left(S_1kb\right)+C_3\sin\left(S_2kb\right)+C_4\cos\left(S_2kb\right)=0$$

$$-C_1B_1\sin\left(S_1kb\right)-C_2B_1\cos\left(S_1kb\right)+C_3B_2\sin\left(S_2kb\right)+C_4B_2\cos\left(S_2kb\right)=0 \tag{4.3}$$

Чтобы система (4.3) имела ненулевое решение, необходимо, чтобы детерминант системы (4.3) был равен нулю, откуда получим:

$$\left(B_1^2+B_2^2\right)^2\sin\left(S_1kb\right)\sin\left(S_2kb\right)=0 \tag{4.4}$$

Из (4.4) следует:

$$S_1=\left(\frac{\pi n}{kb}\right)^2 \tag{4.5}$$

$$S_2=\left(\frac{\pi n}{kb}\right)^2 \tag{4.6}$$

Для (4.5) и (4.6) дадим численное решение при разных величинах магнитного поля и значений n и kb (представленных в табл. 1,2) и при значениях $\nu=0,3$. Численные значения η при разных величинах магнитного поля для (4.5) представлены в табл.1, а для (4.6) – в табл. 2.

Таблица 1

	$kb=1\ \ n=1$	$kb=1\ \ n=2$	$kb=3\ \ n=1$	$kb=3\ \ n=2$
γ	η	η	η	η
0	31,056	115,653	5,99035	15,39
0,02	31,2536	116,442	6,0124	15,4779
0,04	31,4516	117,233	6,03467	15,5661
0,06	31,6499	118,023	6,05716	15,6547
0,08	31,8486	118,814	6,07988	15,7436
0,1	32,0477	119,605	6,10282	15,8329

Таблица 2

	$kb=1$ $n=1$	$kb=1$ $n=2$	$kb=3$ $n=1$	$kb=3$ $n=2$
γ	η	η	η	η
0	10,8696	40,4784	2,09662	5,38649
0,02	10,8894	40,4982	2,11651	5,40632
0,04	10,9088	40,5176	2,13617	5,4258
0,06	10,9279	40,5366	2,15561	5,44494
0,08	10,9466	40,5552	2,17482	5,46376
0,1	10,9649	40,5734	2,19382	5,48225

Из табл.1 следует, что фазовая скорость продольной волны увеличивается с увеличением напряженности магнитного поля. Наибольшее влияние получается при $kb=1$ и $n=1$.

Табл.2 показывает, что влияние магнитного поля на фазовую скорость поперечной волны незначительно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977. 272с.
2. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твёрдых телах. М.: Мир, 1986. 160с.
3. Белубекян М.В. Введение в теорию магнитоупругости (специальный курс лекций для студентов факультета механики ЕГУ) Ереван: 1997, 103с.
4. M.Belubekyan, K. Ghazaryan, P. Marzocca, C. Cormier. Localized Magnetoelastic Bending Vibration of an Electroconductive Elastic Plate. // Journal of Applied Mechanics, November 2007. Vol.74. P.1071–1077.
5. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Х., Микилян М.А. Собственные и вынужденные нелинейные колебания идеально проводящей пластинки в наклонном магнитном поле.//Институт механики НАН Армении. Проблемы Механики Деформируемого Твёрдого Тела. Ереван: 2012. С.75-87.
6. Папян А.А. К задаче колебаний пластинки в продольном магнитном поле. Актуальные проблемы механики сплошной среды. // Труды международной конференции, посвящённой 100-летию академика НАН Армении Н.Х. Арутюняна. 08 – 12 октября 2012. Цахкадзор, Армения. Т.2. С.113–118.

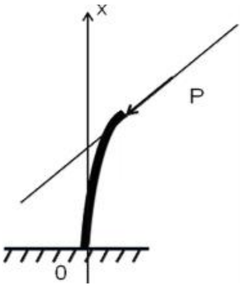
Сведения об авторе:

Папян Арарат Артурович – аспирант Института механики НАН Армении
E-mail: aro088@mail.ru

ВЛИЯНИЕ ДИССИПАЦИИ НА ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВЕРТИКАЛЬНОГО СТЕРЖНЯ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ СЛЕДЯЩЕЙ НАГРУЗКИ ПРИ «УПРУГОМ ЗАКРЕПЛЕНИИ»

Погосян Д.М.

Известно, что в неконсервативных задачах устойчивости учёт трения может привести к дестабилизации. На простом примере двойного маятника, нагружённого «следящей» силой, Циглер впервые обнаружил явление дестабилизации вследствие трения [1]. В [2] задача Циглера была обобщена на случай наличия как внутреннего, так и внешнего трения. В работе рассматривается устойчивость неконсервативных стержневых систем с учётом различных видов трения. Аналогичные задачи рассмотрены в [3], [4].



1. Пусть конец $x = 0$ вертикального стержня имеет жёсткое закрепление. На другом конце $x = l$ стержня изгибающий момент равен нулю и приложены следящая сжимающая нагрузка P и сосредоточенная масса m. В предположении, что масса стержня и силы сопротивления пренебрежимо малы, уравнение поперечных колебаний стержня имеет вид (1.1)

$$EJ\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + P\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \tag{1.1}$$

где $w(x,t)$ – прогиб стержня.

Граничные условия в предположении наличия диссипативной силы в опоре стержня имеют вид

$$x = 0: \quad w = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial x} + \P_1\frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial t} = 0 \tag{1.2}$$

$$x = l: \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \qquad EJ\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{1.3}$$

$$\P_1 > 0 \tag{1.4}$$

$\P_1$ – коэффициент, характеризующий вязкоупругие свойства в опоре.

В работе [5] исследована задача устойчивости стержня при $\P_1 = 0$.

Отыскивая решение задачи устойчивости (1.1)-(1.3) в виде

$$w = f\left(z\right)e^{\mu t}, \quad z = \frac{x}{l} \tag{1.5}$$

приходим к следующей задаче на собственные значения:

$$f^{(IV)}(z) + k^2 f''(z) = 0 \tag{1.6}$$

$$z = 0: \quad f\left(z\right) = 0, \quad f'\left(z\right) + \P_1\mu f'''\left(z\right) = 0 \tag{1.7}$$

$$z = 1: \quad f''\left(z\right) = 0, \quad f'''\left(z\right) = \mu^2 \quad f\left(z\right) \tag{1.8}$$

где $k^2 = \dfrac{P}{EJ}l^2, \quad = \dfrac{m}{EJ}l^3, \; \P_1 = \dfrac{\P_1}{l^2}$.

Подставляя общее решение уравнения (1.6)

$$f\left(z\right) = C_1 + C_2 z + C_3\sin\left(kz\right) + C_4\cos\left(kz\right)$$

в граничные условия (1.7), (1.8), получим следующую однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных $C_i \neq 0, \; i = \overline{1,4}$:

$$
\begin{cases}
C_1 + C_4 = 0 \\
C_2 + C_3\left(1 - \mu \P_1 k^2\right)k = 0 \\
C_3 \sin\left(k\right) + C_4 \cos\left(k\right) = 0 \\
C_1 \mu^2 \quad + C_2 \mu^2 \quad + C_3\left(\mu^2 \quad \sin\left(k\right) + k^3 \cos\left(k\right)\right) + C_4\left(\mu^2 \quad \cos\left(k\right) - k^3 \sin\left(k\right)\right) = 0
\end{cases}
\tag{1.9}
$$

Приравнивая нулю детерминант системы (1.9), получаем следующее характеристическое уравнение:

$$a_0 \mu^3 + a_1 \mu^2 + a_2 \mu + a_3 = 0 \tag{1.10}$$

где

$$
\begin{gathered}
a_0 = k^3 \quad \P_1 \cos\left(k\right), \quad a_1 = \quad \left(\sin\left(k\right) - k\cos\left(k\right)\right) \\
a_2 = 0, \quad a_3 = k^3
\end{gathered}
\tag{1.11}
$$

Исследуем поведение корней уравнения (1.10) с помощью алгебраического критерия устойчивости Рауса-Гурвица. Согласно критерию Рауса-Гурвица, не все корни (1.10) имеют отрицательные вещественные части. Следовательно, система неустойчива. Более того, в случае отсутствия трения ($\P_1 = 0$) получается задача В.В. Болотина[5], для которой

$$P_k^B = \frac{4,49^2}{l^2} EJ \tag{1.12}$$

это означает, что диссипативная сила приводит к эффекту дестабилизации: возмущённое движение приобретает характер колебаний с возрастающими амплитудами (флаттерные колебания), а исходное состояние равновесия становится неустойчивым при меньшем значении следящей силы P.

В табл. 1 представлены некоторые численные значения μ_i, которые получили из уравнения (1.11).

2. Рассмотрим тот же стержнь, что и в задаче 1, только одновременно учитываются трения, характеризующиеся различными моделями [2].

Граничные условия имеют вид

$$x = 0: \; w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} - \P_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial t} + \P_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} = 0 \tag{2.1}$$

$$x = l: \; \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad EJ\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{2.2}$$

$$\P_1 > 0, \; \P_2 > 0, \; \frac{\P_2}{\P_1} > 3 \tag{2.3}$$

$\P_1, \P_2$ – коэффициенты, характеризующие вязкоупругие свойства в опоре.

Справедливость (2.3) следует из условия устойчивости возмущённого движения стержня при отсутствии следящей силы P.

Отыскивая решение задачи устойчивости (1.1),(2.1)-(2.3) в виде

$$w = f\left(z\right)e^{\mu t}, \quad z = \frac{x}{l} \tag{2.4}$$

приходим к следующей задаче на собственные значения:

$$f^{(IV)}(z) + k^2 f''(z) = 0 \tag{2.5}$$

$$z = 0: \; f\left(z\right) = 0, \quad f'\left(z\right) - \P_1 \mu f'''\left(z\right) + \P_2 \mu f'\left(z\right) = 0 \tag{2.6}$$

$$z = 1: \; f''\left(z\right) = 0, \quad f'''\left(z\right) = \mu^2 \quad f\left(z\right) \tag{2.7}$$

где $k^2 = \dfrac{P}{EJ} l^2, \quad = \dfrac{m}{EJ} l^3,\ ¶_1 = \dfrac{¶_1}{l^2}$.

Таблица 1

k		$\mu_{1,2}$	μ_3
0.5	0.01	0.413387 $\mp$ 17.5147 i	-371.247 - 3.46251*10^{-15} i
	0.1	0.04150483 $\mp$ 5.545593 i	-370.502923 + 3.38271*10^{-15} i
	1.0	0.00415216 $\mp$ 1.75389 i	-370.428 - 7.4*10^{-15} i
1.0	0.01	0.297209 $\mp$ 18.2098 i	-558.002 - 6.14092*10^{-15} i
	0.1	0.029777924 $\mp$ 5.76190506 i	-557.4672805 - 3.416711*10^{-14} i
	1.0	0.00297837 $\mp$ 1.82218 i	-557.414 + 5.68*10^{-15} i
1.5	0.01	0.0506999 $\mp$ 19.4579 i	-3733.86 - 1.87295*10^{-13} i
	0.1	0.0050702381 $\mp$ 6.153220401 i	-3733.76419 - 1.092459*10^{-13} i
	1.0	0.000507026 $\mp$ 1.94582 i	-3733.76 - 4.502*10^{-14} i
2.0	0.01	-0.437575 $\pm$ 21.4101 i	524.005 + 2.4987*10^{-14} i
	0.1	-0.0438893 $\pm$ 6.77683 i	523.2177 - 1.1053657*10^{-14} i
	1.0	-0.00439025 $\pm$ 2.14322 i	523.139 - 4.77396*10^{-15} i
2.5	0.01	-1.40685 $\pm$ 24.3033 i	210.623 - 1.29584*10^{-15}
	0.1	-0.14412 $\pm$ 7.74347 i	208.097667 + 2.225650*10^{-15} i
	1.0	-0.014448 $\pm$ 2.45061 i	207.838 - 1.3184*10^{-16} i
3.0	0.01	-3.33503 $\pm$ 28.4552 i	123.061 - 2.96638*10^{-15} i
	0.1	-0.3681499 $\pm$ 9.279277 i	117.12691 + 2.9334173*10^{-15} i
	1.0	-0.0372346 $\pm$ 2.94477 i	116.465 - 3.89445*10-15 i
4.0	0.01	-14.3284 $\pm$ 43.4573 i	73.0659 - 1.89258*10^{-15}
	0.1	-3.008327 $\pm$ 17.156456 i	50.425697 + 1.649071*10^{-15} i
	1.0	-0.37509 $\pm$ 5.80835 i	45.1592 + 2.51535*10^{-17} i
5.0	0.01	60.5085 $\mp$ 53.5758 i	-53.9729 - 1.79392*10^{-15} i
	0.1	55.6683 $\pm$ 3.552713*10^{-15} i	-20.11179544 + 2.66453*10^{-15} i
	1.0	66.2407 $\mp$ 3.55271*10^{-15} i	-6.90453 - 1.06581*10^{-14} i

Рассуждая так, как и в предыдущей задаче, получаем следующее характеристическое уравнение:

$$a_0\mu^3 + a_1\mu^2 + a_2\mu + a_3 = 0 \qquad (2.8)$$

где

$$a_0 = \left(¶_2\left(\sin(k) - k\cos(k)\right) - ¶_1 \mathrm{k}^3 \cos(k)\right),$$
$$a_1 = \left(\sin(k) - k\cos(k)\right), \quad a_2 = ¶_2 k^3, \quad a_3 = k^3 \qquad (2.9)$$

В соответствии с неравенствами (2.3), из выражений (2.9) следует, что

$$a_2 > 0,\ a_3 > 0 \qquad (2.10)$$

Исследуем поведение корней уравнения (2.8) с помощью алгебраического критерия устойчивости Рауса-Гурвица. Согласно критерию Рауса-Гурвица, в соответствии с соотношениями (2.8), (2.10), границами области устойчивости стержня в пространстве его параметров являются гиперповерхности

$$\Delta_1 = a_1 = 0, \qquad \Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 = 0 \qquad (2.11)$$

в предположении, что $a_0 \neq 0$.

Из условий (2.12) получаем критическое значение следящей силы

$$P_k = \frac{\text{®}^2}{4l^2} EJ$$

При $P < P_k$ возмущённое движение стержня будет устойчивым, а при $P > P_k$ возмущённое движение приобретает характер колебаний с возрастающими амплитудами – флатерные колебания. Заметим, что значение P_k не зависит от m, $\P_1$ и $\P_2$. Более того, P_k меньше критического значения, полученного при $\P_1 = 0,\ \P_2 = 0$ из (1.11). Это означает, что диссипативная сила приводит к эффекту дестабилизации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. М. Мир, 1971. 192с.
2. Пановко Я.Г., Сорокин С.В. О квазиустойчивости упруговязких систем со следящими силами // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. №5. С.135-139.
3. Майлыбаев А.А., Сейранян А.П. Многопараметрические задачи устойчивости. М.: Физматлит, 2009. 400с.
4. Сейранян А.П. О стабилизации неконсервативных систем диссипативными силами и неопределённости критической нагрузки// Докл. РАН. 1996. 348(3): 323–326.
5. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Наука, 1961.340с.

<u>Сведения об авторе:</u>

Погосян Диана Мнацакановна – аспирант Института механики НАН Армении
Тел.: (37410) 64-98-31
E-mail: dianpoghosyan@yahoo.com

ЯВНЫЙ ВИД ЯДРА ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О ТРЕЩИНЕ ДЛЯ ПОРИСТОГО УПРУГОГО МАТЕРИАЛА

Попузин В.В.

Работа посвящена решению задачи о трещине в пористом упругом материале в рамках модели Нунциато и Коуина. С помощью преобразования Фурье задача сводится к интегральному уравнению по границе трещины. В работе представлены аналитические преобразования, позволяющие вывести ядро интегрального уравнения в явном виде.

1. Формулировка проблемы. В работе [1] авторами Нунциато и Коуин была представлена теория пористых твёрдых тел, в которой рассматривался упругий каркасный материал с пустотами. Позже этими же авторами была разработана линейная теория [2], которая была детально развита в последующих работах. Было показано, что данная модель достаточно точно описывает поведение твёрдых геологических пород, а также различных исскуственно-производимых материалов, таких, как, например, керамика. С примерами применения этой теории в контактных задачах можно ознакомиться в работах [3,4]. Здесь мы рассмотрим приложение данной теории к задаче о трещине в пористой упругой среде.

Пусть линейная трещина, расположенная в материале рассматриваемого типа, имеет размер *2a* и на неё воздействует распределённая нагрузка *p*. Разместим декартову систему координат таким образом, чтобы её центр находился в центре трещины (рис.1). Обозначим через v_0 постоянную объёмную концетрацию в отсчётной конфигурации. В рамках рассматриваемой модели массовая плотность материала ° представляется в виде произведения двух полей: поля плотности связующего материала ª и поля объёмной концентрации *v* $(0 < v \le 1)$, а именно: °=Z=ª *v*. Такое представление вводит дополнительную степень кинематической свободы и в случае отсутствия поля объёмной концентрации сводит рассматриваемую теорию к классической модели теории упругости.

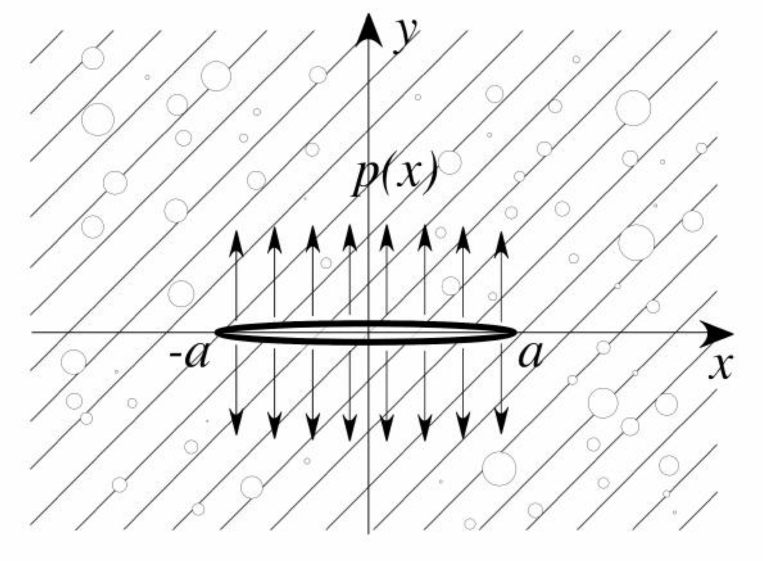


Рис.1. Линейная трещина в пористом упругом материале

Пусть =φ $(\varphi = v - v_0)$= обозначает изменение объёмной концетрации, $\overline{u}$ – вектор перемещений, ª и « – обычные упругие постоянные, а ~l l¶ – константы, описывающие пористость среды. Тогда в двумерном случае, при котором вектор перемещений имеет всего две компоненты $\overline{u} = \{u_x(x,y), u_y(x,y), 0\}$, линейная теория однородного и изотропного упругого материала с пустотами может быть представлена следующей системой дифференциальных уравнений в частных производных [2]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + c^2 \dfrac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \left(1 - c^2\right) \dfrac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + H \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + c^2 \dfrac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \left(1 - c^2\right) \dfrac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + H \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \\ l_1^2 \left(\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) - \dfrac{l_1^2}{l_2^2} \varphi - \left(\dfrac{\partial u_x}{\partial x} + \dfrac{\partial u_y}{\partial y} \right) = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

где компоненты тензора напряжений выписываются в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\sigma_{xx}}{\lambda + 2\mu} = \dfrac{\partial u_x}{\partial x} + \left(1 - 2c^2\right) \dfrac{\partial u_y}{\partial y} + H\varphi, \\ \dfrac{\sigma_{yy}}{\lambda + 2\mu} = \left(1 - 2c^2\right) \dfrac{\partial u_x}{\partial x} + \dfrac{\partial u_y}{\partial y} + H\varphi, \\ \qquad\qquad \dfrac{\tau_{xy}}{\mu} = \dfrac{\partial u_x}{\partial y} + \dfrac{\partial u_y}{\partial x}. \end{cases} \tag{1.2}$$

Здесь для удобства введены новые положительные физические параметры:

$$c^2 = \frac{\text{«}}{\text{ª} + 2\text{«}}, \quad H = \frac{}{\text{ª} + 2\text{«}}, \quad l_1^2 = \frac{\sim}{}, \quad l_2^2 = \frac{\sim}{\P}. \tag{1.3}$$

В случае, когда известны функции φ и $\bar{u}$, из соотношений (1.2) может быть найдено поле напряжений.

Граничные условия вдоль линии *y=0* описываются следующей системой тождеств:

$$\text{²}_{xy}\Big|_{y=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \tag{1.4а}$$

$$u_y\Big|_{y=0} = g(x) = \begin{cases} h(x), & |x| \le a \\ 0, & |x| > a \end{cases}, \qquad \text{±}_{yy}\Big|_{y=0} = p(x), \quad |x| \le a. \tag{1.4б}$$

Для простоты мы предполагаем отсутствие каких-либо касательных напряжений. Отметим, что второе равенство системы (1.4а) вытекает из принципа баланса энергии (с доказательством данного факта можно ознакомиться в работе [5]).

2. Применение преобразования Фурье и сведение задачи к интегральному уравнению. Для вывода интегрального уравнения к системам (1.1) - (1.2) может быть применено преобразование Фурье вдоль оси *x*. Напомним, что для произвольной функции *f(x)* и соответствующего ей образа Фурье *F(s)* справедливы соотношения:

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{isx} dx, \quad f(x) = \frac{1}{2\text{®}} \int_{-\infty}^{\infty} F(s) e^{-isx} ds. \tag{1.5}$$

Применение прямого преобразования Фурье к (1.1) сводит систему дифференциальных уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффицинтами относительно образов функций u_x, u_y и φ, зависящих от переменной *s*

$$
\begin{cases}
c^2U''_x - s^2U_x + \left(1-c^2\right)\left(-is\right)U''_y - isH\Phi = 0, \\
\left(1-c^2\right)\left(-is\right)U'_x + U''_y - c^2s^2U_y + H\Phi' = 0, \\
\quad isU_x - U'_y + l_1^2\Phi'' - \left(\dfrac{l_1^2}{l_2^2} + l_1^2s^2\right)\Phi = 0.
\end{cases}
\tag{1.6}
$$

В работе [3] показано, что общее решение данной системы имеет следующий вид:

$$
\begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ \Phi \end{pmatrix} = D_1 \begin{pmatrix} \dfrac{isH}{1-N} \\ \dfrac{H\sqrt{s^2+1-N}}{1-N} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-y\sqrt{s^2+1-N}} + D_2 \begin{pmatrix} i\,\mathrm{sign}(s) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-|s|y} +
$$

$$
+D_3 \begin{pmatrix} \dfrac{1-N+c^2}{(-is)(N-1+c^2)} + iy\,\mathrm{sign}(s) \\ y \\ \dfrac{2Nc^2}{H\left(1-N-c^2\right)} \end{pmatrix} e^{-|s|y} \quad , \tag{1.7}
$$

Для определения неизвестных величин D_1, D_2, D_3 применим преобразование Фурье также и к граничным условиям (1.4)

$$
\begin{cases}
U'_x - isU_y = 0, \quad \Phi' = 0, \\
\qquad U_y = G(s),
\end{cases}
\qquad y = 0. \tag{1.8}
$$

Тогда подстановка (1.7) в (1.8) приводит к линейной алгебраической системе, состоящей из трёх уравнений

$$
\begin{cases}
\dfrac{|s|H\sqrt{s^2+1-N}}{1-N}D_1 + |s|D_2 + \dfrac{1-N}{N-1+c^2}D_3 = 0, \\
\qquad \sqrt{s^2+1-N}\,D_1 + \dfrac{2Nc^2|s|}{H(1-N-c^2)}D_3 = 0, \\
\qquad\quad D_1\dfrac{H\sqrt{s^2+1-N}}{1-N} + D_2 = G(s),
\end{cases}
\tag{1.9}
$$

из которой легко получить выражения для D_1, D_2, D_3. Далее, их подстановка в (1.7) даёт выражения для образов функций u_x, u_y и φ. Воспользовавшись теоремой о свёртке, можно перейти от образов этих функций непосредственно к самим функциям [3], а их подстановка во второе уравнение системы (1.2) окончательно даёт следующее интегральное уравнение для определения вектора вертикального смещения u_y на границе трещины ($y=0$)

$$
\frac{\pm_{yy}(x)}{ª + 2«} = \frac{c^2}{®}\int_{-a}^{a} L(¶ - x)u_0(¶)d¶, \tag{1.10}
$$

где разностное ядро внутри интеграла выражается в виде

$$L(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{2Nc^2s^4-|s|\sqrt{s^2+1-N}\left[2Nc^2s^2+(1-N)(1-c^2)\right]}{(1-N)^2\sqrt{s^2+1-N}}\right\}e^{isx}ds. \qquad (1.11)$$

3. Вывод явного выражения для ядра интегрального уравнения. Заметим, что интеграл в правой части последнего уравнения в классическом смысле расходится, так как подынтегральное выражение возрастает на бесконечности. Классическим приёмом решения подобных интегралов является их рассмотрение в обобщённом смысле. Для демонстрации этого подхода разобъём интеграл (1.11) на сумму трёх интегралов. Учитывая симметричность рассматриваемой задачи, приходим к следующему представлению для ядра интегрального уравнения (1.10):

$$L(x)=\frac{4Nc^2}{(1-N)^2}\int\limits_0^{\infty}\frac{s^4}{\sqrt{s^2+1-N}}\cos(sx)ds-\frac{4Nc^2}{(1-N)^2}\int\limits_0^{\infty}s^3\cos(sx)ds-\frac{2\left(1-c^2\right)}{1-N}\int\limits_0^{\infty}s\cos(sx)ds$$

Рассматривая два последних слагаемых в обобщённом смысле, а также используя значения табличных интегралов [6], получаем:

$$\lim_{p\to 0}\int\limits_0^{\infty}s^n e^{-ps}\cos(sx)ds=\lim_{p\to 0}J_n,$$

$$\lim_{p\to 0}J_1=\lim_{p\to 0}\left[\frac{(p^2-x^2)}{(x^2+p^2)^2}\right]=-\frac{1}{x^2}, \qquad \lim_{p\to 0}J_3=\lim_{p\to 0}\left[-\frac{6}{(x^2+p^2)^4}(p^4-6p^2x^2+x^4)\right]=-\frac{6}{x^4}.$$

Для вычисления первого интеграла следует воспользоваться другим табличным интегралом [6]

$$\lim_{p\to 0}\int\limits_0^{\infty}s^4\frac{e^{-p\sqrt{s^2+(1-N)}}}{\sqrt{s^2+(1-N)}}\cos(sx)ds=\lim_{p\to 0}I_5=\lim_{p\to 0}\frac{\partial^4}{\partial x^4}K_0\left(\sqrt{(1-N)(p^2+x^2)}\right)=$$

$$=K_0\left(|x|\sqrt{1-N}\right)\left(1+\frac{3}{x^2(1-N)}\right)+K_1\left(|x|\sqrt{1-N}\right)\left(\frac{2}{|x|\sqrt{1-N}}+\frac{6}{|x|^3\sqrt{(1-N)^3}}\right). \qquad (1.12)$$

Таким образом, ядро (1.11) окончательно приобретает явную форму

$$L(x)=\frac{4Nc^2}{(1-N)^2}\left[K_0\left(|x|\sqrt{1-N}\right)\left(1+\frac{3}{x^2(1-N)}\right)+K_1\left(|x|\sqrt{1-N}\right)\left(\frac{2}{|x|\sqrt{1-N}}+\frac{6}{|x|^3\sqrt{(1-N)^3}}\right)\right]+$$

$$+\frac{24Nc^2}{x^4(1-N)^2}+\frac{2(1-c^2)}{x^2(1-N)}. \qquad (1.13)$$

Можно показать, что ядро (1.13) интегрального уравнения (1.10) обладает гиперсингулярной особенностью в нуле. С методами численной реализации интегралов такого рода можно ознакомиться в работе [8].

Интегральные уравнения с гиперсингулярной особенностью в ядре решаются аналитически лишь в узком классе задач, – в частности, уравнения с характеристическим ядром и близкие к нему по виду. Численным методам решения гиперсингулярных интегральных уравнений посвящён ряд современных работ, из которых выделим [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. Cowin S.C., Nunziato J.W. Linear elastic materials with voids. //Journal of elasticity. Vol.13. 1983.
2. Puri P., Cowin S.C. Plane waves in linear elastic materials with voids. //Journal of elasticity. Vol.15. 1985.
3. Scalia A., Sumbatyan M.A. Contact problem for porous elastic half-plane. //Journal of elasticity and the physical science of solids. Vol.60. 2000.
4. Scalia A. Contact problem for porous elastic strip. //International journal of engineering science. Vol.40. 2002.
5. Atkin R.J., Cowin S.C., Fox N. On boundary conditions for polar materials. ZAMP. Vol.28. 1977.
6. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100с.
7. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 832с.
8. Sumbatyan M.A., Scalia A. Equations of mathematical diffraction theory. CRC Press: Boca Raton (Florida), 2005. 292 p.
9. Lifanov I.K., Poltavskii L.N., Vainikko G.M. Hypersingular Integral Equations and Their Applications. CRC Press: Boca Raton (Florida), 2004. 396 p.

Сведения об авторе:

Попузин Виталий Владимирович – аспирант прикладной математики, Университет Катании (Италия), факультет математики и информатики, +7 (928) 130 01 79

E-mail: popuzin@gmail.com

ОПТИМИЗАЦИЯ УСЛОВИЙ ЗАКРЕПЛЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ИЗГИБА БАЛКИ ПО КРИТЕРИЮ ЖЁСТКОСТИ

Саргсян М.Г., Испирян Т.Г., Арутюнян А.С.

В работе рассматривается задача оптимизации условий закрепления (выбора местоположения опор) в задачах изгиба статически неопределимых балок под действием равномерно распределённой нагрузки, по критерию жёсткости (минимизация максимального прогиба). Показано, что в рассматриваемой задаче уравнение упругой линии балки представляет собой линейную комбинацию функций, образующих систему Чебышева, и для решения данной задачи допустимо применение теории наилучших приближений. С использованием теории наилучшего приближения получены решения задач по оптимизации условий закрепления (выбора местоположения опор) в задачах изгиба один и три раза статически неопределимых балок.

Введение. При проектировочном расчёте многих частей (агрегатов) летательного аппарата (ЛА) в качестве расчетной схемы принимается шарнирно опёртая балка [1] (балка пола, элементы механизации и т.д.). При проектировании данных агрегатов в числе требований, предъявляемых к конструкции, не последнее место занимает требование по достижению необходимой жёсткости при минимальном весе конструкции.

Пути повышения жёсткости конструкции разные, и на уровне первичного проектирования одним из продуктивных методов является повышение жёсткости путем выбора оптимального местоположения опор.

Балочные расчётные схемы, к которым приводятся многие детали (агрегаты) ЛА, по степени их статической неопределимости можно разделить на следующие группы: статически определимые, один и три раза статически неопределимые.

Задача по определению оптимального местоположения опор по критерию жёсткости для статически определимой шарнирно опёртой балки решена Гнуни В.Ц.; полученные результаты описаны в [2]. В [2] для получения оптимального местоположения опор при условии обеспечения максимальной жёсткости (балка нагружена равномерно распределённой нагрузкой) ставится следующее условие: опоры должны б ыть расположены симметрично и прогибы концов и срединной точки балки должны быть равны, однако обоснование достаточности данного условия не приводится.

В данной статье приводится математическое обоснование достаточности вышеупомянутого условия и его применением получены решения сформулированной выше задачи для один и три раза статически неопределимых балок.

Постановка задачи. На рис.1 приведена расчётная схема статически определимой шарнирно опёртой балки под воздействием равномерно распределённой нагрузки.

Представим, что балка имеет жёсткость, стремящуюся к бесконечности при конечном значении нагрузки. Очевидно, что вид упругой линии балки будет стремиться к прямой линии, параллельной оси невозмущённой балки, при этом расстояние между данными прямыми будет стремиться к нулю. Следовательно, чем меньше будет отклонение упругой линии балки от прямой линии параллельной оси балки, тем меньше будет значение максимального прогиба балки при прочих равных условиях. Исходя из вышеизложенного, задачу по выбору оптимального местоположения опор для достижения максимально возможной жёсткости для данной балки можно сформулировать следующим образом:

выбрать местоположение опор таким образом, чтобы упругая линия балки как можно меньше отклонялась от прямой линии, параллельной оси балки.

Упругая линия балки, нагружённой равномерно распределённой нагрузкой, описывается полиномом четвёртой степени, от координаты z (рис.1),

$$EJw = \frac{1}{24}qz^4 + C_1 z^3 + C_2 z^2 + C_3 z + C_4, \tag{1}$$

где EJ – изгибная жёсткость балки, w – прогиб балки, C_i – постоянные интегрирования.

Поскольку функции, входящие в (1), образуют систему Чебышева [3], к исследуемой задаче можно применить теорию наилучшего приближения. С точки зрения теории наилучшего приближения рассматриваемую задачу можно сформулировать следующим образом. Значение a/b (рис.2) выбрать таким образом, чтобы упругая линия балки описанным уравнением (1) наилучшим образом была приближена к прямой линии *n-n*, параллельной оси невозмущённой балки (рис.2).

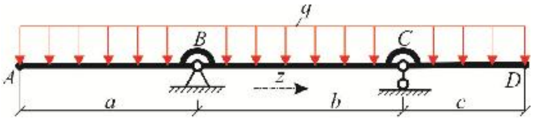


Рис.1. Расчетная схема статически определимой шарнирно опёртой балки

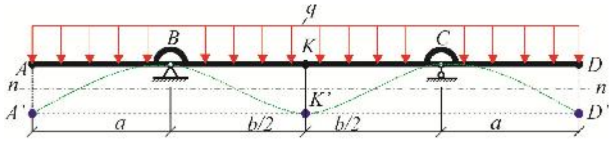


Рис.2. Упругая линия балки при условии, обеспечивающем её максимальную жёсткость

Согласно теории наилучшего приближения, на отрезке длиной *AD* значения максимальных отклонений упругой линии балки от прямой *n-n* (отклонения в точках A’, B, K’, C, D’) должны быть равны друг другу по модулю и поочерёдно менять знак. Следовательно, прогибы в точках *A*, *K* и *D* должны быть равны друг другу (рис.2) и удвоенному значению расстояния между линией *n-n* и осью балки. Равенство прогибов в точках *A* и *D* достигается путем симметричного расположения опор. Следовательно, условие, при котором максимальное значение прогиба будет минимальным, можно записать в следующем виде:

$$w_A = w_K = w_D \text{, или } w_A = w_K \text{ и } a = c\,. \tag{2}$$

(2) полностью совпадает с условием, приведённым в [2]. Согласно [2], если соотношение размеров балки *a/b*=:ª=*0.5*, то значение максимального прогиба будет минимальным.

<u>Один раз статически неопределимая балка.</u> На рис.3 приведена расчётная схема равномерно нагружённой шарнирно опёртой один раз статически неопределимой балки.

Условие (2) для данной задачи (условие симметрии) будет иметь следующий вид:

$$a = d \text{ и } b = c\,. \tag{3}$$

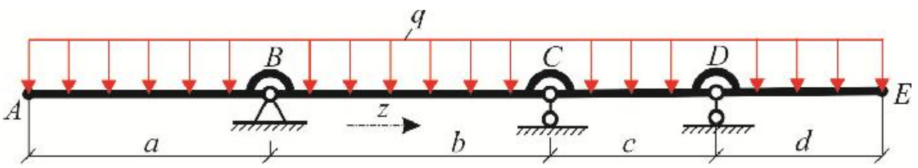


Рис.3. Расчётная схема шарнирно опёртой один раз статически неопределимой равномерно нагружённой балки

Также, в дополнение к (3), согласно рис.4, должно соблюдаться следующее условие:

$$\begin{cases} w(z_A) = w(z_K), \\ w'(z_K) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

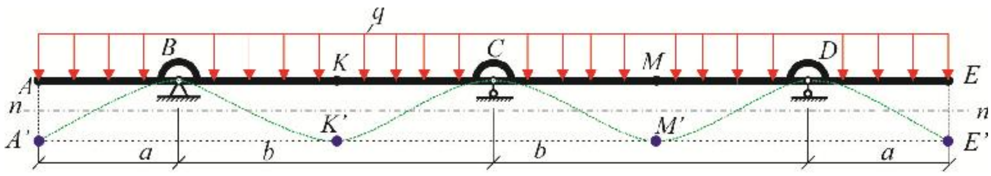


Рис.4. Упругая линия шарнирно опёртой один раз статически неопределимой равномерно нагружённой балки при условии, обеспечивающем максимальную жёсткость

Решая систему уравнений (4) с учётом условия (3), для рассматриваемой задачи получим следующее соотношение размеров балки, при котором значение максимального прогиба будет минимальным:

$$\text{а} = \frac{a}{b} = 0.3981.$$

<u>Три раза статически неопределимая балка.</u> На рис. 5 приведена расчётная схема равномерно нагружённой шарнирно опёртой три раза статически неопределимой балки.

Условие (2) для данной задачи (условие симметрии) будет иметь следующий вид:

$$a = c\,. \tag{5}$$

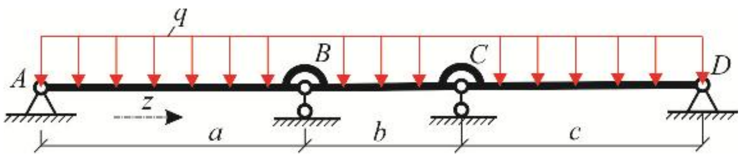


Рис.5. Расчётная схема шарнирно опёртой три раза статически неопределимой равномерно нагружённой балки

Также, в дополнение к (5), согласно рис.6, должно соблюдаться следующее условие:

$$\begin{cases} w(z_K) = w(z_M), \\ w'(z_K) = 0, \\ w'(z_M) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

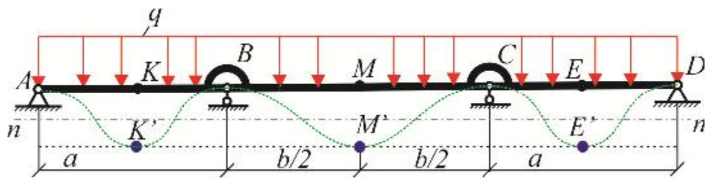


Рис.6. Упругая линия шарнирно опёртой три раза статически неопределимой равномерно нагружённой балки при условии, обеспечивающем её максимальную жёсткость

Решая систему уравнений (6) с учётом условия (5), для рассматриваемой задачи получим следующее соотношение размеров балки, при котором значение максимального прогиба будет минимальным:

$$\text{а} = \frac{a}{b} = 0.824.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Астахов М.Ф., Караваев А.В., Макаров С.Я. и Суздальцев Я.Я. Справочная книга по расчёту самолета на прочность.
2. Гнуни В.Ц. Оптимальный выбор расположения опор в задачах изгиба, колебаний и устойчивости упругой балки. //В сб.: «Вопросы оптимального управления устойчивости и прочности механических систем». Ереван: Изд. ЕГУ, 1997. С.115-120.
3. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. М.: Госиздат. Физматлит., 1962. 464с.

<u>Сведения об авторах:</u>

Саргсян Микаел Гарегинович – доцент кафедры механики ГИУА, (374 93) 397 194,
E-mail: miksargsyan@mail.ru

Испирян Татев Грачовна – магистр, (374 93) 574 412,
E-mail: tatev-ispiryan@mail.ru

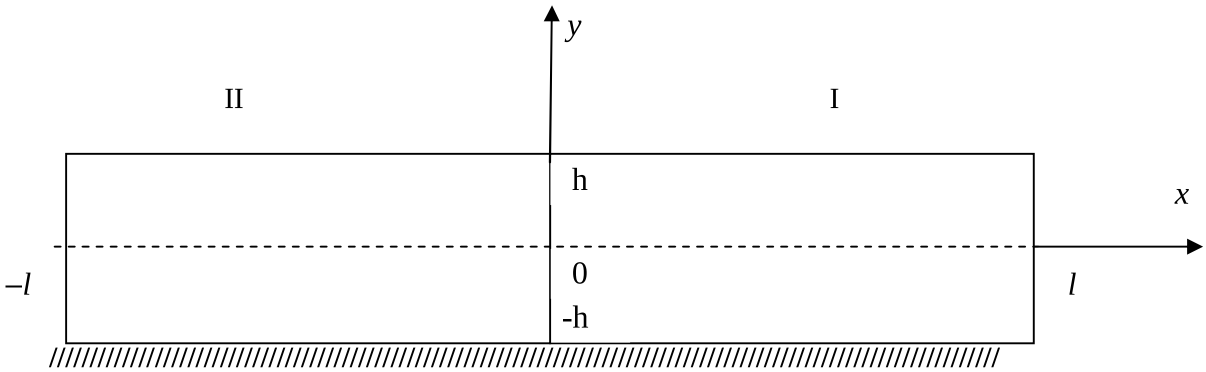
Арутюнян Арам Симонович – инженер-исследователь, (374 77) 363 368,
E-mail: aramasp@gmail.com

О НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ ДВУХ ИЗОТРОПНЫХ ПОЛОС, СОЕДИНЁННЫХ ВСТЫК

Саргсян М.З.

Рассмотрен вопрос определения напряжённо-деформированного состояния системы из двух изотропных полос, соединённых встык. На верхней продольной грани полосы заданы соответствующие компоненты тензора напряжений, а нижняя грань жёстко закреплена. Исследованы скорости затухания величин в пограничных слоях первой и второй полос. Получены характеристические уравнения для определения этих скоростей затухания. Проведено сопряжение решений внутренней задачи и пограничного слоя возле стыка.

1. Постановка задачи. Рассмотрим две изотропные полосы $D=\{(x,y):$ $-l\le x\le l,\quad |y|\le h,\quad h<<l\}$, соединённые встык.



На нижней продольной грани полосы имеем условия жёсткого закрепления, а на верхней продольной грани заданы соответствующие компоненты тензора напряжений:

$$u_I\left(y=-h\right)=0,\quad v_I\left(y=-h\right)=0,\quad \sigma_{yyI}\left(y=h\right)=Y_I^+,\ \sigma_{xyI}\left(y=h\right)=X_I^+,(I,II) \tag{1.1}$$

Требуется найти решение уравнений статики плоской задачи теории упругости при граничных условиях (1.1).

2. Внутренняя задача. В уравнениях статики теории упругости перейдём к безразмерным координатам и перемещениям $\xi=x/l,\ \zeta=y/h,\ U_I=u_I/l,\ V_I=v_I/l,(I,II)$, получим новую сингулярно-возмущённую малым параметром ε систему для каждого слоя:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\sigma_{xxI}}{\partial\xi}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{xyI}}{\partial\zeta}+lF_{xI}\left(x,y\right)=0,\quad \frac{\partial\sigma_{xyI}}{\partial\xi}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{yyI}}{\partial\zeta}+lF_{yI}\left(x,y\right)=0\\ \frac{\partial U_I}{\partial\xi}=\frac{1}{E_I}\left(\sigma_{xxI}-\nu_I\sigma_{yyI}\right),\ \ \varepsilon^{-1}\frac{\partial V_I}{\partial\zeta}=\frac{1}{E_I}\left(\sigma_{yyI}-\nu_I\sigma_{xxI}\right),\ \ \varepsilon^{-1}\frac{\partial U_I}{\partial\zeta}+\frac{\partial V_I}{\partial\xi}=\frac{1}{G_I}\sigma_{xyI},\ (I,II)\end{gathered} \tag{2.1}$$

решения которых складываются из решений внутренней задачи (I^{int}) и пограничного слоя (I_b), $I=I^{\text{int}}+I_b$. Решение внутренней задачи будем искать в виде:

$$\sigma_{ijI}=\varepsilon^{-1+s}\sigma_{ijI}^{(s)},\ \left(U_I,V_I\right)=\varepsilon^s\left(U_I^{(s)},V_I^{(s)}\right),\ \ i,j=x,y,\ s=\overline{0,N},(I,II) \tag{2.2}$$

Подставив (2.2) в систему (2.1) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε, для определения $\sigma_{ijI}^{(s)},U_I^{(s)},V_I^{(s)}$, (I,II) получим систему, допускающую интегрирование по ζ. Из этой системы можно определить все искомые величины по формулам:

$$\sigma_{xyI}^{(s)}=\sigma_{xxI}^{*(s)}\left(\xi,\zeta\right)+\sigma_{xyI0}^{(s)}\left(\xi\right),\ \sigma_{yyI}^{(s)}=\sigma_{xyI}^{*(s)}\left(\xi,\zeta\right)+\sigma_{yyI0}^{(s)}\left(\xi\right),$$

$$\sigma_{xxI}^{(s)} = E_I \frac{\partial U_I^{(s-1)}}{\partial \xi} + \nu_I \sigma_{xyI}^{*(s)}(\xi,\zeta) + \nu_I \sigma_{yyI0}^{(s)}(\xi),$$

$$V_I^{(s)} = -\int_0^{\zeta} \left(\frac{\nu_I^2 - 1}{E_I} \sigma_{xyI}^{*(s)}(\xi,\zeta) + \nu_I \frac{\partial U_I^{(s-1)}}{\partial \xi} \right) d\zeta + \frac{1-\nu_I^2}{E_I} \zeta \sigma_{yyI0}^{(s)}(\xi) + v_I^{(s)}(\xi),$$

$$U_I^{(s)} = \int_0^{\zeta} \left(\frac{1}{G_I} \sigma_{xxI}^{*(s)}(\xi,\zeta) - \frac{\partial V_I^{(s-1)}}{\partial \xi} \right) d\zeta + \frac{1}{G_I} \zeta \sigma_{xyI0}^{(s)}(\xi) + u_I^{(s)}(\xi), \tag{2.3}$$

$$\sigma_{xxI}^{*(s)}(\zeta) = -\int_0^{\zeta} \left(\frac{\partial \sigma_{xxI}^{(s-1)}}{\partial \xi} + F_{xI}^{(s)} \right) d\zeta, \quad \sigma_{xyI}^{*(s)}(\zeta) = -\int_0^{\zeta} \left(\frac{\partial \sigma_{xyI}^{(s-1)}}{\partial \xi} + F_{yI}^{(s)} \right) d\zeta, \ (I, II)$$

Решение (2.3) содержит неизвестные функции $u_I^{(s)}, v_I^{(s)}, \sigma_{xyI0}^{(s)}\ \sigma_{yyI0}^{(s)}, (I, II)$, которые должны быть определены из условий (1.1). Удовлетворив условиям (1.1), получим систему:

$$\sigma_{xxI}^{*(s)}(\xi,1) + \sigma_{xyI0}^{(s)}(\xi) = X_I^{+(s)}, \quad \sigma_{xyI}^{*(s)}(\xi,1) + \sigma_{yyI0}^{(s)}(\xi) = Y_I^{+(s)},$$

$$-\int_0^{-1} \left(\frac{\nu_I^2 - 1}{E_I} \sigma_{xyI}^{*(s)}(\xi,-1) + \nu_I \frac{\partial U_I^{(s-1)}}{\partial \xi} \right) d\zeta + \frac{\nu_I^2 - 1}{E_I} \sigma_{yyI0}^{(s)}(\xi) + v_I^{(s)}(\xi) = 0 \tag{2.4}$$

$$\int_0^{-1} \left(\frac{1}{G_I} \sigma_{xxI}^{*(s)}(\xi,-1) - \frac{\partial V_I^{(s-1)}}{\partial \xi} \right) d\zeta - \frac{1}{G_I} \sigma_{xyI0}^{(s)}(\xi) + u_I^{(s)}(\xi) = 0, \ (I, II)$$

Для неизвестных функций $u_I^{(s)}(\xi), v_I^{(s)}(\xi), \sigma_{xyI0}^{(s)}(\xi), \sigma_{yyI0}^{(s)}(\xi), (I, II)$ получим

$$\sigma_{xyI0}^{(s)}(\xi) = X_I^{+(s)} - \sigma_{xxI}^{*(s)}(\xi,1), \quad \sigma_{yyI0}^{(s)}(\xi) = Y_I^{+(s)} - \sigma_{xyI}^{*(s)}(\xi,1),$$

$$v_I^{(s)}(\xi) = \int_{-1}^{0} \left(\frac{1-\nu_I^2}{E_I} \sigma_{xyI}^{*(s)}(\xi,-1) - \nu_I \frac{\partial U_I^{(s-1)}}{\partial \xi} \right) d\zeta + \frac{1-\nu_I^2}{E_I} Y_I^{+(s)} - \frac{1-\nu_I^2}{E_I} \sigma_{xyI}^{*(s)}(\xi,1) \tag{2.5}$$

$$u_I^{(s)}(\xi) = \int_{-1}^{0} \left(\frac{1}{G_I} \sigma_{xxI}^{*(s)}(\xi,-1) - \frac{\partial V_I^{(s-1)}}{\partial \xi} \right) d\zeta + \frac{1}{G_I} X_I^{+(s)} - \frac{1}{G_I} \sigma_{xxI}^{*(s)}(\xi,1), \quad (I, II)$$

3. Пограничный слой. Поскольку уравнения (2.1) и граничные условия (1.1) удовлетворены решением внутренней задачи, погранслой будет определяться из однородных уравнений, соответствующих (2.1) с однородными граничными условиями при $\zeta = \pm 1$. Введя в эти однородные уравнения замену переменной $\gamma = \xi / \varepsilon$ и приписав всем величинам индекс “b”(boundary), получим систему:

$$\varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{xxbI}}{\partial \gamma} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{xybI}}{\partial \zeta} = 0, \quad \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{xybI}}{\partial \gamma} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{yybI}}{\partial \zeta} = 0, \quad \varepsilon^{-1} \frac{\partial U_{bI}}{\partial \gamma} = \frac{1}{E_I} \left(\sigma_{xxbI} - \nu_I \sigma_{yybI} \right),$$

$$\varepsilon^{-1} \frac{\partial V_{bI}}{\partial \zeta} = \frac{1}{E_I} \left(\sigma_{yybI} - \nu_I \sigma_{xxbI} \right), \quad \varepsilon^{-1} \frac{\partial U_{bI}}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial V_{bI}}{\partial \gamma} = \frac{1}{G_I} \sigma_{xybI}, \quad (I, II) \tag{3.1}$$

Необходимо найти решение системы (3.1), удовлетворяющее однородным условиям

$$\sigma_{yyI}(y = h) = 0, \ \sigma_{xyI}(y = h) = 0, \quad u_I(y = -h) = 0, \quad v_I(y = -h) = 0\ , (I, II) \tag{3.2}$$

Решение системы (3.1) будем искать в виде

$$\sigma_{yybI} = \varepsilon^{-1+s} \sigma_{yybI}^{(s)}(\zeta) \exp(-\lambda_I \gamma), (U_{bI}, V_{bI}) = \varepsilon^s \left(U_{bI}^{(s)}, V_{bI}^{(s)} \right) \exp(-\lambda_I \gamma), \ s = \overline{0, N}, \ (x; y), (I, II; -\gamma, \gamma) \tag{3.3}$$

где $\lambda_I, (I, II)$ – неизвестное пока число. Подставив (3.3) в (3.1), получим

$$-\lambda\sigma_{xxI}^{(s)}+\frac{d\sigma_{xyI}^{(s)}}{d\zeta}=0,\quad -\lambda\sigma_{xyI}^{(s)}+\frac{d\sigma_{yyI}^{(s)}}{d\zeta}=0,\quad -\lambda U_I^{(s)}=\frac{1}{E_I}\left(\sigma_{xxI}^{(s)}-\nu_I\sigma_{yyI}^{(s)}\right),$$

$$\frac{dV_I^{(s)}}{d\zeta}=\frac{1}{E_I}\left(\sigma_{yyI}^{(s)}-\nu_I\sigma_{xxI}^{(s)}\right),\quad \frac{dU_I^{(s)}}{d\zeta}-\lambda V_I^{(s)}=\frac{1}{G_I}\sigma_{xyI}^{(s)},\qquad (I,II) \tag{3.4}$$

Из системы (3.4) все неизвестные величины можно выразить через $\sigma_{yyIb}^{(s)}$, (I,II) следующим образом:

$$\sigma_{xxbI}^{(s)}=\frac{1}{\lambda_I{}^2}\frac{d^2\sigma_{yybI}^{(s)}}{d\zeta^2},\qquad \sigma_{xybI}^{(s)}=\frac{1}{\lambda_I}\frac{d\sigma_{yybI}^{(s)}}{d\zeta},\qquad U_{bI}^{(s)}=-\frac{1}{\lambda_I E_I}\left(\frac{1}{\lambda_I{}^2}\frac{d^2\sigma_{yybI}^{(s)}}{d\zeta^2}-\nu_I\sigma_{yybI}^{(s)}\right),$$

$$V_{bI}^{(s)}=-\frac{1}{\lambda_I{}^4E_I}\frac{d^3\sigma_{yybI}^{(s)}}{d\zeta^3}+\frac{1}{\lambda_I{}^2}\left(\frac{\nu_I}{E_I}-\frac{1}{G_I}\right)\frac{d\sigma_{yybI}^{(s)}}{d\zeta},\qquad (I,II) \tag{3.5}$$

где $\sigma_{yyIb}^{(s)},(I,II)$ определяется из уравнения

$$\frac{d^4\sigma_{yybI}^{(s)}}{d\zeta^4}+2\lambda_I{}^2\frac{d^2\sigma_{yybI}^{(s)}}{d\zeta^2}+\lambda_I{}^4\sigma_{yybI}^{(s)}=0,(I,II)\,. \tag{3.6}$$

Решив уравнение (3.6), получим уравнение четвёртой степени относительно $k_I,(I,II)$

$$k_I^4+2\lambda_I^2k_I^2+\lambda_I^4=0\ \Rightarrow\ k_I=\pm i\lambda_I,\qquad (I,II) \tag{3.7}$$

Следовательно, решение (3.6) будет иметь вид:

$$\sigma_{yybI}^{(s)}=A_{1I}^{(s)}\sin\lambda_I\zeta+A_{2I}^{(s)}\cos\lambda_I\zeta+A_{3I}^{(s)}\lambda_I\zeta\sin\lambda_I\zeta+A_{4I}^{(s)}\lambda_I\zeta\cos\lambda_I\zeta,\quad (I,II) \tag{3.8}$$

Из соотношений (3.5) для остальных величин получим:

$$\sigma_{xybI}^{(s)}=A_{1I}^{(s)}\cos\lambda_I\zeta-A_{2I}^{(s)}\sin\lambda_I\zeta+A_{3I}^{(s)}\left(\sin\lambda_I\zeta+\lambda_I\zeta\cos\lambda_I\zeta\right)+A_{4I}^{(s)}\left(\cos\lambda_I\zeta-\lambda_I\zeta\sin\lambda_I\zeta\right)$$

$$\sigma_{xxbI}^{(s)}=-A_{1I}^{(s)}\sin\lambda_I\zeta-A_{2I}^{(s)}\cos\lambda_I\zeta+A_{3I}^{(s)}\left(2\cos\lambda_I\zeta-\lambda_I\zeta\sin\lambda_I\zeta\right)-A_{4I}^{(s)}\left(2\sin\lambda_I\zeta+\lambda_I\zeta\cos\lambda_I\zeta\right)$$

$$\sigma_{xybI}^{(s)}=A_{1I}^{(s)}\cos\lambda_I\zeta-A_{2I}^{(s)}\sin\lambda_I\zeta+A_{3I}^{(s)}\left(\sin\lambda_I\zeta+\lambda_I\zeta\cos\lambda_I\zeta\right)+A_{4I}^{(s)}\left(\cos\lambda_I\zeta-\lambda_I\zeta\sin\lambda_I\zeta\right)$$

$$U_{bI}^{(s)}=\frac{1+\nu_I}{\lambda_IE_I}\left(A_{1I}^{(s)}\sin\lambda_I\zeta+A_{2I}^{(s)}\cos\lambda_I\zeta-A_{3I}^{(s)}\left(\frac{2}{(\nu_I+1)}\cos\lambda_I\zeta-\lambda_I\zeta\sin\lambda_I\zeta\right)+\right.$$

$$\left.+A_{4I}^{(s)}\left(\frac{2}{(\nu_I+1)}\sin\lambda_I\zeta+\lambda_I\zeta\cos\lambda_I\zeta\right)\right), \tag{3.9}$$

$$V_{bI}^{(s)}=-\frac{1+\nu_I}{\lambda_IE_I}A_{1I}^{(s)}\cos\lambda_I\zeta+\frac{1+\nu_I}{\lambda_IE_I}A_{2I}^{(s)}\sin\lambda_I\zeta+A_{3I}^{(s)}\left(\frac{1-\nu_I}{\lambda_IE_I}\sin\lambda_I\zeta-\frac{1+\nu_I}{\lambda_IE_I}\lambda_I\zeta\cos\lambda_I\zeta\right)+$$

$$+A_{4I}^{(s)}\left(\frac{1-\nu_I}{\lambda_IE_I}\cos\lambda_I\zeta-\frac{1+\nu_I}{\lambda_IE_I}\lambda_I\zeta\sin\lambda_I\zeta\right),\qquad (I,II)$$

Удовлетворив граничным условиям (3.2), для определения коэффициентов $A_{lI}^{(s)}$ и неизвестного показателя $\lambda_I,(I,II)$ получим систему однородных алгебраических уравнений

$$A_{1I}^{(s)}\sin\lambda_I+A_{2I}^{(s)}\cos\lambda_I+A_{3I}^{(s)}\lambda_I\sin\lambda_I+A_{4I}^{(s)}\lambda_I\cos\lambda_I=0$$

$$A_{1I}^{(s)}\cos\lambda_I-A_{2I}^{(s)}\sin\lambda_I+A_{3I}^{(s)}\left(\sin\lambda_I+\lambda_I\cos\lambda_I\right)+A_{4I}^{(s)}\left(\cos\lambda_I-\lambda_I\sin\lambda_I\right)=0$$

$$A_{1I}^{(s)}\sin\lambda_I-A_{2I}^{(s)}\cos\lambda_I+A_{3I}^{(s)}\left(\frac{2}{(\nu_I+1)}\cos\lambda_I-\lambda_I\sin\lambda_I\right)+A_{4I}^{(s)}\left(\frac{2}{(\nu_I+1)}\sin\lambda_I+\lambda_I\cos\lambda_I\right)=0 \tag{3.10}$$

$$A_{1I}^{(s)}\cos\lambda_I + A_{2I}^{(s)}\sin\lambda_I + A_{3I}^{(s)}\left(\frac{1-\nu_I}{1+\nu_I}\sin\lambda_I - \lambda_I\cos\lambda_I\right) - A_{4I}^{(s)}\left(\frac{1-\nu_I}{1+\nu_I}\cos\lambda_I - \lambda_I\sin\lambda_I\right) = 0,\quad (I, II)$$

для существования ненулевого решения которой необходимо, чтобы её определитель равнялся нулю, что даёт

$$\begin{gathered}5 - 2\nu_I + \nu_I^2 - 4\lambda_I^2(1+\nu_I)^2 - 4\lambda_I^2(1+\nu_I)^2\cos 2\lambda_I - (\nu_I - 3)(1+\nu_I)\cos 4\lambda_I + \\ +\lambda_I(1+\nu_I)(2(\nu_I - 1)\sin 2\lambda_I - (1+\nu_I)\sin 4\lambda_I) = 0,\quad (I, II)\end{gathered} \tag{3.11}$$

В силу свойства пограничного слоя должны определить корни λ_{In} уравнения (3.11) с $\operatorname{Re}\lambda_{In} > 0$. Отметим, что каждому корню λ_{In} с $\operatorname{Re}\lambda_{In} > 0$ соответствует сопряжённый корень $\bar{\lambda}_{In}, (I, II)$. При удалении от зоны стыка $x = 0$ в глубь слоёв величины пограничного слоя будут убывать как $\exp(-\operatorname{Re}\lambda_{In}\gamma)$, $(I, II; -\gamma, \gamma)$. Нужно отметить, что в характеристическом уравнении (3.11) участвует коэффициент Пуассона, откуда следует, что скорость затухания величин пограничных слоёв зависит от материала полос.

Например, для алюминия $\nu = 0.34$ и стали $\nu = 0.27$, из характеристического уравнения (3.11) для λ_I и λ_{II} получим несколько следующих значений:

	λ_I ($\nu = 0.34$)	λ_{II} ($\nu = 0.27$)
1	0.4444	0.461
2	1.0973	1.088
3	1.8724	1.8938
4	$2.4659 \pm 1.0433i$	$2.4751 \pm 1.0337i$
5	4.5304	4.527
6	4.8401	4.8512
7	$5.5397 \pm 1.5108i$	$5.5475 \pm 1.5063i$

Для любого напряжения и перемещения $Q_{bI}^{(s)} = A_{nI}^{(s)}\tilde{Q}_{bIn}(\gamma, \zeta)\ (I, II)$, где $\tilde{Q}_{bIn} = Q_{bIn}(\zeta)\exp(-\lambda_{In}\gamma)$, $(I, II; -\gamma, \gamma)$, $Q_{bn}(\zeta)$ – коэффициент при произвольной постоянной $A_{nI}^{(s)}$ – для данной величины. В частности, для каждой величины в пограничном слое получим

$$\begin{aligned}\sigma_{yybIn}^{(s)} = A_{nI}^{(s)}\big(&-\lambda_I(1+\nu_I)(1+\zeta)\cos\lambda_I(\zeta-3) + \lambda_I(\nu_I(\zeta-7) - 3(1+\zeta))\cos\lambda_I(1+\zeta) - \\ &- 2\nu_I\sin\lambda_I(\zeta-3) + 2(\nu_I - 2 + 2\lambda_I^2(1+\nu_I)(\zeta-1))\sin\lambda_I(1+\lambda_I)\big) \\ \sigma_{xxbIn}^{(s)} = A_{In}^{(s)}\big(&-\lambda_I(1+\nu_I)(1+\zeta)\cos\lambda_I(\zeta-3) + \lambda_I(\nu_I(-7+\zeta) - 3(1+\zeta))\cos\lambda_I(1+\zeta) - \\ &-2\nu_I\sin\lambda_I(\zeta-3) + 2(\nu_I - 2 + 2\lambda_I^2(1+\nu_I)(\zeta-1))\sin\lambda_I(1+\zeta)\big) \\ \sigma_{xybIn}^{(s)} = A_{In}^{(s)}\big(&(\nu_I - 1)\cos\lambda_I(-3+\zeta) - (\nu_I - 1 + 4\lambda_I^2(1+\nu_I)(\zeta-1))\cos\lambda_I(1+\zeta) - \\ &-\lambda_I(1+\nu_I)(1+\zeta)\sin\lambda_I(\zeta-3) + \lambda_I(1 - 3\nu_I + (\nu_I - 3)\zeta)\sin\lambda_I(1+\zeta)\big) \\ U_{bIn}^{(s)} = A_{nI}^{(s)}\frac{1}{\lambda_I E_I}\big(&\lambda_I(1+\nu_I)^2(1+\zeta)\cos\lambda_I(\zeta-3) - \lambda_I(\nu_I-3)(1+\nu_I)(1+\zeta)\cos\lambda_I(1+\zeta) - \\ &-4(\nu_I - 1 + \lambda_I^2(1+\nu_I)^2(\zeta-1))\sin\lambda_I(1+\zeta)\big)\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$V_{bIn}^{(s)}=A_{nI}^{(s)}\frac{1}{\lambda_I E_I}\Big(-(\nu_I-3)(1+\nu_I)\cos\lambda_I(\zeta-3)+(5+(\nu_I-2)\nu_I-4\lambda_I{}^2(1+\nu_I)^2)\cos\lambda_I(1+\zeta)+$$
$$+\lambda_I(1+\nu_I)(4\lambda_I(1+\nu_I)\zeta\cos\lambda_I\left(1-\zeta\right)+(1+\nu_I)\sin\lambda_I(\zeta-3)-$$
$$-(1+\nu_I)\zeta\sin\lambda_I(3+\zeta)+(\nu_I-3)(3\sin\lambda_I(1+\zeta)-\zeta\sin\lambda_I\left(1-\zeta\right))\Big),\ (I,II)$$

В (3.12), приняв $A_{nI}^{(s)}=\frac{1}{2}\left(A_{1nI}^{(s)}-iA_{2nI}^{(s)}\right),(I,II)$, для каждой величины будем иметь следующий общий вид представления:

$$Q_{bI}^{(s)}\left(\gamma,\eta,\zeta\right)=A_{1nI}^{(s)}\operatorname{Re}\tilde{Q}_{bnI}+A_{2nI}^{(s)}\operatorname{Im}\tilde{Q}_{bnI},(I,II) \tag{3.13}$$

4. Сопряжение внутренней задачи и погранслоя. Теперь рассмотрим условия сопряжения на боковой плоскости $x=0$.

$$\sigma_{xxI}\left(0,\zeta\right)=\sigma_{xxII}\left(0,\zeta\right),\ \sigma_{xyI}\left(0,\zeta\right)=\sigma_{xyII}\left(0,\zeta\right),\ \ U_I\left(0,\zeta\right)=U_{II}\left(0,\zeta\right),\ V_I\left(0,\zeta\right)=V_{II}\left(0,\zeta\right) \tag{4.1}$$

Поскольку общее решение поставленной задачи складывается из решения внутренней задачи и решения пограничного слоя, для величин $\sigma_{xxI},\sigma_{xyI},U_I,V_I\ \ (I,II)$ будем иметь:

$$\sigma_{xxI}=\varepsilon^{-1+s}\sigma_{xxI}^{(s)}(\xi,\zeta)+\varepsilon^{-1+s}\sigma_{xxbI}^{(s)}(\gamma,\zeta),\quad \sigma_{xyI}=\varepsilon^{-1+s}\sigma_{xyI}^{(s)}(\xi,\zeta)+\varepsilon^{-1+s}\sigma_{xybI}^{(s)}(\gamma,\zeta),$$
$$U_I=\varepsilon^{s}U_I^{(s)}(\xi,\zeta)+\varepsilon^{s}U_{bI}^{(s)}(\gamma,\zeta),\quad V_I=\varepsilon^{s}V_I^{(s)}(\xi,\zeta)+\varepsilon^{s}V_{bI}^{(s)}(\gamma,\zeta),\quad (I,II) \tag{4.2}$$

Для удовлетворения условиям (4.1) воспользуемся методом коллокации. Используя (2.3),(2.5),(3.12),(4.2), удовлетворив условиям (4.1) в точках $\zeta=-1,-0.5,0,0.5,1$, получим алгебраическую систему относительно $A_{1nI}^{(0)},A_{2nI}^{(0)},n=\overline{1,5},(I,II)$, откуда эти постоянные можно с лёгкостью определить.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек М.: Наука, Физматлит, 1997. 414с.
2. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: Физматгиз, 1960. 490с.
3. Агаловян Л.А. О характере взаимодействия погранслоя с внутренним напряжённо-деформированным состоянием полосы // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1977. Т.30. №5. С.48-62.

Сведения об авторе:

Саргсян Месроп Зогракович – научный сотрудник Института механики НАН Армении
Тел.: (374 224) 22335, (374 55) 04 99 50
E-mail: messarg@gmail.com

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ ПРИКЛАДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК С НЕЗАВИСИМЫМИ ПОЛЯМИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И ВРАЩЕНИЙ

Саркисян А.А.

В работе при помощи асимптотического метода в тонкой области оболочки строятся внутренняя задача и пограничные слои для динамики микрополярных упругих оболочек, изучается вопрос об их сращивании. На уровне внутренней задачи обосновывается прикладная динамическая теория микрополярных упругих оболочек со свободным вращением, построенная на основе метода гипотез.

1. Постановка задачи. Рассмотрим оболочку постоянной толщины $2h$ как трёхмерное упругое тело. Тензорные уравнения динамической задачи несимметричной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений (НТУ с НППВ) имеют вид [1]:

уравнения движения

$$\nabla_m \sigma^{mn} = \rho\, \partial^2 V^n \big/ \partial t^2 \,, \quad \nabla_m \mu^{mn} + e^{nmk}\sigma_{mk} = J\, \partial^2 \omega^n \big/ \partial t^2 \tag{1.1}$$

соотношения упругости

$$\sigma_{mn} = (\mu+\alpha)\gamma_{mn} + (\mu-\alpha)\gamma_{nm} + \lambda\gamma_{kk}\delta_{nm}\,, \quad \mu_{mn} = (\gamma+\varepsilon)\chi_{mn} + (\gamma-\varepsilon)\chi_{nm} + \beta\chi_{kk}\delta_{nm} \tag{1.2}$$

геометрические соотношения

$$\gamma_{mn} = \nabla_m V_n - e_{kmn}\omega^k\,, \qquad \chi_{mn} = \nabla_m \omega_n \tag{1.3}$$

Здесь σ^{nm}, μ^{nm} – контравариантные компоненты силового и моментного тензоров напряжений; γ_{mn}, κ_{mn} – ковариантные компоненты тензора деформации и тензора изгибов- кручений; V^n – контравариантные компоненты вектора перемещения, ω^n – контравариантные компоненты вектора независимого поворота; $\lambda,\ \mu, \alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ – физические константы микрополярного материала оболочки, ρ – плотность материала, J – мера инерции при вращении. Индексы m, n, k здесь и в дальнейшем принимают значения 1,2,3.

К уравнениям (1.1)-(1.3) следует присоединить граничные условия на лицевых поверхностях оболочки, граничные условия на поверхности края оболочки и начальные условия при $t = 0$.

2. Асимптотический анализ начально-краевой задачи (1.1)-(1.3). Предположим, что толщина оболочки $2h$ весьма мала по сравнению с характерным радиусом кривизны срединной поверхности, т.е. $2h \ll R$. В основу примем основную концепцию, что в динамическом случае общее напряжённо-деформированное состояние тонкой оболочки состоит из внутреннего напряжённо-деформированного состояния (охватывающего всю область трёхмерной оболочки), пограничных слоев (локализирующихся вблизи боковой поверхности $\sum$ и затухающие вдали от боковой поверхности) и пограничного слоя по времени (осциллирующийся по времени). При таком подходе, на результатах исходного приближения внутренней задачи будет возможно построение общей двумерной модели микрополярных тонких оболочек. Удобно вводить несимметричный тензор силовых напряжений - τ_{mn} и аналогичный тензор для моментных напряжений - ν_{mn} [2]. Рассмотрим задачу сведения трёхмерной динамической задачи несимметричной теории упругости в случае тонкой оболочки к двумерной на основе асимптотического метода с пограничным слоем, включая вопрос об удовлетворении граничным и начальным условиям. Для построения внутренней задачи перейдём к безразмерным координатам и безразмерному времени

$$\alpha_i = R\lambda^{-p}\xi_i\,, \quad \alpha_3 = R\lambda^{-l}\zeta\,, \quad t = \lambda^{\omega}\tau\, h/c_0 \tag{2.1}$$

Величина ω характеризует изменяемость напряжённо-деформированного состояния (НДС) во времени, величина p/l характеризует изменяемость НДС по координатам; p, l – целые числа, $l > p \geq 0$; λ – большой постоянный безразмерный геометрический параметр, определяемый формулой $h = R\lambda^{-l}$. Введём безразмерные величины и безразмерные физические параметры [2]:

$$V_i/R = \overline{V}_i\,, \quad \tau_{ij}/\rho c_0^2 = \overline{\tau}_{ij}\,, \quad v_{ij}/R\rho c_0^2 = \overline{v}_{ij}\,, \quad p_n^{\pm}/\rho c_0^2 = \overline{p}_n^{\pm}\,, \quad m_n^{\pm}/R\rho c_0^2 = \overline{m}_n^{\pm}\,, \tag{2.2}$$

$$R_i/R = \overline{R}_i\,, \ \mu/\rho c_0^2 = \overline{\mu}, \quad E/\rho c_0^2 = \overline{E}, \quad \alpha/\rho c_0^2 = \overline{\alpha}, \quad \beta/R^2\rho c_0^2 = \overline{\beta}, \quad \gamma/R^2\rho c_0^2 = \overline{\gamma},$$

$$\varepsilon/R^2\rho c_0^2 = \overline{\varepsilon}, \quad J/\rho h^2 = \lambda^k \overline{J}$$

Далее предположим, что безразмерные физические параметры (2.3) имеют значения:

$$\mu/\rho c_0^2 \sim 1, \quad \alpha/\rho c_0^2 \sim 1, \quad \beta/R^2\rho c_0^2 \sim 1, \quad \gamma/R^2\rho c_0^2 \sim 1, \quad \varepsilon/R^2\rho c_0^2 \sim 1 \tag{2.3}$$

Для ω и k примем: $\omega = l - p,\ \ k = 2l$. В результате, с точностью $O(\lambda^{p-l})$ получим:

$$V_i = R\lambda^{l-p}(V_i^0 + \lambda^{-l+2p-c}\zeta V_i^1)\,,\ V_3 = R\lambda^{l-c}V_3^0\,,\ \omega_i = \lambda^{l-p-c}\omega_i^0\,,\ \omega_3 = \lambda^{l-2p}(\omega_3^0 + \lambda^{-l+2p-c}\zeta\omega_3^1)$$

$$\tau_{ii} = \rho c_0^2\lambda^l(\tau_{ii}^0 + \lambda^{-l+2p-c}\zeta\tau_{ii}^1)\,,\ \tau_{ij} = \rho c_0^2\lambda^l(\tau_{ij}^0 + \lambda^{-l+2p-c}\zeta\tau_{ij}^1)\,,\ \tau_{i3} = \rho c_0^2\lambda^{l+p-c}\tau_{i3}^0 (i \leftrightarrow 3)$$

$$\tau_{33}=\rho c_0^2\lambda^{2p-c}(\tau_{33}^0+\zeta\tau_{33}^1)\,,\ v_{ii}=R\rho c_0^2\lambda^{l-c}v_{ii}^0\ ,\ v_{ij}=R\rho c_0^2\lambda^{l-c}v_{ij}^0 \tag{2.4}$$

$$v_{i3}=R\rho c_0^2\lambda^{l-p}(v_{i3}^0+\lambda^{-l+2p-c}\zeta v_{i3}^1)(i\leftrightarrow 3)\,,\ v_{33}=R\rho c_0^2\lambda^{2p-2c}(v_{33}^0+\lambda^{-2p+2c}\zeta v_{33}^1)$$

где число c задается следующим образом: $c=0$ при $2p\le l$, $c=2p-l$ при $2p\ge l$.

Качественная сторона асимптотического представления (2.4) это то, что повороты точек срединной поверхности оболочки независимы от перемещения этих же точек, поэтому построенную на основе внутренней задачи модель будем называть моделью микрополяных упругих оболочек с НППВ. Далее, вместо силовых и моментных напряжений вводим статически им эквивалентные усилия, моменты и гипермоменты [1,2], а также перемещения и независимые повороты точек срединной поверхности оболочки:

$$u_i=V_i\big|_{\zeta=0}\,,\qquad w=V_3\big|_{\zeta=0}\,,\qquad \Omega_i=\omega_i\big|_{\zeta=0}\,,\qquad \Omega_3=\omega_3\big|_{\zeta=0} \tag{2.5}$$

Основная система уравнений динамической модели изгибной деформации микрополярных упругих тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений будет иметь вид:

уравнения движения

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial T_{ii}}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\left(T_{ii}-T_{jj}\right)+\frac{1}{A_j}\frac{\partial S_{ji}}{\partial\alpha_j}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\left(S_{ji}+S_{ij}\right)+\frac{N_{i3}}{R_i}=2\rho h\frac{\partial^2u_i}{\partial t^2}-\left(p_i^++p_i^-\right),$$

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial M_{ii}}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\left(M_{ii}-M_{jj}\right)+\frac{1}{A_j}\frac{\partial H_{ji}}{\partial\alpha_j}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\left(H_{ji}+H_{ij}\right)-N_{3i}=\frac{2\rho h^3}{3}\frac{\partial^2\psi_i}{\partial t^2}-h\left(p_i^+-p_i^-\right),$$

$$-\frac{T_{11}}{R_1}-\frac{T_{22}}{R_2}+\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial\left(A_2N_{13}\right)}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\left(A_1N_{23}\right)}{\partial\alpha_2}\right]=2\rho h\frac{\partial^2w}{\partial t^2}-\left(p_3^++p_3^-\right), \tag{2.6}$$

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial L_{ii}}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\left(L_{ii}-L_{jj}\right)+\frac{1}{A_j}\frac{\partial L_{ji}}{\partial\alpha_j}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\left(L_{ji}+L_{ij}\right)+\frac{L_{i3}}{R_i}+\left(-1\right)^j\left(N_{j3}-N_{3j}\right)=$$

$$=2Jh\frac{\partial^2\Omega_i}{\partial t^2}-\left(m_i^++m_i^-\right),$$

$$-\frac{L_{11}}{R_1}-\frac{L_{22}}{R_2}+\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial\left(A_2L_{13}\right)}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\left(A_1L_{23}\right)}{\partial\alpha_2}\right]-\left(S_{12}-S_{21}\right)=2Jh\frac{\partial^2\Omega_3}{\partial t^2}-\left(m_3^++m_3^-\right)$$

$$L_{33}-\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial\left(A_2\Lambda_{13}\right)}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\left(A_1\Lambda_{23}\right)}{\partial\alpha_2}\right]-\left(H_{12}-H_{21}\right)+\frac{2\rho h^3}{3}\frac{\partial^2\tau}{\partial t^2}=h\left(m_3^+-m_3^-\right)$$

соотношения упругости

$$N_{i3}=2h\left(\mu+\alpha\right)\Gamma_{i3}+2h\left(\mu-\alpha\right)\Gamma_{3i}\,,\,N_{3i}=2h\left(\mu+\alpha\right)\Gamma_{3i}+2h\left(\mu-\alpha\right)\Gamma_{i3}\,,\,S_{ij}=2h[(\mu+\alpha)\Gamma_{ij}+(\mu-\alpha)\Gamma_{ji}]\,,$$

$$T_{ii}=\frac{2Eh}{1-v^2}[\Gamma_{ii}+v\Gamma_{jj}]+\underline{\frac{vh\left(p_3^++p_3^-\right)}{1-v}}\,,$$

$$M_{ii}=\frac{2Eh^3}{3(1-v^2)}[K_{ii}+vK_{jj}]+\underline{\frac{h^2}{3}\frac{v\left(p_3^+-p_3^-\right)}{1-v}}\,,H_{ij}=\frac{2h^3}{3}\left[\left(\mu+\alpha\right)K_{ij}+\left(\mu-\alpha\right)K_{ji}\right]$$

$$L_{ii}=2h\left[\frac{4\gamma\left(\beta+\gamma\right)}{\beta+2\gamma}\kappa_{ii}+\frac{2\gamma\beta}{\beta+2\gamma}\kappa_{jj}\right]+\frac{\beta}{\beta+2\gamma}L_{33}\,,\ L_{33}=2h\left[\left(\beta+2\gamma\right)\iota+\beta\left(\kappa_{11}+\kappa_{22}\right)\right] \tag{2.7}$$

$$L_{ij}=2h[(\gamma+\varepsilon)\kappa_{ij}+(\gamma-\varepsilon)\kappa_{ji}]\,,L_{i3}=2h\left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\kappa_{i3}+\underline{\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{m_i^+-m_i^-}{2}}\right],$$

$$\Lambda_{i3}=\frac{2h^3}{3}\left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{i3}+\underline{\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{m_i^++m_i^-}{2h}}\right]$$

геометрические соотношения

$$\Gamma_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}u_j+\frac{w}{R_i}\,,\ \Gamma_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}u_i-\left(-1\right)^j\Omega_3\,,\,\vartheta_i=-\frac{1}{A_i}\frac{\partial w}{\partial\alpha_i}+\frac{u_i}{R_i}$$

$$K_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\psi_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\psi_j\,,\ \ K_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\psi_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\psi_i-\left(-1\right)^j\iota\,,\ \Gamma_{i3}=-\vartheta_i+\left(-1\right)^j\Omega_j\,,$$

$$\Gamma_{3i}=\psi_i-(-1)^j\,\Omega_j\,,\ \kappa_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Omega_j+\frac{\Omega_3}{R_i}\,,\ \kappa_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Omega_i\,,$$

$$\kappa_{i3}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_3}{\partial\alpha_i}-\frac{\Omega_i}{R_i}\,,l_{i3}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\iota}{\partial\alpha_i} \tag{2.8}$$

Система уравнений (2.6)-(2.8) полностью совпадает с соответствующей системой уравнений теории микрополярных упругих тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений, построенным С.О. Саркисяном в работе [2] (разница лишь в подчёркнутых членах).

Перейдём к изучению краевых микрополярных упругих явлений. Обратимся к уравнениям трёхмерной динамической теории НТУ с НППВ (1.1)-(1.3) и будем считать, что поверхность края оболочки Σ, вблизи которого необходимо исследовать напряжённое состояние, задаётся уравнением $\alpha_1=\alpha_{10}$. Введём замену независимых переменных по формулам [2]:

$$\alpha_1-\alpha_{10}=R\lambda^{-l}\xi_1,\quad \alpha_2=R\lambda^{-p}\xi_2,\quad \alpha_3=R\lambda^{-l}\zeta,\qquad t=\lambda^{\omega}\tau\, h/c_0 \tag{2.9}$$

где величины R,λ,l,p,ω имеют тот же смысл, что и при изучении внутренней задачи.

Решение, таким образом полученное из системы уравнений (1.1)-(1.3) пограничной задачи, должно удовлетворять однородным граничным условиям на лицевых поверхностях оболочки:

$$\sigma_{3n}=0,\ \ \mu_{3n}=0\ \ \text{при}\ \alpha_3=\pm h\,. \tag{2.10}$$

Перейдём к безразмерным величинам (2.2), (2.3) и введём новые обозначения:

$$\overline{\tau}_{mn}=P_{mn}\,,\quad \overline{v}_{mn}=Q_{mn}\,,\quad \overline{V}_n=\lambda^{-l}U_n\,,\ \ \omega_n=\lambda^{-l}\varpi_n \tag{2.11}$$

В результате, из уравнений (1.1)-(1.3), на уровне асимптотической точности $O\left(\lambda^{p-l}\right)$, погранслойная задача расщепляется на четыре независимых системы уравнений:

силовая плоская задача

$$\frac{1}{A_{10}}\frac{\partial P_{11}}{\partial\xi_1}+\frac{\partial P_{31}}{\partial\zeta}=0\,,\frac{1}{A_{10}}\frac{\partial P_{13}}{\partial\xi_1}+\frac{\partial P_{33}}{\partial\zeta}=0\,,\frac{1}{A_{10}}\frac{\partial U_1}{\partial\xi_1}=\frac{1}{\overline{E}}\left[P_{11}-\nu P_{22}-\nu P_{33}\right],\ \frac{\partial U_1}{\partial\zeta}=\frac{\overline{\mu}+\overline{\alpha}}{4\overline{\mu}\overline{\alpha}}P_{31}-\frac{\overline{\mu}-\overline{\alpha}}{4\overline{\mu}\overline{\alpha}}P_{13}$$

$$P_{22}-\nu\left(P_{11}+P_{33}\right)=0\,,\quad \frac{\partial U_3}{\partial\zeta}=\frac{1}{\overline{E}}\left[P_{33}-\nu P_{11}-\nu P_{22}\right],\ \frac{1}{A_{10}}\frac{\partial U_3}{\partial\xi_1}=\frac{\overline{\mu}+\overline{\alpha}}{4\overline{\mu}\overline{\alpha}}P_{13}-\frac{\overline{\mu}-\overline{\alpha}}{4\overline{\mu}\overline{\alpha}}P_{31}=0 \tag{2.12}$$

силовая антиплоская задача

$$\frac{1}{A_{10}}\frac{\partial P_{12}}{\partial\xi_1}+\frac{\partial P_{32}}{\partial\zeta}=0,\quad \frac{1}{A_{10}}\frac{\partial U_2}{\partial\xi_1}=\frac{\overline{\mu}+\overline{\alpha}}{4\overline{\mu}\overline{\alpha}}P_{12}-\frac{\overline{\mu}-\overline{\alpha}}{4\overline{\mu}\overline{\alpha}}P_{21}\,,\ \frac{\partial U_2}{\partial\zeta}=\frac{\overline{\mu}+\overline{\alpha}}{4\overline{\mu}\overline{\alpha}}P_{32}-\frac{\overline{\mu}-\overline{\alpha}}{4\overline{\mu}\overline{\alpha}}P_{23}=0$$

$$\left(\overline{\mu}+\overline{\alpha}\right)P_{21}-\left(\overline{\mu}-\overline{\alpha}\right)P_{12}=0\,,\ \left(\overline{\mu}+\overline{\alpha}\right)P_{23}-\left(\overline{\mu}-\overline{\alpha}\right)P_{32}=0 \tag{2.13}$$

моментная плоская задача

$$\frac{1}{A_{10}}\frac{\partial Q_{12}}{\partial\xi_1}+\frac{\partial Q_{32}}{\partial\zeta}=0\,,\frac{1}{A_{10}}\frac{\partial\varpi_2}{\partial\xi_1}=\frac{\overline{\gamma}+\overline{\varepsilon}}{4\overline{\gamma}\overline{\varepsilon}}Q_{12}-\frac{\overline{\gamma}-\overline{\varepsilon}}{4\overline{\gamma}\overline{\varepsilon}}Q_{21}\,,\ \frac{\partial\varpi_2}{\partial\zeta}=\frac{\overline{\gamma}+\overline{\varepsilon}}{4\overline{\gamma}\overline{\varepsilon}}Q_{32}-\frac{\overline{\gamma}-\overline{\varepsilon}}{4\overline{\gamma}\overline{\varepsilon}}Q_{23}$$

$$\left(\overline{\gamma}+\overline{\varepsilon}\right)Q_{21}-\left(\overline{\gamma}-\overline{\varepsilon}\right)Q_{12}=0\,,\ \left(\overline{\gamma}+\overline{\varepsilon}\right)Q_{23}-\left(\overline{\gamma}-\overline{\varepsilon}\right)Q_{32}=0 \tag{2.14}$$

моментная антиплоская задача

$$\frac{1}{A_{10}}\frac{\partial Q_{11}}{\partial\xi_1}+\frac{\partial Q_{31}}{\partial\zeta}=0\,,\frac{1}{A_{10}}\frac{\partial Q_{13}}{\partial\xi_1}+\frac{\partial Q_{33}}{\partial\zeta}=0\,,2\left(\overline{\beta}+\overline{\gamma}\right)Q_{22}-\overline{\beta}\left(Q_{11}+Q_{33}\right)=0$$

$$\frac{1}{A_{10}}\frac{\partial\varpi_1}{\partial\xi_1}=\frac{\overline{\beta}+\overline{\gamma}}{\overline{\gamma}(3\overline{\beta}+2\overline{\gamma})}\left[Q_{11}-\frac{\overline{\beta}}{2(\overline{\beta}+\overline{\gamma})}\left(Q_{22}+Q_{33}\right)\right],\ \frac{\partial\varpi_1}{\partial\zeta}=\frac{\overline{\gamma}+\overline{\varepsilon}}{4\overline{\gamma}\overline{\varepsilon}}Q_{31}-\frac{\overline{\gamma}-\overline{\varepsilon}}{4\overline{\gamma}\overline{\varepsilon}}Q_{13} \tag{2.15}$$

$$\frac{\partial\varpi_3}{\partial\zeta}=\frac{\overline{\beta}+\overline{\gamma}}{\overline{\gamma}(3\overline{\beta}+2\overline{\gamma})}\left[Q_{33}-\frac{\overline{\beta}}{2(\overline{\beta}+\overline{\gamma})}\left(Q_{11}+Q_{22}\right)\right],\frac{1}{A_{10}}\frac{\partial\varpi_3}{\partial\xi_1}=\frac{\overline{\gamma}+\overline{\varepsilon}}{4\overline{\gamma}\overline{\varepsilon}}Q_{13}-\frac{\overline{\gamma}-\overline{\varepsilon}}{4\overline{\gamma}\overline{\varepsilon}}Q_{31}\,,$$

здесь $A_{10}=A_1\big|_{\xi_1=0}$.

Полученные уравнения погранслоя (который имеет квазистатический характер) в декартовых координатах $\left(\xi_1',\zeta\right)\left(\xi_1'=A_{10}\xi_1\right)$ с асимптотической точностью $0\left(\lambda^{p-l}\right)$ описывают НДС плоской и антиплоской силовой и моментной не взаимосвязанных задач микрополярной теории упругости, имеющих место в полуполосе: $\left\{0\le\xi_1'<\infty,\quad -1\le\zeta\le 1\right\}$.

Потребовав, чтобы решения погранслойных задач (2.12)-(2.15) имели затухающий характер при $\xi_1\to+\infty$, получим, что такие решения обладают следующими общими свойствами:

$$\int_{-1}^{1} P_{1n}\Big|_{\xi_1=0} d\zeta = 0\,,\ \int_{-1}^{1} Q_{1n}\Big|_{\xi_1=0} d\zeta = 0\,,\quad \int_{-1}^{1}\frac{\partial\varpi_3}{\partial\zeta}\Big|_{\xi_1=0} d\zeta = \frac{\bar\beta+2\bar\gamma}{4\bar\gamma(\bar\beta+\bar\gamma)}\int_{-1}^{1} Q_{33}\Big|_{\xi_1=0} d\zeta$$

$$\int_{-1}^{1} U_1\Big|_{\xi_1=0} d\zeta = \frac{\bar\lambda}{4\bar\mu(\bar\lambda+\bar\mu)}\int_{-1}^{1}\zeta P_{13}\Big|_{\xi_1=0} d\zeta\,,\ \int_{-1}^{1} U_2\Big|_{\xi_1=0} d\zeta = 0\,,\ \int_{-1}^{1} U_3\Big|_{\xi_1=0} d\zeta + \frac{\bar\mu-\bar\alpha}{4\bar\mu\bar\alpha}\int_{-1}^{1}\zeta P_{11}\Big|_{\xi_1=0} d\zeta = 0$$

$$\int_{-1}^{1}\varpi_1\Big|_{\xi_1=0} d\zeta = \frac{\bar\beta}{4\bar\gamma(\bar\beta+\bar\gamma)}\int_{-1}^{1}\zeta Q_{13}\Big|_{\xi_1=0} d\zeta\,,\ \int_{-1}^{1}\varpi_2\Big|_{\xi_1=0} d\zeta = 0,\ \int_{-1}^{1}\varpi_3\Big|_{\xi_1=0} d\zeta + \frac{\bar\gamma-\bar\varepsilon}{4\bar\gamma\bar\varepsilon}\int_{-1}^{1}\zeta Q_{11}\Big|_{\xi_1=0} d\zeta = 0$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{\partial U_1}{\partial\zeta}\Big|_{\xi_1=0} d\zeta - \frac{\bar\mu+\bar\alpha}{4\bar\mu\bar\alpha}\int_{-1}^{1} P_{31}\Big|_{\xi_1=0} d\zeta = 0\,,\ \int_{-1}^{1}\frac{\partial U_2}{\partial\zeta}\Big|_{\xi_1=0} d\zeta - \frac{1}{\bar\mu+\bar\alpha}\int_{-1}^{1} P_{32}\Big|_{\xi_1=0} d\zeta = 0\,. \tag{2.16}$$

Рассматривая вопрос о сращивании внутреннего НДС с пограничным, получим:

$$\left(НДС\right) = \left(НДС\right)_{\text{вн}} + \lambda^r\cdot\left(НДС\right)^a_{\text{кр}} + \lambda^\theta\cdot\left(НДС\right)^n_{\text{кр}} \tag{2.17}$$

Числа r,θ (показатели интенсивностей микрополярных погранслоёв) должны быть подобраны таким образом, чтобы стало возможно удовлетворение трёхмерным граничным условиям на поверхности края оболочки Σ. Для первого варианта граничных условий, когда на поверхности края оболочки заданы перемещения и повороты (применяя символическое обозначение $[f]=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f d\alpha_3$), при $\alpha_1=\alpha_{10}$ получим:

$$T_{11}=[p_1^*],\quad S_{12}=[p_2^*],\ N_{13}=[p_3^*],\ L_{1n}=[m_n^*]\,, M_{11}=[p_1^*\alpha_3],\ H_{12}=[p_2^*\alpha_3],\ \Lambda_{13}\Big| = [m_3^*\alpha_3] \tag{2.18}$$

Для второго варианта граничных условий, когда на поверхности края оболочки заданы перемещения и повороты, при $\alpha_1=\alpha_{10}$ получим:

$$u_i=[u_i^*],\ w=[u_3^*],\ \Omega_n=[\omega_n^*],\ \psi_i=\frac{1}{2h}\left[V_i^\bullet\Big|_{\alpha_3=h} - V_i^\bullet\Big|_{\alpha_3=-h}\right],\ \iota=\frac{1}{2h}\left[\omega_i^\bullet\Big|_{\alpha_3=h} - \omega_i^\bullet\Big|_{\alpha_3=-h}\right] \tag{2.19}$$

Для граничных условий шарнирного опирания при $\alpha_1=\alpha_{10}$ получим:

$$w=[u_3^*],\ T_{11}=[p_1^*],\ S_{12}=[p_2^*],\ L_{1n}=[m_n^*]\,,\ M_{11}=[p_1^*\alpha_3],\ H_{12}=[p_2^*\alpha_3],\ \Lambda_{13}=[m_3^*\alpha_3] \tag{2.20}$$

Для того, чтобы возможно было получить начальные условия для двумерной модели микрополярных оболочек со свободным вращением (2.6)-(2.8), нам следует в четырёхмерном пространстве α_n, t плоскость $t=0$ считать своего рода границей и ввести понятие погранслойного явления около этой границы. Зададим следующую асимптотику:

$$\bar\tau_{ii}=\lambda^l\tau_{ii}^*,\ \bar\tau_{ij}=\lambda^p\tau_{ij}^*,\ \bar\tau_{3i}=\lambda^l\tau_{3i}^*,\ \bar\tau_{i3}=\lambda^l\tau_{i3}^*,\ \bar\tau_{33}=\lambda^l\tau_{33}^*,\ \bar V_i=\lambda^0V_i^*,\ \bar V_3=\lambda^0V_3^*$$

$$\bar v_{ii}=\lambda^l v_{ii}^*,\ \bar v_{ij}=\lambda^p v_{ij}^*,\ \bar v_{3i}=\lambda^l v_{3i}^*,\ \bar v_{i3}=\lambda^l v_{i3}^*,\ \bar v_{33}=\lambda^l v_{33}^*,\ \omega_i=\lambda^0\omega_i^*,\ \omega_3=\lambda^0\omega_3^*,\ \omega=0,\ \ k=2l \tag{2.21}$$

В результате, построение временного погранслоя на уровне асимптотической точности $O\left(\lambda^{p-l}\right)$ сводится к решению начально-граничной задачи с волновыми уравнениями:

$$\frac{\partial^2V_n^*}{\partial\zeta^2}-\frac{1}{\tilde a_n^2}\frac{\partial^2V_n^*}{\partial\tau^2}=0,\qquad \frac{\partial^2\omega_n^*}{\partial\zeta^2}-\frac{1}{\tilde b_n^2}\frac{\partial^2\omega_m^*}{\partial\tau^2}=0\,,\ \ \partial V_m^*/\partial\zeta\Big|_{\zeta=\pm1}=0,\ \ \partial\omega_m^*/\partial\zeta\Big|_{\zeta=\pm1}=0 \tag{2.22}$$

где $\tilde a_1=\tilde a_2=\sqrt{\bar\mu+\bar\alpha}$, $\tilde a_3=\sqrt{\bar\lambda+2\bar\mu}$, $\tilde b_1=\tilde b_2=\sqrt{(\bar\gamma+\bar\varepsilon)/\bar J}$, $\tilde b_3=\sqrt{(\bar\beta+2\bar\gamma)/\bar J}$, а начальные условия пока будем считать произвольно заданными.

Общее решение начально-граничной задачи (2.22) (на основе метода разделения переменных) можем представить в следующем виде (где u – представитель вместо V_n или ω_n):

$$u=u^0+u^1\tau+u' \tag{2.23}$$

где u^0 и u^1 – постоянные, а u' можем представить так:

$$\begin{aligned} u' &= \sum_{k=1}^{\infty}\left[u_{1k}\cos\left((2k-1)\pi\tilde a\tau/2\right)+u_{2k}\sin\left((2k-1)\pi\tilde a\tau/2\right)\right]\sin\left((2k-1)\pi\zeta/2\right)+ \\ &\quad+\sum_{k=1}^{\infty}\left[u_{3k}\cos\left(k\pi\tilde a\tau\right)+u_{4k}\sin\left(k\pi\tilde a\tau\right)\right]\cos k\pi\zeta \end{aligned} \tag{2.24}$$

Если удовлетворить начальным условиям $u\big|_{\tau=0}=f^*(\zeta)$, $\partial u/\partial\tau\big|_{\tau=0}=F^*(\zeta)$, получим:

$$u_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f^*(\zeta)\,d\zeta,\quad u_1=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} F^*(\zeta)\,d\zeta\,, u_{1k}=\int_{-1}^{1} f^*(\zeta)\sin\frac{2k-1}{2}\pi\zeta d\zeta,\ \ u_{3k}=\int_{-1}^{1} f^*(\zeta)\cos k\pi\zeta d\zeta$$

$$u_{4k}=\frac{1}{k\pi\tilde{a}}\int_{-1}^{1}F^*(\zeta)\cos k\pi\zeta d\zeta,\quad u_{2k}=\frac{2}{(2k-1)\pi\tilde{a}}\int_{-1}^{1}F^*(\zeta)\sin\frac{2k-1}{2}\pi\zeta d\zeta \tag{2.25}$$

С учётом структуры решения (2.23) получим, что первое слагаемое даёт постоянную во времени часть решения, второе – линейно-зависящую от времени, третье – чисто осциллирующую во времени часть решения. Для того, чтобы решение $u(\zeta,\tau)$ являлось чисто осциллирующей во времени функцией, необходимо и достаточно, чтобы: u^0, u^1 обращались в нуль:

$$\int_{-1}^{1}f^*(\zeta)d\zeta=0,\qquad \int_{-1}^{1}F^*(\zeta)d\zeta=0 \tag{2.26}$$

Условия (2.26) принято называть условиями осцилляции.

Далее заметим, что, используя граничные условия из (2.22), получим:

$$\partial f^*(\zeta)/\partial\zeta\big|_{\zeta=\pm1}=0,\qquad \partial F^*(\zeta)/\partial\zeta\big|_{\zeta=\pm1}=0 \tag{2.27}$$

Сращивая решение внутренней задачи с решением временного погранслоя и удовлетворяя заданным трёхмерным начальным условиям, получим

$$\begin{aligned}&\overset{вн}{V_n}\big|_{t=0}+\lambda^r\overset{впс}{V_n}\big|_{t=0}=f_n(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),\qquad \partial V_n/\partial t\big|_{t=0}+\lambda^r\,\partial\overset{впс}{V_n}\big/\partial t\big|_{t=0}=F_n(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\\&\overset{вн}{\omega_n}\big|_{t=0}+\lambda^r\overset{впс}{\omega_n}\big|_{t=0}=\phi_n(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),\qquad \partial\omega_n/\partial t\big|_{t=0}+\lambda^r\,\partial\overset{впс}{\omega_n}\big/\partial t\big|_{t=0}=\Phi_n(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\end{aligned} \tag{2.28}$$

где r – интенсивность временного погранслоя, $f_n, F_n, \varphi_n, \Phi_n$ – заданные функции в области трёхмерной оболочки.

Для интенсивности временного погранслоя r получим: $r=l$. В результате сращивания (при $t=0$) на уровне асимптотической точности $O(\lambda^{p-l})$, используя условия осцилляции (2.26) и условия (2.27), получим начальные условия (при $t=0$) для двумерной динамической модели микрополярных оболочек с независимыми полями перемещений и вращений (2.6)-(2.8):

$$u_i=[f_i],w=[f_3],\ \frac{\partial u_i}{\partial t}=[F_i],\ \frac{\partial w}{\partial t}=[F_3],$$

$$\psi_i=\frac{h}{2}\left(\frac{\partial f_i}{\partial\alpha_3}\Big|_{\alpha_3=h}+\frac{\partial f_i}{\partial\alpha_3}\Big|_{\alpha_3=-h}\right),\ \frac{\partial\psi_i}{\partial t}=\frac{h}{2}\left(\frac{\partial F_i}{\partial\alpha_3}\Big|_{\alpha_3=h}+\frac{\partial F_i}{\partial\alpha_3}\Big|_{\alpha_3=-h}\right),\ \Omega_n=[\varphi_n],$$

$$\partial\Omega_n/\partial t=[\Phi_n],\ \iota=\frac{h}{2}\left(\frac{\partial\phi_3}{\partial\alpha_3}\Big|_{\alpha_3=h}+\frac{\partial\phi_3}{\partial\alpha_3}\Big|_{\alpha_3=-h}\right),\ \frac{\partial\iota}{\partial t}=\frac{h}{2}\left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial\alpha_3}\Big|_{\alpha_3=h}+\frac{\partial\Phi_3}{\partial\alpha_3}\Big|_{\alpha_3=-h}\right). \tag{2.29}$$

Система уравнений (2.6)-(2.8), граничные условия либо (2.18), либо (2.19), либо (2.20) и начальные условия (2.27) представляют собой математическую модель микрополярных упругих тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений. Построенная асимптотическая модель микрополярных упругих тонких оболочек (2.6)-(2.8),(2.18) (либо (2.19),(2.20)),(2.27) идентична модели, построенной на основе метода гипотез в работе С.О. Саркисяна [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Саркисян С.О. Общая динамическая теория микрополярных упругих тонких оболочек. // Доклады АН России. 2011. Т.436. № 2. С.195-198.
2. Саркисян А.А. Асимптотический анализ начально-граничной динамической задачи несимметричной теории упругости со свободным вращением в области тонкой оболочки// Изв. НАН Армении. Механика. 2011. Т.64. № 2. С.58-67.
3. Саркисян С.О., Саркисян А.А. Модель колебаний микрополярных тонких оболочек// Акустический журнал. 2013. Т.59. №24. С.170-181.

<u>Сведения об авторе:</u>

Саркисян Арменуи Акоповна – к.ф.-м.н, Гюмрийский гос. udинститут, кафедра “мат. анализа и диф. уравнений”, (374 95) 42 21 03; **e-mail:** armenuhis@mail.ru, armenuhis@gmail.com

ОБ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ АНИЗОТРОПНОЙ ДВУХСЛОЙНОЙ ПОЛОСЫ-ПРЯМОУГОЛЬНИКА ПО ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПРИ НЕПОЛНОМ КОНТАКТЕ МЕЖДУ СЛОЯМИ

Саркисян Н. С.

Рассматривается вопрос определения напряжённо-деформированного состояния в плоской задаче для анизотропной слоистой полосы по геометрически нелинейной теории упругости при неполном контакте между слоями. Считается, что на одной из продольных кромок полосы заданы нормальная компонента вектора перемещения и касательное напряжениие, а на другой–условия первой краевой задачи теории упругости. Построено решение, соответствующее внутренней задаче.

Уравнения теории упругости, написанные в безразмерных координатах для тонких тел, составляют сингулярно-возмущённую малым параметром систему, которую естественно решить асимптотическим методом. Классические статические краевые задачи полос, пластин и оболочек асимптотическим методом решены в $[1,2]$. Неклассические задачи теории упругости рассмотрены в $[3]$. Для полос с общей анизотропией в своей плоскости вопрос определения НДС рассмотрен в $[4]$. Вопрос определения НДС в плоской задаче, для анизотропной полосы, на продольных сторонах которой заданы смешанные условия теории упругости, рассмотрены в $[5,6]$. Для такой же полосы, на основе геометрически нелинейной теории упругости решена первая краевая задача. На той же основе решены смешанные краевые задачи для анизотропной полосы-балки в $[7,8,9]$.

Краевые задачи для двухслойных анизотропных балок-полос при неполном контакте между слоями расмотрены в $[5,11]$.

1. Рассматривается плоская нелинейная задача для анизотропной полосы: $\Omega=\{(x,y): 0\le x\le l, -h_2\le y\le h_1, h<<l\}$. Будем считать, что слои имеют различные толщины h_k, коэффициенты упругости $a_{ij}^{(k)}$, $k-$номер слоя и $k=1,2$, $l-$ длина полосы. Общая толщина полосы – $2h$. На нижней и верхней сторонах полосы заданы следующие условия для напряжений и перемещений:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{xy}^{(2)}=\varepsilon^4\sigma_{xy}^{-}(x),\ v^{(2)}=\varepsilon^3 v^{-}(x)\quad \text{ïðè}\ y=-h_2\\
&\sigma_{xy}^{(1)}=\varepsilon^4\sigma_{xy}^{+}(x),\ \sigma_y^{(1)}=\varepsilon^3\sigma_y^{+}(x)\quad \text{ïðè}\ y=h_1
\end{aligned}\tag{1.1}$$

На линии раздела слоёв $y=0$ должны быть выполнены следующие условия неполного контакта:

$$\sigma_{xy}^{(1)}=\sigma_{xy}^{(2)},\ \sigma_y^{(1)}=\sigma_y^{(2)},\ v^{(1)}=v^{(2)},\ u^{(2)}-u^{(1)}=f(x)\tag{1.2}$$

Функция $f(x)$ считается заданной в зависимости от выбранной модели.

Для решения поставленной краевой задачи вводится безразмерная система координат ¶ , ¸ и малый параметр £ :

$$¶=x/l,\ ¸=y/h, £=h/l\ (2h=h_1+h_2)\tag{1.3}$$

В силу сингулярной возмущённости основных уравнений, решения складываются из двух типов решений: внутреннего, т.е. незатухающего при удалении от торцов в глубь области и типа пограничного слоя.

Решение внутренней задачи будем искать в виде

$$Q^{(k)}=£^{q_k}\sum_{s=0}^{S}£^{s}Q^{(k,s)},\tag{1.4}$$

где $Q^{(k)}-$ любое из напряжений или безразмерных перемещений $U^{(k)}=u^{(k)}/l$, $V^{(k)}=v^{(k)}/l$, $s-$номер приближения, $k-$номер слоя, $S-$ количество приближений. Целое число q_k подбирается так, чтобы получилась непротиворечивая система для определения $Q^{(k,s)}$:

$$q_k = 3 \text{ для } \pm_x^{(k)}, \pm_y^{(k)}, U^{(k)}, V^{(k)}$$
$$q_k = 4 \text{ для } \pm_{xy}^{(k)} \tag{1.5}$$

Подставив (1.4) в преобразованные по (1.3) уравнения плоской задачи теории упругости анизотропного тела, используя (1.5), получим систему относительно $Q^{(k,s)}$, после решения которого будем иметь:

$$\begin{aligned}
&V^{(k,s)} = w^{(k,s)}(\P) + v^{*(k,s)}(\P, \mathrm{s}) \\
&U^{(k,s)} = u^{(k,s)}(\P) + u^{*(k,s)}(\P, \mathrm{s}) \\
&\pm_y^{(k,s)} = \pm_{y0}^{(k,s)} + \pm_y^{*(k,s)}(\P, \mathrm{s}) \\
&\pm_x^{(k,s)} = \frac{1}{a_{11}^{(k)}} \frac{du^{(k,s)}}{d\P} - \frac{a_{12}^{(k)}}{a_{11}^{(k)}} \pm_{y0}^{(k,s)} + \pm_x^{*(k,s)}(\P, \mathrm{s}) \\
&\pm_{xy}^{(k,s)} = \pm_{xy0}^{(k,s)} + \left(\frac{a_{12}^{(k)}}{a_{11}^{(k)}} \frac{d\pm_{y0}^{(k,s)}}{d\P} - \frac{1}{a_{11}^{(k)}} \frac{d^2 u^{(2)}}{d\P^2} \right) \text{¸} + \pm_{xy}^{*(k,s)}(\P, \mathrm{s})
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Входящие в (1.6) неизвестные функции $\pm_{y0}^{(k,s)}(\P), \pm_{xy0}^{(k,s)}(\P), u^{(k,s)}, w^{(k,s)}$ подлежат определению из условий (1.1),(1.2), а величины со звездочкой, как обычно, являются известными, если построены приближения меньше s и определяются по формулам:

$$\pm_y^{*(k,s)} = -\int_0^{\text{¸}} \left(\frac{\partial \pm_{xy}^{(k,s-2)}}{\partial \P} + \pm_2^{*(k,s)} \right) d\text{¸}, \qquad \pm_{xy}^{*(k,s)} = -\int_0^{\text{¸}} \left(\frac{\partial \pm_x^{*(k,s)}}{\partial \P} + \pm_1^{*(k,s)} \right) d\text{¸}$$

$$\pm_x^{*(k,s)} = \frac{1}{a_{11}^{(k,s)}} \frac{du^{*(k,s)}}{d\P} - \frac{a_{12}^{(k,s)}}{a_{11}^{(k,s)}} \pm_y^{*(k,s)} - \frac{a_{16}^{(k,s)}}{a_{11}^{(k,s)}} \pm_{xy}^{(k,s-1)} + \frac{1}{a_{11}^{(k,s)}} U_{\P}^{(k,s-3)} \tag{1.7}$$

$$v^{*(k,s)} = \int_0^{\text{¸}} \left(a_{12}^{(k,s)} \pm_x^{(k,s-1)} + a_{22}^{(k,s)} \pm_y^{(k,s-1)} + a_{26}^{(k,s)} \pm_{xy}^{(k,s-2)} - V_{\text{¸}}^{(k,s-2)} \right) d\text{¸}$$

$$u^{*(k,s)} = \int_0^{\mathrm{s}} \left(a_{16}^{(k)} \pm_x^{(k,s-1)} + a_{26}^{(k)} \pm_y^{(k,s-3)} + a_{66}^{(k)} \pm_{xy}^{(k,s-2)} - \frac{\partial V^{(k,s-1)}}{\partial \P} - U_{\P\mathrm{s}}^{(k,s-3)} \right) d\mathrm{s}$$

где

$$\pm_1^{*(k,s)} = \pm_{11}^{(k,s-1)} + \pm_{12}^{(k,s-3)} \qquad \pm_2^{*(k,s)} = \pm_{21}^{(k,s-2)} + \pm_{22}^{(k,s-4)} \qquad \pm_{12}^{(k,s)} \neq \pm_{21}^{(k,s)}$$

$$\pm_{11}^{(k,s)} = \sum_{i=0}^{s} \left(\frac{\partial U^{(k,s-i)}}{\partial \text{¸}} \frac{\partial \pm_y^{(k,i)}}{\partial \text{¸}} + \frac{\partial^2 U^{(k,s-i)}}{\partial \text{¸}^2} \pm_y^{(k,i)} \right)$$

$$\pm_{12}^{(k,s)} = \sum_{i=0}^{s} \left(\frac{\partial U^{(k,s-i)}}{\partial \P} \frac{\partial \pm_{xy}^{(k,i)}}{\partial \text{¸}} + \frac{\partial U^{(k,s-i)}}{\partial \text{¸}} \frac{\partial \pm_{xy}^{(k,i)}}{\partial \P} + 2 \frac{\partial^2 U^{(k,s-i)}}{\partial \P \, \partial \text{¸}} \pm_{xy}^{(k,i)} + \frac{\partial U^{(k,s-i)}}{\partial \P} \frac{\partial \pm_x^{(k,i)}}{\partial \P} + \frac{\partial^2 U^{(k,s-i)}}{\partial \P^2} \pm_x^{(k,i)} \right)$$

$$\pm_{21}^{(k,s)} = \sum_{i=0}^{s} \left(\frac{\partial V^{(k,s-i)}}{\partial \text{¸}} \frac{\partial \pm_y^{(k,i)}}{\partial \text{¸}} + \frac{\partial^2 V^{(k,s-i)}}{\partial \text{¸}^2} \pm_y^{(k,i)} \right) \tag{1.8}$$

$$\pm_{22}^{(k,s)} = \sum_{i=0}^{s} \left(\frac{\partial V^{(k,s-i)}}{\partial \P} \frac{\partial \pm_{xy}^{(k,i)}}{\partial \text{¸}} + \frac{\partial V^{(k,s-i)}}{\partial \text{¸}} \frac{\partial \pm_{xy}^{(k,i)}}{\partial \P} + 2 \frac{\partial^2 V^{(k,s-i)}}{\partial \P \, \partial \text{¸}} \pm_{xy}^{(k,i)} + \frac{\partial V^{(k,s-i)}}{\partial \P} \frac{\partial \pm_x^{(k,i)}}{\partial \P} + \frac{\partial^2 V^{(k,s-i)}}{\partial \P^2} \pm_x^{(k,i)} \right)$$

$$U_{\P}^{(k,s)} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{s} \left(\frac{\partial U^{(k,s-i)}}{\partial \P} \frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial \P} + \frac{\partial V^{(k,s-i)}}{\partial \P} \frac{\partial V^{(k,i)}}{\partial \P} \right)$$

$$V_{\text{¸}}^{(k,s)} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{s} \left(\frac{\partial U^{(k,s-i)}}{\partial \text{¸}} \frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial \text{¸}} + \frac{\partial V^{(k,s-i)}}{\partial \text{¸}} \frac{\partial V^{(k,i)}}{\partial \text{¸}} \right)$$

$$U_{¶¸}^{(k,s)} = \sum_{i=0}^{s} \left(\frac{\partial U^{(k,s-i)}}{\partial ¶} \frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial ¸} + \frac{\partial V^{(k,s-i)}}{\partial ¶} \frac{\partial V^{(k,i)}}{\partial ¸} \right)$$

Члены, обусловленные нелинейностью исходных уравнений, входят в величины $±_1^{*(k,s)}, ±_2^{*(k,s)}$ и $U_{¶}^{(k,s)}, V_{¸}^{(k,s)}, U_{¶¸}^{(k,s)}$.

Полагая, что с самого начала $(s=0)$ должно проявляться влияние неполного контакта, т.е. функции $f(x)$, последняя должна быть представлена в виде

$$f(x) = £^{3+s} f^{(s)}, \quad s = \overline{0, N} \tag{1.9}$$

Удовлетворив условиям контакта (1.2), получим

$$\sigma_{xy0}^{(1,s)} = \sigma_{xy0}^{(2,s)},\ \sigma_{y0}^{(1,s)} = \sigma_{y0}^{(2,s)},\ w^{(1,s)} = w^{(2,s)} = w^{(s)},\ u^{(2,s)} = u^{(1,s)} + f^{(s)} \tag{1.10}$$

Удовлетворив также граничным условиям (1.1), получим следующие дифференциальные уравнения для определения перемещений:

$$C \frac{d^2 u^{(1,s)}}{d¶^2} + C_2 \frac{d^2 f^{(s)}}{d¶^2} = p^{(s)} \tag{1.11}$$

где

$$C_1 = \frac{ς_1}{a_{11}^{(1)}},\ C_2 = -\frac{ς_2}{a_{11}^{(2)}},\ C = \frac{ς_1}{a_{11}^{(1)}} - \frac{ς_2}{a_{11}^{(2)}}$$

$$p^{(s)} = ±_{xy}^{-} - ±_{xy}^{+} + \left(\frac{a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} s_1 - \frac{a_{12}^{(2)}}{a_{11}^{(2)}} s_2 \right) \left(\frac{d±_y^{+(s)}}{d¶} - \frac{d±_y^{*(1,s)}(s_1)}{d¶} \right) + \left(±_{xy}^{*(1,s)}(s_1) - ±_{xy}^{*(2,s)}(s_2) \right)$$

$$±_{xy}^{\pm(0)} = ±_{xy}^{\pm},\ ±_{xy}^{\pm(s)} = 0,\ s \neq 0,$$

а также формулы

$$±_{y0}^{(1,s)} = ±_{y0}^{(2,s)} = ±_y^{+(s)} - ±_y^{*(1,s)}(s_1),\ w^{(1,s)} = w^{(2,s)} = v^{-(s)} - v^{*(2,s)}(s_2) \tag{1.12}$$

$$±_{xy0}^{(1,s)} = ±_{xy0}^{(2,s)} = ±_{xy}^{+(s)}(¶) - \frac{a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} s_1 \frac{d±_{y0}^{(1,s)}}{d¶} + \frac{1}{a_{11}^{(1)}} s \frac{d^2 u_0^{(1,s)}}{d¶^2} - ±_{xy}^{*(1,s)}(s_1)$$

$$v^{-(0)} = v^-,\ v^{-(s)} = 0, \qquad s > 0$$

2. Модель нежёсткого контакта интерпретируют как включение тонкого слоя с исчезающе малой сдвиговой жёсткостью $«_0$ ($«_0$ – константа Ляме) между контактирующими средами. Толщина этого слоя $h_0 \to 0$, а отношение $¡ = \lim\limits_{\substack{h_0 \to 0 \\ «_0 \to 0}} h_0 / «_0$ может принимать любое значение от 0 до ∞.

Предельному случаю $¡ \to 0$ соответствует жёсткий (полный) контакт, другому предельному случаю $¡ \to \infty$ – скользящий контакт $±_{xy}^{(1)} = ±_{xy}^{(2)} = 0$. Для промежуточного состояния принимается

$$u^{(2)} - u^{(1)} = ¡\, l/h ±_{xy}^{(1)} \Big|_{y=0} \tag{2.1}$$

Остальные же условия контакта (1.2) остаются неизменными. Принимая условия (2.1), тем самым, мы задаём функцию $f(x) = ¡\, l/h ±_{xy}^{(1)} \Big|_{y=0}$, что, в свою очередь, последнее условие (1.10) превращает в условие

$$u^{(2,s)} = u^{(1,s)} + ¡ ±_{xy0}^{(1,s)} \tag{2.2}$$

В итоге уравнение (1.11) принимает вид

$$C \frac{d^2 u^{(1,s)}}{d¶^2} - ¡ C_1 C_2 \frac{d^4 u^{(1,s)}}{d¶^4} = \overline{p}^{(s)} \tag{2.3}$$

где

$$\bar{p}^{(s)} = p^{(s)} + \chi C_2\left[\frac{d^2\sigma_{xy}^{+(s)}}{d\xi^2} - \frac{d^2\sigma_{xy}^{*(1,s)}(\xi,\varsigma_1)}{d\xi^2} - \varsigma\frac{a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}\left(\frac{d^3\sigma_y^{+(s)}}{d\xi^3} - \frac{d^3\sigma_y^{*(1,s)}(\xi,\varsigma_1)}{d\xi^3}\right)\right] \tag{2.4}$$

Общее решение дифференциального уравнения (2.3) имеет вид

$$u^{(s)} = C_1^{(s)} + C_2^{(s)}\xi + C_3^{(s)}e^{\sqrt{\frac{C}{\chi C_1C_2}}\xi} + C_4^{(s)}e^{-\sqrt{\frac{C}{\chi C_1C_2}}\xi} + \bar{u}^{(s)}(\xi,\varsigma) \tag{2.5}$$

где $\bar{u}^{(s)}(\xi,\varsigma)$ – некоторое частное решение неоднородного уравнения, $C_i^{(s)}$ – произвольные постоянные интегрирования, $\chi \neq 0$.

Рассмотрим частный случай. Пусть

$$\begin{aligned} &\sigma_{xy}^{-}(x) = \tau^{-} = \mathrm{const},\ v^{-}(x) \equiv 0 \\ &\sigma_{xy}^{+}(x) = \tau^{+} = \mathrm{const},\ \sigma_y^{+}(x) = -p = \mathrm{const} \end{aligned} \tag{2.6}$$

Пользуясь решением (2.5) и формулами (1.6)-(1.8) и вычисляя приближения до $s = 2$ включительно, получим:

$$\begin{aligned}
&\sigma_y^{(k)} = -p,\quad \sigma_{xy}^{(k)} = \frac{1}{2}\left(\tau^{+} + \tau^{-}\right) - \frac{1}{2}\left(\tau^{-} - \tau^{+}\right)\varsigma \\
&\sigma_x^{(k)} = \frac{1}{a_{11}^{(k)}}\left[C_2^{(0)} + C_3^{(0)}\chi_1 e^{\chi_1\xi} - C_4^{(0)}\chi_1 e^{-\chi_1\xi} + \frac{\xi}{C}\left(\tau^{-} - \tau^{+}\right)\right] + \frac{a_{12}^{(k)}}{a_{11}^{(k)}}p + \\
&+\left[\frac{1}{a_{11}^{(k)}}\left(C_2^{(1)} + C_3^{(1)}\chi_1 e^{\chi_1\xi} - C_4^{(1)}\chi_1 e^{-\chi_1\xi}\right)\right]\varepsilon + \frac{1}{a_{11}^{(k)}}\Bigg\{C_2^{(2)} + C_3^{(2)}\chi_1 e^{\chi_1\xi} - C_4^{(2)}\chi_1 e^{-\chi_1\xi} + \frac{\xi}{C}\frac{a_{12}^{(k)}}{\left(a_{11}^{(k)}\right)^2}\times \\
&\times\left(\left(C_3^{(1)}\chi_1^4 e^{\chi_1\xi} + C_4^{(1)}\chi_1^4 e^{-\chi_1\xi}\right)\left(\frac{\varsigma_1^3 - \varsigma_2^3}{6} + \frac{\varsigma_1^2 - \varsigma_2^2}{2}\right) - \chi C_2\left(C_3^{(1)}\chi_1^8 e^{\chi_1\xi} + C_4^{(1)}\chi_1^8 e^{-\chi_1\xi}\right)\left(\frac{\varsigma_1^3}{6} + \frac{\varsigma_1^2}{2}\right)\right) + \\
&+\frac{\xi^2}{2C}\frac{a_{12}^{(k)}}{\left(a_{11}^{(k)}\right)^2}\left(\left(C_3^{(1)}\chi_1^5 e^{\chi_1\xi} - C_4^{(1)}\chi_1^5 e^{-\chi_1\xi}\right)\left(\frac{\varsigma_1^3 - \varsigma_2^3}{6} + \frac{\varsigma_1^2 - \varsigma_2^2}{2}\right) - \chi C_2\left(C_3^{(1)}\chi_1^9 e^{\chi_1\xi} - C_4^{(1)}\chi_1^9 e^{-\chi_1\xi}\right)\times \right. \\
&\left.\times\left(\frac{\varsigma_1^3}{6} + \frac{\varsigma_1^2}{2}\right)\right)\Bigg\}\varepsilon^2 + \frac{a_{12}^{(k)}}{\left(a_{11}^{(k)}\right)^2}\left(C_3^{(1)}\chi_1^3 e^{\chi_1\xi} - C_4^{(1)}\chi_1^3 e^{-\chi_1\xi}\right)\left(\frac{\varsigma^2}{2} + \varsigma\right)\varepsilon^2
\end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}
&U^{(k)} = C_1^{(0)} + C_2^{(0)}\xi + C_3^{(0)}e^{\chi_1\xi} + C_4^{(0)}e^{-\chi_1\xi} + \frac{\xi^2}{2C}\left(\tau^{-} - \tau^{+}\right) + \left(C_1^{(1)} + C_2^{(1)}\xi + C_3^{(1)}e^{\chi_1\xi} + C_4^{(1)}e^{-\chi_1\xi}\right)\varepsilon + \\
&+\Bigg\{\frac{a_{66}^{(k)}}{2}\left(\tau^{+} + \tau^{-}\right)\varsigma - \frac{a_{66}^{(k)}}{4}\left(\tau^{-} - \tau^{+}\right)\varsigma^2 - \frac{a_{12}^{(k)}}{a_{11}^{(k)}}\left(C_3^{(1)}\chi_1^2 e^{\chi_1\xi} + C_4^{(1)}\chi_1^2 e^{-\chi_1\xi} + \frac{\tau^{-} - \tau^{+}}{C}\right)\left(\frac{\varsigma^2}{2} + \varsigma\right) + \\
&+C_1^{(2)} + C_2^{(2)}\xi + C_3^{(2)}e^{\chi_1\xi} + C_4^{(2)}e^{-\chi_1\xi} + \frac{\xi^2}{2C}\frac{a_{12}^{(k)}}{\left(a_{11}^{(k)}\right)^2}\left(\left(C_3^{(1)}\chi_1^4 e^{\chi_1\xi} + C_4^{(1)}\chi_1^4 e^{-\chi_1\xi}\right)\left(\frac{\varsigma_1^3 - \varsigma_2^3}{6} + \frac{\varsigma_1^2 - \varsigma_2^2}{2}\right) - \right. \\
&\left.-\chi C_2\left(C_3^{(1)}\chi_1^8 e^{\chi_1\xi} + C_4^{(1)}\chi_1^8 e^{-\chi_1\xi}\right)\left(\frac{\varsigma_1^3}{6} + \frac{\varsigma_1^2}{2}\right)\right)\Bigg\}\varepsilon^2 \\
&V^{(k)} = \left\{\frac{a_{12}^{(k)}}{a_{11}^{(k)}}\left(C_2^{(0)} + C_3^{(0)}\chi_1 e^{\chi_1\xi} - C_4^{(0)}\chi_1 e^{-\chi_1\xi} + \frac{\xi}{C}\left(\tau^{-} - \tau^{+}\right)\right)(\varsigma + 1) + \frac{\left(a_{12}^{(k)}\right)^2 - a_{11}^{(k)}a_{21}^{(k)}}{a_{11}^{(k)}}p(\varsigma + 1)\right\}\varepsilon + \\
&+\left\{\frac{a_{12}^{(k)}}{a_{11}^{(k)}}\left(C_2^{(1)} + C_3^{(1)}\chi_1 e^{\chi_1\xi} - C_4^{(1)}\chi_1 e^{-\chi_1\xi}\right)(\varsigma + 1)\right\}\varepsilon^2
\end{aligned}$$

где $¡_1 = \sqrt{\frac{C}{¡ C_1 C_2}}$

Поправки, обусловленные нелинейностью задачи, проявляются, начиная с приближения $s = 2$. Эти поправки будут существенными для сильно анизотропных материалов при большой изменяемости внешних загрузок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А.Л. Теория тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 510с.
2. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, Физматлит. 1997. 415с.
3. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: Изд-во ”Гитутюн” НАН РА, 2005. 468с.
4. Хачатрян Ш.М. К определению напряжённо-деформированного состояния анизотропной полосы. //Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1976. Т.29. N6. С.19-32.
5. Багдасарян Ю.М., Хачатрян А.М. К определению напряжённо-деформированного состояния анизотропной двухслойной балки с проскальзыванием. //В сб.: “Актуальные проблемы неоднородной механики”. Материалы Всес. науч. семинара, Ереван: 1991. 390с.
6. Агаловян Л.А., Товмасян А.Б. О смешанной краевой задаче для анизотропной термоупругой полосы.//Докл. АН Армении. 1991. Т.92. N2. С.76-81.
7. Петросян Г.А. Об одной смешанной задаче анизотропной полосы-прямоугольника. //Уч. записки АрГУ. N1(14). 2007. С.36-42.
8. Агаловян Л.А., Хачатрян А.М. К решению первой краевой задачи для анизотропной полосы на основе геометрически налинейной теории упругости.//Изв. Вузов. Северо-кавказский регион. Естественные науки. 2001. Спецвыпуск. С.16-18.
9. Саркисян Н.С. Об одной смешанной краевой задаче анизотропной двухслойной полосы-прямоугольника по геометрически нелинейной теории упругости.//Уч. записки АрГУ. 1(27).2013. С.116-123.
1. 10.Хачатрян А.М., Товмасян А.Б. Смешанные краевые задачи для однослойной анизотропной полосы-балки по геометрически нелинейной теории упругости. //V межд. конф.(1-7 октября, Горис, 2005г.) Проблемы динамки взаимодействия деформируемых сред. Ереван: Изд-во “Гитутюн” НАН РА, 2005. 350с.
10. Агаловян Л.А., Хачатрян А.М. О двух задачах анизотропной двухслойной полосы при неполном контакте между слоями. //Изв. НАН Армении. Механика. 1997. Т.50. N3-4. С.34-41.
11. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. Л.–М.: 1948.

Сведения об авторе:

Саркисян Нарине Суреновна – аспирант кафедры математики, факультет физики и математики, АрГУ, НКР, Степанакерт, ул. Мхитара Гоша, 5. **Тел.:** (374 97) 21 00 78

E-mail: narine_sargsyan_2012@mail.ru

ОПТИМАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА С ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНОЙ

Симонян Э.Г., Киракосян Г.Н.

В работе рассматривается задача оптимальной стабилизации математического маятника с переменной длиной, при изменении длины маятника по данному закону. Составлена система дифференциальных уравнений управляемого движения маятника. Ограничиваясь малыми колебаниями и вводя малый параметр, сформулирована задача оптимальной стабилизации нижнего положения равновесия маятника в случае малых колебаний. Задача решена методом Ляпунова – Беллмана, получены оптимальная функция Ляпунова и оптимальное управляющее воздействие.

<u>Постановка задачи</u>. Рассмотрим материальную точку массой m, которая прикреплена на конце невесомого стержня с переменной длиной $l(t)$. Стержень может вращаться вокруг горизонтальной оси Oz (рис. 1). Известно, что задача устойчивости такого движения маятника решена, когда дан закон изменения длины стержня маятника [1].

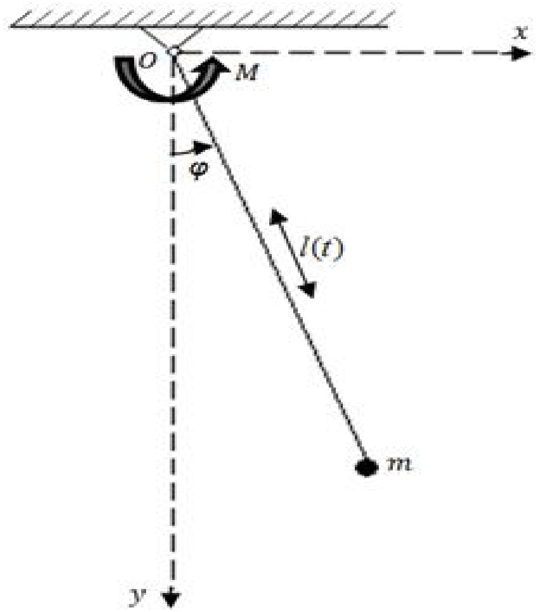


Рис. 1

Направим ось Ox в горизонтальном направлении, а ось Oy – в вертикальном направлении.

Предположим, что в точке подвеса маятника O установлено управляющее оборудование, которое создает управляющий момент M.

Напишем дифференциальное уравнение движения системы, пользуясь законом изменения момента количества движения. Будем иметь:

$$\frac{d}{dx}\left(ml^2(t)\dot{\varphi}\right) = -mgl(t)\sin\varphi + M . \tag{1}$$

В уравнении (1) φ – угол, составленный стержнем и осью Oy.

После дифференцирования левой части уравнения (1) и замены переменной $d\tau = \frac{dt}{l^2(t)}$ получим

$$ml^2(t)\frac{\left(\frac{d^2y(\tau)}{d\tau^2} - 2l^3(t)\frac{dl(t)}{dt}\dot{\varphi}\right)}{l^4(t)} + 2ml(t)\dot{\varphi}\frac{dl(t)}{dt} + mgl(t)\sin\varphi = M . \tag{2}$$

Вводя обозначения $\omega^2(\tau) = gl^3(t(\tau))$, $y(\tau) = \varphi(t(\tau))$, $U = l^2(t)\frac{M}{m}$, уравнение (2) представим в виде:

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + \omega^2(\tau)\sin y = U . \tag{3}$$

Предположим, что угол φ малый $(\varphi << 1)$, тогда можно принять $\sin\varphi \approx \varphi$ и $\cos\varphi \approx 1$. Введём малый параметр $\varepsilon << 1$ и обозначение $y = \varepsilon \cdot x$. Имеем $y'' = \varepsilon \cdot x''$, $\varepsilon << 1$, следовательно, будем иметь уравнение $\varepsilon x'' + \omega^2(\tau)\varepsilon x = U$ или

$$x'' + \omega^2(\tau)x = u , \tag{4}$$

где $u = \frac{U}{\varepsilon}$.

Напишем уравнение (4) в виде системы. Для этого обозначим $x_1 = x$, $x_2 = x'$. Получим следующую систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\mu^2(\text{²})x_1 + u \end{cases}. \tag{5}$$

Возьмем за признак качества следующий функционал:

$$J[u] = \int_0^\infty \left(x_2^{\,2} + u^2\right) d\text{²} \ . \tag{6}$$

Сформулируем следующую задачу:

Задача. Требуется найти такое управляющее воздействие u^o, которое сделает решение $x_1 = x_2 = 0$ $\left(\ddot{\ } = \ddot{\ } = 0\right)$ системы (4) асимптотически устойчивым, минимизируя функционал (6).

Чтобы решение задачи оптимальной стабилизации системы (5) существовало и было единственным, необходимо и достаточно, чтобы для этой системы $\operatorname{rank} K_{¦}(t) = 2$, где $K_{¦}(t)$– матрица Калмана и $K_{¦}(t) = \{L_1(t), L_2(t)\}$, $\left(L_1(t) = B(t), \qquad L_2(t) = A(t)L_1(t) - \dfrac{dL_1(t)}{dt} \right)$.

Так как для системы (5)

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\mu^2(\text{²}) & 0 \end{pmatrix} \text{ и } B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

то будем иметь

$$L_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad L_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } K_{¦}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $\operatorname{rank} K_{¦}(t) = 2$, т.е. решение задачи оптимальной стабилизации системы (5) существует и является единственным.

Решение. Для решения задачи оптимальной стабилизации системы (5) воспользуемся методом Ляпунова – Беллмана [2, 3]. Составим выражение Беллмана для системы (5):

$$B[\cdot] = \frac{\partial V}{\partial \text{²}} + \frac{\partial V}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}\dot{x}_2 + x_2^{\,2} + u^2, \tag{7}$$

где $V(\text{²})$ – функция Ляпунова.

Функция $B[\cdot]$ при оптимальном управляющем воздействии u^o должна иметь минимум по u, равный нулю, следовательно, $\left.\dfrac{\partial B[\cdot]}{\partial u}\right|_{u^o} = 0$ и $B[\cdot]\,\big|_{u^o} = 0$. Из данного условия получаем следующие соотношения, соответственно:

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} + 2u^o = 0\,, \tag{8}$$

$$B[\cdot] = \frac{\partial V}{\partial \text{²}} + \frac{\partial V}{\partial x_1}x_2 + \frac{\partial V}{\partial x_2}\left(-\mu^2(\text{²})x_1 + u\right) + x_2^{\,2} + u^2 = 0\,. \tag{9}$$

Из уравнения (8) находим

$$u^o = -\frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial x_2}\,, \tag{10}$$

Подставив найденное управляющее воздействие u^o (10) в уравнение (9), получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial V}{\partial \text{²}} + \frac{\partial V}{\partial x_1}x_2 - \frac{\partial V}{\partial x_2}\mu^2(\text{²})x_1 - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)^2 + x_2^{\,2} = 0\,. \tag{11}$$

Функцию Ляпунова будем искать в следующем виде:

$$V\left(x_1, x_2, \tau\right) = \frac{1}{2}\left(c_{11}\left(\tau\right)x_1^{\,2} + 2c_{12}\left(\tau\right)x_1x_2 + c_{22}\left(\tau\right)x_2^{\,2}\right). \tag{12}$$

Подставляя выражение (12) в уравнение (11), получим:

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\frac{dc_{11}\left(\tau\right)}{d\tau}x_1^{\,2} + \frac{dc_{12}\left(\tau\right)}{d\tau}x_1x_2 + \frac{1}{2}\frac{dc_{22}\left(\tau\right)}{d\tau}x_2^{\,2} + \left(c_{11}\left(\tau\right)x_1 + c_{12}\left(\tau\right)x_2\right)x_2 - \\ -\left(c_{12}\left(\tau\right)x_1 + c_{22}\left(\tau\right)x_2\right)\mu^2\left(\tau\right)x_1 - \frac{1}{4}\left(c_{12}\left(\tau\right)x_1 + c_{22}\left(\tau\right)x_2\right)^2 + x_2^{\,2} = 0.\end{gathered} \tag{13}$$

В уравнении (13) приравним нулю члены одинакового порядка переменных x_1 и x_2. Для определения функций $c_{ij}\left(\tau\right)$ получим следующую систему дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}\dfrac{dc_{11}\left(\tau\right)}{d\tau} - \mu^2\left(\tau\right)c_{12}\left(\tau\right) - \dfrac{1}{4}c_{12}^{\,2}\left(\tau\right) = 0\\ \dfrac{1}{2}\dfrac{dc_{22}\left(\tau\right)}{d\tau} + c_{12}\left(\tau\right) - \dfrac{1}{4}c_{22}^{\,2}\left(\tau\right) + 1 = 0\\ \dfrac{dc_{12}\left(\tau\right)}{d\tau} + c_{11}\left(\tau\right) - \mu^2\left(\tau\right)c_{22}\left(\tau\right) - \dfrac{1}{2}c_{12}\left(\tau\right)c_{22}\left(\tau\right) = 0\end{cases}. \tag{14}$$

Предположим, что длина маятника меняется по следующему закону:

$$l\left(t\right) = l_0 + a\cos\left(\omega t\right), \tag{15}$$

где l_0, a и ω – положительные постоянные, т.е. длина маятника меняется по закону косинуса, a – амплитуда колебаний, а ω – частота колебаний. Для $\mu^2\left(\tau\right)$ будем иметь следующее выражение:

$$\mu^2\left(\tau\right) = g\left(l_0 + a\cos\left(\omega\frac{1 + a\cos\omega\tau\, l_0}{a^2\cos\omega^{\tau\tau}}\right)\right)^3. \tag{16}$$

Разложим функцию $\cos\left(\omega\dfrac{1 + a\cos\omega\tau\, l_0}{a^2\cos\omega^{\tau\tau}}\right)$ в ряд по τ. Ограничиваясь членами до третьего порядка получаемого ряда, поставим выражение (16) в систему уравнений (14). Получим нижеследующую систему нелинейных дифференциальных уравнений (17) от функций $c_{ij}\left(\tau\right)$.

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}\dfrac{dc_{11}\left(\tau\right)}{d\tau} - g\left(l_0 + a\left(\cos\dfrac{(1+a)\omega}{a^2} - \dfrac{\left(\omega^5 + a\omega^5 - a\omega^3 l_0^{\,2}\right)\sin\dfrac{(1+a)\omega}{a^2}}{2a^2}\tau^2\right)\right)^3 c_{12}\left(\tau\right) - \dfrac{1}{4}c_{12}^{\,2}\left(\tau\right) = 0\\ \dfrac{1}{2}\dfrac{dc_{22}\left(\tau\right)}{d\tau} + c_{12}\left(\tau\right) - \dfrac{1}{4}c_{22}^{\,2}\left(\tau\right) + 1 = 0\\ \dfrac{dc_{12}\left(\tau\right)}{d\tau} + c_{11}\left(\tau\right) - g\left(l_0 + a\left(\cos\dfrac{(1+a)\omega}{a^2} - \dfrac{\left(\omega^5 + a\omega^5 - a\omega^3 l_0^{\,2}\right)\sin\dfrac{(1+a)\omega}{a^2}}{2a^2}\tau^2\right)\right)^3 c_{22}\left(\tau\right) - \dfrac{1}{2}c_{12}\left(\tau\right)c_{22}\left(\tau\right) = 0\end{cases} \tag{17}$$

При решении системы (17) в качестве начальных значений берём $c_{11}\left(0\right) = c_{12}\left(0\right) = c_{22}\left(0\right) = 0$.

Система (17) – система нелинейных нестационарных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, решение которой получить аналитическим методом невозможно. Решение системы получено с помощью программного комплекса Microsoft Visual C++. Ниже приведён рис.2 со значениями и графиками $c_{ij}\left(\tau\right)$, соответственно, при $l_0 = 1м$, $a = 0.1м$, $\mu = 0,2с^{-1}$.

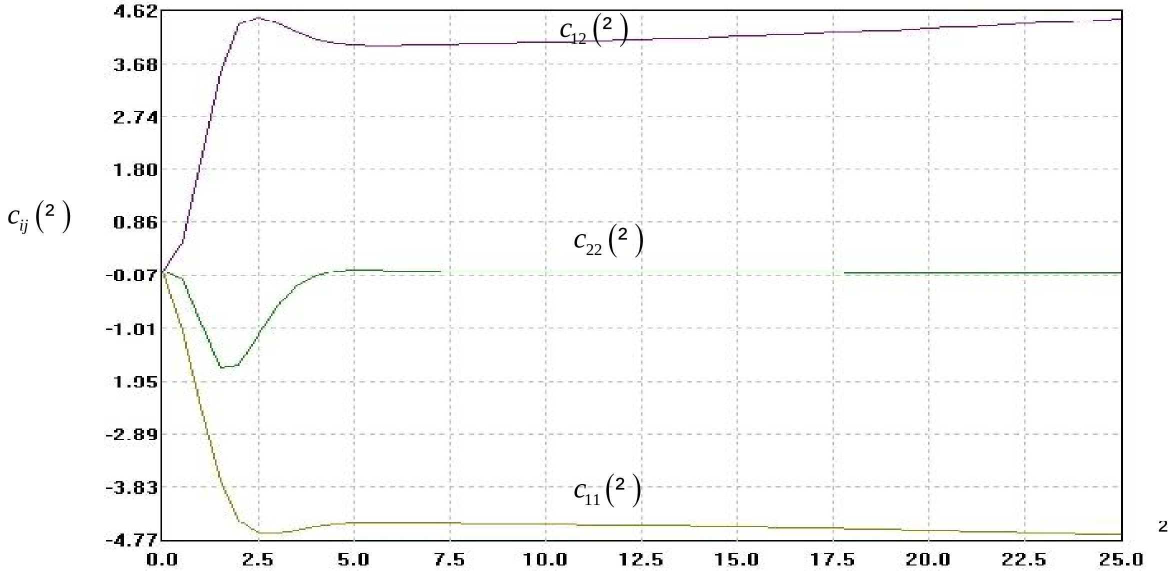


Рис. 2. Графики значений $c_{ij}(\tau)$ при $l_0 = 1м$, $a = 0.1м$, $\mu = 0,2в^{-1}$

С помощью программы Microsoft Excel получены приближения функций $c_{ij}(\tau)$ шестого порядка, которые имеют следующий вид:

$$\begin{cases} c_{11}(\tau) = 3\cdot 10^{-6}\tau^6 - 0.0002\tau^5 + 0.007\tau^4 - 0.1118\tau^3 + 0.9097\tau^2 - 3.4594\tau + 0.0784 \\ c_{12}(\tau) = -3\cdot 10^{-6}\tau^6 + 0.0002\tau^5 - 0.0074\tau^4 + 0.1176\tau^3 - 0.9436\tau^2 + 3.4969\tau - 0.3269 \\ c_{22}(\tau) = 2\cdot 10^{-6}\tau^6 - 0.0002\tau^5 + 0.0051\tau^4 - 0.0727\tau^3 + 0.4785\tau^2 - 1.1329\tau - 0.1405 \end{cases}. \tag{18}$$

В силу выражений (12) и (18) будем иметь:

$$\begin{aligned} V(x_1, x_2, \tau) = \frac{1}{2}\Big(&\left(3\cdot 10^{-6}\tau^6 - 0.0002\tau^5 + 0.007\tau^4 - 0.1118\tau^3 + 0.9097\tau^2 - 3.4594\tau + 0.0784\right)x_1^2 - \\ &- 2\left(3\cdot 10^{-6}\tau^6 - 0.0002\tau^5 + 0.0074\tau^4 - 0.1176\tau^3 + 0.9436\tau^2 - 3.4969\tau + 0.3269\right)x_1 x_2 + \\ &+ \left(2\cdot 10^{-6}\tau^6 - 0.0002\tau^5 + 0.0051\tau^4 - 0.0727\tau^3 + 0.4785\tau^2 - 1.1329\tau - 0.1405\right)x_2^2\Big) \end{aligned} \tag{19}$$

Для оптимального управляющего воздействия и выражения (10) будем иметь:

$$\begin{aligned} u^o = -\frac{1}{2}\Big(&\left(-3\cdot 10^{-6}\tau^6 + 0.0002\tau^5 - 0.0074\tau^4 + 0.1176\tau^3 - 0.9436\tau^2 + 3.4969\tau - 0.3269\right)x_1 + \\ &+ \left(2\cdot 10^{-6}\tau^6 - 0.0002\tau^5 + 0.0051\tau^4 - 0.0727\tau^3 + 0.4785\tau^2 - 1.1329\tau - 0.1405\right)x_2\Big). \end{aligned} \tag{20}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Красильников П.С., Сторожкина Т.А. Исследование резонансных колебаний математического маятника переменной длины. //Электронный журнал «Труды МАИ». Выпуск № 46.
2. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475с.
3. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. Доп. 4. М.: Наука, 1966. С.475-514.

Сведения об авторах:

Симонян Эрикназ Геворговна – магистр кафедры механики, Ереванский государственный университет, факультет математики и механики, (+374 94) 33 74 62
E-mail: hersim@mail.ru

Киракосян Галя Норайровна – аспирант кафедры механики, Ереванский государственный университет, факультет математики и механики, (374 10) 25 21 51, (374 99) 37 17 30
E-mail: galyakirakosyan@gmail.com

КОЛЕБАНИЯ БЕЗМОМЕНТНОЙ НЕЗАМКНУТОЙ ОРТОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПЕРЕМЕННОЙ КРИВИЗНЫ СО СВОБОДНЫМИ ТОРЦАМИ И ЖЕСТКО ЗАЩЕМЛЕННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ ОБРАЗУЮЩИМИ

Срапионян Дж.Л.

Исследуются собственные краевые колебания ортотропной безмоментной незамкнутой цилиндрической оболочки переменной кривизны со свободными торцами и жёстко защемлёнными граничными образующими.

1. Постановка задач и некоторые математические особенности. Рассматриваются собственные колебания незамкнутой ортотропной безмоментной цилиндрической оболочки переменной кривизны со свободными торцами и жёстко защемлёнными граничными образующими. На поверхности оболочки вводятся криволинейные координаты (α,β), где $\alpha(0\le\alpha\le l)$ и $\beta(0\le\beta\le s)$ являются соответственно текущей длиной образующей и текущей длиной дуги направляющей кривой (рис. 1), l – длина цилиндрической оболочки, а s – длина направляющей кривой.

Предполагается, что квадрат кривизны направляющей кривой поверхности можно представить в виде ряда.

$$R^{-2}=k^2\left(r_0/2+\sum_{m=1}^{\infty}r_m\cos km\beta\right),\ 0\le\beta\le s,\quad k=2\pi/s,\ \sum_{m=1}^{\infty}\left|r_m\right|<+\infty \tag{1.1}$$

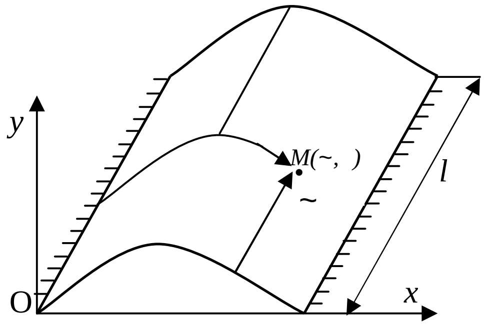


Рис. 1

В качестве исходных уравнений, описывающих колебания оболочки, используются уравнения, которые соответствуют безмоментной теории ортотропных цилиндрических оболочек, записанные в выбранных криволинейных координатах $\alpha,\ \beta$ [1]

$$\begin{gathered}
-B_{11}\frac{\partial^2u_1}{\partial\alpha^2}-B_{66}\frac{\partial^2u_1}{\partial\beta^2}-(B_{11}+B_{66})\frac{\partial^2u_2}{\partial\alpha\partial\beta}+B_{12}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{u_3}{R}\right)=\lambda u_1\\
-(B_{12}+B_{66})\frac{\partial^2u_1}{\partial\alpha\partial\beta}-B_{66}\frac{\partial^2u_2}{\partial\alpha^2}-B_{22}\frac{\partial^2u_2}{\partial\beta^2}+B_{22}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{u_3}{R}\right)=\lambda u_2\\
-\frac{B_{12}}{R}\frac{\partial u_1}{\partial\alpha}-\frac{B_{22}}{R}\frac{\partial u_2}{\partial\beta}+\frac{B_{22}}{R^2}u_3=\lambda u_3
\end{gathered} \tag{1.2}$$

Здесь u_1,u_2,u_3 – проекции вектора перемещений, соответственно в направлениях α,β и нормали поверхности оболочки, B_{ik} – коэффициенты упругости, $R^{-1}=R^{-1}(\beta)$ – кривизна направляющей кривой поверхности, $\lambda=\omega^2\rho$, где ω – частота собственных колебаний, ρ – плотность материала. Граничные условия имеют вид [1]

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha}+\frac{B_{12}}{B_{11}}\left(\frac{\partial u_2}{\partial \beta}-\frac{u_3}{R}\right)\Bigg|_{\alpha=0,l}=0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial \beta}+\frac{\partial u_2}{\partial \alpha}\Bigg|_{\alpha=0,l}=0 \qquad (1.3)$$

$$u_1\big|_{\beta=0,s}=u_2\big|_{\beta=0,s}=0 \qquad (1.4)$$

где соотношения (1.3) являются условиями свободного края при $\alpha=0,\ \alpha=l$, а соотношения (1.4) – условиями жёсткого защемления при $\beta=0,\ \beta=s$. Для пары вектор-функций $f^{(j)}(\alpha,\beta)=(u_1^{(j)},u_2^{(j)},u_3^{(j)}),\ j=1,2$ введём скалярное произведение по формуле

$$\left(f^{(1)},f^{(2)}\right)=\int_0^l\int_0^s\sum_{j=1}^{3}u_j^{(1)}\bar{u}_j^{(2)}d\beta d\alpha\,. \qquad (1.5)$$

Обозначим через $L_0^{(cc)}$ оператор, соответствующий левой части системы уравнений (1.2), первоначально определённый на гладких вектор-функциях, удовлетворяющих условиям (1.3)-(1.4). Нетрудно проверить, что для таких вектор-функций выполняется соотношение

$$(L_0^{(cc)}f^{(1)},f^{(2)})=(f^{(1)},L_0^{(cc)}f^{(2)})\,. \qquad (1.6)$$

Более того, для любой функции $f^{(j)}(\alpha,\beta)=(u_1^{(j)},u_2^{(j)},u_3^{J}),\ j=1,2$, удовлетворяющей условиям (1.3)-(1.4), имеет место неравенство

$$(L_0^{(cc)}f,f)\geq 0\,. \qquad (1.7)$$

Из неравенства (1.7) следует, что с задачей на собственные значения (1.2)-(1.4) можно связать неотрицательно определённый самосопряжённый оператор (расширения по Фридрихсу оператора), для которого сохраним обозначение $L_0^{(cc)}$. Можно доказать, что спектр оператора $L_0^{(cc)}$ неотрицателен и не является чисто дискретным. Оказывается, что при любых граничных условиях, операторы, порождённые системой уравнений (1.2), имеют участок непрерывного спектра, совпадающий с отрезком $\left[0,\ \lambda_0\right]$ – множеством значений функции

$$\Omega(\beta,\theta)=\frac{B_{66}(B_{11}B_{22}-B_{12}^2)R^{-2}(\beta)\sin^4\theta}{B_{66}(B_{11}\sin^4\theta+B_{22}\cos^4\theta)+(B_{11}B_{22}-B_{12}^2-2B_{12}B_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta} \qquad (1.8)$$

$$0\leq\beta\leq s,\ 0\leq\theta\leq 2\pi$$

Отметим, что появление этого участка непрерывного спектра является результатом нарушения эллиптичности системы (1.2) по Дуглису-Ниренбергу. Для существования нетривиального решения задачи (1.2)-(1.4) следует дополнительно потребовать выполнение вдоль границы некоторого условия алгебраического характера. Это условие называется условием дополнительности (условие Шапиро-Лопатинского). Отметим, что для задачи (1.2)-(1.4) условие Шапиро-Лопатинского эквивалентно условию [2]

$$\theta(\lambda,\beta)\big|_{\beta=0,\beta=s}=B_{66}(\lambda-B_{22}R^{-2}(\beta))+\sqrt{B_{22}\lambda(B_{11}\lambda-(B_{11}B_{22}-B_{12}^2)R^{-2}(\beta))}\Big|_{\beta=0,s}\neq 0 \qquad (1.9)$$

Множество значений λ (не более двух точек), при которых нарушается условие (1.9), т.е. имеем равенство

$$\theta(\lambda,\beta)/_{\beta=0,\beta=s}=0\,, \qquad (1.10)$$

обозначим через Ω_γ. Вне множества $[0,\lambda_0]\cup\Omega_\gamma$ для оператора $L_0^{(c,c)}$ выполняется условие дополнительности (1.9) (условие Шапиро–Лопатинского).

Справедливо следующее утверждение: вне множества $[0,\lambda_0]\cup\Omega_\gamma$ спектр оператора $L_0^{(c,c)}$ состоит из изолированных собственных значений конечной кратности. Это утверждение следует из следующего общего утверждения [3].

Теорема. Для того, чтобы точка ª принадлежала непрерывному спектру оператора $L_0^{(c,c)}$, необходимо и достаточно, чтобы при этом ª нарушалось условие эллиптичности системы (1.2) или условие Шапиро–Лопатинского краевой задачи (1.2)-(1.4).

Заметим, что оператор $L_0^{(c,c)}$ имеет сколь угодно большие положительные собственные значения. Это следует из его неотрицательности и неограниченности. Этот факт позволяет задачу (1.2)-(1.4) изучать в виде обобщённой задачи на собственные значения [4] с применением обобщённого метода сведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям Канторовича-Власова.

2. Дисперсионные уравнения оператора $L_0^{(c,c)}$. Решение системы (1.2), удовлетворяющее условиям (1.4), ищем в виде

$$u_1 = \exp(k\chi\alpha)\left(\sum_{m=1}^{\infty} u_m \sin km\beta\right), \quad u_2 = \exp(k\chi\alpha)\left(\sum_{m=1}^{\infty} v_m (1-\cos km\beta)\right),$$
$$w = k\exp(k\chi\alpha)\left(\sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin km\beta\right) \tag{2.1}$$

Здесь $w = u_3/R$, u_m, v_m, w_m - неопределённые коэффициенты, χ – неопределённый коэффициент затухания. Подставим выражения (2.1) в первые два уравнения системы (1.2). Полученные уравнения умножаем на $\sin kmB$, $\cos kmB$ соответственно и интегрируем в пределах от 0 до s. В итоге получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \left(B_{11}\chi^2 - B_{66}m^2 + \lambda/k^2\right)u_m + \left(B_{12}+B_{66}\right)\chi_m \nu_m = B_{12}\chi w_m \\ (B_{12}+B_{66})\chi_m u_m - (B_{66}\chi^2 - B_{22}m^2 + \lambda/k^2)\nu_m = B_{22} m w_m \end{cases}, \tag{2.2}$$

откуда получим соотношения:

$$C_m u_m = \chi a_m w_m,\ C_m \upsilon_m = -m b_m w_m \tag{2.3}$$

$$a_m = \frac{B_{12}}{B_{11}}\chi^2 + \frac{B_{22}}{B_{11}}m^2 + \frac{B_{12}}{B_{11}}\eta^2,\ \eta^2 = \frac{\lambda}{k^2 B_{66}},\ b_m = \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}}\chi^2 - \frac{B_{22}}{B_{11}}m^2 + \frac{B_{22}}{B_{11}}\eta^2 \tag{2.4}$$

$$c_m = \chi^4 - \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - 2B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}}m^2\chi^2 + \frac{B_{11}+B_{66}}{B_{11}}\eta^2\chi^2 + (m^2 - \eta^2)\left(\frac{B_{22}}{B_{11}}m^2 - \frac{B_{66}}{B_{11}}\eta^2\right).$$

Обе части третьего уравнения системы (1.2) умножим на R^{-1} и подставим в него представление (2.1). Учитывая представление (1.1), соотношения (2.3), правило умножения тригонометрических рядов, обе части полученного уравнения умножим на $\sin km\beta$ и проинтегрируем в пределах от 0 до s, придём к бесконечной системе уравнений:

$$\left((r_0 - r_{2m})A_m - 2\frac{B_{66}}{B_{22}}\eta^2\right)w_m + \sum_{n=1, n\neq m}^{\infty}(r_{|n-m|} - r_{n+m})A_n w_n = 0,\ m = \overline{1,+\infty}, \tag{2.5}$$

$$A_n = P_n \big/ c_n,\ P_n = c_n + n^2 b_n - B_{12}\big/B_{22}\chi^2 a_n,\ n = \overline{1,+\infty}, \tag{2.6}$$

Бесконечный определитель системы (2.5) при $\lambda \notin [0,\lambda]$ и χ в области определения коэффициентов (2.6) относится к известному классу сходящихся определителей – к нормальным определителям. Чтобы система (2.5) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы её определитель равнялся нулю:

$$D(\chi^2, \eta^2, B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22}, B_{66}, r_0, r_1, \ldots, r_m, \ldots) = 0. \tag{2.7}$$

Предположим, что χ_1, χ_2 – различные корни уравнения (2.7) с неположительными действительными частями, тогда $\chi_3 = -\chi_1$, $\chi_4 = -\chi_2$ также являются различными корнями уравнения (2.7). Пусть $(w_1^{(j)}, w_2^{(j)},\ ...,\ w_m^{(j)},...)$, $j=\overline{1,4}$ являются нетривиальными решениями системы (2.5) при χ_j, $j=\overline{1,4}$ соответственно. Представим решение задачи (1.2)-(1.4) в виде

$$u_i = \sum\nolimits_{j=1}^{4} u_i^{(j)},\ i=1,2,\ \ w=\sum\nolimits_{j=1}^{4} w^{(j)}\ , \tag{2.8}$$

где $u_i^{(j)}, w^{(j)}, i=1{,}2,\ j=\overline{1{,}4}$ – решения системы (1.2), имеющие вид (2.1) при $\chi=\chi_j$. Подставим (2.8) в граничные условия (1.3). Полученные уравнения, содержащие $\sin km\beta$, умножаем на $\sin km\beta$, а уравнения, содержащие $\cos km\beta$, умножаем на $\cos km\beta$, затем интегрируя в пределах от 0 до s, получим совокупность систем уравнений:

$$\sum_{j=1}^{4}\frac{R_{1j}^{(m)}}{C_m^{(j)}}W_m^{(j)}=0,\quad \sum_{j=1}^{4}\frac{R_{2j}^{(m)}}{C_m^{(j)}}W_m^{(j)}=0\qquad m=\overline{1,+\infty} \tag{2.9}$$

$$\sum_{j=1}^{4}\frac{R_{1j}^{(m)}\exp(z_j)}{C_m^{(j)}}W_m^{(j)}=0\ ,\quad \sum_{j=1}^{4}\frac{R_{2j}^{(m)}\exp(z_j)}{C_m^{(j)}}W_m^{(j)}=0$$

$$R_{1j}^{(m)}=\chi_j^2 a_m^{(j)}-\frac{B_{1,2}}{B_{11}}m^2 b_m^{(j)}-\frac{B_{1,2}}{B_{11}}c_m^{(j)},\ R_{2j}^{(m)}=\chi_j(a_m^{(j)})+b_m^{(j)}),\ z_j=k\chi_j l \tag{2.10}$$

а $a_m^{(j)}, b_m^{(j)}, c_m^{(j)}$ – значения a_m, b_m, c_m из (2.4) при $\chi=\chi_j$ соответственно. Чтобы совокупность систем уравнений (2.9) имела нетривиальное решение, достаточно, чтобы совокупность уравнений

$$\Delta=\mathbf{Det}\begin{Vmatrix} R_{11}^{(m)} & R_{12}^{(m)} & R_{11}^{(m)}\exp(z_1) & R_{12}^{(m)}\exp(z_2) \\ R_{21}^{(m)} & R_{22}^{(m)} & -R_{21}^{(m)}\exp(z_1) & -R_{22}^{(m)}\exp(z_2) \\ R_{11}^{(m)}\exp(z_1) & R_{12}^{(m)}\exp(z_1) & R_{11}^{(m)} & R_{12}^{(m)} \\ R_{21}^{(m)}\exp(z_1) & R_{22}^{(m)}\exp(z_1) & -R_{21}^{(m)} & -R_{22}^{(m)} \end{Vmatrix}=0\qquad m=\overline{1,+\infty} \tag{2.11}$$

вне множества $[^{-}, ª_0]\cup\Omega_{¥}$ имела ª-решение. Заметим, что определитель из (2.11) можно привести к виду:

$$\Delta=m^{14}(x_2-x_1)^2\,\mathbf{Det}\|m_{ij}\|_{i,j=1}^{4} \tag{2.12}$$

$$\mathbf{Det}\|m_{ij}\|_{i,j=1}^{4}=K_2^2(\eta_m^2,x_1,x_2)(1+\exp(2z_1+2z_2))+$$

$$8m_{11}m_{22}m_{12}m_{21}\exp(z_1+z_2)-(m_{11}m_{22}+m_{12}m_{21})^2(\exp(2z_1)+\exp(2z_2)-$$

$$4m_{11}m_{22}(m_{11}m_{22}+m_{12}m_{21})(\exp(z_2)-\exp(z_1))[z_1z_2]-4m_{11}^2m_{21}^2[z_1,z_2]^2,$$

$$x_j=\chi_1/m,\ \eta_m=\eta/m,\ [z_1,z_2]=kml(\exp(z_2)-\exp(z_1)/(z_2-z_1)$$

$$K_2(\eta_m^2,x_1,x_2)=\delta_1x_1^2x_2^2+\delta_2x_1x_2+\delta_3(x_1^2+x_2^2)+\delta_4$$

$$\delta_1=\frac{B_{11}B_{22}-B_{12}^2}{B_{11}^2}\left(\frac{B_{11}B_{22}-B_{12}^2}{B_{11}B_{66}}-\frac{B_{12}}{B_{11}}\eta_m^2\right),\qquad z_j=kmx_jl$$

$$\delta_2=-\eta_m^2\left(\frac{B_{22}(B_{11}B_{22}-B_{12}^2)}{B_{11}^3}+\frac{B_{12}(B_{11}B_{22}-B_{12}^2-B_{22}B_{66}-B_{12}B_{66})}{B_{11}^3}\eta_m^2\right) \tag{2.13}$$

$$\delta_3=\frac{B_{12}(B_{11}B_{22}-B_{12}^2)}{B_{11}^3}\eta_m^2(1-\eta_m^2),\ \ \delta_4=\frac{B_{12}B_{66}(B_{12}+B_{66})}{B_{11}^3}\eta_m^4(1-\eta_m^2)$$

$$m_{11}=\left(\frac{B_{11}B_{22}-B_{12}^2)}{B_{11}^2}-\frac{B_{12}B_{66})}{B_{11}^2}\eta_m^2\right)x_1^2+\frac{B_{12}B_{66}}{B_{11}^2}\eta_m^2(1-\eta_m^2)$$

$$m_{12} = \left(\frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2)}{B_{11}^2} - \frac{B_{12}B_{66})}{B_{11}^2}\eta_m^2 \right)(x_1 + x_2) \ , \quad m_{21} = \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}^2} x_1^3 + \frac{B_{12} + B_{22}}{B_{11}} \eta_m^2 x_1$$

$$m_{22} = \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}^2}(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + \frac{B_{12} + B_{22}}{B_{11}}\eta_m^2$$

Уравнения (2.11) эквивалентны уравнениям

$$\mathbf{Det}\left\| m_{ij} \right\|_{ij}^{4} = 0, \quad m = \overline{1,+\infty} \tag{2.14}$$

Таким образом, доказано следующее утверждение: если $R^{-2}(\beta)$ можно представить в виде (1.1) и $\lambda \notin [0,\lambda_0] \cup \Omega_\gamma$, то уравнения (2.14) являются дисперсионными уравнениями оператора $L_0^{(cc)}$, где $\chi_1 = mx_1$, $\chi_n = mx_2$ – различные корни уравнения (2.7) с неположительными действительными частями. Заметим, что если $\chi_1 = mx_1$ и $\chi_2 = mx_1$ имеют отрицательные действительные части, то при $ml \to \infty$ уравнения (2.14) преобразуются к уравнениям

$$k_2(\eta_1^2, x_1, x_2) = \delta_1 x_1^2 x_n^2 + \delta_2 x_1 x_n + \delta_3(x_1^2 + x_2^2) + \delta_4 = 0, \quad m = \overline{1,+\infty} \tag{2.15}$$

Уравнения (2.15) являются дисперсионными уравнениями для полубесконечной ортотропной безмоментной незамкнутой цилиндрической оболочки с произвольной плоской направляющей со свободным торцом, когда граничные образующие жёстко защемлены (ср.[2]).

В работе исследуются следующие частные случаи:

а) $R^{-2}(\beta) \equiv 0$, т.е. имеется прямоугольная пластинка с жёстко защемлёнными и свободными противоположными сторонами;

б) $R^{-2} = k^2 r_0 / 2$, т.е. имеется круговая безмоментная цилиндрическая оболочка со свободными торцами и жёстко защемлёнными образующими;

в) $R^{-2} = k^2(r_0 / 2 + r_1 \cos k\beta)$, т.е. имеется некруговая безмоментная цилиндрическая оболочка со свободными торцами и жёстко защемлёнными торцами.

Проведены численные исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446с.
2. Гулгазарян Г.Р. Колебания безмоментной консольной ортотропной цилиндрической оболочки переменной кривизны. //Изв. РАН. МТТ. 2007. N1. С.84-99.
3. Гулгазарян Г.Р., Лидский В.Б., Эскин Г.И. Спектр безмоментной системы в случае тонкой оболочки произвольного очертания. //Сибирский математический журнал. 1973. Т.4. N5.С.978-986.
4. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 510с.

Сведения об авторе:

Срапионян Джанибек Липаритович – кафедра анализа и теории функций АГПУ им. Х. Абовяна. **Адрес:** ул. Ханджяна 5, Ереван, Армения, (+37410)353263, (+37499)099128

E-mail: srapionyan84@mail.ru

ОБ ОДНОЙ КОАЛИЦИОННОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ НА ПЛОСКОСТИ ПРИ ДВУХ ЦЕЛЕВЫХ МНОЖЕСТВАХ

Степанян А.А.

В работе рассматривается коалиционная линейная дифференциальная игра трёх лиц при двух целевых множествах. Получены условия выбора экстремальных стратегий и оптимальных значений коэффициентов, описывающих долю игроков в коалиции.

1. Введение

Процесс принятия решения, как правило, в сложной системе имеет конфликтный характер и является способом взаимодействия сторон. Это становится причиной появления в формальной постановке задачи многих целей, многих критериев оптимальности. В постановке многих задач возникает необходимость объединения сторон (участников) в коалицию. В таких задачах предполагается, что стороны, действуя сообща, выбирают управления, оптимальные в смысле максимизации суммарного выигрыша коалиции, и задача заключается в определении оптимального дележа этого суммарного выигрыша.

В данной работе исследуется линейная дифференциальная игра трёх лиц (коалиционная) при многих целевых множествах, в которой каждая сторона (игрок) воздействует на процесс с разной целью, а участники коалиции стремятся максимизировать суммарный выигрыш коалиции и оптимально делить этот выигрыш, выбирая соответствующие весовые коэффициенты, характеризующие степень "важности" игрока.

К дифференциальным играм нескольких лиц и их приложениям посвящены [1, 2]. В работах [3, 4] рассмотрены задачи преследования группой преследователей группы убегающих.

2. Постановка задачи

Рассматривается движение объекта, которому в каждый момент времени задаётся фазовая скорость как сумма трёх управляющих воздействий и каждая сторона имеет свои целевые множества в заданные моменты времени

$$\dot{x} = u_1 + u_2 + u_3 \tag{0.1}$$

Здесь $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ – фазовый вектор объекта, $u_i = \begin{pmatrix} u_{i1} \\ u_{i2} \end{pmatrix}$ – вектор управляющего воздействия i-ой стороны, стеснённый условием $u_i \in P_i \subset R^2$, где P_i – компакты ($i = 1, 2, 3$).

В момент времени $t = t_0$ система (0.1) находится в положении $x(t_0) = x_0$.

Предположим, что заданы моменты времени $t_0 = \vartheta_0 < \vartheta_1 < \vartheta_2 = \theta$. Пусть также заданы компактные множества $M_i^{(j)} \subset R^2$, которые являются целевыми множествами для i-го игрока $(i = 1, 2, 3)$ в момент времени ϑ_j $(j = 1, 2)$.

$$M_i^{(j)} \cap G(\vartheta_j, t_0, x_0) \neq \varnothing, \quad M_a^{(j)} \cap M_b^{(j)} = \varnothing \quad (i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2,\ \forall\ a, b = 1, 2, 3,\ a \neq b)$$

Здесь через $G(\vartheta_j, t_0, x_0)$ обозначена область достижимости системы (0.1) из начального состояния $\{t_0, x_0\}$ к моментам времени ϑ_j. Отметим, что области достижимости $G(\vartheta_j, t_0, x_0)$ $(j = 1, 2)$ являются замкнутыми, ограниченными и выпуклыми множествами и с изменением t и x деформируются непрерывно [5,6].

Пусть игроки $i = 1$ и $i = 2$ имеют возможность объединения для создания коалиции. Составим плату коалиции игроков как сумму расстояний движения в моменты времени ϑ_j от целевых множеств с соответствующими коэффициентами [1,2]:

$$\Im=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\alpha_{ij}\rho\left[x\left(\vartheta_j\right),M_i^{(j)}\right] \quad \alpha_{ij}\geq 0\,,\ \sum_{i=1}^{2}\alpha_{ij}=1 \text{ для всех } j=1,2\,. \tag{0.2}$$

Здесь $\rho\left[x\left(\vartheta_j\right),M_i^{(j)}\right]$ – евклидовое расстояние движения системы (0.1) от целевых множеств $M_i^{(j)}$ i-го игрока в момент времени ϑ_j $\left(j=1,2\right)$. Весовые коэффициенты α_{ij} характеризуют степень "важности" i-го игрока коалиции на интервале времени $\left(\vartheta_{j-1},\vartheta_j\right]$ и подлежат определению.

Задача игроков коалиции заключается в следующем:

Требуется найти оптимальные управляющие воздействия u_i, $i\in\{1,2\}$ и значения параметров α_{ij} $\left(i,j=1,2\right)$, которые минимизируют плату (0.2) при самом упорном противодействии остального игрока.

Предполагаем, что $P_i=O\left(\{0;0\};p_i\right)$ $(i=1,2,3)$, где $O\left(\{0;0\};p_i\right)=\left\{l\in R^2,\|l\|\leq p_i\right\}$.

3. Решение задачи

Рассмотрим движение $x(t)\left(t_0\leq t\leq\vartheta_2\right)$, описываемое уравнением (0.1) и удовлетворяющее начальному условию $x\left(t_0\right)=x_0$. Пусть игроки выбрали некоторые свои стратегии, тогда движение системы (0.1) к моменту времени ϑ_j придёт в состояние $x\left(\vartheta_j\right)$ $\left(j=1,2\right)$, которое вычисляется по формуле Коши

$$x\left(\vartheta_j\right)=X\left[\vartheta_j,t_0\right]x_0+\int_{t_0}^{\vartheta_j}X\left[\vartheta_j,\tau\right]\left(\sum_{i=1}^{3}B_i\left(\tau\right)u_i\right)d\tau$$

где $X[t,t_0]=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ – фундаментальная матрица решения однородной части системы (0.1).

Тогда гарантированный результат платы коалиции , согласно(0.2), будет

$$\begin{gathered}\bar{\Im}\left(t_0,x_0,\alpha_{11},\ldots,\alpha_{22}\right)=\max_{\left\{\left\|l_i^{(j)}\right\|\leq 1;i=1,2;\,j=1,2\right\}}\left\{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\left(\alpha_{ij}<l_i^{(j)},X\left[t,t_0\right]x_0>+\alpha_{ij}\min_{-q\in M_i^{(j)}}<l_i^{(j)},q>\right)+\right.\\ \left.+\sum_{\lambda=1}^{2}\int_{t_0}^{\theta}\min_{u_\lambda\in P_\lambda}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}<\alpha_{ij}l_i^{(j)},\bar{X}[\vartheta_j,\tau]u_\lambda>d\tau+\int_{t_0}^{\theta}\max_{u_3\in P_3}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}<\alpha_{ij}l_i^{(j)},\bar{X}[\vartheta_j,\tau]u_3>d\tau\right\}\end{gathered} \tag{0.3}$$

где $\bar{X}\left[\vartheta_j,\tau\right]$ – нулевое продолжение фундаментальной матрицы.

Предполагаем, что имеет место регулярный случай, то есть для каждой позиции $\{t_0,x_0\}$ и любого набора $\left(\alpha_{11},\ldots,\alpha_{22}\right)$ существует набор векторов, максимизирующий выражение в фигурных скобках в формуле (0.3), который единственен, и обозначим этот набор $\left\{l_1^{(1)^o}\left(t_0,x_0,\alpha_{11},\ldots,\alpha_{22}\right),\ldots,l_2^{(2)^o}\left(t_0,x_0,\alpha_{11},\ldots,\alpha_{22}\right)\right\}$.

Тогда игроки коалиции свои гарантированные (минимаксные) стратегии должны выбирать из следующих соотношений:

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}<\alpha_{ij}l_i^{(j)^0}\left(t_0,x_0,\alpha_{11},\ldots,\alpha_{22}\right),\bar{H}_\lambda\left[\vartheta_j,t\right]u_\lambda^0>=\\ =\min_{u_\lambda\in P_\lambda}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}<\alpha_{ij}l_i^{(j)^0}\left(t_0,x_0,\alpha_{11},\ldots,\alpha_{22}\right),\bar{H}_\lambda\left[\vartheta_j,t\right]u_\lambda>\end{gathered}\quad\left(\lambda=1,2\right)\quad t\in\left[t_0,\theta\right] \tag{0.4}$$

а наиупорная сопротивляющаяся стратегия 3-го игрока выбирается из следующего соотношения:

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} < \alpha_{ij} l_i^{(j)^0}\left(t_0, x_0, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{22}\right), \bar{H}_3\left[\vartheta_j, t\right]\bar{u}_3 > =$$

$$= \max_{u_3 \in P_3} \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} < \alpha_{ij} l_i^{(j)^0}\left(t_0, x_0, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{22}\right), \bar{H}_3\left[\vartheta_j, t\right] u_3 > \qquad t \in \left[t_0, \theta\right] \tag{0.5}$$

Из (0.4) и (0.5) находим

$$\begin{aligned} & u_1^0\left(t, t_0, x_0, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{22}\right) = -p_1 w \\ & u_2^0\left(t, t_0, x_0, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{22}\right) = -p_2 w, \\ & \bar{u}_3\left(t, t_0, x_0, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{22}\right) = p_3 w \end{aligned} \quad w = \frac{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \alpha_{ij} \bar{X}'\left[\vartheta_j, t\right] l_i^{(j)^0}\left(t_0, x_0, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{22}\right)}{\left\| \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \alpha_{ij} \bar{X}'\left[\vartheta_j, t\right] l_i^{(j)^0}\left(t_0, x_0, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{22}\right) \right\|} \quad t \in \left[t_0, \theta\right] \tag{0.6}$$

Следовательно, выбирая стратегии $u_i^0\left(t\right)=u_i^0\left(t, t_0, x_0, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{22}\right)$ $\left(i=1,2\right)$ игроков коалиции и стратегию $\bar{u}_3\left(t\right)=\bar{u}_3\left(t, t_0, x_0, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{22}\right)$ третьего игрока согласно соотношениям (0.4) и (0.5) соответственно, и подставляя их в (0.3), получим значение функционала $\bar{\Im}\left(\cdot\right) = \bar{\Im}\left(t_0, x_0, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{22}\right)$ как функцию от параметров $\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{22}$. Теперь для определения оптимальных значений для параметров $\alpha_{11},, \ldots, \alpha_{22}$ необходимо найти $\min\limits_{\alpha_{11},\ldots,\alpha_{22}} \bar{\Im}\left(t_0, x_0, \alpha_{11},, \ldots, \alpha_{22}\right)$ при условии $\alpha_{ij} > 0$ $\left(i=1,2;\ j=1,2\right), \sum_{i=1}^{2} \alpha_{ij} = 1$ для всех $j=1,2$.

Решение этой задачи условного экстремума существует [9].

Пусть $t_0 = 0$, $x_0 = \left(0,0\right)$ и $\vartheta_1 = 1$, $\vartheta_2 = 2$, а целевые множества – точечные:

при $\vartheta_1 = 1$ $\qquad M_1^{(1)}\left(3;0\right) \qquad M_2^{(1)}\left(1;2\right) \qquad M_3^{(1)}\left(0;2\right)$

при $\vartheta_2 = 2$ $\qquad M_1^{(2)}\left(-1;5\right) \qquad M_2^{(2)}\left(3;-4\right) \qquad M_3^{(2)}\left(-2;-5\right)$

Предполагаем, что $p_i = 1$, то есть $P_i = O\left(\left\{0,0\right\};1\right)$ $\left(i=1,2,3\right)$.

Тогда согласно (0.6) будем иметь:

$$u_i^0\left(t, t_0, x_0, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{22}\right) = \begin{cases} -\dfrac{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \alpha_{ij} l_i^{(j)^0}\left(t_0, x_0, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{22}\right)}{\left\| \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \alpha_{ij} l_i^{(j)^0}\left(t_0, x_0, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{22}\right) \right\|} & \text{при} \quad t_0 \le t < \vartheta_1 \\ -\dfrac{\sum_{i=1}^{2} \alpha_{i2} l_i^{(2)^0}\left(t_0, x_0, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{22}\right)}{\left\| \sum_{i=1}^{2} \alpha_{i2} l_i^{(2)^0}\left(t_0, x_0, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{22}\right) \right\|} & \text{при} \quad \vartheta_1 \le t \le \vartheta_2 \end{cases} \quad \left(i=1,2\right) \tag{0.7}$$

$$\bar{u}_3\left(t, t_0, x_0, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{22}\right) = -u_1^0\left(t, t_0, x_0, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{22}\right)$$

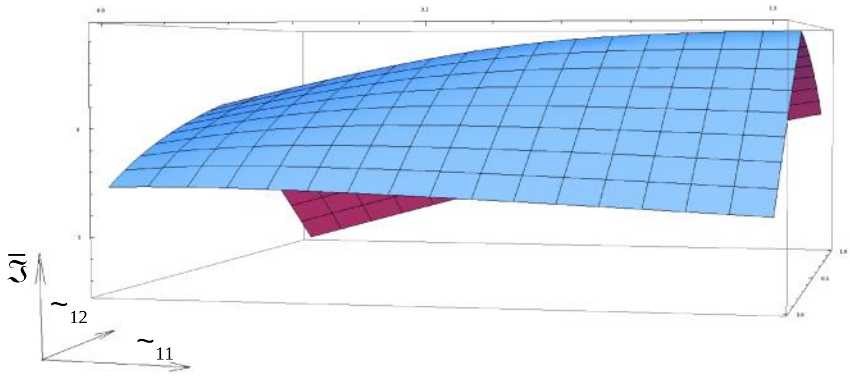
Подставляя найденные управления в выражения платы $\Im\left(\cdot\right)$ (0.3), получим:

$$\bar{\Im}\left(t_0, x_0, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{22}\right) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\left(-\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \alpha_{ij} l_i^{(j)^0} \right\| d\tau - \int_1^2 \left\| \sum_{i=1}^{2} \alpha_{i2} l_i^{(2)^0} \right\| d\tau - \right.$$

$$\left. -\alpha_{11} < l_1^{(1)^0}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} > -\alpha_{12} < l_1^{(2)^0}, \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} > -\alpha_{21} < l_2^{(1)^0}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} > -\alpha_{22} < l_2^{(2)^0}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} > \right) \tag{0.8}$$

Имея в виду, что $\alpha_{21} = 1 - \alpha_{11}$ и $\alpha_{22} = 1 - \alpha_{12}$, проводится числовая максимизация функции $\Im\left(\cdot\right)$ по векторам $l_i^{(j)}$ для каждой пары $\left(\alpha_{11}, \alpha_{12}\right)$ в области $\left[0,1\right] \times \left[0,1\right]$ с шагом 0.05 (т.е.

получены значения для 441 пар $\left(\alpha_{11}, \alpha_{12}\right)$). Графически зависимость значений функций $\bar{\Im}(\cdot)$ от параметров α_{11}, α_{12} представится в следующей форме:



Минимальное значение $\bar{\Im}(\cdot)$ является $\Im^0\left(t_0, x_0, 0,1,1,0\right) = 4.4918$ и достигается при значениях $\alpha_{11}^0 = 0, \alpha_{12}^0 = 1\left(\alpha_{21}^0 = 1, \alpha_{22}^0 = 0\right)$.

Получаем также значения векторов $l_i^{(j)^0}\left(t_0, x_0, \alpha_{11}^0, \ldots, \alpha_{22}^0\right)\left(i, j = 1,2\right)$, подставляя которые в (0.7), находим оптимальные стратегии игроков коалиции:

$$u_1^0(t) = u_2^0(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0.1906 \\ 0.9817 \end{pmatrix} & \text{при} \quad 0 \le t < 1 \\ \begin{pmatrix} -0.2841 \\ 0.9588 \end{pmatrix} & \text{при} \quad 1 \le t \le 2 \end{cases} \tag{0.9}$$

а для третьего игрока $\bar{u}_3(t) = -u_1^0(t)$.

Уравнение движения системы (0.1) при найденных управляющих воздействиях (0.9) примет следующий вид:

$$x(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0.1906t \\ 0.9817t \end{pmatrix} & \text{при} \quad 0 \le t < 1 \\ \begin{pmatrix} -0.2841t + 0.4747 \\ -0.8944t + 0.8944 \end{pmatrix} & \text{при} \quad 1 \le t \le 2 \end{cases} \qquad x[1] = \begin{pmatrix} 0.1906 \\ 0.9817 \end{pmatrix}, \quad x[2] = \begin{pmatrix} -0.0935 \\ 1.9405 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\Im_1 = \alpha_{11}^0 \rho\left[x[1], M_1^{(1)}\right] + \alpha_{12}^0 \rho\left[x[2], M_1^{(2)}\right] = 3.191$$

$$\Im_2 = \alpha_{21}^0 \rho\left[x[1], M_2^{(1)}\right] + \alpha_{22}^0 \rho\left[x[2], M_2^{(2)}\right] = 1.3008$$

а суммарное отклонение движения игры от целевых множеств игроков коалиции будет

$$\tilde{\Im}_1 = \rho\left[x[1], M_1^{(1)}\right] + \rho\left[x[2], M_1^{(2)}\right] = 6.3822$$

$$\tilde{\Im}_2 = \rho\left[x[1], M_2^{(1)}\right] + \rho\left[x[2], M_2^{(2)}\right] = 7.9985$$

Для наглядности приведём сравнения со следующими случаями:

a) Решая задачу минимизации платы коалиции в случае $\alpha_{11} = \alpha_{12} = \alpha_{21} = \alpha_{22} = 1$, значение платы $\Im(t_0, x_0, 1,1,1,1) = 13.5416$ больше, чем значение $\bar{\Im}\left(t_0, x_0, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{22}\right)$ при любых значениях $\sum_{i=1}^{2} \alpha_{ij} = 1$ для $j = 1,2$. Это следует также из определения функционала $\Im(\cdot)$.

b) Решая рассмотренную задачу для игроков $i = 1$ и $i = 3$, получаем следующие результаты:

минимимум платы $\bar{\Im}(t_0, x_0, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{31}, \alpha_{32})$ достигается при значениях параметров: $\alpha_{11}^0 = 0, \alpha_{12}^0 = 1 \left(\alpha_{31}^0 = 1, \alpha_{32}^0 = 0 \right)$ и равно $\Im\left(0, \{0,0\}, 1, 0, 0, 1\right) = 4.1139$.

Состояние системы в заданные моменты времени будет:

$$x[1] = \begin{pmatrix} -0.0757 \\ 0.9971 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad x[2] = \begin{pmatrix} -0.3007 \\ 1.9715 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\Im_1 = \alpha_{11}^0 \rho\left[x[1], M_1^{(1)} \right] + \alpha_{12}^0 \rho\left[x[2], M_1^{(2)} \right] = 3.1082$$

$$\Im_3 = \alpha_{31}^0 \rho\left[x[1], M_3^{(1)} \right] + \alpha_{32}^0 \rho\left[x[2], M_3^{(2)} \right] = 1.0057$$

а суммарное отклонение движения от целевых множеств игроков этой коалиции будет
$\tilde{\Im}_1 = 6.3415$, $\tilde{\Im}_3 = 8.1813$.

Сравнивая результаты для первого игрока при составлении коалиции со вторым и третьим игроком, получаем, что при составлении коалиции со вторым игроком движение больше отклоняется от целевых множеств первого игрока $M_1^{(1)}$ и $M_1^{(2)}$, чем при составлении коалиции с третьим игроком. Следовательно, в зависимости от интересов (приоритетов), игрок может выбирать, с кем составлять коалицию.

Таким образом, был предложен алгоритм нахождения оптимальных программных стратегий и значений коэффициентов, характеризующих “важность” участия игроков в коалиции. Показано, что построенные стратегии обеспечивают возможно меньшее значение платы коалиции. Построены явные выражения оптимальных управляющих воздействий, проведены сравнения разных случаев.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вайсборд Э.М., Жуковский В.И. Введение в дифференциальные игры нескольких лиц и их приложения. М.: Советское радио, 1980. 304с.
2. Петросян Л.А., Данилов Н.Н. Кооперативные дифференциальные игры и их приложения. Томск: Изд-во Томского Ун-та, 1985. 276с.
3. Петров Н.Н., Петров Н.Никандр. О дифференциальной игре «казаки–разбойники». // Дифференциальные уравнения. 1983. Т.19. № 8. С.1366–1374.
4. Сатимов Н.Ю., Маматов М.Ш. О задачах преследования и уклонения от встречи в дифференциальных играх между группами преследователей и убегающих //ДАН Узбекской ССР. 1983. № 4. С.3-6.
5. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
6. Ли Э.б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.
7. Барсегян В.Р., Симонян Т.А., Степанян А.А. Гипотетическое рассогласование для одной дифференциальной игры нескольких лиц при многих целевых множествах. // Изв. НАН Армении. Механика. 2011. Т.64. № 2. С.63–72.
8. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М.: Мир, 1964.
9. Лутманов С.В. Курс лекций по методам оптимизации. Москва-Ижевск: 2001.

<u>Сведения об авторе:</u>

Степанян Арег Ашотович – научн.работник Института механики НАН РА, (374 10)394648, (374 94) 922712
E-mail: Mexanikus2006@yahoo.com

УДАР ПЛАВАЮЩЕЙ В НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ПЛАСТИНКИ ПРИ НАЛИЧИИ КОНТАКТА НА ЕЁ ЗАДНЕЙ СТОРОНЕ

Федяева К.Е.

В [1] рассмотрена плоская задача о вертикальном ударе горизонтальной жёсткой пластинки, погружённой в несжимаемую жидкость при наличии свободной поверхности. Жидкость занимает полупространство. В этой работе область контакта на задней стороне пластинки не учитывалась. В настоящей работе данная задача рассмотрена с учётом указанной области контакта пластинки. Как показало проведённое исследование, учет области контакта на задней стороне пластинки существенно меняет поле скоростей в области, занятой жидкостью.

В настоящей работе рассматривается плоская задача о центральном вертикальном ударе горизонтальной пластинки, плавающей в несжимаемой жидкости. Жидкость занимает полупространство (рис. 1).

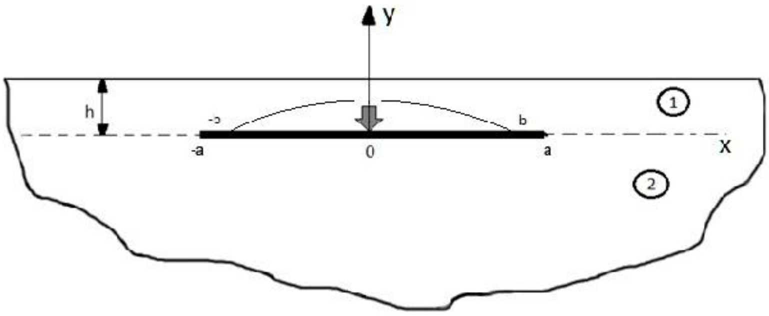


Рис. 1.

Ширина пластинки равна 2a. Жидкость до удара находится в состоянии покоя. Расстояние от пластинки до свободной поверхности h. Удар произведён центральный, внедрение пластинки происходит без перекоса. В момент удара все точки пластинки приобретают одинаковую скорость, равную U. Импульсивное давление p_* определяется формулой [2]

$$p_* = \lim_{\tau \to 0} \int_0^{\tau} p(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{t})\, \mathrm{dt}, \tag{1}$$

где p – гидродинамическое давление, t – время, τ – промежуток времени, прошедший после удара.

В момент удара движение жидкости потенциальное. Потенциал скоростей жидких частиц φ является гармонической функцией, связанной с импульсивным давлением p_* формулой

$p_* = -\rho\varphi$, где ρ – плотность жидкости.

Потенциал скоростей φ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0. \tag{2}$$

Граничные условия и условия на бесконечности имеют вид

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -U && (|\mathrm{x}| \le \mathrm{a},\ \mathrm{y}{=}{-0}),\\
&\varphi = 0 && (|\mathrm{x}| \le \mathrm{b},\ \mathrm{y}{=}{+0}),\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -U && (\mathrm{b} \le |\mathrm{x}| \le \mathrm{a},\ \mathrm{y}{=}{+0}),\\
&\varphi = 0 && (|\mathrm{x}| \le \infty,\ \mathrm{y}{=}\mathrm{h}),\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y} \to 0 && (\sqrt{x^2 + y^2} \to \infty).
\end{aligned} \tag{3}$$

Решение уравнения Лапласа будем искать в виде

$$\varphi_+(\mathrm{x},\mathrm{y})=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}[\mathrm{A}(\xi)\,\mathrm{sh}(\xi\,\mathrm{y})+\mathrm{B}(\xi)\,\mathrm{ch}(\xi\,\mathrm{y})]\;\mathrm{e}^{-i\xi x}\mathrm{d}\xi \qquad (+0\le \mathrm{y}\le \mathrm{h}),$$

$$\varphi_-(\mathrm{x},\mathrm{y})=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}C(\xi)\;\mathrm{e}^{|\xi|\mathrm{y}-i\xi x}\mathrm{d}\xi \qquad (-\infty<\mathrm{y}\le -0), \tag{4}$$

где $A(\xi),B(\xi),C(\xi)$ – достаточно произвольные функции.

Введём вспомогательные функции q(x) и s(x) формулами

$$q(\mathrm{x})=\begin{cases}\dfrac{1}{U}\left(\dfrac{\partial\varphi_-}{\partial x}-\dfrac{\partial\varphi_+}{\partial x}\right) & (-\mathrm{a}\le \mathrm{x}\le \mathrm{a}),\\ 0 & (\mathrm{a}\le|\mathrm{x}|<\infty),\end{cases}$$

$$s(\mathrm{x})=\begin{cases}\dfrac{1}{U}\left(\dfrac{\partial\varphi_-}{\partial y}-\dfrac{\partial\varphi_+}{\partial y}\right) & (-\mathrm{b}\le \mathrm{x}\le \mathrm{b}),\\ 0 & (\mathrm{b}\le|\mathrm{x}|<\infty).\end{cases} \tag{5}$$

Учёт соотношений (3) - (5) позволяет получить систему интегральных уравнений относительно функций q и s

$$\begin{cases}\int\limits_{-a}^{a}s(\eta)\,\mathrm{d}\eta\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\mathrm{th}(\xi\,\mathrm{h})}{\Delta}e^{i\xi(\eta-\mathrm{x})}d\xi-\dfrac{1}{i}\int\limits_{-a}^{a}q(\eta)\,\mathrm{d}\eta\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{1}{\Delta}e^{i\xi(\eta-\mathrm{x})}d\xi=-2\pi & (|\,\mathrm{x}\,|\le \mathrm{a}),\\ \int\limits_{-a}^{a}s(\eta)\,\mathrm{d}\eta\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\mathrm{th}(\xi\,\mathrm{h})}{|\,\xi\,|\,\Delta}e^{i\xi(\eta-\mathrm{x})}d\xi+\dfrac{1}{i}\int\limits_{-a}^{a}q(\eta)\,\mathrm{d}\eta\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{th(\xi\,\mathrm{h})}{\xi\Delta}e^{i\xi(\eta-\mathrm{x})}d\xi=0 & (|\,\mathrm{x}\,|\le b).\end{cases} \tag{6}$$

Отметим, что при центральном ударе функция q(x) является нечётной функцией, а функция s(x) – чётной.

После преобразований и учёта значений несобственных интегралов, приведённых в [3], система интегральных уравнений (6) примет вид

$$\begin{cases}\int\limits_{-1}^{1}q(\eta)\ln|\,\eta-\mathrm{x}\,|\,\mathrm{d}\eta+\dfrac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}q(\eta)\ln[(\eta-\mathrm{x})^2+4\lambda^2]\,\mathrm{d}\eta-\\ \dfrac{\pi}{2}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}s(\eta)\,\mathrm{sign}(\eta-\mathrm{x})\,\mathrm{d}\eta+\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}s(\eta)\,\mathrm{arctg}\left(\dfrac{\eta-x}{2\lambda}\right)d\eta=-2\pi x \qquad (|\,\mathrm{x}|\le 1),\\ -\dfrac{\pi}{2}\int\limits_{-1}^{1}q(\eta)\,\mathrm{sign}(\eta-\mathrm{x})\,\mathrm{d}\eta+\int\limits_{-1}^{1}q(\eta)\,\mathrm{arctg}\left(\dfrac{\eta-x}{2\lambda}\right)d\eta+\\ \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}s(\eta)\ln|\,\eta-\mathrm{x}\,|\,\mathrm{d}\eta-\dfrac{1}{2}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}s(\eta)\ln[(\eta-\mathrm{x})^2+4\lambda^2]\,\mathrm{d}\eta=0 \qquad (|\,\mathrm{x}|\le \varepsilon),\end{cases} \tag{7}$$

где $\varepsilon=\dfrac{b}{a}$.

Система выписана в безразмерном виде.

Приближённое решение системы уравнений следует искать в виде [4]

$$s(\eta)=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\eta^2}{\varepsilon^2}}}\sum_{m=0}^{M}S_m U_{2m}(\frac{\eta}{\varepsilon}) \qquad (|\eta|\le\varepsilon),$$

$$q(\eta)=\sum_{n=0}^{N}Q_n[W_n(\eta)-W_n(-\eta)] \qquad (|\eta|\le 1), \tag{8}$$

где S_m, Q_n – коэффициенты, подлежащие определению,

$U_n(z)$ – многочлены Чебышева второго рода,

$W_n=\frac{P_n^{(-\frac{1}{4},-\frac{3}{4})}(\eta)}{X(\eta)}$,

$P_n^{(i,j)}(\eta)$ – многочлены Якоби,

$X(\eta)=(1-\eta)^{\frac{1}{4}}(1+\eta)^{\frac{3}{4}}$.

В систему интегральных уравнений (7) вносим представление искомых функций (8). Для определённости берём M=N, каждое уравнение системы (7) удовлетворяем в точках коллокации

$$x_i=\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi(2i-1)}{2(M+1)}\right) \qquad (i=1, 2,...,M+1).$$

В результате получим систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов S_n и Q_n. Для вычисления приближённого значения ε строится итерационный процесс.

При построении приближённого решения системы интегральных уравнений в рассмотренном диапазоне изменения характерного параметра задачи с достаточной для практического применения точностью можно ограничиться использованием 8 узлов коллокации для каждого уравнения.

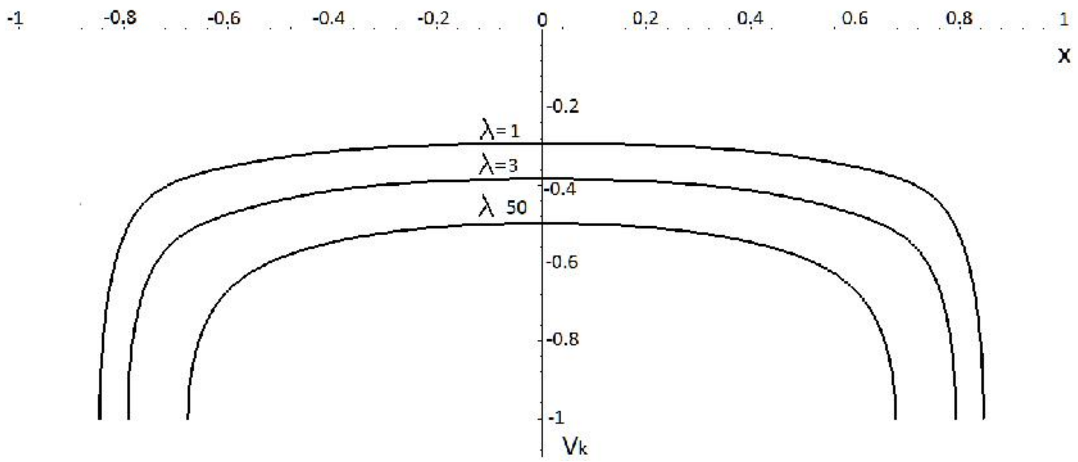


Рис. 2.

На рис. 2 приведён график вертикальных составляющих скоростей точек границы жидкости с каверной при относительном расстоянии от пластинки до свободной поверхности, равном 1, 3 и 50 соответственно. Как видно из графика, при удалении пластинки от свободной поверхности размер зоны контакта на задней стороне пластинки увеличивается. При увеличении относительного расстояния от пластинки до свободной поверхности точность полученных результатов будет увеличиваться.

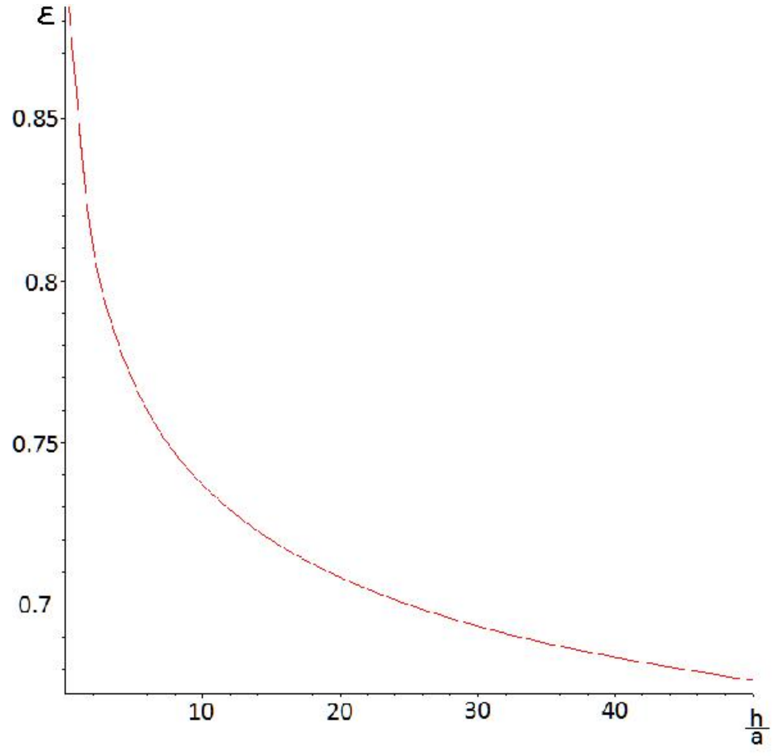


Рис. 3.

На рис. 3 приведена зависимость границы области контакта ε от относительного расстояния от пластинки до свободной поверхности.

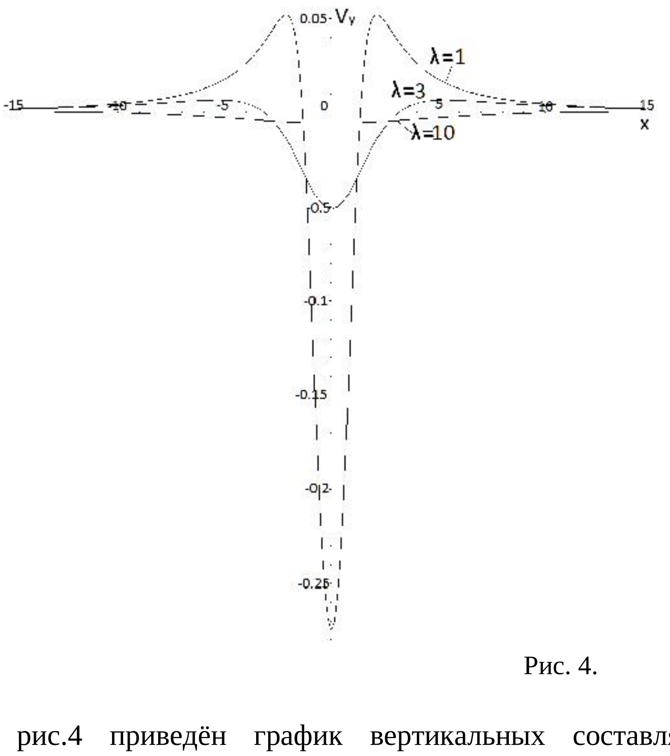


Рис. 4.

На рис.4 приведён график вертикальных составляющих скоростей точек свободной поверхности при относительном расстоянии от пластинки до свободной поверхности, равном 1, 3 и 10 соответственно.

Получены интегральные уравнения плоской задачи об ударе горизонтальной пластинки, плавающей в несжимаемой жидкости занимающей полупространство. Для решения интегральных уравнений реализован метод коллокации. На основании полученных решений интегральных уравнений определены нормальная скорость точек свободной поверхности для различных положений пластинки и вертикальная составляющая скоростей точек границы жидкости с каверной. Также были построены графики нормальных скоростей точек свободной поверхности для различных положений пластинки в жидкости и вертикальных составляющих скоростей точек границы жидкости с каверной для различных положений пластинки в жидкости. На основании полученных результатов можно судить о том, что размер области контакта на задней стороне пластинки увеличивается при удалении пластинки от свободной поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сметанин Б.И. Центральный удар плавающей пластинки, погружённой в несжимаемую жидкость // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2009. 3. (151). С. 44-47.
2. Седов В.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966. 448 с.
3. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. 1100с.
4. Александров В.М., Сметанин Б.И., Соболь Б.В. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. М.: Физматлит, 1993. 221 с.

Сведения об авторе:

Федяева Кристина Евгеньевна– аспирант кафедры теоретической и компьютерной гидроаэродинамики, Южный Федеральный Университет, факультет математики, механики компьютерных наук, Ростов-на-Дону, Россия, +7 (918) 503-23-62

E-mail: christinamail@mail.ru

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕРМОУПРУГИХ ВОЛН В МЕТАЛЛАХ И ДИЭЛЕКТРИКАХ

Хакало К.А., Индейцев Д.А., Вавилов Д.С.

В работе исследуется распространение термоупругих волн в металлах и диэлектриках, возникающих под действием лазерного облучения малой длительности. Решается несвязанная задача термоупругости. При помощи преобразования Лапласа получено аналитическое решение данной задачи. Также задача была решена численно методом конечных элементов. Для описания распространения тепла в металлах используется двухтемпературная модель теплопроводности. Были аналитически получены асимптотические формулы для малых времён. Для получения численного решения была создана модель двухтемпературной теплопроводности в системе КЭ анализа ABAQUS. Приведено сравнение решений полученных аналитически и численно, а также решений, полученных в рамках классической и двухтемпературной моделей теплопроводности.

В работе [1] был описан ряд экспериментов, которые проводились в Санкт-Петербургском Государственном Университете совместно с Институтом Проблем Машиноведения РАН и Ливерморской национальной лабораторией (США). В ходе экспериментов образцы диаметром 20−40 mm и толщиной h = 2−10 mm из различных материалов подвергались субмикросекундному лазерному облучению. На тыльной стороне образцов были расположены пьезодатчики, которые фиксировали перемещение поверхности. Воздействие осуществлялось лазером с $\lambda = 1.06\ \mu$m и длительностью излучения τ = 12 ns.

Результаты экспериментов показали принципиальное различие формы импульсов термоупругих напряжений в тепло- и нетеплопроводящих материалах. Так в случае диэлектрика акустический сигнал представляет собой двуполярный импульс сжатия–растяжения с соразмерными значениями амплитуды и длительности фаз, а в случае металла можно видеть короткую фазу сжатия и наполненный импульс растяжения.

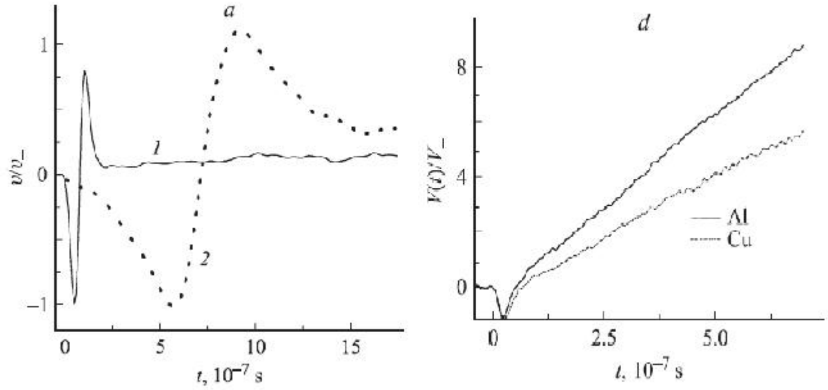


Рис.1. Импульсы напряжений: a) в цветном стекле (1) и эбоните (2); d) в алюминии и меди.

1. Решим несвязанную задачу термоупругости. Предположим, что распространение тепла в теле подчиняется закону Фурье. Стоит отметить, впервые задача о тепловом ударе была рассмотрена в работах В.И. Даниловской [2,3].

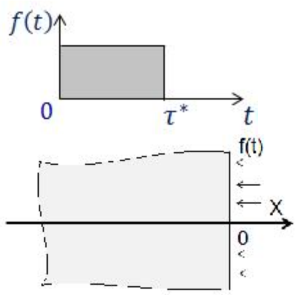


Рис.2. Расчётная область

Рассмотрим упругое полупространство (рис.2). Тело будем полагать полубесконечным, так как нас будут интересовать моменты времени, когда сформировавшаяся акустическая волна ещё не успела достичь края образца. Начальная температура тела равна нулю. На границу x=0 подается поток f(t). В теле возникает температурное поле, меняющееся со временем. Это приводит к возникновению температурных напряжений. Будем полагать, что изменение поля температур влияет на поле деформаций, однако поле температур от деформаций не зависит.

Температура и перемещения в полупространстве удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} & H.y.: T(x,0) = 0; u(x,0) = 0; \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\circ}{E}\ddot{u} = \sim \dfrac{\partial T}{\partial x} & \Gamma.y.: \dfrac{\partial T}{\partial x}(0,t) = -f(t); \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \sim T(0,t) \end{cases} \quad (1.1)$$

Введём замену переменных: $\bar{x} = \dfrac{a}{k}x; \qquad \bar{t} = \dfrac{a^2}{k}t$ (1.2)

После преобразования Лапласа и замены переменных решение системы уравнений (1.1) в символах операционного исчисления запишется в виде:

$$T^L(\bar{x}, p) = \frac{k}{a}\frac{f^L(p)}{\sqrt{p}}\exp(-\bar{x}\sqrt{p});$$

$$u^L(\bar{x}, p) = \frac{k^2}{a^2}\sim \frac{f^L(p)}{\sqrt{p}(p - p^2)}(-\sqrt{p}\exp(-\bar{x}\sqrt{p}) + p\exp(-\bar{x}p)) \quad (1.3)$$

Видно, что параметры материала влияют только на амплитуду сигнала, но не на его форму. Не составляет большого труда, используя табличные данные, взять обратное преобразование Лапласа от этих выражений.

В ходе исследований было также получено численное решение данной задачи при помощи пакета КЭ анализа ABAQUS. Анализ результатов показал совпадение полученных решений с высочайшей степенью точности. Ниже представлены графики изменения температуры и скорости для различных сечений.

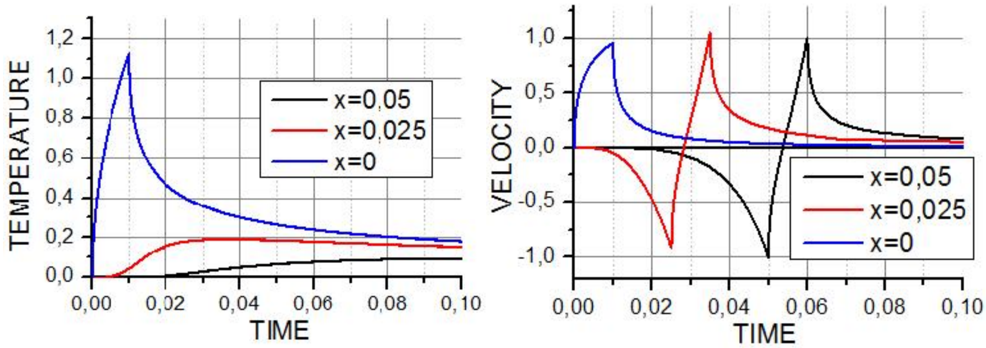


Рис.3. Изменение температуры и скорости во времени в различных сечениях, $^2 * = 0{,}01$

Из рис.3 можно сделать вывод, что акустический сигнал, формирующийся в результате решения классического уравнения теплопроводности, представляет собой двуполярный импульс, напоминающий по форме импульс, полученный экспериментально в результате облучения образцов из нетеплопроводящих материалов. Однако у металлов форма акустического сигнала при импульсном лазерном воздействии в экспериментах существенно отличается от формы, прогнозируемой классической теорией.

Следовательно, возникает необходимость усложнить модель распространения тепла в металлах. В данной работе для описания распространения тепла в металлах предлагается использовать двухтемпературную модель.

2. Металлы от диэлектриков отличаются наличием подвижных электронов в их кристаллических решётках. С этим связана хорошая электропроводность металлов. Однако, те из металлов, которые обладают большей электропроводностью, оказываются и лучшими проводниками тепла. Это обстоятельство позволяет предположить, что теплопроводность металлов обусловлена, в основном, также валентными электронами.

Таким образом, мы можем представить металл, как систему из электронов и атомной решётки. Если данная система подвергается нагреванию короткими лазерными импульсами, то температура электронов в этой системе будет существенно выше температуры решётки на протяжении достаточно малого промежутка времени. То есть энергия лазерного облучения сначала перейдёт к электронам, распространится в глубь материала, а затем от электронов перейдёт к атомам решётки. Данная ситуация может описываться следующими уравнениями эволюции температур электронов T_e и решётки T_l :

$$\begin{cases} C_e \dfrac{\partial T_e}{\partial t} = \nabla \cdot (\text{ª}_e \nabla T_e) - G(T_e - T_l) \\ C_l \dfrac{\partial T_l}{\partial t} = G(T_e - T_l) \end{cases} \qquad \begin{array}{l} H.y.: T_e(x,0) = 0; T_l(x,0) = 0 \\ \Gamma.y.: \dfrac{\partial T_e}{\partial x}(0,t) = -f(t) \end{array} \tag{2.1}$$

Константа G описывает электрон-фотонную связь, которая учитывает перенос энергии от электронов к решётке, C_e, C_l – удельные теплоёмкости электронов и решётки на единицу массы, ª_e – теплопроводность электронного газа.

Такая модель описания распространения тепла в металлах называется двухтемпературной моделью.

Перемещения точек полупространства удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\text{°}}{E}\ddot{u} = \sim \frac{\partial T_l}{\partial x} \tag{2.2}$$

Введём замену переменных следующим образом:

$$\bar{x} = \frac{C_e a}{\text{ª}_e} x; \quad \bar{t} = \frac{C_e a^2}{\text{ª}_e} t \tag{2.3}$$

Здесь a – скорость звука.

Тогда система уравнений (2.1) примет вид:

$$\begin{cases} \text{£} \dfrac{\partial T_e}{\partial \bar{t}} = \text{£} \dfrac{\partial^2 T_e}{\partial \bar{x}^2} - \text{«}(T_e - T_l) \\ \dfrac{\partial T_l}{\partial \bar{t}} = \text{«}(T_e - T_l) \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \text{«} = \dfrac{G\text{ª}_e}{C_e C_l a^2}; \\ \text{£} = \dfrac{C_e}{C_l} \end{array} \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{x}^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{t}^2} = \sim \frac{\text{ª}_e}{C_e a} \frac{\partial T_l}{\partial \bar{x}} \tag{2.5}$$

Получить точное аналитическое решение данной системы не представляется возможным, поэтому построим асимптотики решений при $\text{«} = 1; t \to 0$.

Кроме того, чтобы исследовать свойства двухтемпературной модели, решим данную задачу методом конечных элементов.

В настоящее время в ABAQUS нет встроенной двухтемпературной модели. Однако в статье [4] описан метод создания такой модели с помощью пользовательской подпрограммы UMATHT.

Классическая модель теплопроводности может быть описана в терминах удельной внутренней энергии следующим образом:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot q \tag{2.6}$$

Двухтемпературную теплопроводность можно описать следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U_e}{\partial t} = -\nabla \cdot q_e - \dot{E}(T_e, T_l) \\ \dfrac{\partial U_l}{\partial t} = \dot{E}(T_e, T_l) \end{cases} \tag{2.7}$$

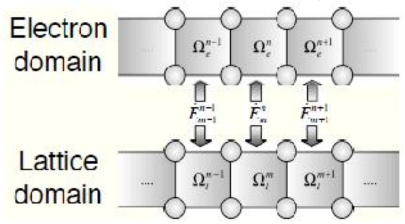


Рис. 4 Концепция разделения объекта на две области, взаимодействующие друг с другом с точки зрения теплового поведения материала

Легко заметить очевидное сходство уравнений (2.7) с уравнением (2.6). Уравнение (2.6), как правило, решается на наборе конечных элементов, или на области с граничными и начальными условиями. Таким образом, если создать две геометрически независимые области, которые взаимодействуют друг с другом с точки зрения теплового поведения материала, а именно через $\dot{E}$, как показано на рис. 4, то двухтемпературная теплопроводность может быть смоделирована в ABAQUS.

На рис. 5 представлены изменения температуры и скорости для различных сечений.

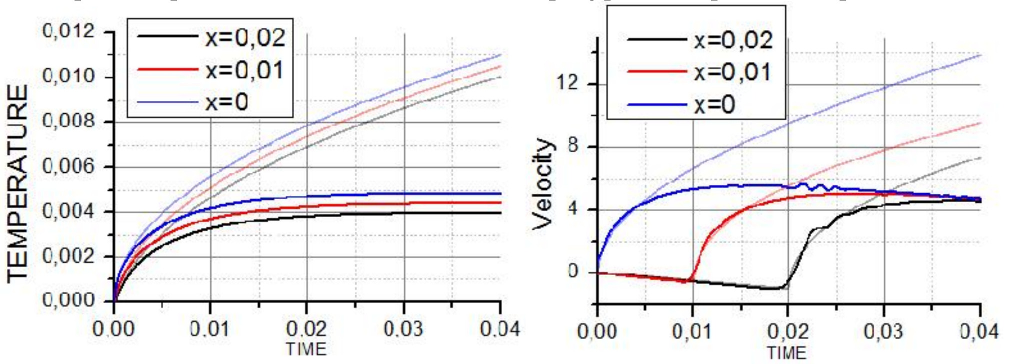
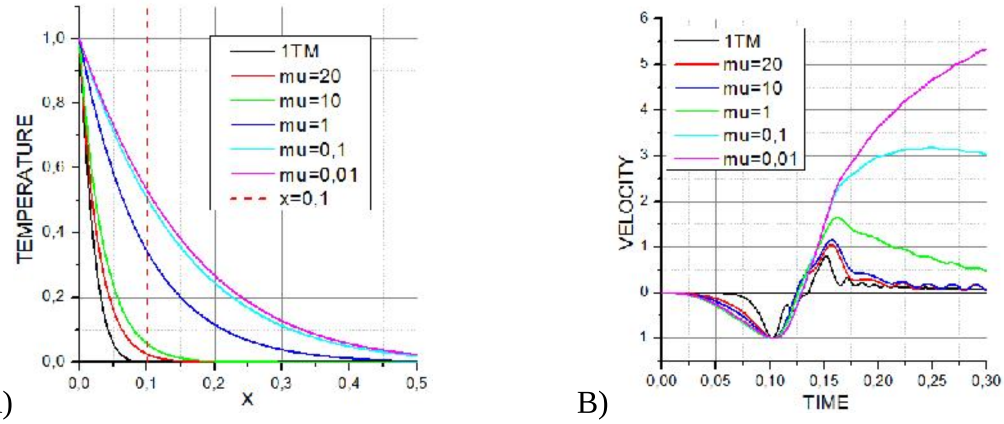


Рис.5. Изменение температуры и скорости во времени в различных сечениях, $^{2}* = 0{,}0001$

Здесь полупрозрачными линиями показаны асимптотики решений, которые были получены аналитически. Видно, что для малых времён асимптотики хорошо ложатся на решения, полученные численно. Оценим влияние коэффициента связности « на полученные решения.

Сначала рассмотрим сечение, расположенное вблизи начала координат, $\bar{x} = \dfrac{C_e a}{\text{a}_e} x < 1$.



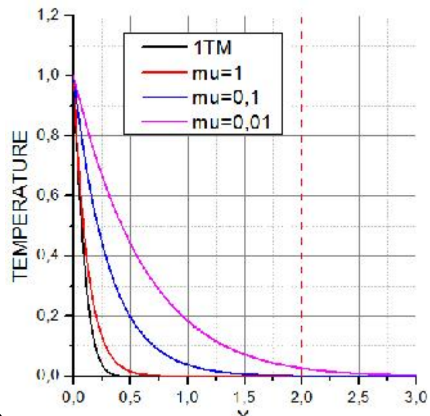
A) B)

Рис. 6. А) Распределение температуры по координате в момент окончания действия лазерного импульса.
В) Изменение скорости сечения во времени в сечении $\bar{x} = 0{,}1$ для различных « , $^{2}* = 0{,}05$

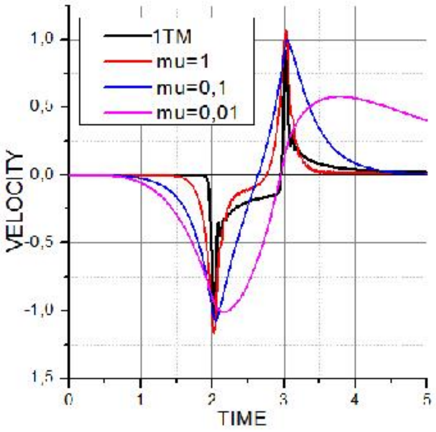
Таким образом, для сечений вблизи начала координат с уменьшением коэффициента связности двухтемпературной модели наблюдается наполнение акустического сигнала, что хорошо сходится с экспериментом.

Теперь рассмотрим сечение, расположенное вдали от начала координат, $\bar{x} = \dfrac{C_e a}{\text{a}_e} x > 1$.

На рис.7 видно, что в сечениях, расположенных вдали от начала координат, акустический сигнал уже имеет форму двуполярного импульса со сравнимыми по амплитуде и длительности фазами растяжения и сжатия. Это можно связать с тем, что в системе (2.1) мы пренебрегли теплопроводностью кристаллической решетки, полагая, что передача тепла по решётке осуществляется, в основном, за счёт теплообмена с электронами, однако очевидно, что в сечениях, расположенных вдали от начала координат слагаемое $G(T_e - T_l)$ будет крайне мало. В связи с этим предполагается провести дальнейшие исследования.



А)



В)

Рис.7. А) Распределение температуры по координате в момент окончания действия лазерного импульса.
В) Изменение скорости сечения во времени в сечении $\bar{x} = 2$ для различных « , $^{2}* = 1$

Таким образом, использование двухтемпературной модели теплопроводности для описания распространения тепла в металлах позволило лучше описать эксперимент по сравнению с классической моделью теплопроводности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вовненко Н.В., Зимин Б.А., Судьенков Ю.В.. Экспериментальные исследования термоупругих напряжений в тепло- и нетеплопроводящих твёрдых телах при субмикросекундных длительностях лазерного нагрева// Журнал технической физики. 2011. Т. 81. Вып.6.
2. Даниловская В.И. Температурные напряжения в упругом полупространстве, возникающие вследствие внезапного нагрева его границы // Прикл. мат. и мех.1950. Т.14. № 3. С.316- 318.
3. Даниловская В.И. Об одной динамической задаче термоупругости // Прикл. мат. и мех. 1952. Т.16. № 3. С.342-344.
4. D. Lee, “Feasibility study on laser microwelding and laser shock peening using femtosecond laser pulses,” Ph.D. thesis (University of Michigan, 2008).

<u>Сведения об авторах:</u>

Хакало Ксения Александровна – магистр техники и технологии по направлению прикладная механика, выпускница кафедры механики и процессов управления, Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, Институт прикладной математики и механики, тел.: +7 904 615 94 75 E-mail: khakaloksenia@gmail.com

Индейцев Дмитрий Анатолиевич – член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, директор ИПМаш РАН

Вавилов Дмитрий Сергеевич – магистр техники и технологии по направлению прикладная механика, выпускник кафедры механики и процессов управления, Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, Институт прикладной математики и механики, научный сотрудник ИПМаш РАН

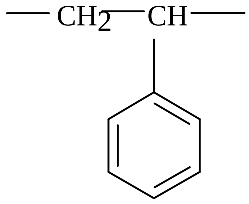
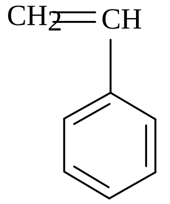
APPLICATION OF POLYMERS IN MODERN CONSTRUCTION

Amiri H.Y., Mkhitaryan D.A.

Either ordinary concretes with polymer additives are used in practice, either materials in which polymer is considered to be the unique binder. The choice of polymer is defined by the sphere of use of concrete and character of possible influences.

Polymer concrete presents concrete with polymer additive either materials in which polymer is considered to be the unique binder. Weak hydraulic (cement) and aerial astringent (gypsum, lime, anhydride, magnesi). Therefore, depending on the kind of polymer binder polymer solutions and polymer concretes are differed on the base of polyvinylchloride, rubber etc. Light polymer concrete may also be produced on the base. The use of polymer additives while using other mineral astrigent instead of cement increases the solution strength on the tension while bending and decreases water resistance. The practice shows [1,2,4] that while using the gypsum and some anhydride astrigent the increase in strength on compression is also possible. The unique kind of polymer binder in these materials considers to be 50 % Viniteks that can be used in combination with polyvinylatsient. The important advantage of the materials is considered to be the increase of water resistance and little creeping and the drawback is considerable shrinkage whereas its creeping is less than the polyvinylatsient solutions and concretes. The introduction of polymer decrease the strength of concrete on compression , but increases the strength on tension while bending. Polymer solutions of this type has lower module of strength , that is less fragile. Polymer concretes for protective coatings with high indices may be achieved at the composition of mixture in the limits 1:0,5-1:10. The choice of the definite composition depends on the influence of the character on the construction. The analysis of the results of the investigation of the strength and deformation of blocks from silicate brick on polymer cement solutions for seismic stable buildings shows that the introduction of SKS 65 additive increases limiting deformations of masonry (on 65%) therefore the decrease of the initial modulus of deformation Eo more than in 2.3 times and elastic characteristic of the masonry takes place. The use of the polymer additive caused the increase in solution strength with **SKS - 65** with additive in 1.5 times, with **PVA** –in 3.2 times. It is explained by the fact that considerable increase of solution strength causes the decrease of their deformation and consequently the masonry in general. Therefore the limiting deformations decreased in 52% times, the value Eo and $\mathcal{L}$ increased in 3.2 times. Earlier emergence of fractures was observed in a masonry on solution with **SKS 65** additive. Deformed properties of solutions predetermine formation of fractures of samples, the presence of a great number of fractures than for the masonry on cement –limestone solution and with additive **PVA** respectively. The important advantage of the materials is considered to be the increase of water resistance and little creeping and the drawback is considerable shrinkage whereas its creeping is less than the polyvinylatsient solutions and concretes. The introduction of polymer decreases the strength of concrete on compression, but increases the strength on tension while bending [3].

The simplest definition of a polymer is something made of many units. The units or “monomers” are small molecules that usually contain ten or less atoms in a row. Carbon and hydrogen are the most common atoms in monomers, but oxygen, nitrogen, chlorine, fluorine, silicon and sulfur may also be present. Think of a polymer as a chain in which the monomers are linked (polymerized) together to make a chain with at least 1000 atoms in a row. It is this feature of large size that gives polymers their special properties. Polymerization can be demonstrated by linking countless strips of construction paper together to make paper garlands or hooking together hundreds of paper clips or gum wrappers together to form extended chains.

Polymer	Repeating Units	Monomer
Polyethylene	$-CH_2-CH_2-$	$CH_2{=}CH_2$
Poly(vinyl chloride)	$-CH_2-CH(Cl)-$	$CH_2{=}CH(Cl)$
Polypropylene	$-CH_2-CH(CH_3)-$	$CH_2{=}CH(CH_3)$
Polystyrene		

Natural polymers are in living animals and plants as building materials, storage substances and playing a role in biochemical reactions. Cellulose and lignin give structure to plants. Cellulose (starch or polysaccharide) is a macromolecule compose Chitin is a nitrogen-containing polysaccharide found in shells, wings, and claws of animals. Proteins are polymers that are responsible for animal hair and fibers such as wool and silk. DNA is a polymer necessary for life processes in plants and animals. Natural rubber, from a tree, has isoprene (2-methyl-1,3-butadiene) as the monomer producing a very elastic product. Artificial rubbers are made from butadiene and other monomers and have many uses.

Demonstration of Crystalline and Amorphous Properties

The amorphous portions of a polymer do not transmit plane polarized light. The crystalline or more ordered portions of a polymer do transmit polarized light or they are "optically active" and can rotate the plane of light that passes through. Stretching or stressing a plastic will increase the crystalline nature of the product. Polarized light is rotated as it passes through the plastic object giving rise to areas of varying colors at different polarized angles. Orient a sandwich of two polarizing films so that no light passes through when placed on an overhead projector. Place a sample of clear plastic like a picnic cutlery, polystyrene Petri dish, or plastic template for geometry between the two polarizers. Rotate the polarizers and see the colors change. The colors indicate that that portion of the object has the polymer chains in an ordered or crystalline arrangement. Take a strip from a baggie (one layer) and stretch it between two polarizing sheets. The colors observed are when the chains are being aligned into a more ordered arrangement. (Educational Innovations has a nice kit to show this idea and more: Educational Innovations, Inc., 151 River Road, Cos Cob, CT 06807 (203-629- 6049) for the "Polarizing Filter Demo Kit").

Experimental investigations were carried out of polymer concrete samples the results of which are given in the tables

Table 1. Thermal and mechanical properties of exposy resin

Resin properties (After one week at 25 ^{0}C)	**Epoxy Resin**
Glass transition temperature – DMA (iso 6721-5)	45 ^{0}C
Heat desortion temperature – HDT (iso 75)	34 ^{0}C
Modulus of Elasticity – E (tension) (ISO 527)	2.2 GPa
Poisson's ratio - ¬ (ASTM C 469)	0,259
Tear Strength[3] (iso 527)	40Mpa
Flexual Strength[3] (iso 178)	70 MPa
Mechanical properties given by supplier	

Table 2. Thermal and mechanical properties of Glass and Carbon fibers

Fiber Properties	**Glass Fiber**	**Carbon Fiber**
Density (g/m^3)	2.59	1.77
Tensile Strength (MPa)	1380-2070	3950
Tensile Modulus (GPa)	72.45	238
Linear Coefficient of Thermal Expansion (10^{-6}/K)	5.0-6.0	-0.1
Elongation at break (%)	3-4	1.5

Compressive strength, chord modulus of elasticity in compression and Poisson's ratio were calculated using the following equations:

$$\pm_C = \frac{F}{A} \tag{1}$$

where, $\pm_C$ is the compressive strength; F is the maximum load recorded; and A is the cross-sectional area of cylinder specimens.

$$E = \frac{S_2 - S_1}{£_2 - 0.000050} \tag{2}$$

where E is the chord elasticity modulus; S_2 is the stress corresponding to 40% of maximum load; S_1 is the stress corresponding to a longitudinal strain of 50 millionths; and $£_2$ is the longitudinal strain produced by S_2 .

$$¬ = \frac{£_{t_1} - £_{t_2}}{£_2 - 0.000050} \tag{3}$$

where ¬ is the Poisson's ratio; and $£_{t_2}$ and $£_{t_1}$ are the transverse strains at mid height of the specimen produced, respectively, by stresses S_2 and S_1 .

Table3. Comprehensive Properties of Plain, Fiber Reinforced polymer Concrete and Commercial Concretes.

Test Series	Comprehensive Properties (Average)		
	Strength (MPa)	**Elastic.Modulus (GPa)**	**Poisson's ratio**
Plain	59.681	11.281	0.259
CFRPC	69.215	10.882	0.247
GFRPC	64.873	11.551	0.257
EMACO S88	45.118	-	-
GROUTEK S	44.618	-	-
HAGENPOX	49.697	-	-

There is a slight difference between the test results, due to random distribution of fibers.

When compared to commercial concretes, plain epoxy concrete exhibits higher compressive strength values ranging from 17.3 to 33.7%. Similarly, compressive strength values of glass fiber reinforced composite are higher in the range of 27.5 to 45.4%, while carbon fiber reinforced epoxy polymer concretes showed even higher values ranging between 36.1 to 55.1%.

Experimental results polymer concretes

	Test 1	**Test 2**
Stone	1.5 Kg	1.9 Kg
Sand and gravel	1.7 Kg	2.87 Kg
Polymer	5 cc	7.5 cc
water	70 cc	400 cc
W/C	0.56	0.8

Dimensions of Form: $10cm \times 10cm \times 10cm$

Gravity of Sand and Graver: $2857 Kg / m^3$

Gravity of Stone: $1900 \ Kg / m^3$

Grade cement: $500 Kg / m^3$

Compressive strength of concrete (Test 1): $270 \ Kg / cm^2$

Compressive strength of concrete (Test 2): $160 \ Kg / cm^2$

Conclusion

Special glue is used for the improvement of coupling of the hardened concrete with a new laid concrete in USA achieved on the base of epoxide and polyamide type of nylon. New types of polymer conglomerates with the improved properties are developed that is with high thermal protection, in the direction of development of investigation in the sphere of increase in stability and durability of structures.

Reference

1. Bondar K.Ya., Ershov B.M., Solomenko M.G. Polymer building materials. M.: Build.publ.1974, p.267
2. Gildebrand Kh. Polymer materials in construction. M.: 1969, p.216

3. Ivanov A. M. Structural diagrams of polymer and plastics used in the construction. In a book Creeping of building materials in constructions. M.: 1964, p 10-17.
4. Mkhitaryan D.A. The investigation of strain properties of layer damping elements of anti-seismic foundation (proceedings of research works IGES NAS RA, Gyumri, 1998,p.102-107)

Information about authors

Mkhitaryan Dolores - Senior researcher in the Institute of Geophysics and Engineering Seismology, NAS RA, Gyumri , **Tel**:(37493) 89 60 47. (37455) 110-112

Hossein Yousefi Amiri -1-ph Student ,NAS RA, IGIS RA, **phone:** (37499) 301256,
E-mail: Yousefih29@yahoo.com

ON ADHESIVE BINDING OPTIMIZATION OF ELASTIC HOMOGENEOUS ROD TO A FIXED RIGID BASE

Khurshudyan A. Zh., Sarkisyan A. S.

The problem of finite, partially glued to a fixed rigid base rod longitudinal vibrations damping is investigated by optimizing adhesive structural topology. Vibrations are caused by external load, concentrated on free end of the rod, the other end of which is elastically clamped. The problem is mathematically formulated as a boundary–value problem for one–dimensional wave equation with variable controlled coefficient, and the maximal length of adhesion is taken as optimality criterion to be minimized. Structure of adhesion layer, optimal in that sense, is obtained as a piecewise–constant function. Using Fourier real generalized integral transform, on the bases of finite control method, the problem of unknown function determination is reduced to determination of certain switching points from a system of nonlinear, in general, complex equations. Some particular cases are considered.

Variety of opportunities of practical realization allows us to choose optimal in a certain sense structure of important links between component parts of different designs. Traditionally, optimal design problems are considered in order to optimize some design parameters (weight, volume, load capacity and etc.) for given structure of that design. In monograph [1] a wide range of construction optimization problems of three main classes– optimization of size, form and structure, is investigated. However, so–called structural topology optimization problems have begun to investigate recently, in order to minimize a specific functional describing material distribution in given domain, retaining, or if possible maximizing desirable properties of constructions. Solution of topology optimization problems, unlike problems of structural optimization, which generally use necessary conditions of optimality to be solved, are generally reduced to a certain problem of linear or non-linear programming [2]. In [3] a new, efficient in terms of numerical realization method of topological structure optimization problems investigation is proposed, which is based on genetic algorithm. Nevertheless, explicit analytical form determination for unknown controls in such problems is connected with significant difficulties.

Problems of vibrations forced damping for distributed parameters system play some special role in control theory of systems with distributed parameters. Though it is well–known, that vibrations forced damping time can be arbitrarily small via impulsive loads (impacts), mathematically described by generalized functions (for instance Dirac delta function), nevertheless intensities of control impacts may be significantly large [4]. In [5] a problem of longitudinal vibrations forced damping by distributed control impacts in a finite time–interval is investigated for elastic, non–homogeneous finite rod. The problem is mathematically formulated as a boundary–value problem for one–dimensional wave equation with variable coefficients and controlled right hand–side, at that a functional describing linear momentum of control impacts on considered time–interval is taken as control process optimality criterion. Applying Fourier real generalized integral transform solution of control problem is reduced to minimization procedure of chosen optimality criterion in space of measurable functions L^1 under constraints of equality type on unknown function. Treating that problem of nonlinear programming as a moments problem in functional space L^∞, an explicit form of control impacts is constructed using generalized functions. Intensities and moments of control impulsive impacts application are determined, controllability of system under investigation is achieved for all initial data and system parameters. Convenience of constructed method is that only determination of two solutions of a special Riccati differential equation with different first derivative is required for numerical realization of the algorithm.

This investigation is devoted to analytical solution of homogeneous finite rod elastic longitudinal vibrations damping problem by optimizing topological structure of adhesion between some part of the rod and a fixed rigid base, at that the maximal length of adhesive layer ought to be minimized. The problem is formulated in terms of a boundary–value problem for one–dimensional wave equation with variable controlled coefficient.

1. The problem of $u^o(x)$ function determination is investigated from given set of admissible functions U, consisting of some functions $u(x)$ satisfying necessary and sufficient conditions of existence of the following boundary–value problem solution:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + \alpha^2 u(x) w(x,t) = \dfrac{1}{c^2} \dfrac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}, \quad x \in (-l,l),\, t \in (0,T), \\ \left[\dfrac{\partial w(x,t)}{\partial x} - \beta w(x,t) \right]_{x=-l} \equiv 0, \quad \left. \dfrac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right|_{x=l} = v_0(t), \quad t \in (0,T), \end{cases} \tag{1.1}$$

System (1.1) describes forced vibrations of elastic rod of $2l$ length, which is glued to a fixed rigid base, at that $\alpha^2 = \dfrac{G_k}{Ehh_k}$, where $\{G_k; h_k\}$ are glue layer shear modulus and thickness, which is assumed to be sufficiently small with respect to rod thickness h, E is rod Young modulus, and $c = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$ is the velocity of elastic wave propagation in the rod, ρ is rod material density. According to boundary conditions of system (1.1), vibrations under study are caused by boundary perturbations $v_0(t)$, applied to free end of the rod, the other end of which is elastically clamped with stiffness factor β $(\beta > 0)$, which corresponds to the first boundary condition of system (1.1). In particular, when $\beta = 0$, that boundary condition corresponds to free, and when $\beta \to \infty -$ to rigidly embedded end of the rod. The function $u(x)$, in that case, describes adhesion distribution law along glued part of the rod.

Let us note, that system (1.1) can describe also other processes not only in continuum mechanics, but also in many different areas of physics.

The following initial data are supposed to be given:

$$w(x,0) = w_0(x), \; \left. \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \dot{w}_0(x), \qquad x \in (-l,l). \tag{1.2}$$

It is assumed, that external perturbations $v_0(t)$ are defined as follows:

$$v_0(t) = \left[H(t) - H(t-\tau) \right] v(t), \; t \in (0,T),$$

where

$$H(t-\tau) = \begin{cases} 1, & t > \tau \\ 0, & t < \tau \end{cases},$$

is the Heaviside function, and $\tau < T$ $(\tau = \text{const})$ is the external perturbations stopping moment.

Let the rod to be glued to a fixed rigid base only partially, namely on the interval $[-a,l]$ $(0 \le a < l)$ of his length. This assumption corresponds to investigation of boundary–value problem (1.1) only for $-a < x < l$. Otherwise, the differential equation of system (1.1) will coincides with ordinary wave equation. The aim of the present investigation is the providing of terminal data

$$w(x,T) \equiv 0, \; \left. \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \right|_{t=T} \equiv 0, \qquad x \in (-l,l), \tag{1.3}$$

at any given moment $t = T$, by appropriate choice of control function $u^o(x)$ $(x \in [-a,l])$, i.e. of control parameter a.

The natural restriction on admissible control functions $u(x) \in U$, that directly follows from interpretation of the problem, is they are non–negative: $u(x) \ge 0$ $(x \in [-a,l])$. From the other hand, it is obvious from physical considerations, that those functions are compactly supported in $[-a,l]$ (are identically zero outside that interval). Relaying on the bases of maximum principle [4, 5] one can prove, that optimal control function should be piecewise–constant, taking only two values– 1 and 0, and are determined by specifying switching points, where its values jump from one level to another. Unlike to [5], here we write the explicit form of that function, for example, in the following form:

$$u^o(x)=\sum_{j=0}^{m}\left[H\left(x-x_{2j}\right)-H\left(x-x_{2j+1}\right)\right],\qquad x\in(-l,l), \tag{1.4}$$

where $x_{2j}<x_{2j+1}$ are mentioned switching points, at that it is obvious from assumptions made above, that $x_0=-a,$ and $x_{2m+1}=l.$

2. Now, in order to include initial and terminal data (1.2), (1.3) in the right hand–side of differential equation of system (1.1), we introduce a function $w_1(x,t),$ connected with the main function $w(x,t)$ by relation

$$w_1(x,t)=\left[H(t)-H(t-T)\right]w(x,t),\quad x\in(-l,l),\ t\in(-\infty,\infty).$$

It is easy to see that introduced function $w_1(x,t)$ is determined for all real $t\in\mathbb{R},$ is compactly supported in $[0,T],$ where it coincides with the main function $w(x,t).$ Then, from homogeneous differential equation (1.1) we will obtain the following non–homogeneous one in generalized functions:

$$\frac{\partial^2 w_1(x,t)}{\partial x^2}+\alpha^2 u(x)w_1(x,t)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 w_1(x,t)}{\partial t^2}+\frac{1}{c^2}W(x,t),\quad x\in(-l,l),\ t\in(-\infty,\infty), \tag{2.1}$$

$$W(x,t)=-\dot{w}_0(x)\delta(t)-w_0(x)\delta'(t),$$

where $\delta(t)$ is the well–known Dirac delta function, and $\delta'(t)$ is its derivative. As the boundary conditions of system (1.1) depends only on variable $t,$ as a result of substitutions made they will retain their form:

$$\left[\frac{\partial w_1(x,t)}{\partial x}-\beta w_1(x,t)\right]_{x=-l}=0,\quad \left.\frac{\partial w_1(x,t)}{\partial x}\right|_{x=l}=v_0(t),\quad t\in(-\infty,\infty).$$

To obtain the second boundary condition the following relation was used: $\left[H(t)-H(t-T)\right]v_0(t)=$ $=\left[H(t)-H(t-T)\right]\left[H(t)-H(t-\tau)\right]v(t)=v_0(t).$

Applying now Fourier real generalized integral transform to equation (2.1) and corresponding boundary conditions, after some simple algebraic transformations we will respectively obtain:

$$\begin{cases}\dfrac{d^2\bar{w}_1(x,\sigma)}{dx^2}+\left[\alpha^2 u(x)+\dfrac{\sigma^2}{c^2}\right]\bar{w}_1(x,\sigma)=\dfrac{1}{c^2}\bar{W}(x,\sigma),\quad x\in(-l,l),\ \sigma\in(-\infty,\infty),\\[2ex] \left[\dfrac{d\bar{w}_1(x,\sigma)}{dx}-\beta\bar{w}_1(x,\sigma)\right]_{x=-l}=0,\qquad \left.\dfrac{d\bar{w}_1(x,\sigma)}{dx}\right|_{x=l}=\bar{v}_0(\sigma),\end{cases} \tag{2.2}$$

where $F\left[w_1(x,t)\right]=\int\limits_{-\infty}^{\infty}w_1(x,t)e^{i\sigma t}dt=\int\limits_{0}^{T}w(x,t)e^{i\sigma t}dt$ is $w_1(x,t)$ function Fourier transform, $F[\bullet]$ is the Fourier operator, $\bar{W}(x,\sigma)=i\sigma w_0(x)-\dot{w}_0(x),$ and $\bar{v}_0(\sigma)=\int\limits_0^{\tau}v(t)e^{i\sigma t}dt.$

Taking into account restrictions made above on unknown function $u(x),$ for general solution of system (2.2) we will obtain:

$$\bar{w}_1(x,\sigma) = a\sin p(x,\sigma) + b\cos p(x,\sigma) + \Omega(x,\sigma), \quad x\in(-l,l),\ \sigma\in(-\infty,\infty), \tag{2.3}$$

where a and b are constants, determining from boundary conditions of system (2.2) as follows:

$$a(\sigma) = \frac{\left[\Omega'(l,\sigma) - \bar{v}_0(\sigma)\right]\cdot\left[p'(-l,\sigma)\sin p(-l,\sigma) - \beta\cos p(-l,\sigma)\right]}{p'(l,\sigma)\left[p'(-l,\sigma)\sin\left(p(l,\sigma) - p(-l,\sigma)\right) - \beta\cos\left(p(l,\sigma) - p(-l,\sigma)\right)\right]},$$

$$b(\sigma) = -\frac{\left[\Omega'(l,\sigma) - \bar{v}_0(\sigma)\right]\cdot\left[p'(-l,\sigma)\cos p(-l,\sigma) + \beta\sin p(-l,\sigma)\right]}{p'(l,\sigma)\left[p'(-l,\sigma)\sin\left(p(l,\sigma) - p(-l,\sigma)\right) - \beta\cos\left(p(l,\sigma) - p(-l,\sigma)\right)\right]},$$

and

$$\Omega(x,\sigma) = \frac{1}{c^2}\int_{-l}^{x}\frac{\sin\left(p(x,\sigma) - p(\xi,\sigma)\right)}{p'(\xi,\sigma)}\cdot\bar{W}(\xi,\sigma)\,d\xi,\ \ p^2(x,\sigma) = \frac{\sigma^2}{c^2} + \alpha^2 u(x).$$

In accordance with finite control method [4], for determination of unknown function we will have:

$$\int_{-l}^{l}\frac{\cos\left(p(l,z_k) - p(\xi,z_k)\right)}{p'(\xi,z_k)}\cdot\bar{W}(\xi,z_k)\,d\xi = \frac{\bar{v}_0(z_k)}{p'(l,z_k)}c^2,\ \ k = 1,2,... \tag{2.4}$$

where, in general, complex numbers z_k are determined from the following characteristic transcendent equation

$$p'(l,z) = \beta\,\mathrm{ctg}\left(p(l,z) - p(-l,z)\right),\quad z\in\mathbb{C}. \tag{2.5}$$

As according to introduced notations

$$cp(l,\sigma) = \sqrt{c^2\alpha^2 + \sigma^2},\ \ cp(-l,\sigma) = |\sigma|,$$

$$p'(x,\sigma) = \sum_{j=0}^{m} p'_j\left[\delta\left(x - x_{2j}\right) - \delta\left(x - x_{2j+1}\right)\right],\ \ p'_j = \frac{\alpha^2 c}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{c^2\alpha^2 u\left(x_{2j}\right) + \sigma^2}},$$

$$u\left(x_{2j}\right) = u\left(x_{2j+1}\right) = \sum_{j=0}^{m}\left[H\left(x_{2j+1} - x_{2j}\right) - \frac{1}{2}\right],$$

$$p'(l,\sigma) = -\frac{\alpha^2 c}{2\sqrt{c^2\alpha^2 + \sigma^2}},\ \ p'(-l,\sigma) = 0,$$

then from (2.4) and (2.5) we will accordingly obtain:

$$\int_{-l}^{l}\frac{\cos\frac{1}{c}\left(\sqrt{c^2\alpha^2 + z_k^2} - cp(\xi,z_k)\right)}{p'(\xi,z_k)}\cdot\bar{W}(\xi,z_k)\,d\xi = -2c\sqrt{c^2\alpha^2 + z_k^2}\,\bar{v}_0(z_k),\ \ k = 1,2,... \tag{2.6}$$

$$\mathrm{tg}\frac{1}{c}\left(\sqrt{c^2\alpha^2 + z^2} - |z|\right) = -2\beta\frac{1}{c}\sqrt{c^2\alpha^2 + z^2},\quad z\in\mathbb{C}. \tag{2.7}$$

As it is easy to see, if for some k a complex number z_k is a root of characteristic equation (2.7), then $-z_k$ also satisfies that equation.

So, solution of optimization problem under investigation is reduced to determination of such admissible set of switching points $\left\{x_{2j},\ x_{2j+1}\right\}_{j=0}^{m}$ from system of equations (2.6) that the first switching point x_0, which coincides with control parameter a, should be minimal. Then, number m of switching points is determined from inclusion conditions $\left\{x_{2j},\ x_{2j+1}\right\}_{j=0}^{m}\subset[-a,l]$ uniquely.

Let us consider now some particular cases.

- When $\beta \to 0$ (according to free end of rod), from characteristic equation (2.7) we will obtain $|z_k| = \dfrac{\alpha^2 - (\pi k)^2}{2\pi k} c, \ k = 1, 2, ...$
- In limiting case $\beta \to \infty$, which corresponds to rigidly embedded end of the rod, characteristic equation (2.7) will derive us to $z_{1,2} = \pm c\alpha i$. Then the system of resolving equations (2.6) can be rewritten as follows:

$$\int_{-l}^{l} \frac{\cos p(\xi, \pm c\alpha i)}{p'(\xi, \pm c\alpha i)} \cdot \left[c\alpha w_0(\xi) \pm \dot{w}_0(\xi) \right] d\xi = 0, \ \ p(\xi, \pm c\alpha i) = \alpha\sqrt{u(\xi) - 1}.$$

- When the moment of external perturbations stopping $\tau \to 0$ (quick perturbation) we will obtain $\bar{v}_0(z_k) = 0$, which corresponds to homogeneous system of (2.6).

It should be added, that another statement of optimization problem can be considered for system under investigation in order to minimize vibration vanishing time T by appropriate choice of control function $u^o(x)$ $(x \in [-a, l])$ and parameter a.

At the end let us note, that equations of (2.1) type arise also in various fields of contemporary physics (the most common name is Klein–Gordon equation, describing also, for instance, motion of a relativistic particle in a quantum scalar or pseudoscalar field) [6]. On the other hand, if as a result of switching points $\{x_{2j}, x_{2j+1}\}_{j=0}^{m}$ determination it turns out, that function $u(x)$ is periodic, then corresponding ordinary differential equation of system (2.2) will be an equation of Hill type [6].

REFERENCES

1. Christensen P. W., Klarbring A., An Introduction to Structural Optimization. Solid Mechanics and its Applications. Vol. 153. Springer, Berlin. 2009– 211 p.
2. Bendsøe M. P., Sigmund O., Topology Optimization. Theory, Methods and Applications. Springer, Berlin 2003– 370 p.
3. Chapman C. D., Structural Topology Optimization via the Genetic Algorithm. Massachusetts Institute of Technology, 1994– 189 p.
4. Butkovskii A. G., Methods of Control for Distributed Parameters Systems. Moscow: Nauka publ., 1975– 568 p. (in Russian)
5. Khurshudyan A. Zh., On optimal impulsive null–finite control of non–homogeneous rod vibrations. // Topical Problems of Applied Mathematics, Informatics and Mechanics. Proceedings of international conference. Voronezh, Russia, 2013, vol 1, pp. 393–399. (in Russian)
6. Mathews J., Walker R., Mathematical Methods of Physics. New York–Amsterdam: W.A. Benjamin, Inc., 1964– 400 p.

Information about authors

Khurshudyan Asatur – graduate student at chair of Mechanics, faculty of Mathematics and Mechanics, Yerevan State University. 1 Alex Manoogian str.
Tel: (+374 10/99) 42–07–13. **E-mail:** asaturkhurshudyan@yandex.ru

Sarkisyan Areg – 2nd year master student at chair of Mechanics, faculty of Mathematics and Mechanics, Yerevan State University. 1 Alex Manoogian str.
Tel: (+374 91) 84–84–34. **E-mail:** areg_sargsyan@mail.ru

TO A PROBLEM OF VIBRATIONS OF ADJOINING SEMI-INFINITE PLATES ON A SURFACE OF ELASTIC MEDIUM

Kolesnikov M.N., Telytnikov I.S.

The problem of vibrations of the coating consisting of two half-planes, bordering along a straight line on an elastic foundation is discussed.

Dynamic problems of the elasticity theory for plates on deformable foundation have applications in construction, engineering, materials science and other fields. In seismology, the interaction of lithospheric structures as contacting deformable plates placed on an elastic foundation can also be studied in terms of the theory of mixed problems of elasticity.

Two-dimensional elastic plates with the average thickness parameters are considered as components of coatings. The infinite crack passes on the border between the plates. Contact between the coating and the substrate is ideal, an elastic medium containing no defects treated as substrate. Applying the differential factorization method systems of integral equations concerning the stresses between the coating and the foundation are constructed. Solutions of received integral equation's systems are obtained with integral factorization method of Wiener–Hopf. Difficulties caused by the polynomial growth of the elements of kernel's symbols are overcome by moving a differential operator outside. The unknown functions included in the solutions are determined from the given boundary conditions for the plates.

Dynamic problems of the theory of elasticity for the plates on deformable foundation have applications in construction, engineering, materials science and other fields. In seismology, the interaction of lithospheric structures as contacting deformable plates placed on an elastic foundation also can be studied in terms of the theory of mixed problems of elasticity.

The problem of harmonic vibrations of two adjacent plates, rigidly coupled to the elastic free of defects substrate is studied. The substrate can be considered as layered elastic medium containing no defects or Winkler's foundation.

Elastic plates with averaged thickness parameters occupy half-planes on the substrate surface. The movement of plates is described with systems of two-dimensional partial differential equations defined in the corresponding half-planes [1].

$$\underline{R}_1(\partial x_1,\partial x_2)\vec{u}_1(x_1,x_2)-\underline{E}_1\vec{g}_1(x_1,x_2)=\vec{b}_1(x_1,x_2),\ x_1>0,\ -\infty<x_2<+\infty;$$

$$\underline{R}_2(\partial x_1,\partial x_2)\vec{u}_2(x_1,x_2)-\underline{E}_2\vec{g}_2(x_1,x_2)=\vec{b}_2(x_1,x_2),\ x_1<0,\ -\infty<x_2<+\infty.$$

Here $\vec{u}_j=\{u_{j1},u_{j2},u_{j3}\}$, $j=1,2$ are vectors of displacement of plate's points, $u_{j,1}(x_1,x_2)$, $u_{j,2}(x_1,x_2)$ – in orthogonal directions of the middle surface, $u_{j,3}(x_1,x_2)$ – along the normal to it, the elements of the matrix $\underline{R}_j(\partial x_1,\partial x_2)$ are as follows:

$$R_{11}^j=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\pounds_{j1}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\pounds_{j4},\ R_{12}^j=R_{21}^j=\pounds_{j2}\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2},\ R_{22}^j=\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\pounds_{j1}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\pounds_{j4},$$

$$R_{33}^j=\pounds_{j3}\left(\frac{\partial^4}{\partial x_1^4}+2\frac{\partial^4}{\partial x_1^2\partial x_2^2}+\frac{\partial^4}{\partial x_2^4}\right)-\pounds_{j4},\ R_{13}^j=R_{23}^j=R_{31}^j=R_{32}^j=0;\ \pounds_{j1}=0,5(1-\neg_j),\ \pounds_{j2}=0,5(1+\neg_j),$$

$$\pounds_{j3}=h_j^2/12,\ \pounds_{j4}=\frac{\mu^2\circ_j(1-\neg_j^2)}{E},\ \pounds_{j5}=\frac{1-\neg_j^2}{Eh_j};\ \vec{b}_j=-\pounds_{j5}\vec{t}_j,\ \vec{t}_j=\{t_{j1},t_{j2},t_{j3}\},$$

where $\underline{E}_j=\left\|e_{ik}^j\right\|_{i,k=1}^3$, $e_{ik}^j=0,\ i\neq k$, $e_{11}^j=e_{22}^j=-e_{33}^j=-\pounds_{j5}$; $\vec{t}_j$ are vectors of effects on the upper boundaries of the plates, $\vec{g}_j=\{q_{j1},q_{j2},q_{j3}\}$ – vectors of contact stress acting on the lower boundaries of plate from substrate's side; E_j, $\neg_j$ $(j=1,2)$ – Young's modulus and Poisson's factor of the *j*-th plate respectively.

For the elastic substrate are given the integral relations between the displacements and stresses on the surface

$$\vec{u}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\underline{k}(x_1-\P_1,x_2-\P_2)\vec{g}(\P_1,\P_2)d\P_1 d\P_2,$$

$$\underline{k}(x_1,x_2)=\frac{1}{4®^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{±}\underline{K}(\sim_1,\sim_2)e^{-i(\sim_1x_1+\sim_2x_2)}d\sim_1 d\sim_2 ,$$

where $\underline{K}(\sim_1,\sim_2)$ is Green's matrix of the elastic medium, $±$ – contour in a complex plane $\sim_1$ which form is determined by a principle of limiting absorption. Green's matrixes for environments with different properties are built in [2].

Different boundary conditions can be set in the contact zone of plates $x_1=0$, $-\infty<x_2<+\infty$. The principle of limiting absorption is used as the radiation conditions [3].

The condition of rigid coupling of plates with a substrate involves the continuity of the displacement vector and the stress vector on the border between coating and substrate

$$\vec{u}_1(x_1,x_2)=\vec{u}(x_1,x_2),\ \vec{g}_1(x_1,x_2)=\vec{g}(x_1,x_2),\ x_1>0,\ -\infty<x_2<+\infty ;$$

$$\vec{u}_2(x_1,x_2)=\vec{u}(x_1,x_2),\ \vec{g}_2(x_1,x_2)=\vec{g}(x_1,x_2),\ x_1<0,\ -\infty<x_2<+\infty .$$

Taking this into account, systems, related to stress on the substrate surface according to external loads given in the half-planes $x_1>0$ and $x_1<0$, can be derived

$$\underline{R}_1(\partial x_1,\partial x_2)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\underline{k}(x_1-¶_1,x_2-¶_2)\vec{g}(¶_1,¶_2)d¶_1d¶_2-\underline{E}_1\vec{g}(x_1,x_2)=\vec{b}_1(x_1,x_2),\ x_1>0,\ x_2\in R,$$

$$\underline{R}_2(\partial x_1,\partial x_2)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\underline{k}(x_1-¶_1,x_2-¶_2)\vec{g}(¶_1,¶_2)d¶_1d¶_2-\underline{E}_2\vec{g}(x_1,x_2)=\vec{b}_2(x_1,x_2),\ x_1<0,\ x_2\in R.$$

Last rations can be copied in the form of

$$\underline{R}_1(\partial x_1,\partial x_2)\frac{1}{4®^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{±}\underline{K}(\sim_1,\sim_2)\vec{G}(\sim_1,\sim_2)e^{-i\sim_1x_1-i\sim_2x_2}d\sim_1d\sim_2-\underline{E}_1\vec{g}(x_1,x_2)=\vec{b}_1(x_1,x_2),\ x_1>0,\ x_2\in R;$$

$$\underline{R}_2(\partial x_1,\partial x_2)\frac{1}{4®^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{±}\underline{K}(\sim_1,\sim_2)\vec{G}(\sim_1,\sim_2)e^{-i\sim_1x_1-i\sim_2x_2}d\sim_1d\sim_2-\underline{E}_2\vec{g}(x_1,x_2)=\vec{b}_2(x_1,x_2),\ x_1<0,\ x_2\in R,$$

having used advantage of property of Fourier's transformation of convolution of functions

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\underline{k}(x_1-¶_1,x_2-¶_2)\vec{g}(¶_1,¶_2)d¶_1d¶_2=\frac{1}{4®^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{±}\underline{K}(\sim_1,\sim_2)\vec{G}(\sim_1,\sim_2)e^{-i\sim_1x_1-i\sim_2x_2}d\sim_1d\sim_2 .$$

Application Fourier's transformation on a variable x_2 to the obtained equations allows to receive

$$\underline{R}_1(\partial x_1,-i\sim_2)\frac{1}{2®}\int_{±}\underline{K}(\sim_1,\sim_2)\vec{G}(\sim_1,\sim_2)e^{-i\sim_1x_1}d\sim_1-\underline{E}_1\vec{\bar{g}}(x_1,\sim_2)=\vec{\bar{b}}_1(x_1,\sim_2),\ x_1>0,\ \sim_2\in R,$$

$$\underline{R}_2(\partial x_1,-i\sim_2)\frac{1}{2®}\int_{±}\underline{K}(\sim_1,\sim_2)\vec{G}(\sim_1,\sim_2)e^{-i\sim_1x_1}d\sim_1-\underline{E}_2\vec{\bar{g}}(x_1,\sim_2)=\vec{\bar{b}}_2(x_1,\sim_2),\ x_1<0,\ \sim_2\in R.$$

The method of take out of the differential operator $\underline{A}_p(\partial x_1,\partial x_2)$ in the following form

$$\underline{A}_p(\partial x_1,\partial x_2)=\left\|¢_{mk}v_{mk}^p\right\|_{m,k=1}^3,\ p=1,2,$$

$$v_{mm}^p(\partial x_1,\partial x_2)\equiv-\Delta+b_{1p},\ m=1,2,$$

$$v_{33}^p(\partial x_1,\partial x_2)\equiv(-\Delta+b_{2p})(-\Delta+b_{3p}),\ b_{kp}=\text{const}$$

is used to overcome the difficulties caused by the power growth of the elements of matrix-symbol cores of obtained systems.

Preliminary to this operator Fourier's transformation on a variable x_2 is applied

$$\underline{A}_p(\partial x_1,-i\sim_2)=\left\|¢_{mk}\bar{v}_{mk}^p\right\|_{m,k=1}^3,\ p=1,2,$$

$$\bar{v}_{mm}^p(\partial x_1,-i\sim_2)\equiv-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\sim_2^2+b_{1p},\ m=1,2,$$

$$\bar{v}_{33}^{p}\left(\partial x_1,-i\sim_2\right)\equiv\left(-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\sim_2^2+b_{2p}\right)\left(-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\sim_2^2+b_{3p}\right),\ b_{kp}=\text{const}\,.$$

At the same time in the right part, components, infinitely growing at infinity in the half-planes of the original system's definition, are discarded

$$\underline{A}_1^{-1}\left(\partial x_1,-i\sim_2\right)\underline{R}_1\left(\partial x_1,-i\sim_2\right)\frac{1}{2\circledR}\int_{\pm}\underline{K}\left(\sim_1,\sim_2\right)\vec{G}\left(\sim_1,\sim_2\right)e^{-i\sim_1 x_1}d\sim_1-\underline{A}_1^{-1}\left(\partial x_1,-i\sim_2\right)\underline{E}_1\vec{\tilde{g}}\left(x_1,\sim_2\right)=$$

$$=\vec{\tilde{b}}_1\left(x_1,\sim_2\right)+\sum_{j=1}^{4}C_{1j}\left(\sim_2\right)\vec{\tilde{b}}_{1j}\left(x_1,\sim_2\right),\ \ x_1>0,\ \ \sim_2\in R\,,$$

$$\underline{A}_2^{-1}\left(\partial x_1,-i\sim_2\right)\underline{R}_2\left(\partial x_1,-i\sim_2\right)\frac{1}{2\circledR}\int_{\pm}\underline{K}\left(\sim_1,\sim_2\right)\vec{G}\left(\sim_1,\sim_2\right)e^{-i\sim_1 x_1}d\sim_1-\underline{A}_2^{-1}\left(\partial x_1,-i\sim_2\right)\underline{E}_2\vec{\tilde{g}}\left(x_1,\sim_2\right)=$$

$$=\vec{\tilde{b}}_2\left(x_1,\sim_2\right)+\sum_{j=1}^{4}C_{2j}\left(\sim_2\right)\vec{\tilde{b}}_{2j}\left(x_1,\sim_2\right),\ \ x_1<0,\ \ \sim_2\in R\,.$$

The right parts of obtained systems are continuing by unknown vector-functions $\vec{s}_1\left(x_1,\sim_2\right)$ and $\vec{s}_2\left(x_1,\sim_2\right)$ in the corresponding half-planes. To the received systems Fourier's transformation on a variable x_1 is applied

$$\underline{M}_1\left(\sim_1,\sim_2\right)\vec{G}\left(\sim_1,\sim_2\right)=\vec{\tilde{B}}_1\left(\sim_1,\sim_2\right)+\sum_{j=1}^{4}C_{1j}\left(\sim_2\right)\vec{\tilde{B}}_{1j}\left(\sim_1,\sim_2\right)+\vec{S}_1\left(\sim_1,\sim_2\right),$$

$$\underline{M}_2\left(\sim_1,\sim_2\right)\vec{G}\left(\sim_1,\sim_2\right)=\vec{\tilde{B}}_2\left(\sim_1,\sim_2\right)+\sum_{j=1}^{4}C_{2j}\left(\sim_2\right)\vec{\tilde{B}}_{2j}\left(\sim_1,\sim_2\right)+\vec{S}_2\left(\sim_1,\sim_2\right),$$

where $\underline{M}_1=\underline{A}_1^{-1}\left(\underline{R}_1\underline{K}-\underline{E}_1\right)$, $\underline{M}_2=\underline{A}_2^{-1}\left(\underline{R}_2\underline{K}-\underline{E}_2\right)$.

The elements of the vector-functions $\vec{\tilde{B}}_1$, $\vec{\tilde{B}}_{1j}$, $j=\overline{1,4}$ and $\vec{S}_2$ are regular in the upper complex half-plane (as the Fourier's transforms of functions with support on the positive half-line), and $\vec{\tilde{B}}_2$, $\vec{\tilde{B}}_{2j}$, $j=\overline{1,4}$ and $\vec{S}_1$ – in the lower (as the Fourier's transforms of functions with support on the negative half-line). Indices «+» and «–» indicate the domain of regularity of vector-functions in the upper and lower planes respectively

$$\vec{\tilde{B}}_1\equiv\vec{\tilde{B}}_1^{+},\ \vec{\tilde{B}}_{1j}\equiv\vec{\tilde{B}}_{1j}^{+},\ \ j=\overline{1,4}\,,\ \vec{S}_2\equiv\vec{S}_2^{+},$$

$$\vec{\tilde{B}}_2\equiv\vec{\tilde{B}}_2^{-},\ \vec{\tilde{B}}_{2j}\equiv\vec{\tilde{B}}_{2j}^{-},\ \ j=\overline{1,4}\,,\ \vec{S}_1\equiv\vec{S}_1^{-}\,.$$

Thus, we come to the system of equations, concerning unknown continuations $\vec{S}_1^{-}$ and $\vec{S}_2^{+}$

$$\vec{\tilde{B}}_1^{+}+\sum_{j=1}^{4}C_{1j}\left(\sim_2\right)\vec{\tilde{B}}_{1j}^{+}+\vec{S}_1^{-}=\underline{M}\left(\vec{\tilde{B}}_2^{-}+\sum_{j=1}^{4}C_{2j}\left(\sim_2\right)\vec{\tilde{B}}_{2j}^{-}+\vec{S}_2^{+}\right),$$

where $\underline{M}=\underline{M}_1\underline{M}_2^{-1}$, which can be solved by a method of Wiener–Hopf.

To solve this system it is necessary to factorize the matrix-function $\underline{M}$ as a multiplication $\underline{M}=\underline{M}_{-}\underline{M}_{+}$ concerning the contour $\pm$ in the complex plane, where the matrix function $\underline{M}_{+}$ is regular and has no zeros above contour $\pm$, and $\underline{M}_{-}$ – has non below it. Factorization of the matrix-function $\underline{M}$ functions is performed approximately.

The above given equation should be multiplied by $\underline{M}_{-}^{-1}$ and all the members of resulting system should be factorized as the sum concerning the contour $\pm$. According to the Wiener–Hopf's method the following system of equations with unknown $\vec{S}_1^{-}$ and $\vec{S}_2^{+}$ is obtained

$$\underline{M}_{+}\vec{S}_2^{+}+\left\{\underline{M}_{-}^{-1}\vec{\tilde{B}}_1^{+}\right\}^{+}-\left\{\underline{M}_{+}\vec{\tilde{B}}_2^{-}\right\}^{+}+\sum_{j=1}^{4}C_{1j}\left(\sim_2\right)\left\{\underline{M}_{-}^{-1}\vec{\tilde{B}}_{1j}^{+}\right\}^{+}-\sum_{j=1}^{4}C_{2j}\left(\sim_2\right)\left\{\underline{M}_{+}\vec{\tilde{B}}_{2j}^{-}\right\}^{+}=0\,,$$

$$\underline{M}_-^{-1}\vec{S}_1^- + \left\{\underline{M}_+\vec{\tilde{B}}_2^-\right\}^- - \left\{\underline{M}_-^{-1}\vec{\tilde{B}}_1^+\right\}^- + \sum_{j=1}^{4} C_{2j}\left(\sim_2\right)\left\{\underline{M}_+\vec{\tilde{B}}_{2j}^-\right\}^- - \sum_{j=1}^{4} C_{1j}\left(\sim_2\right)\left\{\underline{M}_-^{-1}\vec{\tilde{B}}_{1j}^+\right\}^- = 0\,.$$

Having solved this system, a relation for the Fourier's transform of the stress $\vec{G}$ on the surface of the substrate is found. Then, from the substrate's relations $\vec{U} = \underline{K}\vec{G}$ we find equations for the displacement on the substrate's surface $\vec{U}$ in the form of

$$\vec{U} = \vec{U}_{1,0} + \vec{U}_{2,0} + \sum_{j=1}^{4} C_{1j}\left(\sim_1\right)\vec{U}_{1j} + \sum_{j=1}^{4} C_{2j}\left(\sim_1\right)\vec{U}_{2j}\ .$$

These expressions contain eight unknown coefficients $C_{1j}\left(\sim_2\right)$, $C_{1j}\left(\sim_2\right)$, $j = \overline{1,4}$, the given boundary conditions at the junction of the plates are used to find them. To use the boundary conditions the inverse Fourier's transformation of the parameter $\sim_1$ is applied to the equation of displacement $\vec{U}$

$$\vec{\tilde{u}}\left(x_1, \sim_2\right) = \vec{\tilde{u}}_{1,0}\left(x_1, \sim_2\right) + \vec{\tilde{u}}_{2,0}\left(x_1, \sim_2\right) + \sum_{j=1}^{4} C_{1j}\left(\sim_1\right)\vec{\tilde{u}}_{1j}\left(x_1, \sim_2\right) + \sum_{j=1}^{4} C_{2j}\left(\sim_1\right)\vec{\tilde{u}}_{2j}\left(x_1, \sim_2\right).$$

Next, let the boundary conditions be

$$\underline{L}_1\left(\partial x_1, \partial x_2\right)\vec{u}\left(0+0, x_2\right) + \underline{L}_2\left(\partial x_1, \partial x_2\right)\vec{u}\left(0-0, x_2\right) = \vec{f}\left(x_2\right),$$

where elements of $\underline{L}_1\left(\partial x_1, \partial x_2\right)$, $\underline{L}_2\left(\partial x_1, \partial x_2\right)$ are linear differential operators. If we apply the Fourier's transformation to the variable x_2 to the boundary conditions, we shall receive

$$\underline{L}_1\left(\partial x_1, -i\sim_2\right)\vec{\tilde{u}}\left(0+0, \sim_2\right) + \underline{L}_2\left(\partial x_1, -i\sim_2\right)\vec{\tilde{u}}\left(0-0, \sim_2\right) = \vec{F}\left(\sim_2\right).$$

Thus, we obtain a linear algebraic system to determine the unknown coefficients $C_{1j}\left(\sim_2\right)$, $C_{1j}\left(\sim_2\right)$, $j = \overline{1,4}$, after solving this system the obtained values are substituted into the equation for $\vec{\tilde{u}}\left(x_1, \sim_2\right)$.

The final solution of the problem is obtained by applying the inverse Fourier's transformation of the parameter $\sim_2$ to equation for $\vec{u}\left(x_1, x_2\right)$.

The study has been carried out with support of the grants RFFE (13-01-00132, 13-01-95503) and SS-914.2012.1.

REFERENCE

1. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 432 с.
2. Ворович И.И., Бабешко В.А., Пряхина О.Д. Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. – М.: Научный мир, 1999. – 248 с.
3. Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред – М.: Наука, 1989. – 344 с.

<u>Information about authors</u>

Kolesnikov Maksim – post graduate student, Kuban State University, Faculty of computer technologies and applied mathematics
Telytnikov Ilya – post graduate student, Kuban State University, Faculty of computer technologies and applied mathematics (7 861) 219 95 78, (7 928) 280 59 75
E-mail: ilux_t@list.ru

ANALYSIS OF MOTION OF A PENDULUM WITH VIBRATING SUSPENSION AXIS AT UNCONVENTIONAL VALUES OF PARAMETERS

Sorokin V.S.

The present paper is concerned with the analysis of motion of a pendulum with vibrating suspension axis at unconventional values of parameters. Case, when frequency of external loading and the natural frequency of the pendulum in the absence of this loading are of the same order, is studied. Vibration intensity is assumed to be relatively low. A new modification of the method of direct separation of motions (MDSM) is proposed to study corresponding equation, which in the considered case doesn't contain a small parameter explicitly. The aim is to obtain solutions of this equation in the stability domain. It is revealed that in the considered range of parameters not only the effective stiffness of the system changes due to the external loading, but also its effective mass. It is noted that application of the classical asymptotic methods in the case under study leads to erroneous results. So, the applicability range of the MDSM turns out to be broader than the one of these methods.

1. Introduction

Many studies have been concerned with the analysis of motion of a pendulum with vibrating suspension axis, some of those being undertaken by eminent scientists [1-3]. Usually, the case, when frequency of external loading is much higher than the natural frequency of the pendulum in the absence of this loading, is considered. The remarkable effect of pendulum's upper position stabilization is revealed for this case in particular.

Often (see, e.g. [1-3]) motion of the pendulum is considered only near its upper or lower position of equilibrium, and the problem reduces to analysis of the Mathieu equation. This equation has been studied in many papers (see, e.g. some recent publications [4,5]). Particularly, the stability domains of the equation were determined and the Ince-Strutt diagram was plotted [6,7]. Moreover, its solutions at the boundary of stability, which are ® or 2® -periodic functions, were derived. In monographs [7,8] the Mathieu equation was studied in the presence of a small parameter, and its solutions in stability and instability domains were determined. In monograph [6] approximate solutions of this equation in instability domains were obtained in the absence of a small parameter. However, its solutions in stability domains for this case were not determined analytically yet.

The present paper is concerned with the analysis of pendulum's motion at unconventional values of parameters. Case, when frequency of external loading and the natural frequency of the pendulum in the absence of this loading are of the same order, is studied. Vibration intensity is assumed to be relatively low. Pendulum's motion near its upper position is studied. In the considered case corresponding linearized equation, i.e. the Mathieu equation, doesn't contain a small parameter explicitly. The aim is to obtain solutions of this equation in the stability domain. It may be noted that previously such solutions were not determined analytically. A new modification of the method of direct separation of motions (MDSM) [9,10] is proposed to achieve the objective.

It is noted that application of the classical asymptotic methods [11,12], particularly of the multiple scales method (MSM) [13], in the considered case leads to erroneous results. So, the applicability range of the MDSM turns out to be broader than the one of these methods.

2. Initial equations

Consider the classical problem about a pendulum with vibrating suspension axis in the simplest formulation, i.e. in the case of small deviations from the upper position. In this case motion of the pendulum is described by the following equation:

$$I\,\ddot{¨} - ml(g + G\Omega^2 \cos \Omega t)¨ = 0 \qquad (1)$$

Here ¨ is angle of pendulum deviation from the upper position, I, m and l are the moment of inertia, the mass and the distance from the pendulum center of gravity to the axis of suspension, G and Ω are the amplitude and the frequency of vertical oscillations of the suspension axis, g is the acceleration of gravity, dot designates the time derivative.

Introducing two dimensionless parameters ¢ $= mlg/I\Omega^2$, ¡ $= G\Omega^2/g$ and dimensionless time $t_0 = \Omega t$, rewrite equation (1) in the form

$$\frac{d^2¨}{dt_0^2} - ¢(1 + ¡\cos t_0)¨ = 0 \qquad (2)$$

In the present paper the case $¢ \sim 1$, $¡ \sim 1$ is considered: the frequency of external loading and the natural frequency of the pendulum in the absence of this loading are of the same order; the amplitude of acceleration of vertical oscillations of pendulum's suspension axis is of the same order as g. In this case equation (2) doesn't contain a small parameter explicitly.

3. The modified MDSM

For studying equation (2) the vibrational mechanics approach [9,10] is employed. However, the MDSM can not be applied in its conventional form [9,10], since $¢ \sim 1$ and the frequency of external loading is not much higher than the natural frequency of the pendulum. So a new modification of the MDSM applicable for solving equations of the considered type (without small parameter) is proposed. It implies the solutions to be sought in the form:

$$¨ = \sim(t_1) + \cdot\, (t_1, t_0) \tag{3}$$

where $t_1 = £ t_0$, $£ << 1$ is small parameter, $\sim$ is "slow", and $\cdot$ is "fast", $2®$ - periodic in dimensionless time t_0 variable, with average zero:

$$\left\langle \cdot\, (t_1, t_0) \right\rangle = 0$$

Here $\langle ... \rangle$ designates averaging in the period $2®$ on time t_0, i.e. for function $h(t_1, t_0)$ we have $\left\langle h(t_1, t_0) \right\rangle = \frac{1}{2®} \int_0^{2®} h(t_1, t_0) dt_0$.

As is seen, application of the modified MDSM implies a hypothesis regarding type of the sought solution. In fact, searching solution of the initial equation in the form (3) we assume that system in the considered range of parameters performs oscillations with slowly varying characteristics. If this hypothesis is not correct, then the trivial solution or solution which doesn't meet the sense of the problem will be obtained. Otherwise characteristics of oscillations of the considered type, in particular domains of their existence in the parameter space, will be determined.

The introduced small parameter $£$ has simple physical meaning: It is the ratio between the velocities of slow and fast variables changing. Fast variables correspond to oscillations of the considered system; slow variables are slowly varying characteristics of these oscillations.

4. Solution by the modified MDSM

By averaging equation (2) on time t_0 we obtain the following equation of pendulum's "slow" motion (for variable $\sim$)

$$£^2 \frac{d^2 \sim}{dt_1^2} - ¢(\sim + ¡ \left\langle \cdot\, \cos t_0 \right\rangle) = 0 \tag{4}$$

Equation of pendulum's "fast" motions (for variable $\cdot$) may be obtained by subtracting equation (4) from equation (2)

$$\frac{\partial^2 \cdot}{\partial t_0^2} + 2£ \frac{\partial^2 \cdot}{\partial t_1 \partial t_0} + £^2 \frac{\partial^2 \cdot}{\partial t_1^2} - ¢ \cdot = ¢ ¡ \left((\sim + \cdot\,) \cos t_0 - \left\langle \cdot\, \cos t_0 \right\rangle \right) \tag{5}$$

In conventional cases of the MDSM application corresponding equation of fast motions is solved only approximately, because the equation of slow motion is the one of the primary interest [9]. In particular, while solving this equation all involved slow variables are considered as constants ("frozen"), and terms $2£ \frac{\partial^2 \cdot}{\partial t_1 \partial t_0}$ and $£^2 \frac{\partial^2 \cdot}{\partial t_1^2}$ are neglected, because they are small in comparison with $\frac{\partial^2 \cdot}{\partial t_0^2}$. In the present case this simplification has to be abandoned. Indeed, terms of order of $£^2$ are retained in equation (4) of pendulum's slow motion and $¢ \sim 1$, $¡ \sim 1$, so solution of fast motions' equation should be found with the accuracy of order of $£^2$. I.e. terms of this order, particularly $2£\dfrac{\partial^2 ·}{\partial t_1 \partial t_0}$ and $£^2\dfrac{\partial^2 ·}{\partial t_1^2}$, should be retained in equation (5).

Taking into account that $·(t_1,t_0)$ is time t_0 periodic function the solution of fast motions equation (5) is sought in the form of series

$$· = B_{11}(t_1)\cos t_0 + B_{12}(t_1)\sin t_0 + B_{21}(t_1)\cos 2t_0 + B_{22}(t_1)\sin 2t_0 + ... \tag{6}$$

As the result we obtain:

$$B_{11}(t_1) = -F(¢,¡)\sim(t_1) + £^2 F_2(¢,¡)\frac{d^2\sim}{dt_1^2} + O(£^3),\ B_{12}(t_1) = £F_1(¢,¡)\frac{d\sim}{dt_1} + O(£^3), \text{ etc.} \tag{7}$$

Here $F(¢,¡)$, $F_1(¢,¡)$, $F_2(¢,¡)$ are functions of parameters ¢ and ¡ which depend on the number of retained harmonics in series (6). Terms of order of $£^2$ are taken into account in the equations of fast and slow motions, so number n of the harmonic, which may be discarded in (6), is determined by the relation

$$\frac{1}{4}\frac{¢¡}{¢+n^2}\frac{¢¡}{¢+(n-1)^2} \sim £^3 \tag{8}$$

The fulfillment of condition (8) ensures that functions $F(¢,¡)$, $F_1(¢,¡)$, $F_2(¢,¡)$ are determined with the required accuracy of order of $£^2$. E.g., for $¢ < 0.5$ relation (8) fulfills already for $n = 4$, so only three harmonics may be taken into account in series (6).

Employing solution of fast motions equation, the equation of slow motion is composed in the form

$$(1 - ¢\frac{¡}{2}F_2(¢,¡))\frac{d^2\sim}{dt_0^2} - ¢(1 - \frac{¡}{2}F(¢,¡))\sim = 0 \tag{9}$$

From equation (9) it follows that not only the effective stiffness of the system changes due to the external loading, but also its effective mass. This fact is especially remarkable. As is shown in the classical papers (see, e.g. [2,3]), in the studied system only the effective stiffness changes under the action of vibration. The distinction is due to consideration of different ranges of the parameters. In [1-3] the case $¢ \sim £^2 << 1$ is studied, when the frequency of external loading is much higher than the natural frequency of the pendulum in the absence of this loading, whereas in the present paper we consider the case $¢ \sim 1$.

It should be noted that obtained equation (9) of pendulum's slow motion is correct also at "conventional" values of the parameters $¢ \sim £^2$ and $¡ \sim 1/£$. Indeed, in this case change of the system's effective "mass" $-¢¡F_2(¢,¡)/2$ is negligibly small. So, the results obtained in the present paper are in good agreement with the conclusions of the classical studies [1-3].

5. On the validity of the results obtained by the proposed modification of the MDSM

In accordance with [9] the MDSM requires an additional a posteriori analysis of the obtained results. For the modified MDSM the situation is the same: it should be assayed whether the characteristics of the defined oscillations vary indeed slowly in comparison with these oscillations, or not. For the considered problem taking into account that all amplitudes $B_{11}(t_1)$, $B_{12}(t_1)$,… depend on variable $\sim(t_1)$ this verification may be reduced to the assessment of the fulfillment of the following relation

$$\frac{d\sim}{dt_0}\frac{1}{\sim_A} << \frac{1}{·_A}\frac{d·}{dt_0} \tag{10}$$

where $\sim_A$ and $·_A$ are characteristic amplitudes of variables $\sim(t_1)$ and $·(t_1,t_0)$. Taking into account (6) and (9), relation (10) may be rewritten as

$$ª = \sqrt{\left|¢\left(\frac{¡}{2}F(¢,¡) - 1\right)\Big/\left(1 - ¢\frac{¡}{2}F_2(¢,¡)\right)\right|} \sim £ << 1 \tag{11}$$

As is seen, small parameter £ is present in relation (11). In fact, expressions (10)-(11) clearly illustrate the physical meaning of this parameter implied in the modified MDSM: It is the ratio between the velocities (or frequencies) of slow and fast variables changing. So, the obtained equation of pendulum's slow motion (9) and the corresponding expressions for amplitudes $B_{11}(t_1)$, $B_{12}(t_1)$,… are correct if condition (11) holds true.

As it was noted in Section 4, solution of the fast motions equation is found with the accuracy of order of $£^2$. As the result, parameters in the equation of slow motion (9) (the effective stiffness and the effective mass of the system) are also determined with the accuracy of order of $£^2$. So, it may be stated that the proposed approximation is valid up to time-scale $t_0 \sim £^{-3}$.

6. Comparison with the results of numerical experiments

A series of numerical experiments was conducted to verify the obtained results. Initial equation (2) was integrated directly by means of the Wolfram Mathematica 7; corresponding results were compared with the derived analytical solution.

Consider the case $¢ = 0.4$ as an illustrative example. For such ¢ and $¡ \sim 1$ condition (8) fulfils for $n = 4$, so only three harmonics may be taken into account in solution (6) of the pendulum's fast motions equation. The dependence of pendulum's deflection on time t_0 at $¢ = 0.4$, $¡ = 2.59$ is shown in Figure 1 (a) for initial conditions $¨(0) = 0.01$, $\dot{¨}(0) = 0$. Solid line is the numerical solution of the initial equation (2), dotted line is the solution $\sim(t_0)$ of the obtained equation of pendulum's slow motion (9), and dashed line is the analytical solution, i.e. the sum of $\sim(t_0)$ and the solution · of pendulum's fast motions equation (5). In Figure 1 (b) this dependence is shown for $¢ = 1.4$, $¡ = 1.7395$ and the same initial conditions.

a)

b)

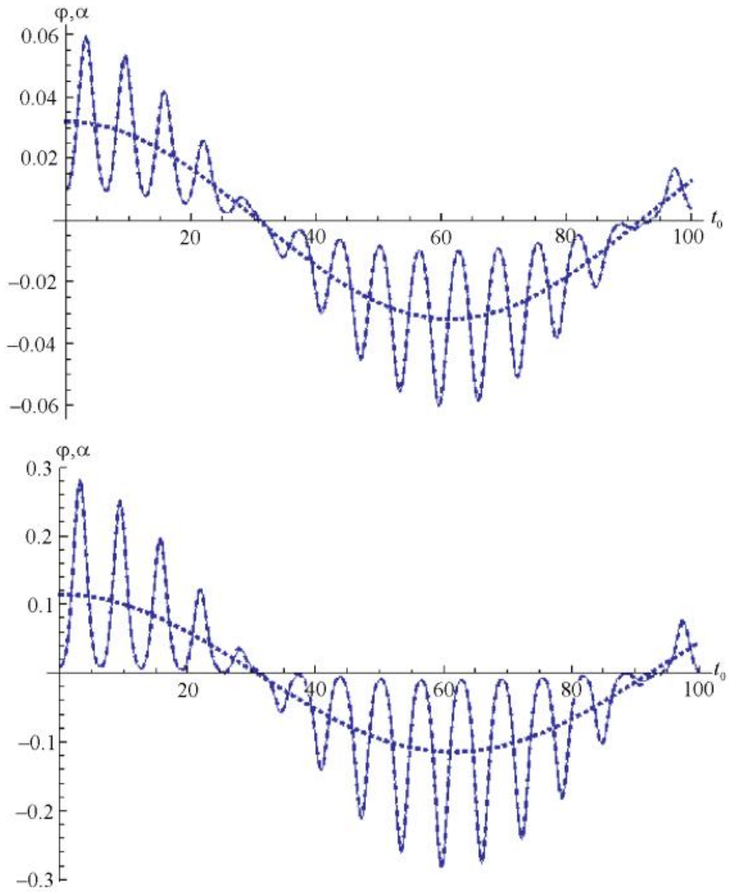


Figure 1. The dependence of pendulum's deflection ¨ on time t_0 at initial conditions $¨(0) = 0.01$, $\dot{¨}(0) = 0$ and (a) $¢ = 0.4$, $¡ = 2.59$; (b) $¢ = 1.4$, $¡ = 1.7395$.

As is seen from Figure 1, obtained analytical solution is in good agreement with the results of numerical experiments. In particular, the conclusion that not only the effective stiffness of the system changes due to the external loading, but also its effective mass is confirmed.

7. Conclusions

A modification of the MDSM applicable for solving equations which don't contain a small parameter is proposed in the paper. As an illustrative example a classical problem about a pendulum with vibrating suspension axis is considered at unconventional values of parameters. Case, when frequency of external loading and the natural frequency of the pendulum in the absence of this loading are of the same order, is studied. Vibration intensity is assumed to be relatively low. As the result, solutions of pendulum's motion equation in the stability domain are derived. In particular, it is revealed that in the considered range of parameters not only the effective stiffness of the system changes due to the external loading, but also its effective mass.

The validity of the results obtained by the proposed modification of the MDSM is confirmed. It is noted that application of the classical asymptotic methods for solving the considered equation in the studied range of parameters leads to erroneous results. So, the applicability range of the MDSM turns out to be broader than the one of these methods.

Acknowledgments

Work is carried out with financial support from the Russian Foundation of Basic Research, grant 12-08-31136. The author is grateful to Professor I.I. Blekhman for specifying the research subject and comments to the paper.

REFERENCE

1. Stephenson A. On an induced stability. //Philosophical Magazine, Vol. 15, 233–236, 1908.
2. Капица П.Л. Маятник с вибрирующим подвесом.// Успехи физ. наук, т.44, вып.1, 1954.
3. Капица П.Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса. //Журнал экспериментальной и теоретической физики, т.21, вып.5, 1951.
4. Kokkorakis G.C., Roumeliotis J.A. Power series expansions for Mathieu functions with small arguments. /Mathematics of Computation, 70, 235, 1221-1235, 2000.
5. Abramov A.A., Kurochkin S.V. Calculation of solutions to the Mathieu equation and of related quantities.// Computational Mathematics and Mathematical Physics, 47, 3, 397-406, 2007.
6. Hayashi C. Nonlinear oscillations in physical systems, New York: McGraw-Hill, 1964.
7. Nayfeh A.H. Perturbation methods, New York: Wiley, 1973.
8. Журавлев В.Ф., Климов Д.В. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988.
9. Blekhman I.I. Vibrational Mechanics, Singapore: World Scientific, 2000.
10. Blekhman I.I. Selected topics in vibrational mechanics. Singapore: World Scientific, 2004.
11. Bogoliubov N.N., Mitropolskii Ju.A. Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations, New York: Gordon and Breach, 1961.
12. Sanders J.A., Verhulst F. Averaging methods in nonlinear dynamical systems. Berlin: Springer-Verlag, 1985.
13. Nayfeh A.H., Mook D.T. Nonlinear Oscillations. New York: Wiley-Interscience, 1979.

Information about author

Sorokin Vladislav – senior research fellow, Institute of Problems in Mechanical Engineering Russian Academy of Science, Laboratory of Vibrational Mechanics, +79215887300
E-mail: slavos87@mail.ru

CONTENTS AND ABSTRACTS

Several works related to the contact and mixed problems of the theory of elasticity, which explores issues of mutual influence of two types stress concentrators in an infinite plate and strip are presented. Due to appropriate choice of the relative location of the stringers and cracks, sometimes it can be possible to reduce significantly the coefficient of intensity of breaking stresses at the ends of cracks.

The exact solution of one mixed boundary value problem for orthotropic plane with absolutely rigid inclusion and two slits on one of the orthotropy principal direction is built on the base of results obtained in [1].

Experimental research has revealed that effect on the microhardness of the oxyfluoride glasses are making a contribution not only the glass transition temperature and the degree of filling of the three-dimensional frame of glass, but the energy of individual bonds of framing elements. When the ratios of components are changing in a wide range, which leads to significant structural changes, the microhardness may not always be a linear function of the composition.

The thermomechanical model of materials with small-sized structure that takes into account the temporal effects in the accumulation and distribution of heat and deformation, as well as the effects of spatial nonlocality and rotational degrees of freedom of the structure elements is proposed.

New general forms of three-dimensional equilibrium equations of continuum mechanics are obtained by representations of the symmetric stress tensor as symmetrized mixed diades of asymptotic directors. The study employs notations and terminology known from the mathematical theory of plasticity. However all results remain valid for stress fields in an arbitrary continuum. The simplest and analytically most efficient stress tensor representations for full plastic (Haar–Karman hypothesis), semi-plastic and non-plastic three-dimensional states given by mixed diades of asymptotic directors are discussed. Stress tensor representations by the asymptotic directors involve the intermediate principal stress and the Lode parameter. The asymptotic directors provide a natural tensor basis for the symmetric stress tensor different from the spectral forms. The general vector forms of three-dimensional equilibrium equations are separately derived for the full plastic, semi-plastic and non-plastic states. Integrability conditions for these equations are discussed.

We study the problems on defect identification in the elastic media via scanning by Ultrasonic waves. In the dynamic formulation the problem can be reduced to a system of Boundary Integral Equations (BIE) over the boundary surface of the defects. When solving direct diffraction problems with *a priori* known defect’s geometry, the problem is solved by a standard collocation technique. However, in the inverse defect identification problem the geometry is not known, and in fact represents an additional set of parameters, to be determined. As a result we come to a system of nonlinear equations which are solved with the use of modern optimization methods. Then we demonstrate some example of identification for defects of complex shape.

Manzhirov A.V. 35

Interdisciplinary problems in mechanics of growing solids

Problems of growing solids mechanics which need additional information from physics, chemistry, biology, and other sciences to be solved are under discussion. They arise from mathematical modeling of various technological and natural processes and very important for practical applications.

Section reports

Avetisyan S.A...40

Two Adjacent Boundary Value Problems Of Filtration Theory And Elasticity Theory For Exponentially Heterogeneous Stripe

Two adjacent problems of plane filtration theory for liquid and elasticity theory under antiplane deformation for exponentially heterogeneous stripe are considered.

Azatyan G.L, Gevorgyan R.S, Poghosyan H.M...45

Asymptotic solutions of dynamic problems for two-layer ring plate with electroelastic layer

By asymptotic integration of the equations of three-dimensional problems of the theory of elasticity and electroelasticity are derived recurrence formulas for the determination of the components of the stress tensor, the displacement vector and the electric potential of a two-layer plate of infinite longitudinal dimensions with a circular hole. One layer of plate is an electrically conductive with zero ohmic resistance and the other one is piezoceramic and the polarized along the thickness. Examined cases when on the faces of the plate electric potential together with the conditions of the first and mixed boundary value problems of the theory of elasticity are given. Dispersion equations of the resonant frequencies of oscillation are obtained. Part of the resonant frequencies of the plate is calculated.

Aizikovich S.M., Vasiliev A.S., Volkov S.S., Mitrin B.I. 50

An approximated analytical solution of axisymmetric contact problems for a soft elastic layer inhomogeneous by depth

Analytical solutions for contact problems involving elastic homogeneous layer were obtained in [1-4]. Their applicability was restricted to the cases of a thick layer [1, 2], a thin layer [3], and a layer which thickness is comparable to width of a punch [4].

Due to wide use of functionally graded materials and coatings in industry, contact problems for media having varying with depth elastic properties are of particular interest. Recent results in such problems are obtained mostly in sight of special assumptions on the form of elastic properties variation (linear, power law, exponential, and so on), which allows one to use exact analytical solutions for corresponding differential equations [5-7]. Coatings with arbitrary variation of elastic properties by depth were considered by Y.-S. Wang et al. [8] and S.M. Aizikovich et al. [9-12].

Usually substrate is assumed to be undeformable when a soft elastic layer is considered [1-7]. But even the toughest materials have elastic properties, for example, Young's modulus of the diamond is 1000 GPa. Young's modulus of soft metals (Al, Cu, Pb, Ag, and others) varies from 16 to 125 GPa, Young's modulus of polymers (plexiglas, polystyrene, polyvinylchloride) – from 1 to 4 GPa. So the ratio of the Young's moduli of the layer and the elastic substrate usually is equal to 10–100 and in rare cases can be up to 1000 and greater.

In this paper we consider elastic layer inhomogeneous by depth, which is located on an undeformable substrate which elastic modulus differs more than 10 times from that one of the layer. Approximated analytical solutions for the torsion and the indentation problems for a rigid flat circular punch are constructed. Effect of the hardness of the substrate and the inhomogeneity of the layer on characteristics of the contact interaction was studied.

Hakobyan H. Yeghiazaryan T...55
Vibration of the plate in the supersonic flow of gaze
The problem of the hinged on two edges plate streamlined by supersonic flow of gas by speed U is considered. The dimensions of plate are a,b. As an expression of dynamic forces acting on the plate are taken the expressions which were obtained by "piston theory" and by refined theory. Results for the flat one-dimensional problem on the methods of Galyurkin and Ritz are obtained and comparisons of the results are given.

Hakobyan L. 59
Contact problem for elastic plane with semi-infinite slit, perpendicularly located against finite crack
The stress state of homogeneous elastic plane, weakened by semi-infinite slit, perpendicularly coming to the middle of finite crack and deformed by two same absolutely rigid stamps, located in symmetric regions of opposite banks of semi-infinite slit is considered. The governing system of singular integral equations is obtained. The solution of the system is built by numerical-analytical method of discrete singularities.

Amirbekyan A.N., Shekyan A.L., Shekyan L.A. 64
On the contact problem of the bending beam of finite length of the elastic strip in view of shear forces
The contact problem of the bending of the beam of finite length on elastic foundation in the form of a strip in the plane strain conditions, the generalized model of the bend in the framework of S.P.Timoshenko, where in addition to vertical forces axial compressive or tensile forces also affect on the deflection of the beam is considered.
Owing to method of singular integral equations (SIE) in combination with known numerical and analytical solutions of SIE, the problem is reduced to regular system of linear algebraic equations.

Antonyan S., Vasilyan N. 69
The stress-strain state of bending plate around of hinged edges
In this article investigated stress- strain state of plate bending problem around of hinged and simply supported edges, applying the approach Nadai[1]. By theory of S.A. Ambartsumian, which takes into account the transversal shear deformations, is identified the difference of boundary conditions. The difference for cutting forces based on theory S.A. Ambartsumian and Kirchhoff theory around of a fixed edge of the plate is obtained.

R. V. Ardazishvili 74
Three-dimensional surface wave for mixed boundary conditions on the surface
The paper concerns the propagation of surface waves localized near the edge of half-space subject to different boundary conditions. To derive the dispersion equation for each type of boundary conditions three-dimensional equations of theory of elasticity are used. Then mathematical analisys performed for all dispersion equations and it shows that root, i.e. surface wave, exist only in two types of boundary conditions. Numeric results of phase velocities depending on angle of propagation and Poisson's ratio are demonstrated. It is noted that for fixed Poisson's ratio phase velocity of surface wave tend to phase velocity of Rayleigh wave. Numerical results of waveforms for two types of boundary conditions are presented.

Arzumanyan A. M., Hakobyan S. H...79
Comprehensive study of processes of thin edge cutting-ferrous metal and alloys
In a competitive environment in engineering and instrument improving the way of blade non-ferrous metals and alloys, directed to increasing the efficiency of the cutting process, accuracy, surface quality and processing performance, is an actual problem for the development of the various branches of engineering.

Arutyunyan A.R., Arutyunyan R.A., Yakimova K.S. 84
Radiation ageing, creep and creep fracture of metallic alloys

Numerous experimental studies show that under the attack of irradiation mechanical characteristics of metallic alloys undergo significant changes, caused particularly by the aging processes. The following effects are observed: low temperature and high temperature creep and creep fracture, irradiation aging and embrittlement. Numerical experimental results are received on creep, aging and creep fracture. Here one can see the significant increase of the creep rate. The time to fracture decreases many times depending on temperature and irradiation dose. In world literature these effects are investigated well in the context of physical material science. At the same time not enough attention is paid to describe the effects integrally by the mechanic of materials methods in the framework of mechanical parameters. In the presentation these methods are applied to formulate the creep equation and creep fracture criterion, based on the energy conservation law. The theoretical curves of creep and long time strength for different values of irradiation dose are constructed and compared with the corresponding experimental results.

Balasanyan E.S., Petrosyan G.A. 88
Asymptotic solution of one mixed boundary problem of anisotropic two-layer plate
A question of solution stress-strain state in three dimension problem for an asymptotic plate, with full contact between the layers, is considered. In the surface of plate are given mixed conditions of theory of elasticity. With appliance of asymptotic method of integration, solutions of the interior problem are built. Some cases examples are considered.

Balashnikova A. V. 93
The ultimate state of spatial layer of perfectly plastic material when translational anisotropy, compressed rough slabs
In work compression of ideal plastic layer by rigid rough plates in case of transmitting anisotropy in case of flat deformation is considered [1], [2]

Barseghyan T. 96
Problem of Control of a stage by stage changing linear system with intermediate conditions
This paper suggests an approach to solve the problems of control of a stage by stage changing linear system with non-separated intermediate conditions. Solution to a specific problem is given.

Belubekyan M. V., Davtyan A. A., Mheryan D. H. 101
The surface waves on the system of the opposite splitting of layer and semi-space
It is assumed that on the surfaces of bounding layers the conditions of splitting contact take place. The layer and the semi- space are moving relative to each other with constant velocity V. The dispersion equation which defines the phase velocity of surface waves has been received. The conditions of existence of the surface wave, in the particular in the case of the same material of the layer and the semi-space have been occurred. It has been investigated short wave and long wave approximations, for which it has been determined, phase velocity depending on the elastic properties of the material layer and the semi-space.

Berberyan A. 106
Propagation acustoelectric gap wave in funtionally graded piezoelectric structures
The propagation of elactroelastic waves in structure, containing elastic bottom layer, piezolayer, air slot, funtionally graded piezoelectric layer is considered.

Berdnik Y.A. 109
Semi-analytical method for the Navier-Stokes equations in the problem on a homogeneous flow of viscous fluid around a linear plate
Many published works [1],[2] have been devoted to the problem at hand, in frames of the boundary-layer theory. The new point in our approach is that we operate with exact Navier-Stokes equations. We also apply a new method to study the problem, which is an iteration scheme for perturbations with respect to the basic flow. The perturbations are assumed to be small when compared to the previous step that implies a certain linearization. At each iterative step there is solved an integral equation

regarding function of viscous friction force over the plate. The solution, obtained at each iteration, is compared with the classical Blasius solution [3].

Estimation of the breaking loads in ice ridges interaction with a hydraulic structures

The work in this paper is dedicated to refinement of ice loads on hydraulic structures of the continental shelf and to development of a method of modeling in the finite element program PLAXIS 2D. The existing analytical methods for calculating the loads from the ice ridge keel on vertical offshore structures according to foreign and domestic regulations were considered. According to foreign and local regulations documents methods for calculating loads from the ice ridge keel on a sloping structures are absent. Recommendations and assumptions of analytical solution calculation are given in the case on vertical structures. The results obtained from the numerical and analytical models are in a good correlation. The main advantage of the developed numerical method is the ability of calculation the ice breaking load in case of interaction ice ridge keel with structures of any shape and configuration.

Numerical simulation of the stress-deformation and temperature state of the bearings in the ANSYS

In the problem is modeled bearing with finite length. The bearing loaded by moments and radial forces. Taken into account wear and heat from friction. Required to determine the temperature that occurs when different modes of operation of the bearing, as well as the stress-strain state, depending on the temperature arises.

Magnetoelastic shear waves in a perfectly conducting layer

The propagation of pure shear magnetoelastic waves in a perfectly conducting layer is considered in the event of magnetic field is parallel to the plane of propagation of the wave. The presence of longitudinal and transverse to the direction of the wave vector components of the magnetic field tension leads to the appearance of a member with a mixed derivative in the wave equation.The problem is solved for different boundary conditions on the surface layers. Phase and group velocity are determined based on the dispersion equation. As well, the influence of the magnetic field on the oscillation frequency, when the magnetoelastic wave cannot be propagated, is investigated.

On the application of the finite-difference equations method in problems of elasticity theory

A brief account of the results of application of finite-difference equations method in boundary problems of elasticity theory on different layered composites under anti-plain deformation is presented.

On two adjacent problems of filtration theory and elasticity theory for a wedge-shaped domain

Boundary problem of plain steady-state filtration theory and adjacent problem in terms of elasticity theory are considered for a wedge-shaped

Evaluation of rational design parameters in structure of the metal-composite bolted connections

Local stress of metal-composite bolted connections in the joint of wing panel with the central section of the airframe is considered. Rational structure parameters of bolted connection for the maximum load capacity are obtained.

On a problem of stability of two layered plate in a supersonic gas flow

In this paper, we consider the problem of dynamic instability of a non-symmetric non-homogeneous over thickness rectangular plate. The asymmetry is treated as follows. In the case when functions of mechanical characteristics of plate's material are continuous with respect to the plate thickness coordinate, they are not symmetrical with respect to the median plane. In the case when the functions are a piecewise continuous (layered plates), then the problem is asymmetric with respect to any plane of the layers and the middle surface. In both cases the equations of planar and bending vibrations of the plate are not separated [1]. The dependence of the critical velocity on dynamic instability from the parameter that depends on the conditions of asymmetric is obtained. According to the obtained results the numerical examples are given for a two-layered plate.

Basing on the equations of three-dimensional problem of elasticity theory, asymptotic solutions of non-classical boundary value problems of natural vibrations of orthotropic shells at the boundary layer in the presence of viscous internal resistance are obtained when the top front surface of the shell is given with two choices of spatial boundary conditions, and a displacement vector is given at the bottom surface. Functions of boundary layer type and characteristic equations for detecting the speed of boundary layer vibrations damping from the edge surface into the shell are obtained.

In present report considered the mixed boundary problem for crack with fluid in thermoelastic plane. The problem is solved by Winner–Hopf method and obtained analytical formula in the form Smirnov-Sobolev for vertical displacement of boundary of crack .

In present report by convolution method the problem of healing of moving with the arbitrary velocity semi-infinite thin fracture, by current of mixture of fluid-cristallines in it, within infinite thermo-elastic media is solved.

Dynamic equations, boundary and initial conditions of plane stress state of the micropolar theory of elasticity with independent fields of displacements and rotations are considered in thin rectangle. Using the method of expansion to power series along the thickness of rectangle and based on the initial approximation, applied one dimensional model of dynamic bending of micropolar elastic thin bars is constructed. It is shown that the constructed model coincides with the analogical model of micropolar bars, constructed on the basis of the asymptotically justified hypotheses method.

The mathematical model of heat transfer in a composite with inclusions of spherical shape is constructed. The formulas for the thermal conductivity of the composite are obtained. The case of an ideal thermal coupling inclusions and the matrix, the case complete lack thermal contact at the interface between the matrix and the inclusion, and the case having an intermediate layer between the switching matrix are examined.

On the basis of the geometrical diffraction theory there are studied the trajectory of multiply reflected high-frequency waves and their amplitude in the acoustic medium bounded by a parallelepiped with rigid walls containing reflectors of cylindrical and spherical shape. There is performed a quantitative analysis of a standard model used in the problems of applied acoustics, when boundary surfaces are replaced by planar faces of the inscribed or circumscribed polyhedra.

The problem of diffraction of surface shear electro-elastic wave is reduced to the solution of Riemann problem in analytic functions theory, using real Fourier transformation and a solution of a functional equation.The presence of the semi-infinite metallic layer leads to a propagation of diffracted volume and surface electro-elastic waves.

The possibility of occurrence and propagation of waves of Raleigh type in an electro conductive elastic infinite layer half-space when on the surface of layer are realized the conditions of sliding contact. In the initial state layer half-space is in a constant magnetic field. It is established that the appearance of surface waves depends both on the Poisson’s ratio and the ratio of layer thickness and wavelength.

In this paper on the basis of Radon integral transform is investigated the problem of wave’s propagation in an elastic half-space when on the boundary of half-space the condition of constrained free edge are given. The dispersion equation for surface wave propagation speed is obtained.

Two problems of the torsion of elastic prismatic bars with cross-sections in the form of an arbitrary circular segment and an isosceles triangle, which are solved by the method of boundary integral equations (BIE) connected with boundary problems for harmonic functions, are considered.

Here we consider a mixed problem of the theory of elasticity for an elastic composite (piecewise-homogeneous) plane with two final rectilinear cracks. It is assumed, that with respect to two half–planes heterogeneity line asymmetrically situated finite rectilinear cracks are perpendicular thereto and are located on the same line. The plane is deformed by normal stresses applied on the crack edges and simultaneously by uniformly distributed horizontal stresses of piecewise–constant intensity, acting at infinity of composite plane. The problem is formulated as a system of singular integral equations under certain conditions on the unknown functions, the solution of which is reduced to solution of a set of quasicompletely regular system of infinite linear algebraic equations by well–known technique of Chebyshev orthogonal polynomials. The fracture stress intensities near cracks tips are determined.

On the basis of the hypothesis of Kirchhoff and the hypothesis of magnetoelasticity of thin bodies of S. A. Ambartsumian, G.E. Baghdasaryan, M. V. Belubekyan the problem of magnetoelasic vibrations for plate-strip is solved. The equations of planar and transverse vibrations are obtained. The frequency vibrations are identified depending on the intensity of magnetic field.

The stability of non-conservative rod systems is investigated, considering the different types of friction.The destabilization effects due to friction are established.

An explicit-form representation for the kernel of integral equation in the crack problem for a porous elastic material
The paper is concerned with a solution of crack problem in the porous elastic material in frames of Nunziato and Cowin model. With the help of Fourier transform the problem is reduced to an integral equation over the boundary of the crack. We perform some analytical transformations to calculate the kernel of the integral equation in explicit form.

Optimization of fixing conditions in the problems of beam bending by stiffness criteria
This paper focuses on the problem of optimization of fixing conditions (selection the locations of supports) in the bending problem of statically indeterminate beams under uniformly distributed load by criteria of stiffness. Shown that the equation of the elastic line of the beams in these problems is the linear combination of functions which form Chebyshev system, using theory of best approximation is permissible for solving these problems. By using this theory on problems of fixing conditions (selection the locations of supports) the solutions of tasks of one and three times statically indeterminate beams has been obtained.

On the stress-strain state of two isotropic bands connected in the junction
The problem of determining the stress-strain state of a system of two isotropic bands connected to the joint is considered. On the upper longitudinal edge of bands are given the corresponding components of the stress tensor, and the lower edge is rigidly fixed. Damping rates of values in the boundary layers of the first and second bands are researched. The characteristic equations for the determination of the damping rates are obtained. Conjugation of solution of the inner problem and the boundary layer near the the junction is conducted.

Asymptotical Substantiation of applied dynamic Theory of Micropolar Elastic shells with Independent Fields of displacempents and rotations
In present work on the basis of asymptotical method in thin area of shell internal problem, boundary layer and boundary layer by time for dynamics of micropolar elastic shells are constructed, and the question of their merging is studied. At level of internal problem the applied dynamic theory of micropolar elastic shells with free rotation constructed on the basis of the hypotheses method are proved.

About a Mixed Boundary Value Problem of Anisotropic Two-Layer strip– rectangle on the Base of Geometrical Non-Linear Theory of Elasticity under incomplete contact between layers
The question of determining the stress-strain state in the plane problem for an anisotropic laminated strip for geometrically non-linear elasticity with incomplete contact between the layers is investigated. It is considerd that on one of the longitudinal edges of the strip are given the normal component of the displacement vector and tangential stresses, and on the other, the conditions of the first boundary-value problem of elasticity theory. The solution of the corresponding to internal problem is constructed

On the optimal stabilization of a mathematical pendulum with a variable length
The problem of optimal stabilization of a mathematical pendulum, when its length changed according to the given law, has been treated. The system of differential equations of controlled motion of the pendulum has been made up. Confining to small oscillations and introducing the small parameter, the

problem of optimal stabilization of the mathematical pendulum at lower equilibrium position in case of small oscillations has been formulated. The problem has been solved by using Lyapunov – Bellman method. An optimal Lyapunov function and an optimal control action have been constructed.

The vibrations of unmoment orthotropic cylindrical shell with variable curvature, with free ends and rigid-clamped boundary generators

The free edge vibrations of orthotropic unmoment non-closed cylindrical shell with variable curvature, with free ends and rigid-clamped boundary generators are studied.

On one coalition differential game on the plane at two target sets

In the work a coalition linear differential game of three persons is considered at two target sets. The conditions of a choice of extreme strategies and optimum values of the coefficients describing the share of players in a coalition are received.

Impact of the floating in an incompressible liquid plate, in the presence of a contact on its back side.

In [1] the plane problem of the vertical stroke of the horizontal rigid plate immersed in an incompressible liquid with a free surface has been considered. The fluid occupies the halfspace. In this work, the contact area is not taken into account. In this paper, this problem is considered in consideration of the contact area of the plate. Research has shown that taking into account the contact area on the back side of the plate substantially changes the velocity field in the region occupied by the liquid.

Thermoelastic waves in metals and dielectrics

In this work generation and propagation of the thermoelastic waves in a metals and dielectrics induced by an ultrafast laser pulse are considered. To describe wave propagation in metals two-temperature model was used. An analytical solution was obtained using Laplace transform. Finite element modeling of the wave propagation was also performed. The two-temperature model was implemented in FEM package, ABAQUS. Results were compared with those obtained without considering the two-temperature model.

Application of polymers in modern construction

Either ordinary concretes with polymer additives are used in practice, either materials in which polymer is considered to be the unique binder. The choice of polymer is defined by the sphere of use of concrete and character of possible influences.

On adhesive binding optimization of elastic homogeneous rod to a fixed rigid base

The problem of finite, partially glued to a fixed rigid base rod longitudinal vibrations damping is investigated by optimizing adhesive structural topology. Vibrations are caused by external load, concentrated on free end of the rod, the other end of which is elastically clamped. The problem is mathematically formulated as a boundary–value problem for one–dimensional wave equation with variable controlled coefficient, and the maximal length of adhesion is taken as optimality criterion to be minimized. Structure of adhesion layer, optimal in that sense, is obtained as a piecewise–constant function. Using Fourier real generalized integral transform, on the bases of finite control method, the problem of unknown function determination is reduced to determination of certain switching points from a system of nonlinear, in general, complex equations. Some particular cases are considered.

Kolesnikov M.N., Telytnikov I.S. 261
To a problem of vibrations of adjoining semi-infinite plates on a surface of elastic medium
The problem of vibrations of the coating consisting of two half-planes, bordering along a straight line on an elastic foundation is discussed.
Dynamic problems of the elasticity theory for plates on deformable foundation have applications in construction, engineering, materials science and other fields. In seismology, the interaction of lithospheric structures as contacting deformable plates placed on an elastic foundation can also be studied in terms of the theory of mixed problems of elasticity.
Two-dimensional elastic plates with the average thickness parameters are considered as components of coatings. The infinite crack passes on the border between the plates. Contact between the coating and the substrate is ideal, an elastic medium containing no defects treated as substrate. Applying the differential factorization method systems of integral equations concerning the stresses between the coating and the foundation are constructed. Solutions of received integral equation's systems are obtained with integral factorization method of Wiener–Hopf. Difficulties caused by the polynomial growth of the elements of kernel's symbols are overcome by moving a differential operator outside. The unknown functions included in the solutions are determined from the given boundary conditions for the plates.

Sorokin V.S. 265
Analysis of motion of a pendulum with vibrating suspension axis at unconventional values of parameters
The present paper is concerned with the analysis of motion of a pendulum with vibrating suspension axis at unconventional values of parameters. Case, when frequency of external loading and the natural frequency of the pendulum in the absence of this loading are of the same order, is studied. Vibration intensity is assumed to be relatively low. A new modification of the method of direct separation of motions (MDSM) is proposed to study corresponding equation, which in the considered case doesn't contain a small parameter explicitly. The aim is to obtain solutions of this equation in the stability domain. It is revealed that in the considered range of parameters not only the effective stiffness of the system changes due to the external loading, but also its effective mass. It is noted that application of the classical asymptotic methods in the case under study leads to erroneous results. So, the applicability range of the MDSM turns out to be broader than the one of these methods.

О Г Л А В Л Е Н И Е