

Госкомитет науки Министерства образования и науки РА  
Нац.комитет по теоретической и прикладной механике РА  
Институт механики НАН РА  
Институт механики МГУ РФ  
Институт проблем механики им. А.И.Ишлинского РАН  
Государственный инженерный университет Армении  
Нац. университет архитектуры и строительства Армении  
Горисский Государственный университет  
Арцахский Государственный университет

# **ПРОБЛЕМЫ ДИНАМИКИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СРЕД**

Труды VIII международной конференции  
сентябрь 22-26, 2014, Горис-Степанакерт

Институт механики НАН РА  
Ереван – 2014

**ՀՏԴ 06:531/534**  
**ԳՄԴ 22.3**  
**Դ 447**

**Сопредседатели оргкомитета конференции:**

академик РАН С.С.Григорян,  
академик НАН РА Л.А.Агаловян,  
д.ф.м.н. В.Н.Акопян,  
д.ф.м.н. проф. Ю.С.Сафарян.

**Заместители сопредседателей:**

д.ф.м.н. А.В.Саакян  
д.ф.м.н., проф. А.А.Ванцян,  
д.ф.м.н., проф. А.Н.Мартиросян,  
д.ф.м.н. А.М.Хачатрян

**Ученые секретари конференции:**

к.ф.м.н. Манукян Г.А.,  
к.ф.м.н. Даштоян Л.Л.  
к.ф.м.н. Динунц А.С.

**Оргкомитет конференции:** А.С.Аветисян, В.М.Акопян, Ю.Р.Акопян, С.А.Амбарцумян, Р.А.Арутюнян, С.А.Асрян, Г.Е.Багдасарян, М.В.Белубекян, Н.Д.Вайсфельд, З.Н.Даноян, К.Б.Казарян, И.Г.Горячева, Г.В.Джаиани, Ю.Д.Каплунов, А.В.Манжиров, М.М.Минасян, В.И.Ерофеев, Р.М.Киракосян, Л.А.Мовсисян, С.М.Мхитарян, В.Г.Попов, С.О.Саркисян, С.В.Саркисян, А.П.Сейранян, А.М.Симонян, М.А.Сумбатян, Н.В.Туманов, О.В.Токмаджян, А.Б.Товмасян, А.К.Цатурян, Н.Н.Шавлакадзе, Г.Г.Шекиян

**Редколлегия:** академик Л.А.Агаловян, чл.-корр. А.С.Аветисян, д.ф.м.н. В.Н.Акопян, д.ф.м.н. К.Б.Казарян, д.ф.м.н. А.В.Саакян, к.ф.м.н. Г.З.Геворкян, к.ф.м.н. Л.Л.Даштоян

<b>Ответственный редактор:</b>	д.ф.м.н. Саакян А.В.
<b>Технический редактор:</b>	к.ф.м.н. Г.З.Геворкян
<b>Корректоры:</b>	Авдалян Ж.А., Овсепян С.С.

**Դ 447 Դեֆորմացվող միջավայրերի փոխազդեցության  
դինամիկայի պրոբլեմները.-, Էդիկ Թանգյան,, տպարան  
Միկոյան 23/3, 2011.-470էջ:**

**ԳՄԴ 22.3**

**ISBN 978-99941-2-163-3**

**ԴԵՖՈՐՄԱՅՎՈՂ  
ՄԻՋԱՎԱՅՐԵՐԻ  
ՓՈԽԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ  
ԴԻՆԱՄԻԿԱՅԻ ՊՐՈԲԼԵՄՆԵՐԸ**

VIII միջազգային գիտաժողով  
սեպտեմբերի 22-26, 2014թ.  
Գորիս-Ստեփանակերտ

**THE PROBLEMS OF DYNAMICS  
OF INTERACTION  
OF DEFORMABLE MEDIA**

Proceedings of VIII International Conference  
September 22-26, 2014, Goris-Stepanakert

Посвящается памяти  
основоположников конференции «Проблемы динамики  
взаимодействия деформируемых сред»



Доктор физ.-мат. наук, профессор,  
заслуженный деятель науки РСФСР

**Сагомонян  
Артур Яковлевич**

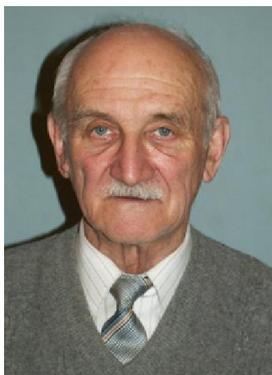
(1914-2001)



Доктор физ.-мат. наук, профессор,  
Член-корреспондент НАН Армении,

**Багдоев  
Александр Георгиевич**

(1933-2013)



Доктор физ.-мат. наук, профессор,  
заслуженный деятель науки РСФСР,  
иностраннный член НАН Армении,

**Кукуджанов  
Владимир Николаевич**

(1931-2013)

# РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОУПРУГОГО СДВИГОВОГО ВОЛНОВОГО СИГНАЛА В ПРОДОЛЬНО-НЕОДНОРОДНОМ ПЬЕЗОДИЭЛЕКТРИЧЕСКОМ СЛОЕ

*Аветисян А.С., Камалян А.А.*

*Армения*

Рассматривается распространение горизонтально-поляризованного электроупругого монохроматического сигнала в продольно-неоднородном пьезодиэлектрическом слое (кристалл гексагональной симметрии класса *bmm*). Задача распространения электроупругого сдвигового сигнала в продольно-неоднородном пьезодиэлектрическом слое приводится к решению системы линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами по отношению амплитуд упругого сдвига и электрического потенциала. Получены закономерности изменения амплитуд упругого сдвига и электрического потенциала по величине и по скорости распространения волны в зависимости от неоднородности материала.

Рассматривается распространение горизонтально-поляризованного электроупругого монохроматического сигнала в продольно-неоднородном пьезодиэлектрическом слое (кристалл гексагональной симметрии класса *bmm*), отнесённый системе координат  $Oxyz$ , где координатная ось  $Oz$  параллельна оси симметрии пьезокристалла, а плоскость  $xOy$  есть плоскость изотропии материала. Неоднородность материала меняется вдоль поверхностей слоя, по оси  $Ox$ , и следовательно, при этом, все физические характеристики материала  $G(x)$ ,  $\rho(x)$ ,  $\varepsilon(x)$  и  $e(x)$  являются функциями координат  $x$  и должны удовлетворять также некоторым численным условиям. При этом, если жёсткость упругого сдвига и плотность материала должны быть положительными:  $G(x) > 0$ ,  $\rho(x) > 0$ , то относительная диэлектрическая проницаемость материала может принимать только значения:  $\varepsilon(x) > 1$ . Если предполагать, что диэлектрическая проницаемость и пьезоэлектрический модуль в неоднородном пьезокристалле меняются идентичным образом, то  $e(x) = a_0 \varepsilon(x)$ . За счёт выбора введённой постоянной  $a_0$ , при наличии инверсионной оси кристалла,  $a_0$  может быть отрицательным или принимать также значение нуль, что будет соответствовать непьезоактивному диэлектрику.

Исходя из того, что неоднородность материала может привести к изменению амплитуды и фазы распространяющегося электроупругого сигнала в зависимости от характера неоднородности материала, искомые функции сдвигового электроупругого поля  $w(x, y, t)$  и  $\psi(x, y, t)$  в общем случае представим в виде:

$$\begin{Bmatrix} w(x; y; t) \\ \psi(x; y; t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_w(x; y) \\ A_\psi(x; y) \end{Bmatrix} \exp i \left[ \begin{Bmatrix} \theta_w(x, y) \\ \theta_\psi(x, y) \end{Bmatrix} - \omega t \right] \quad (1.1)$$

При распространении горизонтально-поляризованного электроупругого монохроматического сигнала в продольно-неоднородном пьезоэлектрическом слое, волновой вектор  $\vec{k}(x, y) = \text{grad } \theta(x, y)$  принимает простой линейный вид  $\vec{k}(x, y) = k\vec{x}$ , и относительно введённых в (1.1) амплитудных функций  $A_w(x, y)$  и  $A_\psi(x, y)$  из уравнений антиплоской задачи электроупругости получается система линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 A_w(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_w(x, y)}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial A_w(x, y)}{\partial x} - k^2 A_w(x, y) + \\ & + \frac{f'(x)}{f(x)} \left[ \frac{\partial A_w(x, y)}{\partial x} + ik A_w(x, y) \right] + \frac{\omega^2 A_w(x, y)}{C^2(x)} = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 A_\psi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_\psi(x, y)}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial A_\psi(x, y)}{\partial x} - k^2 A_\psi(x, y) + \\ & + \frac{\varepsilon'(x)}{\varepsilon(x)} \left[ \frac{\partial A_\psi(x, y)}{\partial x} + ik A_\psi(x, y) \right] = 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Полученные уравнения (1.2) и (1.3) дают возможность утверждать, что обе амплитудные функции электроупругой волны в случае продольной неоднородности слоя при распространении волны типа (1.1) можно представить в виде  $A(x, y, t) = [A_1(x) + A_2(y)] \cdot \exp\{i(kx - \omega t)\}$  или  $A(x, y, t) = A_1(x) \cdot A_2(y) \cdot \exp\{i(kx - \omega t)\}$ , где амплитудные составляющие  $A_2(y)$  будут определены из поверхностных условий по начальному электроупругому сигналу, а по направлению  $Ox$  будем иметь осцилляцию волновых составляющих  $A_1(x)$  типа

$$2 \frac{dA_{w1}(x)}{dx} + \frac{f'(x)}{f(x)} A_{w1}(x) = 0$$

Таким образом, задача распространения направленного параллельно поверхностям слоя, электроупругого сдвигового сигнала в продольно-неоднородном пьезоэлектрическом слое приводится к решению системы линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами (1.2) и (1.3) по отношению амплитуд упругого сдвига и электрического потенциала  $A_{w1}(x)$ ,  $A_{\psi1}(x)$ , а изменения амплитуд  $A_{w2}(y)$  и  $A_{\psi2}(y)$  по толщине слоя определяются прежней формой исходного электроупругого сигнала обусловленными граничными условиями на поверхностях слоя  $y = \pm h$ .

$$\frac{d^2 A_w(x)}{dx^2} - k^2 \left[ 1 + \frac{1}{2k^2} \left( \frac{f'(x)}{f(x)} \right)^2 - V^2(x) \right] A_w(x) = 0, \quad (1.4)$$

$$\frac{d^2 A_\psi(x)}{dx^2} - k^2 \left[ 1 + \frac{1}{2k^2} \left( \frac{\varepsilon'(x)}{\varepsilon(x)} \right)^2 \right] A_\psi(x) = 0, \quad (1.5)$$

Исследуем распространение электроупругого волнового сигнала типа  $\bar{F}(x, y, t) = A(x) \cdot A(y) \cdot \exp\{i(kx - \omega t)\}$  в продольно-неоднородном пьезоэлектрическом слое  $\{|x| < \infty, |y| \leq h, |z| < \infty\}$  в случае конкретной неоднородности материала. Предполагается, что все физические характеристики материала являются функциями координат  $G(x) = G_0 \exp(-k\delta x)$ ,  $\rho(x) = \rho_0 \exp(-k\delta x)$ ,  $\varepsilon(x) = \varepsilon_0 \exp(-k\delta x)$ ,  $e(x) = e_0 \exp(-k\delta x)$ , удовлетворяющими некоторым численным условиям, оговоренным выше, а  $k\delta \geq 0$  – характерная относительная длина для изменения неоднородности материала. Когда поверхности  $y = \pm h$  металлизированы и свободны от механических нагрузок, то на поверхностях будем иметь условия механически открытой и электрически закрытой границ  $\sigma_{zy}(x, \pm h, t) = 0$ ,  $\Phi(x, \pm h, t) = 0$ , или, с учётом выражений для упругого напряжения и введённого электрического потенциала  $\Psi(x, y, t) = \Phi(x, y, t) - a_0 w(x, y, t)$ , на поверхностях  $y = \pm h$  будем иметь:

$$f_0 \frac{dA_{w2}}{dy} \Big|_{y = \pm h} - e_0 \frac{dA_{\psi2}}{dy} \Big|_{y = \pm h} = 0, \text{ где } f_0 = G_0 \left( 1 + \chi_0^2 \right)$$

$$\text{и } \chi_0^2 = e_0^2 / (G_0 \varepsilon_0), \quad A_{w2}(\pm h) + \frac{e_0}{\varepsilon_0} A_{\psi2}(\pm h) = A_{w1}(x) + \frac{e_0}{\varepsilon_0} A_{\psi1}(x) \quad (1.6)$$

С учётом законов неоднородности слоя и условий (1.6), уравнения (1.4) и (1.5) преобразуются и для амплитудных функций  $A_{w2}(y)$  и  $A_{\psi2}(y)$  получим вид электроупругого сигнала по толщине слоя, соответствующего данным граничным условиям:

$$A_{w2}(y) = A_1 \sinh(k\tilde{\alpha}y) + A_2 \cosh(k\tilde{\alpha}y) \quad (1.7)$$

$$A_{\psi2}(y) = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0} [A_1 \sinh(k\tilde{\alpha}y) + A_2 \cosh(k\tilde{\alpha}y)] + A_3 \sinh(ky) + A_4 \cosh(ky)$$

где  $\tilde{\alpha} = (1 - V_0^2(\omega/k))^{1/2}$ ,  $V_0^2(\omega/k) = (\omega^2/k^2 C_0^2)$ ,  $C_0^2 = f_0 \rho_0^{-1}$ ,  $f_0 = G_0(1 + \chi_0)$ ,  $\chi_0 = e_0^2/G_0 \varepsilon_0$ .

С учётом условий затухания амплитудных функций  $A_{w1}(x)$  и  $A_{\psi1}(x)$  в бесконечно удалённых срезах слоя  $x \rightarrow +\infty$  и  $x \rightarrow -\infty$ , получим характер распространения электроупругого сигнала по положительному направлению оси  $ox$  в виде слагаемых:

$$A_{w1}(x) = A_{0w} \cdot e^{i\{k(1+\gamma_w)x - \omega t\}}, \quad A_{\psi1}(x) = A_{0\psi} \cdot e^{i\{k(1+\gamma_\psi)x - \omega t\}},$$

где введённые параметры  $\gamma_w = (V_0^2(\omega/k) - 1 - \delta^2/2)^{1/2}$  и  $\gamma_\psi = i(1 + \delta^2/2)^{1/2}$  характеризуют изменения упругого сдвига и электрического потенциала по направлению распространения, и следовательно, вид решения задачи распространения электроупругого сдвигового сигнала  $\bar{F}(x, y, t) = A(x)A(y) \cdot e^{i(kx - \omega t)}$  в продольно-неоднородном пьезодиэлектрическом слое для упругого сдвига и электрического потенциала, соответственно. При определённых длинах  $\lambda = 2\pi/k$  первоначального волнового сигнала, когда  $\gamma_w^2 = V_0^2(\omega/k) - 1 - \delta^2/2 \geq 0$ , распространение упругого сдвига  $w(x, y, t)$ , не меняя амплитуды первоначального сигнала, приобретает дисперсию и распространяется вдоль оси  $ox$  со скоростью  $v_s^2(\omega/k) = C_0^2 \omega^2 / [(1 + \delta^2)k^2 - \omega^2]$

$$w(x, y, t) = [A_1 \sinh(k\tilde{\alpha}y) + A_2 \cosh(k\tilde{\alpha}y)] \cdot e^{i\{k(1+\gamma_w)x - \omega t\}} \quad (1.8)$$

А электрический потенциал меняется в каждом срезе  $x = const$ , продолжая распространяться по оси  $Ox$  со скоростью первоначального сигнала  $v_\Psi (\omega/k) = \omega/k$

$$\Psi(x, y, t) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0} [A_1 \sinh(k\tilde{\alpha}y) + A_2 \cosh(k\tilde{\alpha}y)] + \\ + A_3 \sinh(ky) + A_4 \cosh(ky) \end{array} \right\} A_0 e^{-k\delta x} e^{i(kx - \omega t)} \quad (1.9)$$

Когда же  $V_0^2 (\omega/k) - 1 - \delta^2/2 \leq 0$ , обе составляющие первоначального сигнала распространяются с одинаковой скоростью и меняются в каждом срезе  $x = const$

$$w(x, y, t) = [A_1 \sinh(k\tilde{\alpha}y) + A_2 \cosh(k\tilde{\alpha}y)] \cdot A_0 e^{-k\gamma_w x} e^{i(kx - \omega t)} \quad (1.10)$$

$$\Psi(x, y, t) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0} [A_1 \sinh(k\tilde{\alpha}y) + A_2 \cosh(k\tilde{\alpha}y)] + \\ + A_3 \sinh(ky) + A_4 \cosh(ky) \end{array} \right\} A_0 e^{-k\delta x} e^{i(kx - \omega t)}$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Дьелесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твёрдых телах. М.: Наука, 1982. 424с.
2. Бирюков С.В., Гуляев Ю.В., Крылов В.В., Плесский В.П. Поверхностные акустические волны в неоднородных средах. М.: Наука, Физматлит, 1991. 416с.
3. Avetisyan A.S., Sarkisyan S.V. About electromagnetoelastic vibrations and waves propagation in nonhomogeneous media. //Mechanical Modelling of New Electromagnetic Materials. Stockholm. 1990. P.387-393.
4. Аветисян А.С. О распространении электроупругой монохроматической волны в неоднородном пьезоэлектрике // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1988. Т.41. № 5. С.41–49.

#### **Сведения об авторах:**

**Аветисян Ара Сергеевич**, Чл.-корр. НАН Армении, д.ф.-м.н., профессор, Институт механики НАН Армении. **Тел.:** (+374 91) 20-20-02,

**E-mail:** [a\\_avetisyan@seua.am](mailto:a_avetisyan@seua.am)

**Камальян Андраник Арменович**, канд. физ.-мат. н., мл. научн. сотрудник, Институт механики НАН Армении. **Тел.:** (+374 94) 90-96-92,

**E-mail:** [kamalyan.andranik@yahoo.com](mailto:kamalyan.andranik@yahoo.com)

# К ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО ГАРАНТИРОВАННОГО ПОИСКА ПОДВИЖНОГО ОБЪЕКТА НА ПЛОСКОСТИ

*Аветисян В.В., Степанян В.С.*

*Армения*

Рассматривается и решается задача оптимального гарантированного поиска объекта, совершающего управляемое простое плоское движение из заданного круга неопределённости. Ищущим принимается объект, управляемый по скорости в трёхмерном пространстве. Поиск считается завершённым, в случае попадания искомого объекта в круг обнаружения – основания подвижного конуса. Построено управление, а также получены условия, при которых гарантированное время поиска искомого объекта минимально для любого начального расстояния между центрами кругов обнаружения и неопределённости.

1. Пусть имеются два точечных объекта  $X$  и  $Y$ , из которых  $X$  - ищущий, а  $Y$  - искомый. Оба объекта, обладая ограниченными линейными скоростями, имеют возможность в каждый момент времени произвольно изменять направления своих движений:  $X$  – в пространстве, а  $Y$  – на плоскости согласно следующим уравнениям, ограничениям и начальным данным:

$$X: \quad \dot{x} = u, \quad x(t_0) = x^0; \quad |u(t)| \leq U; \quad x, u \in R^3 \quad (1.1)$$

$$Y: \quad \dot{y} = v, \quad y(t_0) = y^0; \quad |v(t)| \leq V; \quad y, v \in R^2 \quad (1.2)$$

Пусть в каждый момент времени  $t \geq t_0$  объекту  $X$  точно известно свои фазовые координаты и максимальная скорость объекта  $Y$ . О координатах  $Y$  объекту  $X$  известно лишь то, что в начальный момент времени  $Y$  находится в заданном круге неопределённости

$$y^0 \in D_0 = \{y \in R^2 : |y - \tilde{y}^0| \leq r_0\} \quad (1.3)$$

центр  $\tilde{y}^0 = (\tilde{y}_1^0, \tilde{y}_2^0) \in R^2$  и радиус  $r_0$ , которые также известны  $X$ .

Возможность установления координат объекта  $Y$  осуществляется с помощью подвижной и изменяющейся во времени информационной области

$$G(x(t), C) = \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\xi} \in R^2 : |\tilde{\xi}(t) - \tilde{x}(t)| \leq l(t) = Cx_3(t) \\ \tilde{x} = (x_1, x_2), C = \operatorname{tg} \alpha > 0 \end{array} \right\}, \quad t \geq t_0 \quad (1.4)$$

$$G(x(t_0), C) = G(\tilde{x}(t_0), x_3(t_0), C) = G_0$$

представляющей собой круговое основание некоторого конуса, вершина которого связана с текущим значением вектора положения  $X$ .

Область позволяет определить координаты объекта  $Y$  в случае попадания последнего в некоторый момент  $t^* \geq t_0$  в круговое основание конуса  $G$ :

$$y \in G(x(t^*)) \quad (1.5)$$

При пространственном движении  $X$  изменение круга (1.3) на плоскости определяется движением его центра  $\tilde{x} = (x_1, x_2)$  с помощью управления  $\tilde{u} = (u_1, u_2)$  и расширением или сужением круга (1.3), путем изменения расстояния  $x_3$  объекта  $X$  до плоскости  $(x_1, x_2)$  с помощью скалярного управления  $u_3$ , т.е. изменением её радиуса  $l = Cx_3$  с помощью управления  $Cu_3$ :  $\dot{l} = Cu_3, l_0 = l(t_0)$ . При  $u_3 > 0$  круг  $G$  расширяется, а при  $u_3 < 0$  сужается.

Так как, область достижимости обьекта (1.2) на плоскости  $(x_1, x_2)$  представляет собой круг, то областью неопределённости искомого объекта в момент  $t \geq t_0$  также будет круг  $D(t)$ ,  $D(t) \supseteq D_0$  с центром в точке  $\tilde{y}^0$  и с радиусом  $r_0 + Vt$ . Круг обнаружения  $G(x(t))$ ,  $t \geq t_0$  ищущего объекта  $X$  при всевозможных кусочно-непрерывных управлениях  $u(\tau)$ ,  $t_0 \leq \tau \leq t$ , также представляет круг. Следовательно, условие обнаружения (1.5) гарантированно выполнимо в некоторый момент  $t^* \geq t_0$ , если существует такой момент  $T$ ,  $T \geq t^*$ , что имеет место включение

$$D(T) \subseteq G(x(T)). \quad (1.6)$$

*Задача.* Требуется построить такое управление движением объекта  $X$ , при котором обнаружение искомого объекта (1.5) или условие поглощения (1.6) происходит за минимально возможное гарантированное время  $T$ .

Эта задача ранее, в некоторых частных случаях была исследована в [1,2].

**2.** Пусть параметры кругов неопределённости и обнаружения такие, что в начальный момент времени выполняется условие:  $D_0 \cap G_0 = \emptyset$ , т.е. в начальный момент круг обнаружения находится вне круга неопределённости.

Не нарушая общности, положим, что центр  $\tilde{y}^0 = (\tilde{y}_1^0, \tilde{y}_2^0) \in R^2$  круга  $D_0 \subset R^2$  совпадает с началом декартовой системы координат  $Ox_1x_2$ , а объект  $X$  в начальный момент находится в точке  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ ,  $x_1^0 = R_0$ ,  $x_2^0 = 0$ ,  $x_3^0 = C^{-1}l_0$ , т.е. центр круга обнаружения находится в точке  $(R_0, 0)$ ,  $R_0 > 0$  на оси  $Ox_1$ . Положим, что выполняется соотношение  $R_0 > l_0 + r_0$ , которое описывает начальное расположение кругов  $D_0$  и  $G_0$ .

Пусть  $A_X(A_Y)$  и  $B_X(B_Y)$  – левая и правая точки пересечения круга  $G_0(D_0)$  с осью  $Ox_1$ , соответственно. Тогда, чтобы осуществить включение (1.6) в некоторый момент времени  $T > t_0$ , по аналогии с методом экстремального прицеливания,  $X$  должен двигаться так, чтобы центр круга обнаружения перемещался вдоль оси  $Ox_1$  к центру круга  $D_0(u_2 \equiv 0)$ . Скорости точек  $A_X$  и  $B_X$  при их движении вдоль оси  $Ox_1$  будут, соответственно,  $q_A = u_1 - Cu_3$  и  $q_B = u_1 + Cu_3$ . В соответствии с этим, необходимым и достаточным условием поглощения является существование момента  $T > t_0$ , при котором выполняются соотношения:

$$q_A T + R_0 - l_0 \leq -VT - r_0, \quad q_B T + R_0 + l_0 \geq VT + r_0 \quad (2.3)$$

$$q_A = u_1 - Cu_3 < -V, \quad q_B = u_1 + Cu_3 \geq V, \quad u_1^2 + u_3^2 \leq U^2 \quad (2.4)$$

Из (2.4) следует, что, если параметры  $U, V, C$  удовлетворяют системе неравенств

$$-u_1 + Cu_3 - V > 0, \quad -u_1 - Cu_3 + V \leq 0, \quad u_1^2 + u_3^2 \leq U^2, \quad (2.5)$$

то условие поглощения (2.3) имеет место при любом  $t \in [T^-, +\infty)$ , где

$$T^- = (R_0 - l_0 + r_0)(-u_1 + Cu_3 - V)^{-1} > 0 \quad (2.6)$$

– момент достижения точки  $A_X$  к точке  $A_Y$ .

Если параметры  $R_0, r_0, l_0$  и  $U, V, C$  удовлетворяют системе неравенств

$$-u_1 + Cu_3 - V > 0, \quad -u_1 - Cu_3 + V > 0, \quad (2.7)$$

$$R_0(Cu_3 - V) \geq (l_0 - r_0)u_1, \quad u_1^2 + u_3^2 \leq U^2$$

то условие поглощения имеет место при любом  $t \in [T^-, T^+]$ , где

$$T^+ = (R_0 + l_0 - r_0)(-u_1 - Cu_3 - V)^{-1} > 0 \quad (2.8)$$

– момент достижения точки  $B_Y$  к точке  $B_X$ .

В соответствии с (2.5), (2.7) рассмотрим область

$$H = H_1 \cup H_2, \quad (2.9)$$

$$H_1 = \left\{ (u_1, u_3) : -u_1 + Cu_3 - V > 0, \quad -u_1 - Cu_3 + V \leq 0, \quad u_1^2 + u_3^2 \leq U^2 \right\},$$

$$H_2 = \left\{ (u_1, u_3) : \begin{array}{l} -u_1 + Cu_3 - V > 0, \quad R_0(Cu_3 - V) \geq (l_0 - r_0)u_1 \\ -u_1 - Cu_3 + V > 0, \quad Cu_3 - V \geq 0, \quad u_1^2 + u_3^2 \leq U^2 \end{array} \right\},$$

которая является областью гарантирующих управлений, а определённая на ней функция (2.6) – гарантированным временем поглощения или поиска.

Области  $H_i$ ,  $i = 1, 2$  – выпуклые, так как представляют собой части круга, ограниченные дугами и двумя отрезками, соединяющими концы  $u^P(u_1^P, u_3^P)$ ,  $u^K(u_1^K, u_3^K)$  и  $u^N(u_1^N, u_3^N)$ ,  $u^P(u_1^P, u_3^P)$ , дуг  $u^P u^K$  и  $u^N u^P$ , соответственно, с внутренней точкой  $u^O(u_1^O, u_3^O)$  круга. Области  $H_1$  и  $H_2$  не зависят от параметра  $R_0$  и имеют угловые вершины  $u^P, u^O, u^K, u^N$  со следующими координатами:

$$u_1^P = (V - C\sqrt{(1+C^2)U^2 - V^2}) / (1+C^2) < 0, \quad (2.10)$$

$$u_3^P = \left[ U^2 - (u_1^P)^2 \right]^{1/2} > 0, \quad u_1^O = 0, \quad u_3^O = u_3^N = V / C > 0,$$

$$u_1^K = (V + C\sqrt{(1+C^2)U^2 - V^2}) / (1+C^2) < 0,$$

$$u_3^K = \left[ U^2 - (u_1^K)^2 \right]^{1/2} > 0, \quad u_1^N = \left[ U^2 - (u_3^N)^2 \right]^{1/2} > 0.$$

**3. Перейдём к решению задачи оптимального гарантирующего управления:**

$$T^{\min} = \min_{(u_1, u_3) \in H_1} T^-(u_1, u_3) \quad (3.1)$$

Задача (3.1) равносильна задаче

$$-u_1 + Cu_3 \rightarrow \max, \quad (u_1, u_3) \in H, \quad (3.2)$$

которая имеет решение только в случае  $H \neq \emptyset$ , т.е. при

$$CU \geq V. \quad (3.3)$$

Максимум в задаче (3.2) достигается в одной из точек дуги

$$\overset{\cup}{H} = \left\{ (u_1, u_3) : u_1^N \leq u_1 < 0, \quad u_3^N \leq u_3 < U, \quad u_1^2 + u_3^2 = U^2 \right\} \quad (3.4)$$

Минимум функции  $T^- = T^-(u_1, u_3)$ , без учёта первых двух ограничений в (3.4), на окружности  $u_1^2 + u_3^2 = U^2$  достигается в точке

$$u^* = (u_1^*, u_3^*), \quad u_1^* = -U / \sqrt{1+C^2}, \quad u_3^* = CU / \sqrt{1+C^2} \quad (3.5)$$

При определённых соотношениях между параметрами  $U, V, C$  точка (3.5) принадлежит области (3.4), независящая от параметра  $R_0$  по построению, и является оптимальной в задаче (3.1).

Проведя несложный анализ с использованием формул (2.10), в итоге получаем соотношения для параметров  $U, V, C$ , при которых для любого  $R_0 \in (l_0 + r_0, \infty)$  точка (3.5) принадлежит дуге (3.4) и, следовательно, является решением задачи (3.1). Искомое минимальное гарантированное время (2.6) вычисляется при оптимальных управлениях (3.5) и параметрах

$U, V, C$ , удовлетворяющих соотношениям:  $0 < V \leq \frac{C^2}{\sqrt{1+C^2}}U, C \leq 1$

или  $0 < V \leq \frac{C^2 - 1}{\sqrt{1+C^2}}U, C > 1$  или  $\frac{C^2 - 1}{\sqrt{1+C^2}}U < V \leq \frac{C^2}{\sqrt{1+C^2}}U, C > 1$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Аветисян В.В. Оптимальное гарантирующее управление поиском движущегося на плоскости целевого объекта // Изв. НАН Армении. Механика. 2007. Т.60. №1. С.3-9.
2. Аветисян В.В. Оптимизация гарантирующего управления поиском подвижного объекта // Изв. НАН Армении. Механика. 2013. Т.66. №2. С.68-78.

#### Сведения об авторах:

**Аветисян Ваган Вардгесович** – д.ф.-м.н., профессор кафедры теории оптимального управления и приближённых методов факультета математики и механики ЕГУ; **E-mail:** [vanavet@yahoo.com](mailto:vanavet@yahoo.com)

**Степанян Ваан Сейранович** - аспирант факультета математики и механики ЕГУ; **E-mail:** [nop144d@gmail.com](mailto:nop144d@gmail.com)

# О НЕКОТОРЫХ ПРОБЛЕМАХ СЕЙСМОЛОГИИ И ПРЕДПОСЫЛКАХ ПРЕДСКАЗАНИЯ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЙ

*Агаловян Л.А.*

*Армения*

Излагаются некоторые проблемы сейсмологии, связанные с предсказанием землетрясений. Показано, что по данным сейсмостанций и GPS систем, на основе решений 3D задач теории упругости и непрерывного мониторинга изменения во времени напряжённо-деформированных состояний Литосферных плит Земли и отдельных её областей, можно установить ситуации, приводящие к возникновению землетрясений.

**Введение.** Современная сейсмология (сейсмос – по-гречески означает землетрясение) проделала длинный путь возникновения и развития, начиная с известных мифологий и религиозных интерпретаций до современных научно обоснованных подходов. Основой возникновения мифологий служил простой довод: раз мы стоим на Земле и она придерживает нас, то и Земля должна опираться на что-то. Буддийские священники утверждали, что Земля опирается на чудовищную лягушку и всякий раз, когда она делает движение какой-либо частью тела, в ближайших областях Земли возникают землетрясения. В Восточной Индии считалось, что Землю поддерживает буйвол, а по другой индийской легенде – множество змей, не давая ей упасть в море и др. Постепенно люди поняли абсурдность представлений о животных-монстрах. Все эти мифологии стали смехотворными благодаря трудам Коперника, Тихо Браге, Кеплера, Ньютона, в частности, после известных трёх законов Кеплера и закона всемирного тяготения Ньютона, объясняющие истинную картину поведения и движения всех планет.

После эры мифологий наступил долгий период религиозного догматизма, считающего, что землетрясение – это наиболее впечатляющее проявление «божьей кары» за грехи людей, эту концепцию цепко поддерживала инквизиция. Были и лирически-моральные отступления. Так, по румынской легенде Земля покоится на трёх священных столпах – Вере, Надежде, Любви. Искусно играя на религиозных чувствах людей, легенда объясняла, что подрыв любого из этих моральных устоев безнравственными поступками вызывает сотрясение Земли.

Величайшая катастрофа XVIII века – лиссабонское землетрясение (1 ноября 1755г.) явилась отправным пунктом для объяснения причин возникновения сильных землетрясений и ответа на важный вопрос – являются ли землетрясения естественным событием, т.е. катастрофическим природным явлением или же это проявление гнева Всевышнего. Научно обоснованный ответ причин возникновения землетрясений был дан, в основном, в двадцатом столетии. Были подвергнуты анализу характер последствий и география местонахождений сильных землетрясений.

Выяснилось, что очаги землетрясений расположены в узких зонах земной коры (сейсмические зоны). Установлено, что планета Земля ( $R_{зем.} = 6378\text{км}$ ) слоиста и неоднородна. Она состоит из земной коры, Верхней и Нижней мантий, Внешнего и Внутреннего ядер. Отличительной чертой этих слоёв, в частности, является существенно разные скорости  $V_p, V_s$  распространения в них продольных (первичных)  $P$  и поперечных (вторичных)  $S$  волн. Земная кора и часть Верхней мантии до границы с Астеносферой составляет Литосферу, которая сетью глубинных разломов разбита на несколько больших блоков, которые называются плитами. Крупными Литосферными плитами Земли являются: Евразийская, Индо-Австралийская, Филиппинская, Тихоокеанская, Южно-Американская, Северо-Американская, Антарктидская, Африканская, Анатолийская, Аравийская и др. Возникновение сильных землетрясений современная наука связывает с тектоникой Литосферных плит Земли ( $\approx 95\%$  землетрясений) [1-3]. Земная кора также является слоистой с основными слоями: осадочный ( $2,0 \leq V_p \leq 5,0\text{км/сек}$ ,  $h_1 = 10 \div 25\text{км}$ ), гранитный ( $5,5 \leq V_p \leq 6,0\text{км/сек}$ ,  $h_2 = 30 \div 40\text{км}$ ), базальтовый ( $6,0 \leq V_p \leq 7,4\text{км/сек}$ ,  $h_3 = 15 \div 20\text{км}$ ). Толщина земной коры в континентах изменяется в пределах  $20 \div 75\text{км}$ , а в океанах  $5 \div 15\text{ км}$ . Выделяют связанные с землетрясением два типа современных тектонических движений: медленные (вековые) и быстрые (скачкообразные). Вековые движения могут длиться десятки лет и являются квазистатическими, в результате которых в Литосферных плитах и в отдельных ее участках с годами накапливаются деформации, которые при достижении критического значения порядка  $10^{-4}$  приводят к глобальному разрушению (землетрясению) и основная часть накопленной с годами огромной потенциальной энергии выделяется в виде объёмных продольных  $P$  и сдвиговых  $S$  волн, а также поверхностных волн типа Релея и Лява. Учитывая, что всегда  $V_p > V_s$ , имея в секундах временные данные  $t_p, t_s$  достижения  $P$  и  $S$  волн к заданной сейсмостанции, по очевидным арифметическим формулам определяется расстояние  $l$  эпицентра землетрясения от сейсмостанции, а по данным трёх сейсмостанций ( $l_1, l_2, l_3$ ) определяется эпицентр землетрясения как пересечение трёх сфер с радиусами  $l_1, l_2, l_3$  и центрами в соответствующих сейсмостанциях. Таким образом, проблема о землетрясении (сейсмологии) становится задачей механики разрушения [1]. Из изложенного следует подчеркнутая важность определения напряжённо-деформированных состояний Литосферных плит Земли и отдельных её участков, а также проведения мониторинга их изменения во времени. Последнее преследует цель – выявить места и промежуток возник-

новения критических состояний, способных привести к глобальному разрушению – землетрясению.

Густая сеть современных сейсмостанций, спутниковых GPS систем, наклономеров и других измерительных средств позволяет проследивать весь этот процесс во времени. Ниже убедимся, что по данным этих измерительных средств можно найти решение соответствующей 3D задачи теории упругости и провести мониторинг этого решения во времени. Для этого необходимо иметь также геологическую и геофизическую структуру Литосферных плит и отдельных их участков (структура слоистости – толщины слоёв, упругие характеристики и плотности слоёв). Эта проблема решена методами геофизики, в частности, сейсморазведки.

Соответствующая квазистатическая задача теории упругости является неклассической в том плане, что на дневной (лицевой) поверхности слоистой плиты заданы шесть условий: поверхность свободна – равны нулю три компоненты тензора напряжений, одновременно известны перемещения (их три) точек этой поверхности, как данные сейсмостанций, GPS систем и других измерительных средств.

В [4] доказано, что всегда существует классическая краевая задача (на лицевых поверхностях заданы по три условия), решение которой совпадает с решением неклассической задачи.

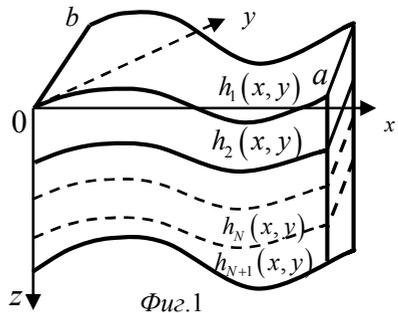
Связанные с землетрясениями быстрые (скачкообразные) движения являются динамическими (форшок, само землетрясение, афтершок) и необходимо решить динамическую неклассическую 3D задачу теории упругости для слоистого пакета.

**1. Решение квазистатической 3D задачи.** Пусть Литосфера или достаточно большая по размерам её часть состоит из  $N$  слоёв переменной толщины. Лицевые поверхности слоёв описываются уравнениями  $z_i = h_i(x, y)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  и не пересекаются ( $h_i(x, y) < h_{i+1}(x, y)$ ) (фиг.1).

Толщинами слоёв являются  $H_i = \max(h_{i+1}(x, y) - h_i(x, y))$ . Толщина пакета

$h = \sum_{i=1}^N H_i$ ,  $\max(a, b) = l$ . Поскольку тангенциальные размеры Литосферных плит порядка от несколько сот до несколько тысяч километров, то  $h \ll l$ .

В общем случае требуется найти решение уравнений равновесия с учётом объёмных сил (вес) и соотношений упругости с учётом температурных воздействий по модели Дюамеля-Неймана при следующих граничных



условиях на лицевой поверхности  $z = h_1(x, y)$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{jn}(x, y, h_1(x, y), t_*) &= 0, \quad j = x, y, z \\ u_j(x, y, h_1(x, y), t_*) &= u_j^+(x, y) \end{aligned} \quad (1)$$

и условиях полного контакта между слоями (непрерывность перемещений и напряжений  $\sigma_{jn}$ ,  $n$  – нормаль к соответствующей поверхности контакта,  $t_*$  – параметр, который фиксирует время, когда были проведены измерения).

Чтобы решить поставленную задачу, в вышеуказанных уравнениях и соотношениях переходим к безразмерным координатам и перемещениям,  $\xi = x/l$ ,  $\eta = y/l$ ,  $\zeta = z/h$ ,  $u = u_x/l$ ,  $v = u_y/l$ ,  $w = u_z/l$  (2)

В результате получим сингулярно возмущенную малым параметром  $\varepsilon = h/l$  систему, которая решается асимптотическим методом [5]. Решение внутренней задачи имеет вид:

$$\sigma_{ij} = \varepsilon^{-1+s} \sigma_{ij}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad u = \varepsilon^s u^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad (u, v, w); \quad i, j = x, y, z \quad (3)$$

Подставив (3) в преобразованные согласно (2) уравнения теории упругости, получим рекуррентную систему для последовательного определения  $\sigma_{ij}^{(s)}$ ,  $u^{(s)}$ ,  $v^{(s)}$ ,  $w^{(s)}$ . В силу громоздкости формул, приведём решение

для пакета из ортотропных слоев постоянной толщины ( $H_j = const$ ) [6]:

$$\begin{aligned} \sigma_{jz}^{(k,s)} &= \sigma_{jz0}^{(k,s)}(\xi, \eta) + \sigma_{jz*}^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad j = x, y, z \\ \sigma_{xx}^{(k,s)} &= -\frac{A_{23}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}} \sigma_{zz0}^{(k,s)} - \frac{\gamma_{11}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}} \theta^{(k,s)} + \sigma_{xx*}^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad (x, y; A_{23}, A_{13}; \gamma_{11}, \gamma_{22}) \\ \sigma_{xy}^{(k,s)} &= \frac{1}{a_{66}^{(k)}} \left( \frac{\partial v^{(k,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial u^{(k,s-1)}}{\partial \eta} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

$$u^{(k,s)} = a_{55}^{(k)} \zeta \sigma_{xz0}^{(k,s)} + u_0^{(k,s)}(\xi, \eta) + u_*^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta)$$

$$v^{(k,s)} = a_{44}^{(k)} \zeta \sigma_{yz0}^{(k,s)} + v_0^{(k,s)}(\xi, \eta) + v_*^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta)$$

$$w^{(k,s)} = \frac{A_{33}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}} \zeta \sigma_{zz0}^{(k,s)} + \frac{\gamma_{33}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}} \zeta \theta^{(k,s)} + w_0^{(k,s)}(\xi, \eta) + w_*^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad k = 1, 2, \dots, N$$

где величины со звездочкой для каждого  $s$  известны, если известны величины предыдущих приближений [6], а

$$A_{11}^{(k)} = a_{11}^{(k)} a_{22}^{(k)} - \left( a_{12}^{(k)} \right)^2, \quad A_{13}^{(k)} = a_{11}^{(k)} a_{23}^{(k)} - a_{12}^{(k)} a_{13}^{(k)}$$

$$\begin{aligned}
A_{23}^{(k)} &= a_{22}^{(k)} a_{13}^{(k)} - a_{12}^{(k)} a_{23}^{(k)}, \quad A_{33}^{(k)} = a_{33}^{(k)} A_{11}^{(k)} - a_{13}^{(k)} A_{23}^{(k)} - a_{23}^{(k)} A_{13}^{(k)} \\
\gamma_{11}^{(k)} &= \alpha_{11}^{(k)} a_{22}^{(k)} - \alpha_{22}^{(k)} a_{12}^{(k)}, \quad \gamma_{22}^{(k)} = \alpha_{22}^{(k)} a_{11}^{(k)} - \alpha_{11}^{(k)} a_{12}^{(k)} \\
\gamma_{33}^{(k)} &= \alpha_{33}^{(k)} A_{11}^{(k)} - a_{13}^{(k)} \gamma_{11}^{(k)} - a_{23}^{(k)} \gamma_{22}^{(k)}, \quad k=1, 2 \dots N,
\end{aligned} \tag{5}$$

$$Q^{(k,m)} \equiv 0 \text{ при } m < 0, \quad \theta^{(k,0)} = \varepsilon \theta^{(k)}, \quad \theta^{(k,s)} = 0 \text{ при } s \neq 0$$

Решение (3), (4) в общем случае содержит  $6N$  неизвестных функций:  $\sigma_{j=0}^{(k,s)}, u_0^{(k,s)}, v_0^{(k,s)}, w_0^{(k,s)}$ , которые однозначно определяются из шести условий (1) и  $6(N-1)$  условий контакта между слоями. Удовлетворив условиям (1), определим величины первого слоя:

$$\begin{aligned}
\sigma_{j=0}^{(1,s)}(\xi, \eta) &= 0, \quad \sigma_{jz}^{(1,s)}(\xi, \eta, \zeta) = \sigma_{jz*}^{(1,s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad j = x, y, z \\
u_0^{(1,s)} &= u^{+(s)}, \quad u^{+(0)} = u_x^+ / l, \quad u^{+(s)} = 0, \quad s \neq 0 (u, v, w; x, y, z) \\
u^{(1,s)} &= u^{+(s)} + u_*^{(1,s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad (u, v, w)
\end{aligned} \tag{6}$$

Имея данные для первого слоя, из условий контакта между первым и вторым слоями определяются величины второго слоя, затем третьего и т.д. Для величин  $(k+1)$ -ого слоя имеем:

$$\begin{aligned}
\sigma_{jz}^{(k+1,s)}(\xi, \eta, \zeta) &= \sigma_{jz0}^{(k,s)}(\xi, \eta) + \sigma_{jz*}^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta_k) - \\
&- \sigma_{jz*}^{(k+1,s)}(\xi, \eta, \zeta_k) + \sigma_{jz}^{(k+1,s)}(\xi, \eta, \zeta) \\
u^{(k+1,s)}(\xi, \eta, \zeta) &= a_{55}^{(k+1)}(\zeta - \zeta_k) \sigma_{xz0}^{(k+1,s)} + a_{55}^{(k)} \zeta_k \sigma_{xz0}^{(k,s)} + u_0^{(k,s)}(\xi, \eta) + \\
&+ u_*^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta_k) + u_*^{(k+1,s)}(\xi, \eta, \zeta) - u_*^{(k+1,s)}(\xi, \eta, \zeta_k), \quad (u, v; x, y; a_{55}, a_{44}) \\
w^{(k+1,s)}(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{A_{33}^{(k+1)}}{A_{11}^{(k+1)}}(\zeta - \zeta_k) \sigma_{zz0}^{(k+1,s)} + \frac{\gamma_{33}^{(k+1)}}{A_{11}^{(k+1)}}(\zeta - \zeta_k) \theta^{(k+1,s)} + \\
&+ \frac{A_{33}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}} \zeta_k \sigma_{zz0}^{(k,s)} + \frac{\gamma_{33}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}} \zeta_k \theta^{(k,s)} + w_0^{(k,s)}(\xi, \eta) + w_*^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta_k) + \\
&+ w_*^{(k+1,s)}(\xi, \eta, \zeta) - w_*^{(k+1,s)}(\xi, \eta, \zeta_k), \quad k=1, 2 \dots N-1
\end{aligned} \tag{7}$$

Из полученного решения следует, что оно полностью определяется посредством значений функций  $u_x^+, u_y^+, u_z^+$ , входящих в условия (1). Эти же значения совпадают с данными сейсмостанций, GPS систем и других измерительных средств. На основе этих данных следует заранее аппроксимировать перемещения  $u_x^+, u_y^+, u_z^+$  известным многочленом, например, многочленом

Лагранжа. В случае пакета со слоями постоянной толщины при полиномиальном нагружении итерационный процесс обрывается и мы получаем математически точное решение во внутренней задаче. Изменяя  $t_*$ , т.е. проводя во времени новые измерения, создаётся возможность для мониторинга изменения напряжённо-деформированных состояний во времени и выявления критических состояний и мест. В случае пакета со слоями переменной толщины итерационный процесс, как правило, не обрывается, но можно найти решение с заранее заданной точностью.

**2.Решение динамической 3D задачи.** В динамической задаче необходимо найти решение уравнений движения и соотношений упругости при граничных условиях:

$$\begin{aligned} \sigma_{jn}(x, y, h_1(x, y), t_*) &= 0, \quad j = x, y, z \\ u_j(x, y, h_1(x, y), t_*) &= u_j^+(x, y) \exp(i\Omega t) \end{aligned} \quad (8)$$

и опять при условиях полного контакта между слоями, где  $\Omega$  – частота колебаний лицевой (дневной) поверхности пакета, фиксируемая сейсмо-станциями и GPS системами в момент времени  $t = t_*$ . Решение задачи будем искать в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}^{(k)}(x, y, z, t) &= \sigma_{jm}^{(k)}(x, y, z) \exp i\Omega t, \quad \alpha, \beta = x, y, z; j, m = 1, 2, 3 \\ u_\alpha^{(k)} &= \bar{u}_\alpha^{(k)}(x, y, z) \exp i\Omega t, \quad \alpha = x, y, z, k = 1, 2 \dots N \end{aligned} \quad (9)$$

Перейдя к безразмерным координатам и перемещениям (2), решение внутренней задачи опять ищем в виде (3). Повторив процедуру, применённую в квазистатической задаче, получим рекуррентную систему для определения  $u^{(k,s)}, v^{(k,s)}, w^{(k,s)}, \sigma_{jm}^{(k,s)}$ , откуда напряжения выражаются через перемещения по формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(k,s)} &= -B_{23}^{(k)} \frac{\partial w^{(k,s)}}{\partial \zeta} + B_{22}^{(k)} \frac{\partial u^{(k,s-1)}}{\partial \xi} - B_{12}^{(k)} \frac{\partial v^{(k,s-1)}}{\partial \eta}, \quad (1, 2; \xi, \eta; 22, 33, u, v) \\ \sigma_{33}^{(k,s)} &= B_{11}^{(k)} \frac{\partial w^{(k,s)}}{\partial \zeta} - B_{23}^{(k)} \frac{\partial u^{(k,s-1)}}{\partial \xi} - B_{13}^{(k)} \frac{\partial v^{(k,s-1)}}{\partial \eta} \\ \sigma_{12}^{(k,s)} &= \frac{1}{a_{66}^{(k)}} \left( \frac{\partial u^{(k,s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{(k,s-1)}}{\partial \eta} \right) \\ \sigma_{13}^{(k,s)} &= \frac{1}{a_{55}^{(k)}} \left( \frac{\partial w^{(k,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial u^{(k,s)}}{\partial \zeta} \right), \quad (\xi, \eta; 1, 2; u, v; a_{55}, a_{44}) \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$B_{jm} = A_{jm} / \Delta, A_{22} = a_{22}a_{33} - a_{23}^2, A_{12} = a_{12}a_{33} - a_{13}a_{23} \quad (11)$$

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{12}a_{13}a_{23} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{13}^2 - a_{33}a_{12}^2$$

остальные  $A_{jm}$  вычисляются по формулам (5). Для определения функций

$u^{(k,s)}, v^{(k,s)}, w^{(k,s)}$  получаются уравнения:

$$\frac{\partial^2 u^{(k,s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55}^{(k)} \rho_k \Omega_*^2 u^{(k,s)} = R_u^{(k,s)}, (u, v, w; a_{55}, a_{44}, 1 / B_{11}), \Omega_* = h\Omega \quad (12)$$

где

$$R_u^{(k,s)} = -\frac{\partial^2 w^{(k,s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} - a_{55}^{(k)} \left( \frac{\partial \sigma_{11}^{(k,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12}^{(k,s-1)}}{\partial \eta} \right), (u, v; 1, 2; \xi, \eta; a_{55}, a_{44})$$

$$R_w^{(k,s)} = \frac{1}{B_{11}^{(k)}} \left( B_{23}^{(k)} \frac{\partial^2 u^{(k,s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} + B_{13}^{(k)} \frac{\partial^2 v^{(k,s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta} - \frac{\partial \sigma_{13}^{(k,s-1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial \sigma_{23}^{(k,s-1)}}{\partial \eta} \right) \quad (13)$$

$$Q^{(k,m)} \equiv 0 \text{ при } m < 0$$

Решениями уравнений (12) являются

$$u^{(k,s)} = C_{u1}^{(k,s)}(\xi, \eta) \sin \Omega_* \sqrt{a_{55}^{(k)} \rho_k} \zeta + C_{u2}^{(k,s)}(\xi, \eta) \cos \Omega_* \sqrt{a_{55}^{(k)} \rho_k} \zeta + \bar{u}_{(\xi, \eta, \zeta)}^{(k,s)} \quad (14)$$

$$(u, v, w; a_{55}^{(k)}, a_{44}^{(k)}, 1 / B_{11}^{(k)}), \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} - \text{частные решения уравнений (12)}.$$

Используя решение (14), по формулам (10) вычисляются все напряжения. Затем удовлетворяются условия (8) и условия контакта между слоями. В случае условий (8)  $k=1$  и удовлетворение условий относительно  $\sigma_{13}^{(1,s)}, u_x^{(1,s)}$  приводит к нахождению  $C_{u1}^{(1,s)}, C_{u2}^{(1,s)}$ ; а относительно  $\sigma_{23}^{(1,s)}, u_y^{(1,s)}$  – к определению  $C_{v1}^{(1,s)}, C_{v2}^{(1,s)}$ ; удовлетворение же условий (8) относительно  $\sigma_{33}^{(1,s)}, w^{(1,s)}$  приводит к определению  $C_{w1}^{(1,s)}, C_{w2}^{(1,s)}$  и всего решения для первого слоя. Имея решение для первого слоя, из условий контакта между первым и вторым слоями определяются величины второго слоя, затем третьего и т.д. Имея полное решение, можно провести анализ решения, соответствующее различным  $t_*$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке ГКН МОН РА, грант №13-2С009 SCS.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. K.Kasahara. Earthquake Mechanics. Cambridge Univers. Press. Cambridge. 1981. (К.Касахара. Механика землетрясений. М.: Мир, 1985. 264с.)

2. X.Le Pichon, J. Francheteau, J.Bonnin, Plate tectonic. Elsevier.1973. (К.Ле Пишон, Ж.Франшто, Ж.Боннин. Тектоника плит. М.:Мир, 1977.288с).
3. E.Roberts. Our quaking Earth. Little, Brown and Company, Boston-Toronto. 1963. (Э.Робертс. Когда сотрясается земля. М.: Мир. 1966. 176с.)
4. Aghalovyan L.A. On one class of three-dimensional problems of elasticity theory for plates. Proceeding of A.Razmadze Mathematical Institute of Georgia. 2011. Vol. 155. pp.3-10.
5. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, Физматлит, 1997. 414с.
6. Aghalovyan L.A. The Research of Lithospheric Plates Tectonics of the Earth on the Baze of Data of Seismostations, GPS Systems, the Solutions of Problems of Elasticity Theory and Earthquakes Prediction//Proceedings the 15<sup>th</sup> World Conference on Earthquake Engineering (Lisbon, Portugal, 24-28 September, 2012). 15 WCEE-title index, WCEE 2012-3008. pdf.

**Сведения об авторе:**

**Агаловян Ленсер Абгарович,**

Зав.отделом Института механики НАН Армении,

Академик НАН РА, профессор, доктор физ.-мат.наук

**Адрес:** 0019, Ереван, пр.Маршала Баграмяна, 24/2

**Телефон:**52-58-35

**Е-mail:** [aghal@mechins.sci.am](mailto:aghal@mechins.sci.am).

# ПРОДОЛЬНЫЙ СДВИГ СОСТАВНОГО УПРУГОГО ПРОСТРАНСТВА, ОСЛАБЛЕННОГО ТРЕЩИНАМИ

*Агаян К.Л., Закарян В.Г.  
Армения*

Исследуется антиплоская задача теории упругости о контактном взаимодействии двух упругих полупространств, ослабленных прямолинейными туннельными трещинами, при различных граничных условиях на береговых поверхностях трещин. При помощи преобразования Фурье получена система разрешающих сингулярных интегральных уравнений относительно неизвестных скачков перемещений или напряжений через линии трещин.

Рассмотрим упругое пространство, состоящее из двух разных упругих полупространств. В декартовой системе координат  $Oxyz$  полупространства занимают области  $\Omega_1 (|x| < \infty, y > 0, |z| < \infty)$  и  $\Omega_2 (|x| < \infty, y < 0, |z| < \infty)$  с модулями сдвигов  $G_1$  и  $G_2$ . Пространство по направлению координатных осей может быть ослаблено произвольным конечным числом туннельных трещин. Здесь рассматривается случай, когда трещины расположены на отрезках  $L_1(-d, -c), L_2(a, b)$  оси  $Oy$  и  $L_3(-l_1, l_2)$  оси  $Ox$  (линия разнородности). При заданных общих (однородных или смешанных) граничных условиях на берегах трещин, обеспечивающих антиплоскую деформацию пространства, требуется определить напряжённо-деформированное состояние составного пространства и коэффициенты интенсивности разрывающих напряжений на концах трещин.

Поставленная задача, как известно [1], сводится к решению уравнения

$$\Delta w_j = \frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_j}{\partial y^2} = 0 \quad (x, y) \in \Omega_j, \quad j=1,2 \quad (1)$$

при соответствующих граничных (на берегах трещин) и контактных (на линии разнородности) условиях. Здесь  $w_j(x, y)$  единственная, отличная от нуля, компонента упругих перемещений. При этом, для сдвиговых напряжений имеем [1]

$$\tau_{xz}^{(j)} = G_j \frac{\partial w_j}{\partial x}; \quad \tau_{yz}^{(j)} = G_j \frac{\partial w_j}{\partial y} \quad (2)$$

Для построения решения (1) введём в  $\Omega_j$  обобщённые перемещения [2],[3]:

$$u_j(x, y) = [\vartheta(-x) + \vartheta(x)] w_j(x, y) \quad (3)$$

где  $\vartheta(x)$  – известная функция Хевисайда.

Тогда, уравнение (1) примет вид:

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial y^2} = g_j(y)\delta'(x) + q_j(y)\delta(x) \quad (j=1,2) \quad (4)$$

где  $\delta(x) = \mathcal{D}'(x)$  – функция Дирака, а  $g_j(y)$  и  $q_j(y)$  скачки перемещений и напряжений через линии трещин  $L_1$  и  $L_2$ , т.е

$$g_j(y) = g_j^+(y) - g_j^-(y); \quad g_j^\pm(y) = w_j(\pm 0, y) \quad (5)$$

$$q_j(y) = q_j^+(y) - q_j^-(y); \quad q_j^\pm(y) = G_j^{-1} \tau_j^\pm(y) \quad (6)$$

Здесь  $j=1,2$ ;  $y \in L_1 \cup L_2$ .

Функции  $u_j(x, y)$  должны удовлетворять ещё и следующим условиям на линии разнородности, содержащей трещину [3], [4]:

$$u_1(x, +0) - u_2(x, -0) = g_3(x) = g_3^+(x) - g_3^-(x), \quad |x| < \infty \quad (7)$$

$$G_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} \Big|_{y=+0} - G_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} \Big|_{y=-0} = q_3(x) = q_3^+(x) - q_3^-(x), \quad |x| < \infty \quad (8)$$

Отметим, что в (5)-(8)

$$g_j(y) = q_j(y) = 0 \quad \text{при } y \in L_1 \cup L_2,$$

$$g_3(x) = q_3(x) = 0 \quad x \in L_3 \quad (9)$$

обеспечивающие условия полного контакта вне трещин.

При помощи преобразования Фурье, решения уравнений (4), удовлетворяющие условиям (7)-(9), в областях  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  представляются в виде:

$$\begin{aligned} u_1(x, y) = & \frac{1}{2\pi} \int_a^b \left\{ \left[ \frac{x}{R(x, (\eta - y))} + \frac{\mu - 1}{\mu + 1} \frac{x}{R(x, (\eta + y))} \right] g_1(\eta) + \right. \\ & + \left[ \ln \sqrt{R(x, (\eta - y))} + \frac{\mu - 1}{\mu + 1} \ln \sqrt{R(x, (\eta + y))} \right] q_1(\eta) \Big\} d\eta + \\ & + \frac{1}{\pi(1 + \mu)} \int_{-d}^{-c} \left[ \frac{x}{R(x, (\eta - y))} g_2(\eta) + \ln \sqrt{R(x, (\eta - y))} q_2(\eta) \right] d\eta + \\ & + \frac{\mu}{\pi(1 + \mu)} \int_{-l_1}^{l_2} \left[ \frac{y}{R(y, (t - y))} g_3(t) + \frac{1}{G_1} \ln \sqrt{R(y, (t - y))} q_3(t) \right] dt + \text{const} \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_2(x, y) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-d}^{-c} \left\{ \left[ \frac{x}{R(x, (\eta - y))} + \frac{\mu - 1}{\mu + 1} \frac{x}{R(x, (\eta + y))} \right] g_2(\eta) + \right. \\
& + \left. \left[ \ln \sqrt{R(x, (\eta - y))} + \frac{\mu - 1}{\mu + 1} \ln \sqrt{R(x, (\eta + y))} \right] q_2(\eta) \right\} d\eta + \\
& + \frac{1}{2\pi(1 + \mu)} \int_a^b \left[ \frac{x}{R(x, (\eta - y))} g_1(\eta) + \ln \sqrt{R(x, (\eta + y))} q_1(\eta) \right] d\eta + \\
& + \frac{\mu}{\pi(1 + \mu)} \int_{-l_1}^{l_2} \left[ \frac{y}{R(y, (t - y))} g_3(t) + \ln \sqrt{R(x, (\eta - y))} q_3(t) \right] dt + \text{const} \quad (11)
\end{aligned}$$

$$\text{где } R(x, z) = x^2 + z^2, \quad \mu = G_1/G_2 \quad (12)$$

Функции  $g_j(t)$  и  $q_j(t)$   $j = (\overline{1, 3})$ , входящие в подынтегральные выражения (10) и (11), определяются при помощи  $g_j^\pm(t)$  и  $q_j^\pm(t)$  по формулам (5)- (8). Следовательно, при заданных  $g_j(t)$  и  $q_j(t)$ , формулы (10), (11) и (2) дают решение поставленной задачи. Однако, очевидно, что при заданных на берегах трещин определённых смешанных граничных условиях, некоторые из функций  $g_j^\pm(t)$ ,  $q_j^\pm(t)$ , число которых зависит от типа заданных граничных условий, будут неизвестны. Тогда, удовлетворяя при помощи (10), (11) и (2) заданным граничным условиям, мы получим определённую систему разрешающих сингулярных интегральных уравнений для определения неизвестных функций.

Ядра этих уравнений в зависимости от взаимного расположения трещин, наряду с обычным ядром Коши, могут иметь слагаемые в виде обобщённого ядра Коши, содержащие неподвижные особенности. В этих случаях структура решений и условия, налагаемые на них, существенно меняются. Следовательно, в каждом отдельном случае следует выделять особенности поведения неизвестных функций на концах линий трещин, которые характерны для данного случая.

Не останавливаясь здесь на всевозможных вариантах, рассмотрим случай, когда на берегах трещин задана самоуравновешенная система напряжений, т.е.  $q_j(t) = 0, t \in L_j (j = \overline{1, 3})$ . Тогда, граничные условия будут иметь вид:

$$\left. \frac{\partial u_j}{\partial x} \right|_{x=\pm 0} = G_j^{-1} \tau_j^+(y), y \in L_j, (j=1,2), \left. \frac{\partial u_1}{\partial y} \right|_{y=+0} = \frac{G_2}{G_1} \left. \frac{\partial u_2}{\partial y} \right|_{y=-0}, x \in L_3 \quad (13)$$

а разрешающая задача системы интегральных уравнений примет вид :

$$\sum_{k=1}^3 \frac{1}{2\pi} \int_{L_j} K_{jk}(\eta, \xi) g'_k(\eta) d\eta = f_j(\xi), \xi \in L_j, j = (\overline{1,3}) \quad (14)$$

$$\begin{aligned} K_{11}(\eta, \xi) &= \frac{1}{\xi - \eta} - \frac{\gamma_1}{\eta + \xi}, K_{12}(\eta, \xi) = \frac{\gamma_2}{\eta - \xi}, K_{13}(\eta, \xi) = \gamma_2 \frac{\xi}{\eta^2 + \xi^2} \\ K_{21}(\xi, \eta) &= \mu K_{12}(\xi, \eta), K_{23}(\xi, \eta) = -\mu K_{13}(\xi, \eta), \\ K_{33}(\xi, \eta) &= K_{12}(\xi, \eta), K_{31}(\xi, \eta) = K_{13}(\xi, \eta) = K_{32}(\xi, \eta), \\ K_{22}(\xi, \eta) &= \frac{1}{\xi - \eta} + \frac{\gamma_2}{\eta + \xi}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$f_1(\xi) = G_1^{-1} \tau_1^+(\xi), f_2(\xi) = G_2^{-1} \tau_2^+(\xi), f_3(\xi) = G_3^{-1} \tau^+(\xi), \gamma = \frac{1-\mu}{1+\mu} \quad (16)$$

где  $\tau_j^\pm(\xi)$ ,  $\tau^+(\xi)$  – заданные функции, а  $\mu$  определяется формулой (12).

К уравнениям (14) следует присоединить ещё условия

$$\int_{L_j} g'_j(\eta) d\eta = 0 \quad j = (\overline{1,3}), \quad (17)$$

отражающие условие непрерывности перемещений на концах трещин.

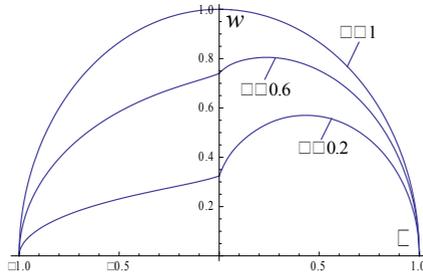
Следует отметить, что в уравнениях (14) свободно можно варьировать параметры  $a, b, c, d, l_1, l_2$  и получить все возможные варианты определяющих интегральных уравнений для соответствующих задач. При этом, благодаря присутствию члена  $\gamma/(\eta + y)$  в ядрах интегральных уравнений, возможные особенности функций  $g'_j(y)$  на концах линии интегрирования будут разными.

Так, в случае, когда  $a \neq 0$ ,  $c \neq 0$ , мы имеем обычные особенности типа квадратичного корня.

В случае  $l_1 = l_2 = 0$ ,  $a = 0(c \neq 0)$  и  $c = 0(a \neq 0)$ ,  $g'(y) \sim |y|^{-\delta_j}$  при  $y \rightarrow \pm 0$ , показатели определяются из уравнений

$$\cos \pi \delta_1 = \gamma, \quad \cos \pi \delta_2 = -\gamma. \quad (18)$$

А в случае  $l_1 = l_2 = 0$  и  $a = c = 0$ ,  $g'_j(y)$  ( $i = 1, 2$ ) имеет корневую особенность в точках  $b$  и  $-d$ , и в точке соединения трещин принимают конечные значения, или, в зависимости от внешних нагрузок, могут иметь особенность логарифмического типа [5]. Для первого случая, при помощи метода механических квадратур [6] построено решение задачи и на рисунке представлены графики, показывающие раскрытие объединённой трещины при различных значениях отношения модулей сдвига  $\mu$ .



#### ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 375с.
2. Григорян Э.Х. Решение задачи упругого конечного включения, выходящего на границу полуплоскости. //Уч.зап. ЕГУ, ест. 1981. №3. С.32-43.
3. Агаян К.Л., Григорян Э.Х. Сдвиговые колебания составного упругого полупространства. Акт. пробл. неоднородн.механики. Ереван: 1991. С.16-21.
4. Nakobyan V.N., Sahakyan A.V., Sargsyan A.H. The plane deformation state of elastice plane with finite rigid inclusion under harmonic loading // Proceedings of the 5<sup>th</sup> international conference «The problem of dynamics of interaction of deformable media», October, 2005, Goris, pp. 56-60.
5. Мхитарян С.М. О контакте между бесконечным стрингером и упругой полубесконечной пластиной с вертикальной трещиной. //Гр. межд. конф. «Актуальные проблемы механики сплошной среды». Ереван 2012, с.74-78.
6. Саакян А.В. Метод дискретных особенностей в применении к решению сингулярных интегральных уравнений с неподвижной особенностью. //Изв. НАН Армении. Механика. 2000. Т.53. №3. С.12-19.

#### Сведения об авторах:

**Агаян Каро Леренцович**, д.ф.м.наук, вед. науч. сотр. Института механики НАН РА.  
тел. (+37491) 485-566, **Е-mail:** [karo.aghayan@gmail.com](mailto:karo.aghayan@gmail.com)

**Закарян Ваге Гришаевич**, аспирант Института механики НАН РА.  
тел. (+37477) 789-264, **Е-mail:** [vahe-zaqaryan@mail.ru](mailto:vahe-zaqaryan@mail.ru)

# ДВУХИМПУЛЬСНЫЕ КОТАНГЕНЦИАЛЬНЫЕ ПЕРЕХОДЫ МЕЖДУ КОМПЛАНАРНЫМИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ОРБИТАМИ

*Адамян В.Г., Суварян Х. Г.*

*Армения*

Параметры траектории котангенциального перехода между компланарными эллиптической и гиперболической орбитами и значения импульсов скоростей, управляющих движением космического аппарата при переходе, определяются в явном виде и зависят от параметров заданных орбит и истинной аномалии точки приложения первого импульса скорости.

**Введение.** Задача отыскания траектории перелёта между компланарными эллиптической и гиперболической орбитами, с минимальной затратой характеристической скорости решена в общем виде в работах [1,2], где оптимальная переходная орбита рассмотрена в системе котангенциальных переходных орбит между заданными орбитами. Однако, авторы [1,2] в качестве независимой переменной не приняли истинную аномалию точки соприкосновения орбиты перелёта с начальной орбитой, вследствие чего были получены сложные зависимости для параметров орбиты перелёта.

**Постановка задачи и обсуждение методики.** С целью преодоления этих сложностей проведено исследование по определению параметров орбиты котангенциального перехода между заданными эллиптической и гиперболической орбитами в зависимости от истинной аномалии начальной точки перехода.

**Результаты исследования.** Пусть заданы эллиптическая и гиперболическая орбита вокруг силового центра  $F_1$  (рис.1). Эллиптическая орбита задана величинами большой полуоси  $a_1$  и линейного эксцентриситета  $c_1$ , а гиперболическая орбита – действительной полуоси  $a_2$  и линейного эксцентриситета  $c_2$  ( $a_1 > c_1, a_2 < c_2$ ).

Точка  $\hat{I}_1$  – центр эллиптической орбиты, а точка  $F_{21}$  – её второй фокус. Точка  $O_2$  – центр гиперболической орбиты, а точка  $F_{22}$  – её второй фокус. Известен также угол  $\omega$  между фокальными осями заданных орбит.

Центр фокальной кривой – середина  $O_3$  отрезка  $F_{21} F_{22}$ , а вторые фокусы  $F_{21}$  и  $F_{22}$  заданных орбит – её фокусами. Большая полуось фокальной кривой равна сумме большой полуоси  $a_1$  эллиптической и действительной полуоси  $a_2$  гиперболической орбит [2].

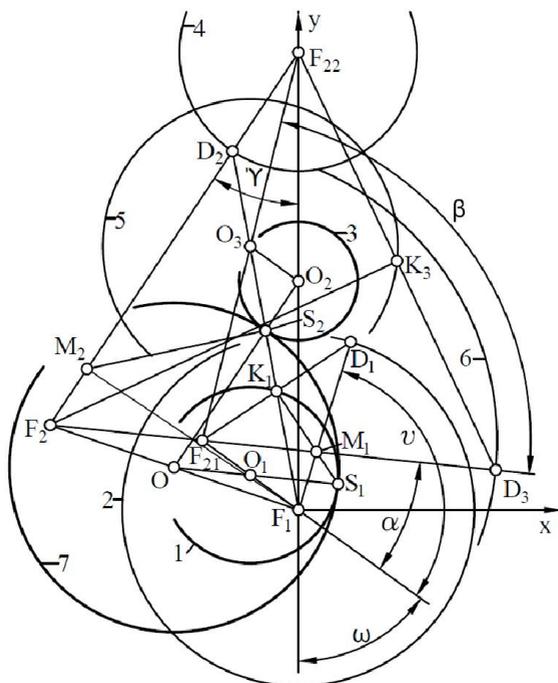


Рис.1

Для достижения цели необходимо провести по две окружности для каждой из заданных орбит и орбиту перелёта.

$(O_1, a_1), (F_1, 2a_1), (O_2, a_2), (F_{22}, 2a_2), (O_3, a_2 + a_1) \cup (F_{21}, 2(a_2 + a_1))$ . Проведём прямую  $F_1D_1$  через притягивающий центр  $F_1$  под углом  $\nu$ , отсчитываемым от радиуса-вектора перигея начальной эллиптической орбиты и определим точку  $D_1$  пересечения этой прямой с окружностью 2  $(F_1, 2a_1)$ . Далее проведём прямую  $D_1F_{21}$ , а через точку  $K_1$  – её пересечения с окружностью 1  $(O_1, a_1)$  – вторую прямую, перпендикулярную к прямой  $D_1F_{21}$ . Эта вторая прямая, пересекаясь с прямой  $F_1D_1$ , даёт начальную точку  $M_1$  котангенциального перехода на начальной орбите. Соединим точку  $M_1$  со вторым фокусом  $F_{21}$  начальной орбиты и построим точку  $D_3$  пересечения прямой  $M_1F_{21}$  с окружностью 6  $(F_{21}, 2(a_2 + a_1))$ . Проведём прямую  $D_3F_{22}$ , а через точку  $K_3$  – её пересечения с окружностью 5  $(O_3, a_2 - a_1)$  – вторую прямую, перпендикулярную к прямой  $F_{22}D_3$ . Эта вторая прямая,

пересекаясь с прямой  $F_{21}D_3$ , даёт искомый фокус  $F_2$  орбиты перелёта. Соединим прямой линией второй фокус  $F_{22}$  конечной орбиты со вторым фокусом  $F_2$  орбиты перелёта и определим точку  $D_2$  её пересечения с окружностью 4 ( $F_{22}, 2a_2$ ). Далее, точку  $D_2$  соединим прямой линией с притягивающим центром  $F_1$  и через точку  $S_2$  её пересечения с окружностью 3 ( $O_2, a_2$ ) проведём прямую, перпендикулярную к прямой  $F_1D_2$ . Эта вторая прямая, пересекаясь с прямой  $F_{22}D_2$ , определит точку  $M_2$  соприкосновения орбиты перелёта с конечной орбитой. Проведём прямые  $F_1F_2$  и  $O_2S_2$ , которые, пересекаясь, определяют искомый центр  $O$  орбиты перелёта и величины её большой полуоси  $a = OS_2$  и линейного эксцентриситета  $c = OF_1$ . Так как отрезок  $OS_2$  является средней линией треугольника  $F_1F_2D_2$ , то  $F_2D_2 = 2a$ .

Расстояние  $2s$  между фокусами  $F_{21}$  и  $F_{22}$  заданных орбит определяется из треугольника  $F_1F_{21}F_{22}$  со сторонами

$F_1F_{21} = 2c_1, F_1F_{22} = 2c_2$  и углом  $\omega$  между ними по теореме косинусов

$$s = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 - 2c_1c_2 \cos \omega}, \quad (1)$$

где  $s$  – расстояние между центрами  $O_1$  и  $O_2$  заданных орбит. Из треугольника  $F_1F_{21}M_1$  со сторонами  $F_1F_{21} = 2c_1, F_1M_1 = r_1, F_{21}M_1 = 2a_1 - r_1$  и углом  $F_{21}F_1M_1 = \pi - \nu$  по теореме косинусов находим после преобразований

$$r_1 = \frac{a_1^2 - c_1^2}{a_1 + c_1 \cos \nu}. \quad (2)$$

Из треугольника  $F_1F_{21}M_1$  со сторонами  $F_1F_{21} = 2c_1, F_1M_1 = r_1, F_{21}M_1 = 2a_1 - r_1$  и углом  $F_1F_{21}M_1 = \alpha$  с учётом (2) по теореме косинусов находим после преобразований

$$\cos \alpha = \frac{(a_1^2 + c_1^2) \cos \nu + 2a_1c_1}{a_1^2 + c_1^2 + 2a_1c_1 \cos \nu}. \quad (3)$$

Для того, чтобы решить задачу аналитическим путем, введём прямоугольную систему координат с началом в притягивающем центре  $F_1$  и осью

$F_1y$ , совпадающей с большой осью конечной орбиты. Определим координаты точки  $D_3$

$X_{D_3} = -F_1F_{21} \sin \omega + F_{21}D_3 \sin(\omega + \alpha)$ ,  $Y_{D_3} = F_1F_{21} \cos \omega - F_{21}D_3 \cos(\omega + \alpha)$ , откуда с учётом  $F_1F_{21} = 2c_1$ ,  $F_{21}D_3 = 2(a_2 + a_1)$ , после преобразований получим

$$\begin{aligned} X_{D_3} &= 2((a_1 + a_2) \sin(\omega + \alpha) - c_1 \sin \omega), \\ Y_{D_3} &= 2(c_1 \cos \omega - (a_1 + a_2) \cos(\omega + \alpha)). \end{aligned} \quad (4)$$

Расстояние между точками  $F_{22}(0, 2c_2)$  и  $D_3$  определяется по теореме Пифагоре с учётом (1) и (4)

$$F_{22}D_3 = 2\sqrt{(a_1 + a_2)^2 + s^2 - 2(a_1 + a_2)(c_1 \cos \alpha - c_2 \cos(\omega + \alpha))}$$

Из треугольника  $F_{21}F_{22}D_3$  со сторонами  $F_{21}F_{22} = 2s$ ,  $F_{21}D_3 = 2(a_2 + a_1)$  и углом  $\beta$  между ними по теореме косинусов находим другое выражение длиной отрезка  $F_{22}D_3$

$$F_{22}D_3 = 2\sqrt{(a_1 + a_2)^2 + s^2 - 2(a_1 + a_2)s \cos \beta}$$

Приравнявая эти выражения, получим

$$\cos \beta = (c_1 \cos \alpha - c_2 \cos(\omega + \alpha)) / s. \quad (5)$$

Из треугольника  $F_{21}F_{22}F_2$  со сторонами  $F_{21}F_{22} = 2s$ ,  $F_{22}F_2 = F_{22}D_2 - F_2D_2 = 2(a + a_2)$ ,  $F_{21}F_2 = F_2D_3 - F_{21}D_3 = F_2F_{22} - F_{21}D_3 = 2(a - a_1)$  и углом  $F_{22}F_{21}F_2 = \pi - \beta$ , применяя теорему косинусов, после преобразований получим длину большой полуоси  $a$  орбиты перелёта

$$a = \frac{a_2^2 - a_1^2 - s^2 + 2a_1s \cos \beta}{2(s \cos \beta - a_2 - a_1)}. \quad (6)$$

Из треугольника  $F_1F_{21}F_2$  со сторонами  $F_1F_{21} = 2c_1$ ,  $F_{21}F_2 = 2(a - a_1)$  и углом  $\pi - \alpha$  между ними, применяя теорему косинусов, находим фокальное расстояние  $F_1F_2 = 2c$  орбиты перелёта

$$c = \sqrt{c_1^2 + (a - a_1)^2 + 2c_1(a - a_1) \cos \alpha}. \quad (7)$$

Из треугольника  $F_{22}F_2F_1$  со сторонами  $F_{22}F_2 = 2(a_2 + a)$ ,  $F_1F_{22} = 2c_2$ ,  $F_1F_2 = 2c$ , применяя теорему косинусов, определим величину косинуса угла  $F_1F_{22}F_2 = \gamma$

$$\cos \gamma = \frac{(a_2 + a)^2 + c_2^2 - c^2}{2c_2(a_2 + a)}. \quad (8)$$

Из треугольника  $F_1F_{22}M_2$  со сторонами  $F_1F_{22} = 2c_2$ ,  $F_1M_2 = r_2$ ,  $F_{22}M_2 = 2a_2 + r_2$  и углом  $F_1F_{22}M_2 = \gamma$  определим радиус-вектор  $r_2$  конечной точки котангенциального перехода

$$r_2 = \frac{a_2^2 + c_2^2 - 2a_2c_2 \cos \gamma}{c_2 \cos \gamma - a_2}. \quad (9)$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Адамян В.Г. Геометрическая теория межорбитальных котангенциальных переходов: Монография. Ереван: Авторское издание, 2007. 151с.
2. Адамян В.Г., Манандян Л.Т., Адамян Л.В. Минимизация расхода топлива при переходе космического аппарата между компланарными эллиптической и гиперболической орбитами. //Актуальные проблемы механики сплошной среды. Труды II Международной конференции. Том 1. Дилижан, Армения, 2010. С.43-47.

### Сведения об авторах:

**Адамян Ваник Григорьевич** – Д.т.н., профессор Гюмрийского филиала ГИУА, кафедра естественных наук

Тел.: (0312)38494, (095)027985

Е-mail: [vgadamyan@mail.ru](mailto:vgadamyan@mail.ru)

**Суварян Хорен Гарникович** – Лаборант Гюмрийского филиала ГИУА, кафедра технологии художественной обработки материалов

Тел.: (077)604289, (095)098028

Е-mail: [xorsu13@rambler.ru](mailto:xorsu13@rambler.ru)

# ДЕЙСТВИЕ НОРМАЛЬНОЙ ТОЧЕЧНОЙ СИЛЫ И ТОЧЕЧНОГО ЗАРЯДА НА ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЕ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ФУНКЦИОНАЛЬНО- ГРАДИЕНТНОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

*Айзикович С.М., Васильев А.С., Волков С.С.*  
*Россия*

В работе изучается действие нормально приложенной точечной силы и точечного электрического заряда на поверхность упругого трансверсально-изотропного пьезоэлектрического полупространства с функционально-градиентным трансверсально-изотропным пьезоэлектрическим покрытием. Электромеханические свойства покрытия изменяются с глубиной по произвольному закону. Получены аналитические формулы для упругих смещений и потенциала электростатического поля на поверхности покрытия. Предложена схема сведения смешанных граничных задач для трансверсально-изотропного пьезоэлектрического функционально-градиентного полупространства к решению интегральных уравнений.

1. Рассмотрим упругое неоднородное трансверсально-изотропное пьезоэлектрическое полупространство  $\Omega$ . С полупространством связана цилиндрическая система координат  $r, \varphi, z$ , ось  $z$  является осью изотропии по всем трём группам свойств (упругие модули, пьезомодули, диэлектрические проницаемости). Упругие модули  $c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{33}, c_{44}$ , пьезоэлектрические модули  $e_{31}, e_{15}, e_{33}$  и диэлектрические постоянные  $\epsilon_{11}, \epsilon_{33}$  полупространства изменяются с глубиной по закону

$$\{c_{kj}, e_{kj}, \epsilon_{kj}\} = \left\{ \begin{array}{l} c_{kj}^{(c)}(z), e_{kj}^{(c)}(z), \epsilon_{kj}^{(c)}(z) - \text{гладкие функции, } -H \leq z \leq 0 \\ c_{kj}^{(s)}, e_{kj}^{(s)}, \epsilon_{kj}^{(s)} - \text{некоторые постоянные, } -\infty < z < -H \end{array} \right\} \quad (1)$$

Здесь и далее индекс (с) соответствует покрытию, индекс (s) – подложке. Считаем, что покрытие жёстко сцеплено с подложкой:

$$z = -H : w^{(c)} = w^{(s)}, u^{(c)} = u^{(s)}, \psi^{(c)} = \psi^{(s)} \quad (2)$$

$$z = -H : \sigma_z^{(c)} = \sigma_z^{(s)}, \tau_{rz}^{(c)} = \tau_{rz}^{(s)}, D_z^{(c)} = D_z^{(s)} \quad (3)$$

Здесь  $u, w$  – упругие смещения вдоль осей  $r$  и  $z$ , соответственно,  $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z, \tau_{rz}$  – нормальные и касательные напряжения,  $\psi$  – потенциал электростатического поля,  $D_r, D_z$  – компоненты вектора электрической индукции.

Пусть на поверхности полупространства действуют произвольные осесимметричные нормальная и касательная механические нагрузки, а также электрическое поле:

$$\sigma_z|_{z=0} = \begin{cases} -p(r), & r \leq a \\ 0, & r > a \end{cases}, \tau_{rz}|_{z=0} = \begin{cases} \tau(r), & r \leq a \\ 0, & r > a \end{cases}, D_z|_{z=0} = \begin{cases} -q(r), & r \leq a \\ 0, & r > a \end{cases} \quad (4)$$

Линейные уравнения пьезоэлектрического эффекта имеют вид:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= c_{11} \frac{\partial u}{\partial r} + c_{12} \frac{u}{r} + c_{13} \frac{\partial w}{\partial z} + e_{31} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \sigma_\varphi = c_{12} \frac{\partial u}{\partial r} + c_{11} \frac{u}{r} + c_{13} \frac{\partial w}{\partial z} + e_{31} \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ \sigma_z &= c_{13} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) + c_{33} \frac{\partial w}{\partial z} + e_{33} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \tau_{rz} = c_{44} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) + e_{15} \frac{\partial \psi}{\partial r} \\ D_r &= -\varepsilon_{11} \frac{\partial \psi}{\partial r} + e_{15} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right), D_z = -\varepsilon_{33} \frac{\partial \psi}{\partial z} + e_{31} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) + e_{33} \frac{\partial w}{\partial z}\end{aligned}\quad (5)$$

Уравнения равновесия и уравнения вынужденной электростатики с учётом симметричности по координате  $\varphi$  принимают вид:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0, \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0, \frac{1}{r} D_r + \frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0 \quad (6)$$

Используя интегральные преобразования Ханкеля:

$$\begin{aligned}u(r, z) &= -\int_0^\infty \bar{u}(\gamma, z) J_1(\gamma r) \gamma d\gamma, w(r, z) = \int_0^\infty \bar{w}(\gamma, z) J_0(\gamma r) \gamma d\gamma, p(r) = \int_0^\infty \bar{p}(\gamma) J_0(\gamma r) \gamma d\gamma \\ \psi(r, z) &= \int_0^\infty \bar{\psi}(\gamma, z) J_0(\gamma r) \gamma d\gamma, q(r) = \int_0^\infty \bar{q}(\gamma) J_0(\gamma r) \gamma d\gamma, \tau(r) = \int_0^\infty \bar{\tau}(\gamma) J_0(\gamma r) \gamma d\gamma\end{aligned}\quad (7)$$

из (5), (6) получим систему трёх линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Для  $-H \leq z \leq 0$  справедливо:

$$\begin{cases} \ddot{\bar{w}}(c_{13} + c_{44})\gamma + \bar{w}\dot{c}_{44}\gamma + \ddot{\bar{u}}c_{44} + \dot{\bar{u}}\dot{c}_{44} - \bar{u}c_{11}\gamma^2 + \dot{\bar{\psi}}(e_{31} + e_{15})\gamma + \bar{\psi}\dot{e}_{15}\gamma = 0 \\ \ddot{\bar{w}}c_{33} + \dot{\bar{w}}\dot{c}_{33} - \bar{w}c_{44}\gamma^2 - \dot{\bar{u}}(c_{13} + c_{44})\gamma - \bar{u}\dot{c}_{13}\gamma + \dot{\bar{\psi}}e_{33} + \bar{\psi}\dot{e}_{33} - \bar{\psi}e_{15}\gamma^2 = 0 \\ \ddot{\bar{w}}e_{33} + \dot{\bar{w}}\dot{e}_{33} - \bar{w}e_{15}\gamma^2 - \dot{\bar{u}}(e_{15} + e_{31})\gamma - \bar{u}\dot{e}_{31}\gamma - \dot{\bar{\psi}}e_{33} - \bar{\psi}\dot{e}_{33} + \bar{\psi}\dot{e}_{15}\gamma^2 = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Здесь и далее через  $\dot{f}$  обозначена производная функции  $f$  по  $z$ . Для подложки  $z \leq -H$  система (8) упрощается, и её общее решение имеет вид:

$$\bar{u}^{(s)} = \sum_{j=1}^3 C_j(\gamma) k_{1j} e^{\alpha_j \gamma z}, \bar{w}^{(s)} = \sum_{j=1}^3 C_j(\gamma) k_{3j} e^{\alpha_j \gamma z}, \bar{\psi}^{(s)} = \sum_{j=1}^3 C_j(\gamma) k_{5j} e^{\alpha_j \gamma z}$$

Введём обозначения:

$$\bar{\mathbf{x}} = (x_j)_{j=1..6}, \quad x_1 = \bar{u}, \quad x_2 = \dot{\bar{u}}, \quad x_3 = \bar{w}, \quad x_4 = \dot{\bar{w}}, \quad x_5 = \bar{\psi}, \quad x_6 = \dot{\bar{\psi}}$$

$$\bar{u}_j^{(s)} = \sum_{k=1}^3 M_{jk} k_{1k} e^{\alpha_k \gamma z}, \quad \bar{w}_j^{(s)} = \sum_{k=1}^3 M_{jk} k_{3k} e^{\alpha_k \gamma z}, \quad \bar{\psi}_j^{(s)} = \sum_{k=1}^3 M_{jk} k_{5k} e^{\alpha_k \gamma z}$$

$$C_j(\gamma) = -M_{1j}(\gamma) \bar{p}(\gamma) - M_{2j}(\gamma) \bar{q}(\gamma) + M_{3j}(\gamma) \bar{r}(\gamma), \quad j = 1, 2, 3$$

Тогда систему (8) можно переписать в матричном виде:

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{x}}, \quad -H \leq z \leq 0$$

Ищем  $\bar{\mathbf{x}}(\gamma, z)$  в виде:

$$\bar{\mathbf{x}}(\gamma, z) = -\bar{p}(\gamma) \cdot \bar{\mathbf{a}}_1(\gamma, z) - \bar{q}(\gamma) \cdot \bar{\mathbf{a}}_2(\gamma, z) + \bar{r}(\gamma) \cdot \bar{\mathbf{a}}_3(\gamma, z)$$

Неизвестные  $\bar{\mathbf{a}}_j = (a_j^k)_{k=1..6}^T, j=1,2,3$  могут быть найдены из решения краевых задач:

$$\dot{\bar{\mathbf{a}}}_j = \mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{a}}_j, j=1,2,3 \quad (9)$$

$$\left( c_{33}^{(c)} a_j^4 - c_{13}^{(c)} \gamma a_j^1 + e_{33}^{(c)} a_j^6 \right)_{z=-H} = \left( c_{33}^{(s)} \dot{w}_j^{(s)} - c_{13}^{(s)} \gamma \bar{u}_j^{(s)} + e_{33}^{(s)} \dot{\psi}_j^{(s)} \right)_{z=-H} \quad (10)$$

$$\left( c_{44}^{(c)} (a_j^2 + \gamma a_j^3) + e_{15}^{(c)} \gamma a_j^5 \right)_{z=-H} = \left( c_{44}^{(s)} (\dot{u}_j^{(s)} + \gamma \bar{w}_j^{(s)}) + e_{15}^{(s)} \gamma \bar{\psi}_j^{(s)} \right)_{z=-H} \quad (11)$$

$$\left( e_{33}^{(c)} a_j^4 - \varepsilon_{33}^{(c)} a_j^6 - e_{31}^{(c)} \gamma a_j^1 \right)_{z=-H} = \left( e_{33}^{(s)} \dot{w}_j^{(s)} - \varepsilon_{33}^{(s)} \dot{\psi}_j^{(s)} - e_{31}^{(s)} \gamma \bar{u}_j^{(s)} \right)_{z=-H} \quad (12)$$

$$\begin{pmatrix} c_{33}^{(c)} a_j^4 - c_{13}^{(c)} \gamma a_j^1 + e_{33}^{(c)} a_j^6 \\ e_{33}^{(c)} a_j^4 - e_{31}^{(c)} \gamma a_j^1 - \varepsilon_{33}^{(c)} a_j^6 \\ c_{44}^{(c)} (a_j^2 + \gamma a_j^3) + e_{15}^{(c)} \gamma a_j^5 \end{pmatrix}_{z=0} = \bar{\mathbf{e}}_j, \bar{\mathbf{e}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{\mathbf{e}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{\mathbf{e}}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

Постоянные  $M_{kj}(\gamma), (k, j=1,2,3)$  определяются из системы линейных алгебраических уравнений:

$$a_j^i(\gamma, -H) = \sum_{k=1}^3 M_{jk}(\gamma) k_{ik} e^{-\alpha_k \gamma H}, i=1,3,5, j=1,2,3.$$

Введём обозначения

$$L_{kj}(\gamma, z) = \gamma a_j^k(\gamma, z) / \Theta_{kj}, \Theta_{kj} = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \gamma a_j^k(\gamma, 0) \quad (14)$$

Тогда получим выражения для  $u, w, \psi$ :

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(c)} &= \Theta_{13} L_{13}(\gamma, z) \gamma^{-1} \bar{c}(\gamma) - \Theta_{11} L_{11}(\gamma, z) \gamma^{-1} \bar{p}(\gamma) - \Theta_{12} L_{12}(\gamma, z) \gamma^{-1} \bar{q}(\gamma) \\ \bar{w}^{(c)} &= \Theta_{33} L_{33}(\gamma, z) \gamma^{-1} \bar{c}(\gamma) - \Theta_{31} L_{31}(\gamma, z) \gamma^{-1} \bar{p}(\gamma) - \Theta_{32} L_{32}(\gamma, z) \gamma^{-1} \bar{q}(\gamma) \\ \bar{\psi}^{(c)} &= \Theta_{53} L_{53}(\gamma, z) \gamma^{-1} \bar{c}(\gamma) - \Theta_{51} L_{51}(\gamma, z) \gamma^{-1} \bar{p}(\gamma) - \Theta_{52} L_{52}(\gamma, z) \gamma^{-1} \bar{q}(\gamma) \end{aligned} \quad (15)$$

где  $\Theta_{kj}$  – некоторые постоянные, зависящие от электромеханических свойств при  $z=0$ . Функции  $L_{kj}(\gamma, z), k=1,3,5, j=1,2,3$  не зависят от приложенной нагрузки, кроме того, выполнено  $\lim_{\gamma \rightarrow \infty} L_{kj}(\gamma, 0) = 1$ . В общем случае их значения могут быть посчитаны только численно, решая краевую задачу (9)-(13) для фиксированного значения  $\gamma$ .

2. Пусть на поверхности полупространства в центре системы координат действует точечная сила  $P$ , приложенная по нормали к поверхности и точечный электрический заряд  $Q$ . Остальная поверхность свободна от механических и электрических воздействий:

$$p(r) = P\delta(r)(2\pi r)^{-1}, q(r) = Q\delta(r)(2\pi r)^{-1}, \tau = 0$$

где  $\delta(r)$  – дельта-функция Дирака.

Для построения аналитических формул для смещений используем представление функций  $L_{kj}(\gamma, 0)$  в виде [1,2]:

$$L_{kj}(\gamma, 0) = \prod_{n=1}^N \frac{\gamma^2 + A_{kj,n}^2}{\gamma^2 + B_{kj,n}^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{kj,n}\gamma}{\gamma^2 + D_{kj,n}^2}, \quad A_{kj,n}, B_{kj,n}, D_{kj,n} \in C, \quad C_{kj,n} \in R \quad (16)$$

Тогда подставляя (16) в (15) и (7), получим:

$$\begin{aligned} u|_{z=0} &= P\Theta_{11}(2\pi)^{-1}(r^{-1} + Y_{11}(r)) + Q\Theta_{12}(2\pi)^{-1}(r^{-1} + Y_{12}(r)) \\ w|_{z=0} &= -P\Theta_{31}(2\pi)^{-1}(r^{-1} + Z_{31}(r)) - Q\Theta_{32}(2\pi)^{-1}(r^{-1} + Z_{32}(r)) \\ \psi|_{z=0} &= -P\Theta_{51}(2\pi)^{-1}(r^{-1} + Z_{51}(r)) - Q\Theta_{52}(2\pi)^{-1}(r^{-1} + Z_{52}(r)) \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь использованы обозначения:

$$Z_{kj}(r) = -\frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^N E_{kj,n} (I_0(rB_{kj,n}) - L_0(rB_{kj,n})) + \sum_{n=1}^{\infty} C_{kj,n} K_0(rD_{kj,n})$$

$$Y_{kj}(r) = -\sum_{n=1}^N E_{kj,n} B_{kj,n} \int_0^{\infty} \frac{J_1(ur)}{u^2 + B_{kj,n}^2} du - \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} C_{kj,n} (I_1(rD_{kj,n}) - L_{-1}(rD_{kj,n}))$$

$$E_{kj,n} = \frac{B_{kj,n}^2 - A_{kj,n}^2}{B_{kj,n}} \prod_{m=1, m \neq n}^N \frac{A_{kj,m}^2 - B_{kj,n}^2}{B_{kj,m}^2 - B_{kj,n}^2}$$

где  $i$  – мнимая единица,  $I_0, I_1$  – модифицированные функции Бесселя первого рода,  $K_0$  – функция Макдональда,  $L_0, L_{-1}$  – модифицированные функции Струве.

Для нахождения коэффициентов  $A_{kj,n}, B_{kj,n}$  аппроксимации функций  $L_{kj}(\gamma, z)$  может быть использован алгоритм, описанный в работе [3], подбор конечного числа коэффициентов  $C_{kj,n}, D_{kj,n}$  производится по аналогичной схеме.

Статья обобщает результаты, полученные ранее [4-6] для упругих изотропных функционально-градиентных материалов. Схема, описанная в пункте 1, позволяет свести широкий ряд смешанных задач теории электроупругости к решению интегральных уравнений, которые могут быть решены полуаналитическими методами [7].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 13-08-01435-а, № 13-07-00954-а, № 14-07-90406-Укр\_а).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Aizikovich S. M. An asymptotic solution of a class of coupled equations. *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 54 (5), p. 872-877, 1990.
2. Aizikovich S. M., Trubchik I. S. Asymptotic properties of the approximate solution of a class of dual integral equation. *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 52 (5), p. 664–669, 1988.
3. Aizikovich S.M., Vasiliev A.S. A bilateral asymptotic method of solving the integral equation of the contact problem of the torsion of an elastic half-space inhomogeneous in depth. *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 77 (1), p. 91-97, 2013.
4. Aizikovich S.M., Alexandrov V.M., Kalker J.J., Krenev L.I., Trubchik I.S. Analytical solution of the spherical indentation problem for a half-space with gradients with the depth elastic properties. *Int. J. Solids Struct.*, vol. 39 (10), p. 2745–2772, 2002.
5. Vasiliev A.S., Volkov S.S., Aizikovich S.M., Jeng Y.R. Axisymmetric contact problems of the theory of elasticity for inhomogeneous layers. *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.*, doi:10.1002/zamm.201300067, 2013.
6. Volkov S., Aizikovich S., Wang Y., Fedotov I. Analytical solution of axisymmetric contact problem about indentation of a circular indenter into a soft functionally graded elastic layer. *Acta Mechanica Sinica*, vol. 29(2), p. 196-201, 2013.
7. Aizikovich S.M. An asymptotic solution of a class of coupled equations. *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 54 (5), p. 872-877, 1990.

### **Сведения об авторах:**

#### **Айзикович С.М.,**

Доктор физ.-мат. наук, зав. лабораторией «функционально-градиентных и композиционных материалов» научно-образовательного центра «Материалы» Донского государственного технического университета

**Phone:** +7928934-13-98, **E-mail:** saizikovich@gmail.com

#### **Васильев А.С.,**

Кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник научно-образовательного центра «Материалы» Донского государственного технического университета

**Phone:** +79054559237, **E-mail:** andre.vasiliev@gmail.com

#### **Волков С.С.,**

Кандидат технических наук, младший научный сотрудник научно-образовательного центра «Материалы» Донского государственного технического университета

**Phone:** +79508476939, **E-mail:** fenix\_rsu@mail.ru

# НАПРЯЖЁННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЛУПЛОСКОСТИ С АБСОЛЮТНО ЖЁСТКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ И ТРЕЩИНОЙ

*Акопян В.Н., Амирджян А.А.  
Армения*

Исследовано плоско-деформированное состояние упругой полуплоскости, содержащей перпендикулярно к границе коллинеарные абсолютно жёсткое включение и трещину. Рассмотрен случай, когда включение выходит на границу, а трещина непосредственно продолжает его. Задача математически формулируется в виде системы сингулярных интегральных уравнений с обобщёнными ядрами Коши, решения которых строятся методом механических квадратур.

Пусть упругая полуплоскость, отнесённая к полярной системе координат  $O r \varphi$  и занимающая область  $\{0 \leq r < \infty, -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2\}$ , на интервалах  $(0, a)$  и  $(a, b)$  линии  $\varphi = 0$  соответственно усилена абсолютно жёстким тонким включением и расслаблена конечной трещиной. Будем считать, что полуплоскость деформируется под воздействием сосредоточенной нагрузки величиной  $P_0$ , приложенной к включению в точке  $r = 0$  и составляющей с границей полуплоскости угол  $\alpha$ . Требуется определить контактные напряжения, действующие на участках контакта включения с полуплоскостью, раскрытие трещины, коэффициенты интенсивности разрушающих напряжений на линии  $\varphi = 0$ , а также угол поворота включения.

Мысленно разделим полуплоскость по линии  $\varphi = 0$  на две четверть-плоскости и снабдим компоненты напряжений и перемещений, относящиеся к точкам четверть-плоскостей  $D_{\pm} = \{0 \leq \pm\varphi \leq \pi/2; 0 \leq r < \infty\}$ , верхними индексами (+) и (-), соответственно. Тогда поставленную задачу можем сформулировать в виде следующей смешанной граничной задачи:

$$\begin{cases} \tau_{r\varphi}^{\pm}(r, \pm\pi/2) = 0; \sigma_{\varphi}^{\pm}(r, \pm\pi/2) = 0; & (0 < r < \infty) \\ u_r^+(r, 0) + iu_{\varphi}^+(r, 0) = u_r^-(r, 0) + iu_{\varphi}^-(r, 0); & (b < r < \infty) \\ \sigma_{\varphi}^+(r, 0) - i\tau_{r\varphi}^+(r, 0) = \sigma_{\varphi}^-(r, 0) - i\tau_{r\varphi}^-(r, 0); & (b < r < \infty) \end{cases} \quad (1a)$$

$$\begin{cases} u_r^{\pm}(r, 0) + iu_{\varphi}^{\pm}(r, 0) = c + i\gamma r; & (0, a) \\ \sigma_{\varphi}^{\pm}(r, 0) = -\sigma_0(r); \tau_{r\varphi}^{\pm}(r, 0) = 0; & (a, b) \end{cases} \quad (16)$$

Здесь  $u_r^\pm(r, \varphi)$  и  $u_\varphi^\pm(r, \varphi)$  – компоненты смещения точек областей  $D_\pm$ , удовлетворяющие уравнениям Ламэ и связанные с компонентами напряжений  $\sigma_\varphi^\pm(r, \varphi)$  и  $\tau_\varphi^\pm(r, \varphi)$  известными формулами закона Гука [1],  $c$  и  $\gamma$  – постоянные, определяющие соответственно поступательное движение и поворот включения.

Чтобы решить поставленную задачу, сначала построим разрывные решения уравнений Ламэ для полуплоскости. С этой целью введём в рассмотрение функцию скачков напряжений  $\chi(r)$ , действующих на включение и разности смещений точек берегов трещины  $W(r)$

$$\begin{aligned} & [\sigma_\varphi^+(r, 0) - i\tau_{r\varphi}^+(r, 0)] - [\sigma_\varphi^-(r, 0) - i\tau_{r\varphi}^-(r, 0)] = \chi(r); \\ & \quad (0 < r < a); \\ & [u_r^+(r, 0) + iu_\varphi^+(r, 0)] - [u_r^-(r, 0) + iu_\varphi^-(r, 0)] = W(r); \\ & \quad (a < r < b). \end{aligned} \tag{2}$$

Решив при помощи интегрального преобразования Меллина вспомогательную граничную задачу, определяемую условиями (1а) и (2), выразим компоненты напряжения и производные от смещений через введённые неизвестные функции  $\chi(r)$  и  $W(r)$ . Далее удовлетворим условиям (1б), первоначально продифференцируя первое из них. Затем, полученные уравнения при помощи замены переменных  $r_0 = a(s+1)/2$ ,  $r = a(x+1)/2$  на интервале  $(0, a)$  и  $r_0 = ps+q$ ,  $r = px+q$  ( $p = (b-a)/2$ ;  $q = (b+a)/2$ ) на интервале  $(a, b)$ , сформулируем на интервале  $(-1, 1)$  и, введя безразмерные функции

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= a\chi(a(x+1)/2)/P_0; \quad \varphi_2(x) = W'(px+q); \\ \varphi_3(x) &= \bar{\varphi}_1(x); \quad \varphi_4(x) = \bar{\varphi}_2(x), \end{aligned}$$

придём к следующей системе сингулярных интегральных уравнений :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_j(s)}{s-x} ds + \sum_{k=1}^4 \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K_{jk}(s, x) \varphi_k(s) ds = f_j(x) \tag{3}$$

Систему интегральных уравнений (3) нужно рассматривать совместно с условиями равновесия включения и непрерывности смещений в концевых точках трещины, которые в новых обозначениях записываются в следующем виде:

$$\int_{-1}^1 \varphi_1(x) dx = -e^{i\alpha}; \quad \operatorname{Re} \int_{-1}^1 (x+1)\varphi_1(x) dx = 0; \quad \int_{-1}^1 \varphi_2(x) dx = 0 \quad (4)$$

Здесь

$$f_1(x) = f_3(x) = -\gamma_* = -\frac{4(1-\nu)\gamma E_0}{\varkappa(1+\nu)}; \quad f_2(x) = -f_4(x) =$$

$$= -4(1-\nu^2)\sigma_0^*(x)/E_0; \quad \sigma_0^*(x) = \frac{a\sigma_0(a(x+1)/2)}{P_0}; \quad E_0 = \frac{aE}{P_0};$$

черточка над функциями означает их комплексно-сопряжённые величины,  $E$  – модуль упругости материала полуплоскости,  $\nu$  – коэффициент Пуассона, а функции  $K_{ij}(x, s)$  ( $i, j = 1-4$ ) – регулярные функции почти всюду в квадрате ( $-1 \leq x, s \leq 1$ ), кроме, быть может, точек  $x + s = 0$ , где они могут иметь неподвижную особенность.

Методом Мухелишвили [2] нетрудно установить, что функция  $\varphi_j(x)$  ( $j = 1, 3$ ), как и следовало ожидать [3], в концевой точке  $r = 0$  ( $x = -1$ ) имеет особенность типа  $(x+1)^{\beta-1}$  ( $0 \leq \beta < 1$ ), где показатель  $\beta$  является корнем трансцендентного уравнения

$$\sin^2 \frac{\beta\pi}{2} = \frac{(1+\varkappa)^2}{4\varkappa} - \frac{\beta^2}{\varkappa}; \quad (\varkappa = 3 - 4\nu).$$

В точке  $r = a$  ( $x = \pm 1$ ) функции  $\varphi_j(x)$  ( $j = 1-4$ ) имеют особенность типа  $(1 \pm x)^{-\frac{1}{2} \pm i\beta_1}$  ( $\beta_1 = \ln \varkappa / 2\pi$ ). В точке же  $r = b$  ( $x = 1$ ) функции  $\varphi_j(x)$  ( $j = 2, 4$ ) имеют обычную корневую особенность.

После определения функций  $\varphi_j(x)$  ( $j=1-4$ ), по формуле

$$\chi_*^\pm(x) = \frac{a \left[ \sigma_\phi^\pm(a(x+1)/2, 0) - i\tau_\phi^\pm(a(x+1)/2, 0) \right]}{P_0} =$$

$$= \pm \frac{\varphi_1(x)}{2} - \frac{iE_0}{4\pi(1-\nu^2)} \left\{ \int_{-1}^1 \frac{\varphi_2(s)}{s-x} ds + \sum_{k=1}^4 \int_{-1}^1 K_{2k}(s, x) \varphi_k(s) ds \right\} \quad (5)$$

при  $|x| < 1$  легко определить безразмерные контактные напряжения под включением. По этой же формуле при  $x > 1$  нетрудно определить также приведённые коэффициенты интенсивности разрушающих напряжений в концевой точке трещины  $r = b$ , что соответствует точке  $x = 1$ . Для определения же приведённого раскрытия трещины будем использовать формулу:

$$\nu_*(x) = \frac{2}{a} \operatorname{Im} (a(x+1)/2) = \operatorname{Im} \int_{-1}^x \varphi_2(s) ds. \quad (6)$$

Используя поведение искомых функций в концевых точках интервалов интегрирования, представим их в виде

$$\varphi_1(x) = \frac{\varphi_1^*(x)}{(1-x)^{0.5+i\beta_1} (1+x)^{1-\beta_1}}; \quad \varphi_2(x) = \frac{\varphi_2^*(x)}{(1-x)^{0.5} (1+x)^{0.5+i\beta_1}}, \quad (7)$$

где  $\varphi_i^*(x)$  ( $i=1, 2$ ) – непрерывные гладкие функции, ограниченные вплоть до концов интервала  $(-1, 1)$ . Решение системы (3) построим методом механических квадратур [4]. Заметим, что в этом случае безразмерные коэффициенты интенсивности разрушающих напряжений будут даваться формулой:

$$K_I(1) - iK_{II}(1) = i2^{-2-i\beta_1} (1-\nu^2)^{-1} \sqrt{\pi} E_0 \varphi_2^*(1)$$

Проведён численный анализ поставленной задачи и изучены закономерности изменения распределения контактных напряжений под включением, угла поворота включения, раскрытия трещины и коэффициента

интенсивности разрушающих напряжений в концевой точке трещины в зависимости от соотношения  $\lambda = b/a$  и угла  $\alpha$ . В табл. 1 приведены значения коэффициента интенсивности разрушающих напряжений  $K_I(1)$  в случае  $\alpha = \pi/2, E_0 = 10$  и  $\nu = 0.3$  в зависимости от параметра  $\lambda$ .

Таблица 1

$\lambda$	1.1	1.5	2	2.5	3.	4.
$K_I(1)$	0.7617	0.3292	0.2162	0.1636	0.1319	0.0946

Как видно из таблицы, при увеличении параметра  $\lambda$ , что при постоянной длине включения, можно трактовать как увеличение длины трещины,  $K_I(1)$  уменьшается.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
2. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511с.
3. Партон В.З., Перлин П.И. Интегральные уравнения теории упругости. М.: Наука, 1977. 311с.
4. Sahakyan A.V. Method of discrete singularities for solution of singular integral and integro-differential equations. //Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute, Georgia, Vol. 156 (2011), pp.101-111.

#### Сведения об авторах:

**Акопян Ваграм Наслетникович** – доктор физ.-мат. наук, директор Института механики НАН Армении. Тел.: (37410) 52-48-90, E-mail: [vhakobyan@sci.am](mailto:vhakobyan@sci.am).

**Амирджанян Арутюн Арменович** – научный сотрудник Института механики НАН РА. Тел.: (37410) 52-48-90, E-mail: [amirjanyan@gmail.com](mailto:amirjanyan@gmail.com).

# НАПРЯЖЁННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ С ЧАСТИЧНО ОТОРВАННЫМ ОТ МАТРИЦЫ АБСОЛЮТНО ЖЁСТКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ В РАМКАХ МОДЕЛИ ГАЛИНА

*Акопян В.Н., Саакян А.В.*

*Армения*

Рассмотрено плоско-деформированное состояние упругой плоскости с конечным абсолютно жёстким тонким включением, одна из сторон которого отошла от матрицы, создавая трещину. Для контактирующей стороны включения полагается, что в средней её части имеет место сцепление с матрицей, а по краям происходит проскальзывание, описываемое законом сухого трения. Задача математически формулируется в виде системы сингулярных интегральных уравнений, решение которой строится методом механических квадратур.

Пусть упругая плоскость, отнесённая к декартовой системе координат  $Oxy$ , на интервале  $(-a, a)$  оси абсцисс содержит абсолютно жёсткое тонкое включение, которое не сцеплено с матрицей, и деформируется под воздействием сосредоточенной нормальной нагрузки величины  $P_0$ , приложенной к срединной точке верхней грани включения и распределённой нагрузки  $\sigma_0(x)$ , действующей на свободный берег трещины, образуемой между включением и матрицей. Предполагается, что контакт включения с матрицей описывается моделью Л.А.Галина [1], т.е. считается, что на некотором интервале  $(-b, b)$  ( $b < a$ ) средней части нижней стороны включения имеет место сцепление с матрицей, а на концевых интервалах  $(-a, -b)$  и  $(b, a)$  происходит проскальзывание, подчиняющееся закону сухого трения.

Ставится задача определить размеры зон сцепления и скольжения, контактные напряжения, возникающие под включением, и коэффициенты концентрации разрушающих напряжений в концевых точках концентратора напряжений смешанного типа - включение-трещина.

Мысленно разделив плоскость по оси  $Ox$  на две полуплоскости и снабдив компоненты напряжений и смещений, относящиеся к точкам верхней и нижней полуплоскостей, верхними индексами (1) и (2) соответственно, поставленную задачу можно сформулировать в виде следующей смешанной граничной задачи:

$$\begin{cases} \sigma_y^{(1)}(x, 0) = -\sigma_0(x) \\ \sigma_y^{(1)}(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (-a < x < a) \quad (1a)$$

$$\begin{cases} u_2'(x, 0) = 0 & (-b < x < b) \\ v_2'(x, 0) = 0 & (-a < x < a) \end{cases} \quad (1.6)$$

$$\tau_{xy}^{(2)}(x, 0) = f \operatorname{sgn}(x) \sigma_y^{(2)}(x, 0) \quad x \in (-a, -b) \cup (b, a). \quad (1.в)$$

Здесь  $u_j(x, y)$  и  $v_j(x, y)$  ( $j=1, 2$ ) – компоненты смещения соответственно точек полуплоскостей  $y \geq 0$  и  $y \leq 0$ , удовлетворяющие уравнениям Ламэ и связанные с компонентами напряжений  $\sigma_y^{(j)}(x, y)$  и  $\tau_{xy}^{(j)}(x, y)$  известными формулами закона Гука, а  $f$  – коэффициент трения.

Используя разрывные решения для упругой плоскости с разрезом, полученные в работе [2], и удовлетворив условиям граничной задачи (1), придём к следующей разрешающей системе сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} \sigma(x) + \frac{\theta}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\tau(s)}{s-x} ds + \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{V'(s)}{s-x} ds &= -2\sigma_0(x); \quad (|x| < a) \\ \tau(x) - \frac{\theta}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s)}{s-x} ds + \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{U'(s)}{s-x} ds &= 0; \quad (|x| < a) \\ U'(x) + \frac{1}{2\pi\theta_2} \int_{-a}^a \frac{\tau(s)}{s-x} ds - \frac{\theta}{\pi} \int_{-a}^a \frac{V'(s)}{s-x} ds &= 0; \quad (|x| < b) \\ V'(x) + \frac{1}{2\pi\theta_2} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s)}{s-x} ds + \frac{\theta}{\pi} \int_{-a}^a \frac{U'(s)}{s-x} ds &= 0; \quad (|x| < a) \\ \tau(x) - f \operatorname{sgn} x \sigma(x) + \frac{\theta}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s) + f \operatorname{sgn} x \tau(s)}{s-x} ds - \\ - \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{U'(s) - f \operatorname{sgn} x V'(s)}{s-x} ds &= 0 \quad x \in (-a, -b) \cup (b, a) \end{aligned} \quad (2)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= \sigma_y^{(1)}(x, 0) - \sigma_y^{(2)}(x, 0); \quad \tau(x) = \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) - \tau_{xy}^{(2)}(x, 0); \\ U'(x) &= u_1(x, 0) - u_2(x, 0); \quad V'(x) = v_1(x, 0) - v_2(x, 0); \end{aligned} \quad (3)$$

$$\theta_1 = \frac{(1-2\nu)\mu}{3-4\nu}; \quad \theta_2 = \frac{2(1-\nu)\mu}{3-4\nu}; \quad \theta = \frac{\theta_1}{\theta_2}; \quad \lambda = 4\theta_2(1-\theta^2) = \frac{2}{\mu(1-\nu)};$$

$\mu$  – модуль сдвига, а  $\nu$  – коэффициент Пуассона материала плоскости.

В силу постановки задачи, функции  $\sigma(x), U'(x)$  являются чётными, а  $\tau(x), V'(x)$  нечетными функциями и, следовательно, систему (2) можно свести к системе уравнений, определённых на интервалах  $(-b, a)$ ,  $(-b, b)$  и  $(b, a)$ . Наличие в полученной системе уравнений с различными областями определения, вынуждает на каждом из интервалов  $(-b, b)$  и  $(b, a)$  рассматривать искомые функции как самостоятельные неизвестные, тем самым, удвоив их число. В результате получим систему из восьми сингулярных интегральных уравнений относительно функций (3), определённых на интервале  $(-b, b)$ , соответствующем участку сцепления, и отмеченных индексом  $i$  (*internal*), и тех же функций, определённых на интервале  $(b, a)$ , соответствующем участку скольжения, и отмеченных индексом  $o$  (*outer*). Четыре из уравнений будут определены на интервале  $(-b, b)$ , а другие четыре – на интервале  $(b, a)$ .

Отнеся компоненты напряжений к модулю сдвига  $\mu$ , а интервалы определения уравнений к интервалу  $(-1, 1)$ , перейдём к безразмерным величинам, сохраняя при этом их обозначения. В итоге получим систему из восьми сингулярных интегральных уравнений, имеющих вид, подобный следующему:

$$\sigma_i(\eta) + \frac{\theta}{\pi} \left[ \int_{-1}^1 \frac{\tau_i(\xi)}{\xi - \eta} d\xi + \int_{-1}^1 \left( \frac{1}{\xi - z_0} + \frac{1}{\xi - z_1} \right) \tau_o(\xi) d\xi \right] +$$

$$+ \frac{\lambda}{2\pi} \left[ \int_{-1}^1 \frac{V_i'(\xi)}{\xi - \eta} d\xi + \int_{-1}^1 \left( \frac{1}{\xi - z_0} + \frac{1}{\xi - z_1} \right) V_o'(\xi) d\xi \right] = -2\sigma_o^*(b^*\eta)$$

где  $b^* = \frac{b}{a} < 1$ ;  $z_0 = \frac{2b^*}{1-b^*}\eta - \frac{1+b^*}{1-b^*}$ ;  $z_1 = -\frac{2b^*}{1-b^*}\eta - \frac{1+b^*}{1-b^*}$

Разыскивая решение системы в классе функций, имеющих степенное поведение в окрестности концов интервала интегрирования, и исследуя, на основе известных результатов Н.И.Мухелишвили о поведении интеграла

типа Коши у концов линии интегрирования [3], поведение уравнений в окрестности точек  $\pm 1$ , найдем, что нововведенные искомые функции можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_i(\xi) \\ U'_i(\xi) \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{l} A_\sigma \\ A_u \end{array} \right\} \left[ (1+\xi)^\beta + (1-\xi)^\beta \right] + \left\{ \begin{array}{l} \sigma_i^*(\xi) \\ u_i^*(\xi) \end{array} \right\} (1-\xi^2)^\beta \\ \left\{ \begin{array}{l} \tau_i(\xi) \\ V'_i(\xi) \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{l} A_\tau \\ A_v \end{array} \right\} \left[ (1+\xi)^\beta - (1-\xi)^\beta \right] + \left\{ \begin{array}{l} \tau_i^*(\xi) \\ v_i^*(\xi) \end{array} \right\} (1-\xi^2)^\beta \end{aligned} \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_o(\xi) \\ \tau_o(\xi) \\ U'_o(\xi) \\ V'_o(\xi) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} A_\sigma \\ A_\tau \\ A_u \\ A_v \end{array} \right\} \left\{ (1-\xi)^\beta + \left\{ \begin{array}{l} \sigma_o^*(\xi) \\ \tau_o^*(\xi) \\ u_o^*(\xi) \\ v_o^*(\xi) \end{array} \right\} (1+\xi)^\beta (1-\xi)^\gamma \right.$$

Здесь  $A_{\{\sigma, \tau, u, v\}}$  – неизвестные постоянные величины, функции со звездочками удовлетворяют условию Гельдера на отрезке  $[-1, 1]$  и на концах  $\pm 1$  принимают конечные (ненулевые) значения, показатели  $\beta$  и  $\gamma$  определяются из уравнений:

$$\operatorname{ctg} \pi \beta = -\frac{f}{\theta} \quad \text{и} \quad \operatorname{ctg} \pi \gamma = f \theta \pm \sqrt{f^2 \theta^2 + 1} \quad (5)$$

При этом выбираются корни, удовлетворяющие условиям  $0 < \beta < 1$  и  $-1 < \gamma < 0$ .

После нахождения показателей особенности поведения искомых функций в окрестности концов отрезка интегрирования, решение разрешающей системы можно построить методом механических квадратур [4]. При порядке аппроксимации  $n$  из представлений (4) будем иметь  $8n + 4$  неизвестных:  $8n$  значений функций со звездочками в соответствующих узловых точках, корнях многочленов Якоби  $P_n^{(\beta, \beta)}(\xi)$  и  $P_n^{(\gamma, \beta)}(\xi)$  и 4 постоянные. Выбрав в качестве точек коллокации корни соответствующих функций Якоби второго рода, получаем  $8n + 4$  уравнений. Казалось бы, имеем замкнутую систему линейных алгебраических уравнений. Однако, в матрицу последней входит

неизвестный пока параметр  $b^*$ , определяющий длину зоны сцепления. С другой стороны, пока не удовлетворено условие равновесия включения, которое в нововведённых функциях имеет вид:

$$\int_{-1}^1 \sigma_i(\xi) d\xi + 2 \int_{-1}^1 \sigma_o(\xi) d\xi = \frac{P_0}{a\mu} + \frac{2}{\mu} \int_{-1}^1 \sigma_0(a\xi) d\xi \quad (6)$$

Введя в полученную систему линейных алгебраических уравнений регуляризирующий параметр  $\gamma_0$  в виде слагаемого и присоединяя к ней дискретизированное условие (6), окончательно получим систему порядка  $8n + 5$ . Параметр  $b^*$  определяется методом последовательных приближений из условия обращения в ноль параметра  $\gamma_0$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л.А. Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления. //ПИММ. 1945. Т. IX. С.413-424.
2. Hakobyan V.N. Stress concentration near defects in homogeneous and compound bodies. - LAP LAMBERT Academic Publishing, Germany 2011, 148p.
3. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 510 с.
4. Саакян А.В. Решение контактной задачи с зонами трения и сцепления (задача Галина) методом дискретных особенностей. // В сб.: «Развитие идей Л.А.Галина в механике», посв. 100-летию со дня рождения учёного. М.–Ижевск: 2013. С.103-120.  
[http://www.mechins.sci.am/publ/avetik\\_sahakyan/ColGalina100.pdf](http://www.mechins.sci.am/publ/avetik_sahakyan/ColGalina100.pdf)

#### Сведения об авторах:

**Акопян Ваграм Наслетникович** – доктор физ.-мат. наук,  
директор Института механики НАН Армении,  
Тел.: (37410) 52-48-90,  
e-mail: [vhakobyan@sci.am](mailto:vhakobyan@sci.am)

**Саакян Аветик Вараздатович** – доктор физ.-мат. наук,  
зам.директора Института механики НАН Армении,  
Тел.: (37410) 568188, (37494)579348  
E-mail: [avsah@mechins.sci.am](mailto:avsah@mechins.sci.am), [avsahakyan@gmail.com](mailto:avsahakyan@gmail.com)

# ИЗГИБ ДВУХ ОДИНАКОВЫХ БАЛОК НА УПРУГОЙ ПОЛОСЕ С УЧЁТОМ СЖИМАЮЩИХ ИЛИ РАСТЯГИВАЮЩИХ ОСЕВЫХ СИЛ

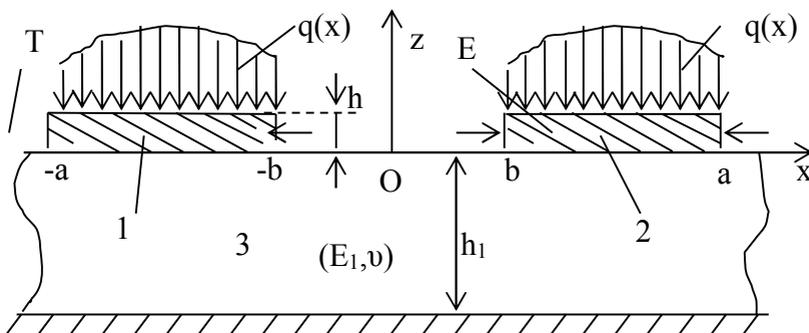
*Амирбемян А.Н., Мктерчян М.С., Шемян А.Л., Шемян Л.А.*

*Армения*

Рассматривается плоская контактная задача об изгибе симметрично нагруженных двух одинаковых упругих балок конечной длины, лежащих на упругом основании в виде полосы, нижняя грань которой закреплена. Задача рассмотрена в рамках теории С.П.Тимошенко изгиба балки [1, стр.422], в которой помимо поперечных изгибающих сил, осевые сжимающие или растягивающие силы также влияют на прогибы балки.

Решение поставленной контактной задачи сводится к решению сингулярного интегрального уравнения (СИУ) с ядром в виде суммы ядра Коши и регулярного ядра. Эффективное решение этого уравнения строится известным численно-аналитическим методом [2].

1. Пусть две упругие балки 1 и 2 с одинаковой толщиной  $h$  и модулем упругости  $E$  лежат на упругой полосе 3 и изгибаются под действием заданных симметрично распределённых поперечных сил интенсивностью  $q(x)$  ( $q(-x) = q(x), x \in [-a, -b] \cup [b, a]$ ) и одновременно сжимаются заданными осевыми силами  $T$  (фиг. 1). Требуется определить закон распределения контактных давлений  $p(x)$ , действующих между балками и полосой, вертикальные смещения  $v(x)$  точек балок, а также изгибающие моменты  $M(x)$  и перерезывающие силы  $Q(x)$  в каждом сечении  $x$  балок.



Фиг. 1

Дифференциальное уравнение изгиба правой балки имеет вид [1]

$$D \frac{d^4 v}{dx^4} + T \frac{d^2 v}{dx^2} = p(x) - q(x), \quad (D = Eh^3/12, \quad b < x < a). \quad (1)$$

$M(x)$  и  $Q(x)$  связаны с  $v(x)$  соотношениями [1]

$$M(x) = D \frac{d^2 v}{dx^2}, \quad Q(x) = D \frac{d^3 v}{dx^3}. \quad (2)$$

Из уравнений равновесия правой балки имеем

$$\int_b^a p(x) dx = \int_b^a q(x) dx = P, \quad \int_b^a xp(x) dx = \int_b^a xq(x) dx = M, \quad (3)$$

где  $P$  и  $M$  – соответственно, величины главного вектора и относительно центра  $O$  главного момента нагрузок, действующих на единицу ширины верхней или нижней поверхности правой балки.

Дифференциальное уравнение (1) рассматривается при граничных условиях отсутствия изгибающих моментов  $M(x)$  на концах балки:

$$M(x)|_{x=b} = D \frac{d^2 v}{dx^2} \Big|_{x=b} = 0, \quad M(x)|_{x=a} = D \frac{d^2 v}{dx^2} \Big|_{x=a} = 0. \quad (4)$$

Положив

$$k = \sqrt{T/D}, \quad g(x) = [p(x) - q(x)]/D, \quad y(x) = d^2 v / dx^2, \quad (5)$$

уравнение (1) перейдёт в следующее:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = g(x), \quad (b < x < a). \quad (6)$$

Общее решение дифференциального уравнения (6) имеет вид [3]:

$$y(x) = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx + \frac{1}{2k} \int_b^a \sin(k|x-s|) g(s) ds, \quad (b \leq x \leq a), \quad (7)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – постоянные интегрирования. Из граничных условий (4) с учётом (7) и последнего обозначения в (5), получим:

$$C_1 = -\frac{1}{2k \sin[k(a-b)]} \int_b^a \{\sin ka \sin[k(s-b)] - \sin kb \sin[k(a-s)]\} g(s) ds, \quad (8)$$

$$C_2 = -\frac{1}{2k \sin[k(a-b)]} \int_b^a \{\cos kb \sin[k(a-s)] - \cos ka \sin[k(s-b)]\} g(s) ds.$$

Теперь выражения  $C_1$  и  $C_2$  из (8), подставив в (7) и проинтегрируя с учётом последнего обозначения в (5), получим [3]

$$\frac{d v}{dx} = \frac{1}{2k^2} \int_b^a \Phi(x, s) g(s) ds + C, \quad (-a \leq x \leq a), \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(x, s) = & \frac{\sin kx}{\sin [k(a-b)]} \left\{ \sin ka \sin [k(s-b)] - \sin kb \sin [k(a-s)] \right\} - \\ & - \frac{1 - \cos kx}{\sin [k(a-b)]} \left\{ \cos kb \sin [k(a-s)] - \cos ka \sin [k(s-b)] \right\} + \quad (10) \\ & + \left\{ 1 - \cos [k(x-s)] \right\} \text{sign}(x-s). \end{aligned}$$

Отметим, что в случае осевых растягивающих сил, в формуле (1) следует  $T$  формально заменить на  $-T$ , в формулах (5)-(10) параметр  $k$  заменить на  $ik$ , где  $i$  – мнимая единица, постоянную  $C_1$  оставить без изменения, постоянную  $C_2$  заменить на постоянную  $-iC_2$  и в формулах (7), (8) и (10) от тригонометрических функций перейти к соответствующим гиперболическим функциям.

2. Вертикальные перемещения  $v_1(x)$  граничных точек верхней поверхности  $z = 0$  упругой полосы 3, когда на участках  $x \in [-a, -b]$  и  $x \in [b, a]$  этой поверхности приложены контактные давления  $p(x)$ , а нижняя поверхность  $z = -b$  полосы 3 закреплена (фиг.1), согласно [4], выражаются формулой

$$v_1(x) = -\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E_1} \left( \int_{-a}^{-b} + \int_b^a \right) U\left(\frac{s-x}{h_1}\right) p(s) ds, \quad (-\infty < x < \infty) \quad (11)$$

где  $(E_1, \nu)$  – упругие постоянные полосы,  $h_1$  – её толщина, а  $U(z)$  имеет вид

$$U(z) = \int_0^\infty \frac{(2\varepsilon \cdot \text{sh} 2u - 4u) \cos uz}{u(2\varepsilon \cdot \text{ch} 2u + 1 + \varepsilon^2 + 4u^2)} du, \quad (\varepsilon = 3 - 4\nu). \quad (12)$$

Как видно из (12), функция  $U(z)$  в окрестности точки  $z = 0$  имеет логарифмическую особенность. Следовательно, из (11) будем иметь:

$$\frac{dv_1}{dx} = -\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E_1} \left( \int_{-a}^{-b} + \int_b^a \right) \left[ \frac{1}{s-x} + R(x, s) \right] p(s) ds, \quad (13)$$

где  $R(x, s)$  – регулярная функция. Далее, учитывая симметричность задачи  $[p(-x) = p(x)]$ , из (13) получим

$$\frac{dv_1}{dx} = -\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E_1} \int_b^a \left[ \frac{1}{s-x} - \frac{1}{s+x} + R(x,-s) + R(x,s) \right] p(s) ds. \quad (14)$$

Теперь по условию контакта

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv_1}{dx}, \quad (b < x < a), \quad (15)$$

откуда при помощи (9) и (14) придём к следующему СИУ:

$$\begin{aligned} & -\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E_1} \int_b^a \left[ \frac{1}{s-x} - \frac{1}{s+x} + R(x,-s) + R(x,s) \right] p(s) ds = \\ & = \frac{1}{2k^2} \int_b^a \Phi(x,s) g(s) ds + C, \quad (b < x < a). \end{aligned} \quad (16)$$

Далее перейдя на интервал  $(-1,1)$ , полагая

$$t = \frac{2x-b-a}{a-b}, \quad u = \frac{2s-b-a}{a-b}, \quad (-1 \leq t, u \leq 1) \quad (17)$$

и введя безразмерные величины

$$\varphi(t) = p(x)/E_1, \quad h(t) = q(x)/E_1, \quad (18)$$

$$\gamma = \frac{C}{(1-\nu^2)(a-b)}, \quad \lambda = \frac{a-b}{a+b}, \quad P_0 = \frac{2P}{(a-b)E_1}, \quad M_0 = \frac{4M}{(a^2-b^2)E_1}, \quad (19)$$

в результате, СИУ (16) принимает вид

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{u-t} + K_0(t,u) \right] \varphi(u) du = f(t) - \gamma, \quad (-1 < t < 1), \quad (20)$$

где  $K_0(t,u)$  и  $f(t)$  – известные регулярные функции, а условия (3) – вид

$$\int_{-1}^1 \varphi(t) dt = P_0, \quad \int_{-1}^1 (1 + \lambda t) \varphi(t) dt = M_0. \quad (21)$$

3. Определяющее СИУ (20) вместе с условиями (21) известным численно-аналитическим методом [2] сведём к системе линейных алгебраических уравнений. С этой целью положим

$$\varphi(t) = \Phi_0(t) / \sqrt{1-t^2}, \quad (-1 < t < 1), \quad (22)$$

где  $\Phi_0(t)$  – гильдеровская неизвестная функция на отрезке  $[-1;1]$ . Будем иметь относительно  $\Phi_0(u_m)$  ( $r = \overline{1, N}$ ) и  $\gamma$  замкнутую систему  $N+1$  линейных алгебраических уравнений [3]

$$\frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \left[ \frac{1}{u_m - t_r} + K_0(t_r, u_m) \right] \Phi_0(u_m) = f(t_r) - \gamma, \quad (r = \overline{1, N-1}) \quad (23)$$

$$\frac{\pi}{N} \sum_{m=1}^N \Phi_0(u_m) = P_0, \quad \frac{\pi}{N} \sum_{m=1}^N (1 + \lambda u_m) \Phi_0(u_m) = M_0, \quad (24)$$

где  $N$  – любое натуральное число,  $u_m$  и  $t_r$  – чебышевские узлы:

$$u_m = \cos\left(\frac{2m-1}{2N}\pi\right) \quad (m = \overline{1, N}), \quad t_r = \cos\left(\frac{\pi r}{N}\right) \quad (r = \overline{1, N-1}). \quad (25)$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.
2. Erdogan F., Gupta G.D., Gook T.S. The numerical solutions of singular integral equations. Methods of Analysis and Solution of Crack Problems. // Intern.Publ., Leyden, 1973. P.368-425.
3. Амирбекян А.Н., Мкртчян М.С., Мхитарян С.М., Шекян Л.А. О контактной задаче изгиба балки конечной длины на упругой полуплоскости с учётом сдвигающих сил в срединной линии. //Изв. НАН Армении. Механика. 2014. Т.67. №1. С.6-21.
4. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455с.

#### Сведения об авторах:

**Амирбекян Аревик Норайровна** – младший научный сотрудник Института механики НАН РА

Тел.: (37410) 52-48-90. **E-mail:** [a.amirbekyan@mail.ru](mailto:a.amirbekyan@mail.ru)

**Мкртчян Мушег Серёжаевич** – канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института механики НАН РА

Тел.: (37410) 431652, (37498) 8019 56, **E-mail:** [muscheg-mkrтчyan@rambler.ru](mailto:muscheg-mkrтчyan@rambler.ru)

**Шекян Артём Лаврентиевич** - канд. физ.-мат. наук, Государственный инженерный университет Армении

Тел.: (+37410)39 89 01; (+37499) 85 72 27; **E-mail:** [artyom.sh.83@mail.ru](mailto:artyom.sh.83@mail.ru)

**Шекян Лаврентий Арамович** - докт. физ.-мат. наук, Государственный инженерный университет Армении

Тел.: (+37410)39 89 01; (+37499) 28 34 40; **E-mail:** [lshekyan@mail.ru](mailto:lshekyan@mail.ru)

# ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ИЗГИБАЕМОЙ ПЛАСТИНКИ В ОКРЕСТНОСТИ КРАЯ ДЛЯ РАЗНЫХ ВИДОВ ЗАКРЕПЛЕНИЯ

*Антонян С.С., Василян Н.Г*

*Армения*

В статье исследовано напряжённно-деформированное состояние изгибаемой пластинки в окрестности закреплённого края. Исследованы разные виды закрепления: жёсткая заделка и облегчённая заделка, скользящий контакт и стеснённо скользящий контакт, шарнирное закрепление и свободное опирание. Применён подход Надаи [1,10]. По теории С.А. Амбарцумяна, учитывающей поперечные сдвиговые деформации, получаются разные граничные условия, что и позволяет выявить различие. На основе теории С.А. Амбарцумяна определяются прогиб, изгибающий и крутящий моменты и перерезывающие усилия в окрестности закреплённого края пластинки.

Известно, что двум вариантам закрепления стороны прямоугольной пластинки в трёхмерной постановке соответствует один вариант по теории Кирхгофа. Теории, учитывающие поперечные сдвиги, приводят для указанных вариантов к различным граничным условиям. В этой статье на основе теории С.А.Амбарцумяна определены прогибы, изгибающие и крутящие моменты и перерезывающие усилия в окрестности закреплённого края пластинки. Для перерезывающих усилий устанавливается наличие существенных отличий в зависимости от вида закрепления пластинки.

1. Для исследования напряжённно-деформированного состояния в окрестности закреплённой кромки пластинки применяется подход Надаи, согласно которому, для достаточно удлинённых пластин можно пренебречь влиянием граничных условий противоположной кромки. Имеем полубесконечную пластинку-полоску с постоянной толщиной  $2h$ , которая в прямоугольной декартовой системе координат занимает область  $0 \leq x < \infty$ ,  $0 \leq y \leq b$ ,  $-h \leq z \leq h$ .

На пластинку действует распределённая нагрузка интенсивностью  $q(y)$ . Согласно теории С.А. Амбарцумяна [3,8], уравнения задачи изгиба пластинки с учётом поперечных сдвигов имеют вид:

$$\frac{4h}{3} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) + q(y) = 0, \quad \theta = \frac{1+\nu}{1-\nu},$$
$$D \frac{\partial}{\partial x} \Delta w - \frac{8h^3}{15} \left[ \Delta \varphi_1 + \theta \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) \right] + \frac{4h}{3} \varphi_1 = 0, \quad (1.1)$$
$$D \frac{\partial}{\partial y} \Delta w - \frac{8h^3}{15} \left[ \Delta \varphi_2 + \theta \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) \right] + \frac{4h}{3} \varphi_2 = 0.$$

где  $w$  – функция прогиба,  $\varphi_1, \varphi_2$  – перерезывающие усилия.

Как и в задаче Надаи, предполагается, что края пластинки  $y=0, b$  шарнирно закреплены, что позволяет решение системы уравнений (1.1) представить в виде:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \sin \lambda_n y, \quad \varphi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(x) \sin \lambda_n y, \quad \varphi_2 = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x) \cos \lambda_n y, \quad (1.2)$$

где  $\lambda_n = \frac{n\pi}{b}$ . Следуя подходу Надаи, потребуем, чтобы решения (1.2) при удалении от кромки  $x=0$  стремились к решению задачи цилиндрического изгиба, решение которого представляется в виде тригонометрических рядов и имеет вид:

$$w_{0n} = \frac{q_n}{D\lambda_n^4} \left[ 1 + \frac{4h^2\lambda_n^2}{5(1-\nu)} \right], \quad \varphi_{1n} = 0, \quad \varphi_{2n} = \frac{3q_n}{4h\lambda_n}. \quad (1.3)$$

Согласно (1.4), указанные условия будут иметь вид:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = \frac{q_n}{D\lambda_n^4} \left[ 1 + \frac{4h^2\lambda_n^2}{5(1-\nu)} \right], \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \Phi_n(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F_n(x) = \frac{3q_n}{4h\lambda_n} \quad (1.4)$$

Подстановка (1.2) в (1.1) приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно искомым функций  $f_n(x), \Phi_n(x), F_n(x)$ . Решение этой системы подробно было приведено ещё в работе [4]:

$$\begin{aligned} f_n &= A_n e^{-\lambda_n x} + B_n x e^{-\lambda_n x} + \frac{q_n}{D\lambda_n^4} (1 + \zeta_n) \\ \Phi_n &= D_n e^{-\eta_n x} - \frac{5E}{4(1+\nu)} \zeta_n B_n e^{-\lambda_n x} \\ F_n &= -\frac{\eta_n}{\lambda_n} D_n e^{-\eta_n x} + \frac{5E}{4(1+\nu)} \zeta_n B_n e^{-\lambda_n x} + \frac{3q_n}{4h\lambda_n} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Таким образом, решением уравнений (1.1), удовлетворяющих условиям (1.2) и (1.4), будет (1.5).

Произвольные постоянные  $A_n, B_n$  и  $D_n$  должны определяться удовлетворением граничным условиям на кромке  $x=0$ .

Задача изгиба пластин с граничными условиями – шарнирное закрепление и свободное опирание для конечной пластинки – была решена в работе [5]. Для граничных условий жёсткая заделка и облегчённая заделка, скользящий контакт и стеснённо скользящий контакт, шарнирное закрепление и свободное опирание для полубесконечной пластинки-полоски были решены в работах [4], [5], [9].

**1.1** В трёхмерной постановке задач на кромке пластинки  $x = 0$  рассмотрены три пары граничных условий:

- a) жёсткая заделка и облепчённая заделка,
- b) стеснённо скользящий контакт и скользящий контакт,
- c) шарнирное закрепление и свободное опирание.

Эти шесть условия приведены по двум теориям: по теории Кирхгофа и по уточнённой теории [4], [5], [9].

Подставляя (1.2) в (2.7)-(2.12) и учитывая (1.4) и (1.5), находим неизвестные постоянные  $A_n$ ,  $B_n$  и  $D_n$ . Для сравнения результатов решения достаточно рассматривать частный случай задания нагрузки

$$q(y) = q_0 \sin \lambda_1 y.$$

$$a) \quad 1. \quad w = \frac{q_0}{D\lambda_1^4} (1 + \zeta_1) \left[ 1 - \left( 1 + \frac{\lambda_1 x}{1 + 2\zeta_1} \right) e^{-\lambda_1 x} \right] \sin \lambda_1 y, \quad (2.1)$$

$$2. \quad w = \frac{q_0}{D\lambda_1^4} \left[ (1 + \zeta_1)(1 - e^{-\lambda_1 x}) - R_1 \lambda_1 x e^{-\lambda_1 x} \right] \sin \lambda_1 y, \quad (2.2)$$

$$b) \quad 1. \quad w = \frac{q_0}{D\lambda_1^4} \left[ \frac{1}{\beta_1} e^{-\lambda_1 x} (1 + \lambda_1 x) + 1 + \zeta_1 \right] \sin \lambda_1 y, \quad (2.3)$$

$$2. \quad w = \frac{q_0}{D\lambda_1^4} [1 + \zeta_1] \sin \lambda_1 y, \quad (2.4)$$

$$c) \quad 1. \quad w = \frac{q_0}{2D\lambda_1^4} \left[ 1 + \zeta_1 - 2(1 + \zeta_1) e^{-\lambda_1 x} - \lambda_1 x e^{-\lambda_1 x} \right] \sin \lambda_1 y, \quad (2.5)$$

$$2. \quad w = -\frac{q_0}{D\lambda_1^4} \left\{ 1 + \zeta_1 - \lambda_1^2 (1 + \zeta_1) e^{-\lambda_1 x} - \lambda_1 \left[ \frac{(\lambda_1^2 + \nu \eta_1^2)}{2(\lambda_1 \eta_1 (1 - \nu) - \lambda_1^2 - \nu \eta_1^2)} + \frac{1 + \zeta_1}{(1 + (1 + \nu)\zeta_1)} \right] x e^{-\lambda_1 x} \right\} \sin \lambda_1 y, \quad (2.6)$$

Можно определить все характерные величины задачи. Найденное решение будет совпадать с решением по теории Кирхгофа, если принять  $\zeta_1 \ll 1$ . Рассмотрены выражения для перерезывающих усилий и изгибающего момента в точке  $(0, 0.5b)$ :

a) Совпадают выражения для прогиба и изгибающего момента:

$$\max N_1 = N_1(0, b/2) \approx \frac{2q_0}{\lambda_1} \left( 1 - \frac{\lambda_1 h}{\sqrt{10}} \right), \quad N_2 = \frac{4h}{3} \varphi_2 \quad (2.7)$$

$$b) \quad N_2(0, 0) = \frac{q_0}{\lambda_1} \left[ 1 + \frac{15(1 - \nu)}{2h^2 \lambda_1^4} (-\eta_1 + \lambda_1) \right]$$

$$M_1(0,0.5b) = -\frac{4\nu}{5(1-\nu)} q_0 h^2 \left[ 1 - \frac{5(1-\nu)[\lambda_1(1+\nu) + \nu\lambda_1\beta_1(1+\zeta_1) + 2\zeta_1(1-\nu)(-\eta_1 + \lambda_1)]}{4\nu h^2 \lambda_1^3 \beta_1} \right]$$

$$c) M_1(0,0.5b) = -\frac{4\nu}{5(1-\nu)} q_0 h^2 \left[ 1 - \frac{5(1-\nu)(1+\zeta_1)}{4h^2 \lambda_1^2} \right] \quad N_2(0,0) = \frac{q_0}{\lambda_1}$$

$$d) N_1(0,0.5b) = \frac{q_0}{\lambda_1} \left[ 1 + \frac{5+3\nu}{4\sqrt{2.5}\lambda_1^2 h(1-\nu)} \right]$$

$$N_2(0,y) = \frac{q_0}{\lambda_1} \left[ \frac{\lambda_1 h}{\zeta_1(\lambda_1 h(1-\nu) - \sqrt{2.5\nu})} - 1 \right] \cos \lambda_1 y, \quad (N_2(0,0.5b) = 0)$$

Приведённые сравнения показывают, что результаты классической теории совпадают с результатами уточнённой теории при граничных условиях облегчённой заделки, скользящего контакта и шарнирного закрепления с точностью пренебрежения квадратом относительной толщины. Но в случае жёсткой заделки, стеснённо скользящего контакта и свободного опирания различия существенны.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Costanda C. A mathematical analysis of bending of plates with transverse shear deformation. Longman Scientific Technical. 1992. 170p.
2. Karama M., Afag K.S., Mistou S. A refinement of Ambartsumian multi-layer beam theory. // Computers&Structures. 2008. №86. P.839-849.
3. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360с.
4. Антонян С.С., Василян Н.Г. Исследование напряжённно-деформированного состояния изгибаемой пластинки в окрестности края пластинки граничным условием скользящего контакта. //Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред /Труды VII Международной конференции, 19-23 сентября, Горис–Степанакерт. Ереван: 2011. С.44-48
5. Антонян С.С., Василян Н.Г. Исследование напряжённно-деформированного состояния изгибаемой пластинки в окрестности шарнирно закреплённого края. // В сб.н.тр. Международной школы-конференции молодых учёных, посв. 70-летию основания НАН Армении: 1–4 октября 2013г. Цахкадзор, Армения. С.69-73.
6. Баблоян А.А., Токмаджян В.О. Смешанная задача изгиба пластины с учётом поперечных сдвигов. //Изв. НАН Армении. Механика. 2008. Т.61. №4. С.44-51.
7. Багдасарян З.Р. Влияние учёта поперечных сдвигов в задачах изгиба прямоугольной пластины. //Диссертация на соискание учёной степени к.ф.-м.н., Ереван: 2008. 116с.

8. Белубекян М.В. Об уравнениях теории пластин, учитывающих поперечные сдвиги. //В сб.: «Проблемы механики тонких деформируемых тел» Ереван: НАН Армении. 2002. С.67-88.
9. Василян Н.Г. Влияние учёта поперечных сдвигов в задачах изгиба пластин. Диссертационная работа. Глава 3.2. С.4-102.
10. Nadai A. Elastische Platten. Берлин, 1925. 72с.
11. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Физматлит, 1963. 636с.

**Сведения об авторах:**

**Антонян Саят Сержикович,**

Аспирант Института механики НАН Армении

Тел.: (+374 99) 339299, (+374 10)624802

Е-mail: [sayatantonyan@rambler.ru](mailto:sayatantonyan@rambler.ru)

**Василян Нарине Гургеновна,**

к. ф.-м. н., научный сотрудник Института механики НАН Армении

Тел.: (+374 91) 707939, (+374 10)624802

Е-mail: [narine@mechins.sci.am](mailto:narine@mechins.sci.am)

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ЗАТРАТ ПО РАЗЛИЧНЫМ ПРОГРАММАМ ЦИКЛИЧЕСКИХ НАГРУЖЕНИЙ

*Арутюнян А.Р.*

*Россия*

В работе при решении проблемы минимизации энергетических затрат при разрушении твердых тел используются энергетические методы. Предложен энергетический вариант нелинейного закона суммирования повреждений. Выполнены опыты над образцами из полиметилметакрилата по нескольким программам циклических нагружений: при разных частотах циклических нагружений и при их чередовании. Наблюдается значительная зависимость энергетических затрат на разрушение от режима нагружения. Результаты опытов могут быть использованы при конструировании и эксплуатации различного оборудования, применяемого в инженерной практике для переработки и измельчения твердых материалов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект N 14-01-00823).

При решении актуальная проблема минимизации энергетических затрат при разрушении твердых тел, востребованная во многих инженерных приложениях (при взрыве, при бурении, при измельчении, в металлообработке резанием, при переработке бытовых и промышленных отходов, в пищевой промышленности, в производстве медицинских препаратов, в целлюлозно-бумажной промышленности и др.). При этом ставится задача определения режимов нагружения, способствующих максимальному разупрочнению материалов с минимальными затратами энергии на разрушение.

Для оценки оптимальных затрат энергии на разрушение сравниваются энергетические затраты по различным программам нагружений. Энергетические затраты определяются в соответствии с законом суммирования повреждений, выраженных в относительных величинах энергии [1, 2]. Если сумма относительных значений энергетических затрат меньше единицы, то потребление энергии на разрушение считается оптимальным.

Впервые гипотеза накопления усталостных повреждений была сформулирована в 1924 г. Пальмгреном [3] и позднее развита в 1945 г. Майнером [4]. В случае многоступенчатого усталостного нагружения образец испытывается при напряжении  $\sigma_1$  в течение  $N_1$  циклов, затем нагружается при напряжении  $\sigma_2$  в течение  $N_2$  циклов и т.д. При напряжении  $\sigma_k$  образец испытывается до разрушения при числе циклов  $N_k$ . Если  $N_{iR}$  ( $i = 1, k$ ) – число циклов до разрушения при напряжении  $\sigma_i$ , то отношения  $N_1 / N_{1R}$ ,  $N_2 / N_{2R}$ , ...,  $N_k / N_{kR}$  составляют доли повреждений в процессе первого, второго,  $k$ -го нагружений. Записывая доли повреждений через величины энергетических затрат нелинейный закон суммирования повреждений может быть выражен в виде

$$\left(\frac{W_1}{W_{1R}}\right)^m + \left(\frac{W_2}{W_{2R}}\right)^m = a, \quad (1)$$

где  $a$ ,  $m$  – постоянные,  $W_1$ ,  $W_2$  – текущие величины энергетических затрат при чередовании двух значений частот циклических нагружений  $f_1$  и  $f_2$ ,  $W_{1R}$ ,  $W_{2R}$  – величины относительных затрат энергии при непрерывных нагружениях с частотой  $f_1$  до разрушения и соответственно частотой  $f_2$  до разрушения. Подобным образом могут быть сформулированы законы суммирования повреждений при различных программах нагружений.

Экспериментальные оценки закона суммирования повреждений были выполнены над образцами из литьевого полиметилметакрилата марки ТОСП. Форма и геометрические размеры образцов представлены на рис.1. Толщина образцов составляла порядка 3,3–4,3 мм.

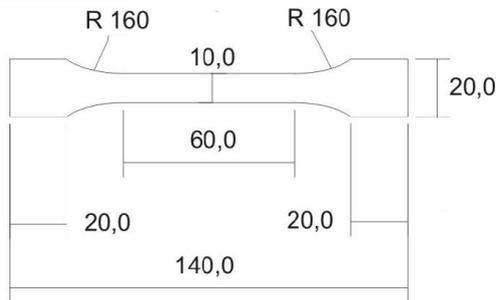


Рис. 1. Форма и геометрические размеры образцов (размеры указаны в мм).

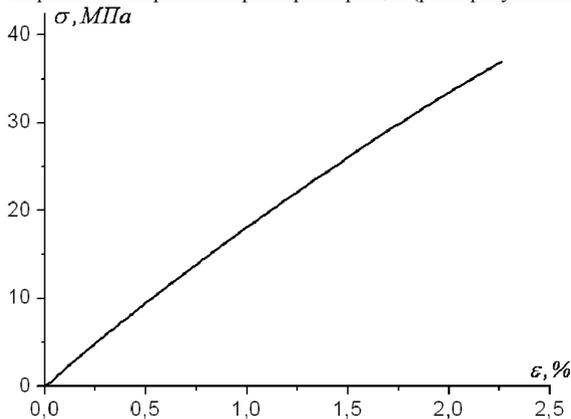


Рис. 2. Кривая напряжение-деформация при растяжении для образцов из полиметилметакрилата.

Типичная кривая напряжение-деформация при растяжении для данных образцов полиметилметакрилата показана рис. 2.

Были также выполнены экспериментальные исследования усталости рассматриваемых образцов из полиметилметакрилата. Опыты проводились на усталостной испытательной машине Si-Plan SH-B по программе отнулевого цикла растяжения при частоте нагружения  $60 \text{ Гц}$ . Экспериментальные точки и кривая усталости представлены на рис.3 (кружочками со стрелками обозначены не разрушившиеся образцы). Общее количество испытанных образцов – 64.

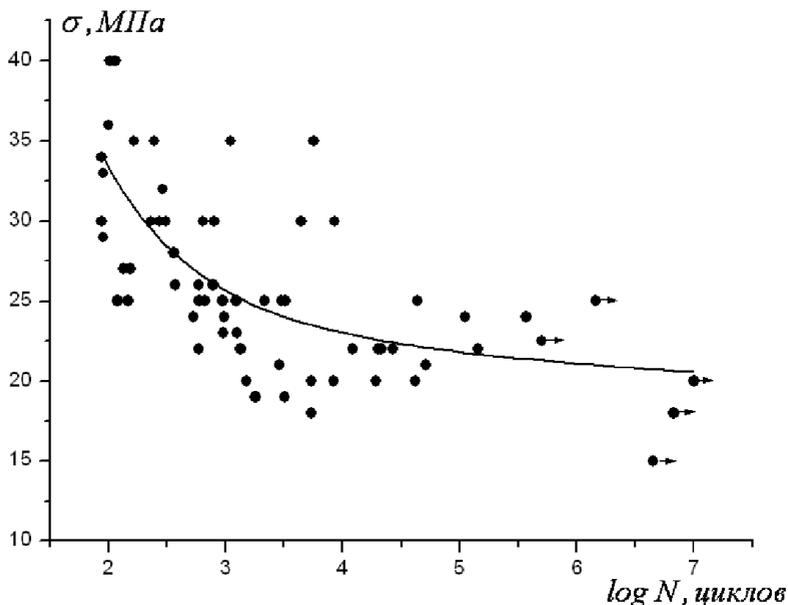


Рис. 3. Кривая усталости для образцов из полиметилметакрилата: кружочками обозначены экспериментальные точки, кружочками со стрелками – не разрушившиеся образцы.

На следующем этапе исследований была проведена оценка оптимальных затрат энергии на разрушение по различным программам нагружений. Для этого были выполнены испытания образцов полиметилметакрилата при чередовании двух уровней частот нагружения  $f_1 = 60 \text{ Гц}$  и  $f_2 = 10 \text{ Гц}$ .

Девять образцов были испытаны при непрерывных нагружениях до разрушения с частотами  $f_1 = 60 \text{ Гц}$  и  $f_2 = 10 \text{ Гц}$ . Испытания проводились при напряжении  $22 \text{ МПа}$ . По результатам этих испытаний были определены величины

относительных затрат энергии при этих частотах ( $W_{1R}$  и  $W_{2R}$ ) и число циклов до разрушения  $N_{1R}$  и  $N_{2R}$ .

Эксперименты на чередование двух уровней частот нагружения выполнялись при напряжении 22 МПа по следующей программе. Вначале нагружение осуществлялось при частоте  $f_1 = 60$  Гц в течение  $N_{1R} / 2$  циклов, затем при частоте  $f_2 = 10$  Гц до разрушения и аналогичным образом при частоте  $f_2 = 10$  Гц в течение  $N_{2R} / 2$  циклов, затем на частоте  $f_1 = 60$  Гц до разрушения. Общее количество испытанных образцов по этой программе равнялось 8. Полученные результаты представлены в табл. 1 и 2.

Таблица 1. Затраты энергии на разрушение при чередовании двух уровней частот нагружения ( $f_1 = 60$  Гц и  $f_2 = 10$  Гц). Первое нагружение с частотой  $f_1$ .

$W_1 / W_{1R}$	$W_2 / W_{2R}$	$W_1 / W_{1R} + W_2 / W_{2R}$
0,403	67,577	67,98
0,316	105,566	105,882
0,492	123,219	123,711

Таблица 2. Затраты энергии на разрушение при чередовании двух уровней частот нагружения ( $f_1 = 60$  Гц и  $f_2 = 10$  Гц). Первое нагружение с частотой  $f_2$ .

$W_1 / W_{1R}$	$W_2 / W_{2R}$	$W_1 / W_{1R} + W_2 / W_{2R}$
47,888	0,547	48,435
92,391	0,413	92,804
56,609	0,356	56,965
11,909	0,486	12,395
21,18	0,463	21,643

Согласно представленным в табл. 1 и 2 результатам опытов, энергетические затраты на разрушение минимальны, когда начальное нагружение осуществляется при частоте  $f_2 = 10$  Гц.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Р.А. Оценка энергетических затрат при разрушении твёрдых тел // Известия РАН. Механика твёрдого тела. 2012. № 4. С.63-70.
2. Арутюнян А.Р. Оценка энергетических затрат при циклических нагружениях // XXI Петербургские чтения по проблемам прочности. К 100-летию со дня рождения Л.М. Качанова и Ю.Н. Работнова. Санкт-Петербург, 15-17 апреля 2014 г. Сборник материалов. СПб.: Соло. 2014. С.101-103.
3. Palmgren A. The fatigue life of ball-bearings // Zeitschrift. VDI. 1924. Vol. 68. P.339-341.
4. Miner M.A. Cumulative damage in fatigue // Journal of Applied Mech. ASME. 1945. Vol.12. №9. P.159-164.

### **Сведения об авторе:**

**Арутюнян Александр Робертович** – старший научный сотрудник, математико-механический факультет, Санкт-Петербургский гос.университет  
Тел.: + 7 (812) 5266591.

**E-mail:** [Robert.Arutyunyan@paloma.spbu.ru](mailto:Robert.Arutyunyan@paloma.spbu.ru)

# ПЛОСКИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СОСТАВНОЙ ПЛОСКОСТИ С ТРЕЩИНАМИ МЕЖДУ МАТЕРИАЛАМИ

*Арутюнян Л.А., Торосян Д.Р.*

*Армения*

Задачи с трещинами связаны с задачами определения напряжённо-деформированного состояния в однородных и неоднородных упругих телах, представляющих интерес в теоретических и практических вопросах прочности разнообразных конструкций, они стали предметом исследования многих авторов [2-7].

В настоящей работе рассматривается плоская задача теории упругости для составной плоскости, состоящей из двух полуплоскостей с различными упругими характеристиками и имеющимися между ними конечными трещинами или полубесконечными трещинами. На прямоугольной декартовой системе координат  $(x, y)$  при  $y \geq 0$  полуплоскость имеет упругие характеристики  $G_1$  и  $\nu_1$ , а при  $y \leq 0$  имеет упругие характеристики  $G_2$  и  $\nu_2$  ( $G_1$  и  $G_2$  – модули сдвига материалов,  $\nu_1$  и  $\nu_2$  – коэффициенты Пуассона). Для решения задачи удобно использовать биполярные системы координат. Связь прямоугольных координат  $(x, y)$  с биполярными координатами  $(\alpha, \beta)$  даётся соотношением [1]

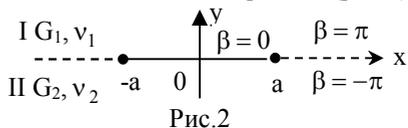
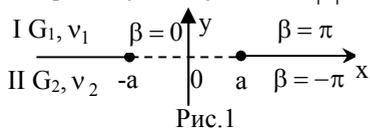
$$gx = \operatorname{sh} \alpha, \quad gy = \sin \beta, \quad ag = \operatorname{ch} \alpha + \cos \beta \quad (1)$$

$a$  – размерный параметр.

Задачи решаются при помощи функции Папковича-Нейбера. Приведём выражения перемещений и напряжений через функцию Папковича-Нейбера [1]:

$$\begin{aligned} 2GU(x, y) &= -\frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial x} - y \frac{\partial \Phi_2(x, y)}{\partial x} \\ 2GV(x, y) &= (3 - 4\nu) \Phi_2(x, y) - \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial y} - y \frac{\partial \Phi_2(x, y)}{\partial y} \\ \sigma_y(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ 2(1 - \nu) \Phi_2(x, y) - \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial y} \right] - y \frac{\partial^2 \Phi_2(x, y)}{\partial y^2} \\ \tau_{xy}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ (1 - 2\nu) \Phi_2(x, y) - \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial y} - y \frac{\partial \Phi_2(x, y)}{\partial y} \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

1. Пусть на участках граничной прямой  $y=0$ , а именно, на отрезке  $|x| < a$  имеем трещину, а на участках  $|x| > a$  имеем полный контакт материалов (рис.1).



Рассмотрим следующую краевую задачу, когда на берегах трещины и на линии контакта заданы следующие условия:

$$\tau_y^{(1)}(\alpha, 0) = \tau_1(\alpha); U_1(\alpha, 0) = U_0(\alpha); \tau_y^{(2)}(\alpha, 0) = \tau_2(\alpha); \sigma_y^{(2)}(\alpha, 0) = \sigma_2(\alpha) \quad (3)$$

$$U_1(\alpha, \pi) = U_2(\alpha, -\pi); V_1(\alpha, \pi) = V_2(\alpha, -\pi); \sigma_y^{(1)}(\alpha, \pi) = \sigma_y^{(2)}(\alpha, -\pi); \tau_{xy}^{(1)}(\alpha, \pi) = \tau_{xy}^{(2)}(\alpha, -\pi)$$

Подставляя в граничные условия (3) выражения (2) перемещений и напряжений через гармонические функции  $\Phi_0^{(m)}(\alpha, \beta)$  и  $\Phi_2^{(m)}(\alpha, \beta)$  ( $m=1, 2$ ) Папковича-Нейбера, мы приходим к следующей краевой задаче. При этом следует перейти от производных  $x$  и  $y$  к производным по  $\alpha$  и  $\beta$  [1].

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ (1 - 2\nu_m) \Phi_2^{(m)}(\alpha, \beta) - \Phi_3^{(m)}(\alpha, \beta) \right] \Big|_{\beta=0} = \frac{a\tau_m(\alpha)}{ch\alpha + 1} \quad (m=1, 2) \\ & \frac{\partial \Phi_3^{(1)}(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \Big|_{\beta=0} = 2G_1 \frac{\partial U_0(\alpha)}{\partial \alpha}; \quad \frac{\partial}{\partial \beta} \left[ 2(1 - \nu_1) \Phi_2^{(2)}(\alpha, \beta) - \Phi_3^{(2)}(\alpha, \beta) \right] \Big|_{\beta=0} = \frac{a\sigma_2(\alpha)}{ch\alpha + 1} \\ & \frac{1}{G_1} \frac{\partial \Phi_3^{(1)}(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\pi} = \frac{1}{G_2} \frac{\partial \Phi_3^{(2)}(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \Big|_{\beta=-\pi} \\ & \frac{\partial}{\partial \beta} \left[ 2(1 - \nu_1) \Phi_2^{(1)}(\alpha, \beta) - \Phi_3^{(1)}(\alpha, \beta) \right] \Big|_{\beta=\pi} = \\ & = \frac{\partial}{\partial \beta} \left[ 2(1 - \nu_2) \Phi_2^{(2)}(\alpha, \beta) - \Phi_3^{(2)}(\alpha, \beta) \right] \Big|_{\beta=-\pi} \\ & \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ (1 - 2\nu_1) \Phi_2^{(1)}(\alpha, \beta) - \Phi_3^{(1)}(\alpha, \beta) \right] \Big|_{\beta=\pi} = \\ & = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ (1 - 2\nu_2) \Phi_2^{(2)}(\alpha, \beta) - \Phi_3^{(2)}(\alpha, \beta) \right] \Big|_{\beta=-\pi} \\ & \frac{1}{G_1} \left[ (3 - 4\nu_1) \Phi_2^{(1)}(\alpha, \pi) - \Phi_3^{(1)}(\alpha, \pi) \right] = \frac{1}{G_2} \left[ (3 - 4\nu_1) \Phi_2^{(2)}(\alpha, \pi) - \Phi_3^{(2)}(\alpha, -\pi) \right] \end{aligned} \quad (4)$$

где введены новые гармонические функции

$$\Phi_3^{(m)}(x, y) = \frac{\partial \Phi_2^{(m)}(x, y)}{\partial y} \quad (m=1, 2). \quad (5)$$

Функции  $\Phi_n^{(m)}(\alpha, \beta)$  ( $m=1, 2; n=2, 3$ ) ищем в виде интегралов Фурье.

$$\Phi_n^{(m)}(\alpha, \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [A_n^{(m)}(\lambda) \operatorname{ch} \lambda \beta + B_n^{(m)}(\lambda) \operatorname{sh} \lambda \beta] \frac{e^{-i\lambda\alpha}}{\lambda} d\lambda \quad (6)$$

Подставляя (6) в (4), определяем величины  $A_n^{(m)}(\lambda)$  и  $B_n^{(m)}(\lambda)$  ( $m=1,2$ ;  $n=2,3$ ).

$$A_3^{(m)}(\lambda) = \frac{(\chi_m - 1)}{2} A_2^{(m)}(\lambda) + \bar{\tau}_m(\lambda); \quad B_3^{(2)}(\lambda) = \frac{\chi_2 + 1}{2} B_2^{(2)}(\lambda) + \bar{\sigma}_2(\lambda)$$

$$B_3^{(1)}(\lambda) = \bar{U}_0(\lambda); \quad A_2^{(2)}(\lambda) = -A_2^{(1)}(\lambda) - \frac{\chi_2 + 1}{2} B_2^{(1)}(\lambda) \operatorname{cth} \lambda \pi + m_3(\lambda) \quad (7)$$

$$B_2^{(2)}(\lambda) = \frac{\chi_1 - 1}{2} B_2^{(1)}(\lambda) + m_4(\lambda), \quad A_2^{(1)}(\lambda) = \frac{\Delta_1(\lambda)}{\Delta(\lambda)}; \quad B_2^{(1)}(\lambda) = \frac{\Delta_2(\lambda)}{\Delta(\lambda)}$$

где  $\Delta(\lambda) = a_{11}(\lambda)a_{22}(\lambda) - a_{12}(\lambda)a_{21}(\lambda)$ ,  $\Delta_1(\lambda) = a_{22}(\lambda)b_1(\lambda) - a_{12}(\lambda)b_2(\lambda)$

$$\Delta_2(\lambda) = a_{11}(\lambda)b_2(\lambda) - a_{21}(\lambda)b_1(\lambda), \quad a_{11}(\lambda) = [\chi_1 - 1 - \mu(\chi_2 - 1)] \operatorname{sh} \lambda \pi$$

$$a_{12}(\lambda) = \mu(1 - \chi_1\chi_2) \operatorname{ch} \lambda \pi, \quad a_{21}(\lambda) = [\chi_1 + 1 + \mu(\chi_2 + 1)] \operatorname{ch} \lambda \pi$$

$$a_{22}(\lambda) = [(\mu(1 + \chi_1\chi_2) + 2\chi_1) \operatorname{ch} 2\lambda\pi + \mu(\chi_1 + \chi_2) - 2\chi_1] \frac{1}{2 \operatorname{sh} \lambda \pi}$$

$$b_1(\lambda) = 2m_1(\lambda) - \mu(\chi_2 - 1)m_3(\lambda) \operatorname{sh} \lambda \pi + \mu(\chi_2 + 1)m_4(\lambda) \operatorname{ch} \lambda \pi$$

$$b_2(\lambda) = 2m_2(\lambda) + \mu(\chi_2 + 1)m_3(\lambda) \operatorname{ch} \lambda \pi - \mu(\chi_2 - 1)m_4(\lambda) \operatorname{sh} \lambda \pi \quad (8)$$

$$m_1(\lambda) = -(\bar{\tau}_1(\lambda) + \mu\bar{\tau}_2(\lambda)) \operatorname{sh} \lambda \pi - (\bar{U}_0(\lambda) - \mu\bar{\sigma}_2(\lambda)) \operatorname{ch} \lambda \pi$$

$$m_2(\lambda) = (\bar{\tau}_1(\lambda) - \mu\bar{\tau}_2(\lambda)) \operatorname{ch} \lambda \pi + (\bar{U}_0(\lambda) + \mu\bar{\sigma}_2(\lambda)) \operatorname{sh} \lambda \pi$$

$$m_3(\lambda) = \bar{\tau}_1(\lambda) + \bar{\tau}_2(\lambda) - (\bar{\sigma}_2(\lambda) - \bar{U}_0(\lambda)) \operatorname{cth} \lambda \pi$$

$$m_4(\lambda) = -\bar{u}_0(\lambda) - \bar{\sigma}_2(\lambda) + (\bar{\tau}_2(\lambda) - \bar{\tau}_1(\lambda)) \operatorname{cth} \lambda \pi$$

$$\bar{\tau}_m(\lambda) = \frac{ia}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau_m(\alpha)}{\operatorname{ch} \alpha + 1} e^{i\lambda\alpha} d\alpha \quad (m=1, 2); \quad \bar{\sigma}_2(\lambda) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_2(\alpha)}{\operatorname{ch} \alpha + 1} e^{i\lambda\alpha} d\alpha$$

$$\bar{U}_0(\lambda) = -\frac{2G_1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial U_0(\alpha)}{\partial \alpha} e^{i\lambda\alpha} d\alpha; \quad \mu = \frac{G_1}{G_2}; \quad \chi_m = 3 - 4\nu_m \quad (m=1, 2)$$

2. На участках граничной прямой  $y=0$ , а именно, на отрезках  $|x|>a$  имеем трещину, а на участках  $|x|<a$  имеем полный контакт материалов (рис. 2).

Граничные и контактные условия в этом случае имеют вид:

$$\tau_{xy}^{(m)}(\alpha; (-1)^{m+1}\pi) = \tau_m^{(\alpha)}; \quad U_1(\alpha, \pi) = U_0(\alpha); \quad \sigma_y^{(2)}(\alpha, -\pi) = \sigma_2(\alpha),$$

$$\tau_{xy}^{(1)}(\alpha, 0) = \tau_{xy}^{(2)}(\alpha, 0), \quad \sigma_y^{(1)}(\alpha, 0) = \sigma_y^{(2)}(\alpha, 0) \quad (9)$$

$$U_1(\alpha, 0) = U_2(\alpha, 0); \quad V_1(\alpha, 0) = V_2(\alpha, 0)$$

А в этом случае  $\Phi_n^{(m)}(\alpha, \beta)$  ( $m=1, 2$ ;  $n=2, 3$ ) ищем в следующем виде:

$$\Phi_n^{(m)}(\alpha, \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ A_n^{(m)}(\lambda) \operatorname{ch} \lambda (\pi + (-1)^m \beta) + B_n^{(m)}(\lambda) (\pi + (-1)^m \beta) \right] \frac{e^{-i\lambda\alpha}}{\lambda} d\lambda \quad (10)$$

После удовлетворения краевым и контактными условиями (9), учитывая формулы (1, 2, 10) для неизвестных величин  $A_n^{(m)}(\lambda)$  и  $B_n^{(m)}(\lambda)$  ( $m=1, 2$ ;  $n=2, 3$ ), получаем опять значения (7) и (8), только в этом случае

$$\bar{\tau}_m(\lambda) = -\frac{ia}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau_1(\alpha)}{\operatorname{ch} \alpha - 1} e^{i\lambda\alpha} d\alpha; \quad \bar{\sigma}_2(\lambda) = -\frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_2(\alpha)}{\operatorname{ch} \alpha - 1} e^{i\lambda\alpha} d\alpha \quad (11)$$

Дадим решение одной конкретной задачи: когда внешние условия, приложенные к берегам трещин, сводятся к сосредоточенным силам величины  $P$ , приложенным в точках  $y=0$ ,  $x=b$ , в первом случае  $-a < b < a$ , а  $b < -a$  или  $b > a$  – во втором случае.

Представляет интерес распределение напряжений на линии контакта и на берегах трещин.

В первом случае имеем следующие значения:

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(1)}(\alpha, 0) &= \frac{(\chi_1 + 1) \cdot K_4 \cdot P \cdot \sin(\alpha - \alpha_0) \theta}{(\chi_1 - 1) \cdot 2\pi \cdot \sqrt{K_0^2 - 1}} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{|x - b| \sqrt{a^2 - x^2}}; \\ \sigma_y^{(m)}(\alpha, (-1)^{m+1} \pi) &= \frac{K_3 \cdot P \cdot \cos(\alpha - \alpha_0) \theta}{2\pi \cdot \sqrt{2 \cdot (K_0 + 1)}} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{(x - b) \sqrt{x^2 - a^2}} \quad (12) \\ \tau_{xy}^{(m)}(\alpha, (-1)^{m+1} \pi) &= \frac{K_4 \cdot P \cdot \sin(\alpha - \alpha_0) \theta}{2\pi \cdot \sqrt{2 \cdot (K_0 - 1)}} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{(x - b) \sqrt{x^2 - a^2}} \quad (m=1, 2) \end{aligned}$$

Во втором случае –

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(1)}(\alpha, \pi) &= -\frac{K_4 (\chi_1 + 1) \cdot P \cdot \sin(\alpha - \alpha_0) \theta}{2\pi (\chi_1 - 1) \cdot \sqrt{K_0^2 - 1}} \cdot \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{|b - x| \sqrt{x^2 - a^2}} \\ \sigma_y^{(m)}(\alpha, 0) &= -\frac{K_3 \cdot P \cdot \cos(\alpha - \alpha_0) \theta}{2\pi \cdot \sqrt{2(K_0 + 1)}} \cdot \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{(b - x) \sqrt{a^2 - x^2}} \quad (13) \\ \tau_{xy}^{(m)}(\alpha, 0) &= -\frac{K_4 \cdot P \cdot \sin(\alpha - \alpha_0) \theta}{2\pi \cdot \sqrt{2 \cdot (K_0 - 1)}} \cdot \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{(b - x) \sqrt{a^2 - x^2}} \quad (m=1, 2) \end{aligned}$$

где

$$K_3 = \frac{\mu(\chi_2 + 1)[\chi_1 + 1 + \mu(\chi_2 + 1)]}{(\mu + \chi_1)(\mu\chi_2 + 1)}, \quad K_4 = \frac{\mu(\chi_2 + 1)[\chi_1 - 1 - \mu(\chi_2 - 1)]}{(\mu + \chi_1)(\mu\chi_2 + 1)}$$

$$K_1 = (\chi_1 + \mu)(1 + \mu\chi_2), \quad K_2 = \mu^2(\chi_2^2 + 1) + \mu(\chi_1 + 1)(\chi_2 + 1) + 4\mu\chi_1 \frac{\chi_2 - 1}{\chi_1 - 1} - 2\chi_1$$

$$K_0 = \frac{K_2}{2K_1}, \quad \theta = \frac{1}{\pi} \ln \left( \sqrt{\frac{K_0 + 1}{2}} + \sqrt{\frac{K_0 - 1}{2}} \right), \quad \alpha - \alpha_0 = \ln \left| \frac{(a+x)(a-b)}{(a-x)(a+b)} \right| \quad (14)$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Ленинград: Наука, 1968. 401с.
2. Попов Г.Я. Конструкция упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подключений. М.: Наука, 1982. 344с.
3. Черепанов Г.П. Механика разрушения композиционных материалов. М.: Наука, 1983. 296с.
4. Акопян В.Н. Об одной смешанной задаче для составной плоскости, ослабленной трещиной. //Изв. НАН Армении. Механика. 1995. Т.48. №48. С.57-65.
5. Даштоян Л.Л. Об одной смешанной задаче для составной плоскости с двумя полубесконечными трещинами. //Мат. XII респ. конф. мол. уч. «Механика», Ереван: 2003. С.78-82.
6. Арутюнян Л.А. Плоская задача составной плоскости с трещинами. //Межд. науч.-техн. конф. «Архит. и строит.». 2008. Ереван, С.34-37.

### Сведения об авторах:

**Арутюнян Левон Арсенович,**

к.ф.-м.н.; Институт механики НАН РА

**Адрес:** 0019, Ереван-19, пр. М.Баграмяна, 24/2; **тел.:** 099-67-57-47

**Торосян Давид Рубенович,**

к.ф.-м.н.; Университет им Мовсеса Хоренаци

**Адрес:** Ереван, Теряна, 105; **тел.:** 077-08-44-86

# ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНАЯ ПОЛЗУЧЕСТЬ, ПОВРЕЖДЁННОСТЬ И ДЛИТЕЛЬНАЯ ПРОЧНОСТЬ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

*Арутюнян Р.А.  
Россия*

В работах Г. Хоффа, Л.М. Качанова, Ю.Н. Работнова при формулировке взаимосвязанных уравнений ползучести, повреждённости и длительной прочности принимается, в частности, условие несжимаемости. При таком подходе прогнозирование деформационных и прочностных процессов металлических материалов в условиях высокотемпературной ползучести нельзя считать вполне корректным. Данное противоречие можно преодолеть, если учитывать закон сохранения массы, а в качестве параметра повреждённости рассматривать необратимое изменение плотности или объёма материала. Учитывая эти положения, в работе сформулированы взаимосвязанные уравнения повреждённости и ползучести для сжимаемой среды. Предложенный подход устраняет противоречивые предпосылки, заложенные в концепции Качанова-Работнова по прогнозированию деформационных процессов, протекающих в металлических материалах в условиях длительного воздействия относительно малых напряжений и высоких температур.

В инженерной практике серьёзное внимание на явление ползучести стали обращать в начале двадцатого века в связи с массовыми аварийными разрушениями котлов, паровых и газовых турбин и т.д., работающих в условиях заметной ползучести. В сороковых-пятидесятых годах прошлого столетия были начаты длительные испытания на разрушение при ползучести в различных странах (США, Германии, СССР, Японии).

На практике часто используются эмпирические критерии длительной прочности в виде степенной или экспоненциальной зависимости между временем до разрушения  $t_p$  и напряжением  $\sigma$

$$t_p = B\sigma^{-b} \quad (1)$$

$$t_p = C \exp(-\beta\sigma) \quad (2)$$

где  $B$ ,  $b$ ,  $C$ ,  $\beta$  – постоянные. Критерии (1) и (2) описывают ограниченный участок кривых длительной прочности. Для более полного описания опытных кривых длительной прочности используется общая эмпирическая формула

$$t_p = \psi(\sigma, T) \exp(-\beta\sigma) \quad (3)$$

Участки вязкого и хрупкого разрушения на кривой длительной прочности определяют два предельных состояния металлических материалов, первое, близкое к вязкому течению, реализуется при воздействии относительно больших напряжений и высоких температур. Другой предельный случай реализуется при длительном воздействии малых напряжений и высоких температур. В этих условиях металлические материалы охрупчиваются [1]

(эффект тепловой хрупкости). В результате, например, некоторые жаропрочные материалы разрушаются при длительных испытаниях с удлинением около одного процента. В связи с инженерными приложениями проблема ползучести и длительной прочности стала предметом многочисленных исследований методами физики, материаловедения, механики. Далее, основное внимание будет уделено механическим методам решения этой проблемы, основоположниками которых являются Хофф, Качанов и Работнов.

Критерий вязкого разрушения был сформулирован Хоффом в 1953 г. [2]. Решается задача о растяжении цилиндрического стержня в условиях ползучести заданной нагрузкой  $P$ . Принимается степенной закон ползучести Нортон и условие несжимаемости  $l_0 F_0 = l F$  ( $F_0, l_0$  – начальные,  $F, l$  – текущие площадь поперечного сечения и длина стержня). Считается, что в момент разрушения деформация стремится к бесконечности и из решения уравнения Нортон следует критерий вязкого разрушения Хоффа:

$$t_p^6 = \frac{I}{mB\sigma_0^m}, \quad (4)$$

где  $m, B$  – постоянные,  $\sigma_0 = P/F_0$ .

Критерий чисто хрупкого разрушения был сформулирован Л.М. Качановым в 1958 г. [3] и Работновым в 1959 г. [4] и 1963г. [5]. Вводились параметры сплошности  $\psi$  (Л.М. Качанов) и параметр поврежденности  $\omega = 1 - \psi$  (Ю.Н. Работнов). Считается, что  $1 \geq \psi \geq 0$  (соответственно,  $0 \leq \omega \leq 1$ ) и что моменту  $\psi = 0$  ( $\omega = 1$ ) соответствует предельное состояние, т.е. переход от скрытого к непосредственно наблюдаемому разрушению. Согласно этим работам параметр поврежденности определяется с помощью кинетического уравнения

$$\frac{d\omega}{dt} = A\sigma^n = A \left( \frac{\sigma_0}{1-\omega} \right)^n \left( \frac{F_0}{F} \right)^n \quad (5)$$

где  $A, n$  – постоянные.

Принимая предположение  $F \approx F_0$  и решая уравнение (5) при начальном условии  $t = 0, \omega = 0$  получим:

$$\omega = 1 - \left[ 1 - A(n+1)\sigma_0^n t \right]^{1/(n+1)} \quad (6)$$

Время чисто хрупкого разрушения следует из (6) при условии  $\omega = 1$

$$t_p^x = \frac{I}{(n+1) \cdot A\sigma_0^n} \quad (7)$$

Далее считаем, что необратимое изменение объёма (разрыхление по терминологии В.В. Новожилова [6]) или плотности [7] материала является основной характеристикой повреждённости, а параметр  $\omega$  определяется соотношением  $\omega = 1 - \rho / \rho_0$ , где  $\rho_0$  – начальная,  $\rho$  – текущая плотность. В начальном состоянии  $\rho = \rho_0$ ,  $\omega = 0$ , в момент разрушения  $\rho \rightarrow 0$   $\omega = 1$ , таким образом, параметр  $\omega$  изменяется в пределах  $0 \leq \omega \leq 1$ . Принимается соотношение Нортона, которое с учётом закона сохранения массы  $\rho_0 l_0 F_0 = \rho l F$ , записывается в виде

$$\frac{l}{l_0} \frac{dl}{dt} = B \sigma_0^m \left( \frac{l}{l_0} \right)^m (1 - \omega)^m \quad (8)$$

Следуя Качанову-Работнову, введённый нами параметр повреждённости определяем кинетическим уравнением (5). Принимая  $F \approx F_0$  и начальное условие  $t = 0$ ,  $\omega = 0$ , получим решение этого уравнения в виде:

$$\omega = 1 - \rho / \rho_0 = 1 - \left[ 1 - A(n+1) \sigma_0^n t \right]^{1/(n+1)} \quad (9)$$

Принимая условие разрушения  $t = t_*^{\delta}$ ,  $\omega = 1$ , из (9) следует критерий чисто хрупкого разрушения Качанова-Работнова в виде (7).

Внося (9) в уравнение (8) и принимая начальное условие  $t = 0$ ,  $\varepsilon = 0$ , из решения уравнения (8) получим соотношение для деформации ползучести

$$\varepsilon = \frac{1}{m} \ln \left\{ 1 + \frac{t_*^{\delta}(n+1)}{t_*^{\delta}(m+n+1)} \left[ \left( 1 - \frac{t}{t_*^{\delta}} \right)^{\frac{m+n+1}{n+1}} - 1 \right] \right\}^{-1} \quad (10)$$

Предложенный нами параметр повреждённости имеет ясный физический смысл и описывает закономерности изменения плотности и, как показывают результаты многочисленных опытов [8-15], кривые изменения плотности, полученные в процессе ползучести для различных металлических материалов (магний, медь, алюминий, жаропрочные сплавы и др.) полностью соответствуют теоретическому решению (9), показанному на рис.1.

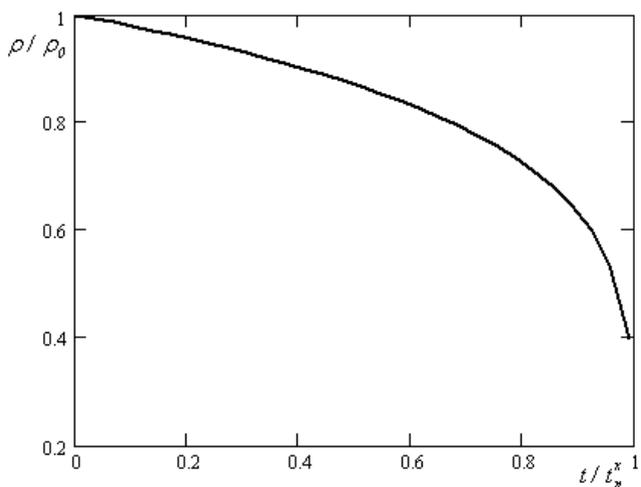


Рис. 1. Кривая изменения плотности в процессе ползучести согласно соотношению (9).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-00594).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Р.А. Проблема охрупчивания в механике материалов. // Вестн. С.-Петербург. ун-та. 2009. сер. 1. вып. 1. С. 54-57.
2. Hoff N.J. The necking and rupture of rods subjected to constant tensile loads // Jour.appl.mech. 1953. vol. 20. № 1. P. 105-108.
3. Качанов Л.М. О времени разрушения в условиях ползучести // Изв. АН СССР. ОТН. 1958. №8. С. 26-31.
4. Работнов Ю.Н. О механизме длительного разрушения // Вопросы прочности материалов и конструкций. М.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 5-7.
5. Работнов Ю.Н. О разрушении вследствие ползучести // ПМТФ. 1963. № 2. С.113-123.
6. Новожилов В.В. О пластическом разрыхлении // Прикладная математика и механика. 1965. № 4. С.681-689.
7. Арутюнян Р.А. Проблема деформационного старения и длительного разрушения в механике материалов. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2004. 252с.

8. Ratcliffe R.T., Greenwood G.W. Mechanism of cavitation in magnesium during creep // *Phil. Mag.* 1965. vol. 12. P. 59-69.
9. Hanson D., Wheller M. The deformation of metals under prolonged loading. Part 1. The flow and fracture of aluminum // *The Journal of the Institute of Metals.* 1931. vol. 45. P. 229-264.
10. Boethner R.C, Robertson W.D. A study of the growth of voids in copper during the creep process by measurement of the accompanying change in density // *Trans. of the Metallurg. Society of AIME.* 1961. vol. 221. № 3. P. 613-622.
11. Beghi C., Geel C., Piatti G. Density measurements after tensile and creep tests on pure and slightly oxidised aluminium // *J. Mat. Sci.* 1970. vol. 5. № 4. P. 331-334.
12. Brathe L. Macroscopic measurements of creep damage in metals // *Scand. J. Metal.* 1978. vol. 7. № 5. P. 199-203.
13. Woodford D.A. Density changes during creep in nickel // *Metal science journal.* 1969. vol. 3. № 11. P. 234-240.
14. Куманин В.И., Ковалева Л.А., Алексеева С.В. Долговечность металла в условиях ползучести. М.: *Металлургия*, 1988. 223с.
15. Bowring P., Davies P.W., Wilshire B. The strain dependence of density changes during creep // *Metal science journal.* 1968. vol. 2. № 9. P.168-171.

**Сведения об авторе:**

**Арутюнян Роберт Ашотович** – профессор, ведущий научный сотрудник, математико-механический факультет, Санкт-Петербургский государственный университет, тел.: + 7 (812) 5266591, E-mail: [Robert.Arutyunyan@paloma.spbu.ru](mailto:Robert.Arutyunyan@paloma.spbu.ru)

# ВОЛНЫ НА ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ

**Багдоев А.Г., Шекоян А.В.**

*Армения*

Исследовано распространение волн по неровной свободной поверхности, на которую падают продольные волны. Показано, как задача может быть сведена к проблеме колебаний ровной, но несвободной поверхности среды, где в выражениях для нагрузок фигурирует функция неровной границы. Показано, что неровности приводят к появлению релеевских волн. Проанализирован случай горы и периодической граничной функции поверхности. Получены формулы колебаний поверхности, дающие связь между смещением поверхности, волновыми параметрами, величинами, характеризующими поверхность. Показано существенное влияние даже малой неоднородности на движение поверхности.

Пусть имеется полупространство с неровной границей. На некоторой глубине образуется упругая волна, которая распространяется до поверхности полупространства, заставляя его колебаться.

Предполагается, что среда изотропна, однородна. Интенсивность волны мала, так что можно пользоваться линейной теорией. Задача решается для двумерного случая.

Уравнение границы поверхности задаётся функцией  $x_3 = \varphi(x_1)$ . Твёрдая среда занимает полупространство  $x_3 > \varphi$ . Координатная система выбирается так, чтобы ось  $x_3$  была направлена в глубь среды, а ось  $x_1$  – вдоль невозмущённой плоской границы.

Уравнение движения упругой среды в потенциалах сводится к двум волновым уравнениям для продольной и поперечной волны [1,2]. После отделения множителей  $\exp(i\omega t)$  в вышеуказанных волновых уравнениях получим следующие уравнения:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} + k_1^2 \Phi = 0. \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_3^2} + k_2^2 \Psi = 0. \quad (2)$$

На поверхности  $x_3 = \varphi(x_1)$  нормальные и касательные напряжения – нулевые

$$\sigma_{nn} = \sigma_{sn} = 0 \text{ при } x_3 = \varphi(x_1), \quad (3)$$

где  $\sigma_{nn}$  – нормальное, а  $\sigma_{sn}$  – касательные напряжения к поверхности  $x_3 = \varphi(x_1)$ . Ограничимся рассмотрением случая, когда падающая волна

продольная ( $P$ ). Предполагается, что наклон кривой  $x_3 = \varphi(x_1)$  по отношению к оси  $x$  мал, т.е.  $\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right| \ll 1$ , кроме того, по отношению к характерной длине волны, глубина шероховатости мала, т.е.  $k_1 \varphi \ll 1 (i = 1, 2)$ .

Проблема будет исследована методом возмущения граничного условия, которое в нашем случае заключается в следующем. По малому параметру граничные условия (3) разлагаются в ряд при  $x_3 = 0$  и последовательно решается ряд задач. В качестве нулевого приближения берётся случай плоской свободной границы, когда

$$\sigma_{31}^{(0)} = \sigma_{33}^{(0)} = 0. \quad (4)$$

В первом приближении берутся следующие члены разложения, и аналогично работам [2-4], можно показать, что напряжения  $\sigma_{31}^{(1)}, \sigma_{33}^{(1)}$ , отнесённые к плоской поверхности ( $x_3 = 0$ ) и записанные через напряжения нулевого приближения, имеют вид:

$$\sigma_{31}^{(1)}(x_1, 0) = -\frac{\partial \sigma_{33}^{(0)}(x_1, 0)}{\partial x_3} \varphi(x_1), \quad (5)$$

$$\sigma_{31}^{(1)}(x_1, 0) = -\frac{\partial \sigma_{33}^{(0)}(x_1, 0)}{\partial x_3} \varphi(x_1) - \sigma_{11}^{(0)}(x_1, 0) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}. \quad (6)$$

Итак, в первом приближении уравнения (1) и (2) следует решать с граничными условиями (5) и (6), которые соответствуют плоской, но несвободной границе. Силы, действующие на плоскость  $x_3 = 0$ , соответствуют правым частям уравнений (5) и (6), в которые входит функция границы  $\varphi(x_1)$ . Мы будем ограничиваться первым приближением.

В нулевом приближении следует решать уравнения (1) и (2) с граничными условиями (4). Решение ищется в виде интеграла Фурье следующего вида:

$$\Phi = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} [A_{01} \exp(iv_1) + B_{01} \exp(iv_2)] dk \quad (7)$$

$$\Psi = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} B_{02} \exp(iv_3) dk, \quad (8)$$

где  $v_1 = kx_1 + k_2x_3$ ,  $v_2 = kx_1 - k_2x_3$ ,  $v_3 = kx_1 - k_3x_3$

Подставив решения (7) и (8) в уравнения (1) и (2), получим дисперсионные соотношения и при подстановке в граничные соотношения (4) получим два алгебраических уравнения, связывающие амплитуды падающей и отражённых волн. Решая эту систему уравнений, можно найти связи между амплитудами и  $B_{01}$ , и  $B_{02}$  с  $A_{01}$ . Подставляя решения (7) и (8) в уравнениях для смещений поверхностных точек ( $x_3 = 0$ ), предполагая, что амплитуда падающей волны имеет вид дельта-функции Дирака, получим:

$$u_{01}(x_1, 0) = \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial x_1} - \frac{\partial \Psi^{(0)}}{\partial x_3} = \quad (9)$$

$$= 4ik_0x_2^2R^{-1}(k_0)D_{01}D_{02}A'_{01} \exp[i(k_0x_1 - \omega t)]$$

$$u'_{03}(x_1, 0) = 2ix_2^2R^{-1}(k_0)D_{01}D_{03} \exp[i(k_0x_1 - \omega t)], \quad (10)$$

где  $k_0$  – компонента на ось  $x_1$  волнового числа падающей волны,  $R(k)$  – функция Рэлея. Остальные величины – постоянные, связывающие различные комбинации волновых чисел. Из (9) и (10) следует, что при отражении волн от плоской свободной поверхности волны Рэлея не появляются.

При решении первого приближения выражения (7) и (8), где, как и всюду в этом приближении, нулевые индексы не следует писать, подставляем в уравнения (1) и (2). В результате получим те же дисперсионные соотношения, полученные при нулевом приближении.

Решения (7) и (8) подставляем в граничные условия (5), (6), выполняя те же математические расчёты, как и в нулевом приближении, в итоге получим интегральные выражения для поверхности точек ( $x_3 = 0$ )  $u_1^{(1)}$  и  $u_3^{(1)}$ .

Ограничиваясь случаем распространения волны в сторону  $x_1 > 0$ , выполняя контурное интегрирование, для  $u_1^{(1)}$  получим следующее выражение:

$$u_1^{(1)} = -i(2\pi)^{1/2} [\mu R'(k_R)]^{-1} [2k_R G(k_0, k_R) (D_{R1} D_{R2} - D_{R3}) -$$

$$- x_2^2 D_{R1} H(k_0, k_R)] \exp[i(k_R x_1 - \omega t)] - ix_2^2 \mu^{-1} (2\pi)^{-1/2} \left\{ \int_{x_1}^{x_2} [R^{-1}(k) -$$

$$- R_1^{-1}(k)] [D_2 H(k) - x_2^{-2} k G(k) (4D_1 D_2 - D_3)] \exp(ikx_1) dk +$$

$$+ 2 \int_{-\infty}^{x_1} R^{-1}(k) H(k) D_2 \exp(ikx_1) dk \right\} \exp(-\omega t), \quad (11)$$

где  $R'_1 = \frac{dR}{dk}$ ,  $k_R$  – корни уравнения  $R(k) = 0$ , они соответствуют релеевскому волновому числу, остальные величины, как и в нулевом приближении, связывают различные комбинации волновых чисел, в том числе и  $k_R$ . Функции  $G(k)$  и  $H(k)$  есть интегральные соотношения, где в подынтегральных выражениях фигурирует функция  $\varphi(x_1)$ . Аналогичное выражение получается также и для  $u_3^{(1)}$ , которое из-за громоздкости не приводим. В формуле (11) при  $k = k_R$  есть волны Рэля, обусловленные неровностями поверхности. Таким образом, получен новый эффект: шероховатость приводит к появлению волн Рэля. Интегральные соотношения в (11) дают новые продольные и поперечные волны вдоль границы, которые в плоском случае не появляются.

Рассмотрим два конкретных случая граничной функции  $\varphi$ . Первый, когда  $\varphi$  имеет вид одиночной горы, и второй:  $\varphi$  – периодическая функция.

Одиночная гора аппроксимируется в виде гауссовской функции

$$\varphi(x_1) = (2\pi)^{1/2} d \exp(-qx_1^2), \quad (12)$$

где  $d$  и  $q$  – постоянные, которые берутся таким образом, чтобы выполнялось ограничение на  $\varphi$ , о котором говорилось выше, а также

условие  $\frac{d}{\lambda} \ll \max \left| \frac{d\varphi}{dx_1} \right|$  или  $\lambda \gg l$ , где  $\lambda$  и  $l$  – соответственно, длина

волны и основания горы. Интегрируя функции  $G(k)$  и  $H(k)$ , учитывая вид функции (12), подставляя в выражения в (11), переходя к безразмерным величинам, получим следующую формулу:

$$u = \text{Re} [u_R \exp(ik_R x - i\omega t) + u_2 \exp(-i\omega t)]$$

Компьютерные расчёты показывают, что при  $\xi = qk^{-2} = 2$  (острая гора) ординаты амплитуд в несколько раз превосходят значения при  $\xi = 0,1$ , соответствующие пологой горе.

Во втором случае  $\varphi(x_1)$  периодическая функция, которую можно представить в виде ряда Фурье

$$\varphi(x_1) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \varphi_m \exp(imgx_1), \quad (13)$$

где  $g = 2\pi\Lambda^{-1}$ ,  $\Lambda$  – длина волны функции  $\varphi(x_1)$ . Величины  $G(k)$  и  $H(k)$  легко вычисляются и выражаются через дельта-функции Дирака с аргументом  $mg + k_0 - k$ , тогда интегралы легко интегрируются и в итоге получается:

$$u_1^{(1)} = u_{01} + i\mu^{-1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R^{-1}(k'_m) \varphi_m \left\{ \chi_2^2 k m_2 \left[ T(k_0) + igM(k_0)m \right] + C(k_0)k'_m (2k_{m_1}k_{m_2} - D_m) \right\} \exp \left[ i(k'_m x_1 - \omega t) \right], \quad (14)$$

где  $k'_m = k_0 + mg$ ,  $k_{m_1}$ ,  $k_{m_2}$  и  $D_m$  – некоторые постоянные,  $C(k_0)$ ,  $T(k_0)$  и  $M(k_0)$  – известные функции, которые получаются из нулевого решения.

Из (14) видно, что имеет место сдвиг на  $\frac{\pi}{2}$  и растяжения фаз в добавках за счёт неровностей по сравнению с решением ровной и свободной границ. В случае  $k'_m \neq k_R$  слагаемые, соответствующие волнам Рэля в (14), отсутствуют, так как  $H(k_0, k_R)$  и  $G(k_0, k_R)$  содержат множители  $\delta(k'_m - k_m)$ , которые отличны от нуля лишь при  $k'_m = k_R$ . Последний является исключительным случаем и для него  $u_1^{(1)} = \infty$ , то есть имеет место резонанс.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872с.
2. Амбарцумян В.А., Шекоян А.В. Распространение волн в полупространстве с неровной границей. //Изв.АН АрмССР. Механика. 1991.Т.44. №3. С.18-25.
3. Бреховских А.М. О распространении поверхностных релеевских волн вдоль неровной поверхности упругого тела. //Акустический журнал. 1959.Т.5. №3.
4. Викторов И.А. Звуковые поверхности волны в твёрдых телах. М.: Наука, 1981. 286с.

#### Сведения об авторе:

**Shekoyan Ashot** Senior scientist

**Phone:** 077-569-564; **E-mail:** [ashotshek@mechins.sci.am](mailto:ashotshek@mechins.sci.am)

# ОБ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ АНИЗОТРОПНОЙ ДВУХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ НЕПОЛНОМ КОНТАКТЕ МЕЖДУ СЛОЯМИ

*Баласаян Е.С., Петросян Г.А.*  
*НКР*

Обсуждается вопрос определения напряжённо-деформированного состояния в трёхмерной задаче для анизотропной двухслойной пластинки, на лицевых плоскостях которой заданы смешанные краевые условия теории упругости, при неполном контакте между слоями.

В работе [1] асимптотическим методом построена приближённая теория изгиба пластин из изотропных материалов. Классические статические краевые задачи анизотропных полос, пластин и оболочек асимптотическим методом решены в [2]. Асимптотический метод использован для решения второй и смешанных краевых задач в [3]. В [4] тем же методом определено напряжённо-деформированное состояние слоистой пластинки, слои которой обладают анизотропией общего вида. Смешанная краевая задача для анизотропной однослойной пластинки решена в [5], а для двухслойной пластинки – в [7].

Рассматривается задача теории упругости для двухслойной анизотропной пластинки:  $\Omega = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, -h_2 \leq z \leq h_1, h_1 + h_2 \ll a\}$ .

Предполагается, что толщины слоёв равны  $h_k$ , а коэффициенты упругости –  $a_{ij}^{(k)}$ ,  $k$  – номер слоя ( $k = 1, 2$ ). Координатную плоскость расчёта  $Oxy$  расположим на плоскости раздела слоёв.

На лицевых плоскостях пластинки заданы следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}^{(2)} = \sigma_{xz}^-(x, y), \sigma_{yz}^{(2)} = \sigma_{yz}^-(x, y), w^{(2)} = \varepsilon^{-1} w^-(x, y) \quad \text{при } z = -h_2 \\ u^{(1)} = \varepsilon^{-1} u^+(x, y), v^{(1)} = \varepsilon^{-1} v^+(x, y), \sigma_z^{(1)} = \varepsilon^{-1} \sigma_z^+(x, y) \quad \text{при } z = h_1. \end{aligned} \quad (1.1)$$

На плоскости контакта слоёв  $z = 0$  заданы следующие условия неполного контакта:

$$w^{(1)} = w^{(2)}, \sigma_{xz}^{(1)} = \sigma_{xz}^{(2)} = f_1(x, y), \sigma_{yz}^{(1)} = \sigma_{yz}^{(2)} = f_2(x, y), \sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{(2)}. \quad (1.2)$$

Условия на боковой поверхности будем считать пока произвольными.

В зависимости от выбранной модели контакта, функции  $f_k(x, y)$  ( $k = 1, 2$ ) считаются заданными. В частности, случаю  $f_k(x, y) \equiv 0$ , ( $k = 1, 2$ ) соответствует отсутствие силы трения между слоями.

Для решения поставленной задачи будем исходить из трёхмерных уравнений теории упругости [2-5]. Вводя безразмерную координатную

систему  $\xi = x/l, \eta = y/l, \zeta = z/h$  и безразмерные перемещения  $U = u/l, V = v/l, W = w/l$ , получим систему, которая содержит малый геометрический параметр  $\varepsilon = h/l$ , где  $l = \max(a, b)$ . Общее решение полученной системы состоит из решений внутренней задачи и типа пограничного слоя. Для решения внутренней задачи используется асимптотический метод интегрирования и неизвестные напряжения и перемещения представляются в виде суммы [1-4]:

$$Q^{(k)} = \varepsilon^{q_k} \sum_{s=0}^S \varepsilon^s Q^{(k,s)}, \quad (1.3)$$

где  $Q^{(k)}$  – любое из напряжений или безразмерных перемещений.

Значения для  $q_k$  подбираются таким образом, чтобы получить непротиворечивую систему. Для рассматриваемой задачи эта цель достигается при следующих значениях  $q_k$  [5,7]:

$$q_k = -1 \text{ для } \sigma_x^{(k)}, \sigma_y^{(k)}, \sigma_{xy}^{(k)}, \sigma_z^{(k)}, U^{(k)}, V^{(k)}, W^{(k)}, q_k = 0 \text{ для } \sigma_{xz}^{(k)}, \sigma_{yz}^{(k)} \quad (1.4)$$

Подставляя (1.3), с учётом (1.4), в преобразованные уравнения теории упругости и интегрируя полученную систему по  $\zeta$ , будем иметь:

$$\sigma_z^{(k,s)} = \sigma_z^{*(k,s)} + \sigma_{z0}^{(k,s)}, \quad \sigma_x^{(k,s)} = \sigma_x^{*(k,s)} + \tau_{x0}^{(k,s)} + a_3 \sigma_{z0}^{(k,s)}, \quad (x, y, a, b), \\ U^{(k,s)} = u^{*(k,s)} + u^{(k,s)}(U, V, W), \quad (1.5)$$

$$\sigma_{xy}^{(k,s)} = \sigma_{xy}^{*(k,s)} + \tau_{xy0}^{(k,s)} + c_3^{(k)} \sigma_{z0}^{(k,s)}, \quad \sigma_{xz}^{(k,s)} = \sigma_{xz}^{*(k,s)} + \tau_{xz1}^{(k,s)} \zeta + \sigma_{xz0}^{(k,s)}, \quad (x, y)$$

где

$$\tau_{x0}^{(k,s)} = B_{11}^{(k)} \varepsilon_1^{(k,s)} + B_{12}^{(k)} \varepsilon_2^{(k,s)} + B_{16}^{(k)} \omega^{(k,s)}, \quad (1, 2; x, y), \\ \tau_{xy0}^{(k,s)} = B_{16}^{(k)} \varepsilon_1^{(k,s)} + B_{26}^{(k)} \varepsilon_2^{(k,s)} + B_{66}^{(k)} \omega^{(k,s)} \quad (1.6)$$

$$\tau_{xz1}^{(k,s)} = - \left( \frac{\partial \tau_{x0}^{(k,s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{xy0}^{(k,s)}}{\partial \eta} + a_3^{(k)} \frac{\partial \sigma_{z0}^{(k,s)}}{\partial \xi} + c_3^{(k)} \frac{\partial \sigma_{z0}^{(k,s)}}{\partial \eta} \right), \quad (x, y; \xi, \eta; a, b)$$

$$\varepsilon_1^{(k,s)} = \frac{\partial u^{(k,s)}}{\partial \xi}, \quad \varepsilon_2^{(k,s)} = \frac{\partial v^{(k,s)}}{\partial \eta}, \quad \omega^{(k,s)} = \frac{\partial u^{(k,s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{(k,s)}}{\partial \xi}.$$

Известные величины  $B_{ij}^{(k)}, a_i^{(k)}, b_i^{(k)}, c_i^{(k)}$  выражаются через упругие постоянные  $a_{ij}^{(k)}$  [2-6].

Неизвестные функции интегрирования  $\sigma_{xz0}^{(k,s)}$ ,  $\sigma_{yz0}^{(k,s)}$ ,  $\sigma_{z0}^{(k,s)}$ ,  $u^{(k,s)}$ ,  $v^{(k,s)}$ ,  $w^{(k,s)}$  определяются из условий (1.1) и (1.2).

Удовлетворив условиям неполного контакта слоёв (1.2), получим:

$$\begin{aligned} \sigma_{z0}^{(1,s)} &= \sigma_{z0}^{(2,s)}, \quad \sigma_{xz0}^{(1,s)} = \sigma_{xz0}^{(2,s)} = f_1^{(s)}(\xi, \eta), \\ w^{(1,s)} &= w^{(2,s)}, \quad \sigma_{yz0}^{(1,s)} = \sigma_{yz0}^{(2,s)} = f_2^{(s)}(\xi, \eta). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Величины со звездочками, входящие в выражения (1.5), известны для каждого приближения  $s$  и определяются с помощью предыдущих приближений [7]. Предполагается, что  $Q^{(k,s-i)} \equiv 0$ , если  $s < i$ .

Удовлетворив поверхностным условиям (1.1), определим следующие неизвестные функции интегрирования:

$$\begin{aligned} u_0^{(1,s)} &= u^{+(1,s)}(\xi, \eta, \zeta) - u^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1), \quad (u, v) \\ w_0^{(1,s)} &= w^{-(2,s)}(\xi, \eta, \zeta) - w^{*(2,s)}(\xi, \eta, \zeta_2), \\ \sigma_{z0}^{(1,s)} &= \sigma_z^{+(1,s)}(\xi, \eta, \zeta) - \sigma_z^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1), \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xz0}^{(1,s)} &= L_{11} \left( C_{ij}^{(2)} \right) u^{+(1,s)} + L_{12} \left( C_{ij}^{(2)} \right) v^{+(1,s)} + \left( a_3^{(2)} \frac{\partial \sigma_z^{+(1,s)}}{\partial \xi} + c_3^{(2)} \frac{\partial \sigma_z^{+(1,s)}}{\partial \eta} \right) \zeta_2 - \\ &- L_{11} \left( C_{ij}^{(2)} \right) u^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1) + L_{12} \left( C_{ij}^{(2)} \right) v^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1) + \\ &+ \left( a_3^{(2)} \frac{\partial \sigma_z^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1)}{\partial \xi} + c_3^{(2)} \frac{\partial \sigma_z^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1)}{\partial \eta} \right) \zeta_2 + \\ &+ \sigma_{xz}^{-(2,s)} + \sigma_{xz}^{*(2,s)}(\xi, \eta, \zeta_2), \quad (x, y; 1, 2; u, v; \xi, \eta; a, b) \end{aligned}$$

а также получим систему дифференциальных уравнений с частными производными для определения  $u^{(2,s)}$ ,  $v^{(2,s)}$ .

$$\begin{aligned} L_{11} \left( C_{ij}^{(2)} \right) u^{(2,s)} + L_{12} \left( C_{ij}^{(2)} \right) v^{(2,s)} + f_1^{(s)} &= p_1^{(s)} \\ L_{12} \left( C_{ij}^{(2)} \right) u^{(2,s)} + L_{22} \left( C_{ij}^{(2)} \right) v^{(2,s)} + f_2^{(s)} &= p_2^{(s)} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Здесь

$$p_1^{(s)} = \sigma_{xz}^{-(2,s)} + \left( a_3^{(2)} \frac{\partial \sigma_z^{+(1,s)}}{\partial \xi} + c_3^{(2)} \frac{\partial \sigma_z^{+(1,s)}}{\partial \eta} \right) \zeta_2 -$$

$$-\left( a_3^{(2)} \frac{\partial \sigma_z^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1)}{\partial \xi} + c_3^{(2)} \frac{\partial \sigma_z^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1)}{\partial \eta} \right) \zeta_2 - \quad (1.10)$$

$$-\sigma_{xz}^{*(2,s)}(\xi, \eta, \zeta_2), \quad (1, 2; x, y; a, b; \xi, \eta)$$

$$\zeta_1 = h_1/h, \quad \zeta_2 = -h_2/h, \quad C_{ij}^{(k)} = (-1)^{k+1} \zeta_k B_{ij}^{(k)}$$

а  $L_{ij}(C_{ij}^{(k)})$  – известные дифференциальные операторы второго порядка [4].

Рассмотрим случай, когда упругие слои взаимодействуют по закону «сухого» трения Кулона. Тогда

$$\sigma_{xz} = \chi_1 l / h \sigma_z(z=0), \quad \sigma_{yz} = \chi_2 l / h \sigma_z(z=0) \quad (1.11)$$

И, как следствие, получим:

$$f_i^{(s)}(\xi, \eta) = \chi_i f^{(s)}(\xi, \eta), \quad i = 1, 2, \quad (1.12)$$

где

$$f^{(s)} = \sigma_z^{+(1,s)}(\xi, \eta, \zeta) - \sigma_z^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1) \quad (1.13)$$

коэффициенты трения  $\chi_1, \chi_2$  – постоянные величины. В частности, если  $\chi_1$  или  $\chi_2$  равны нулю, то это означает, что отсутствует сила трения между слоями по направлению  $OX$  или  $OY$ . Если одновременно  $\chi_1, \chi_2$  равны нулю, то силы трения отсутствуют по всей плоскости контакта.

Подставив значения  $f_1^{(s)}(\xi, \eta)$ ,  $f_2^{(s)}(\xi, \eta)$  из (1.12), (1.13) в (1.11), получим новую систему дифференциальных уравнений с частными производными для определения  $u^{(2,s)}$  и  $v^{(2,s)}$ :

$$\begin{aligned} L_{11}(C_{ij}^{(2)})u^{(2,s)} + L_{12}(C_{ij}^{(2)})v^{(2,s)} &= \bar{p}_1^{(s)} \\ L_{12}(C_{ij}^{(2)})u^{(2,s)} + L_{22}(C_{ij}^{(2)})v^{(2,s)} &= \bar{p}_2^{(s)}, \end{aligned} \quad (1.14)$$

где

$$\bar{p}_1^{(s)} = p_1^{(s)} - \chi_1 \left( \sigma_z^{+(1,s)}(\xi, \eta, \zeta) - \sigma_z^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1) \right) (1, 2). \quad (1.15)$$

Систему уравнений (1.14), для удобства, преобразуем к одному уравнению четвёртого порядка:

$$\left( L_{11}(C_{ij}^{(2)})L_{22}(C_{ij}^{(2)}) - L_{12}^2(C_{ij}^{(2)}) \right) u^{(2,s)} = L_{22}(C_{ij}^{(2)})\bar{p}_1^{(s)} - L_{12}(C_{ij}^{(2)})\bar{p}_2^{(s)} \quad (1.16)$$

Отметим, что, если в задаче двухслойной пластины при полном контакте между слоями все неизвестные напряжения и перемещения определяются из граничных условий, то при неполном контакте слоёв решение задачи приводится к решению системы уравнений (1.14) [7].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А.Л. Построение приближённой теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости//ПММ. 1962. Т.26. Вып. 4. С.668-686.
2. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 415с.
3. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: Изд-во «Гитутюн» НАН РА, 2005. 468с.
4. Агаловян Л.А., Багдасарян Ю.М., Хачатрян А.М. К определению напряжённо-деформированного состояния слоистых пластин с анизотропией общего вида // Изв. НАН Армении. Механика. 1996. Т.49. №3. С.10-22.
5. Петросян Г.А., Хачатрян А.М. Асимптотическое решение одной смешанной краевой задачи анизотропной пластинки. // Изв. НАН Армении. Механика. 2009. Т.62. № 4. С.65-72.
6. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1967. 268с.
7. Баласанян Е.С., Петросян Г.А. Асимптотическое решение одной смешанной краевой задачи анизотропной двухслойной пластинки. //Сб. научных трудов Международной школы-конф. молодых учёных «Механика» 1–4 октября 2013. Цахкадзор, Армения. С.88-92.

### Сведения об авторах:

**Баласанян Евгения Самвеловна** – преподаватель кафедры математики АрГУ, НКР, Степанакерт, ул. Мхитара Гоша, 5. **Тел.:** (37497) 170620, (37494)970620, **E-mail:** [majvazyan@mail.ru](mailto:majvazyan@mail.ru)

**Петросян Гаянэ Альбертовна** – к.ф.м.н., старший преподаватель кафедры математики АрГУ, НКР, Степанакерт, ул. Мхитара Гоша, 5.

**Тел.:** (374 97)238310, (374 94) 950293, **E-mail:** [gayane-petrosian@mail.ru](mailto:gayane-petrosian@mail.ru)

# КРИТЕРИЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ

*Барсесян В.Р., Барсесян Т.В.*

*Армения*

В работе для задач управления линейными стационарными системами переменной структуры (и со сменой фазового пространства) получены необходимые и достаточные условия (критерия) вполне управляемости. В качестве иллюстраций полученных результатов, приведены примеры конкретных систем, которые на отдельных интервалах времени не вполне управляемы, а в целом эти системы на всем отрезке времени являются вполне управляемыми.

**Введение.** Исследование многих прикладных задач процессов управления сводится к динамическим системам переменной структуры (в частности составным системам, поэтапно меняющимся системам и т.д.). Как в обычных задачах управления, так и в задачах управления динамическими системами переменной структуры принципиальным является вопрос управляемости таких систем.

В [1] приведены достаточные условия управляемости в задаче со сменой фазового пространства. В [2,3] сформулированы необходимые и достаточные условия полной управляемости составной линейной системы (со сменой фазового пространства) и поэтапно меняющейся линейной нестационарной системы. Однако практическое применение указанных условий, даже для стационарных систем, связано с необходимостью построения фундаментальных матриц решений однородных частей систем, дифференциальных уравнений, что неудобно. Поэтому для линейных стационарных систем переменной структуры важным аспектом является выявление условия полной управляемости, выраженное непосредственно через исходные данные системы (т.е. матрицы параметров системы).

В работе для задач управления составной линейной стационарной системой (со сменой фазового пространства) и поэтапно меняющейся линейной стационарной системой получены необходимые и достаточные условия (критерия) вполне управляемости. В качестве иллюстраций полученных результатов, построены примеры конкретных систем, которые на отдельных интервалах времени не вполне управляемы, а в целом эти системы на всём отрезке времени являются вполне управляемыми.

**Критерий управляемости составной линейной стационарной системы.** Рассмотрим управляемую динамическую систему, движение которой на интервале времени  $t_{k-1} \leq t \leq t_k$ ,  $k = 1, \dots, m$  описывается  $n_k$ -мерными линейными дифференциальными уравнениями [2]

$$\dot{x}^{(k)} = A_k x^{(k)} + B_k u^{(k)} \quad (1)$$

Здесь  $x^{(k)}(t) \in R^{n_k}$   $x^{(k)}$  – фазовый вектор системы;  $A_k, B_k$  ( $k = 1, \dots, m$ ) – матрицы параметров системы,  $u^{(k)}(t)$  – управляющее воздействие, соответственно с размерностями  $A_k - (n_k \times n_k)$ ,  $B_k - (n_k \times r_k)$ ,  $u^{(k)}(t) - (r_k \times 1)$ . Предполагается, что заданы промежуточные моменты времени  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = T$ . Преемственность между составными системами (1) при  $k = 1, \dots, m$  (стыковки траекторий) обеспечивается выполнением следующих условий связи [2] в промежуточные моменты времени  $t_k$ , ( $k = 1, \dots, m-1$ )

$$E_k x^{(k)}(t_k) + F_k x^{(k+1)}(t_k) = \beta_k \quad (2)$$

где  $E_k - (n_{k+1} \times n_k)$ -мерные,  $F_k - (n_{k+1} \times n_{k+1})$ -мерные матрицы,  $\beta_k - (n_k \times 1)$ -мерный вектор-столбец. Предполагается, что матрицы  $E_k, F_k$  и векторы  $\beta_k$  известны, а матрицы  $F_k$  имеют обратные матрицы  $F_k^{-1}$ , т.е.  $\det F_k \neq 0$ .

**Определение.** Составная система (1) с промежуточными условиями связи (2) называется вполне управляемой на отрезке времени  $[t_0, T]$ , если для любых начальных  $x^{(1)}(t_0) = x_0^{(1)}$  и конечных  $x^{(m)}(T) = x_T^{(m)}$  состояний можно найти такой набор управлений  $u^{(k)}(t)$ ,  $k = 1, \dots, m$ , чтобы решение  $x^{(k)}(t)$ , начиная из состояния  $x^{(1)}(t_0)$  и удовлетворяя промежуточным условиям связи (2) в момент времени  $t = T$  удовлетворяло условию  $x^{(m)}(T) = x_T^{(m)}$ .

Задача заключается в том, чтобы найти условия, выраженные непосредственно через исходные данные системы (т.е. матрицы параметров системы), при которых динамический объект, описываемый системой (1) с условиями связи (2), будет вполне управляемым.

Доказана следующая теорема.

**Теорема 1.** Линейная стационарная составная система (1) с промежуточными условиями связи (2) вполне управляема на отрезке времени  $t_0 \leq t \leq T$  тогда и только тогда, когда матрица

$$K = \{C_1(B_1, A_1 B_1, \dots, A_1^{p_1-1} B_1), \dots, C_m(B_m, A_m B_m, \dots, A_m^{p_m-1} B_m)\} \quad (3)$$

имеет ранг, равный  $n_m$ , где

$$C_i = (-1)^{m-i} e^{A_m(T-t_{m-1})} F_{m-1}^{-1} W_i^{(m-1)} E_i e^{A_i t_i}, \quad i = 1, \dots, m-1; \quad C_m = e^{A_m T}$$

$$W_i^{(k)} = \prod_{j=1}^{k-i} E_{k+1-j} e^{A_{k+1-j}(t_{k+1-j} - t_{k-j})} F_{k-j}^{-1} \quad (k = 2, 3, \dots, m; j = 1, 2, \dots, k-1),$$

а числа  $p_j$  – кратности собственных значений матрицы  $A_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ).

Матрицу (3) будем называть матрицей управляемости составной системы.

**Следствие 1.** Если все собственные значения матрицы  $A_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) являются простыми, то линейная стационарная составная система (1) с промежуточными условиями связи (2) вполне управляема на отрезке времени  $t_0 \leq t \leq T$  тогда и только тогда, когда матрица управляемости

$$K = \{C_1(B_1, A_1 B_1, \dots, A_1^{n_1-1} B_1), \dots, C_m(B_m, A_m B_m, \dots, A_m^{n_m-1} B_m)\} \quad (4)$$

имеет ранг, равный  $n_m$ .

**Критерий управляемости поэтапно меняющейся линейной стационарной системы.** Рассмотрим управляемый процесс, динамика которого описывается следующими линейными дифференциальными уравнениями:

$$\dot{x} = \begin{cases} A_1 x + B_1 u, & \text{при } t \in [t_0, t_1) \\ A_2 x + B_2 u, & \text{при } t \in [t_1, t_2) \\ \vdots & \\ A_m x + B_m u, & \text{при } t \in [t_{m-1}, T] \end{cases}, \quad (5)$$

где  $x(t) \in R^n$  – фазовый вектор системы,  $A_k, B_k$  ( $k = 1, \dots, m$ ) – матрицы параметров системы (модели объекта),  $u(t)$  – управляющее воздействие, соответственно, с размерностями  $A_k - (n \times n)$ ,  $B_k - (n \times r)$ ,  $u(t) - (r \times 1)$ .

Предполагается, что в заданные промежуточные моменты времени конец движения предыдущего этапа является началом следующего этапа.

**Теорема 2.** Поэтапно меняющаяся линейная стационарная система (5) вполне управляема на отрезке времени  $t_0 \leq t \leq T$  тогда и только тогда, когда матрица

$$K = \{C_1(B_1, A_1 B_1, \dots, A_1^{p_1-1} B_1), \dots, C_m(B_m, A_m B_m, \dots, A_m^{p_m-1} B_m)\} \quad (6)$$

имеет ранг равный  $n$ , где

$$C_j = V(T, t_j) e^{A_j t_j} \quad j = 1, \dots, m.$$

$$V(T, t_j) = \prod_{i=0}^{m-j-1} X_{m-i}[t_{m-i}, t_{m-i-1}] \quad (j = 0, \dots, m-1),$$

а числа  $p_j$  – кратности собственных значений матрицы  $A_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ),  $X_k[t, \tau]$  – нормированная фундаментальная матрица решения однородной части  $k$ -ого уравнения системы (5).

**Следствие 2.** Если все собственные значения матрицы  $A_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) являются простыми, то линейная стационарная система (5) вполне управляема на отрезке времени  $t_0 \leq t \leq T$  тогда и только тогда, когда матрица

$$K = \{C_1(B_1, A_1 B_1, \dots, A_1^{n-1} B_1), \dots, C_m(B_m, A_m B_m, \dots, A_m^{n-1} B_m)\} \quad (7)$$

имеет ранг, равный  $n$ .

**Замечание.** Полученные для составной линейной стационарной системы (1) с промежуточными условиями связи (2), условия вполне управляемости (3) (или (4)) и для поэтапно меняющейся линейной стационарной системы (5) условия (6) (или (7)) являются обобщением известного условия вполне управляемости линейными стационарными системами [4-6]. Действительно, если вместо системы (1)-(2) или (5) рассматривать стационарную систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad t \in [t_0, T],$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$ , а размерности  $A$ ,  $B$  и  $u$  соответственно равны  $(n \times n)$ ,  $(n \times r)$  и  $(r \times 1)$ , то для вполне управляемости этой системы, согласно теоремы 1 (или её следствию), или теоремы 2 (или её следствию) необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы

$$(B, AB, \dots, A^{n-1}B)$$

был равен  $n$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Максимова И.С., Розова В.Н. Достаточные условия управляемости в задаче со сменой фазового пространства. //Вестник ТГУ. 2011. Т.16. Вып. 3. С.742-747.
2. Барсегян В.Р. Конструктивный подход к исследованию задач управления линейными составными системами. //Проблемы управления. 2012. №4. С.11-17.
3. Barseghyan V.R. Control of stage by stage changing linear dynamic systems. //Yugoslav Journal of Operations Research. 2012. Vol.22. № 1. Pp. 31-39.

4. Калман Р. Об общей теории систем управления. //Труды I Конгресса ИФАК. Т.2. М.: Изд-во АН СССР. 1961. С.521-547.
5. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476с.
6. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576с.

**Сведения об авторах:**

**Барсегян Ваня Рафаелович** - доктор физ. мат. наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении, профессор ЕГУ, факультет математики и механики.

Тел.: (091) 20 32 20; **E-mail:** [barseghyan@sci.am](mailto:barseghyan@sci.am)

**Барсегян Тигран Ваняевич** – аспирант кафедры механики, Ереванский государственный университет

**E-mail:** [t.barseghyan@mail.ru](mailto:t.barseghyan@mail.ru)

# О ЗАМЕНЕ БАЗИСА В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ И ВЛИЯНИИ НА СВОЙСТВА УПРАВЛЯЕМОСТИ СОСТАВНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ

*Барсегян Т.В.*

*Армения*

Исследуется замена базиса в пространстве состояний управляемой составной линейной системы. Показано, что одним и тем же входным воздействием соответствуют одинаковые выходные величины исходной и преобразованной составных систем. Доказана, что невырожденные преобразования не влияют на свойство управляемости составной линейной стационарной системы.

**1. Замена базиса в пространстве состояний.** Рассмотрим управляемую динамическую систему, движение которой на интервале времени  $t_{k-1} \leq t \leq t_k$  описывается  $n_k$ -мерными линейными дифференциальными уравнениями [1]

$$\dot{x}^{(k)} = A_k(t)x^{(k)} + B_k(t)u^{(k)} \quad (1.1)$$

Здесь  $x^{(k)}(t) \in R^{n_k}$   $x^{(k)}$  – фазовый вектор системы;  $A_k(t)$ ,  $B_k(t)$  ( $k = 1, \dots, m$ ) – матрицы параметров системы (модели объекта),  $u^{(k)}(t)$  – управляющее воздействие, соответственно, с размерностями  $A_k(t) - (n_k \times n_k)$ ,  $B_k(t) - (n_k \times r_k)$ ,  $u^{(k)}(t) - (r_k \times 1)$ . В общем случае, предполагаем, что элементы матрицы функций  $A_k(t)$ ,  $B_k(t)$  и вектор-столбца  $u^{(k)}(t)$  являются измеримыми ограниченными функциями.

Предполагается, что правые части системы (1.1) таковы, что решение задачи Коши существует и единственно. Предполагается также, что заданы промежуточные моменты времени  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = T$ .

Преемственность между составными системами (1.1) при  $k = 1, \dots, m$  (стыковки траекторий) обеспечивается выполнением следующих условий связи в промежуточные моменты времени  $t_k$ , ( $k = 1, \dots, m - 1$ ):

$$E_k x^{(k)}(t_k) + F_k x^{(k+1)}(t_k) = \beta_k \quad (1.2)$$

где  $E_k - (n_{k+1} \times n_k)$ -мерные,  $F_k - (n_{k+1} \times n_{k+1})$ -мерные матрицы,  $\beta_k - (n_k \times 1)$ -мерный вектор-столбец. Предполагается, что матрицы  $E_k, F_k$

и векторы  $\beta_k$  известны, а матрицы  $F_k$  имеют обратные матрицы  $F_k^{-1}$ , т.е.  $\det F_k \neq 0$ .

Пусть задан выход (уравнение измерительного устройства) рассматриваемой составной системы, который имеет вид

$$y^{(k)}(t) = G_k(t)x^{(k)}(t) \quad (1.3)$$

Здесь  $y^{(k)}$  – известная  $n_k$ -мерная вектор-функция выходных переменных системы (измерения или показания прибора наблюдения);  $G_k(t)$  ( $k = 1, \dots, m$ ) – заданная  $(n_k \times n_k)$ -мерная матрица с вещественными, непрерывными элементами.

Для составной линейной системы (1.1) с условиями связи в промежуточные моменты времени  $t_k$ , ( $k = 1, \dots, m-1$ ) (1.2) и выходом (1.3) рассмотрим невырожденные линейные преобразования фазовых переменных  $\bar{x}^{(k)} = T_k(t)x^{(k)}(t)$ ,

$$(1.4)$$

где  $T_k(t)$  –  $(n_k \times n_k)$ -мерные матрицы и  $\det T_k(t) \neq 0$ . Выполняя это преобразование в новых переменных, уравнения системы (1.1)-(1.3) примут следующий вид:

$$\dot{\bar{x}}^{(k)} = \bar{A}_k(t)\bar{x}^{(k)} + \bar{B}_k(t)u^{(k)}, \quad \bar{E}_k\bar{x}^{(k)}(t_k) + \bar{F}_k\bar{x}^{(k+1)}(t_k) = \beta_k; \quad (1.5)$$

$$y^{(k)} = \bar{G}_k(t)\bar{x}^{(k)} \quad (1.6)$$

где преобразованные матрицы системы вычисляются по формулам:

$$\bar{A}_k(t) = T_k(t)A_k(t)T_k^{-1}(t) + \dot{T}_k(t)T_k^{-1}(t), \quad \bar{B}_k(t) = T_k(t)B_k(t) \quad (1.7)$$

$$\bar{E}_k = E_k T_k^{-1}(t_k), \quad \bar{F}_k = F_k T_{k+1}^{-1}(t_k)$$

$$\bar{G}_k(t) = G_k(t)T_k^{-1}(t) \quad (1.8)$$

Нормированную фундаментальную матрицу решения однородной части уравнения системы (1.5) обозначим через  $\bar{X}_k[t, \tau]$ . Учитывая, что

$x^{(k)}(t) = X_k[t, \tau]x^{(k)}(\tau)$ , будем иметь:

$$\bar{X}_k[t, \tau] = T_k(t)X_k[t, \tau]T_k^{-1}(\tau) \quad (1.9)$$

Предположим, что начальные состояния исходной (1.1) и преобразованной (1.5) системы согласованы, т.е.

$$\bar{x}^{(1)}(t_0) = T_1(t_0)x^{(1)}(t_0) \quad (1.10)$$

Выражение для выхода преобразованной системы будет

$$\begin{aligned}
\bar{y}^{(k)}(t) &= \bar{G}_k(t)\bar{x}^{(k)}(t) = \\
&= \bar{G}_k(t) \left\{ \bar{X}_k[t, t_{k-1}] \bar{F}_{k-1}^{-1} \left[ \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{k-i-1} \bar{W}_i^{(k-1)} \beta_i + (-1)^{k-1} \bar{W}_1^{(k-1)} \bar{E}_1 \bar{X}_1[t_1, t_0] \bar{x}^{(1)}(t_0) \right] + \right. \\
&\quad \left. + \bar{X}_k[t, t_{k-1}] \bar{F}_{k-1}^{-1} \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{k-i} \bar{W}_i^{(k-1)} \bar{E}_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} \bar{H}_i[t_i, \tau] u^{(i)}(\tau) d\tau + \int_{t_{k-1}}^t \bar{H}_k[t, \tau] u^{(k)}(\tau) d\tau \right\}
\end{aligned} \quad (1.11)$$

где

$$\bar{W}_i^{(k)} = \prod_{j=1}^{k-i} \bar{E}_{k+1-j} \bar{X}_{k+1-j}[t_{k+1-j}, t_{k-j}] \bar{F}_{k-j}^{-1}, \quad \bar{H}_k[t, \tau] = \bar{X}_k[t, \tau] \bar{B}_k(\tau)$$

Но, так как

$$\bar{W}_i^{(k)} = \prod_{j=1}^{k-i} E_{k+1-j} X_{k+1-j}[t_{k+1-j}, t_{k-j}] F_{k-j}^{-1} = W_i^{(k)}, \quad \bar{H}_k[t, \tau] = T_k(t) H_k[t, \tau] \quad (1.12)$$

то подставляя эти равенства в формулу (1.11) и учитывая (1.8)-(1.10), убедимся, что

$$y^{(k)}(t) = \bar{y}^{(k)}(t) \quad k = 1, \dots, m$$

Таким образом, соотношение между входами составной системы  $u^{(k)}(t)$  и выходными величинами  $y^{(k)}(t)$  в исходной и преобразованной составных системах остаются неизменными, т.е. одним и тем же входным воздействиям будут соответствовать одинаковые выходные величины [2].

**2. Влияние невырожденного преобразования на свойства управляемости составной линейной стационарной системы.** Рассмотрим движение составной системы, динамика которой на интервале времени  $t_{k-1} \leq t \leq t_k$ ,  $k = 1, \dots, m$  описывается  $n_k$ -мерными линейными стационарными дифференциальными уравнениями (стационарный случай составной системы (1.1)), т.е.

$$\dot{x}^{(k)} = A_k x^{(k)} + B_k u^{(k)} \quad (2.1)$$

с условием (1.2) в промежуточные моменты времени  $t_k$  ( $k = 1, \dots, m-1$ ).

**Определение.** Составная система (2.1) с промежуточными условиями связи (1.2) называется вполне управляемой на отрезке времени  $[t_0, T]$ , если для любых начальных  $x^{(1)}(t_0) = x_0^{(1)}$  и конечных  $x^{(m)}(T) = x_T^{(m)}$  состояний можно найти такой набор управлений  $u^{(k)}(t)$ ,  $k = 1, \dots, m$ , при котором решение  $x^{(k)}(t)$ , начиная из состояния  $x^{(1)}(t_0)$  и удовлетворяя

промежуточным условиям связи (1.2) в момент времени  $t = T$ , удовлетворяло условию  $x^{(m)}(T) = x_T^{(m)}$ .

Воспользуемся следующей теоремой.

**Теорема.** Линейная стационарная составная система (2.1) с промежуточными условиями связи (1.2) вполне управляема на отрезке времени  $t_0 \leq t \leq T$  тогда и только тогда, когда матрица

$$K = \{C_1(B_1, A_1 B_1, \dots, A_1^{p_1-1} B_1), \dots, C_m(B_m, A_m B_m, \dots, A_m^{p_m-1} B_m)\} \quad (2.2)$$

имеет ранг, равный  $n_m$ , где

$$C_i = (-1)^{m-i} e^{A_m(T-t_{m-1})} F_{m-1}^{-1} W_i^{(m-1)} E_i e^{A_i t_i}, \quad i = 1, \dots, m-1; \quad C_m = e^{A_m T}$$

$$W_i^{(k)} = \prod_{j=1}^{k-i} E_{k+1-j} e^{A_{k+1-j}(t_{k+1-j}-t_{k-j})} F_{k-j}^{-1} \quad (k = 2, 3, \dots, m; j = 1, 2, \dots, k-1),$$

а числа  $p_j$  - кратности собственных значений матрицы  $A_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ).

Матрица (2.2) называется матрицей управляемости составной системы (2.1), (1.2).

Рассмотрим невырожденные линейные стационарные преобразования фазовых переменных

$$\bar{x}^{(k)} = T_k x^{(k)}, \quad k = 1, \dots, m, \quad (2.3)$$

где  $T_k$  -  $(n_k \times n_k)$ -мерные матрицы и  $\det T_k \neq 0$ .

Выполняя преобразование (2.3), системы (2.1), (1.2) примут следующий вид:

$$\dot{\bar{x}}^{(k)} = \bar{A}_k \bar{x}^{(k)} + \bar{B}_k u^{(k)}, \quad t \in [t_{k-1}, t_k] \quad k = 1, \dots, m \quad (2.4)$$

$$\bar{E}_k \bar{x}^{(k)}(t_k) + \bar{F}_k \bar{x}^{(k+1)}(t_k) = \beta_k, \quad (2.5)$$

где матрицы  $\bar{A}_k$ ,  $\bar{B}_k$ ,  $\bar{E}_k$  и  $\bar{F}_k$ , согласно формуле (1.8), имеют вид:

$$\bar{A}_k = T_k A_k T_k^{-1}, \quad \bar{B}_k = T_k B_k, \quad \bar{E}_k = E_k T_k^{-1}, \quad \bar{F}_k = F_k T_{k+1}^{-1} \quad (2.6)$$

Матрица управляемости составной системы (2.4)-(2.5), согласно теореме, будет

$$\bar{K} = \{\bar{C}_1(\bar{B}_1, \bar{A}_1 \bar{B}_1, \dots, \bar{A}_1^{p_1-1} \bar{B}_1), \dots, \bar{C}_m(\bar{B}_m, \bar{A}_m \bar{B}_m, \dots, \bar{A}_m^{p_m-1} \bar{B}_m)\}, \quad (2.7)$$

где

$$\bar{C}_i = (-1)^{m-i} e^{\bar{A}_m(T-t_{m-1})} \bar{F}_{m-1}^{-1} \bar{W}_i^{(m-1)} \bar{E}_i e^{\bar{A}_i t_i}, \quad i = 1, \dots, m-1; \bar{C}_m = e^{\bar{A}_m T}$$

$$\bar{W}_i^{(k)} = \prod_{j=1}^{k-i} \bar{E}_{k+1-j} \bar{X}_{k+1-j} [t_{k+1-j}, t_{k-j}] \bar{F}_{k-j}^{-1}, \quad k = 2, 3, \dots, m; i = 1, 2, \dots, k-1$$

Согласно формуле (2.6), будем иметь:

$$\bar{W}_i^{(k)} = W_i^{(k)}, \quad e^{\bar{A}_k t_k} = T_k e^{A_k t_k} T_k^{-1}, \quad \bar{C}_i = T_m C_i T_i^{-1}, \quad \bar{C}_m = T_m C_m T_m^{-1} \quad (2.8)$$

Учитывая формулы (2.6) и (2.8), из (2.7) имеем:

$$\bar{K} = T_m K.$$

Так как  $\det T_m \neq 0$ , то справедливо

$$\text{rang} K = \text{rang} \bar{K}$$

Таким образом, невырожденное преобразование не влияет на свойство управляемости составной линейной стационарной системы. Условие вполне управляемости (2.2) составной стационарной системы (2.1), (1.2) не связано с каким-либо конкретным базисом пространства состояний. Они справедливы для любого базиса, в котором записаны матрицы системы [2]. Для обеспечения желаемых динамических свойств управляемой системы целесообразно выбрать вполне определённый базис в пространстве состояний, чтобы матрицы системы имели желаемую форму.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Барсегян В.Р. Конструктивный подход к исследованию задач управления линейными составными системами. //Проблемы управления. 2012. №4. С.11-17.
2. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976. 424с.

### Сведения об авторе:

**Барсегян Тигран Ваняевич** – аспирант кафедры механики, Ереванский государственный университет

**E-mail:** [t.barseghyan@mail.ru](mailto:t.barseghyan@mail.ru)

# ИЗГИБНЫЕ ВОЛНЫ ФЛОКЕ В БАЛКЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ НЕПОЛНОГО УПРУГОГО КОНТАКТА

*Белубекян М.В., Казарян К.Б., Казарян Р.А.*

*Армения*

Исследован вопрос распространения упругих изгибных волн в однородной балке при наличии в балке различных периодически чередующихся соединений частичного (неполного) упругого контакта. Получены дисперсионные уравнения, определяющие частотные зоны запертия изгибных волн Флоке.

Возможность существования частотных зон запертия волн Флоке в упругом однонаправленном периодическом стержне установлена в работах [1,2]. Дисперсионные соотношения, описывающие волны Флоке в периодической упругой структуре и обзор работ по этой тематике приведены в [3]. С математической точки зрения спектральная теория изгибных волн колебаний непрерывно периодических упругих балок изложена в [4-5]. В работе [6] показано существование частотных зон запертия для изгибных волн в составной пластинке с периодической структурой интерфейсов.

Рассмотрим задачу распространения упругих изгибных волн в однородной бесконечной балке  $-\infty < x < \infty$ , когда в точках  $x = na$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) имеются соединения с неполным упругим контактом. Исследование проведем на основе теории Флоке [7]. Согласно этой теории, задача распространения волн в бесконечной балке с периодическими условиями неполного упругого контакта требует решения уравнения колебаний в конечной области  $0 < x < a$  с граничными условиями, которые будут приведены ниже.

Уравнения колебания балки при допущениях гипотезы Бернулли имеют вид

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + p^4 w = 0, \quad p = \sqrt[4]{\frac{\rho S \omega^2}{EJ}} \quad (1)$$

В (1)  $w$  – поперечный прогиб,  $J$  – момент инерции,  $E$  – модуль упругости,  $\rho$  – плотность материала,  $S$  – площадь поперечного сечения, частота изгибных колебаний балки.

Решение уравнения (1) в области  $0 < x < a$  имеет вид:

$$w(x) = C_1 \operatorname{sh} px + C_2 \operatorname{ch} px + C_3 \sin px + C_4 \cos px . \quad (2)$$

В рамках теории Флоке верны следующие соотношения:

$$w(x+a) = \lambda w(x); \quad \frac{d^n w(x+a)}{dx^n} = \lambda w^{(n)}(x) \quad (3)$$

Здесь  $\lambda = \exp(ika)$ ,  $k$  – волновое число Флоке.

Рассматриваются четыре различных типа периодически повторяющихся соединений частичного упругого контакта, для которых в силу (3) граничные условия Флоке запишутся как ( $\lambda = \exp(ika)$ )

- 1) Шарнирная опора: В точках контакта  $x = 0, x = a$  перемещения равны нулю, а углы поворота и изгибающие моменты непрерывны

$$w(0) = w(a) = 0; w'(0) = \lambda w'(a), w''(0) = \lambda w''(a) \quad (4)$$

- 2) Шарнирное соединение (цепь): В точках контакта  $x = 0, x = a$  изгибающие моменты равны нулю, а перемещения и поперечные усилия непрерывны

$$w''(0) = w''(a) = 0; w(0) = \lambda w(a), w'''(0) = \lambda w'''(a) \quad (5)$$

- 3) Скольжение: В точках контакта  $x = 0, x = a$  поперечные усилия равны нулю, а перемещения и углы поворота непрерывны

$$w'''(0) = w'''(a) = 0; w(0) = \lambda w(a), w'(0) = \lambda w'(a) \quad (6)$$

- 4) Плавающая заделка: В точках контакта  $x = 0, x = a$  углы поворота равны нулю, а перемещения и поперечные усилия непрерывны

$$w'(0) = w'(a) = 0; w(0) = \lambda w(a), w'''(0) = \lambda w'''(a) \quad (7)$$

Удовлетворяя решение (2) граничным условиям (4), получим линейную однородную систему уравнений относительно коэффициентов  $C_1, C_2, C_3, C_4$ .

Чтобы эта система имела нетривиальное решение, её определитель должен быть равен нулю

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ (1 - \lambda \operatorname{ch} pa) & -\lambda \operatorname{sh} pa & (1 - \lambda \cos pa) & \lambda \sin pa \\ \operatorname{sh} pa & \operatorname{ch} pa & \sin pa & \cos pa \\ -\lambda \operatorname{sh} pa & (1 - \lambda \operatorname{ch} pa) & \lambda \sin pa & -(1 - \lambda \cos pa) \end{vmatrix} = 0$$

Отсюда получим следующее дисперсионное уравнение:

$$(\sin ap - \operatorname{sh} ap)(1 + \lambda^2) - 2\lambda(\operatorname{ch} ap \sin ap - \cos ap \operatorname{sh} ap) = 0 \quad (8)$$

Принимая во внимание, что  $\lambda = \exp(ika)$ , дисперсионное уравнения (8) запишем как

$$\cos ka = F(ap), \quad F(ap) = \frac{\operatorname{ch} ap \sin ap - \cos ap \operatorname{sh} ap}{\sin ap - \operatorname{sh} ap} \quad (9)$$

Аналогичным образом, удовлетворяя граничным условиям (5,6), мы снова придём к дисперсионному уравнению (9).

Однако, удовлетворяя решение (2) граничным условиям (7), из условия нетривиальности решения получим следующее дисперсионное уравнение:

$$\cos ka = Q(ap), \quad Q(ap) = \frac{\operatorname{ch} ap \sin ap + \operatorname{sh} ap \cos ap}{\operatorname{sh} ap + \sin ap} \quad (10)$$

Дисперсионные уравнения (9,10) при заданных значениях частоты  $\omega$  определяют волновое число  $k$ . Если имеются области значений  $\omega$ , для которых  $|F(p)| > 1$ ,  $|Q(p)| > 1$ , то в этой области частот распространение изгибной волны не имеет места (в этом случае волновое число  $k$  не является действительным).

На рис.1 приведены графики зависимости функций  $F(\omega_0)$  и  $Q(\omega_0)$  от безразмерной частоты безразмерного параметра  $\omega_0 = ap$ , характеризующего частоту изгибной волны. Пунктирами обозначена функция  $Q(\omega_0)$ .

Последовательности точек значений частот  $\omega_{0i}, \omega_{0j}$ , где  $F(\omega_{0i}) = 1, Q(\omega_{0i}) = 1$ , а  $F(\omega_{0j}) = -1, Q(\omega_{0j}) = -1$ , определяют границы зон

запирания частот. Анализ показывает, что зоны запирания равномерно распределены вдоль оси  $\omega_0$  и длина этих зон неизменна с увеличением  $\omega_0$ .

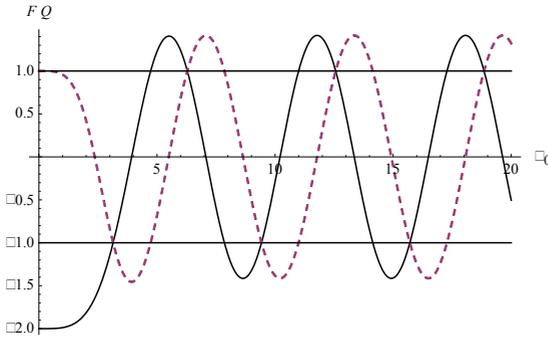


Рис 1. График зависимости функций  $F, Q$  от безразмерного параметра частоты  $\omega_0 = ap$

Как видно из рис. 1, ширина первой и последующих зон запирания частот одинаковы для всех граничных задач (типов соединений).

Анализ также показывает, что эти зоны равномерно распределены вдоль оси  $\omega_0$  и длина этих зон неизменна с увеличением  $\omega_0$ . Отметим, что для соединений типов 1), 2), 3) первая запретная зона начинается с точки  $\omega_0 = 0$  до определённого значения  $\tilde{\omega}_0$  (cut-off frequency), где  $\tilde{\omega}_0$  есть первый корень уравнения  $F(\tilde{\omega}_0) = -1$ .

**Заключение:** В рамках теории Флоке для однородной балки, имеющей периодически расположенные соединения неполного упругого контакта, показана возможность существования таких областей значений частот  $\omega$ , для которых изгибная волна не распространяется.

Работа выполнена в рамках гранта 13-2С005 Государственного комитета по науке МОН РА.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. E.H. Lee, A survey of variational methods for elastic wave propagation analysis in composites with periodic structures, in Dynamics of Composite Materials, E.H. Lee, ed., ASME, New York, 1972, pp. 122–138.

2. E.H. Lee and W.H. Yang, On waves in composite materials with periodic structure, SIAM Journal on Applied Mathematics., 25 (1973), pp. 492–499.
3. A.Velo, E. Bruder, N. Rodriguez, G. Gazonas, E. Bruder, Recursive Dispersion Relations in One-Dimensional Periodic Elastic Media, SIAM Journal on Applied Mathematics, Vol. 69, No. 3., 2008. p. 670–689
4. V.G. Papanicolaou, The Spectral Theory of the Vibrating Periodic Beam, Commun. Math. Phys. 170, 1995, p. 359 - 373
5. V.G. Papanicolaou, The periodic Euler–Bernoulli equation, Trans. AMS 355 2003, p.3727–3759.
6. Казарян К.Б., Казарян Р.А. Изгибные волны Флоке в пластинке-полосе с периодической структурой интерфейсов. Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред //Труды VII Международной конференции, Горис-Степанакерт. 2011. С.194-199.
7. Brillouin , М. Parodi, Wave Propagation in Periodic Structures, Dover, New York, 1953, p. 260

#### **Сведения об авторах:**

**Белубекян Мелс**, главный научный сотрудник Института механики НАН Армении, кандидат физико-математических наук, профессор,

**E-mail:** mbelubekyan@mechins.sci.am

**Казарян Карен**, главный научный сотрудник Института механики НАН Армении, доктор физико-математических наук, профессор.

**E-mail:** kghazaryan@mechins.sci.am

**Казарян Рафаел**, старший научный сотрудник Института механики НАН Армении, кандидат физико-математических наук.

# ДИВЕРГЕНТНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ НАБЕГАНИИ СВЕРХЗВУКОВОГО ПОТОКА ГАЗА НА ЕЁ СВОБОДНЫЙ КРАЙ

*Белубекян М.В., Мартиросян С.Р.*

*Армения*

В линейной постановке исследуется задача статической устойчивости прямоугольной упругой пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край.

1. Пусть прямоугольная тонкая упругая пластинка в декартовой системе координат  $Oxyz$  занимает область  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ ,  $-h \leq z \leq h$ . Декартова система координат  $Oxyz$  выбирается так, что оси  $Ox$  и  $Oy$  лежат в плоскости невозмущённой пластинки, а ось  $Oz$  перпендикулярна к пластинке и направлена в сторону сверхзвукового потока газа, обтекающего пластинку с невозмущённой скоростью  $V$ . Скорость обтекающего потока  $V$  направлена от свободного края  $x = 0$  пластинки к противоположному краю  $x = a$  параллельно шарнирно закреплённым краям  $y = 0$  и  $y = b$ . При этом рассматриваются три различных способа закрепления кромки  $x = a$ : кромка  $x = a$  жёстко заделана, или шарнирно закреплена, или свободна.

Будем считать, что пластинка не подвержена действию усилий в срединной поверхности.

Выясним условия, при которых наряду с невозмущённой формой равновесия возможна искривлённая форма равновесия, когда изгиб пластинки обусловлен соответствующими аэродинамическими нагрузками.

В предположении справедливости гипотезы Кирхгофа и «поршневой теории» [1] дифференциальное уравнение изгиба пластинки описывается соотношением [2]

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + a_0 \rho_0 V \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$\rho_0$  – плотность невозмущённого потока газа;  $a_0$  – скорость звука в невозмущённой газовой среде;  $D$  – цилиндрическая жёсткость;  $w = w(x, y)$  – прогиб точек срединной поверхности пластинки.

Граничные условия в принятых предположениях относительно способа закрепления кромок  $x = 0$ ,  $y = 0$  и  $y = b$  имеют, соответственно, вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0, \quad x = 0; \quad (2)$$

$$w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, y = 0 \text{ и } y = b; \quad (3)$$

а граничные условия относительно способов закрепления кромки  $x = a$  будут соответственно

$$w = 0, \frac{\partial w}{\partial x} = 0, x = a; \quad (4)$$

$$w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, x = a; \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0, x = a; \quad (6)$$

где  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

Требуется найти критическую скорость потока газа  $V_{cr.div}$ , приводящую к дивергентной неустойчивости: при значениях  $V \geq V_{cr.div}$  скорости потока газа невозмущённая форма равновесия пластинки перестаёт быть устойчивой. Иными словами, требуется определить значения параметра  $V$ , при которых возможны нетривиальные решения дифференциального уравнения (1), удовлетворяющие граничным условиям (1)–(6).

Изучению вопросам устойчивости обтекаемых сверхзвуковым потоком газа прямоугольных пластинок посвящено огромное количество работ, всеобщий обзор которых содержится, в частности, в монографии [3].

2. Общее решение уравнения (1), удовлетворяющее соответствующим граничным условиям (2)–(6), будем искать в виде гармонических колебаний

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(\mu_n px) \cdot \sin(\mu_n y), \mu_n = \pi n b^{-1}, \quad (7)$$

где  $C_n$  – произвольные постоянные;  $p$  – корни характеристического уравнения, соответствующего дифференциальному уравнению (1);  $n$  – число полуволн вдоль стороны пластинки  $b$ .

Подставляя выражение (7) в уравнение (1), получаем характеристическое уравнение

$$(p^2 - 1)^2 + \alpha_n^3 p = 0, \alpha_n^3 = a_0 \rho_0 V D^{-1} \lambda_n^{-3}, \alpha_n^3 > 0, \quad (8)$$

которое имеет два отрицательных действительных корня  $p_1 < 0, p_2 < 0$  и пару комплексно-сопряжённых корней  $p_{3,4} = \alpha \pm i\beta$  с положительной вещественной частью  $\alpha > 0$ . Следовательно, общее решение уравнения (1), в соответствии с выражением (7), запишется в виде

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 C_{nk} \exp(\mu_n p_k x) \cdot \sin(\mu_n y), \quad \mu_n = \pi n b^{-1}; \quad (9)$$

где  $C_{nk}$  – произвольные постоянные;  $p_k$  – корни уравнения (8), определяемые следующими выражениями [4]:

$$p_{1,2} = -\frac{\sqrt{2(q_1+1)}}{2} \pm \sqrt{\sqrt{q_1^2-1} - \frac{q_1-1}{2}}; \quad p_{3,4} = \frac{\sqrt{2(q_1+1)}}{2} \pm i \sqrt{\sqrt{q_1^2-1} + \frac{q_1-1}{2}};$$

$q_1 (q_1 > 1)$  – единственный действительный корень кубического уравнения [4]

$$q^3 + q^2 - q - 1 - \frac{\alpha_n^6}{8} = 0, \quad \alpha_n^3 = a_0 \rho_0 V D^{-1} \mu_n^{-3}. \quad (10)$$

Подставляя общее решение (9) дифференциального уравнения (1) в граничные условия (2) – (4), и в (2), (3), (5), и в (2), (3), (6), соответствующие, соответственно, трём рассматриваемым задачам устойчивости, получаем для каждой из них однородную систему алгебраических уравнений четвёртого порядка относительно произвольных постоянных  $C_{nk}$ . Приравненный к нулю определитель каждой из этих систем уравнений – характеристический определитель  $\Delta_i$  приводит к соответствующему дисперсионному уравнению:

$$\Delta_i = \Delta_i(q, n, \gamma, \nu) = 0, \quad \gamma = ab^{-1}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (11)$$

Уравнения (11) в данном тексте не приведены в силу их громоздкости и ограниченности объёма статьи.

В соответствии с выражением и обозначением (10), скорость потока газа  $V$  будет определяться выражением

$$V = 2\sqrt{2(q-1)} \cdot (q+1) \cdot \pi^3 n^3 \gamma^3 D (a_0 \rho_0 a^3)^{-1}, \quad \gamma = ab^{-1}. \quad (12)$$

Отметим, что среди параметров исходных задач устойчивости (1)-(4), (1)-(3) и (5), (1)-(3) и (6) наиболее существенное влияние на поведение системы “пластинка–поток” оказывают следующие параметры:  $\gamma = ab^{-1}$  – отношение ширины пластинки к её длине;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $n$  – число полуволн вдоль стороны пластинки  $b$ ; скорость  $V$  потока газа, обтекающего пластинку. Значения остальных параметров принимаются постоянными.

Таким образом, анализ устойчивости плоской формы равновесия пластинки в сверхзвуковом потоке газа сводится к исследованию дисперсионных уравнений (11).

3. С помощью численных методов найдены первые корни  $q^*$  уравнений (11) для различных значений параметров  $n$ ,  $\gamma = ab^{-1}$  и  $\nu$ . Подставляя полученные значения  $q = q^*$  в соотношение (12), определяем значения критической скорости дивергенции  $V_{cr \text{ div}} = V_{cr \text{ div}}(n, \gamma, \nu)$ .

Результаты вычислений показали следующее.

Для всех  $\nu \in (0, 0.5)$ ,  $\gamma \in (0, \infty)$  имеет место статическая потеря устойчивости – дивергенция, приводящая к монотонному “выпучиванию” поверхности прямоугольной пластинки. При этом наименьшее значение критической скорости дивергенции  $V_{cr.div}$  достигается при одной полуволне ( $n = 1$ ).

Показано, что для всех  $\gamma \in (0.0001, 2)$  критическая скорость дивергенции  $V_{cr.div}$  существенно зависит от коэффициента Пуассона  $\nu$  и отношения сторон  $\gamma = ab^{-1}$  прямоугольной пластинки:  $V_{cr.div}$  меньше в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона  $\nu$ , а с возрастанием  $\gamma$  критическая скорость дивергенции растёт.

Установлено, что в случае, в котором ширина пластинки превосходит её длину более чем в два раза ( $\gamma \geq 2$ ), поведение прямоугольной пластинки в сверхзвуковом потоке газа аналогично поведению полубесконечной пластины-полосы ( $\gamma \rightarrow \infty, a \rightarrow \infty$ ), обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край [4]: имеет место явление локализованной дивергентной неустойчивости в окрестности свободного края прямоугольной пластинки, приводящая к монотонному “выпучиванию” лишь только полосы поверхности пластинки вдоль свободного края. При этом критическая скорость дивергенции примерно равна критической скорости локализованной дивергенции:  $V_{cr.div} \approx V_{loc.div}$ , которая зависит лишь только от коэффициента Пуассона  $\nu$  [4]. Тем самым, в этом случае, также, критическая скорость дивергенции меньше в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона  $\nu$ .

Показано, что в задачах (1)–(3), (5) и (1)–(3), (6), в которых край  $x = a$ , соответственно, шарнирно закреплён или свободен, в случае достаточно длинных прямоугольных пластинок ( $\gamma = ab^{-1} \leq 0.0001$ ) критическая скорость дивергенции примерно равна  $V_{cr.div} \approx 10^{-7} D(a_0 \rho_0 a^3)^{-1}$  при  $\gamma = 0.0001$ , а с уменьшением  $\gamma$  стремится к нулю. Тогда, можно полагать, что в этом случае поведение прямоугольной пластинки в сверхзвуковом потоке газа аналогично поведению обтекаемой удлинённой пластинки ( $\gamma \rightarrow 0, b \rightarrow \infty$ ), критическая скорость дивергенции которой равна нулю:  $V_{cr.div} = 0$ .

А в задаче (1)–(4), в которой край  $x = a$  жёстко закреплён, показано, что для всех  $\gamma = ab^{-1} \leq 0.0001$  критическая скорость дивергенции почти не зависит от  $\gamma$  и коэффициента Пуассона  $\nu$  и примерно равна значению

критической скорости обтекаемой удлиненной консольной пластинки [2]:  
 $V_{cr.div} \approx 6.33D(a_0\rho_0a^3)^{-1}$ .

Из сопоставления значений критических скоростей дивергенции  $V_{cr.div}^{(1)}$ ,  $V_{cr.div}^{(2)}$  и  $V_{cr.div}^{(3)}$ , соответствующим умеренным значениям отношения сторон прямоугольника  $\gamma \in (0.8, 1.2)$ , найденных, соответственно, при исследовании задач устойчивости (1)-(4), (1)-(3), (5) и (1)-(3), (6) следует, что  $V_{cr.div}^{(1)} < V_{cr.div}^{(2)} < V_{cr.div}^{(3)}$ : прямоугольная консольная пластинка при соразмерных значениях сторон теряет статическую устойчивость при меньших значениях скорости потока газа, чем прямоугольные пластинки, у которых край  $x = a$  шарнирно закреплён или свободен.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях // ПММ. 1956. Т.20. № 6. С.733-755.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Наука, 1961. 329с.
3. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. М.: Наука, 2006. 247с.
4. Belubekyan M.V., Martirosyan S.R. The Localized Instability of the ElasticPlate-Strip Streamlined by Supersonic Gas Flow // Изв. НАН Армении. Механика. 2012. Т.65. №1. С.29-34.

#### Сведения об авторах:

**Белубекян Мелс Вагаршакевич** – кандидат физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения (+374 10) 521503, (+374 10) 580096

**Е-mail:** [mbelubekyan@yahoo.com](mailto:mbelubekyan@yahoo.com)

**Мартirosян Стелла Размиковна** – кандидат физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения (+374 10) 524890

**Е-mail:** [mechinsstella@mail.ru](mailto:mechinsstella@mail.ru)

# ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ МОДЕЛЕЙ РАСТУЩИХ ПЛАСТИН

*Бычков П.С., Лычев С.А., Манжиров А.В., Сайфутдинов Ю.Н., Федотов И.  
Россия, ЮАР*

В работе развиваются модели послойно растущих пластин и методы их экспериментальной идентификации. Математические модели основаны на представлении растущей пластины как слоистого тела со структурной неоднородностью, вызванной соединением несовместно деформированных слоёв. Методика экспериментальной идентификации основана на анализе эволюции формы нерастущей границы при непрерывном присоединении материала к растущей границе пластины. Экспериментальная схема основана на принципах голографической интерферометрии.

Традиционные методы изготовления деталей сложной формы подразумевают разнообразные технологические процессы обработки, связанные со снятием материала - резка, фрезеровка, сверление и т.д. Альтернативный класс технологических процессов основан на синтезе деталей путём последовательного нанесения материала на подложку или поверхность произвольной формы, например, в результате локальной полимеризации, электрохимической реакции, наплавки, локального спекания и т.д. В настоящее время технологии аддитивного изготовления изделий находятся в стадии интенсивного развития [1-3]. Использование подобных технологий позволяет быстро и относительно дешево создать пространственную деталь сколь угодно сложной формы теоретически из любого материала. Однако, несмотря на возможность позиционирования элементов технологической установки с высокой точностью, отклонения геометрической формы изделия от проекта остаётся высокой, в первую очередь, в силу собственных деформаций изготавливаемого тела. С этими деформациями связаны остаточные напряжения, неминуемо возникающими в изделии при применении аддитивных технологий. Остаточные напряжения могут вызывать потерю устойчивости для тонкостенных изделий и разрушение для массивных тел, причём разрушение может произойти уже в процессе изготовления. В этой связи актуальным является развитие методов математического моделирования эволюции напряжённо-деформированного состояния (НДС) тела в ходе аддитивного технологического процесса. Моделирование позволяет расчётным путем предсказать нежелательные искажения НДС и оптимизировать качество технологического процесса, в частности, учитывать при проектировании контрдеформации, нивелирующие технологические искажения [4].

Настоящая работа посвящена развитию математических моделей послойно растущих тонкостенных конструкций и методов их экспериментальной идентификации. Математические модели основаны на идее описания структурной неоднородности, вызванной соединением несовместно деформированных частей в аддитивной технологии [5-8]. Эта структурная неоднородность вызывает напряжения в присоединяемых слоях, которые зависят от сценария аддитивного процесса. Определение их распределения в зависимости от различных параметров процесса представляет задачу экспериментальной идентификации модели.

Математическому моделированию растущих пластин и оболочек посвящены работы [9-11]. В настоящей работе рассматривается модель растущей пластины в рамках технической теории пластин Кирхгофа-Лява [12].

Рассматривается пластина  $\Omega$  с произвольным гладким контуром  $\Gamma$ . Пусть  $\Pi$  – плоскость осреднения,  $\{y^1, y^2\}$  – соответствующие криволинейные координаты

на ней и  $\mathbf{k}$  – единичный вектор, ортогональный к плоскости  $\Pi$ . Перемещения точек пластины  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(y^1, y^2)$ , вызываемые её изгибом, определяются в соответствии с принятыми кинематическими гипотезами:

$$\mathbf{u} = \mathbf{a} - z\nabla w, \quad w = w(y^1, y^2), \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}(y^1, y^2), \quad (1)$$

где  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(y^1, y^2)$  – перемещения в плоскости пластины,  $w = w(y^1, y^2)$  – прогибы,  $\nabla$  – двумерный оператор Гамильтона:  $\nabla = \mathbf{e}^1 \partial_1 + \mathbf{e}^2 \partial_2$ ,  $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2$  – локальный векторный базис,  $\partial_1, \partial_2$  – частные производные по переменным  $y^1, y^2$ .

Принимая во внимание соотношения (1), приходим к следующему диадному разложению тензора малых деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon}_b$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_b = \frac{1}{2} \left( \nabla \otimes \mathbf{a} + (\nabla \otimes \mathbf{a})^* - \mathbf{k} \otimes \nabla w - \nabla w \otimes \mathbf{k} \right) - z \nabla \otimes \nabla w. \quad (2)$$

Если к пластине не добавлялся новый материал, а перемещения (1) отсчитываются от натурального, т.е. свободного от напряжений состояния, то поле  $\boldsymbol{\varepsilon}_b$  определяет полные деформации. В случае растущей пластины поле  $\boldsymbol{\varepsilon}_b$  определяет лишь часть полных деформаций. К ним следует добавить деформации  $\boldsymbol{\varepsilon}_f$ , вносимые присоединяемыми слоями, НДС которых в общем случае не совместно с НДС растущей пластины.

Развитие методов теоретического определения НДС присоединяемых слоёв представляет собой отдельную и достаточно сложную задачу, учитывающую специфику физико-химических процессов на границе роста. Вместе с тем, оказывается возможным построить феноменологическую модель, в которой НДС слоёв в момент их присоединения задаётся посредством послойных деформаций, характеризующих аддитивной технологией и не зависящих от формы растущего тела. Величины и характер распределения этих послойных деформаций определяются экспериментально на модельных телах.

В теоретической модели предполагается, что в момент присоединения слои испытывают плоское деформированное состояние, а перемещение слоя  $\zeta$  непосредственно перед его присоединением к растущему телу может быть определено гладким полем сборочной дисторсии  $\mathbf{d}_\zeta: \Omega \rightarrow \Pi$ :

$$\mathbf{d}_\zeta(y^1, y^2) = \mathbf{e}^\alpha d_\alpha(y^1, y^2). \quad (3)$$

Непрерывность процесса позволяет считать, что «склейка» этих полей

$$\mathbf{d}(y^1, y^2, z) = \mathbf{d}_\zeta(y^1, y^2)|_{\zeta=z} \quad (4)$$

представляет собой гладкое поле  $\mathbf{d}: V \rightarrow \Pi$ ,  $V$  – трёхмерная область, определяемая как окрестность  $\Omega$  [12]. Соответствующие послойные  $\boldsymbol{\varepsilon}_f$  и полные  $\boldsymbol{\varepsilon}$  деформации определяются соотношениями

$$\boldsymbol{\varepsilon}_f = \frac{1}{2} \left( \nabla \otimes \mathbf{d} + (\nabla \otimes \mathbf{d})^* \right), \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_b + \mathbf{In} \boldsymbol{\varepsilon}_f \cdot \mathbf{In}. \quad (5)$$

Здесь  $\mathbf{In}: \Omega \rightarrow V$  – оператор вложения двумерного тензорного поля в трёхмерное пространство.

Для линейно-упругого, изотропного материала напряжения  $\boldsymbol{\sigma}$  с учётом (1) определяются соотношением

$$\boldsymbol{\sigma} = \mu \left[ \nabla \otimes \mathbf{a} + (\nabla \otimes \mathbf{a})^* - \mathbf{k} \otimes \nabla w - \nabla w \otimes \mathbf{k} - z \nabla \otimes \nabla w + \nabla \otimes \mathbf{d} + (\nabla \otimes \mathbf{d})^* \right] + \lambda \mathbf{I} (\nabla \cdot \mathbf{a} - z \nabla^2 w + \nabla \cdot \mathbf{d})$$

где  $\lambda$ ,  $\mu$  – упругие модули Ламе. В результате интегрирования по  $z$  в пределах  $(-h_-, h_+)$  получаем тензоры мембранных усилий  $\mathbf{N}$ , изгибающих и крутящих моментов  $\mathbf{M}$  и соответствующий им вектор поперечных сил  $\mathbf{Q}$

$$\mathbf{N} = \int_{-h_-}^{h_+} \boldsymbol{\sigma} dz = 2\mu \left[ (h_+ + h_-) \mathbf{def} \mathbf{a} - \frac{h_+^2 - h_-^2}{2} \nabla \nabla w \right] + \tag{6}$$

$$+ \lambda \mathbf{I} \left[ (h_+ + h_-) \nabla \cdot \mathbf{a} - \frac{h_+^2 - h_-^2}{2} \nabla^2 w \right] + \int_{-h_-}^{h_+} (2\mu \mathbf{def} \mathbf{d} + \lambda \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{d}) dz$$

$$\mathbf{M} = \int_{-h_-}^{h_+} \boldsymbol{\sigma} z dz = -2\mu \left[ \frac{h_+^3 + h_-^3}{3} \nabla \nabla w - \frac{h_+^2 - h_-^2}{2} \nabla \mathbf{a} \right] - \tag{7}$$

$$- \lambda \mathbf{I} \left[ \frac{h_+^3 + h_-^3}{3} \nabla^2 w - \frac{h_+^2 - h_-^2}{2} \nabla \cdot \mathbf{a} \right] + \int_{-h_-}^{h_+} (2\mu \mathbf{def} \mathbf{d} + \lambda \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{d}) z dz,$$

$$\mathbf{Q} = -(2\mu + \lambda) \frac{h_+^3 + h_-^3}{3} \nabla \otimes \nabla^2 w + \frac{h_+^2 - h_-^2}{2} [(\mu + \lambda) \nabla \otimes \nabla \mathbf{a} + \mu \nabla^2 \mathbf{a}] + \tag{8}$$

$$+ \int_{-h_-}^{h_+} [(\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{d} + \mu \nabla^2 \mathbf{d}] dz.$$

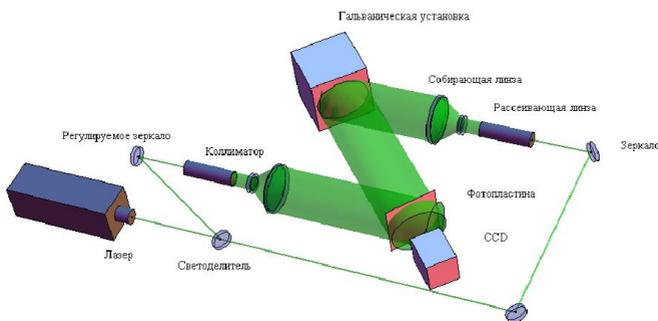
Если в выражениях (6), (7), (8) положить  $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ , то они преобразуются к классическим формулам [12]. С учётом (6), (7), (8) уравнения равновесия в проекции на вектор  $\mathbf{k} \perp \Pi$  имеет вид

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = q + (\lambda + 2\mu) \int_{-h_-}^{h_+} \left[ \left( z - \frac{h_+ - h_-}{2} \right) \nabla^2 \nabla \cdot \mathbf{d} \right] dz - \frac{h_+ - h_-}{2} \nabla \cdot \mathbf{K}_\Pi, \tag{9}$$

где  $\mathbf{K} = \mathbf{K}_\Pi + q\mathbf{k}$  – плотность поверхностных сил,  $q = \mathbf{K}\mathbf{k}$ ,  $D = (\lambda + 2\mu)h^3/12$ ,  $h = h_- + h_+$  – цилиндрическая жёсткость. Отметим, что определенная таким образом цилиндрическая жёсткость – переменная величина, так как входящие в её определение параметры  $h_-$ ,  $h_+$  изменяются в ходе аддитивного процесса.

Уравнение (9) определяет равновесие растущей пластины. Слагаемое в правой части, зависящее от сборочной дисторсии  $\mathbf{d}$ , определяет «фиктивную» поперечную нагрузку, которая подобна нагрузке, вызванной неравномерным нагревом. Подобная аналогия становится ясной, если учесть, что неравномерный по толщине нагрев вызывает несовместную деформацию – т.н. температурную дисторсию, и, как следствие, изгиб пластины. В растущем теле несовместные деформации вносятся в тело вместе с присоединяемыми слоями и характеризуются сборочной дисторсией  $\mathbf{d}$ .

Экспериментальная методика идентификации поля  $\mathbf{d}$  основана на голографической интерферометрии изгиба тонкой подложки, на которую производится электролитическое осаждение. Схема измерения приведена на рис. 1.



**Рис.1.**

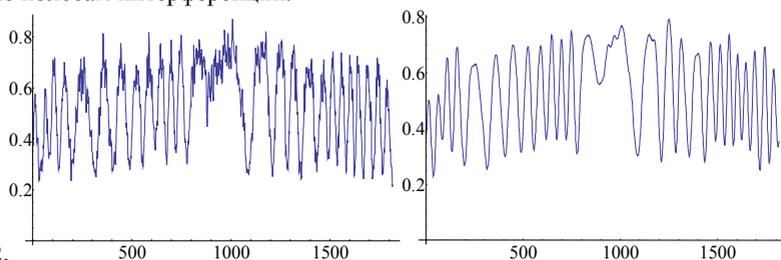
В ходе эксперимента реализовывалась методика измерения в реальном времени. Эволюция изгиба фиксировалась на CCD камеру и записывалась в электронном формате на лабораторный компьютер. Пространственное распределение интенсивности засветки матрицы CCD определяет полосы интерференции, которым соответствуют изолинии поля перемещений. Кадровая развёртка записи определяет эволюцию изгиба. Для автоматизации процесса определения экспериментальных результатов разработан вычислительный алгоритм определения изолиний, которые представляются в аналитической форме – в форме тригонометрических многочленов относительно полярного угла. В рамках алгоритма использована процедура фильтрации спекл-шума, который неизбежно присутствует на любой голограмме, основанная на численном преобразовании Фурье.

Пусть  $I_{ij}$  – матрица интенсивности засветки (по пикселям CCD). Быстрое дискретное преобразование Фурье  $F$  определяет матрицу-изображение  $F_{ij} = F[I_{ij}]$ . Фильтрация спекл-шума сводится к усечению значений этой матрицы:

$$\bar{F}_{ij} = \begin{cases} F_{ij}, & |F_{ij}| \geq \varepsilon \\ 0, & |F_{ij}| < \varepsilon \end{cases}.$$

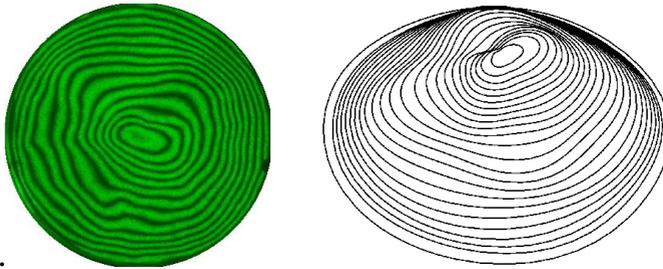
Восстановленное изображение, не содержащее спекл, находится с помощью обратного преобразования Фурье:  $\bar{I}_{ij} = F^{-1}[\bar{F}_{ij}]$ . Параметр  $\varepsilon$  выбирается эмпирически.

Сечения поля интенсивности засветки до и после фильтрации показаны на рис.2. На втором графике чётко различимы минимумы и максимумы, соответствующие полосам интерференции.



**Рис.2.**

В результате проведения эксперимента фиксируются изолинии поля перемещений с некоторым шагом по времени. Фотография одной из таких голограмм приведена на рис.3а. На рис.3б показана аппроксимация в форме тригонометрических многочленов.



**Рис.3.**

Из решения уравнения (9) при соответствующих краевых условиях следует теоретическое выражение для изгиба  $w_{th}$ , определённое с точностью до поля  $\mathbf{d}$  :

$$w_{th}(y^1, y^2, t) = w\left(y^1, y^2, t; \int_{h_-(t)}^{h_+(t)} Z[d(y^1, y^2, t)] dz\right). \quad (10)$$

В ходе эксперимента определяется фактическая эволюция прогиба тестовой пластины  $w_{exp}$ . Поле  $\mathbf{d}$  идентифицируется из условия наименьшего квадратичного отклонения поверхностей  $w_{th}$  и  $w_{exp}$  в интервале  $(t_1, t_2)$ , т.е.

$$\forall t \in (t_1, t_2) \quad \int_{\Omega} (w_{th}(y^1, y^2, t) - w_{exp}(y^1, y^2, t))^2 dy^1 dy^2 \rightarrow 0. \quad (11)$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (пр. № 14-01-00741, 12-08-01119, 12-08-01260, Программы №12 ОЭММПУ РАН и гранта Президента РФ НШ-2611.2012.1.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Gibson I., Rosen D. W., Stucker B. Additive Manufacturing Technologies. Rapid Prototyping to Direct Digital Manufacturing. Springer, 2009. 459 p.
2. Choy K. L. Chemical vapour deposition of coatings // Prog. in Mat. Sci. 2003. Vol. 48. P. 57-170.
3. Nastasi M., Mayer J.W. Ion Implantation and Synthesis of Materials. Springer, 2006. 263 p.
4. Ponche R., Mognol O. K. P., Hascoe J-Y. A novel methodology of design for Additive Manufacturing applied to Additive Laser Manufacturing process // Robotics and Computer-Integrated Manufacturing. 2014. V.30 (4), P.389-398.
5. Манжиров А.В., Лычев С.А. Математическая теория растущих тел при конечных деформациях // ДАН. 2012. С.438-441.
6. Лычев С.А., Манжиров А.В. Математическая теория растущих тел. Конечные деформации // ПММ. 2013. Т.77. Вып.4. С. 585-604.
7. Лычев С.А., Манжиров А.В. Отсчётные конфигурации растущих тел // Изв.РАН. МТТ. 2013. №5. С.86-95.
8. Лычев С.А. Универсальные деформации растущих тел // Изв.РАН. МТТ. 2011. №6. С.63-79.
9. Lychev S. Equilibrium equations for accreted shells // ZAMM. 2014. №1-2. P.118-129.
10. Manzhirov A.V., Lychev S.A., On the Equilibrium of Accreted Plates, in: Topical Problems in Solid and Fluid Mechanics. Elite Pub. House. Delhi. 2011. P.294-300.
11. Lychev S.A., Lycheva T.N., Manzhirov A.V. Unsteady Vibration of a Growing Circular Plate. Mech. Solids. 2011. 46(2). P.325-333.
12. Lebedev L.P., Cloud M.J., Eremeyev V.A. Tensor Analysis with Application in Mechanics. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. Singapore. 2010. P.363.

#### Сведения об авторах:

**Манжиров А.В., Лычев С.А., Бычков П.С., Сайфутдинов Ю.Н.,** ИПМех РАН.  
**Федотов Игорь.** Тшванский университет технологий (Претория, ЮАР), профессор.  
**E-mail:** [manzh@inbox.ru](mailto:manzh@inbox.ru), [lychevs@mail.ru](mailto:lychevs@mail.ru), [bychkov@ipmnet.ru](mailto:bychkov@ipmnet.ru).

# ОБОБЩЁННЫЙ МЕТОД ИТЕРАЦИИ В РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

*Ванцян А.А.*

*Армения*

Формулирование и последующее приложение обобщённого метода итерации к численному решению нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений хорошо зарекомендовали его эффективность по отношению к ряду передовых методов вычислительной математики. Здесь предлагаются и обсуждаются результаты применения обобщённого метода итерации к численному решению некоторых дифференциальных уравнений в частных производных.

В [1–3] приводится подробное теоретическое обоснование обобщённого метода итерации (ОМИ) применительно к численному решению нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений, предлагается сравнительный анализ ОМИ по отношению к известным прогрессивным методам численного решения нелинейных уравнений [4] и дальнейшее развитие ОМИ ввиду численного решения систем нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений [5,6].

На первом этапе настоящей работы ОМИ распространяется на решение классических задач математической физики [6], сводящихся к численному решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого или второго порядка. На втором этапе проводится сравнительный анализ эффективности применения ОМИ к численному решению рассматриваемого класса задач по отношению к таким прогрессивным методам вычислительной математики, как методы Ньютона и Рунге–Кутты.

На примере исследования дифференциального уравнения в частных производных для продольных колебаний прямого стержня [4]:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 x}{\partial l^2} = 0 \quad \text{при} \quad a^2 = \frac{EA}{\mu}, \quad (1)$$

где  $E$  – модуль упругости,  $A$  – площадь поперечного сечения, а  $\mu$  – погонная масса стержня, численное решение проводится на основе центральных разностей [5] по отношению к дискретному аналогу уравнения (1), т.е.

$$\ddot{x}_i = a^2(x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Таким образом, для каждого момента времени  $t \in [t', t'']$  организуется итерационный процесс нахождения ускорений  $\ddot{x}_i, i = 1, \dots, n$  по рекурсивной формуле, вслед за чем по зависимостям Ньюмарка последовательно определяются скорости и положения дискретных точек стержня.

**Примеры численной реализации.** В качестве первого примера алгоритмического приложения ОМИ к решению дифференциальных уравнений в частных производных рассматривается двумерная задача охлаждения предварительно нагретой пластины, уравнение которой записывается в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0 \quad \text{при} \quad a^2 = \frac{k}{c\rho}, \quad (3)$$

где  $\rho$  – плотность,  $c$  – удельная теплоёмкость, а  $k$  – коэффициент теплопроводности, зависящий от материала сплошной среды.

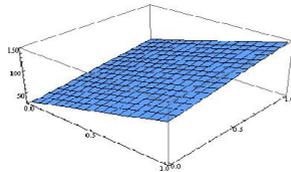


Рис.1. Начальное распределение температуры (при  $t = 0$ )

Плоская среда представляет собой железную прямоугольную пластинку с размерами  $l = h = 1 \text{ м}$ , для которой имеют место значения физических характеристик:  $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$ ,  $c = 465 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$  и  $k = \lambda t =$

$= 47t \text{ Bm} / (\text{m} \cdot \text{K})$ . Одинаковым образом, изначально предполагаются заданными начальные условия дифференциального уравнения (3) (рис.1). Также оговаривается, что охлаждение происходит только по краям пластины при температуре окружающей среды  $t_{ext} = 20^\circ \text{C}$ .

Вследствие численного решения сформулированной выше задачи на основе ОМИ приводятся промежуточное (при  $t = 30 \text{ с}$ , рис. 2) и конечное (при  $t = 60 \text{ с}$ , рис. 3) распределения температур в исследуемой пластине.

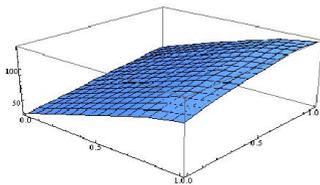


Рис.2. Промежуточное распределение температуры (при  $t = 30 \text{ сек}$ )

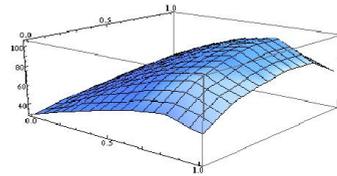


Рис.3. Конечное распределение температуры (при  $t = 60 \text{ сек}$ )

В роли второго примера численного решения дифференциального уравнения в частных производных рассматривается классическая задача моделирования поперечных колебаний натянутой и закреплённой на концах струны (задача Д'Аламбера) [4].

В такой постановке задачи дифференциальное уравнение (1) преобразуется к виду дискретного волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 v_i}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad c = 336 \text{ м/с} \quad \text{и} \quad i = 1, \dots, n \quad (4)$$

совместно с граничными условиями  $v(0, t) = v(1, t) \equiv 0$ ,

а также с учётом начальных условий в перемещениях и в скоростях, т.е.

$$\begin{cases} v_i(x_i, 0) = \zeta_i(x_i), & i = 1, \dots, n; \\ \dot{v}_i(x_i, 0) = 0, & i = 1, \dots, n, \end{cases} \quad (5)$$

причём функция  $\zeta_i = \zeta_i(x_i)$  в первом выражении (5) представляет собой совокупность начальных отклонений точек струны, изображённую на рис. 4.

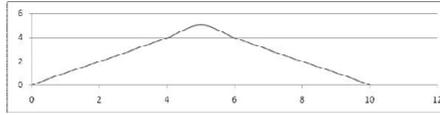


Рис.4. Функция начального отклонения

Численное воспроизведение прогибов (мм) струны реализуется при значениях  $n = 11$  и  $l = 1$  м. для моментов времени  $t = 0.5$  сек. и  $t = 1.0$  сек., а соответствующие результаты предлагаются на рис. 5 и 6.

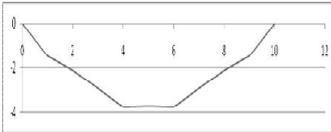


Рис.5. Функция прогибов струны при  $t = 0.5$  сек.

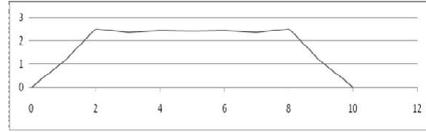


Рис.6. Функция прогибов струны при  $t = 1.0$  сек.

**Закключение.** На основании вышеприведённых рассуждений по поводу неэффективности использования методов Ньютона и Рунге–Кутта, а также в силу вышерассмотренных примеров можно прийти к выводу о целесообразности применения обобщённого метода итерации к численному решению исследованных задач математической физики.

Автор выражает благодарность Г. Геворкяну за проведённые численные расчёты.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ванцян А.А. Об одном методе решения трансцендентных и алгебраических уравнений // Information Technologies and Management. 2004. №4. С.44–47.
2. Ванцян А.А., Геворкян Г.А. Модернизированный метод итерации. Механика композиционных материалов и конструкций. //В сб. трудов IV-го Всероссийского симпозиума: М.: 2012. Т.1. С.40–44.
3. Ванцян А.А. Обобщённый метод итерации // Вестник РАЕН. М.: (В печати).
4. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735с.
5. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1970. 664с.
6. Бахвалов Н.С. и др. Численные методы. М.: Наука, 1987. 598с.

### **Сведения об авторе:**

**Ванцян Анушаван Аристакович,**

Ведущий научный сотрудник Института механики НАН РА

Тел.: (374 10) 561 523 (раб.), (374 93) 524 501 (моб.),

Е – mail: [vantsyan@mechins.sci.am](mailto:vantsyan@mechins.sci.am), [vantsyana@mail.ru](mailto:vantsyana@mail.ru)

## О ВЛИЯНИИ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ НА РЕЗОНАНСНЫЕ ЧАСТОТЫ ГЕТЕРОГЕННОЙ ТРУБЫ

*Ватульян А.О., Дударев В.В., Мнухин Р.М.*

*Россия*

В работе рассмотрена задача о радиальных колебаниях гетерогенной трубы. Постановка задачи выписана в рамках теории предварительного напряжённого состояния (ПНС) на основе модели Е. Треффтца. Считается, что в стенках трубы имеется поле остаточных напряжений, возникшее в результате действия рабочего давления. Решение прямой задачи об определении радиальной компоненты поля перемещений получено численно с помощью метода пристрелки. В случае постоянных упругих характеристик проведён анализ влияния уровня остаточного напряжённого состояния на первые две резонансные частоты. Рассмотрение проведено при наличии и отсутствии пластических зон. Представлены выводы по использованию информации о значении первой резонансной частоты для определения уровня рабочего давления и зоны пластических деформаций.

В настоящее время для повышения прочностных и эксплуатационных характеристик всего объекта или его отдельных частей все чаще во время производства используются гетерогенные материалы. Такие материалы обладают рядом преимуществ по сравнению с композитами: уменьшение негативного эффекта расслаивания и растрескивания, возможность реализации более широкого диапазона изменения механических свойств и т.д. При производстве гетерогенных материалов используются различные способы слияния двух и более материалов путем их спекания, плавления, градиентного напыления и т.п. При таких процедурах важную роль имеет контроль многих технологических факторов, в том числе температурного режима. В силу специфики производства и дальнейшей эксплуатации готовых изделий из гетерогенных материалов важной задачей является аттестация и верификация их механических свойств и внутреннего напряжённого состояния. С точки зрения точности и удобства использования наиболее востребованным неразрушающим методом диагностики является акустический метод. В рамках этого подхода считается, что по данным об изменении акустических характеристик объекта можно определить его свойства.

Рассмотрим установившиеся радиальные колебания гетерогенной трубы плотности  $\rho$  с внутренним радиусом  $r_1 > 0$  и внешним радиусом  $r_2 > r_1$ .

Колебания вызываются нагрузкой амплитуды  $p_0$ , приложенной на внешнем радиусе с частотой  $\omega$ . В стенках трубы присутствует поле остаточных напряжений, обусловленное действием рабочего внутреннего давления  $p$  и характеризующееся компонентами  $\sigma_r^0 = \sigma_r^0(r) \neq 0$ ,  $\sigma_\varphi^0 = \sigma_\varphi^0(r) \neq 0$ .

Уравнение колебаний, определяющие соотношения и граничные условия в полярной системе координат имеют вид [1,2]:

$$\frac{dT_r}{dr} + \frac{T_r - T_\varphi}{r} + \rho\omega^2 u = 0, \quad (1)$$

$$T_r = \sigma_r + \frac{du}{dr} \sigma_r^0, \quad T_{r\varphi} = 0, \quad T_\varphi = \sigma_\varphi + \frac{1}{r} u \sigma_\varphi^0, \quad T_{\varphi r} = 0, \quad (2)$$

$$\sigma_r = \lambda \left( u' + \frac{u}{r} \right) + 2\mu u', \quad \sigma_\varphi = \lambda \left( u' + \frac{u}{r} \right) + 2\mu \frac{u}{r}, \quad (3)$$

$$T_r(r_1) = 0, \quad T_r(r_2) = -p_0, \quad (4)$$

где  $u(r)$  – компонента радиального смещения,  $\underline{T}$  – несимметричный добавочный тензор напряжений Пиолы,  $\underline{\sigma}$  – тензор напряжений Коши,  $\lambda(r)$ ,  $\mu(r)$  – параметры Ляме. Перепишем (1)-(4) в безразмерной форме канонической системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} U'(\xi) = \frac{1}{(c_1\varphi_1(\xi) + 2\varphi_2(\xi) + g_1(\xi))} \left( Y(\xi) - c_1\varphi_1(\xi) \frac{U(\xi)}{\xi} \right) \\ Y'(\xi) = -\frac{Y(\xi)}{\xi} \left( \frac{g_1(\xi) + 2\varphi_2(\xi)}{c_1\varphi_1(\xi) + 2\varphi_2(\xi) + g_1(\xi)} \right) + \\ + U(\xi) \left( \frac{g_2(\xi) + 2\varphi_2(\xi)}{\xi^2} + c_1\varphi_1(\xi) \frac{g_1(\xi) + 2\varphi_2(\xi)}{\xi^2(c_1\varphi_1(\xi) + 2\varphi_2(\xi) + g_1(\xi))} - \kappa^2 \right) \end{cases} \quad (5)$$

$$Y(\xi_0) = 0, \quad Y(1) = -p^*, \quad (6)$$

где введены безразмерные параметры и функции  $r = r_2\xi$ ,  $\xi \in [\xi_0, 1]$ ,  $\xi_0 = r_1/r_2$ ,  $\kappa^2 = \rho\omega^2 r_2^2 / \mu(r_1)$ ,  $p^* = p_0 / \mu(r_1)$ ,  $c_1 = \lambda(r_1) / \mu(r_1)$ ,  $\lambda(r) = \lambda(r_1)\varphi_1(\xi)$ ,  $\mu(r) = \mu(r_1)\varphi_2(\xi)$ ,  $T_r(r) = \mu(r_1)Y(\xi)$ ,  $u(r) = r_2U(\xi)$ ,  $\sigma_r^0 = \mu(r_1)g_1(\xi)$ ,  $\sigma_\varphi^0 = \mu(r_1)g_2(\xi)$ . При заданных законах изменения функций  $g_i$  и  $\varphi_i$  решение этой задачи может быть получено численно с помощью метода пристрелки, например, в пакете Maple. Будем считать, что при достижении внутреннего давления некоторого значения в стенках трубы возникла область пластических деформаций радиуса  $\xi_c$ . В рамках модели упруго-пластического тела выражения для функций  $g_1$  и  $g_2$  в пластической зоне ( $\xi_0 \leq \xi \leq \xi_c$ ) могут быть записаны в виде:

$$g_1^{res}(\xi) = s \left( \left( 2 \ln \frac{\xi}{\xi_c} + \xi_c^2 - 1 \right) - \frac{t \xi_0^2}{1 - \xi_0^2} \left( 1 - \frac{1}{\xi^2} \right) \right), \quad (7)$$

$$g_2^{res}(\xi) = s \left( \left( 2 \ln \frac{\xi}{\xi_c} + \xi_c^2 + 1 \right) - \frac{t \xi_0^2}{1 - \xi_0^2} \left( 1 + \frac{1}{\xi^2} \right) \right). \quad (8)$$

В упругой области ( $\xi_c \leq \xi \leq 1$ ):

$$g_1^{res}(\xi) = s \left( \xi_c^2 - \frac{t \xi_0^2}{1 - \xi_0^2} \right) \left( 1 - \frac{1}{\xi^2} \right), \quad (9)$$

$$g_2^{res}(\xi) = s \left( \xi_c^2 - \frac{t \xi_0^2}{1 - \xi_0^2} \right) \left( 1 + \frac{1}{\xi^2} \right). \quad (10)$$

Здесь введены обозначения  $s = \sigma_T / (\mu(r_1) \sqrt{3})$ ,  $\sigma_T$  – предел текучести,  $t = \sqrt{3} p / \sigma_T$ . Как известно, точное значение  $\xi_c$  можно определить из решения трансцендентного уравнения [4]:

$$\ln \left( \frac{\xi_c}{\xi_0} \right) + \frac{1}{2} (1 - \xi_c^2) = \frac{p}{2 \tau_s} = p^{**}, \quad (11)$$

где  $\tau_s$  – предел текучести на растяжение согласно критерию Мизеса,  $p^{**}$  – значение внутреннего давления, при котором возникает область пластичности радиуса  $\xi_c$ . Следует отметить, что при малых значениях  $\xi_c$  из соотношения (11) можно получить явную формулу [2]:

$$\xi_c = \xi_0 \left( \frac{1}{2} + \frac{p^{**}}{1 - \xi_0^2} \right). \quad (12)$$

Расчёты, проведённые для тонкостенных труб ( $\xi_0 \geq 0.99$ ), показали, что максимальная относительная погрешность вычисленного радиуса по (12) не превосходит 0.5% по сравнению с точным (11).

На основе решения прямой задачи при постоянных параметрах Ляме ( $\varphi_1(\xi) = \varphi_2(\xi) = 1$ ) проведён анализ влияния параметров  $\xi_0$  и  $\sigma_T$  на первые два значения  $K_1$  и  $K_2$  параметра  $K$ , пропорциональные первым двум резонансным частотам, соответственно. В результате выявлено, что наибольшее влияние характерно для толстостенных труб ( $\xi_0 = 0.7$ ) и большим значением параметра  $\sigma_T = 1000$  МПа. Также стоит отметить,

различие в изменении параметров  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  в упругой зоне – при увеличении внутреннего давления  $\kappa_1$  монотонно увеличивается, а  $\kappa_2$  уменьшается. При этом, при появлении пластической зоны наблюдается скачок значений этих параметров:  $\kappa_1$  уменьшается,  $\kappa_2$  возрастает и далее также уменьшается. Таким образом, с точки зрения определения уровня остаточного напряжённого состояния и радиуса зоны пластичности наиболее информативными являются значения первой резонансной частоты.

Для определения поправки  $\kappa_1$  к значению параметра  $\kappa^2 = \kappa_0^2 + \kappa_1$ , пропорционального резонансной частоте, на основе метода линеаризации при рассмотрении свободных колебаний трубы при наличии и отсутствии ПНС получена формула:

$$\kappa_1 = \frac{\int_{\xi_0}^1 \left( g_1(\xi) \xi (U_0'(\xi, \kappa_0))^2 + \frac{g_2(\xi) U_0^2(\xi, \kappa_0)}{\xi} \right) d\xi}{\int_{\xi_0}^1 \xi U_0^2(\xi, \kappa_0) d\xi}, \quad (13)$$

где  $\kappa_0$  – параметр, пропорциональный собственной частоте колебаний трубы при отсутствии ПНС,  $U_0(\xi, \kappa_0)$  – соответствующая форма свободных колебаний,  $g_i(\xi)$  – заданные законы изменения компонент тензора ПНС.

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России № 9.665.2014/К и при поддержке РФФИ (№ 13-01-00196, 14-01-31393).

## ЛИТЕРАТУРА

1. E. Trefftz. Zurtheorie der stabilitat des elastischengleichgewichts // ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1933. V.12, №2. P.160–165.
2. Ватульян А.О., Дударев В.В., Богачев И.В. Об определении предварительного напряжённого состояния в трубе // Доклады Академии наук. Т.456. № 3. С.299-301.
3. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 117с.
4. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 110с.

### **Сведения об авторах:**

#### **Ватульян Александр Ованесович**

Профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории упругости, факультет математики, механики и компьютерных наук, Южный федеральный университет

**Телефон:** +7-918-589-60-75

**E-mail:** vatulyan@math.rsu.ru

#### **Дударев Владимир Владимирович**

Кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры теории упругости, факультет математики, механики и компьютерных наук, Южный федеральный университет

**Телефон:** +7-904-448-92-92

**E-mail:** dudarev\_vv@mail.ru

#### **Мнухин Роман Михайлович**

студент факультета математики, механики и компьютерных наук, Южный федеральный университет

**Телефон:** +7-928-179-27-16

**E-mail:** romamnuhin@yandex.ru

# О ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ПЛАСТИН ПРИ НАЛИЧИИ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО НАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ РАЗЛИЧНОЙ СТРУКТУРЫ И СПОСОБАХ ЕГО ИДЕНТИФИКАЦИИ

*Ватульян А.О., Недин Р.Д.*

*Россия*

**Колебания ПН пластины для модели Кирхгофа.** На основе классических гипотез Кирхгофа для тонкой пластины, занимающей область  $S$ , ограниченную кусочно-гладкой кривой  $\partial S = l_u \cup l_\sigma$ , (считаем, что  $u_1 = -x_3 w_{,1}; u_2 = -x_3 w_{,2}; u_3 = w$ ) осуществлён вывод постановки краевой задачи об установившихся изгибных колебаниях с помощью вариационного принципа Лагранжа при наличии неоднородного двумерного поля предварительных напряжений (ПН)  $\sigma_{m\beta}^0$ , распределённого в плоскости пластины:

$$D\Delta^2 w + H(\sigma_{m\beta}^0 w_{,am})_{,a\beta} - h\sigma_{a\beta}^0 w_{,a\beta} + H\rho\omega^2 \Delta w - \rho h\omega^2 w = 0,$$

$$w|_{l_u} = 0, \left. \frac{\partial w}{\partial n} \right|_{l_u} = 0, G_t|_{l_\sigma} = 0, \left[ \frac{\partial}{\partial \tau}(H_t) - N_t + H\rho\omega^2 \frac{\partial w}{\partial n} \right]_{l_\sigma} = -P, \quad (1)$$

где  $h$  – толщина пластины,  $H = h^3 / 12$ , и введены обозначения

$D = H(\lambda^* + 2\mu) = \frac{EH}{1-\nu^2} = \text{const}$  – цилиндрическая жесткость пластины,

$G_t = -Q_{a\beta} n_\alpha n_\beta$  – изгибающий момент,  $H_t = Q_{2\beta} n_\beta n_1 - Q_{1\beta} n_\beta n_2$  – крутящий

момент,  $N_t = -D \frac{\partial(\Delta w)}{\partial n} - H(\sigma_{m\beta}^0 w_{,am})_{,a\beta} n_\alpha + h\sigma_{a\beta}^0 n_\alpha w_{,a\beta}$  – поперечная сила,

$\partial / \partial n$  и  $\partial / \partial \tau$  – соответственно, нормальная производная и производная по касательному направлению к контуру  $\partial S$ .

**Колебания пластины для модели Тимошенко.** На основе гипотез Тимошенко  $u_1 = \theta_1 x_3 + \zeta_1$ ,  $u_2 = \theta_2 x_3 + \zeta_2$ ,  $u_3 = w$ , ( $\theta_\alpha = \theta_\alpha(x_\beta)$ ) – углы поворота нормали вдоль осей  $x_\alpha$ ,  $\zeta_\alpha = \zeta_\alpha(x_\beta)$  – перемещения в плоскости пластины) сформулирована краевая задача

$$Q_{a\beta,\beta} - S_\alpha + \omega^2(P_2\theta_\alpha + P_1\zeta_\alpha) = 0, R_{a\beta,\beta} + \omega^2(P_1\theta_\alpha + P_0\zeta_\alpha) = 0, T_{\alpha,\alpha} + P_0\omega^2 w = 0, \quad (2)$$

$$w|_{l_u} = 0, \theta_\alpha|_{l_u} = 0, \zeta_\alpha|_{l_u} = 0, Q_{a\beta} n_\beta|_{l_\sigma} = 0, R_{a\beta} n_\beta|_{l_\sigma} = 0, T_\alpha n_\alpha|_{l_\sigma} = -P$$

для предварительно напряжённой тонкой пластины в общем случае неоднородности всех параметров задачи. При этом обозначено

$$Q_{a\beta} = \Psi_{a\beta}^2, R_{a\beta} = \Psi_{a\beta}^1, T_\alpha = M_0(w_{,a\alpha} + \theta_\alpha) + \Sigma_{am}^0 w_{,m},$$

$$\Psi_{a\beta}^\gamma = \delta_{a\beta}(\Lambda_\gamma \theta_{m,m} + \Lambda_{\gamma-1} \zeta_{m,m}) + M_\gamma(\theta_{\alpha,\beta} + \theta_{\beta,\alpha}) + M_{\gamma-1}(\zeta_{\alpha,\beta} + \zeta_{\beta,\alpha}) + \Sigma_{m\beta}^\gamma \theta_{\alpha,m} + \Sigma_{m\beta}^{\gamma-1} \zeta_{\alpha,m} + \Sigma_{\beta 3}^{\gamma-1} \theta_\alpha,$$

$$\Lambda_p = \int_{-h/2}^{h/2} \lambda x_3^p dx_3, \quad M_p = \int_{-h/2}^{h/2} \mu x_3^p dx_3, \quad P_p = \int_{-h/2}^{h/2} \rho x_3^p dx_3,$$

$$\Sigma_{\alpha\beta}^p = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta}^0 x_3^p dx_3, \quad S_\alpha = M_0(w_{,\alpha} + \theta_\alpha) + \Sigma_{m3}^1 \theta_{\alpha,m} + \Sigma_{m3}^0 \zeta_{\alpha,m} + \Sigma_{33}^0 \theta_\alpha, \quad \alpha, \beta, \gamma, m = 1, 2, p = 0, 1, 2.$$

Заметим, что если рассмотреть частный случай – изгибные колебания пластины, то при выполнении гипотез  $\theta_\alpha = -w_{,\alpha}$  выведенная постановка задачи для модели Тимошенко преобразуется в постановку задачи для модели Кирхгофа (1).

**Колебания балки для модели Тимошенко. Общий случай.** При рассмотрении аналогичных гипотез для стержня  $u_1 = \theta x_3 + \zeta$ ,  $u_2 = 0$ ,  $u_3 = w$  (где  $\theta = \theta(x_1)$  – угол поворота главной оси стержня, обусловленный изгибом,  $\zeta = \zeta(x_1)$  – продольное смещение,  $w = w(x_1)$  – прогиб стержня) имеет место следующая связанная краевая задача:

$$\begin{aligned} & \left[ (E_2 + \Sigma_{11}^2) \theta' + (E_1 + \Sigma_{11}^1) \zeta' + \Sigma_{13}^1 \theta \right] - M w' - \Sigma_{13}^1 \theta' - \Sigma_{13}^0 \zeta' - (M + \Sigma_{33}^0) \theta + \omega^2 (P_1 \zeta + P_2 \theta) = 0 \\ & \left[ (E_1 + \Sigma_{11}^1) \theta' + (E_0 + \Sigma_{11}^0) \zeta' + \Sigma_{13}^0 \theta \right] + \omega^2 (P_0 \zeta + P_1 \theta) = 0, \quad \left[ (M + \Sigma_{11}^0) w' + M \theta \right] + \omega^2 P_0 w = 0 \quad (3) \\ & w(0) = 0, \quad \theta(0) = 0, \quad \zeta(0) = 0, \quad \left[ (E_2 + \Sigma_{11}^2) \theta' + (E_1 + \Sigma_{11}^1) \zeta' + \Sigma_{13}^1 \theta \right] (l) = 0, \\ & \left[ (E_1 + \Sigma_{11}^1) \theta' + (E_0 + \Sigma_{11}^0) \zeta' + \Sigma_{13}^0 \theta \right] (l) = P_1, \quad \left[ (M + \Sigma_{11}^0) w' + M \theta \right] (l) = -P_2 \end{aligned}$$

для предварительно напряжённого упругого изотропного консольно-закреплённого стержня. Здесь введены следующие обозначения ( $F$  – площадь поперечного сечения стержня,  $E$  – модуль Юнга,  $\rho$  – плотность):

$M = \int_F \mu dF$ ,  $E_p = \int_F E x_3^p dF$ ,  $\Sigma_{11}^p = \int_F \sigma_{11}^0 x_3^p dF$ ,  $\Sigma_{13}^p = \int_F \sigma_{13}^0 x_3^p dF$ ,  $\Sigma_{13}^1 = \int_F \sigma_{13}^0 x_3 dF$ ,  $\Sigma_{33}^0 = \int_F \sigma_{33}^0 dF$ ,  $P_p = \int_F \rho x_3^p dF$ , представляющие собой осреднённые характеристики соответствующих функций, зависящие от осевой координаты  $x_1$ . Таким образом, в эту постановку входят 6 функций, выраженных через компоненты ПН. При этом рассмотрен самый общий случай неоднородности всех параметров задачи, включая объёмное распределение предварительного напряжённого состояния (ПНС).

**Колебания балки для модели Тимошенко. Некоторые частные случаи.** В случае, когда рассматривается ПНС, при котором компонентами  $\sigma_{13}^0$  и  $\sigma_{33}^0$  можно пренебречь по сравнению с  $\sigma_{11}^0 = \sigma_{11}^0(x_1, x_3)$ , а параметры материала стержня неоднородны только по  $x_1$ , задача (3) примет вид

$$\begin{aligned} & \left[ (EJ + \Sigma_{11}^2) \theta' + \Sigma_{11}^1 \zeta' \right] - \mu F (w' + \theta) + \rho J \omega^2 \theta = 0, \\ & \left[ \Sigma_{11}^1 \theta' + (EF + \Sigma_{11}^0) \zeta' \right] + \rho F \omega^2 \zeta = 0, \quad \left[ (\mu F + \Sigma_{11}^0) w' + \mu F \theta \right] + \rho F \omega^2 w = 0, \quad (4) \end{aligned}$$

$$w(0) = 0, \quad \theta(0) = 0, \quad \zeta(0) = 0, \quad \left[ (EJ + \Sigma_{11}^2)\theta' + \Sigma_{11}^1 \zeta' \right] (l) = 0.$$

$$\left[ \Sigma_{11}^1 \theta' + (EF + \Sigma_{11}^0) \zeta' \right] (l) = P_1, \quad \left[ (\mu F + \Sigma_{11}^0) w' + \mu F \theta \right] (l) = -P_2.$$

Заметим, что если поле ПНС таково, что  $\Sigma_{11}^1 = 0$ , эта задача распадается на две независимые задачи: о планарных

$$\left[ (EF + \Sigma_{11}^0) \zeta' \right]' + \rho F \omega^2 \zeta = 0, \quad \zeta(0) = 0, \quad \left[ (EF + \Sigma_{11}^0) \zeta' \right] (l) = P_1$$

и изгибных колебаниях консольно-закрепленного стержня

$$\left[ (EJ + \Sigma_{11}^2) \theta' \right]' - \mu F (w' + \theta) + \rho J \omega^2 \theta = 0, \quad \left[ (\mu F + \Sigma_{11}^0) w' + \mu F \theta \right]' + \rho F \omega^2 w = 0,$$

$$w(0) = 0, \quad \theta(0) = 0, \quad \left[ (EJ + \Sigma_{11}^2) \theta' \right] (l) = 0, \quad \left[ (\mu F + \Sigma_{11}^0) w' + \mu F \theta \right] (l) = -P_2.$$

В качестве примеров ПНС рассмотрены задачи об упруго-пластическом чистом изгибе балки прямоугольного поперечного сечения в рамках модели Эйлера–Бернулли, об изгибе балки под действием сосредоточенной силы и об изгибе балки под действием равномерно распределённой нагрузки [2].

**Решение прямых краевых задач для предварительно напряжённых стержней и пластин.** Решение задач (1)-(4) получено численно с помощью методов конечных элементов и пристрелки. Проведена оценка точности полученных численных на основе сравнения с классической балочной теорией Эйлера—Бернулли. В рамках приведённых выше постановок исследовано влияние уровней ПН на амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) точек области. Осуществлено сравнение моделей пластин Кирхгофа и Тимошенко на примере изгибных колебаний тонкой прямоугольной пластины, в которой имеется поле ПН, образованное в результате приложения предварительной нагрузки к границе пластины.

**Обратные задачи об определении неоднородных ПН в стержнях и пластинах.** В работе [3] на основе линеаризации обобщённого соотношения взаимности для предварительно напряжённого тела получено интегральное уравнение, позволяющее строить итерационный процесс решения обратной задачи по идентификации неоднородного ПНС. На его основе ниже сформулированы несколько частных постановок обратных задач для стержней и пластин.

**Идентификация одноосных ПН в ленточных пластинах.** Рассмотрены одномерные обратные задачи об идентификации одноосного ПНС в ленточных пластинах при планарных и изгибных колебаниях в рамках модели Кирхгофа и в стержне в рамках модели Тимошенко при изгибных колебаниях. Все обратные задачи сведены к итерационному процессу: для задач о ленточной пластине при планарных и изгибных колебаниях в рамках модели Кирхгофа и о стержне в рамках модели Тимошенко получены интегральные уравнения Фредгольма (ИУФ) 1-го рода

$$\int_S \sigma_{11}^{(n)} \left[ \left( u_{1,1}^{(n-1)} \right)^2 + \left( u_{2,1}^{(n-1)} \right)^2 \right] dS = \int_{l_\sigma} P_\alpha \left( u_\alpha^{(n-1)} - f_\alpha \right) dl_\sigma,$$

$$\int_S \sigma_{11}^{0(n)} \left[ \frac{h^3}{12} \left( (w_{s11}^{(n-1)})^2 + (w_{s12}^{(n-1)})^2 \right) + h (w_{s1}^{(n-1)})^2 \right] dS = \int_{l_\sigma} q (w^{(n-1)} - f) dS, \quad (5)$$

$$\int_0^l \sigma_{11}^{0(n)} \left( J [\theta^{(n-1)}]^2 + F [w^{(n-1)}]^2 \right) dx_1 = P (w^{(n-1)}(l) - f(l)), \omega \in [\omega_-, \omega_+],$$

соответственно. Здесь  $(n)$ ,  $(n-1)$  – номера итераций,  $\sigma_{11}^{0(n)}$  – неизвестная поправка к ПН,  $f_\alpha$  – компоненты поля смещений, измеренного под зондирующей нагрузкой (дополнительная информация для решения обратной задачи) [3-5]. Отметим, что решение ИУФ 1-го рода – некорректная задача; для его решения использован метод регуляризации А.Н. Тихонова.

### **Идентификация плоского поля ПН в пластинах произвольной геометрии.**

Также рассмотрены двумерные обратные задачи об идентификации плоского ПНС в пластине при планарных и изгибных колебаниях в рамках модели Тимошенко. Соотношения взаимности при этом имеют общий вид [4,5]

$$\int_S \left[ \sigma_{11}^{0(n)} K_{11}^{(n-1)} + \sigma_{22}^{0(n)} K_{22}^{(n-1)} + \sigma_{12}^{0(n)} K_{12}^{(n-1)} \right] dS = F^{(n-1)}, \quad (6)$$

где в случае планарных колебаний ядра и правая часть интегрального уравнения имеют вид:

$$K_{11}^{(n-1)} = (u_{1,1}^{(n-1)})^2 + (u_{2,1}^{(n-1)})^2, K_{22}^{(n-1)} = (u_{1,2}^{(n-1)})^2 + (u_{2,2}^{(n-1)})^2, K_{12}^{(n-1)} = 2(u_{1,1}^{(n-1)} u_{1,2}^{(n-1)} + u_{2,1}^{(n-1)} u_{2,2}^{(n-1)}), \\ F^{(n-1)} = \int_{l_\sigma} P_\alpha (u_\alpha^{(n-1)} - f_\alpha) dl_\sigma,$$

а в случае изгибных колебаний в рамках модели Тимошенко –

$$K_{11}^{(n-1)} = H \left[ (\theta_{1,1}^{(n-1)})^2 + (\theta_{2,1}^{(n-1)})^2 \right] + h (w_{s1}^{(n-1)})^2, K_{22}^{(n-1)} = H \left[ (\theta_{1,2}^{(n-1)})^2 + (\theta_{2,2}^{(n-1)})^2 \right] + h (w_{s2}^{(n-1)})^2, \\ K_{12}^{(n-1)} = 2 \left[ H (\theta_{1,1}^{(n-1)} \theta_{1,2}^{(n-1)} + \theta_{2,1}^{(n-1)} \theta_{2,2}^{(n-1)}) + h w_{s1}^{(n-1)} w_{s2}^{(n-1)} \right], F^{(n-1)} = - \int_{l_\sigma} P (w^{(n-1)} - f) dl_\sigma$$

**О численной реализации обратных задач.** Подход к реконструкции полей ПН основан на предварительном разбиении области пластины на сетку суперэлементов  $\{\Omega_k\}_{k=1}^N$ , на каждом из которых задана функция Эри

$\Phi_k|_{\Omega_k}(x_1, x_2)$ , через которую выражены неизвестные поправки к ПН. Представляя функции  $\Phi_k$  в виде линейной комбинации бигармонических полиномов, уравнение (6) сведём к плохо обусловленной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложения каждой функции  $\Phi_k|_{\Omega_k}$ ; для её решения использован метод регуляризации А.Н. Тихонова [5].

Результат реконструкции, найденный в классе кусочно-постоянных функций, сглаживался с помощью кубической сплайн-интерполяции. Во всех рассмотренных обратных задачах поиск начального приближения к неизвестной функции ПН осуществлялся в классе линейных функций на основе минимизации функционала невязки. Проведены

вычислительные эксперименты по реконструкции ПНС. Максимальная относительная погрешность между точным и восстановленным законом не превосходит 8%. Для большинства рассмотренных примеров второй частотный диапазон оказался более благоприятным с точки зрения точности результатов восстановления, по сравнению с первым и третьим. Выявлено, что при планарных колебаниях пластины нагружение касательной нагрузкой на свободных гранях пластины является более эффективным, чем нагружение нормальной нагрузкой.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (13-01-00196-а, 14-01-31393 мол\_а) и в рамках Программы фундаментальных исследований по стратегическим направлениям развития науки Президиума РАН №1 «Фундаментальные проблемы математического моделирования»

#### ЛИТЕРАТУРА

1. E. Trefftz. Zur theorie der stabilitat des elastischen gleichgewichts // ZAMM: Z. Angew. Math. Mech. 1933. V. 12, N 2. P. 160–165.
2. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1968. 400 с.
3. R.D. Nedin, A.O. Vatulyan, Inverse Problem of Non-homogeneous Residual Stress Identification in Thin Plates, Int. J. Solids Struct. 50 (2013) 2107-2114.
4. R.D. Nedin, A.O. Vatulyan, On the Reconstruction of Inhomogeneous Initial Stresses in Plates, in: H. Altenbach, V. Eremeyev (Eds.), Advanced Structured Materials. Shell-like Structures. Non-classical Theories and Applications, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2011, pp. 165-182.
5. R.D. Nedin, A.O. Vatulyan, Concerning one approach to the reconstruction of heterogeneous residual stress in plate, ZAMM: Z. Angew. Math. Mech. V. 94, 1-2 (2014) 142-149.

**Ватульян Александр Ованесович**, Профессор, доктор физ-мат. наук, зав. каф. теории упругости, ф-т математики, механики и компьютерных наук, Южный федеральный университет  
**Телефон:** +7-918-589-60-75; **Е-mail:** vatulyan@math.rsu.ru

# ТЕРМОПЛАСТИЧЕСКИЙ МЕХАНИЗМ ДЕГРАДАЦИИ ВОЛЬФРАМОВОЙ ПРЕГРАДЫ ПРИ ВЫСОКОСКОРОСТНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ ПЛАЗМЕННОЙ СТРУИ

*Воронин А.В., Судьбенков Ю.В., Семенов Б.Н.*

*Россия*

Представлены результаты исследований деградации преград из монокристаллического и порошкового вольфрама в результате воздействия импульсной плазменной струи. Проведено сравнение результатов компьютерного моделирования с экспериментом.

В настоящее время исследования процессов взаимодействия плазмы с защитными материалами активизировались в связи со строительством демонстрационной термоядерной установки на основе токамака ИТЭР. Эксперименты и расчёты показывают, что динамические тепловые нагрузки на первую стенку токамака-реактора при проявлении периферийных неустойчивостей могут составить  $3\text{-}30 \text{ GWt/m}^2$  в течение  $0.1\text{-}1 \text{ ms}$  [1,2]. Однако, для разработки и создания первой стенки реактора опытных данных о макроскопической деградации материалов явно недостаточно: необходимы дальнейшие исследования. В качестве одного из перспективных материалов стенки рассматривается вольфрам.

В экспериментах коаксиальный рельсотрон генерировал струю водородной плазмы плотностью  $3 \cdot 10^{22} \text{ m}^{-3}$ , скоростью  $100\text{-}200 \text{ km/s}$  в течение  $10\text{-}15 \text{ }\mu\text{s}$ . Плотность потока энергии могла достигать  $100 \text{ GWt/m}^2$ .

Результаты воздействия высокоскоростной плазменной струи на твёрдотельную преграду определяются, в основном, двумя причинами – передаваемым в преграду механическим импульсом струи и тепловой нагрузкой, параметры которой обусловлены сложным процессом теплообмена плазменной струи, экранирующего слоя возникающей пристеночной плазмы и преграды [2].

На рис.1 представлены характерные картины процессов разрушения поверхностного слоя преград из вольфрама. На поверхности облучённых образцов монокристалла W, помимо следов плавления, наблюдается квазипериодическая структура в виде ромбов с углом при вершине  $60^\circ$  (рис.1a) в монокристаллическом W, и в виде прямоугольников в порошковом W (рис.1c). Возникновение таких структур определяется интенсивным пластическим течением, сопровождаемым выходом дислокаций на поверхность по активным плоскостям скольжения [3].

Результаты анализа позволяют выделить три основных физико-механических процесса деградации исходных образцов: 1– испарение и оплавление поверхности; 2 – разрушение приповерхностного слоя на масштабах порядка  $150\text{-}250 \text{ мкм}$ ; 3 – пластическое течение и динамическая рекристаллизация в объёме образцов.

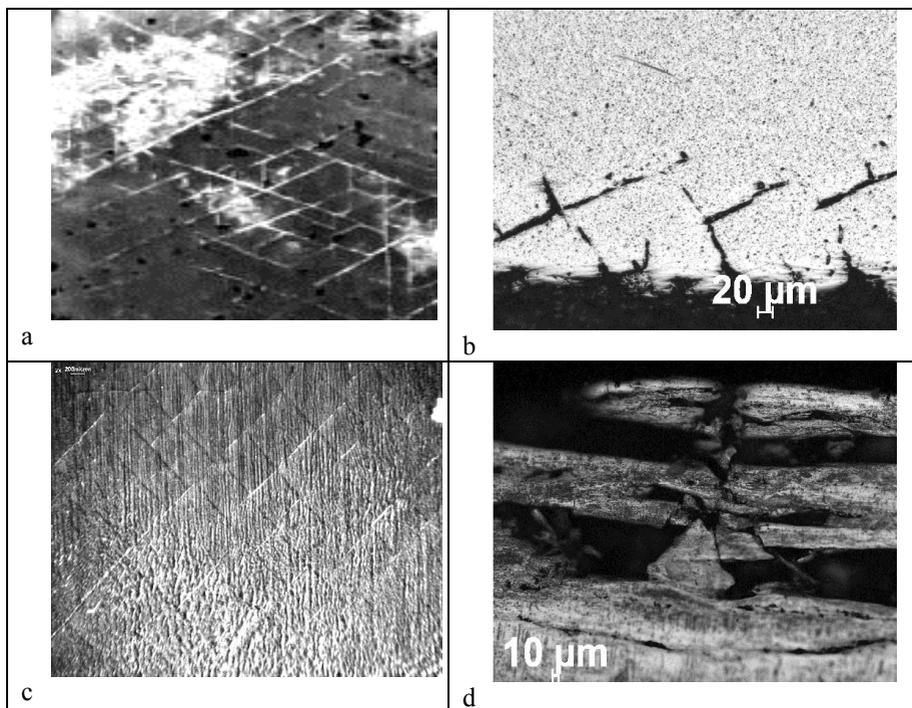


Рис.1. Дegradация поверхности монокристаллического -а, и порошкового вольфрама -с; разрушение приповерхностного слоя монокристаллического вольфрама -b; порошкового вольфрама -d.

Измеренная величина импульса напряжения, возбуждаемого ударом плазменной струи с интенсивностью  $0,78 \text{ MJ/m}^2$ , равнялась  $\sigma \cong 4,25 \text{ MPa}$ , что на порядок меньше пределов упругости и, тем более, прочности вольфрама, и следовательно, не может приводить к наблюдаемой картине разрушения.

Для анализа термомеханических процессов была построена конечно-элементная модель. Воздействие на поверхность вольфрамового диска ( $\text{Ø}20 \times 3 \text{ мм}$ ) задавалось в виде колоколообразного импульса теплового потока, параметры которого подбирались из решения тепловой задачи с учётом результатов экспериментов. Длительность нарастания теплового потока определяется длительностью плазменной струи, порядка  $15 \text{ μs}$ , а длительность спада, обусловленная сложными механизмами теплообмена, варьировалась.

Характер термомеханических процессов при воздействии теплового импульса на поверхность вольфрамового диска описывался численным

решением нестационарной задачи связанной термопластичности с учётом зависимости механических параметров от температуры.

На рис.2а приведено распределение температуры по толщине диска для разных моментов времени. Из результатов расчётов температуры и характера зависимости механических свойств вольфрама от температуры следует, что вблизи нагреваемой поверхности температура достигает значений, при которых предел текучести вольфрама мал.

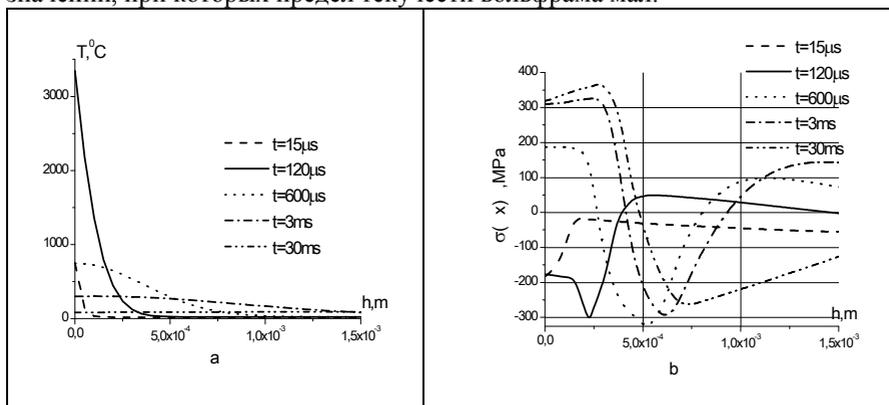


Рис.2. Распределение температуры по толщине для пяти моментов времени - а; распределение радиальных напряжений по толщине диска для различных моментов времени -б.

Поэтому сопротивление непрогретым материалом процессу расширения нагретого тонкого поверхностного слоя приводит к возникновению больших сжимающих напряжений, порождающих пластические деформации сжатия, которые достигают максимальных значений к концу действия теплового импульса. На рис.2b приведены распределения напряжений вдоль оси образца в различные моменты времени.

К моменту окончания импульса теплового воздействия ( $t = 120 \mu\text{s}$ ) пластические деформации, максимальные у поверхности диска, спадают до нулевого уровня уже на глубине примерно  $0,25 \text{ mm}$ , так как на этой глубине значительно уменьшается температура, вследствие чего возрастает предел текучести материала, что приводит к увеличению напряжения сжатия до максимальных значений (рис.2b).

По окончании воздействия теплового потока охлаждение приповерхностной области, в результате оттока тепла за счёт теплопроводности и конвективного теплообмена с внешней средой, приводит к упругой разгрузке этой области, порождающей большие напряжения растяжения. Напряжения растяжения в дальнейшем растут вследствие увеличения предела текучести с понижением температуры. Характер этого

процесса иллюстрируется изменениями распределения радиальных напряжений для моментов времени  $t > 120 \mu\text{s}$  (рис.2б).

В результате дальнейшего охлаждения величина пластических деформаций в приповерхностной области уменьшается, но значительно возрастают напряжения растяжения до значений сопоставимых с пределом прочности бездефектного вольфрама. К этому моменту времени за счет интенсивного размножения и движения дислокаций и связанного с этим процесса развития дефектов упаковки и образования пор прочность приповерхностного слоя значительно снижается. Поэтому достигаемый уровень напряжений растяжения достаточен для его разрушения.

Максимальных значений напряжения растяжения у поверхности достигают на временах порядка  $1 \div 30 \text{ms}$  (рис.2 б), то есть процесс разрушения поверхностного слоя начинается с времён нескольких сотен микросекунд и протекает в течение большого промежутка времени до единиц и десятков миллисекунд с момента плазменного воздействия, что подтверждается видеорегистрацией вольфрамовой мишени после воздействия плазменной струи в видимом и инфракрасном диапазоне спектра.

Определяющее влияние на величины напряжений у поверхности образцов оказывает градиент температуры. Величины термопластических напряжений в приповерхностном слое определяются конкуренцией скоростей ввода тепла и теплоотвода в материал.

Таким образом, при срыве плазменной струи в токамаке происходит как плавление и испарение поверхности защитной оболочки, так и разрушение приповерхностного слоя, обусловленное его интенсивным пластическим деформированием.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 12-01-00815 и гранта для государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации НШ-4294.2014.1.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Воронин А.В., Гусев В.К., Герасименко Я.А., Судьенков Ю.В. Измерение параметров плазменной струи в процессе облучения материалов. //ЖТФ. 2013. Вып.8. С.36-42.
2. Архипов Н.И., Васенин С.Г., Бахтин В.П., Житлухин А.М., Куркин С.М., Сафронов В.М., Топорков Д.А. Формирование экранирующего слоя при облучении твёрдотельных материалов мощными плазменными потоками // Физика плазмы. 1999. Т. 25. №3. С.263-273.
3. Савицкий Е.М., Бурханов Г.С. Металловедение сплавов тугоплавких и редких металлов. М.: Наука, 1971. 335с.

### **Сведения об авторах:**

**Воронин Александр Васильевич,**

Старший научный сотрудник, кандидат физико-математических наук,  
Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН

**Phone:** +7-812-2977121

**E-mail:** [voronin.mhd@mail.ioffe.ru](mailto:voronin.mhd@mail.ioffe.ru)

**Семенов Борис Николаевич,**

Доцент, кандидат физико-математических наук, Санкт-Петербургский  
государственный университет

**Телефон:** +7-812-4286989

**E-mail:** [Semenov@bs1892.spb.edu](mailto:Semenov@bs1892.spb.edu)

**Судьенков Юрий Васильевич,**

Старший научный сотрудник, кандидат физико-математических наук, Санкт-  
Петербургский государственный университет

**Телефон:** +7-812-4286989

**E-mail:** [sudenkov@land.ru](mailto:sudenkov@land.ru)

# РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В УПРУГОМ СЛОЕ ИЗ ПЬЕЗОАКТИВНОГО МАТЕРИАЛА КУБИЧЕСКОЙ СИММЕТРИИ

*Гараков В.Г., Григорян Л.Г.  
Армения*

Большинство задач распространения волн в упругой пьезоактивной среде рассматривалось на основе квазистатического подхода [1,2]. В статье (3) для пьезоактивной среды класса 6мм был предложен промежуточный (квазигиперболический) подход, который сохраняет свойство гиперболичности точных линейных уравнений упругости и электродинамики. Аналогичный подход был предложен в [4] для пьезоактивных материалов кубической симметрии.

В настоящей статье квазигиперболический подход применяется для исследовании антиплоской задачи волновода из пьезоактивного материала кубической симметрии. Изучается взаимодействие сдвиговых упругих и электромагнитных волн при учёте пьезоэффекта.

1. Упругий слой из материала кубической симметрии класса 23 в прямоугольной декартовой системе координат занимает область  $(-\infty < x < \infty, 0 \leq y \leq h, -\infty < z < \infty)$ .

Рассматривается антиплоская задача (волны сдвига)

$$u = v = 0, \quad w = w(x, y, t) \quad (1.1)$$

Уравнения распространения волн для пьезоэлектрической среды класса 2.3 в квазигиперболическом приближении, согласно [4], следующие:

$$c_{44}\Delta w + 2e_{14} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (1.2)$$
$$\Delta \varphi - \frac{2e_{14}}{\varepsilon} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

Здесь  $w$  – упругое перемещение сдвига (в направлении оси  $z$ ),  $\varphi$  – функция электрического потенциала,  $c_{44}$  – модуль сдвига,  $\rho$  – плотность материала,  $\varepsilon$  и  $\mu$  – диэлектрическая и магнитная проницаемости,  $e_{14}$  – пьезоэлектрический модуль,  $\Delta$  – двумерный оператор Лапласа.

В приведённой постановке материальные уравнения имеют вид

$$\sigma_{13} = c_{44} \frac{\partial w}{\partial x} + e_{15} \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \sigma_{23} = c_{44} \frac{\partial w}{\partial y} + e_{14} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (1.3)$$

$$D_1 = -\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x} + e_{15} \frac{\partial w}{\partial y}, \quad D_2 = -\varepsilon \frac{\partial w}{\partial y} + e_{14} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (1.4)$$

где  $\sigma_{13}, \sigma_{23}$  – касательные напряжения,  $D_1, D_2$  – компоненты индукции электрического поля.

В общем случае задача распространения электроупругих волн в слое требует совместного решения уравнений (1.2) и уравнений электродинамики в среде вне слоя ( $|y| > h$ ). Однако, возможны варианты граничных условий на поверхностях, ограничивающих слой, при которых указанные уравнения можно не рассматривать. Наиболее простые варианты граничных условий, определяющие задачу решения уравнений (1.2) от уравнений электродинамики для внешней среды при  $y = \text{const}$ , имеют вид:

$$\text{I. } \sigma_{23} = 0, \quad \varphi = 0 \text{ или } \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \varphi = 0 \quad (1.5)$$

$$\text{II. } \sigma_{23} = 0, \quad D_x = 0 \quad (1.6)$$

$$\text{III. } w = 0, \quad \varphi = 0 \quad (1.7)$$

$$\text{IV. } w = 0, \quad D_2 = 0 \text{ или } w = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad (1.8)$$

На плоскостях, ограничивающих слой  $y = 0$  и  $y = 1$ , могут быть заданы либо одинаковые условия из (1.5–1.8), либо их сочетания. Следовательно, согласно выбору граничных условий, возможны десять постановок задач.

2. Решение системы уравнений (1.2) представляются в виде гармонических волн, распространяющихся вдоль оси  $x$ .

$$w = f(y) \exp i(\omega t - kx), \quad \varphi = g(y) \exp i(\omega t - kx) \quad (2.1)$$

Подстановка (2.1) и (1.2) приводит к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно искомых функции  $f(y), g(y)$ :

$$f'' + k^2(\eta^2 - 1)f - \frac{2e_{14}}{c_{44}} ik g' = 0$$

$$g' + k^2(\eta_1^2 - 1)g - \frac{2e_{14}}{\varepsilon} ik f' = 0 \quad (2.2)$$

где приняты обозначения:

$$\eta^2 = \frac{p\omega^2}{k^2 c_{44}}, \quad \eta_1^2 = \frac{\varepsilon\mu\omega^2}{k^2} = \theta\eta^2, \quad \theta = \frac{\varepsilon\mu c_{44}}{\rho} \quad (2.3)$$

Представление решения системы (2.2) в виде

$$f = Ae^{kpy}, \quad y = Be^{kpy} \quad (2.4)$$

приводит к следующей системе уравнений относительно произвольных постоянных  $A$  и  $B$ :

$$(p^2 + \eta - 1)A - \frac{2e_{15}}{c_{44}}i_p B = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{2e_{14}}{\varepsilon}i_p A + (p^{2+0}\eta^2 - 1)B = 0$$

Из условия равенства нулю детерминанта системы (2.5) получается характеристическое уравнение:

$$p^4 - (2 - \eta^2 - \theta\eta^2 + \chi)p^2 + (\eta^2 - 1)(\theta\eta^2 - 1) = 0 \quad (2.6)$$

где  $\chi$  – коэффициент электромеханической связи

$$\chi = 4e_{14}^2 (\varepsilon c_{44}^{-1}) \quad (2.7)$$

После нахождения корней уравнения (2.7) получается общее решение системы (2.2):

$$f = A_1 e^{kp_1 y} + A_2 e^{-kp_1 y} + A_3 e^{kp_2 y} + A_4 e^{-kp_2 y} \quad (2.8)$$

$$g = B_1 e^{kp_1 y} - B_2 e^{-kp_2 y} + B_3 e^{kp_2 y} + B_4 e^{-kp_2 y},$$

где

$$p_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ 2 - \eta^2 - \theta\eta^2 \pm \chi \sqrt{(1 - \theta)^2 \eta^4 + 2\chi(1 - \eta^2)(1 - \theta\eta^2) + \chi^2} \right] \quad (2.9)$$

Произвольные постоянные  $A_k, B_k$  из (2.8), согласно системе (2.5), связаны формулами:

$$B_1 = -\alpha_1 A_1, \quad B_2 = \alpha_1 A_2, \quad B_3 = -\alpha_2 A_3, \quad B_4 = \alpha_2 A_4$$

$$\alpha_1 = i \frac{c_{44}}{2e_{14}} \frac{p_1^2 + \eta^2 - 1}{p_1}, \quad \alpha_2 = i \frac{c_{44}}{2e_{14}} \frac{p_2^2 + \eta - 1}{p_2} \quad (2.10)$$

Пусть на плоскостях, ограничивающих слой, заданы условия четвёртого варианта

$$w = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0, h \quad (3.1)$$

С учётом (2.1), эти условия имеют вид:

$$f = 0, \quad g' = 0 \quad \text{при } y = 0, h \quad (3.2)$$

Требую, чтобы решения (2.8) удовлетворяли условиям (3.1) при  $y = 0$  с учётом (2.10), получим:

$$f = c_1 \operatorname{sh} k p_1 y + c_2 \operatorname{sh} k p_2 y \quad (3.3)$$

$$g = -\alpha_1 p_1 c_1 \operatorname{sh} k p_1 y - \alpha_2 c_2 \operatorname{ch} k p_2 y$$

где  $c_1$  и  $c_2$  – новые произвольные постоянные, причём  $c_1 = 2A_1$ ,  $c_2 = 2A_3$ .

Удовлетворяя (3.3) граничным условиям (3.1) при  $y = h$ , получим систему однородных уравнений относительно произвольных постоянных  $c_1$   $c_2$ . Условие равенства нулю детерминанта этой системы приводит к дисперсионному уравнению:

$$(\alpha_2 p_2 - \alpha_1 p_1) \operatorname{sh} p_1 \xi \operatorname{sh} p_2 \xi = 0 \quad (3.4)$$

Уравнение (3.4) имеет решение только при условии

$$p_2 = i q_2, \quad q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ (2 - \eta^2 - \theta \eta^2 + x)^2 - 4(\eta^2 - 1)(\theta \eta^2 - 1) - (2 - \eta^2 - \theta \eta^2 + x)^{1/2} \right] \quad (3.5)$$

В этом случае из (3.4) следует:

$$\sin q_2 \xi = 0 \quad \text{и} \quad q_2 \xi = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.6)$$

Из (3.6) получается:

$$\eta^2 = \frac{1}{2\theta} \left[ (1 + \theta)(1 + \lambda_n^2) \pm \sqrt{(1 - \theta)^2 (1 + \lambda_n^2)^2 - 4x\lambda_n^2} \right]^{1/2} \quad (3.7)$$

В частном случае отсутствия пьезоэффекта из (3.7) следует:

$$\eta_+^2 = \theta^{-1} (1 + \lambda_n^2), \quad \eta_-^2 = 1 + \lambda_n^2. \quad (3.8)$$

Первый корень соответствует фазовой скорости электромагнитной волны, второй – упругой волне. Из (3.7) также следует, что учёт пьезоэффекта приводит к уменьшению скорости квазиэлектромагнитной волны ( $\eta_+$ ) и увеличению скорости квазиупругой волны ( $\eta_-$ ). В

предельном случае  $\theta \rightarrow 0$ , получается фазовая скорость электроупругой волны в квазистатическом приближении

$$\eta^2 = 1 + \lambda_n^2 \left( 1 + \frac{\chi}{1 + \lambda_n^2} \right). \quad (3.9)$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 472с.
2. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. Некоторые задачи электромагнитоупругости пластин. Ереван: Изд ЕГУ, 1991. 144с.
3. Yang J.S. Bleustein–Gulyaev waves in piezoelectromagnetic material. //Intern. Journ. of Applied Electromagnetics and Mechanics. 2000. 12. P.235- 240.
4. Белубекян М.В. Разделение волн электромагнитного поля для антиплоской задачи пьезоэлектрика класса 23. //В сб.: «Актуальные проблемы механики сплошной среды». Ереван: Изд ЕГУАС, 2010. Т.1. С.138-142.

### Сведения об авторах:

**Гараков Владимир Герасимович**, старший научный сотрудник Института механики НАН Армении.

**Адрес:** 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2. **Тел.:** (+37493) 338166,

**E-mail:** [garakov@yandex.ru](mailto:garakov@yandex.ru)

**Григорян Левон Гагикович**, аспирант Института механики НАН Армении  
Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2. **Тел.:** (+37493) 111317

**E-mail:** [levon1.grigoryan@gmail.com](mailto:levon1.grigoryan@gmail.com)

# НАПРЯЖЁННОЕ СОСТОЯНИЕ КОМПОЗИТА В ВИДЕ ПАКЕТА ИЗ ПРОИЗВОЛЬНОГО КОНЕЧНОГО ЧИСЛА УПРУГИХ СЛОЁВ-ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ ПРИ АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

*Гаспарян А.В., Давтян З.А.  
Армения*

При помощи конечного синус-преобразования Фурье рассматривается задача о напряжённом состоянии композита при антиплоской деформации, представляющего собой кусочно-однородное тело в виде пакета из произвольного конечного числа слоёв-прямоугольников с различными упругими и геометрическими характеристиками, вертикальные кромки которой жёстко защемлены.

**1. Постановка задачи и вывод определяющих уравнений.** Пусть композит, отнесённый к правой прямоугольной системе координат  $Oxyz$ , представляет собой пакет из произвольного конечного числа  $n$  упругих слоёв-прямоугольников (рис 1.):

$$\Omega_k = \{0 \leq x \leq l, \quad h_{k-1} \leq y \leq h_k, \quad -\infty < z < \infty\} \quad (k = \overline{1, n})$$

с модулями сдвига  $G_k$ . К нижней и верхней граням композита  $y = h_0$  и  $y = h_n$  приложены касательные силы интенсивностей  $\tau_0(x)$  и  $\tau_n(x)$ , соответственно, обеспечивающие состояние антиплоской деформации с базовой плоскостью  $Oxy$ , а вертикальные кромки прямоугольников  $x = 0$  и  $x = l$  жёстко защемлены, т.е.

$$\begin{aligned} \tau_{yz} \Big|_{y=h_0} &= \tau_0(x), & \tau_{yz} \Big|_{y=h_n} &= \tau_n(x) & (-\infty < x < \infty) \\ w_k(x, y) \Big|_{x=0} &= w_k(x, y) \Big|_{x=l} = 0, & & & (k = \overline{1, n}) \end{aligned}$$

Здесь  $\tau_{yz}$  – компонента касательных напряжений, а  $w_k = w_k(x, y)$  – единственная отличная от нуля компонента смещений в направлении оси  $Oz$ . Требуется определить компоненты напряжений и смещений в композите, когда функции  $\tau_0(x)$  и  $\tau_n(x)$  наперёд заданы.

Отметим, что аналогичные задачи рассмотрены в работах [1, 2].

Для вывода определяющих уравнений задачи обозначим неизвестные касательные контактные напряжения на гранях  $y = h_{k-1}$  и  $y = h_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ) слоя  $\Omega_k$  через  $\tau_{k-1}(x)$  и  $\tau_k(x)$ , соответственно. Тогда, используя закон

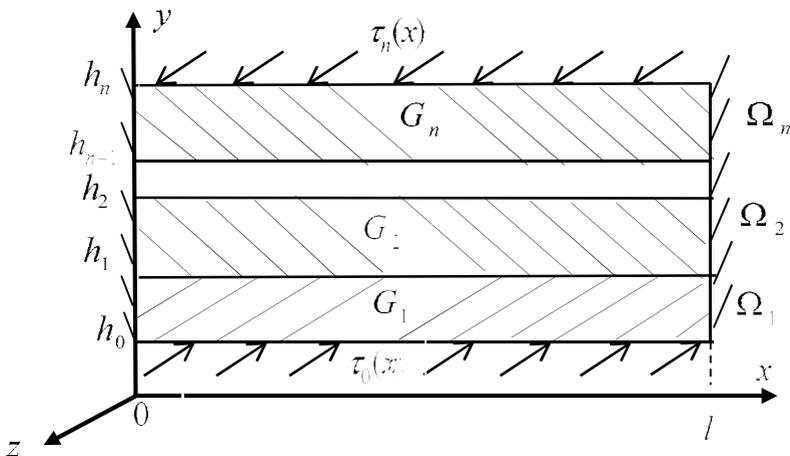


Рис. 1

Гука, для слоя  $\Omega_k$  получим следующую граничную задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_k}{\partial y^2} = 0 & (0 < x < l, h_{k-1} < y < h_k) \\ w_k(x, y)|_{x=0} = w_k(x, y)|_{x=l} = 0 \\ \tau_{yz}|_{y=h_{k-1}} = G_k \frac{\partial w_k}{\partial y} \Big|_{y=h_{k-1}} = \tau_{k-1}(x), \quad \tau_{yz}|_{y=h_k} = G_k \frac{\partial w_k}{\partial y} \Big|_{y=h_k} = \tau_k(x) \quad (k = \overline{1, n}). \end{cases} \quad (1.1)$$

Для решения граничной задачи (1.1) рассмотрим конечное синус-преобразование Фурье [4]

$$\{\bar{\tau}_k(n); \bar{w}_k(n, y)\} = \int_0^l \{\tau_k(x); w_k(x, y)\} \sin(\pi n x / l) dx \quad (n = 1; 2; 3 \dots),$$

и формулы обращения

$$w_k(x, y) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{w}_k(n, y) \sin(\pi n x / l) \quad \tau_k(x) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\tau}_k(n) \sin(\pi n x / l).$$

Тогда, при помощи интегрирования по частям, после простых преобразований граничная задача (1.1) в синус-трансформантах Фурье примет вид:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \bar{w}_k}{dy^2} - \frac{\pi^2 n^2}{l^2} \bar{w}_k = 0 & (h_{k-1} < y < h_k, \quad k = \overline{1, n}) \\ G_k \left. \frac{d \bar{w}_k}{dy} \right|_{y=h_{k-1}} = \bar{\tau}_{k-1}(n), \quad G_k \left. \frac{d \bar{w}_k}{dy} \right|_{y=h_k} = \bar{\tau}_k(n). \end{cases} \quad (1.2)$$

Общее решение дифференциального уравнения из (1.2) представляется формулой:

$$\bar{w}_k = \bar{w}_k(\lambda, y) = A_k \operatorname{ch} \frac{\pi n y}{l} + B_k \operatorname{sh} \frac{\pi n y}{l} \quad (h_{k-1} \leq y \leq h_k), \quad (1.3)$$

где коэффициенты  $A_k$  и  $B_k$  определяются из граничных условий задачи (1.2):

$$A_k = \frac{l}{\pi n G_k} \frac{\bar{\tau}_k \operatorname{ch} \frac{\pi n h_{k-1}}{l} - \bar{\tau}_{k-1} \operatorname{ch} \frac{\pi n h_k}{l}}{\operatorname{sh} \frac{\pi n (h_{k-1} - h_k)}{l}} \quad (k = \overline{1, n})$$

$$B_k = \frac{l}{\pi n G_k} \frac{\bar{\tau}_{k-1} \operatorname{sh} \frac{\pi n h_k}{l} - \bar{\tau}_k \operatorname{sh} \frac{\pi n h_{k-1}}{l}}{\operatorname{sh} \frac{\pi n (h_{k-1} - h_k)}{l}} \quad (1.4)$$

Далее, при помощи (1.3) запишем условия непрерывности смещений на участках контакта  $y = h_k$  слоёв  $\Omega_k$  и  $\Omega_{k+1}$ :

$$A_k \operatorname{ch} \frac{\pi n h_k}{l} + B_k \operatorname{sh} \frac{\pi n h_k}{l} = A_{k+1} \operatorname{ch} \frac{\pi n h_k}{l} + B_{k+1} \operatorname{sh} \frac{\pi n h_k}{l} \quad (k = \overline{1, n-1}) \quad (1.5)$$

Учитывая (1.4), из (1.5) получим следующую систему конечно-разностных уравнений второго порядка:

$$a_k \bar{\tau}_{k-1} - (b_k + b_{k+1}) \bar{\tau}_k + a_{k+1} \bar{\tau}_{k+1} = 0 \quad (k = \overline{1, n-1})$$

$$a_k = 1 / G_k \operatorname{sh}(\frac{\pi n d_k}{l}), \quad b_k = \operatorname{cth}(\frac{\pi n d_k}{l}) / G_k, \quad (1.6)$$

$$d_k = h_k - h_{k-1} \quad (k = \overline{1, n}).$$

Для сведения (1.6) к конечно-разностным уравнениям первого порядка положим

$$a_k \bar{\tau}_{k-1} - b_k \bar{\tau}_k = \omega_k \quad (1.7)$$

$$a_{k+1} \bar{\tau}_{k+1} - b_{k+1} \bar{\tau}_k = \chi_{k+1} \quad (k = \overline{1, n-1}). \quad (1.8)$$

Тогда система уравнений (1.6) перейдет в систему

$$\omega_k + \chi_{k+1} = 0 \quad (k = \overline{1, n-1}). \quad (1.9)$$

Таким образом, решение поставленной задачи сводится к решению конечно-разностных уравнений первого порядка (1.7), (1.8) и (1.9).

После решения этих уравнений по формуле (1.4) будут определены коэффициенты  $A_k$  и  $B_k$ , а затем по формуле (1.3) – функции

$$\bar{w}_k(\lambda, y) = \frac{l}{\pi n G_k} \frac{\bar{\tau}_k \operatorname{ch} \frac{\pi n (y - h_{k-1})}{l} - \bar{\tau}_{k-1} \operatorname{ch} \frac{\pi n (h_k - y)}{l}}{\operatorname{sh} \frac{\pi n (h_k - h_{k-1})}{l}}. \quad (1.10)$$

При помощи формулы обращения определяются функции  $w_k(x, y)$  ( $k = \overline{1, n}$ ), а затем – напряжения в любой точке композита.

**2. Решение определяющих конечно-разностных уравнений первого порядка.** Решения конечно-разностных уравнений (1.7) и (1.8) построим известным методом [3]. Сначала уравнение (1.7) представим в виде

$$\bar{\tau}_k = [1 - P(k)] \bar{\tau}_{k-1} + Q(k), \quad P(k) = \frac{b_k - a_k}{b_k}, \quad Q(k) = -\frac{\omega_k}{b_k} \quad (k = \overline{1, n-1}) \quad (2.1)$$

Решение (2.1) имеет вид:

$$\bar{\tau}_k = -\sum_{i=1}^k A_i \frac{C_i}{C_k} \omega_i + \frac{\bar{\tau}_0}{C_k}, \quad (k = \overline{1, n-1}) \quad (2.2)$$

$$A_i = G_i \operatorname{th} \left( \frac{\pi n}{l} d_i \right), \quad C_i = \prod_{r=1}^i \operatorname{ch} \left( \frac{\pi n}{l} d_r \right), \quad (i = \overline{1, n}).$$

Аналогичным образом решение уравнения (1.8) представляется в виде

$$\bar{\tau}_k = \sum_{i=k}^{n-1} B_i \frac{D_{i+1}}{D_k} \omega_i + \frac{\bar{\tau}_n}{D_k} \quad (k = \overline{1, n-1}) \quad (2.3)$$

$$B_i = G_{i+1} \operatorname{sh} \left( \frac{\pi n}{l} d_{i+1} \right), \quad D_i = \prod_{r=i}^{n-1} \operatorname{ch} \left( \frac{\pi n}{l} d_{r+1} \right), \quad (i = \overline{1, n}).$$

Теперь приравнявая выражения (2.2) и (2.3), относительно неизвестных  $\omega_i$  ( $i = \overline{1, n-1}$ ) получим следующую систему линейных алгебраических

уравнений:

$$-\sum_{i=1}^k A_i \frac{C_i}{C_k} \omega_i + \frac{\bar{\tau}_0}{C_k} = \sum_{i=k}^{n-1} B_i \frac{D_{i+1}}{D_k} \omega_i + \frac{\bar{\tau}_n}{D_k} \quad (k = \overline{1, n-1}). \quad (2.4)$$

Систему (2.4) можно преобразовать к системе с левой треугольной матрицей, решение которой подробно описано в [1].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гаспарян А.В., Мхитарян С.М. О напряжённом состоянии композита в виде пакета из произвольного конечного числа упругих слоёв при антиплоской деформации. //Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. № 2. С.10-20.
2. Гаспарян А.В., Давтян З.А. О напряжённом состоянии композита в виде пакета из произвольного конечного числа упругих круговых цилиндров при антиплоской деформации. //В сб.научных трудов Международной конференции: «Актуальные проблемы механики сплошной среды». 4–8 октября 2010. Дилижан, Армения. Т.1. С.167-171.
3. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967. 375с.
4. Снеддон И. Преобразования Фурье. М.: ИЛ, 1955. 667с.

#### Сведения об авторах:

##### **Гаспарян Ануш Вараздатовна,**

К.ф.м.-н., научный сотрудник, Институт механики НАН Армении

**Адрес:** 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2

**Тел.:** (+37410) 52-48-90; **E-mail:** [anush@mechins.sci.am](mailto:anush@mechins.sci.am)

##### **Давтян Завен Азибекевич,**

К.ф.м.-н., старший научный сотрудник, Институт механики НАН Армении

**Адрес:** 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2

**Тел.:** (+37410) 52-48-90; **E-mail:** [anush@mechins.sci.am](mailto:anush@mechins.sci.am)

# СДВИГОВЫЕ ВОЛНЫ В АНИЗОТРОПНОЙ ОДНОНАПРАВЛЕННОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ

*Гачкевич А., Казарян К., Терзян С.*

*Украина, Армения*

Исследован вопрос распространения упругих сдвиговых волн Флоке в однонаправленной периодической анизотропной упругой среде моноклинной системы. Получены дисперсионные уравнения, определяющие частотные зоны запираания волн Флоке.

Возможность существования частотных зон запираания сдвиговых волн Флоке в упругой однонаправленной периодической изотропной среде установлена в работах [1,2], где приведён и обзор работ по этой тематике. Антиплоская деформация анизотропного упругого тела моноклинной системы рассмотрена в [3,4].

Рассмотрим анизотропную упругую среду моноклинной системы в декартовой системе координат  $(x, y, z)$ , когда ось  $z$  является двухкратной осью симметрии [5]. Принимая  $\partial/\partial z = 0$ , придём к отдельным уравнениям, характеризующим плоскую и антиплоскую задачи. Антиплоское состояние характеризуется следующими соотношениями и уравнениями:

$$\sigma_{xz} = G \frac{\partial u_z}{\partial x} + \Gamma \frac{\partial u_z}{\partial y}; \sigma_{yz} = \Gamma \frac{\partial u_z}{\partial x} + R \frac{\partial u_z}{\partial y}; \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}. \quad (1)$$

Здесь  $\sigma_{xz}, \sigma_{yz}$  – механические напряжения,  $u_z$  – компонента вектора упругих перемещений,  $\rho$  – удельная плотность материала,  $G = c_{44}, R = c_{55}, \Gamma = c_{45}$ .

Относительно функции  $u_z(x, y)$  имеем следующее уравнение:

$$G \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + 2R \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} + \Gamma \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}; \quad (2)$$

Рассмотрим теперь однонаправленную вдоль оси  $x$  периодическую систему, состоящую из двух различных анизотропных материалов. Основная периодически чередующаяся ячейка с периодом  $d = a + b$  выбирается следующим образом: материал  $j = 1$  относится к области  $-a < x < 0, -\infty < y < \infty$ , материал  $j = 2$  относится к области  $0 < x < b, -\infty < y < \infty$ .

Исследование проведём на основе теории Флоке [6]. Согласно этой теории, задача распространения сдвиговой SH волны в бесконечной среде должна быть рассмотрена в области  $-a < x < b$ ,  $-\infty < y < \infty$  при определённых граничных условиях, которые будут сформулированы ниже. Представляя решения в виде волны

$$u_j(x, y, t) = u_{0j}(x) \exp[i(py - \omega t)], \quad (3)$$

где  $p$  – волновое число,  $\omega$  – частота волны, придём к следующим уравнениям относительно функций  $u_{0j}(x)$ :

$$G_j \frac{d^2 u_{0j}}{dx^2} + 2ipR_j \frac{du_{0j}}{dx} + (\rho_j \omega^2 - \Gamma_j p^2) u_{0j} = 0 \quad (4)$$

Решения этих уравнений имеют вид:

$$u_{0j}(x) = \exp(-ipr_j x) (A_j \cos(q_j x) + B_j \sin(q_j x)) \quad (5)$$

Соответствующие этим функциям тангенциальные напряжения  $\sigma_{xz0j}$  запишутся как

$$\sigma_{xz0j}(x) = \exp(-ipr_j x) G_j q_j (B_j \cos(q_j x) - A_j \sin(q_j x)). \quad (6)$$

Здесь приняты обозначения:

$$r_j = \frac{R_j}{G_j}; \quad q_j = \sqrt{\frac{\rho_j \omega^2}{G_j} - A_j p^2}; \quad A_j = \frac{\Gamma_j}{G_j} - r_j^2$$

Отметим, что для анизотропной среды  $A_j > 0$ .

Эти решения должны быть рассмотрены совместно с условиями контакта на линии раздела двух материалов  $x = 0$  и условиями Флоке.

Условия контакта:

$$u_{10}(0) = u_{20}(0); \quad \sigma_{xz01}(0) = \sigma_{xz01}(0) \quad (7)$$

Условия Флоке:

$$u_{10}(-a) = \lambda u_{20}(b); \quad \sigma_{xz01}(-a) = \lambda \sigma_{xz01}(b) \quad (8)$$

Здесь  $\lambda = \exp(ikd)$ ,  $k$  – волновое число Флоке.

Удовлетворяя граничным условиям (7,8), получим линейную однородную систему уравнений относительно коэффициентов  $A_1, A_2, B_1, B_2$ . Чтобы эта система имела нетривиальное решение, её определитель должен быть равен нулю, откуда получим следующее дисперсионное уравнение:

$$e^{ip(ar_1+br_2)} G_1 G_2 q_1 q_2 + e^{-ip(ar_1+br_2)} G_1 G_2 q_1 q_2 \lambda^2 - 2G_1 G_2 q_1 q_2 \lambda \cos(aq_1) \cos(bq_2) + G_1^2 q_1^2 \lambda \sin(aq_1) \sin(bq_2) + G_2^2 q_2^2 \lambda \sin(aq_1) \sin(bq_2) = 0,$$

которое с учётом  $\lambda^{-1} + \lambda = 2 \cos(kd)$  запишем как

$$\cos(dk - \alpha) = F(\omega); \quad \alpha = p(ar_1 + br_2) \quad (9)$$

$$F(\omega) = \cos(aq_1) \cos(bq_2) - \frac{1}{2} \left( \frac{G_1 q_1}{G_2 q_2} + \frac{G_2 q_2}{G_1 q_1} \right) \sin(aq_1) \sin(bq_2).$$

В случае однородной (непериодической среды) дисперсионное уравнение примет вид:

$$k = p \left[ \frac{R}{G} \pm \sqrt{\frac{\rho \omega^2}{p^2 G} - \left( \frac{\Gamma G - R^2}{G^2} \right)} \right],$$

В диапазоне частот  $\omega < p \sqrt{\rho G^{-1} (\Gamma G - R^2)}$  (cut-off frequencies) волновое число  $k$  не является действительным и, следовательно, в этом диапазоне частот вдоль оси  $x$  сдвиговые волны не распространяются. Помимо этого диапазона, в периодических структурах существуют и другие области частот (gap frequencies), где также нет распространяющихся волн.

Дисперсионное уравнение (9) при заданных  $\omega, p$  определяет волновое число  $k$ . Если имеются области значений  $\omega$ , для которых  $|F(\omega, p)| > 1$ , то в этой области частот распространение сдвиговых волн не имеет места (в этом случае волновое число  $k$  также не является действительным).

На рис. 1-3 приведены дисперсионные кривые зависимости безразмерной частоты  $\Omega$  от безразмерного волнового вектора в первой зоне Брлюллоэна ( $-\pi + \alpha < k_0 < \pi + \alpha$ ) при фиксированных значениях волнового вектора  $p_0$

$$\Omega = \frac{d\omega}{2} \sqrt{\frac{\rho_1}{G_1}}; \quad k_0 = kd, \quad p_0 = pd$$

Кривые построены для анизотропных материалов с данными  $G_1 = 4G_2; \rho_1 = 0.7\rho_2, A_1 = 1.8; A_2 = 0.6; r_1 = 0.7; r_2 = 1.3; a = b; .$

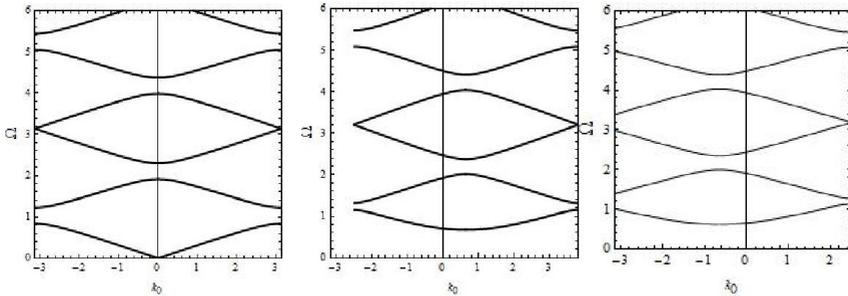


Рис.1-3 Дисперсионные кривые для случаев  $p_0 = 0, p_0 = 1, p_0 = -1$

Области значений частот, где прямые  $\Omega = \text{const}$  не пересекают дисперсионные кривые, являются зонами запретных частот, при которых сдвиговая волна не распространяется. Отметим, что вследствие анизотропии, в отличие от изотропного случая и  $p_0 = 0$ , симметричная структура дисперсионных кривых нарушается. Отметим также, что расположение зон запретных частот существенно зависит как от степени анизотропии материалов сред, так и от угла наклона волны (параметра  $p_0$ ) к оси  $x$ .

**Заключение.** Для сдвиговых упругих волн Флоке, распространяющихся в периодической среде, состоящей из двух различных анизотропных материалов моноклинной системы, получено дисперсионное уравнение зависимости частоты волны от волнового вектора. Для конкретного класса материалов приведены дисперсионные кривые, иллюстрирующие зоны запретных частот, при которых сдвиговая волна не распространяется и установлен несимметричный характер этих кривых.

Работа выполнена в рамках гранта 13-2С005 Государственного комитета по науке МОН РА.

## ЛИТЕРАТУРА

1. A.Velo, E. Bruder, N. Rodriguez, G. Gazonas, E. Bruder, Recursive Dispersion Relations in One-Dimensional Periodic Elastic Media, SIAM //Journal on Applied Mathematics, Vol. 69, No. №3, 2008. p. 670–689.
2. Аветисян А.С., Казарян К.Б. Волны в «фонон-фотон» кристаллах и импеданс. //В сб.: «Проблемы механики деформируемого твёрдого тела», посвящ. 90-летию академика НАН Армении С.А. Амбарцумяна. Ереван: 2012. С.15-22.
3. Ma. C. C., Antiplane Problems of Monoclinic Material, ASCE J.Eng. Mech., 118, 1992, pp. 1765–1782.
4. Lin. R,L, Ma, C. C, Antiplane Deformations for Anisotropic Multilayered Media by Using the Coordinate Transform Method. //Journal of Applied Mechanics . ASME ,2000, Vol. 67, p.597-605.
5. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 866с.
6. Brillouin L, Parodi M., Wave Propagation in Periodic Structures, Dover, New York: 1953, p. 260.

### **Сведения об авторах:**

**Гачкевич Александр**, заведующий отделом Института прикладных проблем механики и математики, доктор физико-математических наук, профессор, Львов, Украина, **E-mail:** dept13@iapmm.lviv.ua

**Казарян Карен**, главный научный сотрудник Института механики НАН Армении, доктор физико-математических наук, профессор.  
**E-mail:** kghazaryan@mechins.sci.am,

**Терзян Саркис**, старший научный сотрудник Института механики НАН Армении, кандидат физико-математических наук.  
**E-mail:** sat\_and\_21@yahoo.com

# ДИНАМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЗМА ШАРНИРНОГО ЧЕТЫРЕХЗВЕННИКА С УПРУГИМ ШАТУНОМ

Геворкян Г.А.

*Армения*

Предлагаются результаты динамического анализа механизма шарнирного четырехзвенника с упругим шатуном. Рассмотрен случай параллелограмма как одной из разновидностей сборки предельных шарнирных четырехзвенников. Приводятся графики зависимостей обобщенной координаты и упругих перемещений шатуна механизма параллелограмма во времени.

**1. Введение.** Оптимальному динамическому анализу многозвенных механизмов, содержащих в кинематической цепи упругие звенья, посвящается ряд публикаций [1 – 6]. Принципиальной стратегией, заложенной в основу функционирования расчётных алгоритмов, выступает обобщенный метод Ньютона-Эйлера, или стратегия без обращения матрицы масс, эффективность применения которой по отношению к стратегиям, использующим процедуру обращения матрицы масс, доказана в работах [1 – 5].

Здесь предстоит рассмотреть механизм параллелограмма как разновидность одной из двух возможных вариантов сборки предельных шарнирных четырехзвенников (четырёхшарнирников).

**2. Математическая модель упругого механизма.** Математическое описание исследуемой упругой динамической системы (рис. 1) с внешними геометрическими связями предполагает построение её кинематической и динамической моделей. Формальная запись этих моделей в терминах классической механики сводится к составлению уравнений кинематических связей звеньев [1], а именно,

$$\begin{cases} {}^i\vec{V}_i = {}^iT_{i-1} \cdot {}^{i-1}\vec{V}_{i-1} + {}^iT_{i-1} \cdot {}^{i-1}\Phi_{i-1} \cdot \vec{q}_{i-1}^e + \dot{q}_i^r \vec{a}_i, & i=1, \dots, n; \\ {}^i\vec{V}_i = {}^iT_{i-1} \cdot {}^{i-1}\vec{V}_{i-1} + {}^iT_{i-1} \cdot {}^{i-1}\Phi_{i-1} \cdot \vec{q}_{i-1}^e + \dot{q}_i^r \vec{a}_i + {}^i\vec{h}_i, & i=1, \dots, n, \end{cases} \quad (1)$$

равно как и к формированию дифференциальных уравнений движения [2], т.е.

$$\begin{bmatrix} M_{rr} & M_{r\lambda} \\ M_{\lambda r} & M_{\lambda\lambda} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{Q}}^r \\ \ddot{\boldsymbol{\lambda}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\Gamma} + \bar{\mathbf{E}}_r \\ \bar{\mathbf{E}}_\lambda^* \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где  $\ddot{\mathbf{Q}}^r = [\ddot{q}_1^r, \ddot{q}_2^r, \dots, \ddot{q}_n^r]^T$  и  $\bar{\Gamma} = [\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n]^T$ , причём второе векторное уравнение в системе (2) выражает в дифференциальной форме уравнения внешних геометрических связей исследуемого упругого механизма (рис. 1):

$$\begin{cases} q_1^r = \pi + q_3^r; \\ q_2^r = -q_1^r. \end{cases} \quad (3)$$

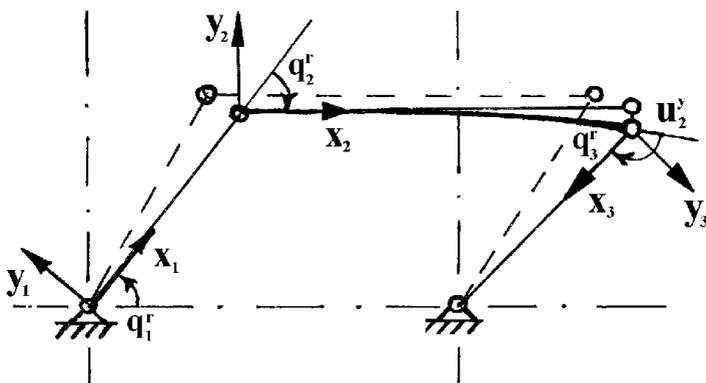


Рис. 1

В прикладной интерпретации математическая модель (1) – (2) упругой динамической системы с простой замкнутой кинематической цепью преобразуется в соответствующий алгоритм численного динамического анализа упругих механизмов [2]:

1. Кинематический расчёт звеньев для множества  $\{M\}$  в соответствии с (1) по первому восходящему рекурсивному обороту обобщённого метода Ньютона-Эйлера [1].

2. Определение на основании уравнений (2) обобщённых ускорений в кинематических парах системы, соответствующих подмножеству  $\{M_1\}$ , приводных усилий – в парах, отображаемых подмножеством  $\{M_2\}$ , а также множителей Лагранжа [2]:

$$\bar{X} = R^{-1} \cdot \bar{E},$$

$$\dim(R) = (n + m) \times (n + m); \quad \dim(\bar{X}) = \dim(\bar{E}) = n + m \quad (4)$$

с учётом принятых в формулировке (4) обозначений [2], т.е.

$$R = \begin{bmatrix} M_{rr} & M_{r\lambda} \\ M_{\lambda r} & M_{\lambda\lambda} \end{bmatrix},$$

$$\bar{X} = [(\bar{Q}_X^r + \bar{\Gamma})^T, \bar{\lambda}^T]^T \quad \text{и} \quad \bar{E} = [(\bar{E}_r^X)^T, (\bar{E}_\lambda^X)^T]^T.$$

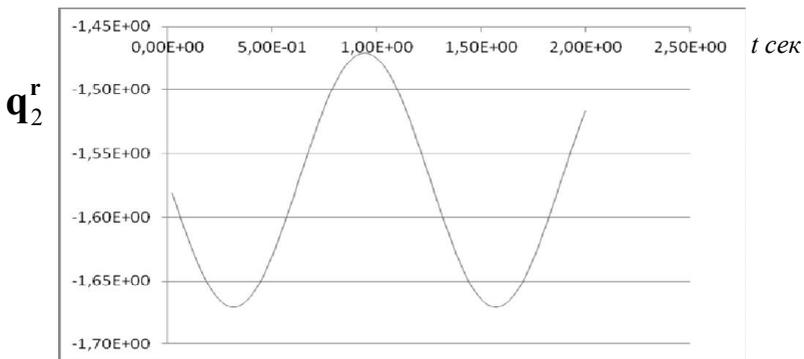
3. Динамический расчёт звеньев для множества  $\{M\}$  согласно (1) по третьему восходящему рекурсивному обороту обобщённого метода Ньютона-Эйлера [1].

**3. Результаты алгоритмической реализации.** В заключение предлагается тест численного моделирования движения предельного шарнирного четырёхзвенника, для которого  $l_1 \equiv l_3$ .

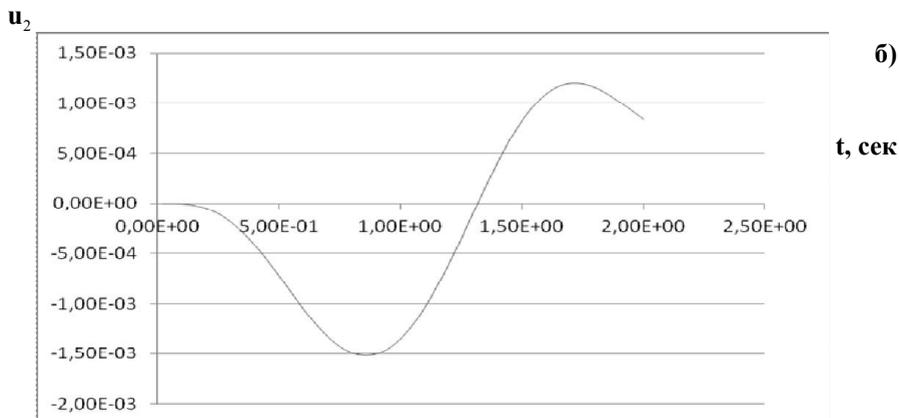
Геометрические характеристики звеньев круглого поперечного сечения радиуса  $r = 3.0 \cdot 10^{-3}$  м предельного четырёхшарнирного механизма (рис. 1) принимаются равными  $l_1 = l_3 = 0.1$  м и  $l_2 = 0.5$  м. Первое и третье звенья механизма параллелограмма предполагаются абсолютно жёсткими, а второе звено – линейно-упругим. Задаются также и физико-механические характеристики звеньев механизма:  $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 7800$  кг / м<sup>3</sup> и  $E_2 = 200$  МПа. Закон движения входного звена выражается в виде следующей периодической функции времени:

$$q_1^r(t) = \frac{\pi}{2} + 0.1 \cdot l_3 \sin 5t. \quad (5)$$

Результаты численной реализации примера приводятся в форме зависимостей обобщённой координаты  $q_2^r$  и упругих перемещений  $u_2$  во времени на рис. 2, (а и б), соответственно.



а)



б)

Рис. 2

## ЛИТЕРАТУРА

1. Саркисян Ю.Л., Степанян К.Г., Азуз Н., Геворкян Г.А. Динамический анализ упругих манипуляторов обобщённым методом Ньютона-Эйлера // Изв. НАН РА. Сер.т.н. и ГИУА. 2004. Т 57. №1. С.3-10.
2. Геворкян Г.А. Динамический анализ упругих древовидных механических систем в присутствии внешних голономных связей // Information Technologies and Management. Encyclopedia-Armenica. 2004. №4. С.36 - 43.
3. Саркисян Ю.Л., Степанян К.Г., Геворкян Г.А. Динамический анализ упругих древовидных механических систем без внешних связей // Изв. НАН РА. Сер.т.н. и ГИУА. 2006. Т.59. №1. С. 3-9.

4. Геворкян Г.А. Динамический анализ пространственных упругих манипуляторов обобщённым методом Ньютона-Эйлера // Сб.Н.Т. Межд. н.-т. конф., посв. 65-л. деп. «Машиностроение» ГИУА. 2010. С.126 -128.
5. Геворкян Г.А. Приложение обобщённого метода Ньютона-Эйлера к задачам оптимального управления упругих механизмов // Изв.НАН РА. Сер.т.н. и ГИУА. 2010. Т.63. №2. С.133-138.
6. Геворкян Г.А. Динамическое моделирование механизмов с упругими звеньями переменной длины // Вестник ГИУА. Сер.: Механика, Машиноведение, Машиностроение. 2014. –Вып.17. №2. С.34-41.

**Сведения об авторе:**

**Геворкян Грант Араратович, к.т.н,**

научный сотрудник Института механики НАН Армении

Тел.: (374 10) 390 301 (дом.), (374 96) 390 315 (моб.),

Е – mail: [hrgevorkian@mail.ru](mailto:hrgevorkian@mail.ru)

# ЗАДАЧА УСТОЙЧИВОСТИ ОРТОТРОПНОЙ КОЛОННЫ ПЕРЕМЕННОГО РАДИУСА С УЧЁТОМ ДЕФОРМАЦИЙ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ

*Геворкян Г.З.  
Армения*

Получены уравнения задачи устойчивости цилиндрически ортотропной круглой колонны переменного радиуса с учётом влияния деформаций поперечных сдвигов. Уравнения решаются численным методом коллокаций. На примере частной задачи для различных законов изменения радиуса колонны показано влияние переменности толщины и учёта поперечных сдвигов на значения критических сил.

1. Рассмотрим ортотропную колонну длиной  $l$  круглого поперечного сечения переменного радиуса  $r$ . На колонну кроме сил на концах может действовать объёмная сила, в частности, собственный вес. Колонну отнесём к правой системе координат  $Oxuz$ , направив ось  $Ox$  по оси колонны. Следуя [1], примем

$$\tau_{xz} = \varphi_1 + z\varphi_2 + z^2\varphi_3, \quad (1)$$

где  $\varphi_i$  – функции только координаты  $x$ . Будем также считать, что прогиб колонны  $w$  одинаков для всех точек поперечного сечения. Из закона Гука, ограничиваясь линейным распределением перемещения  $u_x$  по толщине колонны, получим

$$u_x = u - z(dw/dx - a_{55}\varphi_1), \quad (2)$$

где  $u$  – осевое перемещение колонны,  $a_{55}$  – величина, обратная модулю сдвига в поперечном направлении. Это равносильно принятию гипотезы о плоском сечении, только с той разницей, что после изгиба, сечения не остаются перпендикулярными к деформированной оси колонны.

Дифференциальные уравнения равновесия колонны в общепринятых обозначениях имеют вид:

$$\frac{dM_x}{dx} = N_x, \quad \frac{dN_x}{dx} = -Z, \quad (3)$$

где  $Z$  – интенсивность фиктивной поверхностной нагрузки, которая возникает при выпучивании колонны. В случае действия осевой силы  $P$  и собственного веса он имеет вид:

$$Z = - \left( P + \pi \rho g \int_0^x r^2 dx \right) \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad (4)$$

где  $\rho$  – плотность материала. Используя поверхностные условия, можно из выражений расчётных величин исключить функции  $\varphi_2$  и  $\varphi_3$ . Для изгибающего момента и перерезывающей силы получим выражения:

$$M_x = -\frac{E\pi r^4}{4} \left( \frac{d^2 w}{dx^2} - a_{55} \frac{d\varphi_1}{dx} \right) \quad (5)$$

$$N_x = \frac{\pi r^2}{4} \left[ 3\varphi_1 - Er \left( \frac{d^2 w}{dx^2} - a_{55} \frac{d\varphi_1}{dx} \right) \frac{dr}{dx} \right] \quad (6)$$

Примем обезразмеривающие обозначения:

$$\begin{aligned} x &= \bar{x}, \quad w = r\bar{w}, \quad r = r_0 R, \quad s = r_0, \quad \varphi_1 = E\varphi, \\ P &= Er_0^2 \bar{P}, \quad \chi = Ea_{55}, \quad \rho = E\bar{\rho}/r_0 \end{aligned} \quad (7)$$

$r_0$  – среднее значение радиуса поперечного сечения.

После некоторых выкладок систему уравнений (3) можно привести к системе дифференциальных уравнений относительно  $\bar{w}$  и  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} R^2 \frac{d^3 \bar{w}}{d\bar{x}^2} + 3R \frac{dR}{d\bar{x}} \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} - \frac{\chi R^2}{s} \frac{d^2 \varphi}{d\bar{x}^2} - \frac{3\chi R}{s} \frac{d\varphi}{d\bar{x}} + \frac{3}{s^3} \varphi &= 0 \\ \left( s^3 R^3 \frac{d^2 R}{d\bar{x}^2} + \frac{4sP}{\pi} + 4\rho g \int_0^{\bar{x}} R^2 dt \right) \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} - & \\ -R^2 \left( 3 + \chi R s^2 \frac{d^2 R}{d\bar{x}^2} \right) \frac{d\varphi}{d\bar{x}} - 9R \frac{dR}{d\bar{x}} \varphi &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

К системе уравнений (8) следует добавить соответствующие граничные условия при  $\bar{x} = 0$  и  $x = 1$ .

Систему уравнений (8) при  $R = \text{const}$  и  $\chi = 0$  можно решить аналитически, а в остальных случаях следует решать численными методами. Здесь мы воспользуемся модифицированным методом коллокаций.

Для решения уравнения (8) указанным методом в общем случае функции  $\bar{w}$  и  $\varphi$  берём в виде

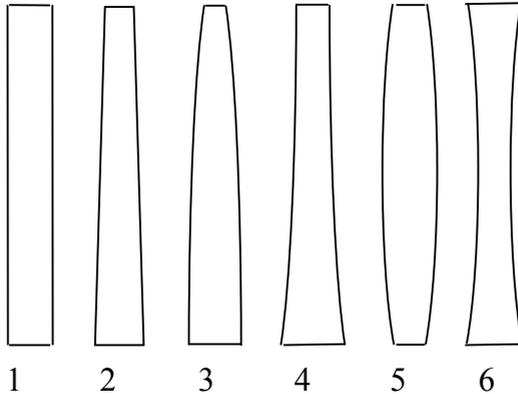
$$\bar{w} = \sum_{i=1}^{n+2} a_i x^{i-1}, \quad \varphi = \sum_{i=1}^{n+2} b_i x^{i-1} \quad (9)$$

В качестве точек коллокаций берём нули смещённых полиномов Чебышева  $T_n(2x-1)$ ,  $x_k = \left[ 1 + \cos \frac{\pi(k-1/2)}{n} \right] / 2$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Удовлетворяя в точках коллокаций уравнениям (8), а в концевых точках граничным условиям, получим однородную систему  $2n + 4$  уравнений относительно  $a_i$  и  $b_i$ .

Приравнявая определитель этой системы нулю, получим значения критических сил, при которых колонна теряет устойчивость. После определения критических сил можно определить и вид функций  $\bar{w}$  и  $\varphi$ , соответствующий этим значениям [4]. Для этого надо полученные уравнения разделить на один из коэффициентов  $a_i$  или  $b_i$ , перевести соответствующий столбец в правую часть и отбросить одно из уравнений. Решая эту систему, можно с точностью постоянного множителя определить функции  $\bar{w}$  и  $\varphi$ .

Рассмотрим колонны переменной толщины, для которых безразмерный радиус поперечного сечения  $R(x)$  изменяется по законам (фиг. 1):



Фиг. 1

$$\begin{aligned}
 &1) R(\bar{x}) = 1; \quad 2) R(\bar{x}) = 1.309(1 - \bar{x} / 2); \quad 3) R(\bar{x}) = 1.155(1 - \bar{x}^2 / 2) \\
 &4) R(\bar{x}) = 0.7319((\bar{x} - 1)^2 + 1); \quad 5) R(\bar{x}) = 1.181(1 - 2(x - 0.5)^2), \quad (10) \\
 &6) R(\bar{x}) = 0.7319(4(x - 0.5)^2 + 1)
 \end{aligned}$$

Все они имеют одинаковый объём и, при переменной толщины, наибольший радиус в два раза больше наименьшего радиуса (фиг. 1).

В качестве примера рассмотрим колонну с шарнирно опёртыми концами без учёта собственного веса при следующих значениях геометрических и физических параметров:

$$s = 0.05, 0.025; \quad \chi = 0, 3, 10, 20.$$

$\chi = 0$  соответствует классической постановке задачи,  $\chi = 3$  – изотропной колонне с коэффициентом Пуассона  $\nu = 0.3$ ,  $\chi = 10, 20$  – ортотропным колоннам.

Граничные условия шарнирного опирания имеют вид:

$$\bar{w}|_{\bar{x}=0,1} = 0, \quad s \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} - \chi \frac{d\varphi}{d\bar{x}} = 0 \quad (M_x = 0). \quad (11)$$

В этом случае в (9) можно принять

$$\bar{w} = \sum_{i=1}^n a_i x^i (1-x), \quad (12)$$

что удовлетворяет первому граничному условию (9) и на 2 уменьшает количество уравнений.

Увеличиваем  $n$  до тех пор, пока четыре значащие цифры для  $n$  и  $n + 1$  совпадают. В данной задаче это происходит при  $n = 6, 7$ .

В таблице приведены безразмерные значения первых критических сил, умноженных на 1000 для колонн переменной толщины (10).

Таблица 1

$s = 0.05$	1	2	3	4	5	6
$\chi = 0$	19.37	14.22	14.86	11.65	25.12	8.692
$\chi = 3$	18.91	13.82	14.38	11.46	24.13	8.596
$\chi = 10$	17.92	13.10	13.43	10.93	21.93	8.345
$\chi = 20$	16.72	12.11	12.27	10.23	19.45	8.023
$s = 0.025$	1	2	3	4	5	6
$\chi = 0$	4.843	3.555	3.715	2.902	6.276	2.186
$\chi = 3$	4.815	3.532	3.681	2.883	6.213	2.164
$\chi = 10$	4.742	3.483	3.614	2.884	6.064	2.157
$\chi = 20$	4.623	3.412	3.522	2.811	5.852	2.134

На основе вычислений можно сделать следующие заключения.

1. Метод коллокаций достаточно быстро приводит к результатам. Уже после 6-7 точек коллокаций значение первой критической силы практически не меняется.
2. Учёт влияния поперечного сдвига более ощутим при переменности толщины: для колонны постоянного радиуса разность значений

критической силы по классической постановке и с учётом поперечных сдвигов составляет ~14%, а для колонны 5 – 22.6% при  $\chi = 20$ .

3. Для относительно длинных колонн из рассмотренных эта разность уменьшается и наибольшая разность составляет 6.7% для колонны 5.
4. Критическая сила по классической постановке для колонны 5, когда средняя часть толще, в 2.89 раза больше, чем для колонны 6, когда средняя часть тоньше.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Киракосян Р.М Прикладная теория ортотропных пластин переменной толщины, учитывающая влияние деформаций поперечных сдвигов. Ереван: Изд. «Гитутюн» НАН РА, 2000. 112с.
2. Киракосян Р.М. Основные уравнения ортотропных пластин переменной толщины при учёте поперечных сдвигов и обжатия.// Изв. НАН Армении. Механика. 2002. Т.55. №4. С.12-20.
3. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360с.
4. Геворкян Г.З. Об устойчивости и изгибных колебаниях ортотропных пластин-полос переменной толщины с учётом поперечного сдвига и осевой силы. //В сб.: «Актуальные проблемы сплошной среды». Изд. ЕГУАС, Ереван 2012. Т.1. С.153-156.

### Сведения об авторе:

**Геворкян Гнун Завенович,**

К.ф.-м.н., в.н.с. Института механики НАН РА

**E-mail:** [gnungev2002@yahoo.com](mailto:gnungev2002@yahoo.com)

# АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ТОНКОЙ ПРОДОЛЬНО-НЕОДНОРОДНОЙ ПОЛЯРИЗОВАННОЙ ПЛАСТИНЫ (СЛОЯ)

*Геворкян Р.С., Асратян М.Г.*

*Армения*

Асимптотическим интегрированием уравнений трёхмерной задачи теории электроупругости выведены рекуррентные формулы для определения компонент тензора напряжений, вектора перемещения и электрического потенциала пьезодиэлектрической пластины бесконечных размеров. Рассмотрена находящаяся в вакууме (или в воздухе) продольно поляризованная неоднородная пластина, на лицевых поверхностях которой заданы условия второй, первой и смешанной краевых задач теории упругости. Для всех случаев выведены дисперсионные уравнения частот собственных колебаний и установлена их зависимость от толщины и физико-механических коэффициентов пластины, от электрической постоянной окружающей среды (пространства) и от изменяемостей функций, характеризующих внешние механические воздействия. Вычислена часть резонансных частот.

Асимптотический метод решения краевых задач теории термоупругости с неклассическими граничными условиями, впервые применённый в [1,2], оказался эффективным для решения как статических, так и динамических задач для балок, пластин и оболочек [1-4]. В работе [4] и в предлагаемой работе асимптотическим методом решены краевые задачи электроупругости для пластин бесконечных размеров при поперечном и продольном поляризациях пьезокерамики. Аналогичные задачи для тонкой пластины решены разными авторами, в частности, [5,6]. Предлагаемые решения выгодно отличаются, в частности, тем, что выведенные несложные рекуррентные формулы позволяют определить компоненты вектора перемещения и тензора механических напряжений, а также напряжение электрического поля с любой асимптотической точностью. А последовательность применения выведенных рекуррентных формул является готовым алгоритмом компьютерной программы, позволяющей получить аналитические решения поставленных краевых задач с любой заранее выбранной асимптотической точностью.

**1. Постановка краевых задач.** Имеем тонкую пластину толщины  $2h$  и бесконечных продольных размеров из трансверсально-изотропного, в плане неоднородного, пьезодиэлектрика класса *bmm* с осью гексагональной симметрии, направленной продольно (параллельно оси  $Ox$ ), которая в воздухе (либо в вакууме) относительно декартовой прямоугольной системы координат занимает область  $\Omega = \{x, y, z : -\infty < x, y < \infty, |z| \leq h\}$  (фиг.)

Пусть на лицевых поверхностях тонкой пластины заданы механические условия второй

$$u_j^*(x, y, z = \pm h, t) = u_j^\pm(x, y) \sin \omega t, \quad j = x, y, z, \quad (1.1)$$

первой

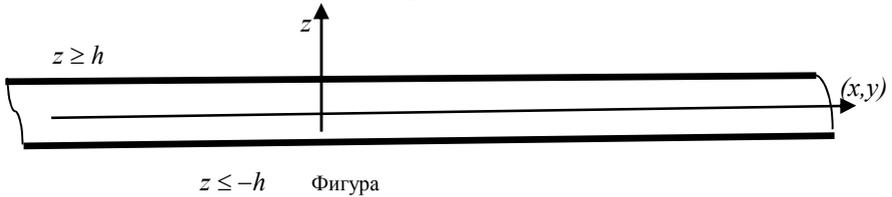
$$\sigma_{jz}^* (x, y, z = \pm h, t) = \sigma_{jz}^\pm (x, y) \sin \omega t, \quad j = x, y, z \quad (1.2)$$

или смешанной

$$u_j^* (x, y, z = -h, t) = u_j^- \sin \omega t, \quad \sigma_{jz}^* (x, y, z = h, t) = \sigma_{jz}^+ \sin \omega t, \quad j = x, y, z \quad (1.3)$$

краевых задач теории упругости и электрические условия контакта на поверхности раздела сред (пьезодиэлектрика и внешней среды), которые в данном случае квазистатической задачи выражаются непрерывностью (равенствами) электрических потенциалов и проекций векторов индукций на внешнюю нормаль к поверхности

$$z = \pm h: \varphi^* = \bar{\varphi}^*, \quad D_z^* = \bar{D}_z^*, \quad \bar{D}_z^* = -\varepsilon_0 \frac{\partial \bar{\varphi}^*}{\partial z}, \quad \bar{\varphi}^* (x, y, z, t) = \bar{\varphi} \sin \omega t \quad (\varphi, D) \quad (1.4)$$



Граничные условия на торцах тонкого тела не ставятся, принимая его пластиной бесконечных размеров (слой). Не ставятся также начальные условия, предполагая, что рассматривается установившийся процесс.

Требуется найти удовлетворяющее граничным условиям (1.1),(1.4) либо (1.2),(1.4), или (1.3),(1.4) решение полной системы уравнений электроупругости пьезодиэлектрической среды [9,10], которая состоит из динамических уравнений упругой среды и вынужденной электростатики

$$\frac{\partial \sigma_{xx}^*}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^*}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}^*}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_x^*}{\partial t^2} (x, y, z), \quad \text{div} \bar{D}^* = 0, \quad \bar{E}^* = -\text{grad} \varphi^* \quad (1.5)$$

и уравнений состояния transversально-изотропной пьезодиэлектрикой пластины, ось симметрии которой параллельна продольной оси  $Ox$  в выбранной декартовой системе координат. Они имеют вид:

$$\sigma_{xx}^* = c_{13}^E \frac{\partial u_z^*}{\partial z} + c_{33}^E \frac{\partial u_x^*}{\partial x} + c_{13}^E \frac{\partial u_y^*}{\partial y} + e_{33} \frac{\partial \varphi^*}{\partial x}, \quad \sigma_{xz}^* = c_{44}^E \left( \frac{\partial u_x^*}{\partial z} + \frac{\partial u_z^*}{\partial x} \right) + e_{15} \frac{\partial \varphi^*}{\partial z}$$

$$\sigma_{yy}^* = c_{12}^E \frac{\partial u_z^*}{\partial z} + c_{13}^E \frac{\partial u_x^*}{\partial x} + c_{11}^E \frac{\partial u_y^*}{\partial y} + e_{31} \frac{\partial \varphi^*}{\partial x}, \quad \sigma_{yz}^* = \frac{1}{2} (c_{11}^E - c_{12}^E) \left( \frac{\partial u_y^*}{\partial z} + \frac{\partial u_z^*}{\partial y} \right)$$

$$\sigma_{zz}^* = c_{11}^E \frac{\partial u_z^*}{\partial z} + c_{13}^E \frac{\partial u_x^*}{\partial x} + c_{12}^E \frac{\partial u_y^*}{\partial y} + e_{31} \frac{\partial \varphi^*}{\partial x}, \quad \sigma_{xy}^* = c_{44}^E \left( \frac{\partial u_x^*}{\partial y} + \frac{\partial u_y^*}{\partial x} \right) + e_{15} \frac{\partial \varphi^*}{\partial y}$$

$$D_x^* = e_{33} \frac{\partial u_x^*}{\partial x} + e_{31} \left( \frac{\partial u_z^*}{\partial z} + \frac{\partial u_y^*}{\partial y} \right) - \varepsilon_{33}^\sigma \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} \quad (1.6)$$

$$D_y^* = e_{15} \left( \frac{\partial u_x^*}{\partial y} + \frac{\partial u_y^*}{\partial x} \right) - \varepsilon_{11}^\sigma \frac{\partial \varphi^*}{\partial y}, \quad D_z^* = e_{15} \left( \frac{\partial u_x^*}{\partial z} + \frac{\partial u_z^*}{\partial x} \right) - \varepsilon_{11}^\sigma \frac{\partial \varphi^*}{\partial z}$$

В уравнениях и соотношениях (1.5)–(1.6)  $\sigma_{xx}^*, \sigma_{xy}^*$  ( $x, y, z$ ) – компоненты тензора напряжений,  $u_x^*$  ( $x, y, z$ ) – компоненты вектора перемещения,  $\vec{D}^* = (D_x^*, D_y^*, D_z^*)$  – вектор электрического смещения (индукции),  $\vec{E}^* = (E_x^*, E_y^*, E_z^*)$  – вектор напряжённости электрического поля,  $\varphi^*$  – потенциал электрического поля,  $\rho(x, y)$  – плотность неоднородного керамического материала,  $c_{ij}^E(x, y)$  – упругие постоянные (модули упругости) при постоянном (нулевом) электрическом поле,  $\varepsilon_{11}^\sigma(x, y), \varepsilon_{33}^\sigma(x, y)$  – диэлектрические проницаемости при постоянной (нулевой) деформации,  $e_{31}(x, y), e_{15}(x, y), e_{33}(x, y)$  – пьезомодули керамики (пьезокерамические постоянные). Все физико-механические коэффициенты являются функциями продольных координат, поскольку тонкая пластина считается в плане неоднородной.

**2. Общий интеграл системы разрешающих уравнений.** Для решения поставленных краевых задач все искомые и заданные выше функции представим в виде

$$Q^*(x, y, z, t) = Q(x, y, z) \sin \omega t, \quad Q^* = \{u_x^*, \sigma_{xx}^*, \sigma_{xy}^*, D_x^*, E_x^*, \varphi^*\} (x, y, z) \quad (2.1)$$

Во всех уравнениях и соотношениях переходим к системе безразмерных координат  $\xi, \eta, \zeta$  и безразмерным перемещениям  $u, v, w$ , получаем сингулярно-возмущённую геометрическим малым параметром  $\varepsilon = h/l$  систему уравнений и соотношений, общее решение которой ищется в виде асимптотического разложения [1-4]. Приравнявая коэффициенты  $\varepsilon$  в левых и правых частях, получаем систему разрешающих уравнений, приводящих к общему интегралу поставленных краевых задач для рассматриваемого пьезодиэлектрического слоя в виде следующих рекуррентных формул [4]:

$$u^{(s)} = M_u^{*(s)} \sin \alpha^* \zeta + N_u^{*(s)} \cos \alpha^* \zeta + I_u^{*(s)}(\zeta) \quad (u, v, w; \alpha^*, \beta^*, \gamma^*)$$

$$\psi^{(s)} = A^{*(s)} \zeta + B^{*(s)} + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}^\sigma} u^{(s)} + I_\psi^{*(s)}(\zeta), \quad \beta^{*2} = 2\rho\omega^2 h^2 / (c_{11}^E - c_{12}^E)$$

$$I_u^{*(s)}(\zeta) = \frac{1}{\alpha^*} \int_0^\zeta R_u^{*(s)}(\xi, \eta, \tau) \sin \alpha^* (\zeta - \tau) d\tau \quad (u, v, w; \alpha^*, \beta^*, \gamma^*) \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned}
I_{\psi}^{*(s)}(\zeta) &= \int_0^{\zeta} d\beta \int_0^{\beta} R_{\psi}^{*(s)}(\xi, \eta, \tau) d\tau, \quad \alpha^{*2} = \rho\omega^2 h^2 / \delta_{11}, \quad \gamma^{*2} = \rho\omega^2 h^2 / c_{11}^E \\
R_u^{*(s)} &= - \left[ c_{44}^E \frac{\partial^2 w^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} + \left( \frac{\partial \sigma_{xx}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(s-1)}}{\partial \eta} + e_{15} R_{\psi}^{*(s)} \right) \right] / \delta_{11} \\
R_v^{*(s)} &= - \frac{\partial^2 w^{(s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta} - \frac{2}{c_{11}^E - c_{12}^E} \left( \frac{\partial \sigma_{xy}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{yy}^{(s-1)}}{\partial \eta} \right) \\
R_w^{*(s)} &= - \frac{1}{c_{11}^E} \left[ \frac{\partial \sigma_{xz}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( c_{13}^E \frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial \xi} + c_{12}^E \frac{\partial v^{(s-1)}}{\partial \eta} + e_{31} \frac{\partial \psi^{(s-1)}}{\partial \xi} \right) \right] \\
R_{\psi}^{*(s)} &= \frac{1}{\varepsilon_{11}^{\sigma}} \left( \frac{\partial D_x^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial D_y^{(s-1)}}{\partial \eta} + e_{15} \frac{\partial^2 w^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} \right), \quad \delta_{11} = (c_{44}^E \varepsilon_{11}^{\sigma} + e_{15}^2) / \varepsilon_{11}^{\sigma}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Одновременно представим потенциал электрического поля внешней диэлектрической среды с проницаемостью  $\varepsilon_0$  и проекцию вектора индукции на нормаль к поверхности пьезодиэлектрического слоя в виде:

$$\bar{\varphi}_{1,2}^{(s)} = \begin{cases} \exp(rz) \bar{U}_1^{(s)}(x, y), & z < -h \\ \exp(-rz) \bar{U}_2^{(s)}(x, y), & z > h \end{cases}, \quad \bar{D}_{z,1,2}^{(s)} = \begin{cases} -\varepsilon_0 r \exp(rz) \bar{U}_1^{(s)}(x, y), & z < -h \\ \varepsilon_0 r \exp(-rz) \bar{U}_2^{(s)}(x, y), & z > h \end{cases} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}
\bar{U}_k^{(s)}(x, y) &= A_k^{(s)} \sin px \sin qy + B_k^{(s)} \cos px \sin qy + C_k^{(s)} \sin px \cos qy + \\
&+ D_k^{(s)} \cos px \cos qy, \quad k = 1, 2, \quad r = \sqrt{p^2 + q^2}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

$\bar{\varphi}_k$  – решение гармонического уравнения (вынужденной электростатики).

Общие решения (2.2)–(2.5) содержат восемь функций:  $M_u^{*(s)}, N_u^{*(s)}(u, v, w)$ ,  $A^{*(s)}, B^{*(s)}$  и восемь постоянных  $A_k^{(s)}, B_k^{(s)}, C_k^{(s)}, D_k^{(s)}$ ,  $k = 1, 2$  интегрирования, которые однозначно определяются одной из комбинаций механических граничных (1.1)–(1.3) условий вместе с условиями контакта (1.4) неэлектродированных поверхностей с воздухом (или с вакуумом). Предполагая, что заданные в механических граничных условиях (1.1)–(1.3)

функции имеют вид  $u_j^{\pm}(x, y) = \bar{u}_j^{\pm} \sin px \sin qy$ ,  $\sigma_{jz}^{\pm}(x, y) = \bar{\sigma}_{jz}^{\pm} \sin px \sin qy$ ,  $j = x, y, z$ , удовлетворяются все граничные условия (1.1)–(1.3) и условия контакта сред (1.4). Для каждой их комбинации определены функции и постоянные интегрирования, которые не приводим из-за их громоздкости.

Приводим дисперсионные уравнения собственных колебаний и некоторые резонансные частоты:

а) при граничных условиях (1.1), (1.4) с точностью первого шага итерации электрическое поле только пьезодиэлектрика действует на резонансную частоту  $\omega_u^*$  сдвиговых колебаний вдоль оси поляризации

$$\sin 2\alpha^* = 0, \quad \omega_u^* = \frac{\pi n}{2h} \sqrt{\delta_{11}/\rho}; \quad \sin 2\beta^* = 0, \quad \omega_v^* = \frac{\pi n}{2h} \sqrt{(c_{11}^E - c_{12}^E)/(2\rho)}$$

$$\sin 2\gamma^* = 0, \quad \omega_w^* = \frac{\pi n}{2h} \sqrt{c_{11}^E/\rho}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

б) когда обе поверхности пьезодиэлектрика механически открыты (граничные условия (1.2),(1.4)) и когда одна поверхность пьезодиэлектрика механически открыта (условия (1.3), (1.4)) с точностью первого шага итерации электрические поля и внешней среды ( $\varepsilon_0$ ), и пьезодиэлектрика ( $\varepsilon_{11}^\sigma, e_{15}$ ) влияют только на резонансные частоты  $\omega_u^*$  сдвиговых колебаний вдоль оси поляризации, определяемые из дисперсионных уравнений:

$$\Delta^* = 0, \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha^* = \alpha^* \delta_{11} \frac{\varepsilon_{11}^\sigma (\varepsilon_{11}^\sigma + \varepsilon_0 rh)}{e_{15}^2 \varepsilon_0 rh}; \quad \bar{\Delta} = 0, \Rightarrow \operatorname{tg} 2\alpha^* = 2\alpha^* \delta_{11} \frac{\varepsilon_{11}^\sigma (\varepsilon_{11}^\sigma + \varepsilon_0 rh)}{e_{15}^2 \varepsilon_0 rh} \quad (2.7)$$

Заметим, что когда две противоположные поверхности пьезодиэлектрика механически открыты, частоты  $\omega_u^*$  сдвиговых колебаний в два раза больше.

При этом, во всех случаях дисперсионные уравнения и частоты собственных колебаний, перпендикулярные к оси поляризации, не зависят от электрических полей ни пьезодиэлектрика, ни внешней среды.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Агаловян Л.А. О структуре решения одного класса плоских задач теории упругости анизотропного тела// Межвуз. сб. н. трудов. Механика. Ереван: Изд-во ЕГУ, 1982. Вып. 2. С.7–12.
2. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи пластин с общей анизотропией //В сб. тр. IV Всесоюз. Симпозиума по механике конструкций из композиционных материалов. Новосибирск: Наука, 1984. С.105-110.
3. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: Изд-во «Гитутюн» НАН РА, 2005. 468с.
4. Асратян М.Г., Геворкян Р.С., Саргсян М.З. Асимптотическое решение краевой задачи электроупругости для пьезокерамического в плане неоднородного тонкого тела //В кн.: «Проблемы механики деформируемого твёрдого тела». Ереван: 2012. С.65-74.
5. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Электроупругость. Киев: Наукова думка, 1989. 279с.
6. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. Киев: Наукова думка, 1988. 472с.

#### Сведения об авторах:

**Геворкян Рубен Степанович** – проф., д.ф.-м.н., в.н.с. И-та механики НАН РА. Тел.: (+37410)27 08 28; (+37493)53 68 83, **E-mail:** [gevorgyanrs@mail.ru](mailto:gevorgyanrs@mail.ru)

# ОЦЕНКА НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМАЦИОННОГО СОСТОЯНИЯ ЗЕМНОЙ КОРЫ АРМЕНИИ ПО СЕЙСМОЛОГИЧЕСКИМ ДАННЫМ

*Геодакян Э.Г., Карапетян Дж.К., Саакян Б.В., Мурадян А.Р.  
Армения*

В настоящей работе рассматривается разрывно-непрерывное тектоническое течение горных масс, обусловленное упругими деформациями, предшествующими отдельным землетрясениям. На основе корреляционных связей течения горных масс с сейсмичностью рассчитаны и картированы по территории Армении относительные скорости вертикальных сейсмотектонических деформаций.

Землетрясения происходят в сложнопостроенной, разделённой глубинными разломами на разномасштабные тектонические элементы, геологической среде земной коры. Эти структурные элементы земной коры под воздействием сложных геодинамических процессов, постоянно находясь в напряжённо-деформированном состоянии, подвергаются тектоническим движениям. Тектоническое движение, с макроскопической точки зрения, условно подразделяются на две составляющие: непрерывное в широком смысле пластическое течение и разрывно-непрерывное течение, связанное с упругими деформациями и разрывами при отдельных землетрясениях [1].

Оценка величины первого слагаемого, в основном, проводится геологическими, геодезическими и геоморфологическими методами.

Изучение разрывно-непрерывного слагаемого осуществляется только сейсмологическими методами. В основу этих методов заложено то обстоятельство, что землетрясение снимает часть накопленной упругой деформации среды в области очага до землетрясения в виде излучения упругих сейсмических волн, а разрывную неупругость переводит в форму остаточной необратимой деформации. Для изучения сейсмотектонических деформаций со стороны Ю.В.Ризниченко было введено понятие о так называемом «сейсмическом течении» горных масс [3]. Теоретическое обоснование и методические подходы решения этой задачи достаточно полно развиты в работах Д. Бруна [2], Ю.В. Ризниченко [3,4], В.В. Кострова [5].

Для оценки сейсмотектонических деформаций необходимы следующие сейсмологические данные:

1. Средние долговременные параметры сейсмического режима
  - наклон графика повторяемости землетрясений ( $\gamma$ );
  - нормированная по площади и времени карта сейсмической активности ( $A_{10}$ );
  - карта максимальных возможных землетрясений ( $K_{\max}$ );

2. Сейсмические моменты  $M_0$  очагов землетрясений или корреляционная зависимость сейсмического момента от энергетического класса  $K$  землетрясений.

3. Параметры механизмов очагов землетрясений.

Из указанных основных исходных данных для территории Армении не обеспечивается однородность определения параметров механизмов очагов. Связано это с отсутствием массового определения механизмов очагов всех происходящих землетрясений.

Исходя из этого, для оценки напряжённо-деформационного состояния земной коры нами была применена предложенная Ю.В. Ризниченко методика определения вертикальных сеймотектонических деформаций [3,6].

Эта методика позволяет осуществить переход от тензорного анализа сеймотектонических деформаций

$$v_{ik} = \frac{1}{2\mu VT} \cdot \sum_{j=1}^N (M_{oik})_j \quad (1)$$

к определению скалярных величин относительных скоростей вертикальных сеймотектонических деформаций

$$v = \frac{1}{2\mu VT} \cdot \sum_{j=1}^N M_{oj} = \frac{\gamma A_{10} M_0 (10) \cdot 10^{(0,89-\gamma)(K_{\max}-10)}}{2\mu V (0,89-\gamma)(10^{0,5\gamma} - 10^{-0,5\gamma})}, \quad (2)$$

где  $V$  – объём среды,  $T$  – наблюдаемый период;  $M_{oj}$  – скалярное значение сейсмического момента каждого из землетрясений, попадающий в рассматриваемый пространственно-временной объём. Параметры сейсмического режима ( $\gamma$ ,  $A_{10}$ ,  $K_{\max}$ ) приняты нами из детальных карт в масштабе (1:500000), приведённых в работе [7].

Для расчёта приняты следующие численные значения: модуль сдвига  $\mu=3 \cdot 10^{11}$  дин/см<sup>2</sup>,  $M_0(K)=10^{20,73}$ ,  $C_2=0,88$  по формуле  $\lg M_0=20,73+0,88(K_{\max}-K_0)$  для Кавказских землетрясений [8].

Площадь территории Армении и прилегающих областей было разделена на множество элементарных ячеек, размерами  $0,1^0 \times 0,1^0$  градусов. Для каждой элементарной ячейки рассчитывались значения  $v$  и на их основе было картографировано распределение относительных скоростей вертикальных сеймотектонических деформаций по территории Армении (рис. 1).

Как видно из карты, несмотря на относительно малые размеры территории Армении, наблюдаются отдельные области и зоны, в которых скорости вертикальных деформаций на два порядка выше или ниже от средних по всей территории Армении.

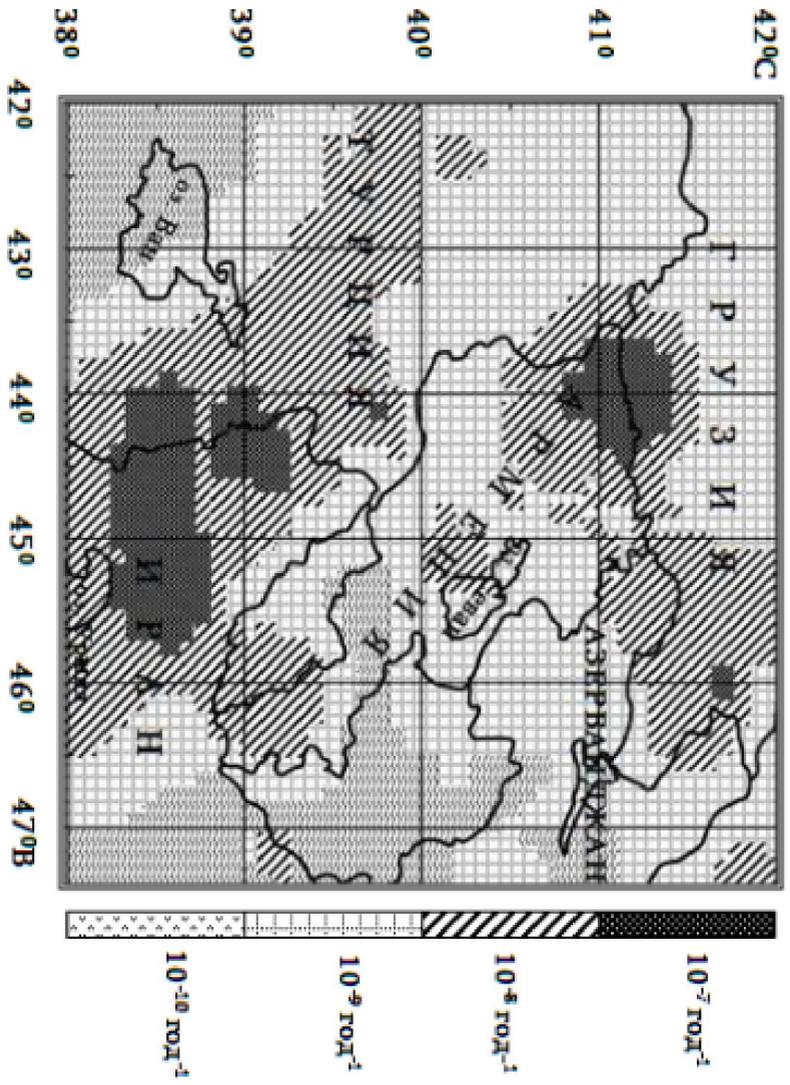


Рис.1 Карта относительных скоростей вертикальных сеймотектонических деформаций

По мнению авторов, это связано как с реологическими свойствами геологической среды, существенно влияющих на скорости накопления и

разрядки тектонических напряжений, так и с конкретными сеймотектоническими условиями, геометрией расположения основных глубинных сейсмоактивных разломов по территории Армении.

Работа выполнена в рамках тематического финансирования по проекту 13-1E201 Государственного Комитета по науке МОН РА.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ризниченко Ю.В. О возможностях расчёта максимальных землетрясений. //Тр. ИФЗ АН СССР. 1962. № 2. С.5-15
2. Brune J. N. Seismic moment, seismicity, and rate of slip along major fault zones., J. Geophys. Res., v. 73, № 2, 1968.
3. Ризниченко Ю.В. Избранные труды. Проблемы сейсмологии. М.: Наука, 1985. 405с.
4. Ризниченко Ю.В. Сеймотектоническая деформация земной коры юга средней Азии. // Изв. АН СССР. Физика земли. 1982. № 10. С.90-105.
5. Костров Г.В. Механика очага тектонического землетрясения. М.: Наука, 1975. 176с.
6. Ризниченко Ю.В. Расчёт скорости деформации при сейсмическом течении горных масс. //Изв. АН СССР. Физика земли. 1977. №10. С.34-47.
7. Геодакян Э.Г., Саргсян Г.В. Исследование долгосрочных параметров сейсмического режима территории Армянской ССР. Сейсмологический бюллетень Кавказа 1981г. Тбилиси: Изд.«Мецниереба», 1987. С.114-122.
8. Джибладзе Э.А. Сейсмическое течение горных масс на Кавказе. //Изв. АН СССР. 1982. №10. С.111-117.

#### **Сведения об авторе:**

**Геодакян Эдуард Григорьевич**

К.ф.-м.н., зав. отделом ИГИС им. А.Г. Назарова НАН Армении

**Адрес:** 3115, Армения, Гюмри-15, ул. В.Саргсяна, 5, ИГИС

**Тел.:** +374-312-312-61 (093-51-31-23)

**E-mail:** [geodakyan.e@mail.ru](mailto:geodakyan.e@mail.ru)

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТЕРМОНАГРУЖЕННЫХ КОМПОЗИТНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

*Головин Н.Н., Кувыркин Г.Н., Майская Е.В.*

*Россия*

При математическом моделировании полей температур и напряжений в термонагруженных композитных конструкциях, подвергающихся высокотемпературному нагружению со стороны газового потока, необходимо учитывать нестационарные процессы взаимодействия их отдельных элементов между собой.

Основная система уравнений при исследовании нестационарного поведения конструкции включает в себя [1]:

$$\text{- уравнения движения } \sigma_{ij,j} + R_{vi} = \rho \cdot \ddot{u}_i ; \quad (1)$$

$$\text{- геометрические соотношения Коши } \varepsilon_{ij} = 1/2(u_{i,j} + u_{j,i}) ; \quad (2)$$

- физические соотношения в форме закона Дюамеля-Неймана, записанного с учётом накопленной пластической деформации,

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}^* (\varepsilon_{mn}, \tilde{\varepsilon}_{mn}^{(p)}, T) (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{(T)} - \tilde{\varepsilon}_{kl}^{(p)}) , \quad (3)$$

$$\text{- уравнение нестационарной теплопроводности } c(T)\rho\dot{T} = [\lambda_{ij}(T)T_{,j}]_{,i} , \quad (4)$$

где:  $\sigma_{ij}$  и  $\varepsilon_{ij}$  – симметричные тензоры напряжений и малых деформаций;  $R_{vi}$  – вектор массовых усилий;  $u_i$  – вектор перемещений;  $\varepsilon_{ij}^{(T)}$  – тензор температурных деформаций, задаваемый в простейшем случае выражением  $\varepsilon_{ij}^{(T)} = \alpha_{ij}(T - T_0)$ , причём  $\alpha_{ij}$  – тензор коэффициентов температурной деформации;  $T$  – температура точек тела;  $\tilde{\varepsilon}_{ij}^{(p)}$  – тензор накопленной пластической деформации, определяемый кинематическим соотношением  $\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}^{(p)} = F_1(\sigma_{mn}, \dots)$ , конкретный вид которого устанавливается той или иной моделью пластического деформирования материала, например, предложенной в [2] для композитов на основе углерода;  $C_{ijkl}^*(\varepsilon_{mn}, \tilde{\varepsilon}_{mn}^{(p)}, T)$  – зависящий от деформированного состояния и температуры тензор физических параметров материала;  $\rho$ ,  $c(T)$ ,  $\lambda_{ij}(T)$  – плотность, удельная теплоёмкость и тензор теплопроводности материала соответственно. Операторы  $(A)_{,i}$  и  $(\dot{A})$  обозначают производную по пространственной координате и производную по времени соответственно, кроме того, предполагается суммирование по повторяющимся индексам, пробегающим значение от 1 до 3. Система уравнений (1) - (4) дополняется краевыми условиями, включающими в себя:

$$\text{кинематические граничные условия на поверхности } S_u : u_i = \tilde{u}_i ; \quad (5)$$

$$\text{силовые граничные условия на поверхности } S_\sigma : \sigma_{ij} n_j = \tilde{P}_{si} ; \quad (6)$$

граничные условия на нагреваемой поверхности  $S_r$  :

$$\lambda_{ij} T_{,j} n_i + \tilde{\alpha} (T - \tilde{T}_\infty) + \tilde{\varepsilon} \tilde{\sigma} (T^4 - \tilde{T}_r^4) + \rho V_n Q = 0 ; \quad (7)$$

$$\text{начальные условия: } u_i(x_j, 0) = \tilde{u}_i(x_j), \dot{u}_i(x_j, 0) = \tilde{\dot{u}}_i(x_j), T(x_j, 0) = T_0, \quad (8)$$

где  $\tilde{u}_i$  - заданный вектор перемещений;  $\tilde{\dot{u}}_i$  - заданный вектор скорости;  $n_i$  - вектор внешней к поверхности тела нормали;  $\tilde{P}_{s_i}$  - вектор заданных поверхностных нагрузок (давлений);  $n_i$  - вектор внешней к поверхности тела нормали;  $\tilde{\alpha}$  - коэффициент теплоотдачи;  $\tilde{T}_\infty$  - температура восстановления;  $\tilde{\varepsilon}$  - коэффициент излучения;  $\tilde{\sigma}$  - постоянная Стефана-Больцмана;  $\tilde{T}_r$  - температура «излучающей среды»;  $V_n$  и  $Q$  - скорость по нормали к поверхности и тепловой эффект уноса композитного материала поверхностного слоя;  $T_0$  - начальная температура.

Для учёта совместного деформирования отдельных элементов конструкции между собой вводится в рассмотрение поверхность возможного контакта  $S_c$ , для которой справедливо следующее равенство:

$$S_c = S_{c1} + S_{c2} + S_{c3}, \quad (9)$$

где  $S_{c1}$ ,  $S_{c2}$  и  $S_{c3}$  - части контактной поверхности, на которых реализуется соответственно, зазор, сцепление и проскальзывание деталей. Очевидно, что при нагружении конструкции соотношения между слагаемыми в правой части (9) изменяются и они являются дополнительными неизвестными величинами. Таким образом, на поверхности взаимодействия двух деталей конструкции (А и В), принадлежащей поверхности возможного контакта, задаются следующие нелинейные граничные условия [3]:

$$U_i^A \cdot n_i - U_i^B \cdot n_i \leq \delta_n ; \quad (10)$$

$$\sigma_{ij} \cdot n_j \leq 0 ; \quad (11)$$

$$|\sigma_{ij} \cdot \tau_j| \leq -f \sigma_{ij} \cdot n_j ; \quad (12)$$

$$T^A - T^B = \Delta T^{AB}, \quad (13)$$

где  $U_i^A$  и  $U_i^B$  - векторы перемещений граничных точек взаимодействующих деталей;  $\delta_n$  - нормальный к поверхности контакта зазор (натяг);  $\tau_i$  - вектор, задающий направление любой касательной к поверхности в точке контакта;  $f$  - коэффициент трения;  $T^A$  и  $T^B$  - температуры граничных точек взаимодействующих деталей;  $T^{AB}$  - обусловленный термическим сопротивлением на границе взаимодействующих тел перепад температур.

Записанные для случая равенства выражения (10) и (12), а также соотношение (13) могут быть представлены в виде дополнительных к

основной системе уравнений

$$U_r = \bar{\delta}_r^U + A_p^U U_p; \quad (14)$$

$$T_r = \bar{\delta}_r^T + A_p^T T_p, \quad (15)$$

где  $r$  – номер исключаемой степени свободы, а  $p$  – номера степеней свободы, связанных с  $r$ ;  $\bar{\delta}_r^U, \bar{\delta}_r^T, A_p^U, A_p^T$  – коэффициенты, определяемые геометрией рассматриваемых конструкций и условиями взаимодействия (закрепления).

Разрешаемая система уравнений дополняется соотношениями для параметров термонагружения в виде:

$$[\tilde{P}_{S_i}, \tilde{\alpha}, \tilde{T}_\infty, \tilde{T}_f, \tilde{\varepsilon}, V_n]^T = \Phi_k(x_i, t, \dots), \quad k = 1, \dots, 6. \quad (16)$$

где  $X_i$  – пространственные координаты;  $t$  – время.

Естественно, что эффективное решение поставленной задачи возможно только численно методом конечных элементов, для получения основных соотношений которого применим процедуру метода Бубнова-Галеркина к уравнениям (1), (5), (6) основной системы. Умножив эти соотношения на матрицу функций формы  $N_{ij}$ , аппроксимирующую вектор перемещений выражением

$$u_i = N_{ij} U_j, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, \dots, r \cdot M, \quad (17)$$

где  $U_i$  – матрица узловых значений перемещений,  $r$  – число неизвестных в узле конечного элемента;  $M$  – число узлов расчетной схемы, получим

$$\int_V N_{ik} \sigma_{ij,j} dV + \int_V N_{ik} R_{vi} dV = \int_V \rho N_{ik} \ddot{u}_i dV; \quad (18)$$

$$\int_{S_e} N_{ik} u_i dS - \int_{S_e} N_{ik} \tilde{u}_i dS = 0; \quad (19)$$

$$\int_{S_e} N_{ik} \sigma_{ij} n_j dS - \int_{S_e} N_{ik} \tilde{P}_{S_i} dS = 0. \quad (20)$$

Воспользовавшись теоремой Гаусса-Остроградского о дивергенции и представив расчётную область в виде совокупности  $E$  конечных элементов, получим выражение системы дифференциальных уравнений второго порядка относительно узловых значений перемещений

$$M_{ij} \ddot{U}_j + Q_{ij} U_j = R_i, \quad (21)$$

где  $M_{ij}$  – матрица масс конструкции,  $M_{ij} = \sum_{e=1}^E \int_{V^{(e)}} N_{ki}^e \rho^e N_{kj}^e dV$ ;

$Q_{ij}$  – матрица жёсткости конструкции,  $Q_{ij} = \sum_{e=1}^E \int_{V^{(e)}} N_{ki,p}^e C_{kp,mn}^{*e} N_{jm,n}^e dV$ ;

$$R_i - \text{вектор нагрузки на конструкцию, } R_i = \sum_{e=1}^E \left( \int_{S_{\sigma^{(e)}}} N_{ki}^e \tilde{P}_{sk}^e dS + \int_{V^{(e)}} N_{ki}^e R_{V_i}^e dV + \int_{V^{(e)}} N_{ki,j}^e C_{kpmn}^{*e} \varepsilon_{mn}^{(T)e} dV \right).$$

Выражение (19) для расчётной области, объединяющей  $E$  конечных элементов, примет вид:

$$W_{ij} U_j = Y_i, \quad (22)$$

$$\text{где } W_{ij} = \sum_{e=1}^E \int_{S_e} N_{ki}^e N_{jk}^e dS \text{ и } Y_i = \sum_{e=1}^E \int_{S_e} N_{ki}^e \tilde{u}_k^e dS.$$

Очевидно, что система уравнений (21) должна решаться совместно с системой (22).

Дискретный аналог системы дифференциальных уравнений (21) будем искать с использованием неявного метода численного интегрирования Ньюмарка [4]. Выражение для системы линейных алгебраических уравнений относительно приращений значений узловых перемещений на  $n$ -ом шаге интегрирования по времени  $\Delta t$  в этом случае имеет вид:

$$K_{ij}^{n+1} \Delta U_j^{n+1} = F_i^{n+1}, \quad (23)$$

$$\text{где } K_{ij}^{n+1} = \frac{1}{\alpha(\Delta t)^2} M_{ij} \delta_{ij} + Q_{ij}^{n+1};$$

$$F_i^{n+1} = R_i^{n+1} + M_{ij} \delta_{ij} \left[ \frac{1}{\alpha(\Delta t)^2} U_j^n + \frac{1}{\alpha \Delta t} \dot{U}_j^n + \left( \frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \ddot{U}_j^n \right],$$

причём, для обеспечения безусловно стабильного решения  $\alpha = 1/3$  [4].

Следует отметить, что для устранения лишённых физического смысла взаимосвязей и результатов матрицы масс и теплоёмкостей конструкции предлагается использовать в диагональном виде, «концентрируя» в рамках процедуры численного интегрирования в каждом узле конечноэлементной сети массу и теплоёмкость окружающих этот узел соответствующих частей конечных элементов.

Представив непрерывную температуру  $T$  в виде дискретной модели

$$T = \bar{N}_i T_i, i = 1, 2, \dots, M, \quad (24)$$

где  $\bar{N}_i$  – матрица функций формы;  $T_i$  – матрица узловых значений температуры, и применив, аналогично изложенному выше, к уравнению теплопроводности (4) и граничным условиям (7) процедуру метода Бубнова-Галеркина, воспользуемся теоремой Гаусса-Остроградского о дивергенции и представим расчётную область в виде совокупности  $E$  конечных элементов. Получим выражение системы дифференциальных уравнений первого порядка относительно узловых значений температуры:

$$C_{ij} \dot{T}_j + \bar{K}_{ij} T_j = \bar{F}_i, \quad (25)$$

где  $C_{ij}$  – глобальная матрица теплоёмкости,  $C_{ij} = \sum_{e=1}^E \int_{V^e} c^e \rho^e \bar{N}_i^e \bar{N}_j^e dV$ ;

$\bar{K}_{ij}$  – матрица теплопроводности,  $\bar{K}_{ij} = \sum_{e=1}^E \left( \int_{V^e} \bar{N}_{i,k}^e \lambda_{kl}^e \bar{N}_{j,l}^e dV + \int_{S_i^e} \tilde{\alpha}^e \bar{N}_i^e \bar{N}_j^e dS \right)$ ;

$\bar{F}_i$  – вектор термической нагрузки,

$$\bar{F}_i = \sum_{e=1}^E \left[ \int_{S_i^e} \tilde{\alpha}^e \bar{N}_i^e \tilde{T}_\infty^e dS + \int_{S_i^e} \tilde{\sigma} \tilde{\varepsilon} (\tilde{T}_f^{e^t} - T^{e^t}) \bar{N}_i^e dS + \int_{S_i^e} \bar{N}_k^e \rho V_n^e Q dS \right].$$

Дискретизация производной по времени в выражении (25) позволяет перейти от системы дифференциальных уравнений к системе алгебраических уравнений

$$C_{ij} (T_j^{k+1} - T_j^k) + \bar{K}_{ij} [(1 - \omega) T_j^k + \omega T_j^{k+1}] \Delta t^k = [(1 - \omega) \bar{F}_i^k + \omega \bar{F}_i^{k+1}] \Delta t^k, \quad (26)$$

где  $\omega$  – параметр, определяющий схему интегрирования по времени.

Итерационный алгоритм решения контактной задачи подробно описан в работе [3]. Там же рассмотрена процедура симметризации глобальной матрицы системы линейных уравнений, необходимая при использовании дополнительных уравнений (14) и (15). Кроме того, использование этих уравнений в рамках решения соответствующих задач позволяет рассматривать несогласованные расчётные сетки.

Полученные соотношения применялись при создании пакетов прикладных программ «ORTOPLASCON» и «МАРАТ».

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Хан Х. Теория упругости: Основы линейной теории и её применение. М.: Мир, 1988. 344с.
2. Головин Н.Н., Кувыркин Г.Н. Особенности расчёта высокотемпературных конструкций из углерод–углеродных композитов // Теплофизика высоких температур. 1996. Т.34. №5. С.761-769.
3. Головин Н.Н., Кувыркин Г.Н. Численное решение контактной задачи термопластичности анизотропных композитных материалов // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности. //Тр. XIII Межреспубликанской конференции, Новосибирск: 22-24 июня 1993 г. Новосибирск, 1995. С.61-67.
4. Секулович М. Метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1993. – 664с.

#### Сведения об авторах:

**Кувыркин Георгий Николаевич**, д.т.н проф., МГТУ им. Н.Э. Баумана, зав. кафедрой, E-mail: [fn2@bmstu.ru](mailto:fn2@bmstu.ru)

**Головин Николай Николаевич**, к.т.н., с.н.с., МГТУ им. Н.Э. Баумана

**Майская Елена Викторовна**, н.с., МГТУ им. Н.Э. Баумана

# ПАЦИЕНТО-ОРИЕНТИРОВАННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ХИРУРГИЧЕСКОГО ЛЕЧЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ СЕРДЕЧНО-СОСУДИСТОЙ СИСТЕМЫ

*Гоялкина А.А., Калинин А.А., Кириллова И.В., Коссович Е.Л.,  
Коссович Л.Ю., Менишова Л.Р., Морозов К.М., Полиенко А.В.,  
Челнокова Н.О.*

*Россия*

**ВВЕДЕНИЕ.** Ишемический инсульт представляет собой серьёзную угрозу для здоровья и является ведущей причиной длительной недееспособности населения в развитых странах [1]. Летальность от инсульта колеблется от 25 до 30%. Основными причинами, приводящими к возникновению ишемического инсульта, являются атеросклероз и патологические извитости внутренних сонных и позвоночных артерий [2]. Современные методы лечения имеют целью замедлить прогрессирование болезни и защитить пациента от развития инсульта. Количество оперативных вмешательств на артериях, кровоснабжающих головной мозг, неуклонно увеличивается, и к 2010 г. достигло в РФ почти 18 тыс. Достоверно установлена эффективность лишь каротидной эндартерэктомии (КЭА) в предупреждении инсультов у пациентов с атеросклерозом бифуркации сонной артерии. Выбор техники КЭА зависит от опыта и предпочтений конкретного хирурга. Вопрос о частоте рестенозов, причинах и взаимосвязи с используемым пластическим материалом практически не разработан. В «Национальные рекомендации по ведению пациентов с заболеваниями брахицефальных артерий (Российский согласительный документ)» [3] подчеркивается необходимость снижения риска операционных осложнений.

Общая сонная артерия (ОСА), внутренняя сонная артерия (ВСА), ампула ВСА, наружная сонная артерия (НСА) в норме и при наличии патологии на протяжении нескольких десятилетий являются объектами исследования не только патофизиологов, неврологов, сердечно-сосудистых хирургов и специалистов по рентгенэндоваскулярным методам диагностики и лечения, но и биомехаников и биофизиков. Но если последних интересуют данные объекты с точки зрения возможности разработки и создания инновационного диагностического оборудования и инструментария, то биомеханики пытаются выяснить и оценить степень влияния механических факторов в развитии патологических состояний артерий. Совместная работа всех вышеперечисленных специалистов по тщательному изучению ангиоархитектоники, гистоморфометрии, механических свойств брахицефальных артерий, гемодинамической картины в данной системе артерий, определение гемодинамических условий, влияющих на развитие патологических состояний, направлена на улучшение безопасности хирургического лечения больных с высоким риском инсульта.

**МЕТОДЫ.** В Саратовском государственном университете построены и клинически адаптированы компьютерные биомеханические модели, характеризующиеся геометрическим и физико-механическим подобием сонной артерии (СА)

человека. Исследованы механические свойства СА и заплат, применяемых при пластике артерий. Проведено математическое моделирование, которое позволило изучить поведение в СА в норме, при наличии патологии (поражение атеросклерозом, патологическая извитость, сочетанная патология) и после реконструктивного вмешательства [4, 5]. В Саратовском государственном медицинском университете проведено анатомо-хирургическое исследование ангиоархитектоники, морфологии, гистологии, топометрии зоны бифуркации общей сонной артерии [6].

**РЕЗУЛЬТАТЫ.** Построение биомеханической модели артерии конкретного пациента включает в себя обработку данных мультиспиральной компьютерной томографии (МСКТ) и создание на их основе трёхмерной геометрической модели сосудистого русла конкретного пациента, изучение скоростных и объёмных характеристик кровотока, подбор параметров для моделей стенки сосуда и заплаты из базы *in vitro* экспериментальных данных механических свойств. По данным МСКТ восстанавливалась геометрия объекта с помощью программы обработки изображений MIMICS и системы автоматизированного проектирования SolidWorks. Необходимые для моделирования характеристики кровотока (артериальное давление и скорость) конкретного пациента были получены с использованием ультразвуковой доплерографии (УЗДГ) и/или ультразвукового дуплексного сканирования (УЗДС) на стадии предоперационного обследования, интраоперационно (транскраниальная доплерография) и после закрытия артериотомического отверстия заплатой. Оценка степени стеноза, зоны максимального расширения и максимально сужения артерии, геометрия артерии проводилась после обработки данных МСКТ и УЗДС. Проведены эксперименты на одноосное растяжение по определению деформативных и прочностных свойств *in vitro* стенок СА (методика описана в [7].) а также заплат из синтетических и биологических материалов применяемых на сегодняшний день при пластике артерий (заплаты из политетрафторэтилена, дакрона, ксеноперикарда, большая подкожная вена, яремная вена, лицевая вена, шитовидная артерия). Сформирована база данных физико-механических параметров. Материал для исследования изъят у более 100 трупов людей обоего пола в возрасте от 18 до 78 лет, поступивших в Саратовское областное бюро судебно-медицинской экспертизы, а также для учебной работы на кафедре оперативной хирургии и топографической анатомии СГМУ. Ни в одном из случаев причина смерти не была связана с поражением брахиоцефальных артерий. Выявлено увеличение жёсткости сосуда с увеличением возраста и степени поражения атеросклерозом, а также значительное различие в механических свойствах образцов заплат между собой и в разных направлениях. Проведён сравнительный анализ гистологического строения сонной артерии и её ветвей. На основе морфометрического исследования создана база данных геометрических и морфометрических параметров ОСА, ВСА, НСА человека с учётом возраста, пола, типа телосложения, причины смерти и сопутствующих

заболеваний. Выявлено, что геометрия зоны бифуркации общей сонной артерии имеет половые и возрастные особенности, которые оказывают значительное влияние на распределение потоков крови, и как следствие, локализацию атеросклеротического процесса, и что гистологическое строение сонных артерий находится в тесной связи с геометрией сосудистого русла и определяется местными гемодинамическими характеристиками. Расчёты проводили с использованием универсальной программной системы конечно-элементного (МКЭ) анализа ANSYS, программное обеспечение которой имеет возможность оценить взаимодействие между кровотоком и сосудистой стенкой. Основные этапы конечно-элементной реализации включали в себя создание или импорт геометрической модели, подбор материала стенки артерии и материала заплат, задание их параметров, выбор типа элементов, создание сетки, задание граничных и начальных условий. Кровь моделировалась как ньютоновская жидкость с различной плотностью и динамической вязкостью. Её движение описывалось уравнением Навье-Стокса для несжимаемой жидкости. Движение стенки сосуда описывалось уравнением Навье-Ламе. На торцах сосуда задавались ограничения на перемещения по всем трём направлениям. На входе в артерию задавались переменная по времени скорость потока жидкости, на выходе – постоянное давление. Со стороны крови на стенку действует сила, которая представляет собой суммарное воздействие давления и сил вязкости на стенку. На границе поверхности упругой и жидкой сред задавалось условие равенства перемещений для узлов вычислительной сетки. Стенка артерии моделировалась как однородный однослойный или двухслойный материал в зависимости от поставленной задачи. Нелинейное поведение биологического материала моделировалось с использованием моделей Дельфино (Delfino), Муни-Ривлина (Mooney–Rivlin) [8] и др. Подбор параметров для моделей стенки сосуда и заплат на основе экспериментальных данных проводился по специально разработанной методике. Для нахождения баланса между точностью решения поставленной математической задачи и затратами вычислительных ресурсов обязательным шагом являлось исследование сеточной сходимости. Изучено поведение СА в норме, при наличии патологии (поражение атеросклерозом, патологическая извитость, сочетанная патология) [9-16]. Выполнена реконструкция оперативного вмешательства с учётом особенностей хирургической техники и используемых пластических материалов для конкретного больного. Анализ реконструкции ВСА с пластикой артериотомического отверстия заплатой и без пластики заплатой подтвердил выводы хирургов [17] о необходимости проведения пластики артерии заплатой. Из всех вариантов материалов заплат предпочтительнее использовать заплаты из ксеноперикарда.

**ВЫВОДЫ.** Компьютерное моделирование, выполненное с использованием разработанной биомеханической модели, позволило визуализировать процесс функционирования СА, оценить гемодинамическую картину в исследуемой

системе с учётом напряжённо-деформированного состояния, выявить проблемные зоны, определить механические факторы, способствующие снижению мозгового кровообращения и развитию атеросклероза, разработать методы проведения пациенто-ориентированного моделирования. Моделирование реконструктивной операции на СА для конкретного больного показало возможность применения разработанной методики в клинической практике при приближении вычислительного эксперимента к реальным условиям.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Thom T, Haase N, Rosamond W, et al. American Heart Association Statistics Committee and Stroke Statistics Subcommittee. Heart disease and stroke statistics—2006 update: a report from the American Heart Association Statistics Committee and Stroke Statistics Subcommittee. *Circulation*. 2006; 113; e85–151.
2. Заболеваемость взрослого населения России в 2011 году: Стат. мат./ М.: ФГБУ «ЦНИИОИЗ» Минздрава, 2012, 3 часть. 525 с.
3. Национальные рекомендации по ведению пациентов с заболеваниями брахиоцефальных артерий (Российский согласительный документ). М.: НЦССХ им. А.Н.Бакулева РАМН, 2013. 72 с.
4. Каменский А.В. Математическое моделирование поведения бифуркации сонной артерии человека на различных стадиях атеросклеротического поражения и после операционного вмешательства: дис. канд. физ.-мат. наук: 01.02.08 / Каменский Алексей Владимирович. Саратов, 2007. 170 с.
5. Павлова О.Е. Биомеханическое исследование патологической извитости внутренней сонной артерии: дис. канд. физ.-мат. наук: 01.02.08 / Павлова Ольга Евгеньевна . Саратов, 2013. 187 с.
6. Поляев В.О. Анатомо-хирургическое обоснование принципов прогнозирования изменений гемодинамики при атеросклеротическом поражении и реконструктивных вмешательств в зоне бифуркации общей сонной артерии: дис. канд. мед. наук: 14.00.27 / Поляев Василий Олегович. Саратов, 2007. – 130 с.
7. Пурина Б.А., Касьянов В.А. Биомеханика крупных кровеносных сосудов человека. Рига: «Зинатне», 1980. – 260 с.
8. Holzapfel GA, Gasser TC, Ogden RW. A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models. *J Elast*. 2000; 61 (1-3):1-48.
9. Кириллова И.В. Эндартерэктомия сонной артерии человека заплатами из различных материалов /И.В.Кириллова, Л.Ю.Коссович, Ю.П.Гуляев, А.С.Десятова, А.В.Каменский, Ю.Е.Сальковский, Н.В.Островский, В.О.Поляев, Л.А.Бокерия, К.М.Морозов //Биомедицинские технологии и радиоэлектроника. 2006. № 12. С. 33–41.

10. Кириллова И.В. Биомеханика бифуркаций сонных артерий /И.В.Кириллова, К.М.Морозов, А.В.Каменский //Регионарное кровообращение и микроциркуляция. 2007. № 1(21). С. 156–159.
11. Kossovich L.Y. Mathematical modelling of human carotid in healthy, affected or post-corrective surgery conditions/L.Y.Kossovich, I.V.Kirillova, Y.P.Gulaev, D.V.Ivanov, A.V.Kamenskiy, V.O.Polyaev, N.V.Ostrovskiy, K.M.Morozov// Topical Problem in Solid Mechanics; Editors N.K.Gupta, A.V.Manzirov. – Elite Publishing House Pvt. Ltd. India, IIT Delhi, 2008. – P. 235–250.
12. Kamenskiy, A.V. Finite Element Model of the Patched Human Carotid /A.V. Kamenskiy, I.I. Pipinos, A.S. Desyatova, Y.E. Salkovskiy, L.Y. Kossovich, I.V. Kirillova, L.A. Bockeria, K.M. Morozov, V.O. Polyae, T.G. Lynch, Y.A. Dzenis//Vascular and Endovascular Surgery. 2009. Vol. 43(6). – P. 533–541.
13. Kossovich, L.Y. Modeling of Hemodynamics and Mechanical Behavior of Pathologically Tortuous Carotid Arteries / L.Y. Kossovich, I.V. Kirillova, O.E. Pavlova, Y.E. Salkovskiy // IFMBE Proceedings. 2010. Vol. 31. – P. 860–862.
14. Павлова, О.Е. Гемодинамика и механическое поведение бифуркации сонной артерии с патологической извитостью / О.Е. Павлова, Д.В. Иванов, А.А. Грамакова, К.М. Морозов, И.И. Суслов // Известия Саратовского ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. Саратов. 2010. № 10(2). – С. 66–73.
15. Павлова, О.Е. Численное исследование влияния патологической извитости артерии на кровоток / О.Е. Павлова, Д.В. Иванов, И.В. Кириллова // ANSYS Advantage. Русская версия. 2012. – № 18. – С. 47–48.
16. Коссович, Л.Ю. Биомеханика сонной артерии человека с патологической извитостью /Л.Ю.Коссович, К.М.Морозов, О.Е.Павлова// Изв. Саратовского ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013, № 13(3), С. 76–82.
17. Пирцхалаишвили З.К. Сравнительная оценка результатов каротидной эндактерэктомии в зависимости от методов пластики / З.К.Пирцхалаишвили, А.В.Лаврентьев, Н.А.Дарвиш, А.В.Чуракова, А.И. Селезнев, А.А.Спридонов //Анналы хирургии – 2002. – №5. – С. 66-70.

### **Сведения об авторах:**

**Голядкина А.А., Калинин А.А., Кириллова И.В., Коссович Е.Л., Коссович Л.Ю., Менишова Л.Р., Полиенко А.В.** – Саратовский государственный университет

**Морозов К.М.** - Первый Московский Государственный медицинский университет им. И.М.Сеченова, Москва

**Челнокова Н.О.** - Саратовский государственный медицинский университет им. В.И.Разумовского

**Адрес для переписки:** 410012, Образовательно-научный институт наноструктур и биосистем СГУ имени Н.Г. Чернышевского, Астраханская, 83, Саратов, Россия

**Телефон:** +78452210750 **Факс:** +78452511527. **E-mail:** nano-bio@sgu.ru

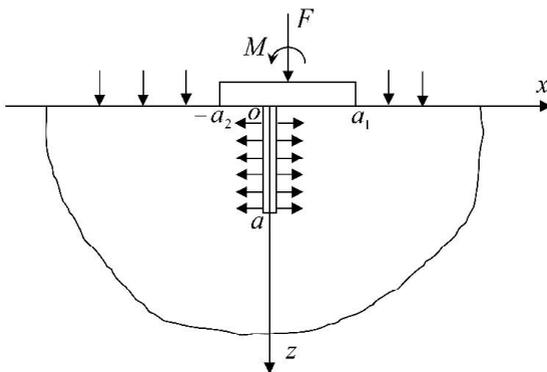
# КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОЙ СОСТАВНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ, ОСЛАБЛЕННОЙ КОНЕЧНЫМ ВЕРТИКАЛЬНЫМ РАЗРЕЗОМ

*Григорян А.  
Армения*

Исследовано напряжённо-деформированное состояние упругой составной полуплоскости из изотропного и ортотропного квадрантов при несимметричном воздействии жёсткого штампа на её границе, когда полуплоскость на вертикальной линии полного сцепления квадрантов имеет выходящий на границу конечный разрез.

Рассматривается плоская несимметричная контактная задача для упругой составной полуплоскости ( $z \geq 0; |x| < \infty$ ) из изотропного и ортотропного квадрантов, которая на вертикальной линии полного сцепления квадрантов имеет конечный разрез ( $0 < z < a$ ), когда на участке  $(-a_2; -a_1)$  горизонтальной границы ( $z = 0$ ) полуплоскости приложен жесткий штамп с основанием произвольной гладкой формы, расположенный несимметрично относительно оси разреза ( $x = 0$ ).

Предполагается, что трение между штампом и полуплоскостью отсутствует. На кромках разреза действует произвольное нормальное давление. На вертикальной оси вне разреза заданы условия полного контакта (рис.).



*Рис. Расчетная схема*

Решение задачи представляется в виде суммы решений смешанных задач для двух квадрантов, разделённых осью разреза ( $i = 1$  для ортотропного квадранта,  $i = 2$  для изотропного квадранта). Задача решается методом Фурье, представляя перемещения в виде следующих интегралов Фурье:

$$U_x^{(1)}(x; z) = \frac{1}{c_{11} \int_0^\infty} \alpha \bar{U}^{(1)}(\alpha; z) \cos \alpha x d\alpha + \frac{1}{c_{11} \int_0^\infty} \beta \bar{U}^{(1)}(\beta; x) \cos \beta z d\beta; \quad (1)$$

$$U_z^{(1)}(x; z) = \frac{-1}{c_{44} \int_0^\infty} \alpha \bar{W}^{(1)}(\alpha; z) \sin \alpha x d\alpha + \frac{1}{c_{44} \int_0^\infty} \beta \bar{W}^{(1)}(\beta; x) \sin \beta z d\beta;$$

$$U_x^{(2)}(x; z) = \frac{1}{E} \left[ \int_0^\infty \alpha [A(\alpha)(1 + \mu) - 2B(\alpha) + \alpha z B(\alpha)(1 + \mu)] \frac{\cos \alpha x}{e^{\alpha z}} d\alpha - \int_0^\infty \beta [C(\beta)(1 + \mu) + D(\beta)(1 - \mu) - \beta x D(\beta)(1 + \mu)] e^{\beta x} \cos \beta z d\beta \right]; \quad (2)$$

$$U_z^{(2)}(x; z) = \frac{1}{E} \left[ - \int_0^\infty \alpha [A(\alpha)(1 + \mu) - B(\alpha)(1 - \mu) + \alpha z B(\alpha)(1 + \mu)] \cdot \frac{\cos \alpha x}{e^{\alpha z}} d\alpha + \int_0^\infty \beta [C(\beta)(1 + \mu) - 2D(\beta) - \beta x D(\beta)(1 + \mu)] e^{\beta x} \cos \beta z d\beta \right],$$

где  $\bar{U}^{(1)}(\alpha; z)$ ;  $\bar{W}^{(1)}(\alpha; z)$ ;  $\bar{U}^{(1)}(\beta; x)$ ;  $\bar{W}^{(1)}(\beta; x)$  выражены через  $A_1(\alpha)$ ;  $A_2(\alpha)$ ;  $C_1(\beta)$ ;  $C_2(\beta)$  и представлены в работе [1].

Неизвестные функции интегрирования  $A_j(\alpha)$ ;  $C_k(\beta)$ ;  $A(\alpha)$ ;  $B(\alpha)$ ;  $C(\beta)$  и  $D(\beta)$  определяются при помощи граничных и контактных условий:

$$\begin{aligned} U_z^{(1)}(x; 0) &= f_1(x); \quad 0 \leq x \leq a_1; & U_z^{(2)}(x; 0) &= f_2(x); \quad -a_2 \leq x \leq 0 \\ \sigma_z^{(1)}(x; 0) &= f_3(x); \quad a_1 < x < \infty; & \sigma_z^{(2)}(x; 0) &= f_4(x); \quad -\infty < x < -a_2; \\ \tau_{zx}^{(1)}(x; 0) &= 0; \quad 0 < x < a_1; & \tau_{zx}^{(2)}(x; 0) &= 0; \quad -a_2 < x < 0; \\ \tau_{zx}^{(1)}(x; 0) &= f_5(x); \quad a_1 < x < \infty; & \tau_{zx}^{(2)}(x; 0) &= f_6(x); \quad -\infty < x < -a_2; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(1)}(0; z) &= f_7(z); \quad 0 < z < a; & \sigma_x^{(2)}(0; z) &= f_7(z); \quad 0 < z < a; \\ \tau_{xz}^{(1)}(0; z) &= 0; \quad 0 < z < a; & \tau_{xz}^{(2)}(0; z) &= 0; \quad 0 < z < a; \\ \sigma_x^{(1)}(0; z) &= \sigma_x^{(2)}(0; z); & \tau_{xz}^{(1)}(0; z) &= \tau_{xz}^{(2)}(0; z); & a < z < b; \\ U_x^{(1)}(0; z) &= U_x^{(2)}(0; z); & U_z^{(1)}(0; z) &= U_z^{(2)}(0; z); & a \leq z \leq b; \end{aligned} \quad (4)$$

где  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  – непрерывные функции, а  $f_3(x)$ –  $f_6(x)$  и  $f_7(z)$  – функции, для которых существует интегральное преобразование Фурье.

Пользуясь соотношениями теории упругости [2] и (1,2), можно все компоненты упругого поля выразить через неизвестные функции интегрирования. Удовлетворяя условиям (3) и (4), получены интегральные

соотношения и следующие „парные” интегральные уравнения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\infty} \alpha^2 A_1(\alpha) \cos \alpha x d\alpha = -\frac{c_{44}}{c_1} f_1'(x) - \frac{c_2}{c_1} \psi_1^*(x), \quad 0 \leq x \leq a_1; \\ \int_0^{\infty} \alpha^2 [A_1(\alpha) - \Phi_1(\alpha)] \sin \alpha x d\alpha = 0, \quad a_1 < x < \infty; \end{array} \right. \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\infty} \alpha^2 A(\alpha) \cos \alpha x d\alpha = \frac{E}{2} f_2'(-x) + \psi_2^*(x), \quad 0 \leq x \leq a_2; \\ \int_0^{\infty} \alpha^2 [A(\alpha) - \Phi_2(\alpha)] \sin \alpha x d\alpha = 0, \quad a_2 < x < \infty; \end{array} \right. \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\infty} \beta^2 C(\beta) \cos \beta z d\beta = -f_7(z), \quad 0 < z < a; \\ \int_0^{\infty} \beta^2 [C(\beta) - D(\beta)] \sin \beta z d\beta = \Phi_3(z), \quad 0 < z < a; \end{array} \right. \quad (7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\infty} \beta^2 [m_1 C(\beta) + m_2 D(\beta) - \Phi_4(\beta)] \sin \beta z d\beta = 0, \quad a \leq z < \infty; \\ \int_0^{\infty} \beta^2 [m_3 C(\beta) + m_4 D(\beta) - \Phi_5(\beta)] \cos \beta z d\beta = 0, \quad a \leq z < \infty. \end{array} \right. \quad (8)$$

Здесь  $\Phi_1(\alpha)$  выражена через  $C_k(\beta)$  и известные функции,  $\Phi_2(\alpha)$  – через  $C(\beta); D(\beta)$  и известные функции,  $\Phi_3(z)$  – через  $A(\alpha)$  и известные функции,  $\Phi_4(\beta); \Phi_5(\beta)$  – через  $A_1(\alpha); A(\alpha)$  и известные функции.

Для решения (5-8) введены функции [3,4]:

$$\int_0^{\infty} \alpha^2 [A_1(\alpha) - \Phi_1(\alpha)] \sin \alpha x d\alpha = \begin{cases} Q_1(x), & (0 \leq x \leq a_1); \\ 0, & (a_1 < x < \infty); \end{cases} \quad (9)$$

$$\int_0^{\infty} \alpha^2 [A(\alpha) - \Phi_2(\alpha)] \sin \alpha x d\alpha = \begin{cases} Q_2(x), & (0 \leq x \leq a_2); \\ 0, & (a_2 < x < \infty); \end{cases} \quad (10)$$

$$\int_0^{\infty} \beta^2 [m_1 C(\beta) + m_2 D(\beta) - \Phi_4(\beta)] \sin \beta z d\beta = \begin{cases} H(z), & (0 \leq z \leq a); \\ 0, & (a \leq z < \infty); \end{cases} \quad (11)$$

$$\int_0^{\infty} \beta^2 [m_3 C(\beta) + m_4 D(\beta) - \Phi_5(\beta)] \cos \beta z d\beta = \begin{cases} S(z), & (0 \leq z \leq a); \\ 0, & (a \leq z < \infty). \end{cases} \quad (12)$$

После этого получены сингулярные интегральные уравнения (13) и система сингулярных интегральных уравнений (14) с ядрами Коши [5]:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a_j}^{a_j} \frac{Q_j(\tau)}{\tau - x} d\tau = F_j(x), \quad -a_j \leq x \leq a_j; \quad (j=1,2), \quad (13)$$

$$\begin{cases} S(z) + \frac{1}{\pi} \bar{g} \int_{-a}^a \frac{H_1(t)}{t-z} dt = \frac{1}{g_2} F_3(z), \\ -\frac{1}{\pi} \bar{g} \int_{-a}^a \frac{S(t)}{t-z} dt + H_1(z) = \frac{\bar{g}_1}{g_1 - g_3} F_4(z), \end{cases} \quad -a < z < a; \quad (14)$$

Здесь  $H_1(z) = \bar{g}_1 H(z)$ ,  $F_3(z); F_4(z)$  выражены через  $A_1(\alpha); A(\alpha)$  и известные функции,  $F_1(x)$  – через  $C_k(\beta)$  и известные функции, а  $F_2(x)$  – через  $C(\beta); D(\beta)$  и известные функции.

Решая (13) и (14) [3,4,6], получены:

$$Q_j(x) = \frac{-1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_j^2 - x^2}} \int_{-a_j}^{a_j} \frac{\sqrt{a_j^2 - \tau^2}}{\tau - x} \cdot F_j(\tau) d\tau - \frac{b_j}{\sqrt{a_j^2 - x^2}}; \quad (j=1,2), \quad (15)$$

$$S(z) = \frac{F_3(z)}{g_4} + \frac{g_2 g_4^{-1} \pi^{-1}}{\sqrt{z^2 - a^2}} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - t^2}}{t - z} \left\{ F_3(t) \cos \left[ \gamma \ln \left( \frac{(z+a)(t-a)}{(z-a)(t+a)} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{F_4(t)}{g_5} \sin \left[ \gamma \ln \left( \frac{(z+a)(t-a)}{(z-a)(t+a)} \right) \right] \right\} dt + \frac{c}{\sqrt{z^2 - a^2}} \cos \left[ \gamma \ln \left( \frac{z+a}{z-a} \right) \right]; \quad (16)$$

$$H(z) = \frac{F_4(z)}{g_6} + \frac{g_2 g_7^{-1} \pi^{-1}}{\sqrt{z^2 - a^2}} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - t^2}}{t - z} \left\{ F_3(t) \sin \left[ \gamma \ln \left( \frac{(z+a)(t-a)}{(z-a)(t+a)} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{F_4(t)}{g_8} \cos \left[ \gamma \ln \left( \frac{(z+a)(t-a)}{(z-a)(t+a)} \right) \right] \right\} dt - \frac{c \bar{g}_1^{-1}}{\sqrt{z^2 - a^2}} \sin \left[ \gamma \ln \left( \frac{z+a}{z-a} \right) \right]; \quad (17)$$

где „ $b_j$ ” и „ $c$ ” определяются из условий равновесия.

Имея в виду (15-17), после некоторых преобразований, для определения  $A_1(\alpha)$  и  $A(\alpha)$ , получена система из двух интегральных уравнений Фредгольма второго рода.

Определяя из этой системы  $A_1(\alpha)$  и  $A(\alpha)$ , последовательно определяем все искомые функции, после чего можно определить напряжённо-деформированное состояние любой точки составной полуплоскости. В частности, получены формулы для определения напряжений под штампом ( $z = 0$ ) и вне разреза ( $x = 0$ ), а также перемещений вне штампа ( $z = 0$ ) и в разрезе ( $x = 0$ ).

Из-за установленных норм объёма статьи приведём только формулы для определения нормальных напряжений под штампом:

$$\sigma_z^{(1)}(x;0) = -\frac{c_3}{\pi\sqrt{a_1^2 - x^2}} \int_{-a_1}^{a_1} \frac{\sqrt{a_1^2 - t^2}}{t - x} F_1(t) dt + W_1(x), \quad 0 < x < a_1; \quad (18)$$

$$\sigma_z^{(2)}(-x;0) = \frac{1}{\pi\sqrt{a_2^2 - x^2}} \int_{-a_2}^{a_2} \frac{\sqrt{a_2^2 - t^2}}{t - x} F_2(t) dt + W_2(-x), \quad 0 < x < a_2. \quad (19)$$

Таким образом, в работе развита методика решения несимметричных контактных задач для составной полуплоскости из изотропного и ортотропного квадрантов, ослабленной вертикальным конечным разрезом.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Мелкумян С.А., Григорян А.Ж. Несимметричная контактная задача для ортотропной полуплоскости с вертикальным конечным разрезом// Докл. НАН Армении. 1997. Т.97. №4. С.37-43.
2. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
3. Мелкумян А.С. Симметричная задача электроупругости для составной плоскости с полубесконечными разрезами при наличии заряженного электрода// Докл. НАН Армении. 1999. Т.99. №3. С.240-246.
4. Акопян В.Н., Саакян А.В. О напряжённом состоянии упругой плоскости с полубесконечным разрезом, перпендикулярно выходящим на жёсткое включение конечной длины// В сб. тр., посв. акад. С.А. Амбарцумяну. Ереван: 2007. С.16-25.
5. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.
6. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 513 с.

**Grigoryan Aram**

Doctor of Philosophy (Ph.D) in Engineering

**Phone:** (093) 952420

**E-mail:** [aram-95@rambler.ru](mailto:aram-95@rambler.ru)

# ПРИНЦИПЫ РАСЧЁТА СБОРНО-МОНОЛИТНЫХ ЧАСТОРЕБРИСТЫХ ПЕРЕКРЫТИЙ

*Григорян Д.Г., Арутюнян В. М.*

*Армения*

В статье представлены преимущества и недостатки сборно-монолитных часторебристых перекрытий, примеры их применения в Республике Армения с учётом существующего сейсмического воздействия. Приводятся примеры применения этих перекрытий в зданиях с разными схемами. Сборно-монолитные часторебристые перекрытия сравниваются с монолитной плитой и со сборными перекрытиями.

Железобетонные плоские перекрытия в промышленном и гражданском строительстве – самые используемые конструкции. Широкое применение железобетонных перекрытий связано с их высокой производительностью, сравнительно простой технологией, жёсткостью, долговечностью. По принципу работы железобетонные перекрытия делятся на две основные группы: балочные и безбалочные [1, 2].

В статье рассматриваются расчётные схемы часторебристых перекрытий с балочными плитами и возможности их применения в РА. Суть конструкций этих перекрытий является в том, что в целях сокращения расходов бетона с растянутых зон он по возможности удаляется. Остаются только ребра, где установлены рабочие арматуры (рис.1). Плита подвергается местному изгибу. Одна часть балок изготавливается в заводских условиях, другая часть бетонируется на строительной площадке вместе с балкой. Блоки-вкладыши могут быть легко-бетонные, керамические, из пенопласта или пенополистерола.

Широкое применение этих перекрытий связано со следующими главными факторами:

1. Легкий собственный вес (часторебристые перекрытия считаются самыми легкими).
2. Возможность осуществления монтажа перекрытия без подъемных машин.
3. Осуществление перекрытия без опалубки.
4. Характеристики высокой тепло- и звукоизоляции.

5. Короткий технологический цикл монтажа балок и балок–вкладышей (поверхности до 250 м<sup>2</sup> монтируются во время одной смены).

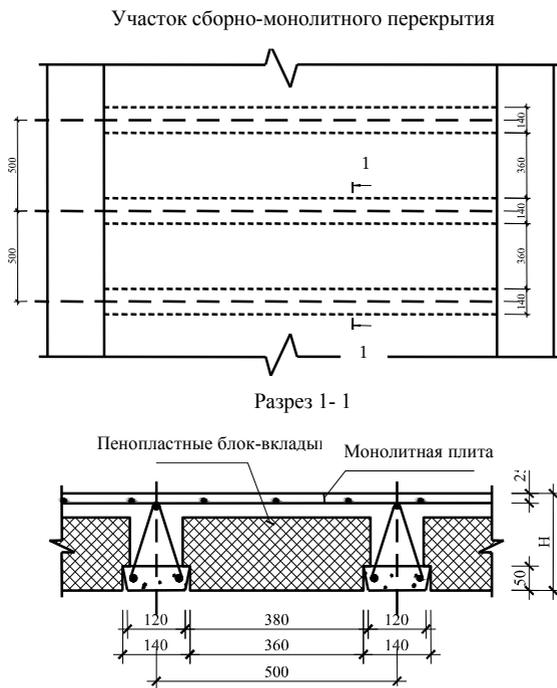


Рис. 1

Применение сборно-монолитных часторебристых перекрытий экономит объём бетона, в растянутых зонах объём бетона значительно уменьшается. Несущую способность таких типов сборно-монолитных перекрытий легко можно изменить. Для этого достаточно сократить межосевое расстояние между балками. Блоки-вкладыши легко обрабатываются, что позволяет изменить ширину блока, даже в пределах одного этажа можно получить пространство с разными несущими способностями.

Каркасы арматурных балок производятся с высотой 15, 20, 25, 30 см. Высота перекрытия (H) получается, соответственно, 20, 25, 30, 35 см (рис.2) [3, 4]. При изготовлении треугольного арматурного каркаса после вырезки соответственного пролета нижняя планка балки бетонируется 5 см высотой в заводских условиях и перевозится на стройплощадку. Загрузка и разгрузка

балок могут быть выполнены вручную. Вес балки пролетом 6 м около 90кг. Решения опорных узлов балок должны выполняться в соответствии с

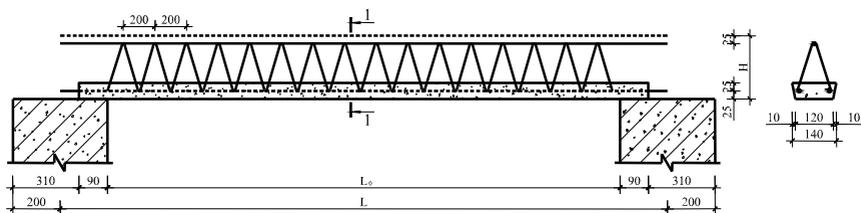


Рис. 2. Внешний вид и размеры балок

рабочими чертежами проекта здания и сооружения.

В таблице представлены приведённые высоты сборно-монолитных часторебристых перекрытий и собственный вес площади  $1\text{ м}^2$ . При одинаковой несущей способности собственный вес круглопустотной сборной плиты с площадью в  $1\text{ м}^2$  около 300 кг, приведённая высота 12см, а собственный вес монолитной плиты перекрытия толщиной 15 см на площадь в  $1\text{ м}^2$  составляет 375 кг. Как становится ясно из таблицы, по сравнению с монолитными перекрытиями, сборно-монолитные перекрытия этого типа легче на 35-40 %, а по сравнению с круглопустотными сборными перекрытиями, на 20-25 %.

Таблица

Толщина сборно-монолитных перекрытий (Н)	200мм	250мм	300мм	350мм
Приведённая высота	83мм	93мм	103мм	113мм
Собственный вес $1\text{ м}^2$	220кг	240кг	270кг	290кг

В качестве примера приводятся восьми- и десятиэтажные монолитные железобетонные каркасные здания. Восьмиэтажное здание имеет рамную систему, а десятиэтажное – рамно-связевую. Высота этажа была принята 3.3м, пролёты в продольном направлении 6.0 и 6.6 м (6 пролётов), в поперечном направлении 5.0 и 3.5м (3 пролёта). Для всех конструкций бетон был принят тяжёлым (В25 класса).

Были рассмотрены два случая. В первом случае было монолитное перекрытие с железобетонной плитой толщиной 15 см, во втором – сборно-

монолитное часторебристое перекрытие толщиной 25 см. Расчёты были сделаны с помощью программного пакета Лира 9.6, согласно нормативам проектировки сейсмостойкого строительства РА для третьей сейсмической зоны [5].

В случае монолитного перекрытия узел соединения с ригелем жёсткий, а в случае сборно-монолитного перекрытия он обычно бывает шарнирным. В указанных примерах, для получения жёсткого диска мы увеличили толщину плиты, таким образом получив жёсткий узел.

Сравнение величин перекосов этажей показало, что в случае с монолитной плитой толщиной в 15 см, перекосяк на 10-15 % больше, что можно объяснить большой разницей собственных весов в вышеуказанных двух вариантах. Только в пределах одного этажа сборно-монолитное часторебристое перекрытие на 80 тонн легче, чем монолитная железобетонная плита толщиной в 15 см, то есть всё здание получается легче на 650-800 тонн. Отсюда можно сделать вывод, что сокращение жёсткости перекрытия, которое связано с шарнирным соединением, компенсируется небольшой величиной собственного веса. Применение сборно-монолитных часторебристых перекрытий в этих зданиях приводит к экономии 250 м<sup>3</sup> бетона и 25 тонн арматуры. В сборно-монолитных перекрытиях до 6м пролёта расходы арматурных сталей на 1м<sup>2</sup> составляет в среднем 5-7 кг, а в случае с монолитной плитой – 8-11 кг.

В зданиях и сооружениях до 3 этажей применение сборно-монолитных часторебристых перекрытий более эффективно, так как сокращение жёсткости, связанное с шарнирным узлом, в случае малых этажей не влияет значительно на сейсмостойкость зданий. Мы рассмотрели сборно-монолитные часторебристые перекрытия этого типа в трёхэтажных зданиях с несущими каменными стенами. В этом случае разница в опорных узлах балок; на стенах толщиной 40 см длина опоры балки была принята 10см.

Сборно-монолитные часторебристые перекрытия этого типа можно успешно применять в реконструируемых зданиях, особенно, когда есть необходимость менять перекрытия. В случае реконструирования маленький собственный вес, по сравнению с другими перекрытиями, даёт большее преимущество этим перекрытиям.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Байков В.Н., Сигалов Э.Е. Железобетонные конструкции. Общий курс. М.: Стройиздат, 1991. С.425.
2. Евстифеев В.Г. Железобетонные и каменные конструкции. Часть 1. Железобетонные конструкции. М.: Издательский центр «Академия». 2011. 425с.
3. Միաձույլ հավաքովի ծածկերի հեծաններ, ՀՀ ՏՊ 39079437.6494-2011, Տեխնիկական պայմաններ, Երևան 2011թ., էջ 14:
4. Ծածկերի երկաթբետոնե հեծանների ամրանային արտադրանքներ, ՀՀ ՏՊ 39079437.6493-2011, Տեխնիկական պայմաններ, Երևան, 2011թ., էջ 12:
5. Սեյսմակայուն շինարարություն. Նախագծման նորմեր, ՀՀՇՆ II – 2.02-2006, էջ 64:

### **Сведения об авторах:**

**Григорян Давид Гамлетович** – канд. техн. наук, ассистент кафедры Строительные конструкции, Ереванский государственный университет архитектуры и строительства, факультет Промышленное и гражданское строительство, (374 93) 57 87 96

**E-mail:** [davit-grigoryan@yandex.com](mailto:davit-grigoryan@yandex.com)

**Арутюнян Ваган Михайлович** –директор ЗАО «Микметал»,

**Тел.:** (374 10) 44 41 50

**E-mail:** [va-harutyunyan@yandex.ru](mailto:va-harutyunyan@yandex.ru)

# ДИФРАКЦИЯ СДВИГОВОЙ ЭЛЕКТРОУПРУГОЙ ВОЛНЫ НА ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ ТРЕЩИН В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

*Григорян Э.Х., Агаян К.Л., Джилавян С.А.  
Армения*

Рассматривается дифракция электроупругой волны сдвига на периодически расположенных полубесконечных трещинах в пьезоэлектрическом пространстве. Из-за периодической структуры среды решение строится ступенчатыми функциями, и задача сводится к решению функционального уравнения типа Римана на действительной оси.

Пьезоэлектрическое пространство-пьезоэлектрик класса 6mm гексагональной симметрии отнесено к декартовой системе координат  $Oxyz$ . Среда имеет параллельные трещины в плоскостях  $y = an$  при  $x < 0$ , где  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ,  $a > 0$ . Пусть на эту периодическую структуру с периодом  $a$  под углом  $\theta_0$  ( $0 \leq \theta_0 \leq \pi/2$ ) к плоскостям трещин падает распространяющаяся из бесконечности в полупространстве  $x > 0$  плоская сдвиговая электроупругая волна:

$$U_z(x, y, t) = W_\infty(x, y)e^{-i\omega t}, \quad \Phi_0(x, y, t) = \Phi_\infty(x, y)e^{-i\omega t}, \quad (1)$$

где  $W_\infty(x, y)$ ,  $\Phi_\infty(x, y)$  – функции амплитудных составляющих перемещения и электрического потенциала падающей волны сдвига

$$W_\infty(x, y) = e^{-ikx \cos \theta_0 - iky \sin \theta_0}, \quad \varepsilon_{11} \Phi_\infty(x, y) = e_{15} e^{-ikx \cos \theta_0 - iky \sin \theta_0}.$$

Здесь  $\omega = kc$  – частота колебаний,  $t$  – параметр времени,  $k$  – волновое число,  $c = \sqrt{c_{44}(1 + \chi)/\rho}$  – скорость распространения волны сдвига,  $\chi = e_{15}^2/c_{44}\varepsilon_{11}$  – коэффициент электромеханической связи пьезоэлектрика,  $c_{44}$ ,  $\varepsilon_{11}$ ,  $e_{15}$  – упругая, диэлектрическая и пьезоэлектрическая постоянные пьезоэлектрической среды,  $\rho$  – плотность.

Рассматриваемое пьезоэлектрическое пространство находится в условиях антиплоской деформации, вектор перемещения точек среды –  $\vec{u}(0, 0, u_z(x, y, t))$ . Учитывая гармоническую зависимость от времени всех составляющих электроупругого поля в пьезоэлектрической среде, принимаем  $u_z(x, y, t) = w(x, y)e^{-i\omega t}$ ,  $\Phi_i = \Phi(x, y)e^{-i\omega t}$ .

Задача определения дифрагированного электроупругого поля сводится к решению уравнений относительно амплитуд перемещения и электрического потенциала  $w(x, y)$ ,  $\Phi(x, y)$  [1]:

$$\Delta w + k^2 w = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (2)$$

$$\varepsilon_{11} \Delta \Phi + k^2 e_{15} w = 0. \quad (3)$$

На берегах полубесконечных трещин для напряжения  $\sigma_{yz}$  имеем условия [2,4]:

$$\sigma_{yz} = c_{44} \frac{\partial w}{\partial y} + e_{15} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = an \quad x < 0 \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (4)$$

а для амплитуд электрического потенциала и составляющей вектора электрической индукции при  $-\infty < x < \infty$

$$\Phi(x, y)|_{y=an+0} = \Phi(x, y)|_{y=an-0}, \quad D_2(x, y)|_{y=an+0} = D_2(x, y)|_{y=an-0} \quad (5)$$

Введём новые функции в виде

$$u(x, y) = w(x, y) - W_\infty(x, y), \quad \varphi(x, y) = \Phi(x, y) - \Phi_\infty(x, y),$$

тогда для напряжения  $\sigma_{yz}$  получим формулу:

$$\sigma_{yz} = c_{44} \frac{\partial u}{\partial y} + e_{15} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - ikc_{44} (1 + \chi) \sin \vartheta_0 e^{-ikx \cos \vartheta_0 -iky \sin \vartheta_0} \quad (6)$$

Для определения функции  $u(x, y)$  получим следующие уравнения:

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad \varepsilon_{11} \Delta \varphi + k^2 e_{15} u = 0. \quad (7)$$

Применяя интегральное преобразование Фурье по переменной  $x$  к уравнениям (7), получим:

$$\frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} - (\sigma^2 - k^2) \bar{u} = 0, \quad \frac{d^2 \bar{\varphi}}{dy^2} - \sigma^2 \bar{\varphi} + k^2 \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \bar{u} = 0, \quad (8)$$

где  $\bar{u}(\sigma, y) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y) e^{i\sigma x} dx, \quad \bar{\varphi}(\sigma, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y) e^{i\sigma x} dx.$

Представим искомую функцию  $\bar{u}(\sigma, y)$  в виде

$$\bar{u}(\sigma, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\theta(y - na) \bar{u}(\sigma, y) - \theta(y - (n+1)a) \bar{u}(\sigma, y)) \quad (9)$$

где  $\theta(z)$  – известная функция Хевисайда. Принимая во внимание вышеуказанные условия, получим следующее, соответствующее уравнению (8), дифференциальное уравнение относительно функции  $\bar{u}(\sigma, y)$ :

$$\frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} - (\sigma^2 - k^2) \bar{u} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta'(y - an) \bar{\Psi}_n^-(\sigma), \quad (10)$$

где  $\delta'(y)$  – производная функции Дирака по аргументу.

$$\text{Функция } \bar{\Psi}_n^-(\sigma) = \bar{u}(\sigma, an + 0) - \bar{u}(\sigma, an - 0) \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

характеризует разницу значений перемещений точек на берегах трещин  $\bar{\Psi}_n^-(x) = \Psi_n^-(x)\theta(-x)$ .

Решение уравнения (10) представляется в виде

$$\bar{u}(\sigma, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(y - an) e^{-\sqrt{\sigma^2 - k^2} |y - an|} \cdot \bar{\Psi}_n^-(\sigma). \quad (11)$$

Следовательно, для  $\bar{\Phi}(\sigma, y)$  имеем:

$$\bar{\Phi}(\sigma, y) = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \bar{u}(\sigma, y) - \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(y - an) e^{-|\sigma| |y - an|} \cdot \bar{\Psi}_n^-(\sigma)$$

Из-за периодической структуры рассматриваемой области и вида падения сдвиговой волны имеет место следующее соотношение:

$$\bar{\Psi}_n^-(\sigma) = e^{-ikan \sin \theta_0} \bar{\Psi}_0^-(\sigma) \quad (12)$$

$$\text{где } \bar{\Psi}_n^-(\sigma) = \bar{u}(\sigma, +0) - \bar{u}(\sigma, -0). \quad (13)$$

Введём функцию

$q_0^+(x) = q_0(x)\theta(x)$  т.е.  $q_0^+(x) = \sigma_{yz}(x, 0)$ . Задача сводится к определению функций  $\bar{\Psi}_0^-(\sigma)$ ,  $\bar{q}_0^+(\sigma)$  и построению функции  $\bar{u}(\sigma, y)$  в слое  $y \in (0, a)$ , которая в силу (11), (12) имеет вид:

$$\bar{u}(\sigma, y) = -\frac{\bar{\Psi}_0^-(\sigma)}{2} \cdot F(\gamma, y), \quad \gamma(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - k^2} = -i\sqrt{k^2 - \sigma^2} \quad (14)$$

$$\text{а для } \bar{\Phi}(\sigma, y) = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \bar{u}(\sigma, y) + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \frac{\bar{\Psi}_0^-(\sigma)}{2} F(\sigma, y) \quad y \in (0, a)$$

$$F(\sigma, y) = \frac{\operatorname{ch}\sigma y \cdot e^{-ika \sin \theta_0} - \operatorname{ch}\sigma(y-a)}{\operatorname{ch}\sigma a - \cos(ak \sin \theta_0)}$$

Принимая во внимание формулы (14), получим следующее функциональное уравнение относительно функций  $\bar{q}_0^+(\sigma)$  и  $\bar{\psi}_0^-(\sigma)$ :

$$\begin{aligned} \bar{q}_0^+(\sigma) + \frac{c_{44}}{2} \sqrt{\sigma^2 - k^2} K(\sigma) \bar{\psi}_0^-(\sigma) = \\ = -2\pi i k c_{44} (1+x) \sin \theta_0 \cdot \delta(\sigma - k \cos \theta_0) \end{aligned} \quad (15)$$

Таким образом, получили краевую задачу типа Римана на действительной оси [3,4,5], где

$$\gamma K_1(\sigma) K_2(\sigma) K(\sigma) = (1+x) \gamma \operatorname{sh} a \gamma K_1(\sigma) - \chi \sigma \operatorname{sh} a \sigma K_2(\sigma)$$

$$K_1(\sigma) = \operatorname{ch} a \sigma - \cos(ak \sin \theta_0), \quad K_2(\sigma) = \operatorname{ch} a \gamma - \cos(ak \sin \theta_0)$$

Функция  $K(\sigma)$  имеет только простые нули и полюса ( $ak \neq \pi n$ ) и  $K(\sigma) \rightarrow 1$  при  $\sigma \rightarrow \infty$ . Представим  $K(\sigma) = K^+(\sigma) \cdot K^-(\sigma)$ , где функции  $K^\pm(\alpha)$  регуляльны и не имеют нулей при  $\operatorname{Im} \alpha > 0$  и  $\operatorname{Im} \alpha < 0$ ,  $\alpha = \sigma + i\tau$ , соответственно.  $K^\pm(\alpha) \rightarrow 1$  при  $|\alpha| \rightarrow \infty$  в своих областях регулярности [4,5].

$$K^\pm(\sigma) = \exp R^\pm(\sigma), \quad R^-(\sigma) = R^+(-\sigma),$$

$$R^+(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln K(s)}{s - \sigma - i0} ds,$$

где контур интегрирования обходит отрицательные полюса и нули сверху, а положительные – снизу.

Решение уравнения (15) представляется в виде:

$$\bar{\psi}_0^-(\sigma) = - \frac{2(1+\chi) \sqrt{2k} \sin \theta_0 / 2}{K^+(k \cos \theta_0) \sqrt{\sigma - k} K^-(\sigma) \cdot (\sigma - k \cos \theta_0 - i0)} \quad (16)$$

$$\bar{q}_0^+(\sigma) = \frac{c_{44} (1+\chi) \sqrt{2k} \sin(\theta_0/2) \sqrt{\sigma + k} K^+(\sigma)}{K^+(k \cos \theta_0) \cdot (\sigma - k \cos \theta_0 + i0)}$$

Следовательно, искомые функции принимают вид

$$u(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\sigma x} \bar{\Psi}_0^-(\sigma) \cdot F(\gamma, y) d\sigma$$

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_{11}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\sigma x} \cdot \bar{\Psi}_0^-(\sigma) \cdot (F(\sigma, y) - F(\gamma, y)) d\sigma$$
(17)

Отметим, что уравнение  $K(\sigma) = 0$  имеет конечное число действительных корней и бесконечное множество чисто мнимых, а комплексных корней не имеет в соответствии с условиями уходящей волны.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Балакирев М.К., Гишинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука, 1982. 240с.
2. Митра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. М.: Мир, 1974. 323с.
3. Григорян Э.Х. Передача нагрузки от кусочно-однородной бесконечной накладки к упругой полуплоскости. //Уч. зап. ЕГУ. 1979. №3. С.29-34.
4. Григорян Э.Х., Джилаван С.А. Дифракция плоской сдвиговой волны на полубесконечной трещине в пьезоэлектрическом пространстве. //Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т.58. №1. С.38-50.
5. Агаян К.Л., Григорян Э.Х. Дифракция сдвиговой плоской электроупругой волны на полубесконечном электроде в пьезоэлектрическом пространстве с щелью. //Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. №1. С.50-69.

### Сведения об авторах:

**Григорян Эдвард Хосровович**, доктор физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник Института механики НАН Армении.  
Тел.: (+37410) 230-389,

**Агаян Каро Леренцович**, доктор физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении.  
Тел.: (+37491) 485-566; E-mail: [karo.aghayan@gmail.com](mailto:karo.aghayan@gmail.com)

**Джилаван Самвел Акопович**, кандидат физ.-мат. наук, доцент, кафедра механики ЕГУ.  
Тел.: (+37491) 500-770; E-mail: [samjilavyan@ysu.am](mailto:samjilavyan@ysu.am)

# СВОБОДНЫЕ ИНТЕРФЕЙСНЫЕ И КРАЕВЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТОНКИХ УПРУГИХ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК СО СВОБОДНЫМ ТОРЦОМ

Гулгазрян Г.Р., Гулгазрян Р.Г., Михасёв Г.И.

*Армения; Беларусь*

Исследуются свободные интерфейсные и краевые колебания полубесконечных замкнутых и незамкнутых цилиндрических оболочек составленных из полубесконечных и конечных ортотропных тонких упругих цилиндрических оболочек с разными упругими свойствами.

**Постановка задачи.** Вводятся на срединной поверхности цилиндрической оболочки (ЦО) криволинейные координаты  $(\alpha, \beta)$ , где  $\alpha(-\infty < \alpha \leq l^{(1)})$  и  $\beta(0 \leq \beta \leq s)$  являются, соответственно, ориентированной переменной длиной образующей и длиной дуги направляющей окружности.  $s$  – полная длина направляющей окружности (рис. 1,2). Здесь  $\alpha = 0$  соответствует границе раздела свойств материала. Все величины, относящиеся к правой оболочке  $(0 \leq \alpha \leq l^{(1)})$ , отмечаются верхним индексом (1), а к левой оболочке  $(-\infty < \alpha \leq 0)$  – индексом (2).

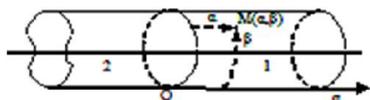


Рис.1

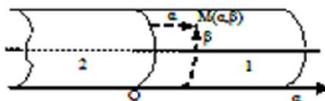


Рис.2

В качестве исходных уравнений, описывающих колебания левых и правых ЦО, используются уравнения, которые соответствуют классической теории ортотропных ЦО и записываются в выбранных криволинейных координатах  $\alpha, \beta$ :

$$\sum_{j=1}^3 (\mu^4 n_{ij}^{(r)} + l_{ij}^{(r)}) u_{ij}^{(r)} = \rho^{(r)} \omega^2 u_i^{(r)}, \quad i = 1, 2, 3; r = 1, 2 \quad (1)$$

Здесь  $u_1^{(r)}, u_2^{(r)}, u_3^{(r)}$  ( $r = 1, 2$ ) – проекции вектора перемещений, соответственно, в направлениях  $\alpha, \beta$  и нормали к срединной поверхности оболочки;  $\mu^4 = h^2 / 12$  ( $h$  – толщина оболочки);  $\omega$  – угловая частота собственных колебаний;  $\rho^{(r)}$  ( $r = 1, 2$ ) – плотности материалов;  $n_{ij}^{(r)}$  и  $l_{ij}^{(r)}$  – дифференциальные операторы, явный вид которых можно найти в [1].

Граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} T_1^{(1)} \Big|_{\alpha=0} = T_1^{(2)} \Big|_{\alpha=0}, \quad S_{12}^{(1)} + \frac{H^{(1)}}{R} \Big|_{\alpha=0} = S_{12}^{(2)} + \frac{H^{(2)}}{R} \Big|_{\alpha=0}, \quad M_1^{(1)} \Big|_{\alpha=0} = M_1^{(2)} \Big|_{\alpha=0}, \quad N_1^{(1)} + \frac{\partial H^{(1)}}{\partial \beta} \Big|_{\alpha=0} = \\ = N_1^{(2)} + \frac{\partial H^{(2)}}{\partial \beta} \Big|_{\alpha=0}; \quad u_1^{(1)} \Big|_{\alpha=0} = u_1^{(2)} \Big|_{\alpha=0}, \quad u_2^{(1)} \Big|_{\alpha=0} = u_2^{(2)} \Big|_{\alpha=0}, \quad u_3^{(1)} \Big|_{\alpha=0} = u_3^{(2)} \Big|_{\alpha=0}, \quad \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \end{aligned} \quad (2)$$

$$T_1^{(1)} \Big|_{\alpha=l^{(1)}} = 0, S_{12}^{(1)} + \frac{H^{(1)}}{R} \Big|_{\alpha=l^{(1)}} = 0, M_1^{(1)} \Big|_{\alpha=l^{(1)}} = 0, N_1^{(1)} + \frac{\partial H^{(1)}}{\partial \beta} \Big|_{\alpha=l^{(1)}} = 0 \quad (3)$$

$$u_i^{(r)}(\alpha, \beta) = u_i^{(r)}(\alpha, \beta + s), i = 1, 2, 3; \quad (4)$$

$$T_2^{(r)} \Big|_{\beta=0,s} = u_1^{(r)} \Big|_{\beta=0,s} = u_3^{(r)} \Big|_{\beta=0,s} = M_2^{(r)} \Big|_{\beta=0,s} = 0 \quad (5)$$

Граничные условия (2)-(4) соответствуют замкнутой ЦО: соотношения (2) выражают условия полного контакта при  $\alpha = 0$ , условия (3) – условия свободного края при  $\alpha = l^{(1)}$ , а (4) – условия периодичности колебания, где  $s$  – полная длина направляющей окружности срединной поверхности (рис.1). Граничные условия (2)-(3), (5) соответствуют ЦО открытого профиля: соотношения (5) являются условиями шарнирного закрепления по образующим  $\beta = 0$  и  $\beta = s$ , где  $s$  – длина дуги окружности срединной поверхности между шарнирно-закреплёнными образующими (рис.2).

**Дисперсионные уравнения.** В первом, втором и третьем уравнениях системы (1) угловая частота  $\omega$  формально заменяется на  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ , соответственно. Вводятся обозначения:  $k = 2\pi n_0 / s$ ,  $n_0 \in N$  для замкнутой ЦО, и  $k = \pi / s$  для ЦО открытого профиля. Пусть  $R^{-1} = kr_0 / 2$ , где  $R$  – радиус ЦО, а  $r_0$  – безразмерный параметр. Решение системы (1) ищется в виде:

$$(u_1^{(r)}, u_2^{(r)}, u_3^{(r)}) = (u_m^{(r)} \sin km\beta, v_m^{(r)} \cos km\beta, \sin km\beta) \exp((-1)^r \chi^{(r)} k\alpha) \quad (6)$$

Здесь  $m$  – волновое число,  $u_m^{(r)}, v_m^{(r)}$  – неопределённые коэффициенты,  $\chi^{(r)}$  – неопределённый коэффициент затухания. При этом, условия (4) и (5) выполняются автоматически. Подставляя выражения (6) в систему (1), получим характеристические уравнения:

$$R_{mm}^{(r)} c_m^{(r)} + r_0^2 / 4 \left\{ c_m^{(r)} + m^2 b_m^{(r)} - B_{12}^{(r)} / B_{22}^{(r)} (\chi^{(r)})^2 a_m^{(r)} + a^2 (R_{mm}^{(r)} g_m^{(r)} d_m^{(r)} - 2m^2 l_m^{(r)} b_m^{(r)}) + \right. \\ \left. + r_0^2 / 4 a^2 d_m^{(r)} (b_m^{(r)} + B_{12}^{(r)} / B_{11}^{(r)} (\chi^{(r)})^2) + a^4 m^2 g_m^{(r)} (l_m^{(r)})^2 \right\} = 0, m = \overline{1, \infty}, \quad (7)$$

Выражения для  $a_m^{(r)}, b_m^{(r)}, c_m^{(r)}, d_m^{(r)}, g_m^{(r)}, l_m^{(r)}, R_{mm}^{(r)}$  можно найти в [1], а  $a^2 = \mu^4 k^2$ .

Пусть  $\chi_j^{(r)}$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) – попарно различные нули уравнения (7) с положительными действительными частями и  $\chi_{j+4}^{(r)} = -\chi_j^{(r)}$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ . Пусть  $(u_{1j}^{(r)}, u_{2j}^{(r)}, u_{3j}^{(r)})$  – нетривиальные решения вида (6) системы (1) при  $\chi^{(r)} = \chi_j^{(r)}$  ( $j = 1, 2, \dots, 8$ ), соответственно. Представляя решения задач (1)-(4) и (1)-(3), (5) в виде

$$u_i^{(r)} = \sum_{j=1}^8 w_j^{(r)} u_{ij}^{(r)}, i = 1, 2, 3; r = 1, 2$$

и учитывая граничные условия (2)–(3), получаем систему уравнений:

$$\sum_{j=1}^8 \frac{M_{ij}^{(1)} w_j^{(1)}}{c_{mj}^{(1)} + r_0^2 / 4a^2 g_{mj}^{(1)} d_{mj}^{(1)}} - \sum_{j=1}^4 \frac{cM_{ij}^{(2)} w_j^{(2)}}{c_{mj}^{(2)} + r_0^2 / 4a^2 g_{mj}^{(2)} d_{mj}^{(2)}} = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$\sum_{j=1}^8 \frac{M_{ij}^{(1)} w_j^{(1)}}{c_{mj}^{(1)} + r_0^2 / 4a^2 g_{mj}^{(1)} d_{mj}^{(1)}} - \sum_{j=1}^4 \frac{M_{ij}^{(2)} w_j^{(2)}}{c_{mj}^{(2)} + r_0^2 / 4a^2 g_{mj}^{(2)} d_{mj}^{(2)}} = 0, \quad i = 5, 6, 7, 8$$

$$\sum_{j=1}^8 \frac{M_{ij}^{(1)} \exp(z_j) w_j^{(1)}}{c_{mj}^{(1)} + r_0^2 / 4a^2 g_{mj}^{(1)} d_{mj}^{(1)}} = 0, \quad c = \frac{B_{11}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}}, \quad z_j = -\chi_j^{(1)} kl^{(1)}, \quad i = 9, 10, 11, 12$$

где  $M_{ij}^{(r)}$  – многочлены от  $\eta_i^{(r)} = \omega_i^2 \rho^{(r)} / (B_{66}^{(r)} k^2)$ ,  $i = \overline{1, 3}$  и  $\chi_j^{(r)}$ ,  $j = \overline{1, 4}$ . Нижний индекс  $j$  означает, что соответствующая функция взята при  $\chi^{(r)} = \chi_j^{(r)}$ .

Приравняв определитель системы (8) к нулю и выполняя элементарные действия над столбцами, получаем дисперсионное уравнение:

$$\nabla = \text{Det} \left\| t_{ij} \right\|_{i,j=1}^3 = 0, \quad x_j^{(r)} = \frac{\chi_j^{(r)}}{m}, \quad j = 1, 2, 3, 4; \quad \eta_{im}^{(r)} = \frac{\eta_i^{(r)}}{m}, \quad i = 1, 2, 3; \quad \varepsilon_m = \frac{r_0}{2m}$$

$$t_{11} = \left\| m_{ij}^{(1)} \right\|_{i,j=1}^4, \quad t_{12} = \left\| m_{ij}^{(1)} \right\|_{i=1, j=5}^{4,8}, \quad t_{13} = c \left\| m_{ij}^{(2)} \right\|_{ij=1}^4, \quad t_{21} = \left\| m_{ij}^{(1)} \right\|_{i=5, j=1}^{8,4}, \quad t_{22} =$$

$$= \left\| m_{ij}^{(1)} \right\|_{i,j=5}^8, \quad t_{23} = \left\| m_{ij}^{(2)} \right\|_{i=5, j=1}^{8,4}, \quad t_{31} = \left\| m_{ij}^{(1)} \right\|_{i=9, j=1}^{12,4}, \quad t_{32} = \left\| m_{ij}^{(1)} \right\|_{i=9, j=5}^{12,8}, \quad t_{33} = 0.$$

Учитывая возможные соотношения между  $\eta_{1m}^{(r)}, \eta_{2m}^{(r)}, \eta_{3m}^{(r)}$ , заключаем, что уравнение (9) определяет частоты соответствующих типов интерфейсных и краевых колебаний.

**Асимптотика дисперсионного уравнения (9) при  $R^{-1} \rightarrow 0$ .** В предыдущих формулах предполагается, что  $\eta_1^{(r)} = \eta_2^{(r)} = \eta_3^{(r)} = \eta^{(r)}$  ( $r = 1, 2$ ). При  $r_0 \rightarrow 0$  уравнение (7) преобразуется в совокупность уравнений:

$$c_m^{(r)} = \left( \chi^{(r)} \right)^4 - (B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{22}^{(r)})^2 - B_{12}^{(r)} B_{66}^{(r)}) / (B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}) \left( \chi^{(r)} \right)^2 m^2 + \quad (10)$$

$$+ \left( (B_{11}^{(r)} + B_{66}^{(r)}) (\eta^{(r)})^2 \left( \chi^{(r)} \right)^2 - \left( m^2 - (\eta^{(r)})^2 \right) \left( B_{22}^{(r)} m^2 - B_{66}^{(r)} (\eta^{(r)})^2 \right) \right) / B_{11}^{(r)} = 0$$

$$R_{mm}^{(r)} = a^2 \left( B_{11}^{(r)} / B_{22}^{(r)} \left( \chi^{(r)} \right)^4 - 2(B_{12}^{(r)} + 2B_{66}^{(r)}) / B_{22}^{(r)} \left( \chi^{(r)} \right)^2 + m^4 \right) - B_{66}^{(r)} / B_{22}^{(r)} (\eta^{(r)})^2 = 0, \quad r = 1, 2 \quad (11)$$

которые являются характеристическими уравнениями для уравнений планарных и изгибных колебаний пластины, соответственно. Корни  $\chi^{(r)} / m$  уравнений (10) и (11) с положительными действительными частями обозначаются через  $y_1^{(r)}, y_2^{(r)}$  и  $y_3^{(r)}, y_4^{(r)}$ , соответственно. Доказывается, что уравнение (9) приводится к виду:

$$\text{Det} \left\| t_{ij} \right\|_{ij=1}^3 = \left( \frac{B_{11}^{(1)}}{B_{12}^{(1)} + B_{66}^{(1)}} \right)^2 \frac{B_{11}^{(2)}}{B_{12}^{(2)} + B_{66}^{(2)}} \left( N^{(1)} (\eta_m^{(1)}) \right)^2 N^{(2)} (\eta_m^{(2)}) X$$

$$\left\{ K_3^{(1)} (\eta_m^{(1)})^2 K_3^{(2)} (\eta_m^{(2)}) \text{Det} \left\| e_{ij} \right\|_{i,j=1}^6 \cdot \text{Det} \left\| b_{ij} \right\|_{i,j=1}^6 \right\} + O(\varepsilon_m^2) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (12)$$

Выражения для  $K_3^{(r)}(\eta_m^{(r)})$  можно найти в [1]. Из уравнения (12) следует, что при  $\varepsilon_m \rightarrow 0$  уравнение (9) распадается на уравнения

$$Det\|e_{ij}\|_{i,j=1}^6 = 0, Det\|b_{ij}\|_{i,j=1}^6 = 0, K_3^{(1)}(\eta_m^{(1)}) = 0, K_3^{(2)}(\eta_m^{(2)}) = 0 \quad (13)$$

Из них первое и второе уравнения являются дисперсионными уравнениями планарных и изгибных колебаний аналогичной задачи для полубесконечной пластинки и пластинки-полосы с шарнирно-закреплёнными краями. Корням третьего и четвёртого уравнений соответствуют планарные колебания цилиндрической оболочки. При  $\varepsilon_m \rightarrow 0$  и  $ml \rightarrow \infty$ , учитывая асимптотические формулы:

$$Det\|e_{ij}\|_{i,j=1}^6 = \left(\frac{B_{66}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}}\right)^2 \left(\frac{B_{12}^{(1)} + B_{66}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}}\right)^2 \frac{B_{12}^{(2)} + B_{66}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}} L(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) K_2^{(1)}(\eta_m^{(1)}) + \sum_{j=1}^2 O(\exp(\varepsilon_j^{(1)})) \quad (14)$$

$$\begin{aligned} L(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) &= K_2^{(1)}(\eta_m^{(1)}) Q^{(2)}(\eta_m^{(2)}) + \left(B_{66}^{(2)} / B_{66}^{(1)}\right)^2 K_2^{(2)}(\eta_m^{(2)}) Q^{(1)}(\eta_m^{(1)}) + \\ &+ \frac{B_{66}^{(2)}}{B_{66}^{(1)}} \left[ 2(y_1^{(1)} y_2^{(1)} - B_{12}^{(1)} / B_{11}^{(1)} (1 - (\eta_m^{(1)})^2)) (y_1^{(2)} y_2^{(2)} - B_{12}^{(2)} / B_{11}^{(2)} (1 - (\eta_m^{(2)})^2)) + \right. \\ &+ (y_2^{(1)} + y_1^{(1)})(y_2^{(2)} + y_1^{(2)})((1 - (\eta_m^{(2)})^2) y_1^{(1)} y_2^{(1)} + (1 - (\eta_m^{(1)})^2) y_1^{(2)} y_2^{(2)}) \left. \right], \\ K_2^{(r)}(\eta_m^{(r)}) &= (1 - (\eta_m^{(r)})^2) \left( (B_{12}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2) / (B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}) - (\eta_m^{(r)})^2 \right) - (\eta_m^{(r)})^2 y_1^{(r)} y_2^{(r)}, \quad r = 1, 2 \\ Q^{(r)}(\eta_m^{(r)}) &= y_1^{(r)} y_2^{(r)} + B_{66}^{(r)} / B_{11}^{(r)} (1 - (\eta_m^{(r)})^2), \quad r = 1, 2 \end{aligned}$$

$$Det\|b_{ij}\|_{i,j=1}^6 = G(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) K_1^{(1)}(\eta_m^{(1)}) + \sum_{j=3}^4 O(\exp(\varepsilon_j^{(1)})) \quad (15)$$

$$K_1^{(r)}(\eta_m^{(r)}) = (y_3^{(r)} y_4^{(r)})^2 + 4B_{66}^{(r)} / B_{11}^{(r)} y_3^{(r)} y_4^{(r)} - (B_{12}^{(r)} / B_{11}^{(r)})^2, \quad r = 1, 2$$

$$\begin{aligned} G(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) &= K_1^{(1)}(\eta_m^{(1)}) + \left(\frac{B_{11}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}}\right)^2 K_1^{(2)}(\eta_m^{(2)}) + \frac{B_{11}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}} \left[ 2 \left( y_3^{(1)} y_4^{(1)} + \frac{B_{12}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}} \right) \left( y_3^{(2)} y_4^{(2)} + \frac{B_{12}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}} \right) + \right. \\ &+ (y_3^{(1)} + y_4^{(1)})(y_3^{(2)} + y_4^{(2)})(y_3^{(1)} y_4^{(1)} + y_3^{(2)} y_4^{(2)}) \left. \right] \end{aligned}$$

уравнение (9) можно написать в виде

$$\begin{aligned} Det\|t_{ij}\|_{i,j=1}^3 &= \left(B_{66}^{(1)} / B_{11}^{(1)}\right)^2 \left(N^{(1)}(\eta_m^{(1)})\right)^2 N^{(2)}(\eta_m^{(2)}) \left\{ \left(K_3^{(1)}(\eta_m^{(1)})\right)^2 K_3^{(2)}(\eta_m^{(2)}) L(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) X \right. \\ &+ G(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) K_1^{(1)}(\eta_m^{(1)}) K_2^{(1)}(\eta_m^{(1)}) \left. \right\} + O(\varepsilon_m^2) + \sum_{j=1}^4 O(\exp(\varepsilon_j)) = 0 \quad (16) \end{aligned}$$

$$N^{(r)}(\eta_m^{(r)}) = (y_1^{(r)} + y_3^{(r)})(y_1^{(r)} + y_4^{(r)})(y_2^{(r)} + y_3^{(r)})(y_2^{(r)} + y_4^{(r)})$$

Из (16) следует, что при  $\varepsilon_m \rightarrow 0$  и  $ml \rightarrow \infty$  уравнение (9) распадается на уравнения:

$$L(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) = 0, G(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) = 0, K_2^{(1)}(\eta_m^{(1)}) = 0, K_1^{(1)}(\eta_m^{(1)}) = 0, K_3^{(1)}(\eta_m^{(1)}) = 0, K_3^{(2)}(\eta_m^{(2)}) = 0$$

Из них первые два – дисперсионные уравнения планарных и изгибных интерфейсных колебаний для бесконечной пластинки, составленной из двух полубесконечных ортотропных пластин (пластинки-полосы с шарнирно-закрепленными краями). Третье и четвертое уравнения являются дисперсионными уравнениями планарных и изгибных краевых колебаний для ортотропной полубесконечной пластинки со свободным краем  $\alpha = l^{(1)}$  или полубесконечной пластины-полосы со свободным торцом  $\alpha = l^{(1)}$  при шарнирно закреплении краёв.

**Асимптотика дисперсионного уравнения (9) при  $ml \rightarrow \infty$ .** При использовании предыдущих формул полагается, что  $\chi_1^{(1)}, \chi_2^{(1)}, \chi_3^{(1)}, \chi_4^{(1)}$  (корни уравнения (7)) имеют положительные действительные части. Тогда, уравнение (9) можно привести к виду:

$$\text{Det} \left\| t_{ij} \right\|_{i,j=1}^3 = \text{Det} \left\| \begin{matrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{matrix} \right\| \cdot \text{Det} t_{32} + \sum_{j=1}^4 O(\exp(z_j)), \quad (17)$$

откуда следует, что при  $ml \rightarrow \infty$  уравнение (9) распадается на уравнения

$$\text{Det} \left\| \begin{matrix} t_{11} & t_{13} \\ t_{21} & t_{23} \end{matrix} \right\| = B_{66}^{(1)} / B_{11}^{(1)} N^{(1)}(\eta_m^{(1)}) N^{(2)}(\eta_m^{(2)}) \{ K_3^{(1)}(\eta_m^{(1)}) K_3^{(2)}(\eta_m^{(2)}) L(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) G(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) \} + \alpha \varepsilon_m^2 = 0$$

$$\text{Det} \left\| t_{32} \right\| = B_{66}^{(1)} / B_{11}^{(1)} N^{(1)}(\eta_m^{(1)}) \{ K_3^{(1)}(\eta_m^{(1)}) K_1^{(1)}(\eta_m^{(1)}) K_2^{(1)}(\eta_m^{(1)}) \} + O(\varepsilon_m^2) = 0$$

Первое из них при  $m \in N$  определяет частоты всевозможных собственных интерфейсных колебаний ЦО, составленных из двух полубесконечных ортотропных замкнутых (незамкнутых) ЦО. Второе уравнение определяет всевозможные краевые колебания полубесконечной замкнутой (незамкнутой) ЦО со свободным торцом, изготовленной из материала правой ЦО. Численные результаты показывают, что асимптотические формулы (12), (16) и (17) дисперсионного уравнения (9) являются хорошим ориентиром для нахождения собственных частот интерфейсных и краевых колебаний задачи (1)-(5).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гулгазарян Г.Р., Гулгазарян Р.Г. О свободных интерфейсных колебаниях тонких упругих круговых цилиндрических оболочек. ISSN 1995-0470. Механика Машин, Механизмов и Материалов. 2013. № 4 (25). Спецвып. с.12-19.

## Сведения об авторах:

**Гулгазарян Гурген Рубенович**, профессор, д.ф.-м.н. АГПУ им. Х. Абовяна. Проф. кафедры мат. анализа и теории функций. Тигран Мец 17, 0010, Ереван, Армения. Тел.: (+37410) 649121, (+37491) 706700. E-mail: [ghulgr@yahoo.com](mailto:ghulgr@yahoo.com)

**Гулгазарян Рубен Гургенович**, к.ф.-м.н., ведущий инженер, ЗАО “Ментор Графикас Дивелопмент Сервисис”, г.Ереван, Армения. E-mail: [ghulr@yahoo.com](mailto:ghulr@yahoo.com)

**Михасев Геннадий Иванович**, профессор, д.ф.-м.н. Заведующий кафедрой био- и наномеханики БГУ. 220030, Белорусь, г.Минск, Пр. Независимости, 4  
E-mail: [gimikhasev@rambler.ru](mailto:gimikhasev@rambler.ru)

# АСИМПТОТИКА ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК ПРИ НАЛИЧИИ ВЯЗКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

*Гулгазарян Л.Г.  
Армения*

Рассматриваются вынужденные колебания ортотропных оболочек при наличии вязкого сопротивления, когда на нижней лицевой поверхности задан вектор перемещения. Асимптотическим методом получено решение соответствующих динамических уравнений трёхмерной задачи теории упругости. Определены амплитуды вынужденных колебаний и установлено, что наличие вязкого сопротивления приводит к тому, что становится невозможным возникновение резонанса.

Среди различных причин затухания колебаний механических систем одной из важнейших является рассеяние энергии внутри самой колебательной системы, в частности, вязкое сопротивление, которое обычно принимается пропорциональным скорости перемещения точек [6]. Эффективным методом решения задач нахождение собственных значений частот и форм колебаний пластин и оболочек оказался асимптотический метод [1-6].

Рассматриваются вынужденные колебания ортотропной оболочки толщины  $2h : D = \{\alpha, \beta, \gamma; \alpha, \beta \in D_0, -h \leq \gamma \leq h\}$ , при наличии вязкого сопротивления, где  $D_0$  – срединная поверхность,  $\alpha, \beta$  – линии кривизны срединной поверхности оболочки,  $\gamma$  – прямолинейная ось, направленная перпендикулярно к срединной поверхности. Требуется найти решения динамических уравнений теории упругости в выбранной триортогональной системе координат [2-5]. Для упрощения выкладок будем пользоваться компонентами несимметричного тензора напряжений  $\tau_{ij}$  [1,2].

На лицевой поверхности  $\gamma = h$  заданы условия:

$$U(h) = 0, \quad V(h) = 0, \quad W(h) = 0 \quad (1)$$

а на поверхности  $\gamma = -h$

$$U(-h) = u^-(\alpha, \beta) \sin(\Omega t) \quad (U, V, W; u, v, w) \quad (2)$$

В динамических уравнениях и соотношениях теории упругости перейдём к безразмерным координатам и перемещениям по формулам:  $\alpha = R\xi$ ,  $\beta = R\eta$ ,  $\gamma = \varepsilon R\zeta = h\zeta$ ,  $U = Ru$ ,  $V = Rv$ ,  $W = Rw$ , где  $R$  – характерный размер оболочки (наименьший из радиусов кривизны и линейных размеров срединной поверхности),  $\varepsilon = h/R$  – малый параметр. Решение преобразованных уравнений будем искать в виде

$$Q(x, y, z, t) = Q_I(\xi, \eta, \zeta) \sin(\Omega t) + Q_{II}(\xi, \eta, \zeta) \cos(\Omega t) \quad (3)$$

где  $Q$  – любая из величин напряжений и перемещений,  $\Omega$  – частота вынуждающего внешнего воздействия. В результате получается сингулярно возмущенная малым параметром  $\varepsilon$  система относительно  $Q$ , где  $k_1$  – коэффициент вязкого сопротивления,  $r_1 = R/R_1$ ,  $r_2 = R/R_2$ ,  $\Omega_*^2 = \rho h^2 \Omega^2$ ,  $2K = k_1 h / \sqrt{\rho}$ .

Решение подобных систем складывается из решений внутренней (interior) задачи и пограничных (boundary) слоёв:  $I = Q^{\text{int}} + R_b$  [2-6].

Решение внутренней задачи будем искать в виде асимптотического представления

$$\tau_{mkj}^{\text{int}}(\xi, \eta, \zeta) = \varepsilon^{-1+s} \tau_{mkj}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad m, k = 1, 2, 3; \quad s = \overline{0, N}; \quad j = I, II \quad (4)$$

$$(u_j^{\text{int}}(\xi, \eta, \zeta), v_j^{\text{int}}(\xi, \eta, \zeta), w_j^{\text{int}}(\xi, \eta, \zeta)) = \varepsilon^s (u_j^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), v_j^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), w_j^{(s)}(\xi, \eta, \zeta))$$

Здесь и далее  $s = \overline{0, N}$  означает, что по нему (повторяющемуся) индексу  $s$  происходит суммирование в пределах целочисленных  $0, N$ .

Принимается, что с самого начала имеется установившийся динамический процесс, т.е. не рассматривается квазистатическое состояние. Принято также, что изменяемость напряжённо-деформированных состояний по тангенциальным направлениям в первую очередь зависит от изменяемости внешних воздействий, которые принимаются одинаковыми. Как следует из уравнений движения, это будет тогда, когда  $\Omega_*^2 = \rho h^2 \Omega^2$  будет порядка единицы  $\Omega_*^2 = O(\varepsilon^0)$ .

Решение задачи должно удовлетворять условиям (1), (2). Зная вышеуказанную структуру общего решения, для определения величин  $\tau_{mkj}^{(s)}$ ,  $u_j^{(s)}$ ,  $(u, v, w)$  внутренней задачи из условий (1)-(2), соответственно, будут следовать следующие граничные условия:

$$u_j^{(s)}(\zeta = 1) = -\bar{u}_{bj}^{(s)}(\zeta = 1) \quad (u, v, w), \quad j = I, II \quad (5)$$

и условия при  $\zeta = -1$

$$u_j^{(s)}(\zeta = -1) = u_j^{-s}(\xi, \eta) \quad (u, v, w) \quad (6)$$

где  $u_I^{(0)} = u^-/R$ ,  $u_{II}^{(0)} = 0$ ,  $u_j^{-s} = -\bar{u}_{bj}^{(s)}(\zeta = -1)$ ,  $s \neq 0$   $(u, v, w)$ ,  $j = I, II$ .

После построения решения пограничного слоя функции  $\bar{u}_{bj}^{(s)}(u, v, w)$  становятся известными функциями.

Подставив выражения (4) в сингулярно-возмущённую систему и приравняв в каждом уравнении коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , для определения неизвестных коэффициентов  $Q_{jk}^{(s)}$  разложения (4) получается непротиворечивая система, из которой компоненты тензора напряжений можно выразить через  $u_j^{(s)}$ ,  $v_j^{(s)}$ ,  $w_j^{(s)}$ :

$$\tau_{13j}^{(s)} = \frac{1}{a_{55}} \left[ \frac{\partial u_j^{(s)}}{\partial \zeta} - P_{uj}^{(s-1)} \right], \quad \tau_{23j}^{(s)} = \frac{1}{a_{44}} \left[ \frac{\partial v_j^{(s)}}{\partial \zeta} - P_{vj}^{(s-1)} \right], \quad \tau_{12j}^{(s)} = P_{1\bar{v}j}^{(s-1)} \quad (7)$$

$$\tau_{21j}^{(s)} = P_{1\bar{v}j}^{(s-1)} - r_2 \zeta \tau_{21j}^{(s-1)} + r_1 \zeta \tau_{12j}^{(s-1)}, \quad \tau_{11j}^{(s)} = \frac{1}{\Delta} \left[ \Delta_2 \frac{\partial w_j^{(s)}}{\partial \zeta} + \Delta_{23} P_{2\bar{v}j}^{(s-1)} + \right. \\ \left. + \Delta_1 P_{3\bar{v}j}^{(s-1)} - \Delta_2 P_{vj}^{(s-1)} \right], \quad (11, 22, 33; \Delta_2, \Delta_3, \Delta_{12}; \Delta_{23}, \Delta_1, \Delta_2; \Delta_1, \Delta_{13}, \Delta_3)$$

где

$$\Delta_1 = a_{13} a_{23} - a_{33} a_{12}, \quad \Delta_2 = a_{12} a_{23} - a_{22} a_{13}, \quad \Delta_3 = a_{13} a_{12} - a_{11} a_{23} \quad (8)$$

$$\Delta_{ij} = a_{ii} a_{jj} - a_{ij}^2, \quad i, j = 1, 2, 3; \quad \Delta = a_{11} \Delta_{23} + a_{13} \Delta_{21} + a_{12} \Delta_{31}$$

Для определения компонент вектора перемещения получаются уравнения:

$$\frac{\partial^2 u_I^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55} (\Omega_*^2 u_I^{(s)} + 2K\Omega_* u_{II}^{(s)}) = a_{55} P_{6\bar{v}I}^{(s-1)} + \frac{\partial P_{uI}^{(s-1)}}{\partial \zeta}, \quad (u, v; a_{55}, a_{44}; 6\tau, 5\tau)$$

$$\frac{\partial^2 u_{II}^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55} (\Omega_*^2 u_{II}^{(s)} - 2K\Omega_* u_I^{(s)}) = a_{55} P_{6\bar{v}II}^{(s-1)} + \frac{\partial P_{uII}^{(s-1)}}{\partial \zeta}, \quad (u, v; a_{55}, a_{44}; 6\tau, 5\tau)$$

$$\frac{\partial^2 w_I^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \frac{\Delta}{\Delta_{12}} (\Omega_*^2 w_I^{(s)} + 2K\Omega_* w_{II}^{(s)}) = F_{wI}^{(s-1)} \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 w_{II}^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \frac{\Delta}{\Delta_{12}} (\Omega_*^2 w_{II}^{(s)} - 2K\Omega_* w_I^{(s)}) = F_{wII}^{(s-1)}$$

где правые части – известные функции, если известны предыдущие приближения.

Из (9) следуют:

$$u_{II}^{(s)} = \frac{1}{2K\Omega_* a_{55}} \left[ a_{55} P_{6\bar{v}II}^{(s-1)} + \frac{\partial P_{uII}^{(s-1)}}{\partial \zeta} - \frac{\partial^2 u_I^{(s)}}{\partial \zeta^2} - a_{55} \Omega_*^2 u_I^{(s)} \right] (u, v; a_{55}, a_{44}; 6\tau I, 5\tau I)$$

$$w_{II}^{(s)} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta 2K\Omega_*} \left[ F_{wI}^{(s-1)} - \frac{\partial^2 w_I^{(s)}}{\partial \zeta^2} - \frac{\Delta}{\Delta_{12}} \Omega_*^2 w_I^{(s)} \right] \quad (10)$$

и уравнения

$$\frac{\partial^4 u_I^{(s)}}{\partial \zeta^4} + 2a_{55} \Omega_*^2 \frac{\partial^2 u_I^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55}^2 \Omega_*^2 (\Omega_*^2 + 4K^2) u_I^{(s)} = Q_{uI}^{(s-1)} \quad (11)$$

$$(u, v, w; a_{55}, a_{44}, \Delta / \Delta_{12})$$

Решениями уравнений (11) являются

$$u_I^{(s)} = u_{I0}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) + u_{I4}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad (u, v, w) \quad (12)$$

где величина с индексом “0” является общим решением однородного уравнения, а с индексом “ч” – частное решение неоднородного уравнения.

Решениями однородных уравнений являются:

$$u_{I0}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^4 C_i^{(u,s)}(\xi, \eta) \varphi_{iu} \quad (u, v, w) \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_{1u} &= \operatorname{ch} \gamma_u \zeta \cos \delta_u \zeta, & \varphi_{2u} &= \operatorname{sh} \gamma_u \zeta \sin \delta_u \zeta \\ \varphi_{3u} &= \operatorname{ch} \gamma_u \zeta \sin \delta_u \zeta, & \varphi_{4u} &= \operatorname{sh} \gamma_u \zeta \cos \delta_u \zeta \end{aligned} \quad (u, v, w; a_{55}, a_{44}, \Delta / \Delta_{12}) \quad (14)$$

$$\gamma_u = \sqrt{a_{55} \Omega_* / 2(\sqrt{\Omega_*^2 + 4K^2} - \Omega_*)}, \quad \delta_u = \sqrt{a_{55} \Omega_* / 2(\sqrt{\Omega_*^2 + 4K^2} + \Omega_*)}$$

Для перемещений с индексом II имеем:

$$\begin{aligned} u_{II}^{(s)} &= u_{II0}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) + u_{IIc}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad (u, v, w) \\ u_{II0}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) &= -C_1^{(u,s)}(\xi, \eta) \varphi_{2u} + C_2^{(u,s)}(\xi, \eta) \varphi_{1u} + \\ &+ C_3^{(u,s)}(\xi, \eta) \varphi_{4u} - C_4^{(u,s)}(\xi, \eta) \varphi_{3u} \quad (u, v, w) \end{aligned} \quad (15)$$

$$u_{IIc}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{a_{55} 2K \Omega_*} \left[ a_{55} P_{6\tau l}^{(s-1)} + \frac{\partial P_{ul}^{(s-1)}}{\partial \zeta} - \frac{\partial^2 u_{Ic}^{(s)}}{\partial \zeta^2} - a_{55} \Omega_*^2 u_{Ic}^{(s)} \right]$$

Удовлетворив граничным условиям (5), (6), получаются соответственно три алгебраических системы уравнений относительно  $C_k^{(u,s)}(\xi, \eta)$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ . Решив эти системы, получим:

$$\begin{aligned} u_I^{(s)} &= \Delta_u^{-1} \sum_{i=1}^4 D_i^{(u,s)}(\xi, \eta) \varphi_{iu} + u_{Ic}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) \\ u_{II}^{(s)} &= \Delta_u^{-1} (D_2^{(u,s)}(\xi, \eta) \varphi_{1u} - D_1^{(u,s)}(\xi, \eta) \varphi_{2u} - \\ &- D_4^{(u,s)}(\xi, \eta) \varphi_{3u} + D_3^{(u,s)}(\xi, \eta) \varphi_{4u}) + u_{IIc}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad (u, v, w) \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\Delta_u = 1/2(\cos(4\delta_u) - \operatorname{ch}(4\gamma_u)) \quad (17)$$

Рассмотрим более подробно поведение уравнений  $\Delta_u = 0$ ,  $(u, v, w)$  при граничных условиях (5), (6), в зависимости от коэффициента вязкого сопротивления и частоты вынуждающего воздействия. Уравнения

$$\Delta_u = 0, \quad (u, v, w) \text{ равносильны системе} \\ \operatorname{ch}(4\gamma_u) = 1, \quad \cos(4\delta_u) = 1 \quad (u, v, w) \quad (18)$$

Первое уравнение имеет решение только при  $K = 0$ , а при этом условии решения второго уравнения для  $\Omega_*$  совпадают со значениями частот

собственных колебаний [3] без учёта вязкости. Таким образом, при отсутствии вязкого трения возникает резонанс, когда приведённая частота вынуждающего воздействия совпадает с частотой собственных колебаний, а при наличии вязкого трения уравнения  $\Delta_u = 0$ ,  $(u, v, w)$  не имеют действительных решений относительно параметра  $\Omega_*$ , т.е. амплитуда вынужденных колебаний не может превратиться в бесконечность. Отметим, что если функции  $u^-, v^-, w^-$  являются полиномами от переменных  $\alpha, \beta$ , итерационный процесс в случае пластинок обрывается на определённом приближении, в результате получается математически точное решение во внутренней задаче, которое совпадает с решением для слоя [2]. Для оболочек же итерационный процесс не обрывается и речь может идти об асимптотической точности решения, которую для конкретных случаев несложно оценить.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 414с.
2. Агаловян Л.А. Асимптотика решений классических и неклассических краевых задач статики и динамики тонких тел// Прикл. механика. 2002. Т.38. №7. С.3-24.
3. Агаловян Л.А., Гулгазарян Л.Г. Асимптотические решения неклассических краевых задач о собственных колебаниях ортотропных оболочек. // ПММ. 2006. Т.70. Вып.1. С.111-125.
4. Агаловян Л.А., Гулгазарян Л.Г. Неклассические краевые задачи о вынужденных колебаниях ортотропных оболочек. //Международный научный журнал «Прикладная механика». 2009. Т.45. № 8. С.105-122.
5. Гулгазарян Л.Г. О характере собственных колебаний ортотропных оболочек при наличии вязкого сопротивления.// Межд. научно-технический журнал «Механика машин, механизмов и материалов», Объединённый институт машиностроения НАН Беларуси, Минск, 2013. С.20-26.
6. Азатян Г.Л. Вынужденные колебания ортотропной пластинки при наличии вязкого сопротивления.//Изв. НАН Армении. Механика. 2007. Т.60. №2. С.29-40.
7. Пановко Я.Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. М.: Физматгиз, 1960. 196с.

#### Сведения об авторе:

**Гулгазарян Лусине Гургеновна**, к.ф.-м.н.

Институт механики НАН Армении, с.н.с., АГПУ им Х. Абовяна, доцент

**Адрес:** пр. Маршала Баграмяна, 24/2, 0019, Ереван, Армения

**Тел.:** (+37491)302554, **E-mail:** lusina@mail.ru

# МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ (МКЭ) ДЛЯ ЗАДАЧИ ИЗГИБА НЕОДНОРОДНОЙ БАЛКИ

*Дадаян Ю.Г., Оганисян З.Б.  
Армения*

Решается задача изгиба неоднородной по длине балки, жёстко заделанной по концам, методом конечных элементов. Для модельной задачи проведены численные эксперименты.

Пусть балка длиной  $l$  отнесена к прямоугольной декартовой системе координат  $Oxyz$  так, что координатная ось  $Ox$  направлена вдоль оси балки. Полагаем, что изгиб происходит в плоскости  $Oxy$ . В случае малых прогибов форму балки можно описать следующим дифференциальным уравнением четвёртого порядка:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = q(x),$$

где  $x \in (0, l)$ ,  $y(x)$  – прогиб,  $E$  – модуль упругости,  $I$  – момент инерции поперечного сечения относительно оси  $Oz$ ,  $q(x)$  – внешняя нагрузка.

Предположим, что оба конца балки заделаны жёстко. Тогда

$$y(0) = y'(0) = 0, \quad y(l) = y'(l) = 0.$$

Если обозначить

$$u(x) = y(lx), \quad a(x) = \frac{EI}{l^4}, \quad f(x) = q(lx),$$

где  $x \in (0, 1)$  – безразмерная, отнесённая к длине, координата, то задача изгиба балки сводится к следующей краевой задаче:

$$(a(x)u''')'' = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad (1)$$

$$u(0) = u'(0) = 0, \quad u(1) = u'(1) = 0. \quad (2)$$

Введём понятие обобщённого решения задачи (1),(2). Обозначим через  $H_0^2[0,1]$  множество функций из пространства  $L_2[0,1]$ , удовлетворяющих условиям (2) и имеющих на  $[0,1]$  интегрируемые с квадратом обобщённые производные первого и второго порядков. Пусть  $u(x)$  – решение задачи (1),(2). Из тождества

$$\int_0^1 (a(x)u''(x))'' \varphi(x) dx = \int_0^1 f(x)\varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in H_0^2$$

с помощью двукратного интегрирования по частям получим

$$\int_0^1 a(x)u''(x)\varphi''(x) dx = \int_0^1 f(x)\varphi(x) dx \quad (3)$$

для любой функции  $a(x) \in L_2[0,1]$

Решение краевой задачи (1),(2) удовлетворяет (3) при произвольной функции  $\varphi \in H_0^2[0,1]$ . Обобщённым решением задачи (1),(2) называется функция  $u \in H_0^2[0,1]$ , удовлетворяющая (3) при произвольной функции  $\varphi \in H_0^2[0,1]$ .

Чтобы применить МКЭ, нужно задать координатные функции. Согласно (3) нужны функции, принадлежащие  $H_0^2[0,1]$ , так что, кусочно-линейные функции не подходят [1],[2].

Построим координатные функции следующим образом. Введём на промежутке  $[0,1]$  сетку узлов

$$x_n = nh, \quad h = \frac{1}{N+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N+1.$$

Приближённые значения решения задачи (1),(2) нам нужно найти лишь во внутренних узлах сетки  $\overline{\omega}_h = \{x_0, x_1, \dots, x_N, x_{N+1}\}$ , то есть на  $\omega_h = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ . Каждому внутреннему узлу сетки  $x_n$  сопоставим по две координатные функции  $\varphi_n(x)$  и  $\psi_n(x)$ , которые на каждом из участков  $[x_i, x_{i+1}]$  являются полиномами не выше третьей степени. Эти функции можно задать с помощью следующих двух стандартных функций [3]:

$$\varphi(x) = \begin{cases} (1+2|x|)(1-|x|)^2, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} x(1-|x|)^2, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Эти функции равны нулю вне отрезка  $[-1,1]$ . На концах его, то есть при  $x = \pm 1$ , они удовлетворяют условиям:

$$\varphi(\pm 1) = \varphi'(\pm 1) = 0, \quad \psi(\pm 1) = \psi'(\pm 1) = 0,$$

кроме того,

$$\varphi(0) = 1, \quad \varphi'(0) = 0, \quad \psi(0) = 0, \quad \psi'(0) = 1.$$

Очевидно, что  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  непрерывны вместе с первыми производными при  $-\infty < x < \infty$ .

Теперь положим

$$\varphi_n(x) = \varphi\left(\frac{x-x_n}{h}\right), \quad \psi_n(x) = h\psi\left(\frac{x-x_n}{h}\right), \quad n=1,2,\dots,N.$$

Каждая из функций  $\varphi_n(x)$  и  $\psi_n(x)$  непрерывна на  $[0,1]$  вместе с первой производной и, следовательно, принадлежит  $H_0^2[0,1]$ . Кроме того,

$$\varphi_n(x_k) = \delta_{nk}, \quad \varphi'_n(x_k) = 0, \quad \psi_n(x_k) = 0, \quad \psi'_n(x_k) = \delta_{nk},$$

$$\delta_{nk} = \begin{cases} 1, & k = n, \\ 0 & k \neq n, \end{cases} \quad n, k = 1, 2, \dots, N,$$

при этом, на каждом из отрезков  $[x_i, x_{i+1}]$  функций  $\varphi_n(x)$  и  $\psi_n(x)$  – суть полиномы не выше третьей степени. Кроме того,  $\varphi_n(x)$  отлична от нуля на  $[x_{n-1}, x_{n+1}]$ , так же, как и  $\psi_n(x)$ .

Множество функций, представимых в виде

$$\tilde{v}(x) = \sum_{n=1}^N (v_n \varphi_n(x) + w_n \psi_n(x)),$$

образует конечномерное подпространство в  $H_0^2[0,1]$ , базис которого составляют функции  $\varphi_n(x), \psi_n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ . Обозначим это подпространство через  $M_0$ .

Приближённое решение задачи (1),(2) определим как функцию  $\tilde{v} \in M_0$ , удовлетворяющую уравнению

$$\int_0^1 a(x) \frac{d^2 \tilde{v}(x)}{dx^2} \frac{d^2 \tilde{\varphi}(x)}{dx^2} dx = \int_0^1 f(x) \tilde{\varphi}(x) dx$$

при произвольной функции  $\tilde{\varphi}(x) \in M_0$ , где  $v_n$  и  $w_n$  – соответственно, приближённые значения решения и его производной в точке  $x_n$

$n = 1, 2, \dots, N$  задачи (1),(2). Тогда, система уравнений для определения неизвестных коэффициентов  $v_n$  и  $w_n$  примет вид:

$$\begin{cases} \int_0^1 a(x) \frac{d^2 \tilde{v}(x)}{dx^2} \frac{d^2 \varphi_n(x)}{dx^2} dx = \int_0^1 f(x) \varphi_n(x) dx, \\ \int_0^1 a(x) \frac{d^2 \tilde{v}(x)}{dx^2} \frac{d^2 \psi_n(x)}{dx^2} dx = \int_0^1 f(x) \psi_n(x) dx, \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (4)$$

Выпишем сеточные уравнения системы (4) подробно:

$$\begin{cases} \frac{24}{h} v_1 - \frac{12}{h} v_2 + 6w_2 = h^2 \int_0^1 f(x) \phi_1(x) dx, \\ 8hw_1 - 6v_2 + 2hw_2 = h^2 \int_0^1 f(x) \psi_1(x) dx, \\ -\frac{12}{h} v_{n-1} - 6w_{n-1} + \frac{24}{h} v_n - \frac{12}{h} v_{n+1} + 6w_{n+1} = h^2 \int_0^1 f(x) \phi_n(x) dx, \\ 6v_{n-1} + 2hw_{n-1} + 8hw_n - 6v_{n+1} + 2hw_{n+1} = h^2 \int_0^1 f(x) \psi_n(x) dx, \\ \quad \quad \quad n = 2, 3, \dots, N-1, \\ -\frac{12}{h} v_{N-1} - 6w_{N-1} + \frac{24}{h} v_N = h^2 \int_0^1 f(x) \phi_N(x) dx, \\ 6v_{N-1} + 2hw_{N-1} + 8w_N = h^2 \int_0^1 f(x) \psi_N(x) dx. \end{cases} \quad (5)$$

Так как каждому узлу сетки соответствуют два параметра, то каждой функции  $\tilde{v}$  можно сопоставить вектор  $v$ , координатами которого являются параметры  $v_1, v_2, \dots, v_N, w_1, w_2, \dots, w_N$ , упорядоченные, например, так:  $v_1, w_1, v_2, w_2, \dots, v_N, w_N$ .

Матрица системы (5) симметрична и имеет не более семи ненулевых диагоналей. Это свойство является следствием «почти» ортогональности базисных функций.

Расчёты проведены с помощью пакета MATLAB для модельной задачи (1),(2), где

$$a(x) = \frac{e^{x^2}}{4}, \quad f(x) = 1 + 42x - 42x^2 - 40x^3 + 30x^4,$$

точное решение которой суть

$$u(x) = x^2(1-x)^2 e^{-x^2}.$$

Результаты расчётов таковы: при  $N = 21$

$$\max_{1 \leq n \leq N} |u(x_n) - v_n| \approx 0,000184, \quad \max_{1 \leq n \leq N} |u'(x_n) - w_n| \approx 0,000104.$$

Полученные результаты показывают достаточную точность МКЭ для решения задач изгиба балки.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ղափաջյան Յու.Գ., Ստեփանյան Ս.Պ. Վերջավոր տարրերի մեթոդը և կիրառությունները: Երևան, ԵՊՀ հրատարակչություն, 2013, 134 էջ:
2. Оганесян Л.А., Руховец Л.А. Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Ереван: 1979. 236с.
3. Самарский А.А., Андреев В.Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. М.: Наука, 1976. 354с.

#### Сведения об авторах:

**Дадаян Юрик Геворгович**, доцент кафедры числ. анализа и матем. моделирования факультета информатики и прикл. математики ЕГУ

**Адрес:** 0025, Ереван, ул. А.Манукяна 1, **тел.:** (+37494) 099-958 (моб.),

**E-mail:** [Yudadayan@yandex.ru](mailto:Yudadayan@yandex.ru)

**Оганисян Зограб Багратович**, доцент кафедры числ. анализа и матем. моделирования факультета информатики и прикл. математики ЕГУ

**Адрес:** 0025, Ереван, ул. А.Манукяна 1, **тел.:** (+37491) 324-408 (моб.),

**E-mail:** [zorhh@ysu.am](mailto:zorhh@ysu.am)

# ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В КРУГЛОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЕ С ПРОНИЦАЕМЫМИ СТЕНКАМИ

*Даниелян Л.Е., Терджян Ц.Э.  
Армения*

Рассматривается ламинарное стационарное изотермическое движение несжимаемой вязкой жидкости в цилиндрической трубе с проницаемыми стенками. Приближённые уравнения такого движения в цилиндрических координатах с соответствующими граничными условиями путем замены переменных приводятся к более удобному для решения виду.

Для одного частного случая определяются законы изменения давления и скорости движения жидкости. Проведён численный анализ и построены графики.

## 1. Постановка задачи

Рассматривается ламинарное стационарное изотермическое движение несжимаемой вязкой жидкости в цилиндрической трубе с проницаемыми стенками.

Пусть в круглой неограниченной в одном направлении трубе, радиусом  $a$  происходит ламинарное стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости.

Принимается, что поступающая жидкость имеет равномерно распределённые и постоянные по входному сечению скорость  $U_H$  и давление  $P_H$ .

Приближённые уравнения такого движения в цилиндрических координатах будут [1]

$$U_H \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial r} \right),$$
$$\frac{\partial P}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) = 0, \quad (1.1)$$

где  $V_z$  и  $V_r$  – осевая и радиальная компоненты скорости,  $P$  – давление,  $\rho$  – плотность,  $\nu$  – кинематический коэффициент вязкости жидкости.

Граничные условия для рассматриваемой задачи имеют вид:

$$\text{при } z = 0 \quad V_z = U_H, \quad P = P_H,$$

$$\text{при } z > 0 \quad r = a, \quad V_z = 0, \quad V_r = k(P - P_b) = \pm V_0 = \text{const}, \quad (1.2)$$

$$\text{при } z > 0 \quad r = 0, \quad \frac{\partial V_z}{\partial r} = 0.$$

Здесь  $P_b$  – внешнее давление,  $k$  – коэффициент проницаемости трубы (постоянные величины).

При  $k > 0$  имеется отсос жидкости через проницаемую поверхность трубы, а при  $k < 0$  имеет место вдув жидкости.

Переходим к безразмерным величинам с помощью следующих соотношений

$$x = \frac{z}{a}, \quad y = \frac{r}{a}, \quad u = \frac{V_z - U_H}{U_H}, \quad v = \frac{V_r}{U_H}, \quad P = \frac{P - P_H}{\rho U_H^2}.$$

Тогда уравнения (1.1) и граничные условия (1.2) примут вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial u}{\partial y} = \text{Re} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} \right), \\ \frac{dP}{dy} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} (vy) = 0, \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\begin{cases} \text{при } x = 0 & u = 0, \quad P = 0 \\ \text{при } x > 0 & y = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \\ \text{при } x > 0 & y = 1, \quad u = -1, \quad v = \pm V_0 / U_H. \end{cases} \quad (1.4)$$

Здесь  $\text{Re} = U_H a / \nu$  – число Рейнольдса.

## 2. Решение полученной краевой задачи.

Решение первого уравнения системы (1.3) ищем методом разделения переменных, т.е. искомое решение ищем в виде  $u(x, y) = P(x) \cdot T(y)$ .

Подставляя это представление в первое уравнение системы (1.3), получим

$$P(x) \left[ T''(y) + \frac{1}{y} T'(y) \right] = \text{Re} P'(x) [T(y) + 1],$$

откуда будем иметь

$$\frac{T''(y) + \frac{1}{y} T'(y)}{T(y) + 1} = \text{Re} \frac{P'(x)}{P(x)}. \quad (2.1)$$

Так как левая часть уравнения (2.1) функция только от  $y$ , а правая часть только от  $x$ , то  $\operatorname{Re} \frac{P(x)}{P(x)} = c$  ( $c$  – произвольная постоянная) и, следовательно,

$$P(x) = c_1 e^{\frac{c}{\operatorname{Re}} x}. \quad (2.2)$$

Так как по характеру движения  $P(x)$  является убывающей функцией на множестве  $[0; +\infty)$ , то полагая, в частности,  $c = -1$ , из (2.2) будем иметь:

$$P(x) = c_1 e^{-\frac{x}{\operatorname{Re}}}, \quad (2.3)$$

а из (2.1)

$$T''(y) + \frac{1}{y} T'(y) + T(y) = -1. \quad (2.4)$$

Уравнение  $T''(y) + \frac{1}{y} T'(y) + T(y) = 0$  является уравнением Бесселя, частным решением которого будет:

$$I_0(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \cdot \left(\frac{y}{2}\right)^{2n}. \quad (2.5)$$

Нетрудно проверить, что функция

$$T(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \cdot \left(\frac{y}{2}\right)^{2n} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \cdot \left(\frac{y}{2}\right)^{2n}$$

является решением уравнения (2.4).

Следовательно, функция

$$u(x; y) = c_1 e^{-\frac{x}{\operatorname{Re}}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{y}{2}\right)^{2n} \quad (2.6)$$

является решением первого уравнения системы (1.3).

Подставляя представление (2.6) в третье уравнение системы (1.3), получим

$$-\frac{c_1}{\operatorname{Re}} e^{-\frac{x}{\operatorname{Re}}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{y}{2}\right)^{2n} + \frac{1}{y} \frac{\partial(vy)}{\partial y} = 0. \quad (2.7)$$

Из (2.7) будем иметь

$$\frac{\partial(vy)}{\partial y} = \frac{c_1}{\text{Re}} e^{-\frac{x}{\text{Re}}} \left[ -\frac{y^3}{4} + \frac{1}{(2!)^2} \cdot \frac{y^5}{16} - \frac{1}{(3!)^2} \cdot \frac{y^7}{64} + \dots \right].$$

Интегрируя это равенство по переменной  $y$ , получим

$$v \cdot y = \frac{c_1}{\text{Re}} e^{-\frac{x}{\text{Re}}} \left[ -\frac{y^4}{16} + \frac{1}{(2!)^2} \cdot \frac{y^6}{6 \cdot 16} - \frac{1}{(3!)^2} \cdot \frac{y^8}{8 \cdot 64} + \dots \right],$$

откуда

$$v(x; y) = \frac{c_1}{\text{Re}} e^{-\frac{x}{\text{Re}}} \left[ -\frac{y^3}{16} + \frac{1}{(2!)^2} \cdot \frac{y^5}{6 \cdot 16} - \frac{1}{(3!)^2} \cdot \frac{y^7}{8 \cdot 64} + \dots \right]. \quad (2.8)$$

Таким образом, в одном частном случае определены законы изменения скоростей  $u(x; y)$ ,  $v(x; y)$  и давления  $P(x)$ .

### 3. Численный пример

Для вычисления примера зададим следующие числовые данные:

$$U = 10^{-1} \text{ м/сек}, \quad V_0 = 10^{-3} \text{ м/сек}, \quad P = 10^2 \text{ кг/м}^2, \quad \rho = 102 \text{ кг} \cdot \text{сек}^2/\text{м}^4,$$

$$\mu = 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{сек}/\text{м}^2, \quad \text{Re} = 50, \quad \nu = 10^{-4} \text{ м}^2/\text{сек}, \quad a = 0,05 \text{ м}.$$

Результаты вычислений представлены в виде графиков (рис. 1; 2). На этих графиках изображены изменения давления и продольной скорости в зависимости от безразмерных координат.

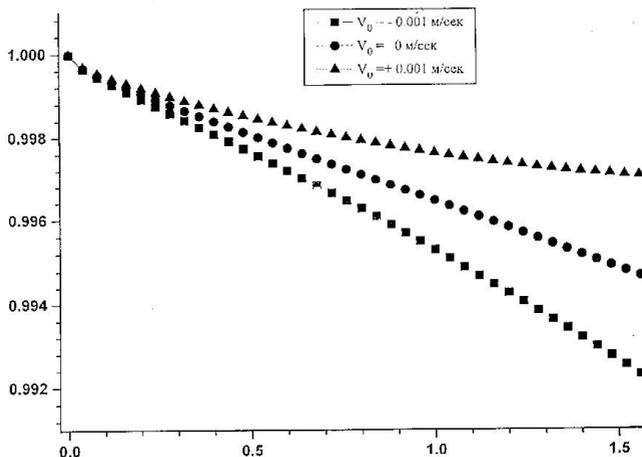


Рис.1

Из рис.1 видно, что давление монотонно убывает при возрастании координаты. Причем, если происходит отсос жидкости, то давление  $P_{отсос}$  превосходит давление в сплошной трубе. При вдуве жидкости давление меньше давления сплошной трубы.

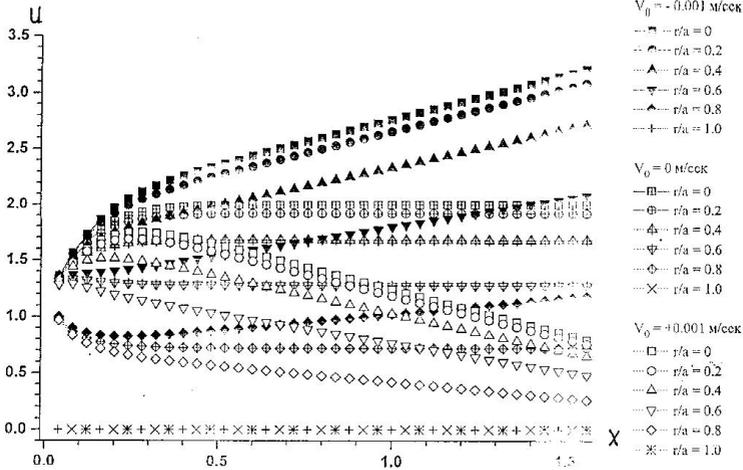


Рис.2

Из рис. 2 следует, что резкие изменения поведения продольной скорости происходят на начальном участке трубы. Далее поведение движения устанавливается, причём скорость увеличивается при вдуве и уменьшается при отсосе жидкости.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Тарг С.М. Основные задачи теории ламинарных течений. М.-Л.: 1951.
2. Райсберг Б.А., Самсонов К.П. О применимости одномерной модели к описанию стационарного течения вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрической трубе с проницаемыми стенками. // Инж. ж. 1964. Т.4. Вып.1.
3. Бабаджанян Г.А., Даниелян Л.Е. О нестационарном движении реального газа в трубах с проницаемыми стенками. //Изв. НАН Армении. Механика. 1997. Т.50. №1. С.53-61.

### Сведения об авторах:

Даниелян Лейнад Ервандович – профессор, тел.:(+37410)254874; (+37494)200129.  
 Терджян Цолак Эрнестович – доцент, тел.:(+37410)77 24 69; (+37455)59 15 74  
 Национальный аграрный университет Армении, кафедра высшей математики и теоретической механики

# КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИЙ СПИН-ВОЛНОВОЙ ПРОЦЕСС В СЛОИСТОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ФЕРРОМАГНИТНОЙ СТРУКТУРЕ

*Даноян З.Н., Атоян Л.А., Саакян С.Л., Даноян Н.З.  
Армения*

Настоящее исследование посвящено изучению существования и поведения спиновых волн, распространяющихся в бесконечной периодической непроводящей ферромагнитной структуре, ячейка периодичности которой состоит из двух ферромагнитных слоёв разной толщины  $h_1, h_2$  с различными магнитными свойствами, перпендикулярно по направлению к слоям. Найлены дисперсионные уравнения и в частотном спектре волн выявлено существование бесконечно чередующихся полос пропускания и запрета.

Исследование колебательных и волновых процессов в ферромагнитных материалах в последние два-три десятилетия стало одним из важнейших направлений в механике и физике твёрдого тела [1-8]. Этот интерес вызван большим практическим и теоретическим значением этих исследований.

Перечислим некоторые технические устройства электроники и спинтроники, где находят применение спиновые волны и колебания: приборы аналоговой обработки СВЧ сигналов (спин-волновые приборы), магнитные частотные фильтры, линии задержки, синтезаторы частот, корреляторы, эхолокаторы, системы обработки информации, считывающие наноголовки в запоминающих устройствах и т.д.

В работе рассматривается слоистая, периодическая непроводящая ферромагнитная конструкция, ячейка периодичности которой состоит из двух ферромагнитных слоёв разной толщины  $h_1, h_2$  с различными магнитными свойствами, находящаяся во внешнем постоянном магнитном поле  $\vec{H}_0$ . Декартова система координат выбрана так, что ось  $Oz$  направлена параллельно  $\vec{H}_0$ , а ось  $Oy$  перпендикулярна к поверхностям слоёв, через  $\vec{M}_{0j}$  ( $j=1,2$ ) обозначены векторы объёмной плотности намагниченностей насыщения слоёв. Для нашей конструкции  $\vec{M}_{0j}$  параллельны  $\vec{H}_0$ .

Рассматривается случай, когда возмущения намагниченностей и магнитного поля в конструкции не зависят от координаты  $z$  и характеризуются векторами  $\vec{\mu}_{0j}(\mu_{0j}(x, y, t), \nu_{0j}(x, y, t))$  ( $j=1,2$ ), а также магнитостатическими потенциалами  $\varphi_j(x, y, t)$ . Через  $\vec{\mu}_{0j}(\mu_{0j}, \nu_{0j})$  обозначены массовые плотности намагниченностей насыщения материалов слоёв. Исследуется существование и поведение спиновых волн, распространяющихся перпендикулярно к поверхностям слоёв, т.е. в (положительном) направлении оси  $Oy$ .

### Постановка задачи.

1. Движения намагниченностей и возмущения магнитного поля в ферромагнитных слоях ячейки описываются следующей системой уравнений [1,2]:

$$\Delta\varphi_j = \rho_j \left( \frac{\partial\mu_j}{\partial x} + \frac{\partial v_j}{\partial y} \right), j = 1, 2,$$

$$\frac{\partial\mu_j}{\partial t} = \Omega_{Mj} \left( \rho_j^{-1} \frac{\partial\varphi_j}{\partial y} + b_j v_j - \lambda\Delta v_j \right),$$

$$\frac{\partial v_j}{\partial t} = -\Omega_{Mj} \left( \rho_j^{-1} \frac{\partial\varphi_j}{\partial x} + b_j \mu_j - \lambda_j \Delta\mu_j \right),$$
(1)

где  $\Omega_{Mj} = \gamma_0 M_{0j}$ ,  $\gamma_0 = 1.76 \cdot 10^7$  (Э · с)<sup>-1</sup> – гирромагнитное отношение,  $b_j$  – постоянные магнитной анизотропии,  $\lambda_j$  – обменные постоянные,  $\varphi_j$  – магнитостатические потенциалы. Здесь принято  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_0$ .

2. Контактные и квазипериодические граничные условия Флоке:

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0), v_1(0) = m v_2(0),$$

$$\frac{\partial\mu_1(0)}{\partial y} = \frac{\partial\mu_2(0)}{\partial y}, \frac{\partial_1 v_1(0)}{\partial y} = \frac{\partial v_2(0)}{\partial y},$$

$$\varphi_1(-h_1) = \ell \varphi_2(-h_2), v_1(-h_1) = \ell m v_2(h_2),$$

$$\frac{\partial\mu_1(-h_1)}{\partial y} = \ell \frac{\partial\mu_2(h_2)}{\partial y}, \frac{\partial_1 v_1(-h_1)}{\partial y} = \ell \frac{\partial v_2(h_2)}{\partial y},$$
(2)

где  $\ell$  – параметр Флоке:  $\ell = e^{iqd}$ ,  $d = h_1 + h_2$  – длина ячейки (период конструкции),  $q$  – волновое число Блоха-Флоке [4,6],  $m = \mu_{01} / \mu_{02}$ .

Решения системы уравнений (1) ищутся в виде плоских гармонических волн:

$$(\mu_j, v_j, \varphi_j) = (M, N, \Phi) e^{i(q_j y - \omega t)}, j = 1, 2,$$
(3)

где  $M, N, \Phi$  – постоянные амплитуды,  $q_j$  – волновые числа, а  $\omega$  – круговая частота искомым волн.

Подставляя (3) в (1), мы приходим к характеристическому уравнению:

$$s_j^2 + s_j - \Omega_j^2 = 0 \text{ (где } s_j = b_j + \lambda_j q_j, \Omega_j = \omega / \Omega_{Mj} \text{),}$$
(4)

а также к уравнениям для определения амплитуд, которые опускаем. Из уравнения (4) находим отличные от нуля волновые числа  $q_j$  в зависимости от частоты  $\omega$ :

$$q_j^2 = q_{0j}^2, \quad q_j^2 = -r_{0j}^2,$$

где

$$q_{0j} = \sqrt{\lambda_j^{-1}(-1/2 - b_j + \sqrt{1/4 + \Omega_j^2})}, \quad r_{0j} = \sqrt{\lambda_j^{-1}(1/2 + b_j + \sqrt{1/4 + \Omega_j^2})}$$

Для каждого из волновых чисел  $q_j$  из уравнений для определения амплитуд получаем следующие связи между соответствующими амплитудами:

$$M_{1j} = -\frac{q_{1j}\Omega_1}{\rho_1(b_1 + \lambda_1 q_{1j}^2)} \Phi_{1j}, \quad M_{2j} = -\frac{q_{2j}\Omega_2}{\rho_2(b_2 + \lambda_2 q_{2j}^2)} \Phi_{2j}, \quad (5)$$

$$N_{1j} = \frac{iq_{1j}}{\rho_1} \Phi_{1j}, \quad N_{2j} = -\frac{iq_{2j}}{\rho_2} \Phi_{2j}, \quad j = 1, \dots, 4.$$

Далее общие решения нашей задачи представляются в виде:

$$\begin{aligned} \mu_j &= (M_{j1}e^{iq_{0j}y} + M_{j2}e^{-iq_{0j}y} + M_{j3}e^{-r_{0j}y} + M_{j4}e^{r_{0j}y})e^{-i\omega t}, \\ \nu_j &= (N_{j1}e^{iq_{0j}y} + N_{j2}e^{-iq_{0j}y} + N_{j3}e^{-r_{0j}y} + N_{j4}e^{r_{0j}y})e^{-i\omega t}, \\ \varphi_j &= (\Phi_{j1}e^{iq_{0j}y} + \Phi_{j2}e^{-iq_{0j}y} + \Phi_{j3}e^{-r_{0j}y} + \Phi_{j4}e^{r_{0j}y})e^{-i\omega t}, \quad j = 1, 2, \end{aligned} \quad (6)$$

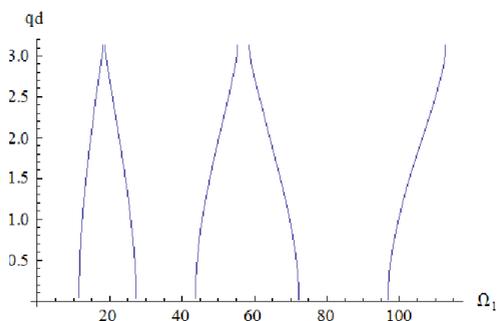
Подставляя решения (6) в контактные и граничные условия (2), с учётом связей (5), мы придём к системе восьми однородных уравнений относительно неизвестных амплитуд  $\Phi_{jn}$  ( $j = 1, 2; n = 1, \dots, 4$ ). Из условия существования ненулевых решений этой системы получается следующее дисперсионное уравнение:

$$Al^2 + Bl + A = 0,$$

где коэффициенты  $A$ ,  $B$  зависят от параметров задачи. Введя обозначение

$$\kappa = \frac{\Omega_{M1}}{\Omega_{M2}} \quad \text{и придавая численные значения переменным, например:}$$

$b_1 = 0.2$ ,  $b_2 = 0.5$ ,  $\lambda_1 = 10^{-10}$ ,  $\lambda_2 = 3.0 \cdot 10^{-11}$ ,  $h_1 = 0.25$ ,  $h_2 = 0.75$ ,  $\kappa = 1.5$ , построим графическое решение дисперсионного уравнения, которое выражает связь между приведенной частотой волн  $\Omega_1$  и волновым числом Флоке  $q$  (фиг.1).



Фиг. 1.

В данной работе получены следующие результаты:

1. В каждом слое, кроме падающей и отражённой волн выявлены сопутствующих два неоднородных по толщине слоёв магнитные колебания.
2. Спектр частот спиновых волн разбивается на бесконечно чередующиеся полосы пропускания и запрета (фиг. 1).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Можен Ж. Механика электромагнитных сплошных сред. М.: Мир, 1991. 560с.
2. Гуревич А.Г. Магнитный резонанс в ферритах и ферромагнетиках. М.: Наука, 1973. 591с.
3. E.H. Lee, H.Yang. On waves in composite materials with periodic structure. //J. Appl. Math. Vol.25. №3. Nov. 1973.
4. S. A. Nikitov, Ph. Tailhades, C. S. Tsai. Spin waves in Periodic Magnetic Structures – Magnonic crystals. // J.Magnet.Mater., v.23, 3, pp.320-331, 2001.
5. Kalinikos B.A. Dipole-exchange SW spectrum of magnetic films. In: Linear & nonlinear SW in magnetic films & superlattices. M.G.Cottan, ed. Singapore: World scientific publishing Comp., Ltd, 1994.
6. Даноян З.Н., Казарян К.Б., Атоян Л.А., Даноян Н.З. Квазипериодические спиновые волны типа Блоха-Флоке в периодической слоистой структуре из ферромагнитных и диэлектрических слоёв. //Изв. НАН РА. Механика. 2013. Т.66. №4. С.29-37.
7. Даноян З.Н., Атоян Л.А., Манукян Г.А., Даноян Н.З. Спиновые волны типа Блоха-Флоке в периодической ферромагнитной слоистой структуре. // Изв. НАН Армении. Механика. 2014. Т.67. №2. С.45-51.
8. V.V. Kruglyak, A.N. Kuchko, Spektrum of spin waves propagating in a periodic magnetic structure. Physica B339 (2003), 130-133.

**Сведения об авторах:**

**Даноян Завен Нерсесович**, Д.ф.-м.н., зав.отделом Института механики НАН РА. Адрес: РА,0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2.

**E-mail:** zavendanoyan@gmail.com

**Атоян Левон Арутюнович**, К.ф.-м.н., ст. науч. сотрудник Института механики НАН РА. Адрес: РА,0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2.

**E-mail:** levous@mail.ru

**Саакян Саак Левонович**, К.ф.-м.н., науч. сотрудник Института механики НАН РА. Адрес: РА, 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2.

**E-mail:** mechins@sci.am

**Даноян Нерсес Завенович**, науч. сотрудник Института механики НАН РА. Адрес: РА,0019 Ереван, пр. МаршалаБаграмяна, 24/2.

**E-mail:** zavendanoyan@gmail.com

# РАСПРОСТРАНЕНИЕ СДВИГОВЫХ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ ВОЛН В ДВУХСЛОЙНОЙ СРЕДЕ С ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИМ И ПРОВОДЯЩИМ СЛОЯМИ

*Даноян З.Н., Манукян Г.А., Берберян А.Х., Мкртчян С.А.  
Армения*

В настоящей работе исследуется существование и поведение электроупругих сдвиговых волн, распространяющихся в двухслойной структуре, которая состоит из пьезоэлектрического (класса 4mm или 6mm) и проводящего слоёв разных толщин  $h_1, h_2$ . Сформулирована граничная задача. Найдены упругие и электрические волновые поля, а также дисперсионное уравнение задачи. Дисперсионное уравнение исследовано для различных физико-механических характеристик структуры и при различных соотношениях скоростей объёмных волн в слоях.

Исследование колебательных и волновых процессов в слоистых структурах с различными физико-механическими свойствами в последнее время стало одним из важнейших направлений в механике и физике твёрдого тела [1-7]. Этот интерес вызван большим практическим и теоретическим значением этих исследований. Распространение упругих волн в двухслойной среде исследовалось в работах [1,3,5]. Поведение сдвиговых электроупругих волн типа Лява в структуре, состоящей из пьезоэлектрического полубесконечного слоя и второго проводящего или диэлектрического слоя, исследовалось в работах [2,4,7].

В настоящей работе рассматривается двухслойная структура, которая состоит из пьезоэлектрического и проводящего слоёв разных толщин  $h_1, h_2$ . Декартова система координат выбрана так, что ось  $Oy$  направлена параллельно граничной поверхности слоёв, а ось  $Ox$  перпендикулярна к поверхностям слоёв. Свободная граница пьезоэлектрического слоя ( $x = h_1$ ) металлизирована, вследствие чего электрическое поле не проникает в вакуум. Во втором проводящем слое, в области  $x < -h_2$  электрическое поле отсутствует. Предполагается, что пьезоэлектрическая среда имеет кристаллическую симметрию 4mm или 6mm, главная ось симметрии которой параллельна оси  $Oz$ .

## **1. Уравнения в слоях структуры.**

Предполагается, что возмущения упругого и электрического полей в рассматриваемой структуре не зависят от координаты  $z$  и характеризуются вектором перемещения  $W$  и потенциалом  $\Phi$  электрического поля в пьезоэлектрическом слое, которые представляются следующим образом:

$$\vec{u}(0, 0, w(x, y, t)), \quad \varphi(x, y, t), \quad \vec{E} = -\text{grad}\varphi. \quad (1)$$

Исследуется существование и поведение двумерных электроупругих волн, распространяющихся параллельно поверхностям слоёв.

Используя уравнения и соотношения пьезоэлектрической среды в предположении (1), для компонент деформаций, напряжений и электрической индукции получаются следующие выражения:

$$\gamma_{13} = \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x}, \gamma_{23} = \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (2)$$

$$\sigma_{13} = c_{44} \frac{\partial w}{\partial x} + e_{15} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \sigma_{23} = c_{44} \frac{\partial w}{\partial y} + e_{15} \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad (3)$$

$$D_1 = \varepsilon_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + e_{15} \frac{\partial w}{\partial x}, D_2 = -\varepsilon_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + e_{15} \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (4)$$

где  $c_{44}$ ,  $e_{15}$  – упругая и пьезоэлектрическая постоянные.

Для проводящей среды соответствующие соотношения получим, подставив в (1)-(4)  $\varphi = 0$ ,  $e_{15} = 0$ . Из уравнений электроупругости и упругости, используя вышеприведённые соотношения, получим следующие уравнения, описывающие распространение электроупругих возмущений в пьезоэлектрическом слое и упругие возмущения в проводящем слое:

**а) для пьезоэлектрического слоя:**

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = S_1^2 \Delta w_1, \quad \Delta \varphi'_1 = 0, \quad (5)$$

где приняты следующие обозначения:

$$S_1^2 = \frac{\bar{c}_1}{\rho_1} = \frac{c_1}{\rho_1} (1 + \chi_1^2) = S_{10}^2 (1 + \chi_1^2), S_{10}^2 = \frac{c_1}{\rho_1}, \varphi'_1 = \varphi_1 - \bar{e}_1 w_1, \quad (6)$$

$$\bar{c}_1 = c_1 (1 + \chi_1^2), \chi_1^2 = \frac{\bar{e}_1 e_1}{c_1}, \bar{e}_1 = \frac{e_1}{\varepsilon_1}, c_1 = c_{44}^{(1)}, \varepsilon_1 = \varepsilon_{11}^{(1)}, e_1 = e_{15}^{(1)};$$

Здесь величины с индексом «1» относятся к пьезоэлектрической среде,  $S_1$  – скорость распространения сдвиговых объёмных электроупругих волн,  $S_{10}$  – скорость распространения сдвиговых объёмных упругих волн в пьезоэлектрической среде при пренебрежении пьезоэффектом,  $\varphi'_1$  – приведённый потенциал электрического поля, зависящий от истинного потенциала и перемещений пьезоэлектрической среды. Как видно из (5), поле перемещения  $w_1$  отделяется от возмущений потенциала электрического поля, а возмущение электрического поля  $\varphi'_1$  зависит от истинного потенциала и от упругого перемещения.

б) для проводящего слоя:

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} = S_2^2 \Delta w_1, S_2^2 = \frac{c_2}{\rho_2}, c_2 = c_{44}^{(2)} \quad (7)$$

$c_2$  – упругая постоянная проводящего слоя,  $\rho_2$  – плотность,  $S_2$  – скорость распространения объёмных упругих волн в проводящем слое.

## 2. Граничные и контактные условия.

а) граничные условия:

$$1. \text{ на границе } x = +h_1: \sigma_{13}^{(1)} = 0, \varphi_1 = 0; \quad (8)$$

$$2. \text{ на границе } x = -h_2: \sigma_{13}^{(2)} = 0; \quad (9)$$

б) контактные условия на поверхности  $x = 0$ :

$$\sigma_{13}^{(1)} = \sigma_{13}^{(2)}, w_1 = w_2, \varphi_1 = 0 \quad (10)$$

## 3. Решения в виде плоских волн.

Решения для упругого перемещения  $w_1$  и приведённого потенциала  $\varphi_1'$  в области  $0 \leq x \leq h_1$  и для упругого перемещения  $w_2$  в области  $-h_2 \leq x \leq 0$  представляются в виде:

$$w_1 = W_1(x)e^{i(py-\omega t)}, \quad \varphi_1' = \Phi_1(x)e^{i(px-\omega t)}, \quad w_2 = W_2(x)e^{i(py-\omega t)} \quad (11)$$

где  $W_1(x), \Phi_1(x), W_2(x)$  – искомые амплитуды волны,  $p > 0$  – продольное волновое число,  $\omega > 0$  – круговая частота.

Подставляя выражения (11) в (5) и (7), получим уравнение для определения амплитуд  $W_1(x), \Phi_1(x), W_2(x)$ , общее решение которого:

$$W_1(x) = W_{10}^+ \exp(ip\beta_1 x) + W_{10}^- \exp(-ip\beta_1 x), \beta_1 = \sqrt{\frac{V^2}{S_1^2} - 1}, V = \frac{\omega}{P}, \quad (12)$$

$$\Phi_1(x) = \Phi_{10}^+ \exp(px) + \Phi_{10}^- \exp(-px), \quad (13)$$

$$W_2(x) = W_{20}^+ \exp(ip\beta_2 x) + W_{20}^- \exp(-ip\beta_2 x), \beta_2 = \sqrt{\frac{V^2}{S_2^2} - 1}. \quad (14)$$

$V$  – фазовая скорость волны,  $\beta_1$  и  $\beta_2$  – коэффициенты затухания.

Полученные решения (12) - (14), подставляя в граничные условия (9), (10) и контактные условия (11), приведут к следующим уравнениям для определения искомых амплитуд:

$$\begin{aligned}
& i\bar{c}_1\beta_1 e^{i\beta_1\xi r}W_{10}^+ - i\bar{c}_1\beta_1 e^{-i\beta_1\xi r}W_{10}^- + e_1 e^{\xi r}\Phi_{10}^+ - e_1 e^{-\xi r}\Phi_{10}^- = 0, \\
& \bar{e}_1 e^{i\beta_1\xi r}W_{10}^+ + \bar{e}_1 e^{-i\beta_1\xi r}W_{10}^- + e^{\xi r}\Phi_{10}^+ + e^{-\xi r}\Phi_{10}^- = 0, \\
& W_{10}^+ + W_{10}^- - W_{20}^+ - W_{20}^- = 0, \quad \bar{e}_1 W_{10}^+ + \bar{e}_1 W_{10}^- + \Phi_{10}^+ + \Phi_{10}^- = 0, \quad (15) \\
& i\bar{c}_1\beta_1 W_{10}^+ - i\bar{c}_1\beta_1 W_{10}^- - ic_2\beta_2 W_{20}^+ + ic_2\beta_2 W_{20}^- + e_1 \Phi_{10}^+ - e_1 \Phi_{10}^- = 0, \\
& e^{-i\beta_2\xi}W_{20}^+ - e^{i\beta_2\xi}W_{20}^- = 0, \quad r = h_1 / h_2, \quad \xi = ph_2
\end{aligned}$$

Условием существования нетривиальных решений системы (15) является равенство нулю его определителя. В результате, приходим к следующему дисперсионному уравнению:

$$\begin{aligned}
& -2\bar{c}_1 e_1 \bar{e}_1 \beta_1 + c h \alpha \cos \alpha_1 \{ e_1 \bar{e}_1 (2\bar{c}_1 \beta_1 - c_2 \beta_2 \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2) + \\
& + th \alpha [ (-e_1^2 \bar{e}_1^2 + \bar{c}_1^2 \beta_1^2) \operatorname{tg} \alpha_1 + \bar{c}_1 c_2 \beta_1 \beta_2 \operatorname{tg} \alpha_2 ] \} = 0 \quad (16)
\end{aligned}$$

где

$$\alpha_1 = \beta_1 \xi r, \quad \alpha_2 = \beta_2 \xi, \quad \alpha = \xi r \quad (17)$$

**Дисперсионные уравнения для частных задач.**

а) **Пьезоэффект отсутствует.**

То есть  $\bar{c}_1 = c_1$ ,  $e_1 = \bar{e}_1 = 0$ . В этом случае (16) сводится к уравнению:

$$c_1 \beta_1 th \alpha_1 + c_2 \beta_2 \operatorname{tg} \alpha_2 = 0 \quad (18)$$

или

$$\gamma_1 th(\xi r \gamma_1) = c \beta_2 \operatorname{tg}(\xi \beta_2), \quad \gamma_1 = \sqrt{1 - \frac{V^2}{S_1^2}}, \quad c = c_2 / c_1. \quad (19)$$

Это уравнение совпадает с уравнением, полученным в работе [3].

б) **Дисперсионное уравнение для классической задачи Лява.**

При  $h_1 \rightarrow 0$  и  $r \rightarrow \infty$  имеем  $th(\xi r \gamma_1) \rightarrow 1$  и уравнение (19) принимает вид:

$$\sqrt{1 - \frac{V^2}{S_1^2}} = c \sqrt{\frac{V^2}{S_2^2} - 1} \operatorname{tg}\left(\xi \sqrt{\frac{V^2}{S_2^2} - 1}\right). \quad (20)$$

Это является дисперсионным уравнением для классической упругой задачи Лява.

в) **Дисперсионные уравнения для электрорупругих волн Лява:**

При  $h_1 \rightarrow \infty$  из (16) получаем:

$$\gamma_1 = \bar{c} \beta_2 \operatorname{tg} \alpha_2 + e_1 \bar{e}_1 / \bar{c}_1, \quad \gamma_1 = \sqrt{1 - V^2 / S_1^2}, \quad \bar{c} = c_2 / \bar{c}_1 \quad (21)$$

Основное дисперсионное уравнение (16) исследовано численно в трёх случаях, когда пьезоэлектрический слой изготовлен из материала ЦТС-4, а проводящий слой изготовлен из следующих материалов: Al, Au, Pt. Результаты не приводятся ввиду ограниченности печатного места.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 344 с.
2. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н. Электромагнитоупругие волны. Ереван:Изд. ЕУ, 2006. 492 с.
3. Jones J.P. Wave propagation a two-layered medium. //Journal of Applied Mechanics. 1964. June. Pp. 213-222.
4. Даноян З.Н., Даноян Н.З., Манукян Г.А. Поверхностные электроупругие волны Лява для двух слоёв на пьезоэлектрической подложке. //Изв. НАН Армении. Механика. 2001. Т.54. №4. С.22-25.
5. Погосян Н.Д., Саноян Ю.Г., Терзян С.А. Распространение сдвиговых волн в двухслойной среде в антиплоской постановке. //Изв. НАН РА. Механика. 2013. Т.66. № 4, С.12-16.
6. Curtis R.G., Redwood M. Transvers surface wave on a piezoelectric material carrying a metal layer of finite thicknees. //J. Appl. fys., 1973. Vol.44. №5. P.2002-2007.

#### Сведения об авторах:

**Даноян Завен Нерсесович**, д.ф.-м.н., зав.отделом Института механики НАН Армении.

**Адрес:** Армения, 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2.

**E-mail:** zavendanoyan@gmail.com

# НАПРЯЖЁННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ С ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМ АБСОЛЮТНО ЖЁСТКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНО ВЫХОДЯЩИМ НА ТРЕЩИНУ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

*Даиштоян Л.Л., Акоюн Л.В.*

*Ереван*

Рассмотрено плоско-деформированное состояние упругой плоскости с полубесконечным абсолютно жёстким включением, перпендикулярно выходящим на срединную точку трещины конечной длины. Методом разрывных решений задача математически формулируется в виде системы сингулярных интегральных уравнений с обобщенными ядрами Коши, решение которой строится методом механических квадратур.

Пусть упругая плоскость, отнесённая к полярной системе координат  $O r \varphi$ , на линии  $\varphi = 0.5\pi$  усилена полубесконечным абсолютно жёстким включением ( $0 < r < \infty$ ), а на отрезках ( $0 < r < a$ ) линий  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi$  расслаблена трещиной конечной длины  $2a$  и деформируется под воздействием распределённых нагрузок  $P^\pm(r)$ , действующих на противоположных берегах трещины.

Задача заключается в определении раскрытия трещины и коэффициента интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках конечной трещины.

Учитывая симметричность задачи относительно оси  $Oy$ , будем рассматривать только полуплоскость  $x \geq 0$ . Тогда поставленную задачу математически можно представить в виде следующей граничной задачи:

$$\begin{cases} u_\varphi^+ \left( r, \frac{\pi}{2} \right) = 0, & u_r^+ \left( r, \frac{\pi}{2} \right) = 0 \\ u_\varphi^- \left( r, -\frac{\pi}{2} \right) = 0, & \tau_{r\varphi}^- \left( r, -\frac{\pi}{2} \right) = 0 \end{cases} \quad (0 < r < \infty) \quad (1.1a)$$

$$\begin{cases} u_\varphi^+ (r, 0) = u_\varphi^- (r, 0), & u_r^+ (r, 0) = u_r^- (r, 0) \\ \sigma_\varphi^+ (r, 0) = \sigma_\varphi^- (r, 0), & \tau_{r\varphi}^+ (r, 0) = \tau_{r\varphi}^- (r, 0) \end{cases} \quad (a < r < \infty) \quad (1.1b)$$

$$\sigma_{\varphi}^{\pm}(r, 0) = -P_0^{\pm}(r), \quad \tau_{r\varphi}^{\pm}(r, 0) = 0 \quad (0 < r < a) \quad (1.1\text{в})$$

Здесь  $u_{\varphi}^{\pm}(\varphi, r)$  и  $u_r^{\pm}(\varphi, r)$  – угловые и радиальные компоненты смещений точек верхней и нижней четверть-плоскостей, соответственно, а  $\sigma_{\varphi}^{\pm}(\varphi, r)$  и  $\tau_{r\varphi}^{\pm}(\varphi, r)$  – компоненты напряжений, действующих в этих четверть-плоскостях.

Для получения определяющих уравнений поставленной задачи введём в рассмотрение разность смещений точек берегов трещины по формулам:

$$\begin{cases} u_{\varphi}^{+}(r, 0) - u_{\varphi}^{-}(r, 0) = V(r), \\ u_r^{+}(r, 0) - u_r^{-}(r, 0) = U(r). \end{cases} \quad (1.2)$$

Сначала рассмотрим вспомогательную граничную задачу, состоящую из условий (1.1а), (1.1б) и (1.2) и выразим компоненты напряжений  $\sigma_{\varphi}^{\pm}(\varphi, r)$  и  $\tau_{r\varphi}^{\pm}(\varphi, r)$  на линии  $\varphi = 0$  при помощи разностей смещений точек берегов конечной трещины  $U(r)$  и  $V(r)$ . Далее, удовлетворив условиям (1.1в), придём к следующей системе определяющих сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{a_1}{\pi} \int_0^a \frac{V'(r_0) dr_0}{r_0 - r} + \int_0^a K_{11}(r, r_0) V'(r_0) dr_0 + \int_0^a K_{12}(r, r_0) U'(r_0) dr_0 = F_1(r); \\ \frac{a_1}{\pi} \int_0^a \frac{U'(r_0) dr_0}{r_0 - r} + \int_0^a K_{21}(r, r_0) V'(r_0) dr_0 + \int_0^a K_{22}(r, r_0) U'(r_0) dr_0 = F_2(r). \end{cases} \quad (1.3)$$

Здесь введены обозначения:

$$f_j(r) = \int_0^a K_{j3}(r, r_0) P_0(r_0) dr_0; \quad P_0(r) = -[P_0^+(r) - P_0^-(r)]; \quad (j=1, 2)$$

$$K_{m,n}(r, r_0) = \frac{1}{\pi} \left( A_{m,n} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} + B_{m,n} \frac{d}{dr} + \frac{C_{m,n}}{r} \right) R_j(r, r_0) + \frac{D_{m,n}}{\pi(r_0 + r)};$$

$$F_1(r) = - \int_0^a K_{13}(r, r_0) P_0(r_0) dr_0 - (P_0^+(r) + P_0^-(r)) / 2;$$

$$F_2(r) = -\int_0^a K_{23}(r, r_0) P_0(r_0) dr_0; \quad R_1(r, r_0) = \frac{\sqrt{rr_0}}{r_0 + r};$$

$$R_2(r, r_0) = \frac{2rr_0}{r_0^2 - r^2} - \frac{\sqrt{rr_0}}{r_0 - r}; \quad R_3(r, r_0) = \frac{2r^2}{r_0^2 - r^2} - \frac{\sqrt{rr_0}}{r_0 - r}$$

$$(m = 1, n = 2, 3 \ \& \ m = 2, n = 1; \ j = 1);$$

$$(m = n = 1; \ j = 2); (m = 2 \ \& \ n = 2, 3; \ j = 3);$$

а коэффициенты  $a_1$ ;  $A_{mn}$ ;  $B_{mn}$ ;  $C_{mn}$  и  $D_{mn}$  ( $m = 1-2$ ;  $n = 1-3$ ) – постоянные, зависящие от упругих характеристик материала плоскости.

Систему (1.3) нужно рассматривать при условиях непрерывности смещений в концевых точках трещины, а также при условиях ограниченности смещений в концевой точке  $r = 0$ :

$$U(a) = V(a) = 0; \quad U(0), V(0) < \infty. \quad (1.4)$$

Систему определяющих уравнений (1.3) при условиях (1.4) решим численно-аналитическим методом механических квадратур. С этой целью заметим, что ядра системы интегральных уравнений (1.3) – регулярные функции на интервале  $(0, a)$ , кроме, быть может, точки  $r = r_0 = 0$ . При этом, учитывая поведение интеграла типа Коши в концевых точках интервала интегрирования [1], нетрудно установить, что искомые функции в концевой точке  $r = a$  имеют обычную корневую особенность, а в точке  $r = 0$  имеют особенность типа  $r^{\beta-1}$  ( $0 \leq \beta < 1$ ), где  $\beta$  является корнем уравнения

$$\sin^2 \frac{\beta\pi}{2} = \frac{(1+\varkappa)^2}{4\varkappa} - \frac{\beta^2}{\varkappa}; \quad \left( \varkappa = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \right),$$

которое полностью совпадает с трансцендентным уравнением для определения особенности напряжений в вершине клина при граничных условиях I - II, когда угол раствора клина равен  $\pi/2$  [2].

Теперь, сформулируем систему (1.3) на интервале  $(-1, 1)$ , вводя следующие безразмерные величины:

$$x = \frac{2r}{a} - 1, \quad s = \frac{2r_0}{a} - 1, \quad \varphi_1(x) = V'(a(x+1)/2); \quad \varphi_2(x) = U'(a(x+1)/2),$$

$$R_{m,n}(x,s) = \frac{a}{2a_1} K_{m,n}(a(x+1)/2, a(s+1)/2) \quad (m,n=1,2),$$

$$Q_1(t) = F_1(a(t+1)/2)/a_1, \quad Q_2(t) = F_2(a(t+1)/2)/a_1$$

В итоге, система уравнений (1.3) запишется в виде:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_m(s) ds}{s-x} + \sum_{n=1}^2 \int_{-1}^1 R_{m,n}(x,s) \varphi_n(s) ds = Q_m(x) \quad (1.5)$$

$$(-1 < x < 1; m=1,2)$$

Используя (1.4), легко получить условие

$$\int_{-1}^1 \varphi_2(x) dx = 0 \quad (1.6)$$

и записать формулы для определения приведённой разности смещений берегов трещины при помощи функций  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$ :

$$V^*(x) = -\int_x^1 \varphi_1(x) dx; \quad U^*(x) = -\int_x^1 \varphi_2(x) dx \quad (1.7)$$

Учитывая поведение искомых функций  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$  в конечных точках интегрирования, их представим в виде:

$$\varphi_j(x) = \frac{\varphi_j^*(x)}{(1-x)^{1/2} (1+x)^{1-\beta}} \quad (j=1,2), \quad (1.8)$$

где  $\varphi_i^*(x)$  ( $i = 1, 2$ ) – непрерывные гладкие функции, ограниченные вплоть до концов интервала  $(-1, 1)$ . Далее, подставляя представление (1.8) в систему (1.5), построим её решения методом механических квадратур [3].

Приведём также формулу для определения безразмерных коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений, действующих на линии  $\varphi = 0$  при помощи функций  $\varphi_i^*(x)$  ( $i = 1, 2$ ):

$$K_I^*(1) - iK_{II}^*(1) = -\frac{\sqrt{2\pi}aa_1[\varphi_1^*(1) - i\varphi_2^*(1)]}{2^{2-\beta}P_0}, \left( P_0 = \int_0^a P_0^-(r) dr \right).$$

Проведён численный анализ и выявлены закономерности изменения раскрытия трещины и коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений в случае, когда на берега трещины действуют одинаковые постоянные нагрузки.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511с.
2. Партон В.З., Перлин П.И. Интегральные уравнения теории упругости. М.: Наука, 1977. 311с.
3. Sahakyan A.V. Method of discrete singularities for solution of singular integral and integro-differential equations. // Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute, Georgia, Vol. 156 (2011), pp.101-111.

#### Сведения об авторах:

**Даштоян Лилит Левоновна** – кандидат физ.-мат. наук, учёный секретарь Института механики НАН Армении,

**Тел.:** (37410) 56-81-89. **E-mail:** [Lilit\\_Dashtoyan@mechins.sci.am](mailto:Lilit_Dashtoyan@mechins.sci.am)

**Акопян Лусине Ваграмовна** – младший научный сотрудник Института механики НАН Армении. **Тел.:** (37410) 52-48-90.

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ  
ДЕФОРМИРОВАНИЯ ГОРНЫХ ПОРОД  
ПРИ СЛОЖНЫХ ПРОГРАММАХ НАГРУЖЕНИЯ**  
*Журавлев А.Б., Зайцев А.В., Карев В.И., Коваленко Ю.Ф., Марков  
В.Г., Сидорин Ю.В., Устинов К.Б.*  
*Россия*

Проведено экспериментальное исследование упруго-пластического поведения горных пород в условиях сложного трёхосного нагружения, реализован способ определения пластических параметров модели Друкера-Прагера при неассоциированном законе течения на основе экспериментов, проведено как прямое физическое, так и математическое моделирование процессов деформирования пород для реальных условий эксплуатации месторождений.

1. Отличительной особенностью горных пород является неоднородность их структуры, определяющая разнообразие их механического поведения. Неупругое поведение проявляется в пластичности, реологии и квазихрупком разрушении, причем для горных пород модели, описывающие эти процессы, существенно отличаются от соответствующих классических моделей для металлов, что отражает различия в природе явлений. Одним из таких отличий является зависимость процесса пластического деформирования пород от гидростатического сжатия, другим - наличие неупругого изменения объёма, однако обычно существенно меньшего, чем изменение формы. Вместе это приводит к необходимости использования критериев пластичности, учитывающих сжатие (Кулона-Мора, Друкера-Прагера) и неассоциированных законов течения. В этой связи стоит вопрос экспериментального определения данных параметров.

2. Испытания образцов проводились в лаборатории «Геомеханика» ИПМех РАН на экспериментальной установке для изучения процессов деформирования и разрушения горных пород – Испытательной системе трёхосного независимого нагружения (ИСТНН). Образцы кубической формы с ребром 40 мм нагружались в соответствии с выбранной программой нагружения независимо по каждому из трех направлений. Подробная информация содержится, например в [1, 2].

Была проведена предварительная серия испытаний на двух образцах калийной соли (карналлите) Верхнекамского месторождения. При этом, на одном образце испытания проводились многократно (12 раз при различном расположении осей нагружения) по повторяющимся программам нагружения. В процессе каждого испытания наблюдалась повторяемость результатов, что свидетельствует о пластическом деформировании без существенного накопления повреждений. Программы нагружения и результаты измерения (второй опыт) деформаций представлены на рис. 1. Чтобы исключить из рассмотрения неинформативную начальную зону

закрытия техногенных трещин, при построении диаграммы деформирования за начальную точку было выбрано состояние гидростатического сжатия 10 МПа. Представленные кривые позволяют сделать вывод, что анизотропия образца выражена очень слабо (наблюдаемое изменение деформации вдоль оси, по которой напряжения постоянны, связано, по-видимому, с поворотом плит нагружающего устройства).

Результаты измерений позволяют получить ряд параметров модели. Так на участках разгрузки зависимости почти линейны, что позволяет получить для  $\sigma_1 < 15$  МПа значение модуля всестороннего сжатия, а для  $\sigma_1 > 15$  МПа значение модуля сдвига:  $K = 12.5$  ГПа,  $\mu = 8.8$  ГПа, что соответствует модулю Юнга и коэффициенту Пуассона  $E = 21.5$  ГПа,  $\nu = 0.21$ . Участок активного нагружения для  $\sigma_1 > 15$  МПа позволяет извлечь пластические характеристики при постоянном гидростатическом давлении, что представляется весьма удобным. Из представленной диаграммы видно, что неупругие девиаторные деформации намного превосходят объемные, что при наличии существенной зависимости неупругого деформирования от первого инварианта напряжений делает неприемлемым применение ассоциированных законов течения. Однако, для получения констант перехода в пластическое состояние (критерия Кулона-Мора, либо Друкера-Прагера) необходимо проводить подобные опыты при различных напряжениях гидростатического сжатия.

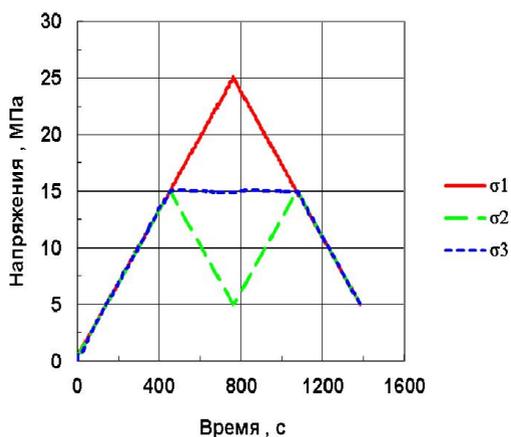


Рис. 1. Программа нагружения образца карналлита

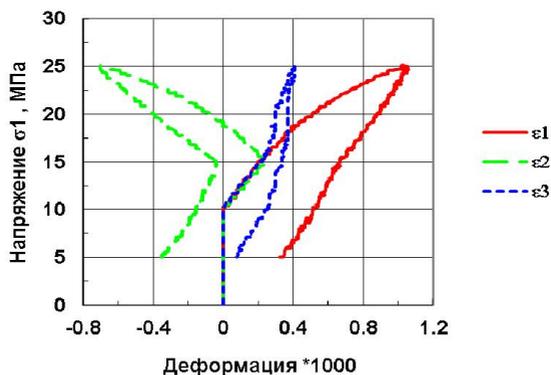


Рис. 2. Деформационные кривые испытания образца карналлита

3. Определение параметров пластического течения продемонстрировано на основе испытания образца песчаника Киринского месторождения (рис. 3).

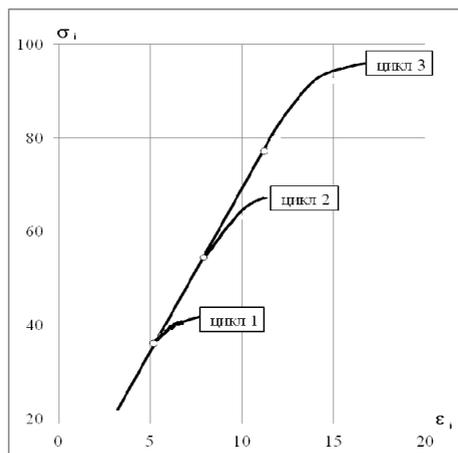


Рис. 3. Деформационные кривые испытания образца песчаника

Видно, что в циклах с более высоким уровнем предварительного всестороннего сжатия пластическое деформирование возникает позже, т.е. при большей интенсивности напряжений (начало пластического деформирования отмечено кружочками). Кроме того, при больших величинах поджатия величины пластических деформаций меньше, чем для

малых поджатий. Подробнее об определении пластических характеристик см. [3]. Исходные данные и результаты расчёта представлены в таблице.

$E$ , МПа	$\nu$	Цикл 1		Цикл 3		$\tau_s$	$\alpha$	$E_p$
		$\sigma_i$ , МПа	$\sigma_m$ , МПа	$\sigma_i$ , МПа	$\sigma_m$ , МПа			
6000	0.3	36.07	14.07	76.88	45.87	18.01	1.28	1371

Здесь  $\sigma_i$  – интенсивность напряжений;  $\sigma_m$  – гидростатическое давление;  $\tau_s$  и  $\alpha$  – параметры модели Друкера-Прагера;  $E_p$  – модуль пластичности. Угол дилатансии предполагался равным нулю.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты РФФИ № 14–01–00726 и РФФИ–Урал № 14–01–96029).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Коваленко Ю.Ф., Карев В.И. Метод георыхления – новый подход к проблеме повышения продуктивности скважин. //Технологии ТЭК. 2003. №1. С.31-35.
2. Климов Д.М., Коваленко Ю.Ф., Карев В.И. Реализация метода георыхления для увеличения приемистости нагнетательной скважины. //Технологии ТЭК. 2003. №4. С.59-64.
3. Журавлев А.Б., Карев В.И., Коваленко Ю.Ф., Сидорин Ю.В., Сиротин А.А., Устинов К.Б. О пластическом деформировании горных пород. Определение пластических характеристик по данным экспериментов на трёхосное нагружение. Актуальные проблемы механики сплошной среды: //Сб. науч. тр. межд. конф., посвященной 100-летию академика НАН Армении Х.Н. Арутюняна. 08-12 окт. 2012. Цахкадзор, Армения. Ереван: Изд-во ЕГУАС, 2012. 238-242.

#### Сведения об авторах:

**Журавлев Алексей Борисович,**

К.ф.-м.н., с.н.с. лаборатории Геомеханики, ИПМех РАН, Москва, Россия

**Phone:** +7 (495) 434 34 47

**E-mail:** zhuravlev.alex2010@yandex.ru

**Зайцев Алексей Вячеславович,**

К.ф.-м.н., доцент, Пермский государственный технический университет,  
Россия,

**E-mail:** zav@ptsu.ru

**Карев Владимир Иосифович,**

Д.т.н., Заместитель директора, ИПМех РАН, Москва, Россия

**Phone:** +7 (495) 434 34 47

**Коваленко Юрий Федорович,**

Д.ф.-м.н., Заведующий лабораторией Геомеханики, ИПМех РАН, Москва,

**Phone:** +7 (495) 434 34 47

**Марков Виктор Григорьевич,**

с.н.с. лаборатории Геомеханики, ИПМех РАН, Москва, Россия

**Phone:** +7 (495) 434 34 47

**Сидорин Юрий Васильевич,**

К.ф.-м.н., с.н.с. лаборатории Геомеханики, ИПМех РАН, Москва, Россия

И +7 (495) 434 34 47

**Устинов Константин Борисович,**

К.ф.-м.н., доцент, с.н.с. лаборатории Геомеханики, ИПМех РАН, Москва,

**Phone:** +7 (926) 164 94 09

**E-mail:** ustinov@ipmnet.ru

## К РАСЧЁТУ ДИНАМИКИ РАСКРЫТИЯ ТРАНСФОРМИРУЕМЫХ КОСМИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ

*Зимин В.Н., Крылов А.В., Файзуллин Ф.Р., Чурилин С.А.*

*Россия*

По мере увеличения размеров и сложности отражателей космических антенных систем серьёзным конструктивным ограничением становится необходимость их размещения под обтекателями ракет-носителей. Возможность удовлетворения этого ограничения заключается в создании трансформируемых космических конструкций, имеющих различные габариты в транспортном и рабочем положениях. Как правило, подобные конструкции представляют из себя трансформируемый силовой каркас с натянутым на него сетеполотном, формирующим отражающую поверхность. Существует много разных концепций построения каркасов таких конструкций, одной из которых является концепция каркаса, состоящего из множества однотипных элементов, связанных между собой шарнирными узлами, образующих плоскую или пространственную конструкцию отражателя в развёрнутом состоянии [1]. Под шарнирным узлом здесь понимается не только шарнирное соединение, допускающее относительное вращение смежных звеньев, но и пружины кручения, накапливающие в процессе укладки изделия в транспортное положение необходимую для последующего его развертывания энергию, которые являются составной частью каждого шарнирного узла. Так же данные соединения содержат упоры, необходимые для образования и поддержания требуемого контура или формы отражающей поверхности.

Процесс развертывания трансформируемых конструкций индивидуален для каждого изделия, тем не менее, можно определить общий подход к построению моделей их развертывания. Для расчетов принимается простая, достаточно хорошо учитывающая особенности конструкций расчётная схема в виде системы абсолютно твердых тел, связанных между собой шарнирными узлами. Массы и моменты инерции твёрдых тел принимаются равными массам и моментам инерции реальных звеньев каркаса. При определённом относительном положении смежных звеньев во время раскрытия на них накладываются связи, ограничивающие их взаимное угловое смещение. Технически связи выполняются в виде различного рода упоров смоделированных упругими и демпфирующими элементами с соответствующими характеристиками [2].

Для расчёта динамики раскрытия таких трансформируемых конструкций целесообразно воспользоваться программным комплексом MSC.ADAMS (Automatic Dynamics Analysis of Mechanical Systems) или программным комплексом автоматизированного динамического анализа

многокомпонентных механических систем EULER. Программный комплекс EULER предназначен для математического моделирования поведения многокомпонентных механических систем в трёхмерном пространстве. В данных комплексах построены модели и проведён численный анализ динамики раскрытия складного плоского антенного контура диаметром 5 м (рис.1) и 20 м в рабочем положении, космического сферического отражателя (рис. 2) и параболического рефлектора ферменного типа (рис.3).

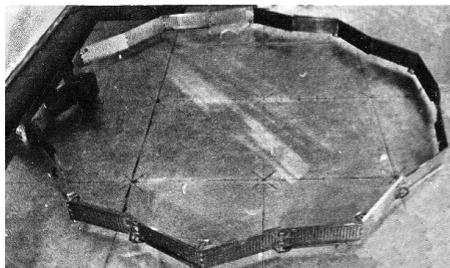


Рис.1. Складной плоский антенный контур, диаметр 5 м



Рис. 2. Космический сферический отражатель



Рис.3 Параболический рефлектор ферменного типа

Складной антенный контур состоит из двух пакетов профилированных прямоугольных панелей (для 5-метрового – размеры панели 615x230x0,8 мм по 13 панелей в пакете, для 20-метрового 520x230x0,8 мм – по 51 панели в пакете), шарнирно связанных с одной стороны через жёсткое основание, а с другой стороны, короткой замыкающей панелью. Конструкция антенного контура также может быть выполнена из трубчатых стержней. В качестве фрагмента сферического отражателя использовалась замкнутая конструкция из двух наборов трубчатых стержней, связанных в определённом порядке шарнирами, ориентированных вдоль меридианов сферической поверхности. Меридиональные наборы связаны между собой вдоль экватора сферической поверхности складывающимся стержнем. Окончания меридиональных наборов стержней (меридиональных рёбер) шарнирно соединены с двумя

полюсными шарнирами, закреплёнными на окончаниях телескопической штанги (рис. 4).

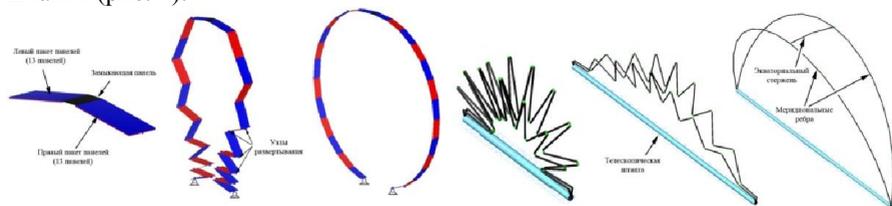


Рис 4. Модели складного плоского антенного контура и фрагмента сферического отражателя

Параболический рефлектор ферменного типа представляет собой пространственную ферменную конструкцию, основу которой составляют: узловые шарнирные соединения, складывающиеся стержни; диагональные стержни (рис. 5). Развёртывание конструкций происходит за счёт первоначально накопленной потенциальной энергии в упругих элементах (пружинах) конструкции при приведении её в транспортное состояние.

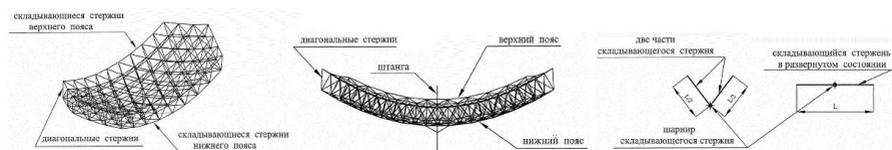


Рис. 5 Модель параболического рефлектора ферменного типа

Результатами проведённых расчётов являются следующие характеристики: время принятия рабочего положения конструкциями; формы промежуточных положений конструкций во время раскрытия (рис. 6 – 9); зависимость углов раскрытия и угловых скоростей звеньев конструкций от времени.

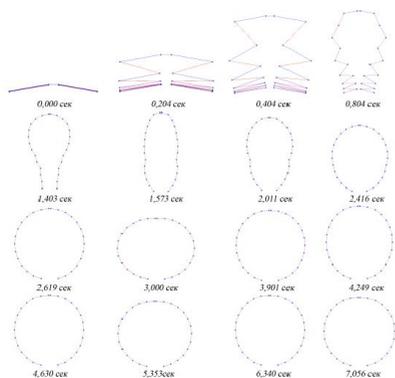


Рис.6. Расчётные формы, принимаемые антенным контуром

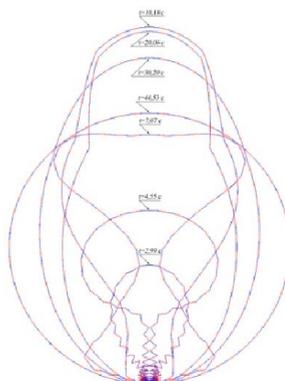


Рис.7. Расчётные формы, принимаемые антенным контуром

диаметром 5 м при раскрытии в различные моменты времени

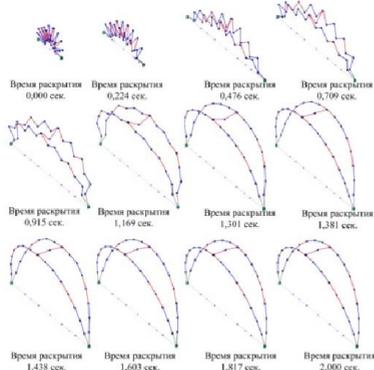


Рис. 8. Расчётные формы, принимаемые фрагментом сферического отражателя при раскрытии в различные моменты времени

диаметром 20 м при раскрытии в различные моменты времени

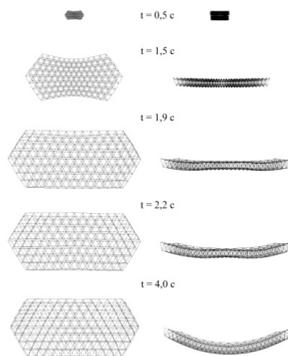


Рис. 9. Расчётные формы, принимаемые параболическим рефлектором при раскрытии в различные моменты времени

В целом, результаты численного моделирования раскрытия рассмотренных конструкций, основанные на принятых допущениях, выявили следующие особенности раскрытия данных систем. При раскрытии складного плоского антенного контура диаметром 20 метров в рабочем положении, уложенного в транспортном положении в виде двух пакетов, происходит соударение элементов пакетов. Анализируя результаты расчёта подобной пятиметровой конструкции, подобного контактного взаимодействия не наблюдалось. Поэтому для учёта такого контактного взаимодействия следует вводить дополнительные связи в используемую математическую модель. При анализе раскрытия космического сферического отражателя наблюдалось одновременное развёртывание меридиональных рёбер. Такая кинематика развёртывания позволяет при расчёте напряжённо-деформированного состояния элементов каркаса рассмотреть только одно меридиональное ребро, которое, будучи закреплённым в полюсных шарнирах, динамически «ведет себя» подобно совокупности меридиональных рёбер, собранных в силовой каркас. Проведённые исследования развёртывания параболического рефлектора ферменного типа показали, что для конструкций ферменного типа, отличных от плоских, начальные значения обобщенных координат для сложенного транспортного состояния необходимо определять исходя из предложения, что центры узловых шарнирных элементов должны располагаться на поверхности (параболической, сферической, цилиндрической и т.д.), соответствующей раскрытому рабочему положению конструкции. Совпадение форм,

полученных численным расчётом, принимаемых конструкцией в различные моменты времени при раскрытии с экспериментально полученными формами свидетельствуют об адекватности расчётной модели.

Параметры, полученные в ходе исследований, могут быть использованы в качестве исходных данных при разработке конструкций элементов, обеспечивающих раскрытие. Также они могут быть использованы для подготовки стендов для проведения экспериментальной отработки раскрытия конструкции в наземных условиях. Следует отметить, что теоретические модели являются единственным способом анализа раскрытия подобных конструкций при возможных нештатных ситуациях.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Зимин В.Н. Моделирование динамики раскрытия космических конструкций ферменного типа // Полет. 2008. №10. С.42–48.
2. Крылов А.В. Моделирование развёртывания многозвенных замкнутых космических конструкций / А.В. Крылов, С.А. Чурилин // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана, Сер. «Машиностроение», Спец. выпуск «Крупногабаритные трансформируемые космические конструкции и материалы для перспективных ракетно-космических систем.– 2012. С. 80–91.

#### **Сведения об авторах:**

##### **Зимин Владимир Николаевич,**

Доктор технических наук, директор Научно-исследовательского института специального машиностроения МГТУ им. Н.Э.Баумана

**Адрес:** 105005, г. Москва, 2-ая Бауманская ул., д. 5, МГТУ им. Н.Э.Баумана

**Тел.:** 8(499)261-21-88, **факс:** 8(499) 261-36-14

**E-mail:** [sm11@sm.bmstu.ru](mailto:sm11@sm.bmstu.ru), [niism@sm.bmstu.ru](mailto:niism@sm.bmstu.ru)

##### **Крылов Алексей Владимирович,**

Ассистент кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители»

МГТУ им. Н.Э.Баумана

**Тел.:** 8(499)263-63-71. **E-mail:** [sm11@sm.bmstu.ru](mailto:sm11@sm.bmstu.ru)

##### **Файзуллин Фарис Рафаэльевич,**

Аспирант кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители»

МГТУ им. Н.Э.Баумана

**Тел.:** 8(499)263-67-10. **E-mail:** [sm11@sm.bmstu.ru](mailto:sm11@sm.bmstu.ru)

##### **Чурилин Сергей Александрович,**

Ведущий инженер Управления научно-инновационной деятельностью

МГТУ им. Н.Э.Баумана

**Тел.:** 8(499)263-67-10. **E-mail:** [sm11@sm.bmstu.ru](mailto:sm11@sm.bmstu.ru) \

# ДИФРАКЦИЯ ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ СДВИГА В ПРОСТРАНСТВЕ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИК-ДИЭЛЕКТРИК ПРИ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ МЕТАЛЛИЧЕСКОМ СЛОЕ В ДИЭЛЕКТРИКЕ

*Казарян А.А.  
Армения*

Задача дифракции поверхностной электроупругой волны сдвига в пьезоэлектрической среде при полубесконечном металлическом слое в диэлектрическом полупространстве сводится к решению задачи типа Римана в теории аналитических функций. Наличие полубесконечного металлического слоя в диэлектрике приводит к распространению дифрагированных объёмных и поверхностных электроупругих волн в пьезоэлектрике.

Рассматривается задача дифракции сдвиговой поверхностной электроупругой волны в составном пространстве, отнесённом к декартовой системе координат  $Oxyz$ , когда пьезоэлектрическая среда-пьезоэлектрик класса  $bmm$  гексагональной симметрии с совпадающей с осью  $Oz$  главной осью кристалла, занимает полупространство  $y > 0$ , а диэлектрическая среда – полупространство  $y < 0$ . Диэлектрическая среда граничит с пьезоэлектрическим полупространством без акустического контакта в плоскости  $Oxz$ . В диэлектрическом полупространстве тонкий заземлённый металлический слой занимает полуплоскость  $y = -h, x < 0$ . Из бесконечности  $x < 0$  распространяется электроупругая поверхностная сдвиговая волна, обусловленная наличием пьезоэффекта в полупространстве  $y > 0$

$$\begin{aligned} \tilde{w}_\infty(x, y, t) = w_\infty(x, y)e^{-i\omega t}, \quad \tilde{\Phi}_\infty(x, y, t) = \Phi_\infty(x, y)e^{-i\omega t} \quad y > 0 \\ \tilde{\Phi}_{1\infty}(x, y, t) = \Phi_{1\infty}(x, y)e^{-i\omega t} \quad -h < y < 0 \end{aligned} \quad (1)$$

со следующими значениями амплитудных составляющих перемещения и электрических потенциалов, соответственно:

$$\begin{aligned} w_\infty(x, y) = w_0(y)e^{i\sigma_2 x} \quad w_0(y) = e^{-\sqrt{\sigma_2^2 - k^2}y} \\ \Phi_0(y) = e^{-\sqrt{\sigma_2^2 - k^2}y} \frac{\varepsilon_0 \operatorname{ch} \sigma_2 h}{\varepsilon_0 \operatorname{ch} \sigma_2 h + \varepsilon_{11} \operatorname{sh} \sigma_2 h} \quad \Phi_\infty(x, y) = \frac{\varepsilon_{15}}{\varepsilon_{11}} \Phi_0(y) e^{i\sigma_2 x} \\ \Phi_{1\infty}(x, y) = \frac{\varepsilon_{15}}{\varepsilon_0} \Phi_{10}(y) e^{i\sigma_2 x} \end{aligned} \quad (2)$$

В этих соотношениях  $\omega$  – частота колебаний,  $t$  – параметр времени,  $k = \omega/c$ ,  $c = \sqrt{c_{44}(1 + \chi)/\rho}$ ,  $\chi = \varepsilon_{15}^2 / \varepsilon_{11} c_{44}$  – волновое число, скорость распространения сдвиговой электроупругой волны и коэффициент электромеханической связи в пьезоэлектрической среде, соответственно,

$e_{15}, \varepsilon_{11}, c_{44}$  – пьезоэлектрическая, диэлектрическая и упругая постоянные пьезоэлектрика, а  $\rho$  – плотность,  $\varepsilon_0$  – диэлектрическая постоянная среды  $y < 0$ . Волновое число падающей поверхностной волны  $\sigma_2$  удовлетворяет следующему характеристическому соотношению:

$$(1 + \chi) \sqrt{\sigma_2^2 - k^2} (\varepsilon_{11} \operatorname{sh} \sigma_2 h + \varepsilon_0) - \varepsilon_0 \chi \sigma_2 \operatorname{ch} \sigma_2 h = 0.$$

Рассматриваемая среда находится в условиях антиплоской деформации. Задача заключается в определении электроупругого волнового поля для пьезоэлектрического полупространства ( $y > 0$ ) и электрического потенциала в диэлектрической среде ( $y < 0$ ). Отметим, что учитывается гармоническая зависимость от времени всех составляющих волнового поля (временной множитель  $e^{-i\omega t}$ ) и задача решается в амплитудах. Для определения амплитуды перемещения точек в полупространстве  $y > 0$  и амплитуд электрических потенциалов (в квазистатическом приближении) в двух полупространствах имеем следующие уравнения [1]:

$$\Delta w + k^2 w = 0, \quad \varepsilon_{11} \Delta \Phi + k^2 e_{15} w = 0 \quad y > 0 \quad (3)$$

$$\Delta \Phi_1 = 0 \quad -h < y < 0, \quad \Delta \Phi_2 = 0 \quad y < 0$$

Решения уравнений должны удовлетворять следующим условиям:

$$\sigma_{yz}(x, +0) = 0, \quad \Phi(x, 0) = \Phi_1(x, 0), \quad D_2(x, 0) = D_{12}(x, 0) \quad (4)$$

$$\Phi_1(x, -h + 0) = \Phi_2(x, -h - 0) = \Phi^+(x), \quad (5)$$

$$D_{12}(x, -h + 0) - D_{12}(x, -h - 0) = -\varepsilon_0 \Psi^-(x).$$

Здесь  $\sigma_{yz}(x, y)$  – амплитуда напряжения в пьезоэлектрике,  $D_2(x, y)$ ,

$D_{12}(x, y)$  – составляющие вектора электрической индукции в пьезоэлектрике и диэлектрике, соответственно:

$$\sigma_{yz} = c_{44} \frac{\partial w}{\partial y} + e_{15} \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad D_2 = e_{15} \frac{\partial w}{\partial y} - \varepsilon_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad y > 0 \quad (6)$$

$$D_{12} = -\varepsilon_0 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \quad -h < y < 0, \quad D_{12} = -\varepsilon_0 \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \quad y < -h$$

В соотношениях (5) введены функции:

$$\Phi^+(x) = \Phi_1(x_1, -h) \mathcal{G}(x), \quad \varepsilon_0 \Psi^-(x) = d(x) \mathcal{G}(-x),$$

где  $d(x)$  представляет разницу значений  $D_{12}(x, y)$  на  $y = -h + 0$  и  $y = -h - 0$  при  $x < 0$ ,  $\mathcal{G}(x)$  – функция Хэвисайда.

Введём функции:

$$\begin{aligned} u(x, y) = w(x, y) - w_\infty(x, y), \varphi(x, y) = \Phi(x, y) - \Phi_\infty(x, y) \quad y > 0 \\ \varphi_1(x, y) = \Phi_1(x, y) - \Phi_{1\infty}(x, y) \quad -h < y < 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Для решения поставленной задачи применяем действительное преобразование Фурье по координате  $x$ . Относительно трансформантов Фурье получим уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} - (\sigma^2 - k^2) \bar{u} = 0, \quad \frac{d^2 \bar{\varphi}}{dy^2} - \sigma^2 \bar{\varphi} + k^2 \frac{\varepsilon_{15}}{\varepsilon_{11}} \bar{u} = 0 \quad y > 0 \\ \frac{d^2 \bar{\Phi}_2}{dy^2} - \sigma^2 \bar{\Phi}_2 = 0 \quad -h < y < 0, \quad \frac{d^2 \bar{\Phi}_2}{dy^2} - \sigma^2 \bar{\Phi}_2 = 0 \quad y < -h \end{aligned} \quad (8)$$

Ограниченные и представляющие уходящую волну решения уравнений имеют вид:

$$\begin{aligned} \bar{u}(\sigma, y) = A(\sigma) e^{-\sqrt{\sigma^2 - k^2} y}, \quad \bar{\varphi}(\sigma, y) = B(\sigma) e^{-|\sigma| y} + \frac{\varepsilon_{15}}{\varepsilon_{11}} \bar{u}(\sigma, y) \quad y > 0 \\ \bar{\varphi}_1(\sigma, y) = C(\sigma) e^{|\sigma| y} + D(\sigma) e^{-|\sigma| y} \quad -h < y < 0 \\ \bar{\Phi}_2(\sigma, y) = E(\sigma) e^{|\sigma| y} \quad y < -h \end{aligned} \quad (9)$$

здесь  $\gamma(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - k^2} \rightarrow |\sigma|$  при  $|\sigma| \rightarrow \infty$ ,  $\sqrt{\sigma^2 - k^2} = -i\sqrt{k^2 - \sigma^2}$ , т.е. действительная ось комплексной плоскости  $\alpha = \sigma + i\tau$  обходит точку  $\sigma = -k$  сверху, а точку  $\sigma = k$  снизу [3].

Из условий на границе разделов двух сред  $y = 0$  и на плоскости  $y = -h$  получим:

$$\begin{aligned} A(\sigma) = -B(\sigma) \frac{\varepsilon_{15} |\sigma|}{c_{44} (1 + \chi) \sqrt{\sigma^2 - k^2}}, \quad C(\sigma) = E(\sigma) - D(\sigma) e^{2|\sigma| h} \\ B(\sigma) = \frac{1 + \chi}{K_0(\sigma)} (E(\sigma) + \frac{\bar{\Psi}^-(\sigma)}{|\sigma|} \text{sh} |\sigma| h - 2\pi \frac{\lambda_0}{|\sigma|} \text{sh} |\sigma| h \delta(\sigma + \sigma_2)) \\ D(\sigma) = \pi \frac{\lambda_0}{|\sigma|} \delta(\sigma + \sigma_2) e^{-|\sigma| h} - \frac{\bar{\Psi}^-(\sigma)}{2|\sigma|} e^{-|\sigma| h}, \quad E(\sigma) = \bar{\Phi}^+(\sigma) e^{|\sigma| h} \end{aligned}$$

$$\sqrt{\sigma^2 - k^2} K_0(\sigma) = (1 + \chi) \sqrt{\sigma^2 - k^2} - \chi |\sigma|, \quad K_0(\pm\sigma_0) = 0 \quad (10)$$

Относительно функций  $\bar{\Phi}^+(\sigma)$  и  $\bar{\Psi}^-(\sigma)$  получим следующее функциональное уравнение, которое можно рассматривать как краевую задачу типа Римана на действительной оси [2-4]:

$$\bar{\Phi}^+(\sigma) + \frac{K(\sigma)}{2|\sigma|} (\bar{\Psi}^-(\sigma) - 2\pi\lambda_0 \delta(\sigma + \sigma_2)) = 0 \quad (11)$$

$$K(\sigma) = \frac{K_2(\sigma)}{K_1(\sigma)}, \quad \lambda_0 = \frac{\varepsilon_{15}\sigma_2}{\varepsilon_0 \operatorname{ch}\sigma_2 h + \varepsilon_{11} \operatorname{sh}\sigma_2 h}$$

$$(\varepsilon_0 + \varepsilon_{11}(1 + \chi))K_1(\sigma) = \varepsilon_0 K_0(\sigma) + \varepsilon_{11}(1 + \chi), \quad K_2(\pm\sigma_2) = 0, \quad K_1(\pm\sigma_1) = 0$$

$$(\varepsilon_0 + \varepsilon_{11}(1 + \chi))K_2(\sigma) = 2e^{-|\sigma|h} \operatorname{ch}|\sigma|h (\varepsilon_0 K_0(\sigma) + \varepsilon_{11}(1 + \chi) \operatorname{th}|\sigma|h)$$

Функция  $K(\sigma)$  имеет нули только в точках  $\pm\sigma_2$ , т.к.  $\sigma_2$  – единственный положительный корень уравнения  $K_2(\sigma) = 0$  и действительные полюса – только в точках  $\pm\sigma_1$ ,  $\sigma_1$  – единственный положительный корень уравнения  $K_1(\sigma) = 0$ .

Показано, что  $K_2'(\sigma) > 0$ ,  $K_1'(\sigma) > 0$ ,  $K_0'(\sigma) > 0$  при  $\sigma > k$ ,  $k < \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_0$ . Следовательно, принимается, что в данной задаче типа Римана действительная ось обходит не только точки ветвления  $\pm k$  функции  $\sqrt{\alpha^2 - k^2}$ , но и точки  $\sigma = -\sigma_1$ ,  $\sigma = -\sigma_2$  сверху, а точки  $\sigma = \sigma_1$ ,  $\sigma = \sigma_2$  снизу, обеспечивая условия уходящей волны [2,3].

Функциональное уравнение (11) решается, используя такую же методику, как в [2-4], решения строятся, факторизируя функцию  $K(\sigma)$ , т.к.  $K(\sigma) \rightarrow 1$  при  $|\sigma| \rightarrow \infty$ , представляя  $K(\sigma) = K^+(\sigma)K^-(\sigma)$ , где функции  $K^\pm(\alpha)$  регулярны и не имеют нулей при  $\operatorname{Im} \alpha > 0$  и  $\operatorname{Im} \alpha < 0$ , соответственно. Отметим, что  $K_{1,2}(\sigma) \rightarrow 1$  при  $|\sigma| \rightarrow \infty$ .

Решения уравнения (11):

$$\bar{\Phi}^+(\sigma) = i\lambda_0 \frac{K^+(\sigma_2)K^+(\sigma)}{2(\sigma + i0)^{1/2}\sqrt{\sigma_2}(\sigma_1 + \sigma_2 + i0)}$$

$$\bar{\Psi}^-(\sigma) = -i\lambda_0 \frac{K^+(\sigma_2)(\sigma - i0)^{1/2}}{\sqrt{\sigma_2}K^-(\sigma)(\sigma + \sigma_2 - i0)}$$
(12)

Таким образом, имея в виду (7), (9), (10), (12), получили волновое поле в рассматриваемой составной среде. В пьезоэлектрическом полупространстве кроме дифрагированных объёмных электроупругих волн распространяются также поверхностные (локализованные) волны, обусловленные пьезоэфф-фектом и дифракцией падающей электроупругой волны сдвига.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Балакирев М.К., Гишинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука, 1982. 240с.
2. Григорян Э.Х., Джилаван С.А., Казарян А.А. Дифракция сдвиговой плоской волны на полубесконечной трещине в пространстве пьезоэлектрик–диэлектрик. //Тр. Международной конференции, Горис. «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред». Ереван: 2011. С.137-143.
3. Григорян Э.Х., Джилаван С.А. Дифракция плоской сдвиговой волны на полубесконечной трещине в пьезоэлектрическом пространстве. // Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т.58. № 1. С.38-50.
4. Григорян Э.Х. Передача нагрузки от кусочно-однородной бесконечной накладке к упругой полуплоскости. //Ученые записки ЕГУ. Естественные науки. 1979. № 3. С.29-34.

#### Сведение об авторе:

**Казарян Айказ Арменович** – аспирант, Институт механики НАН Армении,  
**Tel.:** (+374 96) 00 96 06. **E-mail:** [HaykazGhazaryan@gmail.com](mailto:HaykazGhazaryan@gmail.com)

# К ЗАДАЧЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ МАГНИТОУПРУГИХ ВОЛН В СИСТЕМЕ СЛОЙ-ПОЛУПРОСТРАНСТВО ИЗ ИДЕАЛЬНО- ПРОВОДЯЩИХ МАТЕРИАЛОВ

*Калиджян Л.Р.*

*Armenia*

Рассматривается распространение упругих волн типа Рэлея в бесконечном электропроводящем упругом слой-полупространстве, когда на поверхностях слоя имеют место условия скользящего контакта. Исследуется предельный переход, когда модуль сдвига слоя стремится к нулю. Получаются условия появления поверхностных волн в зависимости от отношения толщин слоя и длины волны.

1. В прямоугольной декартовой координатной системе  $(x, y, z)$  полупространство занимает область  $(-\infty < x < \infty, 0 < y < \infty, -\infty < z < \infty)$ , а слой –  $(-\infty < x < \infty, -b \leq y < 0, -\infty < z < \infty)$ . На внешней границе слоя, на стыке слоя и полупространства принимаются условия скользящего контакта. Материалы полупространства и слоя – упругие и идеально проводящие, а модуль сдвига слоя стремится к нулю.

Вектор напряжённости магнитного поля задаётся в виде

$$\overline{H}_0^{(i)} = H_{01}^{(i)} \hat{i} \quad i = 1, 2$$

Уравнение магнитоупругих волн для идеального проводника имеет вид [1]:

$$c_i^2 \Delta u + (c_i^2 - c_i^2) \text{grad div } \bar{u} + \frac{\mu}{4\pi\rho} [\text{rot rot}(\bar{u} \times \overline{H}_0)] \times \overline{H}_0 = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Проектируя и имея в виду, что  $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ ,  $G_1 = 0$ , получим  $c_{11}^2 = 0$ ,

$c_{11}^2 = \frac{\lambda_1}{\rho_1}$ , а уравнения распространения волн для задач плоской деформации

в системе слой-полупространство:

уравнения в слое будут:

$$c_{11}^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \quad V_1^2 = \frac{H_{01}^{(1)2} \mu_1}{4\pi\rho_1} \quad (1.1)$$

$$V_1^2 \Delta v_1 + c_{11}^2 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}$$

и в полупространстве –

$$c_{i2}^2 \Delta u_2 + (c_{i2}^2 - c_{i2}^2) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \quad V_2^2 = \frac{H_{01}^{(2)2} \mu_2}{4\pi \rho_2} \quad (1.2)$$

$$(c_{i2}^2 + V_2^2) \Delta v_2 + (c_{i2}^2 - c_{i2}^2) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2}$$

$\rho_1$  и  $\rho_2$  – плотности материалов в слое и полупространстве.

На внешней границе слоя принимаются условия скользящего контакта:

$$v_1 = 0 \quad \text{при} \quad y = -b \quad (1.3)$$

Компоненты возмущённого электромагнитного поля в слое заданы в [3].

Условия скользящего контакта на стыке при  $y = 0$  имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1 = v_2 \\ \left( \lambda_1 + \frac{\mu_1}{4\pi} H_{01}^{(1)2} \right) \frac{\partial v_1}{\partial y} + \lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = \left( 2G_2 + \lambda_2 + \frac{\mu_2}{4\pi} H_{01}^{(2)2} \right) \frac{\partial v_2}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \\ \left( G_2 + \frac{\mu_2}{4\pi} H_{01}^{(2)2} \right) \frac{\partial v_2}{\partial x} + G_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \quad (1.4)$$

Необходимо найти решения уравнений (1.1) и (1.2), удовлетворяющие условиям (1.3) и (1.4) и условиям затухания [1]

$$\lim_{y \rightarrow \infty} u_2 = 0 \quad \lim_{y \rightarrow \infty} v_2 = 0 \quad (1.5)$$

2. Решение задачи. Искомые решения задачи представим в виде :

$$u_i = u_{0i}(y) \exp i(\omega t - kx) \quad v_i = v_{0i}(y) \exp i(\omega t - kx) \quad i = 1, 2 \quad (2.1)$$

Вставляя эти решения в (1.1) и (1.2), получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} k^2 (\theta_3 \eta - 1) u_{01} - ik v_{01}' = 0 \\ (1 + \theta_3 \alpha_1) v_{01}'' + k^2 \alpha_1 \theta_3 v_{01} - ik u_{01}' = 0 \end{array} \right. \quad (2.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{02}'' + k^2 \theta^{-1} (\theta \eta - 1) u_{02} - ik \theta^{-1} (1 - \theta) v_{02}' = 0 \\ v_{02}'' + k^2 \frac{\theta}{1 + \theta \alpha_2} (\eta - 1 - \alpha_2) v_{02} - ik \frac{1 - \theta}{1 + \theta \alpha_2} u_{02}' = 0 \end{array} \right. \quad (2.2)^*$$

где

$$\eta = \frac{\omega^2}{k^2 c_{t2}^2} \quad \frac{V_{li}^2}{c_{ii}^2} = \alpha_i \quad \frac{c_{ii}^2}{c_{ii}^2} = \theta \quad i=1,2 \quad \theta_3 = \frac{c_{t2}^2}{c_{11}^2} \quad (2.3)$$

Ищем решения систем (2.2) и (2.2)\* в виде:

$$u_{0i} = A e^{kp_i y} \quad v_{0i} = B e^{kp_i y} \quad i=1,2 \quad (2.4)$$

Подстановка (2.4) в (2.2) и (2.2)\* даёт:

$$\begin{cases} (\theta_3 \eta - 1) A - ip_1 B = 0 \\ \left[ p_1^2 (1 + \theta_3 \alpha_1) - \theta_3 \alpha \right] B - ip_1 A = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\begin{cases} \left[ p_2^2 + \theta^{-1} (\theta \eta - 1) \right] C - i \theta^{-1} (1 - \theta) p_2 D = 0 \\ \left[ p_2^2 + \frac{\theta}{1 + \theta \alpha_2} (\eta - 1 - \alpha_2) \right] D - i \frac{1 - \theta}{1 + \theta \alpha_2} p_2 C = 0 \end{cases} \quad (2.5)^*$$

Равенство нулю детерминанта системы (2.5)\* даёт характеристическое уравнение системы (2.5)\* [5]. Корнями этого уравнения будут:

$$\pm p_{21}, \pm p_{22} \quad (2.6)$$

Следовательно, общее решение системы (2.2)\* будет:

$$\begin{aligned} u_{02} &= C_1 e^{kp_{21} y} + C_2 e^{-kp_{21} y} + C_3 e^{kp_{22} y} + C_4 e^{-kp_{22} y} \\ v_{02} &= D_1 e^{kp_{21} y} + D_2 e^{-kp_{21} y} + D_3 e^{kp_{22} y} + D_4 e^{-kp_{22} y} \end{aligned} \quad (2.7)$$

где постоянные  $C_i$  и  $D_i$  ( $i = \overline{1,4}$ ) связаны между собой согласно (2.5)\*[5]

$$D_2 = -\frac{p_{21}^2 + \theta^{-1} (\theta \eta - 1)}{i \theta^{-1} (1 - \theta) p_1} C_2; \quad D_4 = -\frac{p_{22}^2 + \theta^{-1} (\theta \eta - 1)}{i \theta^{-1} (1 - \theta) p_2} C_4 \quad (2.8)$$

Уравнения (2.2)\* имеют решения, удовлетворяющие условиям затухания (1.5) при

$$0 < \eta < 1 + \alpha_1$$

Очевидно, что эти решения будут:

$$u_{02} = C_2 e^{-kp_{21} y} + C_4 e^{-kp_{22} y} \quad v_{02} = D_2 e^{-kp_{21} y} + D_4 e^{-kp_{22} y} \quad (2.9)$$

Аналогичным образом найдём решения системы (2.4):

$$\left[ (1 + \theta_3 \alpha_1) (\theta_3 \eta - 1) + 1 \right] p_1^2 + \theta_3 \alpha_1 (\theta_3 \eta - 1) = 0$$

$$p_1 = \pm \sqrt{\frac{\alpha_1 (\theta_3 \eta - 1)}{(1 + \alpha_1 \theta_3) \eta - \alpha_1}} \quad (2.10)$$

Общее решение системы (2.2) будет:

$$\begin{aligned} u_{01} &= A_1 e^{kp_1 y} + A_2 e^{-kp_1 y} \\ v_{01} &= B_2 e^{kp_1 y} + B_1 e^{-kp_1 y} \end{aligned} \quad (2.11)$$

где постоянные  $A_i$  и  $B_i$  ( $i = \overline{1, 2}$ ) связаны между собой согласно (2.5)

$$B_1 = \frac{\theta_3 \eta - 1}{ip_1} A_1; \quad B_2 = -\frac{ip_1}{p_1^2 (1 + \theta_3 \alpha_1) - \theta_3 \alpha_1} \quad (2.12)$$

**3. Граничные условия.** Решения (2.11) должны удовлетворять граничным условиям (1.3) на внешней границе слоя, когда  $y = -b$ , тогда решения (2.11) заменятся, на

$$u_{01} = A_1 (e^{kp_1 y} + q_2 e^{-kp_1 y}) \quad v_{01} = q_1 A_1 (e^{-kp_1 y} - e^{kp_1 (y+2b)}) \quad (3.1)$$

Получены решения уравнения (1.1) и (1.2) в виде (2.9) и (3.1), которые удовлетворяют условиям затухания (1.7) и условиям на границе слоя  $y = -b$ . Подставляя эти решения в граничные условия (1.5) на стыке  $y = 0$  и имея в виду (2.8) и (2.12), получим три однородных уравнения относительно трёх произвольных постоянных  $A_1, C_2, C_4$ .

$$\begin{cases} q_1 A_1 (1 - e^{2kp_1 b}) = q_3 C_2 + q_4 C_4 \\ (ap_1 q_1 (1 + e^{2kp_1 b}) + i\lambda_1 (1 + q_2)) A_1 = (a_1 p_{21} q_3 + i\lambda_2) C_2 + (a_1 p_{22} q_4 + i\lambda_2) C_4 \\ ((1 + \alpha_2) i q_3 + p_{21}) C_2 + ((1 + \alpha_2) i q_4 + p_{22}) C_4 = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

где

$$q_1 = \frac{\theta_3 \eta - 1}{ip_1}, \quad q_2 = -\frac{p_1^2 (1 + \theta_3 \alpha_1) - \theta_3 \alpha_1}{p_{12} \theta_1^{-1} (1 - \theta_1)} (\theta_3 \eta - 1), \quad a = \frac{H_{01}^{(1)^2} \mu_1}{4\pi} + \lambda_1$$

$$q_3 = -\frac{p_{21}^2 + \theta^{-1} (\theta \eta - 1)}{ip_{21} \theta^{-1} (1 - \theta)}, \quad q_4 = -\frac{p_{22}^2 + \theta^{-1} (\theta \eta - 1)}{ip_{22} \theta^{-1} (1 - \theta)}$$

$$a_1 = 2G_2 + \frac{H_{01}^{(2)^2} \mu_2}{4\pi} + \lambda_2$$

Равенство нулю детерминанта системы (3.2) определяет уравнение относительно безразмерного параметра  $\eta$ , характеризующего искомую фазовую скорость магнитоупругой волны.

Указанное дисперсионное уравнение получим в виде :

$$(ap_1q_1(1 + e^{2kp_1b}) + i\lambda_1(1 + q_2))(p_{21}q_4 - p_{22}q_3) - a_1q_1(1 - e^{2kp_1b})$$

$$((q_3q_4(1 + \alpha_2)i - i\lambda_2)(p_{22} - p_{21}) - (q_4 - q_3)(p_{22}p_{21} + \lambda_2(1 + \alpha_2))) = 0$$

Решения этого дисперсионного уравнения даёт ответ о существовании поверхностной волны типа Рэлея в слой-полупространстве в присутствии продольного магнитного поля, когда модуль сдвига слоя стремится к нулю.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Белубекян М.В., Давтян А.А. Упругие волны в слой-полупространстве при условии скользящего контакта на плоскостях, ограничивающих слой. // В сб. научных трудов Международной конференции: «Актуальные проблемы механики сплошной среды» Ереван: 2012. С.116-120.
2. Белубекян М.В. Введение в теорию магнитоупругости. Ереван: 1997. 104с.
3. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах: Киев: «Наукова думка», 1981.
4. Калиджян Л.Р. Магнитоупругие волны в идеально проводящем слое в присутствии продольного магнитного поля.//В сб. научных трудов Международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды»: Ереван: 2012. С.267-271.
5. Калиджян Л.Р. Упругие волны в системе слой-полупространство в присутствии продольного магнитного поля. //В сб. научных трудов Международной школы-конференции молодых учёных. Цахкадзор, Армения. Ереван: ЕГУАС, 2013. С.173-180.

### Сведения об авторе:

**Калиджян Лилит Размиковна**, стажёр Института механики НАН РА

Тел.: (37493) 74-04-41, (37491) 16-32-22

Е-mail: [lilit\\_k@mail.ru](mailto:lilit_k@mail.ru)

# О РЕШЕНИИ ЗАДАЧ КРУЧЕНИЯ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ С ПОПЕРЕЧНЫМИ СЕЧЕНИЯМИ В ВИДЕ ТРЕУГОЛЬНИКА МЕТОДОМ ГИУ

*Канецян Э.Г., Мкртчян М.М., Мкртчян М.С.*

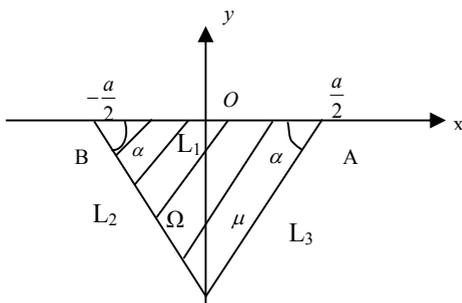
*Армения*

Исследуется задача о кручении упругих призматических стержней с поперечными сечениями в виде произвольного равнобедренного треугольника с помощью метода граничных интегральных уравнений (ГИУ), связанного с краевыми задачами для гармонических функций.

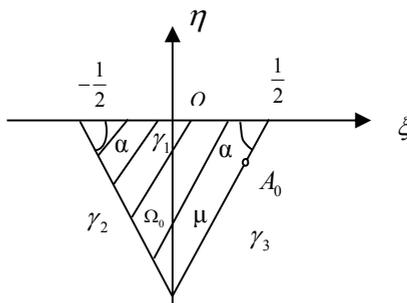
Для решения поставленных задач сначала выводятся соответствующие определяющие интегральные уравнения, используя при этом известное представление гармонической функции [1] внутри области через её граничные значения и граничные значения нормальной производной на контуре области. Из этого представления на основании известной связи между интегралом типа Коши и логарифмическими потенциалами простого и двойного слоёв с одной стороны, и на основании известных результатов Н.И. Мухелишвили [2] о поведении интеграла типа Коши вблизи угловых точек на контуре с другой стороны, предельным переходом выводится определяющее граничное интегральное уравнение краевых задач для уравнения Лапласа в случае обсуждаемых задач.

Далее определяющие ГИУ, в соответствии с граничными задачами для рассматриваемой области, дискретизируются. В результате, получаются соответствующие системы линейных уравнений. При этом, угловые точки – вершины данных областей, включаются в число узлов. Рассматриваются частные случаи равнобедренного треугольника.

1. Многие результаты по исследованию обширных классов задач о кручении однородных и кусочно-однородных стержней изложены в монографиях [3–5]. Здесь рассмотрим задачу о кручении упругого призматического стержня с поперечными сечениями в виде произвольного равнобедренного треугольника (фиг.1)



Фиг.1



Фиг.2

Пусть отнесённое к правой прямоугольной системе координат  $Oxyz$  призматический стержень обладает модулем сдвига  $\mu$  и имеет поперечное сечение в виде равнобедренного треугольника  $\Omega$  с основанием  $AB$  и углами при основании  $\alpha$  (фиг.1). Центр окружности  $O$  совпадает с началом координат, а ось стержня совпадает с осью  $Oz$ .

Следуя [5], запишем граничную задачу кручения с поперечным сечением в виде кругового сегмента:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Phi_0(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_0(x, y)}{\partial y^2} = -2; & (x, y) \in \Omega; \\ \Phi_0(x, y)|_L = 0; & L = L_1 \cup L_2 \cup L_3, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\Phi_0(x, y)$  – известная функция напряжения или функция Прандтля.

Далее в граничной задаче (1) введём безразмерные координаты и величины:

$$\xi = x/a, \eta = y/a; v(\xi, \eta) = \Phi_0(a\xi, a\eta)/a^2; \quad (2)$$

после чего она примет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} = -2; & (\xi, \eta) \in \Omega_0; \\ v(\xi, \eta)|_\Gamma = 0; & \Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3, \end{cases} \quad (3)$$

Здесь  $\Gamma, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  и  $\Omega_0$  – образы контуров  $L, L_1, L_2, L_3$  и  $\Omega$ , соответственно, при преобразовании (2) (фиг.2).

Теперь решение задачи (3) представим в виде:

$$v(\xi, \eta) = \psi_0(\xi, \eta) - (\xi^2 + \eta^2)/2,$$

где  $\psi_0(\xi, \eta)$  – неизвестная гармоническая функция. В результате, обсуждаемая задача формулируется как задача Дирихле для гармонической функции  $\psi_0(\xi, \eta)$  в равнобедренном треугольнике  $\Omega_0$  с основанием единичной длины:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \psi_0(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi_0(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} = 0; & (\xi, \eta) \in \Omega_0; \\ \psi_0(\xi, \eta)|_{\gamma_1} = \xi^2/2; \\ \psi_0(\xi, \eta)|_{\gamma_2} = (\xi^2 + \eta^2)/2; & \psi_0(\xi, \eta)|_{\gamma_3} = (\xi^2 + \eta^2)/2. \end{cases} \quad (4)$$

После нахождения решения системы (4), основные характеристики задачи: безразмерные касательные напряжения  $\bar{\sigma}_{xz}$  и  $\bar{\sigma}_{yz}$ , безразмерная жёсткость при кручении  $D_0$ , будут определяться формулами [3]

$$\bar{\sigma}_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{\mu a \tau} = \frac{\partial \psi_0}{\partial \eta} - \eta; \quad \bar{\sigma}_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{\mu a \tau} = \xi - \frac{\partial \psi_0}{\partial \xi};$$

$$D_0 = \frac{D}{\mu a^4} = \iint_{\Omega_0} (\xi^2 + \eta^2) d\Omega_0 + \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} (\xi^2 + \eta^2) \frac{\partial \psi_0}{\partial n} ds;$$
(5)

где  $\tau$  – постоянная степень закручивания стержня,  $\sigma_{xz}$  и  $\sigma_{yz}$  – касательные напряжения,  $D$  – жёсткость кручения, а  $n$  – внутренняя к  $\Omega_0$  нормаль на контуре  $\Gamma$ .

Далее, используя результаты работы [6] к граничной задаче (4), получим следующее определяющее ГИУ для данной задачи:

$$\int_0^l \ln \sqrt{[\xi(s) - \xi(\sigma)]^2 + [\eta(s) - \eta(\sigma)]^2} \frac{\partial \psi_0}{\partial n} ds$$

$$= \gamma(\sigma) \psi_0(\sigma) - \int_0^l \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \operatorname{arctg} \left[ \frac{\eta(s) - \eta(\sigma)}{\xi(s) - \xi(\sigma)} \right] \right\} \psi_0(s) ds \quad (\sigma \in [0, l])$$
(6)

где  $l$  – длина контура, а

$$\gamma(\sigma) = \begin{cases} \pi, & \text{если } \sigma \text{ точка на гладкой части контура } \Gamma; \\ \beta, & \text{если } \sigma \text{ угловая точка контура } \Gamma \text{ и } \beta \text{ – величина} \\ & \text{угла в этой точке слева от } \Gamma \quad 0 \leq \beta \leq 2\pi. \end{cases}$$

Таким образом, решение исходной задачи кручения сводится к решению задачи Дирихле, а последняя, в свою очередь, сводится к решению ГИУ (6). После нахождения решения на границе  $\Gamma$  области  $\Omega_0$ , значение функции во внутренней точке  $M_0$  области  $\Omega_0$  находим по следующей формуле:

$$\psi_0(M_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_L \ln \left( \frac{1}{r} \right) \frac{\partial \psi_0}{\partial n} ds + \frac{1}{2\pi} \int_L \psi_0 \frac{\partial}{\partial n} \ln \left( \frac{1}{r} \right) ds;$$

$$r = \sqrt{[\xi(s) - \xi_0]^2 + [\eta(s) - \eta_0]^2}; \quad (M_0(\xi_0, \eta_0) \in \Omega_0)$$

2. Приступим к решению задачи Дирихле для области  $\Omega_0$  с границей  $\Gamma$  (фиг.2). Решение этой задачи построим по известной методике Н.М Крылова и Н.И.Боголюбова [6]. Согласно (6), в данном случае придём к ГИУ

$$\int_0^l \ln \sqrt{[\xi(s) - \xi(\sigma)]^2 + [\eta(s) - \eta(\sigma)]^2} \chi(s) ds =$$

$$= \gamma(\sigma) \psi_0(\sigma) - \int_0^l \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \arctg \left[ \frac{\eta(s) - \eta(\sigma)}{\xi(s) - \xi(\sigma)} \right] \right\} \psi_0(s) ds \quad (\sigma \in [0, l]) \quad (7)$$

Здесь  $l = 1 + 2k$  ( $k = 1/(2 \cos \alpha)$ ), а  $\chi(s) = \frac{\partial \psi_0}{\partial n}$  – неизвестная функция,  $s$  – дуговая координата, причём, значению  $s = 0$  соответствует начальная точка отсчёта

$$A_0 \left( \frac{1}{2} - \frac{\cos \alpha}{2(M_1 - 1)}, -\frac{\sin \alpha}{2(M_1 - 1)} \right) \quad (M_1 > 2 - \text{произвольное натуральное}$$

число), а направление контура выбирается в сторону возрастания параметра  $s$ . Тогда внутренние точки области будут находиться на левой стороне контура при её обходе.

Теперь промежутки интегрирования в уравнении (7) разделим на три части  $[l_{i-1}, l_i]$  ( $i = \overline{1, 3}$ ), полагая

$$l_0 = 0; \quad l_1 = \frac{M_1}{M_1 - 1}; \quad l_2 = l_1 + \frac{(2k - \Delta \eta^{(1)}) M_2}{2M_2 - 1}; \quad l = l_3 = 1 + 2k;$$

$$\Delta \eta^{(r)} = \frac{l_r - l_{r-1}}{M_r} \quad (r = \overline{1, 3}); \quad \eta_j^{(r)} = l_{r-1} + \frac{2j-1}{2} \Delta \eta^{(r)} \quad (j = \overline{1, M_r}; \quad r = \overline{1, 3})$$

где  $M_1, M_2, M_3$  – наперёд заданные натуральные числа. Отметим, что при таком разделении промежутков интегрирования делится на три части, притом, первая из них содержит две угловые точки контура области, соответствующие значениям  $\eta_1^{(1)}$  и  $\eta_{M_1}^{(1)}$ , а вторая из них содержит третью угловую точку, соответствующую значению  $\eta_{M_2}^{(2)}$ .

Далее решение исходной задачи получается путем сведения ГИУ (7) к системе линейных алгебраических уравнений (ЛАУ) [7].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724с.
2. Мхитарян С.М., Мкртчян М.С. О решении основных краевых задач теории гармонических функций для прямоугольной области методом граничных интегральных уравнений. // Избранные труды Международной научной конференции «Образование, наука и экономика в ВУЗах. Интеграция в международное образовательное пространство» – 26-30 сентября, 2011. Ереван: 2012, с.145-154.
3. Арутюнян Н.Х., Абрамян Б.Л. Кручение упругих тел. М.: Физматгиз, 1963. 686с.
4. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707с.
5. Новожилов В.В. Теория упругости. Ленинград: Судпромгиз, 1958. 370с.
6. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближённые методы высшего анализа. М.: Гостехиздат, 1952. 695с.
7. Мкртчян М.М. О решении задач кручения призматических стержней с поперечными сечениями в виде сегмента и треугольника методом ГИУ. //В сб. трудов международной школы–конференции молодых ученых. 1-4 октября 2013. Цахкадзор, Армения. С.185-189.

### Сведения об авторах:

**Канецян Эгине Гургеновна**, канд. физ.-мат.наук, ст. научный сотрудник, Национальный университет архитектуры и строительства Армении.

**Адрес:** Армения, 0019, Ереван, ул. Теряна, 105,

**Тел.:** 093461588; **E-mail:** [info@ysuac.am](mailto:info@ysuac.am)

**Мкртчян Мгер Мушегович**, мл. науч. сотр., Институт механики НАН РА,

**Адрес:** Армения, 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2

**Тел.:** (37410)-43-16-52; **E-mail:** [mher\\_1982@mail.ru](mailto:mher_1982@mail.ru)

**Мкртчян Мушег Серезаевич**, канд. физ.-мат.наук, ст. научный сотрудник, Институт механики НАН Армении

**Адрес:** Армения, 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2.

**Тел.:** (098)80 19 56. **E-mail:** [muscheg-mkrtchyan@rambler.ru](mailto:muscheg-mkrtchyan@rambler.ru)

# ВЛИЯНИЕ СОДЕРЖАЩЕЙСЯ В ПОРАХ И КАПИЛЛЯРАХ ХИМИЧЕСКИ НЕСВЯЗАННОЙ ВЛАГИ НА ОТНОШЕНИЕ ПРОЧНОСТЕЙ ЛИТОИДПЕМЗОБЕТОНА ПРИ СЖАТИИ И РАСТЯЖЕНИИ

*Караетян К.А.  
Армения*

Приводятся и обсуждаются результаты экспериментального исследования влияния меры, содержащейся в порах и капиллярах свободной влаги, на величину отношения прочностей литоидпемзобетона при сжатии и растяжении.

Показано, что изменение указанного отношения в зависимости от степени влажности бетона, а также от ориентации по отношению к слоям его укладки может оказаться существенным.

Согласно строительным документациям [1], действующим в странах СНГ, в том числе и в Армении, величины нормативных сопротивлений бетона как на сжатие, так и на растяжение, зависят только от класса бетона по прочности на сжатие. При этом, значение отношения указанных показателей в зависимости от класса по прочности в случае тяжёлого бетона колеблется в пределах 6,9-17,2, а в случае легкого бетона на пористых заполнителях – в пределах 6,6-16,1. Между тем, анализ немногочисленных экспериментальных данных показывает, что в зависимости от вида бетона и его возраста, размеров поперечного сечения опытных образцов, а также от ориентации по отношению к направлению слоёв укладки бетона, значения вышеупомянутого отношения даже для одного и того же класса бетона по прочности на сжатие могут существенно различаться друг от друга [2; 3; 4].

В работе обсуждаются результаты экспериментального исследования изменения величины отношения прочностей литоидпемзобетона при сжатии и растяжении в зависимости от меры, содержащейся в его порах и капиллярах химически несвязанной (свободной) влаги.

Опытные образцы – цилиндры с диаметром 5,55 см и высотой 18 см были получены методом выбуривания из исходных литоидпемзобетонных элементов (призмы и восьмерки) по направлениям перпендикулярно (образцы ПЕС) и параллельно (образцы ПАС) по отношению к слоям укладки бетона.

Исходные элементы после освобождения от форм сразу гидроизолировались и до проведения экспериментов в возрасте 63 мес. хранились в лабораторном помещении.

Был использован вибрированный легкий бетон состава в массе 1:1,513:2,368; В/Ц=0,88; Ц=300 кг/м<sup>3</sup>. Для изготовления бетона применялись песок ( $\gamma_{\text{п}} = 1050 \text{ кг} / \text{м}^3$ ), щебень ( $\gamma_{\text{щ}} = 851 \text{ кг} / \text{м}^3$ ) с фракцией 5-30 мм из литоидной пемзы, взятой из карьера Джрабер (Республика Армения) и поргландцемент, активностью 38 МПа.

Кратковременные испытания осуществлялись сразу после выбуривания опытных образцов и после 7сут; 1мес; 3мес; 6мес. и 63мес. их хранения в лабораторном помещении при средней температуре 23<sup>0</sup>С и относительной влажности 67%.

Отметим, что результаты экспериментального изучения влияния образования пустот (дефектов), вследствие десорбции химический несвязанной влаги на механические свойства литоидпемзобетона рассматривались в работе [5]. Для обсуждения результатов этих исследований с позиции разносопротивляемости бетона разрушению в условиях осевого растяжения и сжатия целесообразно соответствующие данные представить в виде графиков, изображённых на рисунке.



**Рис.** Диаграммы изменения влажности (в), прочностей при сжатии и растяжении (а) литоидпемзобетона и значения их отношений (б) в зависимости от продолжительности процесса десорбции влаги.

По полученным экспериментальным данным существенная влагопотеря и связанное с этим интенсивное снижение прочности при сжатии (R<sup>-</sup>) литоидпемзобетона, хранившегося после расформовки в течение 63мес. в гидроизолированном состоянии, наблюдается в первые 6 мес. после начала процесса десорбции влаги (рис. в и а). При этом, указанные процессы выражены более существенными в случае образцов, испытанных перпендикулярно к слоям бетонирования (образцы ПЕС, кривая 1), чем в случае образцов, испытанных параллельно слоям (образцы ПАС, кривая 2).

После 6 мес. хранения в лаборатории степень влажности и прочность на сжатие литоидпемзобетона практически не изменяются.

Из приведённых на рис. **в** и **а** данных также замечаем, что степень влажности практически не влияет на прочность литоидпемзобетона при осевом растяжении ( $R^+$ ) как в перпендикулярном (кривая 1), так и в параллельном (кривая 2) к слоям бетонирования направлениях.

Представление о влиянии процесса десорбции влаги на изменение величины отношения прочностей литоидпемзобетона при сжатии и растяжении можно получить из приведённых на рис. **б** и **в** графиков.

Согласно этим графикам, с уменьшением во времени степени влажности наблюдается монотонное, с убывающей скоростью, уменьшение величины отношения  $R^-/R^+$  как в случае образцов ПЕС (кривая 1), так и в случае образцов ПАС (кривая 2). При этом, как и выше, интенсивное уменьшение показателя указанного отношения наблюдается в течение первых 6 мес. после начала процесса десорбции влаги.

Значение отношения  $R^-/R^+$  у гидроизолированных образцов ПЕС и ПАС составляет, соответственно, 18,5 и 14,7, а через 63 мес. после начала десорбции влаги – соответственно, 13,5 и 12,7 (рис. **б**). Т.е. снижение этого показателя для образцов ПЕС составляет около 27%, а для образцов ПАС – примерно 14%.

Отметим, что для гидроизолированных образцов ПЕС отношение  $R^-/R^+$  принимает значение 18,5, в то время как максимальное значение этого отношения для лёгких бетонов, рассчитанное на основе данных, приведённых в строительных нормах [1], составляет лишь 16,1.

Таким образом, на основе вышеизложенного можно констатировать, что абсолютные значения прочностей при сжатии и растяжении  $a$ , следовательно, и их отношения, как для легкого, так и для тяжелого бетонов одного и того же состава существенным образом зависят от возраста материала, размеров поперечного сечения элементов, направления нагрузки по отношению к слоям укладки бетона, степени предварительной влажности и воздушно-влажностных условий вызревания. Учёт упомянутых факторов при проектировании конструктивных элементов, работающих на сжатие с большими эксцентриситетами, а также изгибаемых элементов, несомненно даст возможность более сблизить расчётное и эксплуатационное (истинное) напряженно-деформированное состояния.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Строительные нормы и правила. Часть II. Нормы проектирования. Глава 21. Бетонные и железобетонные конструкции. (СНиП 2.03.01-84). М.: Стройиздат, 1998. 77с.
2. Карапетян К.С. Влияние анизотропии на ползучесть бетона при сжатии и растяжении в зависимости от величины напряжения //Докл. АН Арм. ССР. 1964. Т.39. №1. С.13-20.
3. Карапетян К.С. Влияние масштабного фактора на ползучесть бетона при сжатии и растяжении //Докл. АН Арм. ССР. 1964. Т.38. №3. С.135-142.
4. Карапетян К.С., Котикян Р.А. Исследование разномодульности бетона //Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1977. Т.30. №3. С.68-77.
5. Карапетян К.А. Влияние десорбции химически несвязанной влаги на механические свойства бетона при кратковременных силовых воздействиях //Изв. НАН Армении. Механика. 2004. Т.57. №3. С.70-77.

### **Сведения об авторе:**

**Карапетян Корьюн Ашотович** – доктор технич. наук, зав. лабораторией Экспериментальных исследований Института механики НАН Армении.

**Адрес:** 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2; **тел.:** (+37493) 52 48 52,

**E-mail:** [Koryun.mechins@sci.am](mailto:Koryun.mechins@sci.am)

# АНАЛИЗ МИКРОСЕЙСМ ХАРАКТЕРНЫХ РАЗНОВИДНОСТЕЙ ГРУНТОВЫХ УСЛОВИЙ Г. ГЮМРИ

*Карпетян С.С., Мкртчян Г.А., Овсепян Н.А.*

*Армения*

В настоящей статье приведены результаты обработки имеющегося инструментального материала с выявлением характерных (доминирующих) периодов колебаний характерных разновидностей грунтовых условий г.Гюмри. Проведён сравнительный анализ полученных результатов.

Полученные результаты позволяют рекомендовать те «безопасные» собственные периоды колебаний сооружений, которые приемлемы для города с целью обеспечения их сейсmobезопасности.

Не отрицая роли плохого качества строительства в г.Гюмри многочисленных разрушений, способствовали также и природные особенности территории города. Геологические условия территории города способствовали формированию длительного цуга колебаний монохроматического характера с большими амплитудами и периодами [1].

Геологическая обстановка Ширакской котловины схематически можно представить как 300-400 метровый слой озёрных глин, покрытых 15-25 метровым осадочным слоем (пески, глины различной консистенции, супеси, суглинки, туфы различной плотности и др.). При этом, наиболее мощный слой озёрных глин достигается в центре города. По мнению большого числа специалистов, в разрушениях города большую роль сыграла именно этот слой озёрных глин [2-4]. Для сравнения, на рис.1 представлены записи одних и тех же афтершоков Спитакского землетрясения, записанные приборами СКМ в сейсмических станциях «Ленинакан» и «Степанаван» [1]. Из представленных записей отчётливо видны различия колебательных процессов. В г. Гюмри они характеризуются с большими значениями интенсивности и продолжением S волн с большими периодами, чем в г. Степанаване<sup>1</sup>. Это при том, что усиление сейсмических каналов в г. Степанаване составило 20000, в «Ленинакане» –1500.

При Спитакском землетрясении в Гюмри, расположенный на 35 км от очага землетрясения интенсивность сотрясения достигали 9 баллов, тогда как в Ванадзоре (Кировакан), на расстоянии 25км от эпицентра оно составило

<sup>1</sup> с/ст. «Степанаван» расположена на скальных породах.

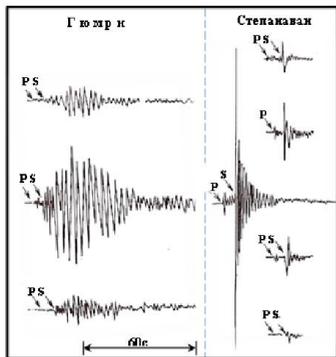


Рис.1. Образцы записей афтершоков Спитакского землетрясения приборами СКМ станциями «Ленинакан» и «Степанаван» [1].

менее 8 баллов [5]. Сравнительный анализ разрушений в Гюмри и Ванadzоре показал следующее: в Гюмри разрушено 95% многоэтажных (9-10 этажей) каркасно-панельных зданий, в Ванadzоре все они устояли, 62% – каркасно-каменных зданий в Гюмри полностью или частично разрушились, в Ванadzоре – 24%, повреждение домов каменной кладки примерно одинаково.

В [1] преимущественное разрушение в Гюмри зданий с большими периодами собственных колебаний при сравнении разрушений зданий с меньшими периодами свидетельствует о проявлении в Гюмри якобы резонансных явлений, обусловленных спек-тральными особенностями колебаний в этом городе по сравнению с другими городами и населёнными пунктами.

Уместно также отметить и сравнение продолжительности сейсмических событий. При сравнении записей одного и того же афтершока, записанные временными станциями<sup>2</sup> в пунктах наблюдений «Кр» (Крепость), «Сев» (Северский), «Поб» (Победа) по сравнению со станцией «Аревик» показывает, что продолжительность записей в 4-6 раз больше, чем записи ст. «Аревик». Максимальные амплитуды также превышали 4-6 раза.

Более подробное изучение преобладающих периодов характерных разновидностей грунтовых условий г.Гюмри проводились в 1991г. в рамках Советско-Американской<sup>3</sup> программы научного сотрудничества. В пяти точках города (MAR, LMD, LEN, POB и SLO), находящихся в черте Ширакского котлована, и в двух точках (KET и AGA), находящихся вне черты котловины (рис.2), проводились режимные наблюдения за микросейсмами.

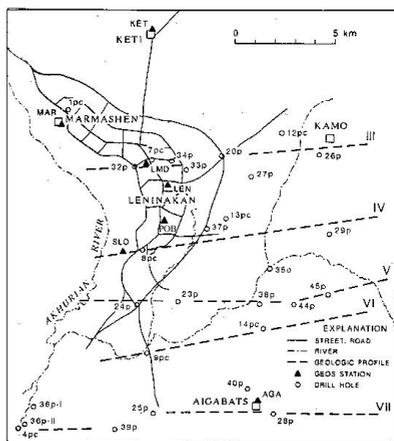


Рис.2. Схематический план Ширакской котловины с точками режимных наблюдений за микросейсмами.[6].

<sup>2</sup> После Спитакского землетрясения для СМР г. Гюмри была организована сеть временных сейсмических станций в 5-и точках наблюдений.

<sup>3</sup> Геофизическая Обсерватория Ламонт-Доерти Колумбийского Университетета

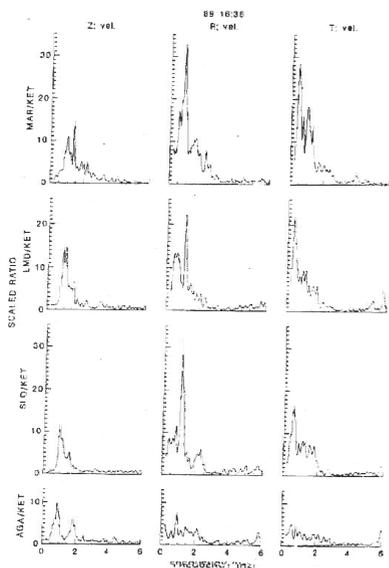


Рис.3. Спектральные отношения относительно ст. KET-и [6].

весовых категорий (0.05), в пределах 2Гц (MAP/KET-R, T, SLO/KET-R, рис.3). По отношениям horizon./vert. (рис.4), только на slo выделяется второй пик весовой категорией 0.1 в пределах 1.3Гц.

По полученным результатам можно сделать следующие выводы:

- по методу Накамури чётко выделяются преобладающие периоды Ширакской котловины;
- преобладающие периоды осадочных слоёв, залегающие над 300-400 метровым слоем озёрных глин, на спектрах микросейсм выделяются весьма слабо;
- доминирующий период г.Гюмри получил-ся равным 2сек. или 0.5Гц;
- доминирующий период, равный 2сек. или 0.5Гц, подтверждается также и по спектрам записей афтершоков.

Наблюдения проводились с помощью SH-1 и SV-1 сейсмоприёмников фирмы Kinematics, имеющие собственные периоды колебаний 5сек. с регистраторами EDA PRS4.

Все сравнения проводились относительно ст. KET-и, который находится вне Ширакской котловины, на скальных породах. Был применён метод Накамури [9].

По отношениям horizon./vert. (рис. 3), преобладающие периоды получились равными 0.5Гц. Эти значения совпадают со значениями преобладающих периодов, записанных афтершоков.

Была попытка оценить полученные значения преобладающих периодов по методу весовых категорий [7] [8]. На некоторых спектральных отношениях выделяется второй пик преобладающих периодов с очень малыми значениями

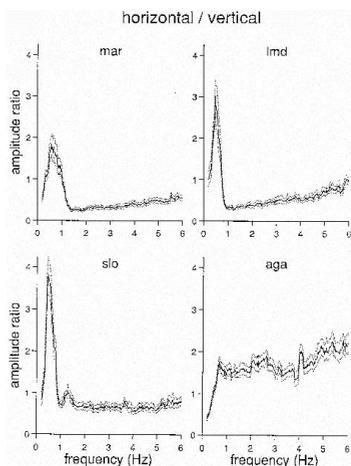


Рис.4. Спектральные отношения горизонтальных и вертикальных компонент.

Отсюда следует один очень важный вывод: доминирующий период грунтов, равный 2сек. или 0.5Гц, для высотных зданий г. Гюмри не является доминирующим и искать причину разрушений в результате резонансных явлений ошибочно.

По инженерно-сейсмометрическим данным, разрушенные многоэтажные (9-10 этажей) каркасно-панельные здания в г.Гюмри, имели собственные периоды колебаний 0.5-0.6 сек. В городе не разрушилось только одно 16-и этажное здание с собственным периодом колебаний 0.8сек.

Возникает один очень важный вопрос: в чём причина разрушений 95% каркасно-панельных зданий?

Во-первых, в черте города имелись большие ускорения, это доказано в работах [8, 9].

Во-вторых, продолжительность сейсмического процесса: об этом говорилось выше.

В третьих, самое главное – характер разрушений. Все очевидцы Спитакского землетрясения помнят, как 9-10-и этажные здания превратились на 4-5-иэтажные, т.е. разрушению подверглись первые 4-5 этажей. На самом деле, по свидетельствам очевидцев, сперва разрушились четвертый или пятый этаж, а после, первые этажи, не выдержав нагрузки верхних этажей, поочередно начали разрушаться. Многие исследователи, не понимая физического смысла этого явления, все разрушения ошибочно приурочили к резонансным явлениям.

Анализируя макросейсмические данные некоторых сильных землетрясений, подтвердилось, что это явление не случайность, а закономерность, что послужило толчком для члена- корреспондента НАН РА, доктора физ.-мат. наук С.М. Оганесяна дать физико-математическое обоснование этому явлению [10, 11].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Халтурин В.И., Шамахмадов А.М., Геодакян Э.Г., Саргсян Н.М., Мхитарян Л.А. Усиление интенсивности колебаний в Ленинакане. Комплексная оценка сейсмической опасности //Вопросы инженерной сейсмологии//. 1991. Вып.32. М.: Наука, С.5-15.
2. Карапетян С.С., Бабаян Т.О., Абраамян Г.А. Инженерно-сейсмологические исследования поведения характерных для территории города Ленинакана грунтов. /Материалы Всесоюзной научно-технической конференции. Геодезия, сейсмология, деформации и прогноз. М.: 1989. С.89-94.
3. Aki K., Chin B. Kato K. Seismological and geotechnical studies of local site effect on strong and weak motions. //Proc. Int. Symp. On the Effects of Surface Geol. Seis. Motion, Odawara, Japan, 1992, Vol. 1, Association for Earthquake Disaster Prevention, Tokyo, 1992 p. 97-110.

4. Borchardt R., Glassmoyer G., Andrews M. Cranswicks E. Effects of site conditions on ground motion and damage. // *Earthquake Spectra*, Special Supplement: Armenia Earthquake Reconnaissance Report, August 1989.
5. Results and data from seismologic and geologic studies of the earthquake of December 7, 1988, near Spitak, Armenia, USSR. Wash. (D.C.), 1989p. (US Geol. Surv. Open-file rep.: pp. 89-163).
6. E.H. Fild, A.C. Climent, K.H. Jacob, V. Aharonian, S.E. Hough, P.H. Friberg, T.O. Babayan, S.S. Karapetyan S.M. Hovanesyan, H.A. Abramyan. Earthquake Site-Response Study in Giumri (Formerly Leninakan), Armenia, Using Ambient Noise Observations. *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 85, No.1, February, 1995, pp.349-353.
7. Карапетян С.С., Мкртчян Г.А., Овсепян Н.В. О целесообразности использования спектров микросейсм для выявления инженерно-геологических условий местности. // I Международная научная конференция молодых учёных по современным задачам геофизики, инженерной сейсмологии и сейсмостойкого строительства. Цахкадзор, 12-16 мая, 2013г.
8. Манукян Л.А. О возможности определения амплитудных значений ускорения грунта с помощью сейсмокопов ИГИС. // ՀՀ ԳԱԱ ԵԻՄԻ հիմնադիր ակադեմիկոս Ա. Նազարովի ծննդյան 90-ամյա հոբելյանին նվիրված նստաշրջանի գիտական աշխատությունների ժողովածու: ՀՀ ԳԱԱ Հր. Գյումրի, 1998թ., էջ 63-68:
9. Амаян Р.О., Манукян Л.А., Варданян В.О. Расчетные параметры сейсмического воздействия в г. Лениакане при Спитакском землетрясении 07.12.1988 года. // Изв. НАН РА, сер. Науки о Земле. 1992. №2. С.64-68.
10. Оганесян С.М. Постановка задачи о распространения упругих волн чистого изгиба при поперечных колебаниях однородного консольного стержня /Доклады НАН Армении. 2013. Т.113. №3. С.259-267.
11. Оганесян С.М. К вопросу о построении новой теории сейсмостойкости. //Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2013. №5. С.26-29.

### **Сведения об авторе:**

#### **Карапетян Степа Сеникович,**

канд. геол.-мин. наук, ИГИС им. А.Г.Назарова НАН РА, зав.лабораторией определения сейсмической опасности. **Адрес:** 3115, Армения, Гюмри-15, ул. В.Саргсяна 5, ИГИС. **Тел.:** +374-312-312-61 (093-62-02-86)

**E-mail:** skarapetyan60@rambler.ru

# К РЕШЕНИЮ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ ИЛИ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ С ДВУМЯ КОНЕЧНЫМИ УПРУГИМИ НАКЛАДКАМИ ПРИ НАЛИЧИИ СДВИГОВЫХ ПРОСЛОЕК

*Керомян А.В.*

*Армения*

В работе рассматриваются задачи для упругой полуплоскости и бесконечной пластины, которые на конечных отрезках вдоль линии  $y = 0$  в плоскости  $xOy$  (для пластины  $xOy$  – её средняя плоскость) усилены двумя конечными накладками (стрингерами) с различными модулями упругости и постоянной толщины. Контактное взаимодействие между накладками и деформируемыми основаниями осуществляются посредством сдвиговых прослоек (в виде слоёв клея) с другими физико-механическими и геометрическими характеристиками. В работе задача определения неизвестных контактных напряжений сведена к решению систем интегральных уравнений Фредгольма второго рода с двумя неизвестными функциями на различных конечных интервалах, которое в банаховом пространстве  $B$  можно решать методом последовательных приближений. Далее, рассмотрены некоторые возможные предельные случаи и выяснено поведение контактных напряжений.

В работах [1,2] решение задач сведено к решению систем сингулярных интегро-дифференциальных уравнений второго рода с ядрами Коши, решение которых строится с помощью ортогональных многочленов Чебышева второго рода. Контактная задача с двумя конечными стрингерами посредством сдвиговой прослойки с одним стрингером рассмотрена в [3].

В качестве основной из поставленных задач выбрана задача для упругого основания в виде полуплоскости. Результаты для бесконечной пластины приведены по ходу решения, по возможности, с одинаковыми обозначениями.

Пусть упругая полуплоскость (плоская деформация, модуль упругости  $E$  или модуль сдвига  $G$ , коэффициент Пуассона  $\nu$ ) на участках  $[-a, a]$  и  $[b, c]$  ( $b > a$ ) своей границы  $y = 0$  (в плоскости  $xOy$ ) усилена двумя конечными накладками малых толщин  $h_1$  и  $h_2$ , модуль упругости которых при  $x \in [-a, a]$  равен  $E_1$ , а при  $x \in [b, c]$  равен  $E_2$ . Контактное взаимодействие между накладками и деформируемым основанием осуществляется посредством сдвиговых прослоек (в виде слоёв клея) с физико-механическими и геометрическими характеристиками  $(E_k, \nu_k, h_k)$ . Задача заключается в определении неизвестных контактных напряжений, когда на

концевых точках накладок  $x = a$  и  $x = c$  приложены горизонтальные силы  $P$  и  $Q$ , соответственно, которые направлены вдоль оси  $Ox$  в одну сторону.

Согласно вышесказанному и известным предположениям [1-4], запишем дифференциальные уравнения равновесия накладок (стрингеров), находящиеся на отрезках  $[-a, a]$  и  $[b, c]$ , в виде:

$$d^2 u^{(1)} / dx^2 = \tau_1(x) / E_1 h_1, \quad -a \leq x \leq a, \quad (1)$$

$$d^2 u_1^{(1)} / dx^2 = \tau_2(x) / E_2 h_2, \quad b \leq x \leq c. \quad (2)$$

а условия контакта – в виде:

$$u^{(1)}(x) - u^{(2)}(x, 0) = k \tau_1(x), \quad -a \leq x \leq a. \quad (3)$$

$$u_1^{(1)}(x) - u^{(2)}(x, 0) = k \tau_2(x), \quad b \leq x \leq c. \quad (4)$$

Здесь  $u^{(1)}(x)$  и  $u_1^{(1)}(x)$  – горизонтальные перемещения точек накладок, а  $\tau_1(x)$  и  $\tau_2(x)$  – касательные контактные напряжения, действующие под накладками на участках  $[-a, a]$  и  $[b, c]$ , соответственно,  $k = h_k / G_k$ ,  $G_k = E_k / 2(1 + \nu_k)$ ,  $G_k$  – модуль сдвига материала клея.

С другой стороны, согласно вышесказанному, запишем горизонтальные перемещения  $u^{(2)}(x, 0)$  граничных точек упругой полуплоскости в виде:

$$u^{(2)}(x, 0) = \frac{1}{\pi A} \int_{-a}^a \left( \ln \frac{1}{|x-s|} + C \right) \tau_1(s) ds + \frac{1}{\pi A} \int_b^c \left( \ln \frac{1}{|x-s|} + C \right) \tau_2(s) ds, \quad (5)$$

где  $A = E / 2(1 - \nu^2)$ ,  $C$  – некоторое постоянное.

Для бесконечной пластины, находящейся в условиях обобщённого плоско-напряжённого состояния в предположении, что стрингеры находятся на поверхности пластины по линии  $y = 0$  ( $xOy$  – средняя плоскость пластины), в (1)–(5) следует  $\tau_j(x)$  ( $j = 1, 2$ ) заменить на  $b_1^* \tau_j(x)$  ( $j = 1, 2$ );  $h_j$  ( $j = 1, 2$ ) следует заменить на площади поперечных сечений накладок  $F_j = b_1^* h_j$ , а  $A$  на  $A^* = 8Gd / (3 - \nu)$ ,  $d$  – толщина пластины,  $b_1^*$  – ширина стрингеров в контактных участках,  $k$  на  $k^* = k / b_1^*$ .

Далее, не останавливаясь на подробностях, отметим, что на основании соотношения (1)–(4) и соответствующих граничных условий для перемещения  $u^{(1)}(x)$  и  $u_1^{(1)}(x)$  можно получить следующие уравнения:

$$k \tau_1(x) + u^{(2)}(x, 0) = \alpha_1^2 \int_{-a}^a G(x, s) u^{(2)}(s, 0) ds + u_0^{(1)}(x), \quad -a \leq x \leq a, \quad (6)$$

$$k\tau_2(x) + u^{(2)}(x, 0) = \alpha_2^2 \int_b^c K(x, s) u^{(2)}(s, 0) ds + u_*^{(1)}(x), \quad b \leq x \leq c. \quad (7)$$

где  $u_0^{(1)}(x) = P \operatorname{ch} \alpha_1(x+a) / (\alpha_1 E_1 h_1 \operatorname{sh} 2a\alpha_1)$ ,  $\alpha_1^2 = 1/kE_1 h_1$ ,  
 $u_*^{(1)}(x) = Q \operatorname{ch} [(x-b)\alpha_2] / (\alpha_2 E_2 h_2 \operatorname{sh} (c-b)\alpha_2)$ ,  $\alpha_2^2 = 1/kE_2 h_2$ ,  
 $G(x, s)$ ,  $K(x, s)$  – функции Грина [5] и определяются в виде:

$$G(x, s) = \frac{1}{\alpha_1 \operatorname{sh} 2a\alpha_1} \begin{cases} \operatorname{ch} \alpha_1(x-a) \operatorname{ch} \alpha_1(s+a), & x > s, \\ \operatorname{ch} \alpha_1(x+a) \operatorname{ch} \alpha_1(s-a), & x < s \end{cases}$$

$$K(x, s) = \frac{1}{\alpha_2 \operatorname{sh} [\alpha_2(c-b)]} \begin{cases} \operatorname{ch} \alpha_2(x-c) \operatorname{ch} \alpha_2(s-b), & x > s, \\ \operatorname{ch} \alpha_2(x-b) \operatorname{ch} \alpha_2(s-c), & x < s. \end{cases}$$

Не останавливаясь на подробностях, для дальнейшего отметим, что имеют место равенства:

$$\int_{-a}^a G(x, s) \cos \left[ \frac{n\pi(s+a)}{2a} \right] ds = \frac{4a^2}{4a^2\alpha_1^2 + n^2\pi^2} \cos \left[ \frac{n\pi(x+a)}{2a} \right], \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (8)$$

$$\int_b^c K(x, s) \cos \left[ \frac{n\pi(s-b)}{c-b} \right] ds = \frac{(c-b)^2}{(c-b)^2\alpha_2^2 + n^2\pi^2} \cos \left[ \frac{n\pi(x-b)}{c-b} \right], \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (9)$$

где функции  $\cos [n\pi(x+a)/2a]$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) образуют полную ортогональную систему в пространстве  $L_2[-a, a]$ , а  $\cos [n\pi(x-b)/(c-b)]$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) образуют полную ортогональную систему в пространстве  $L_2[b, c]$ .

Теперь имея в виду (5), из (6) и (7), после замены переменных  $x$  на  $ax$ ,  $s$  на  $as$ ,  $t$  на  $at$ , получим систему интегральных уравнений в виде:

$$p(x) + \delta^2 \int_{-1}^1 H(x, t) p(t) dt + \delta^2 \int_{\delta_1}^{\delta_2} H(x, t) q(t) dt = p_0(x), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (10)$$

$$q(x) + \delta^2 \int_{\delta_1}^{\delta_2} \Pi(x, t) q(t) dt + \delta^2 \int_{-1}^1 \Pi(x, t) p(t) dt = q_0(x), \quad \delta_1 \leq x \leq \delta_2,$$

где

$$H(x, t) = \frac{1}{\pi} \left( \ln \frac{1}{|x-t|} - a\alpha_1^2 \int_{-1}^1 G(ax, as) \ln \frac{1}{|s-t|} ds \right), \quad p_0(x) = \frac{u_0^{(1)}(ax)}{k}, \quad (11)$$

$$\Pi(x, t) = \frac{1}{\pi} \left( \ln \frac{1}{|x-t|} - a\alpha_2^2 \int_{\delta_1}^{\delta_2} K(ax, as) \ln \frac{1}{|s-t|} ds \right), \quad q_0(x) = \frac{u_*^{(1)}(ax)}{k}$$

поскольку, согласно (8) и (9), имеют место равенства:

$$\int_{-1}^1 G(ax, as) ds = 1 / a\alpha_1^2, \quad \int_{\delta_1}^{\delta_2} K(ax, as) ds = 1 / a\alpha_2^2, \quad (12)$$

где  $\delta^2 = a/kA$ ,  $\delta_1 = b/a$ ,  $\delta_2 = c/a$ ,  $p(x) = \tau_1(ax)$ ,  $q(x) = \tau_2(ax)$ .

Здесь имеют место некоторые возможные предельные случаи, которые непосредственно можно получить из систем уравнений (10).

Таким образом, решение задач сведено к решению системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода (10), ядра которых квадратично интегрируемы по двум переменным и с правыми частями которых являются решения задач в случае жёсткого основания. Из систем (10) легко заметить, что в конечных точках накладок  $x = \pm 1$  и  $x = \delta_1$ ,  $x = \delta_2$ ,  $p(x)$  и  $q(x)$  принимают конечные значения.

Далее, систему (10) запишем в виде:

$$\varphi + K\varphi = g_0, \quad (13)$$

где

$$\varphi = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \quad g_0 = \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} \delta^2 k_{11} & \delta^2 k_{12} \\ \delta^2 k_{21} & \delta^2 k_{22} \end{pmatrix},$$

$$k_{11}p = \int_{-1}^1 H(x, t)p(t)dt, \quad k_{12}q = \int_{\delta_1}^{\delta_2} H(x, t)q(t)dt, \quad (14)$$

$$k_{21}p = \int_{-1}^1 \Pi(x, t)p(t)dt, \quad k_{22}q = \int_{\delta_1}^{\delta_2} \Pi(x, t)q(t)dt.$$

Теперь рассмотрим операторное уравнение (13) в банаховом пространстве

$$B \text{ вектор-функции } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \text{ и с нормой } \|x\| = \max \left\{ \|x_1\|_{L_2[-1,1]}, \|x_2\|_{L_2[\delta_1, \delta_2]} \right\},$$

где  $x_1 \in L_2[-1,1]$ ,  $x_2 \in L_2[\delta_1, \delta_2]$ .

Очевидно, что оператор  $K$  действует в пространстве  $B$  и является фредгольмовым. Тогда операторное уравнение (13) в указанном пространстве можно решать методом последовательных приближений, если  $\|K\| < 1$ , причём,

$$\|K\| = \max \left\{ \delta^2 (\|k_{11}\| + \|k_{12}\|), \delta^2 (\|k_{21}\| + \|k_{22}\|) \right\}.$$

Следовательно, условие  $\|K\| < 1$  будет выполняться, если

$$\delta^2 (\|k_{11}\| + \|k_{12}\|) < 1, \quad \delta^2 (\|k_{21}\| + \|k_{22}\|) < 1. \quad (15)$$

Теперь определим, при каких значениях параметра  $\delta^2$  будут удовлетворяться условия (15). Не останавливаясь на подробностях, отметим, что в силу неравенства Коши-Буняковского после оценки норм операторов (14), далее с помощью равенства Парсеваля и соотношения (8), (9), можно получить следующие оценки:

$$\|k_{11}\| \leq c_1, c_1 < \left( \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \ln^2 |x-t| dx dt \right)^{\frac{1}{2}}, \|k_{12}\| \leq c_2, c_2 < \left( \int_{\delta_1}^{\delta_2} \int_{-1}^1 \ln^2 |x-t| dx dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|k_{22}\| \leq c_4, c_4 < \left( \int_{\delta_1}^{\delta_2} \int_{\delta_1}^{\delta_2} \ln^2 |x-t| dx dt \right)^{\frac{1}{2}}, \|k_{21}\| \leq c_3, c_3 < \left( \int_{-1}^1 \int_{\delta_1}^{\delta_2} \ln^2 |x-t| dx dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда условия (15) будут выполняться, если

$$\delta^2 < \frac{1}{c_1 + c_2}, \quad \delta^2 < \frac{1}{c_3 + c_4}.$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Керопян А.В. Контактная задача для упругой полуплоскости с двумя конечными накладками при наличии сдвиговых прослоек. Современные проблемы механики деформируемого твёрдого тела, дифференциальных и интегральных уравнений. //Тезисы докладов Международной научн. Конференции, 23-26 августа 2013, Одесса, 2013, с. 68-69.
2. Керопян А.В. Контактные задачи для упругой полосы и бесконечной пластины с двумя конечными упругими накладками при наличии сдвиговых прослоек. //Изв. НАН Армении. Механика. 2014. Т.67. №1. С.22-34.
3. Григорян Э.Х., Керопян А.В., Шагинян С.С. Контактная задача для бесконечной пластины с двумя конечными стрингерами, один из которых склеен с ней, а другой находится в идеальном контакте. //Изв. НАН Армении. Механика. 2002. Т.55. №2. С.14-23.
4. Lubkin J.L. and Lewis L.C. Adhesive shear flow for an axially loaded, finite stringer bounded to an infinite sheet. //Quart J. of Mech. and Applied Math. Vol .XXIII, 1970, p. 521.
5. Коллатц Л. Задачи на собственные значения (с техническими приложениями). М.: Наука, 1968. 503с.

#### Сведения об авторе:

**Керопян Агаси Вачаганович,**

канд.физ-мат. наук, доцент кафедры механики ЕГУ.

**Адрес:** ул. А. Манукяна, 1. **Тел.:** 060 710 366 (раб.), 461941 (дом).

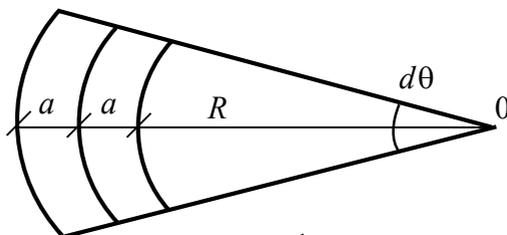
**E-mail:** [agas50@ysu.am](mailto:agas50@ysu.am)

# УПРУГО-ЗАЩЕМЛЁННАЯ ОПОРА ДЛЯ ОСЕСИММЕТРИЧНО ИЗГИБАЕМЫХ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН

*Киракосян Р.М.*  
*Армения*

Рассматривается упруго-защемлённая опора общего типа для осесимметрично изгибаемых круглых пластин. Показывается, что из этой опоры, как частные случаи, получаются все типы опор, включая и случай свободного края. С помощью допущения, аналогичного гипотезе Фусса-Винклера, получаются выражения параметров упруго-защемлённой опоры. Решается задача осесимметричного изгиба цилиндрически ортотропной круглой пластинки при равномерно распределённой поперечной нагрузке. Рассматриваются два частных случая.

1. Рассмотрим элемент упруго-защемлённой круглой пластинки с дифференциальным центральным углом  $d\theta$  (фиг.1).



Фиг.1

Краевая часть пластинки вставлена в упруго-деформируемый массив. Длина этой части  $2a$  достаточно мала относительно радиуса пластинки  $R$ . Из-за малой длины будем считать, что вставленная часть пластинки, подобно абсолютно твёрдому элементу, может поступательно перемещаться и вращаться как одна целая. Поэтому в её пределах будем считать значение  $dw/dr$  постоянным ( $r$  – радиальная координата,  $w$  – прогиб). Отметим также, что из-за малости  $2a$  расстояние середины вставленной части от края пластинки практически равно  $a$ .

На единичной длине опорного сечения пластинки  $r = R$  возникают поперечная сила  $N_r$  и изгибающий момент  $M_r$ . Под действием момента поперечной силы относительно середины вставленной части  $aN_r \cdot R \cdot d\theta$  и момента  $M_r \cdot R \cdot d\theta$  вставленная часть будет вращаться под некоторым углом. Будем считать, что тангенс этого угла  $dw/dr$  прямо пропорционален сумме моментов. Так как значения  $dw/dr$ ,  $N_r$ , и  $M_r$  имеют одинаковые знаки, то можно написать:

$$\left. \frac{dw}{dr} \right|_{r=R} = D(aN_r + M_r) \Big|_{r=R} \quad (1.1)$$

Положительная постоянная  $D$  обратна жёсткости упруго-зашемлённой опоры на вращение. В СИ она измеряется единицей  $H^{-1}$ .

Прогиб пластинки в сечении  $r = R$  состоит из двух частей. Одна из них возникает от вращения вставленной части, а другая – от её поступательного вертикального перемещения под действием поперечной силы. По аналогии с гипотезой Фусса-Винклера можно считать, что вторая часть опорного прогиба  $w_0$  прямо пропорциональна поперечной силе. Так как знак  $w$  отличается от знаков  $dw/dr$  и  $N_r$ , то в итоге для  $w(r = R)$  можно написать:

$$w \Big|_{r=R} = - \left( a \frac{dw}{dr} + BN_r \right) \Big|_{r=R} \quad (1.2)$$

Положительная постоянная  $B$  обратна жёсткости упруго-зашемлённой опоры на вертикальное перемещение. В системе СИ она измеряется в единице  $M^2 H^{-1}$ .

Таким образом, условия упруго-зашемлённой опоры, осесимметрично изгибаемой круглой пластинки, имеют вид (1.1) и (1.2). Они по смыслу похожи условиям упруго-зашемлённой опоры изгибаемой балки [1]. Из условий (1.1) и (1.2) можно получить условия всех типов опор. Приведём несколько примеров.

I. Условия абсолютно жёсткой шарнирной опоры

$$B = 0, D = 0; \quad (1.3)$$

II. Условия классической шарнирной опоры

$$a = 0, B = 0, D = \infty; \quad (1.4)$$

III. Условия шарнирной опоры на упругом основании

$$a = 0, B > 0, D = \infty; \quad (1.5)$$

IV. Условия упругой шарнирной опоры на жёстком основании

$$a = 0, B = 0, D > 0 \quad (1.6)$$

и т.д.

2. По аналогии с гипотезой Фусса-Винклера будем считать, что при деформировании упругий массив действует на вставленную часть пластинки напряжениями, прямо пропорциональными перемещениям.

При вертикальном поступательном перемещении  $w_0 = -BN_r$  упругий массив действует силой:

$$F = (R + 2a)hw_0k_3d\theta + w_0(k_1 + k_2)d\theta \int_0^{2a} (R + x)dx = \quad (2.1)$$

$$= w_0 \left[ (R + 2a)hk_3 + 2a(R + a)(k_1 + k_2) \right] d\theta$$

Здесь  $h$  – толщина вставленной части пластинки, а коэффициенты пропорциональности  $k_1, k_2$  и  $k_3$  относятся к случаям сжатия, растяжения и скольжения, соответственно. Эти коэффициенты в системе СИ измеряются единицей  $H \cdot м^{-3}$ . Так как

$$F = -N_r R d\theta = \frac{w_0}{B} R d\theta, \quad (2.2)$$

то с учётом (2.1) получим

$$B = \frac{R d\theta}{F} = \frac{R}{(R + 2a)hk_3 + 2a(R + a)(k_1 + k_2)} \quad (2.3)$$

При вращении вставленной части пластинки упругий массив действует силами, момент которых относительно середины вставленной части составляет:

$$M = ha^2(R + 2a)k_3 \frac{dw}{dr} d\theta + 2(R + a)(k_1 + k_2) \frac{dw}{dr} \cdot \frac{a^3}{3} d\theta = \quad (2.4)$$

$$= \frac{1}{3} a^2 \left[ 3h(R + 2a)k_3 + 2a(k_1 + k_2)(R + a) \right] \frac{dw}{dr} d\theta$$

Этот момент уравнивает момент

$$R(aN_r + M_r) d\theta = R \frac{dw}{dr} d\theta. \quad (2.5)$$

С учётом (1.1) и (2.4) получим

$$D = \frac{3R}{a^2 \left[ 3h(R + 2a)k_3 + 2a(k_1 + k_2)(R + a) \right]} \quad (2.6)$$

3. Рассмотрим цилиндрически ортотропную круглую пластинку с упруго-зашемлённой опорой, несущую равномерно распределённую поперечную нагрузку интенсивности  $q$ . Общее решение задачи изгиба относительно прогиба имеет вид [2]:

$$w = c_1 + c_2 r^{1+k} + \frac{qr^4}{8(9 - k^2)D_r} \quad (3.1)$$

Здесь

$$k = \sqrt{\frac{E_0}{E_r}}, \quad D_r = \frac{B_r \cdot h^3}{12} \quad (3.2)$$

$E_0, E_r$  – модули Юнга;  $B_r$  выражается известной формулой через упругие постоянные материала, а  $c_1$  и  $c_2$  – постоянные интегрирования, которые должны определяться из условий упруго-зачемлённой опоры (1.1) и (1.2). Остальные расчётные величины (поперечные силы и изгибающие моменты) пластинки выражаются через прогиб по известным формулам, которые ради краткости приводить не будем.

Удовлетворив условиям (1.1) и (1.2) и подставив найденные выражения постоянных  $c_1, c_2$  в (3.1), для прогиба пластинки получим:

$$w = \frac{qR^2 [R + a(1+k)] \left\{ R^2 + DD_r [(3 + \nu_0)R + a(9 - k^2)] \right\}}{2(1+k)(9 - k^2)D_r [R + DD_r(k + \nu_0)]} -$$

$$\frac{qR \left[ R^2(R + 4a) - 4B(9 - k^2)D_r \right]}{8(9 - k^2)D_r} + \frac{qr^4}{8(9 - k^2)D_r} -$$

$$\frac{qR^{2-k} \left\{ R^2 + DD_r [(3 + \nu_0)R + (9 - k^2)a] \right\} r^{1+k}}{2(1+k)(9 - k^2)D_r [R + DD_r(k + \nu_0)]} \quad (3.3)$$

Рассмотрим два частных случая.

1) Опора – абсолютно жёсткая. Положив в (3.3)  $D = B = 0$ , получим:

$$w = \frac{qR^4}{8(9 - k^2)(1+k)D_r} \left[ 3 - k - 4 \left( \frac{r}{R} \right)^{1+k} + (1+k) \left( \frac{r}{R} \right)^4 \right] \quad (3.4)$$

2) Опора – классическая шарнирная.

Тогда  $a = 0, B = 0, D = \infty$ . С учётом этого, из (3.3) получим:

$$w = \frac{qR^4}{8(9 - k^2)D_r} \left[ \frac{(3 - k)(4 + k + \nu_0)}{(1+k)(k + \nu_0)} - \frac{4(3 + \nu_0) \left( \frac{r}{R} \right)^{1+k}}{(1+k)(k + \nu_0)} + \left( \frac{r}{R} \right)^4 \right] \quad (3.5)$$

(3.4) и (3.5) совпадают с соответствующими известными формулами [2].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Киракосян Р.М. Неклассическая задача изгиба ортотропной балки с упруго-защемлённой опорой. // Докл. НАН Армении. 2014. Т.114. №2. С.101-107.
2. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. М.: Физматгиз, 1957. 463с.

### **Сведения об авторе:**

**Киракосян Размик Макарович** – доктор техн. наук, профессор, главный научн. сотрудник Института механики НАН РА.

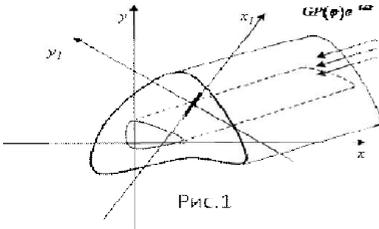
**Адрес:** 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2.

**Тел.:** (+37410) 56-81-88.

**Е-mail:** [Kiraz@freenet.am](mailto:Kiraz@freenet.am)

# ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА БЕСКОНЕЧНОГО ПОЛОГО ЦИЛИНДРА ПРОИЗВОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ С ТУННЕЛЬНОЙ ТРЕЩИНОЙ

**Кириллова О.И.**  
**Россия**



Рассматривается полый упругий цилиндр с образующими, параллельными оси  $Oz$  (рис.1), сечение которого плоскостью  $xOy$  представляет собой двусвязную плоскую область, ограниченную произвольными замкнутыми гладкими кривыми. Эти кривые в полярной системе координат, центр которой совпадает с началом координат  $xOy$ , задаются уравнениями:  $r_0 = r_0 \psi_0(\varphi)$  – внутренняя,  $r_1 = r_1 \psi_1(\varphi)$  – внешняя границы,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ . В цилиндре содержится сквозная трещина, которая в плоскости  $xOy$  не выходит за пределы сечения и занимает отрезок длиной  $2a$ .

В теле происходят колебания продольного сдвига вследствие действия на боковую поверхность гармонической нагрузки  $P(\varphi)e^{-i\omega t}$ . Множитель  $e^{-i\omega t}$  всюду далее опущен.

При таких условиях отличной от нуля будет только  $z$ -компонента вектора перемещения, удовлетворяющая уравнению Гельмгольца, которое в полярной системе имеет вид:

При таких условиях отличной от нуля будет только  $z$ -компонента вектора перемещения, удовлетворяющая уравнению Гельмгольца, которое в полярной системе имеет вид:

$$\Delta w + \kappa_2^2 w = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad (1)$$

где  $\kappa_2^2 = \omega^2 c_2^{-2}$ ;  $c_2^2 = G\rho^{-1}$ ;  $G, \rho$  – модуль сдвига и плотность цилиндра,  $\omega$  – частота колебаний. При условии нагрузки на внешнюю поверхность тела на ней выполнено равенство:

$$\tau_{\bar{n}z}(r_1 \psi_1(\varphi), \varphi) = GP(\varphi), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad (1)$$

$\bar{n}$  – вектор нормали к границе.

Считается, что внутренняя граница цилиндра неподвижна:

$$w(r_0 \psi_0(\varphi), \varphi) = 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \quad (2)$$

Для формулировки граничных условий на трещине с ней связывается локальная система координат  $x_1 O_1 y_1$ . Поверхность трещины считается свободной от нагрузок:

$$\tau_{zy_1}(x_1, 0) = G \partial w_1 / \partial y_1(x_1, 0) = 0, \quad |x_1| < a, \quad (3)$$

где  $w_1(x_1, y_1)$  получается вследствие перехода в  $w(r, \varphi)$  от полярных координат к декартовым  $x_1 O_1 y_1$ . Также на поверхности трещины разрывно перемещение  $w_1(x_1, y_1)$ , скачок которого обозначен

$$w_1(x_1, +0) - w_1(x_1, -0) = \chi_2(x_1), \quad \chi_2(\pm a) = 0. \quad (4)$$

При таких условиях ставится задача определить коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) для трещины.

Для решения предварительно в системе  $x_1 O_1 y_1$  строится разрывное решение уравнения Гельмгольца [2] со скачком  $\chi_2(x_1)$ , который определён в (4):

$$w^{01}(x_1, y_1) = \frac{\partial}{\partial y_1} \int_{-a}^a \chi_2(\eta) r_2(\eta - x_1, y_1) d\eta, \quad (5)$$

где  $r_2(\eta - x_1, y_1) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)} \left( \kappa_2 \sqrt{(\eta - x_1)^2 + y_1^2} \right)$ ,  $H_0^{(1)}(Z)$  – функция Ханкеля.

Далее перемещение в системе  $O r \varphi$  представляется в виде:

$$w(r, \varphi) = w_0(r, \varphi) + w_1(r, \varphi), \quad (6)$$

где  $w_0(r, \varphi)$  – разрывное решение (5) после перехода к полярным координатам, а  $w_1(r, \varphi)$  – такое решение уравнения Гельмгольца (1), что для (6) выполняются граничные условия (2) и (2). Эта неизвестная функция представлена в виде линейной комбинации частных решений уравнения (1):

$$w_1(r, \varphi) = r_0 \left( \sum_{k=1}^N A_k^+ g_k^+(r, \varphi) + \sum_{k=1}^N A_k^- g_k^-(r, \varphi) \right), \quad (7)$$

где  $g_{2m-1}^+(r, \varphi) = J_{m-1}(\kappa_2 r) \cos(m-1)\varphi$ ,  $g_{2m}^+(r, \varphi) = J_m(\kappa_2 r) \sin m\varphi$ ,

$$g_{2m-1}^-(r, \varphi) = H_{m-1}(\kappa_2 r) \cos(m-1)\varphi, \quad g_{2m}^-(r, \varphi) = H_m(\kappa_2 r) \sin m\varphi.$$

Функции  $g_k^\pm(r, \varphi)$  линейно независимы и образуют полную замкнутую систему функций в области сечения [1].

Для реализации граничного условия (3) на трещине перемещение (6) необходимо представить в системе координат, связанной с трещиной:

$$w^{(1)}(x_1, y_1) = w^{01}(x_1, y_1) + w^{11}(x_1, y_1), \quad (8)$$

где  $w^{01}(x_1, y_1)$  – разрывное решение (5), а  $w^{11}(x_1, y_1)$  получено с (7):

$$w^{11}(x_1, y_1) = r_0 \left( \sum_{k=1}^N A_k^+ h_k^+(x_1, y_1) + \sum_{k=1}^N A_k^- h_k^-(x_1, y_1) \right), \quad (9)$$

$h_k^\pm(x_1, y_1)$  – функции  $g_k^\pm(r, \varphi)$  в системе координат  $x_1 O_1 y_1$ .

Удовлетворяя граничному условию на трещине (3), получили интегральное уравнение, которое после интегрирования по частям и выделения сингулярной части в ядре принимает вид:

$$\frac{\gamma}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi'(\tau) \left( \frac{1}{\tau - \zeta} + D(\tau - \zeta) \right) d\tau = \Phi(\zeta), \quad (10)$$

$$\varphi'(\tau) = \chi_2'(a\tau), \quad \Phi(\zeta) = r_0^{-1} w^{11}(x_1, 0) = \Phi^+(\zeta) + \Phi^-(\zeta),$$

$$\Phi^\pm(\zeta) = - \sum_{k=1}^N A_k^\pm \frac{\partial h_k^\pm(a\zeta, 0)}{\partial y_1},$$

а ядро имеет следующую асимптотику:

$$D(Z) = O(|Z| \ln |Z|), \quad Z \rightarrow 0.$$

К (10) необходимо добавить равенство, которое следует из условия смыкания трещины:

$$\int_{-1}^1 \varphi'(\tau) d\tau = 0. \quad (11)$$

Вследствие линейности (10), (11) решение уравнения (10) можно представить в виде:

$$\varphi'(\tau) = (\varphi^+(\tau))' + (\varphi^-(\tau))'; \quad (\varphi^\pm(\tau))' = \sum_{k=1}^N A_k^\pm (\varphi_k^\pm(\tau))'.$$

Здесь каждая функция  $(\varphi_k^\pm(\tau))'$  удовлетворяет уравнению (10) с правыми частями

$$\Phi_k(\zeta) = -\partial h_k^\pm(a\zeta, 0) / \partial y_1$$

и условию (11).

Для построения приближённых решений этих уравнений неизвестные функции представлены в виде:

$$(\varphi_k^\pm(\tau))' = \psi_k^\pm(\tau) (1 - \tau^2)^{-1/2},$$

где каждая функция  $\psi_k^\pm(\tau)$  удовлетворяет условию Гельдера на  $[-1, 1]$ . Согласно методу механических квадратур [1], с использованием в качестве точек коллокации корней многочлена Чебышева  $U_{n-1}(\zeta)$ ,

$\zeta_j = \cos(\pi j/n)$ ,  $j = 1, 2, \dots, n-1$  получены системы линейных алгебраических уравнений относительно значений функции  $\psi_k^\pm(\tau)$  в узлах интерполяции

$$\frac{\gamma}{2\pi} \sum_{m=1}^n a_m \psi_{km}^\pm \left[ \frac{1}{\tau_m - \zeta_j} + D(\tau_m - \zeta_j) \right] = \Phi_k^\pm(\zeta_j), \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \quad (12)$$

$$\sum_{m=1}^n a_m \psi_{km}^\pm = 0.$$

После решения систем каждая функция  $\psi_{km}^\pm$  приближается многочленом

$$\psi_k(\tau) \approx \sum_{m=1}^n \psi_{km} \frac{T_n(\tau)}{(\tau - \tau_m) T_n'(\tau_m)},$$

где  $\psi_{km} = \psi_k(\tau_m)$ ,  $m = 0, 1, \dots, n$  – корни полинома Чебышева 1-го рода  $T_n(\tau)$ .

Коэффициенты  $A_k^\pm$  из (7) определяются методом граничной коллокации путем удовлетворения краевым условиям.

Величинами, устанавливающими возможность развития трещины, являются коэффициенты интенсивности напряжений (КИН), которые в данном случае определяются по формулам:

$$K^\pm = \sqrt{a} \lim_{\zeta \rightarrow \pm 1 \pm 0} \sqrt{\zeta^2 - 1} \tau_{y1z}(a\tau, 0).$$

После решения (12) и системы, полученной после удовлетворения условиям на границе, для них получены формулы:

$$K^+ = \frac{G\sqrt{a}}{2n} \sum_{k=1}^N A_k^\pm \sum_{m=1}^n (-1)^m \psi_{km}^\pm \operatorname{ctg} \frac{\gamma_m}{2}; \quad K^- = \frac{(-1)^{n+1} G\sqrt{a}}{2n} \sum_{k=1}^N A_k^\pm \sum_{m=1}^n (-1)^m \psi_{km}^\pm \operatorname{tg} \frac{\gamma_m}{2}$$

,  
где  $\gamma_m = \frac{\pi(2m-1)}{2n}$ .

Для численной реализации предложенного метода рассматривается эллиптический цилиндр с эксцентриситетами эллипсов  $\varepsilon = 0,5$  (рис. 2). Считается, что трещина расположена на отрезке, соединяющем вершины эллипса. На поверхность цилиндра действует самоуравновешивающая нагрузка  $P(\varphi) = \sin 2\varphi$ . Поскольку при таких условиях  $|k^+| > |k^-|$ , результаты расчётов приведены на рис.3 в виде графиков зависимости  $|k^+|$  от безразмерной частоты  $\kappa_0 = \kappa_2 r_0$ .

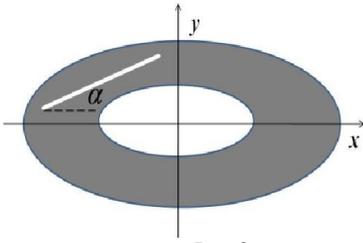


Рис.2

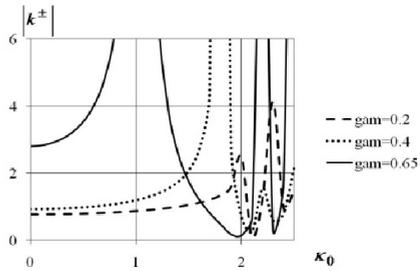


Рис.3

При расчётах варьировался параметр  $\gamma = a/r_0$  – отношение длины трещины к большой оси эллипса. Для данного эллипса при  $\gamma \approx 0,7$  имеет место выход трещины на поверхность цилиндра. Значения параметра  $\gamma$  существенно влияет на значения частоты первого резонанса. При росте  $\gamma$  можно наблюдать и рост абсолютных значений КИН при частотах, меньших за частоту первого резонанса.

#### ЛИТЕРАТУРА.

1. Векуа Н. П. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. / Н. П. Векуа – М.: Наука, 1970. 379 с.
2. Попов В. Г. Сравнение полей перемещений и напряжений при дифракции упругих волн сдвига на различных дефектах: трещина и тонкое жёсткое включение / В. Г. Попов // Динамические системы. 1993. Вып. 12. С.14–23.

#### Сведения об авторе:

**Кириллова Ольга** ассистент кафедры высшей математики,  
Одесская национальная морская академия,  
E-mail: ol007ga@yandex.ru

# ПЕРВАЯ ВАРИАЦИЯ ДЕЙСТВИЯ В СЛУЧАЕ КОНТИНУУМОВ С ВАРИРУЕМЫМИ ГРАНИЧНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

*Ковалев В. А., Радаев Ю. Н.*

*Россия*

Рассматриваются полевые теории механики и физики континуума, основанные на принципе наименьшего действия. Действие в формулировках указанного принципа является интегральным функционалом, варьирование которого осуществляется по физическим полевым переменным при неварьируемых пространственно-временных координатах. Иногда требуется привлечение более широких способов варьирования, включающих трансформацию области интегрирования. Последнее обстоятельство характерно при выводе «естественных» граничных условий на неизвестных поверхностях сильного разрыва поля, границах соприкосновения различных фаз и иных заранее неизвестных поверхностях, варьирование которых допускается принципом наименьшего действия. С помощью теории однопараметрических групп преобразований получены общие формы первой вариации действия при трансформациях пространственно-временных координат и физических полей. Учитываются «навязанные» граничные условия на поверхности, ограничивающей варьлируемую область.

1. Современная механика и физика сплошных деформируемых сред по целому ряду направлений может развиваться только на основе теоретико-полевого подхода. Физическое поле (см., например, [1], [2]) математически представляется некоторым интегральным функционалом:

$$\mathfrak{S} = \int \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\beta) d^4 X. \quad (1)$$

Здесь  $\mathcal{L}$  – «естественная» плотность лагранжиана (плотность действия);  $\varphi^k$  – упорядоченный массив физических полевых переменных;  $X^\beta$  – четыре пространственно-временные координаты. Через  $\partial_\beta$  обозначается оператор *полного* дифференцирования по пространственно-временной координате. Мы не будем явно указывать область интегрирования в (1) и вообще не будем каким-то образом её специфицировать, тем более, что она будет предполагаться варьлируемой. Границу 4-области интегрирования будем обозначать символом  $\partial$ .

Согласно принципу наименьшего действия, действительное поле реализуется таким образом, что действие оказывается экстремальным, т. е. первая вариация действия обращается в нуль для всех допустимых вариаций физических полей:

$$\delta \mathfrak{S} = 0. \quad (2)$$

Здесь *не подвергаются* варьированию пространственно-временные координаты и 4-область интегрирования.

Стационарность действия (при произвольных допустимых вариациях поля) необходимо влечёт динамические уравнения поля

$$\mathcal{E}_k(\mathcal{L}) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} - \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)} = 0. \quad (3)$$

2. Оперирование с различными формами первой вариации интегрального функционала действия существенно упрощается, если воспользоваться теорией однопараметрических групп преобразований [3].

Введём непрерывную однопараметрическую группу геометрических преобразований (группу Ли):

$$\tilde{X}^\beta = \mathcal{X}^\beta(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon) = X^\beta + \varepsilon \xi^\beta(\varphi^s, X^\gamma) + \dots,$$

$$\tilde{\varphi}^k = \Phi^k(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon) = \varphi^k + \varepsilon h^k(\varphi^s, X^\gamma) + \dots$$

Полные вариации переменных  $\varphi^s$ ,  $X^\gamma$  пропорциональны инфинитезимальным образующим группы преобразований:

$$\xi^\gamma = \frac{\delta X^\gamma}{\varepsilon}, \quad h^s = \frac{\delta \varphi^s}{\varepsilon}. \quad (4)$$

Введём символ инфинитезимального преобразования

$$\zeta \cdot \partial = \xi^\alpha \left( \frac{\partial}{\partial X^\alpha} \right)_{\text{expl}} + h^j \frac{\partial}{\partial \varphi^j}. \quad (5)$$

Действие однопараметрической группы преобразований можно продолжить также и на частные производные произвольного порядка. Инфинитезимальный оператор один раз продолженной группы имеет вид

$$\zeta_1 \cdot \partial = \xi^\gamma \left( \frac{\partial}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} + h^j \frac{\partial}{\partial \varphi^j} + h_\alpha^k \frac{\partial}{\partial (\partial_\alpha \varphi^k)}, \quad (6)$$

где дополнительные координаты  $h_\alpha^k$  выражаются согласно формулам первого продолжения ([3, с. 58])

$$h_\alpha^l = \left( \frac{\partial h^l}{\partial X^\alpha} \right)_{\text{expl}} + (\partial_\alpha \varphi^s) \frac{\partial h^l}{\partial \varphi^s} - (\partial_\sigma \varphi^l) \left( \left( \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial X^\alpha} \right)_{\text{expl}} + (\partial_\alpha \varphi^k) \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial \varphi^k} \right).$$

Ещё один важный объект, связанный с инфинитезимальным оператором  $\zeta \cdot \partial$ , – его характеристика

$$Q^l = h^l - (\partial_\sigma \phi^l) \xi^\sigma. \quad (7)$$

Вариация «дифференциальной функции»  $F(\phi^s, \partial_\alpha \phi^s, X^\beta)$  вследствие группового преобразования её аргументов определяется формулой

$$\delta F = \varepsilon (\zeta \cdot \partial) F. \quad (8)$$

3. Варьирование интегральных функционалов с переменной областью интегрирования представляет собой самый важный технический элемент теории вариационных симметрий и законов сохранения. Вывод соответствующих формул может быть выполнен, следуя, например, [4]. Ниже, опираясь на теорию однопараметрических групп преобразований, рассматривается вывод формулы первой вариации интегрального функционала, считая варьированной также область интегрирования. Рассуждения проведём в самом общем случае, когда интегральный функционал определён в некоторой переменной области пространства размерности  $M$ , но плотность действия не зависит от градиентов полевых переменных выше первого порядка.

Прежде всего заметим, что

$$\delta \mathfrak{S} = \int (\delta \mathcal{L} + \mathcal{L} \partial_\sigma \delta X^\sigma) d^M X,$$

откуда на основании (4) и (8) находим

$$\delta \mathfrak{S} = \varepsilon \int ((\zeta \cdot \partial) \mathcal{L} + \mathcal{L} \partial_\sigma \xi^\sigma) d^M X.$$

Используя далее формулу (6), получаем

$$(\zeta \cdot \partial) \mathcal{L} + \mathcal{L} \partial_\sigma \xi^\sigma = \partial_\sigma (\xi^\sigma \mathcal{L}) + Q^l \mathcal{E}_l(\mathcal{L}) + \partial_\sigma \mathcal{K}^\sigma,$$

где  $\mathcal{K}^\sigma = Q^l \partial_l^\sigma \mathcal{L}$ ,  $Q^l = h^l - (\partial_\gamma \phi^l) \xi^\gamma$ .

Последнее равенство можно представить в терминах исчисления вариаций, если умножить обе его части на параметр  $\varepsilon$ :

$$\bar{\delta} \phi^l = \delta \phi^l - (\partial_\gamma \phi^l) \delta X^\gamma,$$

где  $\bar{\delta} \phi^l = \varepsilon Q^l$  – частичная вариация полевой переменной  $\phi^l$ . Полная вариация полевой переменной  $\phi^k$  в данной точке пространства-времени складывается из изменения поля вследствие изменения его функциональной зависимости и изменения, вызванного перемещением  $\delta X^\beta$  в близлежащую точку пространства-времени:

$$\delta \phi^k = \bar{\delta} \phi^k + (\partial_\alpha \phi^k) \delta X^\alpha.$$

Таким образом, получим

$$\delta\mathfrak{Z} = \int (\partial_\sigma(\mathcal{L}\delta X^\sigma) + \bar{\delta}\varphi^l \mathcal{E}_l(\mathcal{L}) + \partial_\sigma(\varepsilon\mathcal{K}^\sigma)) d^M X,$$

и, полагая выполненными дифференциальные уравнения поля  $\mathcal{E}_l(\mathcal{L}) = 0$ , заключаем, что

$$\delta\mathfrak{Z} = \int \partial_\sigma(\mathcal{L}\delta X^\sigma + \varepsilon\mathcal{Q}^l \partial_l^\sigma \mathcal{L}) d^M X. \quad (9)$$

Применяя затем к последнему интегралу теорему Гаусса – Остроградского, для первой вариации действия находим

$$\delta\mathfrak{Z} = \oint_{\partial} \mathcal{N}_\sigma(\mathcal{L}\delta X^\sigma + \partial_l^\sigma \mathcal{L} \bar{\delta}\varphi^l) d^{M-1}\tau, \quad (10)$$

где  $\mathcal{N}_\sigma$  – внешняя единичная ( $\mathcal{N}_\sigma \mathcal{N}^\sigma = 1$ ) нормаль замкнутого  $M-1$ -мерного многообразия  $\partial$ , ограничивающего рассматриваемую  $M$ -область;  $d^{M-1}\tau$  – инвариантный элемент объема многообразия  $\partial$ .

Формула (10) может быть использована при анализе разрывных вариационных задач (т. е. тогда, когда допускаются разрывы первых производных полевых переменных при пересечении  $M-1$ -мерных поверхностей). В формулу (10) вместо частичной вариации поля введём полную и, принимая следующие обозначения для тензора энергии–импульса и первого тензора Пиола–Кирхгофа

$$T_\gamma^\sigma = \mathcal{L}\delta_\gamma^\sigma - \partial_\gamma \varphi^l \partial_l^\sigma \mathcal{L}, \quad -S_l^\sigma = \partial_l^\sigma \mathcal{L}, \quad (11)$$

в результате имеем компактное выражение для первой вариации интегрального функционала действия:

$$\delta\mathfrak{Z} = \oint_{\partial} \mathcal{N}_\sigma T_\gamma^\sigma \delta X^\gamma d^{M-1}\tau - \oint_{\partial} \mathcal{N}_\sigma S_l^\sigma \delta\varphi^l d^{M-1}\tau. \quad (12)$$

Формула (12) сразу же позволяет получить обобщённые уравнения Эрдмана–Вейерштрасса на поверхностях сильного разрыва поля:

$$\mathcal{N}_\sigma [T_\gamma^\sigma] = 0, \quad \mathcal{N}_\sigma [S_l^\sigma] = 0. \quad (13)$$

Если постановка вариационной задачи включает ограничения в виде «навязанных» граничных условий на границе переменной области интегрирования, например, когда на  $\partial$  могут предписываться значения полевых переменных  $\varphi^l = \Gamma^l(X^\gamma)$  ( $\gamma = \overline{1, M}$ ), то вариации координат и полевых переменных на  $\partial$  будут, очевидно, связаны между собой соотношениями

$$\delta\varphi^l = (\partial_\gamma \Gamma^l) \delta X^\gamma.$$

Формула (12) преобразуется, следовательно, к виду

$$\delta\mathfrak{S} = \oint_{\partial} \mathcal{N}_\sigma(T_\gamma^{\sigma\cdot} - (\partial_\gamma \Gamma^l) S_{\cdot l}^{\sigma\cdot}) \delta X^\gamma d^{M-1}\tau, \quad (14)$$

На основании (14) получаем граничные условия на варьируемой границе  $\partial$  :

$$\mathcal{N}_\sigma(T_\gamma^{\sigma\cdot} - (\partial_\gamma \Gamma^l) S_{\cdot l}^{\sigma\cdot}) = 0 \quad (\gamma = \overline{1, M}).$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 13-01-00139 «Гиперболические тепловые волны в твердых телах с микроструктурой»).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ковалев В.А., Радаев Ю.Н. Элементы теории поля: вариационные симметрии и геометрические инварианты. М.: Физматлит, 2009. 156с.
2. Ковалев В.А., Радаев Ю.Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2010. 328с.
3. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400с.
4. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. М.: Физматгиз, 1961. 228с.

### Сведения об авторах:

**Ковалев Владимир Александрович** – профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, + 7 (495) 9579122

**E-mail:** [kovalev.kam@gmail.com](mailto:kovalev.kam@gmail.com)

**Радаев Юрий Николаевич** – ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, + 7 (495) 4343592

**E-mail:** [radayev@ipmnet.ru](mailto:radayev@ipmnet.ru), [y.radayev@gmail.com](mailto:y.radayev@gmail.com)

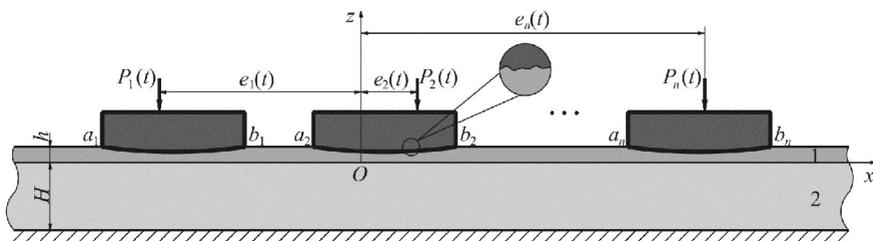
# О КОНФОРМНОМ КОНТАКТЕ СИСТЕМЫ ШТАМПОВ И ТЕЛ С ПОКРЫТИЯМИ

Курдина С.П.  
Россия

В работе исследуется плоское контактное взаимодействие системы жёстких штампов и вязкоупругого основания при наличии тонкого упругого покрытия в случае, когда форма покрытия и формы оснований штампов согласованы (конформны). Получена система разрешающих смешанных интегральных уравнений, которая в функциональном векторном пространстве приведена к одному уравнению с тензорным ядром и к векторным дополнительным условиям. Для получения аналитического решения развит проекционно-спектральный метод метода решения систем смешанных интегральных уравнений плоских задач механики контактных взаимодействий и трибологии для случая быстро осциллирующих функций в исходных данных.

Исследуем контактную задачу для вязкоупругого слоя с покрытием, лежащего на недеформируемом основании, и системы жёстких штампов в случае плоской деформации (см. рисунок). Начиная с момента времени  $\tau_0$ , в поверхность такого основания вдавливаются гладкие жёсткие штампы одинаковой ширины силами  $P_i(t)$  с эксцентриситетом приложения  $e_i(t)$  ( $i = \overline{1, n}$ ,  $n$  — количество штампов). Область контакта со временем не изменяется, длина линий контакта  $b = b_i - a_i$ , а формы основания штампов одинаковы и совпадают с формой покрытия под ними (то есть контакт является согласованным). Покрытие считается тонким по сравнению с областью контакта, т.е. его толщина  $h(x) \ll b$ . Предполагается, что покрытие изготовлено из упругого материала, а нижний слой произвольной толщины  $H$  — из вязкоупругого стареющего однородно материала, момент изготовления которого обозначим через  $\tau_2 \leq \tau_0$ . Предполагается также, что жёсткость покрытия меньше жёсткости нижнего слоя, или же они имеют один порядок.

Для построения математической модели задачи необходимо заменить штампы распределёнными нагрузками  $p_i(x, t) = -q_i(x, t)$ , действующими на тех же участках, где и штампы. Приравнивая вертикальные перемещения [1], вызванные нагрузками  $q_i(x, t)$ , и перемещения штампов, получим ( $i = \overline{1, n}$ ,  $x \in [a_i, b_i]$ )



$$\frac{k_\nu q_i(x, t) h(x)}{E_1} + \frac{2(1-\nu_2^2)}{\pi} \sum_{j=1}^n (\mathbf{I}-\mathbf{V}) \mathbf{F}_j \frac{q_j(x, t)}{E_2(t-\tau_2)} = \delta_i(t) + \alpha_i(t) \left( x - \frac{a_i + b_i}{2} \right), \quad (1)$$

где  $E_1$  — модуль Юнга покрытия,  $\nu_2$ ,  $E_2(t-\tau_2)$  — коэффициент Пуассона и модуль упругомгновенной деформации нижнего слоя,  $k_\nu$  — безразмерный коэффициент, зависящий от условий соединения покрытия с нижним слоем;  $\delta_i(t)$  — осадка  $i$ -го штампа,  $\alpha_i(t)$  — угол его поворота;  $\mathbf{I}$  — тождественный оператор,  $\mathbf{V}$  — интегральный оператор Вольтерра с ядром ползучести при растяжении  $K(t, \tau)$ ,  $\mathbf{F}_i$  — интегральные операторы Фредгольма с ядром плоской контактной задачи  $k_{\text{пл}}[(x-\xi)/H]$  [2], зависящие от условий соединения нижнего слоя и недеформируемого основания.

Дополнительные условия равновесия штампов на основании описываются уравнениями:

$$\int_{a_i}^{b_i} q_i(\xi, t) d\xi = P_i(t), \quad \int_{a_i}^{b_i} \left( \xi - \frac{a_i + b_i}{2} \right) q_i(\xi, t) d\xi = M_i(t), \quad i = \overline{1, n}. \quad (2)$$

где через  $M_i(t) = e_i(t)P_i(t)$  обозначены моменты приложения сил.

Сделаем в (1) и (2) замену переменных по формулам

$$x^* = \frac{2(x-\eta_i)}{b}, \quad \xi^* = \frac{2(\xi-\eta_j)}{b}, \quad t^* = \frac{t}{\tau_0}, \quad \tau_2^* = \frac{\tau_2}{\tau_0}, \quad \lambda = \frac{2H}{b},$$

$$\eta_i = \frac{a_i + b_i}{2}, \quad \delta^{i*}(t^*) = \frac{2\delta_i(t)}{b}, \quad \alpha^{i*}(t^*) = \alpha_i(t), \quad c^*(t^*) = \frac{E_2(t-\tau_2)}{E_1},$$

$$m^*(x^*) = \frac{k_\nu}{1-\nu_2^2} \frac{h(x)}{b}, \quad q^{i*}(x^*, t^*) = \frac{2(1-\nu_2^2)q_i(x, t)}{E_2(t-\tau_2)},$$

$$P^{i*}(t^*) = \frac{4P_i(t)(1-\nu_2^2)}{E_2(t-\tau_2)b}, \quad M^{i*}(t^*) = \frac{8M_i(t)(1-\nu_2^2)}{E_2(t-\tau_2)b^2},$$

$$\mathbf{F}^{ij*} f(x^*) = \int_{-1}^1 k^{ij}(x^*, \xi^*) f(\xi^*) d\xi^*, \quad k^{ij}(x^*, \xi^*) = \frac{1}{\pi} k_{\text{пл}} \left( \frac{x-\xi}{H} \right),$$

$$\mathbf{V}^* f(t^*) = \int_1^{t^*} K^*(t^*, \tau^*) f(\tau^*) d\tau^*, \quad K^*(t^*, \tau^*) = K(t-\tau_2, \tau-\tau_2)\tau_0.$$

Опустив в окончательных формулах звездочки, получим систему интегральных уравнений ( $x \in [-1, 1]$ )

$$c(t)m(x)q^i(x,t) + (\mathbf{I} - \mathbf{V}) \sum_{j=1}^n \mathbf{F}^{ij} q^j(x,t) = \delta^i(t) + \alpha^i(t)x, \quad (3)$$

$$\int_{-1}^1 q^i(\xi,t) d\xi = P^i(t), \quad \int_{-1}^1 \xi q^i(\xi,t) d\xi = M^i(t), \quad i = \overline{1,n}. \quad (4)$$

На каждом штампе можно задать один из 4 типов условий: осадку и угол поворота, вдавливающую силу и момент, осадку и момент, силу и угол поворота. Разумеется, на каждом штампе возможен различный набор условий. Можно показать, что тогда существует всего 15 возможных вариантов постановки задачи. В данной работе рассмотрим лишь решение для случая, когда на всех штампах заданы сила и момент. Решения для остальных 14 вариантов строятся аналогично.

Приведём систему уравнений (1) с дополнительными условиями (2) к одному операторному уравнению с двумя дополнительными векторными условиями. Примем, что

$$\mathbf{q}(x,t) = q^i(x,t)\mathbf{i}^i, \quad \delta(t) = \delta^i(t)\mathbf{i}^i, \quad \alpha(t) = \alpha^i(t)\mathbf{i}^i, \quad \mathbf{P}(t) = P^i(t)\mathbf{i}^i,$$

$$\mathbf{M}(t) = M^i(t)\mathbf{i}^i, \quad \mathbf{k}(x,\xi) = k^{ij}(x,\xi), \quad \mathbf{Gf}(x) = \int_{-1}^1 \mathbf{k}(x,\xi) \cdot \mathbf{f}(\xi) d\xi.$$

Здесь и далее по верхним повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до  $n$ , если левая часть формулы не зависит от этого индекса. Тогда уравнения (3), (4) можно записать в виде

$$c(t)m(x)\mathbf{q}(x,t) + (\mathbf{I} - \mathbf{V})\mathbf{Gq}(x,t) = \delta(t) + \alpha(t)x, \quad x \in [-1,1], \quad (5)$$

$$\int_{-1}^1 \mathbf{q}(\xi,t) d\xi = \mathbf{P}(t), \quad \int_{-1}^1 \xi \mathbf{q}(\xi,t) d\xi = \mathbf{M}(t). \quad (6)$$

Введя (5), (6) обозначения

$$\mathbf{Q}(x,t) = \sqrt{m(x)}\mathbf{q}(x,t), \quad \mathbf{K}(x,t) = \frac{\mathbf{k}(x,\xi)}{\sqrt{m(x)m(\xi)}}, \quad \mathbf{Ff}(x) = \int_{-1}^1 \mathbf{K}(x,\xi) \cdot \mathbf{f}(\xi) d\xi,$$

получим ( $x \in [-1,1]$ )

$$c(t)\mathbf{Q}(x,t) + (\mathbf{I} - \mathbf{V})\mathbf{FQ}(x,t) = [\delta(t) + \alpha(t)x]/\sqrt{m(x)} = \Delta(x,t), \quad (7)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\mathbf{q}(\xi,t)}{\sqrt{m(\xi)}} d\xi = \mathbf{P}(t), \quad \int_{-1}^1 \frac{\xi \mathbf{q}(\xi,t)}{\sqrt{m(\xi)}} d\xi = \mathbf{M}(t). \quad (8)$$

Решение полученного разрешающего операторного уравнения (7) с векторными дополнительными условиями (8) будем строить в классе вектор-функций из гильбертова пространства  $L_2([-1,1],V)$ . Так как в операторное уравнение и дополнительные условия входит функция  $\sqrt{m(x)}$ , связанная с поверхностной неоднородностью покрытия, то при построении решения следует учитывать, что эта функция может быть быстроосциллирующей и даже

разрывной. Поэтому в структуру функционального базиса должна входить функция  $\sqrt{m(x)}$ . Система ортонормированных базисных вектор-функций, удовлетворяющая вышеописанным условиям, сможет быть построена по следующему правилу:

$$\mathbf{p}_k^i(x) = \frac{\mathbf{p}_k^{i*}(x)}{\sqrt{m(x)}}, \quad \mathbf{p}_k^{i*}(x) = p_k^*(x)\mathbf{i}^i, \quad d_{-1} = 1, \quad J_k = \int_{-1}^1 \frac{\xi^k d\xi}{m(\xi)},$$

$$d_k = \begin{vmatrix} J_0 & \cdots & J_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ J_k & \cdots & J_{2k} \end{vmatrix}, \quad p_k^*(x) = \frac{1}{\sqrt{d_{k-1}d_k}} \begin{vmatrix} J_0 & J_1 & \cdots & J_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{k-1} & J_k & \ddots & J_{2k-1} \\ 1 & x & \cdots & x^k \end{vmatrix}.$$

Следуя обобщённому проекционному методу [3], пространство  $L_2([-1,1], V)$  представим в виде прямой суммы евклидова пространства  $L_2^{(0)}([-1,1], V)$ , базисом которого являются функции  $\{\mathbf{p}_0^i(x), \mathbf{p}_1^i(x)\}$ , и ортогонального ему гильбертова пространства  $L_2^{(1)}([-1,1], V)$  с базисом  $\{\mathbf{p}_k^i(x)\}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $k = 2, 3, \dots$ . Тогда неизвестная вектор-функция  $\mathbf{Q}(x, t)$  и правая часть уравнения (7) представимы в виде суммы функций, определённых в пространствах  $L_2^{(0)}([-1,1], V)$  и  $L_2^{(1)}([-1,1], V)$ :  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0 + \mathbf{Q}_1$ ,  $\Delta = \Delta_0 + \Delta_1$ . Причём, из дополнительных условий (8) сразу можно определить  $\mathbf{Q}_0(x, t) \in L_2^{(0)}([-1,1], V)$ , а  $\Delta_1(x, t) \equiv 0$ . Введя ортопроекторы  $\mathbf{P}_0: L_2 \rightarrow L_2^{(0)}$ ,  $\mathbf{P}_1 = \mathbf{I} - \mathbf{P}_0: L_2 \rightarrow L_2^{(1)}$  и подействовав  $\mathbf{P}_1$  на (7), получим уравнение с известной правой частью:

$$c(t)\mathbf{Q}_1(x, t) + (\mathbf{I} - \mathbf{V})\mathbf{P}_1\mathbf{F}\mathbf{Q}_1(x, t) = \Delta_1(x, t) - (\mathbf{I} - \mathbf{V})\mathbf{P}_1\mathbf{F}\mathbf{Q}_0(x, t) = \tilde{\Delta}_1(x, t),$$

решение которого строится в виде ряда по собственным функциям оператора

$$\mathbf{P}_1\mathbf{F}: \quad \mathbf{P}_1\mathbf{F}\boldsymbol{\varphi}_k(x) = \gamma_k\boldsymbol{\varphi}_k(x), \quad \boldsymbol{\varphi}_k(x) = \sum_{l=2}^{\infty} \psi_{kl}^i \mathbf{p}_l^i(x). \quad \text{Тогда функция}$$

$$\mathbf{Q}_1(x, t) = \sum_{k=2}^{\infty} z_k(t)\boldsymbol{\varphi}_k(x), \quad \text{где функции разложения определяются из соотношений}$$

$z_k(t) = (\mathbf{I} - \mathbf{W}_k)\{\Delta_k(t)/[c(t) + \gamma_k]\}$ ,  $\Delta_k(t)$  – функции разложения правой части по  $\tilde{\Delta}_1(x, t)$  по базису  $\boldsymbol{\varphi}_k(x)$ ,  $\mathbf{W}_k$  – операторы Вольтерра с ядром, являющиеся резольвентами ядер  $\gamma_k K(t, \tau)/[c(t) + \gamma_k]$ . Отметим, что решение имеет вид

$$q_i(x, t) = \frac{1}{m(x)} [p_0^{i*}(x)z_0^i(t) + p_1^{i*}(x)z_1^i(t) + \dots],$$

то есть в нём отдельным сомножителем выделена функция  $m(x)$ , что позволяет производить вычисления в случаях, когда формы оснований штампов описываются быстроосциллирующими функциями.

Определив функцию  $Q_1(x, t)$ , можно найти и осадки, и углы поворотов штампов, для чего необходимо подействовать оператором  $P_0$  на уравнение (7).

Автор благодарен А.В. Манжирову за постановку задачи, полезные обсуждения и ценные советы. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-00991).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В. Контактные задачи теории ползучести. Ереван: Изд-во НАН РА, 1999. 318 с.
2. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488 с.
3. Polyanin A.D., Manzhirou A.V. Handbook of Integral Equations, 2nd edition. Boca Raton: Chapman & Hall/ CRC, 2008. 1144 p.

### Сведения об авторе:

**Курдина Светлана Павловна**

Аспирант кафедры высшей математики Московского государственного университета приборостроения и информатики

Тел.: 8 499 2695810, E-mail: [svetlana-ka@yandex.ru](mailto:svetlana-ka@yandex.ru)

# ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА МНОЖЕСТВЕННОГО КОНФОРМНОГО КОНТАКТА ДЛЯ ОСНОВАНИЙ С ПОВЕРХНОСТНО НЕОДНОРОДНЫМИ ПОКРЫТИЯМИ

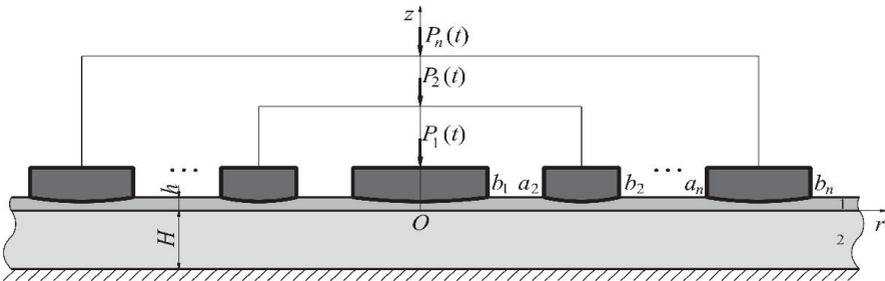
*Манжиров А.В., Казаков К.Е., Гупта Н.К.*

*Россия, Индия*

В работе описан метод построения решения осесимметричной задачи о множественном конформном (согласованном) контакте вязкоупругого основания с упругим поверхностно неоднородным покрытием и системы жёстких штампов. Этот метод позволяет получать эффективные решения в случае, когда формы оснований штампов и неоднородность покрытия описываются сложными быстро осциллирующими и даже разрывными функциями. Для осесимметричной контактной задачи выведена система разрешающих смешанных интегральных уравнений, решение которой получено в аналитическом виде, причём в выражениях для контактных напряжений функции формы оснований штампов и неоднородности покрытия выделены отдельным слагаемым, то есть удаётся найти тонкую структуру решения.

Рассмотрим однородный вязкоупругий стареющий слой толщины  $H$  с тонким упругим поверхностно неоднородным покрытием, лежащий на недеформируемом подстилающем основании (см. рис.). В момент времени  $\tau_0$  в поверхность вышеописанного слоя начинают вдавливаются гладкие кольцевые жёсткие штампы силами  $P_i(t) (i = \overline{1, n}, n - \text{количество штампов})$ . Область контакта со временем не изменяется, а формы основания штампов совпадают с формой покрытия под ними, то есть контакт является согласованным ( $a_i, b_i - \text{внутренний и внешний радиусы штампов}$ ). Покрытие считается тонким по сравнению с областью контакта, т.е. его толщина  $h(r) \ll \min_{i=1, n} (b_i - a_i)$ .

Предполагается также, что жёсткость покрытия меньше жёсткости нижнего слоя, или же они одного порядка.



Для построения математической модели задачи необходимо заменить штампы распределёнными нагрузками  $p_i(r, t) = -q_i(r, t)$ , действующими на тех же участках, где и штампы. Приравнивая вертикальные перемещения [1], вызванные нагрузками  $q_i(r, t)$ , и перемещения штампов, получим

$$\frac{q_i(r,t)h(r)}{R(r)} + \frac{2(1-\nu_2^2)}{H} \sum_{j=1}^n (\mathbf{I} - \mathbf{V}) \mathbf{F}_j \frac{q_j(r,t)}{E_2(t-\tau_2)} = \delta_i(t), \quad (i = \overline{1, n}, \quad r \in [a_i, b_i]) \quad (1)$$

где  $R(r)$  — функция жёсткости покрытия, зависящая от условий его соединения с нижним слоем, причём,

$$\text{в случае идеального контакта} \quad R(r) = \frac{E_1(r)[1-\nu_1(r)]}{[1+\nu_1(r)][1-2\nu_1(r)]},$$

$$\text{а в случае гладкого —} \quad R(r) = \frac{E_1(r)}{1-\nu_1^2(r)},$$

где  $\nu_1(r)$ ,  $E_1(r)$  — коэффициент Пуассона и модуль Юнга покрытия,  $\nu_2$ ,  $E_2(t-\tau_2)$  — коэффициент Пуассона и модуль упругомгновенной деформации нижнего слоя;  $\delta_i(t)$  — осадка  $i$ -го штампа;  $\mathbf{I}$  — тождественный оператор,  $\mathbf{V}$  — интегральный оператор Вольтерра с ядром ползучести при растяжении  $K(t, \tau)$ ,  $\mathbf{F}_i$  — интегральные операторы Фредгольма с ядром осесимметричной контактной задачи  $k_{\text{ас}}[r/H, \rho/H]$  [2], зависящие от условий соединения нижнего слоя и недеформируемого основания.

Дополнительные условия равновесия штампов на основании описываются уравнениями:

$$\int_{a_i}^{b_i} q_i(\rho, t) \rho d\rho = P_i(t), \quad i = \overline{1, n}. \quad (2)$$

Сделав в (1) и (2) замену переменных по формулам:

$$\begin{aligned} (r^*)^2 &= \frac{r^2 - a_i^2}{b_i^2 - a_i^2}, \quad (\rho^*)^2 = \frac{r^2 - a_j^2}{b_j^2 - a_j^2}, \quad r \in [a_i, b_i], \quad \rho \in [a_j, b_j], \quad t^* = \frac{t}{\tau_0}, \\ \tau_2^* &= \frac{\tau_2}{\tau_0}, \quad \lambda = \frac{H}{b_1 - a_1}, \quad \eta_i = \frac{a_i}{b_1 - a_1}, \quad \zeta_i^2 = \frac{b_i^2 - a_i^2}{(b_1 - a_1)^2}, \quad \delta_i^*(t^*) = \frac{\delta_i(t)\zeta_i}{b_1 - a_1}, \\ h^{i*}(r^*) &= \frac{h(r)}{b_1 - a_1}, \quad R^*(r^*) = \frac{2(1-\nu_2^2)R(r)}{E_0}, \quad c^*(t^*) = \frac{E_2(t-\tau_2)}{E_0}, \quad m^{i*}(r^*) = \frac{h^{i*}(r^*)}{R^{i*}(r^*)}, \\ q^{i*}(r^*, t^*) &= \frac{2(1-\nu_2^2)q_i(r, t)\zeta_i}{E_2(t-\tau_2)}, \quad P^{i*}(t^*) = \frac{4P_i(t)(1-\nu_2^2)\zeta_i}{\pi E_2(t-\tau_2)(b_i^2 - a_i^2)}, \\ \mathbf{F}^{ij*} f(x^*) &= \int_0^1 k^{ij}(r^*, \rho^*) f(\rho^*) \rho^* d\rho^*, \quad k^{ij}(r^*, \rho^*) = \frac{\zeta_i \zeta_j}{\lambda} k_{\text{ас}} \left( \frac{r}{H}, \frac{\rho}{H} \right), \end{aligned}$$

$$\mathbf{V}^* f(t^*) = \int_1^{t^*} K^*(t^*, \tau^*) f(\tau^*) d\tau^*, \quad K^*(t^*, \tau^*) = K(t - \tau_2, \tau - \tau_2) \tau_0,$$

и опустив в окончательных формулах звездочки, получим систему интегральных уравнений ( $r \in [0, 1]$ ):

$$c(t) m^i(r) q^i(r, t) + (\mathbf{I} - \mathbf{V}) \sum_{j=1}^n \mathbf{F}^{ij} q^j(r, t) = \delta^i(t), \quad (3)$$

$$\int_0^1 q^i(\rho, t) \rho d\rho = P^i(t), \quad i = \overline{1, n}. \quad (4)$$

Легко видеть, что на каждом штампе можно задать один из двух типов условий: осадку или вдавливающую силу. Разумеется, на каждом штампе возможен различный набор условий. Очевидно, что тогда существует всего 3 возможных варианта постановки задачи. В данной работе рассмотрим лишь решение для случая, когда на всех штампах заданы силы (квазистатические условия). Решения для остальных вариантов строятся аналогично.

Приведём систему уравнений (1) с дополнительными условиями (2) к одному операторному уравнению с дополнительным векторным условием. Примем, что

$$\mathbf{q}(r, t) = q^i(r, t) \mathbf{i}^i, \quad \delta(t) = \delta^i(t) \mathbf{i}^i, \quad \mathbf{P}(t) = P^i(t) \mathbf{i}^i, \quad \mathbf{k}(r, \rho) = [k^{ij}(r, \rho)]_{n \times n},$$

$$\mathbf{Gf}(r) = \int_0^1 \mathbf{k}(r, \rho) \cdot \mathbf{f}(\rho) \rho d\rho, \quad \mathbf{M}(r) = \text{diag}_n \{m^i(r)\}.$$

Здесь и далее по верхним повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до  $n$ , если левая часть формулы не зависит от этого индекса. Тогда уравнения (3), (4) можно записать в виде

$$c(t) \mathbf{M}(r) \mathbf{q}(r, t) + (\mathbf{I} - \mathbf{V}) \mathbf{Gq}(r, t) = \delta(t), \quad r \in [0, 1], \quad (5)$$

$$\int_0^1 \mathbf{q}(\rho, t) \rho d\rho = \mathbf{P}(t). \quad (6)$$

Введя в (5), (6) обозначения

$$\mathbf{Q}(r, t) = \mathbf{M}^{1/2}(r) \mathbf{q}(r, t), \quad \mathbf{K}(r, \rho) = \mathbf{M}^{-1/2}(r) \mathbf{k}(r, \rho) \mathbf{M}^{-1/2}(\rho),$$

$$\mathbf{Ff}(r) = \int_{-1}^1 \mathbf{K}(r, \rho) \cdot \mathbf{f}(\rho) \rho d\rho,$$

получим ( $r \in [0, 1]$ )

$$c(t) \mathbf{Q}(r, t) + (\mathbf{I} - \mathbf{V}) \mathbf{FQ}(r, t) = \delta(t) / \sqrt{m(r)} = \Delta(r, t), \quad (7)$$

$$\int_0^1 \frac{\mathbf{q}(\rho, t)}{\sqrt{m(\rho)}} \rho d\rho = \mathbf{P}(t). \quad (8)$$

Здесь  $\mathbf{M}^{1/2}(r) = \text{diag}_n \{\sqrt{m^i(r)}\}$ ,  $\mathbf{M}^{-1/2}(r) = \text{diag}_n \{1/\sqrt{m^i(r)}\}$ .

Решение полученного разрешающего операторного уравнения (7) с век-

торным дополнительным условием (8) строится в классе вектор-функций из гильбертова пространства  $L_2([0,1],V)$ . Так как операторное уравнение и дополнительное условие содержат функции  $\sqrt{m^i(r)}$ , то при построении решения следует учитывать, что эта функция может быть быстро осциллирующей и даже разрывной. Поэтому, в структуру функционального базиса должны входить функции  $\sqrt{m^i(r)}$ . Система ортонормированных базисных вектор-функций, удовлетворяющая вышеописанным условиям, может быть построена по следующему правилу:

$$\mathbf{p}_k^i(r) = \mathbf{M}^{-1/2}(r)\mathbf{p}_k^{i*}(r), \quad \mathbf{p}_k^{i*}(r) = p_k^{i*}(r)\mathbf{i}^i, \quad d_{-1,i} = 1, \quad J_{k,i} = \int_0^1 \frac{\rho^{2k+1} d\rho}{m^i(\rho)},$$

$$d_{k,i} = \begin{vmatrix} J_{0,i} & \cdots & J_{k,i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{k,i} & \cdots & J_{2k,i} \end{vmatrix}, \quad p_k^{i*}(r) = \frac{1}{\sqrt{d_{k-1,i}d_{k,i}}} \begin{vmatrix} J_{0,i} & J_{1,i} & \cdots & J_{k,i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{k-1,i} & J_{k,i} & \ddots & J_{2k-1,i} \\ 1 & r^2 & \cdots & r^{2k} \end{vmatrix}.$$

Следуя обобщённому проекционному методу (см., например, [2,3]), пространство  $L_2([0,1],V)$  представим в виде прямой суммы евклидова пространства  $L_2^{(0)}([0,1],V)$ , базисом которого являются функции  $\{\mathbf{p}_0^i(r)\}$ , и ортогонального ему гильбертова пространства  $L_2^{(1)}([0,1],V)$  с базисом  $\{\mathbf{p}_k^i(x)\}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Тогда неизвестная вектор-функция  $\mathbf{Q}(r, t)$  и правая часть уравнения (7) представимы в виде суммы функций, определённых в пространствах  $L_2^{(0)}([0,1],V)$  и  $L_2^{(1)}([0,1],V)$ :  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0 + \mathbf{Q}_1$ ,  $\Delta = \Delta_0 + \Delta_1$ . Причём из дополнительных условий (8) сразу можно определить  $\mathbf{Q}_0(r, t) \in L_2^{(0)}([0,1],V)$ , а  $\Delta_1(r, t) \equiv 0$ . Введя ортопроекторы  $\mathbf{P}_0 : L_2 \rightarrow L_2^{(0)}$ ,  $\mathbf{P}_1 = \mathbf{I} - \mathbf{P}_0 : L_2 \rightarrow L_2^{(1)}$  и подействовав  $\mathbf{P}_1$  на (7), получим уравнение с известной правой частью  $c(t)\mathbf{Q}_1(r, t) + (\mathbf{I} - \mathbf{V})\mathbf{P}_1\mathbf{F}\mathbf{Q}_1(r, t) = \Delta_1(r, t) - (\mathbf{I} - \mathbf{V})\mathbf{P}_1\mathbf{F}\mathbf{Q}_0(r, t) = \tilde{\Delta}_1(r, t)$ , решение которого строится в виде ряда по собственным функциям оператора  $\mathbf{P}_1\mathbf{F}$ :  $\mathbf{P}_1\mathbf{F}\boldsymbol{\varphi}_k(r) = \gamma_k\boldsymbol{\varphi}_k(r)$ ,  $\boldsymbol{\varphi}_k(r) = \sum_{l=1}^{\infty} \Psi_{kl}^i \mathbf{p}_l^i(r)$ , то есть в виде  $\mathbf{Q}_1(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k(t)\boldsymbol{\varphi}_k(r)$ , где функции разложения определяются из соотношений  $z_k(t) = (\mathbf{I} - \mathbf{W}_k)\{\Delta_k(t)/[c(t) + \gamma_k]\}$ ,  $\Delta_k(t)$  – функции разложения

правой части по  $\tilde{\Delta}_1(r, t)$  по базису  $\phi_k(r)$ ,  $\mathbf{W}_k$  – операторы Вольтерра с ядрами, являющимися резольвентами ядер  $\gamma_k K(t, \tau) / [c(t) + \gamma_k]$ . Отметим, что решение имеет вид

$$q^i(r, t) = \frac{1}{m^i(r)} [p_0^{i*}(r) z_0^i(t) + \dots] \quad (i = \overline{1, n}),$$

то есть в нем отдельным сомножителем выделена функция  $m^i(r)$ , что позволяет производить вычисления в случаях, когда формы оснований штампов и поверхностная неоднородность покрытия описываются быстро осциллирующими и даже разрывными функциями.

Определив функцию  $\mathbf{Q}_1(r, t)$ , можно найти и осадки и углы поворотов штампов, для чего необходимо подействовать оператором  $\mathbf{P}_0$  на уравнение (7).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 12-01-00991 и № 13-01-92693).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В. Контактные задачи теории ползучести. Ереван: Изд-во НАН РА, 1999. 318с.
2. Манжиров А.В., Курдина С.П., Кухарский С. О согласованном контакте штампов и тел с покрытиями, имеющих сложный профиль поверхности, //Иzv. Сарат. ун-та. Сер. Мат. Мех. Инф. 2012. Т.12. Вып.4. С.80–89.
3. Манжиров А.В., Казаков К.Е. Кухарский С. Системы смешанных интегральных уравнений в проблеме множественного конформного контакта // Развитие идей Л.А. Галина в механике. Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013. С.280–304.

### Сведения об авторах:

**Манжиров Александр Владимирович**, д.ф.м.н., профессор

Зав. лабораторией моделирования в механике деформируемого твёрдого тела Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН; зав. филиалом кафедры прикладной математики МГТУ им. Н.Э. Баумана в ИПМех РАН

Тел.: 8 499 4344138    E-mail: [manzh@inbox.ru](mailto:manzh@inbox.ru)

**Казаков Кирилл Евгеньевич**, к.ф.м.н.,

Доцент кафедры прикладной математики МГТУ им. Н.Э. Баумана

E-mail: [kazakov@ipmnet.ru](mailto:kazakov@ipmnet.ru)

**Гупта Нариндер Кумар (Gupta Narinder Kumar)**, профессор

Главный научный сотрудник Индийской национальной научной академии

E-mail: [narinder\\_gupta@yahoo.com](mailto:narinder_gupta@yahoo.com)

# ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ О ЗАЛЕЧИВАНИИ ТРЕЩИНЫ, ДВИЖУЩЕЙСЯ С ПЕРЕМЕННОЙ СКОРОСТЬЮ В ТЕРМОУПРУГОЙ СРЕДЕ

*Мартirosян А.Н., Динунц А.С., Давтян А.В., Мартirosян Г.А.  
Армения*

Рассматривается полубесконечная трещина, в которой содержится жидкость с примесями, край которой движется с переменной скоростью.

Уравнения термоупругости в перемещениях для изотропной среды в плоском случае имеют вид:

$$\bar{a}^{-2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + b^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + (\bar{a}^{-2} - b^2) \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}; \bar{a}^{-2} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + b^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + (\bar{a}^{-2} - b^2) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где  $U, V$  – компоненты перемещений,  $a, b$  – скорости продольных и поперечных волн,  $\bar{a}^{-2} = a^2 + \bar{\delta}$ ,  $\bar{\delta} = K_4 \rho^{-1} (c_p - c_v) c_v^{-1}$ ,  $K_4 = \lambda + \frac{2}{3} \mu$  – объёмный модуль,  $\lambda, \mu$  – коэффициенты Ляме,  $\rho$  – плотность упругой среды,  $c_p, c_v$  – теплоёмкости. При  $t=0$  имеем нулевые начальные условия:  $U = V = \partial U / \partial t = \partial V / \partial t = 0$ . Граничные условия на трещине и вне её, с учётом наращивания трещины за счёт примесей в жидкости концентрации  $c$ , ( $\partial c / \partial y = \text{const}$ ,  $-i_0 = \rho D \partial c / \partial y$  – постоянный диффузионный поток примесей в жидкости [2]), имеют вид ( $y=0$ ):

$$\sigma_{xy} = 0, -\infty < x < \infty, \quad (2)$$

$$V = V^-(t, x) = 0, x < \ell(t),$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + K_2 \frac{\partial U}{\partial x} + K_3 \frac{\partial V}{\partial y} = \sigma_+^0(t, x) = -\frac{i_0}{\rho_s} H(x) H(t) H(vt - x), x > \ell(t),$$

$$K_2 = \frac{\rho}{\rho_s} K (\bar{a}^2 - 2b^2) + \xi; K_3 = \frac{\rho}{\rho_s} K \bar{a}^2 + \xi, \xi = \frac{c_p - c_v}{c_v l} \frac{vb_0 \gamma \rho}{\alpha \rho_s},$$

где  $t$  – время,  $x$  – координата вдоль границы полуплоскости,  $K$  – трибологическая постоянная граница трещины,  $D$  – коэффициент диффузии,  $v$  – скорость движения флюида,  $\ell(t)$  – некоторая гладкая функция – положение линии раздела граничных условий,  $\rho_s$  – плотность осадков в жидкости, слагаемое в граничном условии, содержащее  $i_0$ , соответствует, имеющей место при входе флюида в трещину, плотности потока концентрации примесей по оси  $y$ ,  $\rho$  – плотность упругой среды,  $\alpha$  – коэффициент температуропроводности,  $\gamma = \partial c / \partial T$ ,  $\gamma = \text{const}$ ,  $T$  – есть температура среды,  $2b_0$  – начальная ширина трещины.

Значения функций  $\sigma = \sigma_-(t, x)$  при  $x < \ell(t)$  и  $V = V_+(t, x)$  при  $x > \ell(t)$  неизвестны. Решение ищется методом интегральных преобразований Лапласа по  $t$  и Фурье по  $x$ . Обозначив через  $\bar{U}, \bar{V}$  преобразования Лапласа по  $t$  от  $U, V$  и через  $\bar{\bar{U}}, \bar{\bar{V}}$  - преобразование Фурье по  $x$  от  $\bar{U}, \bar{V}$ , можно записать:

$$\bar{U}; \bar{V} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\bar{\alpha}x - i\bar{\beta}_n y} \bar{\bar{U}}_n; \bar{\bar{V}}_n d\bar{\alpha}, \bar{\beta}_n = i\sqrt{s^2 c_n^{-2} + \bar{\alpha}^{-2}}, c_1 = \bar{a}, c_2 = b \quad (3)$$

где  $s = -i\omega$  есть параметр преобразований Лапласа по  $t$  и Фурье по  $x$ . Обозначая изображения функций  $\sigma(t, x), V(t, x)$  через  $\bar{\bar{\sigma}}(s, \bar{\alpha}), \bar{\bar{V}}$ , соответственно, и учитывая (1), (2), можно получить:

$$\bar{\bar{V}}(s, \bar{\alpha}) = \bar{\bar{S}}(s, \bar{\alpha}) \bar{\bar{\sigma}}(s, \bar{\alpha}), \quad (4)$$

$$\bar{\bar{S}}(s, \bar{\alpha}) = \frac{s^2 \bar{\beta}_1}{ib^2 R(\bar{\alpha})}, R(\bar{\alpha}) = \frac{\bar{\beta}_1 \omega^3}{b^2} - K_2 (\bar{\beta}_2^{-2} - \bar{\alpha}^{-2} - 2\bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2) \bar{\alpha}^{-2} - K_3 \bar{\beta}_1^2 (\bar{\beta}_2^{-2} - \bar{\alpha}^{-2}) + 2K_3 \bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 \bar{\alpha}^{-2},$$

где  $R(\bar{\alpha})$  - функция типа Рэлея. Показано, что функция  $R(\bar{\alpha})$  имеет только два корня, находящихся на вещественной оси. Оригинал  $S(t, x)$ , соответствующий  $\bar{\bar{S}}$ , равен  $V(t, x)$  при  $\sigma(t, x) = \delta(t)\delta(x)$  ( $\delta$  - функция Дирака).

Факторизация функции  $\bar{\bar{S}}(s, \bar{\alpha})$  имеет вид:

$$\bar{\bar{S}}(s, \bar{\alpha}) = \bar{\bar{S}}_+(s, \bar{\alpha}) \bar{\bar{S}}_-(s, \bar{\alpha}), \bar{\bar{S}}_{\pm}(s, \bar{\alpha}) = \frac{C_0 \sqrt{\frac{1}{a} - \frac{i\bar{\alpha}}{s}}}{\sqrt{s} \left( \frac{\alpha_0}{a} - \frac{i\bar{\alpha}}{s} \right) D^{\pm} \left( \frac{i\bar{\alpha}}{s} \right)}, \bar{\bar{S}}_{\pm}(s, \bar{\alpha}) = \frac{\sqrt{\frac{1}{a} + \frac{i\bar{\alpha}}{s}}}{\sqrt{s} \left( \frac{\alpha_0}{a} + \frac{i\bar{\alpha}}{s} \right) D^{\mp} \left( \frac{i\bar{\alpha}}{s} \right)} \quad (5)$$

$$\chi(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{a}}^{1/b} \ln \frac{R(\zeta)}{R(\bar{\zeta})} \frac{d\zeta}{\zeta - u}, D^{\pm} \left( \frac{i\bar{\alpha}}{s} \right) = 1 + \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}} F_1(u) \frac{du}{u \mp \frac{i\bar{\alpha}}{s}}, D^{\mp} \left( \frac{i\bar{\alpha}}{s} \right) = 1 + \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}} F_2(u) \frac{du}{u \mp \frac{i\bar{\alpha}}{s}} \quad (6)$$

$$C_0 = \bar{a}^2 b^{-2} (K_2 + K_3)^{-1}, F_1(u) = \mu(u) \exp \chi(u), F_2(u) = -\mu(u) \exp(-\chi(u)), \quad (7)$$

$$\mu(u) = \frac{1}{\pi} \frac{\frac{1}{b^2} \sqrt{u^2 - \bar{a}^{-2}} + 2(K_2 - K_3) u^2 \sqrt{u^2 - \bar{a}^{-2}} \sqrt{b^{-2} - u^2}}{\sqrt{\left( \frac{1}{b^2} \sqrt{u^2 - \frac{1}{\bar{a}^2}} + 2(K_2 - K_3) u^2 \sqrt{u^2 - \frac{1}{\bar{a}^2}} \sqrt{\frac{1}{b^2} - u^2} \right)^2 + \left( (K_2 + K_3) u^2 - K_3 \frac{1}{\bar{a}^2} \right)^2 \left( \frac{1}{b^2} - 2u^2 \right)^2}}$$

Здесь  $\pm \alpha_0$  - корни функции типа Рэлея  $R(\bar{\alpha}\alpha/\omega)$  (4). Функции  $\bar{\bar{S}}_+(s, \bar{\alpha})$  и  $\bar{\bar{S}}_-(s, \bar{\alpha})$  - аналитические функции, соответственно, в верхней и нижней

полуплоскостях плоскости  $\bar{\alpha}$ . Обозначая  $\bar{P}_{\pm} = 1/\bar{S}_{\pm}$  и вычисляя оригиналы  $P_{+}(t, x), S_{+}(t, x)$  по формуле обращения, получим:

$$S_{+}(t, x) = \frac{-1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \left\{ H(x) \sqrt{x} \left[ \frac{A_2}{\sqrt{1-\alpha_0}} \int_{\alpha_0}^1 \frac{\delta(t-hx\bar{\alpha}^{-1})}{\sqrt{h-\alpha_0}} dh + \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{a}} F_4(h) \delta\left(t-\frac{hx}{a}\right) dh \right] \right\}, \quad (8)$$

$$P_{+}(t, x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{\alpha_0}{a} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \left\{ \frac{H(x)}{\sqrt{x}} \left[ A_1 \delta\left(t-\frac{x}{a}\right) + \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{a}} F_3(h) \delta(t-hx) dh \right] \right\}, \quad (9)$$

$$F_3(h) = \int_h^{\frac{1}{a}} \frac{d}{du} \left( \frac{F_1(u)}{\sqrt{u-a^{-1}}} \right) \frac{du}{\sqrt{u-h}} - \frac{F_1(b^{-1})}{\sqrt{b^{-1}-a^{-1}} \sqrt{b^{-1}-h}}, \quad F_4(h) = \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{a}} \frac{F_2(u) du}{(\alpha_0 - \bar{a}u) \sqrt{u-a^{-1}} \sqrt{u-h\bar{a}^{-1}}},$$

$$A_2 = 1 + \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{a}} \frac{F_2(u)}{u-a^{-1}} du, \quad F(u) = \frac{F_2(u) \sqrt{u-1}}{(u-\alpha_0)}, \quad A_1 = 1 + \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{a}} \frac{F_1(u)}{u-a^{-1}} du$$

где  $F_1(u), F_2(u)$  даются формулой (7). Подобные формулы получаются для  $S_{-}$  и  $P_{-}$ , заменяя, соответственно, в (8), (9)  $x$  через  $-x$  и умножая на постоянные, соответственно,  $C_0^{-1}$  и  $C_0$ . Как видно из (9), имеет место

$$S_{+}(t, x) = P_{+}(t, x) = 0 \text{ при } x < bt, \quad S_{-}(t, x) = P_{-}(t, x) = 0 \text{ при } x > -bt. \quad (10)$$

Отметим, что факторизация  $\bar{S} = \bar{S}_{+} \cdot \bar{S}_{-}$ , которая даётся формулой (5), соответствует тому случаю, когда  $|\dot{\ell}(t)| < b$ . Тогда неизвестные функции

$V_{+}(t, x), \sigma_{-}(t, x)$  определяются с помощью следующих формул [1]:

$$V_{+} = S_{+} ** [(S_{-} ** \sigma_{+}) H(x-\ell)], \quad \sigma_{-} = -P_{-} ** [(S_{-} ** \sigma_{+}) H(\ell-x)], \quad (11)$$

где символ  $(**)$  означает свёртку по переменным  $t, x$ , а  $H$  – функция Хевисайда. По формуле (11), учитывая (2) и (8), получим:

$$V_{+} = \frac{-2i_0 C_0}{\pi \rho_3} \sum_{n=0}^4 \left[ \frac{A_2}{\sqrt{1-\alpha_0}} \int_{\alpha_0}^1 \frac{M_n(x, t, h)}{\sqrt{h-\alpha_0}} dh + \int_1^{\frac{1}{a}} F_4(h) M_n(x, t, h) dh \right] H(x-\ell(t)) \quad (12)$$

где

$$M_0(x, t, h) = H(x-\ell_0) \sqrt{x-\ell_0} \frac{\bar{a}-\dot{\ell}(t_0)}{a-h\dot{\ell}(t_0)} \left\{ \sqrt{\bar{a}t_0-\frac{\bar{a}}{v}\ell_0} \sqrt{\frac{\bar{a}}{v}+1} \left( \alpha_0 + \frac{\bar{a}}{v} \right)^{-1} D_{-}^{-1} \left( \frac{\bar{a}}{v} \right) H(vt_0-\ell_0) H(\bar{a}t+\ell_0) + \right. \\ \left. + A_2 \sqrt{\bar{a}t_0+\ell_0} \alpha_0 \sqrt{1-\alpha_0} \left( \frac{\bar{a}}{v} + \alpha_0 \right)^{-1} H(\bar{a}t_0+\ell_0) H(-\bar{a}t_0-\ell_0) - \sqrt{-\ell_0} H(-\ell_0) H(\bar{a}t+\ell_0) \Phi \left( -\frac{\bar{a}t}{\ell_0} \right) \right\}, \\ M_1(x, t, h) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\bar{a}}{v} \right) \sqrt{\frac{1}{v} + \frac{1}{a}} \left( \alpha_0 + \frac{\bar{a}}{v} \right)^{-1} \left( \frac{1}{v} - \frac{h}{a} \right)^{-1} (M_{11}(x, t, h) \varphi_{11}(x, t, h) + M_{12}(x, t, h) \varphi_{12}(x, t, h))$$

$$M_{11}(x, t, h) = \frac{t - \frac{x}{v}}{2\sqrt{\frac{1}{v} - \frac{h}{a}}} \ln \left| \frac{\sqrt{vt_0 - \ell_0} - \sqrt{(x - \ell_0)(1 - vha^{-1})}}{\sqrt{vt_0 - \ell_0} + \sqrt{(x - \ell_0)(1 - vha^{-1})}} \right| + \sqrt{t_0 - \frac{\ell_0}{v}} \sqrt{x - \ell_0},$$

$$\varphi_{11} = H(\bar{a}_0 + \ell_0) H(vt_0 - \ell_0) H(\bar{a} - hx), \varphi_{12} = H(-\bar{a}_0 - \ell_0) H(\bar{a} - hx) H(\bar{a} + x),$$

$$M_{12}(x, t, h) = \frac{t - \frac{x}{v}}{2\sqrt{\frac{1}{v} - \frac{h}{a}}} \ln \left| \frac{\sqrt{(v + \bar{a})(\bar{a} - hx)} - \sqrt{(x + \bar{a})(\bar{a} - v)}}{\sqrt{(v + \bar{a})(\bar{a} - hx)} + \sqrt{(x + \bar{a})(\bar{a} - v)}} \right| + \sqrt{\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{a}\right)(\bar{a} - hx)(x + \bar{a})},$$

$$M_2(x, t, h) = 0.5(1 + \alpha_0) \sqrt{1 - \alpha_0} (\alpha_0 + v^{-1}\bar{a})^{-1} (\alpha_0 + h)^{-1} \sum_{i=1}^3 M_{2i}(x, t, h) \varphi_{2i}(x, t, h),$$

$$M_{21}(x, t, h) = \frac{\bar{a} + \alpha_0 x}{\sqrt{\alpha_0 + h}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\bar{a}_0 + \alpha_0 \ell_0}{(x - \ell_0)(\alpha_0 + h)}} + \sqrt{\bar{a}_0 + \alpha_0 \ell_0} \sqrt{x - \ell_0}, \ell = \ell(t_0), \dot{\ell} = \dot{\ell}(t_0),$$

$$M_{22}(x, t, h) = -\frac{\bar{a} + \alpha_0 x}{\sqrt{\alpha_0 + h}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{(1 - \alpha_0)(\bar{a} - hx)}{(x + \bar{a})(\alpha_0 + h)}} - \frac{1}{h + 1} \sqrt{(1 - \alpha_0)(x + \bar{a})(\bar{a} - hx)},$$

$$\varphi_{21} = H(-\bar{a}_0 - \ell_0) H(\bar{a} + \alpha_0 x) H(\bar{a} - hx), \varphi_{22} = H(-\bar{a}_0 - \ell_0) H(\bar{a} + x) H(\bar{a} - hx),$$

$$M_{23}(x, t, h) = -\frac{\pi}{2} \frac{\bar{a} + \alpha_0 x}{\sqrt{\alpha_0 + h}}, \varphi_{23} = H(-\bar{a}_0 - \ell_0) H(-\bar{a} - x) H(\bar{a} + \alpha_0 x), \bar{a}(t - t_0) = h(x - \ell(t_0)),$$

$$M_3(x, t, h) = 0.5(M_{31}(x, t, h) \varphi_{31}(x, t, h) + M_{32}(x, t, h) \varphi_{32}(x, t, h)),$$

$$M_{31}(x, t, h) = \sqrt{x - \ell_0} \sqrt{-\ell_0} - \frac{x}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{x - \ell_0}{-\ell_0}} - 1}{\sqrt{\frac{x - \ell_0}{-\ell_0}} + 1} \right|, M_{32}(x, t, h) = \frac{\sqrt{\bar{a} - hx} \sqrt{\bar{a} - x}}{h - 1} - \frac{x}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{\bar{a} - hx}{\bar{a} - x}} - 1}{\sqrt{\frac{\bar{a} - hx}{\bar{a} - x}} + 1} \right|,$$

$$\varphi_{32} = H(\bar{a}_0 - \ell_0) H(\bar{a} + x) H(\bar{a} - hx), \varphi_{31} = H(\bar{a}_0 + \ell_0) H(-\ell_0) H(\bar{a} - hx),$$

$$M_4(x, t, h) = M_{41}(x, t, h) \varphi_{41}(x, t, h) + M_{42}(x, t, h) \varphi_{42}(x, t, h),$$

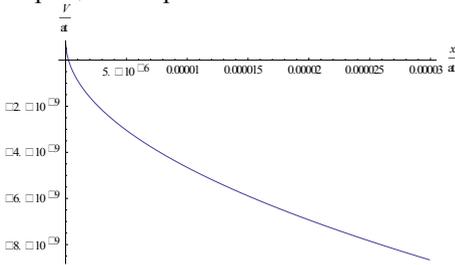
$$M_{41}(x, t, h) = \int_{-\bar{a}_0/\alpha_0}^{\bar{a}/b} \frac{\Psi(u)}{2(u + h)} \left( \sqrt{(-u\ell_0 - \bar{a}_0)(x - \ell_0)} - \frac{ux + \bar{a}}{2\sqrt{u + h}} \ln \left| \frac{\sqrt{-u\ell_0 - \bar{a}_0} - \sqrt{(x - \ell_0)(u + h)}}{\sqrt{-u\ell_0 - \bar{a}_0} + \sqrt{(x - \ell_0)(u + h)}} \right| \right) du,$$

$$M_{42}(x, t, h) = \int_1^{\bar{a}/b} \frac{\Psi(u)}{2(u + h)} \left( \frac{\sqrt{(\bar{a} + x)(\bar{a} - hx)(u - 1)}}{h + 1} - \frac{ux + \bar{a}}{2\sqrt{u + h}} \ln \left| \frac{\sqrt{(\bar{a} + x)(u + h)} - \sqrt{(\bar{a} - hx)(u - 1)}}{\sqrt{(\bar{a} + x)(u + h)} + \sqrt{(\bar{a} - hx)(u - 1)}} \right| \right) du,$$

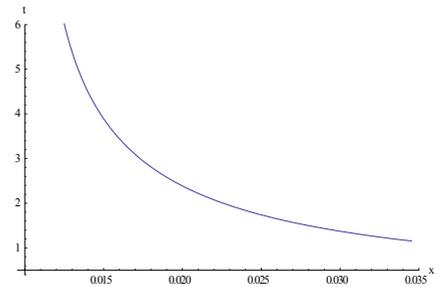
$$\varphi_{42} = H(-\bar{a}_0 - \ell_0) H(\bar{a} + x) H(\bar{a} - hx), \varphi_{41} = H(\bar{a}_0 + \ell_0) H(-bt_0 - \ell_0) H(\bar{a} - hx)$$

Сделаны расчёты для неподвижной задачи при значениях параметров  $K_2/\bar{a} = 0,8$ ,  $K_3/\bar{a} = 0,3$ ;  $\bar{a}/b = \sqrt{3}$ ,  $\alpha_0 = 0,981431$ ,  $i_0/\rho_s \bar{a} = 0,5 \cdot 10^5$ ,  $\bar{a} = 1000 \text{ см/сек}$ ,  $\bar{a}/v = 100$  и построен график зависимости функции  $V/\bar{a}t$  от  $x/\bar{a}t$  (фиг.1). Как видно из фиг.1, при  $3 \cdot 10^{-6} \leq x/\bar{a}t$  имеем  $V/\bar{a}t > 0$ , а при  $x/\bar{a}t \leq 3 \cdot 10^{-6}$  имеем  $V/\bar{a}t < 0$ , а ширина трещины  $b_1 = b_0 + V$  уменьшается. Взяв очень тонкую

микротрещину  $b_0 = 10^{-5}$  см, можно построить зависимость времени  $t$  залечивания трещины от координаты  $x$  (фиг. 2). Из расчётов (фиг. 2) видно, что, например, в момент времени  $t = 6$  в точках с координатами  $x > 0.012$  см трещина закрыта.



Фиг. 1



Фиг. 2

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Мартиросян А.Н. Математические исследования нестационарных линейных граничных задач для сплошных сред. Ереван: «Зангак-97», 2007. 244с.
2. Глико А.О. Влияние процесса осаждения твёрдой фазы из гидротермального раствора на залечивание системы плоско-параллельных трещин. //Труды VI Межд. конф., Горис-Степанакерт. 2008. С.170-177.

#### Сведения об авторах:

**Мартиросян А.Н.** – доктор физ.-мат. наук, профессор, Зав. каф. математики Горисского государственного университета

**E-mail:** [ashot.martirosyan.14@gmail.com](mailto:ashot.martirosyan.14@gmail.com)

**Динунц А.С.** – кандидат физ.-мат. наук, доцент каф. математики ГГУ.

**E-mail:** [dinuntsas@gmail.com](mailto:dinuntsas@gmail.com)

**Давтян А.В.** – лектор кафедры математики ГГУ.

**E-mail:** [davtyananush@gmail.com](mailto:davtyananush@gmail.com)

**Мартиросян Г.А.** – кандидат физ.-мат. наук, доцент ГГУ.

# НЕСТАЦИОНАРНАЯ ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА ЗАЛЕЧИВАНИЯ ТРЕЩИНЫ, ДВИЖУЩЕЙСЯ С ПЕРЕМЕННОЙ СКОРОСТЬЮ

*Мартirosян А.Н., Динуц А.С., Давтян А.В., Мартirosян Г.А.  
Армения*

Рассматриваются задачи о наращивании слоя примесей, содержащихся в жидкости (флюиде), поступающей в трещину в бесконечной термоупругой среде в начальный момент  $t=0$ . Эти задачи особенно важны для изучения влияния камформационных кристаллитов в масле на процессы в технических задачах промышленности для получения камформных поверхностей испытательного контакта и оценка трибохарактеристик масла И20А, которые проводятся в лаборатории Института Машиноведения им. Благонравого (<http://www.wl-technology.ru/gan>) и в аналогичных задачах о залечивании биологических трещин [1], [2] в создании антифрикционных и износостойких промышленных изделий.

Жидкость (флюид) при  $t = 0$  поступает в трещину, уравнение которой в силу симметрии трещины в момент  $t$  будет  $y = \pm b_1(x, t, z)$ ,  $b_1(x, t, z) = b_0 + u_2(x, t, z)$ ,  $0 < x < \infty, y \approx 0$ , где  $u_j$  есть компоненты перемещений термоупругой среды,  $\pm b_0$  – начальная ширина трещины.

В дальнейшем выбирается только верхний знак. Тогда в линейном приближении можно, следуя [3], [4], записать приближённое соотношение при  $y = 0$ :

$$\rho_s \frac{\partial b_1}{\partial t} = q\gamma \frac{\partial T}{\partial x} - K\sigma_{yy} - i_0 H(x)H(t), \quad (1)$$

где левая часть представляет массу осадка, выпавшего в единицу времени и пропорционального скорости залечивания трещины, первое слагаемое правой части – плотность потока массы вдоль оси  $y$  [3] растворенного компонента, переданная раствором в единицу времени за счёт градиента температуры по  $x$ , второе слагаемое представляет трибологический член [4], где  $K = \text{const}$  есть экспериментальная постоянная,  $T$  – температура среды,  $\rho_s$  – плотность выпавшего осадка,  $c$  – концентрация примесей в жидкости,  $\gamma = \partial c / \partial T$ ,  $\gamma = \text{const}$  [5] в линейном приближении,  $q$  – плотность диффузионного потока по оси  $x$ , взята такой же, как в начальном сечении  $x = 0, q = \rho_j v_j b_0$ ;  $v$  – скорость флюида,  $\rho_j$  – плотность жидкости, слагаемое в граничном условии, содержащее  $i_0$ , соответствует имеющему место при входе флюида в трещину, плотности потока концентрации примесей по оси  $y$ .

Уравнения термоупругости в перемещениях для изотропной среды в пространственном случае имеют вид:

$$\left(\bar{a}^2 - b^2\right) \frac{\partial}{\partial x} \nabla + b^2 \Delta u_1 = \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \left(\bar{a}^2 - b^2\right) \frac{\partial}{\partial y} \nabla + b^2 \Delta u_2 = \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \left(\bar{a}^2 - b^2\right) \frac{\partial}{\partial z} \nabla + b^2 \Delta u_3 = \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \quad (2)$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} u_1 + \frac{\partial}{\partial y} u_2 + \frac{\partial}{\partial z} u_3, \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

где  $\lambda, \mu$  – коэффициенты Ляме,  $u_j, j = 1, 2, 3$  – компоненты перемещений,  $a, b$  – скорости продольных и поперечных волн,  $\bar{a}^2 = a^2 + \bar{\delta}$ ,  $\bar{\delta} = K_4 \rho^{-1} (c_p - c_v) c_v^{-1}$ ,  $K_4 = \lambda + \frac{2}{3} \mu$  – объёмный модуль,  $\rho$  – плотность упругой среды,  $c_p, c_v$  – теплоёмкости. При  $t = 0$  имеем нулевые начальные условия  $u_j = 0, \partial u_j / \partial t = 0$ . Рассмотрим более простой случай, когда граничные условия на трещине и вне её, с учётом наращивания трещины за счёт примесей в жидкости концентрации  $c$ , ( $\partial c / \partial y = \text{const}$ ,  $-i_0 = \rho D \partial c / \partial y$  – постоянный диффузионный поток примесей в жидкости [2]), имеют вид ( $y = 0$ ):

$$\sigma_{yz} = \rho b^2 \left( \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y} \right) = 0, |x| < \infty, \sigma_{xy} = \rho b^2 \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) = 0, |x| < \infty, \quad (3)$$

$$u_2 = u_2^-(t, x, z) = 0, x < \ell(t),$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + K_2 \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) + K_3 \frac{\partial u_2}{\partial y} = \sigma^+(t, x, z) = -\frac{i_0}{\rho_s} H(t - \tau) \delta(x - \xi_0) \delta(z_0 - |z|), x > \ell(t),$$

$$K_2 = \frac{\rho}{\rho_s} K (\bar{a}^2 - 2b^2) + \xi; K_3 = \frac{\rho}{\rho_s} K \bar{a}^2 + \xi, \xi = \frac{c_p - c_v}{c_v l} \frac{v_0 b_0 \gamma \rho}{\alpha \rho_s}$$

где  $t$  – время,  $K$  – трибологическая постоянная граница трещины,  $D$  – коэффициент диффузии,  $\ell(t)$  – некоторая гладкая функция – положение линии раздела граничных условий,  $\alpha$  – коэффициент температуропроводности [5].

Согласно [6], вводятся трансформанты Лапласа по  $t$  и Фурье по координатам  $x, z$  от компонент смещения по осям  $x, y, z$  в виде:

$$\bar{u}_j = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \int_{s=\bar{\alpha}}^{s=\bar{\alpha}+2\pi n} u_j \exp(-i\bar{\alpha}x - i\bar{\gamma}z - i\bar{\beta}_n y) d\bar{\alpha} d\bar{\gamma} \quad (4)$$

и обозначая изображения функций  $\sigma(t, x, z), u_2(t, x, z)$  через  $\sigma^{LFF}(s, \bar{\alpha}, \bar{\gamma}), u_2^{LFF}(s, \bar{\alpha}, \bar{\gamma})$ , соответственно, учитывая (2), (3), (4), можно получить:

$$u_2^{LFF}(s, \bar{\alpha}, \bar{\gamma}) = S^{LFF}(s, \bar{\alpha}, \bar{\gamma}) \sigma^{LFF}(s, \bar{\alpha}, \bar{\gamma}), S^{LFF}(s, \bar{\alpha}, \bar{\gamma}) = \frac{s^2 \bar{\beta}_1}{ib^2 R(\bar{\alpha}, \bar{\gamma})}, \quad (5)$$

$$R(\bar{\alpha}, \bar{\gamma}) = \bar{\beta}_1 \frac{\omega^3}{b^2} - K_2 (\bar{\alpha}^2 + \bar{\gamma}^2) (\bar{\beta}_2^2 - \bar{\alpha}^2 - \bar{\gamma}^2 - 2\bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2) - K_3 \bar{\beta}_1^2 (\bar{\beta}_2^2 - \bar{\alpha}^2 - \bar{\gamma}^2) - 2K_3 \bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 (\bar{\alpha}^2 + \bar{\gamma}^2),$$

$$\bar{\beta}_n = i \sqrt{\frac{s^2}{c_n^2} - \bar{\alpha}^2 - \bar{\gamma}^2}, c_1 = a, c_2 = b$$

Здесь  $s = -i\omega$ ,  $\bar{\alpha}, \bar{\gamma}$  – параметры преобразований Лапласа по  $t$  и Фурье по  $x$  и  $z$ ,  $R(\bar{\alpha}, \bar{\gamma})$  – функция типа Рэлея. После выбора ветвей функций  $\bar{\beta}_n$ , аналогично

работе [6], можно факторизовать  $S^{LFF}(s, \bar{\alpha}, \bar{\gamma})$  в виде:

$$S^{LFF}(s, \bar{\alpha}, \bar{\gamma}) = S_+^{LFF}(s, \bar{\alpha}, \bar{\gamma}) S_-^{LFF}(s, \bar{\alpha}, \bar{\gamma}) \quad (6)$$

$$S_+^{LFF}(s, \bar{\alpha}, \bar{\gamma}) = \frac{C_0 \sqrt{\sqrt{\frac{1}{a^2} - \left(\frac{i\bar{\gamma}}{s}\right)^2} - \frac{i\bar{\alpha}}{s}}}{\sqrt{s} \left( \sqrt{\frac{\eta_0^2}{a^2} - \left(\frac{i\bar{\gamma}}{s}\right)^2} - \frac{i\bar{\alpha}}{s} \right) D^+ \left( \frac{i\bar{\alpha}}{s}, \frac{i\bar{\gamma}}{s} \right)}, S_-^{LFF}(s, \bar{\alpha}, \bar{\gamma}) = \frac{\sqrt{\sqrt{\frac{1}{a^2} - \left(\frac{i\bar{\gamma}}{s}\right)^2} + \frac{i\bar{\alpha}}{s}}}{\sqrt{s} \left( \sqrt{\frac{\eta_0^2}{a^2} - \left(\frac{i\bar{\gamma}}{s}\right)^2} + \frac{i\bar{\alpha}}{s} \right) D^- \left( \frac{i\bar{\alpha}}{s}, \frac{i\bar{\gamma}}{s} \right)}$$

$$D^\pm \left( \frac{i\bar{\alpha}}{s}, \frac{i\bar{\gamma}}{s} \right) = 1 + \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{s}} F_1(u) \frac{u}{\sqrt{u^2 - \left(\frac{i\bar{\gamma}}{s}\right)^2}} \frac{du}{\sqrt{u^2 - \left(\frac{i\bar{\gamma}}{s}\right)^2} \mp \frac{i\bar{\alpha}}{s}}, D_\pm^{-1} \left( \frac{i\bar{\alpha}}{s}, \frac{i\bar{\gamma}}{s} \right) = 1 + \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{s}} F_2(u) \frac{u}{\sqrt{u^2 - \left(\frac{i\bar{\gamma}}{s}\right)^2}} \frac{du}{\sqrt{u^2 - \left(\frac{i\bar{\gamma}}{s}\right)^2} \mp \frac{i\bar{\alpha}}{s}}$$

$$F_1 \left( u, \frac{i\bar{\gamma}}{s} \right) = \mu(u) \exp \chi \left( u, \frac{i\bar{\gamma}}{s} \right), F_2 \left( u, \frac{i\bar{\gamma}}{s} \right) = -\mu(u) \exp \left( -\chi \left( u, \frac{i\bar{\gamma}}{s} \right) \right), C_0 = \frac{a^2}{b^2 (K_2 + K_3)}$$

$$\chi \left( u, \frac{i\bar{\gamma}}{s} \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{s}} \ell n \frac{R(\zeta)}{R(\zeta)} \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - (i\bar{\gamma}/s)^2}} \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - (i\bar{\gamma}/s)^2} - u},$$

$$\mu(u) = \frac{1}{\pi} \frac{-b^{-2} \sqrt{u^2 - a^{-2}} - 2(K_2 - K_3) u^2 \sqrt{u^2 - a^{-2}} \sqrt{b^{-2} - u^2}}{\left[ \left( \frac{1}{b^2} \sqrt{u^2 - \frac{1}{a^2}} + 2(K_2 - K_3) u^2 \sqrt{u^2 - \frac{1}{a^2}} \sqrt{\frac{1}{b^2} - u^2} \right)^2 + \left( (K_2 - K_3) u^2 + K_3 \frac{1}{a^2} \right)^2 \left( \frac{1}{b^2} - 2u^2 \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}$$

Здесь  $\pm \eta_0$  – корни функции типа Рэлея  $R(\eta)$  для плоской задачи [7].

Функции  $S_+^{LFF}(s, \bar{\alpha}, \bar{\gamma})$  и  $S_-^{LFF}(s, \bar{\alpha}, \bar{\gamma})$  – аналитические функции, соответственно, в верхней и нижней полуплоскостях плоскости  $\bar{\alpha}$ .

Обозначая  $\bar{P}_\pm = 1/\bar{S}_\pm$ , неизвестные функции  $u_+(t, x, z), \sigma_-(t, x, z)$  можно определять с помощью следующих формул [7]:

$$u_+ = S_+ *** [(S_- *** \sigma_+) H(x - \ell)], \sigma_- = -P_- *** [(S_- *** \sigma_+) H(\ell - x)] \quad (7)$$

где символ (\*\*\*) означает свёртку по переменным  $t, x, z$ , а  $H$  – функция Хевисайда. Вычисляя оригиналы  $P_+(t, x), S_+(t, x)$  по формуле обращения, с помощью формул (7) получаем:

$$u_+ = \frac{i_0 C_0}{\pi \rho_s} \operatorname{sgn} \tilde{z} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} H(\zeta_0) \sum_{n=0}^3 \left[ \frac{A_2}{\sqrt{1-\eta_0}} \int_{\eta_0}^1 \frac{N_n(x, t, \xi_0, \tau, h)}{\sqrt{h-\eta_0}} dh + \int_1^{\frac{\bar{a}}{b}} F_4(h) N_n(x, t, \xi_0, \tau, h) dh \right], \quad (8)$$

$$N_0(x, t, \xi_0, \tau, h) = H(x - \ell_0) H(\xi_0 - \ell_0) \frac{\sqrt{x - \ell_0}}{\sqrt{\xi_0 - \ell_0}} \frac{\bar{a} - \ell}{a - h \ell} \left\{ \frac{A_2 \sqrt{1-\eta_0}}{\sqrt{L-\eta_0}} H(1-L) H(L-\eta_0) + \right.$$

$$\left. \left[ 1 + \int_L^{\frac{\bar{a}}{b}} \frac{F_2(u) \sqrt{u-1}}{(u-\eta_0) \sqrt{u-L}} du H\left(\frac{\bar{a}}{b} - L\right) \right] H(L-1) \right\}, \bar{a}(t - t_0) = h(x - \ell(t_0)), \ell_0 = \ell(t_0), \dot{\ell} = \dot{\ell}(t_0),$$

$$N_1(x, t, \xi_0, \tau, h) = A_2 \sqrt{1-\eta_0} \sum_{i=1}^2 N_{1i}(x, t, \xi_0, \tau, h) \varphi_{1i}(x, t, \xi_0, \tau, h), \zeta_0 = \sqrt{a^2 (t_0 - \tau)^2 - (\ell_0 - \xi)^2} - |\tilde{z}|$$

$$N_{11}(x, t, \xi_0, \tau, h) = \frac{1 + \eta_0}{\sqrt{h + \eta_0}} \left( \sqrt{\frac{(x - \ell_0)(h + \eta_0)}{(\xi_0 - \ell_0)(L - \eta_0)}} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{(x - \ell_0)(h + \eta_0)}{(\xi_0 - \ell_0)(L - \eta_0)}} \right),$$

$$N_{12}(x, t, \xi_0, \tau, h) = \frac{h - 1}{h + 1} \sqrt{\frac{(1 - \eta_0)(T - 1)}{(h + T)}} \frac{1 + \eta_0}{\sqrt{h + \eta_0}} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{(1 - \eta_0)(h + T)}{(T - 1)(h + \eta_0)}}, T = \frac{\bar{a}(t - \tau)}{\xi_0 - x}, L = \frac{\bar{a}(t_0 - \tau)}{\xi_0 - \ell_0},$$

$$\varphi_{22} = H(\bar{a}(t - \tau) - (\xi_0 - x)) H(1 - L) H(h(\xi_0 - x) + \bar{a}(t - \tau)), \varphi_{11} = H(L - \eta_0) H(1 - L) H\left(\xi_0 - x + \frac{\bar{a}}{h}\right),$$

$$N_2(x, t, \xi_0, \tau, h) = N_{21}(x, t, \xi_0, \tau, h) \varphi_{21}(x, t, \xi_0, \tau, h) + N_{22}(x, t, \xi_0, \tau, h) \varphi_{22}(x, t, \xi_0, \tau, h),$$

$$N_{21}(x, t, \xi_0, \tau, h) = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{\xi_0 - \ell_0} - \sqrt{x - \ell_0}}{\sqrt{\xi_0 - \ell_0} + \sqrt{x - \ell_0}} \right| - \sqrt{\frac{x - \ell_0}{\xi_0 - \ell_0}}, \varphi_{21} = H(L - 1) H(x - \ell(t)) H(\xi_0 - \ell_0),$$

$$N_{22}(x, t, \xi_0, \tau, h) = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{h + T} - \sqrt{T - 1}}{\sqrt{h + T} + \sqrt{T - 1}} \right| - \frac{h - 1}{h + 1} \sqrt{\frac{T - 1}{h + T}}, \varphi_{22} = H(T - 1) H(1 - L) H(x - \ell(t)),$$

$$N_3(x, t, \xi_0, \tau, h) = N_{31}(x, t, \xi_0, \tau, h) \varphi_{31}(x, t, \xi_0, \tau, h) + N_{32}(x, t, \xi_0, \tau, h) \varphi_{32}(x, t, \xi_0, \tau, h),$$

$$N_{3i}(x, t, \xi_0, \tau, h) = \int_1^{\frac{\bar{a}}{b}} \frac{F_2(u) \sqrt{u-1} \Psi_i(x, t, \xi_0, \tau, h, u)}{(h+u)(u-\eta_0)} du, i=1, 2,$$

$$\Psi_1(x, t, \xi_0, \tau, h, u) = \frac{u+1}{2\sqrt{h+u}} \ln \left| \frac{\sqrt{(\xi_0 - \ell_0)(u-L)} - \sqrt{(x - \ell_0)(h+u)}}{\sqrt{(\xi_0 - \ell_0)(u-L)} + \sqrt{(x - \ell_0)(h+u)}} \right| + \frac{(u+1)\sqrt{x - \ell_0}}{\sqrt{(\xi_0 - \ell_0)(u-L)}},$$

$$\Psi_2(x, t, \xi_0, \tau, h, u) = \frac{u+1}{2\sqrt{h+u}} \ln \left| \frac{\sqrt{(h+T)(u-1)} - \sqrt{(T-1)(h+u)}}{\sqrt{(h+T)(u-1)} + \sqrt{(T-1)(h+u)}} \right| + \frac{h-1}{h+1} \sqrt{\frac{T-1}{h+T}} \sqrt{u-1},$$

$$\varphi_{31} = H\left(\frac{\bar{a}}{b} - L\right) H(L-1) H(x - \ell(t)), \varphi_{32} = H(T-1) H(1-L).$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Лайтфут Т. Явления массопереноса в биологических системах. М.: Мир, 1976.
2. Martirosyan G.A., Bagdoyev A.G. The investigation of stochastic processes in biology by methods of nonlinear wave dynamics. // Докл. НАН РА. 2008. №4.
3. Глико А.О. Влияние процесса осаждения твёрдой фазы из гидротермального раствора на залечивание системы плоско-параллельных трещин. //Тр. VI Международной конф., Горис-Степанакерт. 2008. С.170-177.
4. Горячева И.Г., Добычин М.Н. Контактные задачи в трибологии. Москва: 1988. 253с.
5. Ландау, Лифшиц. Механика сплошных сред. М.: 1954.
6. Мартиросян А.Н. Математические исследования нестационарных линейных граничных задач для сплошных сред. Ереван: «Зангак-97», 2007. 244 с.
7. Мартиросян А.Н., Динунц А.С., Давтян А.В., Мартиросян Г.А. Исследование плоской задачи о залечивании трещины, движущейся с переменной скоростью в термоупругой среде. //VIII Межд. конф. «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред». Горис 2014.

### Сведения об авторах:

**Мартиросян А.Н.** – доктор физ.-мат. наук, профессор, Зав. каф. математики Горисского государственного университета

**E-mail:** [ashot.martirosyan.14@gmail.com](mailto:ashot.martirosyan.14@gmail.com)

**Динунц А.С.** – кандидат физ.-мат. наук, доцент каф. математики ГГУ.

**E-mail:** [dinuntsas@gmail.com](mailto:dinuntsas@gmail.com)

**Давтян А.В.** – лектор кафедры математики ГГУ.

**E-mail:** [davtyananush@gmail.com](mailto:davtyananush@gmail.com)

**Мартиросян Г.А.** – кандидат физ.-мат. наук, доцент ГГУ.

**E-mail:** [ayk9911@rambler.ru](mailto:ayk9911@rambler.ru)

# УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ПЛОСКОГО ДВУХЗВЕННОГО МАНИПУЛЯТОРА ПО КРИТЕРИЮ «МИНИМУМ ЭНЕРГИИ»

Матевосян А.Г.

Армения

Рассматривается математическая модель двухзвенного манипулятора в форме уравнений Лагранжа второго рода, в которых в качестве обобщённых сил выступают управляющие моменты, развиваемые во вращательных кинематических парах манипулятора. На базе этой модели ставится и решается обратная задача динамики для схвата манипулятора. Именно для заданной траектории схвата определяется закон изменения во времени вектора управляющих параметров, обеспечивающий движение схвата по этой траектории. Производится оценка качества управления по критерию «минимум энергии».

## 1. Математическая модель манипулятора

На горизонтальной плоскости рассмотрим двухзвенный механический манипулятор с двумя вращательными парами (рис.1). Каждое звено манипулятора представляет собой абсолютно жесткий стержень длиной  $l_i, i=1,2$ . Первое звено соединено с неподвижным основанием манипулятора вращательной парой  $O_1$ , а со вторым звеном – вращательной парой  $O_2$ . Принимается, что масса схвата –  $m$ , а центр масс  $i$ -го звена находится в середине стержня – точке  $C_i$ , его масса –  $m_i, i=1,2$ , момент инерции  $i$

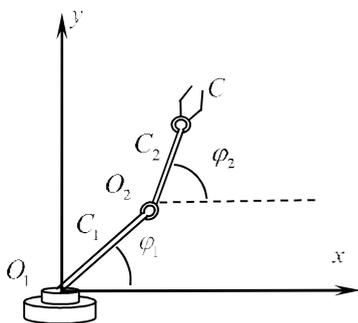


Рис. 1

го звена относительно своего центра масс –  $I_i, i=1,2$ . В соединительных парах могут развиваться управляющие вращательные моменты  $u_i, i=1,2$ . Трение в шарнирах отсутствует. Выведем дифференциальные уравнения движения, в которых в качестве обобщённых координат берутся углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , образованные звеньями  $O_1O_2$  и  $O_2C$  с осью  $Ox$ , соответственно. Вычислим кинетическую энергию манипулятора

$T = T_1 + T_2 + T_c$  (1)

Здесь  $T_i$  – кинетическая энергия  $i$ -го звена  $i=1,2$ ,  $T_c$  – энергия схвата манипулятора. Имеем:

$$T_1 = \frac{1}{2}(I_1 \dot{\varphi}_1^2 + m_1 V_{C_1}^2) = \frac{1}{8}(4I_1 \dot{\varphi}_1^2 + m_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2) = \frac{4I_1 + m_1 l_1^2}{8} \dot{\varphi}_1^2 \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
T_2 &= \frac{1}{2}(I_2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 V_c^2) = \\
&= \frac{1}{8}(4I_2 \dot{\varphi}_2^2 + 4m_2 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 4m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)) \\
T_c &= \frac{1}{2} m V_c^2 = \frac{1}{2} m (l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2) \quad (3)
\end{aligned}$$

Подставим (2), (3) в уравнение (1). В результате получим:

$$T = \frac{1}{2}(a\dot{\varphi}_1^2 + b\dot{\varphi}_2^2 + 2c\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)) \quad (4)$$

где обозначено

$$a = \frac{1}{4}[4I_1 + l_1^2(m_1 + 4m_2 + 4m)] , \quad b = \frac{1}{4}[4I_2 + l_2^2(m_2 + 4m)] , \quad c = \frac{1}{2}(l_1 l_2 (m_2 + 2m))$$

Выпишем уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_i} = Q_i \quad (5)$$

С учётом того, что обобщённой силой  $Q_i$ , отвечающей координате  $\varphi_i$ , является управляющий вращательный момент  $u_i$ , уравнения (5) запишутся следующим образом:

$$\begin{cases} a\ddot{\varphi}_1 + c\ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + c\dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = u_1 \\ b\ddot{\varphi}_2 + c\dot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - c\dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = u_2 \end{cases} \quad (6)$$

## 2. Задача управления:

Рассмотрим конкретный пример задачи управления.

На плоскости Оху задана кривая, описываемая уравнением

$$\begin{cases} y = -x^2 + 2 \\ x = st^4 - 2(s - 0.9)t^3 + (s - 2.7)t^2 + 1 \end{cases} \quad (7)$$

где  $s$  – параметр, а временной промежуток –  $t \in [0, 1]$ .

В работе решается обратная задача динамики для механизма манипулятора.

**Задача.** Определить кусочно-непрерывные реализации управляющих параметров  $u_i$ ,  $t \in [0, 1]$ ,  $i = 1, 2$ , обеспечивающих перевод схвата манипулятора из начального положения в конечное положение вдоль заданной траектории.

Начальное и конечное значения скоростей схвата должны быть нулевыми. Как видно из закона движения для каждого значения параметра, имеют место следующие условия начальных и конечных значений для перемещения схвата по заданной траектории.

Имеем:  $t \in [0, 1] \Rightarrow x(0) = 1, x(1) = 0.1, \dot{x}(0) = 0, \dot{x}(1) = 0, y(0) = 1, y(1) = 1.99$   
 $\dot{y}(0) = 0, \dot{y}(1) = 0.$

Параметр  $s$ , участвующий в формировании закона движения схвата, позволяет получить несколько различных способов управления манипулятором, позволяющих решать поставленную задачу. В дальнейшем, среди них можно выбирать наилучший, в том или ином смысле, способ управления. В работе оценка качества управления манипулятором производится по критерию

$$I[u(\cdot)] = \left( \int_0^1 (u_1^2 + u_2^2) dt \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (8)$$

Пусть массово-геометрические характеристики манипулятора заданы условиями (9):

$$m_1 = 5, m_2 = 2, m = 1, l_1 = l_2 = l = 1, s \in [-6, 8] \quad (9)$$

Имеют место следующие зависимости между координатами схвата манипулятора и обобщёнными координатами:

$$\begin{cases} x = l \cos \varphi_1 + l \cos \varphi_2 \\ y = l \sin \varphi_1 + l \sin \varphi_2 \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} \varphi_1 - \varphi_2 = \arccos \frac{x^2 + y^2 - 2l^2}{2l^2} \\ \varphi_1 + \varphi_2 = 2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \end{cases} \quad (11)$$

$$\varphi_1 = \begin{cases} \operatorname{arctg} \left( \frac{y}{x} \right) + \frac{1}{2} \arccos \left( \frac{x^2 + y^2}{2l^2} - 1 \right), x > 0, y > 0 \\ \pi + \operatorname{arctg} \left( \frac{y}{x} \right) + \frac{1}{2} \arccos \left( \frac{x^2 + y^2}{2l^2} - 1 \right), x < 0, y > 0 \end{cases} \quad (12)$$

$$\varphi_2 = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{2} \operatorname{arccos}\left(\frac{x^2 + y^2}{2l^2} - 1\right), x > 0, y > 0 \\ \pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2} \operatorname{arccos}\left(\frac{x^2 + y^2}{2l^2} - 1\right), x < 0, y > 0 \end{cases} \quad (13)$$

Искомые программные управления вычисляются по формулам (6) после подстановки в (12), (13) закона движения (7).

На рис.2 приводится график значения критерия качества (8) в зависимости от величины параметра  $s \in [-6, 8]$ .

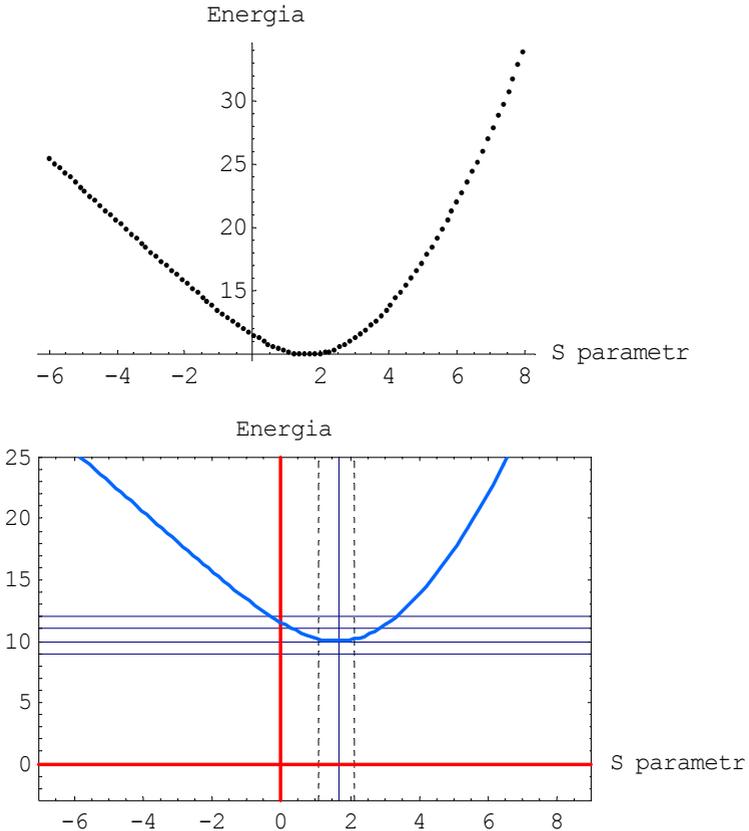


Рис. 2

Из приведённого графика видно, что наименьшее значение функционал (8) принимает при  $s = 1.65$ . Все расчёты сделаны с помощью математического пакета Wolfram Mathematica.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Козырев Ю.Г. Промышленные роботы. Справочник. М: Машиностроение, 1983.
2. Вукобратович М. Неадаптивное и адаптивное управление манипуляционными роботами. М.Вукобратович, Д.Стокич, Н.Кирчански. М.: Мир, 1989. 376 с.
3. Лутманов С.В. Линейные задачи оптимизации. Ч.2. Оптимальное управление линейными динамическими объектами. //Учеб. пос. Пермь: изд-во ПГУ, 2005 (на электронном носителе). 195 с.
4. Гукасян А.А., Матевосян А.Г. Дифференциальная игра сближения с несколькими целевыми множествами для стохастических линейных систем и их применение для манипуляционных роботов. // В сб. научных трудов: «Проблемы механики деформируемого твердого тела», посвященной 90-летию академика НАН Армении С.А.Амбарцумяна. Ереван: 2012. С.161-168.

### Сведения об авторе:

**Матевосян Арам Гагикович**

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры механики  
Ереванского Государственного Университета

**Е-mail:** [amatevosyan@ysu.am](mailto:amatevosyan@ysu.am)

# УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИНКИ ПРИ СВЕРХЗВУКОВОМ ОБТЕКАНИИ И НАЛИЧИИ СОСРЕДОТОЧЕННОГО МОМЕНТА НА КРОМКАХ

*Микаелян А.О.*

*Армения*

В предлагаемой работе исследуется устойчивость прямоугольной упругой пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа. Все края пластинки шарнирно опёрты, а на двух кромках пластинки имеются сосредоточенные моменты.

Найдена критическая скорость потока газа, приводящая к флаттерной неустойчивости.

Установлено, что в случае, когда пластинка квадратная и на одном из края отсутствует сосредоточенный момент, наблюдается явление флаттерной неустойчивости. А в случае равенства сосредоточенных моментов на краях, пластинка находится в устойчивом состоянии.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим прямоугольную тонкую упругую пластинку, которая в декартовой системе координат  $Oxyz$  занимает область  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ ,  $-h \leq z \leq h$ . Декартова система координат  $Oxyz$  выбирается так, чтобы оси  $Ox$  и  $Oy$  лежали бы в плоскости невозмущённой пластинки, а ось  $Oz$  – перпендикулярна к пластинке. Пластинка обтекается сверхзвуковым потоком газа со скоростью  $V$ . Поток газа направлен по оси  $Ox$ .

Пусть кромки  $x=0$ ,  $x=a$ ,  $y=0$  и  $y=b$  пластинки шарнирно закреплены, а на кромках  $x=0$  и  $x=a$  имеются сосредоточенные моменты.

В предположении справедливости гипотезы Кирхгофа и «поршневой теории» [1] дифференциальное уравнение изгиба пластинки описывается соотношением [2,3]

$$D \left( \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \right) + a_0 \rho_0 V \frac{\partial W}{\partial x} = 0, \quad (1.1)$$

Здесь  $W = W(x, y, t)$  – прогиб точек срединной поверхности пластинки;  $\rho_0$  – плотность невозмущённого потока газа,  $a_0$  – скорость звука в невозмущённой газовой среде;  $D$  – цилиндрическая жёсткость пластинки на изгиб.

Граничные условия в принятых предположениях относительно способа закрепления кромок имеют вид:

$$W = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0, \quad y = 0 \quad \text{и} \quad y = b; \quad (1.2)$$

$$W = 0, \quad D \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = I_1 \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial t^2}, \quad x = 0; \quad (1.3)$$

$$W = 0, \quad D \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = -I_2 \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial t^2}, \quad x = a. \quad (1.4)$$

Требуется определить значения параметра  $V$ , при которых возможны нетривиальные решения дифференциального уравнения (1.1), удовлетворяющие граничным условиям (1.2) – (1.4).

Заметим, что устойчивость удлинённой пластинки при сверхзвуковом обтекании и наличии сосредоточенного момента на кромках была исследована Белубекианом М.В., Мартиросян С.Р. [4].

2. Общее решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2) – (1.4), имеет вид:

$$W(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \{C_{n1} \exp(\lambda_n p_1 x) + C_{n2} \exp(\lambda_n p_2 x) + \\ + \exp(\lambda_n \alpha x) (C_{n3} \cos(\lambda_n \beta x) + C_{n4} \sin(\lambda_n \beta x))\} \exp(i\omega_n t) \sin(\lambda_n y), \quad (2.1)$$

где  $\lambda_n = \pi n b^{-1}$ ,  $p_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) – корни характеристического уравнения, которое получается из (1.1);  $C_{nk}$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) – произвольные постоянные.

Подставляя выражение (2.1) в граничные условия (1.3) и (1.4), получаем однородную систему алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных  $C_{nk}$ . Далее, приравнивая нулю определитель полученной системы, получаем следующее алгебраическое уравнение относительно квадратов собственных частот колебаний пластинки.

$$k_1 k_2 b^2 A(q, \gamma) \omega^4 - (k_1 B(q, \gamma) + k_2 C(q, \gamma)) b \omega^2 + D(q, \gamma) = 0, \quad (2.2)$$

где

$$A(q, \gamma) = 2\{sh(\pi n \gamma Q_1) sin(\pi n \gamma Q_2) (Q_1^2 - Q_2^2) - 2(ch(\pi n \gamma Q_1) cos(\pi n \gamma Q_2) - \\ - 2exp(\pi n \gamma \sqrt{2(q+1)}) Q_1 Q_2 - 2(q+1) sh(\pi n \gamma Q_1) sin(\pi n \gamma Q_2))\};$$

$$\begin{aligned}
B(q, \gamma) = & 2\pi n \{ (q+1) \sin(\pi n \gamma Q_2) (\sqrt{2(q+1)} \exp(-\pi n \gamma Q_1) - Q_1 \exp(2\pi n \gamma Q_1)) + \\
& + \operatorname{sh}(\pi n \gamma Q_1) (Q_1^3 \sin(\pi n \gamma Q_2) - Q_2^3 \cos(\pi n \gamma Q_2)) - (q+1) \operatorname{sh}(\pi n \gamma Q_1) \times \\
& \times (Q_1 \sin(\pi n \gamma Q_2) + 2Q_2 \cos(\pi n \gamma Q_2)) + Q_1 Q_2 (Q_2 \sin(\pi n \gamma Q_2) \operatorname{ch}(\pi n \gamma Q_1) - \\
& - Q_1 \operatorname{sh}(\pi n \gamma Q_1) \cos(\pi n \gamma Q_2)) \}; \tag{2.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C(q, \gamma) = & 2\pi n \{ Q_1^3 \operatorname{ch}(\pi n \gamma Q_1) \sin(\pi n \gamma Q_2) - Q_2^3 \operatorname{sh}(\pi n \gamma Q_1) \cos(\pi n \gamma Q_2) - \\
& - 2(q+1) (Q_1 \operatorname{ch}(\pi n \gamma Q_1) \sin(\pi n \gamma Q_2) + Q_2 \operatorname{sh}(\pi n \gamma Q_1) \cos(\pi n \gamma Q_2)) + \\
& + Q_1 Q_2 (Q_2 \sin(\pi n \gamma Q_2) \operatorname{ch}(\pi n \gamma Q_1) - Q_1 \operatorname{sh}(\pi n \gamma Q_1) \cos(\pi n \gamma Q_2)) \};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D(q, \gamma) = & 2(\pi n)^2 \{ \operatorname{sh}(\pi n \gamma Q_1) \sin(\pi n \gamma Q_2) (Q_1^4 + Q_2^4) - \\
& - 4(q+1) (\operatorname{ch}(\pi n \gamma Q_1) \cos(\pi n \gamma Q_2) - 2 \exp(\pi n \gamma (\sqrt{2(q+1)} + Q_1))) Q_1 Q_2 + \\
& + 2Q_1^2 Q_2^2 \operatorname{sh}(\pi n \gamma Q_1) \sin(\pi n \gamma Q_2) + 2(q+1) \operatorname{sh}(\pi n \gamma Q_1) \sin(\pi n \gamma Q_2) (Q_2^2 - Q_1^2) \} \\
Q_1(q) = & \sqrt{\sqrt{q^2 - 1} - \frac{1}{2}(q-1)};
\end{aligned}$$

$$Q_2(q) = \sqrt{\sqrt{q^2 - 1} + \frac{1}{2}(q-1)};$$

$$\gamma = ab^{-1}.$$

Решение уравнения (2.2) можно записать в виде

$$\omega_{1,2} = \frac{(k_1 B + k_2 C) \pm \sqrt{(k_1 B + k_2 C)^2 - 4k_1 k_2 AD}}{2k_1 k_2 bA} \tag{2.4}$$

**3.** Рассмотрим некоторые частные случаи.

**3.1.** Пусть  $k_1 = 0$ ,  $k_2 = k \neq 0$ . (3.1.1)

При условиях (3.1.1) решение уравнения (2.2) примет вид

$$\omega^2 = \frac{D(q, \gamma)}{kbC(q, \gamma)}. \quad (3.1.2)$$

Учитывая, что  $n=1$  и  $\gamma=1$  ( $a=b$ ), из (3.1.2) получается, что дивергентное неустойчивое состояние ( $\omega \rightarrow 0$ ) пластинки отсутствует, а критическая скорость, приводящая к флаттерной неустойчивости ( $\omega \rightarrow \infty$ ), имеет вид:

$$V_{кр}^{фл} = 1,71D \frac{\pi^3}{b^3 a_0 \rho_0}. \quad (3.1.3)$$

$$3.2. \text{ Пусть } k_2 = 0, k_1 = k \neq 0. \quad (3.2.1)$$

При условиях (3.2.1) решение уравнения (2.2) примет вид

$$\omega^2 = \frac{D(q, \gamma)}{kbB(q, \gamma)}. \quad (3.2.2)$$

Учитывая, что  $n=1$  и  $\gamma=1$  ( $a=b$ ), из (3.2.2) получается, что дивергентное неустойчивое состояние ( $\omega \rightarrow 0$ ) пластинки отсутствует, а критическая скорость, приводящая к флаттерной неустойчивости ( $\omega \rightarrow \infty$ ), имеет вид:

$$V_{кр}^{фл} = 1,66D \frac{\pi^3}{b^3 a_0 \rho_0} \quad (3.2.3)$$

$$3.2. \text{ Пусть } k_1 = k_2 = k. \quad (3.3.1)$$

При условии (3.3.1) решение уравнения (2.2) примет вид:

$$\omega_{1,2} = \frac{(B+C) \pm \sqrt{(B+C)^2 - 4AD}}{2kbA}. \quad (3.3.2)$$

Учитывая, что  $n=1$  и  $\gamma=1$  ( $a=b$ ), из (3.3.2) получается, что дивергентное ( $\omega \rightarrow 0$ ) и флаттерное ( $\omega \rightarrow \infty$ ) неустойчивые состояния пластинки отсутствуют, пластинка находится в устойчивом состоянии.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ильющин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях. // ПММ. 1956. Т.20. № 6. С.733-755
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Наука, 1961. 329с.
3. Мовчан А.А. О колебаниях пластинки, движущейся в газе. // Изв. АН СССР. ПММ. 1956. Т.20. С.211-212.
4. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. Флаттер пластинки при сверх-звуковом обтекании и наличии сосредоточенной массы на кромках. //ISSN 0130-9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2006. Т.49. № 3. С.162-167.

### Сведения об авторе:

**Микаелян Асмик Овиковна,**

Аспирант ЕГУ, факультет математики и механики, кафедра механики.

**Тел.:(+374 77) 03 63 49, (+374 96) 03 63 49.**

**E-mail:** hasmik.mikaelyan.hm@gmail.com

## ЗАДАЧА О ЗАРАСТАЮЩЕЙ ЭЛЛИпсоИДАЛЬНОЙ ПОЛОСТИ В ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЕ

*Михин М.Н.*

*Россия*

Рассмотрена задача о зарастающей эллипсоидальной полости в вязкоупругой среде. Проанализированы три основных этапа деформирования тела: до начала наращивания, в процессе и после остановки роста. Все возникающие неклассические краевые задачи приведены к известным краевым задачам, содержащим некоторый параметр. Предложены методы их решения, основанные на исследованиях Папковича и Нейбера. Истинные характеристики напряжённо-деформированного состояния тел восстанавливаются при помощи известных формул расщифровки.

Пусть однородное вязкоупругое стареющее тело, изготовленное в нулевой момент времени, занимает область  $\Pi_1$ , ослабленную эллипсоидальной полостью  $L_1$ , и до момента загрузки  $\tau_0$  свободно от напряжений. Пусть напряжённое состояние на бесконечности представляет собой растяжение величины  $P$  в направлении, параллельном вертикальной оси  $Oz$ .

В момент времени  $\tau_1 \geq \tau_0$  начинается непрерывное наращивание тела элементами, изготовленными одновременно с ним. В процессе роста тело занимает область  $\Pi(t)$  с растущей эллипсоидальной границей  $L(t)$ , которая изменяется с течением времени, при этом,  $L(\tau_1) = L_1$  и  $\Pi(\tau_1) = \Pi_1$ .

Будем считать, что граница роста  $L(t)$  не загружается в процессе наращивания. Будем также считать, что момент приложения нагрузки к приращиваемым элементам  $\tau_0(r, \vartheta, \varphi)$  совпадает с моментом их присоединения к растущему телу  $\tau^*(r, \vartheta, \varphi)$ .

В момент  $\tau_2 \geq \tau_1$  наращивание пластины прекращается, и с этого момента оно занимает область  $\Pi_2 = \Pi(\tau_2)$ , ограниченную эллипсоидальным контуром  $L_2 = L(\tau_2)$ .

Будем далее рассматривать достаточно медленные процессы такие, что в уравнениях равновесия можно пренебречь инерционными членами. Объёмные силы положим равными нулю.

Краевая задача для основной (нерастущей) вязкоупругой стареющей эллипсоидальной полости на интервале времени  $[\tau_0, \tau_1]$  представляет собой традиционную пространственную задачу теории вязкоупругости [1,2].

Начально-краевую задачу для непрерывно растущего тела на интервале времени  $t \in [\tau_1, \tau_2]$  составляют:

уравнения равновесия

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\sigma_{r\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\vartheta\vartheta} + \sigma_{r\vartheta} \operatorname{ctg} \vartheta}{r} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{\vartheta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\sigma_{\vartheta\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{(\sigma_{\vartheta\vartheta} - \sigma_{\varphi\varphi}) \operatorname{ctg} \vartheta}{r} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

соотношения Коши между скоростями деформации  $D_{ij} = \partial \varepsilon_{ij} / \partial t$  и скоростями перемещений  $v_i = \partial u_i / \partial t$

$$\begin{cases} D_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad D_{\varphi\varphi} = \frac{v_r}{r} + \operatorname{ctg} \vartheta \frac{v_\vartheta}{r}, \quad D_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{v_r}{r}, \\ D_{r\vartheta} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \vartheta} + \frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} - \frac{v_\vartheta}{r} \right), \quad D_{r\varphi} = 0, \quad D_{\varphi\vartheta} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

уравнения состояния

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = 2G \left( \mathbf{I} + \mathbf{N}_{\tau_0(r,\vartheta,\varphi)} \right) \left( \frac{2G + \lambda}{2G} \varepsilon_{rr} + \frac{\lambda}{2G} (\varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{\vartheta\vartheta}) \right), \\ \sigma_{\varphi\varphi} = 2G \left( \mathbf{I} + \mathbf{N}_{\tau_0(r,\vartheta,\varphi)} \right) \left( \frac{2G + \lambda}{2G} \varepsilon_{\varphi\varphi} + \frac{\lambda}{2G} (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\vartheta\vartheta}) \right), \\ \sigma_{\vartheta\vartheta} = 2G \left( \mathbf{I} + \mathbf{N}_{\tau_0(r,\vartheta,\varphi)} \right) \left( \frac{2G + \lambda}{2G} \varepsilon_{\vartheta\vartheta} + \frac{\lambda}{2G} (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) \right), \\ \sigma_{r\vartheta} = 2G \left( \mathbf{I} + \mathbf{N}_{\tau_0(r,\vartheta,\varphi)} \right) \varepsilon_{r\vartheta}, \quad \sigma_{r\varphi} = 0, \quad \sigma_{\varphi\vartheta} = 0. \end{cases}$$

$$\tau_0(r, \vartheta, \varphi) = \begin{cases} \tau_0, & (r, \vartheta, \varphi) \in \Pi_1, \\ \tau^*(r, \vartheta, \varphi), & (r, \vartheta, \varphi) \in \Pi(t) \setminus \Pi_1. \end{cases} \quad (3)$$

$$\left( \mathbf{I} + \mathbf{N}_{\tau_0(r,\vartheta,\varphi)} \right)^{-1} = \left( \mathbf{I} - \mathbf{L}_{\tau_0(r,\vartheta,\varphi)} \right), \quad \mathbf{L}_s f(t) = \int_s^t f(\tau) K_1(t, \tau) d\tau.$$

где  $G = G(t)$  — модуль упругомгновенной деформации при сдвиге;  $K_1(t, \tau)$  — ядро ползучести;  $\mathbf{I}$  — тождественный оператор. Значения всех функций в момент времени  $\tau_0 \leq t \leq \tau_1$  известны из решения задачи для основного тела. Выше в ряде очевидных случаев аргументы опущены. Будем

опускать их и далее, воспроизводя лишь в случаях, когда их отсутствие может затруднить понимание.

На границе роста задаётся условие контакта (условие контакта приращиваемой двумерной поверхности и трёхмерного тела).

Отличительными особенностями начально-краевой задачи для наращиваемого тела (1)-(3), выводящими её за рамки классических задач механики деформируемого твёрдого тела, являются: специфическое начально-краевое условие на поверхности роста; нарушение условия совместности деформаций в области, занимаемой дополнительным телом, и выполнение лишь его аналога и аналога соотношений Коши в скоростях соответствующих величин.

Краевая задачу (1)-(3) для растущего тела приводится к виду:

$$\begin{cases} \frac{\partial W_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{W_{r\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{2W_{rr} - W_{\varphi\varphi} - W_{\vartheta\vartheta} + W_{r\vartheta} \operatorname{ctg} \vartheta}{r} = 0, \\ \frac{\partial W_{\vartheta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{W_{\vartheta\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{(W_{\vartheta\vartheta} - W_{\varphi\varphi}) \operatorname{ctg} \vartheta}{r} = 0 \\ \left\{ \begin{aligned} D_{rr} &= \frac{\partial v_r}{\partial r}, D_{\varphi\varphi} = \frac{v_r}{r} + \operatorname{ctg} \vartheta \frac{v_\vartheta}{r}, D_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{v_r}{r}, \\ D_{r\vartheta} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \vartheta} + \frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} - \frac{v_\vartheta}{r} \right), D_{r\varphi} = 0, D_{\varphi\vartheta} = 0. \end{aligned} \right. \quad (4) \\ \left\{ \begin{aligned} W_{rr} &= 2GD_{rr} + \lambda(D_{rr} + D_{\varphi\varphi} + D_{\vartheta\vartheta}), \quad \sigma_{r\varphi} = 0, \\ W_{\varphi\varphi} &= 2GD_{\varphi\varphi} + \lambda(D_{rr} + D_{\varphi\varphi} + D_{\vartheta\vartheta}), \quad \sigma_{r\vartheta} = 2G\varepsilon_{r\vartheta}, \\ W_{\vartheta\vartheta} &= 2GD_{\vartheta\vartheta} + \lambda(D_{rr} + D_{\varphi\varphi} + D_{\vartheta\vartheta}), \quad \sigma_{\varphi\vartheta} = 0. \end{aligned} \right.$$

$$(r, \vartheta, \varphi) \in L(t): W_{rr} = W_{r\vartheta} = 0,$$

$$W_{ij} = \partial \sigma_{ij} / \partial t.$$

Краевая задача (4) совпадает по форме с краевой задачей теории упругости с параметром  $t$ . Для выполнения полученной задачи (4) следует применить решение Папковича и Нейбера, которое в сферических координатах принимает вид [3]

$$2Gv_r = 2 \frac{\lambda + 2G}{\lambda + G} \left[ (\phi_1 \cos \varphi + \phi_2 \sin \varphi) \sin \vartheta + \phi_3 \cos \vartheta \right] - \frac{\partial N}{\partial r},$$

$$2Gv_\vartheta = 2 \frac{\lambda + 2G}{\lambda + G} \left[ (\phi_1 \cos \varphi + \phi_2 \sin \varphi) \cos \vartheta - \phi_3 \sin \vartheta \right] - \frac{1}{r} \frac{\partial N}{\partial \vartheta},$$

$$2Gv_\varphi = 2 \frac{\lambda + 2G}{\lambda + G} \left[ -\phi_1 \sin \varphi + \phi_2 \cos \varphi \right] - \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial N}{\partial \varphi},$$

$$N = \phi_0 + r \left[ (\phi_1 \cos \varphi + \phi_2 \sin \varphi) \sin \vartheta + \phi_3 \cos \vartheta \right],$$

где  $\phi_0$ ,  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ , и  $\phi_3$  — гармонические функции.

Учитывая осесимметричность задачи, получаем:

$$\phi_0 = \left[ \frac{\lambda}{2(3\lambda + 2G)} pr^2 + \frac{B}{r^3} \right] (3 \sin^2 \vartheta - 2) + \frac{A}{r},$$

$$\phi_1 = \phi_2 = 0, \quad \phi_3 = \left( \frac{\lambda + G}{3\lambda + 2G} pr + \frac{C}{r^2} \right) \cos \vartheta,$$

$$N = \left[ -\frac{2G - \lambda}{3\lambda + 2G} pr^2 + \frac{3B}{r^3} - \frac{C}{r} \right] \sin^2 \vartheta + \frac{2G}{\lambda + 2G} pr^2 - \frac{2B}{r^3} + \frac{A + C}{r},$$

$$v_r = \frac{1}{2G} \left[ 2 \frac{\lambda + 2G}{\lambda + G} \left( \frac{\lambda + G}{3\lambda + 2G} pr + \frac{C}{r^2} \right) \cos^2 \vartheta - \frac{\partial N}{\partial r} \right],$$

$$v_\vartheta = \frac{1}{2G} \left[ -2 \frac{\lambda + 2G}{\lambda + G} \left( \frac{\lambda + G}{3\lambda + 2G} pr + \frac{C}{r^2} \right) \cos \vartheta \sin \vartheta - \frac{1}{r} \frac{\partial N}{\partial \vartheta} \right], \quad v_\varphi = 0.$$

$$q = \frac{1}{G(t)} \frac{\partial P(r, \vartheta, \varphi, t)}{\partial t} + \int_{\tau_0(x_1, x_2)}^t \frac{\partial P(r, \vartheta, \varphi, \tau)}{\partial \tau} \frac{\partial \omega(t, \tau)}{\partial t} \partial \tau +$$

$$+ P(r, \vartheta, \varphi, \tau_0(r, \vartheta, \varphi)) \frac{\partial \omega(t, \tau_0(r, \vartheta, \varphi))}{\partial t}.$$

Константы определяются из граничных условий, а величины  $W_{ij} = \partial \sigma_{ij} / \partial t$  — дифференцированием  $N$  (их опускаем ввиду громоздкости).

Истинные напряжения и деформации восстанавливаются по известным формулам расшифровки [1,2]. Для получения решений на этапах до и после

наращивания достаточно в функциях  $\phi_0$ ,  $\phi_3$  и  $N$  принять  $t = \tau_1$  и  $t = \tau_2$  соответственно.

Основной вывод состоит в том, что если в готовом теле без учёта наращивания максимум интенсивности касательных напряжений достигается на границе тела, то при наращивании максимум интенсивности касательных напряжений может достигаться: на границе раздела основного и дополнительного тел, на границе готового тела, в произвольной точке дополнительного тела.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В., Наумов В.Э. Контактные задачи механики растущих тел. М.: Наука, 1991. 176с.
2. Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В. Контактные задачи теории ползучести. Ереван: Изд-во НАН РА, 1999. 320с.
3. Хан Х. Теория упругости. Основы линейной теории и её применения. Пер. с нем. М.: Мир, 1988. 344 с.

### **Information about authors:**

#### **Mikhin Mikhail**

Associate Professor of the Department of higher mathematics

**Phone:** +7 903 6747318

**E-mail:** mmikhin@inbox.ru

# К УСТОЙЧИВОСТИ СЛОИСТОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО КОЛЬЦА ПОД ШТАМПАМИ

*Мовсисян Л.А.*

*Армения*

Задачи статики кольца (или одномерные для цилиндрической оболочки) под штампами рассматривались ранее, на которых есть ссылки в [1,2]. Однако задачи устойчивости для таких систем, насколько нам известно, имеются только в [1,2]. Здесь изучается задача устойчивости слоистого кольца под штампами. Ортотропные слои по высоте расположены произвольным образом, только главные линии упругости совпадают с координатными.

1. Уравнение статики для усилий и момента [2]

$$T_1 = c_1 \cos \theta + c_2 \sin \theta + R \int_0^\theta q \sin(\theta - \varphi) d\varphi$$

$$M = -R \left[ c_1 \cos \theta + c_2 \sin \theta + R \int_0^\theta q \sin(\theta - \varphi) d\varphi \right] + c_3 R \quad (1.1)$$

$$N = c_1 \sin \theta - c_2 \cos \theta - R \int_0^\theta q \cos(\theta - \varphi) d\varphi$$

Имеются следующие соотношения упругости:

$$T = C_{11}\varepsilon + K_{11}\chi, \quad M = D_{11}\chi + K_{11}\varepsilon \quad (1.2)$$

$$N = G\mu, \quad (G = \sum h_k G_k)$$

и геометрические соотношения\*)

$$\varepsilon = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right), \quad \chi = \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta}, \quad \mu = \psi + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad (1.3)$$

По известной причине поперечный сдвиг учитывается.

Сосредоточенные силы воздействуют на кольцо через симметрично расположенные  $2m$  штампов (они имеют ось симметрии).

Если начало координаты брать в точке симметрии штампа, то условиями симметрии будут:

$$v = \frac{\partial w}{\partial \theta} = N = 0 \quad \text{при} \quad \theta = 0 \quad \text{и} \quad \theta = \frac{\pi}{m} \quad (1.4)$$

Если (1.2) разрешать через геометрические величины, то из (1.1) и (1.4) получим:

---

\*)Хотя задача одномерная, но привычные для этих величин такие обозначения, поэтому и принимается такая запись для производных.

$$\frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} = H \left[ c_1 \sin \theta - R \int_0^{\theta} q \cos(\theta - \varphi) dy \right] - R^2 (a_{12} - Ra_{22}) \cdot \int_0^{\theta} q d\varphi - c_3 R^2 a_{22} \theta, \quad H = \frac{1}{G} - R(a_{12} - Ra_{22}) \quad (1.5)$$

где  $c_i$  определяется как

$$c_i = \frac{R}{\sin \theta_1} \int_0^{\theta_0} q \cos(\theta_1 - \varphi) d\varphi, \quad c_3 = \frac{Ra_{22} - a_{12}}{\theta_1 a_{22}} \int_0^{\theta_0} q d\varphi \quad (1.6)$$

Здесь  $2\theta_0$  – неизвестный интервал контакта.

Неизвестное давление под штампом определится из условия

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = \lambda - 1, \quad \lambda = \frac{R}{R_1} \quad (1.7)$$

Принимается, что сечение штампа – цилиндр с радиусом  $R_1$ .

Решением уравнения (1.7) с учётом (1.5) будет:

$$q = \left( \frac{HG}{R} c_1 - \frac{A}{\alpha^2} \right) \operatorname{ch} \alpha \theta + \frac{A}{\alpha^2} \quad (1.8)$$

$$A = \frac{G}{R} [c_3 a_{22} R^2 - (1 - \lambda)], \quad \alpha^2 = HR(Ra_{22} - a_{12})$$

Подставляя его в (1.6), определяются  $c_i$ , а из условия

$$P = 2R \int_0^{\theta_0} q \cos \theta d\theta \quad (1.9)$$

неизвестный интервал  $\theta_0$ .

## 2. Система уравнений устойчивости

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} + N = 0, \quad \frac{\partial M}{\partial \theta} = RN,$$

$$\frac{\partial N}{\partial \theta} - T + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ T^0 \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \varphi \right) \right] = 0 \quad (2.1)$$

Чтобы не загружать индексами или штрихами, обозначения величин как в первом пункте, так и здесь одинаковые. Надо только учесть, что там величина относится к начальному состоянию, а здесь – к возмущённому. Только в третьем уравнении есть  $T^0$  – окружное усилие, определяемое из предыдущего пункта.

В окончательном виде критическая сила должна быть определена из уравнения

$$D \left( \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 1 \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left[ T^0 \frac{1}{2} \left( \frac{D}{G} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - 2 \right) \varphi \right] = 0 \quad (2.2)$$

где через  $D$  обозначено

$$D = \frac{D_{22} C_{11} - K_{11} K_{22}}{R(R C_{11} - K_{11})}$$

В классической постановке  $G \rightarrow \infty$ .

Если  $T^0$  представить в виде ряда (имеется симметрия расположения штампов)

$$T^0 = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos m\theta \quad (2.3)$$

и искать решение (2.2) так

$$\varphi = \sum_{m=0}^{\infty} \left( \varphi_m^{(1)} \cos m\theta + \varphi_m^{(2)} \sin m\theta \right), \quad (2.4)$$

то для определения критических сил будем иметь однородные системы:

$$D(m^2 - 1)\varphi_m^{(i)} + \frac{1}{4}(2a_0 \pm a_{2m})\Phi_m^{(i)} + \frac{1}{4} \left[ \sum_{n=1}^{m-1} (a_{m-n} \pm a_{m+n})\Phi_n^{(i)} + \sum_{n=m+1}^{\infty} (a_{n-m} \pm a_{m+n})\Phi_n^{(i)} \right] = 0, \quad (2.5)$$

где  $\Phi_n^{(i)} = \varphi_n^{(i)} \left( \frac{D}{G} n^2 + 2 \right)$

3. В предыдущем пункте выражение для  $q$  получено в предположении  $\alpha^2 \gg 1$ . И задача устойчивости для однослойного кольца решена в такой постановке [2]. Однако, для сред с данными  $a_{ii}^{-1} \gg G$  (модуль поперечного сдвига во много раз меньше продольных), уже  $\alpha^2$  можно пренебречь по сравнению с единицей. В настоящем пункте именно такой случай будем

рассматривать, к тому же, в предположении  $R \gg R_1$ . В случае четырёх штампов  $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$  все величины с точностью по  $\theta_0, (\lambda \gg 1)$  будут:

$$c_1 = (1 - \lambda)G\theta_0, \quad c_3 = B(1 - \lambda)G\theta_0$$

$$q = q_0(1 + \theta_0), \quad q_0 = (1 - \lambda)\frac{G}{R}, \quad B = \frac{Ra_{22} - a_{12}}{\theta_1 a_{22}} \quad (3.1)$$

С такой точностью и определяются критические параметры. Выражение кольцевого давления (2.3)

$$a_m = \frac{Rb_m}{m^2 - 1}, \quad b_0 = \frac{4q_0\theta_0}{\pi}, \quad b_m = \frac{4q_0}{m\pi} \sin m\theta_0 (1 + 2 \cos m\theta) \quad (3.2)$$

Соответственно критический угол и критическая сила будут

$$\theta_0 = \frac{1,4}{\lambda - 1}, \quad P = 2,8G \quad (3.3)$$

Для сравнения приведём значения критических сил по [2]

$$P \frac{R^2}{EJ} = 2,67, \quad \lambda = 0,2$$

$$P \frac{R^2}{EJ} = 4,05, \quad \lambda = -0,2 \quad (3.4)$$

Если в первом случае потеря устойчивости происходит по сдвиговой деформации [3], то по [2] – изгибной. С этой точки зрения стоит для сравнения привести значения критического равномерного давления для кольца в классической и настоящей постановках –

$$q_{kp} = \frac{3D}{R^3}, \quad q_{kp} = \frac{1,5G}{R}$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Мовсисян Л.А. К устойчивости круговой арки под штампом. //Изв.НАН Армении. Механика. 1993. Т.46. №2. С.32-40.
2. Мовсисян Л.А. К устойчивости кольца под штампами. //Изв.НАН Армении. Механика. 2011. Т.64. №2. С.32-40.
3. Мовсисян Л.А. К сдвигу упругих колонн. //Докл. НАН Армении. 2001. Т.101. №4. С.330-336.

#### Сведения об авторе:

**Мовсисян Лаврентий Александрович**, д.т.н., профессор, главный научный сотрудник Института механики НАН Армении

**Адрес:** 0019, Ереван-19, пр. Маршала Баграмяна, 24/2

**Тел.:** (+37410) 56 82 01. **Е-mail:** [mechins@sci.am](mailto:mechins@sci.am)

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ МЕХАНИКИ В ПРАКТИЧЕСКОЙ СТОМАТОЛОГИИ

*Мусаелян С.Л., Григорян К.Л., Касьян А.Э.  
Армения*

В работе приводятся методы, которые были использованы при изучении Армянской системы дентальных имплантатов, в частности, цилиндрических и конических цанговых имплантатов. При исследовании цилиндрических цанговых имплантатов были использованы экспериментальные методы механики и методы сопротивления материалов, а при исследовании конусных имплантатов и костной ткани челюсти человека – метод фотоупругости, методы механики грунтов и ПК Solid Works и Solid Works Simulation, в основе которой лежит метод конечных элементов. В процессе исследований цилиндрических и конических цанговых имплантатов нами были применены различные методы механики в зависимости от постановки задачи.

Экспериментальные методы механики. Экспериментальные исследования были проведены на сегментах челюстной кости половозрелых свиней и на блоках пластмассы типа «Фторакс». Для проведения испытаний было спроектировано и изготовлено специальное захватное приспособление, позволяющее фиксирование сегмента кости или пластмассы и установленный в сегменте цанговый цилиндрический имплантат. Приспособление по принципу действия подобно приспособлению для растяжения кольцевых образцов с помощью двух жёстких полудисков. В полной сборке приспособление устанавливается в захватах испытательной машины так, как показано на рис.1. Испытания были осуществлены на разрывной машине типа ZD-10/90, мощностью 100 кН, при скорости холостого перемещения захватов порядка 0.3 мм/мин с целью статического нагружения испытуемых образцов. Для сравнительной оценки цангового эффекта были варьированы углы закручивания гайки в пределах от 0° до 360°. Испытанию были подвержены 17 сегментов челюстной костной ткани и 15 блоков пластмассы «Фторакс». По полученным диаграммам растяжения были определены величины усилия, требуемые для вытаскивания имплантатов из фрагмента. Была установлена эмпирическая зависимость между усилием вытаскивания цангового имплантата из фрагмента и углом закручивания гайки, имеющей следующий вид:



*Рис.1*

$$P = P_0 (1 + m \sin \varphi / m) \quad (1)$$

где  $P_0$  – усилие вытаскивания имплантатов с неактивированными цангами,  $\varphi$  – угол закручивания ключа-трещотки,  $m$ –количество цанговых лепестков. При испытании имплантатов на фрагментах челюсти половозрелых свиней получаем  $P_0=250$  кН, а для пластмассы –  $P_0=1010$  кН.

Поляризационно-оптический метод. Данный метод был применён для сравнения напряжённо-деформированного состояния костной ткани при применении цилиндрических или конических цанговых имплантатов [5]. С этой целью в пластину из оптически чувствительной эпоксидной смолы толщиной 5.5 мм были установлены цилиндрический и конический цанговые имплантаты. После активации цанговых имплантатов получили картины напряжённо-деформированного состояния. Полученные результаты показали преимущество конических имплантатов по отношению к цилиндрическим.

Метод сопротивления материалов. В работе [1] был рассмотрен четырёхлепестковый цилиндрический имплантат. Каждый лепесток рассматривался как консольная балка и была определена функция прогибов. Определена также функция давления, при которой полученные прогибы превращаются в ноль. Исходя из полученной функции давления, определяются радиальные и меридиональные нормальные напряжения.

По полученным результатам были ограничены углы закручивания ключа-трещотки ввиду безопасного применения цанговых цилиндрических имплантатов.

Метод механики грунтов. Так как модуль упругости компактной костной ткани и некоторых грунтов равны, то принимаем функцию давления со стороны имплантата на костное ложе согласно [3] в следующем виде:

$$p_x = a_0 + \frac{2a_1}{L} \left( x - \frac{L}{2} \right) + \frac{4a_2}{L^2} \left( x - \frac{L}{2} \right)^2 + \frac{8a_3}{L^3} \left( x - \frac{L}{2} \right)^3 + \frac{16a_4}{L^4} \left( x - \frac{L}{4} \right)^4$$

Условия контакта следующие:

$$x=0, y=v; x=0.5L, y=v; x=L, y=v; x=0.5L, y^I=v^I$$

Показатель гибкости:

$$\alpha = \frac{1}{1 - \mu_0^2} \frac{\pi E_0 b L^3}{EI}$$

Используем следующие формулы для определения коэффициентов:

$$a_0 = \frac{(8252 - 34\alpha)(1 - \beta_H)q - 13440 B\alpha}{13440 + 29\alpha}$$

$$a_1 = 3 \frac{(1280 - \alpha)\beta_H(1 - \beta_H)q - 8N\alpha}{2048 + \alpha}$$

$$a_2 = 3 \frac{(5188 + 63\alpha)(1 - \beta_H)q + 13440 B\alpha}{13440 + 29\alpha}$$

$$a_3 = 10 \frac{(384 + \alpha)\beta_H(1 - \beta_H)q + 4N\alpha}{2048 + \alpha}$$

$$B = \frac{q}{480} [4(1 - \beta_H)^5 - 5(1 - \beta_H)^2] - W$$

$$N = q[(0.5 - \beta_H) - 0.5(1 - \beta_H)^2]$$

$$W = q \frac{(0.5 - \beta_H)^2}{24}$$

Имея функцию давления, можно определить напряжения и деформации в костном ложе. Эти расчёты были проведены в программной среде MatLab. Полученные результаты были сравнены с свойствами компактной костной ткани.

Метод конечных элементов. Применение ПК Solid Works и Solid Works Simulation. Ввиду сложности геометрий зубопротезной конструкции и челюсти человека, нами были приобретены из ЕрМИ им. Мхитара Гераци: конструкции, конусный цанговый имплантат Армянской системы и челюсть человека. В ПК Solid Works были получены соответствующие 3D модели.



Рис.2

3D модель челюсти человека с имплантатами в среде Solid Works

Расчёты проводились в среде Solid Works Simulation. Было показано, что при активации у цилиндрических имплантатов напряжения в 1.2 и деформации в 1.22 раза больше, чем у конических имплантатов [4], что свидетельствует о целесообразности применения конических имплантатов, так как воздействие со стороны конических имплантатов на костную ткань челюсти будет меньше, чем со стороны цилиндрических имплантатов и даже при преждевременном нагружении получим более надёжное первичное фиксирование.

В настоящее время конусные имплантаты, разработанные нами как Армянская система дентальных имплантатов, успешно используются в практической стоматологии.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Григорян К.Л., Мусаелян С.Л. Об одном методе соединения зубного имплантата с костной тканью. //Изв. НАН Армении. Механика. 2001. Т.54. №4. С.54-60.
2. Проблемы прочности в биомеханике. /Под редакцией И.Ф.Образцова, М.: Высшая школа, 1988.
3. Симвулиди Н.А. Расчёт инженерных конструкций на упругом основании. М.: «Высшая школа», 1987.
4. Касьян А.Э., Григорян К.Л., Мусаелян С.Л. О целесообразности применения конического варианта цанговых имплантатов. //НАН РА. Медицинский центр Эребуни. 2011. №1.С.47-51.
5. Касьян А.Э., Григорян К.Л., Гргигорян Д.Г., Мусаелян С.Л. Применение поляризационно-оптического метода в современных стоматологических исследованиях.//НАН РА. Медицинский центр Эребуни. 2011. №4. С.6-8.

#### Сведения об авторах:

**Мусаелян С.Л.** Институт механики НАН РА, Военный авиационный институт им. Маршала А.Ханперянца МО РА. Тел.: (094)66 78 58

**Григорян К.Л.** ЕрГМУ, кафедра хирургической и семейной стоматологии.

**Касьян А.Э.** Стоматологический центр «Аванта»

# О ВЛИЯНИИ ТИПА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА ПОВЕДЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В ТОНКОМ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОМ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ КЛИНЕ

*Нерсисян Г.Г., Саргсян А.М.*

*Армения*

Обсуждается вопрос о зависимости распределения электроупругих напряжений от типа электрических граничных условий, заданных на гранях составного пьезоклина.

Интерес к изучению электроупругих полей в однородных или кусочно-однородных пьезоэлектрических телах связан с широким применением в современной технике функциональных элементов из пьезоматериалов [1–4].

В работах [5,6] исследованы три краевые задачи электроупругости для тонкого кусочно-однородного пьезоэлектрического клина, когда на его гранях заданы нормальные и касательные напряжения и три различных электрических граничных условий. В данной работе эти вопросы исследуются для случая, когда на гранях пьезоклина заданы перемещения.

Пусть два тонких пьезоэлектрических клина с различными электроупругими свойствами, жёстко соединены вдоль общей границы. В каждой точке составного пьезоклина имеется плоскость материальной симметрии, параллельная его срединной поверхности.

В полярной системе координат граничные условия для первой задачи записываются в виде:

$$\begin{aligned} u_{r1}(r, \theta_1) = u_1(r), \quad u_{\theta 1}(r, \theta_1) = v_1(r), \quad V_1(r, \theta_1) = V_{01}(r), \\ u_{r2}(r, -\theta_2) = u_2(r), \quad u_{\theta 2}(r, -\theta_2) = v_2(r), \quad V_2(r, -\theta_2) = V_{02}(r), \end{aligned} \quad (1)$$

Для второй и третьей задачи электрические граничные условия имеют вид, соответственно,

$$D_{\theta 1}(r, \theta_1) = D_1(r), \quad D_{\theta 2}(r, -\theta_2) = D_2(r), \quad (2)$$

$$V_1(r, \theta_1) = V_{01}(r), \quad D_{\theta 2}(r, -\theta_2) = D_2(r). \quad (3)$$

Для всех задач контактные условия имеют вид

$$\sigma_{\theta 1}(r, 0) = \sigma_{\theta 2}(r, 0), \quad \tau_{r\theta 1}(r, 0) = \tau_{r\theta 2}(r, 0), \quad u_{r1}(r, 0) = u_{r2}(r, 0), \quad (4)$$

$$u_{\theta 1}(r, 0) = u_{\theta 2}(r, 0), \quad \partial V_1(r, 0)/\partial r = \partial V_2(r, 0)/\partial r, \quad D_{\theta 1}(r, 0) = D_{\theta 2}(r, 0).$$

где  $V(r, \theta)$  – потенциал электрического поля,  $D_{\theta}(r, \theta)$  – нормальная компонента вектора электрической индукции.

Электроупругое состояние каждой части составного пьезоклина опре-

деляется решением систем уравнений [7]

$$4\pi L_4 F(x, y) - L_3 \Psi(x, y) = 0, \quad L_3 F(x, y) + L_2 \Psi(x, y) = 0, \quad (5)$$

$$L_4 = s_{22} \partial^4 / \partial x^4 - 2s_{26} \partial^4 / \partial x^3 \partial y + (2s_{12} + s_{66}) \partial^4 / \partial x^2 \partial y^2 - 2s_{16} \partial^4 / \partial x \partial y^3 + s_{11} \partial^4 / \partial y^4,$$

$$L_3 = -g_{22} \partial^3 / \partial x^3 + (g_{12} + g_{26}) \partial^3 / \partial x^2 \partial y - (g_{21} + g_{16}) \partial^3 / \partial x \partial y^2 + g_{11} \partial^3 / \partial y^3,$$

$$L_2 = \eta_{22} \partial^2 / \partial x^2 - 2\eta_{12} \partial^2 / \partial x \partial y + \eta_{11} \partial^2 / \partial y^2, \quad s_{22} \dots - \text{коэффициенты упругости,}$$

$\eta_{22}, \dots$  – коэффициенты диэлектрической восприимчивости,  $g_{22}, \dots$  – пьезоэлектрические модули,  $F(x, y)$  и  $\Psi(x, y)$  – функции напряжения Эри и электрической индукции, через которые выражаются напряжения и компоненты вектора электрической индукции.

$$\sigma_x = \partial^2 F / \partial y^2, \quad \sigma_y = \partial^2 F / \partial x^2, \quad \tau_{xy} = -\partial^2 F / \partial x \partial y, \quad D_x = \partial \Psi / \partial y, \quad D_y = -\partial \Psi / \partial x \quad (6)$$

Общие выражения для функций  $F(x, y)$  и  $\Psi(x, y)$  имеют вид:

$$F(x, y) = \sum_{j=1}^6 \gamma_j F_j(z_j), \quad \Psi(x, y) = \sum_{j=1}^6 \gamma_j f_j F_j'(z_j), \quad (7)$$

где  $F_j(z_j)$  – аналитические функции своих аргументов,  $z_j = x + \mu_j y$ ,

$$F_j'(z_j) = dF_j(z_j) / dz_j, \quad \mu_j - \text{неравные между собой корни уравнения}$$

$$4\pi l_4(\mu) l_2(\mu) + l_3^2(\mu) = 0, \quad \mu_j = \sigma_j + i\nu_j, \quad \nu_j > 0, \quad \mu_4 = \bar{\mu}_1, \quad \mu_5 = \bar{\mu}_2, \quad \mu_6 = \bar{\mu}_3, \quad (8)$$

$$\gamma_j = 1 \quad (j = 1, 2, 4, 5), \quad \gamma_j = l_3(\mu_j) / 4\pi l_4(\mu_j) \quad (j = 3, 6), \quad f_j = -l_3(\mu_j) / l_2(\mu_j).$$

Полиномы  $l_4(\mu)$ ,  $l_3(\mu)$  и  $l_2(\mu)$  получаются из  $L_4$ ,  $L_3$  и  $L_2$  заменой  $\partial / \partial x, \dots, \partial^4 / \partial x^4$  на единицу, а  $\partial / \partial y, \dots, \partial^4 / \partial y^4$  – на  $\mu, \mu^2, \mu^3, \mu^4$ .

Записывая в полярной системе координат выражения для  $\sigma_\theta, \sigma_r, \tau_{r\theta}, \partial u_r / \partial r, \partial u_\theta / \partial r, \partial V / \partial r, D_r, D_\theta$  и применяя к ним обобщённое интегральное преобразование Меллина комплексной функции  $f(z) = f(x + \mu y)$  ( $\mu$  – некоторая комплексная константа) [9]

$$\langle f(z) \rangle = \int_0^\infty f(z) r^{s-1} dr = a^{-s}(\theta) \bar{f}(s), \quad \bar{f}(s) = \int_0^\infty f(z) r^{s-1} dr, \quad a(\theta) = \cos \theta + \mu \sin \theta, \quad (9)$$

с учётом (6) и (7) будем иметь:

$$\langle \sigma_\theta \rangle = \sum_{j=1}^6 \gamma_j a_j^2(\theta) a_j^{-s}(\theta) \bar{F}_j(s), \quad \langle \sigma_r \rangle = \sum_{j=1}^6 \gamma_j b_j^2(\theta) a_j^{-s}(\theta) \bar{F}_j(s), \quad (10)$$

$$\langle D_r \rangle = \sum_{j=1}^6 \gamma_j f_j b_j(\theta) a_j^{-s}(\theta) \bar{F}_j(s), \quad \langle D_\theta \rangle = - \sum_{j=1}^6 \gamma_j f_j a_j(\theta) a_j^{-s}(\theta) \bar{F}_j(s), \quad (10)$$

$$\text{где } \bar{F}_j(s) = \int_0^\infty F''(z_j) z_j^{s-1} dz_j, \quad a_j(\theta) = \cos \theta + \mu_j \sin \theta, \quad b_j(\theta) = -\sin \theta + \mu_j \cos \theta.$$

Преобразуя по Меллину гранично-контактные условия (1), (4), предварительно продифференцируя в них  $u_r(r, \theta)$ ,  $u_\theta(r, \theta)$  и  $V(r, \theta)$  по  $r$  и удовлетворяя преобразованным условиям, для определения неизвестных  $\bar{F}_{jk}(s)$  ( $k=1, 2$ ;  $j=1, 2, \dots, 6$ ) получим систему линейных уравнений:

$$\sum_{j=1}^{12} B_{ij} U_j = T_i^*(s) \quad (i=1, 2, \dots, 12), \quad (11)$$

$$U_j = \|\bar{F}_{11}(s), \bar{F}_{21}(s), \dots, \bar{F}_{61}(s), \bar{F}_{12}(s), \bar{F}_{22}(s), \dots, \bar{F}_{62}(s)\|,$$

$$T_i^* = \|\langle u_1(r) \rangle, \langle v_1(r) \rangle, \langle dV_{01}(r)/dr \rangle, \langle u_2(r) \rangle, \langle v_2(r) \rangle, \langle dV_{02}(r)/dr \rangle, 0, 0, 0, 0, 0, 0\|.$$

Для второй и третьей задач изменяются соответствующие строки матрицы  $B$  коэффициентов  $B_{ij}$ . Определяя из (11) неизвестные функции

$$\bar{F}_{j1} = |B_{j1}| / |B| = \sum_{l=1}^6 T_l^* A_{lj}(s) \Delta_{12}^{-1}(s), \quad \bar{F}_{j2} = |B_{j2}| / |B| = \sum_{l=1}^6 T_l^* A_{(l+6)j}(s) \Delta_{12}^{-1}(s),$$

( $|B| = \Delta_{12}(s)$ ) – определитель системы (11), матрицы  $B_{jk}$  ( $k=1, 2$ ) получаются из  $B$  заменой соответствующего столбца на правые части,  $A_{ij}$  – алгебраические дополнения) и подставляя в (10), получим решение в трансформантах Меллина,  $\tilde{l} = l + 3(1 + (-1)^k)$  ( $k=1, 2$ )

$$\langle \sigma_{\theta k} \rangle = \sum_{l=1}^6 T_l^* \left[ \sum_{j=1}^6 \gamma_{jk} a_{jk}^2(\theta) a_{jk}^{-s}(\theta) A_{ij} \right] \Delta_{12}^{-1}(s), \quad \langle \sigma_{rk} \rangle = \sum_{l=1}^6 T_l^* \left[ \sum_{j=1}^6 \gamma_{jk} b_{jk}^2(\theta) a_{jk}^{-s}(\theta) A_{ij} \right] \Delta_{12}^{-1}(s),$$

$$\langle D_{rk} \rangle = \sum_{l=1}^6 T_l^* \left[ \sum_{j=1}^6 \gamma_{jk} b_{jk}(\theta) f_{jk} a_{jk}^{-s}(\theta) A_{ij} \right] \Delta_{12}^{-1}(s), \quad \langle D_{\theta k} \rangle = - \sum_{l=1}^6 T_l^* \left[ \sum_{j=1}^6 \gamma_{jk} a_{jk}(\theta) f_{jk} a_{jk}^{-s}(\theta) A_{ij} \right] \Delta_{12}^{-1}(s).$$

Напряжения и компоненты вектора электрической индукции определяются с помощью обратного преобразования Меллина

$$\sigma_{\theta k} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \langle \sigma_{\theta k} \rangle r^{-s} ds, \dots, D_{\theta k} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \langle D_{\theta k} \rangle r^{-s} ds, \quad (12)$$

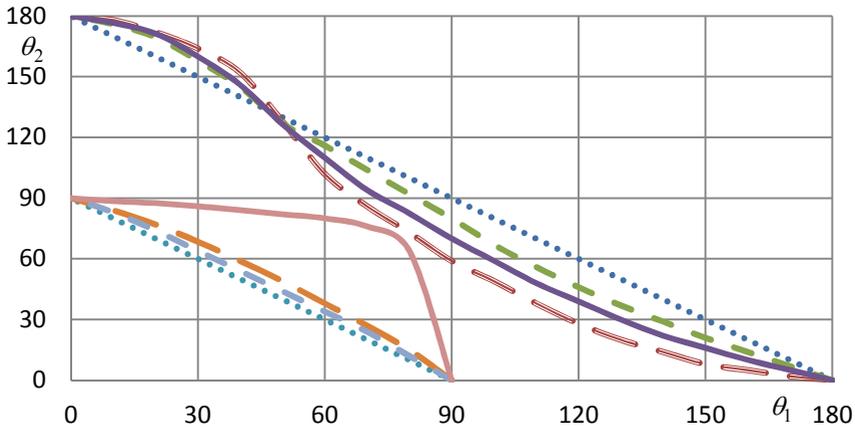
путь интегрирования которого лежит в полосе [9]

$$\max(\operatorname{Re} s_n) < c < \min(\operatorname{Re} s_n).$$

$$\operatorname{Re} s_n < 1 \qquad \operatorname{Re} s_n \geq 1$$

Здесь  $s_n$  – точки полюсов  $\langle \sigma_{\theta k} \rangle, \dots, \langle D_{\theta k} \rangle$ ,  $\operatorname{Re} s_n < 1$  ( $\operatorname{Re} s_1 > \operatorname{Re} s_2 > \dots$ ).

Поведение напряжений в окрестности угловой точки составного пьезоклина определяется решением уравнений  $\Delta_{12}(s) = 0$  (если окрестность угловой точки свободна от внешних воздействий), а распределение напряжений во внутренних точках составного пьезоклина определяется численным интегрированием (12) [5–6]. Численные расчёты проведены для составного пьезоклина из БФК и БФР [10]. Из условий  $\operatorname{Re} s_1 = 0$  на плоскости  $(\theta_1, \theta_2)$  построены предельные кривые (штриховые линии), разделяющие в окрестности вершины пьезоклина области малонапряжённости ( $\operatorname{Re} s_1 < 0$ ) и сильной концентрации ( $0 < \operatorname{Re} s < 1$ ) [8]. Кривые для первой и второй задач практически совпадают. Там же, для сравнения, приведены предельные кривые, когда при прочих равных условиях  $s_{11}^{(2)}, g_{11}^{(2)}$  увеличены в 17 раз (разомкнутая и сплошная линии). Из рисунка видно, что при заданных механических граничных условиях смешанные электрические граничные условия качественно и количественно влияют на поведение напряжений в окрестности вершины пьезоклина. Для однородного клина предельная кривая для первой и второй задач представляют собой отрезок прямой  $\theta_1 + \theta_2 = \pi$ , для третьей задачи  $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$ . В случае третьей задачи предельные кривые пересекают оси  $\theta_1$  и  $\theta_2$  в точках  $(\pi/2, 0)$  и  $(0, \pi/2)$ .



Заметим, что компоненты вектора электрической индукции в окрестности вершины составного пьезоклина имеет такое же поведение.

Численное интегрирование (12) показывает, что влияние смешанных электрических граничных условий на распределение контактных напряжений и в этой задаче несущественно [11,12].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лавриенко В.В. Пьезоэлектрические трансформаторы. М.: 1975. 122с.
2. Qin Q.H. Fracture mechanics of piezoelectric materials. – Southampton, Boston: WIT-Press, 2001. 237p.
3. Hwu C., Ikeda T. Electromechanical fracture analyses for corners and cracks in piezoelectric materials. // Int. J. of solids and structures. 2008. №11. P.5744-5764.
4. Chen C.-D. On the singularity of the thermo-electro-elastic fields near the apex of a piezoelectric bounded wedge // Int. J. of Solids and Structures. 2006. P.957-981.
5. Нерсисян Г.Г., Саргсян А.М. Краевые задачи электроупругости для кусочно-однородного пьезоэлектрического клина. //МКМ. 2013. №2. С.193-206.
6. Саргсян А.М. Влияние типа электрических граничных условий на поведение напряжений в тонком кусочно-однородном пьезоэлектрическом клине// Механика композитных материалов. – 2014. – В печати.
7. Космодамианский А.С., Ложкин В.Н. Обобщённое плоское напряжённое состояние пьезоэлектрических пластин // ПМ. 1975. Т.11. №5. С. 45- 53.
8. Чобанян К.С. Напряжения в составных упругих телах. Ереван: 1987. 338с.
9. Михайлов С.Е. Об одной плоской задаче для двух соединённых анизотропных клиньев. // МТТ. 1978. №4. С.155-160.
10. Акустические кристаллы / Ред. Шаскольский/ – М.: Наука, 1982. 632 с.

#### Сведения об авторах:

##### **Нерсисян Гриша Геворкович,**

Армянский Национальный Аграрный Университет, к.ф.-м.н., доцент,

**Адрес:** Армения, 0037, Ереван, пр.Азатутян, 7, кв.7. **Тел.:** 20-68-79

##### **Саргсян Азат Мкртычевич,**

Институт механики НАН Армении, ведущий научный сотрудник, кандидат физ.-мат наук,

**Адрес:** Армения, 0018, Ереван, ул. Т.Меци, 40, кв.47

**Тел.:** 55-21-33, **E-mail:** azat-sargsyan@mail.ru

# НОВАЯ РАСЧЁТНАЯ СХЕМА ДЛЯ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ ОДНОРОДНОГО КОНСОЛЬНОГО СТЕРЖНЯ ПРИ КИНЕМАТИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

*Оганесян С.М.  
Армения*

В статье показано, что при кинематическом возбуждении однородного консольного стержня постоянного поперечного сечения начальные фронты изгибной волны возникают с его свободного конца.

1. В работе [1] даны постановки задач о распространении упругих волн чистого изгиба и изгиба при свободных колебаниях однородного консольного стержня постоянного поперечного сечения длины  $l$ . Однако, при рассмотрении задачи о вынужденных колебаниях однородного консольного стержня на изгиб оказалось [2,3], что при силовом внешнем воздействии в виде распределённой силы  $f(x,t)$  истинной причиной изгибных колебаний является её обобщённая частная производная по переменной  $x$   $f'(x,t)$ . При этом, в стержне возникают «внутренние» объёмные силы  $q(x,t)$ , которые необходимо учитывать при формулировке постановки задачи о свободных и вынужденных колебаниях консольного стержня на изгиб.

Приведём уточнённую постановку задачи, которая показывает, почему формулировка задачи в углах изгиба  $\varphi$ , принятой в работе [1], оказалась более перспективной.

Перейдём к рассмотрению задачи о вынужденных колебаниях однородного консольного стержня на изгиб (ВКОКСИ) под действием внешней распределённой силы  $f(x,t)$  или кинематическом возбуждении. Представим, как принято в работах [1-4], перемещение нейтральной линии  $U(x,t)$  и углы поворота  $\varphi(x,t)$  поперечных сечений в виде  $U = U_1 + U_2$  и  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ , где  $U_1$  ( $\varphi_1$ ) – перемещения (углы поворотов) нейтральной линии от изгиба,  $U_2$  ( $\varphi_2$ ) – дополнительные перемещения (углы поворотов) с учётом деформации сдвига. В работах [2,3] показано, что стационарная и волновая ВКОКСИ подзадачи принимают, соответственно, следующий вид:

$$q(x,t) - kGS \frac{\partial^2 \bar{U}_2}{\partial x^2} = f(x,t), \quad (1)$$

где  $k$  – численный коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения,  $G$  – модуль сдвига Юнга, и

$$\rho S \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} - k G S \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} = f'_x(x, t) \quad (2)$$

при нулевых начальных и граничных условиях

$$\varphi_2(0, t) = \frac{\partial \varphi_2(1, t)}{\partial x} = 0, \quad \varphi_2(x, 0) = \frac{\partial \varphi_2(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial x} = \bar{\varphi}_2(x, t), \quad U_2(0, t) = 0, \quad (4)$$

$\bar{\varphi}_2(x, t)$  – решение задачи (2)-(3),  $\bar{U}_2$  – решение задачи (4),  $\rho$  – плотность стержня.

При формулировке волновой подзадачи (1) и решении задачи (2) – (3) нужно сохранять осторожность, связанную с возможностью возникновения обобщённых функций при нахождении частной производной  $f'_x(x, t)$ . В этих случаях (см. подзадачи III и IV), перемещение  $\bar{U}_2(x, t)$  в равенстве (1) должно быть заменено на  $\bar{U}_3(x, t)$ , в равенствах (2) – (4) – угол поворота  $\varphi_2$  – на  $\varphi_3$ ,  $U_2$  – на  $U_3$ , граничные условия уточнены.

Замечание 1. Если при определении  $f'_x(x, t)$  обобщённые производные не возникают, то подзадача I на подзадачах III и IV не подразделяется.

2. Покажем это для случая, когда внешняя сила  $f(x, t)$  равномерно распределена по всей длине стержня, т.е.  $f(x, t) = f(t)$  [2-4]. Эта задача для теории сейсмостойкости имеет важное значение. При кинематическом возбуждении основания консольного стержня по закону  $U_2(0, t) = U_0(t)$  и остальных нулевых начальных и граничных условий, волновая подзадача сводится к задачам (1) – (4) с  $f(x, t) = -\rho S \ddot{U}_0(t)$ , где  $\ddot{U}_0$  обозначают производные по времени. В работах [2,3] показано, что в этом случае имеем:

$$\rho S \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} - k G S \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} = f'_x(t) = -f(t) \delta(x-1) \quad (5)$$

при нулевых начальных и граничных условиях

$$\varphi_2(0, t) = \frac{\partial \varphi_2(1, t)}{\partial x} = 0, \quad \varphi_2(x, 0) = \frac{\partial \varphi_2(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial x} = \bar{\varphi}_2(x, t), U_2(0, t) = 0, \quad (7)$$

где  $\delta(\cdot)$  – дельта-функция Дирака,  $\bar{\varphi}_2(x, t)$  – решение задачи (5)-(6).

Замечание 2. Вторая  $\delta(x)$ , возникающая у основания консольного стержня, не учитывается, так как она не деформирует стержень.

Для того, чтобы получить решение волновой подзадачи (5) – (7), нужно её ещё раз подразделить на две подзадачи III и IV.

В подзадаче III аналог сосредоточенной силы  $\tilde{f}(t)$ , который приложен к свободному концу стержня, имеет размерность н/м и модуль, равный модулю  $f(t)$ , записывается в следующем виде:

Подзадача III:

$$\rho S \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial t^2} - k G S \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} = 0 \quad (8)$$

при начальных и граничных условиях

$$\varphi_3(0, t) = 0, k G S \frac{\partial \varphi_3(1, t)}{\partial x} = -\tilde{f}(t) \quad (9)$$

$$\varphi_3(x, 0) = \frac{\partial \varphi_3(x, 0)}{\partial t} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial U_3}{\partial x} = \bar{\varphi}_3(x, t), U_3(0, t) = 0, \quad (11)$$

где  $\bar{\varphi}_3(x, t)$  – решение задачи (8) – (10).

Так как при  $x=1$   $\frac{\partial^2 U_3(1, t)}{\partial x^2} \neq 0$ , то для обеспечения условия

$$\frac{\partial \varphi_2(1, t)}{\partial x} = \frac{\partial^2 U_2(1, t)}{\partial x^2} = 0 \text{ на конце стержня должна возникнуть также}$$

двойная сила с моментом (направленный сосредоточенный момент силы)

[5, с.197;6]  $M(t) = \frac{f(t)EI}{kGS} \delta'_x(x-1)$ ,  $E$  – модуль упругости,  $I$  – момент

инерции поперечного сечения стержня относительно его нейтральной линии.

Момент  $M(t)$  должен вызвать противоположное движение стержня, чтобы для  $\bar{\varphi}_2(x,t) = \bar{\varphi}_3(x,t) + \bar{\varphi}_4(x,t)$ , где  $\bar{\varphi}_4(x,t)$  – решение нижеприведённой подзадачи IV, выполнялось условие  $\frac{\partial \bar{\varphi}_2(1,t)}{\partial x} = 0$ . Назовём выполнение этого условия комбинированным [3,4].

Подзадача IV имеет следующий вид:

$$\rho(I + Sx^2) \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial x^2} = 0 \quad (12)$$

при начальных и граничных условиях

$$\varphi_4(0,t) = 0, \quad EI \frac{\partial \varphi_4(1,t)}{\partial x} = M(t) \quad (13)$$

$$\varphi_4(x,0) = \frac{\partial \varphi_4(x,0)}{\partial t} = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial U_4}{\partial x} = \bar{\varphi}_4(x,t), \quad U_4(0,t) = 0, \quad (15)$$

где  $\bar{\varphi}_4(x,t)$  – решение задачи (12) – (14).

Замечание 3. В случае, когда к свободному концу стержня приложена сосредоточенная сила  $F(t)$ , в подзадаче IV двойная сила с моментом возникает естественным образом. Действительно, выражение обобщённой производной  $F'_x(t)$  содержит производную дельта-функции, т.е.  $\delta'_x(x-1)$ . В подзадаче III аналог сосредоточенной силы  $\tilde{f}(t)$  должен возникнуть для выполнения комбинированного условия.

Перемещения  $U_1(x,t)$  и углы поворотов  $\varphi_1(x,t)$  находим из подзадачи II работы [1,2], в которой  $\bar{\varphi}_2$  заменено на  $\bar{\varphi}_3$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Оганесян С.М. Постановка задач о распространении упругих волн чистого изгиба и изгиба при поперечных колебаниях однородного консольного стержня // Докл. НАН Армении. 2013. Т.113. №3. С.259-267.
2. Оганесян С.М. К вопросу о построении новой теории сейсмостойкости // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружения. 2013. №5. С.26-29.

3. Оганесян С.М. О распространении упругих волн чистого изгиба и изгиба при поперечных колебаниях однородного консольного стержня // В.кн.: Сб. науч. тр. I межд. науч. конф. молодых учёных, посвящ. 70-летию НАН Армении. Современные задачи геофизики, инженерной сейсмологии и сейсмостойкого строительства. Ереван: Изд. «Гитутюн», 2013. С.103-115.
4. Оганесян С.М., Мурадян А.Р., Оганесян А.С. Задача кинематического возбуждения жёстко защемлённого с двух сторон однородного стержня, как модель возникновения и распространения сейсмической волны в ближней зоне очага землетрясения // В.кн.: Сб. науч. тр. I межд. науч. конф. молодых учёных, посвящ. 70-летию НАН Армении. Современные задачи геофизики, инженерной сейсмологии и сейсмостойкого строительства. Ереван: Изд. «Гитутюн», 2013. С.256-258.
5. Ляв А. Математическая теория упругости. М.–Л.: ОНТИ, 1935. 675с.
6. Кейлис-Борок В.И. К вопросу об исследовании источников приближенно эквивалентных очагам землетрясений. //Труды Геофиз. ин-та АН СССР. 1950. №9 (136). С.20-42.

**Сведения об авторе:**

**Оганесян Севада Мкртчевич**

Д.ф.-м.н., чл.-корр. НАН РА, зав. отделом ИГИС им. А.Г.Назарова НАН РА

**Адрес:** 3115, Армения, Гюмри-15, ул. В.Саргсяна 5, ИГИС

**Тел.:** +374-312-312-61 (093-42-04-43)

**E-mail:** iges@mail.ru

# ТРЕХСТОРОННИЙ КВАЗИСТАТИЧЕСКИЙ ИЗГИБ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА, КАК МОДЕЛЬ ПОДГОТОВКИ ОЧАГА ТЕКТОНИЧЕСКОГО ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЯ

*Оганесян С.М., Геодакян Э.Г., Каранетян Дж.К., Мурадян А.Р.,  
Саакян Б.В., Оганесян А.С.  
Армения*

В статье показано, что при квазистатическом трёхстороннем изгибе однородного параллелепипеда тремя парами сил естественным образом получаются нодальные плоскости, гипоцентр, нулевая «стрессовая» линия, перерезывающие силы, пара двойных сил с моментом, (пара двойных сил без моментов) известные из теории физики очага землетрясений.

Механизм очага землетрясения является одним из важнейших параметров, характеризующих сейсмический процесс.

История развития исследований в этом направлении начинается с 1910 г., с работы Рейда [1], в которой на основе изучения Калифорнийского землетрясения 1906г. была выдвинута теория «упругой отдачи». В дальнейшем, Сида(1920) при изучении сейсмограмм сейсмических станций, со всех сторон окружающих очаг происходящего землетрясения, выявил определённую закономерность в поляризованности первых вступлений фазы продольных Р волн. Эти разнополяризованные импульсы позволяли Сиду двумя ортогональными плоскостями разделить геологическую среду гипоцентра на области сжимающих и растягивающих напряжений. Выявленные плоскости получили название нодальных плоскостей [2-5]. Со стороны Накано (1923) было предложено рассмотреть в упругой среде такой сосредоточенный источник, поляризованность первых импульсов которого совпадало бы с наблюдаемыми при реальных землетрясениях [2-5].

Многими исследователями рассматривались несколько теоретических моделей с разными системами сил, действующих в точечном источнике. Основными типами таких моделей являлись: сосредоточенная сила, двойные силы с моментом или без момента (диполи) [2, с.15, рис. 4].

В ходе продолжительных научных дискуссий в 70-х годах сейсмологи пришли к выводу, что источник двойного диполя (комбинация двух диполей) с моментом и без момента наилучшими образом удовлетворяют наблюдаемым данным [2-5].

Несмотря на огромные успехи в изучении механизма очага тектонического землетрясения, некоторые вопросы, подготовки самого механизма до сих пор слабо разработаны. Обусловлено это, в основном, сложной структурой блокового строения земной коры и физико-механических свойств составляющих горных пород. Современные геологические и сейсмологические исследования свидетельствуют, что землетрясения возникают в результате внезапной разрядки, накапливаемых в геологической среде земных недр (блоков земной коры) механических напряжений.

Однако, в силу очень сложного иерархического блокового строения земной коры (многие порядки по линейным размерам) принципиальным становится вопрос определения размеров блоков и средних механических свойств (модули  $E$ ,  $G$ , прочность, среднее напряжение по сечению) горных пород, в котором происходит процесс накопления тектонических напряжений.

По мнению авторов статьи актуальным остаётся вопрос выявления из ряда моделей (или дополнения их) такой обобщённой физической модели очага тектонического землетрясения, которая причинно-следственными связями была бы связана как с условиями накопления тектонических напряжений, так и адекватно отражала реальные геологические условия и физико-механические параметры горных пород.

В работе предлагается в качестве такой модели использовать трёхсторонний квазистатический изгиб однородного прямоугольного параллелепипеда. Однородный прямоугольный параллелепипед принят в качестве модели элемента блоков земной коры, в котором накапливается упругая энергия. При обсуждении этой концепции авторы статьи обратили внимание, что существуют ключевые идейные связи между работами [2-5], [1,6,7] и [8-13].

Приведём полученные в работах [8-10] принципиально новые результаты при решении задачи о распространении упругой волны чистого изгиба и изгиба в однородных стержнях (консольном и жёстко заделанном с двух сторон) при кинематическом возбуждении. Они имеют важное значение при рассмотрении задачи о формировании очага тектонического землетрясения, так как позволяют легко перейти от динамической формировки задачи к квазистатической. Это следующие результаты:

1) При силовом воздействии  $f(x, t)$  в стержне возникают «внутренние» объёмные силы и изгиб стержня происходит под действием обобщённой частной производной  $f'_x(x, t)$ .

Выполнение комбинированного условия  $\partial^2 U / \partial x^2 = 0$ , соответственно, на свободном конце консольного стержня, и в точке перегиба с двух сторон закреплённого стержня. Для выполнения комбинированного условия, в точках  $x=l$  и  $x=l/2$ , необходимы возникновение соответственно двойной силы с моментом и пары двойных сил с моментом противоположно направленным (см. рис.4. и [2]), «в дополнении» действующим там силам (или аналогов сил) и приложенных к разным сторонам нодальной плоскости.

2) Фронты волн изгиба при кинематическом возбуждении начинаются соответственно со свободного конца стержня, и с точки перегиба стержня, т.е. с точек  $x=l$  и  $x=l/2$ .

3) В начальный момент времени  $t = 0 + 0$  ускорение в точке  $x=l/2$  терпит разрыв, а для точек  $x>l/2$  и  $x<l/2$  имеют, соответственно, одинаковые значения.

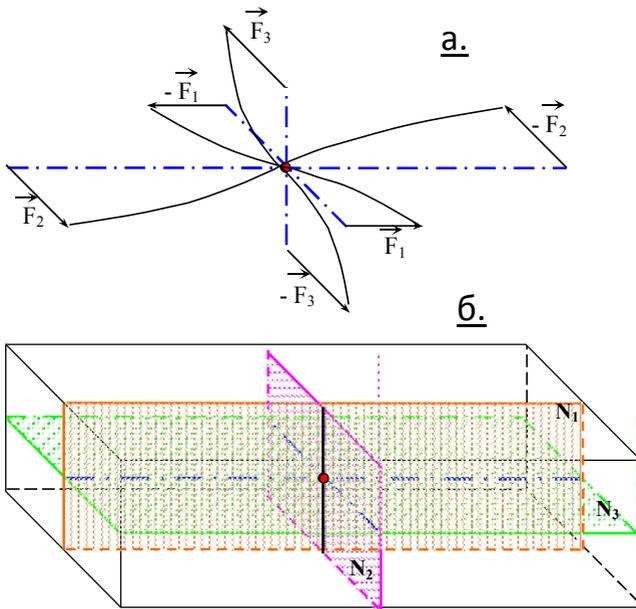


Рис.1.

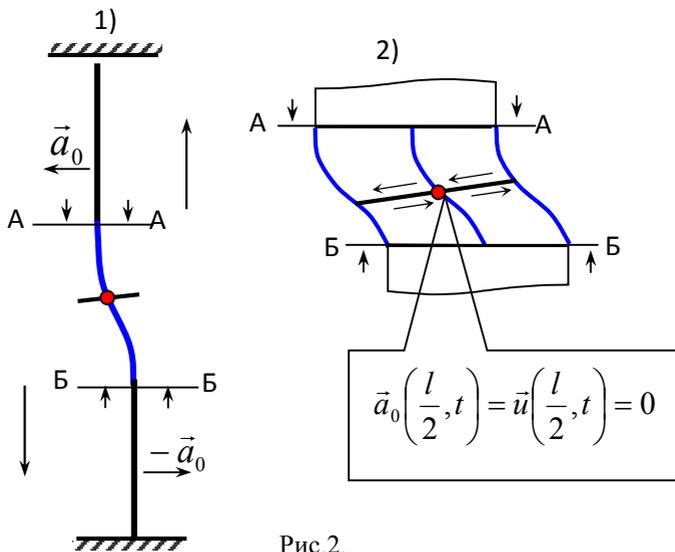


Рис.2.

Если условия 1-4 применим в случае статическом силовом изгибном воздействии тремя парами сил  $\vec{F}_i$  и  $-\vec{F}_i, i=1,2,3$ , приложенных к противоположным граням однородного прямоугольного параллелепипеда, то получим следующую принципиально важную геометрическую интерпретацию, приведенную на рис.1÷3. При деформировании параллелепипеда её противоположные грани остаются параллельными. При деформации изгиба на рис.1 естественным образом получаются нодальные плоскости  $N_1, N_2, N_3$ , нулевая «стрессовая» линия, гипоцентр будущего тектонического землетрясения. Легко показать в нодальных плоскостях зоны сжатия и растяжения горных пород, обусловленные изгибом; к нодальным плоскостям приурочены пара направленных двойных сил с моментом, действующие по разным сторонам этих плоскостей.

Перерезывающие силы в нодальных плоскостях из-за выполнения комбинированных условий в действительности намного больше, чем вычисляемые непосредственно от деформаций изгиба. Обосновывается это тем, что при деформации от двойной силы с моментом в сечении стержня напряжения не изменяются [8-10].

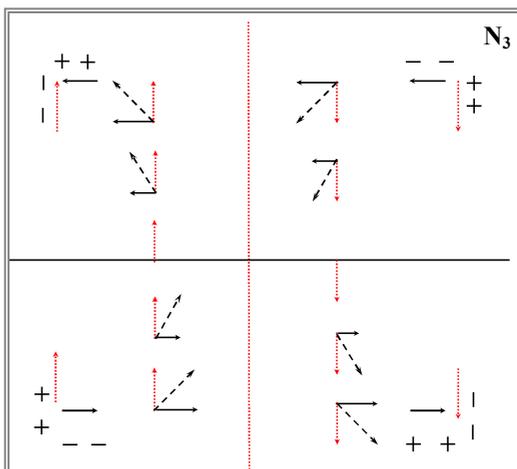


Рис.3.

Работа выполнена в рамках тематического финансирования по проекту 13-1E201 Государственного Комитета Науки МОН РА.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Reid H.F. The California earthquake of April 18, 1906, v2. The mechanics of the earthquake. V2 of the (California) State Earthquake Investigation commission (Carnegie Inst. Wash, Pub. 1910. 87, V.2. 192 pp.
2. Гоцадзе О.Д., Кейлис-Борок В.И., Кириллова и др. Исследование механизма землетрясений. М.: Изд-во АН СССР, 1957. Труды геофизического института, №40 (167). 148с.

3. Введенская А.В. Сейсמודинамика. М.: Наука, 1984. 144с.
4. Костров Г.В. Механика очага тектонического землетрясения. М.: Наука, 1975. 176с.
5. Касахара К. Механика землетрясений. М.: Мир, 1985. 265с.
6. Певнев А.К. Невостребованные возможности геодезии и решения проблемы землетрясения. //Геодезия и картография. 2000. №7. С.10-16.
7. Мовсесян Р.А. Сейсмическая геодезия. Новое направление в геодинامي-ке и геодезии. Ереван: Изд-во «Центр Геокарт», 2007. 135с.
8. Оганесян С.М. Постановка задач о распространении упругих волн чистого изгиба и изгиба при поперечных колебаниях однородного консольного стержня //Докл. НАН РА. 2013. Т.113. № 3. С.259-267.
9. Оганесян С.М. К вопросу о построении новой теории сейсмостойкости// Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружения. 2013. №5. С.26-29.
10. Оганесян С.М., Мурадян А.Р., Оганесян А.С. Задача кинематического возбуждения жёстко защемлённого с двух сторон однородного стержня, как модель возникновения и распространения сейсмической волны в ближней зоне очага землетрясения//В кн.: Сб. науч. тр. I Межд. науч. конф. молодых ученых, посвящ. 70-летию НАН РА. Современные задачи геофизики, инженерной сейсмологии и сейсмостойкого строительства. Ереван: Изд-во «Гитутюн», 2013. С.256-258.
11. Геодакян Э.Г., Оганесян С.М., Карапетян Дж.К. Об основных направлениях исследований аномальных проявлений в очаговой зоне сильных землетрясений //В кн.: Сб. науч. тр. I Межд. науч. конф. молодых ученых, посвящ. 70-летию НАН РА. Современные задачи геофизики, инженерной сейсмологии и сейсмостойкого строительства. Ереван: Изд-во «Гитутюн», 2013. С.286-289.
12. Геодакян Э.Г. О геодинاميческой модели очага Спитакского землетрясения 7 декабря 1988 года. //В кн.: Сб. научных трудов конференции, посвящ. 60-летию основания НАН РА. Гюмри, Ереван: Изд. «Гитутюн» НАН РА, 2004. С.64-78.
13. Геодакян Э.Г., Саакян Б.В. Сейсмогеодинамические процессы на территории Северной Армении.//В кн.: Сб. науч. тр. IX межд. Сейсмологическая школа. Современные методы обработки и интерпретации сейсмологических данных. Москва-Ереван: 2014. С.66-71.

### **Сведения об авторах:**

**Оганесян Севада Мкртчичевич**

Д.ф.-м.н., чл.-корр. НАН РА, зав. отделом ИГИС им. А.Г.Назарова НАН РА

Адрес: 3115, Армения, Гюмри-15, ул. В.Саргсяна, 5, ИГИС

Тел.: +374-312-312-61 (093-42-04-43)

Е-mail: iges@mail.ru

# К ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УПРУГОЙ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ

*Оганисян Г.В., Саркисян К.С.*

*Армения*

В настоящей работе рассматривается периодическая контактная задача для упругой полубесконечной пластины, усиленной периодической системой упругих конечных стрингеров, параллельных границе упругой полубесконечной пластины, расположенных на одной линии и приваренных (приклеенных) к полубесконечной пластине. Предполагается, что все конечные стрингеры имеют одинаковые упругие свойства и площади поперечного сечения, а контактирующая пара (стрингер – полубесконечная пластина) деформируется под воздействием сонаправленных и осевых сосредоточенных сил, приложенных к одному концу каждого стрингера. Решение этой периодической контактной задачи математически сформулирована в виде сингулярного интегрального уравнения первого рода с подвижной особенностью при определённом условии с ядром, состоящим из ядра Гильберта и регулярной части. Используя математический аппарат классических ортогональных многочленов Чебышева, решение этого интегрального уравнения сведено к решению квазивполне регулярной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений.

1. Пусть упругий сплошной изотропный лист в виде тонкой однородной полубесконечной пластины малой постоянной толщины  $h$  усилена на конечных отрезках  $[-b + 2kl; d + 2kl]$  ( $2l > b + d > 0$ ;  $b, d > 0$ ;  $k \in \mathbb{Z}$ ) линии  $y = a$  ( $a > 0$ ) своей верхней поверхности периодически повторяющимися с периодом  $2l$  креплениями в виде приваренных (приклеенных) к ней упругих конечных стрингеров прямоугольного поперечного сечения, которые имеют достаточно малую постоянную толщину  $h_s$  и малую ширину  $d_s$ .

Цель исследования заключается в определении закона интенсивностей распределения неизвестных тангенциальных контактных усилий вдоль линий крепления упругих конечных стрингеров с упругой изотропной однородной сплошной полубесконечной пластиной и нормальных (осевых) напряжений, возникающих в упругих конечных стрингерах, когда контактирующая пара (стрингер – полубесконечная пластина) деформируется сонаправленными и осевыми сосредоточенными силами  $P\delta(x - d - 2kl)\delta(y - a)$ , приложенными к одному концу каждого стрингера и направленными в положительную сторону горизонтальной оси.

Здесь относительно упругих конечных стрингеров принимается модель одноосного напряжённого состояния в сочетании с моделью контакта по линии [1–5], а для полубесконечной пластины считается справедливой модель обобщённого плоского напряжённого состояния, вследствие чего она деформируется как полуплоскость.

Следует отметить, что из периодичности рассматриваемой контактной задачи видно, что можно ограничиться рассмотрением одного стрингера, например того, для которого  $k = 0$ , то есть рассматривается тот стрингер, который находится на отрезке  $[-b ; d]$ . Очевидно, что законы распределения интенсивностей искомых тангенциальных контактных усилий под упругими конечными стрингерами, расположенными на разных отрезках, одинаковы.

На основе принятой модели дифференциальное уравнение равновесия упругого конечного стрингера в обобщённых функциях будет иметь вид:

$$\frac{du_s(x; a)}{dx} = -\frac{1}{E_s F_s} \int_{-b}^d \theta(s-x) \tau(s) ds + \frac{P}{E_s F_s} \quad (-b < x < d), \quad (1.1)$$

который удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$\left. \frac{du_s(x; a)}{dx} \right|_{x=-b+0} = 0; \quad \left. \frac{du_s(x; a)}{dx} \right|_{x=d-0} = \frac{P}{E_s F_s}, \quad (1.2)$$

а также условию равновесия упругого конечного стрингера:

$$\int_{-b}^d \tau(s) ds = P. \quad (1.3)$$

Отметим, что из (1.1) нормальные (осевые) напряжения, возникающие в стрингерах на линии  $y = a$ , можно определить по следующей формуле:

$$\sigma_x(x; a) = -\frac{1}{F_s} \int_{-b}^d \theta(s-x) \tau(s) ds + \frac{P}{F_s} \quad (-b < x < d). \quad (1.4)$$

Здесь в формулах (1.1) – (1.4)  $u_s(x; a)$  – горизонтальные перемещения точек упругих конечных стрингеров на линии  $y = a$ ;  $\tau(x) = d_s \tau(x; a)$ , где  $\tau(x; a)$  – тангенциальные контактные напряжения на линии  $y = a$ ;  $E_s$  – коэффициент упругости, а  $F_s = h_s d_s$  – площадь поперечного сечения конечных стрингеров;  $P$  – интенсивность сосредоточенной силы, приложенной к одному из концов каждого упругого конечного стрингера в точках  $(d + 2kl; a)$ ;  $\delta(x)$  – дельта функция Дирака, а  $\theta(x)$  – единичная ступенчатая функция Хэвисайда.

Далее, не останавливаясь на подробностях, приведём лишь окончательный вид горизонтальной деформации упругой полубесконечной пластины, когда на линии  $y = a$  действуют периодически повторяющиеся с периодом  $2l$  тангенциальные усилия с интенсивностью  $\tau(x)$  ( $-b + 2kl \leq x \leq d + 2kl$ ):

$$hl_1 \frac{du(x; a)}{dx} = \frac{1}{\pi} \int_{-b}^d \left[ \frac{\pi}{2l} \operatorname{ctg} \frac{\pi(s-x)}{2l} + K(s-x) \right] \tau(s) ds \quad (-\infty < x < \infty). \quad (1.5)$$

Здесь сделаны следующие обозначения:

$$K(t) = A_1 \cdot \frac{\frac{\pi}{2l} \cdot \sin \frac{\pi t}{l} - \frac{\pi^2 a}{l^2} \cdot \operatorname{sh} \frac{2\pi a}{l} \cdot \sin \frac{\pi t}{l}}{\operatorname{ch} \frac{2\pi a}{l} - \cos \frac{\pi t}{l} - \left( \operatorname{ch} \frac{2\pi a}{l} - \cos \frac{\pi t}{l} \right)^2} +$$

$$+ A_2 \cdot \frac{\frac{\pi^3 a^2}{2l^3} \cdot \left( \operatorname{ch}^2 \frac{2\pi a}{l} + \operatorname{ch} \frac{2\pi a}{l} \cdot \cos \frac{\pi t}{l} - 2 \right) \cdot \sin \frac{\pi t}{l}}{\left( \operatorname{ch} \frac{2\pi a}{l} - \cos \frac{\pi t}{l} \right)^3}, \quad (1.6)$$

$$l_1 = \frac{4E}{(3-\nu)(1+\nu)} = \frac{8\mu}{3-\nu}; \quad A_1 = \frac{8-(3-\nu)(1+\nu)}{(3-\nu)(1+\nu)}; \quad A_2 = \frac{2(1+\nu)}{3-\nu}, \quad (1.7)$$

а  $u(x; a)$  – горизонтальные перемещения точек изотропной однородной сплошной упругой полубесконечной пластины на линии  $y = a$ ;  $E$  – модуль упругости,  $\mu$  – модуль сдвига, а  $\nu$  – коэффициент Пуассона материала упругой полубесконечной пластины.

Теперь, имея в виду условия контакта

$$\frac{du_s(x; a)}{dx} = \frac{du(x; a)}{dx} \quad (-b + 2kl \leq x \leq d + 2kl), \quad (1.8)$$

относительно искомым тангенциальных контактных усилий интенсивности  $\tau(x)$  ( $-b < x < d$ ), получим сингулярное интегральное уравнение с ядром, состоящим из сингулярного ядра Гильберта и регулярной части:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-b}^d \left[ \frac{\pi}{2l} \operatorname{ctg} \frac{\pi(s-x)}{2l} + \lambda \pi \theta(s-x) + K(s-x) \right] \tau(s) ds = \lambda P \quad (-b < x < d), \quad (1.9)$$

где  $\lambda = \frac{hl_1}{E_s F_s}$ .

Здесь следует отметить, что интеграл с ядром Гильберта в сингулярной точке  $s = x$  в сингулярном интегральном уравнении (1.9) следует трактовать в смысле его главного значения по Коши.

Таким образом, решение рассматриваемой периодической контактной задачи при принятых предположениях сводится к решению сингулярного интегрального уравнения (1.9) при условии (1.3).

2. С целью решения сингулярного интегрального уравнения (1.9) при условии (1.3) перейдем из ядра Гильберта к ядру Коши. Для этой цели разложим ядро Гильберта в бесконечный ряд [5]:

$$\frac{\pi}{2l} \operatorname{ctg} \frac{\pi(s-x)}{2l} = \frac{1}{s-x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(s-x)}{(2nl)^2 - (s-x)^2}. \quad (2.1)$$

Если теперь учитывать представление (2.1), сингулярное интегральное уравнение (1.9) примет следующий вид:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-b}^d \left[ \frac{1}{s-x} + \lambda \pi \theta(s-x) + K^*(s-x) \right] \tau(s) ds = \lambda P \quad (-b < x < d), \quad (2.2)$$

где  $K^*(t) = K(t) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2t}{(2nl)^2 - t^2}$ . (2.3)

Таким образом, решение сингулярного интегрального уравнения (1.9), содержащего ядро Гильберта при условии (1.3) теперь сводится к решению сингулярного интегрального уравнения (2.2) с ядром, состоящим из ядра Коши и регулярной части, при условии (1.3).

Представим теперь решение сингулярного интегрального уравнения (2.2) при условии (1.3) в форме разложения ряда по многочленам Чебышева первого рода с неизвестными коэффициентами  $X_n$  [3 – 5]:

$$\tau(s) = \frac{1}{\sqrt{1-g^2(s)}} \sum_{n=0}^{\infty} X_n T_n[g(s)]; \quad g(s) = \frac{2s+b-d}{b+d}; \quad |g(s)| < 1. \quad (2.4)$$

Подставляя принятое представление (2.4) для функции  $\tau(s)$  ( $-b < s < d$ ) в сингулярное интегральное уравнение первого рода (2.2), и имея в виду спектральные интегральные соотношения между многочленами Чебышева первого и второго родов, получим следующую квазिवполне регулярную бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов  $X_n$  ( $n = \overline{1; \infty}$ ):

$$X_m + \sum_{n=1}^{\infty} H_{nm} X_n = \alpha_m \quad (m = \overline{1; \infty}). \quad (2.5)$$

Ядро при неизвестных и свободный член бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (2.5) определяются по следующим формулам:

$$H_{nm} = H_{nm}^* + H_{nm}^{(1)}; \quad \alpha_m = \alpha_m^{(1)} + X_0 \alpha_m^{(2)}; \quad \alpha_m^{(1)} = \begin{cases} 0; & m \neq 1, \\ \lambda P; & m = 1, \end{cases} \quad (2.6)$$

$$H_{nm}^* = \frac{4}{\pi^2 (b+d)} \int_{-b}^d \int_{-b}^d \frac{\sqrt{1-g^2(x)}}{\sqrt{1-g^2(s)}} K^*(s-x) T_n[g(s)] U_{m-1}[g(x)] ds dx,$$

$$H_{nm}^{(1)} = \begin{cases} 0; & |m-n|=1, \\ -\frac{2\lambda(b+d)m[1+(-1)^{m+n}]}{\pi[(m+n)^2-1][(m-n)^2-1]}; & |m-n| \neq 1, \end{cases} \quad (n; m = \overline{1; \infty}),$$

$$\alpha_m^{(2)} = -H_{0m}^* + \begin{cases} -\frac{\lambda\pi(b+d)}{4}; & m=1, \\ \frac{\lambda(b+d)}{\pi} J_m; & m \neq 1, \end{cases}; J_m = \begin{cases} 0; & m=1, \\ \frac{2m[1+(-1)^m]}{(m^2-1)^2}; & m \neq 1, \end{cases}$$

где  $X_0 = \frac{2P}{\pi(b+d)}$ ;  $U_{n-1}(t) (n = \overline{0; \infty})$  – многочлены Чебышева второго рода.

На основе (2.4), имея в виду формулу (1.4), нормальные (осевые) напряжения, возникающие в конечном стрингере, можно вычислить следующей формулой:

$$\sigma_x(x; a) = \frac{P}{\pi F_s} [\pi - \arccos g(x)] - \frac{b+d}{2F_s} \sqrt{1-g^2(x)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} X_n U_{n-1}[g(x)], \quad (2.7)$$

$$(-b < x < d).$$

Таким образом, решение рассматриваемой периодической контактной задачи при принятых предположениях сводится к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (2.5). Уместно отметить, что исследование бесконечной системы (2.5) производится аналогично [3–5].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Григорян Э.Х. Об одной периодической задаче для упругой плоскости с бесконечным кусочно-однородным упругим включением // ДАН АрмССР. 1981. Т.73. № 2. С.103 – 108.
2. Арутюнян Н.Х., Мхитарян С.М. Периодическая контактная задача для полуплоскости с упругими накладками // ПММ. 1969. Т.33. №5. С.81–843.
3. Саркисян В. С. Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками. Ереван: Издательство ЕГУ, 1983. 260 с.
4. Агаян К.Л. Периодическая контактная задача для бесконечной пластины с упругими накладками // Изв. АН АрмССР. Механика. 1975. Т.28. № 3. С.3–12.
5. Оганисян Г.В. Об одной периодической контактной задаче для кусочно-однородной бесконечной пластины // Материалы 2-ой всеос. научно-технической конф. «Прочность, жёсткость и технологичность изделий из композиционных материалов», Т.3. Ереван. 1984. С.5–9.

#### Сведения об авторе

**Оганисян Гамлет Вараздатович** – кандидат физ.– мат. наук, ст. научный сотрудник, преподаватель кафедры механики, ЕГУ, фак. математики и механики, Ереван, Алека Манукяна 1. Тел.: (+374 93) 27–26–26

# ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ СНАРЯДНОГО ПОТОКА ГАЗОЖИДКОСТНОЙ СМЕСИ

*Оганян Г.Г., Саакян С.Л.*  
*Армения*

Рассмотрена простая модель распространения волны давления в сформированном снарядном потоке газожидкостной смеси, в которой элементарная ячейка состоит из одной пробки жидкости и одной пробки газа.

При фиксированных значениях газосодержания численно получены значения возбуждающих частот, при которых происходят распространение волны давления и определены значения частот среза, при которых волны отсутствуют.

При течении газожидкостной смеси в длинных замкнутых каналах может осуществляться снарядный режим, который характеризуется ярко выраженной дискретной структурой чередующихся пробок жидкости и снарядообразного пузыря газа, занимающего почти всё поперечное сечение, что схематично представлено на фиг.1.



Фиг.1.

Предположим, что стенки канала абсолютно неупруги, силы трения отсутствуют, амплитуды возмущений давления в обеих средах достаточно малы, длины жидких и газовых пробок первоначально постоянны.

Рассмотрим одномерную задачу о распространении импульса давления через элементарную ячейку длиной  $a + b$ , состоящую по одной пробке жидкости и газа. В каждой пробке поведение волны давления в линейной постановке описывается уравнениями [1]:

$$\frac{\partial V_j}{\partial x} + \frac{1}{\rho_j c_j^2} \frac{\partial P}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial V_j}{\partial t} + \frac{1}{\rho_j} \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} - c_j^2 \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} = 0, \quad j = 1, 2.$$

Здесь  $t$  – время,  $x$  – продольная координата, вдоль которой распространяется волна,  $V_j$  – скорость частиц среды в  $j$ -ой пробке,  $c_j$  – линейная скорость звука, индексы 1 и 2 отнесены к жидкости и газу.

Рассмотрим стационарный случай. Представляя искомые функции в виде

$$V_j(x, t) = V_j(x) e^{i\omega t}, \quad P(x, t) = P(x) e^{i\omega t},$$

где  $\omega$  – заданная возбуждающая частота, перепишем уравнения (1) в форме записи:

$$\frac{dV_j}{dx} + i \frac{\omega}{\rho_j c_j^2} P(x) = 0, \quad V_j(x) - i \frac{1}{\rho_j \omega} \frac{dP}{dx} = 0, \quad \frac{d^2 P}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c_j^2} P(x) = 0 \quad (2)$$

Общие решения уравнений (2) запишутся в виде:

$$P(x) = A_j e^{-ik_j x} + B_j e^{ik_j x}, \quad V_j(x) = \frac{k_j}{\rho_j \omega} (A_2 e^{-ik_j x} - B_2 e^{ik_j x}), \quad k_j = \frac{\omega}{c_j} \quad (3)$$

Здесь  $A_j, B_j$  ( $j=1,2$ ) – постоянные интегрирования,  $k_j$  – волновые числа.

На линии раздела сред  $x=0$  для давления и скоростей  $V_j$  должны выполняться граничные условия непрерывности давления и скоростей  $V_j$ , откуда будем иметь:

$$A_1 + B_1 = A_2 + B_2, \quad \frac{k_1}{\rho_1 \omega} (A_1 - B_1) = \frac{k_2}{\rho_2 \omega} (A_2 - B_2) \quad (4)$$

Кроме того, решения (3) должны удовлетворять условию квазипериодичности ячейки, означающему, что на её границах  $x=-a$  и  $x=b$  давления и скорости частиц могут отличаться лишь множителем  $l$ , который будет определён чуть ниже

$$P(-a) = lP(b), \quad V_1(-a) = lV_2(b) \quad (5)$$

Отсюда, в силу (3), получим:

$$A_1 e^{ik_1 a} + B_1 e^{-ik_1 a} = l [A_2 e^{-ik_2 b} + B_2 e^{ik_2 b}] \quad (6)$$

$$\frac{k_1}{\rho_1 \omega} (A_1 e^{ik_1 a} - B_1 e^{-ik_1 a}) = l \frac{k_2}{\rho_2 \omega} (A_2 e^{-ik_2 b} - B_2 e^{ik_2 b})$$

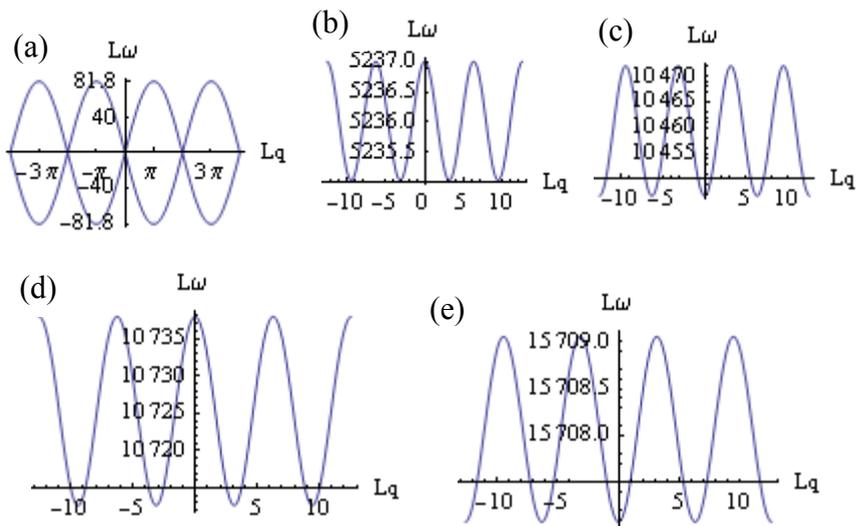
Соотношения (4) и (6) образуют замкнутую систему однородных алгебраических уравнений относительно постоянных  $A_i, B_i$ . Необходимым и достаточным условием существования нетривиального решения является равенство нулю детерминанта, составленного из коэффициентов при  $A_i, B_i$ . Отсюда для определения множителя  $l$  получим уравнение:

$$\frac{1}{2} \left( l + \frac{1}{l} \right) = \cos ak_1 \cos bk_2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\rho_2 k_1}{\rho_1 k_2} + \frac{\rho_1 k_2}{\rho_2 k_1} \right) \sin ak_1 \sin bk_2 \quad (7)$$

Обозначим  $L = a + b$ . Полагая  $l = \exp[iqL]$ , где  $q$  – число Флоке [2], уравнение (7) переписывается в виде:

$$\cos qL = \cos \left( a \frac{\omega}{c_1} \right) \cos \left( b \frac{\omega}{c_2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1} + \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} \right) \sin \left( a \frac{\omega}{c_1} \right) \sin \left( b \frac{\omega}{c_2} \right) \quad (8)$$

где  $a = (1 - \beta)L$ ,  $b = \beta L$ . Выясняется физический смысл волнового числа Флоке. В слоистой среде периодической структуры зависимость параметров от координаты  $x$  определяется не локальными волновыми числами фаз  $k_1$ ,  $k_2$ , а величиной  $q$ , являющейся усреднённой по периоду структуры новым волновым числом для ячейки из двух пробок. Значение  $q$  определится из (8) с точностью до целого числа значений  $2\pi n/L$ ,  $n = 0, \pm 1, \dots$



Фиг. 2.

На фиг.2 представлены зависимости  $L\omega$  от  $Lq$  при  $c_1 = 1500$  м/с,  $c_2 = 341$  м/с,  $\beta = 0.1$ . Для нахождения истинных значений  $\omega$  и  $q$  здесь и

ниже следует разделить величины  $L\omega$  и  $Lq$  на абсолютное значение  $L$ . При значениях возбуждающих частот

$$0 \leq \omega \leq (81.8/L) \text{ гц} - \text{фиг.2а,}$$

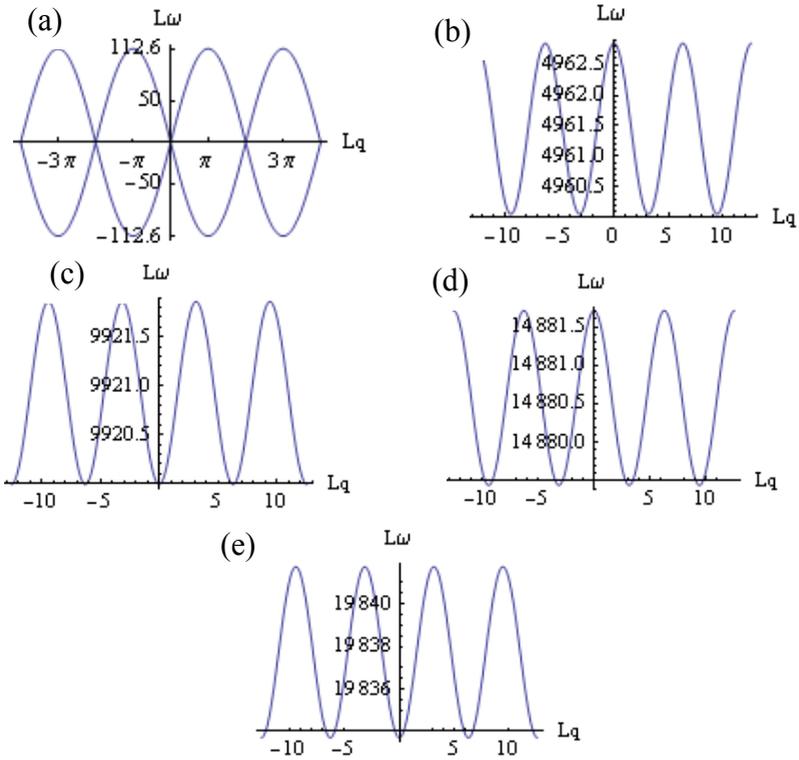
$$(5235/L) \text{ гц} \leq \omega \leq (5237/L) \text{ гц} - \text{фиг.2б;}$$

$$(10446.8/L) \text{ гц} \leq \omega \leq (10472/L) \text{ гц} - \text{фиг.2с;}$$

$$(10712.7/L) \text{ гц} \leq \omega \leq (10737.9/L) \text{ гц} - \text{фиг.2д;}$$

$$(15707.1/L) \text{ гц} \leq \omega \leq (15709.1/L) \text{ гц} - \text{фиг.2е,}$$

а также  $(21425/L) \text{ гц} \leq \omega \leq (21439/L) \text{ гц}$ , имеет место процесс распространения волн давления. Для иных значений, например,  $(82/L) \text{ гц} < \omega < (5235/L) \text{ гц}$  (частоты среза) волны отсутствуют.



Фиг. 3.

На фиг.3 представлены зависимости  $L\omega$  от  $Lq$  при  $c_1 = 1500$  м/с,  $c_2 = 341$  м/с и меньшем значении  $\beta = 0.05$ . В диапазонах возбуждающих частот

$$0 \leq \omega \leq (112.6 / L) \text{ гц} - \text{фиг.3a,}$$

$$(4960.06 / L) \text{ гц} \leq \omega \leq (4962.85 / L) \text{ гц} - \text{фиг.3b,}$$

$$(9920 / L) \text{ гц} \leq \omega \leq (9921.9 / L) \text{ гц} - \text{фиг.3c,}$$

$$(14879.4 / L) \text{ гц} \leq \omega \leq (14881.7 / L) \text{ гц} - \text{фиг.3d,}$$

$$(19833.7 / L) \text{ гц} \leq \omega \leq (19841.7 / L) \text{ гц} - \text{фиг.3e,}$$

а также  $(21424 / L) \text{ гц} \leq \omega \leq (21432 / L) \text{ гц}$  правая часть уравнения (8) будет по модулю меньше единицы, означающая, что волны распространяются. Из графиков видно, что существуют частоты среза, например,  $(112.6 / L) \text{ гц} < \omega < (4960.06 / L) \text{ гц}$ , при которых волны отсутствуют.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч.1. М.: Наука, 1987. 464с.
2. Бриллюэн А., Пароди М. Распространение волн в периодических структурах. М.: ИЛ, 1959. 448с.
3. Басс Ф.Г., Булгаков А.А., Тетервов А.П. Высокочастотные свойства полупроводников со сверхрешётками М.: Наука, 1989. 288с.

### Сведения об авторах:

**Оганян Гагик Гришаевич**, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении.

**Адрес:** 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2, **тел.:** (+37493) 946-947,

**E-mail:** [oganyangagik@gmail.com](mailto:oganyangagik@gmail.com)

**Саакян Саак Леонович**, ассистент кафедры числ. анализа и матем. моделирования факультета информатики и прикл. математики Ереванского госуниверситета.

**Адрес:** 0025, Ереван, ул. А.Манукяна 1, **тел.:** (+37477) 002-408 (моб.),

**E-mail:** [ssahakyan@ysu.am](mailto:ssahakyan@ysu.am)

# МАГНИТОУПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ ПРОВОДЯЩЕЙ ПЛАСТИНКИ С ЗАДАННЫМ НАЧАЛЬНЫМ МАГНИТНЫМ ИМПУЛЬСОМ

*Папян А.А., Саркисян С.В.*  
*Армения*

Задачам установившихся магнитоупругих колебаний пластин и оболочек посвящена монография [1]. Магнитоупругие колебания электропроводящих пластин, распространение магнитоупругих волн с начальными условиями изучены в работах [2-7]. В настоящей работе на основе теории Кирхгофа рассматриваются поперечные колебания идеально-проводящей пластинки с заданными начальными условиями во внешнем постоянном магнитном поле. Получены значения прогиба пластинки, обусловленные начальным магнитным импульсом.

Рассмотрим идеально-проводящую пластинку с постоянной толщиной  $2h$ . Пластинка в прямоугольной декартовой системе координат занимает следующую область:  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ ,  $-h \leq z \leq h$  и находится во внешнем постоянном продольном магнитном поле с вектором напряжённости  $\vec{H}(H_0, 0, 0)$ , параллельным оси  $Ox$ . Магнитная и диэлектрическая проницаемости пластинки и среды, окружающей пластинку, принимаются равными единице. Пластинка характеризуется жёсткостью  $D$  и плотностью  $\rho$ .

Для исследования задач магнитоупругих колебаний пластин необходимо решить уравнение магнитоупругости тонких тел [1]. Индуцированное магнитное поле для идеально-проводящей пластинки определяется следующим образом:

$$\vec{h} = \text{rot}(\vec{U} \times \vec{H}) + \vec{q}(x, y, z), \quad (1)$$

где  $\vec{U}(U_1, U_2, U_3)$  – вектор перемещения,  $\vec{q}$  – произвольная вектор-функция координат, удовлетворяющая условию  $\text{div} \vec{q} = 0$  и определяется заданием начальных условий. В случае, когда колебание пластинки не зависит от координаты  $x$ , компоненты вектора индуцированного магнитного поля и вектора объёмной силы  $\vec{R}$  (пондеромоторная сила) будут:

$$h_1 = -\frac{\partial U_2}{\partial y} H_0 + q_1(y, z), \quad h_2 = q_2(y, z), \quad h_3 = q_3(y, z),$$
$$R_1 = R_3 = 0, \quad R_2 = \frac{1}{4\pi} \left( H_0^2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} - H_0 \frac{\partial q_1}{\partial y} \right). \quad (2)$$

Уравнение изгибных (поперечных) магнитоупругих колебаний идеально-проводящей пластинки запишется в следующем виде [7]:

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{H_0}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_{-h}^h z q_1 dz + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (3)$$

Уравнение (3) рассмотрим со следующими начальными условиями:

$$w|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t}|_{t=0} = 0, \quad h_1|_{t=0} = \varphi(y, z). \quad (4)$$

Начальные условия (4) соответствуют магнитоупругим колебаниям идеально-проводящей пластинки с заданным начальным магнитным импульсом  $\varphi(y, z)$ .

Решение уравнения (3) будем искать в виде:

$$w(y, t) = \psi(y, t) + f(y), \quad (5)$$

где  $\psi(y, t)$  – решение однородного уравнения (3),  $f(y)$  – частное решение уравнения (3). Функцию  $f(y)$  определим из нижеследующего уравнения:

$$\frac{d^4 f(y)}{dy^4} + \frac{H_0}{4\pi D} \frac{d^2 F(y)}{dy^2} = 0 \quad (6)$$

$$F(y) = \int_{-h}^h z \varphi(y, z) dz \quad (7)$$

Пусть проводящая пластинка шарнирно опёрта при  $y = 0$  и  $y = b$ :

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (8)$$

Решение уравнения (6), удовлетворяющее граничным условиям (8) с учётом (5), будет:

$$f(y) = \frac{H_0}{4\pi D} \left( \int_0^y (\xi - y) F(\xi) d\xi + \frac{y}{b} \int_0^b (b - \xi) F(\xi) d\xi + \right. \\ \left. + \frac{y}{6b} (y - b) ((y + b) F(b) - (y - 2b) F(0)) \right) \quad (9)$$

Решение уравнения изгибных магнитоупругих колебаний идеально-проводящей пластинки (3), удовлетворяющее граничным условиям (8), запишется в виде:

$$w(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_{1n} \sin(\omega_n t) + C_{2n} \cos(\omega_n t)) \sin(\lambda_n y) + f(y), \quad (10)$$

где  $C_{1n}$  и  $C_{2n}$  – произвольные постоянные, определяющиеся из начальных условий (4),  $\lambda_n = \frac{\pi n}{b}$ ,  $\omega_n = \lambda_n^2 \sqrt{\frac{D}{2\rho h}}$ .

После удовлетворения (10) начальным условиям (4), для прогиба изгибных магнитоупругих колебаний идеально-проводящей пластинки в постоянном продольном магнитном поле получим:

$$w(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (1 - \cos(\omega_n t)) \sin(\lambda_n y), \quad (11)$$

$$\text{где } a_n = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \sin(\lambda_n y) dy$$

Таким образом, при помощи заданного начального магнитного импульса в проводящей пластинке, которая находится во внешнем постоянном магнитном поле, бесконтактным способом возбуждаются колебания.

При отсутствии магнитного поля прогиб пластинки равен нулю.

В случае, когда пластинка жёстко закреплена при  $y = 0$  и  $y = b$ , прогиб идеально проводящей пластинки будет:

$$w(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_{1n} \sin(\omega_n t) + C_{2n} \cos(\omega_n t)) \gamma_n(y) + \\ + \frac{H_0}{4\pi D} \left( \int_0^y (\xi - y) F(\xi) d\xi + \frac{y^3}{b^3} \int_0^b (2\xi - b) F(\xi) d\xi + \right. \\ \left. + \frac{y^2}{b^2} \int_0^b (2b - 3\xi) F(\xi) d\xi \right)$$

$$\text{Здесь } \gamma_n(y) = U(k_n y) - \frac{T(k_n b)}{U(k_n b)} V(k_n y),$$

$T(y), U(y), V(y)$  – функции Крылова,  $k_n$  – корни следующего  $\cos(kb) \operatorname{ch}(kb) = 1$  трансцендентного уравнения.

Аналогично, удовлетворяя полученное решение начальным условиям (4) и используя ортогональность собственных функций  $\gamma_n(y)$ , можно получить значения прогиба изгибных магнитоупругих колебаний проводящей жёстко закреплённой при  $y = 0, b$  пластинки.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977. 272с.
2. Белубекян М.В., Сароян С.Р. Магнитоупругие колебания прямоугольной электропроводящей пластинки в продольном магнитном поле под воздействием электромагнитного импульса. // Ученые записки ЕГУ. Т.2. 1979. С.48 -52.
3. Саркисян С.В. Магнитоупругие колебания бесконечной пластинки с заданным начальным прогибом или магнитным импульсом. //Ученые записки ЕГУ. Т.3. 1983. С.36-41.
4. Саркисян С.В. Магнитоупругие колебания бесконечной пластинки с заданным начальным прогибом //В сб.: Механика, Ереван: Изд.ЕГУ,1982. Вып.2. С.120-125.
5. Белубекян М.В. О возбуждении упругих волн электромагнитным импульсом. //Доклады АН Арм.ССР. 1980.Т.20. № 4. С.219-224.
6. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н. Электромагнитоупругие волны. Ереван: Изд. ЕГУ, 2006. 492с.
7. Папян А.А. Магнитоупругие колебания идеально проводящей прямоугольной пластинки в продольном магнитном поле с начальным магнитным импульсом. //Изв. НАН Армении. Механика. 2013. Т.66. №3. С.69-76.

### Сведения об авторах:

#### **Папян Арарат Артурович,**

мл. научный сотрудник, Институт механики НАН Армении.

**Адрес:** Пр. Маршала Баграмяна, 24/2,

**Тел.:** (+37493) 05-00-93

**E-mail:** [aro088@mail.ru](mailto:aro088@mail.ru)

#### **Саркисян Самвел Владимирович,**

доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой механики, Ереванский государственный университет, факультет математики и механики.

**Адрес:** ул. Алека Манукяна, 1, ЕГУ, Ереван, Армения

**Тел.:** (+37455) 73-13-13

**E-mail:** [vas@ysu.am](mailto:vas@ysu.am)

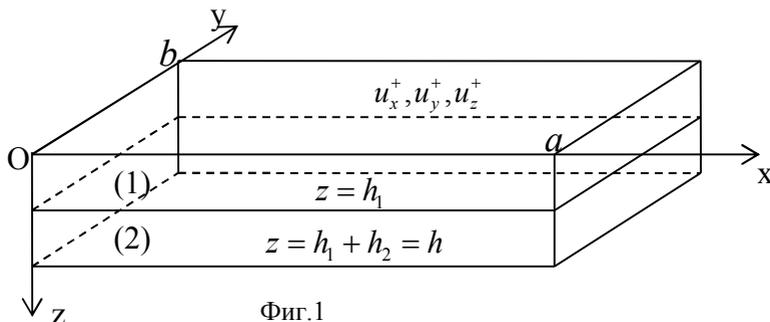
# О ХАРАКТЕРЕ НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТЕРРИТОРИИ АРМЕНИИ НА ОСНОВЕ ДАННЫХ GPS СИСТЕМ

*Погосян А.М., Саргсян М.З., Агаловян М.Л., Гулгазарян Л.Г.  
Армения*

Рассмотрена задача определения напряжённно-деформированного состояния двухслойной пластинки с реальными исходными данными GPS систем. Задача, в частности, моделирует напряжённно-деформированное состояние территории Армении (область в диапазоне от 39.00 до 42.00 северной широты и от 42.00 до 47.00 восточной долготы). Рассмотрен двухслойный пакет из осадочного и гранитного слоёв. Источником для GPS данных была работа [2]. Используя программную среду Mathematica и рекуррентные формулы [1], проведены автоматические расчёты напряжённно-деформированного состояния и получены графические изображения.

## Основные уравнения и постановка краевой задачи.

Рассматривается двухслойный пакет из ортотропных пластин, занимающий область  $D = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq H = h_1 + h_2, \ell = \min(a, b), h \ll \ell\}$ , где  $h_1, h_2$  – толщины пластин (фиг.1).



Требуется найти решение системы уравнений и соотношений трёхмерной задачи теории упругости с учётом объёмных сил и температурного поля по модели Дюгамеля-Неймана при граничных условиях на верхней плоскости  $z = 0$ :

$$\sigma_{jz}(x, y, 0, t) = 0, \quad j = x, y, z$$

$$u_j(x, y, 0, t) = u_j^+(x, y, t)$$

(где время  $t$  входит как параметр)

и условиях полного контакта между слоями при  $z = h_1$ :

$$z = h_1 : \sigma_{jz}^{(1)} = \sigma_{jz}^{(2)}, \quad u_j^{(1)} = u_j^{(2)}, \quad j = x, y, z$$

Условия на боковых поверхностях  $x = 0, a; y = 0, b$  не конкретизируются, поскольку для данного класса неклассических краевых задач ими обусловлен пограничный слой [3,4].

**Общее асимптотическое решение задачи.**

Система уравнений и соотношений трёхмерной задачи теории упругости с учётом объёмных сил и температурного поля по модели Дюгамеля-Неймана для ортотропного тела имеет вид:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + P_x = 0 \quad (x, y, z)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = e_1 + \alpha_{11} \theta \quad (x, y, z; 1, 2, 3),$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = a_{44} \sigma_{yz} \quad (y, z, x; 4, 5, 6)$$

$$e_m = a_{1m} \sigma_{xx} + a_{2m} \sigma_{yy} + a_{3m} \sigma_{zz}, \quad m = 1, 2$$

Асимптотическое решение этой системы состоит из решения внутренней задачи и решения типа пограничного слоя [4]. В этой работе рассматривается только внутренняя задача, решение которой получено в [1].

Легко убедиться также, что когда функции  $u^+, v^+, w^+$  являются многочленами от координат  $x, y$ , итерационный процесс обрывается на определённом приближении и соответствующее решение трёхмерной задачи становится математически точным.

Пусть при  $t = t_k$  в « $n$ » точках лицевой поверхности известны  $u_i^{(+)}(x_i, y_i, t_k)$ ,  $v_i^{(+)}(x_i, y_i, t_k)$ ,  $w_i^{(+)}(x_i, y_i, t_k)$  как данные сейсмостанций и GPS. Тогда перемещения лицевой поверхности можно аппроксимировать многочленам в программной среде Mathematica. Отметим, что имея GPS данные в разных периодах времени, можно исследовать критические напряжения и дать координаты приблизительной территории возможной потери сейсмоустойчивости.

Как исходные данные и материалы слоёв, выбраны [6]:

$$w^+ = 0, \quad \theta = 0, \quad P_i = 0 (i = x, y, z), \quad b = 333.6 \text{ км}, \quad a = 432 \text{ км}, \quad h_1 = 5 \text{ км}, \quad h_2 = 30 \text{ км}, \quad h = 35 \text{ км}, \quad n=11.$$

Слой осадочных пород:  $G = 23.20$  ГПа,  $E = 54.99$  ГПа,  $\nu = 0.184$ .

Гранитный слой:  $G = 30.82$  ГПа,  $E = 74.83$  ГПа,  $\nu = 0.21$ .

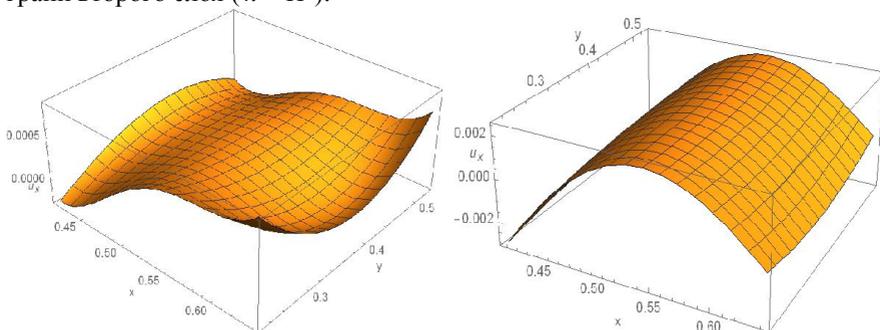
Для  $u^+, v^+$  рассмотрены следующие станции из работы [2] (табл.1) (координаты GPS станций в нашей координатной системе переведены в км).

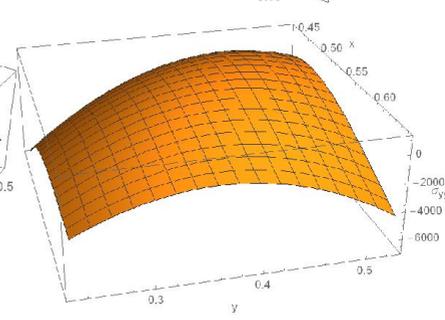
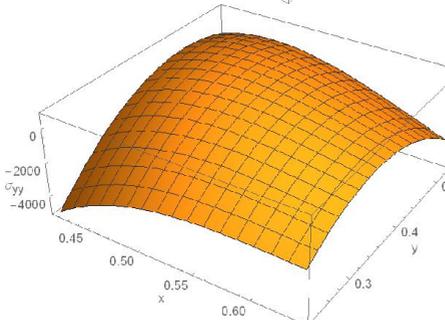
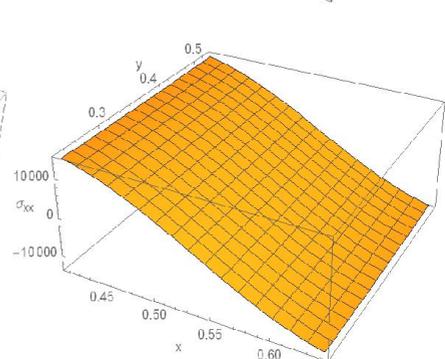
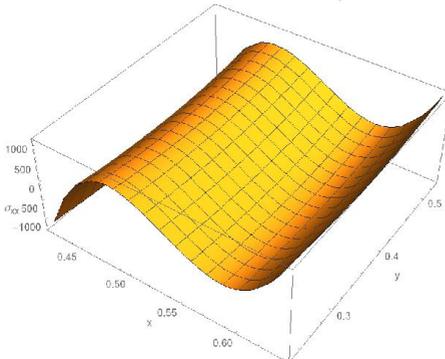
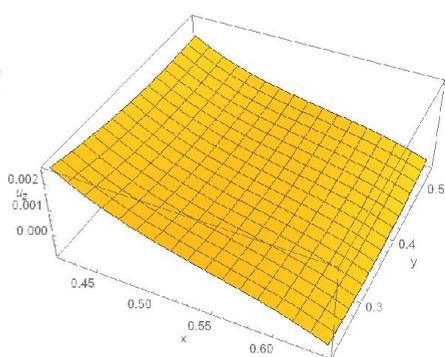
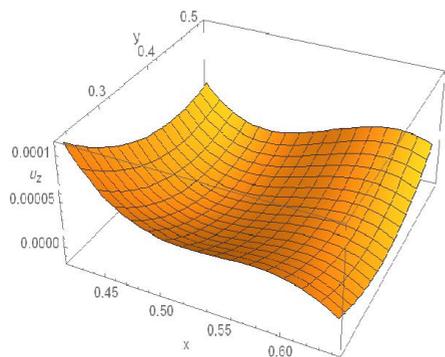
Рассмотрена модель ITRF 2000 [5], проведена аппроксимация исходных данных, т.е. годовые отклонения не учитываются и предполагается, что месячные сдвиги выбранных точек равномерны.

Таблица 1

	SITE Выбранные станции	Long E X (км)	Lat N Y (км)	Е- восток месячный средний сдвиг(X мм)	N-север месячный средний сдвиг(Y мм)
1	Начальная точка координат (42.000, 39.000)	0	0		
2	AKH0	315	122.2	0.199167	0.669167
3	BAV0	154	235.8	0.095	0.485
4	CHO0	196.7	193.0	0.079167	0.766667
5	KAR0	229.6	122.4	0.130833	0.559167
6	KHO0	222.5	97.96	0.3375	0.815833
7	KIZ0	189.2	243.0	0.1075	0.376667
8	NSSP	216.3	136.3	0.180833	0.026667
9	ODZ0	224.1	228.5	0.205	0.595
10	PAM0	220.4	204.6	0.135	0.618333
11	RAZ0	234.9	169.0	0.164167	0.425
12	SHA0	218.4	194.9	0.17	0.54

При вышеприведённых данных получены графики, характеризующие напряжённо-деформированное состояние исследованной области. В частности, ниже приведены графики некоторых компонентов вектора перемещений и тензора напряжений в зоне контакта ( $h = h_1$ ) и на нижней грани второго слоя ( $h = H$ ):





зона контакта ( $h = h_1$ )

Фиг.2

Второй слой ( $h = H$ )

Фиг.3

Изложенный подход позволяет рассматривать пакеты из произвольного числа слоёв.

Безусловно, для более точного прогноза необходимо иметь более точную структуру исследуемой территории и более плотные GPS системы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С., Гулгазрян Л.Г. К определению напряжённо-деформированных состояний литосферных плит Земли на основе данных GPS систем. // Докл. НАН Армении. 2012. Т.112. №3. С.264-272.
2. V.Davtyan et al, Fault slip rates in Armenia by the GPS data.// Izvestia NAS of RA Nauki o Zemle. 2006. LIX. №2.
3. Aghalovyan L.A. Proceeding of A. Razmadze Mathematical Institute of Georgia. 2011. Vol.155. P.3-10.
4. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука-Физматлит, 1997. 414с.
5. Journal of Geophysucal Reasearch. 2002. Vol.107. № B10. 2214.
6. Farmer, I. W. Engineering Properties of Rock. 1968. 180 p.

### Сведения об авторах:

#### **Погосян Айк Меникович,**

К.ф.-м.н., научный сотрудник Института механики НАН РА  
Тел.:(+37491)290209, e-mail: [haikp@mail.ru](mailto:haikp@mail.ru)

#### **Саргсян Месроп Зогракович,**

К.ф.-м.н., научный сотрудник Института механики НАН РА  
Тел.: (+37455)049950, e-mail: [messarg@gmail.com](mailto:messarg@gmail.com)

#### **Агаловян Мгер Ленсерович,**

Д.ф.-м.н., старший научный сотрудник Института механики НАН РА  
Тел.: (+37493)055070, e-mail: [mheraghalovyan@rambler.ru](mailto:mheraghalovyan@rambler.ru)

#### **Гулгазрян Лусине Гургеновна**

К.ф.-м.н., старший научный сотрудник Института механики НАН РА  
Тел.: (+37491)302554, e-mail: [lusina@mail.ru](mailto:lusina@mail.ru)

# РАСПРОСТРАНЕНИЕ СДВИГОВЫХ ВОЛН В ДВУХСЛОЙНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

*Погосян Н.Д.  
Армения*

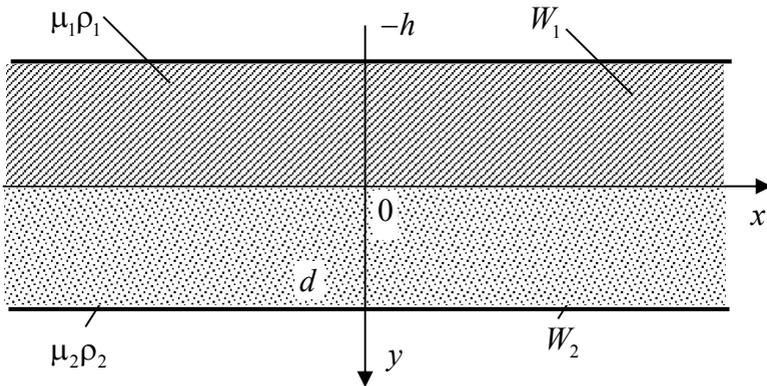
Рассматривается распространение сдвиговых волн в двухслойной среде, когда оба слоя имеют экспоненциальную неоднородность. Получено дисперсионное уравнение относительно параметра, характеризующего скорость волны.

В данной работе изучается двухслойная среда (рис.1), где оба слоя неоднородные. Слой  $\{x \in R, y \in [-h, 0]\}$  является неоднородным с модулем упругости и плотностью

$$\mu_1(\alpha, y) = \mu_1(0)e^{2\alpha y}, \quad \rho_1(\alpha, y) = \rho_1(0)e^{2\alpha y} \quad (1)$$

а слой  $\{x \in R, y \in [0, d]\}$  является неоднородным с модулем упругости и плотностью

$$\mu_2(\alpha, y) = \mu_2(0)e^{2\alpha_2 y}, \quad \rho_2(\alpha, y) = \rho_2(0)e^{2\alpha_2 y} \quad (2)$$



Фиг. 1

На границах  $y = -h, y = d$  заданы условия свободной границы

$$\left. \frac{\partial W_1}{\partial y} \right|_{y=-h} = 0, \quad \left. \frac{\partial W_2}{\partial y} \right|_{y=d} = 0 \quad (3)$$

На границе контакта слоёв (1) и (2) принимаются условия непрерывности перемещения и касательного напряжения:

$$W_1(x, 0) = W_2(x, 0), \quad \sigma_{yz}^1(x, 0) = \sigma_{yz}^2(x, 0)$$

или с учётом закона Гука

$$W_1(x, 0) = W_2(x, 0), \quad \mu_1 \left. \frac{\partial W_1}{\partial y} \right|_{y=0} = \mu_2 \left. \frac{\partial W_2}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (4)$$

Задаче распространения упругих волн в двухслойной среде посвящены работы Белубежяна М.В. [4], [6], Белубежяна М.В., Казаряна К.Б. [3], Данояна З.Н., Данояна Н.З., Манукян Г.А. [5] и другие. В работе [6] рассмотрен неоднородный слой с примыкающим полупространством. В работе [3] рассмотрено условие существования волн Лява в двухслойной среде. В работе [4] рассматривается задача существования волн Лява при наличии многослойной системы. В работе [5] рассматривается задача о существовании поверхностных волн Лява на пьезоэлектрической подложке, на которую нанесены два слоя из различных изотропных материалов произвольной толщины.

Уравнения распространения сдвиговых волн в средах 1 и 2 есть

$$C_{ii}^2 \left( \Delta W_i + 2\alpha_i \frac{\partial W_i}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 W_i}{\partial t^2}, \quad \text{где } C_{ii}^2 = \frac{\mu_i(0)}{\rho_i(0)}, \quad i=1,2 \quad (5)$$

Решения уравнений (5) представляются в виде:

$$W_1 = \left( A_1 e^{kp_1 y} + A_2 e^{kp_2 y} \right) \exp i(kx - \omega t) \quad (6)$$

$$W_2 = \left( B_1 e^{kq_1 y} + B_2 e^{kq_2 y} \right) \exp i(kx - \omega t)$$

где

$$P_{1,2} = -\frac{\alpha_1}{k} \pm \sqrt{\frac{\alpha_1^2}{k^2} - \frac{\omega^2}{k^2 C_{i1}^2} + 1}, \quad \chi_1^2 = \theta \eta - 1 - \frac{\alpha_1^2}{k^2} > 0 \quad (7)$$

$$\theta = \frac{C_{i2}^2}{C_{i1}^2}, \quad \eta = \frac{C^2}{C_{i2}^2}, \quad C = \frac{\omega^2}{k^2}$$

Предположим  $C_{i2} > C_{i1}$ , т.е.  $\theta > 1$

$$P_1 = -\frac{\alpha_1}{k} - i\chi_1, \quad P_2 = -\frac{\alpha_1}{k} + i\chi_1 \quad (8)$$

$$q_1 = -\frac{\alpha_2}{k} - i\chi_2, \quad q_2 = -\frac{\alpha_2}{k} + i\chi_2, \quad \chi_2^2 = \eta - 1 - \frac{\alpha_2^2}{k^2} > 0 \quad (9)$$

Требуя, чтобы решения (6) удовлетворяли граничным условиям (3) и (4), получим

$$\begin{aligned}
A_1 P_1 e^{-kP_1 h} + A_2 P_2 e^{-kP_2 h} &= 0 \\
B_1 q_1 e^{kq_1 d} + B_2 q_2 e^{kq_2 d} &= 0 \\
A_1 + A_2 - B_1 - B_2 &= 0
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\mu_1 (A_1 P_1 + A_2 P_2) - \mu_2 (B_1 q_1 + B_2 q_2) = 0, \quad \gamma = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

Система линейных уравнений (10) имеет ненулевое решение при обращении определителя этой системы в нуль, что приводит к уравнению:

$$\begin{aligned}
P_1 q_1 e^{k(q_1 d - P_1 h)} (\gamma q_2 - P_2) + P_1 q_2 e^{k(q_1 d - P_1 h)} (P_2 - \gamma q_1) + \\
+ P_2 q_1 e^{k(q_1 d - P_2 h)} (P_1 - \gamma q_2) + P_2 q_2 e^{k(q_2 d - P_2 h)} (\gamma q_1 - P_1) = 0
\end{aligned} \tag{11}$$

Подставляя сюда значения  $P_1, P_2, q_1, q_2$  и обозначив  $k(\chi_1 h - \chi_2 d) = \alpha$ ,  $k(\chi_1 h + \chi_2 d) = \beta$ , получим дисперсионное уравнение

$$\begin{aligned}
&\left[ \frac{\gamma \alpha_2 - \alpha_1}{k} \left( \chi_1 \chi_2 - \frac{\alpha_1 \alpha_2}{k^2} \right) - (\gamma \chi_2 - \chi_1) \frac{\alpha_1 \chi_2 + \alpha_2 \chi_1}{k} \right] \cos \alpha + \\
&+ \left[ \frac{\gamma \alpha_2 - \alpha_1}{k} \frac{\alpha_1 \chi_2 + \alpha_2 \chi_1}{k} + (\gamma \chi_2 - \chi_1) \left( \chi_1 \chi_2 - \frac{\alpha_1 \alpha_2}{k^2} \right) \right] \sin \alpha + \\
&+ \left[ \frac{\gamma \alpha_2 - \alpha_1}{k} \left( \frac{\alpha_1 \alpha_2}{k^2} + \chi_1 \chi_2 \right) (\gamma \chi_2 + \chi_1) \frac{\alpha_1 \chi_2 - \alpha_2 \chi_1}{k} \right] \cos \beta + \\
&+ \left[ \frac{\gamma \alpha_2 - \alpha_1}{k} \frac{\alpha_1 \chi_2 - \alpha_2 \chi_1}{k} - (\gamma \chi_2 + \chi_1) \left( \frac{\alpha_1 \alpha_2}{k^2} + \chi_1 \chi_2 \right) \right] \sin \beta = 0
\end{aligned} \tag{12}$$

При  $d = h$ ,  $\alpha_1 = -\alpha$ ,  $\alpha_2 = \alpha$ ,  $\theta = 1$  получим уравнения:

$$\sin \chi k h = 0, \quad \operatorname{tg} \chi k h = \frac{2k}{\alpha} \chi, \quad \eta = 1 (C = C_{i_2}).$$

При  $d = h$ ,  $\theta = 1$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$  получим уравнения:

$$\sin \chi k h = 0, \quad \operatorname{tg} \chi k h = \frac{k(\gamma + 1)}{(\gamma - 1)\alpha}; \quad \eta = 1 (C = C_{i_2})$$

После ввода обозначений  $d = r \cdot h$ ,  $kh = \xi$ ,  $\varepsilon_1 = \alpha_1 h$ ,

$$\varepsilon_2 = \alpha_2 h, \chi_1^0 = \sqrt{(\theta\eta - 1)\xi^2 - \varepsilon_1^2}, \chi_2^0 = \sqrt{(\eta - 1)\xi^2 - \varepsilon_2^2}$$

уравнение (12) приводится к виду:

$$\operatorname{tg}\chi_1^0 = -\frac{\gamma\chi_1^0(\eta - 1)\operatorname{tg}\chi_2^0 \cdot r}{\gamma\varepsilon_1(\eta - 1)\operatorname{tg}\chi_2^0 r + \chi_2^0(\theta\eta - 1) - \varepsilon_2(\theta\eta - 1)\operatorname{tg}\chi_2^0 r} \quad (13)$$

При  $\varepsilon_2 = 0$  получим:

$$\operatorname{tg}\chi_1^0 = \frac{-\gamma\chi_1^0(\eta - 1)\operatorname{tg}\chi_2^0 r}{\gamma\varepsilon_1(\eta - 1)\operatorname{tg}\chi_2^0 r + \chi_2^0(\theta\eta - 1)}$$

С учётом  $\chi_1^0 = \sqrt{(\theta\eta - 1)\xi^2 - \varepsilon_1^2}, \chi_2^0 = \sqrt{\eta - 1}\xi$  полученное уравнение приводится к виду:

$$\operatorname{tg}\sqrt{(\theta\eta - 1)\xi^2 - \varepsilon_1^2} = \frac{-\gamma\sqrt{(\theta\eta - 1)\xi^2 - \varepsilon_1^2}\sqrt{\eta - 1}\operatorname{tg}\sqrt{\eta - 1}\xi r}{\gamma\varepsilon_1\sqrt{\eta - 1}\operatorname{tg}\sqrt{\eta - 1}\xi r + \xi(\theta\eta - 1)} \quad (14)$$

которое было получено в работе (2). Опуская индексы „0” (13) запишется:

$$\operatorname{tg}\chi_1 = \frac{-\gamma\chi_1(\eta - 1)\operatorname{tg}\chi_2 r}{\gamma\varepsilon_1(\eta - 1)\operatorname{tg}\chi_2 r - \varepsilon_2(\theta\eta - 1)\operatorname{tg}\chi_2 r + \chi_2(\theta\eta - 1)}$$

где  $\chi_1 = \sqrt{(\theta\eta - 1)\xi^2 - \varepsilon_1^2}, \chi_2 = \sqrt{(\eta - 1)\xi^2 - \varepsilon_2^2}$

$$\text{Пусть } \eta' = \frac{1}{\theta} \left( 1 + \frac{\alpha_1^2}{k^2} \right), \eta'' = \frac{1}{\theta} \left( 1 + \frac{\alpha_2^2}{k^2} \right)$$

Обозначим  $\alpha = \min\{\eta', \eta''\}$ . При  $\eta < \alpha$  уравнение приводится к виду:

$$\operatorname{th}\chi_1 = \frac{-\gamma\chi_1 \operatorname{th}\chi_2 r}{l \operatorname{th}\chi_2 r + \chi_2(\theta\eta - 1)} \quad (15)$$

где  $l = \gamma\varepsilon_1(\eta - 1) - \varepsilon_2(\theta\eta - 1)$

Если при  $\eta < \alpha$   $l$  сохраняет положительный знак, то уравнение (17) решений не имеет.

Если при  $\eta < \alpha$   $l$  может быть отрицательным, то при этих значениях  $\eta$  (15) может выполняться при  $\operatorname{th}\chi_2 r = \rho_0$  ( $\rho_0 > 0$ ).

Если  $\eta \in (\eta', \eta'')$ , уравнение (13) приводится к виду:

$$\operatorname{tg} \chi_1 = \frac{-\gamma \chi_1 (\eta - 1) \operatorname{th} \chi_2 r}{\left[ \gamma \varepsilon_1 (\eta - 1) - \varepsilon_2 (\theta \eta - 1) \right] \operatorname{th} \chi_2 r + \chi_2 (\theta \eta - 1)}$$

и имеет конечное число решений.

При  $\eta > \beta = \max \{ \eta', \eta'' \}$  уравнение (13) имеет бесконечно много решений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872с.
2. Погосян Н.Д., Саноян Ю.Г., Терзян С.А. Распространение сдвиговых волн в двухслойной среде в антиплоской постановке. //Изв.НАН Армении. Механика. 2013. Т.66. №4. С.12-16.
3. Belubekyan M.V., Kazaryan K.B., Makaryan V. TH-type surface wakes in non-homogeneous Elastic half space. Mathematical, problems of non-homogeneous structures NAS of Ukraine, Lvov, 2000, №2, p.162-164.
4. Белубекян М.В. О поверхностных волнах в случае композиционного слоя. //В сб.: «Актуальные проблемы неоднородной механики». Ереван: 1991.
5. Даноян З.Н., Даноян Н.З., Манукян Г.А. Поверхностные электроупругие волны для двух слоёв на пьезоэлектрической подложке. //Изв.НАН Армении. Механика. 2001. Т.54. №4. С.22-25.
6. Белубекян М.В. Об условиях существования волн Лява с неоднородным слоем.// Изв. АН Армении. Механика. 1991. Т.44. №3. С.7-10.

#### Сведения об авторе:

**Погосян Норик Джанибекович** – научн.сотр. Института механики НАН Армении

**Адрес:** 0019, Ереван, пр.Маршала Баграмяна 24/2.

**Тел.:**(37410)233598. **E-mail:** poghosian.norik@mail.ru

# ДИНАМИЧЕСКИЙ КОЭФФИЦИЕНТ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ ДЛЯ ТРЕЩИНЫ В ВИДЕ ЛОМОНОЙ ЛИНИИ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ С ГАРМОНИЧЕСКИМИ SH ВОЛНАМИ

Попов В. Г.

Россия

В представленной работе решена задача определения динамических КИН для трещины в виде ломаной, состоящей из  $N$  звеньев при воздействии гармонической волной продольного сдвига. Для системы  $N$  сингулярных интегро-дифференциальных уравнений с неподвижными особенностями разработан метод, который учитывает особенность решений и основан на использовании специальных квадратурных формул для сингулярных интегралов.

Рассматривается неограниченная упругая изотропная среда в условиях антиплоской деформации и содержащая сквозную трещину, занимающую в плоскости  $Oxy$  трёхзвенную ломаную (рис.1). С трещиной взаимодействует плоская волна продольного сдвига с фронтом, образующим угол  $\theta_0$  с осью  $Ox$ , и вызывающая в среде следующие перемещения вдоль оси  $Oz$  :

$$W_o^{(i)}(x, y) = A_0 e^{i\kappa_0(x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0)}, \kappa_2^2 = \frac{\rho \omega^2}{G},$$

где  $G, \rho$  – плотность и модуль сдвига упругой среды,  $\omega$  – частота колебаний. Зависимость от времени определяется множителем  $e^{-i\omega t}$ , который здесь и всюду далее отброшен. Пусть  $W(x, y)$  – единственная отличная от

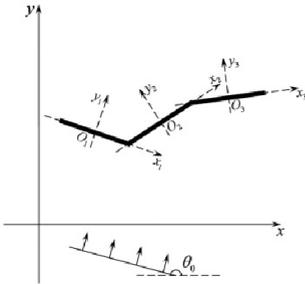


Рис.1

нуля при антиплоской деформации  $z$ -компонента вектора перемещений. В системе координат  $Oxy$  она удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta W + \kappa_2^2 W = 0 \tag{1}$$

Для формулировки граничных условий на трещине с каждым звеном ломаной связывается система координат  $O_i x_i y_i$  (рис.1), центры которых совпадают с серединами звеньев. Связь между системами координат задана формулой

$$\begin{cases} x_i = (x - a_i) \cos \alpha_i + (y - b_i) \sin \alpha_i, \\ y_i = -(x - a_i) \sin \alpha_i + (y - b_i) \cos \alpha_i. \end{cases} \begin{cases} x = a_i + x_i \cos \alpha_i - y_i \sin \alpha_i, \\ y = b_i + x_i \sin \alpha_i + y_i \cos \alpha_i. \end{cases}$$

Пусть  $W_l(x_l, y_l) = W(a_l + x_l \cos \alpha_l - y_l \sin \alpha_l, b_l + x_l \sin \alpha_l + y_l \cos \alpha_l)$

– перемещение рассеянного поля в системе координат, связанной с  $l$ -м звеном трещины. Тогда при отсутствии на берегах трещины напряжений на каждом из звеньев выполнены равенства

$$\tau_{zy}(x_l, 0) = -\tau_{zy}^{(i)}(x_l, 0), \quad x_l \in [-d_l, d_l] \tau_{zy} = G \frac{\partial W_l}{\partial y_l}, \quad \tau_{zy}^{(i)} = G \frac{\partial W_l^{(i)}}{\partial y_l}, \quad (2)$$

Также наличие трещины приводит к разрывности перемещений, для скачков которых вводятся обозначения:

$$W_l(x_l, +0) - W_l(x_l, -0) = \chi_l(x_l), \quad x_l \in [-d_l, d_l], \quad l = 1, \dots, N \quad (3)$$

Исходная граничная задача (1)-(3) путем использования разрывных решений уравнения (1) [1] сведена к следующей системе  $N$  сингулярных интегро-дифференциальных уравнений относительно скачков перемещений и их производных:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \left( \frac{E}{\tau - \zeta} + G(\tau, \zeta) + R(\tau, \zeta) \right) \Phi'(\tau) d\tau + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \left( -\kappa_0^2 \ln |\tau - \zeta| \Gamma + U(\tau, \zeta) \right) \Phi(\tau) d\tau = F(\zeta). \end{aligned} \quad (4)$$

В системе (4) приняты обозначения:

$$\Phi(\tau) = \begin{pmatrix} \varphi_1(\tau) \\ \varphi_2(\tau) \\ \dots \\ \varphi_N(\tau) \end{pmatrix}, \quad \Phi'(\tau) = \begin{pmatrix} \varphi'_1(\tau) \\ \varphi'_2(\tau) \\ \dots \\ \varphi'_N(\tau) \end{pmatrix}, \quad F(\tau) = \begin{pmatrix} f_1(\tau) \\ f_2(\tau) \\ \dots \\ f_N(\tau) \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_2^2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_N^2 \end{pmatrix},$$

$$R(\tau, \zeta) = \{R_{lk}(\tau, \zeta)\}, \quad U(\tau, \zeta) = \{U_{lk}(\tau, \zeta)\},$$

$$\varphi_l(\tau) = d_l \chi(d_l \tau), \quad f_l(\zeta) = -i\kappa_0 C_0 \sin(\theta_0) \exp(i\kappa_0 (\varepsilon_l \cos \theta_0 + \delta_l \sin \theta_0 + \gamma_l \zeta \cos \theta_0));$$

$$\delta_l = b_l d^{-1}, \quad \gamma_l = d_l d^{-1}, \quad d = \max(d_l), \quad l, k = 1, 2, \dots, N; \quad C_0 = d^{-1} A_0, \quad \kappa_0 = \kappa_2 d.$$

Матрицы  $R(\tau, \zeta)$  и  $U(\tau, \zeta)$  состоят из функций, определяющих регулярные интегралы. Ненулевыми элементами матрицы  $G(\tau, \zeta)$  являются функции

$$g_{lk}(\tau, \zeta) = -\frac{s_{lk} \gamma_k \left( (1 - s_{lk} \tau) \cos \alpha_{lk} + \gamma_k (1 + s_{lk} \zeta) \right)}{Q_{lk}(\tau, \zeta)}, \quad s_{lk} = \text{sign}(l - k),$$

$$Q_{lk}(\tau, \zeta) = \gamma_k^2 (1 - s_{lk} \tau)^2 + \gamma_l^2 (1 + s_{lk} \zeta)^2 + 2\gamma_k \gamma_l (1 - s_{lk} \tau)(1 + s_{lk} \zeta) \cos \alpha_{lk},$$

$$l = 1, 2, \dots, N; \quad k = l - 1, \quad k = l + 1$$

Видно, что эти функции имеют особенности при  $\zeta = \pm 1$ ,  $\tau = \pm 1$ , что влияет на асимптотику решения системы (4) [2] в окрестности точек  $\pm 1$ . Установлено, что производные неизвестных функций следует разыскивать в виде [3],[4]

$$\varphi'_k(\tau) = (1-\tau)^{-\sigma_{k+1}} (1+\tau)^{-\sigma_k} \psi_k(\tau), \quad k=1, \dots, N, \quad (5)$$

где функции  $\psi_k(\tau)$  удовлетворяют условию Гельдера, а показатели степени определяются по формулам:

$$\sigma_l = \frac{\beta_{l-1}}{\pi + \beta_{l-1}}, \quad 0 \leq \beta_{l-1} \leq \pi, \quad \sigma_l = \frac{2\pi - \beta_{l-1}}{3\pi - \beta_{l-1}}, \quad \pi \leq \beta_{l-1} \leq 2\pi, \quad \beta_{l-1} = |\alpha_l - \alpha_{l-1}|,$$

$$l = 2, \dots, N, \quad \sigma_1 = \sigma_{N+1} = 0.5$$

Далее функции  $\psi_k(\tau)$  аппроксимируются интерполяционными многочленами

$$\psi_k(\tau) \approx \psi_{n-1}^{(k)}(\tau), \quad \psi_{n-1}^{(k)}(\tau) = \sum_{m=1}^n \psi_{km} \frac{P_{km}(\tau)}{(\tau - \tau_{km}) P'_{kn}(\tau)}, \quad \psi_{km} = \psi_k(\tau_{km}), \quad k=1, \dots, N, \quad (6)$$

где  $P_{kn}(\tau) = P_n^{-\sigma_{k+1} - \sigma_k}(\tau)$  – многочлены Якоби, а  $\tau_{km}$  – корни этих многочленов. Из (5)-(6) получены приближения и для самих неизвестных функций:

$$\varphi_k(\tau) = \varphi_k(\pm 1) + (1 \pm \tau)^{1 - \sigma_k^{\mp}} \sum_{m=1}^n A_{km} S_{km}^{\mp}(\tau), \quad \sigma_k^- = \sigma_k, \quad \sigma_k^+ = \sigma_{k+1}, \quad (7)$$

$$S_{km}^{\mp} = s_{k0}^{-2} F_k^{\mp}(\tau) - (1 \mp \tau)^{1 - \sigma_k^{\mp}} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{P_{kj-1}^{(1)}(\tau) P_{kj}(\tau_{km})}{2j s_{kj}^2}, \quad F_k^{\mp}(\tau) = \frac{F\left(\sigma_k^{\pm}, 1 - \sigma_k^{\mp}, 2 - \sigma_k^{\mp}, \frac{1 \pm \tau}{2}\right)}{2^{\sigma_k^{\pm}} (1 - \sigma_k^{\mp})}$$

Приближённые выражения для неизвестных функций (7) и их производных (5) дают возможность использовать для интегралов с регулярными ядрами квадратурные формулы Гаусса-Якоби. Для интегралов с ядром Коши использована следующая квадратурная формула [5]:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi'_k(\tau)}{\tau - \zeta_{kj}} d\tau = \sum_{m=1}^n A_{km} \frac{\psi_{km}}{\tau_{km} - \zeta_{kj}}, \quad j=1, 2, \dots, n_k, \quad n_1 = n_N = n, \quad n_k = n+1 \quad (8)$$

В этой формуле  $\zeta_{kj}$  ( $k=1, \dots, N$ ;  $j=1, 2, \dots, n_k$ ) нули функций Якоби второго рода  $J_n^{-\sigma_{k+1} - \sigma_k}(\tau)$ , а  $A_{km}$  – коэффициенты квадратурных формул Гаусса-Якоби. Для интегралов с неподвижными особенностями выведены аналогичные квадратурные формулы:

$$\int_{-1}^1 \varphi'_l(\tau) g_{lk}(\tau, \zeta_{lj}) d\tau = \sum_{m=1}^n \psi_{km} \frac{D_{jm}^{lk}}{Q_{lk}(\tau_{km}, \zeta_{lj})}, \quad l, k=1, \dots, N; \quad l \neq k, \quad (9)$$

$$D_{jm}^{lk} = -s_{lk} A_{km} \gamma_k (\gamma_k (1 - s_{lk} \tau_{km}) \cos \beta + \gamma_l (1 + s_{lk} \zeta_{lj})), \quad 1 + s_{lk} \zeta_{lj} > \varepsilon > 0,$$

$$D_{jm}^{lk} = -s_{lk} A_{km} \gamma_k (\gamma_k (1 - s_{lk} \tau_{km}) \cos \alpha_{lk} + \gamma_l (1 + s_{lk} \zeta_{lj})) -$$

$$-\frac{\gamma_k s_{lk} (-1)^{nk}}{P'_{kn}(\tau_{lm})} \left( \gamma_k (1-s_{lk} \tau_{km}) B_n^{(1)} \left( \frac{\gamma_l (1+s_{lk} \zeta_{lj})}{2\gamma_k} \right) + \gamma_l (1+s_{lk} \zeta_{lj}) B_n^{(2)} \left( \frac{\gamma_l (1+s_{lk} \zeta_{lj})}{2\gamma_k} \right) \right),$$

$$0 \leq 1+s_{lk} \zeta_{lj} < \varepsilon,$$

$$B_{kn}^{(p)}(y) = \frac{\Gamma(1-\sigma_{k+1}+n)}{n! 2^{\sigma_{k+1}+\sigma_k}} \left[ -\frac{\sin \pi(\sigma_{k+1}+\sigma_k)}{\sin \pi \sigma_{k+1}} \sum_{s=0}^{\infty} c_{sk} y^s \cos \beta(s+2-p) + \frac{\sin \pi \sigma_k}{\sin \pi \sigma_{k+1}} \sum_{s=0}^{\infty} d_{sk} y^{-\sigma_{k+1}+s} \cos \beta(\sigma_{k+1}-s-2+p) \right], \quad p=1,2$$

$$c_s = \frac{(-1)^s (n+s)! \Gamma(\sigma_{k+1}+\sigma_k-n+s)}{s! \Gamma(1+s+\sigma_{k+1})}, \quad d_s = \frac{(-1)^s \Gamma(1-s+n+\sigma_{k+1}) \Gamma(\sigma_k-n+s)}{s! \Gamma(1+s-\sigma_{k+1})}.$$

Квадратурная формула для интегралов с логарифмическим разностным ядром имеет следующий вид:

$$\int_{-1}^1 \varphi_l(\tau) \ln |\tau - \zeta_{lj}| d\tau = \varphi_l(\pm 1) h_{lj} + \sum_{m=1}^n A_{lm} H_{ljm}^{\pm} \psi_{lj}, \quad (10)$$

$$h_{lj} = (1-\zeta_{lj})(\ln(1-\zeta_{lj})-1) + (1+\zeta_{lj})(\ln(1+\zeta_{lj})-1),$$

$$H_{ljm}^{\pm} = \mp(1-\zeta_{lj})(\ln(1-\zeta_{lj})-1) - (\tau_{lm} - \zeta_{lj})(\ln |\tau_{lm} - \zeta_{lj}| - 1)$$

Применение квадратурных формул Гаусса-Якоби и формул (8)-(10) для сингулярных интегралов, а также использование корней функции Якоби в качестве точек коллокации сводит систему к системе линейных алгебраических уравнений относительно

$\psi_k(-1) \quad k=2, \dots, N-1; \quad \psi_{km}, \quad k=1, \dots, N$ . После решения этой системы приближённые значения КИН находятся по формулам:

$$K^- = -G\sqrt{d_1} \cdot 2^{-(1+\sigma_2)} P_{1n}(-1) \sum_{m=1}^n \frac{\psi_{1m}}{P'_{1n}(\tau_{1m})(1+\tau_{1m})}, \quad (11)$$

$$K^+ = -G\sqrt{d_N} \cdot 2^{-(1+\sigma_N)} P_{Nn}(1) \sum_{m=1}^n \frac{\psi_{Nm}}{P'_{Nn}(\tau_{Nm})(1+\tau_{Nm})}$$

Разработанный численный метод был реализован для трещины, состоящей из трёх звеньев и показанной на рис.2. Предполагалось, что все звенья трещины имеют одинаковую длину  $d$ , а угол  $\alpha = 45^\circ$ . По формулам (11) рассчитывались безразмерные значения КИН  $k^{\pm} = K^{\pm} / G\sqrt{d}$ . Причём, в силу симметрии  $k^+ = k^- = k$ .

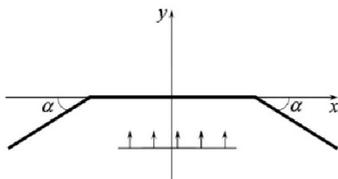


Рис.2

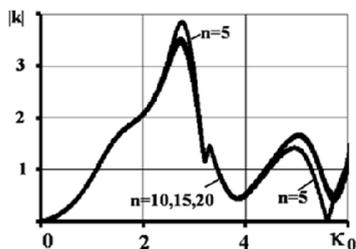


Рис.3

Результаты приведены в виде графиков зависимости абсолютной величины КИН от безразмерного волнового числа  $\kappa_0 = \kappa_2 d$  на рис.3, где кривые соответствуют указанному числу узлов интерполяции в формуле (6). Установлено, что для получения значения КИН с относительной погрешностью менее 0.1% достаточно 20 узлов интерполяции в. А для волн с низкой частотой  $\kappa_0 \leq 2$  хватает и 5 узлов. Это показывает быструю сходимость разработанного численного метода и возможность его эффективного применения при решении задач определения динамического напряжённого состояния в телах с трещинами.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Попов В.Г. Исследование полей напряжений и перемещений при дифракции упругих волн сдвига на тонком жестком отслоившемся включении//Изв. РАН. МТТ. 1992. № 3. С.139-146.
2. Дудучава Р.В. Интегральные уравнения свертки с разрывными предсимволами, сингулярные интегральные уравнения с неподвижными особенностями и их приложения к задачам механики // Труды Тбилисского мат. института АН СССР. 1979. Т.60. 313с.
3. Афян Б.А. Об интегральных уравнениях с неподвижными особенностями в теории ветвящихся трещин //ДАН Арм.ССР. 1984. т.79. № 4. с.60–65.
4. Попов В.Г. Дифракция упругих волн сдвига на включении сложной формы, расположенном в неограниченной упругой среде.// Гидроаэромеханика и теор. упругости. ДГУ. 1986. С.121-127
5. Андреев А.Р. Прямой численный метод решения сингулярных интегральных уравнений первого ряда с обобщёнными ядрами //Изв. РАН. МТТ. 2005. №1. С.126-146.

#### Сведения об авторе:

**Попов Всеволод Геннадиевич** – д.ф.м.н., зав. кафедрой высшей математики. Одесская национальная морская академия.

Тел. +38048 733 23 12, +38048 746 11 42,+38067 480 65 57,

**E-mail:** [dr.vg.popov@gmail.com](mailto:dr.vg.popov@gmail.com)

# ОБОБЩЁННАЯ СХЕМА МЕТОДА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПРИ НАЛИЧИИ КРИВОЛИНЕЙНОГО ДЕФЕКТА

*Рейт В., Рейт Е.*  
*Украина*

Одним из высокоэффективных методов решения задач механики разрушения и выявления концентрации напряжений около дефектов является разработанный Г.Я. Поповым метод разрывных решений [1,2]. С его помощью за счёт построенных заранее разрывных решений легко свести задачи к решению сингулярных уравнений. Этот метод базируется на обобщённой схеме метода интегральных преобразований [1,3], которая представляет собой обобщение классического метода интегральных преобразований [4] на случай наличия разрывов у искомой функции и её нормальной производной по переменной преобразования. Однако, при этом предполагалось, что дефект вписывается в координатную сетку. В настоящей работе излагается обобщённая схема метода интегральных преобразований для случая криволинейного дефекта.

1. Рассмотрим разрывную краевую задачу. Отыскивается функция  $u(x, y)$  – дважды непрерывно дифференцируемая в области  $\Omega \{x \in (a_0, a_1), y \in (b_0, \varphi(x)) \cup (\varphi(x), b)\}$  и непрерывная вместе со своей производной вплоть до границы. Здесь  $y = \varphi(x)$  – некоторая заданная гладкая функция, причём  $b_0 < \varphi(x) < b_1$  при  $x \in (a_0, a_1)$ . Предполагается, что функция  $u(x, y)$  является решением дифференциального уравнения

$$Lu(x, y) \equiv L_x u + L_y u = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (1)$$

$$L_x u = \rho_1^{-1}(x) \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( p_1(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - q_1(x) u \right\},$$

$$L_y u = \rho_2^{-1}(y) \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left( p_2(y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) - q_2(y) u \right\},$$

удовлетворяет граничным условиям

$$U_j[u] \equiv (\alpha_{j0} u_x + \alpha_{j1} u) \Big|_{x=a_j} = 0, \quad y \in (b_0, b_1), \quad x = a_j, \quad j = 0, 1,$$

$$V_m[u] \equiv \beta_{m0} u_y + \beta_{m1} u = 0, \quad x \in (a_0, a_1), \quad y = b_m, \quad m = 0, 1 \quad (2)$$

и терпит заданные скачки при переходе через кривую  $y = \varphi(x)$

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial v} \right\rangle \equiv \frac{\partial u}{\partial v}(x, \varphi(x) - 0) - \frac{\partial u}{\partial v}(x, \varphi(x) + 0) = \chi(x), \quad (3)$$

$$\langle u \rangle \equiv u(x, \varphi(x) - 0) - u(x, \varphi(x) + 0) = \mu(x). \quad (4)$$

Здесь  $\rho_j, p_j, q_j, g_j, \chi, \mu$  – заданные функции,  $\alpha_{jm}$  и  $\beta_{jm}$  – заданные числа, причём  $\alpha_{j0}^2 + \alpha_{j1}^2 > 0$  и  $\beta_{m0}^2 + \beta_{m1}^2 > 0$ ,  $a_j$  и  $b_j$  – произвольные числа, которые могут принимать и бесконечные значения;  $v$  – направление нормальное к кривой  $y = \varphi(x)$ .

2. Применим интегральное преобразование

$$u_\lambda(x) = \int_{b_0}^{b_1} u(x, y) K(y, \lambda) \rho_2(y) dy \quad (5)$$

к дифференциальному уравнению (1) и, воспользовавшись абсолютной непрерывностью интеграла Лебега, разобьём промежуток интегрирования, следуя [1,2] на две части  $(b_0, b_1) = (b_0, \varphi(x) - 0) \cup (\varphi(x) + 0, b_1)$ , после интегрирования по частям получим:

$$\begin{aligned} & \int_{b_0}^{b_1} L_y u(x, y) K(y, \lambda) \rho_2(y) dy = \quad (6) \\ & = \left( \int_{b_0}^{\varphi(x)-0} + \int_{\varphi(x)+0}^{b_1} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left[ p_2(y) \frac{\partial u}{\partial y} \right] K(y, \lambda) dy - \int_{b_2}^{b_1} q_2(y) u(x, y) K(y, \lambda) dy = \\ & = p_2(\varphi(x)) \left[ \left\langle \frac{\partial u}{\partial y} \right\rangle K(\varphi(x), \lambda) - \langle u \rangle \frac{dK}{dy} \Big|_{y=\varphi(x)} \right] - \lambda^2 u_\lambda(x). \end{aligned}$$

Для преобразования второго слагаемого  $L_x u$  необходимо вынести производные из-под интеграла с переменным пределом

$$\left( \int_{b_0}^{\varphi(x)-0} + \int_{\varphi(x)+0}^{b_1} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left( p_1(x) \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \right) K(y, \lambda) \rho_2(y) dy. \quad (7)$$

Когда Г.Я.Попов предложил этот метод, он считал  $\varphi(x) = const$  (т.е. дефект вписывается в систему координат), и тогда этой проблемы не возникает.

Правило дифференцирования интеграла с переменным верхним пределом

$$\frac{d}{dx} \int_a^{\varphi(x)} \Phi(x, y) dy = \varphi'(x) \Phi(x, \varphi(x) - 0) + \int_a^{\varphi(x)} \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) dy$$

или

$$\frac{d}{dx} \int_{\varphi(x)}^b \Phi(x, y) dy = -\varphi'(x) \Phi(x, \varphi(x) + 0) + \int_{\varphi(x)}^b \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) dy,$$

откуда вытекает, что если  $\Phi(x, y)$  терпит скачок при переходе через кривую  $y = \varphi(x)$ ,  $a < x < b$ , то

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) dy &= -\varphi'(x) [\Phi(x, \varphi(x) - 0) - \Phi(x, \varphi(x) + 0)] + \\ &+ \frac{d}{dx} \int_a^b \Phi(x, y) dy \end{aligned} \quad (8)$$

Применим формулу (8) к интегралу (7)

$$\begin{aligned} \int_{b_1}^{b_0} \frac{\partial}{\partial x} \left( p_1(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \mathbf{K}(y, \lambda) \rho_2(y) dy &= \\ b_0 &= -p_1(x) \left\langle \frac{\partial u}{\partial x} \right\rangle \varphi'(x) \mathbf{K}(\varphi(x), \lambda) \rho_2(\varphi(x)) - \\ &- \frac{d}{dx} \left[ p_1(x) \langle u \rangle \varphi'(x) \mathbf{K}(\varphi(x), \lambda) \rho_2(\varphi(x)) \right] + \frac{d}{dx} \left[ p_1(x) \frac{du_\lambda}{dx} \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Таким образом, после применения интегрального преобразования (5) к краевой задаче (1) – (4) получим одномерную краевую задачу:

$$\frac{d}{dx} \left[ p_1(x) \frac{du_\lambda}{dx} \right] [q_1(x) - \lambda^2 \rho_1(x)] u_\lambda(x) = F_\lambda(x), \quad a_0 < x < a_1, \quad (10)$$

$$U_j[u_\lambda] = \alpha_{j0} \varphi'(a_j) \rho_2(\varphi(a_j)) \mathbf{K}(\varphi(a_j), \lambda) \mu(a_j),$$

$$F_\lambda(x) = -p_2(\varphi(x)) \left[ \left\langle \frac{\partial u}{\partial y} \right\rangle \mathbf{K}(\varphi(x), \lambda) - \langle u \rangle \frac{d\mathbf{K}}{dy} \Big|_{y=\varphi(x)} \right] \rho_1(x) + \quad (11)$$

$$+ p_1(x) \left\langle \frac{\partial u}{\partial x} \right\rangle \varphi'(x) \mathbf{K}(\varphi(x), \lambda) \rho_2(\varphi(x)) +$$

$$+ \frac{d}{dx} \left[ p_1(x) \langle u \rangle \varphi'(x) K(\varphi(x), \lambda) \rho_2(\varphi(x)) \right]$$

В выражении (11) фигурируют скачки производных функции  $u(x, y)$  по переменным  $x$  и  $y$ . Выразим производные  $\frac{\partial u}{\partial x}$  и  $\frac{\partial u}{\partial y}$  через производные по касательному и нормальному направлению к кривой  $y = \varphi(x)$ .

Тогда

$$\sqrt{1+(\varphi'(x))^2} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial v} \varphi'(x), \quad \sqrt{1+(\varphi'(x))^2} \frac{\partial u}{\partial y} = \varphi'(x) \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{\partial u}{\partial v}$$

Подставив полученные выражения в (11), учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial s} \langle u \rangle = \left(1 + \varphi'(x)^2\right)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x} \langle u \rangle,$$

$$F_\lambda(x) = \chi(x) \left( \rho_1(x) p_2(\varphi(x)) + \rho_2(\varphi(x)) p_1(x) (\varphi'(x)^2) \right) \frac{K(\varphi, \lambda)}{\sqrt{1+(\varphi'(x))^2}} -$$

$$-\mu'(x) \left[ \begin{array}{l} \rho_2(\varphi(x)) p_1(x) - \rho_1(x) p_2(\varphi(x)) \frac{\varphi(x)}{1+(\varphi'(x))^2} + \\ + \varphi'(x) \rho_2(\varphi(x)) p_1(x) \end{array} \right] K(x, \lambda) -$$

$$-\mu(x) \left[ \frac{d}{dx} \left( \varphi'(x) p_1(x) \rho_2(\varphi(x)) K(\varphi(x), \lambda) \right) - \rho_1(x) p_2(\varphi(x)) \frac{dK}{dy} \Big|_{y=\varphi(x)} \right]$$

Если известна функция  $u_\lambda(x)$  - решение самосопряженной краевой задачи (10), то обращая интегральное преобразование (5),

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{\lambda_n}(x) \frac{K(y, \lambda_n)}{\|K(y, \lambda_n)\|^2}$$

получим разрывное решение краевой задачи (1) – (4).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 392с.
2. Попов Г.Я. Точные решения некоторых задач механики деформированного твёрдого тела. Одесса: «Астропринт», 2013. 421с.
3. Попов Г.Я. Избранные труды: 2 т. Одесса: Полигдром ВМВ, 2007. 411с.
4. Попов Г.Я., Реут В.В., Вайсфельд Н.Д. Рівняння математичної фізики. Метод інтегральних перетворень Одесса: «Астропринт», 2011. 116с.

### Сведения об авторах:

#### **Реут Виктор**

К.ф.-м.н., доц., зав. каф. вычислительной математики Одесского национального университета имени И.И. Мечникова

**E-mail:** reut@onu.edu.ua

#### **Реут Елена**

Ст. преп. каф. методов математической физики Одесского национального университета имени И.И. Мечникова

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ ПО УТОЧНЁННОЙ ТЕОРИИ

Саноян Ю. Г.

Армения

Определены критические значения температуры пластины в постоянном температурном поле по уточнённой теории и по теории Кирхгофа, когда две противоположные пластины находятся в условиях скользящего контакта, а две другие свободно опёрты или шарнирно закреплены. Рассмотрены условия применимости теории Кирхгофа и уточнённой теории для расчёта критических температур.

Задачи изгиба и устойчивости тонких пластин (в том числе и температурной устойчивости) решаются по теории Кирхгофа, а для более толстых пластин используется уточнённая теория первого или более высоких порядков [1,3,4]. В настоящей работе рассмотрены вопросы устойчивости и рассчитаны критические температуры прямоугольных пластин в постоянном температурном поле по обеим теориям.

1. Рассмотрим пластину, стороны которой  $x=0, a$  находятся в условиях скользящего контакта, а две другие стороны свободны.

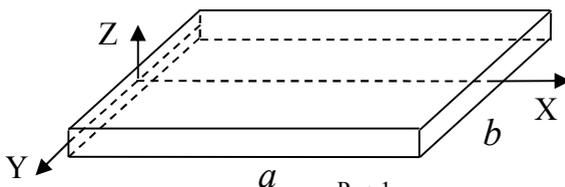


Рис.1

В начальном напряжённом состоянии (обобщённое плоское напряжённое состояние) граничные условия имеют вид:

$$u=0, \sigma_{xy} = 0 \text{ при } x=0, a; \quad \sigma_{yy} = 0, \sigma_{yx} = 0 \text{ при } y = \pm 0.5b. \quad (1.1)$$

Напряжённое состояние пластины равномерно нагретой на  $\theta^\circ\text{C}$  с модулем упругости  $E$  и коэффициентом линейного теплового расширения (КЛТР)  $\alpha_t$ , определяется следующим образом:

$$\sigma_x = -E\alpha_t\theta, \sigma_y = 0, \sigma_{xy} = 0. \quad (1.2)$$

2. Задача устойчивости пластинки. Уравнение устойчивости пластины на основе уточнённой теории С.А. Амбарцумяна имеет вид [1,2]:

$$\frac{4h}{3} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) = P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

$$-D \frac{\partial}{\partial x} \Delta w + \frac{8h^3}{15} \left[ \Delta \varphi_1 + \kappa \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) \right] - \frac{4h}{3} \varphi_1 = 0, \quad (2.1)$$

$$-D \frac{\partial}{\partial y} \Delta w + \frac{8h^3}{15} \left[ \Delta \varphi_2 + \kappa \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) \right] - \frac{4h}{3} \varphi_2 = 0.$$

Здесь  $w$  – функция прогиба,  $\varphi_1, \varphi_2$  характеризуют перерезывающие усилия,

$$D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}, k = \frac{1+\nu}{1-\nu}, P = 2Eh\alpha_i \theta. \quad (2.2)$$

На краях пластины  $x=0, a$  заданы условия скользящего контакта [2]:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \varphi_1 = 0, \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = 0, \quad (2.3)$$

на краях  $y = \pm 0.5b$  -условия свободного опирания  $w=0, M_y = 0, H=0$  (изгибающие и крутящие моменты).

$$w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{4}{5G} \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \nu \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{2}{5G} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \nu \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right) = 0. \quad (2.4)$$

В отличие от классической теории, условия свободного опирания и шарнирного закрепления отличаются [2]. Условия (2.3) и (2.4) находятся в полном согласии с условиями начального состояния (1.1). Решение системы уравнений, удовлетворяющих граничным условиям скользящего контакта (2.3), представим в виде:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y) \cos \mu_n x, \quad \varphi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{1n}(y) \sin \mu_n x, \quad \varphi_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{2n}(y) \cos \mu_n x, \quad (2.5)$$

где  $\mu_n = n\pi/a$ . Подстановка (2.5) в (2.1) приводит к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$f_n = A_n sh \mu_n p_{1n} y + B_n ch \mu_n p_{1n} y + C_n \sin \mu_n p_{2n} y + D_n \cos \mu_n p_{2n} y,$$

$$\varphi_{1n} = -\frac{\eta_n}{\mu_n} (E_n ch \eta_n y + F_n sh \eta_n y) - Q_n \left[ (\beta_{1n} p_{1n} + (1-\nu) \alpha_n^2 \zeta_n) (A_n sh \mu_n p_{1n} y +$$

$$+ B_n ch \mu_n p_{1n} y) - (\beta_{2n} p_{2n} - (1-\nu) \alpha_n^2 \zeta_n) (C_n \sin \mu_n p_{2n} y + D_n ch \mu_n p_{2n} y) \right],$$

$$\varphi_{2n} = E_n sh \eta_n y + F_n ch \eta_n y - Q_n \left[ \beta_{1n} (A_n ch \mu_n p_{1n} y + B_n sh \mu_n p_{1n} y) +$$

$$+ \beta_{2n} (C_n \cos \mu_n p_{2n} y - D_n \sin \mu_n p_{2n} y) \right], \quad (2.6)$$

где  $p_{in} = \sqrt{\alpha_n \sqrt{1 + \zeta_n^2 \alpha_n^2} \pm 1 \mp \zeta_n \alpha_n^2}$ ,  $i=1,2$ ,  $\zeta = 0.4 \mu_n^2 h^2 / (1-\nu)$ ,

$$\alpha_n = \sqrt{\frac{P}{D \mu_n^2}}, \eta_n^2 = \frac{5}{2h^2} \left( 1 + \frac{2h^2 \mu_n^2}{5} \right), Q_n = \frac{5E \mu_n}{4(1-\nu)}, \quad (2.7)$$

$$\beta_{in} = \frac{p_{in} q_{in}}{p_{in}^2 - \mu_n^2 \eta_n^2}, \quad q_{in} = \alpha_n \sqrt{1 + \zeta_n^2 \alpha_n^2} \pm v \zeta_n \alpha_n^2.$$

3. Из граничных условий следует, что функции  $f_n(y)$ ,  $\varphi_{1n}(y)$  должны быть чётными,  $\varphi_{2n}(y)$  – нечётной, тогда  $A_n=0$ ,  $C_n=0$ ,  $F_n=0$ . Остальные три группы произвольных постоянных должны определиться из граничных условий (2.4), которые с учётом (2.5) могут быть приведены к виду:

$$f_n = 0, f_n'' - 4(\varphi_{2n}' + v\mu_n\varphi_{1n})/5G = 0, \mu_n f_n' + 2(\varphi_{1n}' - \mu_n\varphi_{2n})/5G = 0. \quad (3.1)$$

Подставляя (2.6) в (3.1), получим систему однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных  $B_n$ ,  $D_n$ ,  $E_n$ :

$$\begin{aligned} B_n \operatorname{ch} \xi_{1n} + D_n \operatorname{ch} \xi_{2n} &= 0, \\ [p_{1n}^2 - 2(1+v)(p_{1n}\beta_{1n} - v\alpha_n^2\zeta_n)] B_n \operatorname{ch} \xi_{1n} - \\ - [p_{2n}^2 - 2(1+v)(p_{2n}\beta_{2n} + v\alpha_n^2\zeta_n)] D_n \operatorname{ch} \xi_{2n} - \frac{4(1-v)\eta_n}{5G\mu_n^2} E_n \operatorname{ch} \frac{\eta_n b}{2} &= 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} p_{1n} \left[ 1 - \kappa \left( \frac{\beta_{1n}}{p_{1n}} (p_{1n}^2 + 1) + (1-v)\alpha_n^2\zeta_n \right) \right] B_n \operatorname{ch} \xi_{1n} - \\ p_{2n} \left[ 1 - \kappa \left( \frac{\beta_{2n}}{p_{2n}} (p_{2n}^2 + 1) - (1-v)\alpha_n^2\zeta_n \right) \right] D_n \operatorname{ch} \xi_{2n} - \frac{2}{5G\mu_n} \left( 1 + \frac{\eta_n^2}{\mu_n^2} \right) E_n \operatorname{sh} \frac{\eta_n b}{2} &= 0, \end{aligned}$$

где  $\xi_{in} = 0.5\mu_n p_{in} b$ . Приравнявая определитель этого уравнения к нулю, получим уравнение для определения критических значений величины  $\alpha_n$ :

$$\begin{aligned} \left( 1 + \frac{\eta_n^2}{\mu_n^2} \right) [p_{1n}^2 + p_{2n}^2 - 2(1+v)(p_{1n}\beta_{1n} + p_{2n}\beta_{2n})] \cos \xi_{2n} \operatorname{th} \frac{\eta_n b}{2} - \\ - 2(1-v) \frac{\eta_n}{\mu_n} \left\{ p_{1n} \left[ 1 - \kappa \left( \frac{\beta_{1n}}{p_{1n}} (p_{1n}^2 + 1) + (1-v)\alpha_n^2\zeta_n \right) \right] \operatorname{th} \xi_{1n} \cos \xi_{2n} + \right. \\ \left. + p_{2n} \left[ 1 - \kappa \left( \frac{\beta_{2n}}{p_{2n}} (p_{2n}^2 + 1) - (1-v)\alpha_n^2\zeta_n \right) \right] \sin \xi_{2n} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

В этом уравнении для каждого значения  $n$  имеется  $m$  корней  $\alpha_{nm}$  (2.6), которые связаны с критической температурой значением  $P$  из (2.2). Минимальное значение температуры получается при  $m=1$ . Следовательно,

$$\theta_{кр,n} = \frac{\alpha_{кр,n}^2 \pi^2 n}{3(1-v^2)\alpha_t} \frac{h^2}{a^2} \quad (3.4)$$

Для малых значений толщин пластины  $h \ll 1$   $p_{2n} = \sqrt{\alpha_n - 1}$ , а корни (3.3)

близки к корням уравнения  $\cos \xi_{2n} = 0$ , что соответствует решению задачи по теории Кирхгофа. Отсюда отличные от нуля и, удовлетворяющие всем граничным условиям решения, будут возможны при  $\xi_{2n} = \pi(2m-1)/2$ . Используя формулу для  $\xi_{2n}$  и учитывая, что минимальные критические температуры получаются при  $m = 1$ , получим:

$$\theta_{кр} = \left( \frac{nb}{a} + \frac{a}{nb} \right)^2 \frac{\pi^2 n^2}{3(1-\nu^2)\alpha_t} \frac{h^2}{a^2}. \quad (3.5)$$

4. Рассмотрим устойчивость пластины с шарнирным опиранием  $w=0$ ,  $M_y = 0$ ,  $\varphi_1 = 0$  [2] на краях  $y = \pm 0.5$ , которое в развёрнутом виде имеет вид:

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{4}{5G} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0, \quad \varphi_1 = 0. \quad (4.1)$$

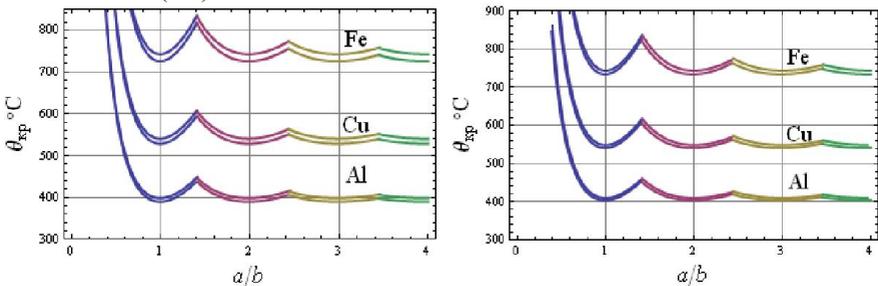
Подстановка (2.6) в (4.1) приводит к системе трёх однородных алгебраических уравнений для каждого  $n$  относительно произвольных постоянных  $B_n, D_n, E_n$

$$\begin{aligned} & Q \left[ (p_{1n}\beta_{1n} + (1-\nu)\alpha_n^2\zeta_n) B_n ch \xi_{1n} - (p_{2n}\beta_{2n} - (1-\nu)\alpha_n^2\zeta_n) D_n ch \xi_{2n} \right] - \frac{\eta_n}{\mu_n^2} E_n ch \frac{\eta_n b}{2} = 0 \\ & p_{1n}\mu_n (4Q\beta_{1n} - 5Gp_{1n}\mu_n) B_n ch \xi_{1n} + p_{2n}\mu_n (4Q\beta_{2n} - 5Gp_{2n}\mu_n) D_n ch \xi_{2n} - \frac{4}{5G} E_n ch \frac{\eta_n b}{2} = 0 \\ & B_n ch \xi_{1n} + D_n coh \xi_{2n} = 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Приравнявая определитель этого уравнения к нулю, получим уравнение для определения критического значения величины  $\alpha_n$

$$\cos(\xi_2) ch(0.5b\eta_n) ch(\xi_{1n}) (p_{1n}^2 + p_{2n}^2) \eta_n \mu_n = 0. \quad (4.3)$$

Это уравнение обращается в ноль при  $\cos \xi_2 = 0$ , поскольку остальные множители в (4.3) положительны.



Фиг.2. Кривые критических температур с двумя скользящими краями (слева) и двумя шарнирными краями (справа) в зависимости от отношения сторон.

На фиг.2 представлены значения критических температур в зависимости от отношения сторон, рассчитанных по уточнённой теории (нижние кривые каждой пары кривых) и теории Кирхгофа (верхние кривые) для пластин с отношением толщин к ширинам пластин 0.2, сделанных из стали, меди и алюминия. Коэффициенты Пуассона и КЛТР равны: для стали-0.28,  $12 \cdot 10^{-6}$  °C, меди-0.32,  $16.7 \cdot 10^{-6}$  °C и алюминия-0.34,  $22.7 \cdot 10^{-6}$  °C. Для пластин с КЛТР меньших  $10 \cdot 10^{-6}$  °C кривые, рассчитанные по теории Кирхгофа и по уточнённой теории для пластин с шарнирным закреплением, практически совпадают. Кривые для стали различаются менее чем на 2%. Как видно из фиг.2, для значений  $h/b = 0.2$  критические значения температуры составляют, примерно, 2/3 от температуры плавления материала, из которого они сделаны. Свойства большинства металлов при таких температурах изменяются настолько, что делает практически невозможным их применение в механических устройствах.

*Автор приносит свою благодарность профессору Белубекяну М.В. за помощь при постановке задачи и оформлении рукописи.*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360с.
2. Белубекян М.В. Об уравнениях теории пластин, учитывающих поперечные сдвиги. //В сб.: «Проблемы механики тонких деформируемых тел». (Посв.80-летию С.А. Амбарцумяна). Ереван: Гитутюн, с.46, 2002.
3. Belubekyan M.V., Sanoyan Yu.G. On the problem of stability a composite plate in heating. Journal of Mathematical Sciences, vol.192, is. 6, p. 682-690, 2013.
4. Javaheri R. Eslami M. R. Thermal buckling of functionally graded plates on higher order theory. //J. Thermal Stresses, vol. 25, is. 7, pp. 603-625, 2002.

#### Сведения об авторе :

**Саноян Юрий Геворкович**, канд.физ.-мат.н., с.н.с. Института механики НАН Армении

Тел.: (+37410) 541319, E-mail: [yuriisanoyan@mail.ru](mailto:yuriisanoyan@mail.ru)

# ВАРИАЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ТОНКИХ ПЛАСТИН

*Саркисян А.А., Саркисян С.О.  
Армения*

Данная работа посвящена выводу общего вариационного принципа, к построению получению основной системы и граничных условий прикладной теории геометрически нелинейных микрополярных упругих тонких пластин.

Рассматриваются микрополярные тонкие пластинки, упругие прогибы которых сравнимы с их толщиной и, вместе с тем, малы по отношению к основным размерам, одновременно малы как углы поворота нормалей к срединной плоскости до деформации, так и их свободные повороты. Таким образом, в тензоре деформации и тензоре изгиба-кручения учитываются не только линейные, но и нелинейные слагаемые в градиентах перемещения и поворота.

**1. Введение.** Вариационные принципы, получившие всеобщее признание в классической теории упругости и строительной механике [1,2], имеют существенные значения и в микрополярной теории упругости, в частности, в прикладной теории микрополярных упругих тонких балок, пластин и оболочек [3].

В данной работе, как исходной, разрабатывается общий вариационный принцип геометрически нелинейной трёхмерной теории микрополярной упругости (из этого принципа следуют все основные уравнения и естественные граничные условия указанной теории). Для построения адекватного общего вариационного принципа прикладной теории геометрически нелинейных микрополярных упругих тонких пластин за основу принимаются геометрические и статические гипотезы для тонких пластин из микрополярных материалов [4]. В результате, выводится общий вариационный принцип прикладной теории геометрически нелинейной теории микрополярных упругих тонких пластин. Варьируя полученный функционал по всем функциональным аргументам, получены уравнения равновесия, физические соотношения упругости и геометрические соотношения, а также естественные граничные условия геометрически нелинейной прикладной теории микрополярных упругих тонких пластин.

**2. Геометрически нелинейная математическая модель микрополярных упругих тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений.** Рассмотрим прямоугольную пластинку постоянной толщины  $2h$  как трёхмерное упругое изотропное тело. Отнесём пластинку к системе декартовых координат  $x_1, x_2, z$ . Координатную плоскость  $x_1, x_2$  будем совмещать со срединной плоскостью пластинки. Ось  $Oz$  направим вдоль нормали срединной плоскости.

Вариационные принципы, как в классической теории упругости и, аналогично, в микрополярной теории упругости, имеют целью заменить

краевую задачу непосредственного интегрирования, задачей отыскания экстремума некоторого функционала. В основу примем разработанный общий вариационный принцип трёхмерной граничной задачи микрополярной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений, из которого следуют соотношения и граничные условия указанной теории.

С целью приведения геометрически нелинейной трёхмерной задачи микрополярной теории упругости к двумерной, в основу предлагаемой теории микрополярных упругих тонких геометрически нелинейных пластин ставим общие гипотезы работ [3,4] и вместо компонент тензоров силовых и моментных напряжений вводим статически эквивалентные им интегральные характеристики-усилия  $(T_{ii}, S_{ij}, N_{i3}, N_{3i})$ , моменты  $(M_{ii}, H_{ij}, L_{ii}, L_{ij}, L_{i3}, L_{33})$  и гипермоменты  $(\Lambda_{i3})$ . В результате, получим выражение для усреднённого функционала  $I_0$ :

$$\begin{aligned}
 I_0 = & \iint_S \left\langle W_0 - \left[ T_{11} \left[ \Gamma_{11} - \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 \right) \right] + T_{22} \left[ \Gamma_{22} - \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x_2} \right)^2 \right) \right] + \right. \\
 & + M_{11} \left[ K_{11} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} \right] + M_{22} \left[ K_{22} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \right] + S_{12} \left[ \Gamma_{12} - \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_2} - \Omega_3 \right) \right] + \\
 & + S_{21} \left[ \Gamma_{21} - \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_2} + \Omega_3 \right) \right] + M_{12} \left[ K_{12} - \left( \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} - \iota \right) \right] + \\
 & + M_{21} \left[ K_{21} - \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} + \iota \right) \right] + N_{31} \left[ \Gamma_{31} - (\psi_1 - \Omega_2) \right] + N_{13} \left[ \Gamma_{13} - \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} + \Omega_2 \right) \right] + \\
 & + N_{32} \left[ \Gamma_{32} - (\psi_2 + \Omega_1) \right] + N_{23} \left[ \Gamma_{23} - \left( \frac{\partial w}{\partial x_2} - \Omega_1 \right) \right] + L_{11} \left[ \kappa_{11} - \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} \right] + \\
 & + L_{22} \left[ \kappa_{22} - \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2} \right] + L_{33} \left[ \kappa_{33} - \iota \right] + L_{12} \left[ \kappa_{12} - \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} \right] + L_{21} \left[ \kappa_{21} - \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2} \right] + \\
 & + L_{13} \left[ \kappa_{13} - \frac{\partial \Omega_3}{\partial x_1} \right] + \Lambda_{13} \left[ l_{13} - \frac{\partial \iota}{\partial x_1} \right] + L_{23} \left[ \kappa_{23} - \frac{\partial \Omega_3}{\partial x_2} \right] + \Lambda_{23} \left[ l_{23} - \frac{\partial \iota}{\partial x_2} \right] \left. \right\rangle dx_1 dx_2 - \\
 & - \iint_{S^+} \left[ q_1^+ u_1 + q_1^+ h \psi_1 + q_2^+ u_2 + q_2^+ h \psi_2 + q_3^+ w + m_1^+ \Omega_1 + m_2^+ \Omega_2 + m_3^+ \Omega_3 + m_3^+ h \iota \right] dx_1 dx_2 + \\
 & + \iint_{S^-} \left[ q_1^- u_1 - q_1^- h \psi_1 + q_2^- u_2 - q_2^- h \psi_2 + q_3^- w + m_1^- \Omega_1 + m_2^- \Omega_2 + m_3^- \Omega_3 - m_3^+ h \iota \right] dx_1 dx_2 + \\
 & + \int_{l_i} \left( S_{21}^0 u_1 + T_{22}^0 u_2 + H_{21}^0 \psi_1 + M_{22}^0 \psi_2 + N_{23}^0 w + L_{21}^0 \Omega_1 + L_{22}^0 \Omega_2 + L_{23}^0 \Omega_3 + \Lambda_{23}^0 \iota \right) dx_1 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{l_1'} [S_{21}(u_1 - u_1^0) + T_{22}(u_2 - u_2^0) + H_{21}(\psi_1 - \psi_1^0) + M_{22}(\psi_2 - \psi_2^0) + N_{23}(w - w^0) + \\
& \quad + L_{21}(\Omega_1 - \Omega_1^0) + L_{22}(\Omega_2 - \Omega_2^0) + L_{23}(\Omega_3 - \Omega_3^0) + \Lambda_{23}(t - t^0)] dx_1 +, \\
& + \int_{l_2'} (T_{11}^0 u_1 + S_{12}^0 u_2 + M_{11}^0 \psi_1 + H_{12}^0 \psi_2 + N_{13}^0 w + L_{11}^0 \Omega_1 + L_{12}^0 \Omega_2 + L_{13}^0 \Omega_3 + \Lambda_{13}^0 t) dx_1 + \\
& + \int_{l_2} [T_{11}(u_1 - u_1^0) + S_{12}(u_2 - u_2^0) + M_{11}(\psi_1 - \psi_1^0) + H_{12}(\psi_2 - \psi_2^0) + N_{13}(w - w^0) + \\
& \quad + L_{11}(\Omega_1 - \Omega_1^0) + L_{12}(\Omega_2 - \Omega_2^0) + L_{13}(\Omega_3 - \Omega_3^0) + \Lambda_{13}(t - t^0)] dx_2 \quad (1)
\end{aligned}$$

где поверхностные интегралы распространены на лицевых плоскостях пластинки  $S^+, S^-(z = \pm h)$  и, соответственно, на поверхности края пластинки  $\Sigma$ , где на одной части заданы внешние усилия и моменты, а на остальной части – перемещение и повороты; величины с верхними индексами нуль – это заданные внешние силовые и моментные напряжения на определённой части боковой поверхности пластинки, или перемещения и повороты, которые заданы на остальной части этой поверхности, при этом,  $l_1 = l_1' \cup l_1'', l_2 = l_2' \cup l_2''$  – соответствующие части контура срединной плоскости пластинки;  $u_1, u_2$  – перемещения точек срединной плоскости пластинки вдоль осей  $x_1, x_2$ ;  $w$  – перемещение точек срединной плоскости пластинки в направлении  $z$ ;  $\psi_1, \psi_2$  – полные углы поворота;  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  – свободные повороты первоначально нормального элемента вокруг осей  $x_1, x_2, z$ ;  $t$  – интенсивность свободного поворота вдоль оси  $z$ ;  $W_0$  – усреднённая плотность потенциальной энергии деформации микрополярной пластинки:

$$\begin{aligned}
W_0 = & \frac{1}{2} (T_{11} \Gamma_{11} + T_{22} \Gamma_{22} + S_{12} \Gamma_{12} + S_{21} \Gamma_{21} + M_{11} K_{11} + M_{22} K_{22} + M_{12} K_{12} + \\
& + M_{21} K_{21} + N_{13} \Gamma_{13} + N_{23} \Gamma_{23} + N_{31} \Gamma_{31} + N_{32} \Gamma_{32} + L_{11} \kappa_{11} + L_{22} \kappa_{22} + L_{33} \kappa_{33} + \\
& + L_{12} \kappa_{12} + L_{21} \kappa_{21} + L_{13} \kappa_{13} + L_{23} \kappa_{23} + \Lambda_{13} l_{13} + \Lambda_{23} l_{23}) \quad (2)
\end{aligned}$$

Варьируя  $I_0$  по всем независимым функциональным аргументам, из вариационного уравнения  $\delta I_0 = 0$  получим основные уравнения и естественные граничные условия микрополярных упругих геометрически нелинейных тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений. Здесь приведём основные уравнения.

Уравнения равновесия

$$\frac{\partial T_{ii}}{\partial x_i} + \frac{\partial S_{ji}}{\partial x_j} + (q_i^+ + q_i^-) = 0, \quad \frac{\partial L_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial L_{23}}{\partial x_2} + (S_{12} - S_{21}) + (m_3^+ + m_3^-) = 0$$

$$\begin{aligned}
N_{3i} - \left( \frac{\partial M_{ii}}{\partial x_i} + \frac{\partial M_{ji}}{\partial x_j} \right) &= h(q_i^+ - q_i^-), \quad \frac{\partial L_{ii}}{\partial x_i} + \frac{\partial L_{ji}}{\partial x_j} + (-1)^j (N_{j3} - N_{3j}) + (m_i^+ + m_i^-) = 0 \\
L_{33} - \left( \frac{\partial \Lambda_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Lambda_{23}}{\partial x_2} \right) - (M_{12} - M_{21}) &= h(m_3^+ - m_3^-) \\
\frac{\partial N_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ T_{11} \frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{S_{12} + S_{21}}{2} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right] + \\
+ \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \frac{S_{12} + S_{21}}{2} \frac{\partial w}{\partial x_1} + T_{22} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right] + q_3^+ + q_3^- &= 0
\end{aligned} \tag{3}$$

Соотношения упругости

$$\begin{aligned}
T_{ii} &= \frac{2Eh}{1-\nu^2} [\Gamma_{ii} + \nu \Gamma_{jj}], \quad S_{ij} = 2h[(\mu + \alpha)\Gamma_{ij} + (\mu - \alpha)\Gamma_{ji}] \\
M_{ii} &= \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} [K_{ii} + \nu K_{jj}], \quad M_{ij} = \frac{2h^3}{3} [(\mu + \alpha)K_{ij} + (\mu - \alpha)K_{ji}] \\
N_{i3} &= 2h[(\mu + \alpha)\Gamma_{i3} + (\mu - \alpha)\Gamma_{3i}], \quad N_{3i} = 2h[(\mu + \alpha)\Gamma_{3i} + (\mu - \alpha)\Gamma_{i3}] \\
L_{ii} &= 2h[(\beta + 2\gamma)\kappa_{ii} + \beta(\kappa_{jj} + \iota)], \quad L_{33} = 2h[(\beta + 2\gamma)\iota + \beta(\kappa_{11} + \kappa_{22})] \\
L_{ij} &= 2h[(\gamma + \varepsilon)\kappa_{ij} + (\gamma - \varepsilon)\kappa_{ji}], \quad L_{i3} = 2h \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \kappa_{i3}, \quad \Lambda_{i3} = \frac{2h^3}{3} \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} l_{i3}
\end{aligned} \tag{4}$$

Геометрические соотношения

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ii} &= \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x_i} \right)^2, \quad \Gamma_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - (-1)^j \Omega_3 + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_2} \\
K_{ii} &= \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i}, \quad K_{ij} = \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i} - (-1)^j \iota, \quad \Gamma_{i3} = \frac{\partial w}{\partial x_i} + (-1)^j \Omega_j, \quad \Gamma_{3i} = \psi_i - (-1)^j \Omega_j \\
\kappa_{ii} &= \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_i}, \quad \kappa_{ij} = \frac{\partial \Omega_j}{\partial x_i}, \quad \kappa_{i3} = \frac{\partial \Omega_3}{\partial x_i}, \quad l_{i3} = \frac{\partial \iota}{\partial x_i}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Отметим, что с точки зрения приведённого утверждения, сформулированная выше вариационная задача соответствует наиболее общему вариационному принципу микрополярных упругих тонких пластин. Поэтому, из последнего, как частные случаи, будут следовать экстремальные принципы микрополярных упругих тонких пластин типа принципов Лагранжа и Кастилиано. К каждому из полученных вариационных уравнений могут быть приложены прямые методы приближённого их решения (в частности, методы Ритца и Галеркина), сводящие граничную задачу теории микрополярных упругих тонких пластин к решению системы алгебраических уравнений.

В частном случае, из вариационного принципа геометрически нелинейной микрополярной теории упругих тонких пластин будет следовать вариационный принцип геометрически нелинейной классической теории упругих тонких пластин [5].

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта № SCS 13-2С154.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластинки. М.: Мир, 1987. 542с.
2. Сливкер В.И. Строительная механика. Вариационные основы. М.: Изд. ассоциации строительных ВУЗов, 2005. 736с.
3. Саркисян С.О. Уравнение баланса энергии, энергетические теоремы и вариационное уравнение для общей теории микрополярных упругих изотропных тонких оболочек./ Учёные записки ГГПИ. 2013. №2. Вып.А. С.8-23.
4. Саркисян С.О. Математическая модель микрополярных упругих тонких пластин и особенности их прочностных и жёсткостных характеристик. / Прикладная механика и техническая физика. 2012. № 2. С.148-155.
5. Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки. М.: Гостехиздат, 1956. 420с.

#### **Сведения об авторах:**

**Саркисян Арменуи Акоповна**, Гюмрийский гос. педагогический институт, канд. физ.-мат. наук, доцент каф. высшей математики. **Тел:** 374 95 422103.

**E-mail:** [armenuhis@mail.ru](mailto:armenuhis@mail.ru)

**Саркисян Самвел Оганесович**, Гюмрийский гос. педагогический институт, зав. каф. высшей математики, доктор физ.-мат. наук, профессор, член-корр. НАН Армении. **Тел:** (374) 93 151698. **E-mail:** [s\\_sargsyan@yahoo.com](mailto:s_sargsyan@yahoo.com)

# ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ КРУГОВОГО СЕКТОРА

*Саркисян В.Г.*

*Армения*

Рассмотрена плоская задача для упругого кругового сектора, когда на контуре области заданы внешние усилия. Задача для упругого кругового сектора рассмотрена при кручении в работе [1], а при плоском напряжённом состоянии – с условиями симметрии на радиальных сторонах границы области в [2,3].

Рассматриваемая задача рассмотрена [4] для симметричного случая. Здесь та же задача рассмотрена несколько иным путем и в одном частном случае выделена особенность в угловой точке.

1. Как известно [5], решение плоской задачи теории упругости в полярных координатах  $r, \varphi$  приводится к отысканию одной функции  $\Phi(r, \varphi)$ , удовлетворяющей бигармоническому уравнению. При решении граничных задач теории упругости для конечных областей в полярных координатах часто бывает удобным преобразование радиальной координаты [7].

Здесь введено это преобразование соотношением  $r = Re^{-t}$ , после чего бигармоническое уравнение и выражения напряжений и деформаций принимают следующий вид:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial t^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial t^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial \varphi^4} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^4} + F = 0 \quad (1)$$

$$Re^{-t} \sigma_r = \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial F}{\partial t^4} + F; \quad Re^{-t} \sigma_\varphi = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - \frac{\partial F}{\partial t}; \quad Re^{-t} \tau_{r\varphi} = \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial \varphi};$$

$$U_r = \frac{1-\nu}{E} \left[ (\nu-1) \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + F \right) dt + (1-2\nu) F + \nu \frac{\partial F}{\partial t} \right] + \quad (2)$$

$$+ \alpha \sin \varphi + \beta \cos \varphi$$

$$U_\varphi = \frac{1-\nu}{E} \left[ \int \left( \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - \frac{\partial F}{\partial t} - F \right) d\varphi + \iint F dt d\varphi + \int \frac{\partial F}{\partial t} dt - \frac{\nu}{1+\nu} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right] +$$

$$+ a_0 e^{-t} + \alpha \cos \varphi - \beta \sin \varphi,$$

где

$$F(t, \varphi) = R^{-1} e^t \Phi(\operatorname{Re}^{-t}, \varphi)$$

$a_0, \alpha$  и  $\beta$  – произвольные постоянные интегрирования,  $E$  – модуль Юнга,  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

Граничные условия в координатах  $(t, \varphi)$  на круговой части границы

$$\sigma_r(0, \varphi) = f(\varphi); \quad (-\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0) \quad (3)$$

$$\tau_{r\varphi}(0, \varphi) = g(\varphi); \quad (-\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0) \quad (4)$$

На радиальной части

$$\tau_{r\varphi}(t, \varphi_0) = g_1(t); \quad \tau_{r\varphi}(t, -\varphi_0) = g_2(t); \quad (0 < t < \infty) \quad (5)$$

$$\sigma_\varphi(t, \varphi_0) = f_1(t); \quad \sigma_\varphi(t, -\varphi_0) = f_2(t)$$

Функцию  $F(t, \varphi)$  для кругового сектора  $(0 \leq t < \infty; -\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0)$  представим в виде суммы тригонометрического ряда и интеграла Фурье [2]

$$F(t, \varphi) = ae^{-t} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k e^{-(a_k-1)t} + b_k e^{-(a_k+1)t}) \cos \alpha_k \varphi + \int_0^{\infty} (A \operatorname{sh} \lambda \varphi \sin \varphi + B \operatorname{ch} \lambda \varphi \cos \varphi + C \operatorname{sh} \lambda \varphi \cos \varphi + D \operatorname{ch} \lambda \varphi \sin \varphi) \cos \lambda t d\lambda, \quad (6)$$

где  $\alpha_k = \frac{k\pi}{\varphi_0}$ .

Для удовлетворения граничным условиям, заданным на дуге окружности  $(t = 0; -\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0)$ , использована ортогональность тригонометрических функций, а для удовлетворения условиям, заданным на радиальных линиях  $(\varphi = \pm\varphi_0, 0 < t < \infty)$  кроме обычного интеграла Фурье, использован также интеграл Фурье, для которого справедливо разложение [6,7]

$$E(t) = \int_0^{\infty} G(\lambda) (\sin \lambda t - \lambda \cos \lambda t) \frac{d\lambda}{1 + \lambda^2} \quad (7)$$

$$G(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} E(t) (\sin \lambda t - \lambda \cos \lambda t + e^{-t}) dt$$

Отметим, что разложение (7) для случая дискретного спектра впервые было использовано в работе [7] при рассмотрении граничных задач теории упругости для кольцевого сектора.

Удовлетворением условиям (3)-(5) с учётом разложения (7) определяем неизвестные коэффициенты  $A, B, C, D, b_k$  и  $a$  через  $a_k$  и бесконечную систему для определения  $a_k$  :

$$\begin{aligned}
 a_k & - \frac{32(\alpha_k + 1)}{\pi\varphi_0} (-1)^k \int_0^\infty \frac{M(\lambda)\lambda(1+\lambda^2)}{M_k^+ M_k^-} \sum_{n=1}^\infty \frac{\alpha_n(\alpha_n - 1)a_n}{M_k^+ M_k^-} d\lambda - \\
 & - \frac{16(\alpha_k + 1)(-1)^k}{\pi\varphi_0^2} \int_0^\infty \frac{M(\lambda)\lambda}{M_k^+ M_k^-} \sum_{n=1}^\infty \frac{\alpha_n + 2}{\alpha_n M_n^+} \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} Rg(\varphi) \sin \alpha_k \varphi d\varphi d\lambda + \\
 & + \frac{\alpha_k - 2}{\varphi_0 \alpha_k (\alpha_k - 1)} + \frac{1}{\pi\varphi_0} \frac{(-1)^k}{\alpha_k - 1} \int_0^\infty \frac{E(\lambda)\lambda}{M_k^+ M_k^-} \times \\
 & \times \left( \int_0^\infty (g_1(z) - g_2(z)) \operatorname{Re}^{-z} \sin \lambda z dz \right) d\lambda + \frac{4(\alpha_k + 1)(-1)^k}{\pi\varphi_0^2} \times
 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \int_0^\infty \frac{M(\lambda)}{M_k^+ M_k^-} \sum_{n=1}^\infty \frac{\alpha_n + 2}{\alpha_n M_n^+} \int_0^\infty e^{-z} R(f_1 + f_2) (\sin \lambda z - \lambda \cos \lambda z) dz d\lambda = \\
 & = - \frac{1}{2\varphi_0 (\alpha_k - 1)} \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} Rh(\varphi) \cos \alpha_k \varphi d\varphi,
 \end{aligned}$$

где  $M(\lambda) = \frac{\operatorname{sh}^2 \lambda \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0}{\operatorname{sh} 2\lambda \varphi_0 + \lambda \sin 2\varphi_0}$

$$\begin{aligned}
 E(\lambda) & = \frac{2 \left[ \alpha_k^2 (\lambda^2 - 1) + (2 + \lambda^2)(1 + \lambda^2) \right] \sin \varphi_0 \cos \varphi_0}{2h 2\lambda \varphi_0 + \lambda \sin 2\varphi_0} + \\
 & + \frac{2\lambda (3\alpha_k^2 + 1 + \lambda^2) \operatorname{sh} 2\lambda \varphi_0 \operatorname{ch} \lambda \varphi_0}{2h 2\lambda \varphi_0 + \lambda \sin 2\varphi_0}
 \end{aligned} \tag{9}$$

$$M_k^- = (\alpha_k - 1)^2 + \lambda^2; \quad M_k^+ = (\alpha_k + 1)^2 + \lambda^2$$

После решения бесконечной системы уравнений напряжения и перемещения во всей области определяются при помощи формул (2).

2. Рассмотрим в частном случае плоскую задачу теории упругости для разрезанной вдоль радиуса круга, ( $0 < r \leq R$ ;  $\varphi = \pi$ ), когда на круговой границе заданы нормальные нагрузки, симметричные относительно оси  $\varphi = 0$ :

$$\begin{aligned} \tau_{r\varphi}(0, \varphi) &= 0; \quad (-\pi \leq \varphi \leq \pi); \quad \sigma_r(0, \varphi) = 0 \\ \tau_{r\varphi}(t, \pi) &= \tau_{r\varphi}(t, -\pi) = 0; \\ \sigma_\varphi(t, \pi) &= \sigma_\varphi(t, -\pi) = p; \end{aligned} \quad (10)$$

В этом случае напряжения  $\sigma_\varphi$  принимают вид:

$$\begin{aligned} R\sigma_\varphi &= 2a + \sum_{k=1}^{\infty} a_k (k-1) \left(\frac{r}{R}\right)^{k-1} \left[ k \left( 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 - 2\frac{r}{R} \right) \right] + \\ &+ 4 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k(k-1) a_k \left[ \frac{\left(\frac{r}{R}\right)^{k+1}}{(k-1)^2 - (k+1)^2} + \frac{\left(\frac{r}{R}\right)^k}{(k+1)^2 - k^2} \right] + \\ &+ \sqrt{\frac{R}{r}} \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k(k-1) a_k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{r}{R}\right)^n \left(\frac{1}{2} + n\right)}{\left[ (k+1)^2 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \right] \left[ (k-1)^2 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \right]} \end{aligned} \quad (11)$$

Как видно, показатель концентрации напряжений совпадает с известным решением [9;10] для бесконечной плоскости с прямолинейным разрезом.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н.Х., Абрамян Б.Л. Кручение упругих тел. М.: Физматлит, 1963. 686с.
2. Макарян В.С., Саркисян В.Г. Об одной граничной задаче для упругого кругового сектора. //Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1990. Т.43. №2. С.3–11.
3. Саргсян А.М. Упругое равновесие кругового сектора при граничных условиях гладкого контакта на радиальных сторонах. Актуальные проблемы механики сплошной среды. Ереван: 2007. С.368-373.
4. Макарян В.С. Две задачи для кругового сектора. //Изв. НАН Армении. Механика. 1996. Т.49. №3. С.31–49.
5. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872с.

6. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Введение в спектральную теорию. М.: Наука, 1970.
7. Баблоян А.А. Решение плоской задачи теории упругости для кольцевого сектора в напряжениях. //Изв. АН Арм.ССР. Сер.физ.-мат.наук. 1962. Т.15. №1. С.87–101.
8. Свешников А.Т., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. М.: Наука, 1970. 304с.
9. Мусхелишвили Н.Н. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Изд.АН ССР, 1954.707с.
10. Willams M. L. Stress singularities resenting from various boundary conditions in angular cornes of plates in extension // J. Appe. Mech. 1952. Vol.19. № 4. Pp.526-528.

**Сведения об авторе:**

**Саркисян Вардан Гарегинович**

Кандидат техн.наук, старший научный сотрудник Института механики.

Адрес:0019, Ереван, пр.Маршала Баграмяна 24-б

Телефон: 61-55-78

# АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДВУХСЛОЙНОЙ БАЛКИ С ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЕМ

*Саркисян Н.С.*

*НКР*

В работе получено асимптотическое решение плоской задачи для анизотропной двухслойной полосы по геометрически нелинейной теории упругости при неполном контакте между слоями.

1. Асимптотическим методом в [1,2] решены классические статические краевые задачи полос, пластин и оболочек. Неклассические задачи теории упругости рассмотрены в [3]. Вопрос определения НДС в плоской задаче для анизотропной полосы, на продольных сторонах которой заданы различные условия теории упругости, рассмотрен в [4,5]. Для такой же полосы, на основе геометрически нелинейной теории упругости, первая краевая задача решена в [6]. На той же основе решены смешанные краевые задачи для анизотропной полосы-балки в [7,8].

Рассматривается плоская нелинейная задача для анизотропной полосы:  $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq l, -h_2 \leq y \leq h_1, h \ll l\}$ .

Будем считать, что слои имеют различные толщины  $h_k$ , коэффициенты упругости  $a_{ij}^{(k)}$ ,  $k = 1, 2$  – номер слоя,  $l$  – длина полосы. Общая толщина полосы –  $2h$ . На нижней и верхней сторонах полосы заданы следующие условия для напряжений и перемещений:

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}^{(2)} = \varepsilon^4 \sigma_{xy}^-(x), \quad v^{(2)} = \varepsilon^3 v^-(x) \quad \text{при } y = -h_2 \\ \sigma_{xy}^{(1)} = \varepsilon^4 \sigma_{xy}^+(x), \quad \sigma_y^{(1)} = \varepsilon^3 \sigma_y^+(x) \quad \text{при } y = h_1 \end{aligned} \quad (1.1)$$

На линии раздела слоёв  $y = 0$  должны быть выполнены следующие условия неполного контакта:

$$\sigma_y^{(1)} = \sigma_y^{(2)}, \quad \sigma_{xy}^{(1)} = \sigma_{xy}^{(2)} = f(x), \quad v^{(1)} = v^{(2)}. \quad (1.2)$$

Для решения поставленной краевой задачи вводится безразмерная система координат  $\xi$ ,  $\zeta$  и малый параметр  $\varepsilon$ :

$$\xi = x/l, \quad \zeta = y/h, \quad \varepsilon = h/l \quad (2h = h_1 + h_2) \quad (1.3)$$

В силу сингулярной возмущённости основных уравнений, решения складываются из двух типов решений: внутреннего, т.е. незатухающего при удалении от торцов в глубь области и типа пограничного слоя.

Решение внутренней задачи будем искать в виде

$$Q^{(k)} = \varepsilon^{q_k} \sum_{s=0}^S \varepsilon^s Q^{(k,s)}, \quad (1.4)$$

где  $Q^{(k)}$  – любое из напряжений или безразмерных перемещений  $U^{(k)} = u^{(k)}/l$ ,  $V^{(k)} = v^{(k)}/l$ ,  $s$  – номер приближения,  $k$  – номер слоя,  $S$  – количество приближений. Целое число  $q_k$  подбирается так, чтобы получилась непротиворечивая система для определения  $Q^{(k,s)}$ :

$$q_k = 3 \quad \text{для } \sigma_x^{(k)}, \sigma_y^{(k)}, U^{(k)}, V^{(k)}; \quad q_k = 4 \quad \text{для } \sigma_{xy}^{(k)} \quad (1.5)$$

Подставив (1.4) в преобразованные по (1.3) уравнения плоской задачи нелинейной теории упругости анизотропного тела, используя (1.5), получим систему относительно  $Q^{(k,s)}$ , решив которую, будем иметь:

$$\begin{aligned} V^{(k,s)} &= v^{(k,s)}(\xi) + v^{*(k,s)}(\xi, \zeta) \\ U^{(k,s)} &= u^{(k,s)}(\xi) + u^{*(k,s)}(\xi, \zeta) \\ \sigma_y^{(k,s)} &= \sigma_{y0}^{(k,s)} + \sigma_y^{*(k,s)}(\xi, \zeta) \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\sigma_x^{(k,s)} = \frac{1}{a_{11}^{(k)}} \frac{du^{(k,s)}}{d\xi} - \frac{a_{12}^{(k)}}{a_{11}^{(k)}} \sigma_{y0}^{(k,s)} + \sigma_x^{*(k,s)}(\xi, \zeta)$$

$$\sigma_{xy}^{(k,s)} = \sigma_{xy0}^{(k,s)} + \left( \frac{a_{12}^{(k)}}{a_{11}^{(k)}} \frac{d\sigma_{y0}^{(k,s)}}{d\xi} - \frac{1}{a_{11}^{(k)}} \frac{d^2 u^{(k,s)}}{d\xi^2} \right) \zeta + \sigma_{xy}^{*(k,s)}(\xi, \zeta)$$

Входящие в (1.6) неизвестные функции  $\sigma_{y0}^{(k,s)}(\xi)$ ,  $\sigma_{xy0}^{(k,s)}(\xi)$ ,  $u^{(k,s)}$ ,  $w^{(k,s)}$  подлежат определению из условий (1.1), (1.2), а величины со звездочкой, как обычно, являются известными, если построены приближения меньше  $s$  [7,8]. Члены, обусловленные нелинейностью исходных уравнений, входят в величины со звездочкой.

Удовлеторив условиям неполного контакта слоёв (1.2), получим:

$$\sigma_{y0}^{(1,s)} = \sigma_{y0}^{(2,s)}, \quad v^{(1,s)} = v^{(2,s)}, \quad \sigma_{xy0}^{(1,s)} = \sigma_{xy0}^{(2,s)} = f(x) \quad (1.7)$$

Удовлетворив граничным условиям (1.1), получим следующие формулы для определения неизвестных функций интегрирования:

$$\begin{aligned} \sigma_{y0}^{(1,s)} &= \sigma_y^{+(s)} - \sigma_y^{*(1,s)}(\xi, \zeta_1), \quad \sigma_{xy0}^{(1,s)} = \sigma_{xy0}^{(2,s)} = f^{(s)}(x) \\ v^{(2,s)} &= v^{-(s)} - v^{*(2,s)}(\xi, \zeta_2), \end{aligned} \quad (1.8)$$

где

$$\sigma_{xy}^{\pm(0)} = \sigma_{xy}^{\pm}, \sigma_y^{+(0)} = \sigma_y^+, v^{-(0)} = v^-, f^{(0)}(x) = f(x),$$

$$\sigma_{xy}^{\pm(s)} = \sigma_y^{+(s)} = 0, v^{-(s)} = 0, f^{(s)}(x) = 0 \text{ при } s > 0$$

Для вычисления перемещения  $u^{(k,s)}(\xi)$  получим дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$C_{kk} \frac{d^2 u^{(k,s)}}{d\xi^2} = f^{(s)}(\xi) + p_k^{(s)}, \quad (1.9)$$

где

$$C_{11} = \frac{\zeta_1}{a_{11}^{(1)}}, C_{22} = \frac{\zeta_2}{a_{11}^{(2)}}$$

$$p_k^{(s)} = -\sigma_{xy}^{\pm(s)} + \frac{a_{12}^{(k)}}{a_{11}^{(k)}} \zeta_k \left( \frac{d\sigma_y^{+(s)}}{d\xi} - \frac{d\sigma_y^{*(1,s)}(\xi, \zeta_1)}{d\xi} \right) + \sigma_{xy}^{*(k,s)}(\xi, \zeta_k)$$

$$\sigma_{xy}^{\pm(0)} = \sigma_{xy}^{\pm}, \sigma_{xy}^{\pm(s)} = 0, s \neq 0.$$

Уравнения (1.9) отличаются от соответствующих уравнений при полном контакте между слоями тем, что, во-первых, вместо одного уравнения при полном контакте [9], здесь имеем два уравнения относительно двух перемещений  $u^{(k,s)}(\xi)$ , во-вторых, в правых частях уравнений (1.9) содержится функция  $f^{(s)}(\xi)$ , которая в зависимости от выбранной модели, может повысить порядок уравнений.

Рассмотрим случай, когда упругие слои взаимодействуют по закону «сухого» трения Кулона. Тогда,

$$\sigma_{xy0}^{(1)} = \sigma_{xy0}^{(2)} = \chi \sigma_{y0}, f(x) = \chi \sigma_{y0}^{(1)} = \chi (\sigma_y^{+(s)} - \sigma_y^{*(1,s)}(\xi, \zeta_1)) \quad (1.10)$$

и, как следствие (1.9), с учётом (1.10), получим

$$C_{kk} \frac{d^2 u^{(k,s)}}{d\xi^2} = \chi (\sigma_y^{+(s)} - \sigma_y^{*(1,s)}(\xi, \zeta_1)) + p_k^{(s)}, \quad (1.11)$$

где  $\chi$  – коэффициент трения, постоянная величина. В частности, если  $\chi = 0$ , то отсутствует сила трения между слоями.

После интегрирования уравнения (1.11) решение задачи примет вид:

$$U^{(k,s)} = u^{(k,s)}(\xi) + u^{*(k,s)}(\xi, \zeta)$$

$$V^{(k,s)} = \frac{v^{-(s)}}{l} + v^{*(k,s)}(\xi, \zeta) - v^{*(2,s)}(\xi, \zeta_2) \quad (1.12)$$

$$\sigma_y^{(k,s)} = \sigma_y^{+(s)} + \sigma_y^{*(k,s)}(\xi, \zeta) - \sigma_y^{*(1,s)}(\xi, \zeta_1)$$

$$\sigma_x^{(k,s)} = \frac{1}{a_{11}^{(k)}} \frac{du^{(k,s)}}{d\xi} - \frac{a_{12}^{(k)}}{a_{11}^{(k)}} (\sigma_y^{+(s)} - \sigma_y^{*(1,s)}(\xi, \zeta_1)) + \sigma_x^{*(k,s)}(\xi, \zeta)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}^{(k,s)} = & \frac{\zeta}{\zeta_k} \sigma_{xy}^{\pm} + \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_k}\right) \chi (\sigma_y^{+(s)} - \sigma_y^{*(k,s)}(\xi, \zeta_1)) + \\ & + \sigma_{xy}^{*(k,s)}(\xi, \zeta) - \frac{\zeta}{\zeta_k} \sigma_{xy}^{*(k,s)}(\xi, \zeta_k) \end{aligned}$$

В заключении отметим, что рассмотрен частный пример, когда

$$\sigma_{xy}^{-}(x) = \tau^{-} = \text{const}, \quad v^{-}(x) \equiv 0,$$

$$\sigma_{xy}^{+}(x) = \tau^{+} = \text{const}, \quad \sigma_y^{+}(x) = -p = \text{const}$$

Пользуясь решениями (1.12) и формулами (1.6)-(1.8) и вычисляя приближения до  $s = 3$  включительно, получим:

$$\sigma_{xy}^{(1)} = -\chi p \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_1}\right) + \tau^{+}, \quad \sigma_{xy}^{(2)} = -\chi p \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_2}\right) + \tau^{-}$$

Остальные величины  $\sigma_x^{(k)}, \sigma_y^{(k)}, U^{(k)}, V^{(k)}$  не представляем по причине громоздкости объёма.

Было установлено, что поправки, обусловленные нелинейностью задачи, проявляются, начиная с приближения  $s \geq 3$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Голденвейзер А.Л. Теория тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 510с.
2. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, Физматлит, 1997. 415с.
3. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: Изд-во «Гитутюн» НАН РА, 2005. 468с.
4. Багдасарян Ю.М., Хачатрян А.М. К определению напряжённо-деформированного состояния анизотропной двухслойной балки с

- проскальзыванием.//В сб.: «Актуальные проблемы Неоднородной мех.». Материалы Всес. науч. семинара, Ереван: 1991. 390с.
5. Агаловян Л.А., Товмасын А.Б. О смешанной краевой задаче для анизотропной термоупругой полосы.//Доклады АН Армении. 1991. Т.92. №2. С.76-81.
  6. Агаловян Л.А., Хачатрян А.М. К решению первой краевой задачи для анизотропной полосы на основе геометрически нелинейной теории упругости.//Изв. ВУЗов. Северо-кавказский регион. Естественные науки. 2001. Спецвыпуск. С.16-18.
  7. Саркисян Н.С. Об одной смешанной краевой задаче анизотропной двухслойной полосы-прямоугольника по геометрически нелинейной теории упругости.//Уч. записки АрГУ. 1(27). 2013. С.116-122.
  8. Саркисян Н.С. Об одной смешанной краевой задаче анизотропной двухслойной полосы-прямоугольника по геометрически нелинейной теории упругости при неполном контакте между слоями.//Труды межд. школы-конференции молодых учёных «Механика-2014», (1-4 октября 2013, Цахкадзор, Армения). Ереван: 2013. С.222-226.

**Сведения об авторе:**

**Саркисян Нарине Суреновна** – аспирант кафедры математики, АрГУ, НКР, Степанакерт, ул. Мхитара Гоша 5. **Тел.:** (374 97) 21 00 78  
**Е-mail:** narine\_sargsyan\_2012@mail.ru

# ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ И СЛОЕ

*Саркисян С.В., Мелконян А.В.*

*Армения*

В работе исследован вопрос о распространении волн в упругом полупространстве и в слое при смешанных граничных условиях. Получены и исследованы дисперсионные уравнения для определения скорости распространения волн.

Рассмотрим гармонические колебания изотропного упругого полупространства  $-\infty < x < \infty$ ,  $-\infty < y < \infty$ ,  $0 \leq z < \infty$ . Колебания описываются трёхмерными уравнениями движения [1]:

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} + \mu \Delta \vec{u} = \rho \ddot{\vec{u}} \quad (1)$$

где  $\vec{u}$  - вектор перемещения,  $\lambda, \mu$  - параметры Ламэ,  $\rho$  - объёмная плотность.

Пусть на границе полупространства  $z = 0$  заданы следующие смешанные граничные условия [2,3]:

а) граница полупространства свободна от напряжений:

$$\sigma_{zz} = 0, \quad \sigma_{zx} = 0, \quad \sigma_{zy} = 0 \quad (2)$$

б) запрещено перемещение в одном из касательных направлений:

$$\sigma_{zz} = 0, \quad \sigma_{zx} = 0, \quad u_y = 0 \quad \text{или} \quad \sigma_{zz} = 0, \quad \sigma_{zy} = 0, \quad u_x = 0 \quad (3)$$

в) запрещено перемещение в обоих касательных направлениях:

$$\sigma_{zz} = 0, \quad u_x = 0, \quad u_y = 0 \quad (4)$$

г) запрещено перемещение в нормальном направлении:

$$u_z = 0, \quad \sigma_{zy} = 0, \quad \sigma_{zx} = 0 \quad (5)$$

д) запрещено перемещение в одном из касательных направлений и в нормальном направлении:

$$u_z = 0, \quad u_x = 0, \quad \sigma_{zy} = 0 \quad \text{или} \quad u_z = 0, \quad u_y = 0, \quad \sigma_{zx} = 0 \quad (6)$$

е) запрещено перемещение во всех направлениях:

$$u_x = 0, \quad u_y = 0, \quad u_z = 0 \quad (7)$$

Следуя работе [4], компоненты вектора перемещения представим в терминах трёх динамических потенциалов:

$$u_x = \varphi_{,x} - \psi_{1,z}, \quad u_y = \varphi_{,y} - \psi_{2,z}, \quad u_z = \varphi_{,z} + \psi_{1,x} + \psi_{2,y} \quad (8)$$

Подстановка (8) в уравнение движения (1) приводит к волновым уравнениям относительно динамических потенциалов. Напряжения  $\sigma_{zz}, \sigma_{zx}$  и  $\sigma_{zy}$  выражаются через динамические потенциалы  $\varphi(x, y, z, t)$  и  $\psi_\alpha(x, y, z, t)$  ( $\alpha = 1, 2$ ) следующими формулами:

$$\frac{\sigma_{zz}}{\lambda + 2\mu} = \varphi_{,zz} + (1 - 2\theta)(\varphi_{,xx} + \varphi_{,yy}) + 2\theta(\psi_{1,xz} + \psi_{2,yz})$$

$$\frac{\sigma_{zx}}{\mu} = 2\varphi_{,xz} + \psi_{1,xx} - \psi_{1,zz} + \psi_{2,xy} \quad (9)$$

$$\frac{\sigma_{zy}}{\mu} = 2\varphi_{,yz} + \psi_{1,xy} - \psi_{2,zz} + \psi_{2,yy}, \quad \theta = \frac{c_2^2}{c_1^2} < 1$$

Динамические потенциалы  $\varphi$  и  $\psi_\alpha$  представим в виде:

$$\varphi(x, y, z, t) = A \cdot \exp(ik(x \cos \gamma + y \sin \gamma - ct) - k\alpha z)$$

$$\psi_1(x, y, z, t) = B_1 \cdot \exp(ik(x \cos \gamma + y \sin \gamma - ct) - k\beta z) \quad (10)$$

$$\psi_2(x, y, z, t) = B_2 \cdot \exp(ik(x \cos \gamma + y \sin \gamma - ct) - k\beta z)$$

где  $k$  – волновое число,  $\alpha^2 = 1 - \theta\eta$ ,  $\beta^2 = 1 - \eta$ ,  $\eta = \frac{c^2}{c_2^2} < 1$  – безразмерная

фазовая скорость трёхмерной поверхностной волны,  $A$ ,  $B_1$  и  $B_2$  – произвольные постоянные.

Удовлетворяя (8) – (10), смешанным граничным условиям (2) – (7) позволяет получить соответствующие дисперсионные уравнения для каждого вида граничных условий. Исследования показали, что трёхмерная поверхностная волна существует лишь для двух видов граничных условий. В случае а) – свободная от напряжений поверхность, получается известное уравнение Рэлея [1]:

$$D(\eta) \equiv 4\alpha\beta - (1 + \beta^2)^2 = 0.$$

В случае б) – стеснённая свободная поверхность, следует следующее дисперсионное уравнение [5]:

$$D(\eta) \equiv 4\alpha\beta - (1 + \beta^2)^2 + \text{tg}^2 \gamma \cdot \beta^2 (1 - \beta^2) = 0 \quad (11)$$

Уравнение (11) имеет единственный корень  $\eta < 1$  и трёхмерная поверхностная волна обладает свойством дисперсии [5].

Рассмотрим упругий слой толщиной  $2h$ , который занимает следующую область:  $x \in (-\infty, \infty)$ ,  $y \in (-\infty, \infty)$ ,  $z \in [-h, h]$ . Примем, что на плоскостях  $z = \pm h$ , ограничивающих слой, заданы следующие граничные условия:

$$\sigma_{zz} = 0, \quad \sigma_{zx} = 0, \quad \sigma_{zy} = 0 \text{ (свободный край)}, \quad (12)$$

$$\sigma_{zz} = 0, \quad \sigma_{zx} = 0, \quad u_y = 0 \text{ (стеснённый свободный край)} \quad (13)$$

Для слоя динамические потенциалы  $\varphi$  и  $\psi_\alpha$  примем в виде:

$$\varphi(x, y, z, t) = (A \operatorname{sh} v_1 z + B \operatorname{ch} v_1 z) \cdot \exp i k (x \cos \gamma + y \sin \gamma - ct),$$

$$\psi_1(x, y, z, t) = (C_1 \operatorname{sh} v_2 z + D_1 \operatorname{ch} v_2 z) \cdot \exp i k (x \cos \gamma + y \sin \gamma - ct),$$

$$\psi_2(x, y, z, t) = (C_2 \operatorname{sh} v_2 z + D_2 \operatorname{ch} v_2 z) \cdot \exp i k (x \cos \gamma + y \sin \gamma - ct),$$

$$v_1 = k\alpha, \quad v_2 = k\beta \quad (14)$$

Удовлетворяя решение (14) граничным условиям (12), согласно (9), получаем следующие дисперсионные уравнения [1]:

Симметричный вид колебания

$$\frac{\operatorname{th} v_1 h}{\operatorname{th} v_2 h} = \frac{(2 - \eta)^2}{4\sqrt{(1 - \eta)(1 - \theta\eta)}}$$

Антисимметричный вид колебания

$$\frac{\operatorname{th} v_1 h}{\operatorname{th} v_2 h} = \frac{4\sqrt{(1 - \eta)(1 - \theta\eta)}}{(2 - \eta)^2}.$$

Для стеснённого свободного края (13) характеристические уравнения симметричного и антисимметричного вида колебаний, соответственно, будут [6]:

$$\frac{\operatorname{th} v_1 h}{\operatorname{th} v_2 h} = \frac{(2 - \eta)^2 - \operatorname{tg}^2 \gamma \cdot \eta(1 - \eta)}{4\sqrt{(1 - \eta)(1 - \theta\eta)}},$$

$$\frac{\operatorname{th} v_1 h}{\operatorname{th} v_2 h} = \frac{4\sqrt{(1 - \eta)(1 - \theta\eta)}}{(2 - \eta)^2 - \operatorname{tg}^2 \gamma \cdot \eta(1 - \eta)}. \quad (15)$$

Зависимость безразмерного параметра

$$r = \frac{4(1 - \theta) + \operatorname{tg}^2 \gamma}{4(1 - \theta)(1 + \operatorname{tg}^2 \gamma)},$$

определяющего фазовую скорость симметричного вида колебания, в случае, когда длина волны очень велика по сравнению с толщиной слоя ( $\nu = 0,25$ ), от  $\gamma$  (дисперсия), приведена на рис.1. График зависимости безразмерного значения фазовой скорости волн изгиба  $\eta$  от  $kh$  и  $\gamma$  приводится на рис.2.

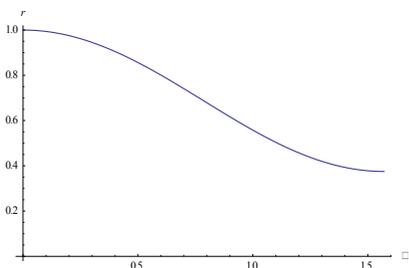


Рис.1

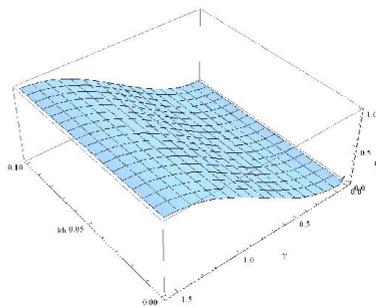


Рис.2

## ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
2. Белубекян В.М., Белубекян М.В. Трёхмерная задача распространения поверхностных волн Рэлея. //Докл. НАН Армении. 2005. Т.105. №4. С.362-369.
3. Ардазишвили Р.В. Трёхмерная волна Рэлея в случае смешанных граничных условий на поверхности полупространства. //Труды Межд. школы-конференции, 2013. Ереван: С.74-78.
4. Приказчиков Д.А., Коваленко Е.В. Выбор потенциалов в трёхмерных задачах динамической теории упругости. //Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия «Естественные науки». 2012. С.131-137.
5. Мелконян А.В., Саркисян С.В. Применение интегрального преобразования Радона в задаче о распространении волн в полупространстве. //Труды Межд. школы-конференции, 2013. Ереван: С.181-184.
6. Мелконян А.В. Трёхмерная задача распространения волн в упругом слое. //Иzv. НАН Армении. Механика. 2011. Т.64. № 1. С.11-16.

### Сведения об авторах:

**Саркисян Самвел Владимирович** – доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой механики, факультет математики и механики, Ереванский государственный университет

Тел.: (+37455) 73 13 13

Е-mail: [vas@ysu.am](mailto:vas@ysu.am)

**Мелконян Аветик Варданович** – кандидат физ.-мат. наук, ассистент кафедры высшей математики, Ереванский государственный университет архитектуры и строительства

Тел.: (+37491) 31 50 57, Е-mail: [avetikmelkonyan@gmail.com](mailto:avetikmelkonyan@gmail.com)

# ИЗУЧЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ТОНКИХ БАЛОК МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

*Саркисян С.О., Жамакочян К.А.*

*Армения*

В данной работе для решения конкретных задач об определении напряжённо-деформированного состояния изгибной деформации микрополярных упругих тонких балок с различными граничными условиями разрабатывается метод конечных элементов, который реализуется на персональном компьютере. На основе численных результатов обсуждаются эффективные проявления микрополярных материалов с точки зрения прочностных и жёсткостных характеристик.

**1. Постановка задачи.** Основная система прикладной теории изгиба микрополярной балки выражается так [1]:

уравнения равновесия

$$\frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} = -2q, \quad \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} - N_{21} = -h \cdot 2q_1, \quad \frac{\partial L_{13}}{\partial x_1} + N_{12} - N_{21} = -2m_2; \quad (1.1)$$

соотношения упругости

$$N_{12} = 2h[(\mu + \alpha)\Gamma_{12} + (\mu - \alpha)\Gamma_{21}], \quad N_{21} = 2h[(\mu - \alpha)\Gamma_{12} + (\mu + \alpha)\Gamma_{21}], \\ M_{11} = \frac{2Eh^3}{3}K_{11}, \quad L_{13} = 2Bhk_{13}; \quad (1.2)$$

геометрические соотношения

$$\Gamma_{12} = \frac{\partial w}{\partial x_1} - \Omega_3, \quad \Gamma_{21} = \psi + \Omega_3, \quad K_{11} = \frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \quad k_{13} = \frac{\partial \Omega_3}{\partial x_1}; \quad (1.3)$$

Здесь  $E$  и  $\mu$  – классические модули упругости и сдвига, а  $\alpha$  и  $B$  – новые упругие константы микрополярного материала балки; об остальных обозначениях, которые и так понятны, **говорится** в работе [1].

Граничные условия на торце балки (на  $x_1 = 0$  или  $x_1 = a$ ) имеют вид:

$$M_{11} = M_{11}^* \quad \text{или} \quad \psi = \psi^*, \quad N_{12} = N_{12}^* \quad \text{или} \quad w = w^*, \\ L_{13} = L_{13}^* \quad \text{или} \quad \Omega_3 = \Omega_3^*. \quad (1.4)$$

Общий вид функционала потенциальной энергии деформации микрополярных упругих тонких балок выражается так:

$$U = \int_0^a (W - 2q_1 h \psi - 2q w - 2m_2 \Omega_3) dx_1 - \\ - \left( (M_{11} \psi + N_{12} w + L_{13} \Omega_3) \Big|_{x_1=a} - (M_{11} \psi + N_{12} w + L_{13} \Omega_3) \Big|_{x_1=0} \right) \quad (1.5)$$

где

$$W = E \frac{h^3}{3} K_{11}^2 + h(\mu + \alpha)(\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{21}^2) + 2h(\mu - \alpha)\Gamma_{12}\Gamma_{21} + Bhk_{13}^2, \quad (1.6)$$

$W$  – линейная плотность потенциальной энергии деформации микрополярной балки при изгибе.

Минимизируя функционал (1.5) получим основные дифференциальные уравнения (1.1)-(1.3) и естественные граничные условия (1.4) для изгибающей деформации микрополярной балки.

## 2. Матрица жёсткости конечного элемента микрополярной балки.

Рассмотрим вывод матрицы жёсткости конечного элемента микрополярной балки.

Выберем для прогиба  $w$ , полного поворота нормального элемента  $\psi$  и для свободного поворота нормального элемента  $\Omega_3$  разложения в виде кубических полиномов:

$$\begin{aligned} w(x_1) &= a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3, \\ \psi(x_1) &= b_0 + b_1x_1 + b_2x_1^2 + b_3x_1^3, \\ \Omega_3(x_1) &= c_0 + c_1x_1 + c_2x_1^2 + c_3x_1^3. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь  $a_i, b_i, c_i$  – коэффициенты, которые выражаются через узловые перемещения и повороты. Узловые перемещения обозначим следующим образом:

$$\begin{aligned} w(0) &= \delta_1, \quad w'(0) = \delta_2, \quad \psi(0) = \delta_3, \quad \psi'(0) = \delta_4, \quad \Omega_3(0) = \delta_5, \quad \Omega_3'(0) = \delta_6, \\ w(a) &= \delta_7, \quad w'(a) = \delta_8, \quad \psi(a) = \delta_9, \quad \psi'(a) = \delta_{10}, \quad \Omega_3(a) = \delta_{11}, \quad \Omega_3'(a) = \delta_{12}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Как видим, данный конечный элемент имеет двенадцать степеней свободы.

Подставим разложения (2.1) в (2.2) и выразим коэффициенты  $a_i, b_i, c_i$  через узловые перемещения и повороты  $\delta_k$ . Подставив  $a_i, b_i, c_i$  в (2.1), для перемещения и поворотов аппроксимации имеем:

$$w(x_1) = \sum_{i=1,2,7,8} \delta_i N_i(x_1), \quad \psi(x_1) = \sum_{i=3,4,9,10} \delta_i N_i(x_1), \quad \Omega_3(x_1) = \sum_{i=5,6,11,12} \delta_i N_i(x_1). \quad (2.3)$$

где  $N_i(x)$  – функции формы элемента, имеющие вид:

$$\begin{aligned} N_1 = N_3 = N_5 &= 1 - \frac{3}{a^2}x_1^2 + \frac{2}{a^3}x_1^3, \quad N_2 = N_4 = N_6 = x_1 - \frac{2}{a}x_1^2 + \frac{1}{a^2}x_1^3, \\ N_7 = N_9 = N_{11} &= \frac{3}{a^2}x_1^2 - \frac{2}{a^3}x_1^3, \quad N_8 = N_{10} = N_{12} = -\frac{1}{a}x_1^2 + \frac{1}{a^2}x_1^3. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Подставив (2.3) в функционал (1.5), после интегрирования получим функцию двенадцати независимых переменных  $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5, \delta_6, \delta_7, \delta_8, \delta_9, \delta_{10}, \delta_{11}, \delta_{12}$ . Минимизация функционала (1.5) приводит к нахождению минимума функции двенадцати независимых переменных:

$$\frac{\partial U}{\partial \delta_k} = 0 \quad (k=1,2,3,\dots,12).$$

Вычислив соответствующие частные производные, получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$[K] \cdot \{\delta\} = \{P\}. \quad (2.5)$$

Здесь  $K$  – матрица жёсткости элемента размером  $12 \times 12$ , представляющего собой важнейшее понятие метода конечных элементов;  $\{\delta\}^T = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5, \delta_6, \delta_7, \delta_8, \delta_9, \delta_{10}, \delta_{11}, \delta_{12}\}$  – вектор узловых перемещений

и поворотов;  $\{P\}^T = \left\{ \int_0^a 2qN_1 dx_1, \int_0^a 2qN_2 dx_1, \int_0^a 2q_1 h N_3 dx_1, \int_0^a 2q_1 h N_4 dx_1, \right.$   
 $\int_0^a 2m_2 N_5 dx_1, \int_0^a 2m_2 N_6 dx_1, \int_0^a 2qN_7 dx_1, \int_0^a 2qN_8 dx_1, \int_0^a 2q_1 h N_9 dx_1, \int_0^a 2q_1 h N_{10} dx_1,$   
 $\left. \int_0^a 2m_2 N_{11} dx_1, \int_0^a 2m_2 N_{12} dx_1 \right\}$  – сосредоточенные узловые силы и моменты.

Ниже приведены выражения для элементов матрицы жёсткости конечного элемента:

$$K_{11} = -K_{17} = K_{77} = \frac{12(\alpha + \mu)}{5a} h, \quad K_{22} = K_{88} = \frac{4(\alpha + \mu)}{15} ha,$$

$$K_{33} = K_{99} = \frac{26(\alpha + \mu)a^2 + 28Eh^2}{35a} h, \quad K_{44} = K_{10,10} = \frac{6(\alpha + \mu)a^2 + 28Eh^2}{315} ha,$$

$$K_{55} = K_{11,11} = \frac{84B + 104\alpha a^2}{35a} h, \quad K_{66} = K_{12,12} = \frac{28B + 8\alpha a^2}{105} ah, \dots$$

$$K_{5,12} = \frac{21B - 26\alpha a^2}{105} h, \quad K_{6,11} = -\frac{21B - 26\alpha a^2}{105} h, \quad K_{6,12} = -\frac{7B + 6\alpha a^2}{105} ha.$$

**3. Примеры.** В качестве первого примера рассмотрим задачу о нормальной к оси  $x_1$  равномерно нагруженной балки, когда концы её шарнирно опёрты.

Для граничных условий шарнирного опирания имеем:

$$w = 0, \quad M_{11} = 0, \quad L_{13} = 0 \quad \text{при } x_1 = 0; a, \quad (3.1)$$

которые с учётом (1.3), (1.4) и (2.2) эквивалентны следующим условиям:

$$\delta_1 = w(0) = 0, \quad \delta_7 = w(a) = 0, \quad \delta_4 = \psi'(0) = 0, \quad \delta_{10} = \psi'(a) = 0,$$

$$\delta_6 = \Omega'_3(0) = 0, \quad \delta_{12} = \Omega'_3(a) = 0. \quad (3.2)$$

Имея в виду (3.1), для функционала (1.5) будем иметь:

$$U = \int_0^a (W - 2q_1 h \psi - 2qw - 2m_2 \Omega_3) dx_1.$$

Кроме того, принимаем  $q_1 = 0, q \neq 0, m_2 = 0$ . Сначала рассмотрим балку в целом как один конечный элемент. Вычислим сосредоточенные узловые силы и моменты, эквивалентные распределённой нагрузке  $2q = \text{const}$ :

$$\{P^1\}^T = \left\{ qa, \frac{qa^2}{6}, 0, 0, 0, 0, qa, \frac{qa^2}{6}, 0, 0, 0, 0 \right\}$$

Имея в виду, что на концах балки реакции опор равны  $-qa$ , окончательным образом, на концевых узлах балки нагрузки будут иметь вид:

$$\{P\}^T = \left\{ 0, \frac{qa^2}{6}, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{qa^2}{6}, 0, 0, 0, 0 \right\}$$

Составим систему уравнений, соответствующую рассматриваемой задаче  $[K] \cdot \{\delta\} = \{P\}$ .

В результате, решение системы (2.5) даст величины узловых обобщённых перемещений  $\delta_2, \delta_3, \delta_5, \delta_8, \delta_9, \delta_{11}$ .

Для повышения точности решений, понятно, что необходимо разбивать балку на несколько конечных элементов. Рассмотрим также случай, когда балка разбита на два конечных элемента. Результат вычислений (максимальный прогиб) приведём для случая, когда физические постоянные имеют значения:  $\alpha = 1.6 \text{ МПа}, \mu = 2 \text{ МПа}, \lambda = 3 \text{ МПа}, B = 6 \text{ КН}$ , а геометрические размеры балки такие:  $a = 8 \text{ мм}, h = 0,2 \text{ мм}$  (приведём также результат по классической теории упругой тонкой балки при её изгибе):

В случае, когда балка в целом считается как один конечный элемент:  $w_{\max} = 5,6453 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ ; в случае, когда балка разбита на два конечных элемента:  $w_{\max} = 5,6475 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ ; точное решение задачи даёт:

$w_{\max} = 5,6498 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ ; в случае классического материала балки:  $w_{\max} = 1,9331 \cdot 10^{-4} \text{ м}$ .

Приведём аналогичный результат задачи, когда балка загружена постоянно распределённой нормальной нагрузкой, а оба конца её жестко закреплены.

В случае, когда балка в целом считается как один конечный элемент:  $w_{\max} = 5,6069 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ ; в случае, когда балка разбита на два конечных элемента:  $w_{\max} = 5,6224 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ ; точное значение максимального прогиба:

$w_{\max} = 5,6246 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ ; классическое значение:  $w_{\max} = 0,3962 \cdot 10^{-5} \text{ м}$ .

Рассмотрим также случай, когда один конец балки жёстко защемлён, другой

конец – свободный, но загружен сосредоточенной силой.

Когда балка считается как один элемент:  $w_{\max} = 0,0002845 \text{ м}$ ; точное

решение:  $w_{\max} = 0,0002847 \text{ м}$ ; классическое решение:  $w_{\max} = 0,308192 \text{ м}$ .

Во всех рассмотренных случаях микрополяриность материала балки повышает жёсткость и прочность балки.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта № SCS 13-2С154.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Sargsyan S. Effective Manifestations of Characteristics of Strength and Rigidity of Micropolar Elastic Thin Bars. //Journal of Materials Science and Engineering, vol. 2, № 1. 2012. P.98-108.

### Сведения об авторах:

#### **Саркисян Самвел,**

Член-корр. НАН Армении, доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой Высшей математики Гюмрийского государственного педагогического института имени М. Налбандяна

**Телефон:** (374 93)15 16 98

**E-mail:** [s\\_sargsyan@yahoo.com](mailto:s_sargsyan@yahoo.com)

#### **Жамакочян Кнарик,**

Аспирант кафедры Высшей математики Гюмрийского государственного педагогического института имени М. Налбандяна

**Телефон:** (374 93)87 32 94

**E-mail:** [knarikzhamakochyan@mail.ru](mailto:knarikzhamakochyan@mail.ru)

# О ПРЕДЕЛЬНОМ ПЕРЕХОДЕ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЕ ОТ РАСПРЕДЕЛЁННОГО ПО ПРЯМОУГОЛЬНИКУ РАВНОМЕРНОГО ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЯ К СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛЕ В ПЕРЕРЕЗЫВАЮЩИХ СИЛАХ. ЕЩЕ ОДИН ПАРАДОКС

*Сейранян С.П.*

*Армения*

Рассматривается прямоугольная изотропная свободно опёртая по краям пластина, нагружённая равномерным внешним давлением на прямоугольной площадке со сторонами, параллельными сторонам пластины. Устремлением сторон площадки к нулю при поддержании результирующей силы и центра прямоугольника нагружения постоянными, получены конечные предельные значения для перерезывающих сил  $N_x$  и  $N_y$ . Показано, что в прямоугольнике плана пластины  $G$  с исключённой точкой  $(\xi, \eta)$  приложения сосредоточенной силы  $P$  найденные предельные значения перерезывающих сил совпадают со значениями, полученными их вычислением на основе решения Навье для прогиба. Содержатся выводы: а) перерезывающие силы по Навье при сосредоточенной нагрузке в области  $G \setminus (\xi, \eta)$  удовлетворяют требуемым условиям, б) конечные значения пределов  $N_x$  и  $N_y$  в точке  $(\xi, \eta)$  — парадокс.

**Введение.** Известно, что в краевых задачах механики встречаются парадоксы, когда нарушается физически обусловленная непрерывная зависимость решений от параметров задачи. В качестве таковых приведём парадокс Циглера [1] и парадокс Бабушки – Сапонджяна [2]. Поэтому, решение той или иной задачи, сформулированное предельным путем, требует дальнейшего анализа. К числу таковых относится и решение Навье для прогиба свободно опёртой прямоугольной пластины при сосредоточенной нагрузке [3], установленное им предельным переходом им же полученном решении для прогиба данной, но локально нагружённой по прямоугольнику равномерным поперечным давлением пластины без требований существования предельных значений прочих характерных величин НДС пластины с удовлетворением геометрических соотношений, соотношений упругости и уравнения равновесия пластины. Прежде в работах автора [4], [5] исследовалось предельное поведение крутящих моментов и перерезывающих сил в окрестности точки  $(\xi, \eta)$ , полученных подстановкой решения Навье для прогиба прямоугольной свободно опёртой пластины при сосредоточенной нагрузке в соответственные соотношения упругости классической теории пластин. Обнаружены кривые, приближение по которым к точке  $(\xi, \eta)$  приводит к различным предельным значениям данных величин. Полученные противоречия представлены парадоксом.

Важно отметить, что к решениям Навье прямоугольной шарнирно опёртой пластины при частичном и сосредоточенном нагружении обращались широко известные учёные и специалисты: Б.Г. Галёркин, С.П.

Тимошенко, Л.В. Канторович, В.И.Крылов, Г.Ю. Джанелидзе, однако в их работах и работах других авторов, кроме работ автора [4], [5], парадоксы не встречаются.

1. Перерезывающая сила  $N_y$  в локально нагруженной на прямоугольной площадке равномерным давлением прямоугольной свободно опертой пластины представляется в виде [3],[6]:

$$\begin{aligned}
 N_y &= \frac{\hat{B}}{\Delta\xi\Delta\eta} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{w}_{mn} / \lambda_m \sin \lambda_m x \cos \mu_n y \sin \lambda_m \xi \sin \mu_n \eta \sin \lambda_m \Delta\xi / 2 \sin \mu_n \Delta\eta / 2 = \\
 &= \frac{\hat{B}}{4\Delta\xi\Delta\eta} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \lambda_m x \sin \lambda_m \xi \sin \lambda_m \Delta\xi / 2 / \lambda_m \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \hat{w}_{mn} \cos \mu_n (\eta + y - \Delta\eta / 2) - \sum_{n=1}^{\infty} \hat{w}_{mn} \times \right. \\
 &\left. \times \cos \mu_n (\eta + y + \Delta\eta / 2) + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{w}_{mn} \cos \mu_n (\eta - y - \Delta\eta / 2) - \sum_{n=1}^{\infty} \hat{w}_{mn} \cos \mu_n (\eta - y + \Delta\eta / 2) \right] \\
 (x, y) \in G = a \times b & \tag{1.1}
 \end{aligned}$$

Здесь  $a, b$  – стороны прямоугольника пластины,  $\lambda_m = m\pi/a, \mu_n = n\pi/b; P$  – приведенная сила давления,  $\hat{B} = 16P/(ab), \hat{w}_{mn} = 1/(\lambda_m^2 + \mu_n^2), (\xi, \eta)$  и  $\Delta\xi, \Delta\eta$  – координаты центра прямоугольника приложения давления и длины его сторон.

Заметим теперь, что с использованием известной формулы [3], [7]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos nz / (\alpha^2 + n^2) = -1/(2\alpha^2) + \pi / (2\alpha \operatorname{sh} \pi\alpha) \operatorname{ch} \alpha(\pi - |z|), \text{ где } |z| \leq 2\pi,$$

при значении  $\alpha = \lambda_m / \mu_1$ , получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \hat{w}_{mn} \cos nz = -1/(2\lambda_m^2) + b / (2\lambda_m \operatorname{sh} b\lambda_m) \operatorname{ch} \lambda_m(b - |z| / \mu_1), |z| \leq 2\pi \tag{1.2}$$

Но

$$-\pi \leq \mu_1[(\eta - \Delta\eta/2) - y] \leq \mu_1(\eta \pm y \pm \Delta\eta/2) \leq \mu_1[y + (\eta + \Delta\eta/2)] \leq 2\pi \tag{1.3}$$

Кроме того,

$$0 \leq \mu_1[(\eta - \Delta\eta/2) + y] \leq \mu_1(\eta + y \pm \Delta\eta/2) \leq 2\pi \tag{1.4}$$

Из (1.3) имеем, что формула (1.2) остается верной, если в ней положить

$$z = \mu_1(\eta \pm y \pm \Delta\eta/2) \tag{1.5}$$

Тогда, подставляя (1.5) в (1.2), с учётом (1.4) преобразуем выражение

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} \hat{w}_{mn} \cos \mu_n (\eta + y - \Delta\eta/2) - \sum_{n=1}^{\infty} \hat{w}_{mn} \cos \mu_n (\eta + y + \Delta\eta/2) &= b / (\lambda_m \operatorname{sh} b\lambda_m) \times \\
 \times \operatorname{sh} \lambda_m (b - \eta - y) \operatorname{sh} \lambda_m \Delta\eta / 2 & \tag{1.6}
 \end{aligned}$$

Используя теперь (1.6) в (1.1) в частном случае  $y = \eta$ , получаем

$$N_y|_{y=\eta} = \frac{4P}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin\lambda_m \Delta \xi / 2 \operatorname{sh} \lambda_m \Delta \eta / 2}{\Delta \xi \Delta \eta \lambda_m^2} \frac{\sin\lambda_m x \sin\lambda_m \xi \operatorname{sh} \lambda_m (b-2\eta)}{\operatorname{sh} b \lambda_m} \quad (1.7)$$

Пусть теперь  $y \neq \eta$ . Положим  $\Delta \eta < |y - \eta| = \delta > 0$ . Тогда

$$\eta - y \pm \Delta \eta / 2 = \begin{cases} -(|y - \eta| \mp \Delta \eta / 2) < 0, \text{ при } y > \eta \\ |y - \eta| \pm \Delta \eta / 2 > 0, \text{ когда } y < \eta \end{cases}, \Delta \eta < \delta \quad (1.8)$$

Поэтому с использованием (1.8), (1.5) в (1.2) имеем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \hat{w}_{mn} \cos \mu_n (\eta - y - \Delta \eta / 2) - \sum_{n=1}^{\infty} \hat{w}_{mn} \cos \mu_n (\eta - y + \Delta \eta / 2) = b / \lambda_m \operatorname{sh} b \lambda_m \times \\ \times \begin{cases} [-\operatorname{sh} \lambda_m (b + \eta - y) \operatorname{sh} \lambda_m \Delta \eta / 2], \text{ при } y > \eta \\ \operatorname{sh} \lambda_m (b - \eta + y) \operatorname{sh} \lambda_m \Delta \eta / 2, \text{ когда } y < \eta \end{cases}, \Delta \eta < \delta \quad (1.9)$$

Подставляя далее (1.6), (1.9) в (1.1), приходим к требуемому результату

$$N_y = \frac{8P}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin\lambda_m \Delta \xi / 2 \operatorname{sh} \lambda_m \Delta \eta / 2}{\Delta \xi \Delta \eta \lambda_m^2} \frac{\sin\lambda_m x \sin\lambda_m \xi}{\operatorname{sh} b \lambda_m} \times \begin{cases} [-\operatorname{ch} \lambda_m (b - y) \operatorname{sh} \lambda_m \eta], y > \eta \\ \operatorname{sh} \lambda_m (b - \eta) \operatorname{ch} \lambda_m y, y < \eta \end{cases}, \Delta \eta < \delta \quad (1.10)$$

2. Перерезывающая сила  $N_x$  с учётом (1.2), (1.4) и (1.8) приводится к виду:

$$N_x = \frac{\hat{B}}{4\Delta \xi \Delta \eta} \sum_{m=1}^{\infty} \cos \lambda_m x \sin \lambda_m \xi \sin \lambda_m \Delta \xi / 2 \int_{-\Delta \eta / 2}^{\Delta \eta / 2} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \hat{w}_{mn} \cos \mu_n (\eta - y - t) - \right. \\ \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \hat{w}_{mn} \cos \mu_n (\eta + y + t) \right] dt = \frac{8P}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin\lambda_m \Delta \xi / 2 \operatorname{sh} \lambda_m \Delta \eta / 2}{\Delta \xi \Delta \eta \lambda_m^2} \frac{\cos \lambda_m x \sin \lambda_m \xi}{\operatorname{sh} b \lambda_m} \times \\ \times \begin{cases} \operatorname{sh} \lambda_m \eta \operatorname{sh} \lambda_m (b - y), y > \eta \\ \operatorname{sh} \lambda_m (b - \eta) \operatorname{sh} \lambda_m y, y < \eta \end{cases}, \Delta \eta < \delta \quad (2.1)$$

3. Произведём двойной предельный переход в выражениях для перерезывающих сил (1.7), (1.10), (2.1) при стремлении  $\Delta \xi, \Delta \eta$  к нулю. Пусть  $E_m, F_m^{(1)}, F_m^{(2)}$  – общие члены рядов (1.7), (1.10), (2.1). Тогда, с применением неравенств

$$|sht| \leq cht \leq e^{|t|}, \operatorname{sh} b \lambda_m = e^{b \lambda_m} (1 - 1/e^{2b \lambda_m}) / 2 \geq e^{b \lambda_m} (1 - 1/e^{2b \lambda_1}) / 2 = e^{b \lambda_m} / C_1,$$

$$|b - 2\eta| + \Delta \eta / 2 - b = \begin{cases} -\eta - (\eta - \Delta \eta / 2) < -\eta < 0, \text{ если } b \geq 2\eta \\ (\eta + \Delta \eta / 2 - b) + (\eta - b) < \eta - b < 0 \text{ при } b < 2\eta \end{cases} \quad (3.1)$$

и формулы конечных приращений Лагранжа [7] приходим к оценкам:

$$|E_m| \leq \frac{1}{4} \left| \frac{\sin \lambda_m \Delta \xi / 2}{\lambda_m \Delta \xi / 2} \right| \left| \frac{sh \lambda_m \Delta \eta / 2}{\lambda_m \Delta \eta / 2} \right| \left| \frac{sh \lambda_m (b-2\eta)}{sh b \lambda_m} \right| \leq \frac{C_1}{4} ch \lambda_m \Delta \eta^{(m)} / 2 \times$$

$$\times e^{\lambda_m (b-2\eta-b)} \leq C_1 / 4 e^{\lambda_m (b-2\eta + \Delta \eta / 2 - b)} \leq C_1 / 4 (e^{-\lambda_m \eta} + e^{-\lambda_m (b-\eta)}), \quad (3.2)$$

$$|F_m^{(i)}| \leq C_1 / 4 ch \lambda_m \Delta \eta^{(m)} / 2 e^{-\lambda_m |y-\eta|} \leq C_1 / 4 e^{-\lambda_m (|y-\eta| - \Delta \eta / 2)} \leq C_1 / 4 e^{-\lambda_m \delta / 2}, \quad i = 1, 2,$$

$$\text{где } 0 < \Delta \eta^{(m)} < \Delta \eta < \delta \quad (3.3)$$

Из (3.2) имеем, что ряды (1.7), (1.10), (2.1) мажорируются числовыми сходящимися рядами, а значит, сходятся равномерно относительно  $\Delta \xi, \Delta \eta$  [7]. Далее существуют конечные двойные пределы их общих членов

$$\lim_{\substack{\Delta \xi \rightarrow 0 \\ \Delta \eta \rightarrow 0}} E_m = \lim_{\substack{\Delta \xi \rightarrow 0 \\ \Delta \eta \rightarrow 0}} \frac{\sin \lambda_m \Delta \xi / 2}{\lambda_m \Delta \xi / 2} \lim_{\Delta \eta \rightarrow 0} \frac{sh \lambda_m \Delta \eta / 2}{\lambda_m \Delta \eta / 2} \frac{\sin \lambda_m x \sin \lambda_m \xi}{4 sh b \lambda_m} sh \lambda_m (b-2\eta) = \frac{\sin \lambda_m x \sin \lambda_m \xi}{4 sh b \lambda_m} \times$$

$$\times sh \lambda_m (b-2\eta) \quad (3.4)$$

$$\lim_{\substack{\Delta \xi \rightarrow 0 \\ \Delta \eta \rightarrow 0}} F_m^{(1)} = \lim_{\substack{\Delta \xi \rightarrow 0 \\ \Delta \eta \rightarrow 0}} \frac{\sin \lambda_m \Delta \xi / 2}{\lambda_m \Delta \xi / 2} \lim_{\Delta \eta \rightarrow 0} \frac{sh \lambda_m \Delta \eta / 2}{\lambda_m \Delta \eta / 2} \frac{\sin \lambda_m x \sin \lambda_m \xi}{4 sh b \lambda_m} \times \begin{cases} [-ch \lambda_m (b-y) sh \lambda_m \eta], y > \eta \\ sh \lambda_m (b-\eta) ch \lambda_m y, y < \eta \end{cases} =$$

$$= \frac{\sin \lambda_m x \sin \lambda_m \xi}{4 sh b \lambda_m} \begin{cases} [-ch \lambda_m (b-y) sh \lambda_m \eta], y > \eta \\ sh \lambda_m (b-\eta) ch \lambda_m y, y < \eta \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\lim_{\substack{\Delta \xi \rightarrow 0 \\ \Delta \eta \rightarrow 0}} F_m^{(2)} = \lim_{\substack{\Delta \xi \rightarrow 0 \\ \Delta \eta \rightarrow 0}} \frac{\sin \lambda_m \Delta \xi / 2}{\lambda_m \Delta \xi / 2} \lim_{\Delta \eta \rightarrow 0} \frac{sh \lambda_m \Delta \eta / 2}{\lambda_m \Delta \eta / 2} \frac{\cos \lambda_m x \sin \lambda_m \xi}{4 sh b \lambda_m} \times \begin{cases} [sh \lambda_m \eta sh \lambda_m (b-y)], y > \eta \\ sh \lambda_m (b-\eta) sh \lambda_m y, y < \eta \end{cases} =$$

$$= \frac{\cos \lambda_m x \sin \lambda_m \xi}{4 sh b \lambda_m} \times \begin{cases} [sh \lambda_m \eta sh \lambda_m (b-y)], y > \eta \\ sh \lambda_m (b-\eta) sh \lambda_m y, y < \eta \end{cases} \quad (3.6)$$

Поэтому, в силу теоремы 4 [7] (**n**<sup>0</sup> 433), допустимы предельные переходы под знаками суммирования рядов с конечными пределами их сумм. Отсюда, с учётом (3.4) – (3.6), приходим к результатам:

$$\lim_{\substack{\Delta \xi \rightarrow 0 \\ \Delta \eta \rightarrow 0}} N_y \Big|_{y=\eta} = \frac{4P}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \lim_{\substack{\Delta \xi \rightarrow 0 \\ \Delta \eta \rightarrow 0}} E_m = \frac{P}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_m x \sin \lambda_m \xi}{sh b \lambda_m} sh \lambda_m (b-2\eta) \quad (3.7)$$

$$\lim_{\substack{\Delta \xi \rightarrow 0 \\ \Delta \eta \rightarrow 0}} N_y = \frac{8P}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \lim_{\substack{\Delta \xi \rightarrow 0 \\ \Delta \eta \rightarrow 0}} F_m^{(1)} = \frac{2P}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_m x \sin \lambda_m \xi}{sh b \lambda_m} \times \begin{cases} [-ch \lambda_m (b-y) sh \lambda_m \eta], y > \eta \\ sh \lambda_m (b-\eta) ch \lambda_m y, y < \eta \end{cases} \quad (3.8)$$

$$\lim_{\substack{\Delta \xi \rightarrow 0 \\ \Delta \eta \rightarrow 0}} N_x = \frac{8P}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \lim_{\substack{\Delta \xi \rightarrow 0 \\ \Delta \eta \rightarrow 0}} F_m^{(2)} = \frac{2P}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos \lambda_m x \sin \lambda_m \xi}{sh b \lambda_m} \times \begin{cases} [sh \lambda_m \eta sh \lambda_m (b-y)], y > \eta \\ sh \lambda_m (b-\eta) sh \lambda_m y, y < \eta \end{cases} \quad (3.9)$$

Отметим, что предельные значения (3.8), (3.9) (при  $y \neq \eta$ ) совпадают со значениями перерезывающих сил  $\tilde{N}_x$ ,  $\tilde{N}_y$ , вычисленных подстановкой решения Навье для прогиба данной пластины при сосредоточенной силе  $P$ , приложенной в точке  $(\xi, \eta)$ , в соответственные соотношения классической теории пластин [3], [5]. В точке же  $(\xi, \eta)$  выражение (3.7) принимает конечное значение, что противоречит асимптотическому поведению  $N_r^c \approx -P/(2\pi r)$  радиальной перерезывающей силы в пластине в круговой окрестности радиуса  $r$  с центром в  $(\xi, \eta)$  – точки приложения силы  $P$  [5], [8]. Переставляя в (1.7), (1.10), (2.1), (3.7) – (3.9)  $x$  и  $y$ ,  $a$  и  $b$ ,  $\xi$  и  $\eta$ ,  $\Delta\xi$  и  $\Delta\eta$ , приходим в  $G$  и  $G \setminus \{x = \xi\}$  к конечным пределам величин  $N_x$  и  $N_y$  и их совпадению в области  $G \setminus \{x = \xi\}$  с  $\tilde{N}_x$  и  $\tilde{N}_y$  [6]. Заметим, что  $\tilde{N}_x$  и  $\tilde{N}_y$  удовлетворяют в  $G \setminus (\xi, \eta)$  уравнению равновесия, равносильного уравнению Софи Жермен – Лагранжа [5].

**Выводы:** а) перерезывающие силы по Навье при сосредоточенной нагрузке в области  $G \setminus (\xi, \eta)$  удовлетворяют требуемым условиям, б) конечные значения пределов  $N_x$  и  $N_y$  в точке  $(\xi, \eta)$  – парадокс.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. М.: Мир, 1971. 192с.
2. Сапонджян О.М. Изгиб тонких упругих плит. Ереван: «Айастан», 1975. 436с.
3. Тимошенко С.П., Войновский – Кригер С. Пластинки и оболочки.– Пер. с англ. М.: Физматгиз, 1963. 635с.
4. Сейранян С.П. О парадоксе в поведении крутящего момента в окрестности точки приложения сосредоточенной силы // Актуальные проблемы механики сплошной среды. Ереван: ЕГУАС, 2012. Т.2. С.194 – 198.
5. Сейранян С.П. Об одном решении Навье для частично нагруженной прямоугольной пластины // Математика и механика. Всероссийская конф., посвящ.130-ю ТГУ, г. Томск, 22–25 сентября, 2008, тезисы докл., с.269.
6. Сейранян С.П. Об одном решении Навье для частично нагруженной прямоугольной пластины // Вестник Томского гос. у-нта. Математика и механика. 2009. № 1(5). С.82 –95.
7. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Физматлит, тт. 1–3. 2008. 2272 с.
8. Джанелидзе Г.Ю. Суммирование решения Навье для прямоугольной пластины.//В сб.: «Прикладная математика и механика». М. – Л.: Изд.-во АН СССР. 1939. Т.III. № 4. С.155–162.

#### Сведения об авторе:

Сейранян Сурен Паруйрович – к.ф.м.н., с.н.с. Института механики НАН РА.  
Тел.: (374 55) 542838, E- mail: [seysuren@mail.ru](mailto:seysuren@mail.ru).

# ЗАДАЧА О ПОПЕРЕЧНОЙ ВНУТРЕННЕЙ ТРЕЩИНЕ В СОСТАВНОЙ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

*Соболь Б.В., Рашидова Е.В., Борисова Е.В.*

*Россия*

Рассмотрена задача о концентрации напряжений в окрестности вершины трещины конечной длины, расположенной перпендикулярно к границе раздела двух упругих тел – полуплоскости и полосы. Использование метода обобщённых интегральных преобразований позволило свести задачу к решению сингулярного интегрального уравнения первого рода с ядром Коши. Рассмотрены предельные случаи задачи, когда толщина полосы относительно мала, равна нулю (свободная полуплоскость) и, наоборот, бесконечно велика. Решение интегрального уравнения построено методом коллокации. С целью повышения эффективности численного метода, использовано приближение регулярной части ядра в специальной форме. Получены значения коэффициента интенсивности нормальных напряжений в окрестности вершины трещины для различных комбинаций геометрических и физических параметров задачи.

**Введение.** Изучение влияния трещин на прочность деталей машин из современных материалов представляется весьма актуальным. К таким материалам, в частности, относятся армированные, композитные материалы, металлокерамика и многие другие биматериалы. Широкое распространение в технике получили также детали с покрытиями, улучшающими их механические и физико-химические свойства. Особый теоретический и практический интерес представляют задачи об изучении концентрации напряжений в окрестности трещин, находящихся вблизи границы раздела материалов, выходящих на границу или пересекающих её. В задачах о трещинах в составных упругих телах оптимальным выбором геометрических и физических параметров иногда можно добиться уменьшения коэффициента интенсивности напряжений (КИН) и, тем самым, предотвратить их распространение.

**Постановка задачи.** Полуплоскость  $-\infty < x < \infty$ ,  $y \leq 0$  ослаблена прямолинейной поперечной трещиной длины  $2a$ , расположенной на расстоянии  $d$  от границы перпендикулярно к ней. В направлении, перпендикулярном к линии трещины, приложены нормальные растягивающие усилия, обеспечивающие её раскрытие. Граница полуплоскости подкреплена упругой полосой, занимающей область  $-\infty < x < \infty$ ,  $0 \leq y \leq h$ . Верхняя граница полосы свободна от напряжений.

Применим интегральное преобразование Фурье по  $x$  к уравнениям равновесия в перемещениях для случая плоской деформации.

Метод разрывных решений приводит уравнения равновесия в перемещениях к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений относительно трансформант Фурье вектора перемещений  $U$  и  $V$  в каждой из рассматриваемых областей. Общее решение этих уравнений в полосе имеет традиционный вид [1]. В полуплоскости следует учесть скачки компонент вектора перемещений:

$$\begin{aligned} 2(1-\nu)\alpha^2 U - (1-2\nu)U_y'' + i\alpha V_y' &= -2i(1-\nu)\alpha\chi(y), \\ (1-2\nu)\alpha^2 V - 2(1-\nu)V_y'' + i\alpha U_y' &= -2\nu\chi'(y). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\chi(y) = u(x, y)|_{-0}^{+0}$  – скачок компоненты вектора перемещений на берегах трещины, подлежащий определению в дальнейшем. Граничные условия и условия сопряжения задачи в терминах трансформант Фурье имеют вид:

$$\begin{aligned} \text{при } y = h: \quad & \Sigma_y^{(1)} = 0, \quad T_{xy}^{(1)} = 0, \\ \text{при } y = 0: \quad & U^{(1)} = U^{(2)}, \quad V^{(1)} = V^{(2)}, \quad T_{xy}^{(1)} = T_{xy}^{(2)}, \quad \Sigma_y^{(1)} = \Sigma_y^{(2)}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $T_{xy}^{(j)} = G_j \left( \frac{\partial U^{(j)}}{\partial y} - i\alpha V^{(j)} \right)$ ,  $\Sigma_y^{(j)} = \frac{2G_j}{1-\nu_j} \left( (1-\nu_j) \frac{\partial V^{(j)}}{\partial y} - i\alpha \nu_j U^{(j)} \right)$ ,  $G_j$  и  $\nu_j$  – модуль сдвига и коэффициент Пуассона материалов,  $j = 1, 2$ .

Значения индекса соответствуют полосе ( $j = 1$ ) и полуплоскости ( $j = 2$ ). В силу линейности задачи, будем считать распределённые напряжения, раскрывающие трещину, приложенными к её берегам, интенсивности  $-p(y)$ . На бесконечности реализуются условия затухания компонент вектора перемещений и тензора напряжений.

**Интегральное уравнение.** В результате решения задачи (1,2), получаем в полуплоскости, содержащей трещину, общее решение. Две из шести постоянных, определяемых из условий (2), входят в это решение и интегрально зависят от функции скачка перемещений:

$$c_1 = i \int_{-d-a}^{-d+a} \chi(\eta) e^{\eta|\alpha|} F_1(\eta, \alpha) d\eta, \quad c_2 = i \int_{-d-a}^{-d+a} \chi(\eta) e^{\eta|\alpha|} F_2(\eta, \alpha) d\eta \quad (3)$$

Ядрами в этих интегральных представлениях фигурируют функции  $F_1(\eta, \alpha)$  и  $F_2(\eta, \alpha)$  – выражения, зависящие от упругих параметров двух сред. Ввиду громоздкости аналитических представлений этих функций они здесь не приводятся и представлены в графическом виде (рис.2) при фиксированном значении  $\eta$ .

Проведён асимптотический анализ этих кривых на бесконечности, который показал, что чем больше значение параметра  $h$  (ширина полосы), тем графики ближе к соответствующим асимптотам (отмечены цифрой 2 на рис.1), и при  $h \rightarrow \infty$  совпадают с ними. Данные асимптоты соответствуют решению задачи о составной упругой плоскости с трещиной, перпендикулярной к границе раздела материалов, и в этом случае представляется возможным получить аналитические зависимости их параметров от упругих констант материалов.

При малом значении относительной толщины полосы  $h/a$  графики имеют более выраженное отклонение от асимптот вблизи точки  $\alpha = 0$ , причем, выпуклость функций выходит на прямые (отмечены цифрой 1 на рис.1), которые, в свою очередь, соответствуют случаю полуплоскости со свободной границей ( $h = 0$ ), ослабленной поперечной внутренней трещиной.

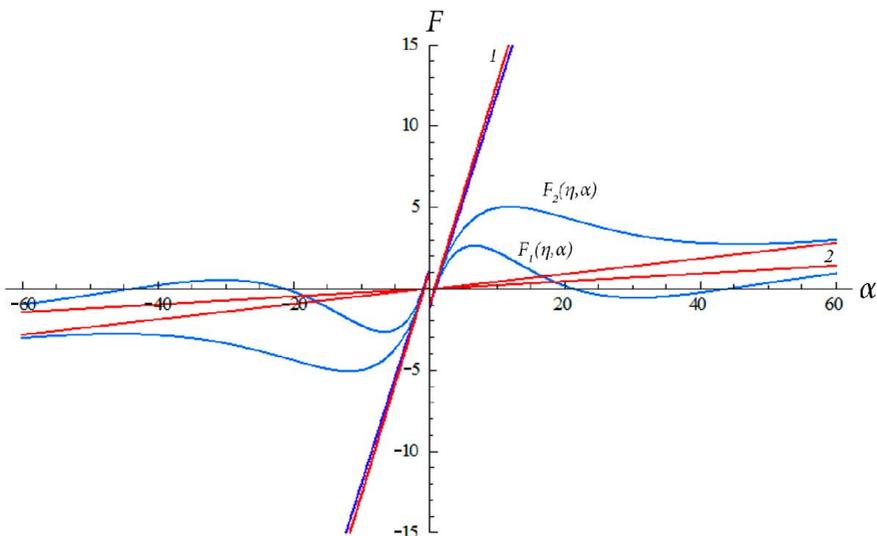


Рис. 1. Графики функций  $F_1(\eta, \alpha), F_2(\eta, \alpha), \eta = const$

Таким образом, в результате проведённого асимптотического анализа указанных выше функций, найдены два предельных случая их аналитического представления (при  $h = 0$  и  $h \rightarrow \infty$ ). Это, соответственно, случай полуплоскости со свободной границей, ослабленной поперечной внутренней трещиной и задача о поперечной трещине вблизи границы раздела двух упругих сред.

Возвращаясь к терминам оригиналов Фурье и удовлетворяя условиям на берегах трещины, получаем сингулярное интегральное уравнение первого рода с ядром Коши для определения производной скачка перемещений на берегах трещины.

Определим следующие переменные и функции, позволяющие свести интегральное уравнение к безразмерному виду:

$$\lambda = \frac{a}{d}, \quad \zeta = \frac{\eta + d}{a}, \quad z = \frac{y + d}{a}, \quad g'(\zeta) = \chi'(a\zeta - d), \quad f(z) = \frac{2(1 - \nu_2)}{G_2} p(az - d).$$

$$\int_{-1}^1 g'(\zeta) \left[ \frac{1}{z - \zeta} + \lambda L(\zeta, z) \right] d\zeta = -\pi f(z), \quad (4)$$

где

$$L(\zeta, z) = \frac{ka(-1+z\lambda)(-4+z\lambda+3\zeta\lambda)+(-2+z\lambda+\zeta\lambda)(kb(-1+z\lambda)+kc(-2+z\lambda+\zeta\lambda)+kd(-3+z\lambda+2\zeta\lambda))}{(-2+z\lambda+\zeta\lambda)^3},$$

$ka, kb, kc, kd$  – коэффициенты ядра, получаемые в результате аппроксимации методом наименьших квадратов регулярной части ядра в трансформантах Фурье. В качестве аппроксимирующей функции принята структура с неопределёнными коэффициентами, аналогичная соответствующей функции для предельного случая при  $h \rightarrow \infty$ , допускающего относительно компактное аналитическое представление. Непосредственный асимптотический и

численный анализ подтверждает, что принятая аппроксимация представляется весьма удачной.

**Результаты.** Построим решение интегрального уравнения (3) методом коллокации в виде линейной комбинации базисных функций, явно учитывающих особенность в окрестности края трещины [2]. Зная  $g'(z)$ , легко установить значение коэффициента интенсивности нормальных напряжений в окрестности вершин трещины:

$$K_I = - \lim_{z \rightarrow 1-0} [\theta_p \sqrt{2\pi(1-z)} g'(z)] \quad (5)$$

Поскольку данная задача содержит большое количество геометрических и физических параметров, приведём, в качестве иллюстрации, лишь некоторые численные результаты, которые не претендуют на полноту и носят иллюстративный характер.

На рис.2 (a, b) приведены графики зависимости фактора влияния  $N(I)$  (приведённого коэффициента интенсивности нормальных напряжений) от параметра  $\lambda$ , характеризующего относительное расстояние трещины до границы раздела.  $N(I) = K_I / K_{I\infty}$ , где  $K_{I\infty}$  – соответствующая величина в классическом случае. В обоих рассмотренных случаях материал подложки – конструкционная сталь. Материал накладки, соответственно, вольфрам (a) и алюминий (b). Здесь же, для сравнения, приведены результаты для случаев свободной границы полуплоскости с трещиной, и верхняя часть составного

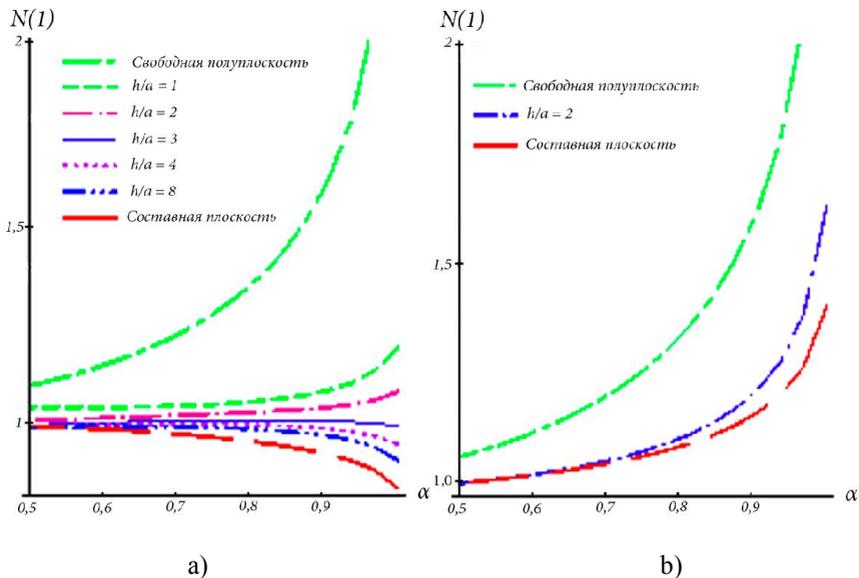


Рис.2. Фактор влияния для случаев более жёсткого (a) и более мягкого (b) покрытий.

тела занимает всю полуплоскость (толщина покрытия равна нулю или бесконечно велика).

Сравнение этих данных показывает, что более мягкие накладки сдерживают рост коэффициента интенсивности напряжений, по сравнению со случаем свободной границы, а более жёсткие – и вовсе, приводят к его снижению. Вместе с этим, при достаточно тонкой накладке, даже более жёсткой, при малых относительных расстояниях между трещиной и границей, КИН растёт (рис.3). Выявленный эффект, а также другие результаты данного исследования, для случаев тонких покрытий, хорошо согласуются с результатами, полученными ранее в работе [3].

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 14-08-00142\_а.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками / В.М. Александров, С.М. Мхитарян. М.: Наука, 1983. 488с.
2. Александров В.М. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. / В.М. Александров, Б.И. Сметанин, Б.В. Соболев М.: Физматлит, 1993. 224с.
3. Соболев Б.В. Исследование влияния тонкой накладки на коэффициент интенсивности напряжений в задачах о поперечной трещине в полуплоскости и полосе /Б.В.Соболев, А.А.Краснощеков //Вестник ДГТУ. 2013. № 5/6(74). С.25-35.

#### Сведения об авторах:

**Соболев Борис Владимирович**, профессор +7(863)2738341 b.sobol@mail.ru

**Рашидова Елена Викторовна**, доцент +7(988)9489551 el.rash@mail.ru

**Борисова Екатерина Викторовна**, +7(918)5941220 brkate1@rambler.ru

# НЕКЛАССИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ИЗГИБА БАЛКИ ЛИНЕЙНО-ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ ПРИ НАЛИЧИИ УПРУГО-ЗАЩЕMLЁННОЙ ОПОРЫ

Степанян С.П.

Армения

Рассматриваются две задачи изгиба ортотропной балки линейно-переменной толщины. В одном случае оба края балки имеют упруго-защелённую опору. Во втором случае, левый край балки упруго защелён, а другой край жёстко защелён. Показывается, что из условия упруго-защелённой опоры, изменением параметров можно получить как условия шарнирного опирания, так и свободного конца.

1. Рассмотрим ортотропную балку прямоугольного поперечного сечения  $b \times h$ , ширина которой постоянна, а толщина линейно меняется в длину по следующему закону:

$$h = h_0 + h_1 x \quad (1.1)$$

Здесь  $h_0$  и  $h_1$  – заданные постоянные величины, а  $x$  – расстояние от левого края балки (фиг.1).

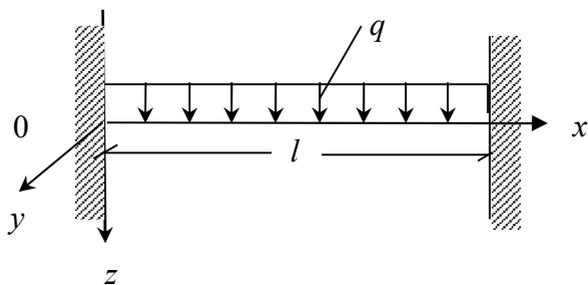


Рис.1

Балка находится под действием равномерно распределённой нагрузки интенсивности  $qH / m^2$ .

Как известно, разрешающие дифференциальные уравнения задачи поперечного изгиба рассматриваемой балки в рамках уточнённой теории [1], учитывающей влияние деформаций поперечных сдвигов, имеют вид:

$$2h \frac{d\varphi}{dx} + 4\varphi \frac{dh}{dx} = -3q \quad (1.2)$$

$$Eh^2 \frac{d^3w}{dx^3} + 2Eh \frac{d^2w}{dx^2} \frac{dh}{dx} - Ea_{55}h^2 \frac{d^2\varphi}{dx^2} - 2Ea_{55}h \frac{dh}{dx} \frac{d\varphi}{dx} + 8\varphi = 0.$$

Здесь  $E$  – модуль Юнга материала по направлению оси  $Ox$ ,  $\varphi$  – искомая функция, определяющая перерезывающую силу  $N_x$ ,  $a_{55}$  – упругая постоянная, связывающая деформацию поперечного сдвига и касательное напряжение балки в плоскости  $yOz$  [1].

Пользуясь [2], для крайевых условий первой задачи, когда оба края балки имеют упруго-защемлённую опору, можно написать:

$$\text{при } x = 0 \quad w = a \frac{dw}{dx} + BN_x, \quad \frac{dw}{dx} = D(aN_x - M_x) \quad (1.3)$$

Так как при  $x = l$   $w > 0$ ,  $\frac{dw}{dx} < 0$ ,  $N_x < 0$ ,  $M_x < 0$ , то получается:

$$w = -a \frac{dw}{dx} - BN_x, \quad \frac{dw}{dx} = D(aN_x + M_x).$$

Для второй задачи, когда левый край балки упруго защемлён, а другой конец жёстко защемлён, получим:

при  $x = 0$

$$w = a \frac{dw}{dx} + BN_x, \quad \frac{dw}{dx} = D(aN_x - M_x), \quad (1.4)$$

а при  $x = l$ , если некоторая часть правого края балки вставлена в абсолютно недеформируемый массив, образуя жёсткое защемление, то условиями этого края будут:

$$w = 0, \quad \frac{dw}{dx} = 0. \quad (1.5)$$

Введём новые безразмерные обозначения:

$$x = \bar{l}x, \quad l = nh_0, \quad h = h_0H, \quad H = 1 + \gamma\bar{x}, \quad \gamma = nh_1, \quad w = h_0\bar{w}, \quad q = E\bar{q},$$

$$a_{55}E = \chi, \quad \varphi = E\bar{\varphi}, \quad N_x = Eh_0^2\bar{N}, \quad M_x = Eh_0^3\bar{M}, \quad B = \frac{\bar{B}}{Eh_0}, \quad D = \frac{\bar{D}}{Eh_0^3}, \quad (1.6)$$

$$b = kh_0, \quad a = ml$$

и в результате, дифференциальные уравнения (1.2) и условия (1.4) - (1.5) примут вид:

$$2H \frac{d\bar{\phi}}{d\bar{x}} + 4\gamma\bar{\phi} = -3n\bar{q} \quad (1.7)$$

$$H^2 \frac{d^3\bar{w}}{d\bar{x}^3} + 2\gamma H \frac{d^2\bar{w}}{d\bar{x}^2} - \chi n H^2 \frac{d^2\bar{\phi}}{d\bar{x}^2} - 2\chi\gamma n H \frac{d\bar{\phi}}{d\bar{x}} + 8n^3\bar{\phi} = 0.$$

Для второй задачи:

при  $\bar{x} = 0$

$$\bar{w} = m \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} + \bar{B}\bar{N}, \quad \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} = n\bar{D}(mn\bar{N} - \bar{M}), \quad (1.8)$$

при  $\bar{x} = 1$

$$\bar{w} = 0, \quad \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} = 0. \quad (1.9)$$

С помощью обозначений (1.6), на основе [1] для безразмерного усилия и изгибающего момента получим следующие выражения:

$$\bar{N} = \frac{kH}{12n^3} \left[ 8n^3\bar{\phi} - \gamma H \left( \frac{d^2\bar{w}}{d\bar{x}^2} - n\chi \frac{d\bar{\phi}}{d\bar{x}} \right) \right] \quad (1.10)$$

$$\bar{M} = -\frac{kH^3}{12n^2} \left( \frac{d^2\bar{w}}{d\bar{x}^2} - n\chi \frac{d\bar{\phi}}{d\bar{x}} \right). \quad (1.11)$$

Для решения задачи искомые функции представим в виде степенных многочленов:

$$\bar{w} = a_0 + \sum_{i=1}^j a_i \bar{x}^i, \quad \bar{\phi} = b_0 + \sum_{i=1}^j b_i \bar{x}^i \quad (1.12)$$

Разделив интервал  $0 \leq \bar{x} \leq 1$  на  $j$  частей и записывая уравнения (1.7) для  $j-1$  внутренних точек и удовлетворив в точках  $\bar{x} = 0$ ,  $\bar{x} = 1$  крайвым условиям (1.8) и (1.9), для второй задачи получим систему алгебраических уравнений относительно  $2(j+1)$  неизвестных. В процессе вычисления число многочленов (1.12) увеличим настолько, чтобы добиться практической стабилизации полученных решений. Расчёты удобно делать, считая  $\bar{q} = 1$  и получить значения величин  $\bar{w}/\bar{q}$ ,  $\bar{\phi}/\bar{q}$ ,  $\bar{N}/\bar{q}$  и  $\bar{M}/\bar{q}$ . В силу линейности

задачи в конкретном случае можно эти значения умножить на соответствующее значение  $\bar{q}$  и получить решение для этого случая.

Расчёты выполнены при следующих значениях параметров:

$$n = 8, m = 1/16, k = 0.5, \gamma = 1$$

$$\bar{B} = 0.5; 1; 2; (\bar{D} = 12\bar{B}); \chi = 0; 5; 8 \quad (1.13)$$

однако, результаты приведены только для второй задачи, т.е. когда один конец балки упруго зашкремлён, а другой конец жёстко зашкремлён.

Процесс сходимости определения значений  $\bar{w}/\bar{q}$  показан в табл.1 при  $\bar{B} = 1; \chi = 8; \gamma = 1$ .

Таблица 1

j	0	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.0
	B=1 k=0.5 γ=1	14.99	38.35	68.13	60.41	30.82	4.39
9	14.94	38.29	67.94	60.01	30.52	4.29	0
10	14.95	38.34	68.07	60.25	30.63	4.32	0
11	14.94	38.34	68.05	60.22	30.60	4.31	0
12	14.94	38.34	68.06	60.23	30.61	4.32	0

На рис.2÷5 приведены графики изменения по длине балки величин  $\bar{w}/\bar{q}$ ,  $\bar{\varphi}/\bar{q}$ ,  $\bar{N}/\bar{q}$  и  $\bar{M}/\bar{q}$  при  $B = 0.5$  для классического случая  $\chi = 0$  и для случаев учёта влияния поперечного сдвига  $\chi = 5$  и  $\chi = 8$ .

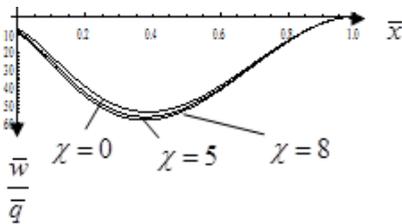


Рис. 2

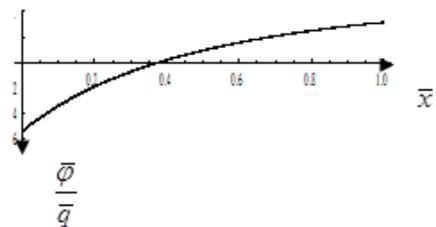


Рис. 3

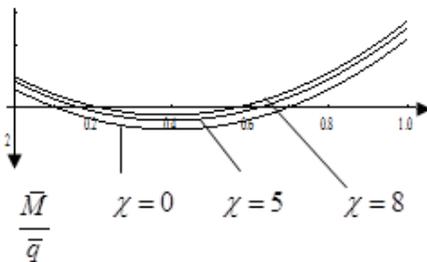


Рис. 4

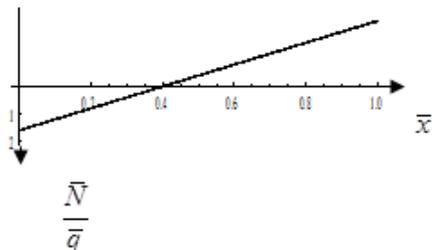


Рис. 5

Анализируя полученные результаты, получим, что при возрастании  $\chi$  прогибы балки увеличиваются, но это не влияет на графики  $\frac{\bar{N}}{\bar{q}}$  и  $\frac{\bar{\varphi}}{\bar{q}}$ .

Увеличение значений параметров  $B$  и  $D$  приводит к увеличению прогибов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Киракосян Р.М. Прикладная теория ортотропных пластин переменной толщины, учитывающая влияние деформаций поперечных сдвигов. Ереван: Гитутюн, 2000. 122с.
2. Киракосян Р.М. Неклассическая задача изгиба ортотропной балки с упруго-зашемленной опорой. //Докл.НАН Армении. 2014. Т.114. №2. С.101-107.

#### Сведения об авторе:

**Степанян Сейран Павлович** – канд.физ.-мат. наук, доцент кафедры численного анализа и мат. моделирования факультета информатики и прикладной математики Ереванского гос.университета.

**Адрес:** 0025, Ереван, ул. Алека Манукяна, 1

**Тел.:** (+37410) 55-90-96.

**E-mail:** [seyranstep@yahoo.com](mailto:seyranstep@yahoo.com), **E-mail:** [seyran.stepanyan@ysu.am](mailto:seyran.stepanyan@ysu.am)

# ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛООВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ, РАСПРОСТРАНЯЮЩЕЙСЯ В ОБРАЗЦАХ ПММА ПРИ КВАЗИСТАТИЧЕСКОМ РАСТЯЖЕНИИ

*Судьенков Ю.В., Зимин Б.А., Свентицкая В.Е.*

*Россия*

В работе представлены результаты экспериментальных исследований теплового излучения при распространении трещины при квазистатических испытаниях образцов из ПММА.

Одной из ключевых проблем динамики разрушения, требующей дальнейшего изучения является характер процесса распространения начальной трещины. До некоторого предела трещина оказывается зеркально гладкой, при некоторой критической скорости становится шероховатой, а при дальнейшем росте скорости начинает ветвиться.

Построить исчерпывающую теорию распространения трещин в твёрдых материалах пытаются уже давно. Однако, ряд важных эффектов, которые проявляются в экспериментах, ускользает от теоретического описания. Один из таких эффектов - изменение формы трещины в хрупком материале при увеличении скорости её распространения.

В настоящей работе представлены результаты, полученные в развитии исследований указанной проблемы, результаты которых представлены в работах [1]. Эти результаты продемонстрировали нестабильное поведение трещины в пластинах из ПММА, как при квазистатических (рис.1), так и импульсных воздействиях. Все исследования проводились на образцах из полиметилметакрилата с плотностью  $\rho = 1180 \text{ kg/m}^3$ , продольной скоростью звука  $C_L = 2750 \pm 25 \text{ m/s}$ , поперечной скоростью звука  $C_{TR} = 1400 \pm 25 \text{ m/s}$ , модулем упругости  $E = 5.9 \text{ GPa}$ . В квазистатических испытаниях на растяжение использовались плоские гантелеобразные образцы с размерами рабочей части  $90 \times 37 \times 3 \text{ mm}$ .

Регистрация движения трещины осуществлялась стрик-камерой K008 по методу щелевой развертки изображения. Синхронизация камеры производилась сигналом с фотоприемника, регистрирующего изменение интенсивности излучения полупроводникового лазера при старте и распространении трещины.

Скорость движения фронта трещины, полученная дифференцированием траектории, демонстрирует два характерных участка (рис.1а). Первый участок соответствует плавному росту скорости фронта трещины. Резкая смена такого характера изменения скорости трещины на нестабильный - скачкообразный, соответствует началу второго участка. Средняя скорость распространения трещины не превышала  $0.44C_R$ , но на скачках могла приближаться к скорости волны Рэлея. Осцилляции фронта трещины коррелируют с изменением профиля поверхности разрушения (рис.1б), а критическая скорость перехода на нестабильный режим  $V_c \cong 0.36C_R$ . Начало



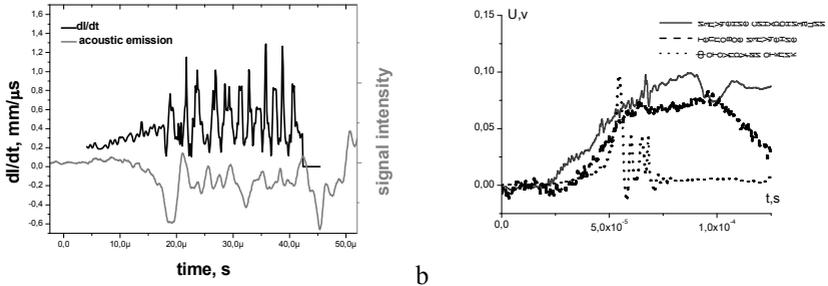


Рис.2. Скорость распространения трещины и сигнал акустической эмиссии-а; сигналы фотоприёмника излучения синхронизации старта трещины, ИК-датчика измерения теплового излучения и сигнал фотоупругого эффекта.

На рис.3 представлены результаты спектрального анализа измеряемых в экспериментах сигналов – временной зависимости скорости распространения трещины (рис.3а), сигнала акустической эмиссии(рис.3б) и изменения температуры вершины трещины (рис.3с).

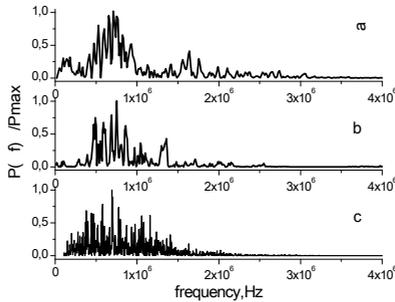


Рис.3. Нормированные зависимости спектральной мощности временной зависимости скорости распространения трещины-а; сигнала акустической эмиссии-б; изменения температур вершины трещины -с.

Очевидна корреляция спектров всех измеряемых независимыми методами различных по природе физических сигналов отклика материала на процесс разрушения. Максимумы спектральной мощности этих сигналов находятся в диапазоне частот 600÷700 кГц.

Имеется несколько моделей, объясняющих поведение скорости трещины от энергии разрушения [2-4]. Не вызывает сомнения, что динамика развития трещины связана с зоной предразрушения перед фронтом магистральной

трещины - зоной пластического течения и/или микроповреждений, возникающих на траектории движения магистральной трещины за счёт интенсивных полей напряжений в её вершине. Увеличение потока энергии в кончике трещины вызывает увеличение числа микроповреждений, а взаимодействие нестационарных полей напряжений микроразрушений и полем напряжений, формируемым фронтом магистральной трещины приводит динамической неустойчивости движущейся трещины.

Таким образом, колебания скорости трещины пропорциональны потоку энергии в её вершине, то есть являются результатом динамического переноса энергии между магистральной трещиной и локальными микроразрушениями, что подтверждается характером теплового излучения и акустической эмиссии.

В экспериментах с ПММА наблюдаются три зоны излома - зеркальная, матовая и ступенчатая (рис.1). Зеркальная зона соответствует медленному флуктуационному подрастанию трещины. Переход от зеркальной к матовой совершается при скорости  $V_c \cong 0.36C_R$ . Пока скорость трещины мала, тепло, возникающее при деформации в вершине трещины, успевает отводиться во вне и движение трещины является изотермическим. ИК-излучение на графике рис.2b практически отсутствует до времени порядка  $30\mu s$  от момента старта трещины. По мере роста скорости трещины, выделяющееся тепло не успевает отводиться и происходит переход к адиабатическому движению трещины. При адиабатическом деформировании приращение температуры  $\Delta T$  определяется [5]:

$$\Delta T = \frac{T}{\rho c_\varepsilon} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right)_\varepsilon \varepsilon \quad (1)$$

где  $\rho$  – плотность материала,  $c_\varepsilon$  – теплоёмкость,  $\sigma$  – напряжение  $\varepsilon$  – деформация.

В зоне предразрушения поведение материала в одномерном случае можно описать моделью Кельвина:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} + \varepsilon_\infty (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (2)$$

где  $E$  – модуль Юнга,  $\sigma_0$  – приложенное напряжение,  $\varepsilon_\infty$  – равновесное значение деформации, равное  $\varepsilon_\infty = \frac{\tau}{\eta} \sigma_0$ ,  $\tau$  – время релаксации,  $\eta$  – коэффициент вязкости.

Подставив (2) в (1), получим оценку поведения температуры во времени, которая качественно удовлетворительно описывает экспериментальную кривую теплового излучения (рис.2b):

$$\Delta T \approx \frac{T}{\rho c_\varepsilon} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right) \left( \frac{\sigma_0}{E} + \frac{\tau}{\eta} \sigma_0 \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \right). \quad (3)$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Смирнова И.В., Судьенков Ю.В. Исследование динамики трещин в пластинах полиметилметакрилата при квазистатических и динамических нагрузках. // ЖТФ. 2011. Т.81. Вып.12. С.114-117.
2. A.K.Pratt and P.L.Green, Eng. Fract. Mech, 6, 71 (1974).
3. L.V.Freund, Dynamic Fracture Mechanics. Cambridge University Press., New York, 1990 p.55
4. K.Ravi-Chandar and W.G.Knauss, Int. J. Fract., 26, 141 (1984)Л
5. В.Ф.Ноздрёв, Н.В.Федорищенко, Молекулярная акустика. М.: «Высшая школа», 1974. 288 с.

### Информация об авторах

#### **Судьенков Юрий Васильевич,**

Старший научный сотрудник, кандидат физико-математических наук, Санкт-Петербургский государственный университет

**Телефон:** +7-812-4286989

**E-mail:** [sudenkov@land.ru](mailto:sudenkov@land.ru)

#### **Зимин Борис Александрович,**

Старший научный сотрудник, кандидат физико-математических наук, Санкт-Петербургский государственный университет

**Телефон:** +7-812-4286989

#### **Свентицкая Вера Евгеньевна,**

Аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет

**Телефон:** +7-812-4286989

# КОЛЕБАНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО УПРУГОГО КРЫЛА В ПОТОКЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

*Сумбатян М.А., Тарасов А.Е.*

*Россия*

В настоящей работе в линейной постановке проводится исследование гармонических колебаний машущего прямоугольного упругого крыла в стационарном потоке жидкости. Задача сводится к решению интегро-дифференциального уравнения. На основе линейной теории определяется сила тяги крыла.

Рассмотрим вынужденные колебания тонкого упругого крыла в однородном на бесконечности потоке идеальной несжимаемой жидкости, набегающем вдоль оси  $x$ . Предположим, что крыло слабоизогнутое и имеет прямоугольную форму в плане. Крыло представляет собой упругую балку длиной  $l$  с размахом вдоль оси  $y$ , специальным образом закреплённую при  $y = 0$ . Балка имеет постоянную изгибную жёсткость  $EJ$  и линейную плотность  $m$ . На балку жёстко насажены прямолинейные недеформируемые хорды длиной  $2c$ . Балка может только изгибаться. Скорость набегающего потока равна  $U$ .

Предполагая малость вносимых крылом в поток возмущений, решаем задачу в линейной постановке. Тогда все параметры потока можно считать подчиняющимися гармоническому по времени закону:

$$\tilde{A}(x, y, z, t) = \operatorname{Re}(A(x, y, z)e^{i\omega t}).$$

Пусть  $z = \tilde{W}(y, t) = \operatorname{Re}(W(y)e^{i\omega t})$  – функция колебания крыла,  $\omega$  – круговая частота колебаний. Будем считать, что на оси крепления  $x$  (при  $y = 0$ ) балку вынуждают гармонически колебаться с амплитудой вертикального перемещения  $W_0$  и амплитудой угла  $W_*$ , при этом,  $\chi$  – сдвиг фаз угловых колебаний относительно вертикальных. Остальные кромки крыла (при  $y = l$  и  $x = \pm c$ ) свободны от усилий.

Для упругого крыла закон колебания определяется из динамического уравнения изгиба балки [1]

$$EJ \frac{d^4 W}{dy^4} - m\omega^2 W = Z(y), \quad (1)$$

где  $Z(y)$  – распределённая вдоль крыла нагрузка, равная разности давлений жидкости на нижнюю и верхнюю стороны крыла, при этом, давление на крыло в сечении  $y$  берётся как суммарная величина по всей хорде, закреплённой в данном сечении.

Граничные условия имеют вид

$$W(y) = W_0, \quad \frac{dW}{dy}(y) = W_* e^{ix}, \quad y = 0$$

$$\frac{d^2 W}{dy^2}(y) = \frac{d^3 W}{dy^3}(y) = 0, \quad y = l$$
(2)

Гидродинамическую часть задачи решаем в рамках гипотезы плоских сечений, т.е. поток при каждом фиксированном  $y$  определяется как решение плоской задачи в плоскости  $(x, z)$  [2,3]. При этом, потенциал скоростей  $\tilde{\varphi}(x, z, t)$  удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial z^2} = 0$$
(3)

Гидродинамическое давление  $\tilde{p}$ , которое испытывает крыло со стороны жидкости, связано с потенциалом  $\tilde{\varphi}$  линейризованным интегралом Лагранжа-Коши

$$\tilde{p} + \rho \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} + \rho U \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x} = 0 \quad \sim \quad p + i\omega \rho \varphi + \rho U \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$
(4)

Здесь  $\rho$  – плотность жидкости.

Условие непроницаания на крыле подразумевает

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial z} = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{W}}{\partial x}, \quad \sim \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = i\omega W + U \frac{\partial W}{\partial x} \quad (z = 0, |x| < c)$$
(5)

При  $x \rightarrow -\infty$  должно выполняться условие отсутствия возмущений вдали от крыла, такое же условие должно выполняться при  $z \rightarrow \pm\infty$ :

$$\varphi \rightarrow 0, \quad x \rightarrow -\infty, \quad z \rightarrow \pm\infty$$
(6)

Заметим, что потенциал не обязан исчезать при  $x \rightarrow +\infty$ , где вдали за крылом могут образовываться вихри, сносимые с крыла вниз по потоку.

Давление и нормальная компонента скорости вне крыла непрерывны, следовательно,

$$p_- = p_+, \quad \frac{\partial \varphi_-}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_+}{\partial z}, \quad (z = 0, |x| > c)$$
(7)

здесь со знаком «минус» обозначена область снизу от крыла (при  $z = -0$ ), а со знаком «плюс» – сверху от крыла (при  $z = +0$ ).

Применяя преобразование Фурье по переменной  $x$ , сведём задачу (1)–(7) к интегральному уравнению, связывающему неизвестные функции  $g(x, y)$  и

$W(y)$ . В полученных уравнениях введём безразмерные переменные:

$$\frac{1}{4\pi i\rho U^2} \int_{-1}^1 g(\xi, y) K(\xi - x) d\xi = DW(y), \quad |x| \leq 1 \quad (8)$$

$$K(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|s|}{(s - \nu)} e^{is\eta} ds - i\pi\nu e^{i\nu\eta}; \quad g(x, y) = p(x, y, +0)$$

где  $\nu = \omega c/U$  — число Струхаля,  $D = i\nu + \frac{\partial}{\partial x}$ . Заметим, что особенность  $(s - \nu)$  в знаменателе (8) подразумевает, что интеграл по переменной  $s$  должен пониматься в смысле главного значения по Коши.

Чтобы устранить особенность в знаменателе интеграла в выражении для ядра, применим к уравнению (8) оператор  $D$  и проинтегрируем по  $x$ .

$$\frac{1}{4\pi i\rho U^2} \int_{-1}^1 g(\xi, y) \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(s) e^{is(\xi-x)} ds d\xi = F(x, y) \quad (9)$$

$$F(x, y) = \int D^2 W(y) dx + B(y)$$

Из условия Кутта-Жуковского [3] следует, что на передней кромке давление обращается в бесконечность порядка  $1/\sqrt{1+x}$ ,  $x \rightarrow -1$ , а на задней — в ноль порядка  $\sqrt{1-x}$ ,  $x \rightarrow 1$ . Поэтому решение целесообразно искать в виде разложения в ряд по некоторой полной ортогональной системе функций

$$g(\xi, y) = \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} g_k(y) P_k^{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}(\xi) \quad (10)$$

где  $g_k(y)$  — неизвестные коэффициенты разложения.

Умножим уравнение (9) на  $\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} P_n^{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}(x)$ ,  $n = 0, 1, \dots$  и

проинтегрируем по  $x \in (-1, 1)$ . Подставим (10) в (9) и, интегрируя по  $\xi$ , получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\frac{\pi}{4\rho i U^2} \sum_{k=0}^{\infty} g_k(y) i^{k+n} I_{nk} = F_n(x, y), \quad n = 0, 1, \dots$$

$$I_{nk} = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(s)[J_k(s) - iJ_{k+1}(s)][J_n(s) - iJ_{n+1}(s)]ds \quad (11)$$

$$F_n(x, y) = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} P_n^{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(x) F(x, y) dx$$

Детальный анализ показывает [4], что интеграл  $I_{nk}$  в (11) отличен от нуля лишь при  $n = k$ , при этом,  $I_{nn} = -2i$ . Это значит, что на самом деле система (11) распадается на независимые уравнения:

$$g_k(y) = -\frac{2\rho U^2}{\pi} (-1)^n F_n(y), \quad n = 0, 1, \dots \quad (12)$$

$$F(x, y) = -v^2 x W(y) + B(y)$$

Здесь среди всех функций  $F_n(y)$  одну, а именно  $F_0(y)$ , определить не удастся. Это связано с наличием неизвестной константы  $B(y)$ . Следовательно, не может быть найдена из уравнения (12) и функция  $g_0(y)$ . В силу ортогональности полиномов Якоби,  $F_n(y) \equiv 0$  при  $n \geq 2$ , а следовательно, и  $g_n(y) \equiv 0$  при  $n \geq 2$ . Для нахождения функции  $g_0(y)$  подставим ряд (10) в исходное уравнение (8) при  $x = 0$ . В результате преобразований найдём представление функций  $g_0(y)$  и  $g_1(y)$ :

$$g_0(y) = -2v\rho U^2 W(y) \left[ \frac{v}{2} i + \frac{2i}{h_0(v)} + C(v) \right] \quad (13)$$

$$g_1(y) = -i\rho U^2 v^2 W(y), \quad g_n(y) \equiv 0, \quad n \geq 2$$

где  $C(v) = H_1^{(2)}(v) / (H_1^{(2)}(v) + iH_0^{(2)}(v))$  – функция Теодорсена,  $H_i^{(2)}(v)$  – функции Ганкеля второго рода,  $h_0(v) = -i\pi v (H_1^{(2)}(v) + iH_0^{(2)}(v))$ .

Для нахождения функции колебания крыла, необходимо привлечь уравнение колебания (1), в котором для нашего случая

$$Z(y) = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} 2g_0(y) dx = 2\pi g_0(y) \quad (14)$$

Тогда, подставляя (14) в (1), окончательно получим

$$\frac{d^4 W}{dy^4}(y) - \beta^4 W(y) = 0 \quad (15)$$

здесь обозначили

$$\beta^4 = \frac{m\omega^2}{EJ} + 4 \frac{\rho U^2}{EJ} \pi v \left[ \frac{v}{2} i + \frac{2i}{h_0(v)} + C(v) \right]. \quad (16)$$

Решение дифференциального уравнения четвертого порядка (15), удовлетворяющее граничным условиям (2) будем искать в виде

$$W(y) = A_1 \sin(\beta y) + A_2 sh(\beta y) + A_3 \sin(\beta(y-1)) + A_4 sh(\beta(y-1)) \quad (17)$$

Из (2) не составляет труда вычислить коэффициенты  $A_1, A_2, A_3, A_4$ .

Запишем формулу для вычисления силы тяги – подсосывающей силы, которая возникает из-за квадратичной особенности давления на передней кромке. Ее значение, осредненное за период [2,3]

$$T_a = \frac{c}{\rho U^2} T = \frac{\pi}{8} \lim_{x \rightarrow -1} (1+x) \int_0^l |g(x, y)|^2 dy. \quad (18)$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твёрдого тела. М.: Наука, 1988. 712с.
2. Некрасов А.И. Теория крыла в нестационарном потоке. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1947. 258с.
3. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966. 480с.
4. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 831с.

#### Сведения об авторах:

**Сумбатян Межлум Альбертович,**

ЮФУ, Зав. кафедрой теоретической и компьютерной гидроаэродинамики  
Доктор физ.-мат. наук, профессор

**Тел.:** +7-928-1397067

**E-mail:** sumbat@math.rsu.ru

**Тарасов Александр Евгеньевич**

ЮФУ, Аспирант

**Тел.:** +7 (918) 55 71 570

**E-mail:** aetarasov@sfedu.ru

# О ПРИРОДЕ КОРРЕЛЯЦИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ УРАВНЕНИЯ ПЭРИСА

*Туманов Н.В.*  
*Россия*

Для расчётного прогнозирования кинетики усталостных трещин (КУТ) необходимо установить связь скорости роста трещины усталости (СРТУ)  $V$  с расчётным параметром – размахом коэффициента интенсивности напряжений (КИН)  $\Delta K$ . Эту зависимость обычно получают на основании испытаний стандартных образцов, а графическое представление зависимости  $V$  от  $\Delta K$  называют диаграммой циклической трещиностойкости (кинетической диаграммой) (рис. 1а). Типичная диаграмма  $V - \Delta K$  в двойных логарифмических координатах состоит из трёх участков: первый участок низких СРТУ ( $V < V_{1-2} \approx 0.1$  мкм/цикл), третий участок высоких СРТУ ( $V > V_{2-3} = 2 \div 3$  мкм/цикл) и второй участок устойчивого роста (УР) трещины ( $V_{1-2} < V < V_{2-3}$ ). Каждому участку соответствуют определённый механизм разрушения, локализованный на фронте трещины, и обусловленный этим механизмом характерный микрорельеф поверхности разрушения (фрактурельеф) (рис. 1б-г).

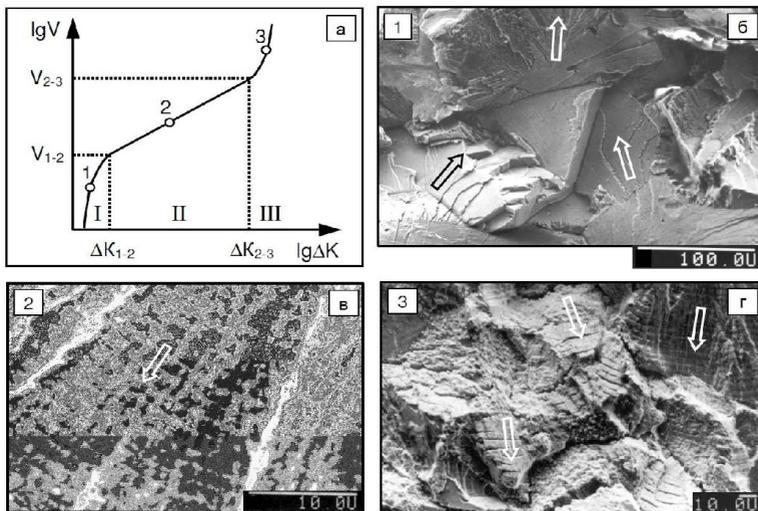


Рис.1. Схема трёхстадийной кинетической диаграммы  $V - \Delta K$  (а) и характерный фрактурельеф на каждой стадии (стрелки – локальные направления роста трещины): б – сколы, в – усталостные бороздки, г – бороздки+микроямки

Для описания СРТУ предложены многочисленные аналитические зависимости, имеющие ограниченные прогностические возможности. Наибольшее

распространение получило хорошо аппроксимирующее 2-й участок диаграммы  $V - \Delta K$  степенное (линейное в двойных логарифмических координатах) эмпирическое уравнение Пэриса [1]

$$V = C \Delta K^m \tag{1}$$

Однако применение зависимости (1), полученной при испытаниях стандартных образцов, для описания КУТ в деталях приводит к результатам, которые существенно отличаются от экспериментальных данных. В качестве примера на рис.2а показаны изломы по двум трещинам малоциклового усталости (МЦУ), которые развились при эквивалентно-циклических испытаниях (ЭЦИ) в идентичных местах (в области болтовых отверстий) двух дисков турбины высокого давления (ТВД) одной и той же конструкции при одинаковых условиях нагружения, а на рис.2б приведены две фрактографически реконструированные (на основании измерения шага усталостных бороздок вдоль указанных на рис.2а направлений) экспериментальные зависимости «число циклов  $N$  – глубина трещины  $l$ » для этих трещин и две расчётные зависимости  $N(l)$ . Последние определены с использованием двух уравнений Пэриса, полученных в двух разных организациях при испытаниях лабораторных образцов с трещинами из материала диска при той же температуре, что и в области развития трещин при ЭЦИ. Как видно, расчётные значения периода УР трещины (до глубины 3мм) отличаются от экспериментальных данных в одном случае в 1.5 раза, в другом – более чем в 3 раза, а между собой результаты расчётного прогнозирования различаются в 5 раз. При этом экспериментальные зависимости  $N(l)$  близки между собой, что свидетельствует о закономерном характере УР, обеспечивающем возможность

его надежного детерминированного прогнозирования.

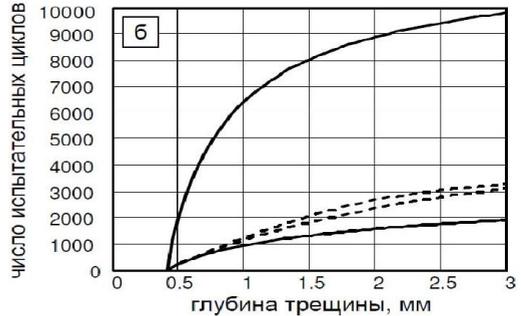
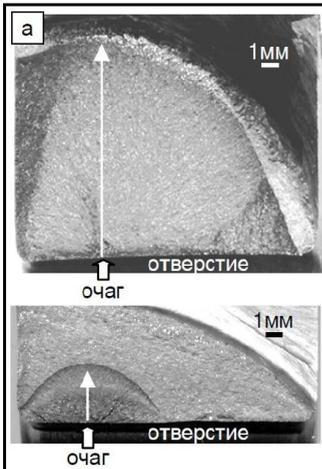


Рис.2. Изломы по двум трещинам МЦУ, развившимся при ЭЦИ в идентичных местах двух дисков ТВД одинаковой конструкции (а); расчётные (сплошные линии) и экспериментальные (пунктирные линии) кинетические зависимости (б)

Ещё одним недостатком уравнения Пэриса (1) является обнаруженная в многочисленных исследованиях (см. например, [2-3]), корреляция между

коэффициентами  $C$  и  $m$ , которые связаны уравнением линейной регрессии  $\lg C = -a - mb$  ( $a > 0, b > 0$ ),

$$(2)$$

где параметры  $a$  и  $b$  для сплавов разного типа на одной и той же основе являются постоянными или слабо изменяющимися величинами по сравнению с изменением  $\lg C$  и  $m$ . Тогда  $C = 10^{-a-mb}$  и (1) принимает вид

$$V = P(\Delta K/Q)^m, \quad (3)$$

где  $P = 10^{-a}$  ( $0 < P < 1$ ) и  $Q = 10^b$  ( $Q > 1$ ). Из уравнения (2) и вытекающего из него соотношения (3) следует, что зависимость (1) содержит скрытый параметр, нормирующий величину  $\Delta K$ , причём как сам параметр, так и коэффициент пропорциональности между СРТУ и некоторой степенью пронормированного размаха КИН являются постоянными или слабо изменяющимися величинами для сплавов разного типа на одной и той же основе. Природа этого параметра, а также величины коэффициента пропорциональности и показателя степени могут быть определены из следующих общих соображений.

Поскольку (1) описывает КУТ на втором участке кинетической диаграммы, где доминирующим факторельефом являются усталостные бороздки, шаг  $S$  которых характеризует подрастание трещины за цикл нагружения ( $S = dl/dN = V$ ) (рис.3), соотношение (3) принимает вид

$$S = P(\Delta K/Q)^m. \quad (4)$$

Локальная трансляционная симметрия бороздчатого факторельефа относительно непрерывного переноса вдоль фронта трещины (оси  $z$ ) и конечного переноса вдоль направления роста трещины (оси  $x$ ) (см. рис.3) и равенство элементарного переноса вдоль оси  $x$  (шага бороздок) продвижению локального фронта трещины за цикл нагружения означают, что достижение предельного состояния материала, приводящее к подрастанию трещины, происходит в каждом цикле и (в пределах определённого количества циклов) на одинаковом расстоянии от фронта трещины. Предположим, что нагружение в каждом цикле происходит квазистатически (что характерно для трещин МЦУ) и предельное состояние материала определяется некоторым предельным напряжением. Применим силовой критерий разрушения  $\sigma = \sigma_c$ ,

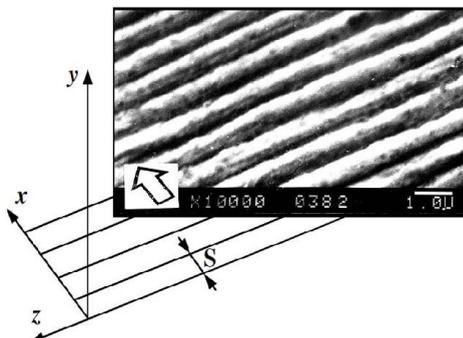


Рис.3 Трансляционная симметрия бороздчатого факторельефа

причём с учётом указанных выше элементов симметрии факторельефа, отражающих пространственную и временную симметрию (периодичность) процесса разрушения, условие разрушения реализуется не в

факторельефа, отражающих пространственную и временную симметрию (периодичность) процесса разрушения, условие разрушения реализуется не в

точке и не однократно, как в классических теориях прочности, а вдоль параллельной фронту линии в каждом цикле нагружения. Очевидно, что параметр  $\sigma_*$  должен входить в формулу (4), поскольку скорость развития разрушения (СРТУ  $S$ ) зависит не только от характеристики локальной напряжённости перед фронтом усталостной трещины (размаха КИН  $\Delta K$ ), но и от характеристики прочности материала, в котором развивается трещина. Если кинетика трещин МЦУ на втором участке кинетической диаграммы обусловлена только этими тремя параметрами ( $S$ ,  $\Delta K$  и  $\sigma_*$ ), то на основе анализа размерностей, входящих в (4) величин, получим  $Q = \sigma_*$  и  $m = 2$ , т.е.

$$S = P(\Delta K/\sigma_*)^2, \quad (5)$$

где  $P$  – безразмерная постоянная. Её значение, а также величину предельных напряжений  $\sigma_*$  оценим из следующего условия [4]: безразмерные числовые коэффициенты, входящие в полученные на основе анализа размерностей соотношения, должны быть не очень большими и не очень малыми. Поскольку  $0 < P < 1$ , в соответствии с этим соображением примем  $P \geq 0.1$ . Так как для жаропрочных титановых сплавов при  $\Delta K \approx 10 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/2}$  шаг бороздок  $S \approx 10^{-7} \text{ м}$ , то при использовании в качестве  $\sigma_*$  технического предела прочности  $\sigma_B \approx 10^3 \text{ МПа}$  или теоретического предела прочности (прочности межатомных связей на отрыв)  $\sigma_{th} \approx 0.1E \approx 10^4 \text{ МПа}$  ( $E$  – модуль Юнга) из (5) получим  $P = 0.001$  или  $P = 0.1$ , соответственно. Тогда, руководствуясь сформулированным выше условием, в качестве характеристики прочности материала перед фронтом трещины  $\sigma_*$  следует принять  $\sigma_{th} \approx 0.1E$ . Подстановка  $\sigma_* \approx 0.1E$  в (5) при  $P = 0.1$  приводит к кинетическому уравнению

$$S \approx 10(\Delta K/E)^2, \quad (6)$$

которое совпадает с кинетическим уравнением УР трещин МЦУ, полученным ранее на основе математического моделирования физического механизма УР – механизма периодического расслаивания-разрыва (МППР) [5].

С учётом того, что  $S = dl/dN$ , из уравнения (6) получим зависимость периода УР от длины (глубины) трещины  $l$

$$N(l) = 0.1E^2 \int_{l_0}^l [\Delta K(l)]^{-2} dl. \quad (7)$$

Результаты расчёта по формуле (7) УР трещины МЦУ в диске ТВД (см. рис.2) приведены на рис.4а (на рис.4б показаны конечно-элементные модели трещин в диске, используемые при определении зависимости  $\Delta K(l)$ ). Как видно, применение кинетического уравнения (6) приводит (в отличие от уравнения Пэриса) к зависимости  $N(l)$ , практически совпадающей с экспериментальными данными.

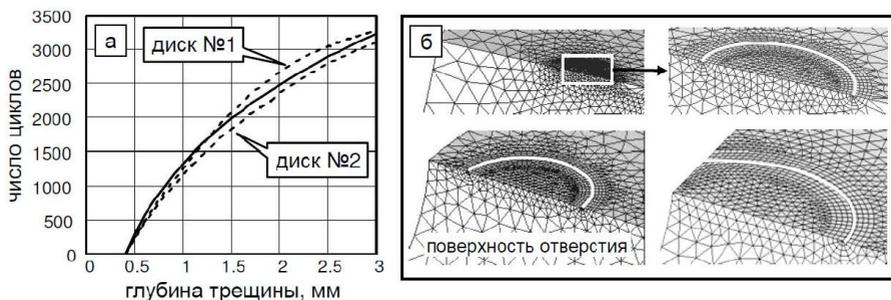


Рис.4. Верификация расчёта развития трещины в диске ТВД (см. рис.2) с использованием уравнения (6): а – расчётная (сплошная линия) и экспериментальные (пунктирные линии) кинетические зависимости; б – конечно-элементные модели трещин, реконструированные по данным фрактографического анализа и используемые при расчёте кинетической зависимости

В заключение отметим, что граница УР трещин МЦУ в исследуемых дисках ТВД ( $l=3\text{мм}$ ) составляет  $1/4$  глубины максимальной трещины на рис.2а, при этом период УР занимает  $3/4$  общего периода роста этой трещины и более половины общей циклической долговечности диска. Такое соотношение характерно для трещин МЦУ, развивающихся в высоконапряжённых зонах дисков авиадвигателей, что обуславливает актуальность и практическую значимость надежного расчётного прогнозирования УР трещин МЦУ на основе физически обоснованных математических моделей.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Paris P., Erdogan F. A critical analysis of crack propagation laws // Journal of Basic Engineering (Trans. ASME). 1963. №12. P.528-534.
2. Tanaka K., Matsuoka S. A tentative explanation for two parameters, C and m, in Paris , equation of fatigue crack growth // Int. Journal of Fracture. 1977. Vol.13. №5. P.563-584.
3. Ярема С.Я. О корреляции параметров уравнения Париса и характеристиках циклической трещиностойкости материалов // Проблемы прочности. 1981. №9. С.20-28.
4. Бриджмен П.В. Анализ размерностей. М.-Л.: ОНТИ-ГТТИ, 1934. 120с.
5. Туманов Н.В. Механика и физика развития усталостных трещин //Актуальные проблемы механики сплошной среды: Труды 2-й Международной конференции. Ереван: ЕГУАС, 2010. Т.2. С.194-198.

#### Сведения об авторе:

**Туманов Николай Ваганович** – канд. техн. наук, начальник сектора Центрального института авиационного моторостроения (ЦИАМ), Москва.

**E-mail:** tumanov@rtc.ciam.ru

# О ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ДЛЯ ЗАДАЧ, СВЯЗАННЫХ С ОТСЛОЕНИЕМ ПОКРЫТИЙ, РЕШАЕМЫХ В ТЕРМИНАХ ТЕОРИИ ПЛАСТИН

*Устинов К.Б.*

*Россия*

Представлен подход к решению задач об отслоении покрытий, заключающийся в рассмотрении отслоившегося участка покрытия с помощью теории пластин, граничные условия для которых получаются, исходя из аналитических решений задач о контакте полубесконечных отслоений с основанием. Данные задачи были сформулированы и решены. Граничные условия для пластин, моделирующих отслоившиеся участки полосы, найдены путём вычисления асимптотик смещения вдали от вершины интерфейсной трещины. Показано, что в общем случае свойства эффективной упругой заделки для пластины, моделирующей отслоение, описываются с помощью расширенной  $(3 \times 3)$  матрицы упругих коэффициентов, связывающих вектор смещения и поворот в точке заделки с действующими в данной точке главным вектором и моментом усилий. Установлены закономерности деформирования и потери устойчивости отслоений при термическом и механическом нагружении.

1. Широкий круг задач связан с деформированием и разрушением тонких поверхностных пленок и покрытий, испытывающих действие остаточных напряжений, или, что то же самое – собственных деформаций. Одной из основных причин, вызывающих собственные деформации является изменение температуры при различных коэффициентах теплового расширения покрытия и подложки. Данное явление наблюдается для широкого круга пар материалов, образующих подложку и покрытие; примерами являются керамические покрытия на металле, металлические покрытия на полимерах. Собственные деформации приводят к таким нежелательным эффектам как гофрирование поверхности и отслоение покрытия. Последнее наблюдается при пониженной адгезионной прочности на интерфейсе. Ситуация осложняется тем, что иногда для предотвращения растрескивания покрытия создаются с таким расчётом, чтобы в рабочем диапазоне температур они испытывали сжатие, избыток которого и способен привести к образованию складок и отслоениям. Всё это вызывает необходимость серьёзного и детального исследования явления для создания технологий и условий использования, предотвращающих подобные нежелательные эффекты. Отслоения также исследуются в связи с экспериментальным изучением адгезии.

2. При моделировании отслоений в нулевом приближении, следуя [1] в качестве граничных условий, принимаются условия жёсткой заделки. Однако, известно, что данное условие выполняется лишь приближённо. Более точными представляются условия упругой заделки, их конкретный вид связан с видом используемых уравнений изгиба [2-3], который, в свою очередь, определяется исходной задачей.

Если изгиб покрытий мал, для его моделирования можно применять уравнения изгиба Бернулли-Эйлера (для двумерного случая) или уравнения Софи-Жермен (для трёхмерного случая). При этом, граничные условия следует ставить в виде простой упругой заделки, т.е. пропорциональности угла поворота в точке заделки  $\nu'$  величине действующего момента  $M$  :

$$E^{(2)}\nu' = a_{22}h^{-2}M \quad (1)$$

Здесь  $E^{(2)}$  – модуль Юнга отслоения; коэффициенты  $a_{ij}$  выписаны ниже.

Для более сильного изгиба и учёта действия продольных сил, применяют теорию изгиба фон Кармана. Граничные условия следует ставить в виде обобщённой упругой заделки, т.е. пропорциональности угла поворота и продольного (вдоль границы) смещения  $u$  в точке заделки действующему моменту и продольной силе  $T$

$$E^{(2)} \begin{pmatrix} u \\ h\nu' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ h^{-1}M \end{pmatrix} \quad (2)$$

Для учёта влияния начальной кривизны изгибаемой поверхности используются уравнения Муштари-Доннела-Власова, при этом становятся существенными смещения отслоения в точках заделки по нормали. Граничные условия следует ставить в виде обобщённой упругой заделки, определяемой расширенной матрицей, связывающей угол поворота  $\nu'$ , продольное  $u$  и поперечное  $\nu$  смещения в точке заделки действующему моменту  $M$ , продольной  $T$  и поперечной  $P$  силам

$$E^{(2)} \begin{pmatrix} u \\ h\nu' \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ h^{-1}M \\ P \end{pmatrix} \quad (3)$$

Входящие в формулы (1)-(5) коэффициенты были найдены в [3-6] аналитически путем решения задач о контакте полубесконечных отслоений с основанием. Некоторые коэффициенты также находились путем интерполяции данных численных расчётов [3]

$$a_{11} = \frac{1}{2}\sqrt{\eta} + \frac{3}{2}\left[\frac{b}{h}(\eta)^3\right]^{1/4}; \quad a_{12} = a_{12} = \sqrt{3} + 0.27\left(\frac{h}{b}\eta\right)^{2/3}$$

$$a_{22} = 12\delta; \quad a_{13} = 1 + \sqrt{3}\delta; \quad a_{23} = \frac{3}{2} + 6\delta^2; \quad \delta = 0.635\eta^{1/3} \quad (4)$$

Здесь  $\eta$  – отношение модифицированных модулей Юнга отслоения и подложки. Выражение для  $a_{33}$  громоздко и здесь не приводится.

3. Для приложений интересным представляется нахождение критического напряжения потери устойчивости отслоившимся покрытием. Принимая в нулевом приближении в качестве граничных условий для балки (пластины), моделирующей покрытие условия жёсткой заделки, критическое напряжение определяется следующим образом [1]:

$$\sigma_0^{cr} = \frac{\pi^2 h^2 E^{(2)}}{12b^2}, \quad E^{(2)} = \frac{E_0^{(2)}}{1 - \nu_0^{(2)2}} \quad (5)$$

и является по сути критической силой Эйлера, домноженной на толщину отслоения. Здесь  $E_0^{(2)}, \nu_0^{(2)}$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала отслоения;  $b, h$  – полуширина отслоения.

Учёт податливости подложки приводит к рассмотренным выше граничным условиям типа упругой заделки. При этом, величина критического напряжения  $\sigma^{cr}$  может быть представлена как произведение соответствующей величины, рассчитанной для пластины в условиях жёсткой заделки  $\sigma_0^{cr}$  на некоторый коэффициент  $\gamma_\sigma$

$$\sigma^{cr} = \sigma_0^{cr} \gamma_\sigma \quad (6)$$

Оценка для коэффициента  $\gamma_\sigma$  получена на основе элементарной теории пластин и полученных выше формул для граничных условий. В [7] показано, что в рамках теории слабого изгиба, данный коэффициент определяется из решения уравнения

$$\operatorname{tg} \pi \sqrt{\gamma_\sigma} + d_0 \beta \pi \sqrt{\gamma_\sigma} = 0, \quad \beta = \frac{h}{b} \sqrt[3]{\eta} \quad (7)$$

Отсюда видно, что в рамках рассматриваемой модели отличие критического напряжения от напряжения, посчитанного из условий абсолютно жёсткой заделки, определяется не по отдельности упругими и геометрическими параметрами модели, а их комбинацией – единым безразмерным параметром, названным  $\beta$ .

Использование уравнений изгиба пластин фон Кармана приводит к более точному уравнению

$$\frac{12b}{\pi h \sqrt{\gamma_\sigma}} \operatorname{tg} \pi \sqrt{\gamma_\sigma} + a_{22} - \frac{a_{12}^2}{b/h + a_{11}} = 0 \quad (8)$$

Данное уравнение отличается от предыдущего только наличием последнего члена, который обычно мал по сравнению с предпоследним. Тем не менее, его учёт приводит к небольшому, но систематическому

отклонению от результатов, получаемых из решения предыдущего уравнения.

Для малых  $\beta$ , соответствующих достаточно жёстким подложкам, решения последних уравнений могут быть представлены в виде рядов, несколько первых членов которых дают весьма удобные для использования формулы:

$$\sigma^{cr} = \frac{\pi^2 h^2 E^{(2)}}{12b^2} \left( 1 - 2d_0\beta + 3(d_0\beta)^2 + \dots \right), \quad d_0 \approx 0.63 \quad (9)$$

$$\sigma^{cr} = \frac{\pi^2 h^2 E^{(2)}}{12b^2} \left( 1 - 2d_0\beta + \left( 3d_0^2 + \frac{1}{2\eta^{2/3}} \right) \beta^2 + \dots \right) \quad (10)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы Президиума РАН 25П и РФФИ 14-01-00855

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Kachanov L.M. Delamination Buckling of Composite Materials, Kluwer, 1988. 95 p.
2. Yu H.-H., Hutchinson J.W. Influence of substrate compliance on buckling delamination of thin films. Int. J. Fract. vol. 113. 2002. 39-55.
3. Ustinov K.B. On influence of substrate compliance on delamination and buckling of coatings. //Eng. Failure Anal. 10.1016 /j.engfailanal. 2013. 09. 022.
4. Салганик Р.Л., Устинов К.Б. Задача об упруго-заделанной пластине, моделирующей частично отслоившееся от подложки покрытие (плоская деформация). //Изв. РАН. МТТ. 2012. №4. С.50-62.
5. Устинов К.Б. О сдвиговом отслоении тонкого слоя от полуплоскости. / Препринт ИПМех РАН. 2013. № 1047. 30с.
6. Устинов К.Б. Об отслоении слоя от полуплоскости для некоторого класса различных упругих свойств. /Препринт ИПМех РАН. 2013. № 1048. 50с.
7. Гольдштейн Р.В., Устинов К.Б., Ченцов А.В. Оценка влияния податливости подложки на напряжения потери устойчивости отслоившегося покрытия. //Вычисл. Мех. Спл. Сред. Т.4. №3. 2011. С.48-57.

#### Сведения об авторе:

**Устинов Константин Борисович**

Старший научн. сотр., лаборатория Геомеханики, ИПМех РАН, Москва, Россия, **Phone:** +7 (926) 164 94 09, **E-mail:** ustinov@ipmnet.ru

# АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ТРЁХМЕРНОЙ ВНУТРЕННЕЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ ДВУХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ НЕПОЛНОМ КОНТАКТЕ МЕЖДУ СЛОЯМИ

*Хачатрян А.М., Товмасын А.Б.*  
*НКР*

Рассматривается вопрос определения напряженно-деформированного состояния (НДС) двухслойной анизотропной пластинки при неполном контакте между слоями. Слои пластинки обладают анизотропией общего вида.

Полное напряжённое состояние пластинки образуется из основного (внутреннего) и краевого напряжённых состояний [1]. Для решения задач слоистых балок, пластин и оболочек обычно используется та или иная гипотеза. В первых исследованиях принималась гипотеза недеформируемых нормалей для всего пакета, в целом [2,3]. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек построена в [4]. Вопрос определения НДС слоистой анизотропной пластинки, когда на её верхней и нижней лицевых плоскостях заданы значения компонентов тензора напряжений, рассмотрен в [5]. Асимптотическое решение смешанной трёхмерной внутренней задачи для анизотропной однослойной и многослойной пластинки приведено в [6,7].

В работе асимптотическим методом построено решение, соответствующее внутренней задаче двухслойной анизотропной пластинки при неполном контакте между слоями.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим двухслойную анизотропную пластинку, слои которой имеют различные толщины  $h_k$ , коэффициенты упругости  $a_{ij}^{(k)}$  ( $k=1,2$ ). Общая толщина пластинки -  $2h$ .

Будем пользоваться декартовой системой координат  $x, y, z$ , располагая оси  $Ox, Oy$  в плоскости отсчёта. Вводятся безразмерные переменные  $\xi = x/a, \eta = y/a, \zeta = z/h$  и безразмерные перемещения  $U^{(k)} = u^{(k)}/a, V^{(k)} = v^{(k)}/a, W^{(k)} = w^{(k)}/a$ , где  $a$  – характерный тангенциальный размер пластинки.

Считается, что на верхней  $z = h_1$  лицевой плоскости пластинки заданы значения компонентов тензора напряжений, а на нижней  $z = -h_2$  – смешанные условия теории упругости:

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} &= \sigma_{xz}^+(x, y), \sigma_{yz} = \sigma_{yz}^+(x, y), \sigma_z = \sigma_z^+(x, y) \quad \text{при } z = h_1 \\ w &= \varepsilon^{-1} w^-(x, y), \sigma_{xz} = \sigma_{xz}^-(x, y), \sigma_{yz} = \sigma_{yz}^-(x, y) \quad \text{при } z = -h_2 \end{aligned} \quad (1.1)$$

На плоскости контакта слоёв  $z = 0$  необходимо удовлетворить следующим условиям неполного контакта:

$$\sigma_{xz}^{(1)} = \sigma_{xz}^{(2)} = f_1(x, y), \sigma_{yz}^{(1)} = \sigma_{yz}^{(2)} = f_2(x, y), \sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{(2)}, w^{(1)} = w^{(2)} \quad (1.2)$$

Условия на боковой поверхности будем считать пока произвольными.

Требуется найти решение уравнений пространственной задачи теории упругости анизотропного тела [2-3] при граничных условиях (1.1), условиях неполного контакта (1.2) и условиях краевых задач теории упругости на боковой поверхности (они пока не конкретизируются).

В системе безразмерных координат  $\xi, \eta, \zeta$  система уравнений теории упругости анизотропного тела превратится в новую систему, содержащий малый параметр  $\varepsilon = h/a$ . Эта система сингулярно-возмущённая и её решение складывается из решений внутренней задачи (основное решение) и пограничного слоя [1,5].

Решение внутренней задачи ищется в виде [1,4-7]:

$$Q^{(k)} = \varepsilon^{q_k} \sum_{s=0}^S \varepsilon^s Q^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad (1.3)$$

где  $Q^{(k)}$  – любое из компонентов тензора напряжений или безразмерных перемещений  $k$ -го слоя. Целое число  $q_k$  для каждой величины выбирается так, чтобы получить непротиворечивую систему относительно  $Q^{(k,s)}$ . В нашем случае эта цель достигается при

$$\begin{aligned} q_k &= -1 \text{ для } \sigma_x^{(k)}, \sigma_y^{(k)}, \sigma_z^{(k)}, \sigma_{xy}^{(k)}, U^{(k)}, V^{(k)}, W^{(k)}, \\ q_k &= 0 \text{ для } \sigma_{xz}^{(k)}, \sigma_{yz}^{(k)} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Подставив (1.3) в преобразованные введением безразмерных координат и безразмерных компонент вектора перемещения уравнения теории упругости, с учётом (1.4), получим систему для определения  $Q^{(k,s)}$ . Интегрируя полученную систему по  $\zeta$ , для напряжений и перемещений получим следующие формулы:

$$\begin{aligned} \sigma_z^{(k,s)} &= \sigma_{z0}^{(k,s)} + \sigma_z^{*(k,s)}, \quad U^{(k,s)} = u^{(k,s)} + u^{*(k,s)}, \quad (U, V, W) \\ \sigma_x^{(k,s)} &= B_{11}^{(k)} \varepsilon_1^{(k,s)} + B_{12}^{(k)} \varepsilon_2^{(k,s)} + B_{16}^{(k)} \omega^{(k,s)} + a_3^{(k)} \sigma_{z0}^{(k,s)} + \sigma_x^{*(k,s)} \\ \sigma_{xy}^{(k,s)} &= B_{16}^{(k)} \varepsilon_1^{(k,s)} + B_{26}^{(k)} \varepsilon_2^{(k,s)} + B_{66}^{(k)} \omega^{(k,s)} + c_3^{(k)} \sigma_{z0}^{(k,s)} + \sigma_{xy}^{*(k,s)}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\sigma_{xz}^{(k,s)} = -\left[ L_{11}(B_{ij}^{(k)})u^{(k,s)} + L_{12}(B_{ij}^{(k)})v^{(k,s)} \right]_S -$$

$$- \left( a_3^{(k)} \frac{\partial \sigma_{z0}^{(k,s)}}{\partial \xi} + c_3^{(k)} \frac{\partial \sigma_{z0}^{(k,s)}}{\partial \eta} \right) + \sigma_{xz0}^{(k,s)} + \sigma_{xz}^{*(k,s)}, (x, y; 1, 2; a, b)$$

$$\varepsilon_1^{(k,s)} = \frac{\partial u^{(k,s)}}{\partial \xi}, \quad \varepsilon_2^{(k,s)} = \frac{\partial v^{(k,s)}}{\partial \eta}, \quad \omega^{(k,s)} = \frac{\partial u^{(k,s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{(k,s)}}{\partial \xi}.$$

где дифференциальные операторы  $L_{11}(B_{ij}^{(k)})$  и коэффициенты  $B_{ij}^{(k)}, a_i^{(k)}, b_i^{(k)}, c_i^{(k)}$  определяются по известным формулам [3,5-7]

$\sigma_{xz0}^{(k,s)}, \sigma_{yz0}^{(k,s)}, \sigma_{z0}^{(k,s)}, u^{(k,s)}, v^{(k,s)}, w^{(k,s)}$  – неизвестные функции интегрирования и будут определены ниже с помощью условий (1.1), (1.2).

Величины со звездочками, как обычно, известны для каждого приближения  $s$ , поскольку выражаются через предыдущие приближения. Эти величины определяются по формулам (2.1) работы [6], в них необходимо лишь верхний индекс ( $s$ ) заменить на  $(k, s)$ . Предполагается, что  $Q^{(k,s-i)} \equiv 0$ , если  $s < i$ .

Удовлетворив условиям неполного контакта (1.2), получим

$$\sigma_{xz0}^{(1,s)} = \sigma_{xz0}^{(2,s)} = f_1^{(s)}(\xi, \eta), \quad \sigma_{yz0}^{(1,s)} = \sigma_{yz0}^{(2,s)} = f_2^{(s)}(\xi, \eta),$$

$$\sigma_{z0}^{(1,s)} = \sigma_{z0}^{(2,s)}, \quad w^{(1,s)} = w^{(2,s)} \quad (1.6)$$

Удовлетворив условиям на лицевых плоскостях пластинки (1.1), определим неизвестные величины  $\sigma_{z0}^{(k,s)}, w^{(k,s)}$ :

$$\sigma_{z0}^{(k,s)} = \sigma_z^{+(s)} - \sigma_z^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1), \quad w^{(k,s)} = w^{-(s)} - w^{*(2,s)}(\xi, \eta, \zeta_2) \quad (1.8)$$

а также систему уравнений для определения перемещений  $u^{(k,s)}, v^{(k,s)}$

$$L_{11}(C_{ij}^{(k)})u^{(k,s)} + L_{12}(C_{ij}^{(k)})v^{(k,s)} + f_1^{(s)}(\xi, \eta) = p_{k1}^{(s)}$$

$$L_{12}(C_{ij}^{(k)})u^{(k,s)} + L_{22}(C_{ij}^{(k)})v^{(k,s)} + f_2^{(s)}(\xi, \eta) = p_{k2}^{(s)} \quad (k = 1, 2) \quad (1.9)$$

В (1.9)  $p_{k1}^{(s)}, p_{k2}^{(s)}$  играют роль обобщённых нагрузок:

$$p_{k1}^{(s)} = -\sigma_{xz}^{\pm(s)}(\xi, \eta) - \left( a_3^{(k)} \frac{\partial \sigma_z^{+(s)}}{\partial \xi} + c_3^{(k)} \frac{\partial \sigma_z^{+(s)}}{\partial \eta} \right) - \quad (1.10)$$

$$-\left( a_3^{(k)} \frac{\partial \sigma_z^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1)}{\partial \xi} + c_3^{(k)} \frac{\partial \sigma_z^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1)}{\partial \eta} \right) + \sigma_{xz}^{*(k,s)}(\xi, \eta, \zeta_k),$$

$$\zeta_1 = h_1/h, \quad \zeta_2 = -h_2/h$$

$$\sigma_z^{+(0)} = \sigma_z^+, \quad \sigma_{xz}^{\pm(0)} = \sigma_{xz}^\pm, \quad w^{-(0)} = w^-, \quad \sigma_z^{+(s)} = \sigma_{xz}^{\pm(s)} = 0, \quad w^{-(s)} = 0,$$

$$\sigma_z^{+(s)} = \sigma_{xz}^{\pm(s)} = 0, \quad w^{-(s)} = 0, \quad \text{при } s > 0, \quad (x, y; 1, 2; a, b),$$

Дифференциальные операторы  $L_{ij}(C_{ij}^{(k)})$  также определяются по известным формулам [3,5], необходимо учитывать, что  $C_{ij}^{(k)} = (-1)^{k+1} \zeta_k B_{ij}^{(k)}$ .

Отметим, что, если в задаче слоистой пластины при полном контакте между слоями была получена одна система разрешающих уравнений [6], то здесь получены две системы уравнений (для каждого слоя отдельно).

**2. Закон «сухого» трения Кулона.** Рассмотрим случай, когда упругие слои взаимодействуют по закону «сухого» трения Кулона. Тогда

$$\sigma_{xz} = \chi_1 \frac{h}{a} \sigma_z(z=0), \quad \sigma_{yz} = \chi_2 \frac{h}{a} \sigma_z(z=0)$$

и, как следствие, получим:

$$f_k^{(s)}(\xi, \eta) = \chi_k f^{(s)}(\xi, \eta), \quad \text{где } f^{(s)} = \sigma_z^{+(1,s)} - \sigma_z^{*(1,s)}(\zeta_1) \quad (2.1)$$

Коэффициенты трения  $\chi_1, \chi_2$  – постоянные величины. В частности, если  $\chi_1$  или  $\chi_2$  равны нулю, то это означает, что отсутствует сила трения между слоями по направлению  $Ox$  или  $Oy$ .

Подставив значения  $f_1^{(s)}(\xi, \eta), f_2^{(s)}(\xi, \eta)$  из (2.1) в (1.9), получим новую систему дифференциальных уравнений с частными производными:

$$\begin{aligned} L_{11}(C_{ij}^{(k)})u^{(k,s)} + L_{12}(C_{ij}^{(k)})v^{(k,s)} &= \bar{p}_{k1}^{(s)} \\ L_{12}(C_{ij}^{(k)})u^{(k,s)} + L_{22}(C_{ij}^{(k)})v^{(k,s)} &= \bar{p}_{k2}^{(s)} \end{aligned} \quad (2.2)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{p}_{k1}^{(s)} &= p_{k1}^{(s)} - \chi_1 (\sigma_z^{+(1,s)} - \sigma_z^{*(1,s)}(\zeta_1)), \\ \bar{p}_{k2}^{(s)} &= p_{k2}^{(s)} - \chi_2 (\sigma_z^{+(1,s)} - \sigma_z^{*(1,s)}(\zeta_1)). \end{aligned} \quad (2.3)$$

После решения системы (2.2) по формулам (1.3)-(1.8) определяются все напряжения и перемещения.

Систему уравнений (2.2) можно свести к решению одного уравнения четвертого порядка.

$$(L_{11}L_{22} - L_{12}^2)u^{(k,s)} = L_{22}\bar{p}_{k1}^{(s)} - L_{12}\bar{p}_{k2}^{(s)}, \quad (u, v; 1.2) \quad (2.4)$$

Вопрос о пограничном слое и его взаимодействии с решением внутренней задачи можно осуществить указанным в [1,4] способом.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А.Л. Построение приближённой теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости //ПММ. 1962. Т.26. Вып.4. С.668-686.
2. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. М.: Гостехиздат, 1957. 463с.
3. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1967. 268с.
4. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 415с.
5. Агаловян Л.А., Багдасарян Ю.М., Хачатрян А.М. К определению напряжённо-деформированного состояния слоистых пластин с анизотропией общего вида// Изв. НАН РА. Механика. 1996. Т.49. №3. С.10-22.
6. Агаловян Л.А., Товмасын А.Б. Асимптотическое решение смешанной трёхмерной внутренней задачи для анизотропной термоупругой пластинки //Изв. НАН Армении. Механика. 1993. Т.46. №3-4. С.3-11.
7. Хачатрян А.М., Товмасын А.Б. Асимптотическое решение смешанной трёхмерной внутренней задачи для анизотропной слоистой пластинки//Тр. Межд. Конф. «Актуальные проблемы механики сплошной среды», 08-12 октября 2012, Цахкадзор, Армения. С.229-233.

#### Сведения об авторах:

**Хачатрян Александр Мовсесович** –доктор физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой математики АргУ. НКР, г. Степанакерт, Мхитара Гоша, 5. Тел.: (+37497)201949. E-mail: [alexkhach49@yandex.ru](mailto:alexkhach49@yandex.ru) .

**Товмасын Артур Бабкенович** – кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры инженерии АргУ. НКР, г. Степанакерт, Мхитара Гоша, 5.  
Тел.: (+37497)203242.

# ОТРАЖЕНИЕ УПРУГИХ ВОЛН ОТ ГРАНИЦЫ НЕОДНОРОДНОЙ ПО ТОЛЩИНЕ ПЛАСТИНКИ

*Хачатрян Л.С.  
Армения*

Упругая пластинка в прямоугольной декартовой системе координат  $(xyz)$  занимает область  $-\infty < x < \infty$ ,  $0 \leq y < \infty$ ,  $-h \leq z \leq h$ .

На кромку пластинки  $y = 0$  падает изгибная волна. Требуется определить отражённую волну при различных условиях закрепления кромки  $y = 0$ . Предполагается, что модуль Юнга-Е, коэффициент Пуассона  $\nu$  и плотность материала пластинки являются функциями координаты  $z$ . Относительно напряжённо-деформированного состояния принимаются допущения гипотезы Кирхгофа [1; 2].

Отражение изгибной волны от границы пластинки, от упругого закрепления и от кромки, предварительно напряжённой пластинки, исследованы в [3,4,5].

1. Осреднённые уравнения пластинки в перемещениях имеют вид [6]:

$$\begin{aligned} B_0 \Delta u + (C_0 - B_0) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - K \frac{\partial}{\partial x} \Delta w &= m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ B_0 \Delta v + (C_0 - B_0) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - K \frac{\partial}{\partial y} \Delta w &= m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ D_0 \Delta w + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - K \Delta \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где

$$\begin{aligned} m &= \int_{-h}^h \rho dz, C_0 = \int_{-h}^h \frac{E}{1-\nu^2} dz, K = \int_{-h}^h \frac{zE}{1-\nu^2} dz \\ D_0 &= \int_{-h}^h \frac{z^2 E}{1-\nu^2} dz, B_0 = \frac{1}{2} \int_{-h}^h \frac{E}{1-\nu} dz \end{aligned} \quad (1.2)$$

В уравнениях (1.1), так же, как и для однородных пластин, пренебрежены моменты инерции вращения.

При помощи преобразований

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{K}{C_0} \cdot \frac{\partial w}{\partial x}, v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{K}{C_0} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \quad (1.3)$$

система уравнений (1.1) приводится к виду

$$C_0 \Delta \varphi = m \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, B_0 \Delta \psi = m \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, D \Delta^2 w + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - K \Delta^2 \varphi = 0, \quad (1.4)$$

$$\text{где } D = D_0 - C_0^{-1} K^2 \quad (1.5)$$

Если представить решение уравнения (1.4) в виде гармонических волн [7]

$$\varphi = \varphi_0 \exp i(\omega t - k_1 x + k_2 y)$$

$$\psi = \psi_0 \exp i(\omega t - k_1 x + k_2 y)$$

$$w = w_0 \exp i(\omega t - k_1 x + k_2 y), \quad (1.6)$$

то получаются следующие уравнения:

$$\varphi_0 [-C_0(k_1^2 + k_2^2) + m\omega^2] = 0 \quad \text{I}$$

$$\psi_0 [-B_0(k_1^2 + k_2^2) + m\omega^2] = 0 \quad \text{II} \quad (1.7)$$

$$w_0 [D_0(k_1^2 + k_2^2) + m\omega^2] - K(k_1^2 + k_2^2)^2 \varphi_0 = 0 \quad \text{III}$$

Из (1.7. II) при  $\psi_0 \neq 0$  получается:

$$-B_0(k_1^2 + k_2^2) + m\omega^2 = 0, k_2 \psi = \pm \sqrt{\frac{m\omega^2}{B_0} - k_1^2}, \frac{m\omega^2}{B_0} - k_1^2 \geq 0 \quad (1.8)$$

Из (1.7. III, I сл.)  $\psi_0 \neq 0, -B_0(k_1^2 + k_2^2) + m\omega^2 = 0$

При падении волны  $\psi_0$  отражается только волна  $\psi_0$ . Волны  $\varphi_0$  и  $w_0$  не отражаются.

$$\text{II сл. } \varphi_0 \neq 0, w_0 = 0, \psi_0 = 0, -C_0(k_1^2 + k_2^2) + m\omega^2 = 0$$

При падении волны  $\varphi_0$ , отражается  $\varphi_0$ , с собой забирает  $w_0$  и отражает  $w_0$ .

$$\text{III сл. } w_0 \neq 0, \varphi_0 = 0, \psi_0 = 0, D_0(k_1^2 + k_2^2) - m\omega^2 = 0.$$

При падении  $w_0$  отражается  $w_0$ .

$$\varphi_0 = 0, w_0 \neq 0, \psi_0 = 0, D_0(k_1^2 + k_2^2)^2 - m\omega^2 = 0 \quad (1.9)$$

$$k_{2w} = \pm \sqrt{\pm \sqrt{\frac{m\omega^2}{D}} - k_1^2}$$

Из (1.7. I)

$$\varphi_0 \neq 0, -C_0(k_1^2 + k_2^2)^2 + m\omega^2 = 0, k_{2\varphi} = \pm \sqrt{\frac{m\omega^2}{C_0} - k_1^2} \quad (1.10)$$

Решение для падающей волны имеет вид:

$$\begin{aligned} w_n &= A \exp i(\omega t - k_1 x + k_{21} y), \varphi_n = E \exp i(\omega t - k_1 x - k_{2\varphi} y) \\ \psi_n &= G \exp i(\omega t - k_1 x - k_{2\psi} y) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Для отражённой волны

$$\begin{aligned} w_{otr} &= B \exp i(\omega t - k_1 x - k_{21} y) + C \exp i(\omega t - k_1 x + k_{23} y) \\ \varphi_{otr} &= F \exp i(\omega t - k_1 x + k_{2\varphi} y) \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\psi_{otr} = R \exp i(\omega t - k_1 x + k_{2\psi} y)$$

Из (1.11) и (1.12)

$$w = w_n + w_{otr}, \varphi = \varphi_n + \varphi_{otr}, \psi = \psi_n + \psi_{otr} \quad (1.13)$$

2. Рассматривается случай жёстко закреплённого края. Для пространственной задачи теории упругости условия жёсткого закрепления имеют вид:

$$u = 0, v = 0, w = 0, \frac{\partial w}{\partial y} = 0, y = 0. \quad (2.1)$$

В теории Кирхгофа

$$\varphi = 0, \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, w = 0, \frac{\partial w}{\partial y} = 0, y = 0 \quad (2.2)$$

$$F = -E, R = G, B = -\Omega^{-1}(k_1^2 + i\sqrt{\Omega^2 - k_1^4})A \quad (2.3)$$

$$C = -\Omega^{-1}(\Omega - k_1^2 - i\sqrt{\Omega^2 - k_1^4})A$$

3. Шарнирное закрепление

$$y = 0, u = 0, \sigma_{22} = 0, w = 0, M_y = 0 \quad (3.1)$$

В теории Кирхгофа условия шарнирного закрепления имеют вид:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0, \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (3.2)$$

$$R = G, F = E, B = -A, C = 0 \quad (3.3)$$

4. Скользящий контакт

$$y = 0, v = 0, \sigma_{21} = 0, \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \overline{N}_y = 0 \quad (4.1)$$

Этим условиям в теории Кирхгофа соответствует

$$y = 0, \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0, \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0 \quad (4.2)$$

$$R = G, F = E, B = A, C = 0 \quad (4.3)$$

В каждом из этих трёх случаев какая волна падает, такая и отражается. А при закреплённом случае, одна волна падает, а другая отражается.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Белубекян М.В. Локализованные колебания неоднородной по толщине пластинки. Проблемы механики деформируемого твёрдого тела. Ереван: 2012. С.129-135.
2. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360с.
3. Белубекян М.В., Хачатрян Л.С. Отражение изгибной волны от кромки пластинки. //Иzv. НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. №1. С.30-33.
4. Хачатрян Л.С. О задаче отражения изгибной волны от упругого закрепления. //В сб.: научных трудов Международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды».Т.2. Ереван: 2010. С. 209-212.
5. Хачатрян Л.С. Отражение упругих волн от кромки предварительно напряжённой пластинки. //В сб.: научных трудов Международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды».Т.2. Ереван: 2012. С.234-237.
6. Белубекян М.В. Об управлениях теории пластин, учитывающих поперечные сдвиги. Проблемы механики тонких деформируемых тел. Ереван: 2002. С. 67-88.
7. Бреховских Л.М., Гончаров В.В. Введение в механику сплошных сред (в приложении к теории волн) М.: Наука, 1982. 332с.

#### Сведения об авторе:

**Хачатрян Лейли Самвеловна,**

Ереванский колледж права, экономики и управления, преподаватель

Дом.тел.: (+37410) 66-69-88,

Е-mail: khachatrya.leyli@mail.ru

## ДИНАМИЧЕСКОЕ КАЧЕСТВО БОЛТОВЫХ СОЕДИНЕНИЙ

*Шекян Г.Г., Багдасарян И.Р., Геворкян В.Р.*  
*Армения*

Для оценки динамического качества болтовых соединений рассмотрены вынужденные колебания системы корпус – соединяемые детали – стяжные болты или шпильки стыковых соединений.

Получены критерии, характеризующие чувствительность системы к динамическим воздействиям.

В современных машинах резьбовые соединения составляют свыше 80% от всех остальных соединений. Практика эксплуатации всех типов машин и результаты эксплуатационных исследований показывают, что надёжность и долговечность элементов машины и машин в целом зависят от надёжности крепёжных изделий. Результаты исследований показывают, что при циклически изменяющихся нагрузках величина динамических сил, передаваемая на стержень болта или от корпуса машины к другим частям, зависит от жёсткостных и массовых характеристик деталей системы. При неправильном выборе этих характеристик динамические нагрузки могут в десятки раз превышать возмущающую силу. Следовательно, прочность и долговечность болтовых соединений при циклически изменяющихся нагрузках зависят от жёсткостных и амплитдно-частотных характеристик системы. Сочетание жёсткостных и амплитудно-частотных характеристик системы, приводящих к уменьшению динамической нагрузки, называется добротностью системы и характеризуется динамическим качеством. Улучшение динамического качества соединения – выбором оптимальных параметров системы, характеризующих по жёсткостным и частотным характеристикам системы, во многом будет способствовать повышению долговечности не только резьбового соединения, но и машины в целом. Для оценки динамического качества резьбового (болтового) соединения рассмотрим вынужденные колебания системы болт–соединяемые детали.

Пусть возмущающая сила  $Q_i(t)$ , действующая на соединение, изменяется по гармоническому закону

$$Q_i(t) = Q_{m1} \cdot \sin \omega t \quad (1)$$

где  $Q_{m1}$  – амплитуда возмущающей силы, приходящей на  $i$ -ый болт.

Дифференциальное уравнение колебания системы, согласно [1] можно представить в виде:

$$m_i \ddot{y} + (C_\sigma + C_\delta) \dot{y} + k \dot{y} = Q_{m1} \sin \omega t \quad (2)$$

где  $m_i$  – удельная масса, проходящая на  $i$ -ый болт,  $C_\sigma$  и  $C_\delta$  – жёсткости

болта и соединяемой детали соответственно,  $k\dot{y}$  – сила внутреннего и внешнего сопротивления, приходящая на  $i$ -ый болт. Частное решение уравнения (2) ищем в виде

$$y = \bar{A} \cdot e^{i\omega t}, \quad (3)$$

где  $\bar{A}$  – комплексная амплитуда колебания соединяемой детали. Подстановка решения (3) в (2), после несложного преобразования даёт [2]

$$\bar{Q}_{m_i} = \bar{A} (C - m_i \omega^2 + i\omega k), \quad \text{где } C = C_o + C_o \quad (4)$$

откуда модуль возмущающей силы будет:

$$|Q_{m_i}| = A \sqrt{C - m\omega^2 + \omega^2 k^2}. \quad (5)$$

На стержень болта (или на шпильку) в направлении перемещений „А” будет действовать сила  $Q_g = C \cdot y + k\dot{y}$ , или в комплексной форме

$$\bar{Q}_g = \bar{A} (C + i\omega k), \quad (6)$$

модуль которого будет:

$$Q_g = A \sqrt{C + \omega^2 k^2}. \quad (7)$$

Отношение силы, действующей на болт, к возмущающей силе принято называть коэффициентом передачи силы или динамическим коэффициентом, характеризующим динамическое качество соединения [2,3]

$\beta = Qg/Q_{m1}$ , из (7) и (5) будем иметь:

$$\beta = \frac{\sqrt{1 + k^2 \cdot k_1}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right)^2 + k^2 \cdot k_1}}, \quad k_1 = \frac{\omega^2}{p^4 \cdot m_i^2}, \quad p^2 = \frac{C}{m_i}, \quad (8)$$

где  $k = v/\pi$  – коэффициент демпфирования,  $v$  – логарифмический декремент затухания колебаний [3],  $p$  – собственная частота колебания системы. Динамическое качество соединения можно оценить коэффициентом  $k_o = (1 - \beta)100\%$ , откуда видно, что если  $\beta > 1$ , то  $k_o > 0$  и чем меньше  $\beta$ , тем выше динамическое качество соединения. Если  $\beta > 1$ , то  $k_o > 0$ , т.е. система чувствительна к динамическим воздействиям (рис.1) и незначительные динамические силы могут вызывать большие деформации. Это значит, что динамическое качество системы (соединения) неудовлетворительно [3]. Для определения влияния жёсткости болта на динамическое качество соединения исходим из двух условий: условие обеспечения плотности стыка  $\Delta > y_{\max}$ , где  $\Delta$  – статическая деформация соединяемых деталей,  $y_{\max}$  – максимальная амплитуда деформации болта в направлении оси болта  $\gamma_{\max} v \cdot U_{\text{сты}}$ ,

где  $y_{cm} = Q_{m1}/C_{\sigma} + C_d$  – деформации соединяемых деталей от максимальной возмущающей силы при  $\omega = 0$ ;  $\gamma$  – динамический коэффициент передачи амплитуды.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{\omega^2}{p^2}}} \quad (9)$$

Из (9) и рис.1 видно, что с уменьшением жёсткости (с увеличением  $\omega/p$ ) коэффициент  $\gamma$  в зоне  $\omega/p > 1$  увеличивается и при определённых соотношениях  $\omega/p > 1$  и  $\gamma$  может произойти раскрытие стыка. С увеличением отношения  $\omega/p$  в зоне  $\omega/p > 1$  коэффициент  $\gamma$  уменьшается и, следовательно, уменьшается и  $y_{max}$ . Это говорит о том, что уменьшение жёсткости болта или соединяемых деталей при высокочастотных возмущениях в зоне  $\omega/p > 1$ , не может привести к раскрытию стыка. Условие минимизации коэффициента передачи силы имеет вид:  $\beta = Qg/Qm_1 = \min$ . (10)

Из (8), (10) и рис.2 видно, что с увеличением отношения  $\omega/p$  в зоне  $\omega/p > 1$  коэффициент  $\beta$  уменьшается. При  $\frac{\omega}{p} = \sqrt{2}$   $\beta = 1$ , а при  $\frac{\omega}{p} > \sqrt{2}$   $\beta$  продолжает уменьшаться. Из анализа вышеуказанных двух условий можно сделать вывод, что для соединений, работающих при низкочастотных колебаниях, где  $\omega/p < 1$ , уменьшение жёсткости болта приведёт к увеличению усилий, передаваемых на болт, и может произойти нарушение плотности стыка, и в этом случае, при малой частоте возмущения (меньше 50Гц), жёсткость болта следует увеличить.

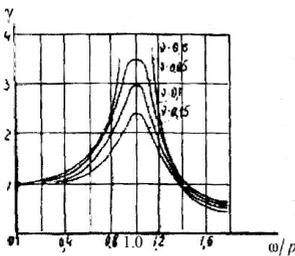


Рис. 1. Зависимость коэффициента  $\gamma$  то  $\omega/p$

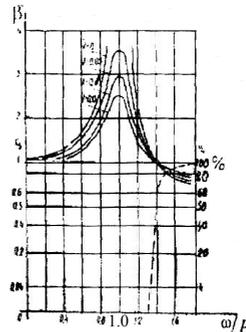


Рис. 2. Зависимость коэффициентов  $K_k$  то  $\omega/p$

Для соединений, подверженных действию высокочастотных колебательных нагрузок, где возможно обеспечить условие  $\omega/p > 1$ , уменьшение жёсткости болта приводит к уменьшению коэффициента  $\beta$ , как это видно из рис.2. Для соединений, работающих под действием высокочастотных вибрационных нагрузок, жёсткость соединения следует выбрать так, чтобы  $\omega/p$  был в пределах (1.3÷1.5), только тогда коэффициент динамического качества эффективно возрастает. Как видно из рис.2, при дальнейшем уменьшении жёсткости соединения, кривая  $K_g$  растёт очень медленно. Из вышеуказанного следует, что отношение  $\omega/p$  следует выбрать в пределах  $\omega/p = 1.3-1.5$  (11)

Учитывая 
$$p = \sqrt{\frac{C_{\delta} + C_{\sigma}}{m_i}}, \quad (12)$$

из уравнений (11) и (12) имеем:

$$C_{\delta} + C_{\sigma} \leq (0.45 \div 0.6) m_i \omega^2. \quad (13)$$

Таблица 1

Амплитуды колебания при различных частотах возмущения

Жёсткость болта $C_{\delta}$ $\times 10^4$ кг/см	Частоты возмущения $\times 10^3$ сек <sup>-1</sup>														
	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0
	Амплитуды колебания стола вибростенда, мкм														
	10	8	8	7	6	5	4	3	3	3	3	2	2	2	1
	Амплитуды колебания присоединенной массы, мкм														
2	12	25	14	8	5	4	2	1	1	0,8	0,7	0,6	0,6	0,6	0,6
4	11	12	14	15	16	23	13	8	5	3	2	2	1,5	1	0,8
6,6	10	11	12	13	14	15	18	18	15	12	6	3	2,5	2,5	2
8	10	11	12	13	13	14	14	15	16	15	13	11	8	5	3
11	10	11	11	12	12	13	13	14	14	15	13	12	10	8	5

Таким образом, при правильном выборе жёсткости болта и соединяемых деталей, динамические нагрузки, действующие на болт, существенно снижаются, при этом болт должен обладать достаточной жёсткостью для обеспечения необходимой плотности стыка. Для подтверждения теоретических выкладок нами проведены экспериментальные исследования.

Учитывая вышеизложенное, в экспериментах применялись резьбовые соединения различной жёсткости, часть которых охватывает зону  $\omega/p = 1.3 - 1.5$ . Как видно из амплитудно-частотных кривых (рис.3), первая резонансная

частота системы охватывает частотную зону  $\omega = (1.0 \div 2.5)10^3 \text{ сек}^{-1}$ , соответствующую жёсткостям испытываемых болтов. Результаты экспериментальных исследований приведены в табл.1. Для жёсткости болта  $C_{\sigma} = 2 \cdot 10^4 \text{ кг/см}$ , начиная уже с частоты  $\omega = 1.8 \cdot 10^3 \text{ сек}^{-1}$ , наступает уменьшение амплитуды присоединённой массы по отношению к амплитуде возмущения, в то время, как при жёсткости болта  $C_{\sigma} = 11 \cdot 10^4 \text{ кг/см}$  процесс уменьшения амплитуды присоединённой массы начинается с частоты  $\omega = 4.2 \cdot 10^3 \text{ сек}^{-1}$ .

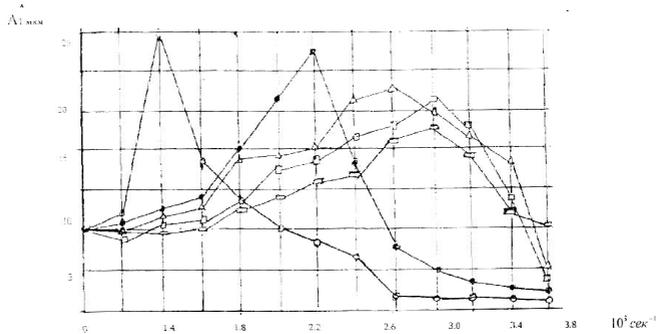


Рис.3. Амплитудно-частотные кривые болтовых соединений:  
 $C_{\sigma} = 2 \cdot 10^4 \text{ кг/см}$ ,  $C_{\sigma} = 6.6 \cdot 10^4 \text{ кг/см}$ , и  $C_{\sigma} = 4 \cdot 10^4 \text{ кг/см}$ ,  $C_{\sigma} = 8 \cdot 10^4 \text{ кг/см}$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. Шемян Г.Г. К вопросу колебаний стержневых систем. //Изв. АН Арм. ССР, серия техн.наук. 1985. Т.XXXVII. №1. С.43-54.
2. Шемян Г.Г., Хачатрян М.Н. Колебание пластинчатых систем с присоединёнными массами. //Изв. НАН Армении, сер.т.н. 1999. №2. С.141-146.
3. Биргер И.А., Иосилевич Г.В. Основные проблемы прочности и надёжности резьбовых соединений. М.: Машиноведение, 1980. 235с.

### Сведения об авторах:

**Шемян Гамлет Гургенович** – д.т.н., профессор, вед. науч. сотруд. Института Механики НАН Армении. Тел.: (091)49 38 40.

**Багдасарян Ирина Робертовна** – к.т.н., арцахский государственный унв-тет.

**Геворгян Ваган Рубенович** – аспирант тех. унв г. Ильменау, Германия.

## К ВОПРОСУ УСТАЛОСТНОЙ ПРОЧНОСТИ МАТЕРИАЛОВ

*Шекян Г.Г., Хачатрян М.Н., Арутюнян А.С.*

*Армения*

Рассмотрена выносливость материала при переменных циклических нагрузениях с различными диапазонами изменения напряжений.

Из упрощённой диаграммы предельных напряжений получена формула расчёта предела усталостной прочности для любого асимметричного цикла, а из рассмотрения процесса деформирования, как упруго-пластический получено дифференциальное уравнение одноосного колебания объекта с переменными коэффициентами типа Матъе–Хиля. Для малых частот изменения напряжений получено уравнение кривой выносливости.

Предел выносливости зависит как от характера изменения напряжений во времени – степени асимметрии цикла, так и от типа напряжённого состояния. В большинстве случаев испытания на выносливость выполняются для симметричного цикла, в то время как во многих случаях расчёта машин имеют дело с напряжениями, изменяющимися по асимметричному циклу [1]. Наиболее точное представление о фактической прочности деталей машин можно получить из результатов натурных испытаний, на машинах полностью воспроизводящих эксплуатационные условия. Веллер – первый экспериментатор, систематически изучавший явление усталости. Он показал, что диапазон напряжения  $R = \sigma_{\max} - \sigma_{\min}$ , необходимый для того, чтобы произвести разрушение, уменьшается с увеличением среднего напряжения  $\sigma_m$ . Для более простого решения проблемы предполагается, что изменение рабочей нагрузки вплоть до предельного состояния между составляющими цикла напряжений  $\sigma_a$  и  $\sigma_m$  остаётся постоянной ( $\sigma_a/\sigma_m = \text{const}$ ). Тогда предел выносливости для заданного коэффициента асимметрии «Г» будет [2]

$$\sigma_r = \sigma_a + \sigma_m; \quad r = \sigma_{\min} / \sigma_{\max} \quad (1)$$

На рис.2 приведена схематизированная упрощённая диаграмма, построенная по статической прочности ( $\sigma_b, \sigma_T$ ) и пределу выносливости  $\sigma_{-1}$ , из рис.1 имеем:

$$\text{tg } \beta = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}} = \frac{1-r}{1+r}, \quad (2)$$

$$\text{или из (1) и (2)} \quad \sigma_r = \sigma_m + \sigma_a = \sigma_m \frac{2}{1+r} \quad (3)$$

Тогда уравнение прямой «АС» можно представить в виде

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}} + \frac{\sigma_m}{\sigma_b} = 1; \quad (4)$$

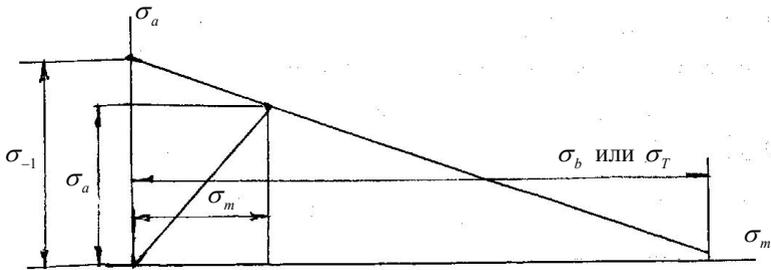


Рис.1.Схематизированная диаграмма предельных напряжений, построенная по характеристикам  $\sigma_T$  или  $\sigma_b$  статической прочности и пределу выносливости  $\sigma_{-1}$ ; – для симметрического цикла.

Тогда с учётом (4)  $\sigma_r$  примет вид:

$$\sigma_r \geq \frac{2\sigma_{-1} \cdot \sigma_b}{\sigma_b(1-r) + (1+r)\sigma_{-1}}, \quad (5)$$

т.е. достаточно зная предел статической прочности  $\sigma_b(\sigma_T)$  и предел выносливости  $\sigma_{-1}$ , можно определить предел усталостной прочности для любого асимметрического цикла.

При оценке прочности деталей и образцов, значение пределов выносливости, полученное на основании испытаний, требует корректировки в связи с влиянием ряда известных факторов на прочность (формы и абсолютные размеры, состояние поверхности образца, свойства поверхностного слоя, наличие различных концентраторов, изменяющих режим нагружения и т.д.) [1,2,3].

Практически очень важно знать, как быстро кривая  $\sigma$ - $N$  приближается к асимпоте, т.к. число циклов, необходимых для установления предела выносливости, характеризует долговечность детали. Опыты показывают, что для чёрных металлов предел выносливости можно установить с достаточной точностью на основании  $N_0=10^7$  циклов,  $\sigma_a=0.5\sigma_b$ . Для цветных металлов, (например, алюминия), нет определённого предела выносливости, и ординаты кривой усталости  $\sigma$ - $N$  уменьшаются беспредельно с возрастанием числа циклов.

На наш взгляд, суммированием усталостных повреждений и микротрещин чрезвычайно затруднительно осуществить идею теоретического вывода функциональной связи роста напряжений в зависимости от числа циклов нагружения. В выражениях интегральной суммы повреждений присутствуют начальные величины микротрещин и микродефектов, которые могут быть определены с помощью корреляционного анализа результатов изучения микроструктуры испытуемого образца.

Если учесть, что разрушение чаще происходит не там, где большая микротрещина, а совершенно в другом месте, а объёмы работ по изучению микроструктуры огромны, то значимость этого подхода становится абсурдным.

Для описания деформации используем формы записи, часто применяемые в электротехнике для учёта фазового сдвига между напряжением и силой тока.

Тогда для упруго-пластической деформации при одноосном растяжении–сжатии можно написать  $\sigma = E \cdot \varepsilon \cdot e^{\alpha}$ ,

$$(6)$$

где  $\varepsilon$  и  $\sigma$  – упругая деформация и напряжение,  $\alpha$  – некоторая постоянная, зависящая от свойства материала, характера деформирования и вида напряжённого состояния ( $\alpha \ll 1$ ).

Разложив  $e^{\alpha}$  в ряд Тейлора, и пренебрегая малыми членами, выражение (6) можно представить в виде:  $\sigma = E \cdot \varepsilon(1 + \alpha)$

$$(7)$$

Здесь  $\alpha \cdot \varepsilon$  – остаточная пластическая деформация; после одного цикла изменения напряжения при многократном повторении циклов напряжения пластическая деформация будет расти, что приведёт к изменению жёсткости испытываемого образца.

Если начальная жёсткость рассматриваемой детали или образца на растяжение или сжатие было  $C_0$ , то после определённого количества циклов изменения напряжений жёсткость уменьшается до значения

$$C_0 - C_k, \quad \text{где } C_k = \alpha \cdot C_0 \cdot n \quad (8)$$

Поскольку пластическая деформация растёт по экспоненциальному закону ( $\varepsilon_n = \varepsilon \cdot e^{\alpha n}$ ), то жёсткость образца уменьшится также по экспоненциальному закону. Здесь  $n$  – количество циклов в долях  $\lg N$ , т.е.  $n = \lg N$  или  $N = 10^n$ . Тогда жёсткость образца после воздействия циклических нагрузок можно представить в виде  $C_0(1 - \alpha \lg N)$ .

Если испытываемый образец или деталь рассмотреть как колебательную систему с возбуждающей переменной силой  $P(t) = P \cdot \sin \omega t$ , где  $\omega$  – угловая частота колебания ( $\omega = 2\pi f$ ,  $f = N/t$ ), то одноосное колебательное движение образца можно описать дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами:

$$j\ddot{y} + \frac{C_0}{m}(1 - \alpha \lg N)y = \frac{P}{m} \sin \omega t, \quad (9)$$

где  $y$  – амплитуда колебания,

$C_0$  – начальная жёсткость образца;  $m$  – масса единицы объёма образца,

$P$  – максимальная нагрузка.

Уравнение (9) с переменным коэффициентом, зависящей от числа циклов и времени, является уравнением типа Матье-Хиля. Это уравнение не имеет аналитического решения и можно решать только численными методами.

Однако при изменении нагрузки с частотой меньше 15÷20гц, инерционными силами можно пренебречь и будем иметь:

$$C_0/m(1-\alpha \lg N)y = P/m \cdot \sin \omega t, \quad (\text{где } y = y_{\max} \cdot \sin \omega t) \quad (10)$$

$$C_0/m(1-\alpha \lg N)y_{\max} \quad (11)$$

Приняв, что  $C_0 = P_{\max}/Y_{\min}$ , где  $P_{\max}$  – максимальная сила, которая при начальном сечении  $F_0$  образца может вызывать напряжение, равное  $\sigma_b$  или  $\sigma_T$  ( $\sigma_b, \sigma_T$  – предельные напряжения при статическом нагружении), получим:

$$P_{\max}(1-\alpha \lg N) = P \quad (12)$$

разделив обе части равенства на  $F_0$ , будем иметь:

$$\sigma_b(1-\alpha \lg N) = \sigma, \quad (13)$$

$$\text{или } \sigma + \alpha \cdot \sigma_b \cdot \lg N = \sigma_b. \quad (14)$$

Для определения коэффициента  $\alpha$ , образец рассмотрим как прямоугольный брус с размерами  $a_0, b_0$  и  $l_0$ , ( $a_0$  – толщина,  $b_0$  – ширина,  $l_0$  – начальная длина).

$$\text{тогда можно писать } \left. \frac{da}{a} \right|_{a_0}^a = -\mu \left. \frac{dz}{z} \right|_{l_0}^l; \quad \left. \frac{db}{b} \right|_{b_0}^b = -\mu \left. \frac{dz}{z} \right|_{l_0}^l \quad (15)$$

и после интегрирования будем иметь:

$$\frac{a}{a_0} = \left( \frac{l_0}{l} \right)^\mu; \quad \frac{b}{b_0} = \left( \frac{l_0}{l} \right)^\mu; \quad \frac{a \cdot b}{a_0 b_0} = \left( \frac{l_0}{l} \right)^{2\mu}; \quad \frac{F}{F_0} = \left( \frac{l_0}{l} \right)^{2\mu} \quad (16)$$

Здесь  $\mu$  – коэффициент Пуассона,  $F_0$  – начальная площадь сечения образца,  $F$  – площадь сечения образца, после первого цикла деформирования.

Величина уменьшения площади сечения будет:

$$\Delta F = F_0 - F \quad \text{или} \quad \Delta F = F_0 \left[ 1 - \left( l_0 / l \right)^{2\mu} \right]$$

Поскольку

$$\varepsilon = \frac{\sigma_1}{E} = \frac{\sigma}{E} + \frac{\sigma}{E} \alpha \quad (17)$$

(получается из выражения  $\varepsilon = \varepsilon_y + \varepsilon_n = \varepsilon_y + \alpha \varepsilon_y$ ),

$$\text{где } \varepsilon = \frac{\sigma_1}{E}; \quad \varepsilon_y = \frac{\sigma}{E}; \quad \sigma_1 = \frac{P}{F}; \quad \sigma = \frac{P}{F_0}, \quad (18)$$

$$\text{из (16), (17) и (18) будем иметь } \alpha = \left( l / l_0 \right)^{2\mu} - 1, \quad (19)$$

Имея в виду, что  $l = l_0 + \Delta$  и  $\frac{\Delta}{l_0} = \varepsilon_y = \frac{\sigma}{E}$ , будем иметь

$$\alpha = \left( \frac{E + \sigma}{E} \right)^{2\mu} - 1 \quad \text{или} \quad \alpha = \left( \frac{kE + \sigma_b}{kE} \right)^{2M} - 1, \quad \text{где} \quad k = \frac{\sigma_b}{\sigma}. \quad (20)$$

Тогда уравнение (14) можно представить в виде  $\sigma + m \lg N = \sigma_b$ , (21)

$$\text{где} \quad m = \sigma_b \left[ \left( \frac{kE + \sigma_b}{kE} \right)^{2\mu} - 1 \right]. \quad (22)$$

**Выводы:** на основании проведённых теоретических исследований и опыта мировой практики впервые получены:

– формула расчёта предельных напряжений для любого осесимметрического цикла изменения напряжений при известном пределе выносливости симметрического цикла;

– уравнение кривой выносливости, учитывающее физико-механические характеристики материала и характер напряжённого состояния.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П. Соппротивление материалов. том вторая. М.: Наука, 1966. 480с.
2. Шекян Г.Г. К вопросу о факторах, снижающих долговечность подшипников высокоскоростных электрических машин.// Международный тематический сб. науч. тр., сер. Машиностроение. Ереван: 1983, С.19-24.
3. Fairbairn W. Phil. Trans. Roy. Soc. (London) 1964. pp.22-30.

### Сведения об авторах:

**Шекян Гамлет Гургенович,**

д.т.н., профессор, Институт механики НАН Армении

**Хачатрян Масис Николаевич,**

к.т.н., зам. председателя ГКН. Комитет по Науке РА

**Арутюнян Арутюн Серобович,**

к.т.н., Комитет по Науке РА

# SHEAR LOCALISED WAVES IN MAGNETO-ELECTRO-ELASTIC INHOMOGENEOUS WAVEGUIDE

*Gasparyan D.K*

*Armenia*

The shear localised wave propagation is considered in the inhomogeneous waveguide made of the hexagonal 6mm magneto-electro-elastic material. Several inhomogeneity profiles are derived permitting the exact solution for the usual boundary conditions. The dispersion equations are derived for a case of the quadratic inhomogeneity profile.

A combination of piezoelectric and piezomagnetic effects in a single composite provides new properties such as the magneto-electric effect, which recently attracted much attention due to a growing interest in the application of the magneto-electric composites [1,2]. Reviews of the last developments in the field of wave propagation in piezoelectric, piezomagnetic, magneto-electro elastic media are presented in [2-5]. Localised wave in inhomogeneous functionally graded piezoelectric layer is studied in [6].

To exemplify the problem and provide insights into SH shear waves propagation in inhomogeneous functionally graded piezo-electro-magneto-elastic media the following model is considered.. The guided SH wave is propagating along the  $x_1$  direction of the waveguide within the domain  $-\infty < x_1 < \infty$ ,  $0 < x_2 < h$  in the coordinate system  $(x_1, x_2, x_3)$ . Waveguide made from a material who exhibits magneto-electro-elastic properties with 6 mm hexagonal symmetry (MEE crystal), whose polling six-fold axis is parallel to the  $x_3$  direction. A functionally graded material is assumed that all material properties change gradually with the same function variation along the waveguide thickness.

$$G = G_0 f(x_2), \rho = \rho_0 f(x_2), e = e_0 f(x_2),$$

$$\alpha = \alpha_0 f(x_2), \beta = \beta_0 f(x_2), \varepsilon = \varepsilon_0 f(x_2), \mu = \mu_0 f(x_2) \quad (1)$$

Here  $G = c_{44}$ ,  $e = e_{15}$ ,  $\beta = \beta_{15}$ ,  $\alpha$  are the elastic, piezoelectric, piezomagnetic and magneto- electric modulus,  $\varepsilon = \varepsilon_{11}$  and  $\mu = \mu_{11}$  are the dielectric permittivity and magnetic permeability, respectively.

The governing equations for the shear wave propagating in the MEE media are [1]:

$$\partial_1 D_1 + \partial_2 D_2 = 0, \partial_1 B_1 + \partial_2 B_2 = 0, \partial_1 \sigma_{13} + \partial_2 \sigma_{23} = \rho \ddot{u} \quad (2)$$

The electric displacements  $D_1, D_2$ , the magnetic inductions  $B_1, B_2$  and the stresses  $\sigma_{13}, \sigma_{23}$  are determined by the following constitutive equations:

$$\begin{aligned} \sigma_{i3} &= G \partial_i u + e \partial_i \varphi + \beta \partial_i \phi, \quad D_i = e \partial_i u - \varepsilon \partial_i \varphi - \alpha \partial_i \phi \\ B_i &= \beta \partial_i u - \alpha \partial_i \varphi - \mu \partial_i \phi \end{aligned} \quad (3)$$

Herein  $u(x, y, t)$  is the elastic displacement directed along the  $x_3$  direction,  $\varphi = \varphi(x, y, t)$  is the elastic potential,  $\phi = \phi(x, y, t)$  is the magnetic potential, while  $\partial_i = \partial / \partial x_i; i = 1, 2$ .

The new functions  $u_0(x_1, x_2, t), \varphi_0(x_1, x_2, t), \phi_0(x_1, x_2, t)$  are assumed such that

$$u = u_0 / \sqrt{f(y)}, \varphi = \varphi_0 / \sqrt{f(y)}, \phi = \phi_0 / \sqrt{f(y)} \quad (4)$$

and auxiliary potentials  $S(x_1, x_2, t), F(x_1, x_2, t)$  are used to define

$$\varphi_0 = (-S\mu_0 + W_0\eta_0 + F\alpha_0)\gamma_0^{-1} \quad \phi_0 = (-F\varepsilon_0 + S\alpha_0 + W_0\theta_0)\gamma_0^{-1} \quad (5)$$

where  $\gamma_0 = \varepsilon_0\mu_0 - \alpha_0^2, \theta_0 = \beta_0\varepsilon_0 - e_0\alpha_0, \eta_0 = e_0\mu_0 - \alpha_0\beta_0$ .

Substituting (5) into (2) and taking into account (3, 4) it is straightforward to derive the uncoupled equations with respect to the new unknown functions

$$\hat{L}[u_0] = \frac{\rho_0}{E_0} \ddot{u}_0, \quad \hat{L}[F] = 0, \quad \hat{L}[S] = 0 \quad (6)$$

where

$$\hat{L} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{1}{\sqrt{f(x_2)}} \frac{\partial^2 \sqrt{f(x_2)}}{\partial x_2^2}, \quad E_0 = G_0 + \frac{e_0\eta_0 + \beta_0\theta_0}{\gamma_0}$$

For sake of simplicity it will be assumed that the function  $f(x_2)$  satisfies the following condition

$$\frac{1}{\sqrt{f(x_2)}} \frac{\partial^2 \sqrt{f(x_2)}}{\partial x_2^2} = \alpha^2 = \text{const} \quad (7)$$

This assumption is obviously somewhat artificial and narrows the class of functions characterizing the inhomogeneity. Nevertheless it allows to solve the problem for

functionally graded MEE materials and to estimate the effect of inhomogeneity on the dispersion relations of guided waves.

The function  $f(x_2)$  satisfying (7) is cast as

$$f(x_2) = [A_1 \cosh(\alpha x_2) + A_2 \alpha^{-1} \sinh(\alpha x_2)]^2 \quad (8)$$

When  $\alpha = 0$  instead of (8) we have the quadratic function  $f(x_2) = (1 + by)^2$ . Solutions of (6) in the form of plane harmonic waves propagating along the Ox direction can be written as

$$u_0 = e^{i(kx_1 - \omega t)} [C_1 \cosh(kpx_2) + C_2 \sinh(kpx_2)] \quad (9)$$

$$S = e^{i(kx_1 - \omega t)} [C_3 \cosh(kx_2) + C_4 \sinh(kx_2)] \quad (10)$$

$$F = e^{i(kx_1 - \omega t)} [C_5 \cosh(kx_2) + C_6 \sinh(kx_2)]$$

Here  $C_i$  are arbitrary constants,  $p = \sqrt{1 - \zeta^2}$ ;  $\zeta = \omega k^{-1} \sqrt{E_0^{-1} \rho_0}$ ,  $k$  is the wave number,  $\omega$  is the wave frequency.

Here we shall restrict ourselves by considering the inhomogeneity by means of the quadratic function  $f(x_2) = (1 + ah^{-1}y)^2$ ,  $a > -1$  and assuming that the propagating speed of the localised wave is less than the speed of the bulk shear wave in MEE material [6], so that  $\zeta < 1$ .

The following magneto-electro-elastic contact conditions are of our interest here:

$$\sigma_{23} = 0, \varphi = 0; \phi = 0 \quad x_2 = 0, x_2 = h \quad (11)$$

$$\sigma_{23} = 0, \phi = 0; D = 0 \quad x_2 = 0, x_2 = h \quad (12)$$

$$\sigma_{23} = 0, \varphi = 0; B = 0 \quad x_2 = 0, x_2 = h \quad (13)$$

Substituting the solutions (11-13), into the boundary conditions, homogeneous systems of equations with respect to the arbitrary constants are obtained. Equating the determinants of the simultaneous sets of equations to zero we can obtain the dispersion equations. Introducing the dimensionless parameters

$$K^2 = \frac{K_\beta^2 + K_e^2 - 2\gamma K_e K_\beta}{G_0(1 - \gamma^2)}, K_e^2 = \frac{e_0^2}{G_0 \varepsilon_0}; K_\beta^2 = \frac{\beta_0^2}{G_0 \mu_0}, \gamma = \frac{g_0}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}, d = kh,$$

we have the following dispersion equations

$$2(1+a)pd^2K^2(1+K^2)[\operatorname{sech}(d)\operatorname{sech}(dp)-1]+$$

$$+a^2d\left[(1+K^2)p\tan(d)-K^2\tan(dp)\right]+ \tag{14}$$

$$+\left[d^2(1+a)\left((1+K^2)^2p^2+K^4\right)-a^2\right]\tan(dp)\tan(d)=0;$$

$$2(1+a)pd^2(1+K^2)(K^2-K_\beta^2)[\operatorname{sech}(d)\operatorname{sech}(dp)-1]+$$

$$+a^2d(1+K_\beta^2)\left[(1+K^2)p\tan(d)-(K^2-K_\beta^2)\tan(dp)\right]- \tag{15}$$

$$\left[a^2(1+K_\beta^2)^2-d^2(1+a)\left((1+K^2)^2p^2+(K^2-K_\beta^2)^2\right)\right]\tan(dp)\tan(d)=0;$$

The dispersion equation for the boundary (13) can be obtained by replacing in (15)  $K_\beta^2 \rightarrow K_e^2$

### Numerical analysis of dispersion equation (15)

For the fixed  $h$  in the long wave approximation  $kh \ll 1$  we have  $\zeta_1 = \sqrt{1-\kappa^2}$ ,

in the short wave approximation  $kh \gg 1$  we come to  $\zeta_2 = \sqrt{1-\kappa^4}$ , where

$\kappa^2 = K^2(1+K^2)^{-1}$  is the electro-magneto-elastic coupling coefficient for MEE crystal. In the short wave approximation the localized wave speed  $\zeta$  coincides with the speed of the Bleustein–Gulyaev surface wave for electrically shorted and traction free interface of piezoelectric half-space [4,5]. Let note that the inhomogeneity does not effect wave phase speeds, both of short and long waves.

For any value of the inhomogeneity parameter  $a$  the equation (15) has one root in the interval  $0 < d < d_1(a)$ , has two roots in the interval  $d_1(a) < d < d_2(a)$  and has

one root in the interval  $d > d_2(a)$ .

Table 1

$a$	$d_1$	$d_2$
-0.9	19.02	56.34
-0.6	6.86	27.32
-0.3	5.62	14.09
<b>0</b>	<b>5.22</b>	<b>9.89</b>
0.5	5.72	11.88
1	5.89	16.22
2	7.28	20.32
4	10.41	26.23

As it follows from Tabl.1 the inhomogeneity sufficiently affects the locations of the root intervals and extends the intervals where the two localised wave exist. Let note that at  $a \rightarrow 1$  the dispersion equation has only root for any value of  $d$ .

**Conclusion.** The guided SH wave propagation in waveguide is studied for MEE functionally graded material. Under assumption that MEE material properties vary proportionally to the same “inhomogeneity function”

it is shown that by some choices of this function the problems under consideration can be solved exactly. For the simple inhomogeneity profile and the usual boundary conditions the dispersion equations are derived. The existence of the two localised waves is established and effects of the inhomogeneity are discussed.

## References

1. Wang K.F., Liu J-M. and Ren Z.F. Multiferroicity: The coupling between magnetic and polarization orders. *Advances in Physics*. 58(4), 2009.p.321-448.
2. Hongjun Y, Linzhi W, Hui L , Domain-independent interaction integral for magneto-electro-elastic materials, *Int. J. Sol. Str.* 2014, 51, p.336 -351.
3. Гаспарян Д. К., Казарян К.Б. Связанные волны в электро-магнитоупругой пьезоактивной среде Доклады НАН Армении, 214,1, 2014, с.25-32
4. Zakharenko A A , New nondispersive SH-SAWS guided by the surface of piezoelectromagnetics, *Canadian Journal of pure and applied sciences*, Vol. 7, No. 3, pp. 2557-2570, 2013.
5. 5.Багдасарян Г.Е.,Даноян З.Н., Электромагнитоупругие волны, Из-ЕГУ, Ереван,2006,с.491
6. Камалян А.А., О распространении и поведении электроупругой волны в пьезодиэлектрике в зависимости от неоднородности, *Изв. НАН Армении, Механика*, т.106,4,2014,с,38-48

Gasparyan David

Aspirant of Institute of Mechanics, National Academy of Sciences

Email: david.gasparyan@yahoo.com

# SWELLING AND SHRINKING IMPACT ON SHEAR STRENGTH OF CLAYEY SOILS

*Hairoyan Sargis*  
*Armenia*

The article is devoted to the impact of swelling and shrinkage factor on shear strength of swelling clays. According to experiments data it has been shown, when tensions exceed the swelling pressure and simultaneously the natural humidity of soils is above of lower limit of plasticity, additional moistening does not bring to loss of strength, but when the natural humidity is less then lower limit of plasticity, additional moistening brings to absorbing loss of soil's strength. It is proposed the shear tests conduct on dual cut method during determination of the impact of shrinkage on shear strength, where cohesion is equal to zero. and the internal friction factor is constant.

**Swelling impact on shear strength of clayey soils.**-- With a view to establish the limites of applicability of the results obtained earlier, the autors have investigated the shear strength of twin samples of broken texture bentonite clay ( $\rho_s=2.75\text{g/cm}^3$ ,  $W_L=1.705$ ;  $W_p=0.404$ ,  $I_p =1.301$ ). Five series of twin samples of bentonite clay (diameter 101mm, height 24mm) were tested for shear in the instruments M-5 [ 4 ] by the torsion method as per the standard methodology with five different initial compactness and moisture content values. Compacting pressures on the samples were created with laver-operated devices. To ensure identical phisical and mechanical properties, the samples were tested in a over compacted state. For this, the samples were at first compacted wish their initial moisture content  $W_0$  under the action of a certain constant pressure  $P_{z,0}$  and , thereafter, fuuly unloaded and maintained without load till the deformations were completely stabilized . The  $\sigma_{sw,0}$  values were determined for  $W_0$  by the method of compensation of the swelling on two to three samples. The reafter , the remaining samples were so  $W_0$  ed that the compacting pressures were both lower and higher than the free swelling pressure  $P_z > \sigma_{sw,0}$ ;  $P_z < \sigma_{sw,0}$  . After the deformations were stabilized , a part of the samples was tested for shear with  $W_0$  (without moistening ) and the other part was tested after moistening to a moisture content corresponding to complete water-saturation  $S_f=1$  and conditional stabilization of the deformations. Here  $\rho_0$  is the initial compactness of the samples,  $\sigma_{sw,0}$  is the free swelling pressure;  $W_0$  is the moisture content of the samples after their re-compaction under the action of  $P_z$  before testing for shear;  $P_z$  and the average values corresponding to it of the parameters  $\phi$  and  $c$  of shear strength  $\tau_{f,st}$  determined for  $W_0$  and for water content a  $W_f$  after water-saturation of the samples. The shear diagraeme are reproduced in Fig.1.

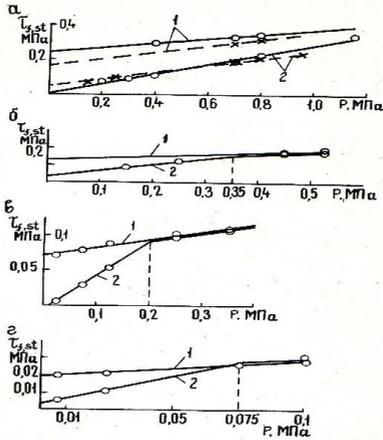


Fig.1 Shear diagrams of bentonite clay , a) solid lines for  $W_o=0,326$ ; dashed lines for  $W_o=0,433$ ; c)  $W_o=0,522$ ; d)  $W_o=0,945$ ; 1) for initial moisture content  $W_o$ ; 2) for complete water-saturation after application of compacting pressure.  $\sigma_z$ .

The results of the experimental studies made it possible to draw the following conclusions:

1. In the range of variability of the water content  $W_o > W_p$ , the shear strengths of unmoistened and moistened swelling soil samples after application of the compacting pressure  $P_z > \sigma_{sw,0}$  are practically equal.
2. For  $P_z < \sigma_{sw,0}$  moistening leads to swelling of the samples and a sharp reduction in their strength. Hence, shear strength parameters  $tg\phi$  and  $C$  obtained from equation  $\tau_{f,st} = f(\sigma_{sw,0}, \sigma)$  cannot be considered valid.
3. The shear strength diagrams of moistened samples under the action of  $P_z > \sigma_{sw,0}$ ;  $P_z < \sigma_{sw,0}$  with  $W_o > W_p$  have the form of broken lines.
4. The compacting pressure  $P_z$  corresponding to break point in the  $\tau_{f,st} - P_z$  diagram equals  $\sigma_{sw,0}$  of the soil in its given state. It is somewhat higher than the free swelling pressure determined before application of  $P_z$ .
5. In case of the need to determine  $\tau_{f,st}$  for two limiting values of water content  $W_o$  and  $W_f$  of the swelling soil for  $W_o > W_p$ , this can be confined to locating only the  $\tau_{f,st} - P_z$  diagram of the samples moistened under the action of  $P_z > \sigma_{sw,0}$ . Here, not less than three  $\tau_{f,st}$  values should be experimentally determined under the action of  $P_z > \sigma_{sw,0}$ .
6. The regularities in the shear strength of swelling soils as examined above are destroyed for water content  $W_o < W_p$ . In this case, the shear strength diagram of the natural water content samples and those moistened after application of are represented in the form of straight lines characterized by the parameters  $\phi$  and  $C$  which differ from each other. In order to explain the effect of the scale factor (sample height) on  $\tau_{f,st}$  twin samples of height  $h=10$  mm with  $W_o=0,523$  under the conditions  $P_z > \sigma_{sw,0}$ ;  $P_z < \sigma_{sw,0}$  and,  $h=4,5$  and  $10$  mm with  $W_o=0,323$  and

$P_z > \sigma_{sw,0}$  were additionally tested for shear. It was established that for the water content values indicated, the shear strength of bentonite clay does not depend on sample height. Of particular interest are the equalities confirmed by the present investigation of  $\sigma_{sw,0}$  values of the natural water content and water-saturated samples after application of the compacting pressures  $P_z > \sigma_{sw,0}$  with  $W_o > W_p$ . This phenomenon was conditioned by the relaxation of the swelling pressure  $\sigma_{sw,0}$  [2,4] occurring in the process of the movement of the moistening front in the sample with its volume remaining unchanged. With a view to confirm the above, bentonite clay samples were water-saturated with  $W_o = 0,523$  for  $h = 2,5; 10, \text{ and } 24 \text{ mm}$  ( $d = 101 \text{ mm}$ ) in the instruments M-5 under a pressure  $P_z = 0,625 \text{ MPa}$ . For this, screw drives were used to build up the pressures which were registered by means of the dynamometers DOSM-3-1. From the experiments it was established that with moistening of the samples, there was a small increase in the dynamometer readings (compacting pressures) up to  $0,0025 \text{ MPa}$  and additional compaction of the samples in the range  $0,005-0,015 \text{ mm}$ .

It was evident that in the absence of the swelling pressure relaxation, the dynamometer readings should equal the sum of the outside force and the force arising due to  $\sigma_{sw,0}$ . However, as a result of the relaxation, small increases were recorded in the dynamometer readings in the experiments. These increases characterize the residual (post relaxation) forces which themselves led to an insignificant additional compaction of the samples. Due to this, the outside compacting pressure practically does not reduce under the effect of the outer pressure created by the soil swelling, and no decrease is observed in the soil shear strength. This shows that with  $W_o > W_p$ , moistening of the soil does not lead to a reduction in the structural strength of the swelling soil.

When the natural (initial) water content of the swelling soil is less than the lower plasticity limit  $W_o < W_p$ , then in moistening the soil under the action of  $P_z > \sigma_{sw,0}$ ;  $P_z < \sigma_{sw,0}$  a sharp reduction in the structural strength is observed (Rebinder effect). The effect of this phenomenon on the shear strength is significantly higher than the soil swelling effect for  $P_z > \sigma_{sw,0}$ ;  $P_z < \sigma_{sw,0}$  and, therefore, the soil swelling action is somewhat put off. This is firstly confirmed by the form of the shear strength diagram of the water-saturated samples after application of  $P_z > \sigma_{sw,0}$ ;  $P_z < \sigma_{sw,0}$  and secondly, by the small deformation in their compactness which was absent for  $W_o > W_p$ . Consequently, for an initial water content  $W_o < W_p$  of the swelling soil, as opposed to the case when  $W_o > W_p$ , it is necessary to experimentally determine the shear strength both in the natural water content as well as in the water saturated states.

**Shrinking impact on shear strength of clayey soils** - There are a number of examples of slope deformation because of construction cracks development. Slope stability assessment for these conditions is one of the problems in engineering geology and soil mechanics. Shrinkable fissuring development in nature is result of irregular distribution of temperature and humidity in drying soils. Because of

stretching stresses on slopes, shrinkage cracks are being generated at small intervals of soil humidity alterations. Orientation of shrinkable fissuring during generation is perpendicular to slope surface, but with depth, it changes to parallel one. Such cracks lead to slackening of slopes stability. The actual stability of slopes for noted conditions depends not only on method analyses, but also on correct selection of strength properties of soils - angle of internal friction and cohesion value. Reliability of slopes stability factor at landslide terrains directly depends on reliability of definition of these parameters at sliding sites. Revealing of influence of shrinkable fracturing of clays on shear strength we shall consider on an example of sliding sites of a dam of water reservoir at Gadir-Al-Bustan (Syria). There are many methods for definition of shear strength. But in applied geotechnics, there is no method taking into account impact of shrinkable fissuring in shear strength analyses. With the purpose to solve this problem for the fallen site of a dam the definition of shear strength was applied by actual sliding displacement or as sometimes name, by a method of return calculation [2]. The method is based on results of morphological survey of a slope provided that before the beginning of sliding process the slope was in a limiting condition. With this purpose the following was done: a) The relief of a slope before sliding is restored b) Position of a sliding surface and depth of fractures abruption is determined. Results of these works are given on figure 1. Shear strength parameters have been calculated on Geo-Slope software by a method of return calculation. Following shear strength parameters were obtained:  $\text{tg } \varphi = 0.335, C = 0.002 \text{ MPa}$ . Based on shear strength results obtained by standard laboratory tests, for a sliding site the factor of stability of an air face is determined on Geo-Slope software. Shear strength parameters obtained by standard laboratory method and calculated stability factor of air face have following values:  $\text{tg } \varphi = 0.375, C = 0.0786 \text{ MPa}, K_{\text{stab}} = 1.25$ . Comparison of obtained data indicates, that in cases where shrinkable fracturing is exists the laboratory test results could not be applied in stability factor calculation, because the laboratory data bring to increased stability factor that does not correspond to actual state of soil in sliding zone. Thus, accuracy of shear strength parameters depend on as far as the initial form of a relief of a slope is correctly restored. Shear strength laboratory tests have been carried out to predict slope stability of the reservoir dam in Gadir-Al-Bustan. The tests have been carried out on one-plane shear device by the N.N.Maslov's method of "repeated shearing" [2, 3]: a) shear surface correspond to natural conditions; b) shear surface is same, but moistened. Experimental test data for samples taken from well N1 (depth intervals 2.8-3.2m) and well N2 (3.0-3.5m) are given in Table 2. Experiments have been conducted both by two methods, standard one and outlined above. Table 2 indicates shear strength parameters defined by reverse calculations and at three modes of tests.

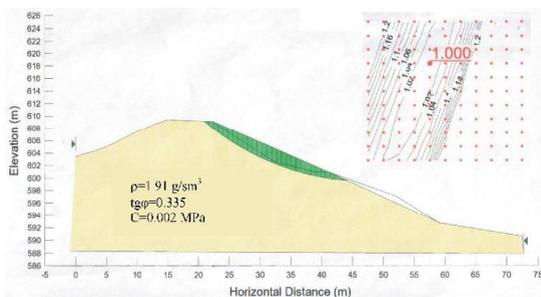


Figure 2. Reverse calculation of caving slope (dam in Gadir-Al-Bustan, Syria)

Table 2

Standard test		Shear surface correspond to natural conditions		Shear surface correspond to natural conditions, but moistened		Reverse calculation	
tgφ	C, MPa	tgφ	C, MPa	tgφ	C, MPa	tgφ	C, MPa
0.375	0.0789	0.378	0.0258	0.329	0.0011	0.335	0.002

Obtained data show practical concurrence between shear strength parameters defined both by reverse calculation and by one-plane shear test on a prepared moistened shear surface. Actually, offset takes place by the way of shear of blocks on a fissured and wetted surface. The table is also showing the existence of phenomenon called “conservatism” of the angle of internal friction, when the difference makes only 2-3 degrees in that case, that change of cohesion value is essential.

### References

1. E.A. Sorochan Construction of Buildings in Swelling Soils (in Russian), Stroizdat, Moscow (1989)p.400
2. Y.P.Yemelyanova, The basic mechanisms of sliding processes, Moscow, Nedra, 1972, p.310
3. N.N.Maslov, Soil mechanics in practice of construction, Landslides and struggle against them, Moscow, Stroyizdat, 1977, p.320
4. S.R.Meschian, Rheological processes in clay soils with consideration of specific impacts, Yerevan, Hayastan, 1992, p.393

### Information about author:

Hairoyan Sargis Doctor of geology. Institute of Mechanics of National Academy of Sciences of Armenia  
 Phone: (374 93)226210, E-mail hairuyan@ysu.am

# INTERNAL POLARITON RESONANCE IN A PERIODIC OPPOSITELY POLARIZED MAGNETO-ELECTRO-ELASTIC STRUCTURE

*Piliposyan D.*  
*Armenia*

Propagation of electro-magneto-acoustic waves in a magneto-electro-elastic (MEE) superlattice has been investigated with full coupling between mechanical and electric fields. Due to simultaneous piezoelectric and piezomagnetic effects, an orthogonally polarised electromagnetic wave couples with the similarly polarised lattice vibration, resulting in a phonon-polaritons. The dispersion relation has been used to demonstrate the coupling not only in the long wave region at high acoustic microwave frequencies.

## 1. STATEMENT OF THE PROBLEM

Propagation of electro-magneto-elastic waves in elastic, piezoelectric and magneto-electro-elastic (MEE) periodic structures recently attracted much attention due to the wide range of application of these structures in smart materials. It is well known that band gap effects for the propagation of both electromagnetic and acoustic waves can be obtained in such structures. These effects are due to the periodic modulation of the physical parameters resulting in Bragg reflection and the formation of frequency band structures [1-5]. Bragg reflection, however, may not be the only mechanism for band structure formation. Some other effects such as acousto-optic polariton coupling in piezoelectric periodic structures can also generate band gaps [6-7].

We will consider the 1D vibration of magneto-electro-mechanical (MEE) identical crystals of hexagonal 6mm symmetry, with periodic oppositely polarized crystallographic axes parallel to the Oz direction (Fig 1), when the transversal electro-magneto-elastic wave travels along the Oz direction.

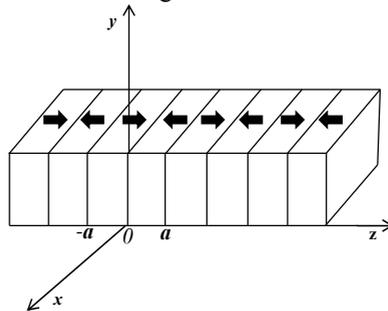


FIG.1. Schematic diagrams of the 1D MEE superlattice.

The interaction between the transversal EM wave and transversal elastic waves in each oppositely polarized material can be described by the following one-dimensional equations and constitutive relations

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad \boldsymbol{\sigma} = G \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \mp e \mathbf{E} \mp d \mathbf{H}, \quad (1)$$

$$\mathbf{D} = \pm e \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + \varepsilon \mathbf{E} + g \mathbf{H}, \quad \mathbf{B} = \pm d \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + g \mathbf{E} + \mu \mathbf{H}, \quad (2)$$

$$\text{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \text{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3)$$

where  $\mathbf{u}=(u_x, u_y)$  are the displacement vector,  $\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_{xz}, \sigma_{yz})$  the stress tensor,  $\mathbf{B}=(B_x, B_y)$ ,  $\mathbf{D}=(D_x, D_y)$ ,  $\mathbf{E}=(E_x, E_y)$  and  $\mathbf{H}=(H_x, H_y)$  the electric displacement, the electric field intensity and the magnetic field intensity,  $\rho$ ,  $G=c_{44}$ ,  $\varepsilon=\varepsilon_{11}$  and  $\mu=\mu_{11}$  the mass density, the elastic, dielectric and magnetic coefficients,  $e=e_{15}$ ,  $d=d_{15}$  and  $g=g_{15}$  the piezoelectric, piezomagnetic and electromagnetic coupling coefficients. After introducing the following notations

$$u = u_x + i u_y, \quad \sigma(z) = \sigma_{xz}(z) + i \sigma_{yz}(z), \quad H = H_x + i H_y, \quad E = E_x + i E_y,$$

$D = D_x + i D_y$ ,  $B = B_x + i B_y$ , ( $i=\sqrt{-1}$ ), equations (1)-(3) can be replaced by the system of three equations with respect to unknown functions  $u$ ,  $H$  and  $E$

$$\varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial t} - i \frac{\partial H}{\partial z} \pm e \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t} = 0, \quad (4)$$

$$g \frac{\partial E}{\partial t} + \mu \frac{\partial H}{\partial t} + i \frac{\partial E}{\partial z} \pm d \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t} = 0, \quad (5)$$

$$G \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \mp e \frac{\partial E}{\partial z} \mp d \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \quad (6)$$

In equations (1-6) the upper sign before coefficients  $e, d$  relates to the interval  $-a < z < 0$ , the lower sign before coefficients  $e, d$  relates to the interval  $0 < z < a$ .

Equations (4)-(6) couple transverse elastic displacements with transverse components of the electromagnetic field. Harmonic time dependence in the form  $\exp(i\omega t)$  for the all time-dependent variables with  $\omega$  as wave angular frequency is assumed henceforth.

After putting the interface conditions at  $z = 0$  that represent continuity conditions for the displacements, shear stresses and tangential components of the magnetic and electric field vectors (tangent to interface surfaces) and Bloch conditions the

dispersion relation will have the following form, where  $\lambda = e^{2ika}$  and where  $k$  is the Bloch wave number we come to dispersion equation

$$F(\lambda, \omega) = \lambda^4 + f(\omega)\lambda^3 + g(\omega)\lambda^2 + f(\omega) + 1 = 0. \quad (7)$$

Here the following notations are used

$$f = -V(\xi^2 - 4) \left[ 2(w_2 - 2\alpha^2\xi)^2 + (1 - 4(1+r)\alpha^4)^2 \cos(aq) + (1 - 4(1+r)\alpha^4)^2 - 4(1 + 4\alpha^4(3 + w_2) - 2\alpha^2w_2\xi) \cos(aq) \right] \cos(ap) + 32\alpha^2(w_2 - (2+r)\alpha^2\xi) \sin(ap) \sin(aq), \quad (8)$$

$$V = 1/2\alpha^4(\xi^2 - 4)^2, \alpha = c_0/c, w_1 = (8 + 6r + \xi^2), w_2 = 1 + 4(1+r)\alpha^4,$$

$$p = \omega \sqrt{(\xi - \sqrt{\xi^2 - 4})/2c_0c}, \quad q = \omega \sqrt{(\xi + \sqrt{\xi^2 - 4})/2c_0c},$$

$$\xi = c/\tilde{c}_0 + \tilde{c}_0/c > 2, \tilde{c}_0 = \sqrt{\tilde{G}/\rho}, c_0 = \sqrt{G/\rho}, c = 1/\sqrt{\varepsilon\mu - g^2},$$

$$\tilde{G} = G(1+r), r = (d^2\varepsilon + e^2\mu - 2deg)/G(\varepsilon\mu - g^2),$$

where  $r$  is the electromagnetic coupling coefficient of the MEE material. Presenting (7) in the form

$$(\lambda + \lambda^{-1})^2 + (\lambda + \lambda^{-1})f + g - 2 = 0, \quad (9)$$

and taking into account that  $\lambda = e^{2ika}$  and  $\lambda + \lambda^{-1} = 2\cos(2ak)$

the trigonometric solutions of the dispersion equation are,

$$\cos(2ak) = (-f - \sqrt{f^2 - 4g + 8})/4, \quad \cos(2ak) = (-f + \sqrt{f^2 - 4g + 8})/4.$$

Dispersion equations (10) describe not only the band structure at both acoustic and optic frequencies due to the Bragg scattering but also band gaps due to acousto-optic resonances.

## 2. NUMERICAL RESULTS AND DISCUSSIONS

Numerical calculation have been carried out at acoustic frequency regions for a MEE superlattice. Since the dispersion curve of photons at acoustic frequencies is too close to the vertical axis (Fig. 2(a)) the coupling between the EM wave and superlattice vibration can be seen in the long wavelength region. Figure 2(b) shows the acousto-optic resonance in the MEE superlattice which is made of the same MEE material with opposite polarizations in two adjacent domains. The detailed profile of the band structure in the long wavelength region in Figure 2(b)

demonstrates the phonon-photon coupling. The horizontal lines correspond to the phase velocity of the acoustic wave enhanced by the piezoelectric-piezomagnetic coupling. The linear oblique dotted line computed by equation (20) corresponds to the phase velocity of pure EM wave uncoupled to the lattice vibrations. The region of crossover of these two lines is the resonance region, where for a very narrow range of  $k$  neither an EM nor an acoustic wave can propagate.

As it shows in Figure 2(b) the acousto-optic coupling for takes place at not all integer multiples of fundamental resonance frequency but only for odd values  $(\omega a)/(\pi c_0^{(1)})=m, m=1,3,\dots$ , for even  $m$  polariton is not excited. For an MEE superlattice the width of the first gap is about 7.5%, higher than for piezoelectric superlattices in [6].

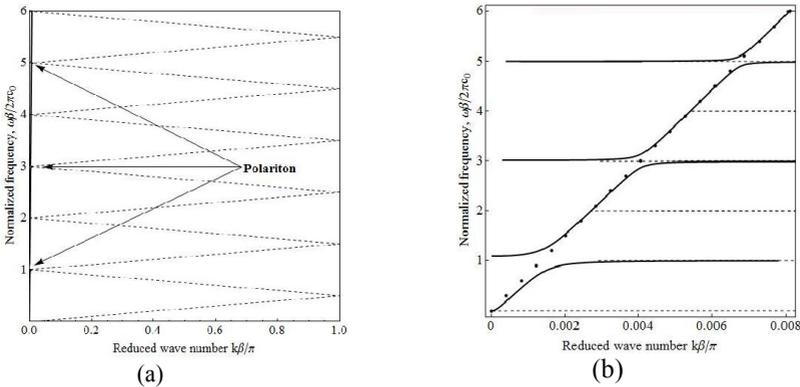


FIG. 2. (a) Band structure of an MEE superlattice at acoustic frequencies for, (b) the zoomed profile of the band structure and phonon-polariton near the centre of the Brillouin zone. The horizontal dashed lines correspond to the phase velocity of the acoustic wave enhanced by the piezoelectric-piezomagnetic coupling. The linear oblique dotted line corresponds to the phase velocity of a pure EM wave,  $\beta=2a$ .

### 3. CONCLUSION

We have calculated a closed form of the dispersion relation for the propagation of coupled electro-magneto-elastic waves in a magneto-electro-elastic (MEE) superlattices. This is a new class of composites consisting of piezoelectric and piezomagnetic phases with both elastic and magneto-electric coupling between the phases. Due to the dynamic settings of the Maxwell's equations both the optical effects and effects from the rotational part of the electric field are taken into account, giving an opportunity to analyse the acousto-optic resonances. These resonances give rise to phono-photon polaritons at acoustic (in a microwave region) and optical frequencies (in infrared region).

In the present setting when the wave vector of a magneto-electro-elastic coupled wave is parallel to the polling direction, the piezoelectric, piezomagnetic

and magneto-electric effects on frequency band gaps due to Bragg scattering are quite weak. In a quasistatic setting of the Maxwell's equations the piezoelectric and piezomagnetic coefficients are even not present in the equations. The acousto-optic coupling however due to piezoelectric, piezomagnetic and magneto-electric effects is strong.

## REFERENCES

1. А.С Аветисян., К.Б. Казарян, Волны в “фонон-фотон” кристаллах и импеданс. В сб. “Проблемы механики деформируемого твердого тела” посвящ. 90-летию академика НАН Армении С.А. Амбарцумяна. Ереван. 2012, с.15-22.
2. D.M.Adams, R.V., Craster, S.Guenneau “Bloch waves in periodic multi-layered acoustic waveguides”. Proceedings London Royal Society, 2008, A, 464, p.2669-2692.
3. Papanicolaou V.G “The periodic Euler-Bernoulli Equation,” Trans. American Math. Soc. 2003,, v.355,p. 3727-37599.
4. K.B. Ghazaryan, D.G. Piliposyan, “Interfacial effects for shear waves in one dimensional periodic piezoelectric structure,” Journal of Sound and Vibrations, 2011, v. 330(26), p.6456–6466.
5. F.J. Sabina, A.B. Movchan “Interfacial effects in electromagnetic coupling within piezoelectric phononic crystals,” Acta Mechanica Sinica 25, 2009, p.95-99.
6. X.J. Zhang, R.Q. Zhu, J. Zhao, Y.F. Chen, and Y.Y. Zhu, “Phonon-polariton dispersion and the polariton-based photonic band gap in piezoelectric superlattices,” Phys. Rev. B, 2004, 69, p.085118 (1-10)
7. D. G. Piliposyan, K. B Ghazaryan, G. T. Piliposian, Internal resonances in a periodic magneto-electro-elastic structure, Journal of Applied Physics, 2014,116, p.044107 (1-7)

### **Davit Piliposyan**

Junior Researcher at the Institute of Mechanics of NAS RA.

Phone: +374 91 24 11 11

E-mail: [davitpiliposyan@gmail.com](mailto:davitpiliposyan@gmail.com)

# FAST ITERATIVE ALGORITHM FOR NEUMANN-TYPE BOUNDARY VALUE PROBLEMS IN 2D DIFFRACTION

*Popuzin V., Pennisi M.*

*Russia, Italy*

In the present work we propose a fast iteration algorithm to the integral equations of the second kind arising in 2d diffraction problems. Such equations are of Fredholm type, and any natural discretization leads to a linear algebraic system (LAS) with matrices of fully dense structure. The direct treatment with a grid containing  $N$  nodes implies that the matrix has  $N^2$  nonzero elements, and this requires  $O(N^3)$  arithmetic operations by the Gauss elimination technique. With the frequency increasing, if one keeps at least 10 nodes per wavelength, such a treatment becomes computationally too expensive. To overcome this difficulty in our previous works we have proposed an alternative iterative approach to diffraction by soft obstacles, which requires at each iteration step to solve only a Toeplitz LAS. The main goal of the present paper is to extend this approach to the diffraction problems for hard obstacles. At the same time, we apply here a different, improved, strategy which allows us to operate with Toeplitz matrices of a special form, the so-called circulant matrices, which admit more efficient treatment by using convolution method. Another goal is to evaluate convergence of the proposed method versus frequency and obstacle's geometry.

Numerical experiments, illustrated in the paper, demonstrate that the method possesses fast convergence. There is also given a comparison with some previous works and with the classical conjugate gradient method for various geometries and wave numbers.

**1. Formulation of the problem.** In wave problems of mathematical physics the Boundary Integral Equation (BIE) method represents a powerful instrument to find and analyze solutions of arising boundary value problems. In the case of 2D scattering by hard obstacles the problem can be reduced to a second-kind integral equation [1].

Let us consider 2D diffraction of a plane incident wave  $p^{inc}$  by a hard obstacle with smooth closed boundary curve  $l$ . The governing equation is the Helmholtz partial differential equation with the Neumann-type boundary condition [1]:

$$\Delta p = 0, \quad p = p^{inc} + p^{sc}, \quad \left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_l = 0 \sim \left. \frac{\partial p^{sc}}{\partial n} \right|_l = - \left. \frac{\partial p^{inc}}{\partial n} \right|_l, \quad (1.1)$$

where  $p^{inc} = \exp[ik(y_1^0 \cos \alpha + y_2^0 \sin \alpha)]$ .

By applying Green's integral formula, this can directly be reduced to the following integral equation of the second kind:

$$p(y_0) - 2 \int_l p(y) G(y, y_0) dl_y = 2 p^{inc}(y_0), \quad y_0 \in l; \quad (1.2)$$

where  $y = (y_1, y_2)$ ,  $y_0 = (y_1^0, y_2^0)$ , and Green's function is represented by the Hankel function

$$\Phi(r) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr), \quad G(y, y_0) = \frac{\partial \Phi(r)}{\partial n_y} = -\frac{ik}{4} H_1^{(1)}(kr) \frac{(\vec{r} \cdot \vec{n}_y)}{r}. \quad (1.3)$$

Here  $dl_y$  is the elementary arc-length of the boundary line coupled with point  $y \in l$ ,  $\bar{n}_y$  is the outer unit normal vector to contour at this point,  $\Phi(r)$  is Green's function expressed in terms of Hankel transcendental function, and  $r = |y - y_0|$ .

Now, by dividing contour  $l$  to  $N$  small subintervals of length  $\Delta l_j$ ,  $j=1, \dots, N$  and choosing nodes  $y_j$  say at the central points of each small subinterval, one can reduce BIE in a standard way to the following LAS with respect to quantities  $p_j = p(y_j)$  [2]:

$$\sum_{j=0}^{N-1} p_j c_{mj} = p^{inc}(y_m), \quad m = 1, \dots, N, \quad (1.4a)$$

$$c_{mm} = 1/2; \quad c_{mj} = -G(y_j, y_m) \Delta l_j, \quad (j \neq m). \quad (1.4b)$$

**2. Iteration algorithm.** The classical Gauss elimination gives a natural tool to deal with LAS (1.4). This requires  $O(N^3)$  arithmetic operations. The iterative conjugate gradient (CG) method, with an appropriate pre-conditioning and with the help of a certain fast matrix-vector multiplication, requires  $O(Nn_{iter} \log(N))$  operations, where  $n_{iter}$  is the number of iterations. Numerical experiments show that such a treatment converges only for low and moderate frequencies.

The alternative strategy to arrange fast computations is to proceed with a matrix of a specific structure. In the previous works [3, 4] we proposed two different methods which deal with Toeplitz matrices, each with its characteristic advantages and disadvantages. In [3] there is proposed an algebraic approximation which deals with the matrix elements themselves after discretization, leaving aside analytical properties of the kernel function. This method is convenient from the computational point of view, since it allows one to organize a unique machine code for many different physical problems. Solution of LAS and matrix-vector multiplication with such a matrix both are  $O(N \log(N))$  expensive, where solution is performed by the PCG (preconditioned conjugate gradients) method with a circulant pre-conditioner. The matrix-vector multiplication has been performed by using a C++ code of the ACA algorithm as a part of the standard library HLibPro [6].

The basic idea of [3] is to arrange the averaging over the elements belonging to any diagonal parallel to the principal one. Actually, there is no need to collect all elements of the Toeplitz matrix, since they can be collected in a vector of dimension  $2N$ , sufficient to represent the matrix. To this end, we build an approximated vector  $d_i$  with  $2N$  elements, where  $i = -(N-1), \dots, N-1$ , that satisfies the relation  $c^t_{ij} = d_{i-j}$ ,  $i, j = 1, \dots, N$ :

$$d_i = \begin{cases} \frac{\sum_{j=1}^{N+i} e_{j,j-i}}{N+i}, & i = -(N-1), \dots, 0; \\ \frac{\sum_{j=1}^{N-i} e_{j+i,j}}{N-i}, & i = 1, \dots, N-1; \end{cases} \quad (2.1)$$

that is clearly shown in the following scheme:

$$C = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & e_1 & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & e_2 & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \ddots & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & e_{m-1} \\ \bullet & e_m \\ \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix} \begin{matrix} d = \frac{\sum_{j=1}^m e_j}{m} \\ \Rightarrow C^c = \end{matrix} \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & d & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & d & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \ddots & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & d \\ \bullet & d \\ \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix}$$

Another technique proposed in [4] has been applied in diffraction problems for soft obstacles with star-like contours. In such a two-dimensional problem the kernel contains certain exactly convolution term. Thus, the approximation procedure is based on reducing the remaining part to a constant by averaging over the polar angle.

Such an approach is very attractive, because it requires even less memory than the previous one, in fact this type of matrix can be stored in a vector with  $N$  elements. Furthermore, a much simpler convolution algorithm can be used to solve the equations with such kind of matrices in quasi-linear time. Unfortunately, it is not clear how to construct such a matrix for more general kernel functions.

In the present paper we propose an algorithm which unites the advantages of both the techniques. Namely, the proposed method is based upon the algebraic construction of the circulant matrix in the following way

$$C = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & e_1 & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & e_2 & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \ddots & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & e_{m-1} \\ \bullet & e_m \\ e_{m+1} & \bullet \\ \bullet & \ddots & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & e_N & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \Rightarrow C^c = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & d & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & d & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \ddots & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & d \\ \bullet & d \\ d & \bullet \\ \bullet & d & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & d & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}$$

By using this approximation, one can rewrite LAS (1.4) in the equivalent form

$$C^c p = f + (C^c - C)p \quad (2.2)$$

Then the iteration scheme may be arranged as follows:

$$C^c p_{q+1} = f + (C^c - C)p_q, \quad q = 0, 1, \dots, \quad (2.3)$$

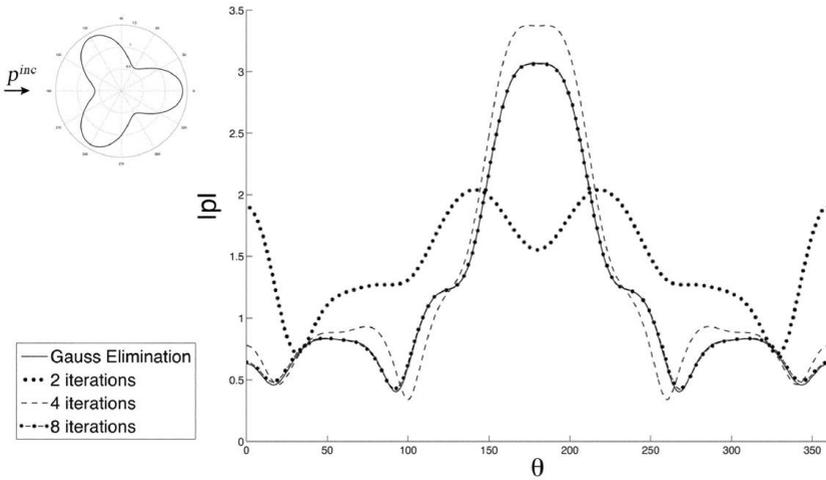
where the initial-step solution may be taken trivial:  $p_0=0$ .

As follows from the classical results of functional analysis [5], if  $\|C^c - C\|$  is sufficiently small then the iteration process is certainly convergent.

Obviously, each iteration step requires solution of a LAS with the circulant matrix  $C^c$  and matrix-vector multiplication in the right-hand side of (2.3). The former is attained by a simple convolution scheme. However, the right-hand side of the system is a matrix-vector product, with a general matrix of no specific structure. In order to provide a fast computational process with this matrix-vector multiplication, we use the *adaptive cross approximation (ACA) algorithm*. In practice, we used the C++ library HLibPro, to realize a fast matrix-vector multiplication by the ACA method.

### 3. Numerical example and conclusions.

1) The convergence of the proposed algorithm has been tested on many examples. One of them is demonstrated in figure below, for a three-leaves rose which in the polar coordinate system is  $\rho(\theta)=2+1.5 \cos(3\theta)$ .



The number of nodes with the discretization is  $N=2^{10}$  and wave number is  $k=2$ . In this case the classical CG method diverges. The proposed method converges, and one can see that the 8th iteration is practically indistinguishable from the exact diagram constructed by the Gauss elimination.

2) The numerous calculations carried out show that convergence of the iterative scheme takes place up to significantly higher frequencies when compared with the

standard CG method. The number of iterations in the proposed algorithm does not depend on the size of numerical grid, being more sensitive to the wave number and to the shape of the obstacle. In particular, for three-leaves-rose obstacle (see figure) our algorithm converges for  $0 < k < 5,6$ .

3) With increasing of the number of leaves, the upper frequency boundary of the convergence is naturally decreases. Thus, in the case of 8-leaves rose,  $\rho(\theta) = 2 + 1.5 \cos(8\theta)$ , the algorithm converges only for  $0 < k < 0,35$ .

4) It is very interesting to study the convergence in the class of elliptic obstacles with various aspect ratio. Let us set the bigger semi-axis of the ellipses to be unit:  $a = 1$ . Then with variation of the second semi-axis one can observe the following:  $b = 0.3$  – convergence for  $0 < k < 5$ ;  $b = 0.1$  – convergence for  $0 < k < 3$ ; and the critique value is  $b = 0.0022$  when the convergence breaks even for extremely low frequencies.

### **Acknowledgments**

The work has been carried out with financial support of the Russian Ministry for Education and Science, Project 9.1371.2014/K.

### **REFERENCES**

1. Colton D., Kress R. Integral Equation Methods in Scattering Theory, NY: John Wiley, 1983.
2. Banerjee P.K., Butterflied R. Boundary Element Methods in Engineering Science, London: McGraw Hill, 1981.
3. Scalia A., Sumbatyan M.A., Popuzin V.A fast BIE iteration method for an arbitrary body in a flow of incompressible inviscid fluid. //J. Comput. Applied Math., 2013, vol. 237(1), 508—519.
4. Scalia A., Popuzin V., Pennisi M. Fast iteration algorithm for integral equations of the first kind arising in 2D diffraction by soft obstacles. //J. Comput. Acoust., 2013, vol. 21(3), 1350007-1—1350007-10.
5. Kantorovich L. V., Akilov G. P. Functional Analysis, NY: Pergamon Press, 1982. <http://www.hlibpro.com>.

### **Information about the authors:**

**Popuzin Vitaly** — Ph.D., Junior Researcher, Southern Federal University, Faculty of Mathematics, Mechanics and Computer Science; Phone: 8(928)1300179;

E-mail: [popuzin@gmail.com](mailto:popuzin@gmail.com)

**Pennisi Marzio** — Ph.D., Post Doc, University of Catania, D.M.I.;

E-mail: [mpennisi@dmi.unict.it](mailto:mpennisi@dmi.unict.it)

# PROBLEMS OF STABILIZATION STATICALLY UNSTABLE SYSTEMS BY VIBRATION

*Seyranian A. P.*

*Russia*

Two problems of stabilization of statically unstable systems by vibration are considered. First problem is a well known problem of stabilization of an inverted pendulum by high frequency excitation of the suspension point. The second problem is stabilization of an elastic rod compressed by a longitudinal force greater than the critical Euler's value by longitudinal vibration (Chelomei problem). Stabilization regions are found both analytically and numerically. It is shown that, in contrast to high-frequency stabilization of an inverted pendulum with a vibrating suspension point, the rod is stabilized at excitation frequencies of the order of the natural frequency of transverse oscillations belonging to a certain region.

**1. Stabilization of an inverted pendulum.** Vibration and stability of an inverted pendulum were studied by many authors, see e.g., papers [1-5] on stabilization of the inverted vertical equilibrium position by high-frequency excitation of the suspension point. The difference between present paper and previous research is that we assume existence of viscous damping forces, consider arbitrary periodic excitation function, and use the method of stability study of periodic systems based on analysis of the Floquet multipliers. Oscillations of a physical pendulum with the vibrating suspension point about upper vertical (statically unstable) position is described by the equation

$$I\theta_{tt} + c\theta_t - mr(g + z_{tt})\sin\theta = 0. \quad (1.1)$$

Here  $I$  and  $m$  are the moment of inertia and mass of the pendulum,  $\theta$  is the angle measured from the vertical axis,  $C$  is the damping coefficient,  $r$  is the distance between suspension point and the center of gravity,  $g$  is the acceleration due to gravity,  $z$  is the vertical displacement of the suspension point following the law  $z = a\phi(\Omega t)$ , where  $\Omega$  is the excitation frequency, and  $\phi(\tau)$  is an arbitrary  $2\pi$ -periodic function. The amplitude  $a$  and damping coefficient  $C$  are supposed to be small. For the sake of simplicity we use notation  $\varphi = -\phi_{tt}$  and assume that the mean value of the periodic function  $\varphi(\tau)$  is equal to zero.

We introduce non-dimensional time and parameters

$$\tau = \Omega t, \quad \beta = \frac{c}{I\Omega}, \quad \varepsilon = \frac{a\Omega_0^2}{g}, \quad \omega = \frac{\Omega_0}{\Omega}, \quad \Omega_0 = \sqrt{\frac{mrg}{I}}, \quad (1.2)$$

where  $\Omega_0$  is the eigenfrequency of the pendulum with fixed suspension point about lower vertical position.

With this notation linearized equation (1.1) takes the form of Hill's equation with damping

$$\ddot{\theta} + \beta \dot{\theta} + [\mu + \varepsilon \varphi(\tau)] \theta = 0, \quad \mu = -\omega^2, \quad (1.3)$$

where the dot denotes differentiation with respect to  $\tau$ . The coefficients of this equation explicitly depend on the  $2\pi$ -periodic function  $\varphi(\tau)$  and three non-dimensional parameter  $\varepsilon, \beta, \omega$ . The amplitude and damping parameters  $\varepsilon$  and  $\beta$  are assumed to be small with respect to 1.

At  $\varepsilon = 0, \beta = 0$  the upper vertical position of the pendulum  $\theta = 0$  is unstable. Let us study possibility of stabilization of this position by high-frequency excitation of the suspension point. In this case we are close to the point  $\varepsilon = 0, \beta = 0, \mu = 0$ . To find the stability region in the vicinity of this point we use the method based on calculation of derivatives of the monodromy matrix and analysis of Floquet multipliers [6]. We show that the stability region for an arbitrary periodic function  $\varphi(\tau)$  in the vicinity of the point  $\mathbf{p}_0 = (0, 0, 0)$  in the first approximation is given by the inequality

$$\mu > F \varepsilon^2, \quad F = \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} t \varphi(t) dt \right)^2 - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) \int_0^t \tau \varphi(\tau) d\tau dt. \quad (1.4)$$

It can be shown that for most of the periodic functions the constant  $F < 0$ . In the formula for stabilization region the terms of higher order have the form of rather complicated multiple integrals. Using these relations we derive formulas for the stabilization frequency of the pendulum.

With introduction of the damping coefficient as  $\beta_0 = c/(I\Omega_0)$  for the function  $\varphi(\tau) = \cos \tau$  we obtain a formula for the stabilization frequency in the form

$$\frac{\Omega}{\Omega_0} > \sqrt{2} \left[ \frac{1}{\varepsilon} + \frac{7\varepsilon}{32} + \frac{\varepsilon \beta_0^2}{4} - \frac{2389 \varepsilon^3}{18432} \right] \quad (1.5)$$

Thus, at rather high excitation frequency the upper vertical position of the pendulum becomes stable, and small damping increases the critical stabilization frequency. The first term in the right hand side of (1.5) agrees with that of known in the literature, see e.g. [1-4]. But the last three terms confirm singularity [7].

**2. The Chelomei problem.** Let us consider a straight elastic rod of constant cross section, loaded by a periodic longitudinal force  $P(t) = P_0 + P_1 \phi(\omega t)$  applied at its end. The equation of transverse oscillations of the rod can be written

$$EJ \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + P(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\gamma m \frac{\partial u}{\partial t} + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (2.1)$$

where  $x$  is the coordinate along the rod axis;  $t$  is the time;  $u(x, t)$  is the rod deflection function;  $m$  is the mass per unit length;  $EJ$  is the flexural rigidity;  $\gamma$  is the damping coefficient;  $P_t$  and  $\omega$  are the excitation amplitude and frequency of the longitudinal vibration, respectively. We consider the case in which both ends of the rod are simply supported. Then solution of Eq. (2.1) can be found in the form of a series in eigenfunctions  $u(x, t) = \sum \varphi_j(t) \sin(j\pi x/l)$ . Substituting this series into Eq. (2.1), multiplying by  $\sin(k\pi x/l)$ , and integrating the result over the interval  $[0, l]$ , we arrive at an equation with respect to the functions  $\varphi_k(t)$

$$\frac{d^2 \varphi_k}{dt^2} + 2\gamma \frac{d\varphi_k}{dt} + \Omega_k^2 \left\{ 1 - \frac{P_0}{P_k} - \frac{P_t \phi(\omega t)}{P_k} \right\} \varphi_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.2)$$

where  $\Omega_k = \pi^2 k^2 \sqrt{EJ/m} / l^2$  is the  $k$ -th eigenfrequency of transverse free oscillations of the unloaded rod, and  $P_k = \pi^2 k^2 EJ / l^2$  is the  $k$ -th critical Euler's force. Let us introduce notation  $\beta_k = \gamma / \Omega_k$  and new time variable  $\tau = \omega t$ . Then, Eq. (2.2) can be rewritten as

$$\frac{d^2 \varphi_k}{d\tau^2} + 2\beta_k \left( \frac{\Omega_k}{\omega} \right) \frac{d\varphi_k}{d\tau} + \left( \frac{\Omega_k}{\omega} \right)^2 \left\{ 1 - \frac{P_0}{P_k} - \frac{P_t \phi(\tau)}{P_k} \right\} \varphi_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

The trivial equilibrium of the rod  $u(x, t) = 0$  is asymptotically stable if the functions asymptotically vanish  $\varphi_k(t) \rightarrow 0$  as  $t \rightarrow \infty$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , and it is unstable if at least one of the functions  $\varphi_k(t)$  exhibits unlimited growth as  $t \rightarrow \infty$ . In his paper [8], that became famous of [9,10], Chelomei posed the problem of stabilization of an elastic rod loaded by a periodic longitudinal force exceeding in compared with the natural frequency of the transverse oscillations of the uncompressed rod loaded by a periodic longitudinal force exceeding in average the Euler's critical value  $P_0 > P_1$ , i.e., of a statically unstable rod, by means of longitudinal vibration bringing it to the straight position. Assuming that the excitation frequency is high as compared with the natural frequency of the transverse oscillations of the uncompressed rod ( $\omega \gg \Omega_1$ ) and applying the perturbation method and the averaging method to Eq. (2.3) ( $k = 1$ ), Chelomei [8] obtained an inequality describing the rod stabilization domain. In the case of  $\phi(\tau) = \cos \tau$ , this inequality can be written as

$$\left(\frac{\omega}{\Omega_1}\right)^2 < \frac{\varepsilon^2}{2\alpha} - 4\beta_1^2, \quad (2.4)$$

where  $\varepsilon = P_t / P_1$ ,  $\alpha = P_0 / P_1 - 1$ , and  $\beta_1 = \gamma / \Omega_1$ . There is an obvious discrepancy: in deriving this relation, it was assumed that  $\omega / \Omega_1 \gg 1$ , while the critical stabilization frequency turns out to be of the order of the natural frequency. Indeed, setting, for example  $\varepsilon = 0.1$ ,  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta_1 = 0$  we obtain from Eq. (2.4) that  $\omega / \Omega_1 < 1 / \sqrt{10} = 0.316$ .

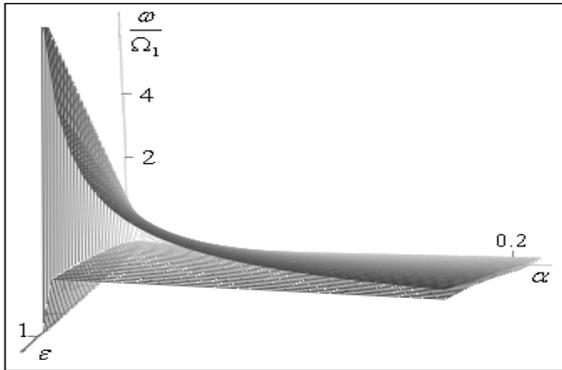


Fig. 1. Stabilization region.

Using formulas for Hill's equation we obtain

$$\varepsilon - 2\alpha + \sqrt{(\varepsilon - 2\alpha)^2 + \frac{\varepsilon^2}{2}} + \Delta < \left(\frac{\omega}{\Omega_1}\right)^2 < \frac{\varepsilon^2}{2\alpha} - \frac{7\alpha}{8} - 4\beta_1^2 \quad (2.5)$$

Thus, the stabilization domain boundaries depend on three small parameters, namely,  $\varepsilon$ ,  $\alpha$  and  $\beta_1$ . Inequality (2.5) indicates that taking damping into account lowers both the upper and lower boundaries of the stabilization frequency. Figure 1 shows the stabilization domain (unshaded) obtained numerically.

Let us estimate the influence of the instability (parametric resonance) regions for Eq. (2.3) at  $k = 2, 3, \dots$  on the stabilization region found above. It is possible that the instability regions for Eq. (2.3) at  $k = 2, 3, \dots$  intersect the stability region, thus narrowing the stabilization region. It is known that the parametric resonance for the Mathieu-Hill equations (2.3) takes place at frequencies close to

$$\omega = \frac{2\Omega_1 k^2}{n} \sqrt{1 - \frac{P_0}{P_1 k^2}}, \quad n=1,2,\dots \quad (2.6)$$

Only the first instability regions near the frequencies  $4\sqrt{3}\Omega_1$  and  $12\sqrt{2}\Omega_1$  are wide; in the presence of even a small damping, the instability corresponding to large values of  $n$  vanishes at moderate excitation amplitudes. Hence, it follows that, in the presence of damping, the instability regions for Eq. (2.3) at  $k = 2,3,\dots$  do not influence the stabilization region (2.5). Numerical calculations confirm this conclusion [11].

## REFERENCES

1. Stephenson A. On a new type of dynamical stability. Mem. Proc. Manchester Lit. Phil. Soc., V. 52, N. 8, P. 1-10, 1908.
2. Jeffreys H., Swirls B. Methods of Mathematical Physics. Cambridge: Univ. Press, 1966.
3. Kapitza P.L. Dynamical stability of a pendulum when its point of suspension vibrates, and pendulum with a vibrating suspension. In: Collected Papers by P.L.Kapitza (Haar D.T., Ed.). London, Pergamon, vol. 2, pp. 714-737, 1965.
4. Bogolyubov N.N. and Mitropol'skii Yu.A. Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations. Moscow, Nauka, 1974.
5. Panovko Ya.G. and Gubanov I.I. Stability and Vibrations of Elastic Systems. Modern Concepts, Paradoxes and Mistakes. Moscow, Nauka, 1987.
6. Seyranian A.P., Mailybaev A.A. Multiparameter Stability Theory with Mechanical Applications. New Jersey: World Scientific, 2003.
7. Seyranian A.A. and Seyranian A.P. The stability of an inverted pendulum with a vibrating suspension point. J. Appl. Math. Mech. V. 70, P. 754-761, 2006.
8. Chelomei V.N. On possibility to increase stability of elastic systems by vibration. Doklady Akad. Nauk SSSR. V. 110, No. 3, P. 345-347, 1956.
9. Chelomei V.N. Paradoxes in mechanics caused by vibration. Doklady Akad.Nauk SSSR. V. 270, No. 1, P. 62-67, 1983.
10. Chelomei V.N. Selected Works. Moscow, Mashinostroenie, 1989.
11. Seyranian A.A. and Seyranian A.P. Chelomei's problem of the stabilization of a statically unstable rod by means of vibration. J. Appl. Math. Mech. Vol. 72, P. 649-652, 2008.

### Information about authors:

#### **Seyranian Alexander P.**

Academician of Russian Academy of Natural Sciences, Academician of Armenian Academy of Sciences, Leading Researcher of Lomonosov Moscow State University, Moscow

Phone: +7 495 939 20 39, E-mail: seyran@imec.msu.ru

# THE CONTACT PROBLEM FOR A PIECEWISE-HOMOGENEOUS PLATE WITH A FINITE INCLUSION OF VARIABLE CROSS-SECTION

*Shavlakadze N.*

*Georgia*

A piecewise-homogeneous elastic orthotropic plate, reinforced with a finite inclusion of the wedge-shaped, which meets the interface at a right angle and is loaded with normal forces, is considered. The normal contact stresses along the contact line are determined, and the behavior of the contact stresses in the neighborhood of singular points is established. By using methods of the theory of analytic function, the problem is reduced to a singular integro-differential equation in a finite interval. Using an integral transformation, a Riemann problem is obtained, the solution of which is presented in explicit form.

The first fundamental problem for a piecewise-homogeneous plane was solved, when a crack of finite length arrives at the interface of two bodies at the right angle [1], and also similar problem for a piecewise-homogeneous plane when acted upon by symmetrical normal stresses at the crack sides, as well as the contact problems for a piecewise-homogeneous planes with a semi-infinite and finite inclusion [2-3]. We will consider a piecewise-homogeneous orthotropic plate, reinforced with a finite inclusion by a normal force of intensity  $p_1^0(x)$ . (Let us assume that  $p_1^0(x)$  is bounded function on the segment). As regards the inclusion, which has the form of a slightly cusped patch, it is assumed that it is rigidity coupled to the plate and bends as an ordinary beam. The condition of compatibility of the vertical deformations of the inclusion and the elastic piecewise-homogeneous continuous plate, loaded with normal stresses, is assumed.

The problem consists of determining the jump  $p_1(x)$  of normal contact stresses along the contact line and of establishing their behavior in the neighborhood of the ends of the inclusion. It is formulated as follows: suppose an elastic body  $S$  occupies the of complex variable  $z = x + iy$ , which contains, along the section  $l_1 = (0,1)$ , an elastic patch with cylindrical rigidity  $D(x)$  and consists of two half-planes of dissimilar materials  $S_1 = \{z \mid \operatorname{Re} z > 0, z \notin [0,1]\}$ ,  $S_2 = \{z \mid \operatorname{Re} z < 0\}$  joined along the  $Ox$  axis. Quantities and functions, referred to the half-plane  $S_k$ , will be denoted by the subscript  $k$  ( $k=1,2$ ), while the boundary values of the other functions on the upper and lower sides of the patch will by denoted by a plus or minus sign, respectively. We will assume that the left and right half-planes are homogeneous and the principal directions of elasticity coincide with the coordinate axes.

At the interface of the two materials we have the continuity condition

$$\sigma_x^{(1)} = \sigma_x^{(2)}, \quad \tau_{xy}^{(1)} = \tau_{xy}^{(2)}, \quad u_1 = u_2, \quad v_1 = v_2 \quad (1)$$

where  $\sigma_x^{(j)}, \sigma_{xy}^{(j)}$  are the stress components and  $u_j, v_j$  are the displacement components ( $j = 1, 2$ ).

We have the following condition on the segment  $l_1$

$$\frac{d^2}{dx^2} D(x) \frac{d^2}{dx^2} v_1^0(x) = p_1^0(x) - p_1(x), \quad x \in l_1, \quad D(x) = \frac{E_0 h_0^3(x)}{12(1 - \nu_0^2)} \quad (2)$$

Here  $v_1^0(x) = v_1(x, 0)$  is horizontal displacement of points of the inclusion, while the equilibrium conditions has the form

$$\int_0^1 [p_1^0(t) - p_1(t)] dt = 0, \quad \int_0^1 t [p_1^0(t) - p_1(t)] dt = 0 \quad (3)$$

The boundary conditions for the components of the stress field in the half-plane  $S_1$  has the form

$$\sigma_y^{(1)+} - \sigma_y^{(1)-} = p_1(x), \quad \tau_{xy}^{(1)+} - \tau_{xy}^{(1)-} = 0, \quad u^+ = u^-, \quad v^+ = v^-, \quad 0 < x < 1. \quad (4)$$

Using Lekhnitskii's formulae [4], the problem reduced to finding the functions  $\Phi_k(z_k), \Psi_k(z_k), k = 1, 2$ , holomorphic in the regions  $S_k$  with respect to the boundary conditions (4) and (1)

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[\Phi_1^+(x) - \Phi_1^-(x) + \Psi_1^+(x) - \Psi_1^-(x)] &= p_1(x) \\ 2\operatorname{Im}[\beta_1(\Phi_1^+(x) - \Phi_1^-(x)) + \gamma_1(\Psi_1^+(x) - \Psi_1^-(x))] &= 0 \end{aligned} \quad 0 < x < 1 \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[\rho_1(\Phi_1^+(x) - \Phi_1^-(x)) + r_1(\Psi_1^+(x) - \Psi_1^-(x))] &= 0 \\ \operatorname{Im}[\beta_1 r_1(\Phi_1^+(x) - \Phi_1^-(x)) + \gamma_1 \rho_1(\Psi_1^+(x) - \Psi_1^-(x))] &= 0 \\ \operatorname{Re}[\beta_1^2 \Phi_1(t_1) + \gamma_1^2 \Psi_1(\sigma_1)] &= \operatorname{Re}[\beta_2^2 \Phi_2(t_2) + \gamma_2^2 \Psi_2(\sigma_2)] \\ \operatorname{Im}[\beta_1 \Phi_1(t_1) + \gamma_1 \Psi_1(\sigma_1)] &= \operatorname{Im}[\beta_2 \Phi_2(t_2) + \gamma_2 \Psi_2(\sigma_2)] \\ \operatorname{Im}[\rho_1 \beta_1 \Phi_1(t_1) + r_1 \gamma_1 \Psi_1(\sigma_1)] &= \operatorname{Im}[\rho_2 \beta_2 \Phi_2(t_2) + r_2 \gamma_2 \Psi_2(\sigma_2)] \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[\beta_1^2 r_1 \Phi_1(t_1) + \gamma_1^2 \rho_1 \Psi_1(\sigma_1)] &= \operatorname{Re}[\beta_2^2 r_2 \Phi_2(t_2) + \gamma_2^2 \rho_2 \Psi_2(\sigma_2)] \\ t_k &= i\beta_k y, \quad \sigma_k = i\gamma_k y, \quad \rho_k = -(\beta_k^2 + \nu_k)/E_k, \quad r_k = -(\gamma_k^2 + \nu_k)/E_k, \quad k = 1, 2, \\ \pm i\beta_k, \quad \pm i\gamma_k &\text{ are the roots of the characteristic equation } (\beta_k > \gamma_k). \end{aligned}$$

System (5) has the unique solution

$$\Phi_1^+(x) - \Phi_1^-(x) = -\frac{r_1}{2(\rho_1 - r_1)} p_1(x) \quad (7)$$

$$\Psi_1^+(x) - \Psi_1^-(x) = \frac{p_1}{2(\rho_1 - r_1)} p_1(x), \quad 0 < x < 1$$

In view of the fact that  $\tau_1(x) = 0$  when  $x > 1$ , the general solution of problem (7) can be represented in the form:

$$\begin{aligned} \Phi_1(z_1) &= -\frac{r_1}{4\pi i(\rho_1 - r_1)} \int_0^1 \frac{p_1(t) dt}{t - z_1} + w_1(z_1) \equiv ir_1 w_0(z_1) + w_1(z_1) \\ \Psi_1(\zeta_1) &= \frac{\rho_1}{4\pi i(\rho_1 - r_1)} \int_0^1 \frac{p_1(t) dt}{t - \zeta_1} + w_2(\zeta_1) \equiv -i\rho_1 w_0(\zeta_1) + w_2(\zeta_1) \end{aligned} \quad (8)$$

where  $w_1(z_1)$  and  $w_2(\zeta_1)$  are analytic functions in the half-planes  $\operatorname{Re} z_1 > 0$ ,  $\operatorname{Re} \zeta_1 > 0$ .

We will now introduce the boundary values of the functions  $\Phi_1(z_1)$  and  $\Psi_1(\zeta_1)$ , expressed by formulae (8) into equations (6) we obtain

$$w_1(z_1) = \frac{iI_1}{\Delta} \overline{w_0(-z_1)} + \frac{iI_2}{\Delta} \overline{w_0\left(-\frac{\gamma_1}{\beta_1} z_1\right)}, \quad w_2(\zeta_1) = \frac{iI_1^*}{\Delta} \overline{w_0\left(-\frac{\beta_1}{\gamma_1} \zeta_1\right)} + \frac{iI_2^*}{\Delta} \overline{w_0(-\zeta_1)} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} I_1 &= [\Delta_{11} r_1 \beta_1 + \Delta_{21} r_1 \beta_1^2 + \Delta_{31} r_1 \rho_1 \beta_1 + \Delta_{41} \beta_1^2 r_1^2] \\ I_2 &= -[\Delta_{11} \beta_1 \gamma_1 + \Delta_{21} \rho_1 \gamma_1^2 + \Delta_{31} \rho_1 r_1 \gamma_1 + \Delta_{41} \rho_1^2 \gamma_1^2] \\ I_1^* &= -[\Delta_{12} r_1 \beta_1 + \Delta_{22} r_1 \beta_1^2 + \Delta_{32} r_1 \rho_1 \beta_1 + \Delta_{42} r_1^1 \beta_1^2] \\ I_2^* &= [\Delta_{12} \rho_1 \gamma_1 + \Delta_{22} \rho_1 \gamma_1^2 + \Delta_{32} \rho_1 r_1 \gamma_1 + \Delta_{42} \rho_1^2 \gamma_1^2] \end{aligned}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \beta_1^2 & \gamma_1^2 & -\beta_2^2 & -\gamma_2^2 \\ \beta_1 & \gamma_1 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \rho_1 \beta_1 & r_1 \gamma_1 & \rho_2 \beta_2 & r_2 \gamma_2 \\ \beta_1^2 r_1 & \gamma_1^2 \rho_1 & -\beta_2^2 r_2 & -\gamma_2^2 \rho_2 \end{vmatrix},$$

$\Delta_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3, 4$ ) are the cofactors of the corresponding matrix elements.

Boundary condition (2) is equivalent to the equation

$$\frac{1}{2\pi} D(x) \frac{d}{dx} \int_0^1 R(t, x) \varphi'(t) dt = \varphi(x) + f(x) \quad (10)$$

$$\text{where } R(t, x) = \frac{k_1}{t-x} + \frac{k_2}{t+x} + \frac{k_3}{\beta_1 t + \gamma_1 x} + \frac{k_4}{\gamma_1 t + \beta_1 x}$$

$$\varphi(x) = \int_0^x dt \int_0^t [p_1^0(t) - p_1(\tau)] d\tau, \quad f(x) = \frac{D(x)}{2\pi} \frac{d}{dx} \int_0^1 R(t, x) p_1^0(t) dt$$

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 0, \quad \varphi'(0) = 0, \quad \varphi'(1) = 0$$

$$k_1 = \frac{\beta_1 r_1^2 + \gamma_1 \rho_1^2}{\rho_1 - r_1}, \quad k_2 = \frac{\beta_1 r_1 I_1 + \gamma_1 \rho_1 I_2^*}{\Delta(\rho_1 - r_1)}, \quad k_3 = \frac{\beta_1^2 r_1 I_2}{\Delta(\rho_1 - r_1)}, \quad k_4 = \frac{\gamma_1^2 \rho_1 I_1^*}{\Delta(\rho_1 - r_1)}$$

To solve integro-differential equation (10) when the cross-section of the inclusion varies linearly, i.e.  $D(x) = hx^3$ ,  $x \in (0,1)$  making the substitution  $t = e^\tau$ ,  $x = e^y$

$$\frac{h}{2\pi} e^{2y} \frac{d}{dy} \int_{-\infty}^0 e^{-2\tau} R(1, e^{y-\tau}) [\varphi_0''(\tau) - \varphi_0'(\tau)] d\tau = \varphi_0(y) + f_0(y), \quad y < 0$$

$$\varphi_0(y) = \varphi(e^y), \quad f_0(y) = f(e^y)$$

and using a general Fourier transformation [5] we have

$$\Psi^+(s) = G(s)\Phi^-(s) + B(s), \quad -\infty < s < \infty \tag{11}$$

where

$$G(s) = \left[ k_1 s \operatorname{cth} \pi s + k_2 \frac{s}{sh \pi s} + k_3 \frac{e^{is\mu}}{\gamma_1} \frac{s}{sh \pi s} + k_4 \frac{e^{-is\mu}}{\beta_1} \frac{s}{sh \pi s} + \frac{2}{h} \right] (s-i)(s-2i),$$

$$\mu = \ln \frac{\beta_1}{\gamma_1}, \quad \Phi^-(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \varphi(e^\xi) e^{is\xi} d\xi,$$

$$B(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{\xi} f_0(e^\xi) e^{is\xi} d\xi, \quad \Psi^+(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \psi(\xi) e^{is\xi} d\xi$$

$$\psi(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \int_{-\infty}^\infty e^{2y} \frac{d}{dy} \int_{-\infty}^\infty e^{-2s} R(1, e^{y-s}) [\varphi_0''(s) - \varphi_0'(s)] ds, & y > 0 \end{cases}$$

The function  $\Psi^+(s)$  and  $\Phi^-(s)$  by virtue of their definition, will be limit of the function, holomorphic in the upper and lower half-planes, respectively. Condition (11) can be represented in the form

$$\frac{\Psi^+(s)}{\sqrt{s+i}(s+i)(s+2i)} = G_0(s)k_1\Phi^-(s)\sqrt{s-i} + B_0(s) \tag{12}$$

where

$$G_0(s) = \frac{G(s)}{k_1 \sqrt{1+s^2}(s+i)(s+2i)}, \quad \operatorname{Re} G_0(s) > 0, \quad G_0(\pm\infty) = 1,$$

$$B_0(s) = \frac{B(s)}{\sqrt{s+i}(s+i)(s+2i)}$$

Hence, the problem can be formulated as follows: it is required to obtain a function  $\Psi^+(z)$ , holomorphic in the half-plane  $\operatorname{Im} z > 0$  and function  $\Phi^-(z)$ , holomorphic in the half-plane  $\operatorname{Im} z < 1$ , apart from points that are the roots of the function  $G(z)$ , which vanish at infinity and satisfy condition (12). The solution of the problem (12) has the form

$$\Phi^-(z) = \frac{X(z)}{k_1 \sqrt{z-i}} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B_0(t) dt}{X^+(t)(t-z)} \right\}, \quad \text{Im } z < 0$$

$$\Psi^+(z) = X(z) \sqrt{z+i} (z+i)(z+2i) \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B_0(t) dt}{X^+(t)(t-z)} \right\}, \quad \text{Im } z > 0$$

$$\Phi^-(z) = (\Psi^+(z) - B(z)) G^{-1}(z), \quad 0 < \text{Im } z < 1, \quad X(z) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln G_0(t) dt}{t-z} \right\}.$$

It can be shown that  $\Phi^-(s+i0) = \Phi^-(s-i0)$ , and consequently, the function  $\Phi^-(z)$  is holomorphic in the half-plane, apart from points which are the zeros of the function  $G(z)$  in the upper half-plane. We will investigate the behavior of the contact stresses in the neighborhood of the singular points  $z=0$  and  $z=1$ . We obtain by an inverse Fourier transformation:

$$p_1^0(x) - p_1(x) = \varphi''(x) = O(1/\sqrt{1-x}), \quad x \rightarrow 1-,$$

$$p_1^0(x) - p_1(x) = K_1 x^{\tau_0-1} + O(x^{\beta_0-1}), \quad x \rightarrow 0+,$$

$G_0(i\tau_0^1) = 0$ ,  $\tau_0 < \beta_0 < \tau_0^1$ , where  $i\tau_0$  is a simple zero of the function  $G(z)$  in domain  $D_0 = \{z : 0 < \text{Im } z < 1\}$ .

## REFERENCES

1. Khrapkov A. The first fundamental problem for a piecewise-homogeneous plane with a cut perpendicular to a straight section. // Prikl. Math.Mech.66(4), 663-669, 2002.
2. Bantsuri R., Shavlakadze N. The contact problem for a piecewise-homogeneous plate with semi-infinite inclusion. // J.Appl. Math. Mech. 73, 471- 477, 2009.
3. Shavlakadze N. The contact problems of Mathematical theory of elasticity for plates with an elastic inclusion. //Acta Appl. Math. 99, 29-51,2007.
4. Lekhnitskii S. Anisotropic Plates(Russian). Moscow-Leningrad: Gostekhizdat, 1957. P.355.
5. Gakhov F.D., Cherskii Yu.I. Convolution Type Equation. (Russian). Moscow: Nauka, 1978. P.295 .

### Shavlakadze Nugzar

Doctor of Physical and Mathematical sciences, Professor  
(+995 322942950), **E-mail:**nusha@rmi.ge

# TO THE PROBLEMS OF OSCILLATIONS AND STATIC INTERACTION OF CONTACTING PLATES ON THE SURFACE OF THE ELASTIC LAYER

*Telyatnikov I.S.*

*Russia*

Contacting lithospheric structures with rectilinear faults are modeled by two-dimensional composite plates on three-dimensional elastic substrate and studied by the methods of the theory of mixed elasticity problems. Given the spatial scale of modeled objects the state of the lithospheric block structure can be described as problems in the theory of elasticity for plates on deformable base. A simplified method of block element is used for plates with straight boundaries. Representations of solutions describing the displacements of the surface and allowing to study the influence of structural element's properties and characteristics of faults on the stress-strain state of the structure are obtained.

In contrast to commonly used methods the approach presented in this paper does not require conversion of the differential operator of the system. The presented method is applied to solving the problem of vertical oscillations of semi-infinite plates contacting along a straight line on the surface of the elastic layer, and the static problem for the described structure at a given vertical surface load.

A variety of coating models used for the calculation of materials and structures in engineering and construction is wide enough. The results of studies of the applicability limits of one- and two-dimensional approximate models derived from the equations of the theory of elasticity, reflected in numerous publications [1–3 et al.]. Despite the accumulated to date extensive experience in studying problems for bodies with coatings, some problems still remain relevant.

This paper considers the problems of the steady oscillations with a frequency  $\omega$  and static interaction of the composite coating on an elastic layer under the action of surface load defined in a bounded domain. Coordinate plane  $x_1Ox_2$  associated with the middle surface of the coating, which is considered as two elongated deformable plates bordering along the axis, with the average thickness parameters. Contact between the coating and the substrate is considered ideal.

The differential equations in partial derivatives, describing the motion of plates [1], are given in the corresponding half-planes in the accepted model

$$\underline{R}_j(\partial x_1, \partial x_2) \vec{u}_j(x_1, x_2) - \underline{E}_j \vec{g}_j(x_1, x_2) = \vec{b}_j(x_1, x_2), \quad x_1 \in \Omega_j, \quad j = 1, 2, \quad (1)$$

where  $x_2 \in R$ ,  $\Omega_1 = \{x_1 > 0\}$ ,  $\Omega_2 = \{x_1 < 0\}$ . Here the following notations are used:  $\vec{u}_j$  is the vector of displacement of  $j$ -th plate's points,  $u_{j1}$ ,  $u_{j2}$  – displacements in orthogonal directions in the plane  $x_1Ox_2$ ,  $u_{j3}$  is the deflection of a median surface.

$\underline{R}_j(\partial x_1, \partial x_2)$  are matrix differential operator with components:

$$R_{11}^j = \partial^2 / \partial x_1^2 + \varepsilon_{j1} \partial^2 / \partial x_2^2 + \varepsilon_{j4}, \quad R_{22}^j = \partial^2 / \partial x_2^2 + \varepsilon_{j1} \partial^2 / \partial x_1^2 + \varepsilon_{j4},$$

$$R_{12}^j = R_{21}^j = \varepsilon_{j2} \partial^2 / \partial x_1 \partial x_2, \quad R_{33}^j = \varepsilon_{j3} (\partial^4 / \partial x_1^4 + 2 \partial^4 / \partial x_1^2 \partial x_2^2 + \partial^4 / \partial x_2^4) - \varepsilon_{j4},$$

$$R_{13}^j = R_{23}^j = R_{31}^j = R_{32}^j = 0, \quad \varepsilon_{j1} = 0, 5(1 - \nu_j), \quad \varepsilon_{j2} = 0, 5(1 + \nu_j), \quad \varepsilon_{j3} = h_j^2 / 12,$$

$$\varepsilon_{j4} = \omega^2 \rho_j (1 - \nu_j^2) E_j^{-1}, \quad \varepsilon_{j5} = (1 - \nu_j^2) (E_j h_j)^{-1}; \quad \vec{b}_j = -\varepsilon_{j5} \vec{t}_j, \quad \vec{t}_j = \{t_{j1}, t_{j2}, t_{j3}\};$$

$\underline{E}_j = \left\| e_{ik}^j \right\|_{i,k=1}^3$  – diagonal matrix,  $e_{11}^j = e_{22}^j = -\varepsilon_{j5}$ ,  $e_{33}^j = \varepsilon_{j5}$ ,  $e_{ik}^j = 0$ ,  $i \neq k$ ,  $\vec{t}_j$  is the vector of action on the upper boundary of the plate,  $\vec{g}_j$  is the vector of contact stress acting on the lower boundary of plate from substrate's side;  $E_j$ ,  $\nu_j$ ,  $\rho_j$  are Young's modulus, Poisson's factor and density of the  $j$ -th plate respectively.

Static case of the interaction of coating and substrate corresponds to the equations

$$\underline{R}_j^0(\partial x_1, \partial x_2) \vec{u}_j(x_1, x_2) - \underline{E}_j \vec{g}_j(x_1, x_2) = \vec{b}_j(x_1, x_2), \quad x_1 \in \Omega_j, \quad j = 1, 2, \quad (2)$$

where  $R_{11}^{0,j} = \partial^2 / \partial x_1^2 + \varepsilon_{j1} \partial^2 / \partial x_2^2$ ,  $R_{22}^{0,j} = \partial^2 / \partial x_2^2 + \varepsilon_{j1} \partial^2 / \partial x_1^2$ ,  $R_{ki}^{0,j} = R_{ki}^j$  ( $k \neq l$ ),  $R_{33}^{0,j} = \varepsilon_{j3} (\partial^4 / \partial x_1^4 + 2 \partial^4 / \partial x_1^2 \partial x_2^2 + \partial^4 / \partial x_2^4)$ .

For the elastic layer the integral relations between the amplitudes of displacements and stresses on the surface are given ( $x_3 = 0$ )

$$\vec{u} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{k}(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) \vec{g}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \quad (3)$$

$$\underline{k}(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\sigma} \underline{K}(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1 e^{-i\alpha_2 x_2} d\alpha_2,$$

where  $\underline{K}(\alpha_1, \alpha_2)$  is the Green's matrix of the elastic layer, form of contour  $\sigma$  in a complex plane  $\alpha_1$  is determined by the principle of limiting absorption in the case of steady oscillations, for the static problem  $\sigma$  coincides with the real axis. Green's matrixes of static and dynamic problems are given in [4 et. al.]. On the border between the plates boundary conditions are formulated, the general form of which is given by

$$\underline{L}_1(\partial x_1, \partial x_2) \vec{u}(0+0, x_2) + \underline{L}_2(\partial x_1, \partial x_2) \vec{u}(0-0, x_2) = \vec{f}(x_2). \quad (4)$$

Type of differential operators  $\underline{L}_j(\partial x_1, \partial x_2)$  ( $j = 1, 2$ ) and function  $\vec{f}(x_2)$  are defined by the interaction of plates in the contact area. When using the hypothesis of straight normals for each point at the junction of the plates, it is necessary to satisfy four boundary conditions, variants of which are given in [1]. The condition of plates and substrate perfect contact determines the continuity of displacement and stress vectors at the interface coating/substrate:  $\vec{u}_j(x_1, x_2) = \vec{u}(x_1, x_2)$ ,  $\vec{g}_j(x_1, x_2) = \vec{g}(x_1, x_2)$ ,  $x_1 \in \Omega_j$ ,  $x_2 \in R$ .

For many problems of the theory of plates with straight boundaries a simplified block element method can be used [2, 3]. In contrast to given in [5], in this paper on the example of the scalar case of vertical effects we use an approach that does not require conversion of the differential operator of the system. Using the Fourier transform of the variable  $x_2$  in (1), we obtain

$$R_{33}^j(\partial x_1, -i\alpha_2)\bar{u}_{j3}(x_1, \alpha_2) - \varepsilon_{j5}\bar{g}_{j3}(x_1, \alpha_2) = \bar{b}_{j3}(x_1, \alpha_2), \quad x_1 \in \Omega_j, \quad \alpha_2 \in R,$$

where the overbar corresponds for the Fourier's transformation of the previously described functions.

Similarly, for (2) we have

$$R_{33}^{0,j}(\partial x_1, -i\alpha_2)\bar{u}_{j3}(x_1, \alpha_2) - \varepsilon_{j5}\bar{g}_{j3}(x_1, \alpha_2) = \bar{b}_{j3}(x_1, \alpha_2), \quad x_1 \in \Omega_j, \quad \alpha_2 \in R.$$

Solutions, limited in their respective half-planes and satisfying the principle of limiting absorption, can be written in form

$$\bar{u}_{j3}(x_1, \alpha_2) = C_{j1}e^{\mp q_{j1}x_1} + C_{j2}e^{\pm iq_{j2}x_1} + V^{-1}(x_1)\left[\left(R_{33}^j(\alpha_1, \alpha_2)\right)^{-1}\left(\varepsilon_{j5}G_{j3}(\alpha_1, \alpha_2) + B_{j3}(\alpha_1, \alpha_2)\right)\right], \quad x_1 \in \Omega_j, \quad \alpha_2 \in R, \quad (5)$$

where  $C_{jk}$  are the arbitrary constants;  $q_{j1}$ ,  $iq_{j2}$  – the roots of equations

$$\varepsilon_{j3}(\xi^2 + \alpha_2^2)^2 - \varepsilon_{j4} = 0, \quad \text{Re } q_{jk} > 0 \quad (j, k = 1, 2).$$

For the static case the solutions limited in corresponding half-planes take the form

$$\bar{u}_{j3}^0(x_1, \alpha_2) = (C_{j1} + C_{j2}x_1)e^{\mp \lambda x_1} + V^{-1}(x_1)\left[\left(R_{33}^{0,j}(-i\alpha_1, -i\alpha_2)\right)^{-1}\left(\varepsilon_{j5}G_{j3}(\alpha_1, \alpha_2) + B_{j3}(\alpha_1, \alpha_2)\right)\right], \quad x_1 \in \Omega_j, \quad \lambda = |\alpha_2| \quad (6)$$

The upper sign in storey symbols « $\pm$ », « $\mp$ » of formulas (5) and (6) corresponds to a value  $j = 1$ , lower sign –  $j = 2$ .

Application Fourier's transformation by  $x_1$  to the obtained expressions for the transforms of vertical displacement amplitudes allows to receive

$$U_{j3}(\alpha_1, \alpha_2) = (\varepsilon_{j5}G_{j3}(\alpha_1, \alpha_2) + B_{j3}(\alpha_1, \alpha_2))(R_{33}^j)^{-1} + W_j(\alpha_1, \alpha_2),$$

$$W_j(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\pm iC_{j1}}{\alpha_1 \pm iq_{j2}} + \frac{\pm iC_{j2}}{\alpha_1 \pm q_{j1}} \mp \frac{1}{2(q_{j1}^2 + q_{j2}^2)\varepsilon_{j3}} \left[ \frac{\varepsilon_{j5}G_{j3}(\pm q_{j1}, \alpha_2)}{q_{j1}(\alpha_1 \mp q_{j1})} + \frac{i\varepsilon_{j5}G_{j3}(\pm iq_{j2}, \alpha_2)}{q_{j2}(\alpha_1 \mp iq_{j2})} + \frac{B_{j3}(\pm q_{j1}, \alpha_2)}{q_{j1}(\alpha_1 \mp q_{j1})} + \frac{iB_{j3}(\pm iq_{j2}, \alpha_2)}{q_{j2}(\alpha_1 \mp iq_{j2})} \right], \quad \alpha_1 \in \sigma.$$

For the static case ( $\alpha_1 \in R$ )

$$U_{j3}^0(\alpha_1, \alpha_2) = (\varepsilon_{j5}G_{j3}(\alpha_1, \alpha_2) + B_{j3}(\alpha_1, \alpha_2))(R_{33}^{0,j})^{-1} + W_j^0(\alpha_1, \alpha_2),$$

$$W_j^0(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\pm iC_{j1}}{\alpha_1 \pm i\lambda} - \frac{\pm C_{j2}}{(\alpha_1 \pm i\lambda)^2} \mp \frac{\varepsilon_{j5}}{4\lambda^2\varepsilon_{j3}} \left[ \frac{\pm i\alpha_1 G_{j3}(\pm i\lambda, \alpha_2)}{\lambda(\alpha_1 \mp i\lambda)^2} + \frac{G'_{j3\alpha_1}(\pm i\lambda, \alpha_2)}{(\alpha_1 \mp i\lambda)} \right] +$$

$$+ \frac{1}{4\lambda^2 \varepsilon_{j3}} \left[ \frac{\pm i \alpha_1 B_j(\pm i \lambda, \alpha_2)}{\lambda(\alpha_1 \mp i \lambda)^2} + \frac{B'_{j\alpha_1}(\pm i \lambda, \alpha_2)}{(\alpha_1 \mp i \lambda)} \right], \Psi'_{j\alpha_1}(\pm i \lambda, \alpha_2) = \frac{d\Psi_j(\alpha_1, \alpha_2)}{d\alpha_1} \Big|_{\alpha_1 = \pm i \lambda},$$

$$\Psi = G_{3j}, B_{3j}.$$

In the Fourier transforms conditions of conjugation plates with the substrate take the following form:  $U_3(\alpha_1, \alpha_2) = U_{13} + U_{23}$ ,  $G_3(\alpha_1, \alpha_2) = G_{13} + G_{23}$ .

From equation (3), relations for the Fourier transforms of the stress amplitudes and the conditions of conjugation plates with the substrate we obtain the equation

$$K_1(\alpha_1, \alpha_2) G_{13}^+(\alpha_1, \alpha_2) = K_2(\alpha_1, \alpha_2) G_{23}^-(\alpha_1, \alpha_2) + F(\alpha_1, \alpha_2), \quad (7)$$

where  $G_{13}^+(\alpha_1, \alpha_2) = G_{13}(\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $G_{23}^-(\alpha_1, \alpha_2) = G_{23}(\alpha_1, \alpha_2)$ .

For the case of steady oscillations in (7)

$$K_j(\alpha_1, \alpha_2) = \pm \left( K_{33} - \varepsilon_{j5} (R_{33}^j)^{-1} \right), F(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{j=1}^2 \left[ B_{j3} (R_{33}^j)^{-1} + W_j \right] \quad (8)$$

For the static case in (8)  $K_{33}$  corresponds to an element of the static problem Green's matrix,  $R_{33}^j$ ,  $W_j$  is replaced respectively by  $R_{33}^{0,j}$  and  $W_j^0$ .

The resulting functional equation (7) in [3] called loaded Wiener – Hopf equation due to the presence of unknown  $G_{j3}(\pm q_{j1})$ ,  $G_{j3}(\pm i q_{j2})$  (for steady oscillations),  $G_{j3}(\pm i \lambda, \alpha_2)$ ,  $G'_{j3\alpha_1}(\pm i \lambda, \alpha_2)$  (for static case), requiring additional definition.

Equation factorized  $K(\alpha_1, \alpha_2) = K_1^{-1} K_2$  in the form of multiplication  $K = K_+ K_-$ , we multiply right and left sides by  $K_+^{-1}$  and implement the Wiener – Hopf's method, we arrive at representations.

$$G_{13}^+(\alpha_1, \alpha_2) = K_+ \left\{ K_+^{-1} K_1^{-1} F(\alpha_1, \alpha_2) \right\}^+, G_{23}^-(\alpha_1, \alpha_2) = -K_-^{-1} \left\{ K_+^{-1} K_1^{-1} F(\alpha_1, \alpha_2) \right\}^-.$$

Assuming sequentially in the first relation  $\alpha_1 = q_{11}$  and  $\alpha_1 = i q_{12}$ , in the second –  $\alpha_1 = -q_{21}$ ,  $\alpha_1 = -i q_{22}$ , we obtain a system of algebraic equations to determine the unknown  $G_{j3}(\pm q_{j1})$ ,  $G_{j3}(\pm i q_{j2})$ , after solving which found values are entered in the right parts of the equations for the Fourier transforms of the stress amplitudes, the latter in turn are substituted into (5). The same scheme of solving for the case of statics requires further differentiation relations by  $\alpha_1$ , then the substitution  $i \lambda$  in first and third relations and  $-i \lambda$  – in second and fourth leads to a system of linear algebraic equations to determine the unknown  $G_{j3}(\pm i \lambda, \alpha_2)$ ,  $G'_{j3\alpha_1}(\pm i \lambda, \alpha_2)$ .

Representations of transforms (by  $x_2$ ) of the plates displacement amplitudes (5) contain the unknown constants which are determined from the boundary conditions at the plates contact areas, after applying the Fourier's transformation to (4)

$$L_{k_1}(\partial x_1, -i\alpha_2)\bar{u}_3(0+0, \alpha_2) + L_{k_2}(\partial x_1, -i\alpha_2)\bar{u}_3(0-0, \alpha_2) = \bar{f}_k(\alpha_2), \quad k = \overline{1, 4}.$$

The obtained relations open the possibility to study the effect of different boundary conditions in the contact area of the coating constituents on the stress-strain state of the coating/substrate interface. In addition to modeling faults in layered geological structures presented method for solving problems of extended contact plates on elastic foundation can be used for models of materials and structural elements of engineering structures. The packages of rigidly interlinked plates can be used to model layered coatings instead of plates

$$\underline{R}_{jn}(\partial x_1, \partial x_2)\bar{u}_{jn}(x_1, x_2) - \underline{E}_{jn}\bar{g}_{jn}(x_1, x_2) = \bar{b}_{jn}(x_1, x_2), \quad n = \overline{1, N}, \quad (x_1, x_2) \in D_{jn},$$

where  $N$  is the number of plates in package (the numbering is carried out from bottom to top, starting with plates contacting with substrate). In the notation introduced above the coupling conditions of plates that make up the package, take the form (for  $n = \overline{1, N-1}$ ).

$$\bar{u}_{jn}(x_1, x_2) = \bar{u}_{jn+1}(x_1, x_2), \quad \bar{b}_{jn}(x_1, x_2) = -\underline{E}_{jn}\bar{g}_{jn+1}(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in D_{jn}, \quad j = \overline{1, J_n}.$$

Movements at the interface of physical and mechanical properties of the package are found sequentially, starting with, in accordance with the foregoing scheme.

The study has been carried out with support of the grants RFFR 13-01-00132 and SS-1245. 2014.1.

## REFERENCE

1. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432с.
2. Бабешко В.А., Бабешко О.М., Евдокимова О.В. Блочные элементы в теории плит сложной формы // Изв. РАН. МТТ. 2012. № 5. С.92–97.
3. Бабешко В.А., Кириллова Е.В., Колесников М.Н. и др. О поведении и резонансах некоторых блочных структур сейсмологии и материаловедения // Экологический вестник ЧЭС. 2013. № 1. С.6–12.
4. Ворович И.И., Бабешко В.А., Пряхина О.Д. Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир, 1999. 248с.
5. Kolesnikov M.N., Telyatnikov I.S. To a problem of vibration of adjoining semi-infinite plates on a surface of elastic medium // Mechanics 2013: Proceedings Int. School-Conference of Young Scientists. Yerevan. 2013. P. 261–264.

### Information about author:

**Telyatnikov Ilya**

post graduate student, Kuban State University, faculty of mathematical modtling

**Phone:** (7 928) 280 59 75

**E-mail:** ilux\_t@list.ru

# ON ONE NEW APPROACH TO THE SOLVING OF AN ELASTICITY PROBLEMS FOR A LAYERED MEDIUM

*Vaysfel'd N., Romanenko R.  
Ukraina*

A new approach, based on the G. Popov's method, is applied to the solving of an elasticity problems for a layered medium. The approach's advantages consist in the reducing of the unknown constants number which are required to define the layer's stress state. The solving of the elasticity antiplane problem demonstrates the applying of the proposed scheme.

Similar problems for the composite's stress state estimation have been considered by many authors, because of the actuality of these problems not only from practical but and from theoretical point of view. In [1] the method of the initial functions was applied, the analytical approaches for the solving of elasticity problems in medium with the stratification were proposed in [2-4], the asymptotical methods were used for the anisotropic layered bodies investigation [5]. At [6] it was proposed the effective analytical method that allow to reduce sufficiently the quantity of the unknown constants. This method is modified and demonstrated on the solving of an antiplane elasticity problem for the layer medium .

The layered elastic medium  $-\infty < x < \infty$ ,  $h_{k-1} < y < h_k$ ,  $-\infty < z < \infty$ ,  $k = 1, \dots, n$  is considered. The bottom layer  $y = h_0$  is coupled with the hard base

$$W(x, y) \Big|_{y=h_0} = 0 \quad -\infty < x < \infty . \quad (1)$$

The tangent loading is applied to the upper layer  $y = h_n$

$$\tau_{yz}(x, y) \Big|_{y=h_n} = q(x) \quad -\infty < x < \infty . \quad (2)$$

$W(x, y) = u_z(x, y)$  is only non-zero component of the displacements' vector which should satisfy to Laplace's equation. Let's input such notations:  $W_k(x, y)$ ,  $k = 1, \dots, n$  are the displacements,  $G_k$  are the shear modulus,  $\mu_k$  are the Poisson's coefficients of each layer. The layers are in the conditions of the ideal contact

$$W_k(x, h_k - 0) = W_{k+1}(x, h_k + 0),$$

$$G_k \frac{\partial W_k}{\partial y} \Big|_{y=h_k - 0} = G_{k+1} \frac{\partial W_{k+1}}{\partial y} \Big|_{y=h_k + 0} \quad k = 1, \dots, n-1 \quad (3)$$

It is necessary to estimate the stress field of the layered medium.

The boundary value problem is formulated in the new notations

$$\frac{\partial^2 \bar{W}_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{W}_k}{\partial y^2} = 0, \quad -\infty < x < \infty, h_{k-1} < y < h_k \quad (4)$$

$$G_n \left. \frac{\partial \bar{W}_n}{\partial y} \right|_{y=h_n} = q(x), \quad \bar{W}_1 \Big|_{y=h_0} = 0, \quad -\infty < x < \infty$$

$$\bar{W}_k(x, h_k - 0) = \bar{W}_{k+1}(x, h_k + 0),$$

$$G_k \left. \frac{\partial \bar{W}_k}{\partial y} \right|_{y=h_k - 0} = G_{k+1} \left. \frac{\partial \bar{W}_{k+1}}{\partial y} \right|_{y=h_k + 0}, \quad k = 1, \dots, n-1$$

The Fourier's transformation  $\bar{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i\lambda x} dx$  is applied to the boundary problem (4). In the transformation's domain one must solve the onedimensional boundary problem

$$\frac{d^2 \bar{W}_k}{dy^2} - \lambda^2 \bar{W}_k(y) = 0, \quad h_{k-1} < y < h_k$$

$$G_n \left. \frac{d\bar{W}_n}{dy} \right|_{y=h_n} = \bar{q}, \quad \bar{W}_1 \Big|_{y=h_0} = 0, \quad (5)$$

$$\bar{W}_k(h_k - 0) = \bar{W}_{k+1}(h_k + 0),$$

$$G_k \left. \frac{d\bar{W}_k}{dy} \right|_{y=h_k - 0} = G_{k+1} \left. \frac{d\bar{W}_{k+1}}{dy} \right|_{y=h_k + 0}, \quad k = 1, \dots, n-1$$

The general solution of the equation in (5) has the form

$$\bar{W}_k(y) = A_k \operatorname{ch} \lambda y + B_k \operatorname{sh} \lambda y. \quad (6)$$

Let's input into consideration the matrices and vector  $\mathbf{C}_k = (A_k, B_k)^T$

$$\mathbf{H}_k = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \lambda h_k & \operatorname{sh} \lambda h_k \\ \lambda \operatorname{sh} \lambda h_k & \lambda \operatorname{ch} \lambda h_k \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{G}_k \end{pmatrix}, \quad \tilde{G}_k = G_k G_{k+1}^{-1},$$

and reformulate the conjugation conditions between the layers in the form

$$\mathbf{C}_{k+1} = \mathbf{H}_k^{-1} \mathbf{G}_k \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k.$$

Such representation allows to construct the transition matrix connecting the constants of the bottom and upper layers

$$\mathbf{C}_n = \mathbf{\Pi}_n \mathbf{C}_1, \quad (7)$$

where  $\mathbf{\Pi}_n$  is the second order matrix  $\mathbf{\Pi}_n = \prod_{k=2}^n \mathbf{H}_{k-1}^{-1} \mathbf{G}_{k-1} \mathbf{H}_{k-1}$ . Vectors

$\mathbf{C}_n, \mathbf{C}_1$  are found from the equality (7) and conditions (4). With the known vector

$\mathbf{C}_1$  the vector of the constants for any layer is found by the formula  $\mathbf{C}_k = \mathbf{\Pi}_k \mathbf{C}_1$ .

The substitution of the constants in equation (5) and inversing of the Fourier's transformation finalize the construction of the stated problem.

The concretization of the proposed scheme is executed for the cases of stratification' absence and two- and three layered medium.

### REFERENCE

1. Власов В.З. Метод начальных функций в задачах теории упругости. // Изв. АН СССР. 1955. №7. С.49-69.
2. Гаспарян А.В., Мхитарян С.М. О напряжённом состоянии композита в виде пакета из произвольного конечного числа упругих слоёв при антиплоской деформации. //Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. №2. С.10-20.
3. Buefler H. Theory of Elasticity of a Multilayered Medium. //Journal of Elasticity. Vol.1. №2. 1971.
4. Айзикович С.М., Александров В.М., Васильев А.С., Кренев Л.И., Трубчик И.С. Аналитические решения смешанных осесимметричных задач для функционально-градиентных сред. М.: Физматлит, 2011. 192с.
5. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: Изд. НАН РА «Гитутюн», 2005. 608с.
6. Попов Г.Я. Точные решения некоторых краевых задач механики деформированного твёрдого тела. Одесса: Астропринт, 2013. 421с.

### Information about authors:

**Vaysfel'd Nataly**

Professor, Head of Mathematical Physics Chair, Odessa Mechnikov University

**E-mail:** vaysfeld@onu.edu.ua

**Romanenko Roman**

Master, Mathematical Physics Chair, Odessa Mechnikov University

**E-mail:** romanfrommmf@gmail.com

<b>Avetisyan A.S., Kamalyan A.A. ....</b>	<b>5</b>
<b><i>Propagation of electroelastic shear wave signal in longitudinally inhomogeneous piezodielectric layer</i></b>	
The propagation of horizontally polarized electroelastic monochromatic signal in longitudinally inhomogeneous piezodielectric layer (class 6mm crystal of hexagonal symmetry ) is considered. The problem is reduced to solving a system of linear differential equations with variable coefficients relative to amplitudes of elastic shear and electric potential. Patterns of amplitudes changing of shear deformation and electric potential magnitudes and speeds of their propagation, depending on the inhomogeneity of the material are obtained.	
<b>Avetisyan V.V., Stepanyan V.S. ....</b>	<b>10</b>
<b><i>On the problem of optimal guaranteed search for mobile object on the plane</i></b>	
A problem of optimal guaranteed search of the object performing controlled moving on the plane is considered. It is supposed that the location of required object at the initial moment is indefinite in the given domain. Searching object is an object which controlled in three-dimensional space. The detection of required object is fulfilled with the help of informative circular base of the moving cone. The control algorithm is suggested, as well as conditions under which the required object is found in minimal time are received for any initial distance between the centers of the circles detection and uncertainty.	
<b>Aghalovyan L.A. ....</b>	<b>15</b>
<b><i>On some problems of seismology and premises of the earthquakes prediction</i></b>	
Some problems of seismology, connected with the earthquakes prediction are stated. It is shown that by the data of the seismostations and GPS systems, on the base of the decisions of 3D problems of elasticity theory and continuous monitoring of change in time stress-strain states of the Earth Lithospheric plate and its separate areas, it is possible to establish situations, causing the earthquakes rise.	
<b>Aghayan K.L., Zakaryan V.G. ....</b>	<b>23</b>
<b><i>Longitudinal shear of compound elastic space weakened by cracks</i></b>	
An antiplane problem of the theory of elasticity about contact interaction of two elastic semi-spaces weakened by linear tunnel cracks in various boundary conditions on coastal surface of cracks is investigated. With the help of Fourier transformation, the system of resolving singular integral equations concerning unknown steps of displacement or stresses across the cracks line is obtained.	
<b>Adamyanyan V. G., Suvaryan Kh. G. ....</b>	<b>28</b>
<b><i>Double-pulse cotangential transfers between coplanar elliptic and hyperbolic orbits</i></b>	
The geometric characteristics of Double-impulse cotangential transfers between coplanar elliptic and hyperbolic orbits, and the meaning of velocity, which are regulated by cosmic apparat in transfer, are accompanied in the real form and are based on parameters of the given orbit and the true anomaly points of application of the first velocity pulse.	
<b>Aizikovich S.M., Vasiliev A.S., Volkov S.S. ....</b>	<b>33</b>
<b><i>Point force and point electric charge acting on a transversely-isotropic piezoelectric functionally-graded half-space</i></b>	
Static action of a normal point force and a point electric charge on surface of a transversely isotropic piezoelectric half-space with functionally-graded transversely isotropic piezoelectric coating is considered. Electromechanical properties of the coating vary with depth according to arbitrary functions. Analytical formulas for the elastic displacements and	

the potential of the electrostatic field on the surface of the coating are derived. A scheme of reduction mixed boundary value problems for the half-space to solution of integral equations is obtained.

**Hakobyan V.N., Amirjanyan H. .... 38**

***Stress state of semi-infinite plane with absolutely rigid inclusion and crack***

The plane stress state of elastic semi-infinite plane, containing perpendicularly situated collinear absolutely rigid inclusion and crack along boundary is considered. The case, when inclusion is on the boundary and crack continues, is discussed. The stated problem mathematically formulated as a system of singular integral equations with Cauchy generalized kernels. The solution is built by the method of mechanical quadratures.

**Hakobyan V.N., Sahakyan A.V. .... 43**

***Stress state of elastic plane with partially detached from matrix absolutely rigid inclusion within Galins' model***

The stress state of elastic plane with absolutely rigid thin inclusion, one side of which is detached from matrix and crack is formed, is considered. It's supposed that there is an adhesion with matrix in the middle region for contacting side of inclusion and there is a sliding, which is described by dry friction law, along the edges. The stated problem is formulated as a system of singular integral equations. The solution of system is built by the method of mechanical quadratures.

**Amirbekyan A.N., Mkrtchyan M.S., Shekyan A.L., Shekyan L.A. .... 48**

***Bending of two identical beams on an elastic bands in view of compressed or stretched axial forces***

The plane contact problem of the bending of symmetrically loaded two identical elastic beams of finite length, lying on an elastic foundation in the form of a band, the lower bound of which is clamped is considered. The problem is considered in the framework of the theory S.P. Timoshenko of beam bending, in which in addition to the transverse bending forces, axial compressive or tensile forces also affect the deflection of the beam.

**Antonyan S.S., Vasilyan N.G. .... 53**

***Research of the stress-deformation state of bending plates in around of the edge with different types of fixing***

In this article is investigated the stress-deformation state of bending plate in around of fixed edge by approach of Nadai A.[1]. Is investigated different types of fixing: tough fixing and light fixing, sliding contact and uneasy sliding contact, jointly supported and free supported. By the theory of Ambartsumyan S.A., which take into account the shear deformations, is obtained different results. The deflection, bending and twisting moments and cutting forces are defined by the theory Ambartsumyan S.A. in around of fixed edge of plate.

**Arutyunyan A.R. .... 58**

***Definition of energy consumptions on different cyclic loading programs***

In the paper to solve the problem of minimization of energy consumptions the energy methods are applied. The energy version of nonlinear law of summation of the damages is suggested. The experiments were conducted on polymethylmethacrylate specimens on different cyclic loading programs: under different frequencies of cyclic loadings and under alternation of different frequencies. It is observed that the energy consumptions at fracture are essentially depends on the regimes of loadings. Received experimental results should be taken into account in design and exploitation of various equipments using for processing and milling of the solid materials.

<b>Harutyunyan L.A., Torosyan D.R.</b> .....	<b>63</b>
<b><i>Flat problems for componental Flatmiss with cracks between materials</i></b>	
The two-dimensional problem of elasticity for compound plane consisting of two half-plane is considered different elastic characteristic and exiting between finite cracks or semi-infinite cracks. Due to Fourier integral in bipolar system of coordinates, the problems are solved closed with the help of Papkovitch-Neyber function.	
<b>Arutyunyan R.A.</b> .....	<b>68</b>
<b><i>High temperature creep, damage and creep fracture of metallic materials</i></b>	
In the works of G. Hoff, L.M. Kachanov, Y.N. Rabotnov the coupled equations of creep, damage and creep fracture of incompressible materials are formulated. In this approach, the deformation and strength prediction processes of metallic materials under high-temperature creep can not be considered entirely correct. This contradiction can be overcome if we take into account the mass conservation law, and as a damage parameter consider the irreversible change in the density or volume of the material. Based on these assumptions, the related damage and creep equations for compressible media are formulated. The proposed approach eliminates conflicting assumptions inherent in the concept of Kachanov-Rabotnov when predicting deformation processes occurring in metallic materials under conditions of prolonged action of relatively low stresses and high temperatures.	
<b>Bagdov A.G., Shekoyan A.V.</b> .....	<b>73</b>
<b><i>The waves on the rough surface.</i></b>	
Wave propagation along an irregular free surface with incident $P$ waves is studied. It is shown that the problem can be reduced to that of oscillations of a regular non-free surface. With the function of the irregular boundary being included in the expressions for applied forces. The irregularities are shown to generate the Rayleigh waves. Mountainlike and periodic boundaries are analyzed.	
<b>Balasyan E.S., Petrosyan G.A.</b> .....	<b>78</b>
<b><i>Asymptotic solution of one mixed boundary problem of anisotropic two-layer plate, with incomplete contact between the layers</i></b>	
A question of solution stress-strain state in three dimension problem for an asymptotic two-layer plate, with incomplete contact between the layers, is considered. In the surface of plate are given mixed conditions of theory of elasticity. With appliance of asymptotic method of integration, solutions of the interior problem are built.	
<b>Barseghyan V.R., Barseghyan T.V.</b> .....	<b>83</b>
<b><i>Criteria for controllability of linear stationary systems with variable structure</i></b>	
For the control problem of linear stationary systems with variable structure (and with the change of the phase space), the necessary and sufficient conditions (criteria) for complete controllability are brought. As an illustration of the obtained results, specific examples of systems are given, that are not completely controllable on some time intervals, but in general are completely controllable on the whole time interval.	
<b>Barseghyan T.V.</b> .....	<b>88</b>
<b><i>About the change of the basis in the state space and the influence on the controllability properties of the compounded linear stationary system</i></b>	
The change of basis of controllable linear compounded system in the space of states is investigated. It is shown that the same output values correspond to the same input actions for initial and transformed compounded systems. It is proved that nondegenerated	

transformations do not have an influence on the controllability property of the stationary linear compounded system.

**Belubekyan M.V., Ghazarian K.B., Ghazaryan R.A. .... 93**

***Floquet bending waves in a beam of periodic structure of incomplete elastic contacts***

Propagation of bending waves is studied in a homogeneous beam with periodic junctions of incomplete elastic contacts. Dispersion equations are derived determining the frequency band gap structure of bending waves.

**Belubekyan M.V., Martirosyan S.R. .... 98**

***Divergence instability of a rectangular plate, when the supersonic gas flow is in a direction perpendicular to the free edge***

The linear problem of the static stability of an elastic rectangular plate in a supersonic flow of gas is investigated. The flow is in a direction from the free edge to on the contrary edge, which is the clamped edge, or hinge joint edge, or free edge. At the two edges parallel to the flow are hinge joint supported. The solution shows that the divergence and localized divergence are possible. There are two limiting cases, which can be reduced to this problem: the case of an elongated plate and the case of a semi-infinite plate-strip. In the latter case the phenomenon of the localized divergence arising in the vicinity of the free edge is observed. The critical values of the flow velocity have been found, which results in the divergence instability, depending on the sides of a plate and the Poisson's ratio.

**Bychkov P.S., Lychev S.A., Manzhirrov A.V., Saifutdinov Yu.N., Fedotov I. .... 103**

***Experimental identification models for growing plates***

In this paper we develop mathematical models for growing plates and methods for their experimental identification. Mathematical models based on representation of growing plates as laminated body with the structural inhomogeneity, caused by joining of incompatible deformed layers. Experimental technique is based on the analysis of the evolution of non-growing face during the process of continuous material joining to the growing face of the plate. Experimental scheme is based on the principles of holographic interferometry.

**Vantsyan A.A. .... 108**

***Generalize method of iteration to the solution of some problems of mathematical physics***

Formulation and furthermore application of the generalize method of iteration to the numerical solution of the non linear algebraic and transcendent equations well recommended its efficiency with respect of the some advanced methods of the calculation mathematics. The results of application of the generalize method of iteration to the numerical solution of the some partial differential equations are offered and discussed.

**Vatulyan A.O., Dudarev V.V., Mnukhin R.M. .... 113**

***The problem of radial oscillations of heterogeneous pipe***

In this paper the problem of radial oscillations of heterogeneous pipe is considered. Statement of the problem is written out in the theory of pre-stressed state (PSS), based on Trefftz's model. It is believed that in the walls of the pipe there is a residual stress field, which arose as a result of the operating pressure. Solution of the direct problem of determining the radial component of the displacement field is obtained numerically using the shooting method. In the case of constant elastic characteristics the influence of the level of residual stress state on the first two resonant frequencies is analyzed. Investigation is conducted in the presence and absence of the plastic zones. The conclusions on the use of information about the significance of the first resonant frequency to determine the level of pressure and the zone of plastic deformation are given.

- Vatulyan A.O., Nedin R.D.**..... 118  
***On dynamic problems for the plate in the presence of pre-stress state of different structure and the methods of its identification***  
The dynamic problems for prestress plate by various models of the theory of plate are investigated.
- Voronin A.V., Sudenkov Yu.V., Semenov B.N.**..... 123  
***Thermoplastic mechanism of tungsten barrier degradation at impact of high speed plasma jet***  
The results of studies of the degradation of the monocrystalline and powder tungsten barriers at impact of high speed plasma jet are presented. It is shown that the process of degradation of tungsten when exposed to the plasma jet takes place almost continuously since exposure (evaporation, melting) until the time of more than three orders of magnitude greater than the duration of exposure due to thermo-mechanical processes in the barrier.
- Garakov V. G., Grigoryan L. G.**..... 128  
***Propagation of waves in an elastic layer of piezoelectric active material of cubic symmetry***  
Most of the wave propagation tasks in an elastic piezoactive environment have been considered on the basis of the quasi-static approach. In the article [3] for the 6mm class of the piezoactive environment intermediate (quasi-hyperbolic) approach was proposed, which preserves the hyperbolic property of exact linear equations of elasticity and electrodynamics. A similar approach has been proposed in [4] for piezoactive materials with cubic symmetry.
- Gasparyan A.V., Davtyan Z.A.**..... 133  
***On stressed state of a composite in form of a package composed of an arbitrary number of elastic rectangular layers under anti-plane deformation***  
With the application of Fourier finite sine-transform a problem on stressed state of a composite is considered under anti-plane deformation. The composite is a piecewise homogeneous body in form of a package composed of an arbitrary finite number of rectangular layers with different elastic and geometric characteristics. Perpendicular edges of the composite are rigidly fastened.
- Hachkevych O., Ghazaryan K., Terzyan S.**..... 138  
***Shear waves in an anisotropic unidirectional periodic structure***  
Propagation of elastic shear waves is studied in a unidirectional periodic anisotropic elastic medium of monoclinic system. Closed-form expression of the dispersion relation is derived determining the frequency band gap structure of Floquet waves.
- Gevorgyan G. A.**..... 143  
***The dynamic analysis of the parallel link mechanism with an elastic rod***  
Results of the dynamic analysis of the parallel link mechanism with an elastic rod are offered. The parallelogram case as one of kinds of parallel link mechanisms is considered. The charts of generalized coordinate and elastic displacements of the mechanism's rod is provided in time.
- Gevorgyan G. Z.**..... 148  
***On stability of orthotrope cylindrical variable thickness columns with the account of transverse shear.***  
Equations of stability of orthotrope cylindrical variable thickness columns with the account of transverse shear are obtained, which are solved numerically by collocation method. For various laws columns radius changes the effect of variable thickness and transverse shear are shown.

**Gevorgyan R.S., Asratyan M.G. .... 153**

***Asymptotic solution of electroelasticity problem for piezoelectric thin longitudinally inhomogeneous polarized plate (layer)***

By an asymptotic integration of equations of three-dimensional problem of theory of electroelasticity, the recurrence formulas for determination of stress tensor components, displacement vector as well as electric potential of the piezoelectric ceramic plate of infinite dimensions are derived. The longitudinally polarized plate located in vacuum (or in air) on the front surface of which the conditions of first, second, and mixed boundary problem of theory of elasticity are given is considered. For all cases, the dispersion equations of natural-vibration frequency are derived and their dependence from thickness and physico-mechanical coefficients of plate from electrical constant of environment (space) as well as from function variability characterizing exterior mechanical effect is determined. A part of resonance frequencies is calculated.

**Geodakyan E.G., Karapetyan J.K., Sahakyan B.V., Muradyan A.R. .... 158**

***Assessment of stressed-deformative conditions of Earth's crust of Armenia by seismological data***

In this work the rip-continuous tectonic flow of rock masses is reviewed conditioned by elastic deformations which forego particular earthquakes. On the basis of correlative connections of rock masses' flow with seismicity  $K_{\max}$  the relative velocities of vertical seismotectonic deformations have been calculated and mapped in the territory of Armenia.

**Golovin N.N., Kuvyrkin G.N., Mayskaya E.V. .... 162**

***Numerical simulation of the dynamic interaction thermal loading composite structures***

Contact interaction under high-level thermal loading from the gas stream, transient loading and straining of thermal dependence anisotropic carbon-based composite construction elements manifesting tendency to the inelastic deformation are considered. The possibility of implement clearances, tightnesses and glued joints with limited functioning range are taken into account on contact surfaces. Resolving systems of equations are formulated and calculation practical examples are given.

**Golyadkina A.A., Kalinin A.A., Kirillova I.V., Kossovich E.L., Kossovich L.Yu.,**

**Menishova L.R., Morozov K.M., Polienko A.V., Chelnokova N.O. .... 167**

***Patient-specific system for prognosis of surgical treatment outcomes of human cardiovascular system***

Improvement of life quality of patients with high stroke risk is the main goal for development of system for patient-specific modeling of cardiovascular system. This work is dedicated at increase of safety outcomes for surgical treatment of brain blood supply alterations. The objects of study are common carotid artery, internal and external carotid arteries and bulb. We estimated mechanical properties of carotid arteries tissues and patching materials utilized at angioplasty. We studied angioarchitecture features of arteries. We developed and clinically adapted computer biomechanical models, which are characterized by geometrical, physical and mechanical similarity with carotid artery in norm and with pathology (atherosclerosis, pathological tortuosity, and their combination).

**Grigoryan A. .... 172**

***Contact problem for the elastic compound half-plane weakened by finite vertical crack***

The stress-strain state of elastic compound half-plane from the isotropic and orthotropic quadrants in the case of rigid punch influence on the border of the semi-plane, when half-plane on the vertical line of the full clutch of quadrants has a finite crack at the border. The

solution of the problem is introduced in the form of the sum of solution of the mixed problems for two quadrants divided by an axis of vertical crack of the half-plane. The problem is solved by Fourier's method in movements. With the help of „dual” and singular integral equations methods enable to give the definition of unknown functions of integration to the solution of system regular integrated equations like Fredholm of the second sort. In the work the technique of the solution of nonsymmetrical contact problems is developed, acceptable formulas for determination of tensions under a punch are given from the engineering point of view.

**Grigoryan D. H., Harutyunyan V. M. .... 177**  
***Calculation principles for composite precast floors***

The article presents the use of composite precast floors in Republic of Armenia. Article includes few examples of calculations for buildings with reinforced frame. Proposed optimal design schemes and application of composite precast floors in the Republic of Armenia, taking into account the impact of seismic risk.

**Grigoryan E.Kh., Aghayan K.L., Jilavyan S.H. .... 182**  
***Diffraction of share electroelastic wave on periodic structure of semi-infinite creaks in the piezoelectric space***

The diffraction of electroelastic share wave on the periodic located semi-infinite cracks in the piezoelectric space is investigated. Owing to periodic structure of media the solution is build by step functions and the problem brought to the solution of functional equation of Riemann type on the real axis.

**Ghulghazaryan G.R. , Ghulghazaryan R.G , Mikhashev G.I. .... 187**  
***Free interfacial and boundary vibrations of thin elastic semi-infinite circular cylindrical shells***

Free interfacial vibrations of closed and non-closed semi-infinite cylindrical shells composed of semi-infinite and finite orthotropic thin cylindrical shells with different elastic properties are studied.

**Ghulghazaryan L.G. .... 192**  
***Asimptotics of forced vibrations of orthotropic shells in the presence of viscous resistance***

Forced vibrations of orthotropic shells in the presence of viscous resistance are considered, when the vector of displacement is given on inferior facial surface. Using asymptotic methods the solution of the corresponding dynamic equations of three-dimensional problem of elasticity theory is obtained. Amplitudes of forced vibrations are obtained and it is established that the appearance of resonance becomes impossible due to presence of viscous resistance.

**Dadayan Yu. G, Hovhannisyan Z. B ..... 197**  
***The finite element method (FEM) for the problem of inhomogeneous beam bending***

The problem of bending of inhomogeneous beam is solved by the finite element method. Numerical experiments were conducted for the model problem

**Danielyan L.E., Terjyan Ts.E. .... 202**  
***Isothermal laminar steady motion of an incompressible viscous fluid in a cylindrical tube with permeable walls***

Isothermal laminar steady motion of an incompressible viscous fluid in a cylindrical tube with permeable walls is considered.

**Danoyan Z.N., Atoyan L.A., Sahakyan S.L., Danoyan N.Z.....207**

***Quasi-periodic spin wave process in layered periodic ferromagnetic media***

The periodic ferromagnetic media is considered consisting of infinite cells of two ferromagnetic layers of various thicknesses and various magnetic parameters. Spin wave propagation perpendicular to surfaces of the layers is investigated.

Dispersion equation is derived, analysis of which leads to the conclusion that the wave process consists of incident and refracting waves accompanied by two non-homogeneous by thicknesses magnetic vibrations in each layer of the cell.

Farther investigation of the problem for contact and quasi-periodic boundary conditions brings us to corresponding dispersion equation which established existence of band gaps and pass bands in the frequencies spectrum of the waves.

**Danoyan Z.N., Manukyan G.A., Berberyan A.Kh., Mkrtchyan S.A.....212**

***Shear electro-elastic waves propagation in two-layered medium consisting of piezo-electric and conducting materials***

Existence and behavior of electro-elastic shear waves in two layered structure consisting of piezo-electric and conducting materials is investigated. The dispersion equation is obtained and investigated.

**Dashtoyan L.L., Hakobyan L.V.....217**

***Stress state of elastic plane with semi-infinite absolutely rigid inclusion, perpendicularly situated along crack of finite length***

The stress state of elastic plane with semi-infinite absolutely rigid inclusion perpendicularly situated at the midpoint of crack with finite length is considered. Using method of discontinuous solutions the stated problem is formulated as a system of singular integral equations with Cauchy generalized kernels. The solution of stated problem is built by the method of mechanical quadratures.

**Zhuravlev A.B., Zaitsev A.V., Karev V.I., Kovalenko Yu.F., Markov V.G., Sidorin Yu.V., Ustinov K.B. ....222**

***Experimental investigation of deformation of rocks under complex loading programs.***

The experimental investigation of rocks were carried under conditions of complex triaxial loading and a method of determining parameters of Drucker-Prager model for the non-associated yielding law was realized on the base of the experimental data. The direct physical and mathematical modelling of the processes of deformation of rocks for particular deposits were carried.

**Zimin V.N., Krylov A.V., Fayzullin F.R., Churilin S.A. ....227**

***On space transformable structure deploy calculation***

Increasing of space construction overall dimensions results in increasing of difficulty of the space structures placement under carrier rocket fairing. So the problem of such structures creation on the orbit comes to development of transformable constructions that satisfy to such dissimilar demands as minimal weight and volume in folded transport state and maximal working surface area in unfolded state as well as high reliability of deploy from transport state to working state, stable behavior under loads and infallible work in the orbit. Many possibilities to produce the transformable space structures exist. The transformable constructions consisting of many one-type elements connecting to each other by hinges and deployed to flat or spatial working system in the orbit are under consideration. For numerical analysis of such structures deploy the modern software packages for multi-component mechanical systems dynamic simulation such as EULER and ADAMS are used.

Calculations on the base of built models define velocity and time of deploy, forms of the structures during deploy, dynamic loads on the structure elements. To define the mode of deformation for transformable construction elements the calculating finite-element models were built in bundled software MSC.Patran-Nastran. Analysis of their dynamics reduces to solution of Cauchy problem for the system of regular linear differential quadric equations with certain initial values.

**Ghazaryan H.A.** ..... 232  
***Diffraction of surface shear waves in piezoelectrics-dielectric space at a semi-infinite metal layer in the dielectric***

Problem of diffraction surface electro-elastic shear waves in a piezoelectric medium with a semi-infinite metal layer in dielectric half-space is reduced to the solution of Riemann problem in analytic functions theory, using real Fourier transformation and a solution of a functional equation.

The presence of the semi-infinite metallic layer leads to a waves, a result of which surface electro-elastic waves occur.

**Kalijyan L.M.** ..... 237  
***To the problem propagation of magnetoelastic waves in the half-layer systems of perfectly conducting materials***

The possibility and propagation of the elastic waves of Raleigh type in an electro conductive elastic infinite layer half-space when on the surface of layer are realized the conditions of sliding contact. We study the limiting process when the shear modulus of the layer tends to zero. Conditions for the occurrence of surface waves, depending on the attitude layer thickness and wavelength is obtained.

**Kanetsyan E.G., Mkrtychyan M.M, Mkrtychyan M.S.** ..... 242  
***Solution of problems of torsion of prismatic bars with cross-sections in the form of a triangle by the boundary integral equations method***

Two problems of the torsion of elastic prismatic bars with cross-sections in the form of an arbitrary an isosceles triangle, which are solved by the method of boundary integral equations (BIE) connected with boundary problems for harmonic functions, are considered

**Karapetyan K.A.** ..... 247  
***On Influence of chemically free moisture contained in the pores and capillaries of litoid pumice concrete on the strengths ratio in compression and tension.***

The results of experimental studies of the influence of measures contained in the pores and capillaries of free moisture on the ratio litoid pumice concrete's strengths in compression and tension are presented and discussed in the present paper.

It is shown that the variation of the mentioned ratio depending on the degree of humidity of the concrete and the orientation directions towards the layers of its placement and compaction can be significant.

**Karapetyan S.S., Mkrtychyan G.A., Hovsepyan N.A.** ..... 251  
***Analysis of microremors of characteristic types of ground conditions of Gyumri***

In this article the results of processing of available instrumental materials are given revealing the dominant vibration periods of characteristic types of ground conditions of Gyumri. A comparative analysis of obtained results has been carried out. The obtained results enable to recommend the "safe" inherent vibration periods of constructions which are reasonable for the city aiming at securing their seismic safety.

<b>Kerobyan A.V.</b> .....	<b>256</b>
<b><i>On the solution of the contact problem for an elastic half-plane or the infinite plate with two finite elastic overlays in the presence of shear interlayers</i></b>	
The problems of contact interaction is observed for an elastic half-plane and the infinite plate which at $y = 0$ in the plane $xOy$ (for the plate $xOy$ - its average plane) are strengthened by two finite overlays (stringers) with different elastic characteristics and constant thickness. The contact interaction between deformable foundations and overlays is realized through a thin layer of glue with other phisico-mechanical properties and geometric configuration. The overlays are deformed under the action of horizontal forces. The determination problem of unknown contact stresses are reduced to the system of second kind of Fredholm's integral equations within the different intervals, which in the B space of Banach may be solved by the method of successive approximations. Possible particular cases are observed and the behaviors of contact stresses are illustrated in different constant parts.	
<b>Kirakosyan R.M.</b> .....	<b>261</b>
<b><i>Elastically- fixed support for an axi-symmetrical bending circular plates</i></b>	
An elastically fixed support with three parametres for axi-symmetrically bending circular plates is suggested. It is shown that from this support, as private cases, all types of supports are obtained, including the case of free end. The expressions for the parametres of an elastically fixed support are obtained. The problem of an axisymmetric bend of a cylindrically orthotropic circular plate with an elastically fixed support under the action of uniformly distributed transversal load is considered. Two particular cases are brought.	
<b>Kirillova O.I.</b> .....	<b>266</b>
<b><i>Numerical research of the stress state near the crack in a hollow cylinder</i></b>	
The problem is solved to determine the stress state near the crack in an infinite hollow cylinder of arbitrary cross section with oscillations of longitudinal shear. An approach is proposed that allows satisfying separately the conditions on the crack and on the borders of the cylinder.	
<b>Kovalev V.A., Radayev Y.N.</b> .....	<b>271</b>
<b><i>The First Variation of Action for Continuum with Free Boundaries</i></b>	
Field theories of the continuum mechanics and physics based on the least action principle are considered. Variation of the action integral in the least action principle corresponds variations of physical fields while spacetime coordinates are not varied. A notion of the action invariance, theory of variational symmetries of action and conservation laws require a wider variational technique including variations of the spacetime coordinates. This is also related to variational problems with strong discontinuities of field variables or other a priori unknown free boundaries. A form of the first variation of the action integral corresponding variations of spacetime coordinates and field variables under one-parametrical transformations groups is obtained. This form is attributed to 4-dimensional covariant formulations of field theories of the continuum mechanics. The first variation of the action integral over a varied domain is given for problems with constraints formulated on unknown free boundaries.	
<b>Kurdina S.P.</b> .....	<b>276</b>
<b><i>On a conformal contact for the system of punches and layered bodies</i></b>	

We study plane contact interaction for the system of rigid dies and viscoelastic foundation with thin elastic coating for the cases in which the punches and coating surfaces are conformal (mutually repeating). We write the system of integral equations for the problem, from which we obtain single operator equation with a tensor kernel and vector additional conditions. The solution of this equation is constructed by using the generalized projection method.

**Manzhirov A.V., Kazakov K.E., Gupta Narinder Kumar .....281**  
***Multibody axisymmetric conformal contact and systems of mixed integral equations with rapidly oscillating functions***

Multibody axisymmetric conformal contact problems for foundations with surface nonuniform coatings are under consideration. They are reduced to systems of integral equations with rapidly oscillating functions in the input data. The solutions of such equations and systems are obtained in the form which contains rapidly oscillating functions explicitly. This allows one to take effectively into account the thin structure of the solutions. Various versions of the mathematical formulation of the problems are under consideration taking into account the particular specific form of complimentary conditions. Model contact problems and contact problems with wear are presented. Qualitative mechanical effects are discussed.

**Martirosyan A.N., Dinunts A.S., Davtyan A.V., Martirosyan H.A.....286**  
***The investigation of plane problem of healing of fracture moving with the arbitrary velocity in thermo elastic solids***

The problem on a plane of healing of cracks by currents of fluids with inclusions in infinite thermo elastic solids is considered. This problem is solved by authors formerly for improving fracture, and in present paper is investigated for fractures by with moving by arbitrary law edge. Solution of the plane problem is sought by method of integral transforms Laplace, Fourier and by method of the convolutions. Closed-form solutions for vertical displacement are obtained.

**Martirosyan A.N., Dinunts A.S., Davtyan A.V., Martirosyan H.A.....291**  
***Unsteady space problem of healing of fracture moving with the arbitrary velocity***

The problem of healing of fracture in thermo-elastic space by current of fluid with crystalline, when the boundary of cracks is moved at an arbitrary velocity is solved. Initially the fracture has the form of semi strip  $|y| \leq b_0, x > 0$ . Solution of the plane problem is sought by method of integral transforms Laplace, Fourier and by method of the convolutions. The healing process is consequence of processes of thermo-diffusivity and transverse diffusion current of crystalline. Solution is obtained by convolution method and is brought to closed integral formula for vertical displacement.

**Matevosyan A.G. ....296**  
***Control of motion of plane two-link manipulator by "Minimum energy" criteria***

The mathematical model of the two-link manipulator in the form of Lagrange's equations, in which the control moments developed in rotary kinematic pairs of the manipulator act as generalized forces, is considered. On the basis of this model is formulated and solved the inverse problem for the dynamics of the manipulator gripper. That is, for a given trajectory is determined by the law of the gripper change in time of the vector of control parameters,

ensuring the movement of the gripper along this trajectory. The assessment of quality of management by criterion an energy minimum is made.

**Mikaelyan H.H.**..... **301**  
***Stability of the Plate in Supersonic Gas Flow at the Presence of a Concentrated Moment At The Edges***

The problem of stability of an elastic rectangular plate in a supersonic gas flow is investigated. All edges of the plate are hinged and there are concentrated moments on two edges of the plate. The critical velocity of the gas flow is defined which leads to flutter instability.

**Mikhin M.N.**..... **306**  
***On growing of ellipsoidal cavity in the viscoelastic environment***

The task about a growing ellipsoidal cavity in the viscoelastic environment is considered. Three main stages of deformation of a body are analyzed: prior to building, in process and after growth stop. All arising non-classical regional tasks are brought to the known regional tasks containing some parameter. Methods their solutions based on researches of Papkovich and Neuber are proposed. True characteristics intense the deformed condition of bodies are restored by means of known formulas of interpretation.

**Movsisyan L.A.** ..... **311**  
***The stability of laminates cylindrical ring under punches***

The stability of ring, when concentrated forces acts under symmetrically situated cylindrical of form punches is considered. As an example the case of four punches is being studied, when the elastic modulus of shear is considerably less than the modulus of the longitudinal direction and when the radius of the punch is considerably less than the radius of the cylinder.

**Musayelyan S.L., Grigoryan K.L., Kasyan A.E.** ..... **315**  
***Application of the methods of mechanics at practical stomatology***

In the work the methods that have been used during the study of Armenian system of dental implants, particularly cylindrical and conical collet implants are brought. During the investigation of cylindrical collet implants, the experimental methods of mechanics as well as methods of material resistance have been used.

**Nersisyan G.G., Sargsyan A.M.** ..... **320**  
***On the influence of the electric boundary conditions type on the behavior of the stresses in the compound piezoelectric wedge***

The question of stresses singularity and vector components of the electric induction in the vicinity of piece-wise-homogeneous piezoelectric wedge, when on its bounds elastic displacements and three various electric boundary conditions are given, is discussed. It is established that the mixed electric boundary conditions qualitatively and quantitatively influence on the behavior of the electroelastic field characteristic in the vicinity of the top of the piezowedge, and such an influence is not essential on the distribution of the contact stresses.

**Hovhanisyan S.M.**..... **325**  
***New calculation scheme for bending vibrations of homogenous console bar during kinematic excitation***

In this article it is shown that during kinematic excitation of homogenous console bar with constant lateral section the initial fronts of bending wave arise from its free end.

- Hovhanisyan S.M., Geodakyan E.G., Karapetyan J.K., Sahakyan B.V., Muradyan A.R.** ..... 330  
***Trilateral quasistatic bending of homogenous rectangular parallelepiped as a model of preparation of tectonic earthquake focus***  
 In this article it is shown that in case of quasistatic trilateral bending of homogenous parallelepiped with three force pairs which are applied correspondingly to its opposite faces nodal planes, hypocenter, shear forces, a pair of double forces with a moment (a double pair of forces without a moment) arised naturally which are known from the theory of earthquake epicenter physics.
- Hovhannisyan H.V., Sarkisyan K.S.** ..... 335  
***On periodic contact problem for elastic semi-infinite plate***  
 In the present work a periodic contact problem of elastic semi-infinite plate, strengthened by periodic system of elastic finite stringers, parallel to the boundary of elastic semi-infinite plate, located on the same line and welded (glued) to semi-infinite plate is considered. Using mathematical technique of classical orthogonal Chebyshev polynomials, solution of the problem is reduced to solution of quasi completely regular infinite system of linear algebraic equations.
- Ohanyan G.G., Sahakyan S.L.**..... 340  
***About one model of Slug Flow in gas-liquid mixture***  
 The simple model of propagation Pressure Wave in formed Slug Flow of gas-liquid mixture is considered. The elementary cell of mixture consists of one liquid cork and one gas cork. The cutting exiting frequencies of the fixed bulk gas content, when there is no waves propagation is numerically obtained.
- Papyan A.A., Sarkisyan S.V.** ..... 345  
***Magnetoelastic vibrations of conductive plates with given initial magnetic impulse.***  
 Problems established in magnetoelastic vibrations of plates and shells are dedicated to monograph [1]. Magnetoelastic vibrations of electro-conductive plate, distribution of magnetoelastic waves with the initial conditions are studied in the articles [2-7]. In the present article, based on Kirchhoff's theory, transverse vibrations of perfectly conductive plate with given initial conditions in the external constant magnetic field are studied. The values of flexure plates are obtained due to the initial magnetic impulse.
- Poghosyan H.M., Sargsyan M.Z., Aghalovyan M.L., Ghulghazaryan L.G.**..... 349  
***The nature of the stress-strain state of territory of Armenia based on GPS systems***  
 The problem of determining the stress-strain state of a two-layer plate with real initial data of GPS systems has considered. Problem particularly models of stress-strain state of the territory of Armenia (the area between the latitudes(N) 39.00-42.00 and longitudes(E) 42.00-47.00). Two-layered package (sedimentary and granite) is considered. Source for GPS data was an article [2]. Using Mathematica software environment and the recurrent formulas [1] the automatic calculations of stress-strain states were carried out and their graphs were obtained.
- Pogosyan N.D.** ..... 354  
***Shear wave propagation in non-homogeneous bi-layer media***  
 Shear wave propagation in bi-layer media is considered when layers are non-homogeneous ones with exponential profiles. The dispersion equation is deduced regard to wave frequency.

<b>Popov V.G. ....</b>	<b>359</b>
<b><i>Dynamic stress intensity factor as a broken line crack at interaction with harmonic SH waves.</i></b>	
The problem of the stress intensity factor (SIF) estimation is solved for the break-line shaped crack that consists of the N segments. The crack is situated in the unbounded elastic isotropic body and the plane harmonic waves of the longitudinal shear (SH-waves) interact with it. It is supposed that the edges of the crack are unloaded. One of the main results of the report is the numerical method for the obtained integro -differential equations system's solving.	
<b>Reut V., Reut E. ....</b>	<b>364</b>
<b><i>Generalized scheme of the integral transformations' method for curvilinear defects</i></b>	
One of the efficient methods for solving the problems of failure and stress concentration's detection near the defects is developed by G.Ya.Popov. It is the method of the discontinuous solutions [1,2]. With the help of the pre-built discontinuous solutions is easy to reduce the problem to the solving of the singular equations. This method is based on a generalized scheme of the integral transformations' method [1,3], which is a generalization of the classical integral transformations' method [4] to the case of the unknown function and its normal derivative discontinuities with respect to the variable of the transformation. However, it was assumed that the defect fits into grid. In this paper we present a generalized scheme of the integral transformations' method for the case of curvilinear defect.	
<b>Sanoyan Yu. G. ....</b>	<b>369</b>
<b><i>Solution of rectangular plate thermoelastic stability on a refined theory</i></b>	
The critical temperatures of the plate in a constant temperature field on a refined theory and the theory of Kirchhoff are determine, when two opposing plates are in sliding contact conditions, and the other two simply supported or hinged. The conditions of applicability of the theory of Kirchhoff and refined theory for calculating critical temperatures are consider.	
<b>Sarkisyan A.H., Sarkisyan S.O. ....</b>	<b>374</b>
<b><i>Variational equation of geometrically nonlinear theory of micropolar elastic thin plates</i></b>	
This work is devoted to the conclusion of the general variational principle, construction and production of the main system and the boundary conditions of applied theory of geometrically nonlinear micropolar elastic thin plates .	
In this paper are considered the micropolar thin plates with elastic deflections comparable to the thickness and small to the comparison with the characteristic dimensions of the plate in plane. Simultaneously, angles of the rotations of the normal element to the median plane before deformation and their free rotations is also small. Thus in the tensor of deformation and bending-torsion tensor takes into account not only linear but also the nonlinear terms in the gradients of displacement and rotation.	
<b>Sargsyan V.G. ....</b>	<b>379</b>
<b><i>On the problem of the elasticity theory for the sector of the circle</i></b>	
The plane problem for the elastic sector of the circle is considered, when on the contour of the sector external forces are given.	
<b>Sarkisyan N.S. ....</b>	<b>384</b>
<b><i>The asymptotic solution of the plane problem for two-layer beams with slip</i></b>	

An asymptotic solution of the plane problem for an anisotropic two-layer strip on geometrically nonlinear theory of elasticity within complete contact between the layers was received in the work.

**Sarkisyan S.V., Melkonyan A.V. .... 389**

***Space problem of propagation waves in half-space and layer***

In this work we investigate the problem of propagation of waves in an elastic half-space and layer with mixed boundary conditions. Obtained and investigated the dispersion equation for determining the speed of wave propagation.

**Sargsyan S.O., Zhamakochyan K.A. .... 393**

***The finite element method for study micropolar elastic thin bars***

In the present paper the finite element method is developed to solve specific problems of determination the stress-strain state of bending deformation of micropolar elastic thin bars with different boundary conditions, which is implemented on personal computer. On the basis of the numerical results effective manifestations of micropolar materials in terms of strength and rigidity characteristics are discussed.

**Seyranian S. P. .... 398**

***Limiting transition from local loading on rectangular plate to concentrated force in expression of shear forces***

Limiting transition in the Navier solution for locally loaded on a rectangular platform uniform external pressure rectangular a simply supported plate to the Navier solution at the concentrated loading is discussed.

**Sobol B.V., Rashidova E.V., E.V. Borisova ..... 403**

***Equilibrium transverse crack in elastic half-plane, reinforced by flat plate***

The problem of stress concentration in the vicinity of the crack tip of finite length which is perpendicular to the vicinity of the interface between two semi-infinite elastic bodies – half-plane and strip is considered. Using the Generalized integral transformations method, the problem is reduced to solving a singular integral equation with Cauchy kernel. The cases, where the band is sufficiently thin, missing, or, on the contrary, infinitely wide, are special and limit for this formulation of the problem. The solution of the integral equation is constructed by collocation method. At the same time, to improve the efficiency of the numerical method is applied approximation of the regular part of the kernel in a special form. The values of the normal stress intensity factor in the vicinity of the crack tip for various combinations of values of the geometrical and physical parameters of the problem are received.

**Stepanyan S. P. .... 408**

***Nonclassical problem of beam bending linearly variable thickness under the presence of elastically restrained supports***

The problem of bending of an orthotropic beam of linearly variable thickness carrying a uniformly distributed transverse load is solved. Two variants of boundary conditions in the presence of elastically restrained support are investigated. On the basis of analysis of dimensionless solutions the qualitative conclusions are made.

**Sudakov Yu.V., Zimin B.A., Sventitskaya V.E. .... 413**

***The study of the thermal radiation of the crack tip propagating in PMMA samples under quasi-static tension.***

The paper presents the results of experimental studies of thermal radiation in the propagation of a crack at the quasi-static tests on samples of PMMA.

<b>Sumbatyan M. A., Tarasov A.E.....</b>	<b>418</b>
<b><i>The harmonic vibrations of an elastic rectangular flapping wing in a flow of inviscid incompressible fluid.</i></b>	
In the present paper we study, in frames of a linear approximation, the harmonic vibrations of an elastic rectangular flapping wing in a flow of inviscid incompressible fluid. The problem is reduced to an integro-differential equation. On the basis of the linear theory there is determined the thrust force of the flapping wing.	
<b>Tumanov N.V.....</b>	<b>423</b>
<b><i>On the nature of Paris equation parameters correlation</i></b>	
Based on the analysis of Paris equation parameters correlation the kinetic dependence is obtained which coincides with kinetic equation of stable growth for low cycle fatigue cracks deduced earlier on the basis of physically well-founded mathematical model.	
<b>Ustinov K.B. ....</b>	<b>428</b>
<b><i>On boundary conditions in plate problems, related to delamination of coatings.</i></b>	
An approach to solving the problems of coating delamination is presented consisting in considering the delaminated part of the coating in the frame of plate theory with boundary conditions obtained from analytical solutions of the elastic strips or beams contacting with the half-planes along semi-infinite lines. These problems were formulated and solved in few variants Features of deformation and buckling of the delaminations were found for thermal and mechanical loading.	
<b>Khachatryan A.M., Tovmasyan A.B.....</b>	<b>432</b>
<b><i>Asymptotic solution of mixed three-dimensional interior problem for anisotropic two-layer plate with no full contact between layers</i></b>	
The question of determination stress-strain state of anisotropic two-layer plate with no full contact between layers is consider, when on one of the face surfaces are given values of stresses, and on the other surface-normal component of displacement vector of transference and tangential stresses.	
<b>Khachatryan L.S.....</b>	<b>437</b>
<b><i>The problem of reflection of acoustic waves in inhomogeneous plates borders</i></b>	
The problem of reflection of acoustic waves in inhomogeneous plate's thickness limits is not well studied. The problem is being studied under different boundary conditions. It is required to define the reflected wave in the different types of edge fixing.	
<b>Shekyan H. G., Bagdasaryan I. R. Geworkyan W. R. ....</b>	<b>441</b>
<b><i>Dynamic quality of bolting combination</i></b>	
To assess the dynamic quality of bolting connects considered forced vibrations of the body-parts to-tightening bolts characterizing the sensitivity of the dynamic effects.	
<b>Shekyan H.G., Khachatryan M.N., Harutiunyan H.S. ....</b>	<b>446</b>
<b><i>About the fatigue durability of the material</i></b>	
The durability of the material in the case of cyclic load for the change different interval of the stresses is considered. The graphical connection for the variable cyclic meddle stresses the stress interval is obtained. On the basis of simplify diagram of the limited stresses for the arbitrary asymptotic cyclic case the formula for the stresses calculation are brought. An assumption of the deformable process as an elastic–plastic phenomenon for the one axis vibration motion of the specimen the differential equation by variable coefficients in the form of Mante–Hills is obtained. For the case by les frequency changed of the cyclic load the equation of the curver for the durability strent is brought.	

<b>Gasparyan D.K</b> .....	<b>451</b>
<b><i>Shear localised waves in magneto-electro-elastic inhomogeneous waveguide</i></b>	
The shear localised wave propagation is considered in the inhomogeneous waveguide made of the hexagonal 6mm magneto-electro- elastic material. Several inhomogeneity profiles are derived permitting the exact solution for the usual boundary conditions. The dispersion equations are derived for a case of the quadratic inhomogeneity profile.	
<b>Hairoyan S</b> .....	<b>456</b>
<b><i>Swelling and shrinking impact on shear strength of clayey soils</i></b>	
The article is devoted to the impact of swelling and shrinkage factor on shear strength of swelling clays. According to experiments data it has been shown, when tensions exceed the swelling pressure and simultaneously the natural humidity of soils is above of lower limit of plasticity, additional moistening does not bring to loss of strength, but when the natural humidity is less then lower limit of plasticity, additional moistening brings to absorbing loss of soil's strength. It is proposed the shear tests conduct on dual cut method during determination of the impact of shrinkage on shear strength, where cohesion is equal to zero and the internal friction factor is constant.	
<b>Piliposyan D</b> .....	<b>461</b>
<b><i>Internal resonances in a periodic magneto-electro-elastic structure</i></b>	
Propagation of electro-magneto-acoustic waves in a magneto-electro-elastic (MEE) superlattice has been investigated with full coupling between mechanical and electric fields. Due to simultaneous piezoelectric and piezomagnetic effects, an orthogonally polarised electromagnetic wave couples with the similarly polarised lattice vibration, resulting in a phonon-polaritons. The dispersion relation has been used to demonstrate the coupling not only in the long wave region at high acoustic microwave frequencies.	
<b>Popuzin V., Pennisi M</b> .....	<b>466</b>
<b><i>Fast iterative algorithm for Neumann-type boundary value problems in 2d diffraction</i></b>	
In the present work we propose a fast iteration algorithm to the integral equations of the second kind arising in 2d diffraction problems. Such equations are of Fredholm type, and any natural discretization leads to a linear algebraic system (LAS) with matrices of fully dense structure. The direct treatment with a grid containing N nodes implies that the matrix has $N^2$ nonzero elements, and this requires $O(N^3)$ arithmetic operations by the Gauss elimination technique. With the frequency increasing, if one keeps at least 10 nodes per wavelength, such a treatment becomes computationally too expensive. To overcome this difficulty in our previous works we have proposed an alternative iterative approach to diffraction by soft obstacles, which requires at each iteration step to solve only a Toeplitz LAS. The main goal of the present paper is to extend this approach to the diffraction problems for hard obstacles. At the same time, we apply here a different, improved, strategy which allows us to operate with Toeplitz matrices of a special form, the so-called circulant matrices, which admit more efficient treatment by using convolution method. Another goal is to evaluate convergence of the proposed method versus frequency and obstacle's geometry. Numerical experiments, illustrated in the paper, demonstrate that the method possesses fast convergence. There is also given a comparison with some previous works and with the classical conjugate gradient method for various geometries and wave numbers.	

**Seyranian A. P.**.....471

***Problems of stabilization statically unstable systems by vibration***

Two problems of stabilization of statically unstable systems by vibration are considered. First problem is a well known problem of stabilization of an inverted pendulum by high frequency excitation of the suspension point. The second problem is stabilization of an elastic rod compressed by a longitudinal force greater than the critical Euler's value by longitudinal vibration (Chelomei problem). Stabilization regions are found both analytically and numerically. It is shown that, in contrast to high-frequency stabilization of an inverted pendulum with a vibrating suspension point, the rod is stabilized at excitation frequencies of the order of the natural frequency of transverse oscillations belonging to a certain region.

**Shavlakadze N.**.....476

***The contact problem for a piecewise-homogeneous plate with a finite inclusion of variable cross-section***

A piecewise-homogeneous elastic orthotropic plate, reinforced with a finite inclusion of the wedge-shaped, which meets the interface at a right angle and is loaded with normal forces, is considered. The normal contact stresses along the contact line are determined, and the behavior of the contact stresses in the neighborhood of singular points is established. By using methods of the theory of analytic function, the problem is reduced to a singular integro-differential equation in a finite interval. Using an integral transformation, a Riemann problem is obtained, the solution of which is presented in explicit form.

**Telyatnikov I.S.** .....481

***To the problems of oscillations and static interaction of contacting plates on the surface of the elastic layer***

Contacting lithospheric structures with rectilinear faults are modeled by two-dimensional composite plates on three-dimensional elastic substrate and studied by the methods of the theory of mixed elasticity problems. Given the spatial scale of modeled objects the state of the lithospheric block structure can be described as problems in the theory of elasticity for plates on deformable base. A simplified method of block element is used for plates with straight boundaries. Representations of solutions describing the displacements of the surface and allowing to study the influence of structural element's properties and characteristics of faults on the stress-strain state of the structure are obtained.

**Vaysfel'd N., Romanenko R.**.....486

***On one new approach to the solving of an elasticity problems for a layered medium***

A new approach, based on the G. Popov's method, is applied to the solving of an elasticity problems for a layered medium. The approach's advantages consist in the reducing of the unknown constants number which are required to define the layer's stress state. The solving of the elasticity antiplane problem demonstrates the applying of the proposed scheme.

## СОДЕРЖАНИЕ

<i>Аветисян А.С., Камалян А.А.</i> Распространение электроупругого сдвигового волнового сигнала в продольно-неоднородном пьезодиэлектрическом слое....	5
<i>Аветисян В.В., Степанян В.С.</i> К задаче оптимального гарантированного поиска подвижного объекта на плоскости .....	10
<i>Агаловян Л.А.</i> О некоторых проблемах сейсмологии и предпосылках предсказания землетрясений .....	15
<i>Агаян К.Л., Закарян В.Г.</i> Продольный сдвиг составного упругого пространства, ослабленного трещинами .....	23
<i>Адамян В.Г., Суварян Х. Г.</i> Двухимпульсные котангенциальные переходы между компланарными эллиптической и гиперболической орбитами.....	28
<i>Айзикович С.М., Васильев А.С., Волков С.С.</i> Действие нормальной точечной силы и точечного заряда на трансверсально-изотропное пьезоэлектрическое функционально-градиентное полупространство .....	33
<i>Акопян В.Н., Амирджанян А. А.</i> Напряжённое состояние полуплоскости с абсолютно жёстким включением и трещиной .....	38
<i>Акопян В.Н., Саакян А.В.</i> Напряжённое состояние упругой плоскости с частично оторванным от матрицы абсолютно жёстким включением в рамках модели Галина.....	43
<i>Амирбекян А.Н., Мктрчян М.С., Шемян А.Л., Шемян Л.А.</i> Изгиб двух одинаковых балок на упругой полосе с учётом сжимающих или растягивающих осевых сил.....	48
<i>Антонян С.С., Василян Н.Г.</i> Исследование напряжённо-деформированного состояния изгибаемой пластинки в окрестности края для разных видов закрепления .....	53
<i>Арутюнян А.Р.</i> Определение энергетических затрат по различным программам циклических нагружений .....	58
<i>Арутюнян Л.А., Торосян Д.Р.</i> Плоские задачи для составной плоскости с трещинами между материалами .....	63
<i>Арутюнян Р.А.</i> Высокотемпературная ползучесть, поврежденность и длительная прочность металлических материалов.....	68
<i>Багдоев А., Шекоян А.</i> Волны на шероховатой поверхности.....	73
<i>Баласанян Е.С., Петросян Г.А.</i> Об одной смешанной краевой задаче анизотропной двухслойной пластинки при неполном контакте между слоями.....	78
<i>Барсесян В.Р., Барсесян Т.В.</i> Критерий управляемости линейных стационарных систем переменной структуры .....	83
<i>Барсесян Т.В.</i> О замене базиса в пространстве состояний и влиянии на свойства управляемости составной линейной стационарной системы.....	88

<b>Белубекян М.В., Казарян К.Б., Казарян Р.А.</b> Изгибные волны Флоке в балке периодической структуры неполного упругого контакта.....	93
<b>Белубекян М.В., Мартиросян С.Р.</b> Дивергентная неустойчивость прямоугольной пластинки при набегании сверхзвукового потока газа на её свободный край.....	98
<b>Бычков П.С., Лычев С.А., Манжиров А.В., Сайфутдинов Ю.Н., Федотов И.</b> Экспериментальная идентификация моделей растущих пластин.....	103
<b>Вацян А.А.</b> Обобщённый метод итерации в решении некоторых задач математической физики.....	108
<b>Ватульян А.О., Дударев В.В., Мнухин Р.М.</b> О влиянии остаточных напряжений на резонансные частоты гетерогенной трубы.....	113
<b>Ватульян А.О., Недин Р.Д.</b> О динамических задачах для пластин при наличии предварительного напряжённого состояния различной структуры и способах его идентификации.....	118
<b>Воронин А.В., Судьенков Ю.В., Семенов Б.Н.</b> Термопластический механизм деградации вольфрамовой преграды при высокоскоростном воздействии плазменной струи.....	123
<b>Гараков В.Г., Григорян Л.Г.</b> Распространение волн в упругом слое из пьезоактивного материала кубической симметрии.....	128
<b>Гаспарян А.В., Давтян З.А.</b> Напряжённое состояние композита в виде пакета из произвольного конечного числа упругих слоёв-прямоугольников при антиплоской деформации.....	133
<b>Гачкевич А., Казарян К., Терзян С.</b> Сдвиговые волны в анизотропной однонаправленной периодической структуре.....	138
<b>Геворкян Г.А.</b> Динамическое моделирование механизма шарнирного четырёхзвенника с упругим шатуном.....	143
<b>Геворкян Г.З.</b> Задача устойчивости ортотропной колонны переменного радиуса с учётом деформаций поперечных сдвигов.....	148
<b>Геворкян Р.С., Асратян М.Г.</b> Асимптотическое решение задачи электроупругости для пьезоэлектрической тонкой продольно-неоднородной поляризованной пластины (слоя).....	153
<b>Геодакян Э.Г., Карапетян Дж.К., Саакян Б.В., Мурадян А.Р.</b> Оценка напряженно-деформационного состояния земной коры Армении по сейсмологическим данным.....	158
<b>Головин Н.Н., Кувыркин Г.Н., Майская Е.В.</b> Математическое моделирование динамического взаимодействия термонагруженных композитных конструкций.....	162
<b>Голядкина А.А., Калинин А.А., Кириллова И.В., Коссович Е.Л., Коссович Л.Ю., Менишова Л.Р., Морозов К.М., Полиенко А.В., Челнокова Н.О.</b> Пациенто-ориентированное моделирование для прогнозирования результатов хирургического лечения элементов сердечно-сосудистой системы.....	167

<i>Григорян А.</i> Контактная задача для упругой составной полуплоскости, ослабленной конечным вертикальным разрезом .....	172
<i>Григорян Д.Г., Арутюнян В. М.</i> Принципы расчёта сборно-монолитных часторёбристых перекрытий .....	177
<i>Григорян Э.Х., Агаян К.Л., Джилавян С.А.</i> Дифракция сдвиговой электроупругой волны на периодической структуре полубесконечных трещин в пьезоэлектрическом пространстве .....	182
<i>Гулгазарян Г.Р., Гулгазарян Р.Г., Михасёв Г.И.</i> Свободные интерфейсные и краевые колебания тонких упругих полубесконечных круговых цилиндрических оболочек со свободным торцом .....	187
<i>Гулгазарян Л.Г.</i> Асимптотика вынужденных колебаний ортотропных оболочек при наличии вязкого сопротивления .....	192
<i>Дадаян Ю.Г., Оганисян З.Б.</i> Метод конечных элементов (МКЭ) для задачи изгиба неоднородной балки .....	197
<i>Даниелян Л.Е., Терджян Ц.Э.</i> Движение жидкости в круглой цилиндрической трубе с проницаемыми стенками .....	202
<i>Даноян З.Н., Атоян Л.А., Саакян С.Л., Даноян Н.З.</i> Квазипериодический спин-волновой процесс в слоистой периодической ферромагнитной структуре .....	207
<i>Даноян З.Н., Манукян Г.А., Берберян А.Х., Мкртчян С.А.</i> Распространение сдвиговых электроупругих волн в двухслойной среде с пьезоэлектрическим и проводящим слоями .....	212
<i>Даштоян Л.Л., Акоюн Л.В.</i> Напряжённое состояние упругой плоскости с полубесконечным абсолютно жёстким включением, перпендикулярно выходящим на трещину конечной длины .....	217
<i>Журавлев А.Б., Зайцев А.В., Карев В.И., Коваленко Ю.Ф., Марков В.Г., Сидорин Ю.В., Устинов К.Б.</i> Экспериментальное исследование деформирования горных пород при сложных программах нагружения .....	222
<i>Зимин В.Н., Крылов А.В., Файзуллин Ф.Р., Чурилин С.А.</i> К расчёту динамики раскрытия трансформируемых космических конструкций .....	227
<i>Казарян А.А.</i> Дифракция поверхностной волны сдвига в пространстве пьезоэлектрик-диэлектрик при полубесконечном металлическом слое в диэлектрике .....	232
<i>Калиджян Л.Р.</i> К задаче распространения магнитоупругих волн в системе слой-полупространство из идеально-проводящих материалов .....	237
<i>Канемян Э.Г., Мкртчян М.М., Мкртчян М.С.</i> О решении задач кручения призматических стержней с поперечными сечениями в виде треугольника методом ГИУ .....	242
<i>Карпетян К.А.</i> Влияние содержащейся в порах и капиллярах химически несвязанной влаги на отношении прочностей литоидпемзобетона при сжатии и растяжении .....	247

<b>Карпетян С.С., Мкртчян Г.А., Овсепян Н.А.</b> Анализ микросейсмических характерных разновидностей грунтовых условий г. Гюмри .....	251
<b>Керопян А.В.</b> К решению контактной задачи для упругой полуплоскости или бесконечной пластины с двумя конечными упругими накладками при наличии сдвиговых прослоек .....	256
<b>Киракосян Р.М.</b> Упруго-защемлённая опора для осесимметрично изгибаемых круглых пластин .....	261
<b>Кириллова О.И.</b> Гармонические колебания продольного сдвига бесконечного полого цилиндра произвольного сечения с туннельной трещиной .....	266
<b>Ковалев В. А., Радаев Ю. Н.</b> Первая вариация действия в случае континуумов с варьируемыми граничными поверхностями .....	271
<b>Курдина С.П.</b> О конформном контакте системы штампов и тел с покрытиями .....	276
<b>Манжиров А.В., Казаков К.Е., Гупта Н.К.</b> Осесимметричная задача множественного конформного контакта для оснований с поверхностно-неоднородными покрытиями .....	281
<b>Мартиросян А.Н., Динунц А.С., Давтян А.В., Мартиросян Г.А.</b> Исследование плоской задачи о залечивании трещины, движущейся с переменной скоростью в термоупругой среде .....	286
<b>Мартиросян А.Н., Динунц А.С., Давтян А.В., Мартиросян Г.А.</b> Нестационарная пространственная задача залечивания трещины, движущейся с переменной скоростью .....	291
<b>Матевосян А.Г.</b> Управление движением плоского двухзвенного манипулятора по критерию «минимум энергии» .....	296
<b>Микаелян А.О.</b> Устойчивость пластинки при сверхзвуковом обтекании и наличии сосредоточенного момента на кромках .....	301
<b>Михин М.Н.</b> Задача о зарастающей эллипсоидальной полости в вязкоупругой среде .....	306
<b>Мовсисян Л.А.</b> К устойчивости слоистого цилиндрического кольца под штампами .....	311
<b>Мусаелян С.Л., Григорян К.Л., Касьян А.Э.</b> Применение методов механики в практической стоматологии .....	315
<b>Нерсисян Г.Г., Саргсян А.М.</b> О влиянии типа электрических граничных условий на поведение напряжений в тонком кусочно-однородном пьезоэлектрическом клине .....	320
<b>Оганесян С.М.</b> Новая расчётная схема для изгибных колебаний однородного консольного стержня при кинематическом возбуждении .....	325
<b>Оганесян С.М., Геодакян Э.Г., Карпетян Дж.К., Мурадян А.Р., Саакян Б.В., Оганесян А.С.</b> Трёхсторонний квазистатический изгиб прямоугольного параллелепипеда, как модель подготовки очага тектонического землетрясения ...	330

<i>Оганисян Г.В., Саркисян К.С.</i> К периодической контактной задаче для упругой полубесконечной пластины .....	335
<i>Оганян Г.Г., Саакян С.Л.</i> Об одной модели снарядного потока газожидкостной смеси.....	340
<i>Папаян А.А., Саркисян С.В.</i> Магнитоупругие колебания проводящей пластинки с заданным начальным магнитным импульсом .....	345
<i>Погосян А.М., Саргсян М.З., Агаловян М.Л., Гулгазарян Л.Г.</i> О характере напряжённо-деформированного состояния территории Армении на основе данных GPS систем.....	349
<i>Погосян Н.Д.</i> Распространение сдвиговых волн в двухслойной неоднородной среде.....	354
<i>Попов В. Г.</i> Динамический коэффициент интенсивности напряжений для трещины в виде ломаной линии при взаимодействии с гармоническими SH волнами.....	359
<i>Реут В., Реут Е.</i> Обобщённая схема метода интегральных преобразований при наличии криволинейного дефекта .....	364
<i>Саноян Ю.Г.</i> Решение задачи термоупругой устойчивости прямоугольной пластины по уточнённой теории .....	369
<i>Саркисян А.А., Саркисян С.О.</i> Вариационное уравнение геометрически нелинейной теории микрополярных упругих тонких пластин.....	374
<i>Саркисян В.Г.</i> Об одной задаче теории упругости для кругового сектора.....	379
<i>Саркисян Н.С.</i> Асимптотическое решение одной плоской задачи для двухслойной балки с проскальзыванием .....	384
<i>Саркисян С.В., Мелконян А.В.</i> Пространственная задача о распространении волн в полупространстве и слое .....	389
<i>Саркисян С. О., Жамакочян К. А.</i> Изучение краевых задач микрополярных упругих тонких балок методом конечных элементов .....	393
<i>Сейранян С.П.</i> О предельном переходе в прямоугольной пластине от распределённого по прямоугольнику равномерного внешнего давления к сосредоточенной силе в перерезывающих силах. Ещё один парадокс.....	398
<i>Соболь Б.В., Рашидова Е.В., Борисова Е.В.</i> Задача о поперечной внутренней трещине в составной упругой полуплоскости .....	403
<i>Степанян С.П.</i> Неклассическая задача изгиба балки линейно-переменной толщины при наличии упруго-закреплённой опоры .....	408
<i>Судьбенков Ю.В., Зимин Б.А., Свентицкая В.Е.</i> Исследование теплового излучения вершины трещины, распространяющейся в образцах ПММА при квазистатическом растяжении.....	413
<i>Сумбатян М.А., Тарасов А.Е.</i> Колебание прямоугольного упругого крыла в потоке несжимаемой жидкости .....	418
<i>Туманов Н.В.</i> О природе корреляции коэффициентов уравнения Пэриса.....	423

<b>Устинов К.Б.</b> О граничных условиях для задач, связанных с отслоением покрытий, решаемых в терминах теории пластин.....	428
<b>Хачатрян А. М., Товмасын А. Б.</b> Асимптотическое решение смешанной трёхмерной внутренней задачи для анизотропной двухслойной пластинки при неполном контакте между слоями .....	432
<b>Хачатрян Л.С.</b> Отражение упругих волн от границы неоднородной по толщине пластинки.....	437
<b>Шекян Г.Г., Багдасарян И.Р., Геворкян В.Р.</b> Динамическое качество болтовых соединений.....	441
<b>Шекян Г.Г., Хачатрян М.Н., Арутюнян А.С.</b> К вопросу усталостной прочности материалов.....	446
<b>Gasparyan D.K</b> Shear localised waves in magneto-electro-elastic inhomogeneous waveguide .....	451
<b>Hairoyan S.</b> Swelling and shrinking impact on shear strength of clayey soils.....	456
<b>Piliposyan D.</b> Internal polariton resonance in a periodic oppositely polarized magneto-electro-elastic structure.....	461
<b>Popuzin V., Pennisi M.</b> Fast iterative algorithm for Neumann-type boundary value problems in 2d diffraction.....	466
<b>Seyranian A. P.</b> Problems of stabilization statically unstable systems by vibration.....	471
<b>Shavlakadze N.</b> The contact problem for a piecewise-homogeneous plate with a finite inclusion of variable cross-section .....	476
<b>Telyatnikov I.S.</b> To the problems of oscillations and static interaction of contacting plates on the surface of the elastic layer .....	481
<b>Vaysfel'd N., Romanenko R.</b> On one new approach to the solving of an elasticity problems for a layered medium .....	486
<b>Contents and abstracts</b> .....	489