НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ

АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Труды IV международной конференции
21-26 сентября 2015, Цахкадзор, Армения

ЕРЕВАН – 2015

УДК 531.534:06
ББК 22.2
А 437

Институт механики НАН РА
Институт проблем механики им А.Ю.Ишлинского РАН
Национальный комитет по теоретической и прикладной механики Армении
Российский национальный комитет по теоретической и прикладной механике
Национальный университет архитектуры и строительства Армении

Сопредседатели: д.ф.-м.н. В.Н. Акопян (Армения)
д.ф.-м.н. А.В. Манжиров (Россия)

Зам. председателя: д.ф.-м.н. А.В.Саакян (Армения), д.ф.-м.н. М.А.Сумбатян (Россия)

Ученые секретари: к.ф.-м.н. Л.Л.Даштоян (Армения), к.ф.-м.н. Е.В.Мурашкин (Россия)

Ответственный редактор: д.ф.-м.н. В.Н. Акопян

Технический редактор: к.ф.-м.н. Г.З.Геворкян

Редактор: Ж.А.Авдалян

А 437 АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ: Труды IV международной конференции, 21-26 сентября 2015, Цахкадзор, Армения. – Ер.: Национальный университет архитектуры и строительства Армении, 2015.-528 с.

В сборник включены доклады, представленные на IV-ую международную конференцию «Актуальные проблемы механики сплошной среды».

УДК 531.534:06
ББК 22.2

ISBN 978-9939-63-259-9

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

ՀՈԾ ՄԻՋԱՎԱՅՐԻ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԱՐԴԻ ՊՐՈԲԼԵՄՆԵՐԸ

IV միջազգային գիտաժողովի նյութեր
21-26 սեպտեմբերի 2015թ., Ծաղկաձոր, Հայաստան

ԵՐԵՎԱՆ – 2015

NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
INSTITUTE OF MECHANICS

TOPICAL PROBLEMS OF CONTINUUM MECHANICS

Proceedings of IV International Conference
21-26 September 2015, Tsakhkadzor, Armenia

YEREVAN – 2015

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПЛОСКОГО ВОЛНОВОГО СИГНАЛА В ПЬЕЗОДИЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ С ПРИГРАНИЧНЫМИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ И ФИЗИЧЕСКИМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

Аветисян А.С., Камалян А.А., Унанян А.А.

Введение. Исследованию классических волн, локализованных у свободной от механических нагрузок идеально гладкой поверхности полупространства [2], посвящено множество работ. Однако, гладкая поверхность – это идеализированная модель. На самом деле, мы всегда сталкиваемся с рельефными макро-поверхностями (в геофизике, в сейсмологии), негладкими микро-поверхностями (шероховатые поверхности деталей в микроэлектронике и в наноэлектронике) и т.д. Практически, всегда в приповерхностной зоне имеется вертикальная неоднородность материала полупространства.

Выявлению влияния неоднородности материала или неровности поверхности на распространение волнового сигнала в волноводах разной геометрии посвящена обширная литература [2-8]. В настоящей статье методом виртуальных срезов (MVS) и вводом гипотез MELS [9;10] приводится краткое изложение исследований распространения плоских волновых сигналов в пьезоэлектрическом волноводе с приграничными неоднородностями (шероховатость поверхности, обжиг материала при обработке поверхности).

Постановка задачи. Рассматривается случай распространения горизонтально поляризованного (SH) электроупругого монохроматического волнового сигнала $F(x,y,t)=F_{j0}(y)\cdot \exp i(kx-\omega t)$ в пьезодиэлектрическом слое-волноводе.

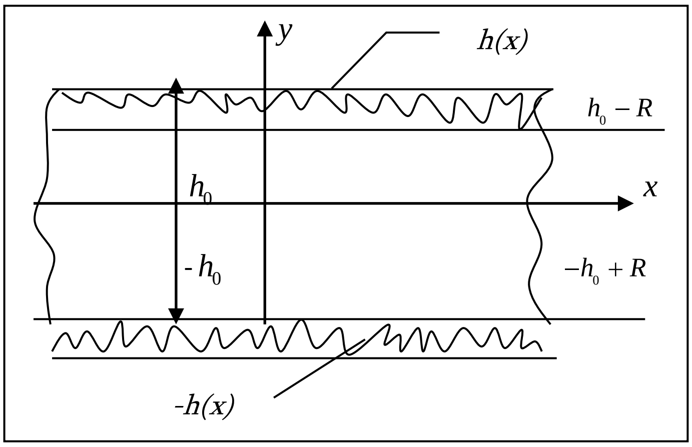


Рис. 1 Слой с приповерхностными неоднородностями (шероховатость поверхности и обжиг материала)

Материал пьезодиэлектрика принадлежит одному из классов 2mm – ромбической, 4, 4mm – тетрагональной, 6, 6mm – гексагональной симметрии, в которых анизотропия материала допускает разделение плоской неэлектроактивной и антиплоской электроактивной деформации [11].

Ползуясь методом виртуальных срезов [9], пезодиэлектрический однородный волновод с приповерхностными неоднородностями, моделируется как трехслойный композит в вакууме (рис.1), с двумя вакуумумными $\Omega_0^+=\left\{|x|<\infty, h_0-R\le y<+\infty, |z|<\infty\right\}$ и $\Omega_0=\left\{|x|<\infty, -h_0+R\le y\le h_0-R, |z|<\infty\right\}$ $\Omega_0^-=\left\{|x|<\infty, -\infty<y\le -h_0+R, |z|<\infty\right\}$ полупространствами.

Базовый пьезоэлектрический однородный слой, приповерхностный неоднородный пьезоэлектрический слой сверху $\Omega_1=\left\{|x|<\infty, h_0-R\le y\le h(x), |z|<\infty\right\}$ и приповерхностный неоднородный пьезоэлектрический слой снизу $\Omega_2=\left\{|x|<\infty, -h(x)\le y\le -h_0+R, |z|<\infty\right\}$, где $2h_0$ – базовая толщина слоя-волновода, R – наибольшая высота профиля неровностей, $y=\pm h(x)$ – неровные поверхности слоя. Причём, $R=\max\left(h_{\max}(x)-h_{\min}(x)\right)\ll h_0$.

Для исследования явлений при распространении горизонтально поляризованного (SH) электроупругого монохроматического сигнала $\left\{\vec{u},\varphi\right\}=\left\{0;0;w(x,y,t);\varphi(x,y,t)\right\}$ в выделенных слоях квазистатические уравнения электроупругости можно представить в едином векторном виде:

$$\operatorname{div}\vec{\sigma}_n = \rho_n(x,y)\,\ddot{w}_n;\ \operatorname{div}\vec{D}_n = 0;\quad \vec{E}_k = -\operatorname{grad}\varphi_n,\ \text{где}\ n;k = 0;1;2. \tag{1.1}$$

Механические напряжения $\sigma_{zx}^{(n)}$, $\sigma_{yz}^{(n)}$ и компоненты вектора электрического смещения $D_x^{(n)}$, $D_y^{(n)}$ для пьезодиэлектриков указанных симметрии можно записать в едином виде:

$$\sigma_{zx}^{(n)} = G_n(x,y)\,w_{n,x} + e_n(x,y)\,\varphi_{n,x},\quad \sigma_{yz}^{(n)} = G_n(x,y)\,w_{n,y} + e_n(x,y)\,\varphi_{n,y},$$

$$D_x^{(n)} = e_n(x,y)\,w_{n,x} - \varepsilon_n(x,y)\,\varphi_{n,x},\quad D_y^{(n)} = e_n(x,y)\,w_{n,y} - \varepsilon_n(x,y)\,\varphi_{n,y}, \tag{1.2}$$

где физико-механические характеристики материала $G_n(x,y)$, $e_n(x,y)$, $\varepsilon_n(x,y)$, $\rho_n(x,y)$– кусочно-непрерывные, слабо меняющиеся функции в материальных слоях Ω_n, соответственно

$$\gamma_n(x,y) \triangleq \begin{cases} \gamma_1(y) = \gamma_0\left[1+\delta_0\sin\left(\alpha_m^+(x)y - \beta_m^+(x)\right)\right], & y\in\left[h_0-R;h(x)\right] \\ \gamma_0, & y\in\left[-h_0+R;h_0-R\right] \\ \gamma_2(y) = \gamma_0\left[1+\delta_0\sin\left(\alpha_m^-(x)y - \beta_m^-(x)\right)\right], & y\in\left[-h(x);-h_0+R\right] \end{cases} \tag{1.3}$$

где $\alpha_m^{\pm}(x)y - \beta_m^{\pm}(x) = \pi(4m+1)\left(y\mp(h_0-R)\right)/2\left[\pm h(x)\mp(h_0-R)\right]$.

Представление (1.3) обеспечивает непрерывность физико-механических характеристик материала на виртуальных срезах $y=\pm(h_0-R)$, а также слабо ужесточённые характеристики материала $\gamma_0(1+\delta_0)$ на свободных неровных поверхностях слоя $y=\pm h(x)$. Параметр $m\in\{\mathrm{N}\}$ формально можно принять как число тактов обработки поверхностей, а $\delta_0 \triangleq (R/2h_0) \ll 1$– малый геометрический параметр, описывающий неровность поверхности.

На механически свободных поверхностях слоя $y=\pm h(x)$ удовлетворяются граничные условия

$$h'(x)\cdot\sigma_{zx}^{(1)}(x,h(x),t) + \sigma_{yz}^{(1)}(x,h(x),t) = 0,\quad \varphi_1(x,h(x),t) = \varphi_{0+}\exp(-kh(x))\cdot e^{i(kx-\omega t)}$$

$$h'(x)\cdot D_x^{(1)}(x,h(x),t) + D_y^{(1)}(x,h(x),t) = -k\varepsilon_0^+\left[i\cdot h'(x)-1\right]\cdot\varphi_{0+}\exp(-kh(x))\cdot e^{i(kx-\omega t)} \tag{1.4}$$

$$-h'(x)\cdot\sigma_{zx}^{(2)}(x,-h(x),t) + \sigma_{yz}^{(2)}(x,-h(x),t) = 0,\quad \varphi_2(x,-h(x),t) = \varphi_{0-}\exp(kh(x))\cdot e^{i(kx-\omega t)}$$

$$-h'(x)\cdot D_x^{(2)}(x,-h(x),t) + D_y^{(2)}(x,-h(x),t) = k\varepsilon_0^-\left[i\cdot h'(x)-1\right]\cdot\varphi_{0-}\exp(kh(x))\cdot e^{i(kx-\omega t)} \tag{1.5}$$

На виртуальных срезах $y=\pm(h_0-R)$ удовлетворяются условия полной сопряжённости электромеханических полей.

2. Исследование проблемы. Для исследования явлений распространения горизонтально поляризованного (SH) электроупругого монохроматического сигнала $F(x,y,t) = F_{j0}(y)\cdot\exp i(kx-\omega t)$ в виртуально выделенных слоях $n=1;2$ с учётом (1.3), уравнения электроупругости представим в едином виде:

$$\begin{aligned} &G_0\left(1+\delta_0 f_n(y,h(x))\right)\cdot w_{n,xx} + e_0\left(1+\delta_0 f_n(y,h(x))\right)\cdot\varphi_{n,xx} \\ &+G_0\delta_0 f_{n,x}(y,h(x))\cdot w_{n,x} + e_0\delta_0 f_{n,x}(y,h(x))\cdot\varphi_{n,x} + \sigma_{yz,y}^{(n)} = \rho_0\left(1+\delta_0 f_n(y,h(x))\right)\cdot\ddot{w}_n \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} &e_0\left(1+\delta_0 f_n(y,h(x))\right)\cdot w_{n,xx} - \varepsilon_0\left(1+\delta_0 f_n(y,h(x))\right)\cdot\varphi_{n,xx} \\ &+e_0\delta_0 f_{n,x}(y,h(x))\cdot w_{n,x} - \varepsilon_0\delta_0 f_{n,x}(y,h(x))\cdot\varphi_{n,x} + D_{y,y}^{(n)} = \rho_0\left(1+\delta_0 f_n(y,h(x))\right)\cdot\ddot{w}_n \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$f_n(y,h(x)) \triangleq \begin{cases} f_1(y,h(x)) = \sin\left(\alpha(x)y - \beta(x)\right), & y\in\left[h_0-R;h(x)\right] \\ f_0(y,h(x)) \equiv 0, & y\in\left[-h_0+R;h_0-R\right] \\ f_2(y,h(x)) = -\sin\left(\alpha(x)y + \beta(x)\right), & y\in\left[-h(x);-h_0+R\right] \end{cases} \tag{2.3}$$

Зная характер неоднородности в приповерхностных зонах Ω_1 и Ω_2 (1.3), вводим гипотезы MELS о распределении упругого сдвига и электрического потенциала по толщине в этих слоях, соответственно:

$$w_1(x,y,t)=\left[1+\delta_0\sin\left(\alpha_m^+(x)y-\beta_m^+(x)\right)\right]\cdot w_0\left(x,h_0-R,t\right) \tag{2.4}$$

$$\varphi_1(x,y,t)=\sin\left(\alpha_m^+(x)y-\beta_m^+(x)\right)\cdot\left[\varphi_{0+}\left(x,h(x),t\right)-\varphi_0\left(x,h_0-R,t\right)\right]+\varphi_0\left(x,h_0-R,t\right)$$

$$w_2(x,y,t)=\left[1+\delta_0\sin\left(\alpha_m^-(x)y-\beta_m^-(x)\right)\right]\cdot w_0\left(x,-h_0+R,t\right) \tag{2.5}$$

$$\varphi_2(x,y,t)=\sin\left(\alpha_m^-(x)y-\beta_m^-(x)\right)\cdot\left[\varphi_{0-}\left(x,-h(x),t\right)-\varphi_0\left(x,-h_0+R,t\right)\right]+\varphi_0\left(x,-h_0+R,t\right)$$

Здесь фигурирует первичный электроупругий сигнал в однородном слое Ω_0

$$w_0(x,y,t)=\left[A_{01}\sin(\alpha_0 ky)+A_{02}\cos(\alpha_0 ky)\right]\cdot e^{i(kx-\omega t)},$$

$$\varphi_0(x,y,t)=\left\{B_{01}\sin(ky)+B_{02}\cos(ky)+\frac{e_0}{\varepsilon_0}\left[A_{01}\sin(\alpha_0 ky)+A_{02}\cos(\alpha_0 ky)\right]\right\}\cdot e^{i(kx-\omega t)} \tag{2.6}$$

и затухающие от негладких поверхностей $y=\pm h(x)$ по глубине соответствующих вакуумных полупространств электрические колебания

$$\varphi_n^{(e)}(x,y,t)=\varphi_{0\pm}\exp(\mp ky)\cdot e^{i(kx-\omega t)}. \tag{2.7}$$

2.1. Поверхностные электромеханические динамические нагрузки. Геометрическая неоднородность поверхности (шероховатость) воздействует на распространяющуюся волну. На базовых поверхностях слоя $y=\pm(h_0-R)$ при распространении горизонтально-поляризованного (SH) электроупругого монохроматического сигнала $F(x,y,t)=F_{j0}(y)\cdot\exp i(kx-\omega t)$ в волноводе возникают переменные поверхностные электромеханические нагрузки:

$$\begin{aligned}\sigma_{yz}^{(n)}(x,\pm(h_0-R))={}&\int_{h_0-R}^{h(x)}\left[G_0 w_{n,xx}+e_0\varphi_{n,xx}+\omega^2\rho_0 w_n\right]\cdot dy+\omega^2\rho_0\delta_0\int_{h_0-R}^{h(x)} f_n(y,h(x))w_n\cdot dy\\&+G_0\delta_0\int_{h_0-R}^{h(x)}\left[f_n(y,h(x))\cdot w_{n,x}\right]_{,x}\cdot dy+e_0\delta_0\int_{h_0-R}^{h(x)}\left[f_n(y,h(x))\cdot\varphi_{n,x}\right]_{,x}\cdot dy\end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}D_y^{(n)}(x,\pm(h_0-R))={}&\int_{h_0-R}^{h(x)}\left[e_0 w_{n,xx}-\varepsilon_0\varphi_{n,xx}\right]\cdot dy+\\&+e_0\delta_0\int_{h_0-R}^{h(x)}\left[f_n(y,h(x))\cdot w_{n,x}\right]_{,x}\cdot dy-\varepsilon_0\delta_0\int_{h_0-R}^{h(x)}\left[f_n(y,h(x))\cdot\varphi_{n,x}\right]_{,x}\cdot dy\end{aligned} \tag{2.9}$$

где подынтегральные величины с индексом $n=1;2$ определяются гипотезами MELS (2.4) и (2.5) и соответствуют прослойкам Ω_1 и Ω_2. Очевидно, что при идеально гладких поверхностях слоя, когда $R\to 0$, имеем $\delta_0\to 0$ и $h(x)\to h_0$, и эти нагрузки исчезают.

Выбирая негладкости поверхностей слоя в синусоидальном виде (2.11), можем оценить распределения приведённых механических напряжений $\sigma_{yz}^{(+)}(x)$ и электрических смещений $D_y^{(+)}(x)$ на базовых поверхностях слоя $y=\pm(h_0-R)$.

2.2. Дисперсия волнового сигнала и внутренний резонанс. Вводом гипотез MELS (2.4) и (2.5), часть граничных условий удовлетворяется автоматически. Из условий непрерывности сдвиговых механических напряжений и нормальной компоненты электрического смещения на виртуальных срезах $y=\pm(h_0-R)$ получаем систему из четырёх комплексных алгебраических однородных уравнений относительно уже комплексных амплитудных постоянных. Условие существования нетривиальных решений даёт дисперсионное уравнение в виде:

$$\det\left\| g_{ij}\left(\omega/k,\ h(x),\ \delta_0,\ \chi_0^2\right)\right\|_{8\times 8} = 0. \qquad (2.10)$$

Выбирая негладкости поверхностей слоя в синусоидальном виде $h(x) \triangleq h_0\left[1-\delta_0\left(1-\sin(k_0 x)\right)\right]$, где $\delta_0 \triangleq \left(R/2h_0\right) \ll 1$, (2.11)

определяем дисперсию частоты $\omega = \omega\left(\lambda/\lambda_0,\ \delta_0,\ \chi_0^2\right)$ в каждом периоде неровностей поверхности $x \in \left[0;\lambda_0\right]$.

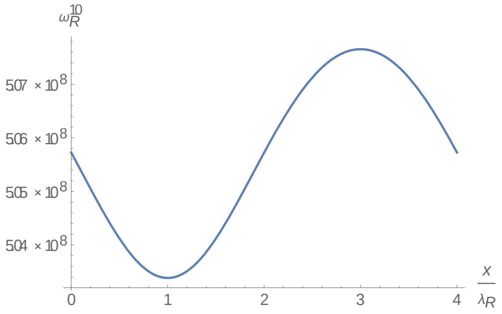


Рис. 2а: Частотная характеристика внутреннего резонанса слоя, для локализованных мод сигнала

Численный анализ показывает, что при распространении коротких волн: $R \sim \lambda \ll h_0$, учёт только приповерхностной неоднородности материала, без учёта шероховатости поверхностей, приводит к модельной задачи Лява: однородное полупространство, граничащее с поперечно слабо-неоднородным тонким слоем. При распространении же коротких волн: $R \sim \lambda \ll h_0$, учёт только шероховатости поверхностей, без учёта приповерхностной неоднородности материала, приводит уже к другой модельной задаче Лява: однородное полупространство, граничащее с продольно слабо-неоднородным тонким слоем.

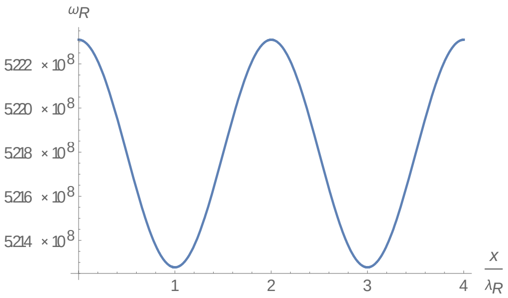


Рис. 2б: *Частотная характеристика внутреннего резонанса слоя, для периодических мод сигнала*

Получается, что при распространении сдвигового волнового сигнала поверхностные неоднородности приводят к появлению с определённой длиной волны λ/λ_0, где λ_0 – средний шаг периодической неровности.

Вновь появившая волна периодически исчезает в отдельных зонах умолчания $x \in \left[\lambda_{n1}^*;\lambda_{n2}^*\right] \subset \left[(n-1)\lambda_0; n\lambda_0\right]$ на шаге $n\lambda_0$ периодической неровности.

Из условий (1.4) и (1.5) на негладких поверхностях $y = \pm h(x)$ получаем условия возможного внутреннего резонанса, когда приведённые электромеханические поверхностные нагрузки (2.8) и (2.9) возбуждают волну с совпадающей частотой распространяющегося волнового сигнала

А) $\alpha_0^2 = \left[h'(x)\right]^2$ (2.12)

Б) $\alpha_0 = \left[1-\delta_0\left(1-\sin(k_0 x)\right)\right]^{-1} \cdot \left(m\pi\right)/\left(kh_0\right)$ (2.13)

Из уравнения (2.12) видно что внутренний резонанс в клеящем слое возможно при «медленных» $\mathrm{v}_\phi\left(k\right) = C_{3t} \cdot \left\{1-\left[h'(x)\right]^2\right\}$ волновых электроупругих сигналах в упругих полупространствах. Резонансная частота

$$\omega_R = \left(2\pi C_{3t}/\lambda_0\right)\left(\lambda_0/\lambda_R\right)\cdot\sqrt{1-\left[2\pi\left(\delta_0/\lambda_0\right)\cdot\sin\left(2\pi\left(\lambda_R/\lambda_0\right)\left(x/\lambda_R\right)\right)\right]^2} \qquad (2.14)$$

очевидно, зависит от относительных линейных размеров волнового сигнала и шероховатости.

Из уравнения (2.13) для внутреннего резонанса в клеящем слое получаем частоты:

$$\omega_R^{(m)} = \left(2\pi C_{3t}/\lambda_R\right)\cdot\sqrt{1-\left[1-2\pi\left(\delta_0/\lambda_0\right)\left(1-\sin\left(2\pi\left(\lambda_R/\lambda_0\right)\left(x/\lambda_R\right)\right)\right)\right]^{-2}\cdot m^2/\left(2h_0/\lambda_R\right)^2} \quad (2.15)$$

Графические изображения частоты $\omega(x/\lambda_R)$ в интервале $x\in\left[0;\lambda_0\right]$ приведены на рис. 2а и 2б, соответственно для (2.15) и (2.14).

Заключение. Пользуясь методом виртуальных сечений и введя гипотезы MELS, исследуются явления, возникшие при распространении сдвигового электроупругого сигнала в пьезоэлектрическом слое. Однородный волновод с приповерхностными неоднородностями моделируется как трёхслойный. Выявлены поверхностные динамические нагрузки на свободные поверхности однородного волновода и возможность появления внутреннего резонанса в волноводе. Получена амплитудно-фазовая характеристика волнового процесса. Показано, что геометрическая неоднородность на поверхности слоя, а также приповерхностная неоднородность материала приводят к появлению поверхностных электромеханических нагрузок и внутреннему резонансу вблизи поверхностных шероховатостей. В частном случае, получена зависимость резонансных частот от относителной длины распространяющегося первичного сигнала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bleustein J.L. A new surface waves in piezoelectric materials. // Appl.Phis. Lett., 1968, vol.13, №12.
2. Biryukov S.V., Gulyaev Y.V., Krylov V., Plessky V. Surface acoustic waves in inhomogeneous media, Springer Series on Wave Phenomena, Vol. 20, 1995, 388p.
3. L Brekhovskikh, Waves in Layered Media 2e , Applied mathematics and mechanics, Vol. 16, Elsevier Science, 2012, 520.
4. Flannery CM, von Kiedrowski H., Effects of surface roughness on surface acoustic wave propagation in semiconductor materials, Ultrasonics. 2002 Vol. 40 (Issues 1-8): 83-87.
5. Singh S.S. Love Wave at a Layer Medium Bounded by Irregular Boundary Surfaces.// Journal of Vibration and Control, 2010; Vol.16. 1177
6. Carbone G., Scaraggi M., Tartaglino U. Adhesive contact of rough surfaces: comparison between numerical calculations and analytical theories., Eur Phys J E Soft Matter., 2009, Vol.30(Issues 1), 65-74.
7. Feng J., Zikun W., Tiejun W., The Bleustein–Gulyaev (B–G) wave in a piezoelectric layered half-space // Int. J. Eng Sci. 2001. Vol.39. P.1271–1285.
8. Shchegrov A.V. Propagation of surface acoustic waves across the randomly rough surface of an anisotropic elastic medium. // J. Appl. Phys. (1995), 78, 1565.
9. Avetisyan A.S. The boundary problem modelling of roungh surfaces continuous media with coupled physicomechanical fields. Reports of NAS of Armenia, (2015), vol.115, №2, p.119-131.
10. Avetisyan A.S. On the formulation of the electro-elasticity theory boundary value problems for electro-magnoto-elastic composites woth interface roungness, Proceedings of NAS of Armenia, Mechanics, (2015), vol. 68, №2, pp. 29-42.
11. Аветисян А.С. К задаче распространения сдвиговых волн в пьезоэлектрической среде. //Изв. АН АрмССР, Механика. 1985. Т.38. №1. С.12-19.

Сведения об авторах:

Аветисян Ара Сергеевич –Член-корр. НАН Армении, д.ф.-м.н., профессор,
Тел.: (+37491) 20-20-02, **E-mail:** ara.serg.avetisyan@gmail.com

Камалян Андраник Арменович – научн. сотр. Института механики НАН Армении
Тел.: (+37494) 90-96-92, **E-mail:** kamalyan.andranik@yahoo.com

Унанян Арег Арменович – аспирант Института механики НАН Армении
Тел.: (+37491)77-55-33, **E-mail:** hunanyan.areg21@gmail.com

ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА К ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО ГАРАНТИРОВАННОГО ПОИСКА ДВИЖУЩЕГОСЯ ОБЪЕКТА

Аветисян В.В., Степанян В.С.

Рассматривается и решается задача оптимального гарантированного динамического поиска целевого объекта, совершающего управляемое по скорости плоское движение. Методом принципа максимума Понтрягина построено управление, при котором обнаружение искомого объекта осуществляется за минимальное гарантированное время.

1. Постановка задачи. Пусть имеются два точечных объекта X, Y, движения которых описываются следующими соотношениями:

$$X: \quad \dot{x} = v_X, \ \dot{v}_X = w_X, \quad x(0) = x^0, \ v(0) = 0, \ \left|w_X(t)\right| \le W_X, \tag{1.1}$$

$$Y: \quad \dot{y} = v_Y, \quad y(0) = y^0 \in D^0 = \{y^0 \in R^2 : \left|y^0\right| = r_0\}, \ \left|v_Y(t)\right| = V_Y, \tag{1.2}$$

где $x, v_X, w_X \in R^3$ – векторы координат, скорости, управляющего ускорения объекта X, а $y, v_Y \in R^2$ – векторы координат, управляющей скорости объекта Y, величины W_X, r_0 – заданные постоянные.

Задача. Найти управление $w_X^*(t)$, $t \in [0, T]$ (1.1), при котором объект X из начального состояния

$$x_1(0) = R_0, \ \ x_2(0) = x_3(0) = 0, \ \ v_i(0) = 0, \ \ i = 1,2,3 \tag{1.3}$$

переходит на множество

$$S(x(T),T) = \left\{ \begin{array}{l} g_1(x(T),T) = x_1(T) \ge 0, \quad g_2(x(T),T) = x_2(T) = 0, \\ g_3(x(T),T) = x_1(T) - Cx_3(T) + r_0 + V_Y T = 0, \ C > 0 \end{array} \right\} \tag{1.4}$$

за минимальное время T.

К задаче (1.1)-(1.4) сводится задача оптимального по минимальному гарантированному времени поиска [1] в случае, когда ищущий объект управляется по ускорению, а искомый объект – по скорости. В задаче гарантированного поиска условие (1.4) в конечный момент T описывает ситуацию поглощения области неопределённости $D(T)$ объекта Y областью обнаружения $G(T)$ объекта X: $D(T) \subseteq G(x(T))$, где $D(T)$ – круг с центром в точке $(0,0)$ и радиусом $r(T) = r_0 + V_Y T$, а $G(T)$ – круг с центром в точке ($x_1(T) \ge 0$ $x_2(T) = 0$) и радиусом $l(T) = Cx_3(T) > 0$, причём $x_1(T) = l(T) - r(T)$.

Задача (1.1)–(1.4) является задачей оптимального быстродействия с закреплённым левым (1.3) и подвижным правым концом (1.4). К ней применимы необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума [2]. Составим функцию Гамильтона $H = p_0 + \sum_{i=1}^{3} (p_i v_i + q_i w_{Xi})$ и определим оптимальное управления w_X^* из принципа максимума

$$H^* = \max_{|w_X| \le W_X} H, \ \left|w_X^*\right| = W_X, \ \ w_{Xi}^* = q_i W_X \left[\sum_{i=1}^{3} q_i^2 \right]^{-1/2} \tag{1.5}$$

и выпишем двухточечную краевую задачу для гамильтоновой системы вида

$$\dot{x}_i = v_i, \quad \dot{v}_i = w_{Xi}^*, \quad \dot{p}_i = -H_{x_i}, \quad \dot{q}_i = -H_{v_i}, \tag{1.6}$$

$$x_1(0) = R_0, \ \ x_2(0) = x_3(0) = 0, \ \ v_i(0) = 0, \ \ i = 1,2,3 \tag{1.7}$$

$$p_i(T)=\sum_{j=1}^{3}\mu_j g_{jx_i}(x(T),T),\quad q_i(T)=\sum_{j=1}^{3}\mu_j g_{jv_i}(x(T),T),\tag{1.8}$$

$$\mu_1 g_1(x(T),T)=0,\ \mu_1\le 0,\ \ g_2(x(T),T)=0,\ \ g_3(x(T),T)=0,\tag{1.9}$$

$$H^*(T)=-\sum_{i=1}^{3}\mu_i g_{iT}(x(T),T).\tag{1.10}$$

В условиях трансверсальности (1.8)-(1.10) функции g_j задаются из (1.4), а $\mu_j=\mathrm{const}$ - множители Лагранжа, которые вместе с постоянной $p_0\le 0$ одновременно не равняются нулю.

2. Решение краевой задачи принципа максимума. Найдём сопряжённые переменные путем разрешения сопряжённых уравнений (1.6) при условиях (1.7) с учётом (1.4):

$$q_i(t)\ =(T-t)p_i(t),\quad i=1,2,3,\ \ 0\le t\le T,\tag{2.1}$$

$$p_1(t)=-\mu_1+\mu_3,\quad p_2(t)=\mu_2,\quad p_3(t)=-\mu_3 C,\quad 0\le t\le T.$$

Используя решения (2.1), получим важный для дальнейших построений вывод о постоянстве во времени оптимальных управлений $w^*_{Xi},\ i=1,2,3$:

$$w^*_{X1}=\alpha(-\mu_1+\mu_3),\ w^*_{X2}=\alpha\mu_2,\ w^*_{X3}=-C\mu_3\alpha,\tag{2.2}$$

$$\alpha=W_X[(-\mu_1+\mu_3)^2+\mu_2^2+C^2\mu_3^2]^{-1/2}$$

Интегрируя уравнения движения (1.6) при управлениях (2.2) с начальными условиями (1.6), получим

$$x_1(t)=w^*_{X1}t^2/2+R_0,\quad x_2(t)=w^*_{X2}t^2/2,\quad x_3(t)=w^*_{X3}t^2/2\ ,\tag{2.3}$$

$$v_i(t)=w^*_{Xi}t,\ i=1,2,3.$$

Подставив (2.3) в условия (1.9), (1.10), получим систему уравнений относительно неизвестных параметров $T,p_0,\mu_i,\ i=1,2,3$:

$$\mu_1(x_1(T))=\mu_1(w^*_{X1}T^2/2+R_0)=0,\tag{2.4}$$

$$x_2(T)=w^*_{X2}T^2/2=0,\tag{2.5}$$

$$x_1(T)-Cx_3(T)+r_0+V_YT=(w^*_{X1}-Cw^*_{X3})T^2/2+V_YT+R_0+r_0=0\tag{2.6}$$

$$p_0+(-\mu_1+\mu_3)w^*_{X1}T+\mu_2 w^*_{X2}T-\mu_3 Cw^*_{X3}T=-\mu_3 V_Y.\tag{2.7}$$

Так как $T>0$, то из (2.5)((2.1)) получаем $w^*_{X2}=0\,(\mu_2=0)$, т.е. движение по координате x_2 отсутствует. Таким образом, имеем систему из трёх нелинейных уравнений (2.4), (2.6), (2.7) относительно четырех неизвестных p_0,μ_1,μ_3,T. Из постановки задачи следует, что $\mu_3<0$, так как в противном случае круг обнаружения не может расширяться и задача теряет смысла. Согласно методу принципа максимума, рассмотрению подлежат случаи $p_0=0$ и $p_0=-1$. Будем рассматривать второй случай, так как при $p_0=0$ приходим к противоречиям и для системы (2.4), (2.6), (2.7) будем исследовать следующие варианты удовлетворения условиям дополняющей нежесткости (2.4): А) $\mu_1=0$, $\mu_3<0$ В) $\mu_1<0$, $\mu_3<0$.

А) Из (2.2) имеем:

$$w^*_{X1} = -W_X \,/\, \sqrt{1+C^2}\,,\ \ w^*_{X3} = -Cw^*_{X1} = CW_X \,/\, \sqrt{1+C^2}\,. \quad (2.8)$$

При управлениях (2.8) запишем систему (2.4), (2.6), (2.7) в виде:

$$-W_X T^2 \,/\, (2\sqrt{1+C^2}\,) + R_0 \ge 0\,, \quad (2.9)$$

$$-W_X T^2 \sqrt{1+C^2} \,/\, 2 + V_Y T + R_0 + r_0 = 0\,, \quad (2.10)$$

$$\mu_3 (V_Y - W_X T \sqrt{1+C^2}\,) = 1\,. \quad (2.11)$$

Для заданных параметров C, W_X, V_Y, r_0 выясним, при каких значениях $R_0 > 0$ система (2.9)-(2.11) разрешима относительно $T > 0$. В случае существования множества положительных корней T, оптимальным будет наименьший из них. Сначала рассмотрим уравнение (2.10). Оно имеет один положительный корень

$$T_1^{\min} = \left(V_Y + \sqrt{\left(V_Y\right)^2 + 2W_X (R_0 + r_0)\sqrt{1+C^2}} \right)\left(W_X \sqrt{1+C^2} \right)^{-1}, \quad (2.12)$$

который должен удовлетворять равенству (2.11) при некотором $\mu_3 < 0$ и, следовательно, следующему ограничению:

$$T_1^{\min} = \left(1 - \mu_3 V_Y\right)\left(-\mu_3 W_X \sqrt{1+C^2} \right)^{-1} > V_Y \left(W_X \sqrt{1+C^2} \right)^{-1}, \quad (2.13)$$

вытекающего из (2.11), а также неравенству (2.9), т.е. ограничению

$$T_1^{\min} \le \left(2R_0 W_X^{-1} \sqrt{1+C^2} \right)^{1/2}. \quad (2.14)$$

Из (2.13), (2.14) следует, что для существования решения $T_1^{\min}$ системы (2.9)-(2.11), необходимо и достаточно, чтобы относительно $R_0 > 0$ было разрешимо неравенство:

$$V_Y \left(W_X \sqrt{1+C^2} \right)^{-1} < \sqrt{2R_0 W_X^{-1} \sqrt{1+C^2}}\,. \quad (2.15)$$

Разрешая неравенство (2.15), найдём

$$R_0 > \ R_0^* = V_Y{}^2 \left(2W_X (1+C^2)\sqrt{1+C^2} \right)^{-1}. \quad (2.16)$$

При условии (2.16) и с учётом (2.12), рассмотрим неравенство (2.14), которое можно преобразовать к виду

$$\sqrt{V_Y^4 + 2W_X V_Y^2 \left(R_0 + r_0\right)\sqrt{1+C^2}} \le W_X \left(R_0 C^2 - r_0 \right)\sqrt{1+C^2} - V_Y^2\,.$$

Это неравенство имеет положительную правую часть при значениях

$$R_0 > R_0^{**} = \left(W_X r_0 \sqrt{1+C^2} + V_Y^2 \right)\left(W_X C^2 \sqrt{1+C^2} \right)^{-1} \quad (2.17)$$

и после несложных преобразований приводится к виду

$$R_0^2 W_X (1+2C^2)^2 - 2R_0 [W_X (1+2C^2) r_0 + 4V_Y^2 \sqrt{1+C^2}\,] + W_X r_0^2 \ge 0\,. \quad (2.18)$$

Решение (2.18) следующее:

$R_0 \in (-\infty, R_0^-] \cup [R_0^+, \infty)$,

где R_0^-, R_0^+ определяются через известные параметры $W_X V_Y, r_0, C$:

$$R_0^{\pm} = \left(W_X C^2 r_0 + V_Y^2 \sqrt{1+C^2} \pm \sqrt{2W_X r_0 V_Y^2 C^2 \sqrt{1+C^2} + V_Y^4 (1+C^2)} \right) W_X^{-1} C^{-4}.$$

Отметим, что для любого $r_0 \ge 0$ между R_0^* (2.16), R_0^{**} (2.17), R_0^-, R_0^+ имеют место следующие соотношения:

$$R_0^- < R_0^{**} < R_0^+, \quad R_0^* < R_0^{**}. \tag{2.19}$$

Из (2.19) следует, что при $R_0 \in [R_0^+, \infty)$ оптимальные управления и время определяются формулами (2.8) и (2.12), а соответствующий параметр $\mu_3 = \left[V_Y - W_X T_1^{\min} \sqrt{1+C^2} \right]^{-1}$ (2.11), в силу (2.13), отрицательный.

В) Пусть $\mu_1 < 0$, $\mu_3 < 0$. Из (2.4) получим $x_1(T) = 0$, а из (2.3) при $t = T$ –

$$w_{X1}^* = -2R_0 T^{-2}, \quad w_{X3}^* = 2x_3(T) T^{-2}, \tag{2.20}$$

где $x_3(T)$ определяется из (2.6) следующим образом:

$$x_3(T) = (r_0 + V_Y T) C^{-1}. \tag{2.21}$$

Используя (2.20), (2.21), из условия $\left| w_X^* \right| = W_X$ (1.5), для заданных параметров $C, W_X, V_Y, r_0 > 0$ получим уравнение относительно искомого оптимального T:

$$-T^4 + 4V_Y^2 C^{-2} W_X^{-2} T^2 + 8r_0 V_Y C^{-2} W_X^{-2} T + 4W_X^{-2} (R_0^2 + C^{-2} r_0^2) = 0, \quad R_0 > r_0. \tag{2.22}$$

Далее, из (2.2), (2.20), (2.21) получим следующие соотношения для определения множителелей μ_1 и μ_3:

$$w_{X1}^* w_{X3}^{*-1} = (\mu_1 - \mu_3) \mu_3^{-1} C^{-1}, \qquad w_{X1}^* w_{X3}^{*-1} = -C R_0 (r_0 + V_Y T)^{-1}, \tag{2.23}$$

откуда при $T = T_2^{\min}\left(R_0\right)$ следует:

$$(r_0 + V_Y T_2^{\min}\left(R_0\right))(\mu_1 - \mu_3) + C^2 R_0 \mu_3 = 0, \tag{2.24}$$

Условие трансверсальности (2.7) при управлениях (2.2) и $T = T_2^{\min}\left(R_0\right)$ примет вид

$$W_X T_2^{\min}\left(R_0\right) \sqrt{(-\mu_1 + \mu_3)^2 + C^2 \mu_3^2} = 1 - \mu_3 V_Y. \tag{2.25}$$

Решение системы (2.24), (2.25) относительно параметров $\mu_1 < 0$ и $\mu_3 < 0$ следующее:

$$\mu_1 = A_\mu \mu_3, \qquad \mu_3 = -V_Y B^{-1} - \sqrt{\left(V_Y B^{-1}\right)^2 + B^{-1}}, \tag{2.26}$$

$$B = \left[W_X T_2^{\min}\left(R_0\right) \right]^2 \left[(A_\mu - 1)^2 + C^2 \right] - V_Y^2; \quad A_\mu = \left(r_0 + V_Y T_2^{\min}\left(R_0\right) - C^2 R_0 \right) \left(r_0 + V_Y T_2^{\min}\left(R_0\right) \right)^{-1}$$

Иследование знаков множителей μ_1, μ_3 (2.26) по отношению параметра R_0 показывает, что если $R_0 \in \left(r_0, R_0^+\right)$, то $\mu_1 < 0$, $\mu_3 < 0$; если $R_0 = R_0^+$, то $\mu_1 = 0$, $\mu_3 < 0$; если $R_0 \in \left(R_0^+, \infty\right)$, то

$\mu_1 > 0$, $\mu_3 < 0$. Следовательно, при значениях $R_0 \in \left[R_0^+, \infty\right)$ приходим к противоречию по отношению знака множителя μ_1.

Таким образом, для заданных параметров $C, W_X, V_Y, r_0 > 0$ случай В) реализуем только при $R_0 \in \left(r_0, R_0^+\right)$. Сначала находится наименьший положительный корень $T = T_2^{\min}\left(R_0\right)$ уравнения (2.22), затем из (2.24), (2.25) определяются множители $\mu_1\left(T_2^{\min}\left(R_0\right)\right) < 0$, $\mu_3\left(T_2^{\min}\left(R_0\right)\right) < 0$ (2.26) и по формулам (2.2) вычисляются оптимальные управляющие ускорения w_{X1}^* и w_{X3}^*.

Подытожив результаты, полученные в рассмотренных в случаях А) и В), приходим к следующей схеме определения минимального гарантированного времени поиска и соответствующих оптимальных гарантирующих управлений:

1) при $r_0 < R_0 \le R_0^+$ минимальное гарантированное время определяется как наименьший положительный корень $T^* = T_2^{\min}\left(R_0\right)$ уравнения (2.22), а соответствующие оптимальные гарантирующие управления w_{X1}^*, w_{X3}^* вычисляются по формулам (2.2), где параметры $\mu_1(T_2^{\min}\left(R_0\right) < 0$, $\mu_3(T_2^{\min}\left(R_0\right) < 0$ находятся с помощью (2.26);

2) при $R_0^+ \le R_0 < \infty$ минимальное гарантированное время обнаружения $T^* = T_2^{\min}\left(R_0\right)$ определяется формулой (2.12), а соответствующие оптимальные гарантирующие управления w_{X1}^*, w_{X3}^* вычисляются по формулам (2.8).

ЛИТЕРАТУРА

1. Аветисян В.В., Степанян В.С. Оптимальный по минимальному гарантированному времени поиск подвижного объекта на плоскости // Изв. НАН РА. Механика. 2015. Т.60. №1. С.68-80.
2. Понтрягин Л.С. и др. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1988. 344с.

Сведения об авторах:

Аветисян Ваган Вардгесович – д.ф.-м.н., профессор факультета математики и механики ЕГУ,
тел: (+374 94) 44 95 60, **E–mail:** vanavet@yahoo.com

Степанян Ваан Сейранович – аспирант факультета математики и механики ЕГУ,
тел: (+374 98) 900846, **E–mail:** nop144d@gmail.com

ОБ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УПРУГОГО ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО НЕОДНОРОДНОГО СЛОЯ ПРИ АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Аветисян С.А.

Рассматривается смешанная граничная задача теории упругости для слоя при антиплоской деформации, когда модуль сдвига слоя по вертикальной координате изменяется по экспоненциальному закону.

Контакные и смешанные задачи теории упругости при антиплоской деформации в идейном и методологическом аспектах тесно связаны с аналогичными задачами теории установившейся фильтрации жидкости в пористых средах. В настоящей работе рассматривается одна смешанная граничная задача теории упругости при антиплоской деформации для слоя, модуль сдвига которого по глубине изменяется по экспоненциальному закону. Эта задача тесно примыкает к задачам, ранее рассмотренным в работах [1-3].

1. Пусть отнесённый к системе координат $Oxyz$ слой $\Omega=\{-\infty<x,z<\infty;-H\le y\le 0\}$ высоты H обладает модулем сдвига G, изменяющегося по глубине по закону $G=G_0e^{\alpha y}$ $(-H\le y\le 0)$. Пусть далее нижняя грань $y=-H$ слоя Ω жёстко защемлена, на совокупности полос $\omega=\{\omega_k\}_{k=1}^{n}$ $\left(\omega_k=\{a_k<x<b_k;y=0;-\infty<z<\infty\}\right)$ верхней грани слоя задана компонента перемещений в направлении оси Oz: $u_z(x,y)=w(x,y)=f(x)$, а остальная часть этой грани свабодна от касательных сил. Предполагается, что слой в направлении оси Oz находится в условиях антиплоской деформации с базовой плоскостью Oxy. Тогда описанную смешанную граничную задачу математически можно сформулировать для полосы $\Pi=\{z=0;-\infty<x<\infty;-H<y<0\}$ в следующем виде:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\alpha\dfrac{\partial w}{\partial y}=0 \quad \left((x,y)\in\Pi\right)\\ w(x,y)\Big|_{y=-H}=0 \quad (-\infty<x<\infty);\ w(x,y)\Big|_{y=-0}=f(x)\ \ (x\in L);\\ \tau_{yz}\Big|_{y=-0}=G_0e^{\alpha y}\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big|_{y=-0}=0\ \ (x\in R\setminus L);\ L=\bigcup\limits_{k=1}^{n}(a_k,b_k);\ R=\{-\infty<x<\infty\}\end{cases} \tag{1.1}$$

Граничная задача (1.1) должна быть дополнена условиями

$$\int\limits_{a_k}^{b_k}\tau_{yz}\Big|_{y=-0}dx=T_k \quad \left(k=\overline{1,n}\right) \tag{1.2}$$

т.е. в (1.1) задана равнодействующая T_k неизвесстных касательных напряжений τ_{yz} на каждом отрезке $[a_k,b_k]$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$.

Решение смешанной граничной задачи (1.1) сведём к решению сингулярного интегрального уравнения (СИУ). С этой целью для полосы сначала решим следующую вспомогательную смешанную граничную задачу:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\alpha\dfrac{\partial w}{\partial y}=0 \quad \left((x,y)\in\Pi\right)\\ w(x,y)\Big|_{y=-H}=0\ ;\ \ \tau_{yz}\Big|_{y=-0}=G_0e^{\alpha y}\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big|_{y=-0}=\tau(x) \quad (-\infty<x<\infty)\end{cases} \tag{1.3}$$

где считается, что функция $\tau(x)$ наперёд задана.

При помощи интегрального преобразования Фурье по переменой x решение задачи (1.3) представляется формулой:

$$w(x,y)=\frac{2e^{-\alpha(y+2H)/2}}{\pi G_0}\int_{-\infty}^{\infty}K\left(|x-s|,y\right)\tau(s)\,ds$$

$$K\left(|x|,y\right)=\int_0^{\infty}\frac{\cos(\lambda x)\,\mathrm{sh}\left[\mu(y+H)/2\right]d\lambda}{\mu\,\mathrm{ch}(\mu H/2)-\alpha\,\mathrm{sh}(\mu H/2)};\quad \mu=\sqrt{\alpha^2+4\lambda^2};\quad -H\le y\le 0 \tag{1.4}$$

Отсюда при $y=0$ получим:

$$w(x,0)=\frac{2e^{-\alpha H}}{G_0}\int_{-\infty}^{\infty}L|x-s|\tau(s)\,ds;\qquad L(x)=\int_0^{\infty}\frac{\cos(\lambda x)\,\mathrm{th}(\mu H/2)}{\mu-\alpha\,\mathrm{th}(\mu H/2)}d\lambda \tag{1.5}$$

Теперь при помощи (1.5) реализуя третье граничное условие задачи (1.1), относительно неизвестных касательных напряжений $\tau(x)$ придём к интегральному уравнению Фредгольма первого рода:

$$\frac{1}{\pi}\int_L L\left(|x-s|\right)\tau(s)\,ds=\frac{G_0}{2}e^{\alpha H}f(x)\qquad (x\in L) \tag{1.6}$$

Далее дифференцированием по x обеих частей уравнения (1.6) получим:

$$\frac{1}{\pi}\int_L \mathrm{M}(s-x)\tau(s)\,ds=\frac{G_0}{2}e^{\alpha H}f'(x)\quad (x\in L);\quad \mathrm{M}(x)=\int_0^{\infty}\frac{\lambda\,\mathrm{th}(\mu H/2)\sin(\lambda x)\,d\lambda}{\mu-\alpha\,\mathrm{th}(\mu H/2)} \tag{1.7}$$

Выделим сингулярную часть ядра $\mathrm{M}(s-x)$, для чего заметим, что

$$\mu=\sqrt{\alpha^2+4\lambda^2}=2\lambda\sqrt{1+\alpha^2/4\lambda^2}\sim 2\lambda\qquad(\lambda\to\infty)$$

$$\frac{\lambda\,\mathrm{th}(\mu H/2)}{\mu-\alpha\,\mathrm{th}(\mu H/2)}=\frac{\mathrm{th}(\mu H/2)}{\mu/\lambda-\alpha\,\mathrm{th}(\mu H/2)/\lambda}\sim\frac{1}{2}\qquad(\lambda\to\infty)$$

Исходя из этих асимптотических формул, ядерную функцию $\mathrm{M}(x)$ из (1.7) преобразуем следующим образом:

$$\mathrm{M}(x)=\int_0^{\infty}\left[\frac{\lambda\,\mathrm{th}(\mu H/2)}{\mu-\alpha\,\mathrm{th}(\mu H/2)}-\frac{1}{2}\right]\sin(\lambda x)\,d\lambda+\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\sin(\lambda x)\,d\lambda$$

Отсюда после простых преобразований можем записать:

$$\mathrm{M}(x)=\frac{1}{2x}+\frac{1}{2}R(x);\qquad R(x)=\int_0^{\infty}\frac{(\alpha+2\lambda)\,\mathrm{th}(\mu H/2)-\mu}{\mu-\alpha\,\mathrm{th}(\mu H/2)}\sin(\lambda x)\,d\lambda \tag{1.8}$$

Теперь с учётом (1.8) уравнение (1.7) запишется в виде следующего СИУ:

$$\frac{1}{\pi}\int_L\left[\frac{1}{s-x}+R(s-x)\right]\tau(s)\,ds=G_0e^{\alpha H}f'(x)\qquad(x\in L) \tag{1.9}$$

Решение СИУ (1.9) согласно (1.2) должно удовлетворять условиям

$$\int_{a_k}^{b_k}\tau(s)\,ds=\mathrm{T}_k\qquad\left(k=\overline{1,n}\right) \tag{1.10}$$

Далее в (1.9)-(1.10) введём безразмерные величины, полагая

$$\xi=x/a\ ,\ \eta=s/a\ ;\ \tau_0(\xi)=\tau_0(a\xi)/G_0\ ;\ f_0(\xi)=e^{\alpha_0H_0}f'(a\xi);$$

$$\alpha_k=a_k/a,\ \beta_k=b_k/a;\ L_0=\bigcup_{k=1}^{n}(\alpha_k,\beta_k);\ H_0=H/a;\ \alpha_0=a\alpha;\ \mu_0=\sqrt{\alpha_0^2+4\omega^2};\ \omega=a\lambda$$

Здесь a – некий харектерный размер, отличный от нуля, например, $a=a_1$, если $a_1\ne 0$. В результате, СИУ (1.10) преобразуется к виду:

$$\frac{1}{\pi}\int_{L_0}\left[\frac{1}{\eta-\xi}+\mathrm{N}_0(\eta-\xi)\right]\tau_0(\eta)\,d\eta=f_0(\xi)\qquad(\xi\in L_0) \tag{1.11}$$

$$\mathrm{N}_0(\xi)=\int_0^\infty \frac{(\alpha_0+2\omega)\,\mathrm{th}(\mu_0 H_0/2)-\mu_0}{\mu_0-\alpha_0\mathrm{th}(\mu_0 H_0/2)}\sin(\omega\xi)\,d\omega\ ,$$

а условия (1.10) – к виду:

$$\int_{\alpha_k}^{\beta_k}\tau_0(\eta)\,d\eta=\mathrm{T}_k^{(0)}\quad\left(k=\overline{1,n}\ ;\ \mathrm{T}_k^{(0)}=\mathrm{T}_k/aG_0\right)\qquad(1.12)$$

Отметим, что предельным переходом $H\to\infty$ в (1.4)-(1.5) и в последующих формулах можно получить соответствующие результаты в случае упругой полуплоскости $y\le 0$.

2. К СИУ (1.11)-(1.12) применим известный численно-аналитический метод решения СИУ [4-6]. Но предварительно для ускорения сходимости интеграла $\mathrm{N}_0(\xi)$ его выражение преобразуем дальше. Можем записать:

$$\frac{(\alpha_0+2\omega)\,\mathrm{th}(\mu_0 H_0/2)-\mu_0}{\mu_0-\alpha_0\mathrm{th}(\mu_0 H_0/2)}=\frac{(\alpha_0+2\omega)\left[\mathrm{th}(\mu_0 H_0/2)-1\right]+\alpha_0+2\omega-\mu_0}{\mu_0-\alpha_0\mathrm{th}(\mu_0 H_0/2)}=$$

$$=\frac{-(\alpha_0+2\omega)\exp(-\mu_0 H_0/2)/\mathrm{ch}(\mu_0 H_0/2)+\alpha_0+2\omega-2\omega\sqrt{1+\alpha_0^2/4\omega^2}}{2\omega\sqrt{1+\alpha_0^2/4\omega^2}-\alpha_0\mathrm{th}(\mu_0 H_0/2)}\sim\frac{\alpha_0}{2\omega}\quad(\omega\to\infty)$$

$$\mathrm{N}_0(\xi)=\int_0^\infty\left[\frac{(\alpha_0+2\omega)\,\mathrm{th}(\mu_0 H_0/2)-\mu_0}{\mu_0-\alpha_0\mathrm{th}(\mu_0 H_0/2)}-\frac{\alpha_0}{2\omega}\right]\sin(\omega\xi)\,d\xi+\frac{\alpha_0}{2}\int_0^\infty\frac{\sin(\omega\xi)}{\omega}d\omega$$

Теперь приняв во внимание выражение разрывного интеграла Дирихле, будем иметь:

$$\mathrm{N}_0(\xi)=\frac{\pi\alpha_0}{4}\mathrm{sign}\xi+\mathrm{M}_0(\xi);\quad \mathrm{M}_0(\xi)=\int_0^\infty G_0(\omega)\sin(\omega\xi)\,d\omega\quad(-\infty<\xi<\infty)\qquad(2.1)$$

$$G_0(\xi)=\frac{(\alpha_0+2\omega)\left[2\omega\mathrm{th}(\mu_0 H_0/2)-\mu_0\right]+\alpha_0^2\mathrm{th}(\mu_0 H_0/2)}{2\omega\left[\mu_0-\alpha_0\mathrm{th}(\mu_0 H_0/2)\right]}$$

Легко видеть, что имеют место асимптотические формулы

$$G_0(\omega)\sim-\frac{\alpha_0}{2\omega}\quad(\omega\to 0)\ ;\ G_0(\omega)\sim\frac{\alpha_0^2}{8\omega^2}\quad(\omega\to\infty)$$

которые обеспечивают достаточно быструю сходимость интеграла $\mathrm{M}_0(\xi)$.

Далее учитывая (2.1), СИУ (1.11) представим в виде:

$$\frac{1}{\pi}\int_{L_0}\left[\frac{1}{\eta-\xi}+\frac{\pi\alpha_0}{4}\mathrm{sign}(\eta-\xi)+\mathrm{M}_0(\eta-\xi)\right]\tau_0(\eta)\,d\eta=f_0(\xi)\qquad(\xi\in L_0)\qquad(2.2)$$

и каждый интервал (α_k,β_k) $\left(k=\overline{1,n}\right)$ системы L_0 преобразуем в интервал $(-1,1)$, полагая

$$\xi=(\beta_k-\alpha_k)/2\ t+(\beta_k+\alpha_k)/2\ ;\ \eta=(\beta_k-\alpha_k)/2\ u+(\beta_k+\alpha_k)/2\qquad\left(-1<t,u<1;\ k=\overline{1,n}\right)$$

В результате, СИУ (2.2) преобразуется в следующую систему СИУ:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{u-t}+\frac{\pi\alpha_0}{4}\mathrm{sign}(u-t)+Q_{kk}(t,u)\right]\tau_k(u)\,du+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{\substack{k=1\\(k\ne m)}}^{n}L_{km}(t,u)\,\tau_m(u)\,du=f_k(t)\quad\left(k=\overline{1,n}\right);\ f_k(t)=f_0\left((\beta_k-\alpha_k)/2t+(\beta_k+\alpha_k)/2\right)\qquad(2.3)$$

$$L_{km}(t,u)(u-\gamma_{km}t+\delta_{km})^{-1}+\pi\alpha_0/4\ \mathrm{sign}(u-\gamma_{km}t+\delta_{km})+Q_{km}(t,u)\quad(k\ne m;-1<u,t<1);$$

$$Q_{km}(t,u)=\mathrm{M}_0\left((\beta_m-\alpha_m)(u-\gamma_{km}t+\delta_{km})/2\right);\quad \tau_m(u)=\tau_0\left((\beta_m-\alpha_m)/2\ u+(\beta_m+\alpha_m)/2\right);$$

$$\gamma_{km}=(\beta_k-\alpha_k)/(\beta_m-\alpha_m);\ \delta_{km}=(\beta_m+\alpha_m-\beta_k-\alpha_k)/(\beta_m-\alpha_m);$$

Далее следуя известной процедуре [4-6], положим
$\tau_k(t) = \Omega_k(t) \big/ \sqrt{1-t^2} \quad \left(k = \overline{1,n}\ ;\ -1 < t < 1\right)$
где $\Omega_k(t)$ – гельдеровские функции на отрезке $[-1,1]$, и тогда система СИУ (2.3) при условиях (1.12) сведётся к следующей системе систем линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{p=1}^{\mathrm{N}} R_{rp}^{(km)} X_p^{(m)} = c_r^{(k)} \quad \left(r = \overline{1,\mathrm{N}}\ ;\ k, m = \overline{1,n}\right) \tag{2.4}$$

$$R_{rp}^{(km)} = \begin{cases} \mathrm{M}_{rp}^{(km)} & \left(p = \overline{1,\mathrm{N}}; r = \overline{1,\mathrm{N}-1}; k, m = \overline{1,n}\right); \\ \dfrac{\pi}{\mathrm{N}} & \left(p = \overline{1,\mathrm{N}}; r = \mathrm{N}; k, m = \overline{1,n}\right); \quad t_r = \cos\left(\pi r/\mathrm{N}\right) \ \left(r = \overline{1,\mathrm{N}-1}\right) \end{cases}$$

$$\mathrm{M}_{rp}^{(km)} = \begin{cases} \dfrac{1}{\mathrm{N}}\left[\dfrac{1}{u_p - u_r} + \dfrac{\pi\alpha_0}{4}\operatorname{sign}\left(u_p - u_r\right) + Q_{kk}\left(t_r, u_p\right)\right] \ (m = k) \\ \dfrac{1}{\mathrm{N}}\sum\limits_{m=1}^{n} L_{km}\left(u_r, u_p\right) \ \ (m \neq k); \ \ u_p = \cos\left[(2p-1)\pi/2\mathrm{N}\right] \ \left(p = \overline{1,n}\right) \end{cases}$$

$$c_r^{(k)} = \begin{cases} a_r^{(k)} & \left(r = \overline{1,\mathrm{N}-1}; k = \overline{1,n}\right);\ a_r^{(k)} = f_k\left(\xi_r\right); \\ S_k^{(0)} & \left(r = \mathrm{N}; k = \overline{1,n}\right);\ \left(r = \overline{1,\mathrm{N}-1}\right); \end{cases} ;\quad X_m^{(p)} = \Omega_m\left(u_p\right);\ S_k^{(0)} = \frac{2\mathrm{T}_k^{(0)}}{\beta_k - \alpha_k} \quad \left(k = \overline{1,n}\right).$$

Здесь N – любое натуральное число, $a\ u_p$ и t_r – чебышевские узлы.

3. Рассмотрим два важных частных случая.

I. $n = 1, a_1 = -a, b_1 = a; L_0 = (-1,1)$. Тогда СИУ (2.3) принимает простой вид

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{\eta - \xi} + \frac{\pi\alpha_0}{4}\operatorname{sign}(\eta - \xi) + \mathrm{M}_0(\eta - \xi)\right]\tau_0(\eta)\,d\eta = f_0(\xi) \quad (-1 < \xi < 1)\ ,$$

где полагая $\tau_0(\eta) = \Omega_0(\eta) \big/ \sqrt{1-\eta^2} \quad (-1 < \eta < 1)$, систему уравнений (2.4) запишем в форме

$$\sum_{m=1}^{\mathrm{N}} K_{rm} X_m = a_r \quad \left(r = \overline{1,\mathrm{N}}\right) \tag{3.1}$$

$$K_{rm} = \begin{cases} \dfrac{1}{\mathrm{N}}\left[\dfrac{1}{\eta_m - \xi_r} + \dfrac{\pi\alpha_0}{4}\operatorname{sign}\left(\eta_m - \xi_r\right) + \mathrm{M}_0\left(\eta_m - \xi_r\right)\right] & \left(m = \overline{1,\mathrm{N}}; r = \overline{1,\mathrm{N}-1}\right); \\ \dfrac{\pi}{\mathrm{N}} & \left(m = \overline{1,\mathrm{N}}; r = \mathrm{N}\right) \end{cases}$$

$$a_r = \begin{cases} f_0\left(\xi_r\right) \ \left(r = \overline{1,\mathrm{N}-1}\right); & \xi_r = \cos\left(\pi r/\mathrm{N}\right) \ \left(r = \overline{1,\mathrm{N}-1}\right); \\ \mathrm{T}_1^{(0)} \quad (r = \mathrm{N}); & \eta_m = \cos\left[(2m-1)\pi/2\mathrm{N}\right] \left(m = \overline{1,\mathrm{N}}\right); \end{cases} \quad X_m = \Omega_0\left(\eta_m\right) \ \left(m = \overline{1,\mathrm{N}}\right).$$

Итак, в данном частном случае система уравнений (2.4) принимает простой вид (3.1).

II. $n = 2;\ a_1 = -b_2 = -a;\ b_1 = -b_2 = -b\ (b < a)$. В этом случае

$\alpha_1 = -\beta_2 = -1;\ \beta_1 = -\alpha_2 = -\rho\ \ (\rho = b/a < 1);\ \gamma_{km} = 1\ \ (k, m = 1,2);$

$\delta_{11} = \delta_{22} = 0;\ \delta_{12} = -\delta_{21} = 2(1+\rho)/(1-\rho)$.

Полагая $\tau_m(u) = \Omega_m(u) \big/ \sqrt{1-u^2} \quad (-1 < u < 1)$, находим, что в разбираемом частном случае система линейных уравнений (2.4) принимает вид:

$$\sum_{p=1}^{\mathrm{N}} K_{rp}^{(km)} X_p^{(m)} = c_r^{(k)} \quad (k, m = 1, 2) \tag{3.2}$$

$$K_{rp}^{(km)} = \begin{cases} \dfrac{1}{\mathrm{N}}\left[\dfrac{1}{u_p - u_r} + \dfrac{\pi\alpha_0}{4}\operatorname{sign}(u_p - t_r) + Q_{kk}(t_r, u_p)\right] (m, k = 1, 2)\left(p = \overline{1, \mathrm{N}}; r = \overline{1, \mathrm{N}-1}; m = k\right) \\ \dfrac{1}{\mathrm{N}} L_{km}(t_r, u_p) \quad \left(p = \overline{1, \mathrm{N}}; r = \overline{1, \mathrm{N}-1}; m \neq k\right); \quad c_r^{(k)} = \begin{cases} a_r^{(k)} & \left(r = \overline{1, \mathrm{N}-1}; k = 1, 2\right) \\ S_k^{(0)} & (r = \mathrm{N}; k = 1, 2) \end{cases} \\ \dfrac{\pi}{\mathrm{N}} \quad \left(p = \overline{1, \mathrm{N}}; r = \mathrm{N}\right) \end{cases}$$

Системы линейных уравнений (3.1) и (3.2) имеют довольно простые структуры и удобны для численной реализации.

Во втором частном случае вычислим безразмерный коэффициент концентрации (KK) касательных напряжений $\tau(x)$ в ближних концах $x = \pm b$ системы интервалов $L = (-a, -b) \cup (b, a)$:

$$K_b = \lim_{x \to b+0}\left[\sqrt{x-b}\,\tau(x)\right] = G_0\sqrt{a}/2\ \sqrt{1-\rho}\,\Omega_2(-1) \Rightarrow K_0 = \sqrt{1-\rho}\,\Omega_2(-1);\ K_0 = 2K_b / G_0\sqrt{a}$$

Далее K_0 можно вычислить по интерполяционому многочлену Лагранжа по чебышевским узлам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аветисян С.А. О двух смежных граничных задачах теории фильтрации и теории упругости для экспоненциально неоднородной полосы. Механика – 2013. Труды межд. школы-конф. молодых учёных, 1-4 октября 2013, Цахкадзор. Ереван: 2013. С.40-44.
2. Mkhitaryan S.M., Tokmajyan H.V., Avetisyan S.A., Grigoryan M.S.. On Steady-State Filtration of Fluid in Strip-Like and Wedge-Shaped Porous Ground Bases. Advanced Materials Research Vol. 1020 (2014). Pp.373-378.
3. Аветисян С.А., Мкртчян М.М. Об установившейся фильтрации жидкости в пористой экспоненциально неоднородной полосе при заданном режиме давления.//Изв. НАН Армении. Механика. 2015. Т.68. №2. С.68–79.
4. Erdogan F., Gupta G.D., Cook T.S. The numerical solutions of singular integral equations. Methods of Analysis an solution of crack problems, pp 368-425, Noordhoff Intern. Publ., Leyden, 1973.
5. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – Киев: Наукова думка, 1976. 443 с.
6. Theocaris P.S., Iokimidis N.I. Numerical Integration Methods for the Solution of singular Integral Equations. Quart. Appl Math., vol XXXV, No1, pp 173-185, 1977.

Сведения об авторе:

Аветисян Сирануш Араратовна – соискатель Института механики НАН РА, преподаватель кафедры высшей математики НУАСА, **Тел.:** (374 94) 99 98 42.
e-mail: ashonik@rambler.ru,

О ХАРАКТЕРЕ НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТРЁХСЛОЙНОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПОЛОСЫ ПРИ НЕПОЛНОМ КОНТАКТЕ МЕЖДУ ВЕРХНИМИ СЛОЯМИ

Агаловян Л.А., Закарян Т.В.

Решена первая динамическая краевая задача теории упругости для ортотропной трёхслойной полосы $D=\{(x,y):\ 0\le x\le l,\ -(h+h_2)\le y\le h+h_1,\ h_1+2h+h_2=H<<l\}$ несимметричной структуры, когда контакт между верхними слоями неполный.

Асимптотическим методом определено решение внутренней задачи, которое выражено через компоненты вектора перемещения, которые, в свою очередь, определяются из выведенных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Установлены условия возникновения резонанса, выведены соответствующие дисперсионные уравнения.

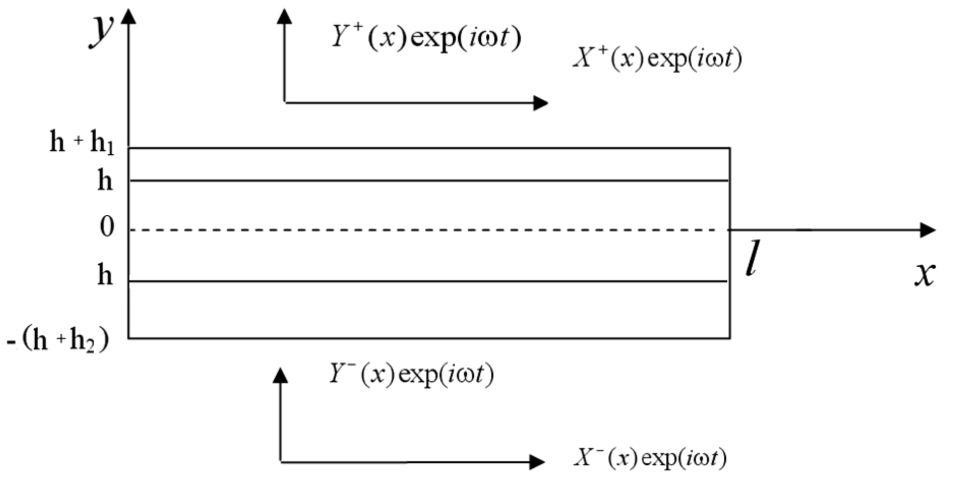
Введение. Для решения задач о собственных и вынужденных колебаниях балок, пластин и оболочек эффективным оказался асимптотический метод [1-7]. Первая динамическая краевая задача для трёхслойной ортотропной полосы несимметричной структуры решена в [8]. В данной работе решена первая динамическая краевая задача для трёхслойной ортотропной полосы, когда контакт между верхними слоями неполный.

1.Постановка краевой задачи и её асимптотическое решение. Требуется найти решение динамических уравнений теории упругости для задачи плоской деформации трёхслойной полосы [8], которое удовлетворяет граничным условиям

$$\sigma_{yy}(x,h+h_1)=Y^+(x)\exp(i\omega t),\quad \sigma_{xy}(x,h+h_1)=X^+(x)\exp(i\omega t), \tag{1.1}$$

$$\sigma_{yy}(x,-(h+h_2))=-Y^-(x)\exp(i\omega t),\quad \sigma_{xy}(x,-(h+h_2))=-X^-(x)\exp(i\omega t), \tag{1.2}$$

где ω – частота вынуждающего воздействия (фиг.1),



Фиг.1

и условиям полного и частично неполного контакта между верхними слоями :

$$\sigma^I_{yy}(x,h)=\sigma^{II}_{yy}(x,h),\quad \sigma^I_{xy}(x,h)=\sigma^{II}_{xy}(x,h),\quad \sigma^I_{xy}(x,h)=f\sigma^I_{yy}(x,h),\quad v^I(x,h)=v^{II}(x,h), \tag{1.3}$$

$$\begin{gathered}\sigma^{II}_{yy}(x,-h)=\sigma^{III}_{yy}(x,-h),\ \sigma^{II}_{xy}(x,-h)=\sigma^{III}_{xy}(x,-h),\\ u^{II}(x,-h)=u^{III}(x,-h),\ v^{II}(x,-h)=v^{III}(x,-h).\end{gathered} \tag{1.4}$$

Граничные условия на поперечных кромках $x=0,l$ пока не конкретизируем, ими обусловлено возникновение пограничных слоёв.

Чтобы решить поставленную задачу, переходим к безразмерным координатам $\xi=x/l$, $\zeta=y/H$, $H=h_1+2h+h_2$ и перемещениям $U^k_x=u^k/l$, $U^k_y=v^k/l$. В результате получим сингулярно-возмущённую малым параметром $\varepsilon=H/l$ систему, решение которой ищем в виде

$$\sigma^k_{\alpha\beta}\left(\xi,\zeta,t\right)=\sigma^k_{ij}\left(\xi,\zeta\right)\exp\left(i\omega t\right),\ \ \alpha,\beta=x,y,\quad i,j=1,2,\quad k=I,II,III,$$
$$\left(U^k_x\left(\xi,\zeta,t\right),U^k_y\left(\xi,\zeta,t\right)\right)=\left(U^k\left(\xi,\zeta\right),V^k\left(\xi,\zeta\right)\right)\exp\left(i\omega t\right). \tag{1.5}$$

Решение задачи (I) складывается из решенй внутренней задачи (I^{int}) и пограничного слоя (I_b). Решение внутренней задачи имеет вид:

$$\sigma^{k\,\mathrm{int}}_{ij}=\varepsilon^{-1+s}\sigma^{k(s)}_{ij}(\xi,\zeta)\ ,(U^{k\,\mathrm{int}},V^{k\,\mathrm{int}})=\varepsilon^s(U^{k(s)},V^{k(s)}),\ i,j=1,2,\ \ s=\overline{0,N},\ k=I,II,III \tag{1.6}$$

После известных процедур для определения $\sigma^{k(s)}_{ij}$ получим формулы:

$$\sigma^{k(s)}_{11}=\frac{1}{\Delta^k_1}\left(-\beta^k_{12}\frac{\partial V^{k(s)}}{\partial\zeta}+\beta^k_{22}\frac{\partial U^{k(s-1)}}{\partial\xi}\right),\quad \sigma^{k(s)}_{22}=\frac{1}{\Delta^k_1}\left(\beta^k_{11}\frac{\partial V^{k(s)}}{\partial\zeta}-\beta^k_{12}\frac{\partial U^{k(s-1)}}{\partial\xi}\right),$$
$$\sigma^{k(s)}_{12}=\frac{1}{a^k_{66}}\left(\frac{\partial U^{k(s)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial V^{k(s-1)}}{\partial\xi}\right),\quad \Delta^k_1=\beta^k_{11}\beta^k_{22}-(\beta^k_{12})^2, \tag{1.7}$$
$$\beta^k_{ij}=\frac{1}{a^k_{33}}\left(a^k_{ij}a^k_{33}-a^k_{i3}a^k_{j3}\right),\ \ i,j=1,2,\quad a^k_{66}=\frac{1}{G^k_{12}},\quad k=I,II,III,$$

где $U^{k(s)}$ определяется из уравнения

$$\frac{\partial^2U^{\kappa(s)}}{\partial\zeta^2}+a^\kappa_{66}\omega^2_*\rho^kU^{\kappa(s)}=f^{\kappa(s)}_u,\quad f^{\kappa(s)}_u=-a^\kappa_{66}\frac{\partial\sigma^{\kappa(s-1)}_{11}}{\partial\xi}-\frac{\partial^2V^{\kappa(s-1)}}{\partial\xi\,\partial\zeta},\quad \omega_*=H\omega, \tag{1.8}$$

а $V^{k(s)}$– из уравнения

$$\frac{\partial^2V^{\kappa(s)}}{\partial\zeta^2}+\frac{\Delta^\kappa_1}{\beta^\kappa_{11}}\omega^2_*\rho^kV^{\kappa(s)}=f^{\kappa(s)}_v,\quad f^{\kappa(s)}_v=\frac{\beta^\kappa_{12}}{\beta^\kappa_{11}}\frac{\partial^2U^{\kappa(s-1)}}{\partial\xi\,\partial\zeta}-\frac{\Delta^\kappa_1}{\beta^\kappa_{11}}\frac{\partial\sigma^{\kappa(s-1)}_{12}}{\partial\xi}. \tag{1.9}$$

Следовательно, будем иметь:

$$U^{\kappa(s)}=C^{\kappa(s)}_1(\xi)\sin\sqrt{a^\kappa_{66}\rho^k}\,\omega_*\zeta+C^{\kappa(s)}_2(\xi)\cos\sqrt{a^\kappa_{66}\rho^k}\,\omega_*\zeta+\bar{u}^{\kappa(s)}, \tag{1.10}$$

$$V^{\kappa(s)}=C^{\kappa(s)}_3(\xi)\sin\sqrt{\frac{\Delta^\kappa_1}{\beta^\kappa_{11}}\rho^k}\,\omega_*\zeta+C^{\kappa(s)}_4(\xi)\cos\sqrt{\frac{\Delta^\kappa_1}{\beta^\kappa_{11}}\rho^k}\,\omega_*\zeta+\bar{v}^{\kappa(s)}, \tag{1.11}$$

где $\bar{u}^{k(s)},\bar{v}^{k(s)}$ – частные решения уравнений (1.8), (1.9) соответственно.

Вычислив напряжения по формулам (1.7) и удовлетворив условиям (1.1), (1.2), получим алгебраическую систему относительно $C^{I(s)}_j(\xi),\ C^{III(s)}_j(\xi),\ j=1,2,3,4$. К этой системе необходимо присоединить алгебраические уравнения, получающиеся после удовлетворения условиям контакта (1.3), (1.4). Совместно решив эти системы, определим все $C^{k(s)}_j(\xi),\ k=I,II,III$ и следовательно, все искомые величины. В частности, для компонент вектора перемещения имеем:

$$U^{I(s)}=\frac{m^{(s)}_5}{A^I_5}\sin\sqrt{a^I_{66}\rho^I}\,\omega_*\zeta+\frac{m^{(s)}_6}{A^I_5}\cos\sqrt{a^I_{66}\rho^I}\,\omega_*\zeta+\bar{u}^{I(s)},$$
$$U^{II(s)}=\frac{1}{A^{II0}_1}\left(A^{II0}_2\frac{g^{(s)}_4}{g_6}-d^{(s)}_{13}\right)\sin\sqrt{a^{II}_{66}\rho^{II}}\,\omega_*\zeta+\frac{g^{(s)}_4}{g_6}\cos\sqrt{a^{II}_{66}\rho^{II}}\,\omega_*\zeta+\bar{u}^{II(s)}, \tag{1.12}$$
$$U^{III(s)}=\frac{1}{A^{III}_1}\left(d^{(s)}_3-A^{III}_2\frac{g^{(s)}_5}{g_6}\right)\sin\sqrt{a^{III}_{66}\rho^{III}}\,\omega_*\zeta+\frac{g^{(s)}_5}{g_6}\cos\sqrt{a^{III}_{66}\rho^{III}}\,\omega_*\zeta+\bar{u}^{III(s)},$$

$$V^{I(s)} = \frac{1}{A_3^I}\left(d_2^{(s)} + \frac{A_4^I g_2^{(s)}}{g_1}\right)\sin\sqrt{\frac{\Delta_1^I}{\beta_{11}^I}\rho^I}\,\omega_*\zeta + \frac{g_2^{(s)}}{g_1}\cos\sqrt{\frac{\Delta_1^I}{\beta_{11}^I}\rho^I}\,\omega_*\zeta + \overline{v}^{I(s)},$$

$$V^{II(s)} = \frac{1}{b_2}\left(\frac{m_3 g_2^{(s)}}{g_1} - m_4^{(s)}\right)\sin\sqrt{\frac{\Delta_1^{II}}{\beta_{11}^{II}}\rho^{II}}\,\omega_*\zeta + \frac{1}{b_2}\left(\frac{m_1 g_2^{(s)}}{g_1} - m_2^{(s)}\right)\cos\sqrt{\frac{\Delta_1^{II}}{\beta_{11}^{II}}\rho^{II}}\,\omega_*\zeta + \overline{v}^{II(s)},$$

$$V^{III(s)} = \frac{1}{A_3^{III}}\left(d_4^{(s)} - \frac{A_4^{III} g_3^{(s)}}{g_1}\right)\sin\sqrt{\frac{\Delta_1^{III}}{\beta_{11}^{III}}\rho^{III}}\,\omega_*\zeta + \frac{g_3^{(s)}}{g_1}\cos\sqrt{\frac{\Delta_1^{III}}{\beta_{11}^{III}}\rho^{III}}\,\omega_*\zeta + \overline{v}^{III(s)},$$

где

$$\begin{aligned}
&A_1^I = \cos\sqrt{a_{66}^I\rho^I}\,\omega_*\zeta_1, \qquad A_2^I = \sin\sqrt{a_{66}^I\rho^I}\,\omega_*\zeta_1,\\
&A_3^I = \cos\sqrt{\Delta_1^I\rho^I/\beta_{11}^I}\,\omega_*\zeta_1, \quad A_4^I = \sin\sqrt{\Delta_1^I\rho^I/\beta_{11}^I}\,\omega_*\zeta_1, \quad I, III = \zeta_1, \zeta_2,\\
&A_1^{i0} = \cos\sqrt{a_{66}^i\rho^i}\,\omega_*\zeta_0, \qquad A_2^{i0} = \sin\sqrt{a_{66}^i\rho^i}\,\omega_*\zeta_0,\\
&A_3^{i0} = \cos\sqrt{\Delta_1^i\rho^i/\beta_{11}^i}\,\omega_*\zeta_0, \; A_4^{i0} = \sin\sqrt{\Delta_1^i\rho^i/\beta_{11}^i}\,\omega_*\zeta_0, \; i = I, II, III,\\
&A_5^I = \sin\sqrt{a_{66}^I\rho^I}\,\omega_*\left(\zeta_1 - \zeta_0\right).
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Значения входящих в формулы (1.12) остальных пораметов не приводим в силу их громоздкости (их выписывать несложно). Из формул (1.12) следует, что решение будет конечным, т.е. не будет возникать резонанс, если

$$A_3^I \neq 0,\; A_3^{III} \neq 0,\; A_5^I \neq 0,\; A_1^{III} \neq 0,\; A_1^{II0} \neq 0,\; g_1 \neq 0,\; g_6 \neq 0, \tag{1.14}$$

значения частот, при которых какой-либо из $A_j^k = 0$, несложно вычислить, используя формулы (1.13). Условия $g_1 = 0,\; g_6 = 0$ приводят к дисперсионным уравнениям

$$\begin{aligned}
&\left(1-b_3\right)\sin\left(\alpha_2 - \alpha_3\right) + \left(1+b_3\right)\sin\left(\alpha_2 + \alpha_3\right) = 0,\\
&\left(1+b_2\right)\left[\left(1+b_4\right)\sin\left(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3\right) + \left(1-b_4\right)\sin\left(\gamma_1+\gamma_2-\gamma_3\right)\right] +\\
&+\left(1-b_2\right)\left[\left(1-b_4\right)\sin\left(\gamma_1-\gamma_2+\gamma_3\right) + \left(1+b_4\right)\sin\left(\gamma_1-\gamma_2-\gamma_3\right)\right] = 0,
\end{aligned} \tag{1.15}$$

где

$$\begin{aligned}
&\alpha_2 = 2\sqrt{a_{66}^{II}\rho^{II}}\,\omega h, \;\; \alpha_3 = \sqrt{a_{66}^{III}\rho^{III}}\,\omega h_2,\\
&\gamma_1 = \sqrt{\Delta_1^I\rho^I/\beta_{11}^I}\,\omega h_1, \quad \gamma_2 = 2\sqrt{\Delta_1^{II}\rho^{II}/\beta_{11}^{II}}\,\omega h, \quad \gamma_3 = \sqrt{\Delta_1^{III}\rho^{III}/\beta_{11}^{III}}\,\omega h_2,\\
&b_2 = \sqrt{\beta_{11}^{II}\rho^{II}\Delta_1^I/(\beta_{11}^I\rho^I\Delta_1^{II})},\; b_3 = \sqrt{a_{66}^{II}\rho^{III}/(a_{66}^{III}\rho^{II})}, \quad b_4 = \sqrt{\beta_{11}^{III}\rho^{III}\Delta_1^{II}/(\beta_{11}^{II}\rho^{II}\Delta_1^{III})}.
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Приведём некоторые значения резонансных частот для пакета из слоёв: стеклопластика 2:1 с характеристиками $E_1^I = 36\cdot10^9$ Па, $E_2^I = 26.3\cdot10^9$ Па, $E_3^I = 10.8\cdot10^9$ Па, $G_{12}^I = 4.9\cdot10^9$ Па, $G_{23}^I = 4\cdot10^9$ Па, $G_{13}^I = 4.4\cdot10^9$ Па, $\nu_{12}^I = 0.105$, $\nu_{23}^I = 0.431$, $\nu_{31}^I = 0.405$, $\rho^I = 1700$ кг/м^3, $h_1 = 0.4$ м; графито-эпоксидного материала $E_1^{II} = 7.3\cdot10^9$ Па, $E_2^{II} = 7.3\cdot10^9$ Па, $E_3^{II} = 84.7\cdot10^9$ Па, $G_{12}^{II} = 2.7\cdot10^9$ Па, $G_{23}^{II} = 4.2\cdot10^9$ Па, $G_{13}^{II} = 4.2\cdot10^9$ Па, $\nu_{12}^{II} = 0.323$, $\nu_{23}^{II} = 0.026$, $\nu_{31}^{II} = 0.3$, $\rho^{II} = 1660$ кг/м^3, $h = 0.1$ м; и СВАМ 10:1 $E_1^{III} = 38.3\cdot10^9$ Па, $E_2^{III} = 17.7\cdot10^9$ Па, $E_3^{III} = 9.6\cdot10^9$ Па, $G_{12}^{III} = 5.2\cdot10^9$ Па, $G_{23}^{III} = 3.1\cdot10^9$ Па, $G_{13}^{III} = 3.8\cdot10^9$ Па, $\nu_{12}^{III} = 0.22$, $\nu_{23}^{III} = 0.31$, $\nu_{31}^{III} = 0.07$, $\rho^{II} = 1900$ кг/м^3, $h_2 = 0.5$ м. Приведём первые семь значения резонансных частот, соответствующие уравнениям (1.15). Первому уравнению (1.15) соответствуют частоты: 4365.62; 8402.5; 12191; 16288.9; 20676.4; 25012.6;

28989Гц. Второму уравнению – частоты 7989.88; 19238.9; 29203.1; 37787.1; 45412.7; 57602.2; 66402.7Гц. В случае полного контакта между слоями, второе уравнение (1.15) остаётся неизменной, а первое уравнение имеет вид [8]

$$\left(1+b_1\right)\left[\left(1+b_3\right)\sin\left(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\right)+\left(1-b_3\right)\sin\left(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3\right)\right]+$$
$$+\left(1-b_1\right)\left[\left(1-b_3\right)\sin\left(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3\right)+\left(1+b_3\right)\sin\left(\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3\right)\right]=0, \tag{1.17}$$
$$\alpha_1=\sqrt{a_{66}^I\rho^I}\,\omega h_1.$$

Резонансными частотами при той же конфигурации пакета являются: 4194.43; 9432.01; 13307.7; 18219.3; 22538.7; 27234.1; 31446.2Гц. Эти значения, при выбранной конфигурации пакета резко не отличаются от значений соответствующих (1.15), однако, при изменении характеристик первого слоя, т.е. α_1, они могут отличаться сколь угодно.

В качестве иллюстрации полученного общего решения, рассмотрим решение задачи, соответствующее условиям

$$X^+=\mathrm{const},\ Y^\pm=0,\ X^-=0\,. \tag{1.18}$$

Используя полученные выше формулы, будем иметь:

$$C_3^{j(s)}=0,\ \ C_4^{j(s)}=0,\ \ V^{j(s)}=0,\ \ \sigma_{11}^{j(s)}=0,\ \sigma_{22}^{j(s)}=0,\quad j=I,II,III,$$
$$C_1^{k(s)}=0,\ \ C_2^{k(s)}=0,\ \ U^{k(s)}=0,\ \sigma_{12}^{k(s)}=0,\ \ k=II,III,$$
$$d_1^{(0)}=\frac{1}{\omega_*}\sqrt{a_{66}^I/\rho^I}\,X^{+(0)},\quad d_i^{(0)}=0,\ i=2,3,...,12,\ \ d_1^{(s)}=d_i^{(s)}=0,\ s\neq 0, \tag{1.19}$$
$$C_1^{I(0)}=\frac{m_5^{(0)}}{A_5^I},\quad C_2^{I(0)}=\frac{m_6^{(0)}}{A_5^I},\ \ m_5^{(0)}=-d_1^{(0)}A_2^{I0},\quad m_6^{(0)}=-d_1^{(0)}A_1^{I0}$$

В результате, имеем математически точное решение внутренней задачи

$$u^I=lU^{I(0)}\exp(i\omega t),\ U^{I(0)}=C_1^{I(0)}\sin\sqrt{a_{66}^I\rho^I}\,\omega_*\zeta+C_2^{I(0)}\cos\sqrt{a_{66}^I\rho^I}\,\omega_*\zeta,\quad \zeta_0\le\zeta\le\zeta_1,$$
$$U^{I(s)}=0,\quad s\neq 0$$
$$\sigma_{xy}^I=\varepsilon^{-1}\sigma_{12}^{I(0)}\exp(i\omega t),\quad \sigma_{12}^{I(0)}=\frac{1}{a_{66}^I}\frac{\partial U^{I(0)}}{\partial\zeta} \tag{1.20}$$
$$v^j=0,\qquad \sigma_{11}^j=0,\ \ \sigma_{22}^j=0,\ \ j=I,II,III$$
$$u^k=0,\qquad \sigma_{12}^k=0,\ k=II,III$$

Если сравнить решение (1.20) с решением той же задачи, когда контакт между слоями полный [8], можно заключить, что при полном контакте отличны от нуля все величины $U^{k(0)},\ \sigma_{12}^{k(0)},\ k=I,II,III,$ т.е. смягчение условий контакта приводит к обращению в ноль или уменьшению порядка некоторых расчётных величин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Aghalovyan L.A. Asymptotic Teory of Anisotropic Plates and Shells. 2015. Singapore. World Scientific Publishing. 376 p. (Руское издание: М.: Наука, Физматлит. 1997.)
2. Агаловян Л.А., Халатян Л.М. Асимптотика вынужденных колебаний ортотропной полосы при смешанных граничных условиях.// Докл. НАН РА. 1999. Т.99. №4. С.315-321.
3. Агаловян Л.А., Оганесян Р.Ж. О характере вынужденных колебаний трёхслойной ортотропной пластинки при смешанной краевой задаче. //Докл. НАН Армении. 2006. Т.106. №4. С.186-192.
4. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Асимптотическое решение первой краевой задачи теории упругости о вынужденных колебаниях изотропной полосы.// Прикл. мат. и мех. (ПММ). 2008. Т.72. Вып.4. С.633-634: Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 72 (2008), pp.452-460. Elsevier 2008.
5. Агаловян Л.А., Закарян Т.В. О решении первой динамической пространственной краевой задачи для ортотропной прямоугольной пластинки.// Докл. НАН Армении. 2009. Т.109. №4. С.304-309.
6. Агаловян М.Л. Пространственная задача о вынужденных колебаниях пластин с общей анизотропией. // В сб.: «Избранные вопросы теории упругости, пластичности и ползучести». Ереван. Изд. «Гитутюн» НАН Армении, 2006. С.42-49.
7. Агаловян Л.А., Гулгазарян Л.Г. К определению решений одного класса динамических пространственных задач математической теории упругости для ортотропных оболочек. //Учёные записки АГПУ им. Х. Абовяна. 2012. № 2(17). С.29-42.
8. Агаловян Л.А., Закарян Т.В. Решение первой динамической краевой задачи для трёхслойной ортотропной полосы несимметричной структуры. // Изв. НАН Армении. Механика. 2015. Т.68. №2. С.10-21.

<u>Сведения об авторах:</u>

Агаловян Ленсер Абгарович- академик НАН Армении,
зав. отделом Института механики НАН Армении
Адрес: 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2
Тел.: (+37410) 52-58-35, **E-mail:** aghal@mechins.sci.am

Закарян Татевик Владиковна – к.ф.м.н., научн.сотр. Института механики НАН Армении
Адрес: 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2
Тел.: (+37410) 63-88-82, **E-mail:** zaqaryantatevik@mail.ru

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА О СОВМЕСТНОМ КРУЧЕНИИ БЕСКОНЕЧНОГО КОНУСА И КОНЕЧНОЙ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Акопян В.В., Геворгян Г.З., Мирзоян Е.С.

В настоящей работе рассматривается задача контактного взаимодействия тонкой конической оболочки конечной длины со сплошным бесконечным конусом, когда на оболочку действуют тангенциальные усилия, приводящие к кручению конуса. Задача сводится к сингулярному интегро-дифференциальному уравнению, которое решена при помощи метода механических квадратур.

Задачи контактного взаимодействия массивных тел с тонкостенными элементами относятся к развивающейся области исследований, которая при огромном количестве решенных задач, сведения о многих из них можно найти, например, в [1,2], позволяет ставить и решать новые задачи или находить новые, более эффективные подходы к решению уже рассмотренных задач. Настоящая работа посвящена использованию более эффективного метода решения задачи, рассмотренной ранее одним из авторов [3].

Пусть к бесконечному упругому конусу с углом раствора 2γ на части $a \le r \le b$ его границы прикреплена коническая оболочка малой толщины h и на оболочку действует произвольная нагрузка в виде тангенциальных сил интенсивности $q_0(r)$, приводящая к кручению конуса. Требуется определить закон распределения тангенциальных контактных напряжений $q(r)$ между конусом и оболочкой.

Решение задачи кручения бесконечного конуса сосредоточенной нагрузкой интенсивности T, распределённой по окружности $\{r=\xi,\ \theta=\gamma\}$ в сферической системе координат, полученное с помощью преобразования Меллина, имеет вид [4]:

$$u_0(r,\theta)=\frac{T}{2\pi iG}\int_{-\frac{1}{2}-i\infty}^{-\frac{1}{2}+i\infty}\frac{\xi^{\nu+1}P_\nu^1(\cos\theta)}{r^{\nu+1}P_\nu^2(\cos\gamma)}d\nu \tag{1}$$

где $P_\nu^1(x),\ P_\nu^2(x)$ – присоединённые функции Лежандра первого рода, а G – модуль сдвига конуса.

Формулу (1) преобразуем к виду

$$u_0(r,\theta)=\frac{T}{\pi G}\sqrt{\frac{\xi}{r}}\int_0^\infty\cos\left(s\ln\frac{\xi}{r}\right)\frac{P^1_{-1/2+is}(\cos\theta)}{P^2_{-1/2+is}(\cos\gamma)}ds,$$

тогда перемещения точек бесконечного конуса при действии распределенной нагрузки определятся формулой

$$u(r,\theta)=\frac{1}{\pi G}\int_a^b\sqrt{\frac{\xi}{r}}M(\xi,r,\theta)q(\xi)d\xi$$

где

$$M(\xi,r,\theta)=\int_0^\infty\cos\left(s\ln\frac{\xi}{r}\right)\frac{P^1_{-1/2+is}(\cos\theta)}{P^2_{-1/2+is}(\cos\gamma)}ds$$

С другой стороны, дифференциальное уравнение кручения конической оболочки имеет вид [5]

$$E_s\left[\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\mathrm{v}}{dr}-\frac{\mathrm{v}}{r}\right]+q_1(r)=0, \qquad E_s=Eh/(1+\nu) \tag{2}$$

где $q_1(r)=q_0(r)-q(r)$ – поверхностная нагрузка, E – модуль Юнга и ν – коэффициент Пуассона материала оболочки.

Предположим, что торцы оболочки свободны от нагрузки, т.е.

$$\left.\frac{dv}{dr}-\frac{v}{r}\right|_{r=b}^{r=a}=0 \tag{3}$$

Общее решение уравнения (2) имеет вид

$$v = cr+\frac{c_1}{r}-\frac{1}{2E_s}\int_a^r \frac{r^2-\xi^2}{r} q_1(\xi)d\xi \tag{4}$$

Из граничных условий (3) имеем $c_1 = 0$ и

$$\int_a^b \xi^2 \left(q(\xi)-q_0(\xi)\right)d\xi = 0\,, \tag{5}$$

что эквивалентно условию равновесия оболочки.

Приравнивая перемещения конуса на части его поверхности $\{\theta=\gamma,\ a\le r\le b\}$ перемещениям оболочки, получим следующее интегральное уравнение:

$$c+\frac{1}{2E_s}\int_a^r \frac{r^2-\xi^2}{r}\left[q(\xi)-q(\xi_0)\right]d\xi = \frac{1}{\pi G}\int_a^b \sqrt{\frac{\xi}{r}}L(\xi,r)q(\xi)d\xi \tag{6}$$

$$L(\xi,r)=\int_0^\infty \cos\left(s\ln\frac{\xi}{r}\right)\frac{P^1_{-1/2+is}(\cos\gamma)}{P^2_{-1/2+is}(\cos\gamma)}ds$$

Перейдём к безразмерным величинам:

$$r = ae^{\alpha(x+1)}, \qquad q(r)=\frac{E_s}{a}e^{-\frac{3}{2}\alpha(x+1)}\varphi(x), \qquad \alpha=\ln\frac{b}{a}$$

$$\xi = ae^{\alpha(y+1)}, \qquad q_0(r)=\frac{E_s}{a}e^{-\frac{3}{2}\alpha(x+1)}\varphi_0(x), \qquad \lambda=\frac{\pi Ga}{2E_s} \tag{7}$$

В результате, уравнение (6) представится в виде

$$\int_{-1}^1 K(x,y)\varphi(y)dy-\lambda\int_{-1}^x \Phi(x,y)\varphi(y)dy = \Psi(x)+ce^{\frac{3}{2}\alpha(x+1)} \tag{8}$$

а условие (4) – в виде

$$\int_{-1}^1 e^{\frac{3}{2}\alpha(x+1)}\left(\varphi(x)-\varphi_0(x)\right)dx=0 \tag{9}$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$K(x,y)=\int_0^\infty \cos\alpha s(x-y)\frac{P^1_{-\frac{1}{2}+is}(\cos\gamma)}{P^2_{-\frac{1}{2}+is}(\cos\gamma)}ds$$

$$\Phi(x,y)=\frac{e^{2\alpha(x+1)}-e^{2\alpha(y+1)}}{e^{\frac{\alpha}{2}(y+1)}e^{\frac{\alpha}{2}(x+1)}},\ \ \Psi(x)=-\lambda\int_{-1}^x \Phi(x,y)\varphi_0(y)dy \tag{10}$$

Воспользовавшись асимптотической формулой для функций Лежандра [6], можно показать, что

$$\frac{P^1_{-\frac{1}{2}+is}(\cos\gamma)}{P^2_{-\frac{1}{2}+is}(\cos\gamma)}=\frac{1}{s}-\frac{3}{2s^2}\mathrm{ctg}\gamma+0\left(\frac{1}{s^3}\right),\ \ s\to\infty \tag{11}$$

Далее, используя значение интеграла

$$\int_0^\infty \frac{e^{-s}-\cos ts}{s}ds=\ln|t|, \tag{12}$$

выделим особую часть ядра, т.е. его представим в виде

$$K(x,y)=\ln\frac{1}{|x-y|}+F(x,y), \tag{13}$$

где

$$F(x,y)=\int_0^\infty \cos\alpha(x-y)\left(\frac{P^1_{-\frac{1}{2}+is}(\cos\gamma)}{P^2_{-\frac{1}{2}+is}(\cos\gamma)}+\frac{e^{-s}}{s}\right)ds \tag{14}$$

Таким образом, решение поставленной задачи свелось к решению интегрального уравнения (8) при условии (9).

Дифференцируя уравнение (8) по x, получим сингулярное интегро-дифференциальное уравнение типа уравнения Прандля для крыла конечного размаха.

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(y)}{x-y}dy+\int_{-1}^{1}\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\varphi(y)dy-\lambda\int_{-1}^{x}\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial x}\varphi(y)dy=\Psi'(x)+\frac{3}{2}\alpha c e^{\frac{3}{2}\alpha(x+1)} \tag{15}$$

Для решения последнего уравнения используется метод механических квадратур [7]. После определения неизвестной функции $\varphi(x)$, постоянная c, равная углу поворота средней линии верхнего торца конической оболочки, определится из уравнения (8).

ЛИТЕРАТУРА

1. Развитие теории контактных задач в СССР. М:. Наука. 1976
2. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М:. Наука, 1983. 488с.
3. Геворгян Г.З. Контактная задача о кручении бесконечного конуса посредством тонкой конечной конической оболочки. В сб.: Исследования по механике твердого деформируемого тела. Изд. АН Арм. ССР. 1981, с.87-92.
4. Златин А.Н., Уфлянд Я.С. Применение метода парных рядов к некоторым смешанным задачам кручения конических тел. МТТ 1978. №4 С. 27-32.
5. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз 1962. 431с.
6. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.1. М.: Наука. 1973. 296с.
7. Саакян А.В., Шавлакадзе Н.Н. О двух способах прямого численного интегрирования уравнения Прандтля и их сравнительный анализ. Журнал вычислительной математики и математической физики, 2014, том 54, № 8, с. 46–53

Сведения об авторах:

Акопян Вазгануш Велихановна – к.ф-м.н., н. с. Института механики НАН Армении
Адрес: 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24б
Тел: (+37410) 568188
E-mail: mechins@sci.am
Геворкян Гнун Завенович
К.ф.-м.н., в.н.с. Института механики НАН РА
E-mail: gnungev2002@yahoo.com
Мирзоян Езник Саакович – к.ф-м.н., ЕГУ

НАПРЯЖЁННОЕ СОСТОЯНИЕ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО ПРОСТРАНСТВА С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ МЕЖФАЗНЫХ ДЕФЕКТОВ

Акопян В.Н., Акопян Л.В.

Рассмотрено антиплоское напряжённое состояние кусочно-однородного пространства, изготовленного при помощи поочерёдного соединения двух разнородных слоёв одинаковой толщины, когда на плоскостях стыка разнородных материалов имеется система магистральных параллельных дефектов. Построены разрывные решения уравнений теории упругости для кусочно-однородного пространства и получены точные решения задачи, когда дефектом является трещина или абсолютно жёсткое включение, одна из сторон которого оторвана от матрицы.

Пусть кусочно-однородное пространство, изготовленное поочерёдным соединением двух разнородных слоёв толщины $2H$ с модулями сдвигов G_1 и G_2, на плоскостях соединения слоёв $y = 2nH \ (n \in Z)$ по полосам $\{x \in L; -\infty < z < \infty\}$, где линия L состоит из конечного числа непересекающихся интервалов, содержит периодическую систему магистральных параллельных дефектов типа трещин, полностью или частично сцеплённых абсолютно жёстких или деформируемых тонких включений. Будем полагать, что пространство деформируется под воздействием таких нагрузок, действующих на дефекты, при которых плоскости $y = (2n+1)H \ (n \in Z)$ являются плоскостями симметрии. Очевидно, что при такой постановке задачи напряжённое состояние в составных слоях, находящихся между двумя плоскостями симметрии будет одинаковым и, следовательно, можно рассмотреть только двухкомпонентный слой, находящийся между плоскостями симметрии $y = -H$.

Прежде чем перейти к решению конкретных задач, построим разрывные решения для двухкомпонентного слоя, считая, что разрывы напряжений и смещений на дефектах описываются соответственно функциями $\tau(x)$ и $W(x)$. Снабдив все величины, описывающие напряжённо-деформированное состояние верхнего и нижнего слоёв индексами 1 и 2, эту задау математически можно представить в виде следующей граничной задачи:

$$\begin{cases} W_1(x,H) = W_2(x,-H) = 0 \quad (-\infty < x < \infty) \\ \tau_{yz}^{(1)}(x,0) - \tau_{yz}^{(2)}(x,0) = \begin{cases} \tau(x) & (x \in L) \\ 0 & (x \notin L) \end{cases} \\ W_1(x,0) - W_2(x,0) = \begin{cases} W(x) & (x \in L) \\ 0 & (x \notin L) \end{cases} \end{cases} \tag{1.1}$$

Здесь $W_j(x,y) \ (j=1,2)$ – компоненты смещений точек соответствующих слоёв, каждая из которых в области своего определения удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 W_j(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_j(x,y)}{\partial y^2} = 0 \ (j=1,2) \tag{1.2}$$

и связаны с компонентами напряжений $\tau_{yz}^{(j)}(x,y)$ соотношениями

$$\tau_{yz}^{(j)}(x,y)=G_j\frac{\partial W_j(x,y)}{\partial y} \tag{1.3}$$

Решения уравнений (1.2) представим в виде интегралов Фурье:

$$W_j(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[A_j(\lambda)sh(\lambda y)+B_j(\lambda)ch(\lambda y)\right]e^{-i\lambda x}d\lambda \quad (j=1,2) \tag{1.4}$$

Тогда по (1.3) найдём:

$$\tau_{yz}^{(j)}(x,y)=\frac{G_j}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[A_j(\lambda)ch(\lambda y)+B_j(\lambda)sh(\lambda y)\right]\lambda e^{-i\lambda x}d\lambda \quad (j=1,2). \tag{1.5}$$

Используя полученные выражения, удовлетворим (1.1) и выразим неизвестные коэффициенты $A_j(\lambda)$ и $B_j(\lambda)$ $(j=1,2)$ через транспоненты Фурье функций скачков. Далее, подставляя полученные выражения в (1.4) и (1.5), можем определить компоненты напряжённо-деформированного поля во всём пространстве через функции скачков. Приведём значения напряжений и производных от смещений на плоскости $y=0$, которые нам пригодятся при решении конкретных задач:

$$\begin{gathered}\tau_{yz}^{(1)}(x,0)=\frac{G}{G+1}\tau(x)+\frac{G_1}{2H(G+1)}\int_L \operatorname{cth}\left(\lambda(s-x)\right)W'(s)\,ds;\\ \frac{dW_1(x,0)}{dx}=\frac{W'(x)}{G+1}-\frac{1}{2HG_2(G+1)}\int_L\frac{\tau(s)\,ds}{\operatorname{sh}\left(\lambda(s-x)\right)};\quad \left(G=G_1/G_2;\ \lambda=\pi/2H\right);\\ \tau_{yz}^{(2)}(x,0)=\tau_{yz}^{(1)}(x,0)-\tau(x);\ \frac{W_2(x,0)}{dx}=\frac{W_1(x,0)}{dx}-W'(x).\end{gathered} \tag{1.6}$$

Теперь перейдём к рассмотрению конкретных задач.

а) Сначала рассмотрим случай, когда дефект представляет собой магистральную трещину длины $2a$ по полосе $\{x\in(-a,a)\ -\infty<z<\infty\}$, на берегах которой действуют противоположно направленные и одинаково распределённые нагрузки интенсивности $\tau_0(x)$, т.е.

$$\tau_{yz}^{(1)}(x,0)=\tau_{yz}^{(2)}(x,0)=\tau_0(x)$$

В этом случае $\tau(x)=\tau_{yz}^{(1)}(x,0)-\tau_{yz}^{(2)}(x,0)=0$.

Удовлетворив условию $\tau_{yz}^{(1)}(x,0)+\tau_{yz}^{(2)}(x,0)=2\tau_0(x)$, придём к уравнению

$$\frac{1}{H}\int_L \operatorname{cth}\left(\lambda(s-x)\right)W'(s)\,ds=\frac{(G+1)}{G_1}\tau_0(x); \tag{1.7}$$

Уравнение (1.7) нужно рассматривать вместе с условием непрерывности смещений в концевых точках трещины, записанное в интегральной форме:

$$\int_L W'(s)\,ds=0. \tag{1.8}$$

Построим решение уравнения (1.7) при условии (1.8). Для этого, в (1.7) и (1.8) перейдём к новым безразмерным переменным по формулам $\xi = \exp(\pi s / H)$, $\eta = \exp\mathrm{x}(\pi x / H)$ и обозначив

$$\varphi(\eta) = W'(\pi \ln \eta / H)/\eta;\ \ f(\eta) = \frac{G+1}{G_1}\tau_0(\pi \ln \eta / H)/\eta;$$

$$a_1 = \exp(-\pi a / H);\ b_1 = \exp(\pi a / H),$$

придём к уравнению

$$\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1} \frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{\xi-\eta} = f(\eta), \tag{1.9}$$

при условии

$$\int_{a_1}^{b_1} \varphi(\xi)\,d\xi = 0. \tag{1.10}$$

Решение (1.9) при условии (1.10) даётся формулой [1]:

$$\varphi(\eta) = -\frac{1}{\pi\omega(\eta)}\int_{a_1}^{b_1} \frac{\omega(\xi)\,f(\xi)\,d\xi}{\xi-\eta} \quad \left(\omega(\eta) = \sqrt{(\eta-a_1)(b_1-\eta)}\right). \tag{1.11}$$

Возвращаясь к исходным переменным, для производной от разности смещений точек берегов трещин получим выражение:

$$W'(x) = \frac{G+1}{2HG_1\omega_*(x)}\int_a^b \frac{\omega_*(s)\tau_0(s)\,ds}{\mathrm{sh}(\lambda(s-x))}\ ,\left(\omega_*(x) = \sqrt{\mathrm{sh}\frac{\pi(x+a)}{2H}\mathrm{sh}\pi\frac{\pi(a-x)}{2H}}\right).$$

Вычислим коэффициенты интенсивности в концевых точках трещины. Для этого используем первую из формул (1.6) при $|x| > a$. Записав эту формулу в переменных ξ, η и подставляя значение функции $\varphi(\eta)$ из (1.11), после некоторых преобразований получим:

$$\tau_{yz}^{(j)}\left(\frac{\pi \ln \eta}{H}, 0\right) = -\frac{\eta G_1}{\pi(G+1)(b_1-\eta)}\left|\frac{b_1-\eta}{a_1-\eta}\right|^{1/2}\int_{a_1}^{b_1}\frac{\omega(\tau)\,f(\tau)\,d\tau}{\tau-\eta}.$$

В исходных переменных это формула принимает вид:

$$\tau_{yz}^{(j)}(x,0) = \frac{\mathrm{sgn}(x)}{2H\sqrt{|\omega_*(x)|}}\int_{-a}^{a}\frac{\omega_*(s)\tau_0(s)\,ds}{\mathrm{sh}\lambda(s-x)}.$$

Отсюда

$$K_{III}(a) = \sqrt{2\pi}\lim_{x\to a+0}\sqrt{x-a}\,\tau_{yz}^{(j)}(x,0) = \frac{1}{\sqrt{H\mathrm{sh}(\pi a / H)}}\int_{-a}^{a}\frac{\omega_*(s)\tau_0(s)\,ds}{\mathrm{sh}(\pi(s-a)/2H)};$$

$$K_{III}(-a) = \sqrt{2\pi}\lim_{x\to -a-0}\sqrt{|x+a|}\,\tau_{yz}^{(j)}(x,0) = -\frac{1}{\sqrt{H\mathrm{sh}(\pi a / H)}}\int_{-a}^{a}\frac{\omega_*(s)\tau_0(s)\,ds}{\mathrm{sh}(\pi(s+a)/2H)}.$$

б) Теперь рассмотрим случай, когда дефектом является трещина длиной $2a$ по полосе $\{x \in (-a, a) \; -\infty < z < \infty\}$, на нижнем берегу которой спаяно абсолютно жёсткое тонкое включение. Будем считать, что пространство деформируется под воздействием распределённых нагрузок $\tau_0(x)$, действующих на верхних берегах трещин, и равнодействующих им сосредоточенных нагрузок величины T_0, действующих на включение , т.е. на берегах трещины заданы условия:

$$\tau_{yz}^{(1)}(x,0) = \tau_0(x); \; W_2(x,0) = c = \text{const.} \qquad (|x| < a) \tag{1.12}$$

Используя формулы (1.6), удовлетворим условиям (1.12). В итоге придём к следующей системе определяющих уравнений:

$$\begin{cases} W'(x) + \dfrac{\lambda}{\pi}\displaystyle\int_{-a}^{a} \dfrac{\tau_*(s)\,ds}{\operatorname{sh}(\lambda(s-x))} = 0; \\ \tau_*(x) + \dfrac{\lambda}{\pi G}\displaystyle\int_{-a}^{a} \operatorname{cth}(\lambda(s-x)) W'(s)\,ds = \dfrac{G+1}{GG_1}\tau_0(x), \end{cases} \tag{1.13}$$

Систему (1.13) нужно рассматривать при условиях

$$\int_{-a}^{a} W'(s)\,ds = 0; \; \int_{-a}^{a} \tau_*(s)\,ds = 0. \; \left(\tau_*(x) = \tau(x)/G_1;\right) \tag{1.14}$$

Чтобы построить замкнутое решение системы (1.13), перейдём к новым переменным по формулам $\xi = e^{\lambda s}$, $\eta = e^{\lambda x}$ и, обозначив $a_1 = e^{-a\lambda}$, $b_1 = e^{a\lambda}$, $\varphi_1(\eta) = W'(\ln\eta/\lambda)$, $\varphi_2(\eta) = \tau_*(\ln\eta/\lambda)$, $F(\eta) = (G+1)\tau_0(\ln\eta/\lambda)/GG_1$, запишем её в виде:

$$\begin{cases} \varphi_1(\eta) + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{a_1}^{b_1} \left[\dfrac{1}{\xi-\eta} - \dfrac{1}{\xi+\eta}\right] \varphi_2(\xi)\,d\xi = 0; \\ \varphi_2(\eta) + \dfrac{1}{\pi G}\displaystyle\int_{a_1}^{b_1} \left[\dfrac{1}{\xi-\eta} + \dfrac{1}{\xi+\eta}\right] \varphi_1(\xi)\,d\xi = F(\eta). \end{cases} \tag{1.15}$$

Далее, продолжив на интервал $(-b_1, -a_1)$ функцию $\varphi_1(\eta)$ и первое уравнение (1.15) нечётным образом, а функцию $\varphi_2(\eta)$ и второе уравнение (1.15) чётным образом, последнюю систему запишем в виде:

$$\begin{cases} \varphi_1(\eta) + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{\Gamma} \dfrac{\varphi_2(\xi)}{\xi-\eta}\,d\xi = 0; \\ \varphi_2(\eta) + \dfrac{1}{\pi G}\displaystyle\int_{\Gamma} \dfrac{\varphi_1(\xi)}{\xi-\eta}\,d\xi = F(|\eta|); \end{cases} \qquad \left(\Gamma = (-b_1, -a_1) \cup (a_1, b_1)\right) \tag{1.16}$$

Несложно убедиться, что введя функции $\psi_\pm(\eta) = \varphi_1(\eta) \pm \sqrt{G}\varphi_2(\eta)$, систему (1.16) можно записать в виде следующих двух независимых уравнений:

$$\psi_{\pm}(\eta)\pm\frac{1}{\pi\sqrt{G}}\int_{\Gamma}\frac{\psi_{\pm}(\xi)}{\xi-\eta}d\xi=\pm\sqrt{G}F(|\eta|). \qquad (1.17)$$

Общее решение уравнений (1.17) имеет вид [2]:

$$\psi_{\pm}(\eta)=\pm\frac{\sqrt{G}\tau_0^*(|\eta|)}{G_1}-\frac{X(\pm\eta)}{G_1}\left[\frac{1}{\pi}\int_{L}\frac{\tau_0^*(|\eta|)d\eta}{X(\mp\xi)(\xi-\eta)}\pm\frac{2iG_1}{\sqrt{G+1}}P_1^{\pm}(\eta)\right]. \qquad (1.18)$$

Здесь

$$X(\eta)=-\operatorname{sgn}\eta\begin{cases}(b_1+\eta)^{-\gamma_1}(a_1+\eta)^{\gamma_1-1}(\eta-a_1)^{-\gamma_1}(b_1-\eta)^{\gamma_1-1} & (a_1<\eta<b_1);\\ (b_1+\eta)^{-\gamma_1}(-a_1-\eta)^{\gamma_1-1}(a_1-\eta)^{-\gamma_1}(b_1-\eta)^{\gamma_1-1} & (-b_1<\eta<-a_1);\end{cases}$$

$P_1^{\pm}(\eta)=c_1^{\pm}\eta+c_0^{\pm}$ – многочлен первой степени с неизвестными коэффициентами $c_j^{\pm}$ $(j=1,2)$,

$$0<\gamma_1=\frac{1}{2\pi}\arg q<1 \qquad \left(q=-\frac{1+i\sqrt{G}}{1-i\sqrt{G}}\right).$$

При этом, под $\arg q$ нужно понимать то значение аргумента числа q, которое находится в интервале $(0,2\pi)$. После определения функций $\psi_{\pm}(\eta)$ нетрудно определить функции скачков и, следовательно, все характерные величины, описывающие напряжённо-деформированное поле во всем пространстве. Постоянные же $c_j^{\pm}$ $(j=0,1)$ определяются из условий (1.14) с учётом чётности функции $\varphi_2(\eta)$ и нечётности функции $\varphi_1(\eta)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708с.
2. Акопян В.Н. Об одной смешанной задаче для анизотропного составного клина, содержащего щель. // Изв. Армении. Механика. 1996. Т.49. №2. С.35-40.

Сведения об авторах:

Акопян Ваграм Наслетникович – доктор физ.-мат. наук, профессор, директор Института механики НАН РА; **тел.:** (37410) 52-48-90, **e-mail:** vhakobyan@sci.am

Акопян Лусине Ваграмовна – младший научный сотрудник Института механики НАН РА, **тел.:** (37410) 52-48-90, **e-mail:** mechins@gmail.com

ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ ПЛОСКОСТИ С ТРЕЩИНАМИ

Акопян В.Н., Даштоян Л.Л.

Периодическим и двоякопериодическим задачам теории упругости для однородной плоскости посвящено огромное количество работ, результаты которых подытожены [1,2]. Периодическим задачам для кусочно-однородной плоскости из двух разнородных материалов посвящены работы [3-5]. Здесь рассмотрено напряжённо-деформированное состояние кусочно-однородной упругой плоскости, изготовленной поочерёдным соединением разнородных полос одинаковой толщины, на линиях соединения которых плоскость содержит двоякопериодическую систему конечных трещин. Методом разрывных решений уравнений плоской теории упругости выведено определяющее сингулярное интегральное уравнение задачи, решение которой построено методом механических квадратур.

Пусть кусочно-однородная упругая плоскость, изготовленная при помощи поочерёдного соединения полос толщины $2H$ из разнородных материалов с коэффициентами упругостей E_1, E_2 и коэффициентами Пуассона ν_1 и ν_2 на линиях соединений $y=2nH\ (n\in Z)$ содержит периодические с периодом $2l$ одинаковые трещины длины $2a$. Будем считать, что плоскость деформируется под воздействием одинаковых, симметричных относительно срединной точки трещин нормальных напряжений $P_0(x)$ и касательных напряжений $\tau_0(x)$, которые приложены к берегам трещины. Очевидно, что в этом случае линии $x=(2n+1)l$ и $y=(2n+1)H\ \ (n\in Z)$ будут линиями симметрии, вследствие чего, поставленную задачу можно сформулировать как задачу для кусочно-однородного прямоугольника (базовой ячейки), занимающей на плоскости область $\Omega\{|x|\le l;|y|\le H\}$, на границах которого заданы условия симметрии, а на линии соединения разнородных прямоугольников $y=0$, кусочно-однородный прямоугольник содержит межфазную трещину на интервале $(-a,a)$.

Чтобы получить систему определяющих уравнений поставленной задачи, сначала запишем разрывные решения уравнений теории упругости для кусочно-однородного прямоугольника, на сторонах которого имеют место условия симметрии, а на интервале $(-a,a)$ линии соединения разнородных прямоугольников $y=0$ заданы скачки функций смещений $U(x),V(x)$. Математически эта задача записывается в виде следующей граничной задачи:

$$\begin{cases}\tau_{xy}^{(1)}(\pm l,y)=U_1(\pm l,y)=0 & (0<y<H)\\ \tau_{xy}^{(2)}(\pm l,y)=U_2(\pm l,y)=0 & (-H<y<0)\\ \tau_{xy}^{(j)}(x,(-1)^{j+1}H)=V_j(x,(-1)^{j+1}H)=0 & (|x|<l)\quad (j=1,2)\end{cases}\tag{1.1a}$$

$$\begin{cases}\sigma_y^{(1)}(x,0)=\sigma_y^{(2)}(x,0);\ \tau_{xy}^{(1)}(x,0)=\tau_{xy}^{(2)}(x,0); & (|x|<l)\\ U_1(x,0)=U_2(x,0);\quad V_1(x,0)-V_2(x,0); & (a<|x|<l)\end{cases}\tag{1.1b}$$

$$\begin{cases}\sigma_y^{(1)}(x,0)=\sigma_y^{(2)}(x,0)=-P_0(x) & (|x|<a)\\ \tau_{xy}^{(1)}(x,0)=\tau_{xy}^{(2)}(x,0)=\tau_0(x) & (|x|<a)\\ U_1(x,0)-U_2(x,0)=U(x) & (|x|<a)\\ V_1(x,0)-V_2(x,0)=V(x) & (|x|<a)\end{cases}\tag{1.1c}$$

Здесь $U_j(x)$ и $V_j(x)$ $(j=1,2)$ – горизонтальные и вертикальные составляющие вектора смещения прямоугольников, а $\sigma_y^{(j)}(x,y)$ и $\tau_{xy}^{(j)}(x,y)$ $(j=1,2)$ – компоненты нормальных и касательных напряжений, действующих в соответствующих прямоугольниках.

Для решений этой задачи используем бигармонические функции напряжений (функция Эри) для разнородных прямоугольников и представим их в виде рядов:

$$F_j(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[A_k^{(j)}\operatorname{ch}\alpha_k y+B_k^{(j)}\operatorname{sh}\alpha_k y+\alpha_k y\left(C_k^{(j)}\operatorname{ch}\alpha_k y+D_k^{(j)}\operatorname{sh}\alpha_k y\right)\right]\cos\alpha_k x \tag{1.2}$$

где $\alpha_k=\pi k/l;\ -l\le x\le l;\ -H\le y\le H$, а коэффициенты $A_k^{(j)};B_k^{(j)};D_k^{(j)}$ и $C_k^{(j)}$ $(j=1,2)$ – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

Учитывая соотношения

$$\sigma_x(x,y)=\frac{\partial^2F(x,y)}{\partial y^2};\ \ \sigma_y(x,y)=\frac{\partial^2F(x,y)}{\partial x^2};\ \ \tau_{xy}(x,y)=-\frac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y};$$

$$U_j(x,y)=\frac{1-\nu_j^{\,2}}{E_j}\int\frac{\partial^2F_j(x,y)}{\partial y^2}dx-\frac{\nu_j(1+\nu_j)}{E_j}\frac{\partial F_j(x,y)}{\partial x}+a_0^{(j)}y+c_0^{(j)};$$

$$V_j(x,y)=\frac{1-\nu_j^{\,2}}{E_j}\int\frac{\partial^2F_j(x,y)}{\partial x^2}dy-\frac{\nu_j(1+\nu_j)}{E_j}\frac{\partial F_j(x,y)}{\partial y}+a_0^{(j)}x+b_0^{(j)}$$

связывающие компоненты напряжений и смещений с функцией напряжений, легко проверить, что при таком выборе функций $F_j(x,y)$ $(j=1,2)$ первые четыре условия (1.1a) удовлетворяются тождественно. Удовлетворим остальным условиям (1.1a), (1.1b), последним двум условиям (1.1c) и определим коэффициенты $A_k^{(j)}$, $B_k^{(j)}$, $D_k^{(j)}$ и $C_k^{(j)}$ $(j=1,2)$ через коэффициенты Фурье функций скачков. Получим :

$$D_k^{(1)}=\frac{u_k-\operatorname{cth}\beta_k v_k}{\alpha_k\Delta_k^{(1)}};\ \ \mathrm{C}_k^{(1)}=-\operatorname{th}\beta_k D_k^{(1)};\quad D_k^{(2)}=\frac{u_k+\operatorname{cth}\beta_k v_k}{\alpha_k\Delta_k^{(2)}};\ \ \mathrm{C}_k^{(2)}=\operatorname{th}\beta_k D_k^{(2)};$$

$$A_k^{(1)}=-\frac{\operatorname{sh}\mu_k\operatorname{ch}\beta_k+\beta_k}{\operatorname{sh}(2\beta_k)}\left(D_k^{(1)}+D_k^{(2)}\right);\ \ B_k^{(1)}=-A_k^{(1)}\operatorname{th}\beta_k-\frac{\beta_kD_k^{(1)}}{\operatorname{ch}^2\beta_k};$$

$$A_k^{(2)}=-\frac{\operatorname{sh}\beta_k\operatorname{ch}\beta_k+\beta_k}{\operatorname{sh}(2\beta_k)}\left(D_k^{(1)}+D_k^{(2)}\right);\ \ B_k^{(2)}=A_k^{(2)}\operatorname{th}\beta_k+\frac{\beta_kD_k^{(2)}}{\operatorname{ch}^2\beta_k},$$

где

$$\Delta_k^{(1)}=\frac{2(\vartheta_2-\vartheta_1)\beta_k}{\operatorname{sh}(2\beta_k)}+\Delta_1;\ \ \Delta_k^{(2)}=\frac{2(\vartheta_2-\vartheta_1)\beta_k}{\operatorname{sh}(2\beta_k)}-\Delta_2;\quad \Delta_1=\vartheta_2+\vartheta_1æ_1\ \ \Delta_2=(\vartheta_1+\vartheta_2æ_2);$$

$$\beta_k=\alpha_kH;\quad \vartheta_j=\frac{1+\nu_j}{E_j};\quad æ_j=3-4\nu_j\qquad (j=1,2).$$

$$u_k=\frac{1}{l}\int_{-a}^{a}U(x)\sin(\alpha_kx)dx;\ \ v_k=\frac{1}{l}\int_{-a}^{a}V(x)\cos(\alpha_kx)dx. \tag{1.3}$$

Далее, подставляя полученные выражения для коэффициентов в (1.2) и учитывая (1.3), можем выразить функцию напряжений, следовательно, и все величины, характеризующие напряжённо-деформированное состояние в кусочно-однородном прямоугольнике, через функции скачков. В частности, для общепринятой комплексной комбинации напряжений, действующих на берегах трещины, которые нам пригодятся в дальнейшем, при помощи комплексной комбинации разности точек берегов трещины $W(x) = U(x) + iV(x)$ получим выражение:

$$\sigma_y^{(j)}(x,0) - i\tau_y^{(j)}(x,0) = \frac{l_1}{\Delta_*}W'(x) + \frac{il_3}{\pi\Delta_*}\int_{-a}^{a}\frac{W'(s)}{s-x}ds + \frac{l_1}{\Delta_*}\int_{-a}^{a}R_1(x-s)W'(s)\,ds +$$
$$+\frac{l_1}{\Delta_*}\int_{-a}^{a}R_2(x-s)W'(s)\,ds \qquad (-l < x < l;\ j = 1,2) \tag{1.4}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$R_1(x) = \frac{i\Delta_*}{2ll_1}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{2\beta_k}{\operatorname{sh}(2\beta_k)}\right)\left(\frac{1}{\Delta_k^{(1)}}-\frac{1}{\Delta_k^{(2)}}\right)\operatorname{cth}(2\beta_k)+\frac{2l_3}{\Delta_*}\right]\sin\alpha_k x - \frac{q}{2il}\left[\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2l}-\frac{2l}{\pi x}\right];$$

$$R_2(x) = \frac{\Delta_*}{ll_1}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{2\beta_k}{\operatorname{sh}(2\beta_k)}\right)\left(\frac{1}{\Delta_k^{(1)}}+\frac{1}{\Delta_k^{(2)}}\right)-\frac{l_1}{\Delta_*}\right]\cos\alpha_k x -$$
$$-\frac{i\Delta_*}{2ll_1}\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{2\beta_k}{\operatorname{sh}(2\beta_k)}\right)\left(\frac{1}{\Delta_k^{(1)}}-\frac{1}{\Delta_k^{(2)}}\right)\frac{\sin\alpha_k x}{\operatorname{sh}(2\beta_k)};$$

$$l_0 = \vartheta_2^{(1)}(\vartheta_2^{(1)}+\vartheta_2^{(2)}) - \vartheta_1^{(1)}(\vartheta_1^{(1)}-\vartheta_1^{(2)});\ \ l_1 = 2(\vartheta_1^{(2)}l_0 - \vartheta_2^{(2)}l_2);\ \ l_2 = \vartheta_1^{(1)}\vartheta_2^{(2)} + \vartheta_2^{(1)}\vartheta_1^{(2)};$$

$$l_3 = 2(\vartheta_1^{(2)}l_2 - \vartheta_2^{(2)}l_0);\ \ d_0 = \frac{\vartheta_1^{(1)}-\vartheta_1^{(2)}}{2};\ d_1 = \frac{\vartheta_2^{(1)}+\vartheta_2^{(2)}}{2};\ \Delta_* = (\vartheta_2^{(1)}+\vartheta_2^{(2)})^2 - (\vartheta_1^{(1)}-\vartheta_1^{(2)})^2;$$

$$\vartheta_1^{(j)} = \frac{(1-2\nu_j)E_j}{2(1+\nu_j)æ_j} = \frac{(1-2\nu_j)}{2\vartheta_j æ_j};\qquad \vartheta_2^{(j)} = \frac{(1-\nu_j)E_j}{(1+\nu_j)æ_j} = \frac{(1-\nu_j)}{\vartheta_j æ_j}.$$

Используя полученные выражения для комплексной комбинации напряжений, действующих на берегах трещины, удовлетворим условиям на берегах трещины, первоначально записав их в комплексной форме:

$$\sigma_y^{(j)}(x,0) - i\tau_{xy}^{(j)}(x,0) = -\left[P_0(x) + i\tau_0(x)\right] = Q_0(x)\ \ (j = 1,2). \tag{1.5}$$

В итоге, для определения производной от комплексной комбинации разности точек берегов трещины получим следующую систему сингулярных интегральных уравнений:

$$W'(x) - \frac{q}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{W'(s)}{s-x}ds + \int_{-a}^{a}R_1(x-s)W'(s)\,ds + \int_{-a}^{a}R_2(x-s)\bar{W}'(s)\,ds = Q(x) \tag{1.6}$$

При этом, искомая функция $W'(x)$ в концевых точках трещины должна удовлетворять условиям непрерывности смещений:

$$\int_{-a}^{a} W'(x)\,dx = 0. \tag{1.7}$$

Здесь $\bar{W}'(x)$ – комплексно-сопряжённая функции $W'(x)$, $q = l_3 / l_1$ и $Q(x) = \Delta_* Q_0(x)/l_1$.

Для решения уравнения (1.6) методом механических квадратур [3], используя замену переменных $s = a\xi$ и $x = a\eta$, сформулируем на интервале (-1,1) и введя обозначения

$$W'(\eta a) = \psi(\eta);\ aR_j(a\eta) = R_j^*(\eta);\ Q((\eta a)) = Q_*(\eta)$$

запишем в виде

$$\psi(\eta) - \frac{q}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{\psi(\xi)}{\xi-\eta}d\xi + \int_{-1}^{1} R_1^*(\xi-\eta)\psi(\xi)d\xi + \int_{-1}^{1} R_2^*(\xi-\eta)\bar{\psi}(\xi)d\xi = Q_*(\eta) \tag{1.8}$$

При этом, условие (1.7) примет вид:

$$\int_{-1}^{1}\psi(\xi)d\xi = 0 \tag{1.9}$$

Учитывая регулярность функций $R_j^*(\eta)$ $(j = 1,2)$, нетрудно установить, что искомая функция в концевых точках интервала интегрирования имеет корневую особенность с осциляцией и её можно представить в виде :

$$\psi(\eta) = \frac{\psi^*(\eta)}{(1+\eta)^{1/2-i\beta}(1-x)^{1/2+i\beta}} \qquad \left(\beta = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{\mu_1 + æ_1\mu_2}{\mu_2 + æ_2\mu_1};\ \mu_j = \frac{E_j}{2(1+\nu)};\ j = 1,2\right), \tag{1.10}$$

где $\psi^*(\eta)$ – непрерывная гладкая функция, ограниченная вплоть до концов интервала $[-1,1]$.

Подставляя значения функций $\psi(\eta)$ в (1.8), (1.9) и используя соотношения приведённые в [5], по стандартной процедуре, придём к системе алгебраических уравнений относительно значений $\psi^*(\xi_i)$ $(i = 1,....n)$. После определения $\psi^*(\xi_i)$ нетрудно восстановить функцию $\psi^*(\eta)$ $(-1 < \eta < 1)$ и определить все необходимые величины, характеризующие напряжённо-деформированное состояние в двухкомпонентной ячейке. В частности, комплексный коэффициент интенсивности в концевых точках трещины определяется при помощи формулы (1.4), которая при $|\eta| > 1$ в новых обозначениях можно записать в виде:

$$\sigma_y^{(j)}(a\eta,0) - i\tau_y^{(j)}(a\eta,0) = \frac{il_3}{\pi\Delta_*}\int_{-1}^{1}\frac{\psi(\xi)}{\xi-\eta}d\xi + \frac{l_1}{\Delta_*}\int_{-1}^{1}R_1^*(\eta-\xi)\psi(\xi)d\xi +$$
$$+\frac{l_1}{\Delta_*}\int_{-1}^{1}R_2^*(\eta-\xi)\psi(\xi)d\xi \qquad (|\eta| > 1;\ j = 1,2)$$

Подставляя значение $\psi(\eta)$ из (1.10) и используя соотношение [4]

$$\frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{(s-a)^{\gamma-1}(b-s)^{-\gamma}\,ds}{(s-x)} = \pm\frac{1}{\sin\pi\gamma(b-x)}\left|\frac{a-x}{b-x}\right|^{\gamma-1} \quad (x<a; x>b)$$

для комплексного коэффициента интенсивности напряжений в концевых точках трещины получим

$$K(\pm a) = K_I(\pm a) - iK_{II}(\pm a) =$$

$$= \frac{2\pi i}{ch\pi\beta}\lim_{x\to\pm a\pm 0}|x\mp a|^{1/2\pm i\beta}\left[\sigma_y^{(j)}(x,0) - i\tau_y^{(j)}(x,0)\right] = \pm\frac{(2a)^{1/2\pm i\beta}\pi l_3}{\Delta_* ch^2(\pi\beta)}\psi^*(\pm 1).$$

При помощи полученных значений коэффициентов интенсивности для исследования вопроса распространения трещины не трудно определить известные интегралы J по формулам [7]

$$J(\pm a) = \tilde{\mu}K(\pm a)\bar{K}(\pm a); \quad \tilde{\mu} = \frac{1}{2}\left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}\right).$$

Проведён численный анализ поставленной задачи и изучены закономерности изменения раскрытия трещины и приведённого интеграла $\tilde{J}(\pm a) = J(\pm a)/aE_2^2$ в концевых точках трещины в зависимости от физико-механических и геометрических параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова думка, 1976. 443с.
2. Барзокас Д.И., Фильштинский Л.А., Фильштинский М.Л. Актуальные проблемы связанных физических полей в деформируемых телах. Т.1. Москва-Ижевск: 2010. 864с.
3. Акопян В.Н. Смешанная задача для составной плоскости, ослабленной периодической системой трещин //Док.лады НАН Армении. 2002. Т.102. №1. С.29-34.
4. Даштоян Л.Л., Акопян Л.В. Плоско-деформированное состояние составной плоскости с периодической системой абсолютно жёстких тонких включений. //В сб.: «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред». Сентябрь 19-23, 2011, Горис-Степанакерт, С.172-176.
5. Саакян А.В. Метод дискретных особенностей в применении к решению сингулярных интегральных уравнений с неподвижной особенностью. // Изв. НАН Армении. Механика. 2000. Т.53. № 3. С.12-19.
6. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 738с.
7. Справочник по коэффициентам интенсивностей напряжений. Т.1. /Под редакцией Ю.Мураками. М.: Мир, 1990. 448 с.

Сведения об авторах:

Акопян Ваграм Наслетникович – доктор физ.-мат. наук, профессор, директор Института механики НАН РА, **тел.:** (37410) 52-48-90, **e-mail:** vhakobyan@sci.am

Даштоян Лилит Левоновна – кандидат физ.-мат. наук, учёный секретарь Института механики НАН Армении, **тел.:** (37410) 56-81-89, **e-mail:** Lilit_Dashtoyan@mechins.sci.am

УТОЧНЁННОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГОГО ПРОСТРАНСТВА С Т-ОБРАЗНОЙ ТРЕЩИНОЙ ПРИ АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Акопян Л.В., Саакян А.В.

Приводится уточнённое решение определяющих уравнений смешанной задачи для однородного упругого пространства, ослабленного двумя магистральными трещинами конечной ширины, одна из которых перпендикулярно выходит на середину второй трещины, противоположный берег которой усилен тонким жёстким включением.

Более детально исследовано поведение искомых функций в концах интервала интегрирования и при помощи метода механических квадратур проведён подробный численный анализ поставленной задачи.

Введение. Рассмотренная задача была поставлена и решена авторами ранее [1]. Однако, позже, было замечено упущение, связанное со способом сведения определяющих уравнений к интервалу $(-1,1)$, что необходимо для применения метода механических квадратур. Оказалось, что регулярные ядра преобразованной системы сингулярных интегральных уравнений имеют неподвижную особенность во внутренней точке интервала интегрирования, что невозможно учесть при замене интегралов квадратурными формулами, и, следовательно, использование метода механических квадратур в этом случае не совсем корректно. В настоящей работе это упущение устранено и получено корректное решение поставленной задачи.

Постановка задачи и система определяющих уравнений. Пусть однородное упругое пространство с модулем сдвига G, ослабленное Т-образной трещиной, занимающей область $\{-a<x<a;\ y=0\}$ и $\{x=0;\ 0<y<b\}$, деформируется под воздействием нагрузок $\tau_{xz}(\pm 0,y)=-q_0(y)$ и $\tau_{zy}(x,+0)=-\tau_0(x)\operatorname{sign} x$, приложенных соответственно к берегам вертикальной трещины и к верхнему берегу горизонтальной трещины. При этом будем считать, что нижний берег этой трещины является гранью тонкого жёсткого включения (рис.1.).

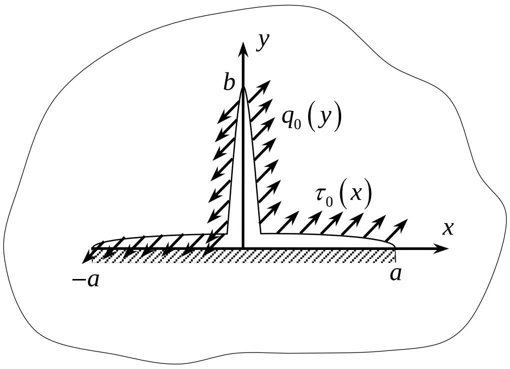


Рис. 1

В работе [1] была получена система определяющих уравнений задачи относительно скачка напряжений $\tau(r)$ и производных разности смещений берегов трещин $W'(r)$ и $U'(r)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\tau(r)}{2}-\dfrac{G}{\pi}\displaystyle\int_0^a \dfrac{rW'(r_0)}{r_0^2-r^2}dr_0-\dfrac{G}{\pi}\int_0^b \dfrac{rU'(r_0)}{r_0^2+r^2}dr_0=-\tau_0(r) & \\ & (0<r<a) \\ \dfrac{W'(r)}{2}-\dfrac{1}{\pi G}\displaystyle\int_0^a \dfrac{r_0\tau(r_0)}{r_0^2-r^2}dr_0-\dfrac{1}{\pi}\int_0^b \dfrac{r_0U'(r_0)}{r_0^2+r^2}dr_0=0 & \\ \dfrac{G}{\pi}\displaystyle\int_0^b \dfrac{U'(r_0)}{r_0-r}dr_0+\dfrac{G}{\pi}\int_0^a \dfrac{rW'(r_0)}{r_0^2+r^2}dr_0+\dfrac{1}{\pi}\int_0^a \dfrac{r_0\tau(r_0)}{r_0^2+r^2}dr_0=q_0(r) & (0<r<b) \end{cases} \tag{1}$$

При этом, искомые функции $W(r)$ и $U(r)$ должны удовлетворять условиям:

$$U(b)=0\ ;\qquad W(a)=0\ ;\qquad U(0)=W(0)$$

Поскольку функции $W(r)$ и $U(r)$ будут определяться уже после нахождения их производных из системы (1), то записав их в виде интегралов

$$W(r)=-\int_r^a W'(r_0)\,dr_0\ ;\qquad U(r)=-\int_r^b U'(r_0)\,dr_0$$

первые два из указанных условий будут удовлетворены автоматически, а третье условие примет вид:

$$\int_0^a W'(r_0)\,dr_0 = \int_0^b U'(r_0)\,dr_0 \tag{2}$$

Исследование системы определяющих уравнений и её решение. Чтобы решить систему интегральных уравнений (1) методом механических квадратур, необходимо свести уравнения к интервалу $(-1,1)$. В работе [1] функции $\tau(r)$ и $W(r)$ и первые два уравнения (1) были продолжены на интервал $(-a,0)$ соответственно нечётным и чётным образом и, далее, сведены к интервалу $(-1,1)$. В результате, особенность поведения искомых функций в точке пересечения трещин, в качестве неподвижной особенности, перекочевала в «регулярные» ядра системы сингулярных интегральных уравнений и, фактически, не была должным образом учтена.

Здесь же, переходя к новым переменным, сводящим интервалы $(0,a)$ и $(0,b)$ к интервалу $(-1,1)$, вводя новые, безразмерные, искомые функции $\varphi_j(x)\left(j=\overline{1,3}\right)$

$$\varphi_j(x)=\frac{1}{G}\tau\left(\frac{a}{2}(x+1)\right)-(-1)^j W'\left(\frac{a}{2}(x+1)\right);\quad (j=1,2)\qquad \varphi_3(x)=U'\left(\frac{b}{2}(x+1)\right);$$

и обозначения

$$f_1(x)=\frac{2}{G}\tau_0\left(\frac{a}{2}(x+1)\right);\qquad f_2(x)=\frac{1}{G}q_0\left(\frac{b}{2}(x+1)\right).$$

приходим к следующей системе сингулярных интегральных уравнений

$$\begin{gathered}
\pi\varphi_1(x)-\int_{-1}^{1}\left(\frac{\varphi_1(s)}{s-x}+\frac{\varphi_2(s)}{s+x+2}\right)ds-2\int_{-1}^{1}\frac{\lambda(x+1)+(s+1)}{\lambda^2(x+1)^2+(s+1)^2}\varphi_3(s)\,ds=\pi f_1(x)\\
\pi\varphi_2(x)+\int_{-1}^{1}\left(\frac{\varphi_2(s)}{s-x}+\frac{\varphi_1(s)}{s+x+2}\right)ds-2\int_{-1}^{1}\frac{\lambda(x+1)-(s+1)}{\lambda^2(x+1)^2+(s+1)^2}\varphi_3(s)\,ds=\pi f_1(x)\\
\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_3(s)}{s-x}ds+\frac{\lambda}{2}\int_{-1}^{1}\frac{\lambda(s+1)+x+1}{\lambda^2(s+1)^2+(x+1)^2}\varphi_1(s)\,ds+\frac{\lambda}{2}\int_{-1}^{1}\frac{\lambda(s+1)-x-1}{\lambda^2(s+1)^2+(x+1)^2}\varphi_2(s)\,ds=\pi f_2(x)
\end{gathered} \tag{3}$$

$(\lambda=a/b;\quad -1<x<1)$

Условие же (2), при помощи новых функций запишется в виде

$$\frac{\lambda}{2}\int_{-1}^{1}\left[\varphi_1(x)-\varphi_2(x)\right]dx=\int_{-1}^{1}\varphi_3(x)\,dx \tag{4}$$

Как нетрудно заметить из постановки задачи, все три неизвестные функции принимают конечные значения в конце $x=-1$ и неограничены на конце $x=1$. В связи с этим неизвестные системы (3) представим в виде:

$$\varphi_i(x)=(1-x)^{\alpha_i}\left[A_i+\varphi_i^*(x)(1+x)^{\beta_i}\right]\quad (-1<\alpha_i<0,\ 0<\beta_i\le 1)\quad (i=1,2,3) \tag{5}$$

где показатели α_i,β_i, постоянные A_i и непрерывные, ограниченные на отрезке $[-1,1]$, функции $\varphi_i^*(x)$ подлежат определению.

Для определения показателей α_i,β_i исследуем поведение системы у концов отрезка интегрирования. Для этого, исходя из представлений (5), воспользуемся известными результатами Н.И.Мусхелишвили [2] о поведении сингулярного интеграла у концов линии интегрирования и из условий равенства нулю коэффициентов при особенностях найдём эти показатели. Так, из поведения системы у конца $x=1$ без труда находим:

$$\operatorname{ctg}\pi\alpha_1 = 1 \to \alpha_1 = -\frac{3}{4}\ ;\quad \operatorname{ctg}\pi\alpha_2 = -1 \to \alpha_2 = -\frac{1}{4};\quad \operatorname{ctg}\pi\alpha_3 = 0 \to \alpha_3 = -\frac{1}{2} \tag{6}$$

Для исследования поведения у конца $x=-1$ уравнения системы (3) запишем в виде:

$$\pi\varphi_1(x) - \int_{-1}^{1}\left(\frac{\varphi_1(s)}{s-x} + \frac{\varphi_2(s)}{s+x+2}\right)ds - \int_{-1}^{1}\left[\frac{1+i}{s+1+i\lambda(x+1)} + \frac{1-i}{s+1-i\lambda(x+1)}\right]\varphi_3(s)\,ds = \pi f_1(x)$$

$$\pi\varphi_2(x) + \int_{-1}^{1}\left(\frac{\varphi_2(s)}{s-x} + \frac{\varphi_1(s)}{s+x+2}\right)ds + \int_{-1}^{1}\left[\frac{1-i}{s+1+i\lambda(x+1)} + \frac{1+i}{s+1-i\lambda(x+1)}\right]\varphi_3(s)\,ds = \pi f_1(x)$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_3(s)}{s-x}ds + \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1-i}{(s+1)-\frac{i}{\lambda}(x+1)} + \frac{1+i}{(s+1)+\frac{i}{\lambda}(x+1)}\right]\varphi_1(s)\,ds +$$

$$+\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1+i}{(s+1)-\frac{i}{\lambda}(x+1)} + \frac{1-i}{(s+1)+\frac{i}{\lambda}(x+1)}\right]\varphi_2(s)\,ds = \pi f_2(x)$$

Далее, заменив сингулярные интегралы их поведением у конца $x=-1$ и выписав отдельно слагаемые с характерной особенностью поведения: логарифмической, которая обусловлена постоянными A_i, и степенной $(1+x)^{\beta_i}$, приравняем их нулю, поскольку в правой части уравнения такие слагаемые отсутствуют. Из первой группы полученных уравнений будем иметь:

$$\begin{aligned} &A_1 + \sqrt{2}A_2 + 2\sqrt[4]{2}A_3 = 0 \\ &-A_1 - \sqrt{2}A_2 - 2\sqrt[4]{2}A_3 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A_1 = -\sqrt{2}A_2\ ; \qquad A_3 = 0 \\ &A_1 + \sqrt{2}A_2 - 2\sqrt[4]{2}A_3 = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Второй группой уравнений будет однородная система относительно значений $\varphi_i^*(-1)2^{\alpha_i}$ искомых функций в точке $x=-1$. Для того, чтобы эта однородная система имела ненулевые решения, необходимо положить $\beta_1=\beta_2=\beta_3=\beta$ и приравнять нулю главный детерминант. В результате получим уравнение относительно показателя β, откуда и найдём этот показатель

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi\beta}{2} = 0 \ \to\ \beta = 1 \tag{8}$$

Таким образом, с учётом (5)-(8), решение системы (3)-(4) будем искать в виде:

$$\begin{aligned} &\varphi_1(x) = -\sqrt{2}A(1-x)^{-\frac{3}{4}} + \varphi_1^*(x)(1-x)^{-\frac{3}{4}}(1+x); \\ &\varphi_2(x) = A(1-x)^{-\frac{1}{4}} + \varphi_2^*(x)(1-x)^{-\frac{1}{4}}(1+x); \\ &\varphi_3(x) = \varphi_3^*(x)(1-x)^{-\frac{1}{2}}(1+x); \end{aligned} \tag{9}$$

Коэффициенты концентрации разрушающих напряжений в концевых точках $r=a$ и $r=b$ определяются по формулам:

$$K_{III}^{(a)} = \sqrt{2\pi}\lim_{x\to 1+0}(x-1)^{3/4}\frac{\tau_{\varphi z}^{(2)}\left(\frac{a}{2}(x+1),0\right)}{G} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\sqrt{2}\varphi_1^*(1) - A\right]. \tag{10}$$

$$K_{III}^{(b)} = \sqrt{2\pi}\lim_{x\to 1+0}(x-1)^{1/2}\frac{1}{G}\tau_{\varphi z}^{(2)}\left(\frac{b(x+1)}{2},\frac{\pi}{2}\right) = -2\sqrt{2\pi}\varphi_3^*(1). \tag{11}$$

Перейдём к решению системы определяющих уравнений (3) - (4).

Подставляя представления (5) в (3)-(4) и используя квадратурные формулы [3], получим систему из трёх функциональных и одного линейного алгебраического уравнения относительно постоянной A и неизвестных коэффициентов $\varphi_j^*\left(\xi_i^{(\alpha_j,\beta)}\right)\left(j=\overline{1,3};i=\overline{1,n}\right)$. Согласно методу механических квадратур, правые и левые части функциональных уравнений следует приравнять в корнях обобщённых многочленов Якоби $P_{n-1/4}^{\left(\frac{3}{4},-1\right)}(x)$, $P_{n-3/4}^{\left(\frac{1}{4},-1\right)}(x)$ и функции $R_n^{\left(-\frac{1}{2},1\right)}(x)$, число корней которых, как нетрудно проверить, равно n. Следовательно, функциональные уравнения преобразуются в систему линейных алгебраических уравнений из $3n$ уравнений, которая вместе с алгебраическим уравнением составит замкнутую систему для определения $3n$ неизвестных коэффициентов $\varphi_j^*\left(\xi_i^{(\alpha_j,\beta)}\right)\left(j=\overline{1,3};i=\overline{1,n}\right)$ и постоянной A.

Как было указано выше, раскрытия трещин определяются интегралами, которые в безразмерных величинах имеют вид:

$$\frac{1}{b}W\left(\frac{a}{2}(x+1)\right)=-\frac{\lambda}{2}\int_x^1 W'\left(\frac{a}{2}(s+1)\right)ds=-\frac{\lambda}{4}\int_x^1\left(\varphi_1(s)-\varphi_2(s)\right)ds \quad (12)$$

$$\frac{1}{b}U\left(\frac{b}{2}(x+1)\right)=-\frac{1}{2}\int_x^1 U'\left(\frac{b}{2}(s+1)\right)ds=-\frac{1}{2}\int_x^1\varphi_3(s)ds \quad (13)$$

Подставляя в последние выражения представления (5) и используя для каждого из интегралов квадратурную формулу из [4], раскрытия трещин выразим через определённые из системы линейных алгебраических уравнений величины:

$$\frac{1}{b}W\left(\frac{a}{2}(x+1)\right)=\lambda A\left(\sqrt{2}(1-x)^{1/4}+\frac{1}{3}(1-x)^{3/4}\right)-\frac{\lambda}{4}\sum_{i=1}^{n}w_i^{(1)}\varphi_{1i}^*G_1(x)+\frac{\lambda}{4}\sum_{i=1}^{n}w_i^{(2)}\varphi_{2i}^*G_2(x)$$

$$\frac{1}{b}U\left(\frac{b}{2}(x+1)\right)=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}w_i^{(3)}\varphi_{3i}^*G_3(x) \quad (14)$$

Здесь $G_j(y)=\dfrac{B_{\frac{1-y}{2}}\left(\alpha_j+1,\beta_j+1\right)}{B\left(\beta_j+1,\alpha_j+1\right)}+(1-y)^{\alpha_j+1}(1+y)^{\beta_j+1}\sum_{m=1}^{n-1}\dfrac{P_m^{(\alpha_j,\beta_j)}\left(\xi_i^{(j)}\right)P_{m-1}^{(\alpha_j+1,\beta_j+1)}(y)}{2m\,h_m^{(\alpha_j,\beta_j)}}$

3.Численные расчёты

В случае, когда внешняя нагрузка приложена равномерно и только к берегам вертикальной трещины, т.е. имеем $\tau_0(r)=0$ и $q_0(r)=q_0=0.1G$, проведён численный анализ зависимости искомых величин от отношения λ полудлины шляпки Т-образной трещины к длине её ножки. При этом, для проведения сравнительного анализа, предусматривающего одинаковость внешней нагрузки, длину ножки b будем полагать неизменной и, следовательно, изменение отношения λ будет означать изменение полудлины шляпки Т-образной трещины a. В таблице 1.1.1 приведены значения коэффициентов интенсивности приведённых контактных напряжений в концевых точках горизонтальной трещины K_{III}^a и вертикальной трещины K_{III}^b для различных значений параметра λ.

Таблица 1.1.1

λ	0.5	0.75	1	3	6
K_{III}^a	-0.0375	-0.0288	-0.0213	-0.0035	-0.0009
K_{III}^b	0.053	0.125	0.173	0.2656	0.2696

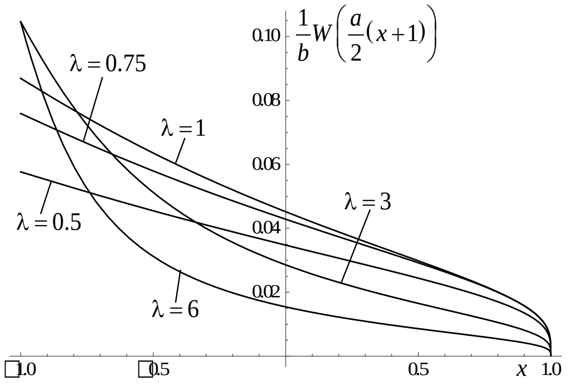


Рис.2. Раскрытие горизонтальной трещины

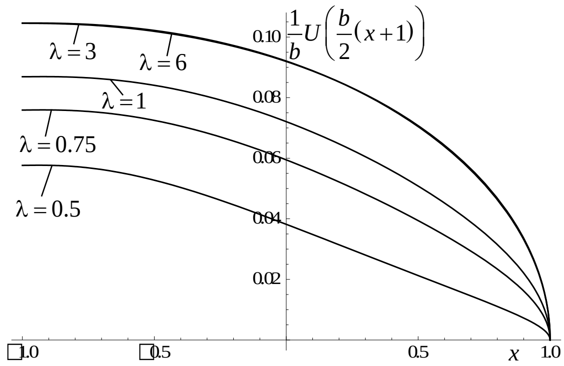


Рис.3. Раскрытие вертикальной трещины

На рис. 2 и 3 представлены графики, показывающие форму верхнего берега горизонтальной и правого берега вертикальной трещины при различных значениях λ.

Построены также графики распределения тангенциальных контактных напряжений под включением, однако, они не приводятся ввиду ограниченности объёма статьи.

Легко заметить, что все приведённые данные наглядно подтверждают априори ожидаемые результаты в случае достаточно длинной шляпки. Действительно, при достаточно длинной шляпке напряжённо-деформированное состояние вокруг вертикальной трещины должно совпасть с таковым упругой полуплоскости с краевой, перпендикулярной к границе, трещиной, берега которой нагружены так же, как и в рассматриваемой задаче. Как наглядно замечаем из рис.3, это происходит уже при $\lambda > 3$, поскольку раскрытие вертикальной трещины при $\lambda = 6$ практически совпадает с раскрытием трещины при $\lambda = 3$. Такое же заключение можно сделать и из рис.2. Здесь, графики не совпадают, что и невозможно в силу сведения различных длин горизонтальной трещины к отрезку $[-1,1]$, но совпадают значения в точке $x = -1$, что означает одинаковое перемещение свободного конца Т-образной трещины при разных длинах шляпки. Как видно из третьей строчки таблицы, коэффициент $K_{III}^{(b)}$ интенсивности тангенциальных напряжений в конце $y = b$ стабилизируется, что также указывает на снижение влияния включения. Резкое же снижение коэффициента концентрации $K_{III}^{(a)}$ (вторая строчка таблицы) указывает на снижение воздействия внешней нагрузки, заданной лишь на берегах вертикальной трещины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Саакян А.В., Акопян Л.В., Даштоян Л.Л. Об одной смешанной задаче для упругого пространства с Т-образной трещиной при антиплоской деформации. //Труды межд. конф. «Актуальные проблемы механики сплошной среды», Цахкадзор, Армения, 2007, с.351-354.
2. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения.М.: Наука, 1968. 511с.
3. Sahakyan A.V. Method of discrete singularities for solution of singular integral and integro-differential equations. Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute, Georgia, Vol. 156 (2011), pp.101-111
4. Саакян А.В. Квадратурные формулы для вычисления интеграла с переменным верхним пределом. //Труды II межд. конф. «Актуальные проблемы механики сплошной среды», Дилижан, Армения, 4-8 октября 2010, с.107-111.

Сведения об авторах

Саакян Аветик Вараздатович - д.ф.м.н., зам. директора Института механики НАН РА
Тел.: (+37410) 56-81-88, **E-mail:** avsah@mechins.sci.am, avsahakyan@gmail.com
Акопян Лусине Ваграмовна - младший научный сотрудник Института механики НАН РА

О ПРОИСХОЖДЕНИИ АЛМАЗНЫХ ТРУБОК

Александрова О.В., Бородина С.И., Гендугов В.М., Сагомонян Е.А.

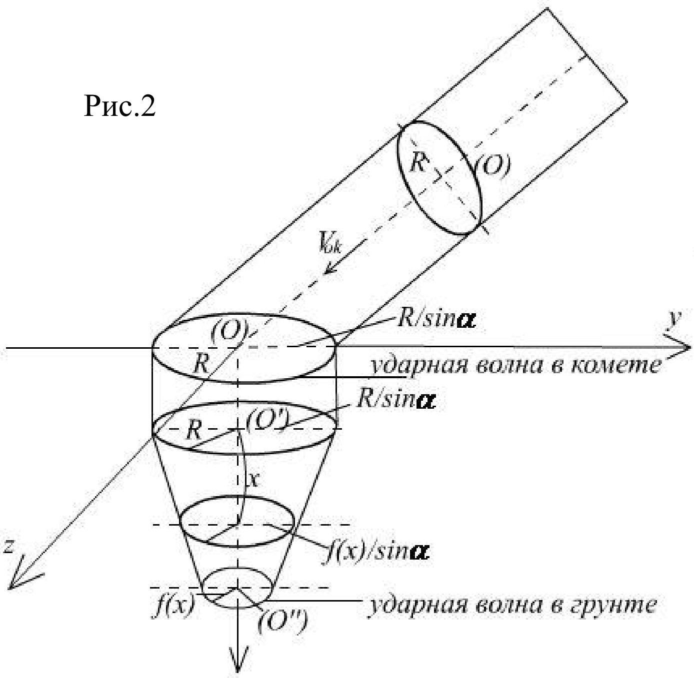
В статье рассматривается процесс формирования кимберлитовых трубок от удара кометы о Землю под некоторым углом к горизонту. Ударно-волновая картина позволяет получить зависимость геометрии трубы от начальных условий.

Алмаз – уникальный минерал с непревзойдённой твёрдостью. Мировое потребление этого минерала удовлетворяется лишь на 60%, что стимулирует поиски новых его месторождений. Известно, что основные месторождения алмазов приурочены к кимберлитовым трубкам – горным образованиям, заполненными породой (кимберлитом), подвергшейся метаморфизму, но не отличающейся по химическому составу от окружающей среды. Плотность кимберлита в 1,2-1,3 больше плотности окружающей горной породы. Следует отметить, что к настоящему времени найдено тысячи трубок, из которых лишь доли процентов алмазоносные. При этом трубка считается богатой, если на сто тонн кимберлита приходится 4 грамма алмазов.

Обычно трубка представляет собой коническую поверхность круглого или эллиптического сечения. При $t > 0$ в грунте распространяется ударная волна, площадь которой сокращается из-за боковой волны разгрузки. Анализ геометрии реальных трубок свидетельствует о том, что геометрия любого её сечения остаётся подобной геометрии основания. Исходя из этого, предполагается, что по мере продвижения скачка в грунт его поверхность остаётся плоской в форме эллипса с образующей

$$z = F(x, y) = \sqrt{1 - y^2 \sin^2 \alpha}\, f(x),\ 0 \le f(x) \le R \qquad (1)$$

Рис.2



Эта кривая описывает поверхность усечённого конуса, в сечении которого – эллипс.

Большая скорость встречи тел даёт основание считать, что грунт сжимается до предельной плотности, а материалы кометы и грунта между ударными волнами ведут себя как жёсткое тело. На рис.2 приведена схема формирования трубки. При ударе кометы о Землю в последней формируется жёсткое тело, состоящее из цилиндра эллиптического сечения $00'$ (это ударно-сжатый материал кометы) и собственно, кимберлитовой трубки между сечениями $0'$ и 0.

В таких приближениях модель образования кимберлитовой трубки сводится к задаче определения формы тела в жёсткопластической преграде (Земле) под передним срезом жёсткопластического цилиндра с эллиптическим сечением (кометы) при её ударе о преграду.

Выберем начало лагранжевой координаты x на поверхности контакта и направим ось по направлению к центру Земли, перпендикулярно к её поверхности. Выпишем уравнения движения тела между ударными волнами

$$\left(\rho_{0k}V_{0k}t + \rho_{03}\int_0^t Ddt\right)\frac{d\vec{v}}{dt} = F_0 - F_{0''} - F_\delta \tag{2}$$

Здесь ρ_{0k}, ρ_{03} – плотность материала ядра кометы и горной породы до прихода ударной волны, t – время формирования трубки, D – скорость ударной волны в горной породе, F_0 – сила на ударной волне в комете со стороны трубки, $F_{0''}$ – сила на ударной волне в Земле в сечении $0''$, F_δ – сила, действующая по нормали со стороны боковой поверхности между сечениями $0'$, $0''$.

Заметим, что благодаря действию силы со стороны внедряющейся с большой скоростью кометы, допускается режим формирования кимберлитовой трубки, движущейся с постоянной скоростью. Как видно из (2), это режим формирования трубки, когда сумма сил, действующих на жёсткое тело, равна нулю, т.е.

$$F_0 - F_{0''} - F_\delta = 0 \tag{3}$$

Скорость внедрения кометы в Землю определяется из условия, что в момент удара площади сечения ударных волн в комету и Землю равны, как равны давления и скорости.

Запишем соотношения на ударной волне в комете:

$$\rho_{0k}V_{0k}\sin\alpha = \rho_k V_k \tag{4}$$

$$P_k - P_{0k} = \rho_{0k}V_{0k}\sin\alpha\left(V_{0k}\sin\alpha - V_k\right) \tag{5}$$

и соотношения на ударной волне в Земле

$$\rho_{03}D = \rho_3\left(D - V_3\right) \tag{6}$$

$$P_3 - P_{03} = D\left(D - V_3\right) \tag{7}$$

В момент образования волн имеют место соотношения:

$$V_k = V_3 = V\ ;\ P_k = P_3 = P\ ;\ \frac{\rho_3}{\rho_{03}} = b > 1;\ b = \text{const}\,.$$

Будем считать, что $P_{0k} << P_k$ и $P_{0з} << P_з$. Тогда из (6) следует $\left(1-\frac{1}{b}\right)D = V$, а из (7) имеем следующее выражение для давления на ударной волне в Земле:

$$P_з = P = \rho_{0з}\frac{V}{1-\frac{1}{b}}\left(\frac{V}{1-\frac{1}{b}} - V\right) = \rho_{0з}b\left(\frac{V}{b-1}\right)^2 \tag{8}$$

Подставив последнее равенство в (5), получим:

$$\frac{\rho_{0з}b}{(b-1)^2}V^2 = \rho_{0k}\left(V_{0k}\sin\alpha\right)^2 - \left(\rho_{0k}V_{0k}\sin\alpha\right)V \tag{9}$$

Решая это квадратное уравнение, получим выражение, определяющее скорость внедрения кометы в Землю:

$$V = \frac{(b-1)^2}{2\rho_{0з}b}\left(-\rho_{0k}V_{0k}\sin\alpha + \sqrt{\left(\rho_{0k}V_{0k}\sin\alpha\right)^2 + \frac{4\rho_{0з}b}{(b-1)^2}\rho_{0k}\left(V_{0k}\sin\alpha\right)^2}\right) \tag{10}$$

Согласно исследованиям А.Я. Сагомоняна [6], сумма проекций нормальных и касательных сил в грунте на направление движения, действующих на элементарную площадку ds, выражается формулой:

$$F_\delta = \iint_\Sigma P_\delta \frac{\left(f' + \mu_0\right)}{\sqrt{1+\left(f'\right)^2}}ds, \quad ds = 4\int_0^x f\left(x\right)dx\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\sin^2 t\cdot \mathrm{ctg}^2\alpha}\,dt \tag{11}$$

μ_0 – коэффициент трения, боковое давление P_δ в зависимости от свойств земной породы определяется формулами:

для идеального связного грунта

$$P_\delta = \frac{\rho_{0з}b}{2}\ln\frac{b}{b-1}ff'\frac{dV}{dt} + \frac{V^2\rho_{0з}b}{2}\left(\ln\frac{b}{b-1}\left(ff'' + \left(f'\right)^2\right) + \frac{\left(f'\right)^2}{b}\right) + \frac{\tau_0}{2}\ln\frac{b}{b-1} \tag{12}$$

и для произвольного грунта

$$P_\delta = \frac{\rho_{0з}b}{\nu}\left(a^{\frac{\nu}{2}} - 1\right)\frac{dV}{dt}ff' - \frac{V^2\rho_{0з}b}{\nu-2}\left(\left(a^{\frac{\nu}{2}-1} - 1 - \frac{1}{b}(\nu-2)a^{\frac{\nu}{2}} - \frac{\nu-2}{\nu}\left(a^{\frac{\nu}{2}} - 1\right)\right)\left(f'\right)^2 - \frac{\nu-2}{\nu}\left(a^{\frac{\nu}{2}} - 1\right)ff''\right) +$$

$$+\frac{\tau_0}{\nu(1+\mu)}\left(a^{\frac{\nu}{2}} - 1\right) + P_{0з}\left(a^{\frac{\nu}{2}} + 1\right).$$

Здесь $a = \frac{b}{b-1}$, τ_0, μ, $\nu = \frac{2\mu}{1+\mu}$ связаны с коэффициентом сцепления k и углом внутреннего трения θ соотношениями: $\tau_0 = 2k\cos\theta$, $\mu = \sin\theta$.

На рис.3 представлены различные формы кимберлитовых трубок при скорости удара $V_{0k} = 10000\, ^{м}/_{c}$ и разных начальных данных для значений углового коэффициента γ: γ_1, γ_2, γ_3.

При γ_1, удовлетворяющим последнему уравнению, кимберлитовая трубка представляет собой конус с вершиной O на оси симметрии. При этом установлено, что γ растёт вместе со скоростью удара V_{0k}.

В том случае, когда $\gamma = \gamma_2 > \gamma_1$, кимберлитовая трубка представляет собой фигуру, выпуклую по отношению к конусу. При этом, вершиной тела является линия $00'$, которая лежит в плоскости симметрии.

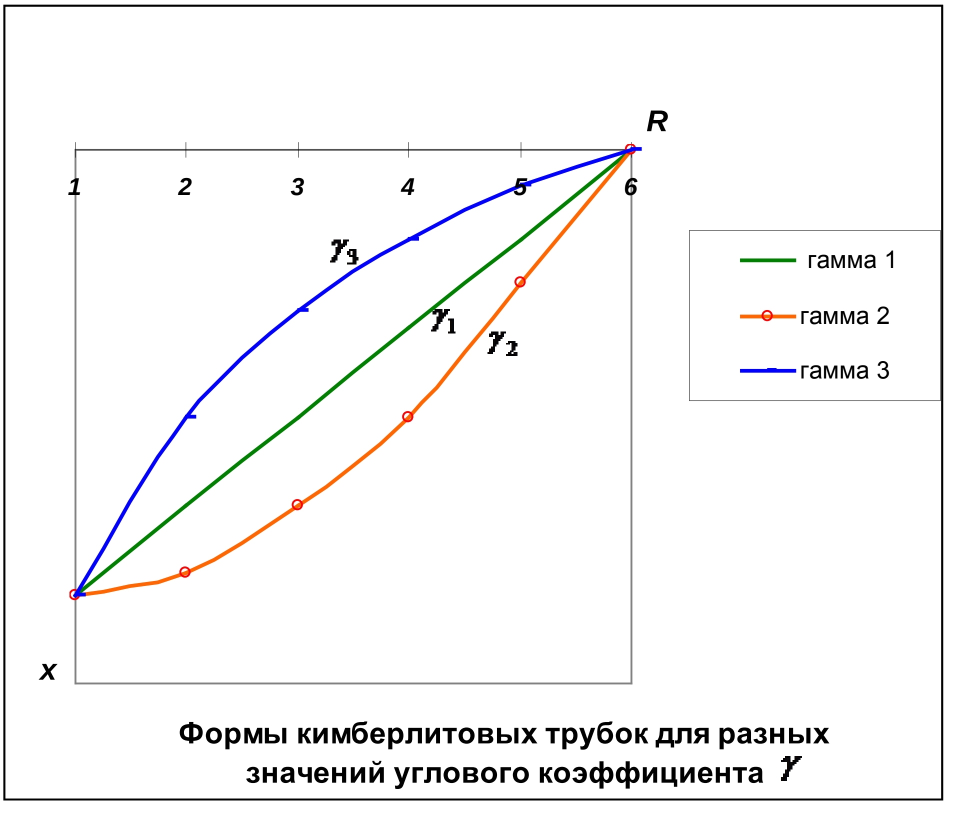


Рис. 4

Если $\gamma = \gamma_3 < \gamma_1$, то кимберлитовая трубка есть тело с вогнутой образующей. Причём, вершиной её является линия $00'$.

Заключение

В рамках космической концепции образование кимберлитовой трубки, а именно, формирование тела в период взаимодействия ядра кометы с Землей, построена ударно-волновая схема образования трубки, которая позволила определить геометрию тела в зависимости от начальных условий. Обнаружена зависимость угла при вершине конуса от скорости встречи кометы и Земли.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев В.Г., Ковальский В.В., Черский Н.В. Происхождение алмазов. М.: Недра, 1968.
2. Шемякин Е.И. О происхождении алмазных трубок (физико-механическая гипотеза) // Вестник Моск. ун-та, сер.1., Математ., Механ., 1995. №2. С.70-79.
3. Nininger H. Arisona`s meteorite crater:Its past, presentand future. Denver, Colorado:World Press, 1956 Inc. 232 p.
4. Kieffer S. and Simonds C. The role of volatiles and lithology in the impact cratering process //Rev. of Geophys. and Space Phys. 1980. Vol.18. №1, p. 143-181.
5. Masaitis V. The origin and distribution of diamond-bearing impactities // Meteoritics. 1995. Vol.30. №5. 541p.
6. Сагомонян А.Я. Проникание. М.: Изд. Моск. ун-та, 1974.

Сведения об авторах:

Александрова Ольга Владимировна - к.ф.м.н., доц., Московский государственный университет им.М.В.Ломоносова

Гендугов Владимир Михайлович - к.ф.м.н., в.н.с., Московский государственный университет им.М.В.Ломоносова

Сагомонян Елена Артуровна - к.ф.м.н., доц., Московский государственный университет им.М.В.Ломоносова

Бородина Светлана Ивановна - к.ф.м.н., Университет машиностроения
Тел. моб: 8(916)9804201. **тел. дом.:** 8(499)4080074
E-mail: borodina.sv@mail.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ИЗГИБАЕМОЙ ПЛАСТИНКИ В ОКРЕСТНОСТИ КРАЯ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ СВОБОДНОГО КРАЯ И СТЕСНЁННО-СВОБОДНОГО КРАЯ

Антонян С.С., Василян Н.Г.

В статье исследовано напряжённо-деформированное состояние изгибаемой пластинки в окрестности закреплённого края. Исследованы разные виды закрепления: свободный край и стеснённо-свободный край. Применён подход Надаи [1,8]. По теории С.А. Амбарцумяна, учитывающей поперечные сдвиговые деформации, получаются разные граничные условия, что и позволяет выявить различие.

1. Рассматривается пластинка-полоска с постоянной толщиной *2h*, которая в прямоугольной декартовой системе координат занимает область $0 \le x < \infty$, $0 \le y \le b$, $-h \le z \le h.$ На пластинку действует распределённая нагрузка интенсивностью $q(y)$. Согласно теории С.А. Амбарцумяна, уравнения задачи изгиба пластинки с учётом поперечных сдвигов имеют вид [3,7]:

$$\frac{4h}{3}\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial x}+\frac{\partial\phi_2}{\partial y}\right)+q(y)=0,$$

$$D\frac{\partial}{\partial x}\Delta w-\frac{8h^3}{15}\left[\Delta\phi_1+\theta\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial x}+\frac{\partial\phi_2}{\partial y}\right)\right]+\frac{4h}{3}\phi_1=0, \tag{1.1}$$

$$D\frac{\partial}{\partial y}\Delta w-\frac{8h^3}{15}\left[\Delta\phi_2+\theta\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial x}+\frac{\partial\phi_2}{\partial y}\right)\right]+\frac{4h}{3}\phi_2=0.$$

где w – функция прогиба, ϕ_1,ϕ_2 – функции, определяющие перерезывающие усилия,

$$D=\frac{2Eh^3}{3\left(1-\nu^2\right)},\quad \theta=\frac{1+\nu}{1-\nu} \tag{1.2}$$

E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона.

Применяя подход Надаи, где предполагается, что края пластинки $y=0,b$ шарнирно закреплены, решение системы уравнений (1.1) представим следующим образом:

$$w=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\sin\lambda_n y,\ \phi_1=\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n(x)\sin\lambda_n y,\ \phi_2=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(x)\cos\lambda_n y \tag{1.3}$$

где

$$\lambda_n=\frac{\pi n}{b}. \tag{*}$$

Потребуем, чтобы решения (1.3) при удалении от кромки $x=0$ стремились к решению задачи цилиндрического изгиба, решение которого представляется в виде тригонометрических рядов и имеет вид:

$$w_{0n}=\frac{q_n}{D\lambda_n^4}\left[1+\frac{4h^2\lambda_n^2}{5(1-\nu)}\right],\ \phi_{1n}=0,\ \phi_{2n}=\frac{3q_n}{4h\lambda_n},$$

и получим

$$\lim_{x\to\infty}f_n(x)=\frac{q_n}{D\lambda_n^4}\left[1+\frac{4h^2\lambda_n^2}{5(1-\nu)}\right],\ \lim_{x\to\infty}\Phi_n(x)=0,\ \lim_{x\to\infty}F_n(x)=\frac{3q_n}{4h\lambda_n}, \tag{1.4}$$

где q_n являются коэффициентами ряда Фурье

$$q(y)=\sum_{n=1}^{\infty}q_n\sin\lambda_n y. \tag{1.5}$$

С подстановкой (1.3) в уравнения (1.1), решения задачи приводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, где искомые функции $f_n(x), \Phi_n(x), F_n(x)$ при удовлетворении (1.4) будут иметь вид:

$$f_n = A_n e^{-\lambda_n x} + B_n x e^{-\lambda_n x} + \frac{q_n}{D\lambda_n^4}\left(1+\zeta_n\right),$$

$$\Phi_n = D_n e^{-\eta_n x} - \frac{5E}{4\left(1+\nu\right)}\zeta_n B_n e^{-\lambda_n x}, \tag{1.6}$$

$$F_n = -\frac{\eta_n}{\lambda_n} D_n e^{-\eta_n x} + \frac{5E}{4\left(1+\nu\right)}\zeta_n B_n e^{-\lambda_n x} + \frac{3q_n}{4h\lambda_n}.$$

В (1.6) приняты следующие обозначения:

$$\zeta_n = \frac{4\lambda_n^2 h^2}{5(1-\nu)}, \quad \eta_n = h^{-1}\sqrt{2.5+\lambda_n^2 h^2}. \tag{1.7}$$

Произвольные постоянные A_n, B_n и D_n определяются из граничных условий на кромке $x=0$.

2. Рассматриваются два случая закрепления края $x=0$:

a. Стеснённо-свободный край –

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{4}{5G}\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial x} + \nu\frac{\partial\phi_2}{\partial y}\right) = 0, \quad \left(\sigma_{11}=0\right);$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{4}{5G}\phi_2 = 0, \ \left(u_2=0\right); \quad \phi_1 = 0, \ \left(\sigma_{13}=0\right). \tag{2.1}$$

b. Свободный край –

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{4}{5G}\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial x} + \nu\frac{\partial\phi_2}{\partial y}\right) = 0, \quad \left(\sigma_{11}=0\right);$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x dy} - \frac{2}{5G}\frac{\partial\phi_2}{\partial x} = 0, \ \left(\sigma_{12}=0\right); \quad \phi_1 = 0, \ \left(\sigma_{13}=0\right). \tag{2.2}$$

Найдём решения для обоих вариантов.

a. Подставляя (1.3) в (2.1), получим граничные условия в виде

$$f_n'' - \nu\lambda_n^2 f_n - \frac{4}{5G}\left(\Phi_n' - \nu\lambda_n F_n\right) = 0, \quad \lambda_n f_n - \frac{4}{5G}F_n = 0, \quad \Phi_n = 0. \tag{2.3}$$

Подстановкой (1.6) в (2.1) получим три линейных уравнения от неизвестных постоянных A_n, B_n и D_n:

$$A_n = -\frac{q_n}{D\lambda_n^5}\left[\lambda_n\left(1+\zeta_n\right) - \eta_n\zeta_n\right], \ D_n = -\frac{3q_n}{4\lambda_n h}, \ B_n = -\frac{q_n}{2D\lambda_n^3}. \tag{2.4}$$

Подставляя (2.4) в (1.6), находим неизвестные функции:

$$f_n\left(x\right) = -\frac{q_n}{D\lambda_n^5}\left[\left(\lambda_n\left(1+\zeta_n\right) - \eta_n\zeta_n\right)e^{-\lambda_n x} + \frac{1}{2}\lambda_n^2 x e^{-\lambda_n x} - \lambda_n\left(1+\zeta_n\right)\right],$$

$$\Phi_n\left(x\right) = \frac{3q_n}{4\lambda_n h}\left[-e^{-\eta_n x} + e^{-\lambda_n x}\right], \quad F_n\left(x\right) = \frac{3q_n}{4\lambda_n h}\left[\frac{\eta_n}{\lambda_n}e^{-\eta_n x} - e^{-\lambda_n x} + 1\right] \tag{2.5}$$

b. Подставляя (1.3) в (2.2), получим граничные условия в виде:

$$f_n'' - \nu\lambda_n^2 f_n - \frac{4}{5G}\left(\Phi_n' - \nu\lambda_n F_n\right) = 0, \quad \lambda_n f_n' - \frac{2}{5G}F_n' = 0, \quad \Phi_n = 0. \tag{2.6}$$

и находим неизвестные коэффициенты:

$$A_n = \frac{q_n \nu \beta_n}{D\lambda_n^4}\left[\eta_n^2\zeta_n - \lambda_n^2\left(1+\zeta_n\right)\right],\quad B_n = \frac{q_n \nu \beta_n}{D\lambda_n},\quad D_n = \frac{3q_n \nu \beta_n \lambda_n}{2h} \tag{2.7}$$

где

$$\beta_n = \left[\left(1-\nu\right)\eta_n^2\zeta_n - \lambda_n^2\left(3-\nu\right) - 3\lambda_n^2\zeta_n\left(1-\nu\right) + 2\zeta_n\eta_n\lambda_n\left(1-\nu\right)\right]^{-1} \tag{2.8}$$

Неизвестные функции будут иметь вид:

$$\begin{gathered} f_n\left(x\right) = \frac{q_n}{D\lambda_n^4}\left[1+\zeta_n + \left(-\lambda_n^2\left(1+\zeta_n\right) + \eta_n^2\zeta_n\right)\nu\beta_n e^{-\lambda_n x} + \nu\beta_n\lambda_n^3 x e^{-\lambda_n x}\right], \\ \Phi_n\left(x\right) = \frac{3\nu\beta_n q_n \lambda_n}{2h}\left[e^{-\eta_n x} - e^{-\lambda_n x}\right], \\ F_n\left(x\right) = \frac{3q_n}{4\lambda_n h}\left[1 + 2\nu\beta_n\lambda_n\left(\lambda_n e^{-\lambda_n x} - \eta_n e^{-\eta_n x}\right)\right] \end{gathered} \tag{2.9}$$

Для каждого граничного условия − стеснённый свободный край и свободный край – найдены неизвестные функции $f_n\left(x\right),\ \Phi_n\left(x\right),\ F_n\left(x\right)$ (2.5) и (2.9), соответственно. Подставляя эти выражения в (1.3), получим выражения для $w\left(x,y\right),\ \phi_1\left(x,y\right),\ \phi_2\left(x,y\right)$.

Рассмотрим случай задания нагрузки в виде $q_n = q_0 \sin\lambda_1 y$:

a. $$w\left(x,y\right) = -\frac{q_0}{D\lambda_1^5}\left[\left(\lambda_1\left(1+\zeta_1\right) - \eta_1\zeta_1\right)e^{-\lambda_1 x} + \frac{1}{2}\lambda_1^2 x e^{-\lambda_1 x} - \lambda_1\left(1+\zeta_1\right)\right]\sin\lambda_1 y,$$

b. $$w\left(x,y\right) = \frac{q_0}{D\lambda_1^4}\left[1+\zeta_1 + \left(-\lambda_1^2\left(1+\zeta_1\right) + \eta_1^2\zeta_1\right)\nu\beta_1 e^{-\lambda_1 x} + \nu\beta_1\lambda_1^3 x e^{-\lambda_1 x}\right]\sin\lambda_1 y. \tag{2.10}$$

В точке (0,0.5b):

a. $$w\left(0,0.5b\right) = \frac{q_0}{D\lambda_1^4}\frac{\eta_1\zeta_1}{\lambda_1},$$

b. $$w\left(0,0.5b\right) = \frac{q_0}{D\lambda_1^4}\left[1+\zeta_1 + \left(-\lambda_1^2\left(1+\zeta_1\right) + \eta_1^2\zeta_1\right)\nu\beta_1\right]. \tag{2.11}$$

По теории Кирхгофа, в случае задания нагрузки $q_n = q_0 \sin\lambda_1 y$ имеем:

$$w\left(x,y\right) = \frac{q_0}{D\lambda_1^4}\left[\frac{\left(1+\nu\right)\nu}{\left(3+\nu\right)\left(1-\nu\right)}e^{-\lambda_1 x} - \frac{\nu}{\left(3+\nu\right)}\lambda_1 x e^{-\lambda_1 x} + 1\right]\sin\lambda_1 y\,.$$

Подставляя в (2.11) (1.7),(*) и (2.8), и вводя обозначение $\gamma = h/b$, для безразмерного прогиба в центре пластины, в зависимости от γ, получим:

a. $$\frac{w\left(0,0.5b\right)}{2h} = q^*\frac{\sqrt{2.5+\pi^2\gamma^2}}{\gamma^3},$$

b. $$\frac{w\left(0,0.5b\right)}{2h} = q^*\frac{1}{\gamma^4}\left\{1 + \frac{4\pi^2\gamma^2}{5\left(1-\nu\right)} + \frac{\left(1+\nu\right)\nu}{\left(1-\nu\right)}\left[1-\nu+1.6\pi\gamma\left(\pi\gamma - \sqrt{2.5+\pi^2\gamma^2}\right)\right]^{-1}\right\},$$

где $q^* = \dfrac{3q_0\left(1+\nu\right)}{5E\pi^3}$.

По теории Кирхгофа

$$\frac{w\left(0,0.5b\right)}{2h} = q^*\frac{1}{\gamma^4}\frac{5\left(1-\nu\right)\left(3-\nu\right)}{4\pi\left(3+\nu\right)}\,.$$

При $q_0 = 10^6$, $E = 2\times10^6$, $\nu = 0.3$ получены значения прогиба по уточнённой теории и по теории Кирхгофа, что и приведены в табл.1

Таблица 1

γ	1/5	1/10
w_a	2.6438	20.027
w_b	2.4213	26.063
w_k	1.7687	28.3

По теории Кирхгофа, эти два условия закрепления края приводятся к одному условию закрепления края, а по уточненной теории они разные. Из таблицы видно, что для тонких пластин условия закрепления дают большое отличие. Решение по теории Кирхгофа ближе к результатам, полученным при свободном закреплении.

Таким образом, при учёте поперечных сдвигов, т.е. по уточнённой теории получается существенное отличие в двух граничных условиях: свободный и стеснённо-свободный край.

ЛИТЕРАТУРА

1. Costanda C. A mathematical analysis of bending of plates with transverse shear deformation. Longman Scientific Technical. 19920,170p.
2. Karama M., Afag K.S., Mistou S. A refinement of Ambartsumian multi-layer beam theory. Computers&Structures. 2008. №86. Pp. 839-849.
3. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360с.
4. Антонян С.С., Василян Н.Г. Исследование напряжённо-деформированного состояния изгибаемой пластинки в окрестности края пластинки граничным условием скользящего контакта. /Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред //Труды VII международной конференции, сентябрь 19-23, Горис-Степанакерт, Ереван 2011, С.44-48.
5. Антонян С.С., Василян Н.Г. Исследование напряжённо-деформированного состояния изгибаемой пластинки в окрестности шарнирно-закреплённого края. "Young Scientists School-Conference" MECHANICS-2013. С.247-251.
6. Баблоян А.А., Токмаджян В.О. Смешанная задача изгиба пластины с учётом поперечных сдвигов. //Изв. НАН Армении. Механика. 2008. Т.61. №4. С.44-51.
7. Белубекян М.В. Об уравнениях теории пластин, учитывающих поперечные сдвиги. //В сб.: «Проблемы механики тонких деформируемых тел» Ереван: НАН Армении. 2002. С.67-88.
8. Nadai A., Elastische Platten, Берлин, 1925. 72 с.
9. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Изд. Физматлит, 1963. 636с.

Сведения об авторах:

Антонян Саят Сержикович – аспирант, Институт механики НАН Армении,
Тел.: (+374 99) 339299, (+374 10)624802
E-mail: sayatantonyan@rambler.ru

Василян Нарине Гургеновна – к.ф.-м.н., научн. сотр. Института механики НАН Армении **Тел.:** **(**+374 91) 707939
E-mail: narine@mechins.sci.am

АНАЛИЗ ЯВЛЕНИЯ ДЕФОРМАЦИОННОГО УПРОЧНЕНИЯ МОНОКРИСТАЛЛОВ

Аракелян М.М.

Рассматривается движение дислокации в алюминии при комнатной температуре с учетом рельефа Пайерлса.Численным экспериментом показано, что длина свободного пробега дислокации зависит от частоты внешнего упругого поля. Из-за динамических потерь происходит упрочнение кристалла. Внешнее переменное упругое поле резонансной частоты уменьшает градиент роста кривой упрочнения и, следовательно, предел текучести.

1.Введение. Общеизвестно, что холодная пластическая деформация приводит к значительному взаимозависимому изменению формы, размеров и физико-химических и механических свойств деформируемых металлов и сплавов.Совокупность явлений, связанных с изменением указанных свойств, называется деформационным упрочнением. Однако до настоящего времени физическая природа упрочнения полностью не выяснена. При описании явления упрочнения зависимость напряжения от деформации аппроксимируют некоторой степенной функцией вида $\sigma = K\varepsilon^n$, где $K, n,$ являясь параметрами упрочнения, определяются на основе экспериментальных исследований данного материала на линейное растяжение, σ – напряжение сопротивления деформированию [1].

С микроскопической точки зрения, пластическая деформация является результатом движения линейных дефектов – дислокаций. В настоящее время техника и точность эксперимента дали возможность наблюдать движение отдельных дислокаций в кристалле, что позволило более точно объяснить механизм движения дислокаций [2].В алюминии при малых плотностях (10^2–10^3см$^{-2}$), дислокации наблюдаются в виде прямых линий вдоль кристаллографических направлений с малыми индексами, указывая на влияние барьера Пайерлса [3].

Экспериментальные исследования с приложением ультразвука показали, что предел текучести материала и градиент роста кривой деформационного упрочнения значительно уменьшаются. При пропускании высокочастотного ультразвука также наблюдается внутреннее трение, не зависящее от амплитуды [4].

2.Теория. В настоящей работе рассмотрено движение дислокаций в алюминии с учётом рельефа Пайерлса. Из-за наличия рельефа Пайерлса при перемещении дислокации в кристалле её конфигурация и упругая энергия испытывают периодические изменения, при этом возникают динамические потери, т.к. периодические изменения конфигурации дислокации и неравномерность её движения приводят к излучению дислокацией упругих волн, т.е. к внутреннему трению.

Для описания дислокации нами использована одномерная модель Френкеля-Конторовой.

Принимается термоактивационный механизм движения дислокаций. В [5] экспериментально исследована динамика индивидуальных дислокаций в монокристаллах кремния при нагружении периодическими импульсными нагрузками, соизмеримыми с временем перехода дислокации в соседнюю долину. В алюминии потенциальный барьер Пайерлса – порядка $4*10^{-15}$эрг [6]. При частоте $\infty \sim 10^{12}$ Гц длительность импульса напряжения сопоставима с временем перехода дислокации в соседнюю долину.

Для описания механизмов внутреннего трения и упрочнения нами получен неоднородный синус-уравнение Гордона с трением и периодическим внешним упругим напряжением $\sigma(t) = \sigma_0 e^{i\infty t}$, где σ_0 – амплитуда внешнего воздействия, ∞ – частота. Пусть ось x направлена вдоль равновесного положения прямолинейной дислокации. Тогда уравнение для смещения атомов от положения равновесия будет иметь вид:

$$m\ddot{y}_n = f_0 \sin\frac{2\pi y_n}{a} + k\left(y_{n+1} - y_n\right) - k\left(y_n - y_{n-1}\right) + F_{Tp.} + F_0 \sin\left[\infty t\right], \qquad (1)$$

где y_n – смещение n-го атома от положения равновесия, m – масса атома, $f_0 = \dfrac{m\left(\mathrm{v}_0\right)a}{2\pi\left(l_0\right)^2}$, где l_0 – параметр, который увеличивается при увеличении ж/сткости пружины и уменьшении силы со стороны подложки, v_0 – скорость звука , a – постоянная решётки.

В безразмерных единицах $x = \dfrac{v_0}{\omega}\tilde{x}$, $t = \dfrac{t}{\omega}$ уравнение принимает вид неоднородного синус-уравнения Гордона [7]:

$$\ddot{\varphi}_n + \sin\varphi_n - \varphi_n'' + \beta\dot{\varphi}_n = y\sin\frac{\infty t}{\omega}, \qquad (2)$$

где $\omega^2 = \omega^2 = \dfrac{2\pi f_0}{ma}, v_0 = a\sqrt{\dfrac{k}{m}}, \beta = \dfrac{\mu_0}{m\omega}, y = \dfrac{2\pi F_0}{ma\omega^2}$, μ_0 – коэффициент, характеризующий трение, φ_n – смещение n-го атома от положения равновесия в угловых единицах.

Мы исследуем решения неоднородного синус-уравнения Гордона в численном виде.

3.Результаты и обсуждение. При внешней частоте 10^{12}Гц – масштаб времени составляет $2.5\cdot 10^{-6}$.

Численный эксперимент проведён для трёх дислокаций, находящихся в начальный момент времени в начале координат. Если в уравнении только трение, дислокация со временем останавливается, если частота и трение – она проходит некоторое расстояние, потом останавливается и колеблется в полученном положении, изменяя свою форму. Обе дислокации без дополнительного внешнего воздействия остаются в таком состоянии даже после устранения вызвавшего их появление причины. Такое бесконечно большое время релаксации дислокаций связано с действующей на дислокации силы трения со стороны рельефа Пайерлса или точечных препятствий [8]. Третья дислокация для сравнения совершает свободное скольжение.

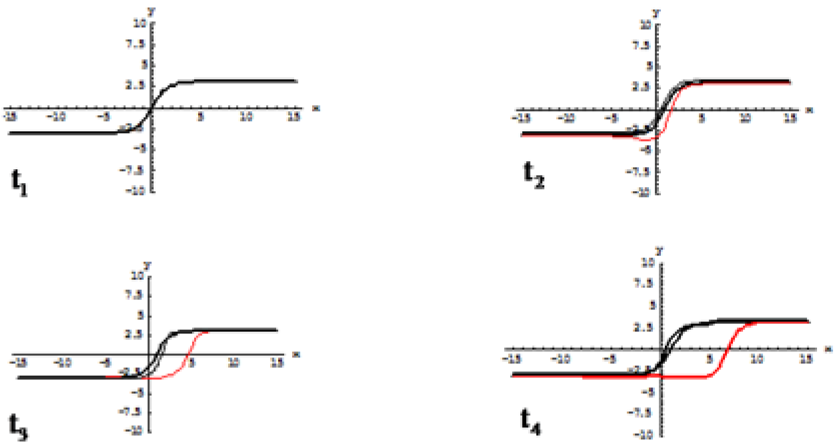


Рис.1.Движение дислокаций в последовательные моменты времени: (1) – свободное скольжение, жирная кривая – движение с учётом силы трения .

Из численного эксперимента следует, что дислокации, исходя из одной точки, со временем останавливаются, причём длина свободного пробега дислокаций разная в зависимости от частоты внешнего переменного поля.

Построим график зависимости длины свободного пробега дислокации от частоты упругого поля при пропускании через кристалл высокочастотного звука ~10^{12} Гц с коэффициентами 0.06,0.08,0.1,0.25,0.5,1,1.5,2,2.5, соответственно. (рис.2.)

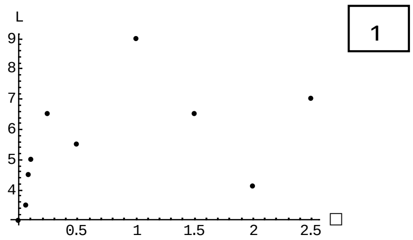
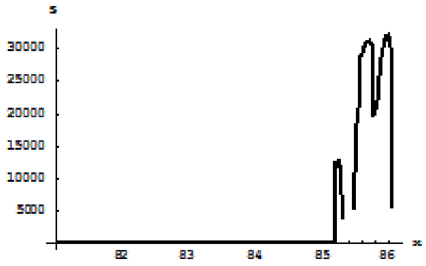


Рис.2. Зависимость длины свободного пробега дислокаций от частоты переменного упругого поля.

Из рис.2 видно, что при определённой частоте длина свободного пробега дислокации максимальна. Очевидно, этой частоте соответствует образование несхлопывающегося двойного перегиба. Эта частота же определяет стартовое напряжение. Полученный результат доказывает термоактивационный механизм движения дислокаций в алюминии при данных условиях.

Зависимость напряжения от деформации в области пластичности в макромасштабе принимается, согласно [1], в следующем виде: $\sigma = k\varepsilon^n,\ n = \ln(1+\delta),\ \ k = \sigma_b * e^n n^{-n}$, (3).

Получены зависимости $\sigma(x), \sigma(\varepsilon), \sigma(x)$ при наличии частоты и без неё. При наличии внешней механической частоты зависимость $\sigma(x)$ имеет вид (рис.3):



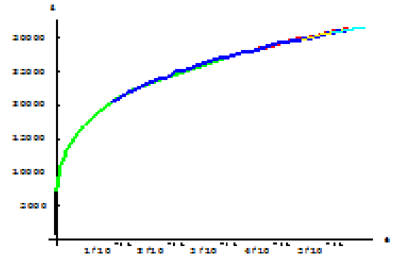
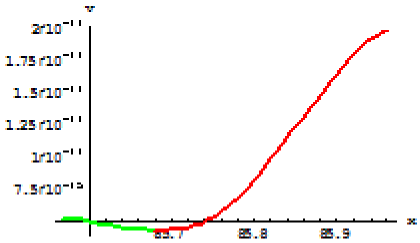


Рис.3.Зависимость напряжения от координаты в окрестности дислокации (с внешним полем)

Рис.4.Соответствующая зависимость напряжения от деформации

Зависимость $\sigma(\varepsilon)$ в областях монотонного роста $\sigma(x)$ имеет вид: рис.4.

Как при этом изменяется скорость дислокации? В области подъёма на графике зависимости напряжения от координаты (рис.3) (движение из долины на потенциальный рельеф) скорость дислокации уменьшается, на спуске – растёт (потенциальный рельеф – следующая долина) (рис.5).



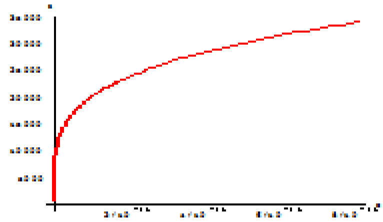


Рис.5. Зависимость скорости дислокации от координаты в окрестности барьера Пайерлса

Рис.6. Зависимость напряжения от деформации без внешнего упругого поля

Такой характер движения дислокаций возможен только при изменении сопротивления среды движению дислокациии. Таким образом, можно предположить, что зависимость напряжения от деформации для алюминия действительно определяется формулой (3) (рис.6).

В ГЦК кристаллах (к ним относится также алюминий) различают 3 участка, на которых действуют различные механизмы деформации и упрочнения [9,10].

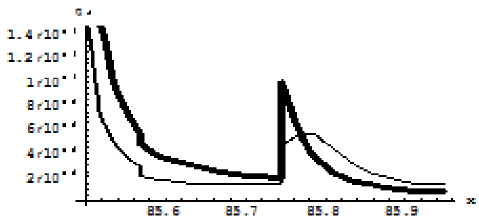


Рис.7. Зависимость коэффициента упрочнения от координаты (тонкая кривая соответствует случаю, когда прикладывается резонансная частота, жирная кривая – без частоты).

Из рис.7 видно, что наличие частоты уменьшает коэффициент упрочнения.

4.Выводы В алюминии при комнатной температуре дислокация в рельефе Пайерлса движется неравномерно, замедляясь перед барьером Пайерлса и ускоряясь после преодоления барьера. В окрестности дислокации реализуется область микропластичности. Внешнее переменное упругое поле изменяет длину свободного пробега дислокации. Закрепление дислокации после прохождения некоторого расстояния говорит об упрочнении. Различаются 3 области, на которых действуют различные механизмы деформации и упрочнения. Наличие резонансной частоты уменьшает коэффициент упрочнения. Упрочнение в данном случае обусловлено рассеянием энергии при движении дислокации в рельефе Пайерлса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hosford W.F., Caddell R.M., MetalForming.Cambridge, 2007.
2. Эстрин Ю.З., Исаев Н.В., Григорова Т.В., Пустовалов В.В., Фоменко В.С., Шумилин С.Э., Брауде И.С., Малыгин С.В., Решетняк М.В., Янечек М. Низкотемпературная пластическая деформация ультрамелкозернистого алюминия. //Физика низких температур. 2008. Т.34, № 8. С.842–851.
3. HirthJ., LotheJ. Theory of dislocations. New York: 1972.
4. Алъшиц В.И., Инденбом В.Л. Динамическое торможение дислокаций. //УФН. 1975. Т.115. Вып.1.
5. Никитенко В.И., Фарбер Б.Я., Иунин Ю.Л. О возможности экспериментального изучения кинетики формирования и подвижности перегибов на дислокационной линии. //Письма в ЖЭТФ. 1985. Т.41. В.3. С.103-105.
6. Melik-Shahnazarow W. A., Mirzoewa I.I., Naskidashwili I.A. Tunneling of the dislocation kink in aluminum. //Pis’ma v JETF, 43(5), 247-249, 1986.
7. Fogel M.B., Trullinger S.E., Bishop A.R., Krumhansl J.A.Phys.Rev.v.15, №3, pp.1578-1592, 1977.
8. Малыгин Г.А. Процессы самоорганизации дислокаций и пластичность кристаллов. //УФН. 1999. Т.169. №9.
9. Орлов А.Н. Введение в теорию дефектов в кристаллах. М.: Высшая школа. 1983.

Сведения об авторе:

Аракелян Милета – канд.физ.-мат.наук. Ереванский Госуниверситет, Физический факультет. (374 10) 64 61 37.

E-mail: marakelyan@ysu.am

ПРИЛОЖЕНИЕ КОНЦЕПЦИИ РАЗРЫХЛЕНИЯ К РЕШЕНИЮ ПРОБЛЕМЫ ПОЛЗУЧЕСТИ И ДЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ

Арутюнян А.Р., Арутюнян Р.А.

Опыты на ползучесть выполняются, в основном, при постоянной нагрузке. При этом, истинное напряжение в процессе ползучести возрастает. Рост напряжения происходит из-за уменьшения поперечного сечения (образование шейки) и вследствие уменьшения площади поперечного сечения из-за образования дефектов. В первом случае можно считать, что деформация протекает по механизму вязкого течения, когда объём образца остаётся постоянным. Во втором случае, вследствие сложных физико-механических процессов, способствующих образованию и развитию повреждений, изменяются объём и плотность материала образца. Эти два процесса протекают одновременно, поэтому практически оказывается невозможным их полное разделение. При фундаментальном изучении проблемы высокотемпературной ползучести и длительной прочности необходимо выполнение испытаний при постоянном напряжениии.

Сравнительный анализ кривых ползучести, полученных в опытах над образцами из аустенитной стали при постоянной нагрузке, соответствующей начальному напряжению $\sigma_1 = 200\ МПа$ и при постоянном напряжении $\sigma = \sigma_1$ [1], показывают, что минимальная скорость ползучести при постоянной нагрузке больше, чем при постоянном напряжении, а время до разрушения при постоянном напряжении в десять раз больше времени до разрушения при постоянной нагрузке. Эти эффекты принимаются во внимание при формулировке кинетических уравнений ползучести и повреждённости. Кинетические уравнения основываются на концепции разрыхления [2] и законе сохранения массы. С учётом этих положений в работе предложены уравнения теории ползучести и критерий длительной прочности. Параметр сплошности определяется соотношением $\psi = \rho / \rho_0$ (ρ_0 – начальная, ρ – текущая плотность среды) [3]. В начальном состоянии $t = 0$, $\rho = \rho_0$, $\psi = 1$, в момент разрушения $t = t_f$, $\rho = 0$, $\psi = 0$.

В общей постановке параметр повреждённости (сплошности) и кинетическое уравнение для этого параметра рассматривались в работе Говарда [4], опубликованной в 1942 г. (см. также монографию Бокшицкого [5]). Считается, что хрупкое разрушение протекает со скоростью, зависящей от напряжения $\sigma(t)$

$$\frac{d\psi}{dt} = -f\left[\sigma(t)\right] \tag{1}$$

или, в соответствии с представлениями статистической физики, от напряжения и величины накопленной повреждённости

$$\frac{d\psi}{dt} = -f\left[\sigma(t), \psi\right] \tag{2}$$

Основные положения концепции хрупкого разрушения Качанова-Работнова основываются на уравнениях (1), (2), правая часть которых выбирается в виде степенной зависимости. В модели хрупкого разрушения Качанова параметр сплошности ψ ($1 \geq \psi \geq 0$) вводится произвольно без придания ему определённого физического содержания. Предполагается, что деформация ползучести не влияет на процессы разрушения, а скорость изменения параметра сплошности задаётся степенной функцией от эффективного напряжения [6, 7]

$$\frac{d\psi}{dt} = -A\left(\frac{\sigma_{\max}}{\psi}\right)^n, \tag{3}$$

где $A>0$, $n \geq 0$ – эмпирические постоянные, не зависящие от напряжения, $\sigma_{\max}/\psi$ – эффективное напряжение.

Решается задача о растяжении образца под воздействием постоянной нагрузки P. Считается, что хрупкое разрушение происходит при малых деформациях, поэтому можно пренебречь изменением поперечного сечения образца, т.е. принимается условие $F = F_0$, тогда $\sigma_{\max} = \sigma = P/F = P/F_0 = \sigma_0 = \text{const}$, σ – истинное, σ_0 – номинальное напряжение, F_0, F –

начальная и текущая площадь поперечного сечения образца. При этих предположениях уравнение (3) записывается в виде

$$\frac{d\psi}{dt} = -A\left(\frac{\sigma_0}{\psi}\right)^n \tag{4}$$

В модели хрупкого разрушения Работнова [8, 9] вводится параметр повреждённости ω ($0 \le \omega \le 1$), который определяется следующим кинетическим уравнением:

$$\frac{d\omega}{dt} = A\sigma^n \tag{5}$$

Параметр повреждённости вводится соотношением $\omega = F_T / F_0$ (F_T – суммарная площадь пор) и характеризует степень уменьшения площади поперечного сечения образца. Тогда из условия $F = F_0 - F_T$ имеем: $F = F_0(1-\omega)$, $\sigma = P / F = \sigma_0 F_0 / F = \sigma_0 / (1-\omega)$. С учётом этих соотношений уравнение (5) записывается в виде

$$\frac{d\omega}{dt} = A\left(\frac{\sigma_0}{1-\omega}\right)^n \tag{6}$$

Уравнения (4) и (6) идентичны при условии $\omega = 1-\psi$, $d\psi = -d\omega$. Из решения этих уравнений при начальном условии $t = 0$, $\psi = 1$, $\omega = 0$ имеем:

$$\psi = 1-\omega = \left[1-(n+1)A\sigma_0^n t\right]^{\frac{1}{n+1}} \tag{7}$$

Принимая условие разрушения $t = t_f^b$, $\psi = 0$, $\omega = 1$ из (7) следует критерий хрупкого разрушения

$$t_f^b = \frac{1}{(n+1)\cdot A\sigma_0^n} \tag{8}$$

Такой подход может придать параметру сплошности и повреждённости физическое содержание. Однако из условия $F = F_0$, которое используется в концепции Качанова, следует $\omega = 0$, т.е. теряет смысл само понятие повреждённости. Таким образом, подобная интерпретация параметра сплошности не представляется вполне корректной.

Для определения деформации ползучести Работнов [9] ввёл систему из двух взаимосвязанных уравнений для скорости ползучести и параметра повреждённости

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = b\sigma^m (1-\omega)^{-q}, \tag{9}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = c\sigma^n (1-\omega)^{-r}, \tag{10}$$

где b, c, m, n, q, r – постоянные, $\varepsilon = \ln(l / l_0)$ – деформация, l_0, l – начальная и текущая длина образца.

В случае чисто хрупкого разрушения и малых деформаций считается $F = F_0$, $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$ и из решения системы уравнений (9)-(10) следует соотношение для деформации ползучести, которое считается основным результатом в теории Работнова, т.к. это соотношение описывает третий участок кривой ползучести, который в области хрупких разрушений полностью определяется разрыхлением. В то же время вывод этой формулы базируется на условии $F = F_0$, из которого, как было уже отмечено, следует $\omega = 0$, что противоречит самой концепции повреждённости. Далее при определении критерия вязко-хрупкого разрушения с помощью уравнений (9)-(10) принимается условие несжимаемости, которое также противоречит концепции повреждённости.

Для преодоления указанных противоречий в работе [10] была предложена система уравнений для скорости ползучести и повреждённости, основанная на параметре сплошности $\psi = \rho / \rho_0$. В данной работе представлен модифицированный вариант этих уравнений, с помощью которых удаётся описать основные экспериментальные результаты по ползучести и длительной прочности металлических материалов. Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\psi^{\beta}\frac{d\varepsilon}{dt}=B\sigma^{m}, \tag{11}$$

$$\psi^{\alpha}\frac{d\psi}{dt}=-A\sigma^{n}, \tag{12}$$

где B, α, β – постоянные, $\sigma=\sigma_0F_0/F$.

Учитывая закон сохранения массы $\rho_0 l_0 F_0=\rho l F$, уравнения (11)-(12) можно записать в виде

$$\frac{d\varepsilon}{dt}=B\sigma_0^m\psi^{m-\beta}e^{m\varepsilon} \tag{13}$$

$$\frac{d\psi}{dt}=-A\sigma_0^n\psi^{n-\alpha}e^{n\varepsilon} \tag{14}$$

Система уравнений (13)-(14) при $\alpha=\beta=0$ впервые была сформулирована в работе [10].

Если ограничиться случаем хрупких разрушений и малых деформаций, то можно считать $e^{n\varepsilon}\approx 1$, и из решения уравнения (14) при начальном условии $t=0$, $\psi=1$, получим:

$$\psi=\left[1-(\alpha-n+1)A\sigma_0^n t\right]^{\frac{1}{\alpha-n+1}} \tag{15}$$

На рис.1 представлены кривые изменения параметра сплошности согласно формуле (15) при различных значениях постоянных ($\alpha=6$ – кривая 1, $\alpha=4$ – кривая 2, $\alpha=2$ – кривая 3 и $\alpha=1{,}1$ – кривая 4), которые находятся в согласии с соответствующими опытными кривыми [11-16]. При расчётах были приняты следующие значения коэффициентов: $n=2$, $A=10^{-9}\,[МПа]^{-2}$, $\sigma_0=100\ МПа$.

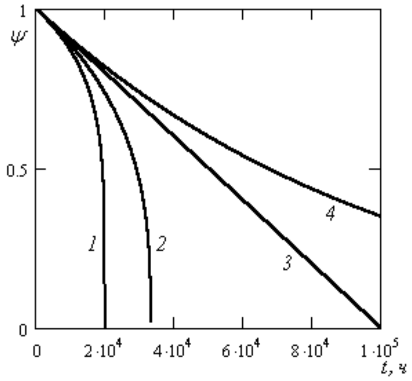


Рис.1. Кривые изменения параметра сплошности ψ согласно формуле (15): $\alpha=6$ – кривая 1, $\alpha=4$ – кривая 2, $\alpha=2$ – кривая 3 и $\alpha=1{,}1$ – кривая 4.

Принимая условие разрушения $t=t_f$, $\psi=0$, из (15) получим критерий длительной прочности

$$t_f^b=\frac{1}{(\alpha-n+1)\cdot A\sigma_0^n}, \tag{16}$$

При $\alpha=2n$ критерий (16) совпадает с критерием Качанова-Работнова (8).

На рис.2 в двойных логарифмических координатах построены кривые длительной прочности согласно формуле (16) для разных значений коэффициентов α: $\alpha=6$ – кривая 1, $\alpha=4$ – кривая 2, $\alpha=2$ – кривая 3 и $\alpha=1{,}1$ – кривая 4.

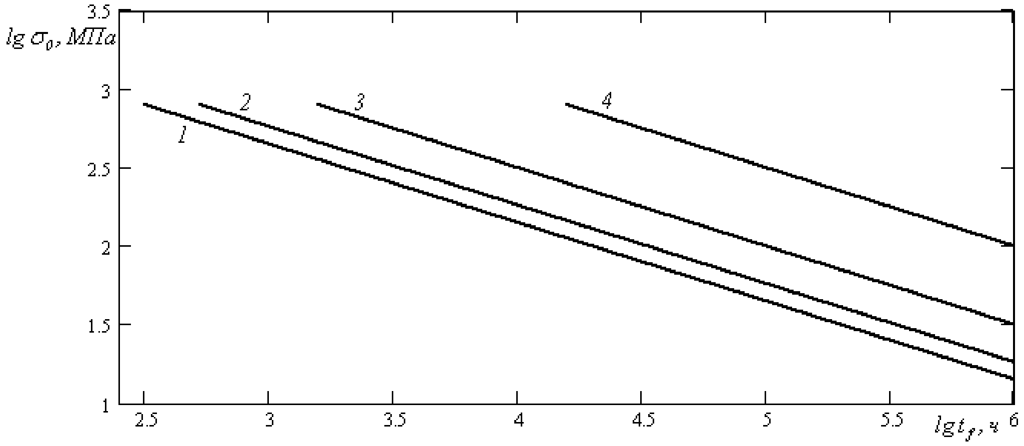


Рис. 2. Кривые длительной прочности согласно критерию (16): $\alpha = 6$ – кривая 1, $\alpha = 4$ – кривая 2, $\alpha = 2$ – кривая 3 и $\alpha = 1{,}1$ – кривая 4.

Принимая условие $e^{m\varepsilon} \approx 1$ и учитывая (15) и начальные условия $t = 0$, $\varepsilon = 0$, из решения уравнения (13) получим соотношение для деформации ползучести

$$\varepsilon = \frac{B\sigma_0^{m-n}}{A\gamma}\left\{1 - \left[1 - (\alpha - n + 1)A\sigma_0^n t\right]^{\frac{\gamma}{\alpha - n + 1}}\right\}, \tag{17}$$

где $\gamma = m - \beta + \alpha - n + 1$.

На рис.3 представлены теоретические кривые ползучести согласно соотношению (17) для различных значений коэффициента α: $\alpha = 8$ – кривая 1, $\alpha = 6$ – кривая 2 и $\alpha = 4$ – кривая 3. Как видно из этого рисунка, предложенная система уравнений способна описать третий участок кривых ползучести.

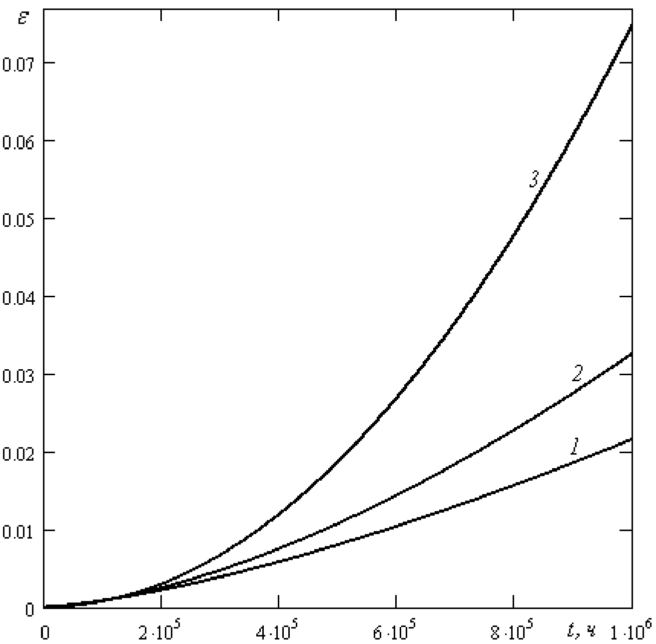


Рис. 3. Кривые ползучести согласно формуле (17): $\alpha = 8$ – кривая 1, $\alpha = 6$ – кривая 2 и $\alpha = 4$ – кривая.

При расчётах были приняты следующие значения коэффициентов: $n = 2$, $m = 4$, $A = 10^{-9}\,[МПа]^{-2}$, $\sigma_0 = 100\,МПа$, $B = 5 \cdot 10^{-17}\,[МПа]^{-4}$, $\beta = 1$.

В случае, когда напряжения являются постоянными, тогда из уравнений (11)-(12) следует:

$$\psi = \left[1-(\alpha+1)A\sigma_0^n t\right]^{\frac{1}{\alpha-n+1}},\ t_f^b = \frac{1}{(\alpha+1)\cdot A\sigma_0^n}, \tag{18}$$

$$\varepsilon = \frac{B\sigma_0^{m-n}}{A\delta}\left\{1-\left[1-(\alpha+1)A\sigma_0^n t\right]^{\frac{\delta}{\alpha+1}}\right\}, \tag{19}$$

где $\delta = \alpha + 1 - \beta$.

Сравнительные расчёты по формулам (16)-(17) и (18)-(19) находятся в согласии с отмеченными результатами опытов при постоянной нагрузке и постоянном напряжении.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 14-01-00823, 15-01-03159).

ЛИТЕРАТУРА

1. Чадек Й. Ползучесть металлических материалов. М.: Мир, 1987. 304с.
2. Новожилов В.В. О пластическом разрыхлении // Прикладная математика и механика. 1965. № 4. С.681-689.
3. Арутюнян Р.А. Проблема деформационного старения и длительного разрушения в механике материалов. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2004. 252с.
4. Havard R.N. The extension and rupture of cellulose acetate and celluloid // Trans. Farad. Soc. 1942. Vol.38. P.394-400.
5. Бокшицкий М.Н. Длительная прочность полимеров. М.: Химия, 1978. 310с.
6. Качанов Л.М. О времени разрушения в условиях ползучести // Изв. АН СССР. ОТН. 1958. №8. С.26-31.
7. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752с.
8. Арутюнян Р.А. Высокотемпературное охрупчивание и длительная прочность металлических материалов // Механика твёрдого тела. 2015. №2. С.96-104.
9. Boethner R.C, Robertson W.D. A study of the growth of voids in copper during the creep process by measurement of the accompanying change in density // Trans. of the Metallurg. Society of AIME. 1961. Vol. 221. №3. P.613-622.
10. Bowring P., Davies P.W., Wilshire B. The strain dependence of density changes during creep // Metal science journal. 1968. Vol.2. №9. P.168-171.
11. Brathe L. Macroscopic measurements of creep damage in metals // Scand. J. Metal. 1978. Vol.7. № 5. P.199-203.
12. Woodford D.A. Density changes during creep in nickel // Metal science journal. 1969. Vol. 3. №11. P.234-240.
13. Куманин В.И., Ковалева Л.А., Алексеева С.В. Долговечность металла в условиях ползучести. М.: Металлургия, 1988. 223с.

Сведения об авторах:

Арутюнян Александр Робертович – кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, математико-механический факультет, Санкт-Петербургский государственный университет, **тел.:** + 7 (812) 4284245, **E-mail:** arutalr@rambler.ru

Арутюнян Роберт Ашотович – профессор, доктор физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник, математико-механический факультет, Санкт-Петербургский государственный университет, **тел.:** + 7 (812) 5266591, **E-mail:** Robert.Arutyunyan@paloma.spbu.ru

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КРУГОВОГО СЕГМЕНТА И ПОЛУПЛОСКОСТИ С СЕГМЕНТНОЙ ВЫЕМКОЙ ПРИ СМЕШАННЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Арутюнян Л.А.

Рассматриваются плоские задачи для кругового сегмента и полуплоскости с сегментной выемкой, где на границе круговой части сегмента заданы напряжения, а на другой части контура заданы нормальные напряжения и касательные перемещения. При помощи интегралов Фурье в биполярной системе координат задачи решаются замкнуто.

Рассматриваются плоские задачи для кругового сегмента и полуплоскость с сегментной выемкой при смешанных граничных условиях. На границе круговой части сегмента заданы нормальные и касательные напряжения, на другой части контура нормальные напряжения и касательные перемещения.

Задачи решаются в биполярной системе координат. Связь между биполярными (α,β) и прямоугольными координатами дается формулами [1]

$$gx=\mathrm{sh}\alpha,\ gy=\sin\beta,\ ag=\mathrm{ch}\alpha+\cos\beta \tag{1}$$

где $a-$ размерный параметр

Контур сегмента в биполярных координатах описывается координатами $\beta=\beta_1$ и $\beta=0$ и полуплоскостью с сегментной выемкой $\beta=\beta_1$ и $\beta=-\pi$.

Задачи решаются при помощи функции напряжений $\Phi(\alpha,\beta)$, которая удовлетворяет бигармоническому уравнению

$$\left[\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4}+2\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}+\frac{\partial^4}{\partial\beta^4}-2\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+2\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+1\right](g\Phi)=0 \tag{2}$$

Напряжения и перемещения в биполярных координатах через функции $g\Phi(\alpha,\beta)$ даётся формулами

$$a\sigma_\alpha(\alpha,\beta)=\left[(\mathrm{ch}\alpha+\cos\beta)\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}-\mathrm{sh}\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}+\sin\beta\frac{\partial}{\partial\beta}+\mathrm{ch}\alpha\right](g\Phi)$$

$$a\sigma_\beta(\alpha,\beta)=\left[(\mathrm{ch}\alpha+\cos\beta)\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}-\mathrm{sh}\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}+\sin\beta\frac{\partial}{\partial\beta}-\cos\beta\right](g\Phi) \tag{3}$$

$$a\tau_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)=-(\mathrm{ch}\alpha+\cos\beta)\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}(g\Phi)$$

$$u(\alpha,\beta)=\frac{1-2v}{2\mu}\left[\frac{\partial(g\Phi)}{\partial\alpha}-\frac{\mathrm{sh}\,\alpha}{ch\alpha+\cos\beta}(g\Phi)\right]-\frac{1}{2\mu}\left[\frac{\partial(g\Psi)}{\partial\beta}+\frac{\sin\beta}{\mathrm{ch}\alpha+\cos\beta}(g\Psi)\right]$$

$$\nu(\alpha,\beta)=\frac{1-2v}{2\mu}\left[\frac{\partial(g\Phi)}{\partial\beta}+\frac{\sin\beta}{ch\alpha+\cos\beta}(g\Phi)\right]+\frac{1}{2\mu}\left[\frac{\partial(g\Psi)}{\partial\alpha}-\frac{sh\alpha}{\mathrm{ch}\alpha+\cos\beta}(g\Psi)\right]$$

где μ и v –упругие характеристики

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}(g\Psi)=(1-v)\left[\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}-1\right](g\Phi) \tag{4}$$

Граничные условия равносильны следующим условиям для функции напряжений [1], для кругового сегмента имеем:

$$\left.(g\Phi)\right|_{\beta=\beta_1}=\sigma_1(\alpha)\ ;\ \left.\frac{\partial(g\Phi)}{\partial\beta}\right|_{\beta=\beta_1}=\tau_1(\alpha)$$
$$\left.(g\Phi)\right|_{\beta=0}=\sigma_0(\alpha)\ ;\ \left.u(\alpha,\beta)\right|_{\beta=0}=u_0(\alpha) \tag{5}$$

для полуплоскости с сегментной выемкой имеем:

$$\left.(g\Phi)\right|_{\beta=\beta_1}=\sigma_1(\alpha)\ ;\ \left.\frac{\partial(g\Phi)}{\partial\beta}\right|_{\beta=\beta_1}=\tau_1(\alpha)$$
$$\left.(g\Phi)\right|_{\beta=-\pi}=\sigma_0(\alpha)\ ;\ \left.u(\alpha,\beta)\right|_{\beta=-\pi}=u_0(\alpha) \tag{6}$$

Предполагается, что $\sigma_1(\alpha)$, $\tau_1(\alpha)$, $\sigma_0(\alpha)$ и $u_0(\alpha)$ удовлетворяют условиям разложимости в интеграл Фурье.

Функцию напряжений $\Phi(\alpha,\beta)$ ищем в виде интеграла Фурье

$$g\Phi(\alpha,\beta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t,\beta)e^{-it\alpha}dt \tag{7}$$

где для кругового сегмента

$$f(t,\beta)=A(t)\operatorname{ch}t(\beta_1-\beta)\cos\beta+B(t)\operatorname{ch}t\beta\cos(\beta_1-\beta)+$$
$$+C(t)\operatorname{sh}t(\beta_1-\beta)\sin\beta+D(t)\operatorname{sh}t\beta\sin(\beta_1-\beta) \tag{8}$$

для полуплоскости с сегментной выемкой

$$f(t,\beta)=-A(t)\operatorname{ch}t(\beta_1-\beta)\cos\beta+B(t)\operatorname{ch}t(\pi+\beta)\cos(\beta_1-\beta)-$$
$$-C(t)\operatorname{sh}t(\beta_1-\beta)\sin\beta+D(t)\operatorname{sh}t(\pi+\beta)\sin(\beta_1-\beta) \tag{9}$$

Подставляя (7) в (5) и (6), учитывая (3) для задачи кругового сегмента, получаем следующие значения для неизвестных величин интегрирования

$$\Delta_1(t)A(t)=2\bar{\sigma}_0(t)\operatorname{ch}t\beta_1-2\bar{\sigma}_1(t)\cos\beta_1$$
$$\Delta_1(t)B(t)=2\bar{\sigma}_1(t)\operatorname{ch}t\beta_1-2\bar{\sigma}_0(t)\cos\beta_1$$
$$\Delta_2(t)C(t)=2\bar{u}_0(t)\operatorname{sh}t\beta_1+2\bar{\tau}_1(t)\cos\beta_1+A(t)(t\operatorname{sh}2t\beta_1+\sin 2\beta_1) \tag{10}$$
$$\Delta_2(t)D(t)=-2t\bar{u}_0(t)\sin\beta_1-2\bar{\tau}_1(t)\operatorname{ch}t\beta_1-2(t^2+1)A(t)\operatorname{ch}t\beta_1\sin\beta_1+t\Delta_2(t)B(t)$$

где

$$\Delta_1(t)=\operatorname{ch}2t\beta_1-\cos 2\beta_1,\ \Delta_2(t)=\operatorname{sh}2t\beta_1-t\sin 2\beta_1$$

$$\bar{\sigma}_1(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma_1(\alpha)e^{it\alpha}d\alpha,\quad \bar{\tau}_1(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tau_1(\alpha)e^{it\alpha}d\alpha$$
$$\bar{\sigma}_0(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma_0(\alpha)e^{it\alpha}d\alpha \tag{11}$$
$$\bar{u}_0(t)=-\frac{(1-2\nu)t\bar{\sigma}_0(t)}{2(1-\nu)}+$$
$$+\frac{i}{2(1-\nu)\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[(1-2\nu)\operatorname{th}\frac{\alpha}{2}\sigma_0(\alpha)+2\mu u_0(\alpha)\right]e^{it\alpha}d\alpha$$

Для задачи полуплоскость с сегментной выемкой получаем значения (9) и (10), только вместо β_1 нужно подставить $\pi+\beta_1$ и $\operatorname{th}\frac{\alpha}{2}$ заменить $\operatorname{cth}\frac{\alpha}{2}$.

В качестве примера рассмотрим сегмент, подвергающийся по участкам боковой поверхности $|\alpha| < \alpha_0$ равномерному нормальному обжатию интенсивности q:

$$\sigma_\beta(\alpha,\beta)\Big|_{\beta=\beta_1} = \begin{cases} -q & |\alpha| < \alpha_0 \\ 0 & |\alpha| > \alpha_0 \end{cases} \quad \tau_{\alpha,\beta}^{(\alpha,\beta)}\Big|_{\beta=\beta_1} = 0 \tag{12}$$

После некоторых выкладок для задачи кругового сегмента находим

$$\sigma_1(\alpha)\begin{cases} qa\dfrac{1-e^{-\alpha_0}\mathrm{ch}\alpha}{\mathrm{ch}\alpha_0+\cos\beta_1}+\dfrac{aq}{\mathrm{ch}\alpha_0+\cos\beta_1}\left(\mathrm{sh}\alpha_0\cos\beta_1-\sin^2\beta_1\right) & |\alpha|<\alpha_0 \\ \dfrac{qa\mathrm{sh}\alpha_0}{\mathrm{sh}\alpha_0+\cos\beta_1}e^{-\alpha_0}+\dfrac{aq}{\mathrm{ch}\alpha_0+\cos\beta_1}\left(\mathrm{sh}\alpha_0\cos\beta_1-\sin^2\beta_1\right) & |\alpha|>\alpha_0 \end{cases}$$

$$\tau_1(\alpha) = -\frac{qa}{\mathrm{ch}\alpha_0+\cos\beta_1}\left(\sin\beta_1\cos\beta_1+\mathrm{sh}\alpha_0\sin\beta_1\right) \tag{13}$$

$$\sigma_0(\alpha) = \frac{qa\mathrm{sh}\alpha_0}{\mathrm{ch}\alpha_0+\cos\beta_1}$$

$$u_0(\alpha) = -\frac{1-2v_1}{2\mu}\frac{qa\mathrm{sh}\alpha_0}{\mathrm{ch}\alpha_0+\cos\beta_1}\mathrm{th}\frac{\alpha}{2}$$

Для задачи полуплоскости с сегментной выемкой вместо $\sigma_0(\alpha)$ и $u_0(\alpha)$ имеем:

$$\sigma_0(\alpha) = -\frac{qa\mathrm{sh}\alpha_0}{\mathrm{ch}\alpha_0+\cos\beta_1}, \quad u_0(\alpha) = -\frac{1-2v}{2\mu}\frac{qa\mathrm{sh}\alpha_0}{\mathrm{ch}\alpha_0+\cos\beta_1}\mathrm{cth}\frac{\alpha}{2} \tag{14}$$

Представим искомые функции напряжений $g\Phi(\alpha,\beta)$ в виде суммы

$$g\Phi(\alpha,\beta) = g\Phi_1(\alpha,\beta) + g\Phi_2(\alpha,\beta) \tag{15}$$

Бигармоническая функция $\Phi_1(\alpha,\beta)$ выражается

$$g\Phi_1(\alpha,\beta) = \frac{qa}{\mathrm{ch}\alpha_0+\cos\beta_1}\left(\mathrm{sh}\alpha_0\cos\beta-\sin\beta_1\sin\beta\right) \tag{16}$$

Неизвестную функцию $g\Phi_2(\alpha,\beta)$ представим в виде интеграла (7). После удовлетворения граничным условиям (12) получаем:

$$\begin{gathered} \Delta_1(t)A(t) = -2\bar{\sigma}_t^*(t)\cos\beta_1; \quad \Delta_1(t)B(t) = 2\bar{\sigma}_t^*(t)\mathrm{ch}\,t\beta_1; \\ \Delta_1(t)\Delta_2(t)C(t) = -2\bar{\sigma}_1^*\left(t\mathrm{sh}2t\beta_1+\sin 2\beta_1\right)\cos\beta_1; \\ \Delta_1(t)\Delta_2(t)D(t) = 2\bar{\sigma}_1^*\left(\left(t^2+1\right)\mathrm{ch}t\beta_1\sin 2\beta_1+t\Delta_2(t)\mathrm{ch}t\beta_1\right) \end{gathered} \tag{17}$$

где

$$\bar{\sigma}_1^*(t) = \frac{2qa\sin t\alpha_0}{t\left(t^2+1\right)\left(\mathrm{ch}\alpha_0+\cos\beta_1\right)\sqrt{2\pi}} \tag{18}$$

Для полулоскости с сегментной выемкой в (17) вместо β_1 надо подставить $\pi+\beta$, а (18) остаётся неизменной.

Вычислим значения касательных напряжений на границе $\beta = 0$ для кругового сегмента и $\beta = -\pi$. Для плоскости с сегментной выемкой получим:

$$\tau_{\alpha,\beta}\left(\alpha,\beta\right)\Big|_{\beta=0}=\frac{2iqa\left(\operatorname{ch}\alpha+1\right)\sin\beta_1}{\pi\left(\operatorname{ch}\alpha_0+\cos\beta_1\right)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}t\beta_1\sin t\alpha_0}{\operatorname{sh}2t\beta_1-t\sin2\beta_1}e^{-it\alpha}dt$$

$$\tau_{\alpha,\beta}\left(\alpha,\beta\right)\Big|_{\beta=-\pi}=-\frac{2iqa\left(\operatorname{ch}\alpha-1\right)\sin\beta_1}{\pi\left(\operatorname{ch}\alpha_0+\cos\beta_1\right)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}t(\pi+\beta_1)\sin t\alpha_0\,e^{-it\alpha}}{\operatorname{sh}2t(\pi+\beta_1)-t\sin2\beta_1}dt \tag{19}$$

Вычислим значения касательных напряжений в частном случае при сосредоточенной силе P, приложенной в точке $\alpha=0,\ \ \beta=\beta_1$.

при $\beta_1=\frac{\pi}{2}$ для кругового сегмента получаем

$$\tau_{\alpha,\beta}\left(\alpha,0\right)=\frac{4Pa^2x}{\pi\left(a^2+x^2\right)^2} \tag{20}$$

при $\beta_1=-\frac{\pi}{2}$ и $\beta_1=\frac{\pi}{2}$ для плоскости с сегментной выемкой получаем

$$\tau_{\alpha,\beta}\left(\alpha,-\pi\right)=\frac{4Pa^2x}{\pi\left(a^2+x^2\right)^2} \tag{21}$$

$$\tau_{\alpha,\beta}\left(\alpha-\pi\right)=\frac{4Pa}{9\sqrt[3]{\left(x^2-a^2\right)^2}}\frac{\sqrt[3]{\left(x-a\right)^2}-\sqrt[3]{\left(x+a\right)^2}}{\sqrt[3]{\left(x-a\right)^2}+\sqrt[3]{\left(x+a\right)^2}^{\,2}} \tag{22}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1968. 401с.

<u>Сведения об авторе:</u>

Арутюнян Левон Арсенович – Канд. физ.-мат. наук, ст.научн .сотрудник Института механики НАН Армении
Адрес: 0019, Ереван-19, пр.Маршала Баграмяна, 24/2,
Тел.: 099-67-57-47
E-mail: mechins@sci.am

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕРМОУПРУГОСТИ МИКРОПОЛЯРНЫХ ТОНКИХ ПЛАСТИН ПРИ ПЛОСКОМ НАПРЯЖЁННОМ СОСТОЯНИИ

Асланян Н.С.

В работе построена математическая модель термоупругости плоского напряжённого состояния микрополярных ортотропных тонких пластин. Получено уравнение баланса энергии и построен соответствующий общий вариационный функционал.

Введение. Анализ температурных напряжений и деформаций в конструктивных элементах типа тонких балок, пластин и оболочек по классической теории упругости, работающих при высоких температурах, имеет исключительно большое значение. В настоящее время актуально проведение такого же рода исследований и в случае микрополярных материалов при неравномерном нагреве, которые необходимы для анализа прочности и правильного функционирования конструктивных элементов из таких материалов.

В классической постановке теория термоупругости для тонких пластин и оболочек из изотропного или анизотропного материала построена в известных монографиях [1-6].

Теория микрополярной термоупругости построена в работах [7-9].Теория микрополярной термоупругости тонких пластин и оболочек для изотропных материалов развивалась в работах [10-12]. В данной работе на основе метода гипотез, разработанного в [11-12], получены основные уравнения и граничные условия термоупругости микрополярных ортотропных тонких пластин при плоском напряжённом состоянии.

1. Основные гипотезы построения модели термоупругости микрополярных ортотропных тонких пластин при плоском напряжённом состоянии.

Рассмотрим тонкую пластинку толщиной $2h$ из микрополярного упругого материала. Оси x_1, x_2 декартовой системы координат расположим в срединной плоскости пластинки, а ось x_3 будет перпендикулярной к срединной плоскости. В основу построения прикладной модели термоупругости микрополярных тонких пластин при плоском напряжённом состоянии с независимыми полями перемещений и вращений примем следующие достаточно общие гипотезы [11,12]:

1. Кинематические гипотезы. Будем считать, что тангенциальные компоненты вектора перемещения и нормальная к срединной поверхности компонента вектора свободного вращения не зависят от поперечной координаты x_3; тангенциальные компоненты вектора свободного вращения равны нулю:

$$U_1 = u_1(x_1,x_2), U_2 = u_2(x_1,x_2), \omega_3 = \Omega_3(x_1,x_2) \tag{1.1}$$

$$\omega_1 = 0,\ \omega_2 = 0. \tag{1.2}$$

2. Статические гипотезы. Примем, что тензоры силовых и моментных напряжений характеризуются следующими матрицами:

$$\hat{\sigma} = \begin{Vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad \hat{\mu} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \mu_{13} \\ 0 & 0 & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & 0 \end{Vmatrix}. \tag{1.3}$$

Как обычно, будем принимать, что функция температуры Θ (соответственно плоскому напряжённому состоянию) не зависит от поперечной координаты x_3 [1-3,9].

2. Определение деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений.

На основе кинематической гипотезы (1.1), (1.2), принимая в виду формулы типа Коши в микрополярном случае для деформаций, изгибов-кручений [11,12], будем иметь:

$$\gamma_{11} = \Gamma_{11}(x_1,x_2) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \gamma_{22} = \Gamma_{22}(x_1,x_2) = \frac{\partial u_2}{\partial x_2},$$

$$\gamma_{12} = \Gamma_{12}(x_1,x_2) = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \Omega_3, \qquad \gamma_{21} = \Gamma_{21}(x_1,x_2) = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \Omega_3, \tag{2.1}$$

$$\chi_{13}=k_{13}(x_1,x_2)=\frac{\partial\Omega_3}{\partial x_1}, \qquad \chi_{23}=k_{23}(x_1,x_2)=\frac{\partial\Omega_3}{\partial x_2},$$

$$\gamma_{13}=\gamma_{23}=\gamma_{31}=\gamma_{32}=0, \qquad \gamma_{33}\neq 0, \quad \chi_{11}=\chi_{22}=\chi_{12}=\chi_{21}=\chi_{31}=\chi_{32}=\chi_{33}=0 \tag{2.2}$$

Подставляя формулы (2.1) для деформаций, изгибов-кручений в выражениях физических соотношений упругости для микрополярных ортотропных материалов при неравномерном температурном нагреве [13] с учётом формул (1.3), получим:

$$\begin{aligned}
&\gamma_{11}=\Gamma_{11}(x_1,x_2)=\frac{1}{E_1}(\sigma_{11}-\nu_{12}\sigma_{22})+\alpha_{1\Theta}\Theta,\\
&\gamma_{22}=\Gamma_{22}(x_1,x_2)=\frac{1}{E_2}(\sigma_{22}-\nu_{21}\sigma_{11})+\alpha_{2\Theta}\Theta,\\
&\gamma_{12}=\Gamma_{12}(x_1,x_2)=a_{77}\sigma_{12}+a_{78}\sigma_{21}, \qquad \chi_{13}=k_{13}(x_1,x_2)=b_{66}\mu_{13},\\
&\gamma_{21}=\Gamma_{21}(x_1,x_2)=a_{78}\sigma_{12}+a_{88}\sigma_{21}, \qquad \chi_{23}=k_{23}(x_1,x_2)=b_{44}\mu_{23}.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Из соотношений (2.3) получим следующие формулы, выражающие силовые и моментные напряжения, соответственно, через деформации и изгибы-кручения:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{11}=\frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}\left[\Gamma_{11}+\nu_{21}\Gamma_{22}-(\alpha_{1\Theta}+\nu_{21}\alpha_{2\Theta})\Theta_0\right]\\
&\sigma_{22}=\frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}\left[\Gamma_{22}+\nu_{12}\Gamma_{11}-(\alpha_{2\Theta}+\nu_{12}\alpha_{1\Theta})\Theta_0\right],\\
&\sigma_{12}=\frac{a_{88}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2}\Gamma_{12}-\frac{a_{78}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2}\Gamma_{21}, \quad \sigma_{21}=\frac{a_{77}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2}\Gamma_{21}-\frac{a_{78}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2}\Gamma_{12},\\
&\mu_{13}=\frac{1}{b_{66}}k_{13}, \ \mu_{23}=\frac{1}{b_{44}}k_{23}.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

где E_1, E_2, ν_{12}, ν_{21}, a_{78}, a_{77}, a_{88}, b_{44}, b_{66} – упругие постоянные микрополярного ортотропного материала, $\alpha_{1\Theta}, \alpha_{2\Theta}, \alpha_{3\Theta}$ – коэффициенты линейного температурного расширения.

Если материал пластинки микрополярный изотропный, то

$$\begin{aligned}
&E_1=E_2=E_3=E, \qquad \nu_{12}=\nu_{21}=\nu_{31}=\nu_{32}=\nu,\\
&a_{77}=a_{88}=\frac{\mu+\alpha}{4\mu\alpha}, \qquad a_{78}=-\frac{\mu-\alpha}{4\mu\alpha},\\
&b_{44}=b_{66}=\frac{1}{(\gamma+\varepsilon)}.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Для деформаций γ_{33} получим:

$$\gamma_{33}=-\frac{1}{E_3}(\nu_{31}\sigma_{11}+\nu_{32}\sigma_{22})+\alpha_{3\Theta}\Theta. \tag{2.6}$$

3. Основные уравнения и граничные условия термоупругости микрополярных ортотропных тонких пластин при плоском напряжённом состоянии.

С целью вывода основных уравнений микрополярной термоупругости тонких пластин при плоском напряжённом состоянии вместо компонент тензоров силовых и моментных напряжений вводим статически эквивалентные им интегральные характеристики-усилия: T_{11}, T_{22}, S_{12}, S_{21} и моменты: L_{13}, L_{23}:

$$T_{11} = \int_{-h}^{h} \sigma_{11} dx_3 = 2h\sigma_{11}, \quad T_{22} = \int_{-h}^{h} \sigma_{22} dx_3 = 2h\sigma_{22}, \quad S_{12} = \int_{-h}^{h} \sigma_{12} dx_3 = 2h\sigma_{12},$$
$$S_{21} = \int_{-h}^{h} \sigma_{21} dx_3 = 2h\sigma_{21}, \quad L_{13} = \int_{-h}^{h} \mu_{13} dx_3 = 2h\mu_{13}, \quad L_{23} = \int_{-h}^{h} \mu_{23} dx_3 = 2h\mu_{23}. \tag{3.1}$$

Уравнения равновесия в усилиях и моментах будут выражаться так:

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial S_{21}}{\partial x_2} = -p_1, \qquad \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial S_{12}}{\partial x_1} = -p_2,$$
$$\frac{\partial L_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial L_{23}}{\partial x_2} + S_{12} - S_{21} = -m_3. \tag{3.2}$$

Физические соотношения упругости получим на основе формул для силовых и моментных напряжений (2.4) с учётом выражений (3.1). Таким образом, получим:

$$T_{11} = C_{11}\Gamma_{11} + C_{12}\Gamma_{22} + T_{1\Theta}, \qquad T_{22} = C_{22}\Gamma_{22} + C_{21}\Gamma_{11} + T_{2\Theta},$$
$$S_{12} = C_{88}\Gamma_{12} + C_{78}\Gamma_{21}, \qquad S_{21} = C_{77}\Gamma_{21} + C_{78}\Gamma_{12}, \tag{3.3}$$
$$L_{13} = d_{66}k_{13}, \qquad L_{23} = d_{44}k_{23}, \quad T_{1\Theta} = C_{1\Theta}\Theta_0, \quad T_{2\Theta} = C_{2\Theta}\Theta_0$$

где

$$C_{11} = 2h\frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \quad C_{22} = 2h\frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \quad C_{12} = 2h\frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \quad C_{21} = 2h\frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}},$$
$$C_{77} = 2h\frac{a_{77}}{a_{77}a_{88} - a_{78}^2}, \quad C_{88} = 2h\frac{a_{88}}{a_{77}a_{88} - a_{78}^2}, \quad C_{78} = -2h\frac{a_{78}}{a_{77}a_{88} - a_{78}^2}, \tag{3.4}$$
$$C_{1\Theta} = -2h\frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}\left(\alpha_{1\Theta} + \nu_{21}\alpha_{2\Theta}\right), \qquad C_{2\Theta} = -2h\frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}\left(\alpha_{2\Theta} + \nu_{12}\alpha_{1\Theta}\right),$$
$$d_{66} = 2h\frac{1}{b_{66}}, \qquad d_{44} = 2h\frac{1}{b_{44}}.$$

Геометрические соотношения будут выражаться формулами (2.1):

$$\Gamma_{11} = \frac{\partial u_1(x_1,x_2)}{\partial x_1}, \qquad \Gamma_{22} = \frac{\partial u_2(x_1,x_2)}{\partial x_2},$$
$$\Gamma_{12} = \frac{\partial u_2(x_1,x_2)}{\partial x_1} - \Omega_3(x_1,x_2), \qquad \Gamma_{21} = \frac{\partial u_1(x_1,x_2)}{\partial x_2} + \Omega_3(x_1,x_2), \tag{3.5}$$
$$k_{13} = \frac{\partial \Omega_3(x_1,x_2)}{\partial x_1}, \qquad k_{23} = \frac{\partial \Omega_3(x_1,x_2)}{\partial x_2}.$$

В случае изотропного материала физические соотношения упругости (3.3) примут вид:

$$T_{11} = \frac{2Eh}{1-\nu^2}\left[\Gamma_{11} + \nu\Gamma_{22} - (1+\nu)\alpha_\Theta\Theta_0\right], \qquad T_{22} = \frac{2Eh}{1-\nu^2}\left[\nu\Gamma_{11} + \Gamma_{22} - (1+\nu)\alpha_\Theta\Theta_0\right],$$
$$S_{12} = 2h\left[(\mu+\alpha)\Gamma_{12} + (\mu-\alpha)\Gamma_{21}\right], \qquad S_{21} = 2h\left[(\mu+\alpha)\Gamma_{21} + (\mu-\alpha)\Gamma_{12}\right], \tag{3.6}$$
$$L_{13} = 2h(\gamma+\varepsilon)k_{13}, \qquad L_{23} = 2h(\gamma+\varepsilon)k_{23}.$$

К основным уравнениям (3.2)-(3.5) микрополярной термоупругости тонких пластин при плоском напряжённом состоянии для ортотропных материалов или (3.2), (3.5), (3.6) для изотропных материалов необходимо присоединить граничные условия, которые выражаются так [11,12]:

$$T_{11} = T_{11}^* \text{ или } u_1 = u_1^*; \; S_{12} = S_{12}^* \text{ или } u_2 = u_2^*; \; L_{13} = L_{13}^* \text{ или } k_{13} = k_{13}^*. \tag{3.7}$$

4. Уравнение баланса энергии и вариационный функционал термоупругости плоского напряжённого состояния микрополярных тонких пластин. Из уравнения баланса энергии трёхмерной теории микрополярной термоупругости [9,12] на основе принятых гипотез получим уравнение баланса энергии плоского напряжённого состояния термоупругости микрополярных тонких пластин:

$$\iint_S W_0 dx_1 dx_2 = A_0, \tag{4.1}$$

где

$$\begin{aligned} W_0 &= \frac{1}{2}\left(T_{11}\Gamma_{11} + T_{22}\Gamma_{22} + S_{12}\Gamma_{12} + S_{21}\Gamma_{21} + L_{13}k_{13} + L_{23}k_{23}\right) - \\ &- \frac{\Theta_0}{2(1-\nu_{12}\nu_{21})}\left\{(\alpha_{1\Theta} + \nu_{21}\alpha_{2\Theta})(T_{11} - \nu_{12}T_{22}) + (\alpha_{2\Theta} + \nu_{12}\alpha_{1\Theta})(T_{22} - \nu_{21}T_{11})\right\} = \\ &= \frac{1}{2}\left\{C_{11}\Gamma_{11}^2 + C_{22}\Gamma_{22}^2 + (C_{12} + C_{21})\Gamma_{11}\Gamma_{22} + C_{88}\Gamma_{12}^2 + C_{77}\Gamma_{21}^2 + 2C_{78}\Gamma_{12}\Gamma_{21} + \right. \\ &\left. + d_{66}k_{13}^2 + d_{44}k_{23}^2\right\} + T_{1\Theta}\Gamma_{11} + T_{2\Theta}\Gamma_{22} \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2}\left\{\int_{l_1}\left(S_{21}^0 u_1 + T_{22}^0 u_2 + L_{23}^0 \Omega_3\right)dx_1 + \int_{l_2}\left(T_{11}^0 u_1 + S_{12}^0 u_2 + L_{13}^0 \Omega_3\right)dx_2 + \right. \\ &\left. + \iint_S \left[\left(p_1^+ + p_1^-\right)u_1 + \left(p_2^+ + p_2^-\right)u_2 + \left(m_3^+ + m_3^-\right)\Omega_3\right]ds\right\} \end{aligned} \tag{4.3}$$

Из уравнения баланса энергии (4.1) легко доказать теорему единственности для краевой задачи (3.2) - (3.7) термоупругости тонких пластин при плоском напряжённом состоянии. Отметим также, что на основе формулы (4.2) для плотности потенциальной энергии деформации получаются формулы типа Грина:

$$T_{11} = \frac{\partial W_0}{\partial \Gamma_{11}},\ T_{22} = \frac{\partial W_0}{\partial \Gamma_{22}},\ S_{12} = \frac{\partial W_0}{\partial \Gamma_{12}},\ S_{21} = \frac{\partial W_0}{\partial \Gamma_{21}},\ L_{13} = \frac{\partial W_0}{\partial k_{13}},\ L_{23} = \frac{\partial W_0}{\partial k_{23}}. \tag{4.4}$$

Из уравнения баланса энергии (4.1) основывается также тот факт, что в термоупругости микрополярных пластин имеет место теорема взаимности Бетти.

Аналогичным образом из выражения вариационного функционала трёхмерной теории микрополярой термоупругости [9,12] на основе метода гипотез получим вариационный функционал плоского напряжённого состояния термоупругости микрополярных ортотропных тонких пластин:

$$\begin{aligned} I_0 &= \iint_s \left\langle W_0 - \left\{T_{11}\left(\Gamma_{11} - \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) + T_{22}\left(\Gamma_{22} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + S_{12}\left[\Gamma_{12} - \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \Omega_3\right)\right] + \right.\right. \\ &\left.\left. + S_{21}\left[\Gamma_{21} - \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \Omega_3\right)\right] + L_{13}\left[k_{13} - \frac{\partial \Omega_3}{\partial x_1}\right] + L_{23}\left[k_{23} - \frac{\partial \Omega_3}{\partial x_2}\right]\right\}\right\rangle ds - \\ &- \iint_S \left(p_1^+ u_1 + p_2^+ u_2 + m_3^+ \Omega_3\right)ds + \iint_S \left(p_1^- u_1 + p_2^- u_2 + m_3^- \Omega_3\right)ds + \\ &+ \int_{l_1'}\left(S_{21}^0 u_1 + T_{22}^0 u_2 + L_{23}^0 \Omega_3\right)dx_1 + \int_{l_1''}\left[T_{22}\left(u_2 - u_2^0\right) + S_{21}\left(u_1 - u_1^0\right) + L_{23}\left(\Omega_3 - \Omega_3^0\right)\right]dx_1 + \\ &+ \int_{l_2'}\left(T_{11}^0 u_1 + S_{12}^0 u_2 + L_{13}^0 \Omega_3\right)dx_2 + \int_{l_2''}\left[T_{11}\left(u_1 - u_1^0\right) + S_{12}\left(u_2 - u_2^0\right) + L_{13}\left(\Omega_3 - \Omega_3^0\right)\right]dx_2. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Варьируя функционал I_0 по всем независимым функциональным аргументам, из вариационного уравнения $\delta I_0 = 0$ получим основные уравнения и граничные условия (3.1)-(3.7) микрополярных упругих тонких пластин при плоском напряжённом состоянии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мелан Э., Паркус Г. Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. М.: Физмат гиз, 1958. 167с.
2. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964. 518с.
3. Коваленко А.Д. Термоупругость. Киев: Вища школа, 1975. 216с.
4. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360с.
5. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 448с.
6. Подстригач Я.С., Швец Р.Н. Термоупругость тонких оболочек. Киев: Наукова думка, 1978. 344с.
7. Новацкий В. Моментные напряжения в термоупругсти // Прикладная механика. 1967. Т.III. Вып.1. С.3-17.
8. Nowacki W. Couple-Stresses in the Theory of Thermoelasticity // Irreversible Aspects of Continuum Mechanics and Transfer of Physical Characteristics in Moving Fluids// IUTAM Symposia.Vienna, 1966. Editors H.Parkus, L.I.Sedov.Springer-Verlag.Wien; New York.1966.P.259-278.
9. Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford, Pergamon Press. 1986. 383p.
10. Амбарцумян С. А. Микрополярная теория оболочек и пластин. Ереван: НАН Армении. 2013. 222с.
11. Sargsyan S. H. Mathematical Model of Micropolar Thermo-Elasticity of Thin Shells// Journal of Thermal Stresses.2013. Vol.36. № 11.P.1200-1216.
12. Саркисян С.О. Некоторые общие вопросы теории термоупругости микрополярных тонких оболочек //Изв. НАН Армении. Механика. 2014. Т.67. № 2. С.52-58.
13. Iesen D. Torsion of Anisotropic Micropolar Elastic Cylinders // ZAMM. 1974. V.54. №12.P. 773-779.

Сведения об авторе:

Асланян Наира Самвеловна – аспирантка кафедры «Высшая математика и методы преподавания математики» Гюмрийского государственного пединститута им. М.Налбандяна.
(374 55) 73-57-24, (374 312) 5 63 45
E-mail: asnaira73@mail.ru

АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ ФЛАТТЕРНЫХ КОЛЕБАНИЙ ГИБКОЙ ПЛАСТИНКИ В ПОСЛЕКРИТИЧЕСКОЙ СТАДИИ

Багдасарян Г.Е., Микилян М.А., Сагоян Р.О.

Рассматривается задача нелинейных колебаний изотропной прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа. Исследование проведено с учётом обоих типов нелинейности: аэродинамической (квадратичной и кубической) и геометрической (кубической). Известно [1], что зависимость частоты нелинейных колебаний пластинки θ от амплитуды A в отсутствии обтекающего потока носит жёсткий характер, т.е. с увеличением амплитуды частоты колебаний возрастают. В настоящей работе исследуется влияние сверхзвукового потока на амплитудно-частотную зависимость, когда скорость потока превышает критическую скорость флаттера. Установлено, что присутствие обтекающего потока может стать источником как количественного, так и качественного изменения характера указанной монотонно возрастающей зависимости.

Рассмотрим тонкую изотропную прямоугольную пластинку постоянной толшины h. Прямоугольная система координат α,β,γ выбрана так, что координатная плоскость α,β совпадает со срединной плоскостью пластинки, а координатные оси α и β направлены по сторонам рассматриваемой пластинки. Пусть, далее, пластинка обтекается с одной стороны сверхзвуковым потоком газа с невозмущённой скоростью $\vec{u}$, направленной вдоль оси 0α. Принимаются следующие предположения:

а) гипотеза Кирхгофа о недеформируемых нормалях [8];

б) основные предположения теории гибких пластин, считая, что нормальные перемещения сравнимы с толщиной пластинки [1];

в) избыточное давление газа представляется по приближённой формуле «поршневой теории» [9,10].

На основе принятых предположений получается следующая нелинейная система дифференциальных уравнений движения пластинки [2]:

$$\frac{1}{Eh}\Delta^2 F+\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta}\right)^2=0, \tag{1}$$

$$\begin{gathered}D\Delta^2 w-\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\beta^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha^2}+2\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta}\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha\partial\beta}+\rho_0 h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\left(\rho_0 h\varepsilon+\frac{æp_\infty}{a_\infty}\right)\frac{\partial w}{\partial t}+\\ +æp_\infty\left[M\frac{\partial w}{\partial\alpha}+\frac{æ+1}{4}M^2\left(\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right)^2+\frac{æ+1}{12}M^3\left(\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right)^3\right]=0,\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь

$$D=\frac{Eh^3}{12\left(1-\mu^2\right)},\quad M=\frac{u}{a_\infty},\ a_\infty=\frac{æp_\infty}{\rho_\infty},$$

$w(\alpha,\beta,t)$ – прогиб пластинки, M – число Маха, a_∞ – скорость звука для невозмущённого газа, æ – показатель политропы, μ – коэффициент Пуассона, ρ_0 – плотность материала пластинки, p_∞ и ρ_∞ – давление и плотность газа в невозмущённом состоянии, ε – коэффициент линейного затухания, $F=F(\alpha,\beta,t)$ – функция напряжений.

При исследовании вопросов колебания к уравнениям (1)–(2) присоединяются также условия на контуре пластинки. Здесь рассматривается шарнирно опёртая по всему контуру прямоугольная пластинка $\left(0\le\alpha\le a,\ 0\le\beta\le b\right)$, на краях которой действуют сжимающие усилия, средние значения которых равны p_α^0 и p_β^0, соответственно. Тогда, следуя [2], граничные условия задачи принимаются в виде:

при $\alpha=0$, $\alpha=a$

$$w=0,\quad M_\alpha=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}\right)=0,\quad S^0=0,\ T_\alpha^0=-p_\alpha^0,\tag{3}$$

при $\beta=0$, $\beta=b$

$$w=0,\quad M_\beta=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}\right)=0,\quad S^0=0,\ T_\beta^0=-p_\beta^0,\tag{4}$$

где T_α^0, T_β^0, S^0 – средние значения усилий на кромках пластинки.

Приближённое решение уравнения (2), удовлетворяющее условиям (3) и (4), будем искать в виде [2]

$$w(\alpha,\beta,t)=f_{11}(t)\sin\lambda_1\alpha\cdot\sin\mu_1\beta+f_{21}(t)\sin\lambda_2\alpha\cdot\sin\mu_1\beta,\qquad\left(\lambda_i=\frac{i\pi}{a},\ \mu_k=\frac{k\pi}{b}\right).\tag{5}$$

Подставив (5) в (1), найдём функцию F, удовлетворяющую граничным условиям. Для определения $f_{ik}(t)$ воспользуемся уравнением (2). Подставляя (5) и найденное выражение для F в (2) и применяя метод Бубнова-Галеркина, для определения безразмерных неизвестных функций $x_1=f_1(t)/h$, $x_2=f_2(t)/h$ получим следующую нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений [2]:

$$\begin{gathered}\frac{d^2x_1}{d\tau^2}+\chi\frac{dx_1}{d\tau}+x_1-\frac{2}{3}k\nu x_2+k\nu^2\left[\alpha_{11}x_1^2+\alpha_{12}x_2^2+\nu x_2\left(\beta_{11}x_1^2+\beta_{12}x_2^2\right)\right]+Qx_1\left(\gamma_{11}x_1^2+\gamma_{12}x_2^2\right)=0\\ \frac{d^2x_2}{d\tau^2}+\chi\frac{dx_2}{d\tau}+\gamma^2x_2+\frac{2}{3}k\nu x_1+k\nu^2\left[\alpha_{21}x_1x_2+\nu x_1\left(\beta_{21}x_1^2+\beta_{22}x_2^2\right)\right]+Qx_2\left(\gamma_{21}x_1^2+\gamma_{22}x_2^2\right)=0.\end{gathered}\tag{6}$$

Здесь, наряду с безразмерным временем $\tau=\omega_1 t$, введены обозначения:

$$\left.\begin{aligned}&\omega_i^2=\frac{1}{\rho_0 h}\left[D\left(\lambda_i^2+\mu_1^2\right)^2-\lambda_i^2p_\alpha^0-\mu_1^2p_\beta^0\right]\quad(i=1,2),\\ &k=\frac{4æp_\infty}{\rho_0\omega_1^2h^2},\quad Q=\frac{h}{16\rho_0\omega_1^2},\quad \nu=M\frac{h}{a},\qquad\gamma=\frac{\omega_2}{\omega_1},\qquad\chi=\frac{2}{\omega_1}\left(\varepsilon+\frac{æp_\infty}{\rho_0ha_\infty}\right),\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_{11}=\frac{2}{9}(æ+1),\quad\alpha_{12}=\frac{56}{45}(æ+1),\quad\alpha_{21}=\frac{16}{45}(æ+1),\\ &\beta_{11}=\beta_{21}=\frac{\pi^2}{40}(æ+1),\quad\beta_{22}=\frac{11\pi^2}{70}(æ+1),\quad\beta_{12}=-\frac{9\pi^2}{70}(æ+1),\\ &\gamma_{11}=Eh\left(\lambda_1^4+\mu_1^4\right),\ \gamma_{12}=\gamma_{21}=4\gamma_{11}+Eh\left(\frac{81}{\Delta_{\lambda_1\mu_2}}+\frac{1}{\Delta_{\lambda_3\mu_2}}\right)\lambda_1^4\mu_1^4,\quad\gamma_{22}=Eh\left(\lambda_2^4+\mu_1^4\right),\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

где ω_1 и ω_2 – частоты первой и второй формы малых собственных колебаний пластинки, ν – приведённый параметр скорости.

Решена соответствующая (6) линейная система однородных дифференциальных уравнений. Из условия существования нетривиального решения указанной системы получена следующая формула определения критической скорости флаттера в случае выбранной формы потери устойчивости пластинки [2]:

$$\nu_{cr}=\frac{3}{4}\frac{\gamma^2-1}{k}\sqrt{1+\frac{2\chi^2\left(\gamma^2+1\right)}{\left(\gamma^2-1\right)^2}}.\tag{9}$$

Переходим к исследованию нелинейной задачи, описываемой нелинейной системой (6). Эта система отличается от аналогичных систем устойчивости гибких пластин загруженных консервативными силами, наличием членов с квадратичными нелинейностями. Указанные члены, имеющие аэродинамическое происхождение, характеризуют несимметричность нелинейности, присущую к задачам устойчивости гибких оболочек. Поэтому, приближённое периодическое решение системы (6) будем искать в виде [1,5,11]:

$$x_1 = A_1\cos\theta\tau + B_1\sin\theta\tau + C_1 + \ldots, \qquad x_2 = A_2\cos\theta\tau + B_2\sin\theta\tau + C_2 + \ldots \qquad (10)$$

Здесь A_i, B_i, C_i – неизвестные постоянные и $\theta = \omega\omega_1^{-1}$ $\left(i=1,2\right)$; ω – неизвестная частота нелинейных колебаний; точками обозначены члены, содержащие гармоники.

Подставляя решение (10) в систему (6) и приравнивая к нулю коэффициенты при свободном члене, $\cos\theta\tau$ и $\sin\theta\tau$, получается система нелинейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов. Указанная система исследуется, предполагая, что [5]: а) затухание системы достаточно мало ($\chi\left|B_i\right| << \left|A_i\right|$, $\left|B_i\right| << \left|A_i\right|$; $\left(i=1,2\right)$) и б) рассматриваемая аэроупругая система совершает установившееся колебание с конечной амплитудой вокруг состояния, бесконечно мало отличающегося от невозмущённого $\left(\left|A_i\right| >> \left|C_j\right|;\ j=1,2\right)$.

В силу этого получается упрощённая система нелинейных алгебраических уравнений, которая решается численно при следующих исходных данных: $E = 7.3\cdot10^{10}$ Н/м^2; $\mu = 0.34$; ρ_0=2.79$\cdot10^3$кг/м^3 (дюрал.), æ=1.4; $\rho_\infty = 1.29 кг/м^3$; $a_\infty = 340.29 м/с$ (возд.). Исследована зависимость амплитуды установившихся флаттерных колебаний A от параметра θ при различных значениях ν, h/a и a/b. Вспомним [1], что в отсутствие обтекающего потока зависимость частоты нелинейных колебаний пластинки θ от амплитуды A носит жёсткий характер, т.е. с увеличением амплитуды частота колебаний возрастает. В работах [6,7] исследована указанная зависимость как в случае докритических, так и в критических стадиях. В указанных работах установлено, что

- существует интервал $\left[\theta_1,\theta_2\right]$ изменения частоты θ такой, что если $\theta < \theta_1$, то невозможно возбудить флаттерные колебания. При $\theta \in \left[\theta_1,\theta_2\right]$ функция $A\left(\theta\right)$ является однозначной, при $\theta > \theta_2$ функция $A\left(\theta\right)$ становится двузначной; с увеличением скорости обтекающего потока длина отрезка $\left[\theta_1,\theta_2\right]$ стремится к нулю;
- характер амплитудно-частотной зависимости нелинейных колебаний пластин, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа (благодаря аэродинамической нелинейности), идентичен характеру указанной зависимости в случае нелинейных собственных колебаний оболочек;
- с увеличением скорости обтекающего потока область определения функции $A(\theta)$ из полубесконечной области $\left[\theta_1,+\infty\right)$ превращается в замкнутый отрезок $\left[\theta_*,\theta^*\right]$. Т.е. существует интервал $\left[\theta_*,\theta^*\right]$ изменения частоты θ, вне которого невозможно возбудить установившиеся флаттерные колебания;
- а) предельное значение частоты $\overline{\theta}_*$ (меньше которого невозможно возбудить флаттерные колебания), будучи больше единицы, увеличивается с уменьшением a/b; b) установившиеся флаттерные колебания существуют при частотах $\theta > \overline{\theta}_*$;
- если a/b достаточно меньше единицы, то область определения $A\left(\theta\right)$– полубесконечный интервал $\left[\theta_*,\infty\right)$, где функция $A\left(\theta\right)$ является многозначной функцией;
- в отличие от случая $\nu = 0$, где возможно возбудить нелинейные колебания только с частотой $\theta > \gamma$, при $\nu = \nu_{cr}$ флаттерные колебания можно возбудить с частотой намного меньше γ и областью изменения частоты является полубесконечная область $[\theta_*,+\infty)$, где $\theta_* < \gamma$.

В настоящей работе исследована амплитудно-частотная зависимость рассматриваемых прямоугольных пластин в послекритической стадии $\left(\nu > \nu_{cr}\right)$. Для этого случая функции $A\left(\theta\right)$, найденные численным методом, приведены в табл. 1 и 2, на основе которых построены рис. 1–3.

Таблица 1. Значения амплитуды флаттерных колебаний при $\nu > \nu_{cr}$ и $b = 3a$.

ν	θ / h/a	1	1.5	2	γ=2.5	3	4
$\nu = 1.2\nu^{*}$	1/80	-	0.848 0.565	0.621 0.302	-	-	-
	1/200	-	-	2.503 0.061	4.249 0.731	5.486 0.781	7.691 0.735
$\nu = 1.5\nu^{*}$	1/80	0.544 0.442	0.487 0.346	0.29 0.2	-	-	-
	1/200	-	-	-	3.978 1.307	5.367 1.116	7.647 1.073

Таблица 2. Значения амплитуды флаттерных колебаний при $\nu = 2\nu_{cr}$ и $a = 80h$.

θ / a/b	0	1	2	3.5	4
1/5	0.554 0.401	0.5334 0.3652	0.46 0.275	0.192 0.081	-
1/3	0.526 0.392	0.503 0.354	0.421 0.258	0.111 0.055	-

Рисунки 1 и 2 показывают, что

- характер амплитудно-частотной зависимости при $\nu > \nu_{cr}$ качественно совпадает со случаем $\nu = \nu_{cr}$ (см. [6]). Помимо этого, по сравнению со случаем $\nu = \nu_{cr}$, имеют место следующие количественные отклонения: a) график функции $A(\theta)$ оторван от оси абсцисс; b) в случае относительно толстых пластин областью определения функции $A(\theta)$ является отрезок $\left[\theta_{*}, \theta^{*}\right]$, который с уменьшением отношения a/b расширяется с обеих сторон и левая граница интервала изменения частоты θ_{*} при определённом значении a/b может находиться левее точки $\theta = 1$ (рис.1).
- Качественно новой зависимостью является рис.3, который показывает, что если ν достаточно больше ν_{cr} и пластинка сравнительно толстая, то: a) областью определения функции $A(\theta)$ является конечный интервал вида $\left[0, \theta^{*}\right]$; b) в отличие от случая $\nu \le \nu_{cr}$, флаттерные колебания могут существовать и при $0 \le \theta < 1$; c) существует определённое значение частоты θ^{*} такое, что возбудить колебания с частотой больше θ^{*} невозможно.

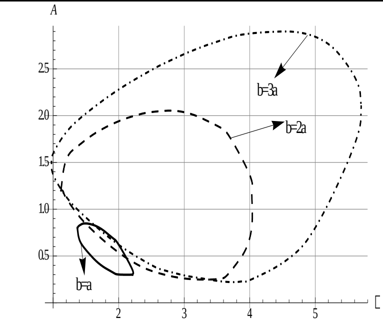


Рис.1. $\nu = 1.2\nu_{cr}$ **и** $a = 80h.$

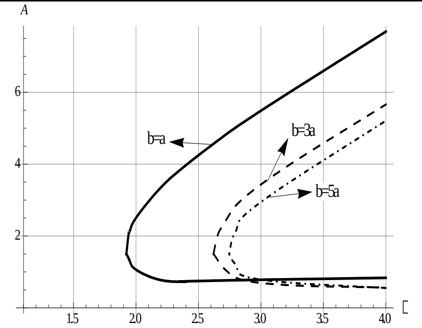


Рис.2. $\nu = 1.2\nu_{cr}$ **и** $a = 200h.$

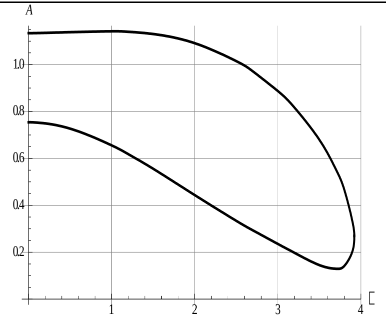


Рис.3. $\nu = 1.5\nu_{cr}$ **и** $a = 80h,\ b = 3a.$

Таким образом, установлена возможность существования установившихся нелинейных колебаний в случае послекритических скоростей. Установлен также, что переход из одного типа амплитудно-частотной зависимости к другому можно регулировать не только (вплоть до невозможности возбуждения подобных колебаний) соответствующим выбором геометрических и физических параметров рассматриваемой аэроупругой системы, но и величиной скорости обтекающего потока.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
3. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. М.: Наука, 2006. 247 с.
4. Новичков Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек //Итоги науки и технологии. Механика деформируемых твердых тел. М.: Наука, 1978. Т.11. С.67-122.
5. Багдасарян Г.Е. Об устойчивости ортотропных пологих оболочек, обтекаемых сверх-звуковым потоком газа. //Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1961. №1. С. 92-98.
6. Багдасарян Г.Е., Микилян М.А., Сагоян Р.О., Марзока П. Влияние сверхзвукового потока на характер амплитудно-частотной зависимости нелинейных колебаний гибкой пластинки. //Изв. НАН Армении. Механика. 2013. Т.66. №3. С. 24-37.
7. Багдасарян Г.Е., Микилян М.А., Сагоян Р.О. Характер амплитудно-частотной зависимости нелинейных колебаний гибкой пластинки при критических скоростях. //Прикладная математика и механика. Гюмри 2014. Вып.А. №1. С. 20-39.
8. Власов В.З. Общая теория оболочек и её приложения в технике. М.: Гостехтеориздат, 1949.
9. Ashley H., Zartarian C. Piston theory – a new aerodynamic tool for the aeroelastician. //Journ. Aeronaut. Sci. 23, №6, 1956.
10. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях. //ПММ. 1956. Т.XX. Вып.6.
11. Гнуни В.Ц. К теории динамической устойчивости слоистых анизотропных пологих оболочек. //Изв. АН Арм.ССР. Сер. Физ.-мат.наук. 1960. Т.13. №1. С.47–58.

Сведения об авторах:

Багдасарян Геворг Ервандович – академик НАН Армении, профессор, ведущий научный сотрудник Института механики НАНАрмении. **Тел.:** (060) 710089; **E-mail:** gevorgb@rau.am

Микилян Марине Александровна – к.ф.-м.н., доцент, старший научный сотрудник Института механики НАН Армении. **Тел.:** (091) 191129; **E-mail:** mikilyan@rau.am

Сагоян Рафаэль Оникович – внештатный сотрудник Института механики НАН Армении
Тел.: (093) 248226; **E-mail:** rafael1984@mail.ru.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ КОЛЕБАНИЯМИ СТЕРЖНЯ С ЗАДАННЫМИ СОСТОЯНИЯМИ В ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ МОМЕНТЫ ВРЕМЕНИ

Барсегян В.Р.

Исследуется задача граничного управления для уравнения поперечных колебаний стержня с заданными состояниями в промежуточные моменты времени, в частности, в некоторые моменты времени могут быть заданы только или значения прогиба или скорости, или одновременно оба значения точек стержня. Задача сводится к задаче с нулевыми граничными условиями и методом разделения переменных для произвольных чисел первых гормоник построено управляющее воздействие. В качестве приложения предложенного подхода построено управляющее воздействие для управления колебаниями стержня с заданным прогибом точек в некоторый промежуточный момент времени.

Введение. На практике часто возникают задачи граничного управления колебаниями стержня, когда нужно сгенерировать желаемую форму колебания, обеспечить выполнение заданных состояний в промежуточные моменты времени, стабилизировать колебания или полностью успокоить колебания.

В работах [1-9] исследованы задачи управления упругими колебаниями, с помощью внешних и граничных управлений при различных типах граничных условий. В [4] рассматриваются задачи управления упругими колебаниями, описываемые одномерным волновым уравнением, и приведены способы построения граничных управлений. Работа [5] (и другие работы этих авторов) посвящена проблеме граничного управления (оптимального управления) вольновыми процессами в классе обобщённых решений и получены граничные управления. В работах [6, 7] рассмотрены задачи об оптимальном управленни колебаниями струны и мембраны с заданными промежуточными состояниями с помощью внешних сил, действующих на системы. В работе [8] методом Фурье решены задачи оптимального граничного управления колебаниями упругих систем, описываемым вольновым уравнением. В работах [10, 11] рассматривается граничная задача для уравнения колебания струны с заданной скоростью в некоторый момент времени колебания струны и строится решение задачи.

В настоящей работе рассматривается задача граничного управления для уравнения поперечных колебаний стержня с заданными состояниями в промежуточные моменты времени, в частности, могут быть заданы только или значения прогиба, или скорости точек стержня.

1. Постановка задачи. Рассмотрим однородный, упругий стержень длины l, который занимает в равновесном горизонтальном положении отрезок $[0,l]$ по оси симметрии Ox. Обозначим через ρ и E линейную плотность и модуль упругости материала стержня, через S и J – площадь поперечного сечения и момент инерции сечения стержня относительно своей горизонтальной оси. Пусть состояние колебательной системы (малые поперечные колебания стержня), т.е. отклонения от положения равновесия точки x оси стержня в момент времени t, описываются функцией $Q(x,t)$, $0 \le x \le l$, $0 \le t \le T$, которая подчиняется при $0 < x < l$ и $0 < t < T$ уравнению

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 Q}{\partial x^4} = 0 \tag{1}$$

с начальными условиями

$$Q(x,0) = \varphi_0(x), \qquad \left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_0(x), \qquad 0 \le x \le l \tag{2}$$

и граничными условиями

$$Q(0,t) = \mu(t), \qquad Q(l,t) = \nu(t), \qquad 0 \le t \le T \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right|_{x=l} = 0, \qquad 0 \le t \le T, \tag{4}$$

где функции $\mu(t)$ и $\nu(t)$ – граничные управляющие функции, которые дважды непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют некоторым условиям согласования. В уравнении (1) принято обозначение $a^2 = \dfrac{EJ}{\rho S}$.

Предполагается, что совокупность всех функций $Q(x,t)$, удовлетворяющие уравнению (1), дважды непрерывно дифференцируемы по t ($0 \le t \le T$) и четырежды непрерывно дифференцируемы по x вплоть до границы области ($0 < x < l$).

Пусть в некоторые промежуточные моменты времени

$$0 = t_0 < t_1 < ... < t_m < t_{m+1} = T$$

могут быть заданы значения функции прогиба и скорости точек стержня:

$$Q(x,t_i) = \varphi_i(x), \qquad 0 \le x \le l, \qquad i = 1,...,m \tag{5}$$

$$\left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_{t=t_i} = \psi_i(x), \qquad 0 \le x \le l, \qquad i = 1,...,m \tag{6}$$

Необязательно, чтобы в промежуточные моменты времени t_i были заданы одновременно функции прогиба (5) и скорости (6) точки стержня. Может быть, что в некоторый момент времени задана только функция прогиба (5), в следующий момент времени только скорость прогиба (6), а в третий момент времени заданы одновременно значения прогиба и скорости точек стержня.

Задача граничного управления колебаниями стержня с заданными состояниями в промежуточные моменты времени можно ставить следующим образом: среди возможных управлений $\mu(t)$ и $\nu(t)$, $0 \le t \le T$ требуется найти управление, переводящее колебания стержня (1) из заданного начального состояния (2) через промежуточные состояния (5), (6) (в некоторые моменты времени t_i $(i=1,...,m)$ могут быть заданы только одно из них или одновремено оба условия) в конечное состояние

$$Q(x,T)=\varphi_T(x)=\varphi_{m+1}(x),\ \left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_{t=T}=\psi_T(x)=\psi_{m+1}(x),\ 0\le x\le l\,. \tag{7}$$

Предположим, что заданные функции $\varphi_i(x),\ \psi_i(x)$ $(i=0,1,...,m,\ m+1)$ имеют до 4-ого порядка непрерывные производные.

Отметим, что поставленая задача в тех случаях, когда в отдельные промежуточные моменты времени, считается заданными только одно из условий (5) или (6), или когда одновременно заданы оба эти условия, различаются физическими интерпритациями, следовательно их можно рассматривать как разные задачи.

2. О решении задачи. Использовать подход поэтапного решения для рассмотренной задачи управления нецелесообразно, так как его невозможно применить, в частности, в тех случаях, когда в отдельные промежуточные моменты времени заданы только или значения прогиба (5) или скорости (6) точек стержня. Поэтому в работе предлагается такой подход: решения рассмотренной задачи управления, в котором можно учитывать специфику возможных промежуточных условий. Не нарушая общности в работе, решение задачи строится, считая, что в промежуточные моменты времени заданы оба условия (5) и (6). В тех случаях, когда в некоторые моменты времени одно из этих условий не будет заданным, то соответствующие соотношения просто не будут участвовать (или исключим).

Задача граничного управления для уравнения колебания стержня с заданными значениями в промежуточные моменты времени сводится к задаче с нулевыми граничными условиями [9], т.е. $\dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2}+a^2\dfrac{\partial^4 V}{\partial x^4}=F(x,t)$,

где $V(x,t)$ – неизвестная функция, удовлетворяющая уравнению (1) с однородными граничными условиями

$$V(0,t)=V(l,t)=0\,,\quad \left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{x=l}=0\,,$$

а $F(x,t)=(\mu''(t)-\nu''(t))\dfrac{x}{l}-\mu''(t)$.

Учитывая начальные, промежуточные и конечные условия (2), (5), (6) и (7) соответственно, получены следующие условия согласования

$$\begin{aligned}&\mu(0)=\varphi_0(0), && \nu(0)=\varphi_0(l)\\ &\mu'(0)=\psi_0(0), && \nu'(0)=\psi_0(l)\end{aligned},$$

$$\begin{aligned}&\mu(t_i)=\varphi_i(0), && \nu(t_i)=\varphi_i(l) && i=1,...,m\\ &\mu'(t_i)=\psi_i(0), && \nu'(t_i)=\psi_i(l) && i=1,...,m\end{aligned},$$

$\mu(T)=\varphi_T(0), \qquad \nu(T)=\varphi_T(l)$
$\mu'(T)=\psi_T(0), \qquad \nu'(T)=\psi_T(l)$

Далее, применяя метод разделения переменных, получены интегральные соотношения, в которых учитывается специфика заданных промежуточных условий и, в общем случае, имеют следующий вид:

$$\int_0^T H_k^{(i)}(\tau)u(\tau)d\tau = C_k(t_i) \qquad i=1,\ldots,\ m+1;\ k=1,\ 2,\ldots.$$

$$H_k^{(i)}(\tau)=\begin{cases}\bar{H}_k(\tau) & \text{при} \quad 0\le\tau\le t_i \\ 0 & \text{при} \quad t_i<\tau\le t_{m+1}=T\end{cases}, \qquad \bar{H}_k(\tau)=\begin{pmatrix}\sin\lambda_k\tau & -(-1)^k\sin\lambda_k\tau \\ \cos\lambda_k\tau & -(-1)^k\cos\lambda_k\tau\end{pmatrix},$$

$$u(\tau)=\begin{pmatrix}\mu(\tau)\\ \nu(\tau)\end{pmatrix}, \qquad C_k(t_i)=\begin{pmatrix}C_{1k}(t_i)\\ C_{2k}(t_i)\end{pmatrix}, \qquad \lambda_k^2=a^2\left(\frac{\pi k}{l}\right)^4.$$

Здесь $C_{jk}(t_i)$ ($j=1,\ 2$; $i=1,\ldots,\ m+1$; $k=1,\ 2,\ldots$) – известные величины, выраженные через начальные, промежуточные и конечные значения колебаний.

На основе широко применяемого на практике модального метода выбираются несколько первых гармоник упругих колебаний и решается задача синтеза управления с использованием методов теории управления конечномерными системами [13]. В результате, для произвольного числа первых гармоник построено граничное управляющее воздействие.

Отметим, что такой подход позволяет рассматривать задачи граничного управления и для тех случаев, когда в отдельные промежуточные моменты времени, заданы только или значения прогиба (условия (4)), или скорости (условия (5)) точек стержня.

Для иллюстрации изложенного предполагается, что в граничных условиях (3) $Q(l,t)=0$, (т.е. $\nu(t)=0$), $Q(0,t)=\mu(t)$, $0\le t\le T$, т.е. управляющим воздействием является только функция $\mu(t)$, и в промежуточный момент времени t_1 ($0<t_1<T$) (т.е. $i=1$) задан только прогиб точек стерженя:

$Q(x,t_1)=\varphi_1(x), \quad 0\le x\le l$.

т.е. имеем только условие (5). В этом случае для первой гармоники (при $n=1$) имеем:

$$u_1(t)=\mu(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{S_1}[C_{11}(t_1)+C_{11}(T)\sin\lambda_1 t+C_{21}(T)\cos\lambda_1 t], & t\in[0,t_1]\\ \dfrac{1}{S_1}[C_{11}(T)\sin\lambda_1 t+C_{21}(T)\cos\lambda_1 t], & t\in(t_1,T]\end{cases},$$

где

$$S_1=T+\frac{t_1}{2}-\frac{\sin 2\lambda_1 t_1}{4\lambda_1}.$$

Таким образом, полученное явное выражение для функций $\mu(t)$ позволяет вычислить соответствующие характеристики колебания стержня.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределёнными параметрами. М.: Наука, 1975. 568с.
2. Сиразетдинов Т.К. Оптимизация систем с распределёнными параметрами. М.: Наука, 1977. 480с.
3. Дегтярев Г.Л., Сиразетдинов Т.К. Теоретические основы оптимального управления упругими космическими аппаратами. М.: Наука, 1986. 216с.
4. Знаменская Л.Н. Управление упругими колебаниями. М.: Физматлит, 2004. 176с.
5. Ильин В.А., Моисеев Е.И. Оптимизация граничных управлений колебаниями струны. //Успехи математических наук. 2005. Т.60. Вып. 6 (366). С.89-114.
6. Барсегян В.Р., Саакян М.А. Оптимальное управление колебаниями струны с заданными состояниями в промежуточные моменты времении. //Изв. НАН Армении. Механика. 2008. Т.61. № 2. С.52 – 60.
7. Барсегян В.Р. Об оптимальном управлении колебаниями мембраны при фиксированных промежуточных состояниях. /Уч. записки ЕГУ. 1998. №1(188). С.24-29.
8. Barseghyan V.R. and Movsisyan L.A. Optimal control of the vibration of elastic systems described by the wave equation. //International Applid Mechanics. V.48. №2. 2012. Pp. 234-239.
9. Андреев А.А., Лексина С.В. Задача граничного управления для системы волновых уравнений. //Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. 2008. № 1(16), с. 5-10.
10. Корзюк В.И., Козловская И.С. Двухточечная граничная задача для уравнения колебания струны с заданной скоростью в некоторый момент времени. I. //Труды Ин-та мат. НАН Беларуси. 2010. Т.18. № 2. С.22–35.
11. Корзюк В.И., Козловская И.С. Двухточечная граничная задача для уравнения колебания струны с заданной скоростью в некоторый момент времени. II. //Труды Ин-та мат. НАН Беларуси. 2011. Т.19. №1.С.62–70.
12. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнение математической физики. М.: 1977. 736 с.
13. Зубов В.И. Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975. 496 с.

Сведения об авторе:

Барсегян Ваня Рафаелович – доктор физ. мат. наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении, профессор ЕГУ, факультет математики и механики.

Тел.: (091) 20 32 20; **E-mail:** barseghyan@sci.am

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ОДНОЙ СОСТАВНОЙ СИСТЕМЫ СО СМЕНОЙ ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА

Барсегян Т.В.

В работе рассматривается задача управления одной составной системы, образованной не вполне управляемыми подсистемами и со сменой фазового пространства. Для любого начального и конечного состояния системы построено явное решение задачи управления. Приведён численный пример.

1. Постановка задачи. Рассмотрим модель управляемого объекта, динамика которого описывается следующими диффере нциальными уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_3 \qquad \text{при } t \in [t_0, t_1] \\ \dot{x}_3 = x_2 + u \end{cases} \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1 - y_2 + v \\ \dot{y}_2 = y_1 - y_2 + v \end{cases} \qquad \text{при } t \in [t_1, T] \tag{1.2}$$

Преемственность между системами (1.1) и (1.2) в момент времени t_1 обеспечивается выполнением следующего условия:

$$Ex(t_1) + Fy(t_1) = \beta, \quad \text{где} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Системы (1.1) и (1.2) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = A_1 x + b^{(1)} u \quad \text{при } t \in [t_0, t_1) \\ &\dot{y} = A_2 y + b^{(2)} v \quad \text{при } t \in [t_1, T] \end{aligned}, \tag{1.4}$$

где

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть заданы начальное и конечное состояния системы (1.4) (или (1.1) и (1.2)).

$$x(t_0) = (x_1(t_0),\ x_2(t_0),\ x_3(t_0))^T, \qquad y(T) = (y_1(T),\ y_2(T))^T \tag{1.5}$$

Здесь и далее верхний индекс "T" означает операцию транспонирования.

Отметим, что матрицы управляемости по отдельности для систем (1.1) и (1.2) имеют вид [1-3]:

$$K_1 = \{b^{(1)}, A_1 b^{(1)}, A_1^2 b^{(1)}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad K_2 = \{b^{(2)}, A_2 b^{(2)}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, будем иметь $\mathrm{rang} K_1 \neq 3$ и $\mathrm{rang} K_2 \neq 2$. Поэтому, в промежутке времени $[t_0, t_1]$ система (1.1) не вполне управляема, а в промежутке времени $[t_1, T]$ система (1.2) также не вполне управляема [1-3].

Таким образом, составная система (1.4) (или (1.1) и (1.2)) с промежуточным условием (1.3) образована не вполне управляемыми подсистемами.

Рассмотрим следующую задачу.

Требуется построить управляющее воздействие $u = u(t)$ и $v = v(t)$, переводящее движение составной системы (1.4) (или (1.1) и (1.2)) из начального состояния $x(t_0)$, обеспечивая удовлетворение промежуточному условию связи (1.3), в конечное состояние $y(T)$ в промежутке времени $[t_0, T]$.

2. Вполне управляемость составной системы. Согласно [4], для того, чтобы составная система (1.4) (или (1.1) и (1.2)) с промежуточными условиями связи (1.3) на отрезке времени $[t_0, T]$ была вполне управляемой, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы

$$K = \{C_1 b^{(1)}, C_1 A_1 b^{(1)}, C_1 A_1^2 b^{(1)}, C_2 b^{(2)}, C_2 A_2 b^{(2)}\} \tag{2.1}$$

был равен двум. Здесь, согласно введённым обозначениям [4], имеем:

$$C_1 = -e^{A_2(T-t_1)} F^{-1} E e^{A_1 t_1}, \quad C_2 = e^{A_2 T}. \tag{2.2}$$

Так как

$$A_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A_1^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

следовательно, согласно формуле вычисления экспоненциальной матрицы [1]:

$$e^{A_k t_k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A_k t_k)^n}{n!}$$

будем иметь

$$e^{A_1 t_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(2+t_1^2) & t_1 & -\frac{1}{2}t_1^2 \\ t_1 & 1 & -t_1 \\ \frac{1}{2}t_1^2 & t_1 & 1-\frac{1}{2}t_1^2 \end{pmatrix}, \qquad e^{A_2 T} = \begin{pmatrix} 1+T & -T \\ T & 1-T \end{pmatrix}, \qquad e^{A_2(T-t_1)} = \begin{pmatrix} 1-t_1+T & t_1-T \\ -t_1+T & 1+t_1-T \end{pmatrix}.$$

Учитывая $F^{-1} = F$, из формулы (2.2) будем иметь:

$$C_1 = \begin{pmatrix} -1-T+(1+T)t_1+\frac{1}{2}(-3-T)t_1^2+\frac{1}{2}t_1^3 & T+(-2-T)t_1+t_1^2 & -Tt_1+\frac{1}{2}(3+T)t_1^2-\frac{1}{2}t_1^3 \\ -T+Tt_1+\frac{1}{2}(-2-T)t_1^2+\frac{1}{2}t_1^3 & -1+T+(-1-T)t_1+t_1^2 & (1-T)t_1+\frac{1}{2}(2+T)t_1^2-\frac{1}{2}t_1^3 \end{pmatrix},$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1+T & -T \\ T & 1-T \end{pmatrix}.$$

Следовательно, согласно (2.1), будем иметь матрицу управляемости в виде

$$K = \begin{pmatrix} t_1-T-1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ t_1-T & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $\operatorname{rang} K = 2$, т.е. составная система (1.4) (или (1.1) и (1.2)) с промежуточными условиями связи (1.3) на отрезке времени $[t_0, T]$ вполне управляема, несмотря на то, что система (1.1) в интервале $[t_0, t_1]$, а система (1.2) – в интервале времени $[t_1, T]$ не вполне управляемы.

3. Решение задачи. Нормированные фундаментальные матрицы решений однородных частей составной системы (1.1) и (1.2) в промежутке времени $[t_0, t_1]$ и $[t_1, T]$, соответственно, имеют следующий вид:

$$X[t,t_0] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(t-t_0)^2+1 & t-t_0 & -\frac{1}{2}(t-t_0)^2 \\ t-t_0 & 1 & -t+t_0 \\ \frac{1}{2}(t-t_0)^2 & t-t_0 & -\frac{1}{2}(t-t_0)^2+1 \end{pmatrix}, \qquad Y[t,t_0] = \begin{pmatrix} t-t_0+1 & -t+t_0 \\ t-t_0 & -t+t_0+1 \end{pmatrix}.$$

Для решения поставленной задачи уравнения движения для первого и второго этапа составной системы (1.4) с промежуточными условиями (1.3) соответственно будут [5]

$$x(t) = X[t,t_0]x(t_0) + \int_{t_0}^{t} H_1[t,\tau]u(\tau)d\tau, \quad t \in [t_0, t_1] \tag{3.1}$$

$$y(t)=Y[t,t_1]F^{-1}\beta-Y[t,t_1]F^{-1}EX[t_1,t_0]x(t_0)-$$
$$-Y[t,t_1]F^{-1}E\int_{t_0}^{t_1}H_1[t_1,\tau]u(\tau)d\tau+\int_{t_1}^{t}H_2[t,\tau]v(\tau)d\tau,\ \ t\in[t_1,T] \tag{3.2}$$
где
$$H_1[t,\tau]=X[t,\tau]b^{(1)}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}^T,\quad H_2[t,\tau]=Y[t,\tau]b^{(2)}=\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}^T \tag{3.3}$$
Из формулы (3.2) при $t=T$ получим
$$y(T)=Y[T,t_1]F^{-1}\beta-Y[T,t_1]F^{-1}EX[t_1,t_0]x(t_0)-$$
$$-Y[T,t_1]F^{-1}E\int_{t_0}^{t_1}H_1[t_1,\tau]u(\tau)d\tau+\int_{t_1}^{T}H_2[T,\tau]v(\tau)d\tau \tag{3.4}$$
Теперь вместо функций $H_1[t_1,\tau]$ и $H_2[T,\tau]$ введём функции $\bar{H}_1[t_1,\tau]$ и $\bar{H}_2[T,\tau]$ следующим образом [5]:
$$\bar{H}_1[t_1,\tau]=\begin{pmatrix}h_1^{(1)}[t_1,\tau]\\ h_2^{(1)}[t_1,\tau]\\ h_3^{(1)}[t_1,\tau]\end{pmatrix}=\begin{cases}H_1[t_1,\tau] & \text{при}\ \ t_0\le\tau<t_1\\ 0 & \text{при}\ \ t_1\le\tau\le T\end{cases}$$
$$\bar{H}_2[T,\tau]=\begin{pmatrix}h_1^{(2)}[T,\tau]\\ h_2^{(2)}[T,\tau]\end{pmatrix}=\begin{cases}0 & \text{при}\ \ t_0\le\tau<t_1\\ H_2[T,\tau] & \text{при}\ \ t_1\le\tau\le T\end{cases} \tag{3.5}$$
Соотношение (3.4) при помощи введённых в (3.5) функций запишется следующим образом:
$$Y[T,t_1]F^{-1}E\int_{t_0}^{T}\bar{H}_1[t_1,\tau]u(\tau)d\tau-\int_{t_0}^{T}\bar{H}_2[T,\tau]v(\tau)d\tau=\eta, \tag{3.6}$$
где
$$\eta=\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix}=-y(T)+Y[T,t_1]F^{-1}\beta-Y[T,t_1]F^{-1}EX[t_1,t_0]x(t_0), \tag{3.7}$$
$$\eta_1=1-\left[\left(1+\frac{1}{2}(t_0-t_1)^2\right)(1+T-t_1)+(T-t_1)(t_0-t_1)\right]x_1(t_0)+$$
$$+\left[T-t_1+(1+T-t_1)(t_0-t_1)\right]x_2(t_0)+\frac{1}{2}(t_0-t_1)\left[2T+(1+T)t_0-(3+T+t_0-t_1)t_1\right]x_3(t_0)-y_1(T),$$
$$\eta_2=1-\left[\frac{1}{2}\left(2+(t_0-t_1)^2\right)(T-t_1)-(1-T+t_1)(t_0-t_1)\right]x_1(t_0)-$$
$$-\left[1-(T-t_1)(1+t_0-t_1)\right]x_2(t_0)-\frac{1}{2}(t_0-t_1)\left[2-(2+t_0)T+(2+T+t_0-t_1)t_1\right]x_3(t_0)-y_2(T).$$
Обозначим
$$H_1[\tau]=Y[T,t_1]F^{-1}E\bar{H}_1[t_1,\tau]=\begin{pmatrix}(1+T-t_1)h_1^{(1)}[t_1,\tau]-(T-t_1)h_2^{(1)}[t_1,\tau]\\ (T-t_1)h_1^{(1)}[t_1,\tau]+(1-T+t_1)h_2^{(1)}[t_1,\tau]\end{pmatrix},$$
$$H_2[\tau]=-\bar{H}_2[T,\tau]=\begin{pmatrix}-h_1^{(2)}[T,\tau]\\ -h_2^{(2)}[T,\tau]\end{pmatrix},$$
$$H[\tau]=\begin{pmatrix}H_1[\tau] & H_2[\tau]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1+T-t_1)h_1^{(1)}[t_1,\tau]+(-T+t_1)h_2^{(1)}[t_1,\tau] & -h_1^{(2)}[T,\tau]\\ (T-t_1)h_1^{(1)}[t_1,\tau]+(1-T+t_1)h_2^{(1)}[t_1,\tau] & -h_2^{(2)}[T,\tau]\end{pmatrix},\ U(\tau)=\begin{pmatrix}u(\tau)\\ v(\tau)\end{pmatrix} \tag{3.8}$$
Учитывая обозначения (3.8), соотношение (3.6) запишем в виде

$$\int_{t_0}^{T} H[\tau]U(\tau)d\tau = \eta. \tag{3.9}$$

Согласно [1,2], функция $U(\tau)$, $\tau \in [t_0, T]$, удовлетворяющая интегральным соотношениям (3.9), имеет следующий вид:

$$U(t) = H^T[t]Q^{-1}\eta + w(t), \tag{3.10}$$

где

$$H^T[t] = \begin{pmatrix} H_1^T[t] \\ H_2^T[t] \end{pmatrix}, \quad Q(t_0, t_1, T) = \int_{t_0}^{T} H[\tau]H^T[\tau]d\tau \tag{3.11}$$

а $w(\tau) = \begin{pmatrix} w_1(\tau) \\ w_2(\tau) \end{pmatrix}$ – некоторая вектор-функция такая, что

$$\int_{t_0}^{T} H[\tau]w(\tau)dt = 0. \tag{3.12}$$

Учитывая (3.3), (3.5), (3.8) и согласно (3.11), матрица Q имеет следующий вид:

$$Q = \begin{pmatrix} T - t_1 - (1 + T - t_1)^2 (t_0 - t_1) & (T - t_1)\left[1 - (1 + T - t_1)(t_0 - t_1)\right] \\ (T - t_1)\left[1 - (1 + T - t_1)(t_0 - t_1)\right] & (T - t_1)\left[1 - (T - t_1)(t_0 - t_1)\right] \end{pmatrix}$$

Отметим, что $\det Q = (T - t_1)(t_1 - t_0) \neq 0$, так как $t_0 < t_1 < T$, следовательно,

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} T - t_1 - \dfrac{1}{t_0 - t_1} & -1 - T + \dfrac{1}{t_0 - t_1} + t_1 \\ -1 - T + \dfrac{1}{t_0 - t_1} + t_1 & 2 + T + \dfrac{1}{T - t_1} - t_1 - \dfrac{1}{t_0 - t_1} \end{pmatrix}. \tag{3.13}$$

Учитывая обозначения (3.5), формулы (3.7), (3.8) и (3.13), управляющие воздействия, согласно (3.10), представляются в следующем виде:

$$u(t) = (Y[T, t_1]\mathrm{F}^{-1}\mathrm{E}\mathrm{H}_1[t_1, t])^T Q^{-1}\eta + w_1(t) \quad \text{при } t \in [t_0, t_1]$$

$$v(t) = -(H_2[T, t])^T Q^{-1}\eta + w_2(t) \quad \text{при } t \in [t_1, T]$$

или

$$\begin{aligned} u(t) = \frac{1}{t_0 - t_1}\Big\{ &\left[(1 + t_0)(1 - t_1) + \frac{1}{2}\left(t_1^2 + t_0^2\right)\right] x_1(t_0) - \left(t_0 - t_1 + 1\right) x_2(t_0) \\ &- \frac{1}{2}(t_0 - t_1)\left(2 + t_0 - t_1\right) x_3(t_0) + y_1(T) - y_2(T) + (t_0 - t_1)\mathrm{w}_1(t) \Big\} \quad \text{при } t \in [t_0, t_1] \\ v(t) = \frac{1}{t_1 - T}\big[&1 + (t_0 - t_1)x_1(t_0) - x_2(t_0) - (t_0 - t_1)x_3(t_0) - \\ &- (t_1 - T)y_1(T) - (1 - t_1 + T)y_2(T) - (T - t_1)\mathrm{w}_2(t) \big] \quad \text{при } t \in [t_1, T] \end{aligned} \tag{3.14}$$

Подставляя выражения управляющих воздействий (3.14) в формулы (3.1) и (3.2), получим движение системы (1.4) (или (1.1) и (1.2)) в промежутке времени $[t_0, T]$ и удовлетворяющее условию (1.3).

Отметим, что если в формулах для движения, полученного таким образом, на этапах $[t_0, t_1]$ и $[t_1, T]$ подставить $t = t_0$ и $t = T$, то соответственно получим $x(t_0)$ и $y(T)$, т.е. (1.5).

4. Численный пример. Пусть $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $T = 2$, $x(t_0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T$, $y(T) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \end{pmatrix}^T$.

Тогда из формулы (3.7) и (3.13) будем иметь

$$\eta = \begin{pmatrix} -7 & -\frac{9}{2} \end{pmatrix}^T, \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, выбирая некоторую функцию $w(t)$, удовлетворяющую условию (3.12), например, $w(t) = (-1+2t, 1-\frac{2t}{3})^T$, и подставляя в (3.14), будем иметь явные выражения управляющих воздействий в виде:

$$u(t) = -\frac{7}{2} + 2t \quad \text{при} \quad t \in [0,1], \qquad v(t) = 3 - \frac{2}{3}t \quad \text{при} \quad t \in [1,2]$$

А для соответствующих движений на этапах $[0,1]$ и $[1,2]$ получим:

$$x(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(5t^2 - 7t + 4)) & 3t & \frac{1}{2}(5t^2 - 7t - 2) \end{pmatrix}^T, \qquad y(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(-t^2 + 15t - 14) & \frac{1}{3}\left(-t^2 + 15t - 20\right) \end{pmatrix}^T.$$

График функции управления $U(t)$ (или $u(t)$ и $v(t)$) $t \in [0,2]$ имеет следующий вид:

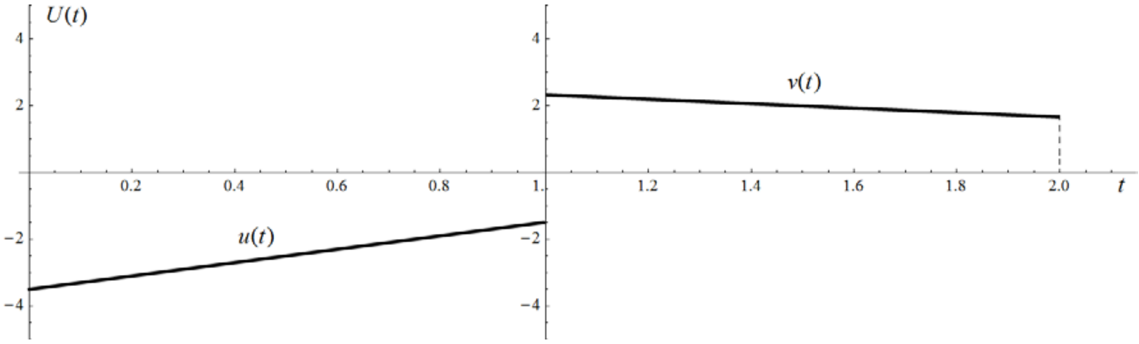
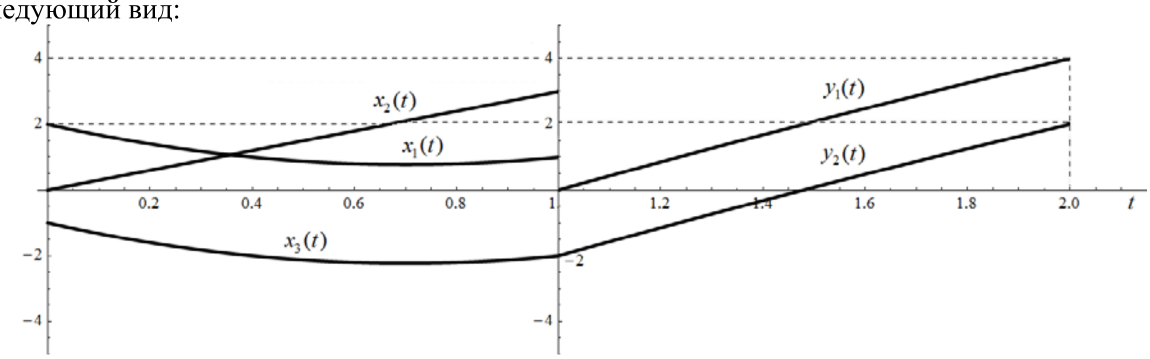


График функций векторов движения $x(t)$ и $y(t)$ $t \in [0,2]$ по координатам имеет следующий вид:



ЛИТЕРАТУРА

1. Егоров А.И. Основы теории управления. М.: Физматлит, 2004. 504 с.
2. Зубов В.И. Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975. 496 с.
3. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
4. Барсегян В.Р., Барсегян Т.В. Критерий управляемости линейных стационарных систем переменной структуры. Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. //Труды VIII международной конференции. Сентябрь 22-26, 2014, Горис-Степанакерт, с. 83-87.
5. Барсегян В.Р. Конструктивный подход к исследованию задач управления линейными составными системами. //Проблемы управления. 2012. №4. С.11-17.

<u>Сведения об авторе:</u>

Барсегян Тигран Ваняевич – научный сотрудник Института механики НАН Армении.

E-mail: t.barseghyan@mail.ru

ФЛАТТЕР ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ НАЛИЧИИ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ИНЕРЦИОННЫХ МОМЕНТОВ

Белубекян М.В., Мартиросян С.Р.

В линейной постановке исследуется динамическое поведение возмущённого движения прямоугольной упругой пластинки вблизи границ устойчивости при набегании сверхзвукового потока газа на её свободный край в предположении, что приложены сосредоточенные инерционные моменты вдоль свободного и шарнирно опёртого, противоположного ему, краёв. Установлена связь между характеристиками собственных колебаний пластинки и скоростью обтекающего её невозмущённого потока газа, позволяющая делать выводы об устойчивости возмущённого движения пластинки. Показана возможность потери устойчивости системы «пластинка–поток» как статической, так и динамической. В пространстве «существенных» параметров задачи выделены области неустойчивости, в которых имеет место дивергенция пластинки или локализованная в окрестности свободного края пластинки дивергенция, либо флаттер. Найдены соответствующие критические скорости, при превышении которых возмущённое движение пластинки теряет устойчивость.

1. Постановка задачи. Рассматривается прямоугольная тонкая упругая пластинка, которая в декартовой системе координат $Oxyz$ занимает область $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $-h \le z \le h$. Декартова система координат $Oxyz$ выбирается так, что оси Ox и Oy лежат в плоскости невозмущённой пластинки, а ось Oz перпендикулярна к пластинке и направлена в сторону сверхзвукового потока газа, обтекающего пластинку с одной стороны в направлении оси Ox с невозмущённой скоростью V. Течение газа будем считать плоским и потенциальным. А также, будем считать, что пластинка не подвержена действию усилий в срединной плоскости.

Пусть кромка $x=0$ пластинки свободна, а кромки $x=a$, $y=0$ и $y=b$ шарнирно закреплены. Предполагается, что шарниры идеальны. Вдоль краёв $x=0$ и $x=a$ приложены сосредоточенные инерционные моменты поворота I_{c1} и I_{c2} соответственно [1 (с.101),2].

Под влиянием каких-либо причин невозмущённое состояние равновесия пластинки может быть нарушено и пластинка начнёт совершать возмущённое движение с прогибом $w = w(x, y, t)$. Прогиб w вызовет избыточное давление Δp на верхнюю обтекаемую поверхность пластинки со стороны обтекающего потока газа, которое учитывается приближённой формулой «поршневой теории» [1]: $\Delta p = -a_0 \rho_0 V \,\partial w/\partial x$, a_0 – скорость звука в невозмущённой газовой среде, ρ_0 – плотность невозмущённого потока газа. Будем полагать, что прогибы w малы относительно толщины пластинки $2h$.

Выясним условия, при которых возможна потеря устойчивости состояния невозмущённого равновесия пластинки, когда изгиб пластинки обусловлен соответствующими аэродинамическими нагрузками Δp и приложенными вдоль краёв пластинки $x=0$ и $x=a$ сосредоточенными инерционными моментами поворота I_{c1} и I_{c2} соответственно.

Заметим, что в данной работе, с целью получения возможности аналитического исследования и выявления новых механических эффектов, к рассматриваемой задаче устойчивости применён подход, в соответствии с которым распределённая масса пластинки условно заменена сосредоточенными инерционными моментами поворота I_{c1} и I_{c2}, приложенными вдоль краёв пластинки $x=0$ и $x=a$ [1,2]. На основе этого подхода разработан удобный в применении алгоритм решения широкого класса неконсервативных задач упругой устойчивости в линейной постановке, подробно изложенный в работе [3]. Из сопоставления результатов исследований соответствующих задач следует, что такая замена не приводит к искажению динамической картины поведения системы «пластинка–поток».

Малые изгибные колебания точек срединной поверхности прямоугольной пластинки около невозмущённой формы равновесия в предположении справедливости гипотезы Кирхгофа и «поршневой теории» описываются дифференциальным уравнением [1 (с. 245)]

$$D\Delta^2 w + a_0 \rho_0 V \frac{\partial w}{\partial x} = 0\,, \tag{1.1}$$

где $\Delta^2 w = \Delta(\Delta w)$, Δw – оператор Лапласа; D – цилиндрическая жёсткость.

Граничные условия в принятых предположениях относительно способа закрепления кромок пластинки имеют вид [1, 2]

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=D^{-1}I_{c1}\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2}\,,\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+(2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=0\,,\ x=0\,; \tag{1.2}$$

$$w=0\,,\quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=-I_{c2}D^{-1}\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2}\,,\quad x=a\,; \tag{1.3}$$

$$w=0\,,\quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0\,,\quad y=0 \text{ и } y=b\,; \tag{1.4}$$

где ν – коэффициент Пуассона.

Требуется найти наименьшее значение скорости потока газа – критическую скорость V_{cr}, приводящую к неустойчивости: при $V\geq V_{cr}$ устойчивое возмущённое движение пластинки становится неустойчивым. Иными словами, требуется определить значения параметра V, при которых возможны нетривиальные решения дифференциального уравнения (1.1), удовлетворяющие граничным условиям (1.2)–(1.4).

2. Для нахождения решения поставленной задачи устойчивости пластинки (1.1)–(1.4) сведем её к задаче на собственные значения λ для обыкновенного дифференциального уравнения.

Общее решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2)–(1.4), будем искать в виде гармонических колебаний

$$w(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cdot\exp(\mu_n px+\lambda t)\cdot\sin(\mu_n y)\,,\mu_n=\pi nb^{-1}, \tag{2.1}$$

C_n – произвольные постоянные; n – число полуволн вдоль стороны пластинки b; p – корни характеристического уравнения

$$(p^2-1)^2+\alpha_n^3 p=0\,,\quad \alpha_n^3=a_0\rho_0 VD^{-1}\mu_n^{-3},\ \mu_n=\pi nb^{-1},\ \alpha_n^3>0\,, \tag{2.2}$$

соответствующего дифференциальному уравнению (1.1); λ – собственные значения несамосопряжённого оператора для обыкновенного дифференциального уравнения относительно форм колебаний $f_n(x)=C_n\exp(\mu_n px)$. Система «пластинка–поток», описываемая соотношениями (1.1) – (1.4) асимптотически устойчива, если все собственные значения λ краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения имеют отрицательные вещественные части, и неустойчива, если хотя бы одно собственное значение λ находится в правой части комплексной плоскости. Критическая скорость потока V_{cr}, характеризующая переход от устойчивости к неустойчивости возмущённого движения пластинки, определяется условием равенства нулю вещественной части одного или нескольких собственных значений.

Корни характеристического уравнения (2.2) определяются следующими выражениями [4]:

$$p_{1,2}=-0.5\sqrt{2(q+1)}\pm\sqrt{\sqrt{q^2-1}-0.5(q-1)}\,,\quad p_1<0\,,\quad p_2<0\,; \tag{2.3}$$

$$p_{3,4}=0.5\sqrt{2(q+1)}\pm i\sqrt{\sqrt{q^2-1}+0.5(q-1)}\,;$$

q ($q>1$) – единственный действительный корень кубического уравнения [4]

$$8\cdot(1+q)^2(q-1)=\alpha_n^6,\quad \alpha_n^3=a_0\rho_0 VD^{-1}\mu_n^{-3},\quad \mu_n=\pi nb^{-1}. \tag{2.4}$$

В соответствии с выражением (2.1), общее решение уравнения (1.1) запишется в виде

$$w(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{4}C_{nk}\exp(\mu_n p_k x)\cdot\sin(\mu_n y)\cdot\exp(\lambda t)\,,\ \mu_n=\pi nb^{-1}, \tag{2.5}$$

C_{nk} – произвольные постоянные; p_k, $k=\overline{1,4}$ – корни характеристического уравнения (2.2), определяемые, соответственно, выражениями (2.3).

Из соотношений (2.4) легко можно получить выражение зависимости скорости потока газа V от параметров системы

$$V=2\sqrt{2(q-1)}\cdot(q+1)\cdot\pi^3n^3\gamma^3D(a_0\rho_0a^3)^{-1},\ \ \gamma=ab^{-1}\ . \tag{2.6}$$

Подставляя общее решение (2.5) дифференциального уравнения (1.1) в граничные условия (1.2)–(1.4), получаем однородную систему алгебраических уравнений четвёртого порядка относительно произвольных постоянных C_{nk}. Приравненный к нулю определитель этой системы уравнений – характеристический определитель $\Delta=\Delta(q,n,\gamma,\nu)$ приводит к соответствующему дисперсионному уравнению:

$$\Delta(q,n,\gamma,\nu,\chi_{1n},\chi_{2n})=\chi_{1n}\chi_{2n}A_0\lambda^4+(\chi_{1n}A_1+\chi_{2n}A_2)\lambda^2+A_3=0\,, \tag{2.7}$$

где χ_{1n}, χ_{2n} – приведённые значения сосредоточенных инерционных моментов поворота I_{c1}, I_{c2} соответственно: $\chi_{1n}=I_{c1}D^{-1}b(\pi n)^{-1}$, $\chi_{2n}=I_{c2}D^{-1}b(\pi n)^{-1}$.

Выражения, определяющие коэффициенты уравнения (2.8), в данном тексте не приведены в силу их громоздкости и ограниченности объёма статьи.

Анализ устойчивости невозмущённого состояния равновесия системы «пластинка–поток» сводится к исследованию поведения корней λ уравнения (2.7) в зависимости от «существенных» параметров исходной задачи устойчивости (1.1)–(1.4): γ, n, ν, χ_{1n}, χ_{2n} и q (или V). Значения остальных параметров принимаются фиксированными.

3. С помощью методов графо–аналитического и численного анализа проведено разбиение пространства «существенных» параметров M рассматриваемой динамической системы на область устойчивости M_0 и на области неустойчивости M_1, M_2, M_3, в которых характеристическое уравнение (2.7) имеет один положительный корень, два положительных корня и пару комплексно-сопряжённых корней с положительной вещественной частью соответственно.

Область устойчивости M_0 возмущённого движения рассматриваемой динамической системы «пластинка–поток» определяется соотношениями

$$A_0>0\,,\ \ k_nA_1+A_2>0\,,\ \ A_3>0\,,\ \ \mathit{\Delta}>0\,; \tag{3.1}$$

$\mathit{\Delta}$ – дискриминант уравнения (2.7): $\Delta=\Delta(n,\gamma,\nu,k_n)=(k_nA_1+A_2)^2-4k_nA_0A_3$, $k_n=\chi_{1n}\cdot\chi_{2n}^{-1}$.

При условиях (3.1) уравнение (2.7) имеет две пары чисто мнимых корней: пластинка совершает гармонические колебания около невозмущённого равновесного состояния.

Области неустойчивости M_1, M_2, M_3 определяются, соответственно, следующими соотношениями: $A_0>0$, $A_3<0$, $\mathit{\Delta}>0$; $A_0>0$, $k_nA_1+A_2<0$, $A_3>0$, $\mathit{\Delta}>0$; $A_0>0$, $A_3>0$, $\mathit{\Delta}<0$.

Границами области устойчивости M_0 возмущённого движения прямоугольной пластинки в пространстве её параметров при условии $A_0>0$ и $k_nA_1+A_2>0$ являются гиперповерхности: $A_3=0$, $\mathit{\Delta}=0$. На гиперповерхности $A_3=0$ характеристическое уравнение (2.7) имеет один нулевой корень кратности 2; а на гиперповерхности $\mathit{\Delta}=0$ – пару чисто мнимых корней.

На границе области устойчивости M_0

$$A_0>0\,,k_nA_1+A_2>0\,,\ \ A_3=0\,,\ \mathit{\Delta}>0 \tag{3.2}$$

возмущённое движение теряет статическую устойчивость: имеет место дивергенция. Критические скорости дивергенции $V_{\text{cr.div}}=V_{\text{cr.div}}(n,\gamma,\nu)$ – скорости, соответствующие первому корню $q_{\text{cr.div}}=q_{\text{cr.div}}(n,\gamma,\nu)$ уравнения $A_3=0$ и подсчитанные по формуле (2.6), разграничивают области устойчивости M_0 и статической (дивергентной) неустойчивости M_1 возмущённого движения прямоугольной пластинки. При скоростях потока газа $V\geq V_{\text{cr.div}}$ в пластинке, совершающей гармонические колебания, возникают напряжения, приводящие к изменению её формы: пластинка «выпучивается» с ограниченной скоростью «выпучивания».

На границе областей M_0, M_3 и M_2, M_3, определяемых, соответственно, соотношениями $A_0>0$, $k_nA_1+A_2>0$, $A_3>0$, $\mathit{\Delta}=0$ и $A_0>0$, $k_nA_1+A_2<0$, $A_3>0$, $\mathit{\Delta}=0$, возмущённое движение пластинки теряет динамическую устойчивость: имеет место панельный флаттер. Критические скорости флаттера $V_{\text{cr.}fl}=V_{\text{cr.}fl}(n,\gamma,\nu,k_n)$ – скорости, найденные подстановкой первого корня

$q_{\text{cr.}fl}$ уравнения $\Delta = 0$ в формулу (2.6), разграничивают области M_0, M_3 и M_2, M_3. При этом, при скоростях потока газа $V \geq V_{\text{cr.}fl}$ происходит «мягкий» (плавный) переход к колебаниям по нарастающей амплитуде – к флаттерным колебаниям: в первом случае гармонические колебания пластинки «плавно» переходят во флаттерные колебания; а во втором случае переход во флаттерные колебания происходит наряду с монотонным «выпучиванием» пластинки.

Отметим, что при переходе из области M_0 в область M_1, а также, при переходе из области M_0 в область M_2, в пластинке возникают напряжения, приводящие к монотонному «выпучиванию» пластинки с ограниченной скоростью выпучивания, не имеющего колебательного характера. Поэтому, в обоих случаях этот процесс потери устойчивости может рассматриваться как квазистатический процесс потери устойчивости, т.е. имеет место дивергентная неустойчивость.

4. С помощью численных методов анализа найдены первые корни уравнений $A_3 = 0$, $\Delta = 0$ и $k_n A_1 + A_2 = 0$ для различных значений параметров $\gamma = ab^{-1}$, $k_n = \chi_{1n} \cdot \chi_{2n}^{-1}$, n, ν, которые подставляя в выражение (2.6), получаем с достаточной точностью соответствующие критические скорости дивергенции, локализованной дивергенции и флаттера, разграничивающие области устойчивости M_0 и неустойчивости M_1, M_2 и M_3 в пространстве «существенных» параметров исходной задачи устойчивости (1.1)–(1.4).

Численный расчёт показал, что при фиксированных значениях параметров задачи наименьшее значение критических скоростей дивергенции, локализованной дивергенции и флаттера достигается при $n = 1$. При всех $\gamma \in (0, 2)$ имеет место дивергенция. Приведённая критическая скорость дивергенции $V_{\text{cr div}} \cdot D^{-1}\left(a_0 \rho_0 a^3\right)$ зависит только от коэффициента Пуассона ν и параметра $\gamma = ab^{-1}$: $V_{\text{cr div}} \cdot D^{-1}\left(a_0 \rho_0 a^3\right)$ меньше в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν, а с увеличением γ критическая скорость дивергенции растёт. При этом, в случае достаточно длинных пластинок $\left(\gamma = ab^{-1} \leq 0.0001\right)$ значение критической скорости дивергенции, примерно, порядка 10^{-7}, а с уменьшением γ стремится к нулю. Это означает, что при значениях $\gamma \leq 0.0001$ поведение обтекаемой в сверхзвуковом потоке газа прямоугольной пластинки, примерно, такое же, как и удлинённой пластинки $\gamma = 0$ ($b = \infty$): в обоих случаях невозмущённая форма равновесия пластинки, являясь изначально до обтекания статически неустойчивой, остаётся такой же и при обтекании её потоком газа. При значениях $\gamma \geq 2$ возмущённое движение прямоугольной пластинки теряет статическую устойчивость при скоростях потока, превышающих значения критической скорости локализованной дивергенции – скорости, при которой наблюдается явление локализованной дивергенции в окрестности свободного края полубесконечной пластины–полосы [4]: $V \geq V_{\text{cr div}} \cdot D^{-1}\left(a_0 \rho_0 b^3\right) \approx V^*_{\text{loc.div}} \cdot D^{-1}\left(a_0 \rho_0 b^3\right)$. При этом, приведённая критическая скорость локализованной дивергенции $V_{\text{loc.div.}} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 b^3)$ зависит только от коэффициента Пуассона ν: она меньше в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν [4].

При всех $\gamma \in [0.001, 0.9]$, $k_1 \in [0.5, \infty)$ и $\nu \in (0, 0.5)$ имеет место панельный флаттер. Приведённая критическая скорость флаттера $V_{\text{cr.}fl.} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ меньше в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν; при всех $\gamma \in [0.001, 0.9]$ скорость флаттера возрастает с увеличением k_1. При значениях $\gamma \in [0.001, 0.7]$ критическая скорость флаттера убывает с увеличением γ, а при значениях $\gamma \in (0.7, 0.9]$, наоборот, возрастает.

Из сопоставления критических скоростей дивергенции $V_{\text{cr div}} \cdot D^{-1}\left(a_0 \rho_0 a^3\right)$ и флаттера $V_{\text{cr.}fl.} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$, соответствующим одним и тем же значениям параметров γ и ν, следует, что $V_{\text{cr.}fl.} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3) > V_{\text{cr div}} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ при всех $k_1 \in [0.5, \infty)$.

Для всех $k_1 \in [0.5, \infty)$ при $\gamma = 0.7$ приведённая критическая скорость флаттера достигает наименьшего значения, которое при $k_1 = 5$ и $\nu = 0.33$ равно $V_{cr.fl.} \approx 136.77\, D(a_0 \rho_o a^3)^{-1}$. Отсюда следует, что граница перехода из области M_0 в область флаттерной неустойчивости M_3, определяемая соотношениями $A_0 > 0$, $k_n A_1 + A_2 > 0$, $A_3 > 0$, $\Delta = 0$, является «опасной» границей области устойчивости M_0.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Наука, 1961. 329 с.
2. Ржаницын А.Р. Консольный упругий стержень, нагруженный следящей силой. // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1985. Т.38. № 5. С. 33–44.
3. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О флаттере упругой прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на еёсвободный край. // Изв. НАН Армении. Механика. 2014. Т.67. № 2. С.12–42.
4. Belubekyan M.V., Martirosyan S.R. The Localized Instability of the Elastic Plate-Strip Streamlined by Supersonic Gas Flow// Изв. НАН Армении. Механика. 2012. Т.65(1). С.29-34.

<u>Сведения об авторах:</u>

Белубекян Мелс Вагаршакович – профессор, главный научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения (+37410) 521503, (+374 10) 580096
E-mail: mbelubekyan@yahoo.com

Мартиросян Стелла Размиковна – канд. физ-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения (+374 10) 524890
E-mail: mechinsstella@mail.ru

К ЗАДАЧЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В СЛОЕ ИЗ ПЬЕЗОУПРУГОГО МАТЕРИАЛА КЛАССА 6mm

Белубекян М.В., Папян А.А.

Рассматривается возможность появления внутреннего резонанса в случае распространения монохроматического электроупругого сигнала в пьезоэлектрическом слое при разных граничных условиях. Установлены граничные условия, при которых отсутствуют резонансные колебания.

Задачи связанных физических полей как взаимодействие механических и электромагнитных полей, пьезоэлектрический эффект, электрострикция и др. являются наиболее актуальными. Актуальны и изучение вопросов распространения волн пьезоэлектрических материалов.

Возможность возникновения внутреннего резонанса исследована в [1,2]. В настоящей работе рассматривается возможность появления резонансных колебаний в пьезоэлектрическом слое в случае распространения в нём монохроматического электроупругого сигнала.

1.Пьезоэлектрический слой гексагональной симметрии класса 6mm в прямоугольной декартовой системе координат $0xyz$ расположен так, что $0z$ ось параллельна оси симметрии пьезоэлектрического слоя, а плоскость $0xy$ есть плоскость симметрии пьезоэлектрика. Пьезоэлектрический слой в прямоугольной декартовой системе координат занимает область $-\infty < x < \infty;\ 0 \le y \le b;\ -\infty < z < \infty.$

Уравнения распространения плоской чисто сдвиговой электроупругой волны запишется в следующем виде [3-5]:

$$a^2\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \qquad \Delta\psi = 0 \tag{1.1}$$

где $a^2 = \dfrac{\tilde{C}_{44}}{\rho}$, $\tilde{C}_{44} = C_{44}\left(1+\chi\right)$, $\chi = \dfrac{e_{15}^2}{\varepsilon C_{44}}$, $\psi = \varphi - \dfrac{e_{15}}{\varepsilon} w$.

$\tilde{C}_{44}$ – модуль сдвига, ρ – плотность материала, ε – диэлектрическая проницаемость, e_{15} – пьезоэлектрический модуль, χ – коэффициент электрической связи, φ – электрический потенциал.

Для постановки задачи необходимы также материальные уравнения:

$$\sigma_{31} = C_{44}\frac{\partial w}{\partial x} + e_{15}\frac{\partial \varphi}{\partial x},\ \sigma_{32} = C_{44}\frac{\partial w}{\partial y} + e_{15}\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$D_1 = -\varepsilon\frac{\partial \varphi}{\partial x} + e_{15}\frac{\partial w}{\partial x},\ D_2 = -\varepsilon\frac{\partial \varphi}{\partial y} + e_{15}\frac{\partial w}{\partial y} \tag{1.2}$$

На поверхностях слоя $y = 0$ и $y = h$ возможны следующие граничные условия [4]:

I. $\sigma_{23} = 0, \quad \varphi = 0$ III. $\sigma_{23} = 0, \quad \varphi = 0$

II. $\sigma_{23} = 0, \quad \varphi = 0$ IV. $w = 0, \quad \varphi = 0$ (1.3)

Для волновода $0 \le y \le h$ имеет место десять вариантов сочетания граничных условий (I – IV), например:

при $y = 0$, $w = 0, \quad \varphi = 0$;

при $y = h$, $\sigma_{23} = 0, \quad D_2 = 0$ (1.4)

Граничные условия относительно w, φ запишутся

I. $$\left(1+\chi\right)\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{e_{15}}{C_{44}}\frac{\partial \psi}{\partial y}=0$$
$$\psi+\frac{e_{15}}{\varepsilon}w=0$$

II. $$\frac{\partial w}{\partial y}=0, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial y}=0 \tag{1.5}$$

III. $$w=0, \quad \varphi=0$$

IV. $$w=0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y}=0$$

В граничном условии I (1.5) решения не разделяются (механическая часть задачи не разделятся от электрической), следовательно, если хотя бы, на одной из границ волновода имеет место граничное условие I (1.5), то решения не разделяются. Это является причиной появления локализованных волн в окрестности края с условием варианта I (1.5) Блюстейна – Гуляева.

Для граничных условий II – IV (1.5) решения уравнений разделяются, имеется лишь сопутствующее электрическое поле $\Delta\varphi=\frac{e_{15}}{\varepsilon}\Delta w$.

Решения системы (1.1) будем искать в виде:

$$w=f\left(y\right)\exp i\left(\omega t-px\right), \qquad \psi=g\left(y\right)\exp i\left(\omega t-px\right) \tag{1.6}$$

Подстановка (1.6) в систему уравнений (1.1) дает:

$$w=\left(A_1\sinh\left(\alpha py\right)+A_2\cosh\left(\alpha py\right)\right)\exp i\left(\omega t-px\right)$$
$$\psi=\left(B_1\sinh\left(py\right)+B_2\cosh\left(py\right)\right)\exp i\left(\omega t-px\right) \tag{1.7}$$

где $\alpha=\sqrt{1-\eta}$, $\eta=\frac{\omega^2}{p^2a^2}$, A_1, A_2, B_1, B_2 – произвольные постоянные, которые определяются согласно граничным условиям.

2. Удовлетворая (1.7) граничным условиям (1.3) и (1.4), получим следующие дисперсионные уравнения:

I. $$\cosh\left(\alpha ph\right)\cosh\left(ph\right)-1=\frac{\chi^2+\alpha^2\left(1+\chi^2\right)}{2\chi\left(1+\chi\right)}\sinh\left(\alpha ph\right)\sinh\left(ph\right)$$

II. $$\alpha^2\tilde{C}_{44}p^4\varepsilon^2\sinh\left(\alpha ph\right)\sinh\left(ph\right)=0 \tag{2.1}$$

III. $$\sinh\left(\alpha ph\right)\sinh\left(ph\right)=0$$

IV. $$p^2\varepsilon^2\sinh\left(\alpha ph\right)\sinh\left(ph\right)=0$$

Дисперсионное уравнение, соответствующее граничному условию (1.4), запишется в следующем виде:

$$\frac{\chi}{\alpha\left(1+\chi\right)}\sinh\left(\alpha ph\right)=\cosh\left(\alpha ph\right)\tanh\left(ph\right) \tag{2.2}$$

Из дисперсионных уравнений II – IV (2.1) можно заметить, что механическая часть задачи отделяется от электрической части.

Рассмотрим дисперсионное уравнение III (2.1).

$$\sin\left(\sqrt{\eta-1}ph\right)=0, \tag{2.3}$$

откуда $\eta = 1+\left(\dfrac{n\pi}{ph}\right)^2$, $\omega^2 = \dfrac{k^2C_{44}(1+\chi)}{\rho}\left(1+\left(\dfrac{n\pi}{ph}\right)^2\right)$

Влияние пьезоэфекта обусловлено коэффициентом электрической связи χ.

3. Рассмотрим граничные условия, где решения не разделяются, например (1.4). Согласно дисперсионному уравнению IV (2.1), механическая часть задач не отделяется от электрической части [6].

В приближении $\alpha ph << 1$, когда толщина слоя намного больше длины волны, для относительной фазовой скорости получим:

$$\eta = 1-\frac{\chi^2}{(1+\chi)^2} \tag{3.1}$$

(3.1) представляет безразмерные характеристики фазовой поверхностной волны Блюстейна – Гуляева.

В табл.1 представлены численные решения дисперсионного уравнения IV (2.1) при значении коэффициента электромеханической связи $\chi = 0.3$, для разных значений ph.

Таблица 1. Численные решения дисперсионного уравнения IV (2.1)

ph	η_1	η_2	η_3
0.1	199.18	2175.15	6123.12
0.5	8.77	87.82	245.74
1.0	2.82	22.60	79.32
1.5	1.72	10.52	28.07
2.0	1.35	6.31	16.18
2.5	1.18	4.36	10.68
3.0	1.09	3.31	7.70
3.5	1.04499	2.67951	5.903
4.5	0.994219	1.99325	3.94331
5.0	0.98	1.79	3.37

где η_1, η_2, и η_3, соответственно, первый, второй и третий корни дисперсионного уравнения IV (2.1).

Из табл.1 не видно появление в пьезоэлектрическом слое резонансных колебаний, поэтому дисперсионное уравнение IV (2.1) запишем в следующем вид:

$$\frac{\chi ph}{(1+\chi)\sqrt{p^2h^2-\xi}}\sinh\left(\sqrt{p^2h^2-\xi}\right)=\cosh\left(\sqrt{p^2h^2-\xi}\right)\tanh(ph) \tag{3.2}$$

В (3.2) принято следующее обозначение: $\xi = \dfrac{\omega^2h^2}{C_t^2}$.

В табл.2 представлены численные решения дисперсионного уравнения (3.2) при значении коэффициента электромеханической связи $\chi = 0.3$, для разных значений ph.

Таблица 2. Численные решения дисперсионного уравнения (3.2)

ph	ξ_2	ξ_2	ξ_2
1	2.82	22.53	62.07
1.47	3.81	23.60	63.08
1.50	3.88	23.68	63.16
2.00	5.35	24.15	67.25
3.00	9.85	29.80	69.28
4.00	16.22	36.34	75.83
4.30	18.51	36.69	78.18
4.50	20.13	40.36	79.85
4.90	23.60	43.93	83.42
5.00	24.52	44.88	84.37

Из табл. 2 можно заметить, что первый корень дисперсионного уравнения (3.2) при $ph = 4.9$ равен второму корню при $ph = 1.47$, следовательно, возникает внутренний резонанс.

При наличии в пьезоэлектрическом слое свободного края появляются резонансные в окрестности свободного края колебания.

ЛИТЕРАТУРА

1. M.I. Newton G. McHale F. Martin E. Gizeli and K. A. Melzak Generalized Love waves// Europhysics letters 58 (6). Pp. 818-822.
2. Белубекян В.М., Белубекян М.В. Резонансные и локализованные сдвиговые колебания в слое с прямоугольным поперечным сечением// Докл. НАН Армении. 2015. Т.115. №1. С.40-43.
3. Bardzokas D.I., Kudryavtsev B.A., Senik N.A. Wave Propagation in Electromagnetoelastic Media M., 2003, 336 p. (in Russian)
4. Bleustein J.L. Some simple modes of wave propagation in an infinite piezoelectric plate// Journ. of Acustical Society of America, 1969, 45, pp.614-620.
5. Belubekyan M.V., Belubekyan V.M. Surface waves in piezoactive elastic system of a layer on a semi-space // Proceedings of the Yerevan State University, Physical and Mathematical Sciences. Mechanics. 2013. №3. P.45-48.
6. Аветисян А.С., Камалян А.А., Влияние поперечной неоднородности пьезодиэлектрического слоя и сочетаний граничных условий на распространение сдвигового электроупругого сигнала// Вестник ГИУА. Сер. «Механика, машиноведение, машиностроение». 2014. Вып.17. №1. С.9-25.

Сведения об авторах:

Белубекян Мелс Вагаршакович – Кандидат физ-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения (+374 10) 521503, (+374 10) 580096, **E-mail:** mbelubekyan@yahoo.com

Папян Арарат Артурович – Кандидат физ-мат. наук, младший научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения, (+374 93) 050093, **E-mail:** aro088@mail.ru

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ КУСОЧНО-ПОСТОЯННОЙ ТОЛЩИНЫ, ИЗГОТОВЛЕННОЙ ИЗ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА, ПРИ ИЗГИБЕ С УЧЁТОМ ВЛИЯНИЯ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ

Белубекян Э.В., Погосян А.Г., Аветисян Г.Р.

Рассматривается свободно опёртая по контуру прямоугольная пластинка кусочно-постоянной толщины, изготовленная из слоёв ортотропного композиционного материала, под действием поперечной нагрузки.

На основе уточнённой теории изгиба пластин С.А. Амбарцумяна решается задача определения оптимальных геометрических и физических параметров ступенчатой пластинки, обеспечивающих её наибольшую жёсткость при заданных габаритных размерах пластинки и постоянном весе, равном весу пластинки постоянной толщины.

Приводятся числовые примеры. Сравнение результатов, полученных на основе уточнённой и классической теорий изгиба пластин, позволяет оценить влияние поперечных сдвигов на оптимальный проект пластинки в зависимости от её толщины.

Рассматривается изгиб свободно опёртой по контуру прямоугольной пластинки кусочно-постоянной толщины размерами $2L\times b$ под действием поперечной нагрузки $q(y)$. Предполагается, что пластинка изготовлена из композиционного материала (КМ) путем поочерёдной укладки его монослоев под углом $\pm\varphi$ к оси x пластинки, причём на участке $-a\le x\le a$ пластинка имеет толщину h_2, а на участках $-L\le x\le -a$ и $a\le x\le L$ – толщину h_1 (рис.1).

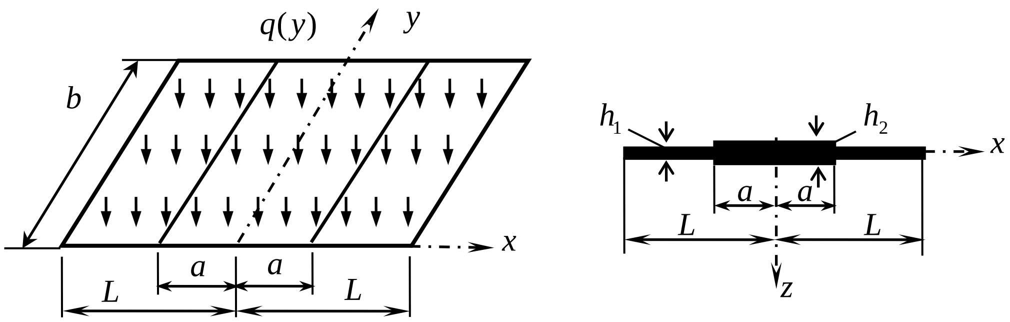


Рис. 1. Расчётная схема пластинки

На основе уточнённой теории изгиба пластин [1], учитывающей влияние поперечных сдвигов, решается задача определения оптимальных значений параметров пластинки a, h_1, h_2, φ, обеспечивающих минимальное значение наибольшего прогиба при её постоянном весе, равном весу пластинки постоянной толщины h_0 и заданных габаритных размерах $\xi = 2L/b$.

Решение рассматриваемой задачи на основе классической теории изгиба ортотропных пластин приведено в работе [2]. Расчёту оптимальной ребристой пластинки из композиционного материала с учётом поперечных сдвигов посвящена работа [3].

Задача определения напряжённо-деформируемого состояния пластинки решается для каждой из областей $(p=1,\ 2)$, соответствующих толщинам h_1 и h_2, с удовлетворением условий сопряжения на линии их раздела. При этом, ввиду симметрии рассматривается половина пластинки ($x\ge 0$) .

Принятая структура пакета пластинки позволяет считать её ортотропной. Согласно уточнённой теории изгиба ортотропных пластин [1], задача сводится к определению потенциальных функций $\Phi_p(x,y)$ для каждой из областей $(p=1,\ 2)$, удовлетворяющих уравнениям:

$$\left[D_{11}^{(p)}\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\left(D_{12}^{(p)}+2D_{66}^{(p)}\right)\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+D_{22}^{(p)}\frac{\partial^4}{\partial y^4}\right]\Phi_p--\frac{12}{h_p^3}\frac{h_p^2}{10}\left\{a_{44}D_{11}^{(p)}D_{66}^{(p)}\frac{\partial^6}{\partial x^6}+\right.$$

$$\left[a_{44}\left(D_{11}^{(p)}D_{22}^{(p)}-2D_{12}^{(p)}D_{66}^{(p)}-\left(D_{12}^{(p)}\right)^2\right)+a_{55}D_{11}^{(p)}D_{66}^{(p)}\right]\frac{\partial^6}{\partial x^4\partial y^2}+ \qquad (1.1)$$

$$\left.\left[a_{55}\left(D_{11}^{(p)}D_{22}^{(p)}-2D_{12}^{(p)}D_{66}^{(p)}-\left(D_{12}^{(p)}\right)^2\right)+a_{44}D_{22}^{(p)}D_{66}^{(p)}\right]\frac{\partial^6}{\partial y^4\partial x^2}+a_{55}D_{22}^{(p)}D_{66}^{(p)}\frac{\partial^6}{\partial y^6}\right\}\Phi_p=\frac{144}{h_p^6}q,$$

и следующим граничным условиям:

– шарнирного опирания на сторонах $y=0$ и $y=b$

$$w_p=0,\qquad M_y^{(p)}=0,\qquad \varphi_p=0\ \ (p=1,\,2)\quad \text{при}\quad y=0,\ y=b, \qquad (1.2)$$

– симметрии на линии $x=0$

$$\varphi_2=0,\quad \frac{\partial w_2}{\partial x}=0,\quad M_{xy}^{(2)}=0\qquad \text{при}\quad x=0, \qquad (1.3)$$

– шарнирного опирания на стороне $x=L$

$$w_1=0,\quad M_x^{(1)}=0,\quad \psi_1=0\qquad \text{при}\quad x=L, \qquad (1.4)$$

– сопряжения на линии $x=a$

$$w_1=w_2,\qquad -\frac{\partial w_1}{\partial x}+\left(\frac{h_1^2}{4}-\frac{z_0^2}{3}\right)a_{55}\varphi_1=-\frac{\partial w_2}{\partial x}+\left(\frac{h_2^2}{4}-\frac{z_0^2}{3}\right)a_{55}\varphi_2,\quad \left(z_0=\frac{h_1}{2}\right),\quad \psi_1=\psi_2,$$

$$M_x^{(1)}=M_x^{(2)},\ \ M_{xy}^{(1)}=M_{xy}^{(2)},\ \ N_x^{(1)}=N_x^{(2)}\qquad \text{при}\quad x=a. \qquad (1.5)$$

Функции прогибов w_p и поперечного сдвига $\varphi_p=0$, ψ_p $(p=1,2)$ выражаются через потенциальные функции $\Phi_p(x,y)$ по формулам:

$$w_p=\frac{h_p^4}{100}a_{44}a_{55}\left[D_{11}^{(p)}D_{66}^{(p)}\frac{\partial^4\Phi_p}{\partial x^4}+\left(D_{11}^{(p)}D_{22}^{(p)}-2D_{12}^{(p)}D_{66}^{(p)}-\left(D_{12}^{(p)}\right)^2\right)\frac{\partial^4\Phi_p}{\partial x^2\partial y^2}+D_{22}^{(p)}D_{66}^{(p)}\frac{\partial^4\Phi_p}{\partial y^4}\right]-$$

$$-\frac{h_p^5}{120}\left[\left(a_{55}D_{11}^{(p)}+a_{44}D_{66}^{(p)}\right)\frac{\partial^2\Phi_p}{\partial x^2}+\left(a_{44}D_{22}^{(p)}+a_{55}D_{66}^{(p)}\right)\frac{\partial^2\Phi_p}{\partial y^2}\right]+\frac{h_p^6}{144}\Phi_p,$$

$$\varphi_p=\frac{h_p^2}{10}a_{44}\left[D_{11}^{(p)}D_{66}^{(p)}\frac{\partial^5\Phi_p}{\partial x^5}+\left(D_{11}^{(p)}D_{22}^{(p)}-2D_{12}^{(p)}D_{66}^{(p)}-\left(D_{12}^{(p)}\right)^2\right)\frac{\partial^5\Phi_p}{\partial x^3\partial y^2}+D_{22}^{(p)}D_{66}^{(p)}\frac{\partial^5\Phi_p}{\partial x\partial y^4}\right]-$$

$$-\frac{h_p^3}{12}\left[D_{11}^{(p)}\frac{\partial^3\Phi_p}{\partial x^3}+\left(D_{12}^{(p)}+2D_{66}^{(p)}\right)\frac{\partial^3\Phi_p}{\partial x\partial y^2}\right], \qquad (1.6)$$

$$\psi_p=\frac{h_p^2}{10}a_{55}\left[D_{22}^{(p)}D_{66}^{(p)}\frac{\partial^5\Phi_p}{\partial y^5}+\left(D_{11}^{(p)}D_{22}^{(p)}-2D_{12}^{(p)}D_{66}^{(p)}-\left(D_{12}^{(p)}\right)^2\right)\frac{\partial^5\Phi_p}{\partial x^2\partial y^3}+D_{11}^{(p)}D_{66}^{(p)}\frac{\partial^5\Phi_p}{\partial y\partial x^4}\right]-$$

$$-\frac{h_p^3}{12}\left[D_{22}^{(p)}\frac{\partial^3\Phi_p}{\partial y^3}+\left(D_{12}^{(p)}+2D_{66}^{(p)}\right)\frac{\partial^3\Phi_p}{\partial y\partial x^2}\right]$$

Внутренние усилия определяются по формулам:

$$M_x^{(p)} = -D_{11}^{(p)}\frac{\partial^2 w_p}{\partial x^2} - D_{12}^{(p)}\frac{\partial^2 w_p}{\partial y^2} + \frac{h_p^2}{10}\left(a_{55}D_{11}^{(p)}\frac{\partial \varphi_p}{\partial x} + a_{44}D_{12}^{(p)}\frac{\partial \Psi_p}{\partial y}\right),$$

$$M_y^{(p)} = -D_{22}^{(p)}\frac{\partial^2 w_p}{\partial y^2} - D_{12}^{(p)}\frac{\partial^2 w_p}{\partial x^2} + \frac{h_p^2}{10}\left(a_{44}D_{22}^{(p)}\frac{\partial \Psi_p}{\partial y} + a_{55}D_{12}^{(p)}\frac{\partial \varphi_p}{\partial x}\right),$$

$$M_{xy}^{(p)} = -2D_{66}^{(p)}\frac{\partial^2 w_p}{\partial x \partial y} + \frac{h_p^2}{10}D_{66}^{(p)}\left(a_{55}\frac{\partial \varphi_p}{\partial y} + a_{44}\frac{\partial \Psi_p}{\partial x}\right), \tag{1.7}$$

$$N_x^{(p)} = \frac{h_p^3}{12}\varphi_p, \quad N_y^{(p)} = \frac{h_p^3}{12}\Psi_p.$$

Здесь $D_{ik}^{(p)}$, a_{44}, a_{55} – жёсткости и коэффициенты поперечных деформаций составляющих участков пластинки $(p = 1, 2)$

$$D_{ik}^{(p)} = \frac{B_{ik}h_p^3}{12}, \quad (i, k = 1, 2, 6), \quad p = 1, 2, \quad a_{44} = \frac{1}{G_{yz}}, \; a_{55} = \frac{1}{G_{xz}},$$

B_{ik} – упругие характеристики КМ в главных геометрических направлениях пластинки, определяемые через его характеристики в главных физических направлениях B_{ik}^0 по известным формулам поворота [1], G_{yz}, G_{xz} – модули сдвига.

Разлагая функцию нагрузки в ряд:

$$q(y) = \sum_1^{\infty} q_k \sin\lambda_k y, \; q_k = \frac{2}{b}\int_0^b q(y)\sin\lambda_k y dy,$$

решения уравнений (1.1), удовлетворяющие условиям (1.2), принимаются в виде:

$$\Phi^{(p)} = \sum_{k=1}^{\infty}\Phi_k^{(p)}(x)\sin(\lambda_k y) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{144 q_k \sin(\lambda_k y)}{h_p^6\lambda_k^4(D_{22}^{(p)} + \frac{6}{5h_p}a_{55}D_{22}^{(p)}D_{66}^{(p)}\lambda_k^2)}. \tag{1.8}$$

Здесь функции $\Phi_k^{(p)}(x)$ являются решениями однородных дифференциальных уравнений шестого порядка, получаемых подстановкой (1.8) в (1.2) и представляются в виде

$$\Phi_k^{(p)}(x) = \sum_{i=1}^{6} C_{ik}^{(p)} e^{r_i^{(p)}\lambda_k x}, \tag{1.9}$$

$r_i^{(p)}$ – корни соответствующих характеристических уравнений:

$$\left(r^{(p)}\right)^6 + m_1^{(p)}\left(r^{(p)}\right)^4 + m_2^{(p)}\left(r^{(p)}\right)^2 + m_3^{(p)} = 0, \tag{1.10}$$

где

$$m_1^{(p)} = -\frac{5D_{11}^{(p)}h_p + 6\lambda_k^2(a_{44}D_4^{(p)} + a_{55}D_{11}^{(p)}D_{66}^{(p)})}{6a_{44}D_{11}^{(p)}D_{66}^{(p)}},$$

$$m_2^{(p)} = \frac{5D_3^{(p)}\lambda_k^2 h_p + 6\lambda_k^4(a_{55}D_4^{(p)} + a_{44}D_{22}^{(p)}D_{66}^{(p)})}{6a_{44}D_{11}^{(p)}D_{66}^{(p)}},$$

$$m_3^{(p)} = -\frac{5D_{22}^{(p)}\lambda_k^4 h_p + 6\lambda_k^4 a_{55}D_{22}^{(p)}D_{66}^{(p)}}{6a_{44}D_{11}^{(p)}D_{66}^{(p)}};$$

$$D_3^{(p)} = 2(D_{12}^{(p)} + 2D_{66}^{(p)}), \; D_4^{(p)} = D_{11}^{(p)}D_{22}^{(p)} - 2D_{12}^{(p)}D_{66}^{(p)} - \left(D_{12}^{(p)}\right)^2$$

Постоянные $C_{ik}^{(p)}$ в выражениях (1.9) определяются из граничных условий (1.3)- (1.5).

Выражение (1.9) в зависимости от значений корней характеристических уравнений (1.10) удобнее при расчётах представлять в виде тригонометрических и гиперболических функций. Здесь возможны семь таких представлений, причём в процессе оптимизации при варьировании характеристик пластинки, в соответствии с полученными значениями $r_i^{(p)}$ возможны различные представления функций $\Phi_k^{(p)}(x)$. В частности, когда уравнения (1.10) имеют два действительных $r_{1,2}^{(p)} = \pm\gamma_k^{(p)}$ и четыре комплексных сопряжённых $r_{3,4,5,6}^{(p)} = \mp\alpha_\kappa^{(p)} \mp i\beta_k^{(p)}$ корня, функиии $\Phi_k^{(p)}(x)$ записываются в виде:

$$\begin{aligned}\Phi_k^{(p)}(x) = {} & C_{1k}^{(p)}\operatorname{ch}\gamma_k^{(p)}\lambda_k x + C_{2k}^{(p)}\operatorname{sh}\gamma_k^{(p)}\lambda_k x + (C_{3k}^{(p)}\sin\beta_k^{(p)}\lambda_k x + C_{4k}^{(p)}\cos\beta_k^{(p)}\lambda_k x)\operatorname{sh}\alpha_k^{(p)}\lambda_k x + \\ & + (C_{5k}^{(p)}\sin\beta_k^{(p)}\lambda_k x + C_{6k}^{(p)}\cos\beta_k^{(p)}\lambda_k x)\operatorname{ch}\alpha_k^{(p)}\lambda_k x\end{aligned} \qquad (1.11)$$

После определения коэффициентов $C_{ik}^{(p)}$ $(i = 1,2,3,4,5,6{:}\;\; p = 1,2)$ потенциальные функции $\Phi_p(x, y)$ определяются из выражения (1.8), а значения прогибов $w_p -$ из (1.6).

Поставленная задача оптимизации приводится к определению параметров a, h_1, h_2, φ, при которых наибольшие прогибы пластинки при её неизменном весе достигают наименьшего значения.

Определение оптимальных параметров конструкции сводится к следующей задаче нелинейного программирования:

Найти:

$$\min_{\bar{x}} \max_p w_p, \quad \bar{x} = \{a, h_1, h_2, \varphi\}, \; (p = 1,2), \qquad (1.12)$$

при ограничении:

$$L(h_0 - h_1) = a(h_2 - h_1), \qquad (1.13)$$

которое соответствует условию постоянства веса пластинки.

Задача решается методом Недлера-Мида [4] в сочетании с методом прямого поиска.

Числовые расчёты произведены для пластинки толщиной $\bar{h}_0 = h_0 / b =$0.02, 0.04, 0.1, 0.2 под действием нагрузки $q(y) = q_0 = \text{Const}$ при различных значениях ξ.

В качестве материала принят КМ со следующими характеристиками:

$\bar{B}_{11}^0 = 1;$ $\bar{B}_{22}^0 = B_{22}^0 / B_{11}^0 = 0.6164;$ $\bar{B}_{12}^0 = B_{12}^0 / B_{11}^0 = 0.12;$ $\bar{B}_{66}^0 = B_{66}^0 / B_{11}^0 = 0.1572;$ $G_{yz} / G_{xz} = 1;$ $G_{yz} / B_{11}^0 = 0.1572.$

Вычислены оптимальные значения параметров $\bar{a} = a/2L$, $\bar{h}_1 = h_1/b$, $\bar{h}_2 = h_2/b$, φ, обеспечивающие наименьшее значение наибольшего приведённого прогиба $\max\limits_p \bar{w}_p = w_p \dfrac{D_0}{q_0 b^4}$, $(p = 1,2)$ пластинки, где $D_0 = \dfrac{B_{11}^0 h_0^3}{12}$, и соответствующие значения наибольших прогибов $\bar{w}$. Полученные результаты приведены в таблице. Там же, для сравнения, приведены значения приведённых прогибов $\bar{w}_0$, полученные без учёта поперечных сдвигов.

Как следует из результатов расчёта, для сравнительно тонких пластин значения прогибов, полученных по уточнённой и классической теориям, отличаются несущественно (до 1% при $\bar{h}_0 = 0.02$ и до 5% при $\bar{h}_0 = 0.04$). При увеличении толщины пластинки учёт поперечных сдвигов даёт более значительные поправки к результатам классической теории (до 16% при $\bar{h}_0 = 0.1$ и до 35% при $\bar{h}_0 = 0.2$).

Таблица. Оптимальные параметры пластинки

$\overline{h_0}$	ξ	$\overline{a}$	$\overline{h}_1$	$\overline{h}_2$	φ	$10^2 \cdot \overline{w}$	$10^2 \cdot \overline{w}_0$
0.02	1.0	0.123	0.0105	0.04912	90^0	0.3030	0.2994
	1.5	0.079	0.0149	0.04718	90^0	0.5358	0.5308
	2.0	0.055	0.01705	0.04387	90^0	0.8278	0.8217
	2.5	0.04	0.0183	0.03955	90^0	1.0655	1.0585
	3.0	0.03	0.01905	0.03488	90^0	1.2116	1.2079
0.04	1.0	0.135	0.02015	0.09367	90^0	0.3283	0.3137
	1.5	0.085	0.02995	0.08907	90^0	0.5610	0.5420
	2.0	0.36	0.02215	0.04694	90^0	0.8499	0.8396
	2.5	0.395	0.02055	0.04517	90^0	0.9366	0.9257
	3.0	0.415	0.01975	0.04415	90^0	0.9972	0.9859
0.10	1.0	0.24	0.03725	0.16798	90^0	0.5402	0.4642
	1.5	0.165	0.06395	0.17319	90^0	0.7148	0.6156
	2.0	0.36	0.0549	0.11754	90^0	0.9036	0.8396
	2.5	0.395	0.05085	0.11306	90^0	0.9932	0.9257
	3.0	0.415	0.0489	0.11047	90^0	1.0557	0.9859
0.20	1.0	0.37	0.04545	0.25430	90^0	0.9249	0.6992
	1.5	0.28	0.1155	0.26639	90^0	0.9708	0.7199
	2.0	0.315	0.1295	0.24141	90^0	1.1282	0.8737
	2.5	0.345	0.1356	0.22893	90^0	1.2262	0.9654
	3.0	0.38	0.126	0.22337	90^0	1.2898	1.0241

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360 с.
2. Белубекян Э.В., Аветисян Г.Р., Погосян А.Г. Оптимизация прямоугольной пластинки кусочно-постоянной толщины, изготовленной из композиционного материала, при изгибе. // Изв. НАН Армении. Механика. 2012. Т.65. №1. С.35-42.
3. Белубекян Э.В., Дарбинян А.З. Расчёт оптимальной ребристой пластинки из композиционного материала с учётом поперечных сдвигов. //Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1987. Т.40. №4. С.7-14.
4. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. М.: Мир, 1975. 532 с.

Сведения об авторах:

Белубекян Эрнест Вагаршакович – докт. техн. наук, профессор, **тел.:** (091) 43 11 94,
E-mail: ebelubekyan@yahoo.com
Погосян Аревшат Гургенович – доцент кафедры АЯП НПУА, канд. физ.-мат. наук,
тел.: (099) 66 23 35, **E-mail:** arevpoghosyan@mail.ru
Аветисян Грайр Робертович – ассистент АЯП НПУА, канд. техн. наук; **тел.:** 34 87 12,
E-mail: roba@seua.am

К ЗАДАЧЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН ЛЯВА В ПЬЕЗОАКТИВНОЙ СРЕДЕ

Берберян А.Х., Гараков В.Г., Григорян Л.Г.

Исследованию волн типа Лява для материалов, обладающих пьезоэлектрическими свойствами, посвящены многочисленные статьи, обзор которых приводится в [1,2]. В частности, в [3] задача рассмотрена в случае, когда слой и полупространство являются пьезоэлектриками гексагональной симметрии при различных условиях контакта слоя и полупространства.

В настоящей статье предполагается, что слой является пьезоэлектриком гексогональной симметрии класса 6mm, а полупространство – пьезоэлектриком кубической симметрии 23. Устанавливаются условия существования поверхностных волн типа Лява в зависимости от физико-механических свойств материалов.

Рассматривается система слой–полупространство. В прямоугольной декартовой системе координат (x, y, z) полупространство занимает область $-\infty < x < \infty,\quad 0 < y < \infty,\quad -\infty < z < \infty$ и обозначается индексом (1). Область, занимаемая слоем $-h \le y < 0$, имеет индекс (2). Материал слоя является пьезоэлектриком гексагональной симметрии класса 6mm, материал слоя–пьезоэлектрик кубической симметрии – класса 23. Исследуется распространение чисто сдвиговых волн в квазистатическом приближении (рис.1).

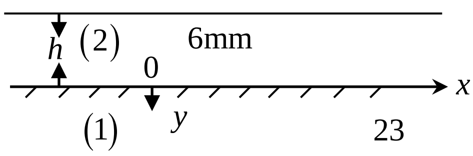


Рис.1

Уравнения распространения электроупругих волн в полупространстве $(y > 0)$ [4]

$$
\begin{aligned}
&C_{44}^{(1)}\Delta w_1 + 2e_{14}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x\partial y} = \rho_1\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}\\
&\Delta\varphi_1 - \frac{2l_{14}}{\varepsilon_1}\frac{\partial^2 w_1}{\partial x\partial y} = 0
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

и соответствующие материальные уравнения:

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{13}^{(1)} = C_{44}^{(1)}\frac{\partial w_1}{\partial x} + e_{14}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y},\quad \sigma_{23}^{(1)} = C_{44}^{(1)}\frac{\partial w_1}{\partial y} + e_{14}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\\
&D_1 = -\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + e_{14}\frac{\partial w_1}{\partial y},\quad D_2 = -\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + e_{14}\frac{\partial w_1}{\partial x}
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

В (1.1) и (1.2) общепринятые обозначения, в частности, $w_1(x, y, t)$– упругое сдвиговое (в направлении оси z) перемещение, φ_1– потенциал электрического поля.

Уравнения для пьезоэлектрика 6mm упрощаются и приводятся к раздельным [4]:

$$
a_2^2\Delta w_2 = \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2},\quad \Delta\psi_2 = 0 \tag{1.3}
$$

где

$$
\psi_2 = \varphi_2 - \frac{e_{15}}{\varepsilon_2}w_2,\quad a_2^2 = \frac{C_{44}^{(2)}}{\rho^2}(1+\chi_2),\quad \chi_2 = \frac{e_{15}^2}{\varepsilon_2 C_{44}^{(2)}}, \tag{1.4}
$$

w_2 – упругое перемещение, φ_2 – потенциал электрического поля, χ_2 – коэффициент электромеханической связи для области $y > 0$. Соответствующие материальные уравнения имеют вид:

$$\sigma_{13} = C_{44}^{(2)} \frac{\partial w_2}{\partial x} + e_{15} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, \quad \sigma_{23} = C_{44}^{(2)} \frac{\partial w_2}{\partial y} + e_{15} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}$$
$$D_1^{(2)} = -\varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + e_{15} \frac{\partial w_2}{\partial x}, \qquad D_2^{(2)} = -\varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + e_{15} \frac{\partial w_2}{\partial y}. \tag{1.5}$$

Предполагается, что на границе контакта слоя и полупространства имеют место следующие условия:

$$w_1 = w_2, \quad \sigma_{23}^{(1)} = \sigma_{23}^{(2)}, \quad \varphi_1 = \varphi_2 = 0 \quad \text{при } y = 0. \tag{1.6}$$

На внешней границе слоя принимается наиболее простой вариант граничных условий:

$$\sigma_{23}^{(2)} = 0, \quad D_2 = 0 \quad \text{при } y = -h. \tag{1.7}$$

С помощью соотношении (1.4) и (1.5) условия (1.7) приводятся к виду:

$$\frac{\partial w_2}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = -h. \tag{1.8}$$

Требуется найти решения систем уравнений (1.1), (1.2), удовлетворяющих граничным условиям (1.6), (1.8) и условиям затухания

$$\lim_{y\to\infty} w_1 = 0, \quad \lim_{y\to\infty} \varphi_1 = 0 \tag{1.9}$$

2. Решение системы (1.1) представляется следующим образом:

$$w_1 = f_1(y) \exp i(\omega t - kx), \quad \varphi_1 = g_1(y) \exp i(\omega t - kx) \tag{2.1}$$

Подстановка (2.1) в систему (1.1) приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$f_1'' - k^2 (1-\eta) f_1 - 2ik \frac{e_{14}}{C_{44}^{(1)}} g' = 0$$
$$g_1'' - kg_1 + 2ik \frac{e_{14} f_1'}{\varepsilon_1} = 0. \tag{2.2}$$

Представляя решение (2.2) в виде

$$f_1 = Ae^{-kpy}, \quad g = Be^{-kpy} \tag{2.3}$$

получим однородную алгебраическую систему уравнений относительно произвольных постоянных A, B.

$$\left(P^2 - 1 + \eta\right) A + 2ik \frac{e_{14}}{C_{44}^{(1)}} PB = 0$$
$$-2iP \frac{e_{14}}{\varepsilon} A + \left(P^2 - 1\right) B = 0 \tag{2.4}$$

где

$$\eta = \frac{\rho\omega^2}{k^2 C_{44}^{(1)}}, \quad \chi_1 = \frac{4e_{14}^2}{\varepsilon_1 C_{44}^{(1)}} \tag{2.5}$$

η – искомый безразмерный параметр квадрата фазовой скорости волны, χ_1 – коэффициент электомеханической связи для материала кубической симметрии 23.

Равенство нулю детерминанта системы (2.4) приводит к биквадратному уравнению относительно P, откуда определяются четыре корня. Используя обозначения для корней

$$P_{1,2}=\left[1-\frac{\eta-\chi_1}{2}\pm\sqrt{\frac{\left(\eta-\chi_1\right)^2}{4}+\chi_1}\right]^{1/2} \tag{2.6}$$

которые будут положительными при условии

$$0<\eta<1 \tag{2.7}$$

Получим решения, удовлетворяющие условиям затухания (1.9)

$$\begin{gathered} f_1=A_1e^{-kp_1y}+A_2e^{-kp_2y} \\ g_1=2i\frac{e_{14}}{\varepsilon_1}\left(\frac{P_1}{P_1^2-1}A_1e^{-kp_1y}+\frac{P_2}{P_2^2-1}A_2e^{-kp_2y}\right) \end{gathered} \tag{2.8}$$

Решение уравнении для слоя (1.3) будет

$$w_2=f_2\left(y\right)\exp i\left(\omega t-kx\right),\quad \psi_2=g_2\left(y\right)\exp i\left(\omega t-kx\right) \tag{2.9}$$

Требование, чтобы (2.9) удовлетворяли уравнениям (1.3) и граничным условиям (1.8), при $y=-h$ даёт

$$f_2=C\cos k\sqrt{\theta\eta\ -1}\left(h+y\right)g_2=D\text{ch}k\left(h+y\right) \tag{2.10}$$

где

$$\theta=\frac{C_1^2}{a_2^2}=\frac{C_{44}^{(1)}\rho_2}{\rho_1C_{44}^{(2)}\left(1+\chi_2\right)}$$

Подстановка решений (2.1), (2.9) с учётом (2.8) и (2.10) в условия контакта при $y=0$ (1.6) приводит к следующей системе однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных A_1, A_2, C и D.

$$\begin{gathered} A_1+A_2=C\cos\left(kh\sqrt{\theta\eta-1}\right), \\ \xi\left(P_1A_1+P_2A_2\right)=\left(1+\chi_2\right)\sqrt{\theta\eta-1}C\sin\left(kh\sqrt{\theta\eta-1}\right)-\frac{e_{15}}{C_{44}^{(2)}}D\text{sh}kh=0, \\ \frac{P_1}{P_1^2-1}A_1+\frac{P_2}{P_2^2-1}A_2=0,\quad \xi=\frac{C_{44}^{(1)}}{C_{44}^{(2)}} \\ D\text{ch}kh+\frac{e_{15}}{\varepsilon_2}C\cos\left(kh\sqrt{\theta\eta-1}\right)=0 \end{gathered} \tag{2.11}$$

Равенство нулю детерминанта системы (2.11) после некоторых преобразований приводит к виду

$$L\left(\eta\right)\equiv\left(P_1-P_2\right)L_1\left(\eta\right)=0 \tag{2.12}$$

где

$$L_1\left(\eta\right)\equiv\left(P_1P_2+1\right)\left[\left(1+\chi_2\right)\sqrt{\theta\eta-1}tg\left(kh\sqrt{\theta\eta-1}\right)+\chi_2\text{th}kh\right]-\xi P_1P_2\left(P_1+P_2\right). \tag{2.13}$$

Из равенства $P_1-P_2=0$ получается корень $\eta=0$, которому соответствует тривиальное решение $w_1\equiv0,\ \ w_2\equiv0$. Поэтому, искомая фазовая скорость $\left(\eta\right)$ определяется из уравнения $L_1\left(\eta\right)=0$, которое в частном случае $\chi_1=\chi_2=0$ переходит в уравнения задачи Лява.

3. Известно, что волны Лява существуют при условии $\theta>1$, слой, более "мягкий" по сравнению с материалом полупространства. Это условие имеет место независимо от толщины слоя или, точнее, независимо от параметра kh. Поэтому вопрос существования решения уравнения (2.13) достаточно рассмотреть в длинноволновом приближении.

$$\left(kh\right)^2\ll1. \tag{3.1}$$

Нетрудно показать, что в длинноволновом приближении (3.1) имеет место неравенство

$$L_1(0) < 1 \tag{3.2}$$

Следовательно, условия существования поверхностной волны или решение уравнения $L_1(\eta) = 0$, удовлетворяющее неравенствам $0 < \eta < 1$, будут

$$L_1(1) > 0 \tag{3.3}$$

Отсюда, с учётом, что при $\eta = 1$ следует $P_1 = (1+\chi_1)^{1/2}$, $P_2 = 0$, получим условие

$$(1+\chi_2)(\theta - 1) + \chi_2 > 0 \text{ или } \theta > (1+\chi_2)^{-1} \tag{3.4}$$

Согласно выражению θ, из (2.10) получается

$$\frac{C_{44}^{(1)}\rho_2}{C_{44}^{(2)}\rho_1} > 1 \tag{3.5}$$

Условие (3.5) совпадает с условием существования волн Лява для материалов без учёта пьезоэффекта. Следовательно, пьезоэффект в рассматриваемой задаче не влияет на условие существования поверхностной волны, но влияет на скорость распространения волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н. Электромагнитоупругие волны. Ереван: Изд.ЕГУ, 2006. 492с.
2. Yang J., Wang J. Dynamic anti–plane problems of piezo ceramics and applications in ultrasonics–a review. //Acta Mechanica Solida Sinica. 2008. Vol.21. №3. P.207–220.
3. Белубекян В.М., Белубекян М.В. Поверхностные электроупругие волны в пьезоактивной системе слой–полупространство. //Учённые записки ЕГУ. 2006. №3. С.25–30.
4. Бардзокас Д.И., Кудрявцев Б.А., Сенин Н.А. Распространение волны в электроупругих средах. М.: Едиоториел УРСС, 2003. 336с.

Сведения об авторах:

Берберян Армен Хачатурович – научн.сотр. Института механики НАН Армении
Адрес: 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2
Тел.: (+37410) 46 20 96; **E-mail:** slavia555@yahoo.com

Гараков Владимир Герасимович – ст.научн.сотр. Института механики НАН Армении
Адрес: 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2
Тел.: (+37493) 33 81 66; **E-mail**: garakov@yandex.ru

Григорян Левон Гагикович – аспирант Института механики НАН Армении
Адрес: 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2
Тел.: (+37455) 01 00 17; **E-mail:** levon1.grigoryan@gmail.comv

МЕТОДИКА ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛЕЙ ГРУНТОВ

Болдырев Г.Г., Идрисов И.Х.

В данной статье приведена методика идентификации параметров модели грунта, используя результаты испытаний образцов в условиях трёхосного и компрессионного сжатия, и расчёты в LS-DYNA и LS-OPT. Используя результаты идентификации параметров модели, выполнен расчёт напряжённо-деформированного состояния и приведено сопоставление результатов расчётов и опытов.

Разработка компьютерных моделей и моделирование процессов испытаний грунтов выполнено в программе LS-DYNA [1–2]. Идентификация параметров модели грунта FHWA [4] выполнено в программе LS-OPT [3].

Для определения параметров модели № 147 [4] LS-DYNA в лаборатории университета с использованием комплекса АСИС (рис.1) были выполнены испытания мелкозернистого песка в условиях трёхосного и компрессионного сжатия.

Рис.1. Измерительно-вычислительный комплекс АСИС (www.npp-geotek.ru)

Рис.2 а. Прибор для испытаний на трёхосное сжатие

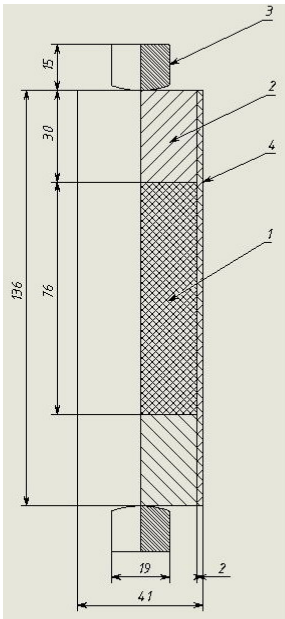


Рис.2 б. Схема нагружения:
1 – образец; 2 – штамп; 3 – индентор;
4 – резиновая оболочка

Опыты с песком были выполнены в приборе трёхосного сжатия, внешний вид которого показан на рис.2а. Данный прибор позволяет реализовать двухшаговую последовательность нагружения испытываемого цилиндрического образца материала. На первом шаге образец нагружается объёмным гидростатическим давлением, на втором шаге – к верхнему торцу цилиндрического образца через цилиндрический плоский штамп с помощью индентора постепенно прикладывается сосредоточенная нагрузка. Схема нагружения испытываемого образца показана на рис.2б.

В условиях компрессионного сжатия испытания выполнялись с использованием прибора, внешний вид которого показан на рис.3а. Данный прибор позволяет реализовать ступенчатое или кинематическое нагружение испытываемого цилиндрического образца. Схема нагружения испытываемого образца показана на рис.3б. В компрессионных испытаниях использовались образцы песка, имеющие диаметр 71 мм и высоту 25 мм.

Рис.3а. Компрессионный прибор

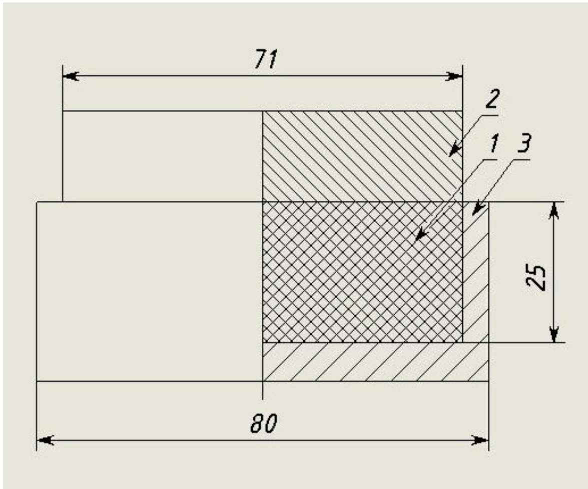


Рис.3б. Схема нагружения: 1 – образец; 2 – штамп; 3 – стальное кольцо

Разработка компьютерной модели выполнена в программе ANSYS. Компьютерная модель включала четыре части – образец, штамп, индентор (шток) и резиновую оболочку. Для описания деформации образца использовалась дополнительная Эйлерова часть. При учёте наличия трёх плоскостей симметрии использовалась 1/8 часть рассматриваемой системы. Геометрическая модель включала 28 точек, 42 линии, 22 поверхности и 4 объёма. Граничные условия были заданы с учётом наличия трёх плоскостей симметрии.

На первом и втором шаге нагружения давление прикладывалось к боковой поверхности резиновой оболочки и верхней поверхности штампа. На втором этапе нагружения дополнительно задавалось вертикальное перемещение индентора. Конечно-элементная сетка включала 10242 узла и 8220 элементов. Подготовленная в программе ANSYS компьютерная модель была доработана для использования в программе LS-DYNA. Доработка заключалась в следующем:

1) в изменении моделей материалов. При создании компьютерной модели использовались следующие модели материалов программы LS-DYNA:

– для грунта – 147 модель FHWA;

– для штампа – изотропная упругая модель;

– для индентора – модель абсолютно жёсткого тела;

– для резиновой оболочки – модель Муни–Ривлина;

2) в добавлении двух контактных пар между индентором, штампом и резиновой оболочкой;

3) в добавлении Лагранжево-Эйлерового связывания между штампом, резиновой оболочкой и образцом.

Подобным образом была разработана компьютерная модель испытаний грунта в условиях компрессионного сжатия. Разработка компьютерной модели системы «образец-штамп» выполнена в программе ANSYS. При учёте наличия трёх плоскостей симметрии использовалась 1/8 часть рассматриваемой системы. Геометрическая модель включала 6 точек, 9 линий, 5 поверхностей и 1 объём. Граничные условия были заданы с учётом наличия трёх плоскостей симметрии. Построенная конечно-элементная сетка включала 1519 узлов и 1344 элемента. Подготовленная в программе ANSYS компьютерная модель была доработана для использования в программе LS-DYNA. Доработка заключалась в изменении модели материалов. При создании компьютерной модели для грунта использовалась 147 модель FHWA.

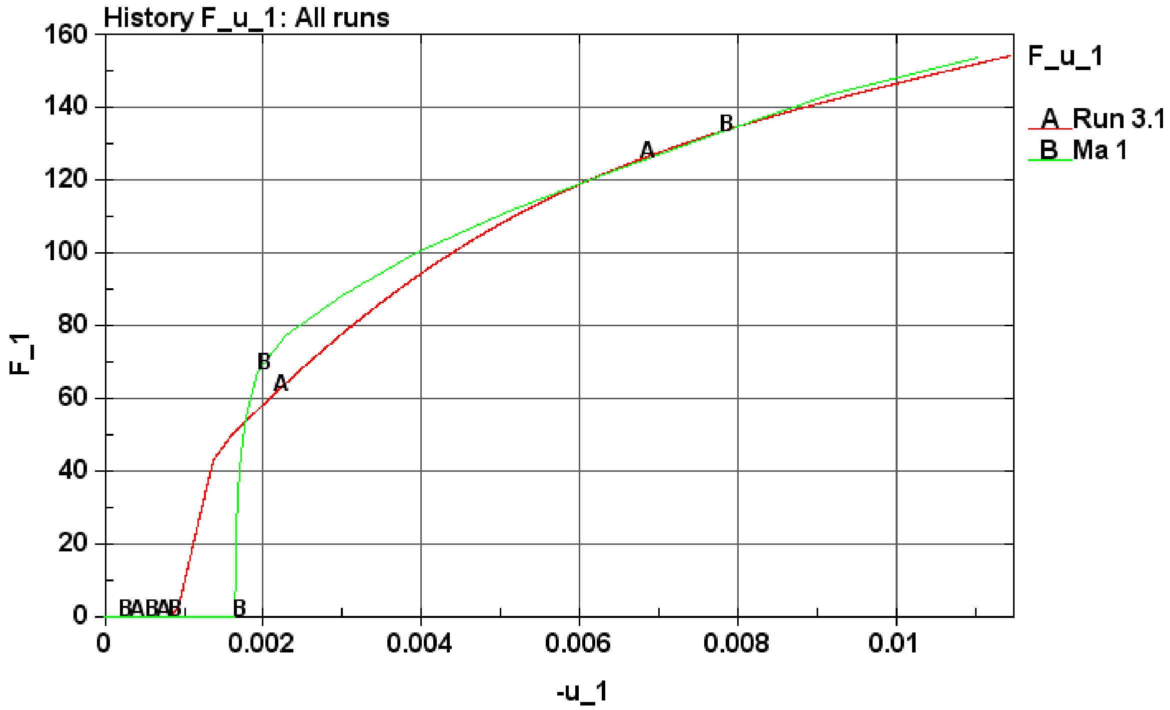


Рис.4. Сопоставление результатов эксперимента и математического моделирования трёхосного сжатия: А – математическое моделирование; В – эксперимент

Методика идентификации параметров модели FHWA с использованием программ LS-OPT и LS-DYNA предполагает выполнение следующей последовательности действий:

– подготовка исходных данных для идентификации;

– разработка компьютерных моделей процессов испытаний грунтов, на основе результатов которых проводится идентификация;

– постановка и решение задачи идентификации в программе LS-OPT;

– проверка результатов идентификации путём качественных и количественных сопоставлений результатов компьютерного моделирования и испытаний;

– повторение всех вышеперечисленных действий в случае получения неудовлетворительных результатов идентификации.

Проверка результатов идентификации путём качественных и количественных сопоставлений результатов компьютерного моделирования и испытаний показана на рис.6.

В качестве примера на рис.4 представлены результаты сопоставления зависимостей вертикальных перемещений штампа от вертикальной нагрузки на образец в испытаниях на трёхосное сжатие при всестороннем давлении 100 кПа.

В случае получения неудовлетворительных результатов процесс идентификации параметров продолжается. Часто для улучшения результатов достаточно проведения повторной идентификации, при которой в качестве начальных используются параметры, полученные в результате предыдущего шага. В этом случае варьируемыми являются другие параметры. Например, на первом шаге идентификации варьируются параметры A_n (AN) и E_t (ET), а на втором шаге варьируемыми являются параметры c (COH) и φ_{max} (PHIMAX).

В качестве примера в табл. 1 и 2 представлены результаты двух последовательно выполненных шагов идентификации.

Идентификация параметров 147 модели FHWA для песка выполнена в два шага. На первом шаге идентификации варьируются параметры A_n (AN) и E_t (ET), а на втором шаге варьируемыми являются параметры c (COH) и φ_{max} (PHIMAX). Результаты первого шага идентификации использованы в качестве начального на втором шаге идентификации. В табл. 1 и 2 представлены результаты двух последовательно выполненных шагов идентификации.

Таблица 1

Результаты первого шага идентификации

Наименование варьируемого параметра	Наименование варьируемого параметра	Уровни варьирования		Оптимальные значения варьируемого параметра
		нижний	верхний	
Параметр, вводимый в процентах от значения Phimax, где начинаются нелинейные эффекты	A_n (AN)	0	1	0,607
Величина нелинейного эффекта	E_t (ET)	0	30	7,42

Таблица 2

Результаты второго шага идентификации

Наименование варьируемого параметра	Наименование варьируемого параметра	Уровни варьирования		Оптимальные значения варьируемого параметра
		нижний	верхний	
Сцепление	c (COH)	2520	3080	3080
Угол внутреннего трения при пиковой прочности	φ_{max} (PHIMAX)	0,405	0,495	0,454

Компьютерное моделирование процесса испытаний грунтов на трёхосное сжатие выполнено с использованием компьютерной модели, описание которой приведено ранее. При моделировании использована 147 модель грунта FHWA с параметрами, которые были определены в процессе идентификации. В численном моделировании использована программа LS-DYNA.

Некоторые результаты моделирования представлены на рис.5, где показано распределение интенсивности напряжений в испытываемом образце (распределения интенсивности напряжений в других частях системы не показаны) в конце второго шага нагружения. Распределение интенсивности напряжений имеет характерный для подобных процесс локализации деформаций в виде крестообразных полос под штампом.

ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ

1. В процессе выполненных экспериментальных и численных исследований, на примере 147 модели материала программы LS-DYNA, разработана методика идентификации параметров моделей грунта.
2. На примере идентификации параметров модели песка показано содержание её основных этапов. Эта методика может быть применена и для других моделей материалов и не только грунтов.
3. Применение комплекса АСИС и рассмотренной методики идентификации параметров моделей позволяет более достоверно назначать параметры, применяемые при расчёте напряжённо-деформированного состояния оснований зданий и сооружений.

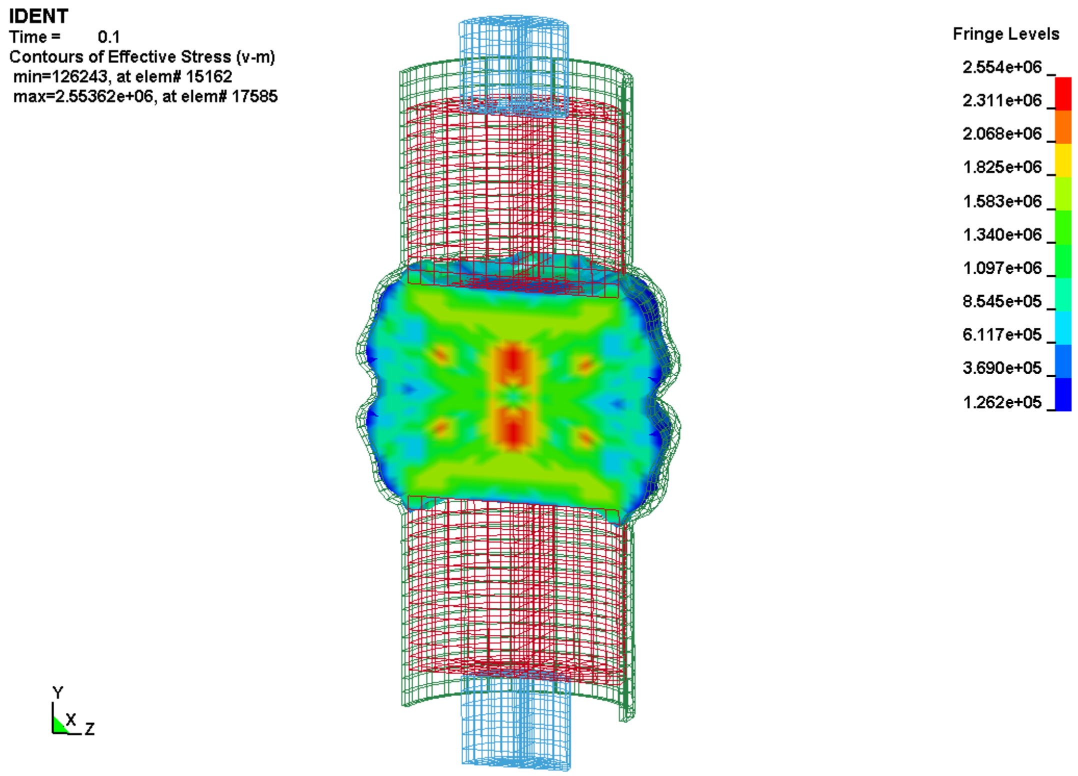


Рис.5. Распределение интенсивности напряжений в образце, Па

ЛИТЕРАТУРА

1. Hallquist J.O. LS-DYNA Theory Manual. – Livermore: LSTC, 2006. – 680 с.
2. LS-DYNA Keyword User's Manual. Volume I, II. – Livermore: LSTC, 2007. - 2206 с.
3. Stander N., Roux W., Goel T. LS-OPT User's Manual. – Livermore: LSTC, 2008. – 2206 с.
4. Evaluation of LS-DYNA Soil Material Model 147 / Report No FHWA-HRT-04094. – Lincoln, University of Nebraska. - 77 с.
5. Болдырев Г.Г. Методы определения механических свойств грунтов. Состояние вопроса: монография. Пенза: ПГУАС, 2008. 696 с.

Сведения об авторах:

Болдырев Геннадий – д.т.н., профессор кафедры «Геотехника и дорожное строительство» Пензенского университета архитектуры и строительства, Россия
Тел.: +79603173156; **E-mail:** g-boldyrev@geoteck.ru
Идрисов Илья – к.т.н., генеральный директор ООО «НПП Геотек», Россия
Тел.: +79875014262**;** **E-mail:** idrisov@npp-geotek.ru

О РАДИАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ТРУБЫ ПРИ НАЛИЧИИ НЕОДНОРОДНОГО ПОЛЯ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ С УЧЁТОМ ОСТАТОЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

Ватульян А.О., Дударев В.В., Мнухин Р.М.

В качестве объекта исследования в работе рассмотрена изотропная труба в двух состояниях. В начальном состоянии недеформированная и свободная от напряжений труба подвергается действию внутреннего эксплуатационного давления. При этом, в трубе возникают неоднородные поля остаточных напряжений и деформаций. Для анализа влияния уровня и структуры этих полей на акустические характеристики во втором состоянии труба подвергается радиальным колебаниям путём приложения нагрузки к внешней поверхности. Соответствующие уравнения колебаний и граничные условия представлены в рамках теории предварительного напряжённого состояния Треффтца-Гузя. Решение прямой задачи об определении радиальной компоненты смещения реализовано с помощью численного метода пристрелки. Проведён анализ изменения первых трёх резонансных частот с учётом и без учёта полей остаточных деформаций и предварительных напряжений. Предложен подход для решения обратной задачи о восстановлении уровня предварительного напряжённого состояния по данным об изменении частоты свободных колебаний трубы.

Введение. Развитие современного производства приводит к росту потребности в прокладке магистральных трубопроводов для передачи на большие расстояния газообразных и жидких сред. В связи с этим, предъявляются всё более высокие требования к качеству изготовления составных элементов таких сооружений. Для обеспечения безаварийной эксплуатации трубопроводов необходимо своевременно проводить аттестацию и анализ их внутреннего напряжённо-деформированного состояния. При этом, главный вклад в создании этого состояния трубы вносит действующее внутреннее эксплуатационное давление. Одним из наиболее эффективных и удобных в практической реализации методов неразрушающей диагностики является акустический метод, позволяющий по данным об изменении волновых характеристик тела определять его исследуемые свойства. Для применения этого метода на объект прикладывается неразрушающее воздействие, приводящее к возникновению анализируемого акустического отклика. В качестве такого воздействия, например, можно привести периодические нагрузки с постоянной амплитудой, приложенные на доступной части границы тела и порождающие установившиеся колебания. В рамках теории предварительного напряжённого состояния (ПНС) напряжения, обусловленные скрытыми нагрузками, могут быть рассмотрены как предварительные [1,2]. В настоящей работе на примере установившихся радиальных колебаний трубы проведён анализ изменения значений резонансных частот в зависимости от уровня предварительных напряжений (ПН) и соответствующих им остаточных деформаций.

1.Прямая задача. В рамках модели ПНС Треффтца-Гузя общая постановка задачи об установившихся колебаниях изотропного упругого тела с поверхностью $S = S_u \cup S_\sigma$ и плотностью ρ после отделения временного множителя может быть записана в виде [1-3]:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \underline{\underline{T}} + \rho\omega^2 \vec{u} = 0, \\ \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{\sigma}}^0 \cdot \nabla\vec{u} + \underline{\underline{\sigma}} \cdot \nabla\vec{u}^0, \\ \underline{\underline{\sigma}} = \lambda \underline{\underline{E}}\,\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\varepsilon}} + 2\mu\underline{\underline{\varepsilon}}, \\ \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}^0 = 0, \\ \vec{n} \cdot \underline{\underline{T}}\,|_{S_\sigma} = \vec{p}, \\ \vec{u}\,|_{S_u} = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

где $\underline{\underline{T}}$ – несимметричный добавочный тензор напряжений Пиолы, $\vec{u}$ – вектор смещений, ω – частота колебаний, $\underline{\underline{\sigma}}$ – тензор напряжений Коши, $\underline{\underline{\sigma}}^0$ – тензор ПН, $\vec{u}^0$ – вектор остаточных (предварительных) смещений, λ, μ –параметры Ляме, $\underline{\underline{E}}$ –единичный тензор, $\underline{\underline{\varepsilon}} = 0.5(\nabla\vec{u} + \nabla\vec{u}^T)$ – линейный тензор деформаций, $\vec{n}$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности S, $\vec{p}$ – вектор нагрузки.

В рамках плоской деформации рассмотрим установившиеся радиальные колебания изотропной однородной трубы с внутренним радиусом $r_1 > 0$ и внешним радиусом r_2. Колебания вызываются нагрузкой амплитуды p, приложенной на внешней поверхности с частотой ω. ПНС в трубе, обусловленное действием эксплуатационного внутреннего давления p^0, описывается компонентами тензора ПН $\sigma_{rr}^0 = \sigma_{rr}^0(r) \neq 0$, $\sigma_{\varphi\varphi}^0 = \sigma_{\varphi\varphi}^0(r) \neq 0$ и функцией радиального смещения $u^0(r) \neq 0$. На основе (1.1) выпишем уравнение колебаний, определяющие соотношения и граничные условия в полярной системе координат:

$$\frac{dT_{rr}}{dr} + \frac{T_{rr} - T_{\varphi\varphi}}{r} + \rho\omega^2 u = 0, \tag{1.2}$$

$$T_{rr} = \sigma_{rr} + \frac{du}{dr}\sigma_{rr}^0 + \sigma_{rr}\frac{du^0}{dr} = \sigma_{rr}\left(1 + \frac{du^0}{dr}\right) + \sigma_{rr}^0\frac{du}{dr}, \tag{1.3}$$

$$T_{\varphi\varphi} = \sigma_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r}u\sigma_{\varphi\varphi}^0 + \sigma_{\varphi\varphi}\frac{1}{r}u^0 = \sigma_{\varphi\varphi}\left(1 + \frac{1}{r}u^0\right) + \sigma_{\varphi\varphi}^0\frac{1}{r}u, \tag{1.4}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^0 = r\frac{d\sigma_{rr}^0}{dr} + \sigma_{rr}^0, \tag{1.5}$$

$$\sigma_{rr} = \lambda\left(\frac{du}{dr} + \frac{u}{r}\right) + 2\mu\frac{du}{dr}, \tag{1.6}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \lambda\left(\frac{du}{dr} + \frac{u}{r}\right) + 2\mu\frac{u}{r}, \tag{1.7}$$

$$T_{rr}(r_1) = 0,\ T_{rr}(r_2) = p, \tag{1.8}$$

где $u(r)$ – радиальная компонента вектора смещения. Для общности рассуждений перейдём к безразмерной постановке задачи, выписанной в виде канонической системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} U'(\xi) = \dfrac{1}{\left((c+2)(1+U^{0\prime}) + g_1\right)}\left(Y(\xi) - c(1+U^{0\prime})\dfrac{U(\xi)}{\xi}\right), \\ Y'(\xi) = -\dfrac{Y(\xi)}{\xi}\left(\dfrac{c\left(U^{0\prime} - \dfrac{U^0}{\xi}\right) + 2(1+U^{0\prime}) + g_1}{(c+2)(1+U^{0\prime}) + g_1}\right) + \\ +U(\xi)\left(\dfrac{2\left(1+\dfrac{U^0}{\xi}\right) + g_2}{\xi^2} + c\left(1+\dfrac{U^0}{\xi}\right)\dfrac{2(1+U^{0\prime}) + g_1}{\xi^2\left((c+2)(1+U^{0\prime}) + g_1\right)} - \kappa^2\right), \\ Y(\xi_0) = 0, \\ Y(1) = p^*, \end{cases} \tag{1.9}$$

где ведены следующие безразмерные параметры и функции $r = r_2\xi$, $\xi \in [\xi_0, 1]$, $\xi_0 = r_1/r_2$, $\kappa^2 = \rho\omega^2 r_2^2/\mu$, $p^* = p/\mu$, $c = \lambda/\mu$, $T_r(r) = \mu Y(\xi)$, $u(r) = r_2 U(\xi)$, $u^0(r) = r_2 U^0(\xi)$ $\sigma_{rr}^0 = \mu g_1(\xi)$, $\sigma_{\varphi\varphi}^0 = \mu g_2(\xi)$. Учитывая линейность задачи, далее положим параметр $p^* = 1$. Отметим, что в общем случае неоднородности полей ПН и деформаций задача (1.9) может быть решена только численно. В настоящей работе в качестве численного метода решения выбран метод пристрелки, реализованный в пакете Maple на основе встроенных процедур решения задачи Коши.

В рамках сформулированной проблемы функции $g_i(\xi)$, описывающие поле ПН, соответствуют решению задачи Ляме и могут быть записаны в виде [4]:

$$g_1(\xi)=\frac{\tau\xi_0^2}{1-\xi_0^2}\left(1-\frac{1}{\xi^2}\right), \tag{1.10}$$

$$g_2(\xi)=\frac{\tau\xi_0^2}{1-\xi_0^2}\left(1+\frac{1}{\xi^2}\right), \tag{1.11}$$

где параметр $\tau=p^0/\mu$ пропорционален внутреннему давлению. Приведённые законы тождественно удовлетворяют условию (1.5) для компонент тензора ПН. Соответствующее выражение для функции $U^0(\xi)$, определяющее поле предварительных (остаточных) деформаций, имеет вид [4]:

$$U^0(\xi)=\frac{\tau\xi_0^2}{2(1-\xi_0^2)}\left((1-2\nu)\xi+\frac{1}{\xi}\right), \tag{1.12}$$

где ν – коэффициент Пуассона. Из приведённых выражений (1.10)-(1.12) видно, что основной величиной, характеризующей ПНС, является параметр τ. Для оценки возможности реконструкции такого ПНС с учётом остаточных деформаций на основе акустических данных проведён анализ изменения первых трёх значений параметра κ, пропорциональных резонансным частотам, в зависимости от величины τ. В табл. 1-9 при заданном τ для стальных труб различной толщины ($\xi_0=0.1, 0.5, 0.9$, $\nu=0.3$) приведены следующие данные: $\tilde{\kappa}$ – резонансное значение κ при отсутствии ПНС ($\tau=0$), κ^* – резонансное значение κ, полученное из (1.9) без учёта остаточных деформаций ($U^0(\xi)=0$), κ^{**} – с учётом ПН и остаточных деформаций.

Таблица 1. Первое резонансное значение κ, $\xi_0=0.1$, $\tilde{\kappa}=3.791498421$

τ	p^0 (МПа)	κ^*	κ^{**}
0.0001238095238	10	3.791489839	3.791502713
0.001733333334	140	3.791389704	3.791564225
0.003528571430	285	3.791276695	3.791634319

Таблица 2. Второе резонансное значение κ, $\xi_0=0.1$, $\tilde{\kappa}=9.214228630$

τ	p^0 (МПа)	κ^*	κ^{**}
0.0001238095238	10	9.214196205	9.214236259
0.001733333334	140	9.213774681	9.214356422
0.003528571430	285	9.213307381	9.214489937

Таблица 3. Третье резонансное значение κ, $\xi_0=0.1$, $\tilde{\kappa}=14.64223933$

τ	p^0 (МПа)	κ^*	κ^{**}
0.0001238095238	10	14.64219356	14.64221644
0.001733333334	140	14.64160705	14.64192319
0.003528571430	285	14.64095330	14.64159703

Таблица 4. Первое резонансное значение κ, $\xi_0=0.5$, $\tilde{\kappa}=2.369454740$

τ	p^0 (МПа)	κ^*	κ^{**}
0.0001238095238	10	2.369429708	2.369497656
0.001238095238	100	2.369205592	2.369888664
0.002674285715	216	2.368917108	2.370392920

Таблица 5. Второе резонансное значение κ, $\xi_0 = 0.5$, $\tilde{\kappa} = 12.03524494$

τ	p^0 (МПа)	κ^*	κ^{**}
0.0001238095238	10	12.03517246	12.03500080
0.001238095238	100	12.03452396	12.03280926
0.002674285715	216	12.03368664	12.02998257

Таблица 6. Третье резонансное значение κ, $\xi_0 = 0.5$, $\tilde{\kappa} = 23.64466119$

τ	p^0 (МПа)	κ^*	κ^{**}
0.0001238095238	10	23.64452243	23.64414477
0.001238095238	100	23.64326787	23.63949132
0.002674285715	216	23.64164996	23.63349032

Таблица 7. Первое резонансное значение κ, $\xi_0 = 0.9$, $\tilde{\kappa} = 1.781502724$

τ	p^0 (МПа)	κ^*	κ^{**}
0.00006190476192	5	1.781491278	1.781670570
0.0003095238096	25	1.781447410	1.782338142
0.0006685714289	54	1.781382560	1.783307076

Таблица 8. Второе резонансное значение κ, $\xi_0 = 0.9$, $\tilde{\kappa} = 58.80339444$

τ	p^0 (МПа)	κ^*	κ^{**}
0.00006190476192	5	58.80314887	58.80039871
0.0003095238096	25	58.80217016	58.78841698
0.0006685714289	54	58.80075037	58.77103865

Таблица 9. Третье резонансное значение κ, $\xi_0 = 0.9$, $\tilde{\kappa} = 117.5624087$

τ	p^0 (МПа)	κ^*	κ^{**}
0.00006190476192	5	117.5619170	117.5564060
0.0003095238096	25	117.5599501	117.5323895
0.0006685714289	54	117.5570980	117.4975565

Из приведённых данных и структуры системы дифференциальных уравнений (1.9) видно, что учёт остаточных деформаций и ПН различным образом влияет на резонансные значения параметра κ. Это может быть обусловлено знаками функций $g_i(\xi)$, $U^0(\xi)$ и $U^{0\prime}(\xi)$ в зависимости от значения параметра ξ_0, характеризующего толщину трубы.

2. Обратная задача. Рассмотрим обратную задачу о реконструкции параметра τ по изменению значения собственной частоты радиальных колебаний. Для её решения сформулируем две задачи о свободных колебаниях трубы при наличии и отсутствии ПНС, записанных в перемещениях:

$$\begin{cases} \left(\left(c\dfrac{U}{\xi}+(c+2)U'\right)(1+U^{0\prime})+g_1U'\right)' + \\ +\dfrac{\left(c\dfrac{U}{\xi}+(c+2)U'\right)(1+U^{0\prime})+g_1U'-\left(cU'+(c+2)\dfrac{U}{\xi}\right)\left(1+\dfrac{U^0}{\xi}\right)-g_2\dfrac{U}{\xi}}{\xi}+\kappa^2U=0, \\ \left(\left(c\dfrac{U}{\xi}+(c+2)U'\right)(1+U^{0\prime})+g_1U'\right)(\xi_0)=0, \\ \left(\left(c\dfrac{U}{\xi}+(c+2)U'\right)(1+U^{0\prime})+g_1U'\right)(1)=0, \end{cases} \tag{2.1}$$

$$
\begin{cases}
\left(c\dfrac{U_0}{\xi}+(c+2)U_0'\right)'+\dfrac{c\dfrac{U_0}{\xi}+(c+2)U_0'-cU_0'-(c+2)\dfrac{U_0}{\xi}}{\xi}+\kappa_0^2U_0=0,\\
\left(c\dfrac{U_0}{\xi}+(c+2)U_0'\right)(\xi_0)=0,\\
\left(c\dfrac{U_0}{\xi}+(c+2)U_0'\right)(1)=0.
\end{cases}
\qquad (2.2)
$$

Умножим уравнения колебаний в (2.1) и (2.2) соответственно на ξU_0 и ξU, далее проинтегрируем в пределах от ξ_0 до 1. После применения формулы интегрирования по частям с учётом граничных условий (2.1) и (2.2) вычтем полученные выражения одно из другого, тогда получим:

$$
\kappa^2-\kappa_0^2=\frac{\int_{\xi_0}^{1}\left(\left(c\dfrac{U}{\xi}+(c+2)U'\right)\xi U_0'U^{0\prime}+\left(cU'+(c+2)\dfrac{U}{\xi}\right)\dfrac{U_0U^0}{\xi}+g_1\xi U'U_0'+g_2\dfrac{UU_0}{\xi}\right)d\xi}{\int_{\xi_0}^{1}\xi UU_0d\xi}. \qquad (2.3)
$$

На основе этого соотношения по аналогии с [5] можно получить формулу для отыскания значения параметра τ по данным о значениях κ и κ_0.

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России № 9.665.2014/K и при поддержке РФФИ (№ 13-01-00196, 14-01-31393, 14-01-31453).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ватульян А.О., Дударев В.В., Недин Р.Д. Предварительные напряжения: моделирование и идентификация. Ростов-на-Дону: Изд. Южного федерального университета, 2014. 206 с.
2. E. Trefftz. Zurtheorie der stabilitat des elastischengleichgewichts // ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1933. V.12. №2. P.160–165.
3. Guz A.N. Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses // International Applied Mechanics. 2002. V.38. №1. P.23–59.
4. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
5. Ватульян А.О., Дударев В.В. Об определении внутреннего давления в цилиндре по данным акустического зондирования // Дефектоскопия. 2014. № 10. С.52–60.

Сведения об авторах:

Ватульян Александр Ованесович – д.ф.м.н, профессор, зав. кафедрой теории упругости, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича, ЮФУ; зав. отделом дифференциальных уравнений, ФГБУН Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН. **E-mail vatulyan@math.rsu.ru**

Дударев Владимир Владимирович – к.ф.м.н., ассистент кафедры теории упругости, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича; ЮФУ, научный сотрудник, ФГБУН Южный математический институт Владикавказского научного центра Российской академии наук. **E-mail dudarev_vv@mail.ru**

Мнухин Роман Михайлович – магистр, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича, Южный федеральный университет, **E-mail romamnuhin@yandex.ru**

ОБ ИНДЕНТИРОВАНИИ ОРТОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Ватульян А.О., Ляпин А.А., Недин Р.Д.

Рассмотрена задача о вдавливании гладкого жёсткого параболоида вращения в ортотропное полупространство. Получено граничное интегральное уравнение относительно неизвестных нормальных контактных напряжений. Исследованы свойства структуры решения полученного интегрального уравнения. Доказана теорема о представлении решения для контактного напряжения, на основании которой сформулировано и исследовано уравнение для определения формы и размеров области контакта. Представлены результаты расчётов основных характеристик контактной задачи.

Одним из наиболее распространенных на сегодняшних день экспериментальных методов является индентирование, представляющее собой целый комплекс методик проведения механических испытаний для исследования физических и механических свойств образцов различного происхождения, основанных на вдавливании твёрдого тела (индентора) в образец с последующим анализом формы отпечатка, кривой зависимости нагрузки на индентор от глубины вдавливания и прочих характеристик в зависимости от поставленной задачи. Индентирование имеет большое значение с точки зрения неразрушающего контроля образцов: вместо разрушающих испытаний на одноразовых образцах предлагаются способы идентификации свойств за счёт проведения серии неразрушающих. Наноиндентирование, являющее собой одно из наиболее актуальных и востребованных ответвлений этого метода, ставит целью изучение фундаментальных закономерностей поведения материалов в тонких приповерхностных слоях и субмикронных объёмах.

Наноиндентированию посвящено множество работ в отечественной и мировой литературе, большинство из которых носят чисто экспериментальный характер. Основные этапы наноиндентирования, способы обработки данных эксперимента даны в обзорной работе [1]; приведены методики наноиндентирования применительно к твёрдым телам в субмикрообъёмах, приповерхностных тонких слоях, пленках и покрытиях. В то же время методы уточнения результатов наноиндентирования продолжают совершенствоваться, происходит учёт многих факторов, например, влияние основания, анизотропии материала, шероховатости, связанности полей [1-7]. При этом, авторы решают ряд новых контактных задач [8-10]. Отметим интерес к технике индентирования и у специалистов в области горной механики и механики угля [9-12]. Отметим, что большинство формул, по которым осуществляется идентификация характеристик, основаны на решении Герца для изотропного материала.

В настоящей работе исследована задача о вдавливании гладкого жёсткого параболоида вращения в ортотропное полупространство. Рассмотрим равновесие ортотропного полупространства $x_3 \le 0$ под действием гладкого жёсткого штампа в форме параболоида вращения, на который действует сила P. Будем считать, что оси упругой симметрии совпадают с осями координат. Уравнения равновесия имеют вид

$$\sigma_{ij,j} = 0, \tag{1}$$

определяющие соотношения:

$$\sigma_{11} = C_{11}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{22} + C_{13}\varepsilon_{33}, \quad \sigma_{22} = C_{12}\varepsilon_{11} + C_{22}\varepsilon_{22} + C_{23}\varepsilon_{33}$$

$$\sigma_{33} = C_{13}\varepsilon_{11} + C_{23}\varepsilon_{22} + C_{33}\varepsilon_{33}, \ \sigma_{13} = 2C_{55}\varepsilon_{13}, \ \sigma_{23} = 2C_{44}\varepsilon_{23}, \ \sigma_{12} = 2C_{66}\varepsilon_{12}, \tag{2}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right),$$

где C_{ij} – упругие постоянные, удовлетворяющие условиям симметрии и положительной определённости упругой энергии. Обозначим

$$\gamma_1 = C_4 / C_{33}, \ \gamma_2 = C_{22} / C_{33}, \ \gamma_3 = C_{23} / C_{33}, \ \gamma_4 = C_{44} / C_{33},$$

$$\gamma_5 = C_{55} / C_{33}, \ \gamma_6 = C_{66} / C_{33}, \ \gamma_7 = C_{13} / C_{33}. \tag{3}$$

Граничные условия имеют вид:

$$x_3 = 0: \ \sigma_{j3} = 0, \ \ j = 1, 2$$

$$\sigma_{33} = 0, \ x \notin \Omega, \ u_3 = f(x_1, x_2), \ \ x \in \Omega, \ \text{ где } \Omega: \ \{x_1^2 + x_2^2 \le a^2\} \tag{4}$$

Используя вспомогательную задачу для полупространства, нетрудно получить интегральное уравнение относительно неизвестных нормальных контактных напряжений следующего вида:

$$Kq = \int_{\Omega} k(\xi_1 - x_1, \xi_2 - x_2) q(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = 4\pi^2 f(x_1, x_2), \ (x_1, x_2) \in \Omega \tag{5}$$

где ядро представимо в форме

$$k(t_1, t_2) = \int_{R_2} K(u_1, u_2) e^{i(u_1 t_1 + u_2 t_2)} du_1 u_2, \tag{6}$$

а символ ядра $K(u_1, u_2) = K(us_1, us_2)$ имеет следующий вид:

$$K(us_1, us_2) = C(\varphi)u^{-1}, \ u = (u_1^2 + u_2^2)^{\frac{1}{2}}, \ s_1 = \cos\varphi, \ s_2 = \sin\varphi, \ q(\xi_1, \xi_2) = C_{33}^{-1}\sigma_{33}(0, \xi_1, \xi_2)$$

$$C(\varphi) = a_0 \frac{\mu_1\mu_2\mu_3(\mu_1 + \mu_3)(\mu_2 + \mu_3)(\mu_1 + \mu_2)}{p_2\mu_1\mu_2\mu_3 - p_4(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)} \tag{7}$$

$$p_2 = a_0[\Delta_1 s_1^4 + 2(2\gamma_6 + \gamma_3 - \gamma_7\gamma_8)s_1^2 s_2^2 - \Delta_2 s_2^4]$$

$$p_4 = -(\gamma_5 s_1^2 + \gamma_4 s_2^2)\left[\gamma_6\Delta_1 s_1^4 + 2\left(\frac{\Delta}{2} - \gamma_3\gamma_6 - \gamma_6\gamma_7\gamma_8\right)s_1^2 s_2^2 + \gamma_6\Delta_2 s_2^4\right]$$

Здесь $\mu_{k,} \ \ k = 1, 2, 3$ – корни уравнения

$$a_0\mu^6 + a_2\mu^4 + a_4\mu^2 + a_6 = 0 \ \ (\operatorname{Re}\mu_k > 0) \tag{8}$$

Причём, его коэффициенты имеют вид:

$$a_0=\gamma_4\gamma_5$$

$$a_2=-\left\{[\gamma_4(\Delta_1-2\gamma_5\gamma_7)+\gamma_5\gamma_6]s_1^2+[\gamma_5(\Delta_2-2\gamma_4\gamma_8)+\gamma_4\gamma_6]s_2^2\right\}$$

$$a_4=[\gamma_6(\Delta_1-2\gamma_5\gamma_7)+\gamma_1\gamma_5\gamma_4]s_1^4+[\gamma_6(\Delta_2-2\gamma_4\gamma_8)+\gamma_2\gamma_4\gamma_5]s_2^4+$$
$$+2s_1^2s_2^2[\Delta/2+\gamma_9(\gamma_4+\gamma_8)(\gamma_5+\gamma_7)+\gamma_4\gamma_5\gamma_6-\gamma_3\gamma_7\gamma_8-\gamma_1\gamma_4\gamma_8-\gamma_2\gamma_5\gamma_7-\gamma_3\gamma_6]$$

$$a_6=-(\gamma_5s_1^2+\gamma_4s_2^2)[\gamma_1\gamma_6s_1^4+(\gamma_1\gamma_2-2\gamma_3\gamma_6-\gamma_3^2)s_1^2s_2^2+\gamma_2\gamma_6s_2^4]$$

$$\Delta_1=\gamma_1-\gamma_7^2,\ \ \Delta_2=\gamma_2-\gamma_3^2,\ \ \gamma_9=\gamma_3+\gamma_6$$

Отметим, что функция $C(\varphi)$ является бесконечно дифференцируемой и обладает следующими свойствами симметрии: $C(\varphi)=C(-\varphi)$, $C(\pi-\varphi)=C(\varphi)$.

Исследуем структуру решения интегрального уравнения (5). Введём в рассмотрение функцию $\varphi_n(x_1,x_2,a)=Kq_n$, где $q_n(\xi_1,\xi_2)=(a^2-\xi_1^2-\xi_2^2)^{-\frac{1}{2}}t_n(\xi_1,\xi_2)$, $t_n(\xi_1,\xi_2)$ – однородный полином степени n. Несложно доказать, что $\varphi_n(x_1,x_2,a)$ – полином степени n. Используя этот результат, нетрудно доказать обобщение известной теоремы Л.А. Галина [13] на анизотропный случай.

Пусть $f(x_1,x_2)$ – полином степени N. Тогда решение (5) имеет следующую структуру: $q(\xi_1,\xi_2)=(a^2-\xi_1^2-\xi_2^2)^{-\frac{1}{2}}p_N(\xi_1,\xi_2)$, причём $p_N(\xi_1,\xi_2)=\sum\limits_{l+m=0}^{N}a_{lm}\xi_1^l\xi_2^m$.

Доказательство основано на представлении $p_N(\xi_1,\xi_2)=\sum\limits_{k=0}^{N}t_k(\xi_1,\xi_2)$, где $t_k(\xi_1,\xi_2)$ – однородные полиномы степени k, причём, их коэффициенты находятся конструктивно из решения $N+1$ систем линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных a_{lm}, $l+m=\text{const}$, которые решаются последовательно: сначала для $l+m=N,$ затем для $l+m=N-1$ и т.д.

Для важного случая внедрения параболоида вращения $f(x_1,x_2)=\delta-A(x_1^2+x_2^2)$ N=2, а коэффициенты полинома второй степени находятся из решений соответствующих линейных систем и выражаются через коэффициенты Фурье функции $C(\varphi)$, $c_{2k}=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}C(\varphi)\cos 2k\varphi d\varphi,$ которые является весьма быстро убывающими.

Окончательно имеем следующее представление решения:

$$q(\xi_1,\xi_2)=\frac{2}{\pi c_0}(a^2-\xi_1^2-\xi_2^2)^{-\frac{1}{2}}[\delta-2A\lambda_0\lambda_2a^2+4A\lambda_0\lambda_1(\xi_1^2-\xi_2^2)+4A\lambda_0(a^2-\xi_1^2-\xi_2^2)],$$

Причём, $\lambda_0 = \dfrac{c_0(c_0 + c_4)}{c_0^2 - 2c_2^2 + c_0 c_4}$, $\lambda_1 = \dfrac{2}{3}\dfrac{c_2}{c_0 + c_4}$, $\lambda_2 = 1 - \lambda_1 \dfrac{c_2}{c_0}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Для ограниченного решения задачи получим уравнение $\delta - 2A\lambda_0\lambda_2 a^2 + 4A\lambda_0\lambda_1 a^2 \cos 2\psi = 0$,

которое служит для определения формы и размеров области контакта. В случае ортотропного материала это есть эллипс с осями симметрии, совпадающими с осями координат, причём, полуоси и эксцентриситет находятся по формулам:

$$a_1 = \left(\frac{\delta}{2A}\right)^{\frac{1}{2}} d_1,\ a_2 = \left(\frac{\delta}{2A}\right)^{\frac{1}{2}} d_2,\ \mathrm{e} = 2\left(\frac{|\lambda_1|}{\lambda_2 + 2|\lambda_1|}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$d_1 = [\lambda_0(\lambda_2 - 2\lambda_1)]^{-\frac{1}{2}},\ d_2 = [\lambda_0(\lambda_2 + 2\lambda_1)]^{-\frac{1}{2}}$$

В табл.1 приведены данные расчётов коэффициентов c_k для различных ортотропных материалов, упругие постоянные которых взяты из [14], а также величины d_1, d_2, e.

Замечание. В изотропном случае $C(\varphi) = 1$, $c_0 = 1$, $c_{2k} = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, $\lambda_0 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_1 = 0$, $d_1 = d_2 = 1$, $\mathrm{e} = 0$.

Таблица 1

$N_{\text{мат}}$	c_0	c_2	c_4	c_6	d_1	d_2	e
Арагонит	2,060	0,053	0,004	0,0009	1,033	0,996	0,265
Сегнетова соль	2,903	0,4066	0,082	0,0021	1,092	0,945	0,501
Барит	2,870	-0,248	0,030	-0,005	0,938	1,052	0,453
Йодноватая соль	2,026	0,0139	0,0039	-0,0005	1,0045	0,995	0,137
Калий пентаборат	2,655	0,096	-0,0036	0,0003	1,083	0,935	0,505
Литий аммоний тартат	2,474	0,100	0,0154	0,0056	1,091	0,928	0,526
Магний сульфат пентагидрат	2,848	-0,237	0,0342	-0,0037	0,943	1,023	0,338

Отметим, что для некоторых материалов эксцентриситет эллиптической площади весьма мал.

Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований по стратегическим направлениям развития науки Президиума РАН №1 «Фундаментальные проблемы математического моделирования».

ЛИТЕРАТУРА

1. Головин Ю.И. Наноиндентирование и механические свойства твёрдых тел в субмикрообъёмах, тонких приповерхностных слоях и пленках. //Физика твёрдого тела. 2008. Т.50. Вып.12. С.2113-2142.
2. Горячева И. Г. Механика фрикционного взаимодействия / Отв. ред. А. Ю. Ишлинский. М.: Наука, 2001. 478 с.
3. V. Buljak, G. Maier. Identification of residual stresses by instrumented elliptical indentation and inverse analysis.// Mechanics Research Communications. № 41. 2012. P.21–29.
4. Philipp Engels, Anxin Ma, Alexander Hartmaier. Continuum simulation of the evolution of dislocation densities during nanoindentation. //International Journal of Plasticity. № 38. 2012. P. 59–169.
5. Andre' Clausner, Frank Richter. Determination of yield stress from nano-indentation experiments.// European Journal of Mechanics A/Solids. № 51. 2015. P.11-20.
6. S. Habelitz, S.J. Marshall, G.W. Marshall Jr, M. Balooch. Mechanical properties of human dental enamel on the nanometre scale. Archives of Oral Biology, № 46, 2001, P.173–183.
7. Айзикович С.М., Александров В.М., Васильев А.С. и др. Аналитические решения смешанных осесимметричных задач для функционально-градиентных сред. М.: Физматлит, 2011. 192с.
8. Svetlana A. Epshtein, Feodor M. Borodich, Steve J. Bull. Evaluation of elastic modulus and hardness of highly inhomogeneous materials by nanoindentation. //Appl. Phys. A. DOI 10.1007/s00339-014-8971-5.
9. Ivan I. Argatov, Federico J. Sabina. Small-scale indentation of a hemispherical inhomogeneity in an elastic half-space. European Journal of Mechanics A/Solids, № 53, 2015, P. 151-162.
10. Argatov. Frictionless and adhesive nanoindentation: Asymptotic modeling of size effects. Mechanics of Materials, № 42, 2010. P.807–815.
11. Tongqiang Xia, Fubao Zhou, Jishan Liu, Shengyong Hu, Yingke Liu. A fully coupled coal deformation and compositional flow model for the control of the pre-mining coal seam gas extraction. //International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences, № 72, 2014, P.138–148.
12. G.L. Manjunath, Rajesh R. Nair. Implications of the 3D micro scale coal characteristics along with Raman stress mapping of the scratch tracks. //International Journal of Coal Geology, № 141–142, 2015, P.13–22.
13. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 304с.
14. Акустические кристаллы./Под ред. М.П.Шаскольской. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат.лит. 1982. 632с.

Сведения об авторах:

Ватульян Александр Ованесович – доктор физико-математических наук, профессор, Южный федеральный институт, Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А г. Владикавказ; +79185896075
E-mail: vatulyan@math.rsu.ru

Ляпин Александр Александрович – кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник, Южный федеральный институт; +79508654205
E-mail: alexlpn@hotmail.com

Недин Ростислав Дмитриевич – кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник, Южный федеральный институт, Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А г. Владикавказ; +79045015331
E-mail: rdn90@bk.ru

О КОНТАКТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ УПРУГИХ ТОНКИХ СЛОЁВ ПРИ КРУЧЕНИИ

Гаспарян А.В., Давтян З.А., Мирзоян С.Е.

В работе рассматривается задача контактного взаимодействия между упругими бесконечными слоями, обладающими различными упругими и геометрическими свойствами при кручении.

Сначала на основании идей из [1,2] при помощи интегрального преобразования Ханкеля из точного дифференциального уравнения теории упругости кручения слоя в различных точностях строятся математические модели кручения тонкого упругого слоя. В частности, получены известные модели Мелана и Винклера кручения упругих тонких тел.

Далее обсуждается указанная выше контактная задача о напряжённом состоянии композита в виде упругих слоёв в точной постановке и в постановках выведенных различных моделей упругого тонкого слоя.

Многие результаты по исследованию разнообразных задач по кручению упругих тел изложены в [3,4].

Здесь рассматривается задача о напряжённом состоянии двухслойного упругого композита при кручении, когда на поверхности верхнего слоя высоты h и модуля сдвига G_1 действуют скручивающие касательные силы интенсивности $\tau_1(r)$, а на поверхности нижнего слоя с высоты H модуля сдвига G_2 – скручивающие силы интенсивности $\tau_2(r)$ (рис.1).

Требуется определить касательные контактные напряжения $\tau(r)$ на поверхности стыка разнородных слоёв.

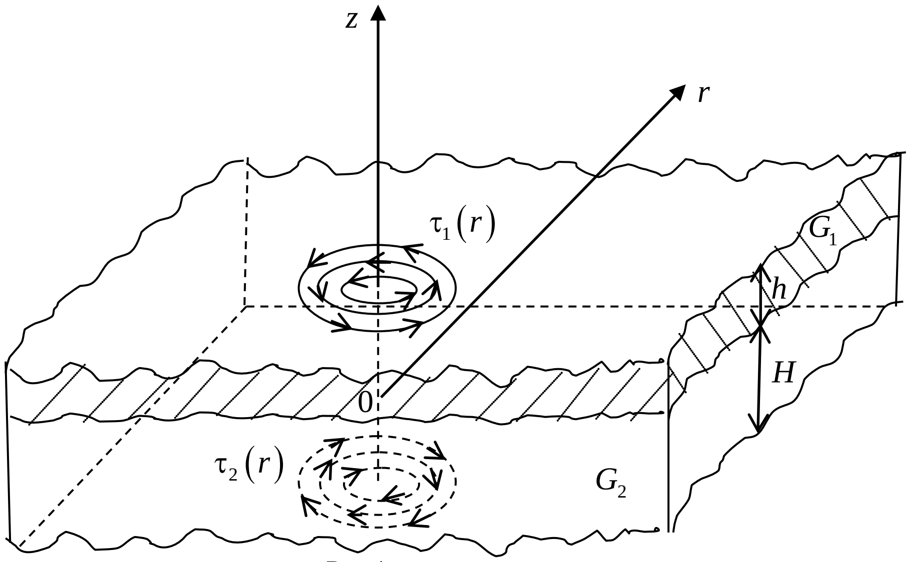


Рис.1

Чтобы вывести определяющие уравнения поставленной задачи, сначала в цилиндрической системе координат r, θ, z построим решение краевой задачи для верхнего слоя.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \nu_1}{\partial z^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \nu_1}{\partial r} - \dfrac{\nu_1}{r^2} + \dfrac{\partial^2 \nu_1}{\partial r^2} = 0 \qquad \left(0 < r < \infty,\ \ 0 < z < h\right) \\ \tau_{z\theta}\big|_{z=h} = \tau_1(r) \quad \left(0 < r < \infty\right), \qquad \tau_{z\theta}\big|_{z=0} = \tau(r) \quad r^2 + z^2 \to \infty \end{cases} \tag{1a,c}$$

Здесь $\nu_1 = \nu_1(r, z)$ – смещение точек слоя в окружном направлении.

Решение краевой задачи (1a,c) построим методом интегрального преобразования Ханкеля, для чего введём в рассмотрение образы Ханкеля:

$$\left\{\overline{\nu}_1(\lambda,z),\overline{\tau}(\lambda),\overline{\tau}_1(\lambda)\right\}=\int_0^\infty\left\{\nu_1(r,z),\tau(r),\tau_1(r)\right\}rJ_1(\lambda r)dr$$

Здесь $J_1(x)$–Бесселева функция первого рода индекса 1, а λ– спектральный параметр Ханкеля, $(0<\lambda<\infty)$.

Теперь обе части дифференциального уравнения (1а) и граничных условий (1в,с) умножим на $rJ\tau_1(\lambda r)$, проинтегрируем по r на интервале $(0,\infty)$ и воспользуемся известным соотношением [5]

$$\int_0^\infty r\left(\frac{d^2f}{dr^2}-\frac{1}{r}-\frac{df}{dr}-\frac{f}{r^2}\right)J_1(\lambda r)dr=-\lambda^2\overline{f}(\lambda)$$

В результате, придём к следующей краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\begin{cases}\dfrac{d^2\overline{\nu}_1}{dz^2}-\lambda^2\overline{\nu}_1=0 \qquad (0<z<h)\\ G_1\left.\dfrac{d\overline{\nu}}{dz}\right|_{z=0}=\overline{\tau}(\lambda)\\ G_1\left.\dfrac{d\overline{\nu}}{dz}\right|_{z=h}=\overline{\tau}_1(\lambda) \quad (0<r<\infty)\end{cases} \tag{2a,c}$$

Общее решение дифференциального уравнения (1а) имеет вид

$$\overline{\nu}_1=Ae^{\lambda z}+Be^{-\lambda z} \qquad (0<\lambda<\infty,\quad 0<z<h) \tag{3}$$

где A и B – пока произвольные постоянные. Удовлетворив граничным условиям (2в,с), определяем постоянные A и B, выражающиеся формулами:

$$A=\frac{1}{2\lambda G_1\mathrm{sh}\lambda h}\left(\overline{\tau}_1-\overline{\tau}e^{-\lambda h}\right),\qquad B=\frac{1}{2\lambda G_1\mathrm{sh}\lambda h}\left(\overline{\tau}_1-\overline{\tau}e^{\lambda h}\right)$$

Подставляя эти выражения A и B в (3), получим

$$\begin{aligned}\overline{\nu}_1&=\frac{e^{\lambda z}}{2hG_1\mathrm{sh}\lambda h}\left(\overline{\tau}_1-\overline{\tau}e^{-\lambda h}\right)+\frac{e^{-\lambda z}}{2hG_1\mathrm{sh}\lambda h}\left(\overline{\tau}_1-\overline{\tau}e^{\lambda h}\right)=\\&=\frac{1}{hG_1\mathrm{sh}\lambda h}\left(\overline{\tau}_1\mathrm{ch}\lambda z-\overline{\tau}\mathrm{ch}\lambda(z-h)\right)\qquad(0\le z\le h)\end{aligned} \tag{4}$$

При помощи обратного преобразования Ханкеля из (4) можно найти смещение $\nu_1=\nu_1(r,z)$.

Поступая аналогичным образом, найдём перемещение $\nu_2(r,z)$ граничных точек нижнего слоя, которая скручивается силами интенсивностей $\tau_2(r)$ и $\tau(r)$, имеет модуль сдвига G_2 и высоту H.

$$\overline{\nu}_2(r,z)=\frac{1}{\lambda G_2 sh\lambda H}\left(\overline{\tau}(\lambda)ch\lambda(z+H)-\overline{\tau}_2(\lambda)ch\lambda z\right)\quad(-H\le z\le 0) \tag{5}$$

Теперь, запишем условие контакта в трансформантах Ханкеля

$$\overline{\nu}_1(\lambda,0)=\overline{\nu}_2(\lambda,0),$$

которое при помощи соотношений (4) и (5) приводит к алгебраическому уравнению:

$$\overline{\tau}(\lambda)\left(\frac{\mathrm{cth}\lambda H}{G_2}+\frac{\mathrm{cth}\lambda h}{G_1}\right)=\frac{\overline{\tau}_1(\lambda)}{G_1\mathrm{sh}\lambda h}+\frac{\overline{\tau}_2(\lambda)}{G_2\mathrm{sh}\lambda H}.$$

Отсюда

$$\overline{\tau}(\lambda)=\frac{k\overline{\tau}_1(\lambda)\mathrm{sh}\lambda H+\overline{\tau}_2(\lambda)\mathrm{sh}\lambda h}{k\mathrm{ch}\lambda h\cdot\mathrm{sh}\lambda H+\mathrm{sh}\lambda h\cdot\mathrm{ch}\lambda H} \tag{6}$$

Теперь по формуле обратного преобразования Ханкеля получим точное решение поставленной задачи

$$\tau(r)=\int_0^\infty\frac{\left(k\overline{\tau}_1\mathrm{sh}\lambda H+\overline{\tau}_2\mathrm{sh}\lambda h\right)\lambda J_1(\lambda r)\,d\lambda}{k\mathrm{ch}\lambda h\cdot\mathrm{sh}\lambda H+\mathrm{sh}\lambda h\cdot\mathrm{ch}\lambda H},\qquad k=\frac{G_2}{G_1}$$

или же

$$\tau(r)=\int_0^\infty M_1(\rho,r)\tau_1(\rho)\rho d\rho+\int_0^\infty M_2(\rho,r)\tau_2(\rho)\rho d\rho \tag{7a,c}$$

здесь

$$M_1(r,\rho)=k\int_0^\infty\frac{J_1(\lambda r)J_1(\lambda\rho)\lambda\mathrm{sh}\lambda H}{k\mathrm{ch}\lambda h\cdot\mathrm{sh}\lambda H+\mathrm{sh}\lambda h\cdot\mathrm{ch}\lambda H}d\lambda$$

$$M_2(r,\rho)=\int_0^\infty\frac{J_1(\lambda r)J_1(\lambda\rho)\lambda\mathrm{sh}\lambda h}{k\mathrm{ch}\lambda h\cdot\mathrm{sh}\lambda H\cdot+\mathrm{sh}\lambda h\cdot\mathrm{ch}\lambda H}d\lambda$$

В частном случае, когда $h=H$ и $\overline{\tau}_1(\lambda)=\overline{\tau}_2(\lambda)=\overline{\tau}_0(\lambda)$, из (6) для образов исходных контактных напряжений получим:

$$\overline{\tau}(\lambda)=\overline{\tau}_0(\lambda)/\mathrm{ch}\lambda h \tag{8}$$

т.е. контактные напряжения не зависят от модулей сдвига контактирующих слоёв.

В случае, когда $H\to\infty$, из (6) получим следующее выражение:

$$\tau(\lambda)=\frac{k\overline{\tau}_1(\lambda)}{k\mathrm{ch}\lambda h+\mathrm{sh}\lambda h} \tag{9}$$

Теперь равенство (4) запишем в виде

$$\lambda G_1\mathrm{sh}\lambda h\cdot\overline{\nu}_1(\lambda,z)=\overline{\tau}_1(\lambda)\mathrm{ch}\lambda z-\overline{\tau}(\lambda)\mathrm{ch}\lambda(z-h) \tag{10}$$

и воспользуемся разложениями целых функций

$$\mathrm{ch}z=1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots,\quad \mathrm{sh}z=z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots$$

В этих разложениях для $\mathrm{ch}\lambda z$ и $\mathrm{ch}\lambda(z-h)$ ограничимся членами порядка λ^2. Тогда

$$G_1h\lambda^2\overline{\nu}_1(\lambda,z)=\overline{\tau}_1-\overline{\tau}+\frac{\lambda^2z^2}{2}\overline{\tau}_1-\frac{\lambda^2}{2}(z-h)^2\overline{\tau},\qquad (0\le z\le h) \tag{11}$$

Далее, положим $z=0$. В этом случае из (11) будем иметь

$$G_1h\lambda^2\overline{\nu}_1(\lambda,0)=\overline{\tau}_1(\lambda)-\overline{\tau}(\lambda)-\frac{\lambda^2h^2}{2}\overline{\tau}(\lambda) \tag{12}$$

В (12), совершив обратное преобразование Ханкеля, получим

$$G_1h\left(\frac{d^2\nu_1}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\nu_1}{dr}-\frac{\nu_1}{r^2}\right)=\tau-\tau_1-\frac{h^2}{2}\left(\frac{d^2\tau}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\tau}{dr}-\frac{\tau}{r^2}\right) \tag{13}$$

Если в (13) $G_1\to\infty$ и $h\to 0$ таким образом, чтобы жёсткость слоя G_1h осталась постоянной, то из (13), по аналогии с известными результатами [6,7], получим модель Мелана при кручении тонкого упругого слоя

$$G_1h\left(\frac{d^2\nu_1}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\nu}{dr}-\frac{\nu}{r^2}\right)=\tau-\tau_1\qquad(0<r<\infty) \tag{14}$$

В другом частном случае в (13), положив $\tau_1(r)=\tau(r)$ $(0<\mathrm{r}<\infty)$, получим:

$$\nu_1 = -\frac{h}{rG_1}\tau \quad (0 < \mathrm{r} < \infty) \tag{15}$$

Соотношением (15) описывается известная модель Винклера с коэффициентом постели $k = h/2G_1$.

Теперь построим решение поставленной задачи, исходя из моделей слоя в соответствии с уравнениями (12) и (14). Сначала возьмём модель тонкого слоя в соответствии с уравнением (12). Запишем условие контакта в трансформантах Ханкеля:

$\overline{\nu}_1(\lambda, 0) = \overline{\nu}_2(\lambda, 0) \quad (0 < \lambda < \infty)$.

Подставляя сюда выражения $\overline{\nu}_1(\lambda, 0)$ и $\overline{\nu}_2(\lambda, 0)$ из (5) и (12), будем иметь:

$$\overline{\tau}(\lambda) = \frac{2k\,\mathrm{sh}(\lambda, H)\cdot\overline{\tau}_1(\lambda) + 2\lambda h\cdot\overline{\tau}_2(\lambda)}{\mathrm{sh}(\lambda H)\left(2\lambda h\cdot\mathrm{cth}(\lambda h) + k\lambda^2 h^2 + 2k\right)} \tag{16}$$

Применив к этому равенству обратное интегральное преобразование Ханкеля, находим

$$\tau(r) = \int_0^\infty R_1(r,\rho)\tau_1(\rho)\rho d\rho + \int_0^\infty R_2(r,\rho)\tau_2(\rho)\rho d\rho \quad (0 < r < \infty)$$

$$R_1(r,\rho) = 2k\int_0^\infty \frac{\lambda J_1(\lambda r) J_1(\lambda\rho)}{2h\lambda\,\mathrm{cth}(\lambda H) + 2k + k\lambda^2 h^2} d\lambda \tag{17a,c}$$

$$R_2(r,\rho) = 2h\int_0^\infty \frac{\lambda^2 J_1(\lambda r) J_1(\lambda\rho)}{\mathrm{sh}(\lambda H)\left\{2h\lambda\,\mathrm{cth}(\lambda H) + 2k + k\lambda^2 h^2\right\}} d\lambda$$

Теперь для волокна тонкого слоя примем модель Мелана согласно дифференциальному уравнению (14), или в трансформантах Ханкеля по уравнению

$$G_1 h\lambda^2 \overline{\nu}_1(\lambda, 0) = \overline{\tau}_1(\lambda) - \overline{\tau}(\lambda) \tag{18}$$

Следовательно, при помощи условий контакта в трансформантах Ханкеля и по (5) можем записать:

$$\overline{\tau}(\lambda) = \frac{\lambda h\overline{\tau}_2(\lambda) + k\,\mathrm{sh}(\lambda H)\overline{\tau}_1(\lambda)}{\mathrm{sh}(\lambda H)\left(k + \lambda h\,\mathrm{cth}(\lambda H)\right)}$$

Отсюда по формуле обратного преобразования Ханкеля определится искомая функция

$$\tau(r) = \int_0^\infty K_1(r,\rho)\tau_1(\rho)\rho d\rho + \int_0^\infty K_2(r,\rho)\tau_2(\rho)\rho d\rho$$

$$K_1(r,\rho) = k\int_0^\infty \frac{\lambda\,\mathrm{sh}(\lambda H) J_1(\lambda r) J_1(\lambda\rho)}{k\,\mathrm{sh}(\lambda H) + \lambda h\,\mathrm{ch}(\lambda H)} d\lambda \tag{19a,c}$$

$$K_2(r,\rho) = h\int_0^\infty \frac{\lambda^2 J_1(\lambda r) J_1(\lambda\rho)}{k\,\mathrm{sh}(\lambda H) + \lambda h\,\mathrm{ch}(\lambda H)} d\lambda$$

Итак, закон распределения контактных напряжений по модели Мелана выражается формулами (19a,c).

Рассмотрим частный случай, когда контактирующие слои на своих наружных поверхностях нагружены сосредоточенными по окружностям радиуса a скручивающими силами интенсивности T, т.е.

$$\tau_1(r) = \tau_2(r) = \frac{T}{2\pi r}\delta(r - a) \quad (0 < a < \infty) \tag{20}$$

где $\delta(x)$ – известная дельта-функция Дирака.

Теперь в формулах 7(a,c), 17(a,c), 19(a,c) перейдем к безразмерным величинам, полагая

$$s = \lambda a,\ r = ax,\ h_0 = \frac{h}{a},\ H_0 = \frac{H}{a},\ \tilde{\tau}(x) = \frac{a^2 \tau(ax)}{T}$$

Тогда точное решение задачи (7а,с) будет выражаться формулой

$$\tilde{\tau}(x) = \frac{(k+1)}{2\pi} \int_0^\infty \frac{J_1(sx) J_1(s) s ds}{k \operatorname{sh}(sH_0) \operatorname{ch}(sh_0) + \operatorname{sh}(sh_0) \operatorname{ch}(sH_0)} \ . \tag{21}$$

Решение задачи по первой модели (12) примет вид:

$$\tilde{\tau}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\left(k \operatorname{sh}(sH_0) + sh_0\right) J_1(sx) J_1(s) s}{\operatorname{sh}(sH_0)\left(2h_0 s \operatorname{cth}(sH_0) + 2k + kh_0^2 s^2\right)} ds, \tag{22}$$

а решение задачи по модели Мелана (14) определяется формулой

$$\tilde{\tau}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\left(sh_0 + \operatorname{sh}(sH_0)\right) J_1(sx) J_1(s) s}{k \operatorname{sh}(sH_0) + sh_0 \operatorname{ch}(sH_0)} ds \ \ (0 < x < \infty) \tag{23}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1988.
2. Мхитарян С.М. О двух смешанных задачах, связанных с вопросами взаимодействия концентратов напряжений различных типов с массивными телами при антиплоской деформации. //В сб.: «Механика деформируемого твердого тела» Ереван: Изд.-во НАН Армении, 1993, С.129-143.
3. Арутюнян Н.Х., Абрамян Б.Л. Кручение упругих тел. М.: Физматгиз, 1963.
4. Развитие теории контактных задач в СССР. М.: Наука, 1976.
5. Снеддон М. Преобразования Фурье. М.: И.Л., 1955.
6. Melan E. Ein Beitrag zur Theorie geschweissten Verbindungen – Ingr. Arch., 1932, Bd3, №2, P.123-129.
7. Bufrer H. Zur Krafteinleitung in Scheiben uber geschweisste oder geklebte Verbindungen - Osterr. Ingeenieur – Archiv, 1964, Bd, 18, №3-4.

Сведения об авторах:

Гаспарян Ануш Вараздатовна – кандидат физ-мат. наук, старший научный сотрудник Института механики НАН Армении.

Адрес: 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2, **Тел.:** (+37410)52-48-90.

E-mail: anush@mechins.sci.am

Давтян Завен Азибекович – кандидат физ-мат. наук, старший научный сотрудник Института механики НАН Армении.

Адрес: 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2, **Тел.:** (+37410)52-48-90.

E-mail: anush@mechins.sci.am .

Мирзоян Саак Езникович – кандидат физ-мат. наук, старший научный сотрудник Института механики НАН Армении.

Адрес: 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2, **Тел.:** (+37410)52-48-90.

E-mail: anush@mechins.sci.am .

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ВНЕДРЕНИЯ НЕДЕФОРМИРУЕМОГО ИНДЕНТОРА В ДЕФОРМИРУЕМУЮ ПРЕГРАДУ НА ОСНОВЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Геворкян Г.А.

Моделированию больших упруго-пластических деформаций, возникающих в процессе внедрения абсолютно твёрдого индентора в деформируемую преграду, посвящено в научной литературе большое количество работ. Здесь предлагаются результаты численного решения вышеуказанной задачи в представлении Лагранжа на основе традиционной формулировки осесимметричной задачи метода конечных элементов.

1. Введение. Численному решению задач статического и динамического моделирования процесса внедрения индентора в деформируемую преграду посвящено в современной литературе большое количество исследований [4–6]. Как известно [4], в такой постановке задача выступает как осесимметричная. Возникающие при этом упруго-пластические деформации относятся к категории больших деформаций. Наиболее эффективной численной стратегией решения данного класса задач является метод маркёров, или метод частиц в ячейках [4], который объединяет в себе все положительные стороны представлений Лагранжа и Эйлера, упреждая при этом проявление какой-либо из их отрицательных сторон [4]. Между тем, известно, что в случае оптимальной дискретизации области, при которой исключается возможность перехлёста ячеек, представление Лагранжа обеспечивает наилучшее приближение [4, 6].

Применение осесимметричной задачи метода конечных элементов (МКЭ) в перемещениях к численному решению задачи Буссинеска о действии сосредоточенной силы на упругое полупространство [1] обеспечивает превосходное моделирование задачи при известном аналитическом решении. Однако, эти результаты ещё не служат основанием для приложения классического МКЭ к решению данного класса задачам в зоне пластичности. В то же время ясно, что в классической постановке МКЭ осесимметричная задача формулируется исключительно в лагранжевом представлении. Однако, современные средства информатики и вычислительной техники позволяют осуществлять оптимальные разбиения деформируемой области для дискретных моделей сплошных сред практически любой размерности. Это обстоятельство делает в настоящее время МКЭ конкурентоспособным по отношению к методу маркёров, использование которого в решении задач больших деформаций сопряжено с необходимостью преодоления более серьёзных трудностей.

В предлагаемой работе представлены результаты статического моделирования посредством традиционного МКЭ задачи пробивания абсолютно твёрдым индентором деформируемой плиты.

2. Формулирование осесимметричной задачи. Исследование распределения напряжений в телах вращения при осесимметричном нагружении представляет большой практический интерес. Поскольку эти задачи также двумерные, то с математической точки зрения они аналогичны задачам о плоском напряжённом и плоском деформированном состояниях. Вследствие симметрии деформированное, а значит, и напряжённое состояния в любом сечении по оси симметрии тела полностью определяются двумя компонентами перемещений [1].

В качестве конечного элемента осесимметричной задачи выступает тело вращения, каждое осевое сечение которого представляет собой треугольник. Как известно, для плоской задачи в выражение для внутренней работы входят только три компоненты деформации в координатной плоскости, а компоненты напряжения, нормальные к координатной плоскости, не вносят энергетического вклада. В осесимметричном случае любое радиальное перемещение вызывает деформацию в окружном направлении, и, т.к. напряжения в этом направлении не равны нулю, в рассмотрение должны быть введены четвёртая компонента деформации и соответствующее напряжение. Итак, использование треугольного элемента с узлами l, m, n (рис.1) позволяет свести осесимметричную задачу МКЭ к двумерной задаче о плоском деформированном состоянии [1].

Перемещения каждого узла конечного элемента lmn, например l, имеют две компоненты (рис.1):

$$\{\mathbf{U}_i^l\} = \begin{Bmatrix} U_1^l \\ U_2^l \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U^l \\ V^l \end{Bmatrix}, \tag{1}$$

откуда следует, что вектор узловых перемещений элемента определяется следующим шестимерным вектор-столбцом:

$$\{\mathbf{U}\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_i^l \\ \mathbf{U}_i^m \\ \mathbf{U}_i^n \end{Bmatrix}, \quad i = 1, 2. \tag{2}$$

Пусть перемещения u и v произвольной точки внутри элемента однозначно определяется через узловые перемещения $\{\mathbf{U}\}$ следующим образом [2]:

$$\{\mathbf{u}\} = [A]\{\mathbf{U}\} \quad \text{при} \quad \{\mathbf{u}\} = \{u, \mathrm{v}\}^T, \tag{3}$$

где элементы прямоугольной матрицы $[\mathrm{A}]$ размерности (2×6) являются функциями координат x_i рассматриваемой точки. Эти функции должны быть выбраны так, чтобы при подстановке координат узлов элемента в зависимость (3) они обращались бы в соответствующие узловые перемещения (2) [1, 2].

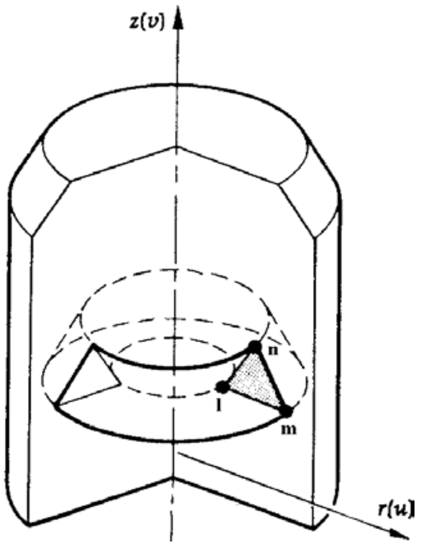


Рис.1. Расчётная схема осесимметричной задачи

Для рассматриваемой плоской задачи МКЭ перемещения u и v принимаются линейными относительно x_j [2]:

$$u_i = \alpha_i + \beta_{ij} x_j, \quad i, j = 1, 2, \tag{4}$$

где коэффициенты α_i и β_{ij} сохраняют постоянные значения в пределах каждого элемента.

В результате подстановки в функции перемещений (4) вместо x_j координат x_i^l, x_i^m, x_i^n узлов элемента (рис.1) образуются две системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} \mathbf{U}_i^l = \alpha_i + \beta_{i1} x_1^l + \beta_{i2} x_2^l; \\ \mathbf{U}_i^m = \alpha_i + \beta_{i1} x_1^m + \beta_{i2} x_2^m; \quad i = 1, 2. \\ \mathbf{U}_i^n = \alpha_i + \beta_{i1} x_1^n + \beta_{i2} x_2^n, \end{cases} \tag{5}$$

Постоянные коэффициенты системы уравнений (5) могут быть определены по правилу Крамера:

$$\alpha_i = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{U}_i^l & x_1^l & x_2^l \\ \mathbf{U}_i^m & x_1^m & x_2^m \\ \mathbf{U}_i^n & x_1^n & x_2^n \end{vmatrix}}{2\Delta};\ \beta_{i1} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \mathbf{U}_i^l & x_2^l \\ 1 & \mathbf{U}_i^m & x_2^m \\ 1 & \mathbf{U}_i^n & x_2^n \end{vmatrix}}{2\Delta};\ \beta_{i2} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1^l & \mathbf{U}_i^l \\ 1 & x_1^m & \mathbf{U}_i^m \\ 1 & x_1^n & \mathbf{U}_i^n \end{vmatrix}}{2\Delta}, \qquad (6)$$

где Δ – площадь треугольника *ijk* на рис.1.

В осесимметричном случае необходимо рассматривать четыре компоненты деформации. Эти компоненты и соответствующие им напряжения схематически изображены на рис.2. Все рассматриваемые компоненты вектора деформации можно выразить через перемещения с помощью хорошо известного из теории упругости соотношения [1]:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_z \\ \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial v / \partial z \\ \partial u / \partial r \\ u / r \\ \partial u / \partial z + \partial v / \partial r \end{Bmatrix}. \qquad (7)$$

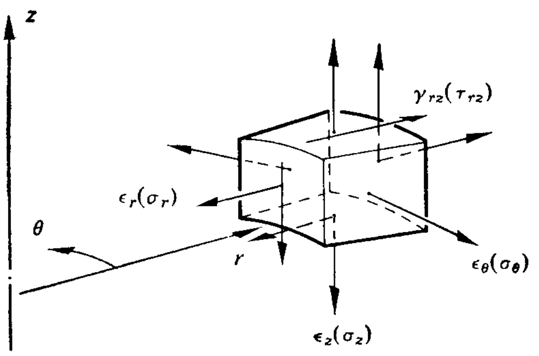


Рис. 2. Изображение компонент деформации

Далее, с учётом функций перемещений [1], получаем:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\mathbf{U}\} = \left[B^l \middle| B^m \middle| B^n\right]\{\mathbf{U}\}, \qquad (8)$$

где

$$[B^l] = \frac{1}{2\Delta}\begin{bmatrix} 0 & c^l \\ b^l & 0 \\ a^l / r + b^l + c^l z / r & 0 \\ c^l & b^l \end{bmatrix} \quad \text{и т.д.}$$

Поскольку матрица [B] в уравнении (13) содержит теперь координаты r и z, то деформации в элементе не будут постоянными, как в случае плоской задачи МКЭ [1].

Зависимость между напряжениями и деформациями для осесимметричной задачи записывается следующим образом [1]:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_z \\ \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} = [D]\{\varepsilon\}. \qquad (9)$$

Матрицу жёсткости элемента l,m,n можно составить, используя общее соотношение. Так как объёмный интеграл берётся по всей кольцевой области, будем иметь [1]:

$$[\ k\ ] = 2\pi \int_V [\ B\ ]^T [\ D\ ][\ B\ ]\, r\, dr\, dz. \tag{10}$$

Интегрирование не выполняется здесь так же просто, как и в случае плоской задачи, поскольку матрица $[\ B\ ]$ зависит от координат. Простейший приближённый метод состоит в определении матрицы $[\ \overline{B}\ ]$ для центра тяжести сечения элемента с координатами

$$\overline{r} = \frac{r_l + r_m + r_n}{3} \quad \text{и} \quad \overline{z} = \frac{z_l + z_m + z_n}{3}.$$

Тогда первое приближение принимает вид

$$[\ \overline{k}\ ] = 2\pi [\ \overline{B}\ ]^T [\ D\ ][\ \overline{B}\ ]\, \overline{r}\, \Delta. \tag{11}$$

Указанный метод, известный под названием «одноточечного» интегрирования, является методом численного интегрирования такого типа, для которого при неограниченном возрастании числа разбиений обеспечивается сходимость к точному решению [1].

3. Численная реализация расчёта больших упруго-пластических деформаций. В качестве первого примера численного моделирования осесимметричной задачи МКЭ приводится решение задачи определения больших упруго-пластических деформаций вследствие приложения сосредоточенной силы на упруго-пластичное полупространство, представляющее собой однородную и изотропную сплошную среду.

Кусочно-линейная модель диаграмы напряжений однородного и изотропного материала (незакалённая Ст.45) для сжатия (рис.3) принята со значениями: $\mathrm{E} = 200\ \text{ГПа}$, $\mathrm{E}^* = 40\ \text{ГПа}$, $[\sigma_y] = 363\ \text{МПа}$ и $\nu = 0.3$.

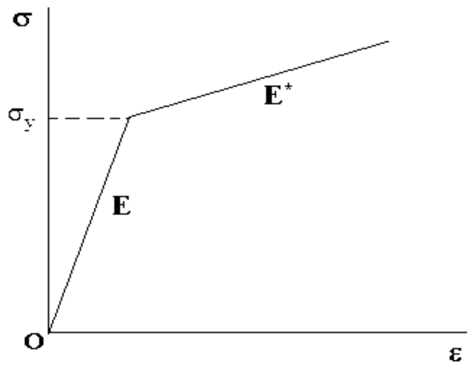


Рис.3. Модель диаграмы напряжений пластичного материала для сжатия

Габаритные размеры осесимметричной деформируемой преграды: $\mathrm{D} = 0.1\text{м}$. и $\mathrm{H} = 0.06\text{м}$. Величина силы, приложенной со стороны шарового недеформируемого индентора диаметра $\mathrm{d} = 0.03\text{м}$, – $\mathrm{F} = 150\ \text{МН}$; число последовательных этапов численного воспроизведения больших упруго-пластических деформаций – $\mathrm{NES} = 500$.

Расчётные результаты хорошо согласуются с итогами численного решения той же задачи, полученными с помощью стандартной программы «Индентор» (рис.5), основанной также на неизменном формализме осесимметричной задачи методе конечных элементов.

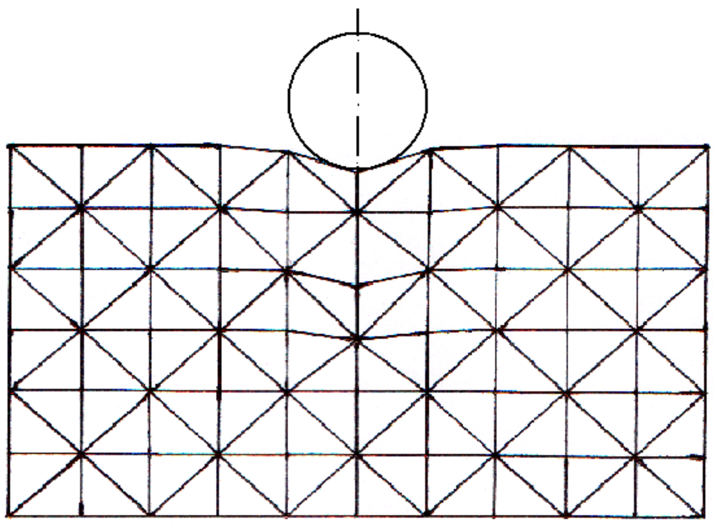


Рис.4. Деформированная конфигурация тела вращения, полученная расчётным кодом

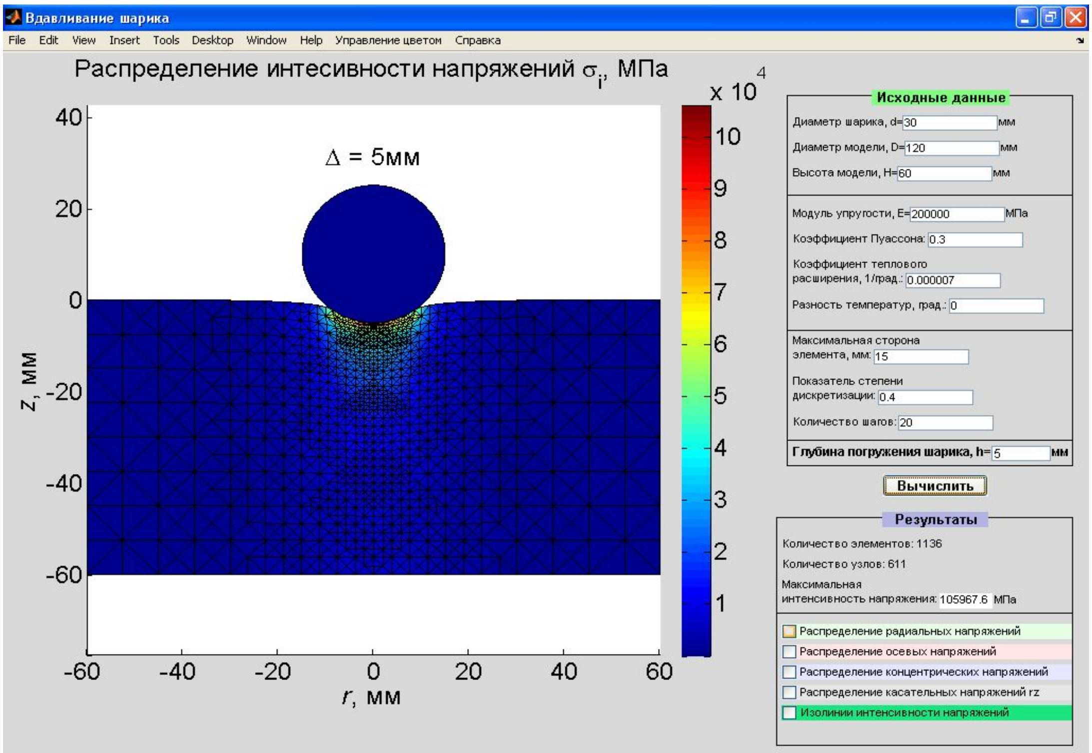


Рис.5. Деформированная конфигурация полупространства, генерированная программой «Индентор»

4. Заключение. Представлены результаты численного моделирования осесимметричной задачи МКЭ больших упруго-пластических деформаций на алгоритмическом языке Turbo Pascal. Сравнительный анализ расчётных характеристик (перемещений, напряжений и деформаций), выработанных на основе составленной программы, с одной стороны, и на базе существующего прикладного пакета «Индентор», с другой стороны, убеждает в достаточно хорошей аппроксимации задачи при использовании относительно небольшого числа конечных элементов.

Автор выражает благодарность проф. Ванцяну А.А. за любезно проведённые консультации по обсуждаемой тематике.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. Москва.: 1975.
2. Демидов С.П. Теория упругости. Москва.: 1979.
3. Тимошенко С.П., Гудьир Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.
4. Гриднеева В.А., Корнеев А.И., Трушков В.Г. Численный расчёт напряжённого состояния и разрушения плиты конечной толщины при ударе бойками различной формы // Изв. РАН. МТТ. № 1. 1977. С.146 – 157.
5. Багдоев А.Г., Ванцян А.А. Проникание тонких тел в упругие среды// Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1981. Т.3.– 4. № 1. С.3 –15.
6. Ванцян А.А., Овсепян О.Х. Динамическое взаимодействие деформируемого индентора и преграды при наличии разрядного тока. Ереван: Авт. изд.-во, 2010. 299с.

Сведения об авторе:

Геворкян Грант Араратович, к.т.н., научный сотрудник Института механики НАН РА,

Ереван – 19, пр. Маршала Баграмяна, 24/2, **Тел.:** (374 10) 390 301 (дом.), (374 96) 390 315 (моб.) **E – mail:** hrgevorkian@mail.ru

ОБ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ОРТОТРОПНЫХ ПОЛОС ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ С УЧЁТОМ ПОПЕРЕЧНЫХ ЭФФЕКТОВ ПРИ УСЛОВИЯХ УПРУГОЙ ЗАДЕЛКИ

Геворкян Г.З.

Рассмотрена задача изгибных колебаний ортотропных полос переменной толщины с учётом поперечных эффектов при условиях упругой заделки. Задача решена численым методом коллокаций. Проведён численный анализ задачи.

Введение. Для относительно толстых пластин и оболочек или если они имеют малую сдвиговую жёсткость, теории, основанные на гипотезах Кирхгова-Лява, не дают достоверных результатов и приходится применять уточнённые теории. Существуют различные уточнённые теории, основанные на гипотезах, асимптотические теории, итерационные теории и т.д. Здесь рассматривается задача по теории, предложенной в [1]. Сущность этого метода заключается в следующем. Для построения наиболее простой теории основные напряжения σ_x, σ_y должны иметь линейное распределение по толщине. Для удовлетворения уравнениям движения теории упругости τ_{xy}, τ_{yz} должны иметь второй порядок по z:

$\tau_{xz} = \varphi_1 + \varphi_2 z + \varphi_3 z^2$, $\tau_{yz} = \psi_1 + \psi_2 z + \psi_3 z^2$.

Проинтегрировав по толщине уравнения движения и умножая на z и проинтегрировав первые два уравнения, получим разрешающую систему уравнений. С помощью поверхностных условий исключаются $\varphi_2, \varphi_3, \psi_2, \psi_3$. Плоская задача и задача изгиба разделяются. Разрешающая система уравнений плоской задачи имеет четвёртый порядок и содержит две неизвестные функции–тангенциальные перемещения срединной плоскости пластины. Система уравнений изгиба имеет шестой порядок и содержит три неизвестных функции: прогиб и две функции, характеризующие распределение поперечных касательных напряжений срединной плоскости пластины. В случае пластины-полосы остаются два дифференциальных уравнения относительно прогиба w и φ_1, которые совместно имеют четвёртый порядок.

1. Рассмотрим ортотропную пластину-полосу переменной толщины $h(x)$, бесконечную вдоль оси Oy и длины a по оси Ox. Координатную плоскость xOy совместим со срединной плоскостью пластины. Координатные оси параллельны главным направлениям анизотропии материала пластины-полосы. Используя уравнения, полученные [1-2], уравнения изгибных колебаний в безразмерном виде можно представить в виде:

$$H^2 s^3 \frac{d^2H}{dx^2}\frac{d^2 f}{dx^2} - H\left[8 + s^2\left((\chi + k_3 A_1)\frac{d^2 H}{dx^2}\right)\right]\frac{d\varphi}{d\bar{x}} - 16\frac{dH}{d\bar{x}}\varphi - sH\Omega^2 \times$$
$$\times\left[12 f + sH\frac{dH}{d\bar{x}}\left(k_1 s\frac{df}{d\bar{x}} - k_2\chi\varphi\right) - \frac{k_3 s H^2}{2}\left(A_1 s\frac{d^2 f}{d\bar{x}^2} - \bar{\Delta}_2\frac{d\varphi}{dx}\right)\right] = 0$$
$$s^3 H^2 \frac{\partial^3 f}{\partial\bar{x}^3} + 2s^3 H\frac{dH}{d\bar{x}}\frac{d^2 f}{d\bar{x}^2} - H^2 s^2\left[(\chi + k_3 A_1)\frac{d^2\varphi}{d\bar{x}^2}\right] -$$
$$-2Hs^2\left[(\chi + k_3 A_1)\frac{dH}{d\bar{x}}\right]\frac{d\varphi}{d\bar{x}} + 8\varphi + \Omega^2 H^2 s^2\left(k_1 s\frac{df}{d\bar{x}} - k_2\chi\varphi\right) = 0 \quad (1.1)$$

где приняты обозначения:

$$A_1 = a_{13}B_{11} + a_{23}B_{12},\ \Delta_2 = a_{13}(a_{55}B_{11} + A_1) + a_{23}(a_{55}B_{12} + A_2) \quad (1.2)$$
$$x = a\bar{x},\ z = h_0\bar{z},\ s = h_0/a,\ h = h_0 H,\ B_{ij} = \alpha_{ij}B_{11}$$
$$\chi = a_{55}B_{11},\ \bar{\Delta}_2 = B_{11}\Delta_2,\ \omega^2 = B_{11}\Omega^2/\rho a^2 \quad (1.3)$$
$$w = h_0 f\cos\omega t,\ \varphi_1 = B_{11}\varphi\cos\omega t,\ u_z = h_0 u\cos\omega t$$

a_{ij} и B_{ij} – упругие постоянные материала, φ_1 – функция, характеризующая распределение касательных напряжений τ_{xz}, w – прогиб срединной плоскости пластины, t – время, ρ –

плотность материала, ω – круговая частота колебаний пластины, k_1, k_2, k_3 – коэффициенты, определяющие постановку задачи и принимающие значения 0 или 1. При $k_1 = 1$ учитывается инерция вращения, обусловленная классическим изгибом, при $k_2 = 1$ учитывается инерция вращения от поперечных сдвигов, а при $k_3 = 1$ учитываются обжатие и напряжение σ_z. При коэффициенте, равном нулю, соответствующий фактор не учитывается. При χ =0 получается классическая постановка задачи, χ =3 соответствует изотропному материалу с $\nu = 0{,}3$, а для ортотропного материала χ может принимать значения до 40. Остальные обозначения общеприняты.

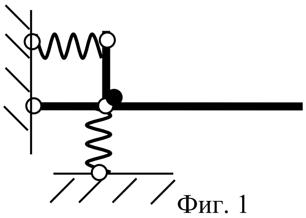
Обычно используют граничные условия заделки, шарнирного опирания или свободного конца. Более близкими к реальным условиям являются условия упругой заделки [3], которые представим в виде:

1) Угол поворота средней линии или торца пластины пропорционален изгибающему моменту, что в безразмерном виде представим:

$$l_1 \frac{df}{dx} \pm \left(1 - l_1\right) M_x = 0 \quad \text{или} \quad l_1 \frac{du}{dz} \pm \left(1 - l_1\right) M_x = 0 \quad \text{при } \chi = 0 \text{ совпадают.} \tag{1.4}$$

2) Перерезывающая сила пропорциональна перемещению w (фиг.1).

$$l_2 f + \left(1 - l_2\right) \bar{N} = 0 \tag{1.5}$$


Фиг. 1

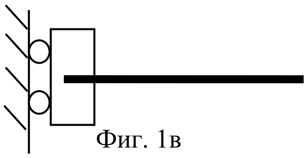
Из этих условий для различных $l_1,\ l_2$ можно получить следующие граничные условия:

а) $l_1 = 0,\ l_2 = 0\ (M = 0,\ N = 0)$ – свободный конец

б) $l_1 = 0,\ l_2 = 1\ (M = 0,\ f = 0)$ – шарнирное опирание

в) $l_1 = 1,\ l_2 = 0\ (df/dx = 0,\ N = 0)$ – условия симметрии или можно назвать скользящей заделкой (фиг.1в).

г) $l_1 = 1,\ l_2 = 1\ (df/dx = 0,\ f = 0)$ – жёсткая заделка.


Фиг. 1в

Безразмерные перемещение, поперечное усилие и момент имеют вид:

$$u_x = z\left(s\frac{df}{dx} - \chi\varphi\right),\ N = s^3 H \frac{dH}{dx} - \chi s^2 H \frac{dH}{dx}\frac{d\varphi}{dx} - 8\varphi,\ M_x = s\frac{d^2 w}{dx^2} - \chi\frac{d\varphi}{dx} \tag{1.6}$$

В [4] использован несколько другой подход к определению условий упругой заделки.

2. В случае постоянной толщины, без учёта поперечных эффектов и классических граничных условий уравнения (1) можно привести к одному уравнению и решение получить аналитически. В общем случае приходится решать численно. Для решения модифицировнным методом коллокаций функции f и φ берём в виде:

$$f = \sum_{i=0}^{n+1} a_i x^i,\quad \varphi = \sum_{i=0}^{n+1} b_i x^i \tag{2.1}$$

Точки коллокаций нули смещённых полиномов Чебышева $T_n(2x-1)$, $x_k = \left[1 + \cos\frac{\pi(k - 1/2)}{n}\right]/2$. Удовлетворяя в точках коллокаций уравнениям (1), а в концевых точках граничным условиям, получим однородную систему $2n+4$ уравнений относительно a_i, b_i.

Функции f и φ можно также взять в виде:

$$f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \sum_{i=1}^{n+1} a_{i+2} x^{i+2}\left(1 - x\right)^3,\quad \varphi = b_0 + b_1 x + \sum_{i=1}^{n+1} b_{i+1} x^{i+1}(1 - x)^2 \tag{2.2}$$

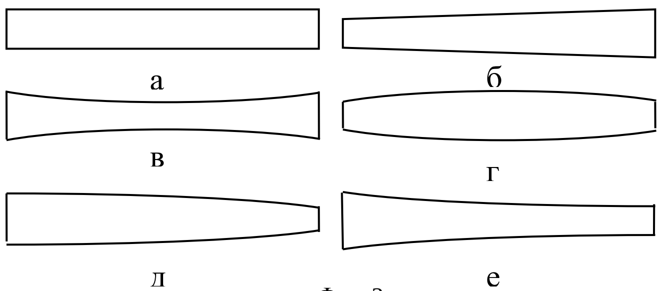
Удовлетворив граничным условиям, можно постоянные a_0, a_1, a_2, b_0, b_1 выразить через одну постоянную и удовлетворить только в точках коллокаций уравнениям (1) и получить однородную систему из $2n$ уравнений.

Приравнивая определители этих систем нулю, получим значения безразмерных частот колебаний. После определения этих значений можно определить и вид функций f и φ, соответствующих этим значениям. Для этого надо полученные уравнения разделить на один из коэффициентов a_m или b_m, перевести соответствующий столбец в правую часть и отбросить одно из уравнений. Решая эти уравнения, можно с точностью постоянного множителя определить функции f и φ.

Рассмотрим пластины-полосы переменной толщины, для которых безразмерная толщина $H(x)$ изменяется по законам (фиг. 2).

$а)\, H(x)=1,\ б)\, H(x)=2(1+x)/3,\ в)\, H(x)=3(x-0.5)^2+0.75$

$г)\, H(x)=1.2[1-2(x-0.5)^2],\ д)\, H(x)=0.6(2-x^2),\ е)\, H(x)=0.75[1+(x\text{-}1)^2]$



Фиг. 2

Все они имеют одинаковую площадь поперечного сечения и при переменности толщины толстая часть в два раза больше тонкой.

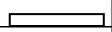
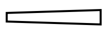
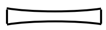
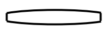
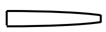
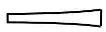
При вычислениях для изотропного материала принято: $\chi=3,\ A_1=-0{,}5,\ \overline{\Delta}_2=-2{,}25$, а для ортотропного: $\chi=20,\ A_1=-5,\ \overline{\Delta}_2=-128$

Таблица 1

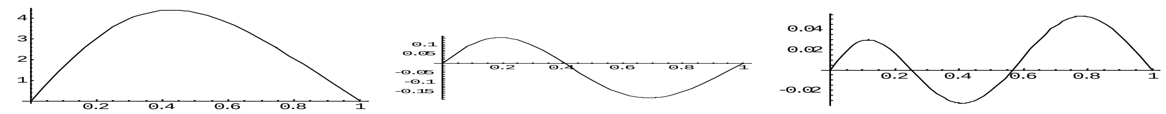
			Ω_1^1	Ω_2^1	Ω_3^1	Ω_1^2	Ω_2^2	Ω_3^2
Шарнир–шарнир	а	кл.	0.2849	1.139	2.564	–	–	–
		из.	0.2798	1.064	2.227	16.59	17.34	18.47
		орт	0.2485	0.7305	1.155	5.805	7.482	9.832
	б	кл.	0.2744	1.119	2.652	–	–	–
		из.	0.2701	1.049	2.282	14.46	17.52	21.33
		орт	0.2440	0.7350	1.158	5.544	7.823	10.05
Min	в	кл.	0.2279	1.026	2.231	–	–	–
		из.	0.2272	1.026	2.231	13.39	16.12	19.96
		орт	0.1988	0.6506	1.048	4.815	6.846	9.998
max	г	кл.	0.3131	1.181	2.652	–	–	–
		из.	0.3093	1.108	2.304	16.37	17.46	22.01
		орт	0.2866	0.7937	1.242	6.587	7.665	10.57
	д	кл.	0.2839	1.135	2.646	–	–	–
		из.	0.2793	1.062	2.280	15.13	17.24	21.47
		орт	0.2499	0.7371	1.161	5.776	7.816	10.12
	е	кл.	0.2615	1.097	2.672	–	–	–
		из.	0.2565	1.026	2.282	13.64	17.86	21.22
		орт	0.2255	0.6996	1.097	5.262	7.813	10.01

В табл. 1-2 приведены безразмерные значения первых трёх частот двух групп изгибных колебаний. Первая строка для каждой полосы относится к классической постановке задачи, вторая строка – к изотропной полосе, а третья – к ортотропной. Для каждой частоты определяется вид функций f и φ, что позволяет определить характер колебаний. Первые частоты Ω_i^1 относятся, в основном, к поперечным колебаниям, которые сопровождаются сдвиговыми колебаниями малой амплитуды. Вторые частоты Ω_i^2 относятся к сдвиговым колебаниям, которые сопровождаются поперечными колебаниями малой амплитуды. При классической постановке Ω_i^2 отсутствуют.

Таблица 2

			Ω_1^1	Ω_2^1	Ω_3^1	Ω_1^2	Ω_2^2	Ω_3^2
Заделка–заделка 	а	кл.	0.6458	1.782	3.433	–	–	–
		из.	0.6212	0.9676	2.352	24.13	25.34	28.17
		орт	0.4933	0.7894	1.183	7.934	8.756	10.23
	б	кл.	0.6287	1.726	3.424	–	–	–
		из.	0.5812	0.9452	2.214	21.12	23.32	24.77
		орт	0.4426	0.7118	1.052	6.127	8.152	10.27
 max	в	кл.	0.8162	1.986	2.834	–	–	–
		из.	0.7625	1.245	2.126	20.26	21.39	24.36
		орт	0.5944	0.8851	1.247	6.652	8.123	9.756
 min	г	кл.	0.4724	1.369	3.657	–	–	–
		из.	0.4413	0.9942	2.243.	22.37	24.52	26.31
		орт	0.3112	0.7751	1.253	7.627	8.745	10.22
	д	кл.	0.5963	1.679	3.391	–	–	–
		из.	0.5522	0.8552	2.214	20.32	21.53	23.08
		орт	0.4126	0.6928	0.9852	5.827	7.452	9.273
	е	кл.	0.6686	1.767	3.419	–	–	–
		из.	0.6053	1.123	2.382	18.74	20.06	21.82
		орт	0.5255	0.7196	1.138	5.267	7.965	11.20

Приведём также вид функции f при $H(x)=0.75(1+x^2)$ при шарнирном опирании для первых трёх критических значений безразмерной частоты..



Фиг. 3

На основании вычислений можно сделать следующие выводы.

При условиях закрепления шарнир-шарнир наибольшая первая частота у пластины г), а наименьшая – у пластины в), а при условиях заделка-заделка, наоборот. При условиях упругой заделки при $l_{11}=l_{12}=0.0045$, $l_{21}=l_{22}=1$ (l_{11}, l_{12} относятся к граничному условию (1.4) на левом и правом концах сооветственно, а l_{21}, l_{22} – к (1.5)) первая частота для обоих типов пластин $\Omega_1^1=0.4361$, а для пластины постоянной толщины – $\Omega_1^1=0.4436$. Вышесказанное и данные таблиц указывают, что граничные условия оказывают существенное влияние на значения расчётных величин.

Учёт обжатия приводит к изменению расчётных величин ~3%.

Разница для первой частоты при первом или втором условии (1.4) составляет не более 5%

при $\chi = 20$ и они совпадают при $\chi = 0$.

Учёт влияния инерции вращения от поперечных сдвигов приводит к появлению новых видов колебаний, которые являются преимущественно сдвиговыми, частота которых имеет порядок 6-8 частот основной формы колебаний.

Учёт влияния поперечных сдвигов приводит к уменьшению частот основных колебаний до 32% и более ощутим при более жёстком креплении.

Учёт переменности толщины в рассмотренных вариантах изменения приводит к изменению основной частоты ±30%.

Метод коллокаций достаточно быстро приводит к результатам. Уже после 6-7 точек коллокаций основная первая частота практически не меняется.

ЛИТЕРАТУРА

1. Киракосян Р.М. Основные уравнения ортотропных пластин переменной толщины при учёте поперечных сдвигов и обжатия // Изв. НАН Армении. Механика. 2002. Т.55. №4. С.12-20.
2. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360с.
3. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник под.ред. Биргера И.А. и Пановко Я.Г. Т.3. Изд. Машиностроение, 1964. 564с.
4. Киракосян Р.М. Неклассическая задача изгиба ортотропной балки с упруго-защемлённой опорой. //Докл. НАНАрмени. 2014. Т.114. №2.С.101-107.
5. Геворкян Г.З., Киракосян Р.М. Свободные поперечные колебания прямоугольных ортотропных пластин переменной толщины при учёте поперечных сдвигов и инерции вращения. // В. сб., посв. 80-летию академика НАН Армении С.А. Амбарцумяна: Ереван: 2002. С.137-146.

Геворкян Гнун Завенович

К.ф.-м.н., в.н.с. Института механики НАН РА

E-mail: gnungev2002@yahoo.com

БИОМЕХАНИКА АРТЕРИЙ МЫШЕЧНО-ЭЛАСТИЧЕСКОГО ТИПА

Голядкина А.А., Кириллова И.В., Коссович Л.Ю., Полиенко А.В., Челнокова Н.О.

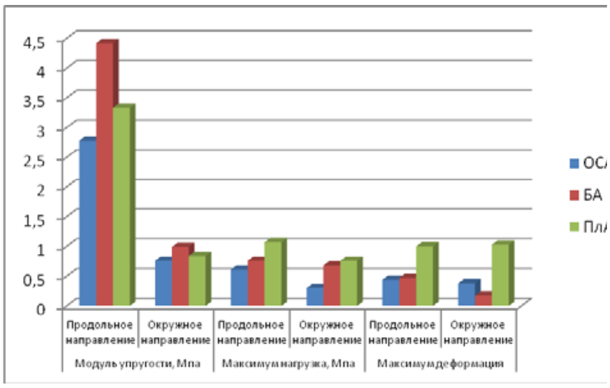
Представлены результаты изучения механических свойств артерий мышечно-эластического типа: сонные, бедренные и плечевая. Анализ медицинской литературы и клинических данных, а также актов Саратовского городского бюро судебно-медицинской экспертизы, позволил выявить частоту встречаемости патологий (атеросклероз, расслоение стенки и др.). В сонных и бедренных артериях патология присутствует в 86% случаев, а в плечевой не более 2%. Исследования проводились на испытательных машинах Instron 5944 с BioBath и Instron 3342. Материалом для экспериментов послужили нефиксированные образцы тканей, изъятые у трупов людей обоего пола в возрасте от 30 до 80 лет, поступивших в Саратовское городское бюро судебно-медицинской экспертизы (разрешение на забор образцов давалось этической комиссией). Все материалы были распределены по возрастным группам (по десятилетиям) с учётом полового признака. Проведён анализ изменения механических свойств тканей артерий в рамках одного организма. Выявлено увеличение жёсткости тканей бедренных и сонных артерий у лиц мужского пола старше 50 лет до 35%, у лиц женского старше 60 лет до 23%. В ходе эксперимента был подтвержден факт отсутствия патологий в плечевой артерии, и, как следствие, данная артерия обладала большей эластичностью.

Артерии – кровеносные сосуды, несущие кровь от сердца к органам, делятся на артерии эластического типа (аорта, легочный ствол), артерии мышечно-эластического типа (общая сонная, подключичная артерия, плечевая, бедренная и др.) и артерии мышечного типа (позвоночные артерии, лучевая, брыжеечные артерии, подколенная, артерии мозга и др.). Артерии мышечно-эластического типа по строению и функциональным особенностям занимают промежуточное положение между эластическими и мышечными артериями. В среднем слое сосудов мышечно-эластического типа наряду с гладкомышечными клетками присутствует значительное количество эластических волокон, в глубокой части наружной оболочки расположены пучки гладкомышечных клеток, снаружи их покрывает соединительная ткань, состоящая из коллагеновых и эластических волокон. Такое строение стенки позволяет данным сосудам сочетать высокую эластичность и способность сокращаться, значительно ограничивая свой просвет при колебаниях артериального давления [1]. При этом, артерии данного типа более подвержены различным патологиям, в частности, атеросклерозу, и во многом из-за своего строения [2]. В пределах отдельных артериальных бассейнов характерны очаговые поражения с вовлечением типичных участков и сохранностью соседних. При этом, атеросклероз нижних конечностей в 70% случаев сочетается с ишемической болезнью сердца и в 25% случаев – с сосудистой мозговой недостаточностью. Некоторые артерии, например, плечевая, поражаются крайне редко, несмотря на близость к венечным артериям и по расположению, и по строению сосудистой стенки. Стоит также отметить, что клинические проявления часто не соответствуют морфологии. При патологоанатомическом вскрытии может оказаться находкой мультифокальный атеросклероз. И наоборот, клиника ишемии органа может появляться при достаточно умеренной облитерации просвета сосуда. Стоит отметить, что более 90% заболеваний атеросклерозом приходится на долю мужчин.

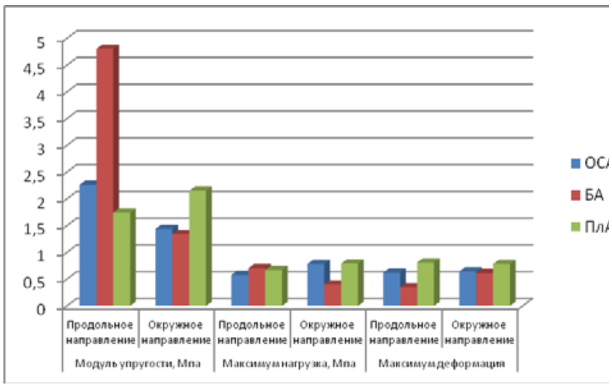
Целью проводимого исследования явилось изучение с биомеханической точки зрения поведения тканей стенок артерий мышечно-эластического типа с учётом возраста и полового признака. Для этого проводился натурный эксперимент по изучению механических свойств сонных (СА), бедренных (БА) и плечевых (ПлА) артерий, изъятых из одного организма. Для изучения характера гемодинамики с учётом напряжённо-деформированного состояния стенки вышеуказанных артерий проводился численный эксперимент. Анализ результатов позволил оценить влияние гемодинамических факторов на развитие патологических состояний сосудистой стенки (в рамках гемодинамической теории атерогенеза). В данной работе представлены результаты изучения механических свойств артерий мышечно-эластического типа в рамках одного организма.

Анализ медицинской литературы и клинических данных, а также актов Саратовского городского бюро судебно-медицинской экспертизы, позволил выявить частоту встречаемости патологий (атеросклероз, расслоение стенки и др.) артерий мышечно-эластического типа [2–8]. В сонных и бедренных артериях патология присутствует в 86% случаев, а в плечевой не более 2%.

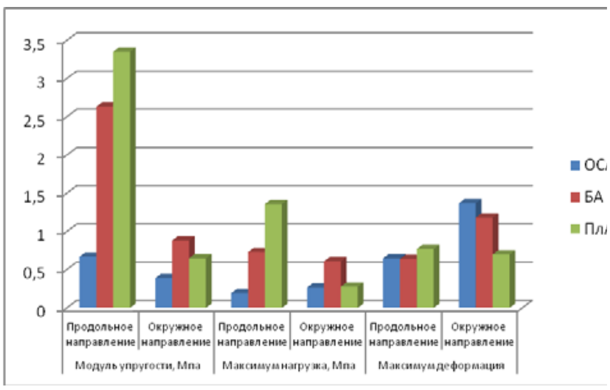
Рассмотрим методику проведения испытаний на растяжение тканей артерий и их особенности. Эксперимент был проведён на тканях вышеуказанных артерий, изъятых у трупов людей обоего пола, поступивших в Саратовское городское бюро судебно-медицинской экспертизы (забор материала проводился с соблюдением рекомендаций этической комиссии). Все материалы были распределены по четырём возрастным группам с учётом полового признака: 1 группа – 61-70 лет, 2 группа – 51-60 лет, 3 группа – 41-50 лет, 4 группа – 31-40 лет. Для исследования выбирались участки сонных, бедренных и плечевых артерий, не содержавшие явные очаги поражения. Проводился эксперимент по растяжению артерий в продольном и окружном направлениях. Толщину и ширину образцов измеряли с помощью цифрового микрометра Mitutoyo с точностью измерений до 0,001 мм. В среднем, размеры образца составляли 30x10x1мм. Образец закреплялся между двумя прорезиненными пневматическими зажимами и нагружался с определённой скоростью. До проведения эксперимента проводилась стабилизация свойств материала десятикратным нагружением и разгружением образца. Скорость нагружения составляла 10 мм/мин. По итогам эксперимента были получены графики зависимостей «напряжение-деформация». Определены значения модуля Юнга с учётом половой принадлежности и возрастной группы. Проведён анализ механических свойств в рамках одного организма. Приведены диаграммы полученных данных для 1-4 возрастных групп, мужской пол (рис. 1-4).



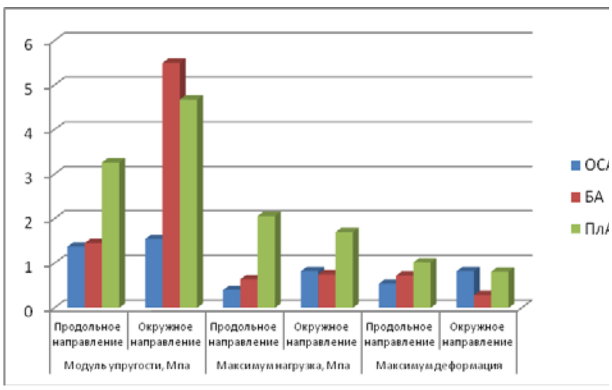
а



б

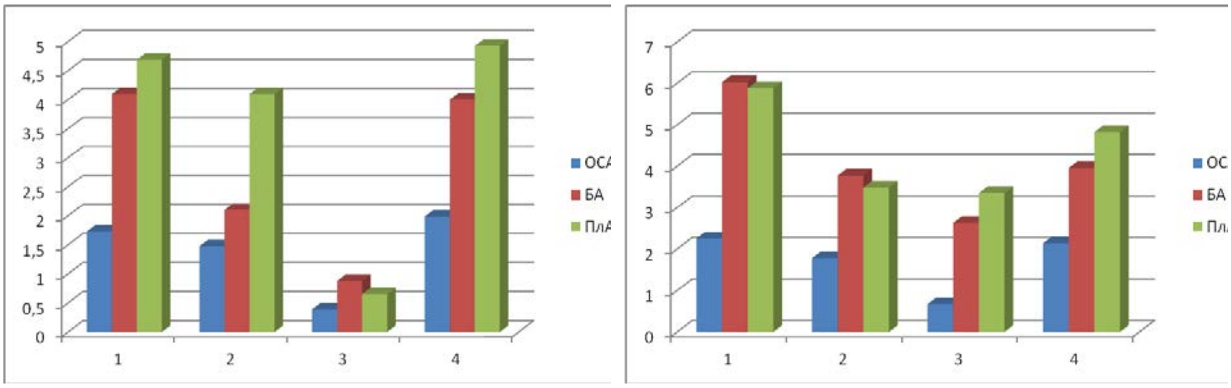


в



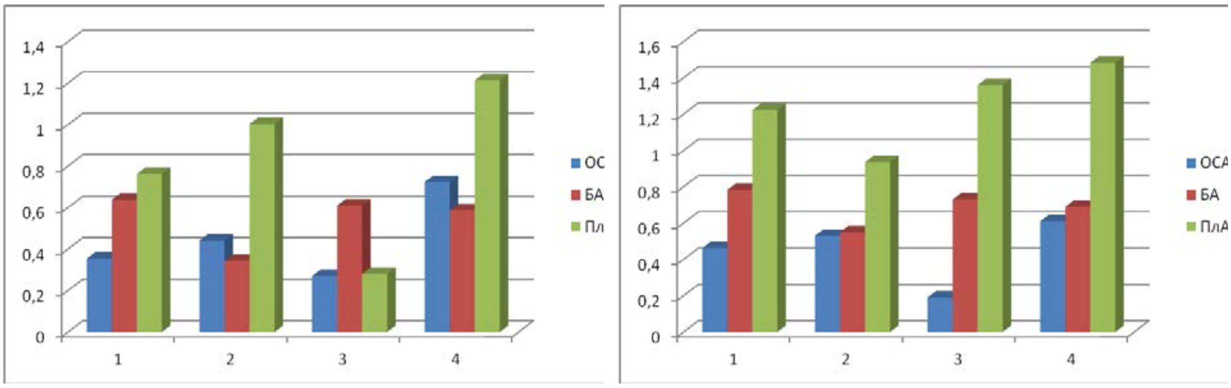
г

Рис. 1. Изменение механических свойств в рамках одного организма: а) 1 возрастная группа; б) 2 возрастная группа; в) 3 возрастная группа; г) 4 возрастная группа



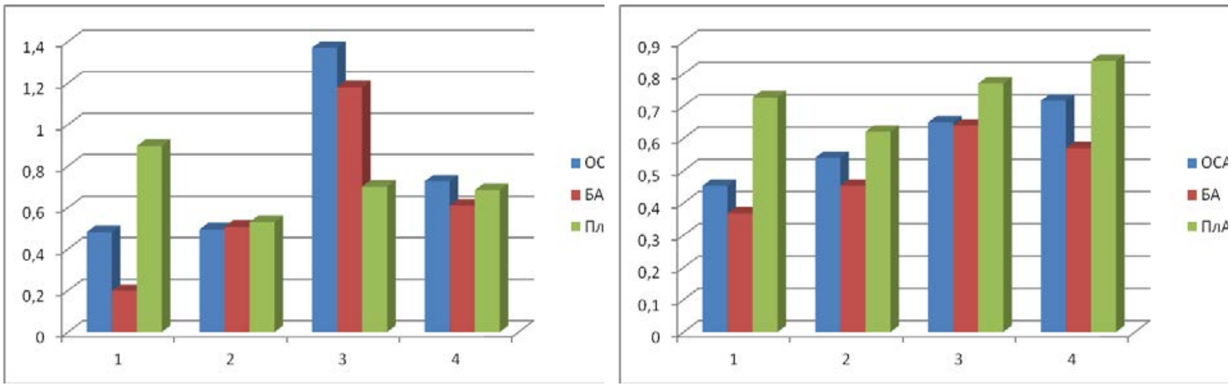
а б

Рис. 2. Значения модуля упругости по возрастным группам: а) в окружном направлении; б) продольном направлении, МПа



а б

Рис. 3. Значения максимальной нагрузки по возрастным группам: а) в окружном направлении; б) продольном направлении, МПа



а б

Рис. 4. Значения максимальной деформации по возрастным группам: а) в окружном направлении; б) продольном направлении

При рассмотрении данных исследования образцов женского пола особый интересс представляют результаты для 1 возрастной группы при одновременном рассмотрении обоих направлений растяжения (рис. 5–7).

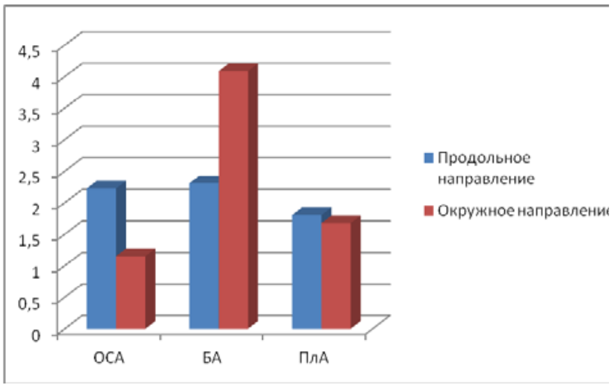


Рис. 5. Значения модуля упругости, МПа

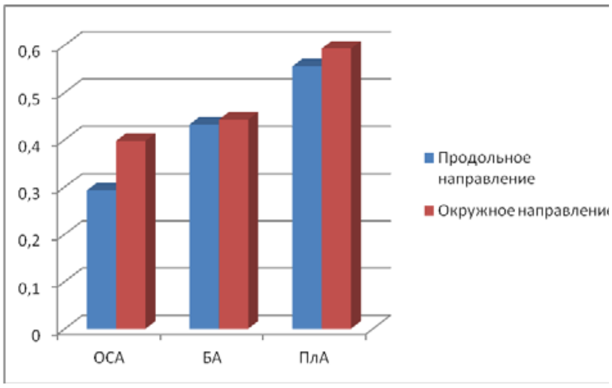


Рис. 6. Значения максимальной нагрузки, МПа

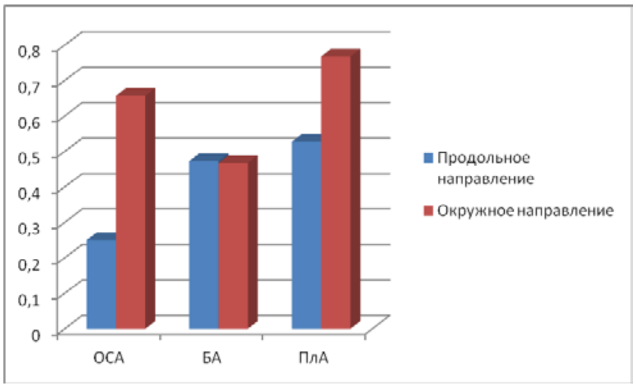


Рис.7. Значения максимальной деформации

Анализ результатов эксперимента позволил выявить увеличение жёсткости тканей бедренных и сонных артерий у лиц мужского пола старше 50 лет (1 и 2 возрастные группы) до 35%, у лиц женского пола старше 60 лет (только 1 возрастная группа) до 23% и прямо пропорциональное уменьшение значений деформации, в рамках физиологических нагрузок. Данные показатели обусловлены деградацией эластических волокон – замещением их соединительной тканью. Анализ данных натурного эксперимента по изучению ПлА показал, что независимо от возраста и пола данная артерия обладает высокими значениями по пределам прочности и эластичности, т.о. был подтверждён факт отсутствия патологий в данной артерии.

Результаты проведённого исследования позволили получить более полную объективную картину механических свойств тканей сонных, бедренных и плечевой артерий. А также, систематизировать полученные данные по возрасту, полу и нозологическим формам заболеваний.

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного задания № 2014/203, код проекта 1617.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стенка сосудов в атеро- и тромбогенезе / Под ред. Е.И. Чазова, В.Н. Смирнова. АМН СССР. М.: Медицина, 1983.
2. Ефимов А.А., Савенкова Е.Н. Судебно-медицинская оценка возрастных изменений аорты и парных крупных артерий. //Саратовский научно-медицинский журнал, 2015. Т.11. №2.
3. Сторожаков Г.И., Верещагина Г.С., Червякова Ю.Б., Федотова Н.М. Оценка эластических свойств артериальной стенки у больных артериальной гипертонией молодого возраста. //Артериальная гипертензия. 2005. Т.11. № 1.

4. Доценко Н.Я., Доценко С.Я., Порада Л.В., Герасименко Л.В. Технические возможности исследования упругоэластических свойств сосудов.//Артериальная гипертензия. 2011.Т.16. № 2.
5. Олейников В.Э., Матросова И.Б., Борисочева Н.В. Клиническое значение исследования ригидности артериальной стенки. //Кардиология. 2009. № 1.
6. Илюхин О.В., Лопатин Ю.М. Скорость распространения пульсовой волны и эластические свойства магистральных артерий: факторы, влияющие на их механические свойства, возможности диагностической оценки. //Вестник ВолГМУ. 2006. № 1.
7. Никитин Ю.П., Лапицкая И.В. Артериальная жёсткость: показатели, методы определения и методологические трудности. //Кардиология. 2005. №11.
8. Агеев Ф.Т., Орлова Я.А. Жёсткость артерий как интегральный показатель сердечно-сосудистого риска: физиология, методы оценки и медикаментозной коррекции. //Сердце. 2006. Т.5. № 2.

Сведения об авторах:

Голядкина Анастасия Александровна – к.ф.-м.н., начальник отдела, Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, Образовательно-научный институт наноструктур и биосистем +7(8452) 21 07 50, +7(8452) 21 07 55**,** **E-mail:** nano-bio@sgu.ru

Кириллова Ирина Васильевна – к.ф.-м.н., доцент, директор, Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, Образовательно-научный институт наноструктур и биосистем +7(8452) 21 07 50, +7(8452) 21 07 55, **E-mail:** nano-bio@sgu.ru

Коссович Леонид Юрьевич – д.ф.-м.н., профессор, президент, Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, Образовательно-научный институт наноструктур и биосистем +7(8452) 21 07 50, +7(8452) 21 07 55**,** **E-mail:** nano-bio@sgu.ru

Полиенко Асель Валерьевна – ведущий инженер, Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, Образовательно-научный институт наноструктур и биосистем +7(8452) 21 07 50, +7(8452) 21 07 55, **E-mail:** nano-bio@sgu.ru

Челнокова Наталья Олеговна – к.м.н., ассистент, Саратовский гос. медицинский университет им. В.И.Разумовского, +7(8452)21.07.50, +7(8452)21.07.55, **E-mail:** nanobio@sgu.ru

ОСОБЕННОСТИ РАСЧЁТА УСИЛИВАЕМЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Григорян Д.Г.

В статье представлены особенности усиления и реконструкции железобетонных каркасных зданий. В нашей стране много зданий и сооружений, нуждающихся в усилении. Исследуя разные примеры реконструкции, мы попытались представить главные задачи по повышению уровня сейсмостойкости и их возможные решения.

Учитывая большое количество зданий в нашей стране, нуждающихся в усилении, очень важно правильно оценить несущую способность существующих железобетонных конструкций и выбрать верные решения для их усиления.

Исследования по техническому состоянию построенных в советские времена зданий и сооружений показывают, что во многих случаях проблема заключается в низком уровне сейсмостойкости, так как требования к другим нагрузкам почти не изменились, тогда как требования, предъявляемые к сейсмоустойчивости зданий, по действующим в РА нормам [1] проектирования сейсмостойкого строительства, стали несравненно жёстче.

Согласно действующим в РА нормам реконструкции, в зависимости от назначения здания, уровня ответственности и степени повреждения, есть три подхода к реконструкции зданий и построений [1]:

1. Восстановление - доведение сейсмовооружённости до уровня, бывшего до землетрясения;

2. Повышение уровня сейсмовооружённости;

3. Усиление - доведение сейсмовооружённости до уровня действующих нормативных требований.

Исследования технического состояния существующих зданий часто показывают, что их конструктивные системы уже не соответствуют СНРА II-2.02.2006 [1]. В таких случаях для повышения уровня сейсмостойкости нужно менять конструктивную схему здания, приведя её в соответствие с СНРА II-2.02.2006. Встречаются также примеры, когда конструктивные системы зданий приемлемы, но расчёты по СНРА II-2.02.2006 показывают, что у них недостаточный уровень сейсмоустойчивости. Это, как правило, обусловлено маленькими жестокостями конструкций.

Эффективная реконструкция зданий и сооружений, в первую очередь, обусловлена правильными исследованием и оценкой конструкций. Современные методы и инструменты исследования конструкций позволяют довольно точно оценивать их техническое состояние, давая точную информацию о физико-механических качествах бетона, о классе, количестве арматуры и т. д.

Эта статья посвящена работам по увеличению сейсмостойкости железобетонных каркасных зданий. Мы разработали проекты реконструкции многих зданий и сооружений. Исследование их технического состояния зачастую выявляют потребность в увеличении сейсмостойкости. Проведённые нами исследования по реконструкции показывают, что сейсмостойкость железобетонных каркасных зданий с рамными и рамно-связевыми системами можно заметно улучшить либо увеличивая сечение уже существующих колонн, либо размещая новые связевые системы (диафрагмы).

Рассмотрим пример усиления колонны с помощью двустороннего наращивания. На рис.1 изображены напряжения и усилия внецентренно сжатой колонны.

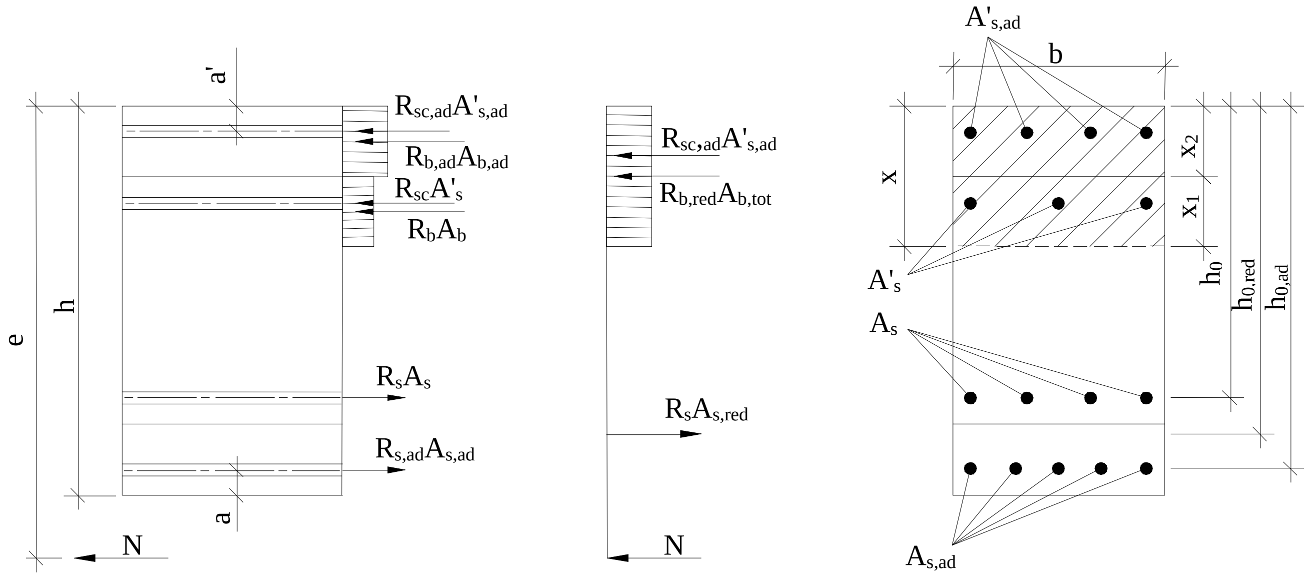
В случае усиления элементов с прямоугольными сечениями при помощи двустороннего наращивания площадь требуемых участков дополнительной арматуры определяется следующей формулой [2]:

$$A_{s,ad} = -\left(\frac{A}{2}\right) \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} - B}, \tag{1.1}$$

где A и B – коэффициенты, которые определяются следующим образом:

$$A=\frac{N+R_s A_s - R_{sc}A'_{s,red} - R_{b,red}bh_{0,red}}{0.5R_{s,ad}}, \tag{1.2}$$

$$B=\frac{\left\{0.5(R_s A_s - R_{sc}A'_{s,red})^2+\left[R_{sc}A'_{s,red}a' - R_s A_s h_{0,red}+N\left(e-h_{0,red}\right)\right]R_{b,red}b+N\left(R_s A_s - R_{sc}A'_{s,red}\right)+0.5N^2\right\}}{0.5R^2_{s,ad}} \tag{1.3}$$



фактическая приведенная

Рис.1. Схема усилий и эпюра напряжений внецентренно сжатой колонны

Например, дано: размеры сечения усиливаемого элемента $b=0.6$ м, $h=0.9$ м, бетон усиливаемого элемента класса *B12.5,* $R_b=7.5$ МПа, высота наращивания $x_2=0.6$ м, бетон усиления класса *B20,* $R_{b,ad}=15$ МПа.

Расположение арматуры показано на рис.1: $h_0=0.72$ м, $h_{0,ad}=0.87$ м, $a=a'=0.03$ м. Арматура усиливаемого элемента вида: *A-II* $R_s=R_{sc}=280$ МПа, $A_s=12.568\cdot10^{-4}$ м² $\left(4\varnothing20\right)$; $A'_s=9.426\cdot10^{-4}$ м² $\left(3\varnothing20\right)$.

Следует определить площадь дополнительной растянутой арматуры $A_{s,ad}$, если нагрузка на элемент составляет $N=1000$ кН, а эксцентриситет приложения нагрузки равен $e=1.877$ м. Определяя A и B с помощью формул (1.2) и (1.3) и вставляя их в формулу (1.1), получим:

$$A_{s,ad}=\frac{629\cdot10^{-4}}{2}\pm\sqrt{\frac{\left(629\cdot10^{-4}\right)^2}{4}-17400^{-8}}=\frac{629\cdot10^{-4}}{2}\pm285\cdot10^{-4} \tag{1.4}$$

$$A_{s,ad}=29.5\text{ см}^2. \tag{1.5}$$

Если рассчитать ту же конструкцию без арматуры, имеющейся в усиливаемой части, т.е., если просто рассчитать элемент с сечением 600х900 мм, то поверхность требуемой арматуры получится $A_{s,ad}=35.6$ см², что примерно на 25% больше, чем та, что определилась по формуле (1.1).

Мы осуществили такие расчёты и по другим методикам [3] и получили похожие результаты. Обобщая их, можно сказать, что в часто встречаемых случаях можно сэкономить до 15-25% дополнительной усиливающей арматуры, если в расчётах учитывать существующую арматуру.

В настоящее время в РА для расчёта строительных конструкций преимущественно используются программные пакеты ЛИРА, ЛИРА САПР, которые, однако, не дают возможность учитывать наличие арматуры в усиливаемых конструкциях, что приводит к увеличению расхода арматуры, что, в свою очередь, делает дороже работы по усилению и реконструкции. По нашему мнению, есть необходимость в разработке чёткой и доступной методики, которая позволила бы учитывать несущую способность существующей арматуры. Разработка и применение такой методики приведут к существенной экономии, учитывая большое количество зданий и сооружений в РА, нуждающихся в усилении и реконструкции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Սեյսմոկայուն շինարարություն. Նախագծման նորմեր, ՀՀՇՆ II -2.02-2006, 70 էջ:
2. Рекомендации по проектированию усиления железобетонных конструкций зданий и сооружений реконструируемых предприятий. Надземные конструкции и сооружения. М.: Стройиздат, 1992. 192 с.
3. Усиление железобетонных конструкциий производственных зданий и просадочных оснований. Научно-исследовательский институт строительных конструкциий госстроя Украины. Киев: 2004. 217 с.

Сведения об авторах:

Григорян Давид Гамлетович – кандидат технических наук, доцент кафедры Строительные конструкции, Ереванский государственный университет архитектуры и строительства, факультет Промышленное и гражданское строительство, (374 93) 57 87 96

E-mail: davit-grigoryan@yandex.com

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПРОТЕЗНОЙ КОНСТРУКЦИИ БЕЗЗУБОЙ ЧЕЛЮСТИ, ОПИРАЕМОЙ НА 4, 5 И 6 ЦАНГОВЫЕ ИМПЛАНТАТЫ

Григорян К.Л., Мусаелян С.Л.

В работе рассматривается сравнительный анализ напряжённо-деформированного состояния протезной конструкции, опираемой на 4, 5 и 6 цанговые имплантаты. Расчёты осуществлены с помощью компьютерной программы SolidWorks. В результате, с точки зрения механики деформируемого тела оптимальным получается вариант четырёх имплантатов. Однако, ввиду безопасного применения имплантатов можно применить имплантаты большего количества.

Задняя часть нижней челюсти человека не подлежит имплантированию ввиду того, что там находится нерв челюсти и имеется особый риск его повреждения. Поэтому протезные конструкции делаются с консольными частями, что показано на рис.1

Рис.1

Фото конструкции зубного протеза

Ввиду сложности геометрии вышеуказанной конструкции считаем целесообразным её моделирование с помощью ПК SolidWorks. Этот вариант удобен и тем, что имеем возможность делать расчёт конструкций при различных силовых воздействиях. Одним из распространённых материалов для конструкций протезов является Wirobond SG, имеющий следующие физико-механические характеристики:

Таблица1

N	Свойство	Значение
1	Модуль упругости, ГПа	200
2	Предел текучести, МПа	470
3	Предел прочности при растяжении, МПа	650
4	Плотность, г/см^3	8,5
5	Твёрдость по Викерсу (HV10)	310
6	Температура плавления, ^{o}C	1370-1420
7	Коэффициент линейного расширения, 10^{-6}K^{-1}	14.1-14.3

Величина силы укуса может варьироватся в пределах 42-1245 Н. Величина силы больше в зоне коренных зубов (91Н), меньше в области клыков (45Н), а наименьшее значение –в области резцов (11Н). В задней области значение силы может достигать до 450Н. Однако, характер распределения значений давления меняется в зависимости от площади контакта зубов.

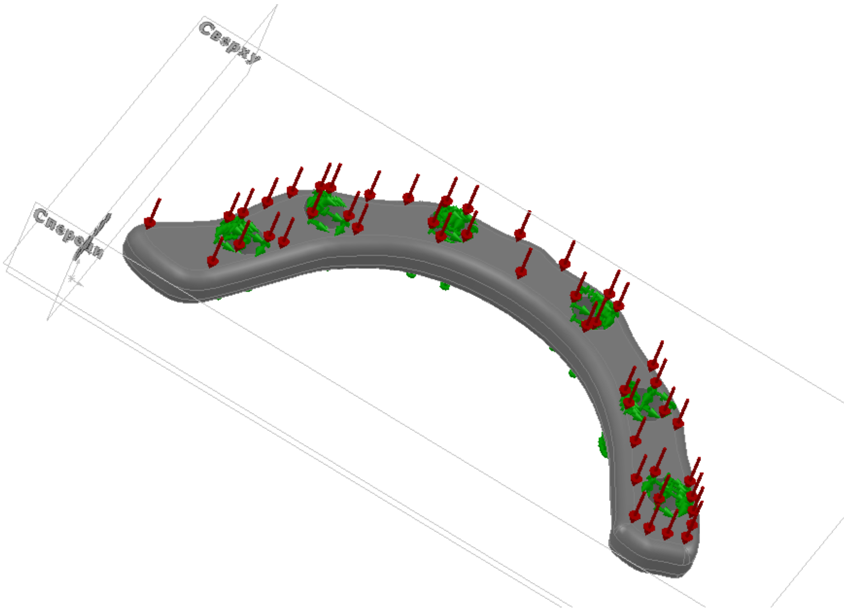


Рис.2

3D модель конструкции зубного протеза с шестью отверстиями для имплантатов

Результаты расчёта Таблица 2

N	К-во импл.	Площадь поверхности зубьев, мм^2	Распределенная нагрузка, МПа	Максимальное напряжение, МПа	Максимальное перемещение, мкм	Максимальная относительная деформация,%	Коэфф, запаса по прочности
1	6	137.68	9.042	97.9	2.826	0.037	4.80
2	5	146.31	8.51	393.26	50.21	0.15	1.20
3	4	153.47	8.11	408.7	48.0	0.157	1.15

Рис.3. 3D модель нижней челюсти человека с двумя коническими имплантатами.

Результаты, приведённые в табл. 2 для напряжений и деформаций зубопротезной конструкции, находятся в допустимых пределах.

Проведём расчёт челюстной костной ткани от сжимающего давления со стороны имплантов и от давления активации имплантатов на костную ложу. Здесь напряжениям от сжимающих сил прибавляются напряжения от активации имплантатов. Расчёт проведём для максимального значения силы прикуса, равным 1245 Н. Результаты расчёта приведены в табл.3.

Результаты расчёта — Таблица 3

К-во импл	Распределён-ная нагрузка, МПа	Максимальные напряжения, σ_{max}, МПа	Максималь-ные пере-мещения, мкм	Максимальная относительная деформация ε %	Напряжения активации имплантов $\sigma_{акт.}$, МПа	Суммарные напря-жения σ, МПа
6	1.21	3.7	134	0.06	2.3	6.5
5	1.46	4.44	160	0.07	2.3	6.74
4	1.82	5.54	200	0.09	2.3	7.84

По данным в известной нам литературе прочность челюстной костной ткани на растяжение меняется в пределах 10-20 Мпа, а на сжатие – 23-35 Мпа.

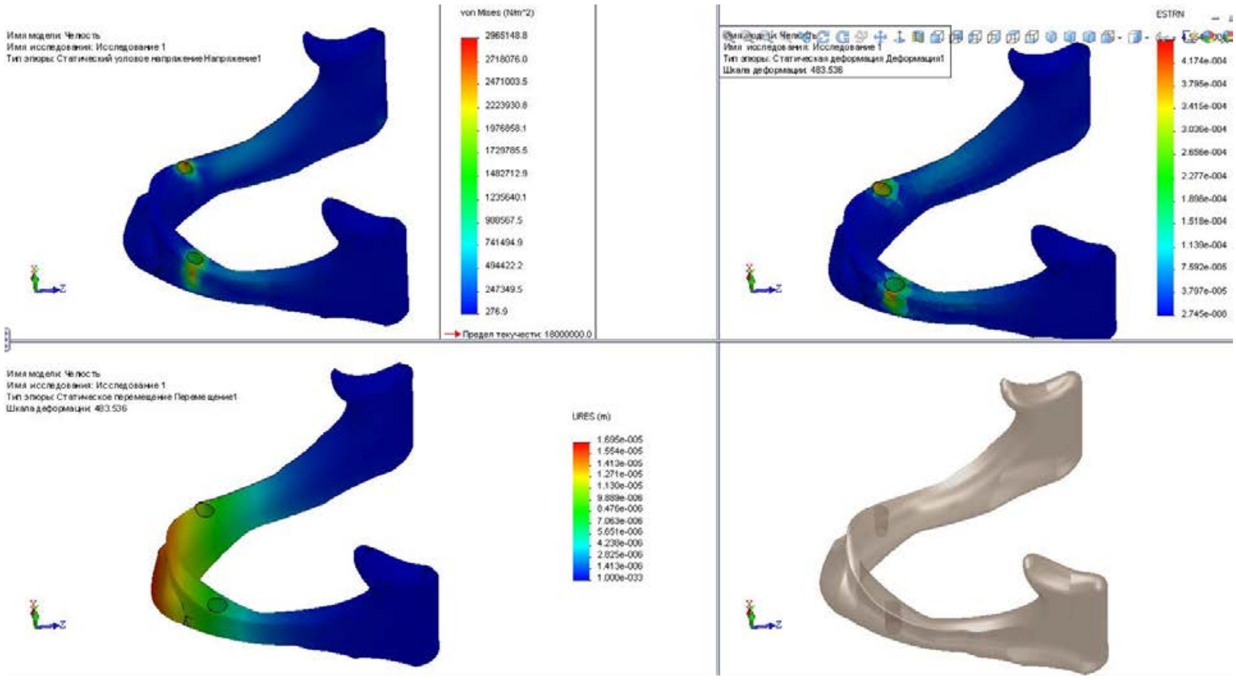


Рис.4

3D модель и результаты расчёта эквивалентных напряжений и деформаций нижней челюсти

Как показывают полученные результаты для напряжений и деформаций челюстной костной ткани, полученные численные значения эквивалентных напряжений и деформаций находятся в допустимых пределах, что свидетельствует о безопасности применения армянской системы дентальных имплантатов

Созданная интерактивная модель даёт возможность изучить биомеханику системы «съёмный протез – имплантат – костная ткань» при различном приложении и величине нагрузки. Модель позволяет в зависимости от клинической ситуации обосновать с позиций биомеханики.

1) необходимое количество имплантатов,

2) размеры имплантатов,

3) расстояние между имплантатами,

4) выбор конструкционных материалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорян К.Л, Мусаелян С.Л. Об одном методе соединения зубного имплантата с костной тканью. //Изв. Армении.Механика. 2001. Т.54. №4. С.54–60.

2. Канатов В.А. Ортопедическое лечение больных с дефектами зубных рядов с применением математического моделирования протезных конструкций на имплантатах. /Диссертация на соискание учёной степени к.м.н.. Москва: 1991.
3. Проблемы прочности в биомеханике. /Под редакцией И.Ф.Образцова. М.: Высшая школа, 1988.
4. Fallscheissel G.K. Zahnarrtliche Implantologie // Wissen schaft und Praxos. 1986.

5. Matt Lombard. SolidWorks 2010 Bible. Wiley, 2010.
6. Կ.Գրիգորյան, Հ.Կասյան, Ս.Մուսայելյան: Զսպախցուկային ներտունկի կոնական տարբերակի կիրառման նպատակահարմարությունը:
7. Мусаелян С.Л., Григорян К.Л., Касьян А.Э. Применение методов механики в практической стоматологии. //Труды международной конференции «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред». С.315–319.

Сведения об авторах:

Мусаелян Сурен Левонович – к.т.н., старший научный сотрудник Института механики НАН РА, лаборатория экспериментальных исследований, начальник кафедры математики, физики и технических предметов военно- авиационного института им. Маршала А. Ханперянца МО РА, (374 94)-81-03-70 , (374 99)-81-03-70.
E-mail: suren.musayelyan@mail.ru

Григорян Карен Левонович – к.м.н., доцент, ЕрГМУ, кафедра хирургической и семейной стоматологии, стоматологический центр «Аванта». (374 91) 41-11-98.
E-mail: kardent@gmail.com

ПЛОСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ОБ ИЗГИБЕ БАЛКИ НА УПРУГОЙ ШЕРОХОВАТОЙ ПОЛОСЕ ПРИ НАЛИЧИИ СЖИМАЮЩИХ ИЛИ РАСТЯГИВАЮЩИХ ОСЕВЫХ СИЛ

Григорян М.С., Мкртчян М.С., Шекян Л.А.

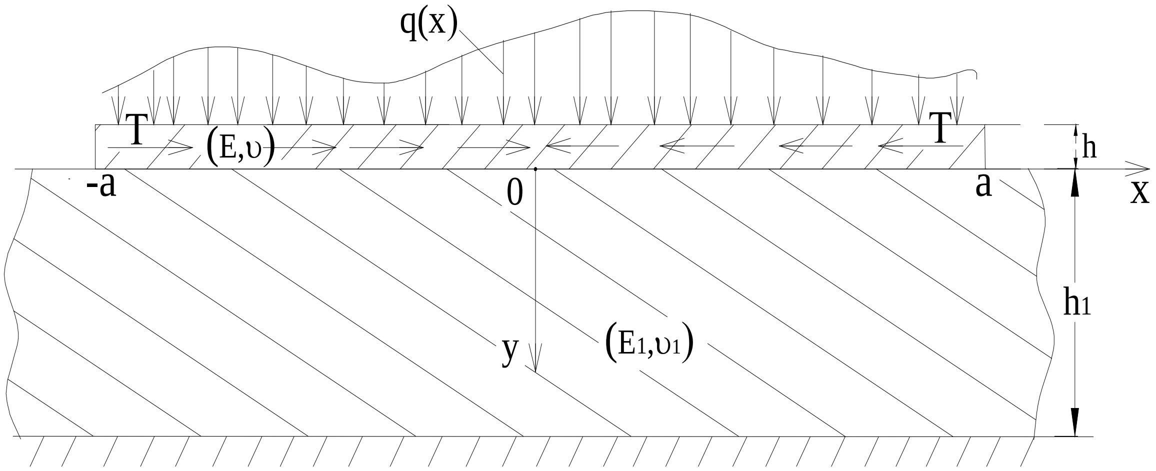
В рамках обобщённой модели изгиба балки С.П.Тимошенко [1], когда на прогибы балки влияют как поперечные, так и действующие на её срединной линии продольные сжимающие или растягивающие силы, рассматривается плоская контактная задача об изгибе упругой балки на упругом шероховатом основании в виде полосы, нижняя горизонтальная грань которой защемлена.

Вертикальное упругое перемещение, которое получает контактирующаяся с балкой каждая граничная точка шероховатой полосы, представлено в виде суммы двух перемещений. Одно из этих перемещений обусловлено деформациям верхнего тонкого граничного шероховатого слоя полосы и определяется по экспериментальным данным [2], а второе перемещение возникает вследствие глобальной деформации полосы и берётся из решения соответствующей граничной задачи линейной теории упругости для упругой однородной изотропной полосы [3].

Задача сведена к решению нелинейного интегрального уравнения типа Гаммерштейна [4] при дополнительных условиях. Эффективное решение задачи получено по разработанной в [5] методике, основанной на теории Гаммерштейна [4] и принципа сжимающих отображении [6]. Получено приближённое аналитическое решение задачи.

Аналогичные контактные задачи об изгибе балки на упругом основании при наличии сжимающих или растягивающих осевых сил рассмотрены в [7,8].

1. Пусть балка длины $2a$, высоты h, модуля упругости E и коэффициента Пуассона ν под действием распределённых вертикальных сил интенсивности $q(x)$ $(-a \le x \le a)$ и осевых горизонтальных сжимающих сил T, изгибаясь, вдавливается в упругую бесконечную полосу толщиной h_1 с модулем упругости E_1 и коэффициентом Пуассона ν_1, нижняя грань которой $y = h_1$ жёстко защемлена (фиг.1).



Фиг. 1

Требуется определить законы распределения контактных давлений $p(x)$, действующих между балкой и полосой, вертикальные перемещения $\mathrm{v}(x)$ точек изогнутой оси балки, функции изгибающих моментов $M(x)$ и поперечных сил $Q(x)$ в сечениях балки.

Дифференциальное уравнение изгиба балки с поперечными силами $q(x)$ и $p(x)$, учитывая при этом влияние действующих вдоль срединной линии балки сжимающих сил T, по теории С.П. Тимошенко ([1], стр.422, формула (217), $T = -N_x$, $w = \mathrm{v}$, $N_y = N_{xy} = 0$) имеет вид:

$$D\frac{d^4\mathrm{v}}{dx^4} + T\frac{d^2\mathrm{v}}{dx^2} = p(x) - q(x), \quad (-a < x < a) \tag{1}$$

где $D = Eh^3 / 12\left(1-\nu^2\right)$ – жёсткость балки на изгиб. При этом, функции $\mathrm{v}(x)$, $M(x)$ и $Q(x)$ связаны между собой соотношениями

$$M(x)=D\frac{d^2\mathrm{v}}{dx^2},\quad Q(x)=D\frac{d^3\mathrm{v}}{dx^3}. \tag{2}$$

Уравнение (1) рассматривается при следующих граничных условиях $M(\pm a)=0$, или

$$(d^2\mathrm{v}/dx^2)\big|_{x=\pm a}=0, \tag{3}$$

указывающих на то, что в концевых точках балки $x=\pm a$ отсутствуют изгибающие моменты $M(x)$. При этом условия равновесия балки имеют вид

$$\int_{-a}^{a}[p(x)-q(x)]dx=0 \;\Rightarrow\; \int_{-a}^{a}p(x)dx=\int_{-a}^{a}q(x)dx=P, \tag{4}$$

$$\int_{-a}^{a}x[p(x)-q(x)]dx=0 \;\Rightarrow\; \int_{-a}^{a}xp(x)dx=\int_{-a}^{a}xq(x)dx=M, \tag{5}$$

где P и M являются, соответственно, величинами главного вектора и относительно начала координат O главного момента заданной распределённой нагрузки $q(x)$.

Введя обозначения

$$k=\sqrt{T/D},\; g(x)=[p(x)-q(x)]/D,\; y=d^2\mathrm{v}/dx^2, \tag{6}$$

вместо (1) получим относительно функции $y\equiv d^2\mathrm{v}/dx^2$ дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2}+k^2y=g(x),\; (-a<x<a), \tag{7}$$

решение которого с учётом граничных условий (3) представляется формулой [7]

$$y\equiv\frac{d^2\mathrm{v}}{dx^2}=\frac{1}{k\sin 2ka}\int_{-a}^{a}\left(\cos^2 ka\sin kx\sin ks-\sin^2 ka\cos kx\cos ks\right)g(s)ds+ \\ +\frac{1}{2k}\int_{-a}^{a}\sin\left(k|x-s|\right)g(s)ds. \tag{8}$$

Отсюда

$$\mathrm{v}(x)=\int_{-a}^{a}H(x,s)g(s)ds+k_0x+\mathrm{v}_*,\; (-a\le x\le a) \tag{9}$$

где

$$H(x,s)=\int_{0}^{x}(x-t)\left[\frac{\cos^2 ka\sin kt\sin ks-\sin^2 ka\cos kt\cos ks}{k\sin 2ka}+\frac{\sin\left(k|t-s|\right)}{2k}\right]dt, \tag{10}$$

а v_* и k_0 – постоянные интегрирования, характеризующие, соответственно, вертикальное перемещение и угловой коэффициент касательной к изогнутой оси балки в точке с координатой $x=0$.

В случае осевых растягивающих сил T в уравнении (1) следует T заменить на $-T$. При этом, во всех предыдущих формулах следует параметр k формально заменить на ik, где i – мнимая единица, и везде от тригонометрических функций перейти к соответствующим гиперболическим функциям.

2. Теперь рассмотрим упругое равновесие шероховатой полосы (фиг.1), нижняя $y=h_1$ грань которой жёстко защемлена, а на участке $-a\le x\le a$ её верхней границы $y=0$ приложены нормальные контактные давления интенсивности $p(x)$.

Вертикальное упругое перемещение $\mathrm{v}_1(x)$, которое получает точка с координатой x участка контакта $[-a;a]$ верхней границы $y=0$ полосы, согласно [2], представим в виде суммы двух перемещений

$$\mathrm{v}_1(x)=\mathrm{v}_{\text{шерох}}(x)+\mathrm{v}_{\text{глоб}}(x),\; (-a\le x\le a). \tag{11}$$

Перемещение $\mathrm{v}_{\text{шерох}}(x)$ обусловлено деформациям верхнего тонкого граничного шероховатого слоя полосы, которое, согласно экспериментам [2], пропорционально некоторой степени контактного давления $p(x)$ в данной точке

$$\mathrm{v}_{\text{шерох}}(x) = A \cdot [p(x)]^{\beta}, \quad (-a \le x \le a), \tag{12}$$

где A и β – положительные постоянные, характеризующие шероховатость поверхности слоя определяемые экспериментальным путем, притом, $0{,}3 < \beta \le 1$.

Перемещение $\mathrm{v}_{\text{глоб}}(x)$ возникает вследствие глобальной деформации полосы. Оно определяется решением плоской граничной задачи линейной теории упругости для упругой однородной изотропной полосы толщины h_1, с модулем упругости E_1 и коэффициентом Пуассона ν_1, когда на участке $-a \le x \le a$ её верхней границы $y = 0$ приложены нормальные контактные давления $p(x)$, а нижняя граница $y = h_1$ жёстко защемлена [3]

$$\mathrm{v}_{\text{глоб}}(x) = \frac{2(1-\nu_1^{\,2})}{\pi E_1}\int_{-a}^{a} U\left(\frac{s-x}{h_1}\right) p(s)\,ds\,,\ (-a \le x \le a)\,, \tag{13}$$

где ядерная функция $U(z)$ выражается формулой

$$U(z) = \int_0^{\infty} \frac{(2\varepsilon sh2t - 4t)\cos zt}{\varepsilon(2\varepsilon ch2t + 1 + \varepsilon^2 + 4t^2)}dt\,,\ (\varepsilon = 3 - 4\nu_1). \tag{14}$$

Далее, запишем условие контакта балки и упругой полосы:

$$\mathrm{v}(x) = \mathrm{v}_1(x), \quad (-a \le x \le a), \tag{15}$$

которое согласно (9), (11)-(13) принимает вид

$$\int_{-a}^{a} H(x,s) g(s) ds + k_0 x + \mathrm{v}_* = A \cdot [p(x)]^{\beta} + \frac{2(1-\nu_1^{\,2})}{\pi E_1}\int_{-a}^{a} U\left(\frac{s-x}{h_1}\right) p(s)\,ds\,, (-a \le x \le a). \tag{16}$$

Учитывая обозначение функции $g(x)$ из (6), соотношение (16) можно трактовать как относительно $p(x)$ нелинейное интегральное уравнение. Так, как в уравнение (16) входят также неизвестные постоянные v_* и k_0, то нетрудно убедиться, что уравнение (16) и условия равновесия (4)-(5) образуют замкнутую систему уравнений относительно $p(x)$, v_* и k_0. После определения этих величин соотношениями (2) и (9), можем определить также $\mathrm{v}(x)$, $M(x)$ и $Q(x)$.

3. Введём безразмерные величины

$$\xi = \frac{x}{a}\,,\ \eta = \frac{s}{a}\,,\ h_0 = \frac{h_1}{a}\,,\ \mathrm{m} = \frac{1}{\beta}\,,\ \mathrm{v}_0 = \frac{\mathrm{v}_*}{\mathrm{a}}\,,\ P_0 = \frac{\mathrm{A}^{\mathrm{m}}}{a^{m+1}}P\,,\ M_0 = \frac{\mathrm{A}^{\mathrm{m}}}{a^{m+2}}M\,, \tag{17}$$

$$p_0(\xi) = \frac{A}{a}[p(x)]^{\beta}, \quad q_0(\xi) = \left(\frac{A}{a}\right)^m q(x), \quad f(\xi, P_0, M_0) = D^{-1}\int_{-1}^{1} H(a\xi, a\eta) q(a\eta) d\eta\,, \tag{18}$$

$$\mathrm{H}_0(\xi,\eta) = \left(\frac{a}{A}\right)^m \cdot D^{-1}\mathrm{H}(x,s),\ U_0(z) = \frac{2(1-\nu_1)^2}{\pi E_1}\left(\frac{a}{A}\right)^m U\left(\frac{z}{h_0}\right). \tag{19}$$

Тогда уравнение (16) переходит относительно неизвестной функции $p_0(\xi)$ к нелинейному интегральному уравнению типа Гаммерштейна [4]:

$$p_0(\xi) = \int_{-1}^{1} [H_0(\xi,\eta) - U_0(\xi-\eta)] \cdot [p_0(\eta)]^m d\eta + f(\xi, P_0, M_0) + k_0\xi + \mathrm{v}_0\,,\ (-1 \le \xi \le 1), \tag{20}$$

а условия равновесия (4)-(5) преобразуются к виду:

$$P_0 = \int_{-1}^{1} \left[p_0(\xi)\right]^m d\xi\,, \quad M_0 = \int_{-1}^{1} \left[p_0(\xi)\right]^m \xi d\xi \qquad .(21)$$

Таким образом, решение поставленной плоской контактной задачи сводится к определению $p_0(\xi)$, v_0 и k_0 из системы уравнений (20)-(21).

Эффективное решение системы (20)-(21), когда $q(x)$ линейная функция от x, получим согласно разработанной в [5] методике, основанной на теории нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна [4] и принципа сжимающих отображений [6].

Сначала, исходя из обозначений (17)-(18) заметим, что $q_0(\xi) = 0.5P_0 + M_0\xi$, а исходя из структуры уравнений (20)-(21), установим зависимости $p_0(\xi)$, P_0 и M_0 от v_0 и k_0, которые, по существу, являются искомые зависимости $p_0(\xi)$, v_0 и k_0 от P_0 и M_0, но сделаь это из (20)-(21) существенно легче. С этой целью, временно считаем, что значения v_0 и k_0 заданы и фиксированы, а P_0 и M_0 неизвестны. Тогда, вводя вектор $\bar{x} = \{p_0(\xi), P_0, M_0\}$ и представляя систему уравнений (20)-(21) в операторном виде $\bar{x} = G(\bar{x})$, её решение сведём к определению неподвижной точки этого нелинейного оператора G [6].

Пусть в множестве X, каждый элемент которого является непрерывным на $\xi \in$ [-1;1] функция $p_0(\xi)$ в сочетании с двумя произвольными числами P_0 и M_0, введена метрика формулой

$$\rho(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \max_{-1\le\xi\le1} |p_{01}(\xi) - p_{02}(\xi)| + |P_{01} - P_{02}| + |M_{01} - M_{02}| \qquad (22)$$

где $\bar{x}_i = \{p_{0,i}(\xi), P_{0,i}, M_{0,i}\}$ $(i = 1,2)$ – два произвольных элемента из X. Тогда множество X становится полным метрическим пространством [6]. Пусть, далее, $S(\overline{O}, r)$ – замкнутый шар в пространстве X с центром $\overline{O} = \{0,0,0\}$ и с радиусом r. Способом, предложенным в [5], можно доказать, что существует область изменения характерных параметров задачи, где оператор $\bar{y} = G(\bar{x})$ отображает шар $S(\overline{O}, r)$ в себе и в нём является сжимающим оператором. Тогда для любого начального элемента $\bar{x}_0 \in S(\overline{O}, r)$, формулами

$$\bar{x}_{i+1} = G(\bar{x}_i), \quad (i = 0,1,2,...) \qquad (23)$$

или

$$p_{0,i+1}(\xi) = \int_{-1}^{1} [H_0(\xi,\eta) - U_0(\xi-\eta)] \cdot [p_{0,i}(\eta)]^m d\eta + f(\xi, P_{0,i}, M_{0,i}) + k_0\xi + v_0, (-1 \le \xi \le 1), \qquad (24)$$

$$P_{0,i+1} = \int_{-1}^{1} \left[p_{0,i}(\xi)\right]^m d\xi\,, \qquad M_{0,i+1} = \int_{-1}^{1} \left[p_{0,i}(\xi)\right]^m \xi d\xi\,. \qquad (i = 0,1,2,...) \qquad (25)$$

получается последовательность приближённых решений $\{\bar{x}_i\}_{i=0}^{\infty}$, которая по метрике (22) стремится к некоторому пределу $\bar{x}^*$, являющегося неподвижной точкой оператора G, т.е. $\bar{x}^* = G(\bar{x}^*)$. Следовательно, $\bar{x}^*$ соответствует единственному решению системы уравнений (20)-(21).

Принимая $\bar{x}_0 = \overline{O}$ в качестве нулевого приближения, из формул (24)-(25) получим решение системы уравнений (20)-(21) в первом приближении

$$p_{0,1}(\xi) = k_0\xi + v_0\,, \ (-1 \le \xi \le 1), \quad P_{0,1} = 0\,, \quad M_{0,1} = 0\,. \qquad (26)$$

Учитывая (24)-(26), получим решение системы (20)-(21) во втором приближении:

$$p_{0,2}(\xi) = \int_{-1}^{1} [H_0(\xi,\eta) - U_0(\xi-\eta)] \cdot (k_0\eta + v_0)^m d\eta + k_0\xi + v_0\,, \ (-1 \le \xi \le 1) \qquad (27)$$

$$P_{0,2}=\int_{-1}^{1}\left(k_0\xi+\mathrm{v}_0\right)^m d\xi\,,\qquad M_{0,2}=\int_{-1}^{1}\left(k_0\xi+\mathrm{v}_0\right)^m \xi d\xi\,. \tag{28}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.
2. Горячева И.Г. Плоские и осесимметричные контактные задачи для шероховатых упругих тел // ПММ. 1979. Т.43. Вып.1. С.99 -105.
3. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
4. Трикоми Ф. Интегральные уравнения. М.: ИЛ, 1960. 300 с.
5. Мхитарян С.М., Шекян Л.А. Плоская контактная задача для двух шероховатых твердых тел, изготовленых из степенно упрочняющихся материалов // Изв. АН АрмССР. Механика. 1977. Т.30. №3. С.15–32.
6. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 360с.
7. Амирбекян А.Н., Мкртчян М.С., Мхитарян С.М., Шекян Л.А. О контактной задаче изгиба балки конечной длины на упругой полуплоскости с учётом сдвигающих сил в её срединной линии. //Изв. НАН Армении. Механика. 2014. Т.67. №1. С.6-21.
8. Амирбекян А.Н., Мктрчян М.С., Шекян А.Л., Шекян Л.А. Изгиб двух одинаковых балок на упругой полосе с учётом сжимающих или растягивающих осевых сил // Труды 8-ой межд. конф. «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред». Горис-Степанакерт, 2014. С.48-52.

Сведения об авторах:

Григорян Марине Самвеловна – канд. физ.-мат. наук, асистент Национального университета архитектуры и строительства Армении
Тел.: (+37491) 639758, **E-mail:** gmarinchka@mail.ru

Мкртчян Мушег Сережаевич – канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института механики НАН РА
Тел.: (+37410) 431652, (+37498) 801956, **E-mail:** muscheg-mkrtchyan@rambler.ru

Шекян Лаврентий Арамович – докт. физ.-мат. наук, доцент Национального политехнического университета Армении
Тел.: (+37410) 398901; (+37499) 283440; **E-mail:** lshekyan@mail.ru

ЧАСТОТЫ ЗАПИРАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ ПРИ ТЕЧЕНИИ ГАЗОЖИДКОСТНОЙ СМЕСИ В ЗАМКНУТОМ КАНАЛЕ С ЧЕРЕДУЮЩИМСЯ ПРОБКАМИ

Григорян Ш.А., Манукян С.М., Оганян Г.Г., Саакян С.Л.

Определены возбуждающие периодическую волну частоты, при которых волна не распространяется. Для разных стадий формирования стационарного снарядного режима использованы дисперсионные уравнения, описывающие связи между волновым числом всей ячейки и локалными волновыми числами пробок. В качестве примера рассмотрены системы из двух пробок водовоздушной смеси.

Пусть в замкнутом канале бесконечной длины с абсолютно жёсткими стенками течёт бесстолкновительная монодисперсная смесь жидкости с пузырьками калорически совершенного газа. Эффектами межфазного теплообмена, трения, пульсационного движения пузырьков пренебрегаются. Поступательное движение пузырьков относительно жидкости отсутствует (односкоростная модель). Распространение волны давления в принятой модели течения смеси описывается линейным уравнением типа Буссинеска. Возмущённые скорости удовлетворяют линейным уравнениям количества движения [1,2].

При течении смеси в замкнутом канале образуется снарядный режим [1,3], наблюдаемый в экспериментах [3]. Полностью сформировавшийся режим характеризуется строго выраженной дискретной структурой из чередующихся пробок жидкости и газа. Полагается, что такая структура периодически повторяется, вследствие чего будет рассматриваться система из двух пробок, образующих элементарную ячейку. На линии раздела сред (пробок) давление и скорости частиц непрерывны, а на линиях раздела ячейки выполняются условия их квазипериодичности [4]. Методами, изложенными в [5], получены дисперсионные уравнения для разных стадий формировнаия снарядного режима. Они описывают разные зависимости волнового числа Блоха всей ячейки от локальных волновых чисел в пробках.

Волна, падающая из какой-либо пробки, по достижении конца границы последующей пробки может полностью отразиться от неё и дальнейшего распространения не происходит. Требуется определить те значения возбуждающих частот, при которых волна не распространяется и, тем самым, выявить диапазоны частот непропускания (запирания), называемыми также диапазонами среза.

1. Начало зарождения. Первая пробка наполнена газожидкостной смесью с малым объёмным газосодержанием β_1, а вторая – с более высоким содержанием газа β_2. Идеализированная схема режима представлена на рис.1.

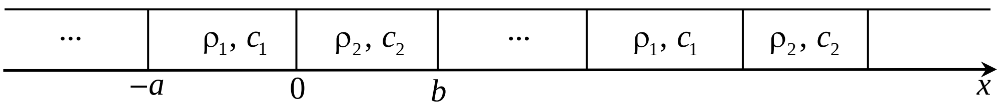


Рис.1

Дисперсионное уравнение записывается в форме:

$$\cos qL = \cos\left(\frac{\omega_1}{c_1}a\right)\cos\left(\frac{\omega_2}{c_2}b\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2}\frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1}\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)\sin\left(\frac{\omega_1}{c_1}a\right)\sin\left(\frac{\omega_2}{c_2}b\right) \qquad (1.1)$$

$$\omega_i = \omega\left[1-\left(1-\beta_i\right)\frac{\omega^2}{\omega_{ar}^2}\right]^{-1/2}, \quad \omega_{ar} = \sqrt{\frac{3\gamma P_0}{\rho_{10}R_0^2}}, \quad c_i = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_{10}\beta_i}}, \quad \rho_i = \left(1-\beta_i\right)\rho_{10} + \beta_i\rho_{20}, \quad i = 1,2$$

Здесь q – волновое число Блоха, $L = a + b$, a и b – ширины пробок, ω – возбуждающая частота волны, ω_{ar} – резонансная частота Миннаерта, c_i – невозмущённые скорости звука в пробках, ρ_i – плотности смесей, P_0, R_0 и ρ_{10}, ρ_{20} – соответственно, давление, радиус пузырька и плотности жидкости, газа в равновесном состоянии. Индексы 1 и 2 отнесены к параметрам смесей в первой и второй пробках. В дальнейшем будем полагать $a = (1-\alpha)L, \quad b = \alpha L.$

В качестве примера рассматриваются водовоздушные смеси с исходными параметрами.

$$P_0 = 0.1\text{МПа}, \; R_0 = 1\cdot 10^{-4}\text{м}, \; L = 2\text{м}, \; \gamma = 1.4, \; \alpha = 0.1 \tag{1.2}$$

$$\beta_1 = 0.005 \;\text{ и }\; 0.05, \; \beta_2 = 0.15 \tag{1.3}$$

$$\beta_1 = 0.005, \; \beta_2 = 0.15 \;\text{ и }\; 0.2 \tag{1.4}$$

При построении графиков тонкие и утолщённые кривые будут отнесены, соответственно, к меньшим и большим значениям варьируемых параметров.

На рис.2а представлены графики численных расчётов уравнения (1.1) с данными (1.2), (1.3). При фиксированном β_2 с увеличением β_1 значения частот запирания убывают во всех диапазонах среза, как и их ширины.

Рис.2б отнесён к исходным данным (1.2), (1.4). При фиксированном β_1 с увеличением β_2 частоты во всех диапазонах по величине также убывают, однако, ширина главного из них увеличивается.

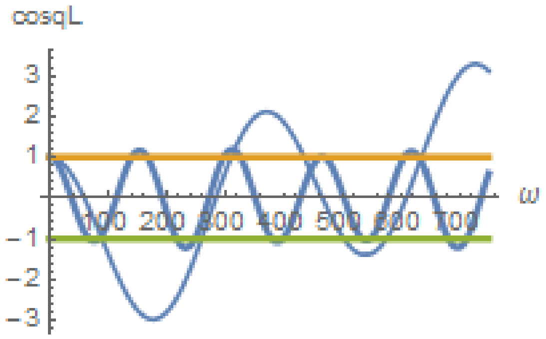


Рис.2а.

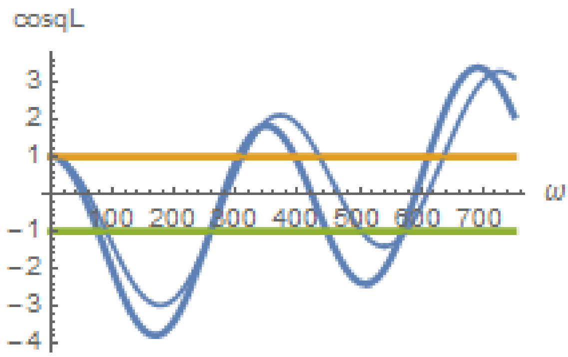


Рис.2б.

Выясним влияние параметра α на дискретную картину распространения волны при фиксированных газосодержаниях $\beta_1 = 0.005$, $\beta_2 = 0.15$ и данных (1.2).

На рис.3 показана зависимость диапазонов среза от значений $\alpha = 0.1$ и $\alpha = 0.4$. С увеличением α частоты запирания убывают во всех диапазонах, как и их ширины.

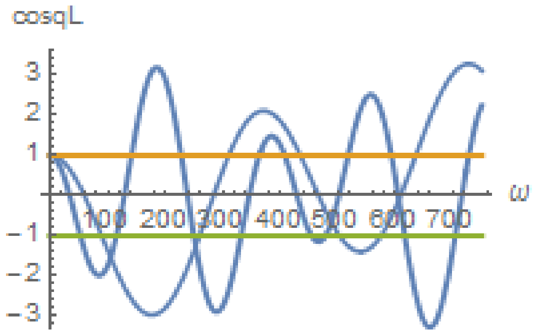


Рис. 3.

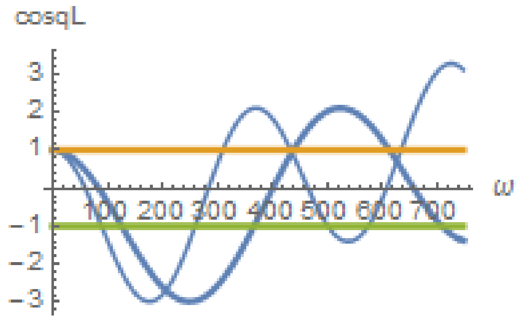


Рис.4.

Рис.4 иллюстрирует влияние давления P_0 на значения частот запирания. При фиксированных $\beta_1 = 0.005$, $\beta_2 = 0.15$ и (1.2), однако, с $P_0 = 0.1\text{МПа}$ и $P_0 = 0.2\text{МПа}$ показаны графики решений уравнения (1.1). Видно, что с увеличением P_0 частоты во всех диапазонах среза, как и их ширины, возрастают по величине.

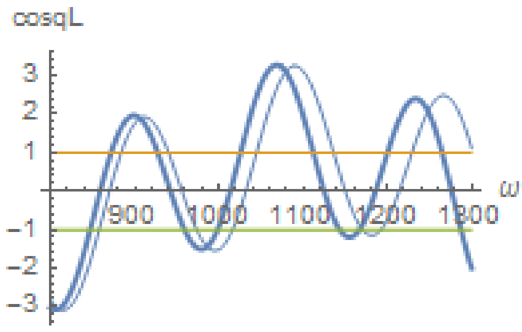


Рис.5.

С переходом от мелких пузырьков $R_0 = 5\cdot10^{-4}$м к весьма крупным $R_0 = 2\cdot10^{-3}$м при фиксированных параметрах $P_0 = 0.025$МПа, $\beta_1 = 0.005$, $\beta_2 = 0.15$ вычисления указывают, что при малых и умеренно больших значениях ω увеличение R_0 никак не влияет на первые диапазоны частот запирания. Оно проявляется при более высоких частотах и малых значениях P_0, что отражено на фиг.5. Для более высоких P_0 эффект увеличения R_0 заметен при очень высоких частотах запирания, диапазоны которых уменьшаются.

2. Заключительная стадия зарождения. Схема дискретного снарядного режима дана на рис.6.

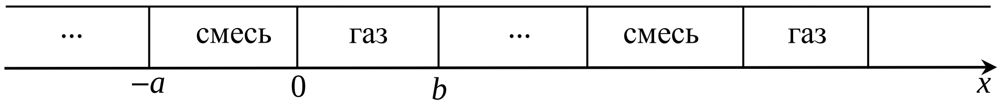


Рис.6

Первая пробка наполнена водовоздушной смесью с очень малым содержанием воздуха β_1, а вторая – собственно, газом. Дисперсионное уравнение записывается в виде

$$\cos qL = \cos\left[\frac{\omega_1}{c_1}a\right]\cos\left(\frac{\omega}{c_2}b\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2}\frac{\omega_1}{\omega} + \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1}\frac{\omega}{\omega_1}\right)\sin\left[\frac{\omega_1}{c_1}a\right]\sin\left(\frac{\omega}{c_2}b\right) \tag{2.1}$$

$$c_1 = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_{10}\beta_1}},\quad c_2 = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_{20}}},\quad \rho_1 = (1-\beta_1)\rho_{10} + \beta_1\rho_{20},\quad \rho_2 = \rho_{20},\quad a = (1-\alpha)L,\quad b = \alpha L$$

где величина ω_1 определена в (1.1).

При проведении численных расчётов и построении графиков выясняется, что в последних визуально не проявляются дискретные диапазоны частот запирания и поэтому они будут выписываться.

Влияние газосодержания β_1 и параметра α на значения частот запирания в диапазонах среза выявляется из анализа данных табл.1, полученных из решений уравнения (2.1) с указанными исходными параметрами

Таблица 1

β_1	ω, гц $\left(P_0 = 0.1\text{МПа},\ R_0 = 4\cdot10^{-3}\text{м},\ \gamma = 1.4,\ L = 2\text{м}\right)$		
	$\alpha = 0.7$		
0.001 0.005	[26, 738] [26, 733]	[740, 1475] [739, 864]	[1478, 1830] [870, 1474]
$\alpha = 0.8$			
0.001	[30, 645]	[648, 1291]	[1293,1937]

С увеличением β_1 и α частоты убывают в главных диапазонах среза, при этом их ширины также уменьшаются. В остальных с увеличением β_1 частоты вновь убывают, а с увеличением α могут и возрастать.

Влияние изменений исходного давления P_0 и размера пузырька R_0 на числовые диапазоны запирания (диапазоны среза) можно выяснить через анализ данных табл.2, построенной аналогично табл.1.

Таблица 2

P_0, МПа	ω, гц $\left(\beta_1 = 0.001,\ \ \alpha = 0.8,\ \ \gamma = 1.4,\ \ L = 2\text{м}\right)$		
	$R_0 = 1\cdot 10^{-4}$м		
0.025	[15, 529]	[531, 1059]	[1061, 1468]
0.05	[21, 585]	[586, 1168]	[1171, 1754]
0.1	[30, 645]	[648, 1291]	[1294, 1937]
$R_0 = 7\cdot 10^{-3}$м			
0.025	[15,529]	[531,1036]	[1039,1060]
0.05	[21,585]	[586,1169]	[1171,1468]
0.1	[30,645]	[648,1291]	[1294,1937]

При фиксированных R_0 с увеличением P_0 частоты во всех диапазонах и ширины главных из них возрастают по величине. При фиксированных P_0 с увеличением R_0 частоты в главных диапазонах не меняются. Эффект увеличения проявляется лишь при малых давлениях и высоких частотах, значения которых убывают.

Обобщая полученные результаты на случаи других исходных параметров. приходим к заключению, что при фиксированных прочих параметрах значения частот запирания:

– с увеличением β_1 уменьшаются во всех диапазонах, как и их ширины,

– с увеличением α строго убывают лишь в главных диапазонах,

– с увеличением P_0 возрастают во всех диапазонах, как и ширины главных из них,

– с увеличением R_0 не меняются в главных диапазонах. Эффект увеличения проявляется в остальных диапазонах и то для их высоких и сверхвысоких значений,

– с увеличением L убывают во столько же раз.

3. Сформировавшийся режим. Схема дискретного стационарного потока приведена на рис.3.

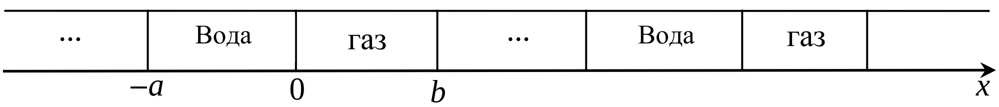


Рис.7

Здесь первая пробка наполнена водой, а вторая – воздухом. Дисперсионное уравнение имеет вид:

$$\cos qL = \cos\left(\frac{\omega}{c_1}a\right)\cos\left(\frac{\omega}{c_2}b\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} + \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1}\right)\sin\left(\frac{\omega}{c_1}a\right)\sin\left(\frac{\omega}{c_2}b\right) \qquad (3.1)$$

где c_1, c_2 – невозмущённые скорости звука в воде и газе, ρ_1 и ρ_2 – плотности воды и газа.

В табл.3 приведены значения частот запирания, полученные путем численного решения уравнения (3.1) с указанными в ней исходными параметрами.

Таблица 3

α	ω, гц		
	$P_0 = 0.1$ МПа, $\rho_1 = 998 \frac{кг}{м^3}$, $\rho_2 = 1.29 \frac{кг}{м^3}$, $c_1 = 1500 \frac{м}{с}$		
0.1	[40,2617]	[2619,5150]	[5170,7853]
0.4	[25,1292]	[1293,2584]	[2585,3866]
	$P_0 = 0.2$ МПа, $\rho_1 = 998 \frac{кг}{м^3}$, $\rho_2 = 2.12 \frac{кг}{м^3}$, $c_1 = 1500 \frac{м}{с}$		
0.1	[56,2617]	[2619,5229]	[5237,5705]
0.4	[35,1426]	[1428,2852]	[2854,3923]

При фиксированных исходных параметрах с увеличением α частоты во всех диапазонах, как и ширины главных из них, убывают по величине, а с увеличением P_0 частоты в главных диапазонах, наоборот, возрастают.

ЛИТЕРАТУРА

1. Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Шрейбер И.Р. Волновая динамика газо и парожидкостных сред. М.: Энергоатомиздат, 1990. 248с.
2. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч.1. М.: Наука, 1987. 464с.
3. Martin C.S., Padmanabhan M. Pressure Pulse Propagation in Two–Component Slug Flow //Trans. of the ASME, vol.101, №1. 1979. Русск. перевод – Распространение импульса давления в двухкомпонентном снарядном потоке. Теорет. основы инж. расчётов. 1979. Т.101. №1. С.161-171.
4. Бриллюэн А., Пароди М. Распространение волн в периодических структурах. М.: ИЛ, 1959. 448с.
5. Басс Ф.Г., Булгаков А.А., Тетервов А.П. Высокочастотные свойства полупроводников со сверхрешётками. М.: Наука, 1989. 288с.

Сведения об авторах:

Григорян Шушаник Акоповна – доцент кафедры «Математика и матем. моделирования» Российско-Армянского (Славянского) университета
Тел.: (+37494) 284-718. **E-mail:** grig-shushanik@rambler.ru

Манукян Сусанна Микаеловна – доцент кафедры «Численный анализ и матем. моделирование» Ереванского Гос.университета
Тел.: (+37491) 469-915. **E-mail:** manukyan.susana@gmail.com

Оганян Гагик Гришаевич – ведущий научный сотрудник Института механики НАН РА.
Тел.: (+37493) 946-947. **E-mail:** oganyangagik@gmail.com

Саакян Саак Левонович – ассистент кафедры «Численный анализ и матем. моделирование» Ереванского Гос.университета
Тел.: (+37477) 002-408. **E-mail:** ssahakyan@ysu.am

ДИФРАКЦИЯ ПОВЕРХНОСТНОЙ ЭЛЕКТРОУПРУГОЙ ВОЛНЫ СДВИГА НА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ТРЕЩИНЕ В СОСТАВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Григорян Э.Х., Агаян К.Л., Джилавян С.А., Казарян А.А.

Рассматривается задача дифракции поверхностной электроупругой волны сдвига в пространстве, состоящем из диэлектрического и пьезоэлектрического полупространств. Между двумя полупространствами существует полубесконечная трещина, а на остальной части контактной плоскости имеют место условия полного электромеханичес-кого контакта. Используя интегральное преобразование Фурье, задача дифракции распространяющейся волны сводится к решению функционального уравнения типа Римана на действительной оси, которое решается методом факторизации. Дифракция поверхностной электроупругой сдвиговой волны на полубесконечной трещине приводит к распространению локализованных волн, обусловленных пьезоэффектом и наличием полубесконечной трещины.

Составное электроупругое пространство отнесено к прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$, при этом, среда, обладающая свойством пьезоэффекта, занимает полупространство $y>0$, а упругая диэлектрическая среда – полупространство $y<0$. Пьезоэлектрическое полупространство-пьезоэлектрик гексагональной симметрии класса 6mm с совпадающей с осью Oz главной осью кристалла, в плоскости Oxz при $x<0$ без акустического контакта граничит с диэлектрическим полупространством. В этой же плоскости контакта при $x>0$ ($y=0, -\infty<z<\infty$) между полупространствами осуществляется электромеханический полный контакт. Можно принять, что рассматриваемая составная среда имеет полубесконечную трещину в плоскости Oxz при $x<0$.

Из бесконечности ($x<0$) в пьезоэлектрическом полупространстве по направлению оси Ox распространяется электроупругая поверхностная сдвиговая волна, обусловленная наличием пьезоэффекта в полупространстве $y>0$ [1]

$$\begin{aligned} u_z^{\infty}(x,y,t) &= w_{\infty}(x,y)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}, \\ \Phi^{\infty}(x,y,t) &= \Phi_{\infty}(x,y)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}, \end{aligned} \tag{1}$$

а в диэлектрическом полупространстве ($y<0$)

$$\Phi_1^{\infty}(x,y,t) = \Phi_{1\infty}(x,y)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}, \tag{2}$$

здесь ω – частота колебаний, t – параметр времени.

Амплитудные составляющие перемещения и электрических потенциалов имеют вид:

$$\begin{aligned} w_{\infty}(x,y) &= e^{-\sqrt{\sigma_1^2-k^2}\,y} e^{i\sigma_1 x}, \quad y>0 \\ \Phi_{\infty}(x,y) &= \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\left(e^{-\sqrt{\sigma_1^2-k^2}\,y} - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0+\varepsilon_{11}} e^{-\sigma_1 y} \right) e^{i\sigma_1 x}, \quad y>0 \\ \Phi_{1\infty}(x,y) &= \frac{e_{15}}{\varepsilon_0+\varepsilon_{11}} e^{\sigma_1 y} e^{i\sigma_1 x}, \quad y<0 \end{aligned} \tag{3}$$

В этих соотношениях e_{15}, ε_{11} – пьезоэлектрическая и диэлектрическая постоянные пьезоэлектрика, ε_0 – диэлектрическая постоянная среды $y<0$, σ_1 – волновое число падающей поверхностной волны [2,3]

$$\sigma_1 = \frac{k(\varepsilon_0+\varepsilon_{11})(1+\chi)}{\sqrt{(1+\chi)^2(\varepsilon_0+\varepsilon_{11})^2 - \varepsilon_0^2\chi^2}} > k, \tag{4}$$

$k=\omega/c$, $c=\sqrt{c_{44}(1+\chi)/\rho}$, c_{44} – упругая постоянная пьезоэлектрика, а ρ – плотность, $\chi = e_{15}^2/\varepsilon_{11}c_{44}$ – коэффициент электромеханической связи.

Рассматривается обусловленная наличием полубесконечной трещины дифракция сдвиговой электроупругой волны (1), (2) в составном пространстве пьезоэлектрик-диэлектрик. Среда находится в условиях антиплоской деформации. Задача заключается в определении элекроупругого волнового поля в полупространствах и, учитывая гармоническую зависимость от времени (временной множитель $e^{-i\omega t}$) всех составляющих волнового поля, решается в амплитудах. Для определения амплитудных функций перемещений $w(x,y), w_1(x,y)$ и электрических потенциалов $\Phi(x,y), \Phi_1(x,y)$ в полупространствах имеем следующие уравнения [1,2,3]:

$$\Delta w + k^2 w = 0\,, \quad y > 0$$

$$\varepsilon_{11}\Delta\Phi + e_{15}k^2 w = 0\,, \quad y > 0 \tag{5}$$

$$\Delta w_1 + k_1^2 w_1 = 0\,, \quad y < 0$$

$$\Delta\Phi_1 = 0\,, \quad y < 0 \tag{6}$$

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}\,,\ k_1 = \frac{\omega}{c_1}\,,\ c_1 = \sqrt{\frac{c_{44}^{(1)}}{\rho_1}}\,,$$

$c_{44}^{(1)}$ – упругая постоянная сдвига диэлектрической среды, а ρ_1 – плотность.

Полупространства контактируют по плоскости $y = 0$, следовательно, решения уравнений (5), (6) должны удовлетворять условиям безакустического контакта при $x < 0$ и условиям полного контакта при $x > 0$. Для характеристических функций электрического поля имеют место условия непрерывности по плоскости $y = 0$. Амплитуды электрических потенциалов и составляющих векторов электрических индукций $D_2(x,y)$, $\mathrm{D}_2^{(1)}(x,y)$ удовлетворяют следующим контактным условиям:

$$\Phi(x,+0) = \Phi_1(x,-0)\,,\ D_2(x,+0) = \mathrm{D}_2^{(1)}(x,-0)\,,\ -\infty < x < \infty \tag{7}$$

где $\quad D_2(x,y) = \mathrm{e}_{15}\dfrac{\partial w}{\partial y} - \varepsilon_{11}\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\,,\ y > 0$

$$D_2^{(1)}(x,y) = -\varepsilon_0\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\,,\ y < 0 \tag{8}$$

На берегах трещины амплитуды напряжений в пьезоэлектрике и в диэлектрике $\sigma_{yz}(x,y)$, $\sigma_{yz}^{(1)}(x,y)$ удовлетворяют условиям

$$\sigma_{yz}(x,+0) = 0\,,\ \sigma_{yz}^{(1)}(x,-0) = 0 \quad \text{при} \quad x < 0\,, \tag{9}$$

разница перемещений пока неопредел/нная величина

$$w(x,+0) - w_1(x,-0) = w_0(x) \quad \text{при} \quad x < 0 \tag{10}$$

Контактные условия между полупространствами при $x > 0$ примут вид

$$\sigma_{yz}(x,+0) = \sigma_{yz}(x,-0) = q_0(x) \quad \text{при} \quad x > 0\,,$$

$$w(x,+0) = w_1(x,-0) \quad \text{при} \quad x > 0 \tag{11}$$

Для напряжений имеем формулы:

$$\sigma_{yz}(x,y) = \mathrm{c}_{44}\frac{\partial w}{\partial y} + e_{15}\frac{\partial\Phi}{\partial y} \quad \text{при} \quad y > 0\,,$$

$$\sigma_{yz}^{(1)}(x,y) = \mathrm{c}_{44}^{(1)}\frac{\partial w_1}{\partial y} \quad \text{при} \quad y < 0 \tag{12}$$

Введём функции

$$c_{44}q_+(x) = \mathrm{q}_0(x)\theta(x)\,,\ \psi_-(x) = w_0(x)\theta(-x)\,, \tag{13}$$

где $\theta(x)$ – известная функция Хевисайда, т.е. $q_+(x) = 0$ при $x < 0$, $\psi_-(x) = 0$ при $x > 0$. $\mathrm{c}_{44}\, q_+(x)$ – напряжение при $y = 0$, $\psi_-(x)$ предстаяляет разницу перемещений на $y = \pm 0$.

Условия на контактной плоскости (9), (10), (11) представляются в виде

$$c_{44}\frac{\partial w}{\partial y}+e_{15}\frac{\partial \Phi}{\partial y}=c_{44}^{(1)}\frac{\partial w_1}{\partial y}=c_{44}q_+(x)\quad \text{при}\quad y=0,$$

$$w(x,+0)-w_1(x,-0)=\psi_-(x) \tag{14}$$

Задача определения электроупругого волнового поля в составном пространстве при дифракции поверхностной электроупругой волны сдвига (1),(2),(3) на полубесконечной трещине сведена к решению уравнений (5), (6) при условиях (7), (14).

Для решения поставленной задачи применяем интегральное преобразование Фурье, и для преобразований искомых функций получим:

$$\overline{w}(\sigma,y)=A(\sigma)\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\sigma^2-k^2}\,y}+2\pi e^{-\sqrt{\sigma_1^2-k^2}\,y}\delta(\sigma+\sigma_1),\ y\ge 0$$

$$\overline{\Phi}(\sigma,y)=\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}A(\sigma)\overline{\Phi}_0(\sigma,y)+2\pi\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\Phi_0(y)\delta(\sigma+\sigma_1),\ y\ge 0 \tag{15}$$

$$\overline{w}_1(\sigma,y)=\frac{c_{44}\overline{q}_+(\sigma)}{c_{44}^{(1)}\sqrt{\sigma^2-k_1^2}}e^{\sqrt{\sigma^2-k_1^2}\,y},\ y\le 0$$

$$\overline{\Phi}_1(\sigma,y)=\frac{e_{15}}{\varepsilon_0+\varepsilon_{11}}A(\sigma)e^{|\sigma|y}+2\pi\frac{e_{15}}{\varepsilon_0+\varepsilon_{11}}e^{\sigma_1 y}\delta(\sigma+\sigma_1),\ y\le 0, \tag{16}$$

здесь

$$\overline{\Phi}_0(\sigma,y)=e^{-\sqrt{\sigma^2-k^2}\,y}-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0+\varepsilon_{11}}e^{-|\sigma|y},\ y\ge 0$$

$$\Phi_0(y)=\overline{\Phi}_0(\sigma_1,y), \tag{17}$$

$$A(\sigma)=\overline{w}_1(\sigma,0)+\overline{\psi}_-(\sigma)-2\pi\delta(\sigma+\sigma_1),$$

$\delta(\sigma)$ – функция Дирака, $\overline{\mathrm{q}}_+(\sigma),\ \overline{\psi}_-(\sigma)$ – преобразования Фурье неизвестных функций $\mathrm{q}_+(x),\ \psi_-(x)$, $\gamma(\sigma)=\sqrt{\sigma^2-k^2}\to|\sigma|$, $\gamma_1(\sigma)=\sqrt{\sigma^2-k_1^2}\to|\sigma|$ при $|\sigma|\to\infty$, $\sqrt{\sigma^2-k^2}=-i\sqrt{k^2-\sigma^2}$, $\sqrt{\sigma^2-k_1^2}=-i\sqrt{k_1^2-\sigma^2}$, т.е. действительная ось комплексной плоскости $\alpha=\sigma+i\tau$ обходит точки ветвления функций $\gamma(\sigma),\ \gamma_1(\sigma)$ $\sigma=-k$, $\sigma=-k_1$ сверху, а точки $\sigma=k$, $\sigma=k_1$ – снизу [2,3].

Для всех искомых функций принимается:

$$\overline{f}(\sigma,y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,\mathrm{e}^{i\sigma x}\,dx,\ f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{f}(\sigma,y)\,\mathrm{e}^{-i\sigma x}\,d\sigma$$

Применив преобразование Фурье к условиям (7), (14), с помощью формул (15), (16), для определения функций $\overline{q}_+(\sigma),\overline{\psi}_-(\sigma)$ получим функциональное уравнение

$$\overline{q}_+(\sigma)+\mathrm{c}_0\sqrt{\sigma^2-k^2}K(\sigma)\big(\overline{\psi}_-(\sigma)-2\pi\delta(\sigma+\sigma_1)\big)=0, \tag{18}$$

где $K(\sigma)=\dfrac{c_{44}^{(1)}\sqrt{\sigma^2-k_1^2}K_1(\sigma)}{c_0\sqrt{\sigma^2-k^2}K_2(\sigma)}$, $\quad K(\sigma)\to 1$ при $|\sigma|\to\infty$,

$$K_1(\sigma)=(1+\chi)\sqrt{\sigma^2-k^2}-\frac{\varepsilon_0\chi|\sigma|}{\varepsilon_0+\varepsilon_{11}},$$

$$K_2(\sigma)=c_{44}\,\mathrm{K}_1(\sigma)+\mathrm{c}_{44}^{(1)}\sqrt{\sigma^2-k_1^2},$$

$$c_0=\frac{c_{44}^{(1)}\varepsilon_1}{c_{44}\varepsilon_1+c_{44}^{(1)}},\ \varepsilon_1=1+\chi\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_0+\varepsilon_{11}}$$

Очевидно, что, в точках $\sigma = \pm\sigma_1$ функция $K_1(\sigma)$ имеет нули, и $\sigma = \sigma_1$ – единственный положительный корень уравнения $K_1(\sigma) = 0$. Для определённости принимая $k_1 > k$, доказывается, что уравнение $K_2(\sigma) = 0$ имеет единственный положительный корень $\sigma = \sigma_2$, если только [3]

$$\sqrt{1 - \frac{k^2}{k_1^2}} < \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0 + \varepsilon_{11}} \frac{\chi}{1+\chi} \tag{19}$$

Отметим, что при $k_1 < k$, $\sigma = \sigma_2$ единственный положительный корень уравнения $K_2(\sigma) = 0$, если

$$\sqrt{1 - \frac{k^2}{k_1^2}} < \frac{c_{44}}{c_{44}^{(1)}} \frac{\varepsilon_0 \chi}{\varepsilon_0 + \varepsilon_{11}}.$$

Принимается, что в данной задаче типа Римана (18) действительная ось обходит не только точки ветвления $\pm k, \pm k_1$, но и точки $\sigma = \sigma_1, \sigma = \sigma_2$ – снизу, а точки $\sigma = -\sigma_1, \sigma = -\sigma_2$ – сверху, обеспечивая условия уходящей волны. Если имеет место (19), то доказывается, что $\sigma_1 > \sigma_2 > k_1 > k$. Функциональное уравнение (18), имея в виду представление

$$2\pi i \delta(\sigma + \sigma_1) = (\sigma + \sigma_1 - i0)^{-1} - (\sigma + \sigma_1 + i0)^{-1}, \tag{20}$$

решается, используя методику, развитую в [4,5]. Решения строятся, факторизируя функцию $K(\sigma)$

$$\bar{q}_+(\sigma) = \frac{c_0 \sqrt{\sigma_1 + k}\sqrt{\sigma + k}\, K^+(\sigma) K^+(\sigma_1)}{\sigma + \sigma_1 + i0}, \tag{21}$$

$$\bar{\Psi}_-(\sigma) = -\frac{\sqrt{\sigma_1 + k}\, K^+(\sigma_1)}{\sqrt{\sigma - k}\, K^-(\sigma)(\sigma + \sigma_1 - i0)}, \tag{22}$$

$K^+(\sigma), K^-(\sigma)$ – граничные значения функций $K^+(\alpha), K^-(\alpha)$, $\alpha = \sigma + i\tau$, и функции $K^\pm(\alpha)$ регулярны и не имеют нулей при $\operatorname{Im}\alpha > 0$ и $\operatorname{Im}\alpha < 0$, соответственно, при этом, $K^\pm(\alpha) \to 1$ при $|\alpha| \to \infty$ в своих областях регулярности [2-5].

Имея решения функционального уравнения (21), (22), после обратного преобразования Фурье можно найти все составляющие волнового поля в пространстве.

Рассматривая поле перемещений в составной среде пьезоэлектрик-диэлектрик, находим, что в пьезоэлектрическом полупространстве при $x < 0$ сдвиговое волновое поле состоит из падающей поверхностной волны (1), дифрагированной затухающей объёмной волны и поверхностной-локализованной у граничной поверхности $y = 0$ волны, распространяющейся со скоростью падающей волны ω/σ_1

$$w_n(x, y) = A_1 e^{-\sqrt{\sigma_1^2 - k^2}\, y} e^{-i\sigma_1 x}, \; y > 0 \tag{23}$$

где $\quad A_1 = -\dfrac{c_0 i(\sigma_1 + k)(\mathrm{K}^+(\sigma_1))^2}{2\lambda_1 \sigma_1}$,

$$\lambda_1 = \frac{2(1+\chi)^2(\varepsilon_0 + \varepsilon_{11})^2 - \varepsilon_0^2 \chi^2}{\varepsilon_0 \chi(\varepsilon_0 + \varepsilon_{11})} = \frac{(\sigma_1^2 + k^2)(1+\chi)}{\sigma_1 \sqrt{\sigma_1^2 - k^2}}$$

В составном полупространстве $x > 0$, кроме дифрагированных объёмных электроупругих волн, распространяются, если только среда допускает такое распространение (19), локализованые у контактной плоскости между пьезоэлектрическим и диэлектрическим полупространствами, сдвиговые интерфейсные волны – обусловленные пьезоэффектом в полупространстве $y > 0$ и дифракцией падающей электроупругой волны сдвига

$$w_*(x,y)=A_2 e^{-\sqrt{\sigma_2^2-k^2}\,y}e^{i\sigma_2 x},\quad y\ge 0 \tag{24}$$

$$w_{1*}(x,y)=A_2 e^{\sqrt{\sigma_2^2-k_1^2}\,y}e^{i\sigma_2 x},\quad y\le 0 \tag{25}$$

где $A_2=\dfrac{\sqrt{\sigma_1+k}K^+(\sigma_1)\sqrt{\sigma_2^2-k_1^2}}{\lambda_2\sqrt{\sigma_2+k}(\sigma_1-\sigma_2)\mathrm{K}^+(\sigma_2)}$,

$$\lambda_2=(1+\chi)\frac{\sqrt{\sigma_2^2-k^2}}{\sigma_2}\frac{\sigma_2^2+k^2}{\sigma_2^2-k^2}\frac{c_{44}}{c_{44}^{(1)}}+\frac{\sqrt{\sigma_2^2-k_1^2}}{\sigma_2}\frac{\sigma_2^2+k_1^2}{\sigma_2^2-k_1^2},$$

и скорость распространения этих волн $-\omega/\sigma_2$ больше скорости падающей из бесконечности поверхностной волны ω/σ_1 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука,1982. 242 с.
2. Джилавян С.А., Казарян А.А. Дифракция плоской сдвиговой волны в пьезоэлектрическом полупространстве при полубесконечном металлическом слое в диэлектрике. //Изв. НАН Армении. Механика. 2015. Т.68. №1. С.45-57.
3. Григорян Э.Х., Джилавян С.А., Казарян А.А. Дифракция сдвиговой плоской волны на полубесконечной трещине в пространстве пьезоэлектрик-диэлектрик.// Труды VII межд. конф. «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред». Ереван: 2011. С.137-143.
4. Григорян Э.Х. Передача нагрузки от кусочно-однородной бесконечной накладки к упругой полуплоскости. // Учёные записки ЕГУ. 1979. № 3. С.29-34.
5. Агаян К.Л., Григорян Э.Х. Дифракция сдвиговой плоской электроупругой волны на полубесконечном электроде в пьезоэлектрическом пространстве с щелью. //Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. № 1. С.50-69.

Сведения об авторах:

Григорян Эдвард Хосровович – доктор физ.-мат. наук, профессор, глав. науч. сотр. Института механики НАН Армении. **Тел.:** (+374 10) 230-389.

Агаян Каро Леренцович – доктор физ.-мат. наук, вед. науч. сотр. Института механики НАН Армении. **Тел.:** (+374 91) 48-55-66.
E-mail: karo.aghayan@gmail.com.

Джилавян Самвел Акопович – кандидат физ.-мат. наук, доцент, кафедра механики, ЕГУ.
Тел.: (+374 91) 50-07-70. **E-mail:** samjilavyan@ysu.am.

Казарян Айказ Арменович – млад. науч. сотр. Института механики НАН Армении.
Тел.: (+374 96) 00-96-06. **E-mail:** haykazghazaryan@gmail.com.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЧНОСТИ ОБШИВКИ ПРИ ВЫРЫВЕ ЗАКЛЁПОК

Гришин В.И., Глебова М.А., Гусева Н.В.

Получены экспериментальные данные о величине усилия вырыва заклёпки с потайной головкой из образцов полимерного композиционного материала. Методом конечных элементов исследовано их напряжённое состояние. На основе сравнения результатов расчёта с данными эксперимента предложен деформационный критерий определения величины силы, необходимой для вырыва головки заклёпки из композитной обшивки.

При использовании предложенного критерия расширена область экспериментальных значений межслоевых напряжений, возникающих при вырыве головки заклепки из композита.

Для закрепления аэродинамических поверхностей на летательном аппарате от действия разряжённого воздушного потока, как правило, используются заклёпки либо потайные болты. При проектировании несущих элементов конструкции самолёта, состоящих из обшивки, приклёпанной к стрингерному набору либо к полкам нервюр крыла и оперения, необходимо знать величину разрушающих усилий, возникающих при вырыве головки заклёпки из обшивки от действия аэродинамического давления (q) на обшивку (рис.1).

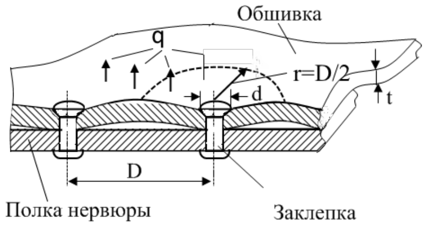


Рис.1. Схема заклёпочного ряда крепления обшивки к полке нервюры.

В работе предлагается расчётно-экспериментальный метод определения усилий вырыва крепёжных элементов из композиционной обшивки. На первом этапе в специальном приспособлении в результате испытаний получены значения максимальных усилий вырыва металлического болта, моделирующего заклёпку, из композитного образца при постоянном значении величины D. На основе анализа результатов испытаний и сравнением их с МКЭ-расчётом предложен деформационный критерий определения усилия вырыва крепежа, который был использован для прогнозирования усилия вырыва при переменном значении расстояния D между крепёжными элементами.

1.Методика испытаний. Объектом испытаний являлись изготовленные из полимерного композиционного материала пластины размером 320×40 мм с просверленными по нормали к их плоскости зенкованными отверстиями для установки крепежа диаметрами (d) 6,35 и 7,94 мм (всего 6 пластин, по 7 испытываемых отверстий в каждой). Номинальные толщины пластин (t) составляли 4.1, 4.92 и 6.56 мм. Материал крепежа – сталь: модуль упругости E=210 ГПа, коэффициент Пуассона ν=0,3. Рассмотрены пластины различной толщины, изготовленные из композиционного материала с укладкой $[\pm 45°/0/90]_n$, где n=5, 6, 8. Толщина монослоя t=0,205 мм, модули упругости E_{11}=120 ГПа, $E_{22}=E_{33}$=8 ГПа, модули сдвига G_{12}=5 ГПа, $G_{23}=G_{31}$=2,7 ГПа, ν_{12}=0,45, $\nu_{23}=\nu_{13}$=0,02. Общий вид образцов представлен на рис.2, а геометрические характеристики образцов и крепежа – в табл.1.

Таблица 1. Размеры образцов

№ пластины	Толщина образца, *t*, *мм*	Диаметр крепежа, *мм*	Диаметр головки крепежа, d, *мм*
1	4.1	6.35	10.54
2	4.1	7.94	13.35
3	4.92	6.35	10.54
4	4.92	7.94	13.35
5	6.56	6.35	10.54
6	6.56	7.94	13.35

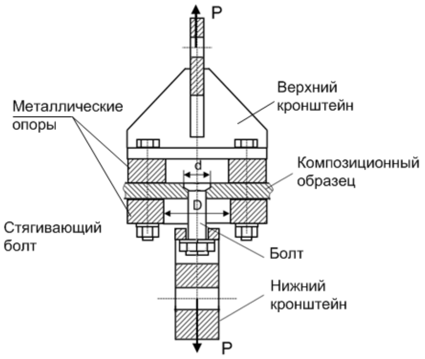


Рис. 3. Схема приспособления для испытаний

Рис. 2. Образцы с отверстиями для установки крепежа

Для подтверждения отсутствия внутренних технологических дефектов все образцы перед испытаниями были подвергнуты неразрушающему контролю.

Испытания проводились на универсальной электромеханической испытательной машине LFM-100, обеспечивающей точность измерения нагрузки ±0,5 % от текущей величины в специальном приспособлении. Схема приспособления с установленным в нём композиционным образцом приведена на рис.3. Композиционный образец зажимается между двух стальных опор с помощью стяжных болтов, связывающих опоры с верхним и нижним кронштейнами. Нижний кронштейн крепится в гидрозахват, а к верхнему прикладывается растягивающая приспособление сила P. С увеличением силы P головка болта, контактирующая с зенкованной поверхностью композитного образца, сначала проминает композит, а затем происходит прорыв отверстия. Испытания проводились до полного прорыва отверстия головкой болта. Каждый образец испытывался 7 раз (по количеству зенкованных отверстий).

2.Результаты испытаний. С увеличением нагрузки разрушение в образцах начинается от смятия слоёв композита в области контакта зенковки отверстия с головкой болта и оканчивается полным прорывом отверстия. Типовая диаграмма деформирования отверстий "P-Δl", здесь P – прикладываемая нагрузка, а Δl – перемещение верхнего кронштейна приспособления, приводится на рис.4. Результаты испытаний на вырыв крепежа из обшивки приведены в табл.2.

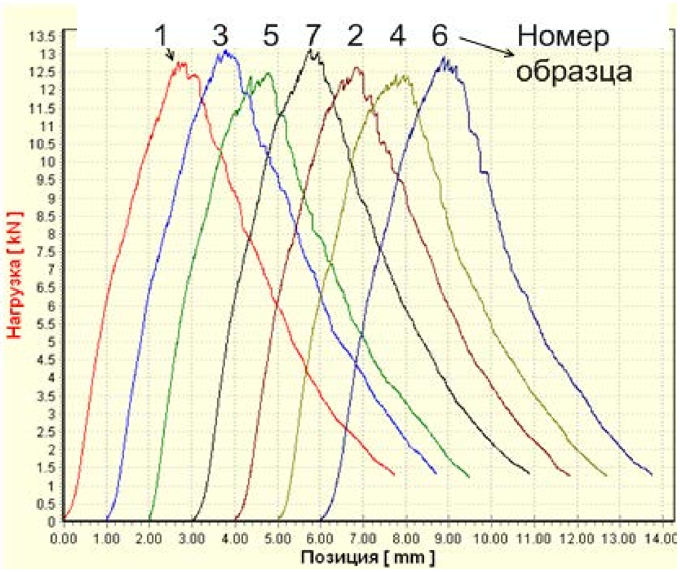


Рис. 4. Диаграммы деформирования "P-Δl" отверстий в образцах

Таблица 2. Результаты испытаний на вырыв крепежа из обшивки

Номер пластины	Номер образца						
	1	2	3	4	5	6	7
	Разрушающая нагрузка P_{max}, кН						
1	6,87	6,50	6,90	6,72	6,80	6,84	6,87
2	9,65	9,15	9,54	9,60	9,48	9,33	8,98
3	8,99	9,16	9,37	9,06	9,32	9,03	9,65
4	12,77	12,64	13,13	12,44	12,47	12,93	13,15
5	14,28	14,78	13,96	14,88	14,19	14,44	14,57
6	18,68	18,31	18,29	18,31	18,98	18,72	19,20

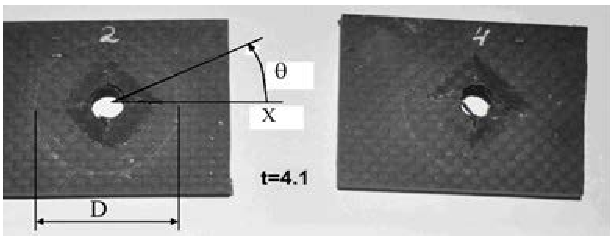


Рис.5. Типовые разрушения отверстий в образцах пластин №1.

Характер разрушений пластин в зоне отверстий показан на рис.5.

Как следует из рис.5, разрушение пластин сопровождается образованием четырёх разломов нижнего монослоя композита с постоянным расположением их по контуру отверстия, характеризующимся углами $\theta = 0^o$, 90, 180, 270 градусов по отношению к оси OX.

Для всех образцов вычислялись межслоевые напряжения по выражению:

$$\tau_b = \frac{P_b}{\pi \cdot d \cdot t}, \qquad (1)$$

где P_b – усилие вырыва крепежа из композита, кН, d – диаметр шляпки крепежа, мм, t – толщина композита, мм.

В табл.3 приводятся значения силы вырыва крепежа P_b и величины межслойных напряжений при вырыве крепежа из композитной обшивки.

Таблица 3. Значения силы вырыва крепежа P_b и величины межслойных напряжений при вырыве крепежа из композитной обшивки

Номер пластины	*d, мм*	*t, мм*	P_b, кН	τ_b, МПа
1	4.1	10.54	6,77	47,16
2	4.1	13.35	9,39	51,58
3	4.92	10.54	9,23	53,43
4	4.92	13.35	12,79	58,68
5	6.56	10.54	14,44	63,14
6	6.56	13.35	18,64	64,26

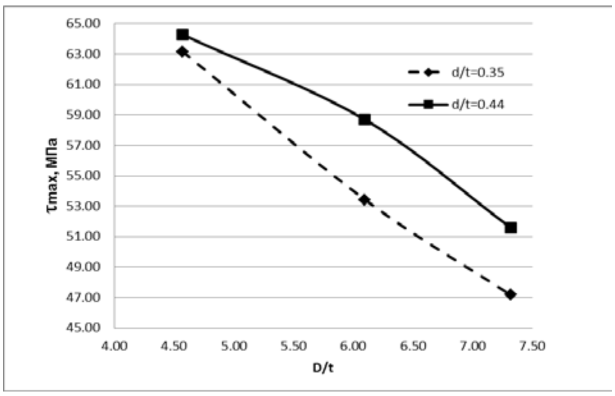


Рис. 6. Зависимость межслоевых напряжений от параметра D/t

На рис.6 приведена зависимость межслоевых напряжений, при которых происходит вырыв крепежа из пластины, от отношения параметра D к толщине пластины *t*.

Как следует из рис.6, величина разрушающих межслоевых напряжений не является постоянной величиной. Она зависит как от параметра d/t, так и от величины D. С увеличением величины D величина межслоевых напряжений значительно уменьшается.

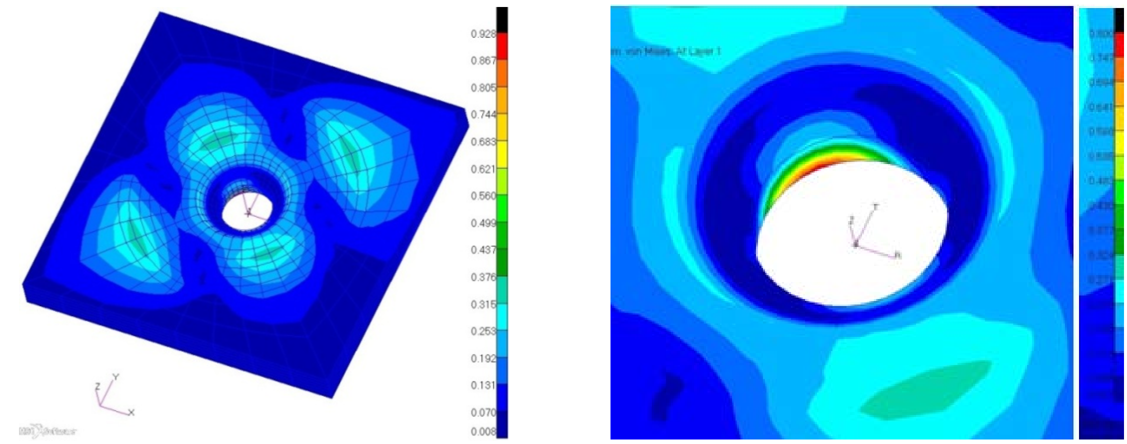
3.Расчёт и анализ. Цель расчёта заключалась в поиске критерия, предсказывающего значения разрушающих межслоевых напряжений при вырыве головок заклёпок из обшивки. Для достижения этой цели определялось напряжённо-деформированное состояние в обшивке при действии на заклёпку растягивающей силы, равной силе вырыва заклепки из обшивки, полученной из эксперимента.

Расчёт проведён в вычислительном комплексе программ *MSC.Marc*[1]. Расчётные конечно-элементные модели для *MSC.Marc* были созданы в *MSC.PATRAN* для крепежа диаметром 6,35 мм и 7,94 мм и включали послойное моделирование композита.

Зона образца в направлении оси заклёпки полностью закреплялась за исключением области диаметром D=30 мм с центром в отверстии. Нагрузка, равная разрушающему усилию вырыва заклепок в эксперименте, прикладывалась к нижнему сечению заклёпки.

На рис.7a приводится распределение тангенциальных напряжений σ_θ в образце толщиной 4.1мм, а на рис.7b – напряжений Мизеса в зоне зенкованной части композита под головку (d=10,54мм) заклёпки.

Поскольку в эксперименте разрушение начиналось с нижнего слоя композита, волокна, в котором располагались под углом 45^o к оси OX, то в табл.4 приводятся значения тангенциальных деформаций ε_θ в этом слое. Там же приводятся значения относительных ошибок $\gamma = \frac{\varepsilon_\theta - \varepsilon_{\theta ср}}{\varepsilon_{\theta ср}} 100\%$ деформаций, возникающих при разрушении образцов, по сравнению с осреднёнными значениями ($\varepsilon_{\theta ср}$=0,688%) для всех испытанных образцов.



a) b)

Рис. 7. Распределение напряжений в образце (ГПа)

Таблица 4. Средняя тангенциальная деформация ε_θ в нижнем слое пластины

$t_{пл}$, мм	d=10.54мм		d=13.35мм	
	ε_θ	γ	ε_θ	γ
4,1	6,62e-3	-3,78	6,08e-3	**-11,63**
4,92	7,23e-3	5,09	6,74e-3	-2,03
6,56	7,67e-3	**11,48**	6,94e-3	0,87

Как следует из табл.4, максимальная относительная ошибка (γ) для всех испытанных образцов составляет ~11,5%. Если выбросить из рассмотрения минимальные и максимальные результаты по определению значений ошибок, которые могут быть связаны с несовершенством технологии изготовления композитных образцов, то в этом случае погрешность составит ~5%.

По этой причине, для оценки силы, вырывающей заклёпку из композита и последующего определения по выражению (1) межслоевых напряжений, можно в качестве критерия использовать деформационный критерий:

$$\varepsilon_\theta \le \varepsilon_{\theta b}, \qquad (2)$$

где ε_θ – расчётное значение деформаций на контуре отверстия нижнего слоя композита, а $\varepsilon_{\theta b}$ – предельное значение деформации, определяемое экспериментально.

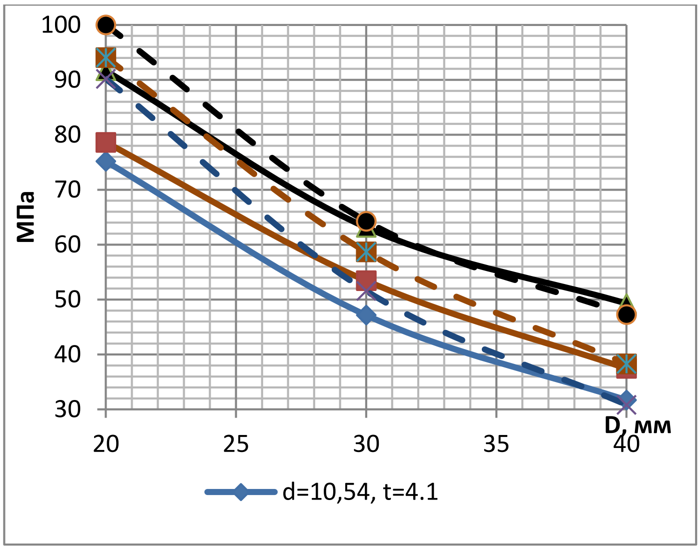


Рис. 8. Значение разрушающих межслоевых напряжений при вырыве головок крепёжных элементов из композитной обшивки

Используя выражение (2) как критерий разрушения и, принимая $\varepsilon_{\theta b}$=0.688%, расчётом определены разрушающие нагрузки для заклёпок, расположенных на расстоянии *D*=20 и 40 мм друг от друга, по значениям которых и выражению (1) получены критические межслоевые напряжения, приведённые на рис.8.

Как следует из графиков, величина разрушающих межслоевых напряжений не является постоянной величиной. С уменьшением расстояния *D* между заклёпками межслоевые напряжения увеличиваются. Увеличиваются они и при увеличении толщины *t* композита. С увеличением расстояния между заклёпками D более 35мм диаметр головки заклёпки практически не влияет на величину межслоевых напряжений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Volume B: Element Library // Marc 2013/ MSC.Software Corporation. USA, 2013. C. 71. - URL: http://simcompanion.mscsoftware.com/infocenter/index?page=content&id=DOC10339&cat=MARC_DOCUMENTATION&actp=LIST.
2. Puck A., Schurmann H. Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models, Composites Science and Technology, 1988.
3. Гришин В.И., Глебова М.А., Беспалов В.А., Гоцелюк Т.Б. Исследование критериев разрушения композиционных образцов с концентраторами напряжений при сжатии. «Механика композиционных материалов и конструкций», ИПРИМ РАН. 2013. Т.20. №1.С.58-86.
4. Гришин В.И., Дзюба А.С.,Дударьков Ю.И «Прочность и устойчивость элементов и соединений авиационных конструкций из композитов». М.: Физматлит, 2013. 272 с.

<u>Сведения об авторах:</u>

Гришин Вячеслав Иванович, д.т.н., профессор, ЦАГИ им. проф. Н.Е.Жуковского,

Глебова Мария Александровна, инженер ЦАГИ им. проф. Н.Е.Жуковского,

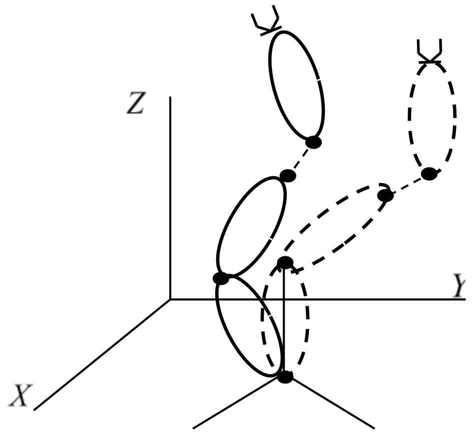
Гусева Наталья Вячеславовна, к.т.н., ЦАГИ им. проф. Н.Е.Жуковского
E-mail: chipalaka@ja.ru

ОБОБЩЁННАЯ МОДЕЛЬ УПРУГОГО МАНИПУЛЯТОРА И ИССЛЕДОВАНИЯ ДВИЖЕНИЙ

Гукасян А.А.

Рассматривается математическая модель многозвенного манипулятора, звенья которого моделируются как упругие тела, а соединительные узлы между звеньями содержат упругие элементы большой жёсткости. Определены пространственные положения манипулятора и компоненты деформации упругого звена. В рамках линейной теории упругости исследуется кинематика пространственного движения как в декартовых, так и в криволинейной системе координат. Полученные выражения представлены в виде суммы трёх слагаемых, которые характеризуют кинематику движения манипулятора как с абсолютно жёсткими звеньями и идеальными соединительными узлами, так и с упругими узлами и упругими звеньями. Результаты исследования применяются для исследования кинематического управления движением упругого манипулятора.

Введение. Представленная работа имеет обзорный характер и обобщает результаты исследований, опубликованных в [1-5]. В первой части исследуюся вопросы об определении пространственного положения манипулятора в случае, когда последнее звено моделируется как упругое тело (фиг.1.). Приведено общее понятие о деформации упругого тела, которое применено для изучения упругих манипуляционных роботов [1]. Во второй части исследуется кинематика пространственного движения многозвенного манипулятора. Предполагается, что часть звеньев манипулятора моделируются как упругие тела, а часть соединительных узлов между ними содержат упругие элементы большой жёсткости [2]. Введены три группы обобщённых координат, определяющих пространственные положения характерных точек манипулятора. Предполагая, что обобщённые координаты, характеризующие упругие свойства манипулятора, малы, кинематические соотношения определены в рамках линейной теории упругости как в декартовых, так и в криволинейной системе координат [3,4]. Третья часть посвящена разработке специальных режимов управления манипуляторов, учитывающих влияние упругих свойств в процессе движения [5].



Фиг.1

1.1. Относительное положение точек упругого звена манипулятора. Представляя заданными положение основания упругого звена относительно неподвижной системы координат $O_0X_0Y_0Z_0$ и элементы матриц направляющих косинусов осей локальной системы координат $Oxyz$, можно определить положения характерных точек (схвата) относительно подвижной и неподвижной систем (фиг.2).

Положение произвольной точки A звена в недеформированном состоянии относительно начала связанной системы координат $Oxyz$ определим радиус-вектором $\mathbf{r}(x,y,z)^T$. Вектор упругих перемещений точки A – через $\mathbf{w}=\mathbf{w}(x,y,z,t)$. Проекции вектора $\mathbf{w}$ на оси системы координат $Oxyz$ обозначим через $w_1(x,y,z,t), w_2(x,y,z,t), w_3(x,y,z,t)$, соответственно. Радиус-вектор абсолютного положения точек упругого звена манипулятора относительно инерциальной системы координат $O_0X_0Y_0Z_0$ определяется радиус-вектором

$$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{\rho}_\mathbf{0}+\mathbf{r}+\mathbf{w}\ \ (\mathbf{r}_*=\mathbf{r}+\mathbf{w}) \qquad (1.1)$$

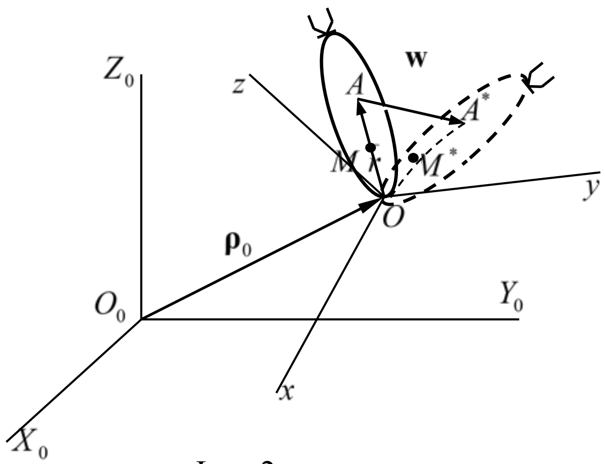
Представим (1.1) в виде

$$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{\rho}_\mathbf{0}+(x+w_1(x,y,z,t))\mathbf{i}+(y+w_2(x,y,z,t))\mathbf{j}+(z+w_3(x,y,z,t))\mathbf{k}, \qquad (1.2)$$

где (**i,j,k**) – единичные векторы осей системы координат $Oxyz$.

Умножая (1.2) последовательно на единичные векторы системы $O_0X_0Y_0Z_0$, получим

$$\left(x_A, y_A, z_A\right)^T = \left(x_0, y_0, z_0\right)^T + \mathbf{\Gamma}^T \left(x + w_1\left(x,y,z,t\right), y + w_2\left(x,y,z,t\right), z + w_3\left(x,y,z,t\right)\right)^T . \quad (1.3)$$



Фиг. 2

Элементы $\left\{\alpha_{ij}\right\}_{i,j=1}^{3,3}$ матрицы $\mathbf{\Gamma}^T$ являются направляющими косинусами осей системы координат $Oxyz$ в системе отсчёта $O_0X_0Y_0Z_0$. Формула обратного преобразования определяется, проектируя (1.2) на оси системы координат $Oxyz$.

$$\left(x,y,z\right)^T = \mathbf{\Gamma}\left[\left(x_A - x_0\right),\left(y_A - y_0\right),\left(z_A - z_0\right)\right]^T$$

$$-\left[w_1(x,y,z,t), w_2(x,y,z,t), w_3(x,y,z,t)\right]^T \quad (1.4)$$

Преобразования (1.3) и (1.4), можно представить в однородных координатах [1]

$$\boldsymbol{\rho}^* = \mathbf{T}\mathbf{r}^*,\ \mathbf{r}^* = \mathbf{T}^*\boldsymbol{\rho}^* \quad (1.5)$$

Здесь (4×4)-мерные матрицы преобразования $\mathbf{T}$ и $\mathbf{T}^*$ имеют следующие структуры:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Gamma}^T & \mathbf{\Gamma}^T\mathbf{w} + \boldsymbol{\rho}_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } \mathbf{T}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{\Gamma} & -\mathbf{\Gamma}\boldsymbol{\rho}_0 - \mathbf{w} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\boldsymbol{\rho}^* = \begin{pmatrix} x_A & y_A & z_A & 1\end{pmatrix}^T$ – радиус-вектор абсолютного положения точек упругого звена манипулятора относительно системы координат $O_0X_0Y_0Z_0$ в однородных координатах, а $\mathbf{r}^* = \begin{pmatrix} x & y & z & 1\end{pmatrix}^T$ – радиус-вектор точки A относительно $Oxyz$ в однородных координатах.

1.2. Общие понятия о деформации упругого звена манипулятора. Ниже для определённости приводятся некоторые общие понятия и соотношения теории упругости деформируемого тела, применимые для упругих манипуляционных роботов [1].

По формуле (1.1) можно определить проекции произвольного линейного элемента звена после деформации, через его проекции до деформации. После деформации точка M переместится в положение M^* на дуге OA^*. Координаты точки M^* в системе $Oxyz$ обозначим через dx_*, dy_*, dz_*, соответственно.

Связь между координатами точки M^* и M определяется согласно (1.1) в виде :

$$d\mathbf{r}_* = \mathbf{D}d\mathbf{r}, \quad (1.6)$$

где $d\mathbf{r}$ и $d\mathbf{r}_*$ – векторы с компонентами $(dx, dy, dz)^T$ и $(dx_*, dy_*, dz_*)^T$, а $\mathbf{D}$ – матрица.

Решая систему (1.6) относительно dx, dy и dz, можно определить также координаты точки M до деформации через координаты точки M^* после деформации

$$d\mathbf{r} = (\det\mathbf{D})^{-1}\cdot\mathbf{D}_*d\mathbf{r}_* \quad (1.7)$$

Разность расстояния между точками O и M (фиг.2) до деформации и после деформации, с учётом (1.6), будет:

$$ds_*^2 - ds^2 = 2\left(\varepsilon_{xx}dx^2 + \varepsilon_{yy}dy^2 + \varepsilon_{zz}dz^2 + \varepsilon_{xy}dxdy + \varepsilon_{xz}dxdz + \varepsilon_{yz}dydz\right), \quad (1.8)$$

где $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}$ – компоненты деформации упругого звена.

Величины $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}$, выражающиеся через перемещения каждой точки тела, полностью характеризуют его деформацию. Равенство их нулю во всех точках тела равносильно абсолютно жёсткой модели звена манипулятора. Формулы (1.6)-(1.8) дают возможность определить также направляющие косинусы координатных линий.

Обычно в прикладных задачах звенья промышленных манипуляционных роботов моделируются как массивные тела, а звенья специальных манипуляционных роботов – как одномерные упругие тела, в частности, упругие нерастяжимые стержни со значительными линейными размерами. Полученные в общем случае формулы (выражения) применяются для одномерной модели [1].

2.1. Кинематика пространственного движения многозвенного манипулятора (метод декартовых координат). Обобщённые координаты, определяющие конфигурацию манипулятора с абсолютно жёсткими звеньями и с идеальными соединительными узлами, обозначим через компоненты вектора $\boldsymbol{\alpha} = \left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\right)^T$, координаты, обусловленные упругими элементами в соединительных узлах – через $\boldsymbol{\beta} = \left(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m\right)^T \ (m \le n)$. Деформацию упругих звеньев манипулятора относительно их недеформированного состояния обозначим через вектор $\mathbf{w}(t,\xi) = \left(w_1(t,\xi), w_2(t,\xi), \ldots, w_k(t,\xi)\right)^T$, где ξ – произвольная точка упругого звена фиг.3.

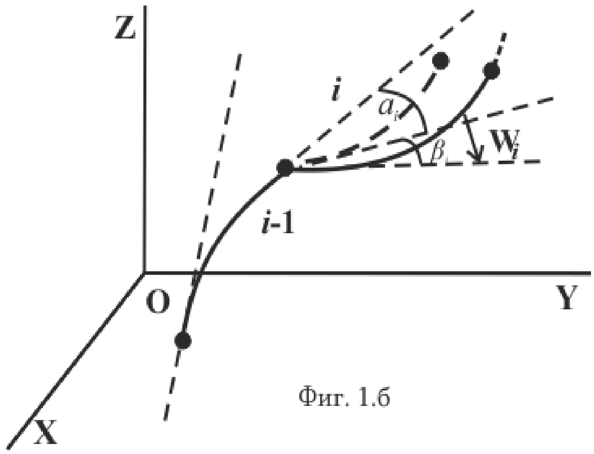
Положение характерных точек упругого манипулятора определим через вектор $\mathbf{q}$,

$$\mathbf{q} = \left(q_1, q_2, \ldots, q_N\right)^T \tag{2.1}$$

Кинематику манипулятора с упругими свойствами, в общем случае, можно исследовать на основе соотношения

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w}) \tag{2.2}$$

где $\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})$ - заданная N-мерная вектор-функция от вектор аргументов. В рамках линейной теории упругости, дальнейшие исследования проведём асимптотическим методом малого параметра [2]. Разложение вектор функции $\mathbf{q}$ (2.2) относительно $\boldsymbol{\beta}$ и $\mathbf{w}$ с точностью ε^2, по формуле Тейлора имеет вид



Фиг. 1.б

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha},0,0) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial \beta_j}\beta_j + \sum_{l=1}^{k} \frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial w_l} w_l + O\left(\varepsilon^2\right); \varepsilon \ll 1, \tag{2.3}$$

где $\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha},0,0)$, $\mathbf{f}^{1*}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial \beta_j}\beta_j$, $\mathbf{f}^{2*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w}) = \sum_{l=1}^{k} \frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial w_l} w_l$

Вычисляя производные по времени от функции (2.2), получим вектор скорости характерных точек манипулятора в виде [2]:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^1(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}}) + \mathbf{v}^2(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\boldsymbol{\beta},\dot{\boldsymbol{\beta}}) + \mathbf{v}^3(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{w},\dot{\mathbf{w}}) \tag{2.4}$$

где $\mathbf{v}^1(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}}) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})\dot{\boldsymbol{\alpha}}$, $\mathbf{v}^2(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\boldsymbol{\beta},\dot{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\dot{\boldsymbol{\beta}}$

$\mathbf{v}^3(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{w},\dot{\mathbf{w}}) = \mathbf{F}_3(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}_4(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})\dot{\mathbf{w}}$, $\left(\mathbf{v}^2(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},0,0) \equiv 0, \quad \mathbf{v}^3(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},0,0) \equiv 0\right)$

$\mathbf{v}^1(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}})$ определяет скорость движения манипулятора с абсолютно жёсткими звеньями и идеальными соединительными узлами, $\mathbf{v}^2(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\boldsymbol{\beta},\dot{\boldsymbol{\beta}})$ – дополнительный вектор скорости, обусловленный упругостью соединительных узлов, а $\mathbf{v}^3(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{w},\dot{\mathbf{w}})$ зависит от упругих свойств звеньев манипулятора ($\mathbf{v}^2(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\boldsymbol{\beta},\dot{\boldsymbol{\beta}})$ и $\mathbf{v}^3(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{w},\dot{\mathbf{w}})$ имеют порядок ε).

Ускорение движения характерных точек манипулятора будет [2]:

$$\mathbf{w}^* = \mathbf{w}^{*1}(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}}) + \mathbf{w}^{*2}(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}},\boldsymbol{\beta},\dot{\boldsymbol{\beta}},\ddot{\boldsymbol{\beta}}) + \mathbf{w}^{*3}(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{w},\dot{\mathbf{w}},\ddot{\mathbf{w}}) \tag{2.5}$$

$$\mathbf{w}^{*1}(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}}) = \frac{d}{dt}\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})\ddot{\boldsymbol{\alpha}},$$

$$\mathbf{w}^{*2}(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}},\boldsymbol{\beta},\dot{\boldsymbol{\beta}},\ddot{\boldsymbol{\beta}}) = \frac{d}{dt}\mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\ddot{\boldsymbol{\alpha}} + \frac{d}{dt}\mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\dot{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\ddot{\boldsymbol{\beta}} \tag{2.6}$$

$$\mathbf{w}^{*3}(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{w},\dot{\mathbf{w}},\ddot{\mathbf{w}}) = \frac{d}{dt}\mathbf{F}_3(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}_3(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})\ddot{\boldsymbol{\alpha}} + \frac{d}{dt}\mathbf{F}_4(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})\dot{\mathbf{w}} + \mathbf{F}_4(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})\ddot{\mathbf{w}}$$

($\mathbf{w}^{*2}(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}},0,0,0) \equiv 0$, $\mathbf{w}^{*3}(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}},0,0,0) \equiv 0$)

Для определения компонентов векторов скорости (2.4) и ускорения (2.6) необходимо вычислить элементы матриц $\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})$, $\mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$, $\mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$, $\mathbf{F}_3(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})$, $\mathbf{F}_4(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})$ [2].

2.2. Метод криволинейных координат. Криволинейными координатами $s_p = s_p(q_1, q_2, q_3)$ $(p = 1, 2, 3)$ характерных точек манипулятора, с учётом (2.2), являются

$$s_p = s_p\left[f_1(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\mathbf{w}), f_2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\mathbf{w}), f_3(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\mathbf{w})\right] = s_p^*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\mathbf{w}), \quad (p = 1,2,3) \tag{2.7}$$

Вектор скорости движения в криволинейной системе координат имеет вид [3,4]:

$$\mathbf{v} = \sum_{p=1}^{3} H_p(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\mathbf{w})\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\mathbf{w})}{\partial \alpha_i}\dot{\alpha}_i + \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\mathbf{w})}{\partial \beta_j}\dot{\beta}_j + \sum_{l=1}^{k}\frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\mathbf{w})}{\partial w_l}\dot{w}_l\right] s_p^0, \tag{2.8}$$

где s_p^0 – орт оси криволинейных координат, а $H_p(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\mathbf{w})$ $(p = 1,2,3)$ – коэффициенты Лямэ.

В рамках принятой модели манипулятора, пользуясь разложением функций $s_p = s_p^*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\mathbf{w})$ и $H_p(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\mathbf{w})$ $(p = 1,2,3)$ по формуле Тейлора относительно упругих величин β_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ и $w_l(t,\xi)$ $(l = 1, 2, \ldots, k)$ с точностью ε, получим [3]

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}}) + \mathbf{v}_2(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\boldsymbol{\beta},\dot{\boldsymbol{\beta}}) + \mathbf{v}_3(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{w},\dot{\mathbf{w}}), \tag{2.9}$$

где $\mathbf{v}_1 = \mathbf{H}_1^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)\dot{\boldsymbol{\alpha}}$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{H}_2^*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},0)\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{H}_4^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)\dot{\boldsymbol{\beta}}$, $\mathbf{v}_3 = \mathbf{H}_3^*(\boldsymbol{\alpha},0,\mathbf{w})\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{H}_5^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)\dot{\mathbf{w}}$.

$\mathbf{H}_1^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)$, $\mathbf{H}_2^*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},0)$, $\mathbf{H}_3^*(\boldsymbol{\alpha},0,\mathbf{w})$, $\mathbf{H}_4^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)$, $\mathbf{H}_5^*(\boldsymbol{\alpha},0,0)$ – обобщённые матрицы Лямэ, элементы которых зависят от коэффициентов Лямэ $H_p(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\mathbf{w})$ и от геометрической структуры манипулятора [3,4].

Здесь, так же, как в (2.4), скорость движения удаётся представить в виде суммы трёх слагаемых. Вектор ускорения $\mathbf{a}$ в криволинейной системе координат представим в виде:

$$\mathbf{a} = \sum_{p=1}^{3} a_p s_p^0, \text{ где } a_p = \frac{1}{H_p}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{s}_p}\frac{v^2}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial s_p}\frac{v^2}{2}\right\} \ (p = 1,2,3). \tag{2.10}$$

(2.10) также позволяет представить вектор ускорения в виде следующих трёх слагаемых.

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}^1(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}}) + \mathbf{a}^2(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}},\boldsymbol{\beta},\dot{\boldsymbol{\beta}},\ddot{\boldsymbol{\beta}}) + \mathbf{a}^3(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{w},\dot{\mathbf{w}},\ddot{\mathbf{w}}).$$

3. Кинематическое управление движением упругого манипулятора. Пусть в пространстве задана нестационарная поверхность или пространственная линия как пересечение двух нестационарных гладких поверхностей, которые описываются уравнениями

$$g(q_1, q_2, q_3, t) = 0 \quad \text{или} \quad \begin{matrix} g_1(q_1, q_2, q_3, t) = 0 \\ g_2(q_1, q_2, q_3, t) = 0 \end{matrix} \tag{3.1}$$

и при $t = t_0$ координаты схвата упругого манипулятора удовлетворяют уравнениям (3.1). Требуется найти такие управляющие функции в виде обобщённых скоростей, которые по принципу обратной связи, в зависимости от обобщённых координат и от упругих свойств манипулятора, обеспечивают движение схвата по заданной программе (3.1) и минимизируют некоторый функционал, характеризующий качество управляемого процесса

$$J = \Phi[\mathbf{u}] \to \min_{\mathrm{u}} \tag{3.2}$$

В работе представлены задачи оптимального управления движением схвата манипулятора, как с упругими соединительными узлами, так и с упругими звеньями, по программе (3.1) со скоростью $\mathbf{v}(\mathbf{t})$ [5]. Рассматриваемые задачи исследуются методом неопределённых множителей Лагранжа, и в рамках линейной теории упругости определены оптимально управляющие функции $\mathbf{u} = \dot{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\dot{\boldsymbol{\beta}})$ и $\mathbf{u} = \dot{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w}(t,l_2),\dot{\mathbf{w}}(t,l_2))$ в виде:

$$u_i^0 = -\frac{1}{2}\sum_{\vartheta=1}^{3}\frac{\Delta_\vartheta}{\Delta}\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left[f_\vartheta(\boldsymbol{\alpha}) + f_\vartheta^*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\right] \qquad (i = 1,2,\ldots,n), \tag{3.3}$$

$$u_j^0 = -a_j(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w}(t,l_2))[b(\boldsymbol{\alpha},\dot{\mathbf{w}}(t,l_2)) + c(t)][\sum_{i=0}^{2} a_i^2(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w}(t,l_2))]^{-1/2}, (j = 0,1,2), \tag{3.4}$$

которые обеспечивают оптимальное движение схвата упругих манипуляторов по заданной программе (3.1) с минимизацией квадратичного функционала. Здесь Δ – главный, а Δ_ϑ – вспомогательные определители соответствующих систем алгебраических уравнений. Функции $f_\vartheta^*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}), f_\vartheta(\boldsymbol{\alpha})$, $a_j(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w}(t,l_2)), b(\boldsymbol{\alpha},\dot{\mathbf{w}}(t,l_2)), c(t)$ зависят от параметров манипулятора и поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гукасян А.А. О пространственном положении и деформации упругих звеньев манипулятора. // Изв. НАН Армении. Механика. 2014. Т.67. №4. С.53-64.
2. Гукасян А.А. О кинематике многозвенного манипулятора с упругими соединительными узлами и с упругими звеньями. // Изв. НАН Армении. Механика. 2014. Т.67. №3. С.68-83.
3. Гукасян А.А. Кинематика упругого манипулятора в криволинейной системе координат. //Доклады НАН Армении. 2014. Т.114. №3. С.222-229.
4. Гукасян А.А. О двух подходах к исследованию кинематики упругих манипулятотов. // Изв. НАН Армении. Механика. 2015. Т.68. №2. С.53-67.
5. Гукасян А.А. Кинематическое управление движением схвата двухзвенного упругого манипулятора. //Доклады НАН Армении. 2014. Т.114. № 4. С.316-324 .

Сведения об авторе:

Гукасян Артуш Апресович– доктор физ.-мат. наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении, г. Ереван, (+37491434527),
E-mail: ghukasyan10@yandex.ru

О СВОБОДНЫХ ИНТЕРФЕЙСНЫХ И КРАЕВЫХ КОЛЕБАНИЯХ ТОНКИХ УПРУГИХ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК СО СВОБОДНЫМИ ТОРЦАМИ

Гулгазарян Г.Р. , Гулгазарян Л.Г., Михасев Г.И.

Исследуются свободные краевые и интерфейсные колебания замкнутых и незамкнутых цилиндрических оболочек (ЦО) со свободными торцами, составленными из конечных ортотропных тонких упругих ЦО с разными упругими свойствами. Используя систему дифференциальных уравнений, соответствующую классической теории ортотропных ЦО, выводятся дисперсионные уравнения для нахождения собственных частот краевых и интерфейсных колебаний составной ЦО. Установлены асимптотические связи между дисперсионными уравнениями рассматриваемых задач и аналогичных задач для составной пластины-полосы и прямоугольной пластины, соответственно. Приводится механизм, с помощью которого расчленяются возможные типы краевых и интерфейсных колебаний. На примерах ЦО с разными длинами составляющих приведены приближённые значения безразмерной характеристики собственной частоты и характеристики затухания соответствующих форм колебаний.

Постановка задачи. На срединной поверхности оболочки **в**водятся криволинейные координаты (α,β), где $\alpha(-l^{(2)}<\alpha\le l^{(1)})$ и $\beta(0\le\beta\le s)$ являются ориентированной переменной длиной образующей и длиной дуги направляющей окружности соответственно. s – полная длина направляющей окружности (рис. 1,2). $\alpha=0$ соответствует границе раздела свойств материала. Все величины, относящиеся к правой оболочке $(0\le\alpha\le l^{(1)})$, отмечаются верхним индексом (1), к левой оболочке $(-l^{(2)}<\alpha\le 0)$ – индексом (2).

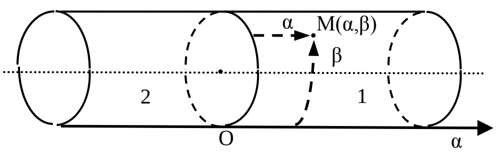


Рис.1

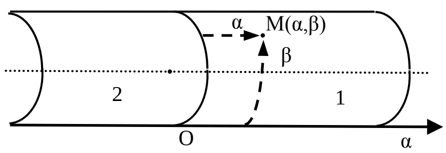


Рис.2

В качестве исходных уравнений, описывающих колебания левых и правых ЦО, используются уравнения, которые соответствуют классической теории ортотропных ЦО и записываются в выбранных криволинейных координатах α,β.

$$\sum_{j=1}^{3}\left(\mu^4 n_{ij}^{(r)}+l_{ij}^{(r)}\right)u_{ij}^{(r)}=\rho^{(r)}\omega^2 u_i^{(r)},\ i=1,2,3;r=1,2\ . \tag{1}$$

Здесь $u_1^{(r)},u_2^{(r)},u_3^{(r)}\,(r=1,2)$ – проекции вектора перемещения, соответственно, в направлениях α,β и нормали к срединной поверхности оболочки; $\mu^4=h^2/12$ (h– толщина оболочки); ω– угловая частота собственных колебаний; $\rho^{(r)}\,(r=1,2)$– плотности материалов; $n_{ij}^{(r)}$ и $l_{ij}^{(r)}$– дифференциальные операторы, явный вид которых приведён в [1]. Граничные условия имеют вид:

$$T_1^{(1)}\Big|_{\alpha=0}=T_1^{(2)}\Big|_{\alpha=0},\ S_{12}^{(1)}+\frac{H^{(1)}}{R}\Bigg|_{\alpha=0}=S_{12}^{(2)}+\frac{H^{(2)}}{R}\Bigg|_{\alpha=0},\ M_1^{(1)}\Big|_{\alpha=0}=M_1^{(2)}\Big|_{\alpha=0},\ N_1^{(1)}+\frac{\partial H^{(1)}}{\partial\beta}\Bigg|_{\alpha=0}=N_1^{(2)}+\frac{\partial H^{(2)}}{\partial\beta}\Bigg|_{\alpha=0},$$
$$u_1^{(1)}\Big|_{\alpha=0}=u_1^{(2)}\Big|_{\alpha=0},\ u_2^{(1)}\Big|_{\alpha=0}=u_2^{(2)}\Big|_{\alpha=0},\ u_3^{(1)}\Big|_{\alpha=0}=u_3^{(2)}\Big|_{\alpha=0},\ \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial\alpha}\Bigg|_{\alpha=0}=\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial\alpha}\Bigg|_{\alpha=0}; \tag{2}$$

$$T_1^{(r)}\Big|_{\alpha=(-1)^{r-1}l^{(r)}}=0,\ S_{12}^{(r)}+\frac{H^{(r)}}{R}\Bigg|_{\alpha=(-1)^{r-1}l^{(r)}}=0,\ M_1^{(r)}\Big|_{\alpha=(-1)^{r-1}l^{(r)}}=0,\ N_1^{(r)}+\frac{\partial H^{(r)}}{\partial\beta}\Bigg|_{\alpha=(-1)^{r-1}l^{(r)}}=0,\ r=1,2; \tag{3}$$

$$u_i^{(r)}(\alpha,\beta)=u_i^{(r)}(\alpha,\beta+s)\ ,i=1,2,3;r=1,2\ ; \tag{4}$$

$$T_2^{(r)}\Big|_{\beta=0,s}=u_1^{(r)}\Big|_{\beta=0,s}=u_3^{(r)}\Big|_{\beta=0,s}=M_2^{(r)}\Big|_{\beta=0,s}=0,\ r=1,2. \tag{5}$$

Граничные условия (2)-(4) соответствуют замкнутой ЦО: соотношения (2) выражают условия полного контакта при $\alpha=0$, условия (3) – условиями свободного края при $\alpha=l^{(1)}$ и $\alpha=-l^{(2)}$, а (4)

– условия периодичности колебания, где s – полная длина направляющей окружности срединной поверхности (рис.1). Граничные условия (2)-(3), (5) соответствуют ЦО открытого профиля: соотношения (5) являются условиями шарнирного закрепления по образующим $\beta = 0$ и $\beta = s$, где s –длина дуги окружности срединной поверхности между шарнирно-закреплёнными образующими (рис.2).

Дисперсионные уравнения. В первом, втором и третьем уравнениях системы (1) угловую частоту ω формально заменяется на $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ соответственно. Вводятся обозначения: $k = 2\pi n_0 / s,\ n_0 \in N$ для замкнутой ЦО, и $k = \pi / s$ для ЦО открытого профиля. Пусть $R^{-1} = kr_0 / 2$, где R – радиус ЦО, а r_0 – безразмерный параметр. Решение системы (1) ищется в виде

$$(u_1^{(r)}, u_2^{(r)}, u_3^{(r)}) = (u_m^{(r)} \sin km\beta,\ v_m^{(r)} \cos km\beta,\ \sin km\beta) \exp((-1)^r \chi^{(r)} k\alpha), \quad m = \overline{1,\infty}, r = 1,2.. \qquad (6)$$

Здесь m – волновое число, $u_m^{(r)}, v_m^{(r)}$ – неопределённые коэффициенты, $\chi^{(r)}$ – неопределённый коэффициент затухания. При этом, условия (4) и (5) выполняются автоматически. Подставляя выражения (6) в систему (1), получим

$$R_{mm}^{(r)} c_m^{(r)} + (r_0^2/4)\Big\{ c_m^{(r)} + m^2 b_m^{(r)} - (B_{12}^{(r)}/B_{22}^{(r)}) \left(\chi^{(r)}\right)^2 a_m^{(r)} + a^2 (R_{mm}^{(r)} g_m^{(r)} d_m^{(r)} - 2m^2 l_m^{(r)} b_m^{(r)}) +$$

$$+ (r_0^2/4) a^2 d_m^{(r)} \left(b_m^{(r)} + (B_{12}^{(r)}/B_{11}^{(r)}) \left(\chi^{(r)}\right)^2 \right) + a^4 m^2 g_m^{(r)} \left(l_m^{(r)} \right)^2 \Big\} = 0,\ m = \overline{1,\infty}. \qquad (7)$$

Выражения для $a_m^{(r)}, b_m^{(r)}, c_m^{(r)}, d_m^{(r)}, g_m^{(r)}, l_m^{(r)}, R_{mm}^{(r)}$ приведены в [1], а $a^2 = \mu^4 k^2,\ \left(\eta_i^{(r)}\right)^2 = \rho^{(r)} \omega_i^2 / (B_{66}^{(r)} k^2),\ i = 1,2,3$.

Пусть $\chi_j^{(r)}$ $(j = 1,2,3,4)$ – попарно различные нули уравнения (7) с положительными действительными частями и $\chi_{j+4}^{(r)} = -\chi_j^{(r)},\ j = 1,2,3,4$. Пусть $(u_{1j}^{(r)}, u_{2j}^{(r)}, u_{3j}^{(r)})$ – нетривиальные решения вида (6) системы (1) при $\chi^{(r)} = \chi_j^{(r)}$ $(j = 1,2,...,8)$, соответственно.

Представляя решения задач (1)-(4) и (1)-(3), (5) в виде

$$u_i^{(r)} = \sum_{j=1}^{8} w_j^{(r)} u_{ij}^{(r)},\quad i = 1,2,3;\ r = 1,2 \qquad (8)$$

и учитывая граничные условия (2) –(3), получим систему уравнений:

$$\sum_{j=1}^{8} \frac{M_{ij}^{(1)} w_j^{(1)}}{c_{mj}^{(1)} + \frac{r_0^2}{4} a^2 g_{mj}^{(1)} d_{mj}^{(1)}} - \sum_{j=1}^{4} \frac{c M_{ij}^{(2)} w_j^{(2)}}{c_{mj}^{(2)} + \frac{r_0^2}{4} a^2 g_{mj}^{(2)} d_{mj}^{(2)}} = 0,\quad i = \overline{1,4};\ c = \frac{B_{11}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}}$$

$$\sum_{j=1}^{8} \frac{M_{ij}^{(1)} w_j^{(1)}}{c_{mj}^{(1)} + \frac{r_0^2}{4} a^2 g_{mj}^{(1)} d_{mj}^{(1)}} - \sum_{j=1}^{4} \frac{M_{ij}^{(2)} w_j^{(2)}}{c_{mj}^{(2)} + \frac{r_0^2}{4} a^2 g_{mj}^{(2)} d_{mj}^{(2)}} = 0,\ i = \overline{5,8};\ z_j^{(r)} = -\chi_j^{(r)} k\, l^{(r)};\ r = 1,2$$

$$\sum_{j=1}^{8} \frac{M_{ij}^{(1)} \exp(z_j^{(1)}) w_j^{(1)}}{c_{mj}^{(1)} + \frac{r_0^2}{4} a^2 g_{mj}^{(1)} d_{mj}^{(1)}} = 0, i = \overline{9,12};\ \sum_{j=1}^{8} \frac{M_{ij}^{(2)} \exp(z_j^{(2)}) w_j^{(2)}}{c_{mj}^{(2)} + \frac{r_0^2}{4} a^2 g_{mj}^{(2)} d_{mj}^{(2)}} = 0,\ i = \overline{13,16}; \qquad (9)$$

где $M_{ij}^{(r)}$ – многочлены от $\left(\eta_i^{(r)}\right)^2, j = \overline{1,3}$ и $\chi_j^{(r)}, j = \overline{1,8}$. Нижний индекс j означает, что соответствующая функция взята при $\chi^{(r)} = \chi_j^{(r)}$. Приравнивая определитель системы (9) к нулю и выполняя элементарные действия над столбцами, получаем дисперсионное уравнение:

$$\nabla = \mathrm{Det} \left\| t_{ij} \right\|_{i,j=1}^{4} = 0, \qquad (10)$$

$$t_{11}=\left\| m_{ij}^{(1)} \right\|_{i,j=1}^{4},\ t_{12}=\left\| m_{ij}^{(1)} \right\|_{i=1\,j=5}^{4,8},\ t_{13}=c\left\| m_{ij}^{(2)} \right\|_{ij=1}^{4},\ t_{14}=c\left\| m_{ij}^{(2)} \right\|_{i=1\,j=5}^{4,8},$$

$$t_{21}=\left\| m_{ij}^{(1)} \right\|_{i=5,j=1}^{8,4},\ t_{22}=\left\| m_{ij}^{(1)} \right\|_{i,j=5}^{8}\ t_{23}=\left\| m_{ij}^{(2)} \right\|_{i=5,j=1}^{8,4},\ t_{24}=\left\| m_{ij}^{(2)} \right\|_{i,j=5}^{8}, \tag{11}$$

$$t_{31}=t_{12},\ t_{32}=t_{11},\ \ t_{33}=0, t_{34}=0; t_{41}=0, t_{42}=0, t_{43}=t_{14},\ t_{44}=t_{13}.$$

$$x_j^{(r)}=\frac{\chi_j^{(r)}}{m},\ j=1,2,3,4;\ \eta_{mi}^{(r)}=\frac{\eta_i^{(r)}}{m},\ i=1,2,3;\ \varepsilon_m=\frac{r_0}{2m}$$

Учитывая допустимые соотношения между $\eta_{1m}^{(r)},\eta_{2m}^{(r)},\eta_{3m}^{(r)}$, заключаем, что уравнение (10) определяет частоты соответствующих типов интерфейсных и краевых колебаний.

Асимптотическое представление дисперсионного уравнения (10) при $R^{-1}\to 0$. В предыдущих формулах предполагается, что $\eta_1^{(r)}=\eta_2^{(r)}=\eta_3^{(r)}=\eta^{(r)}$ (r =1,2). При $R^{-1}\to 0\ (r_0\to 0)$ уравнения (7) преобразуются в совокупность уравнений:

$$c_m^{(r)}=\left(\chi^{(r)}\right)^4-(B_{11}^{(r)}B_{22}^{(r)}-(B_{22}^{(r)})^2-B_{12}^{(r)}B_{66}^{(r)})/(B_{11}^{(r)}B_{66}^{(r)})\left(\chi^{(r)}\right)^2m^2+ \tag{12}$$

$$+\left((B_{11}^{(r)}+B_{66}^{(r)})\left(\eta^{(r)}\right)^2\left(\chi^{(r)}\right)^2+\left(m^2-\left(\eta^{(r)}\right)^2\right)\left(B_{22}^{(r)}m^2-B_{66}^{(r)}\left(\eta^{(r)}\right)^2\right)\right)/B_{11}^{(r)}=0$$

$$R_{mm}^{(r)}=a^2\left(B_{11}^{(r)}/B_{22}^{(r)}\left(\chi^{(r)}\right)^4-2(B_{12}^{(r)}+2B_{66}^{(r)})/B_{22}^{(r)}\left(\chi^{(r)}\right)^2+m^4\right)-B_{66}^{(r)}/B_{22}^{(r)}\left(\eta^{(r)}\right)^2=0, m=\overline{1,\infty};\ r=1,2 \tag{13}$$

которые являются характеристическими уравнениями для уравнений планарных и изгибных колебаний пластины, соответственно. Корни $\chi^{(r)}/m$ уравнений (12) и (13) с положительными действительными частями обозначаются через $y_1^{(r)},y_2^{(r)}$ и $y_3^{(r)},y_4^{(r)}$ соответственно. Доказывается, что уравнение (10) приводится к виду:

$$\mathrm{Det}\left\| t_{ij} \right\|_{ij=1}^{4}=\left(\frac{B_{11}^{(1)}B_{11}^{(2)}N^{(1)}(\eta_m^{(1)})N^{(2)}(\eta_m^{(2)})}{(B_{12}^{(1)}+B_{66}^{(1)})(B_{12}^{(2)}+B_{66}^{(2)})}\right)^2\left\{\left(K_3^{(1)}(\eta_m^{(1)})K_3^{(2)}(\eta_m^{(2)})\right)^2X\right.$$

$$\left.\mathrm{Det}\left\| e_{ij} \right\|_{i,j=1}^{8}.\mathrm{Det}\left\| b_{ij} \right\|_{i,j=1}^{8}\right\}+O(\varepsilon_m^2)=0,\ m=\overline{1,+\infty} \tag{14}$$

Выражения для $K_3^{(r)}(\eta_m^{(r)})$ и $N^{(r)}(\eta_m^{(r)})$ представлены в [1]. Из уравнения (14) следует, что при $\varepsilon_m\to 0$ уравнение (10) распадается на уравнения:

$$\mathrm{Det}\left\| e_{ij} \right\|_{i,j=1}^{8}=0,\ \mathrm{Det}\left\| b_{ij} \right\|_{i,j=1}^{8}=0,\ K_3^{(1)}(\eta_m^{(1)})=0,\ K_3^{(2)}(\eta_m^{(2)})=0 \tag{15}$$

Из них первое и второе уравнения являются дисперсионными уравнениями планарных и изгибных колебаний аналогичной задачи для пластины-полосы и прямоугольной пластины с шарнирно-закреплёнными смежными сторонами [2]. Корням третьего и четвёртого уравнений соответствуют преимущественно планарные колебания ЦО. При $ml^{(2)}\to\infty$ справедливы следующие асимптотические уравнения:

$$\mathrm{Det}\left\| e_{ij} \right\|_{i,j=1}^{8}=\left(\frac{B_{66}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}}\right)^2\frac{B_{12}^{(2)}+B_{66}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}}K_2^{(2)}(\eta_m^{(2)})\mathrm{Det}\left\| e_{ij} \right\|_{i,j=1}^{6}+\sum_{j=1}^{2}O(\exp(z_j^{(2)}))=0 \tag{16}$$

$$\mathrm{Det}\left\| b_{ij} \right\|_{i,j=1}^{8}=\left(\frac{B_{11}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}}\right)^2K_1^{(2)}(\eta_m^{(2)})\,\mathrm{Det}\left\| b_{ij} \right\|_{i,j=1}^{6}+\sum_{j=3}^{4}O(\exp(z_j^{(2)}))=0 \tag{17}$$

Из (16) и (17) следуют, что при $ml^{(2)}\to\infty$ первые два уравнения из (15) распадаются на уравнения, соответственно:

$$K_2^{(2)}(\eta_m^{(2)})=0,\ \ \mathrm{Det}\left\| e_{ij} \right\|_{i,j=1}^{6}=0;\ \ K_1^{(2)}(\eta_m^{(2)})=0,\ \mathrm{Det}t\left\| b_{ij} \right\|_{i,j=1}^{6}=0 \tag{18}$$

Уравнения $K_2^{(2)}(\eta_m^{(2)})=0,\ K_1^{(2)}(\eta_m^{(2)})=0$ из (18) являются уравнениями релеевского типа для планарного и изгибного колебания полубесконечной пластины (пластины-полосы) из материала левой (2) пластины со свободным краем $\alpha = -l^{(2)}$, соответственно, а уравнения $\mathrm{Det}\left\| e_{ij} \right\|_{i,j=1}^{6} = 0$, $\mathrm{Det}\left\| b_{ij} \right\|_{i,j=1}^{6} = 0$ дисперсионными уравнениями колебания планарного и изгибного типа составной полубесконечной пластины (пластины-полосы) со свободным краем $\alpha = l^{(1)}$ соответственно [3]. При $ml^{(1)} \to \infty$ справедливы асимптотические формулы:

$$\mathrm{Det}\left\| e_{ij} \right\|_{i,j=1}^{6} = \left(\frac{B_{66}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}} \right)^4 \left(\frac{B_{12}^{(1)} + B_{66}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}} \right)^2 \frac{B_{12}^{(2)} + B_{66}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}} L(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) K_2^{(1)}(\eta_m^{(1)}) + \sum_{j=1}^{2} O(\exp(z_j^{(1)})) \tag{19}$$

$$\mathrm{Det}\left\| b_{ij} \right\|_{i,j=1}^{6} = G(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)})\, K_1^{(1)}(\eta_m^{(1)}) + \sum_{j=3}^{4} O(\exp(z_j^{(1)})) \tag{20}$$

Из (19) и (20) следуют, что при $ml^{(1)} \to \infty$ уравнения (19) и (20) распадаются на уравнения, соответственно

$$K_2^{(1)}(\eta_m^{(1)}) = 0, \quad L(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) = 0; \quad K_1^{(1)}(\eta_m^{(1)}) = 0, \;\; G(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) = 0 \tag{21}$$

Уравнения $K_2^{(1)}(\eta_m^{(1)}) = 0,\; K_1^{(1)}(\eta_m^{(1)}) = 0$ из (21) являются уравнениями релеевского типа для планарного и изгибного колебаний полубесконечной пластины (пластины-полосы) из материала правой (1) пластины со свободным краем $\alpha = l^{(1)}$, соответственно, а уравнения $L(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) = 0$, $G(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) = 0$ – дисперсионные уравнения планарных и изгибных интерфейсных колебаний для бесконечной пластины, составленной из двух полубесконечных ортотропных пластин (пластины-полосы с шарнирно закреплёнными краями) [1].

Учитывая (14), (16), (17) и (19), (20), уравнение (10) можно написать в виде:

$$\mathrm{Det}\left\| t_{ij} \right\|_{ij=1}^{4} = \left(\frac{B_{66}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}} \right)^4 \left(\frac{B_{66}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}} \right)^2 \left(\frac{B_{11}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}} \right)^2 \left(N^{(1)}(\eta_m^{(1)})\, N^{(2)}(\eta_m^{(2)}) \right)^2 \Big\{ \left(K_3^{(1)}(\eta_m^{(1)})\, K_3^{(2)}(\eta_m^{(2)}) \right)^2 \times$$

$$\times K_2^{(1)}(\eta_m^{(1)})\, K_2^{(2)}(\eta_m^{(2)}) K_1^{(1)}(\eta_m^{(1)})\, K_1^{(2)}(\eta_m^{(2)}) (\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) G(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) \Big\} + O(\varepsilon_m^2) + \sum_{j=1}^{4} O(\exp(z_j^{(1)})) + \sum_{j=1}^{4} O(\exp(z_j^{(2)})) = 0 \tag{22}$$

Из уравнения (22) следует, что при $\varepsilon_m \to 0$, $ml^{(1)} \to \infty$, $ml^{(2)} \to \infty$, уравнение (10) распадается на уравнения:

$$K_2^{(r)}(\eta_m^{(r)}) = 0,\; K_1^{(r)}(\eta_m^{(r)}) = 0,\; L(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) = 0,\; G(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) = 0,\; K_3^{(r)}(\eta_m^{(r)}) = 0;\;\; r = 1,2 \tag{23}$$

$$L(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) = K_2^{(1)}(\eta_m^{(1)}) Q^{(2)}(\eta_m^{(2)}) + \left(\frac{B_{66}^{(2)}}{B_{66}^{(1)}} \right)^2 K_2^{(2)}(\eta_m^{(2)}) Q^{(1)}(\eta_m^{(1)}) +$$

$$+ \frac{B_{66}^{(2)}}{B_{66}^{(1)}} \left[2 \left(y_1^{(1)} y_2^{(1)} - \frac{B_{12}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}} (1 - (\eta_m^{(1)})^2) \right) \left(y_1^{(2)} y_2^{(2)} - \frac{B_{12}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}} (1 - (\eta_m^{(2)})^2) \right) + \right.$$

$$\left. + (y_2^{(1)} + y_1^{(1)})(y_2^{(2)} + y_1^{(2)})((1 - (\eta_m^{(2)})^2) y_1^{(1)} y_2^{(1)} + (1 - (\eta_m^{(1)})^2) y_1^{(2)} y_2^{(2)}) \right];$$

$$K_2^{(r)}(\eta_m^{(r)}) = (1 - (\eta_m^{(r)})^2) \left(\frac{B_{12}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} - (\eta_m^{(r)})^2 \right) - (\eta_m^{(r)})^2 y_1^{(r)} y_2^{(r)},\; r = 1, 2;$$

$$Q^{(r)}(\eta_m^{(r)}) = y_1^{(r)} y_2^{(r)} + \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (1 - (\eta_m^{(r)})^2),\;\; r = 1, 2.$$

$$G(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) = K_1^{(1)}(\eta_m^{(1)}) + \left(\frac{B_{11}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}} \right)^2 K_1^{(2)}(\eta_m^{(2)}) + \frac{B_{11}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}} \left[2 \left(y_3^{(1)} y_4^{(1)} + \frac{B_{12}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}} \right) \left(y_3^{(2)} y_4^{(2)} + \frac{B_{12}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}} \right) + \right.$$

$$\left. + (y_3^{(1)} + y_4^{(1)})(y_3^{(2)} + y_4^{(2)})(y_3^{(1)} y_4^{(1)} + y_3^{(2)} y_4^{(2)}) \right],\;\; m = \overline{1, +\infty};$$

$$K_1^{(r)}(\eta_m^{(r)}) = \left(y_3^{(r)} y_4^{(r)} \right)^2 + 4 \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} y_3^{(r)} y_4^{(r)} - \left(\frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} \right)^2,\; r = 1, 2.$$

Асимптотическое представление дисперсионного уравнения (10) при $ml^{(2)} \to \infty$. При использовании предыдущих формул полагается, что $\chi_1^{(2)}$, $\chi_2^{(2)}$, $\chi_3^{(2)}, \chi_4^{(2)}$ (корни уравнения (7) при $r=2$) имеют положительные действительные части. Тогда уравнение (10) при $ml^{(2)} \to \infty$ можно привести к виду:

$$\mathrm{Det}\left\| t_{ij} \right\|_{i,j=1}^{4} = \mathrm{Det}\left\| t_{ij} \right\|_{i,j=1}^{3} \cdot \mathrm{Det}\, t_{44} + \sum_{j=1}^{4} O(\exp(z_j^{(2)})) = 0 \tag{24}$$

Откуда следует, что при $ml^{(2)} \to \infty$ уравнение (10) распадается на уравнения:

$$\mathrm{Det}\left\| t_{ij} \right\|_{i,j=1}^{3} = \left(B_{11}^{(1)} / (B_{12}^{(1)} + B_{66}^{(1)}) \right)^2 \left(B_{11}^{(2)} / (B_{12}^{(2)} + B_{66}^{(2)}) \right) \left(N^{(1)}(\eta_m^{(1)}) \right)^2 N^{(2)}(\eta_m^{(2)})\ X$$

$$\left\{ \left(K_3^{(1)}(\eta_m^{(1)}) \right)^2 K_3^{(2)}(\eta_m^{(2)})\, \mathrm{Det}\left\| e_{ij} \right\|_{i,j=1}^{6} \mathrm{Det}\left\| b_{ij} \right\|_{i,j=1}^{6} \right\} + O(\varepsilon_m^2) = 0 \tag{25}$$

$$\mathrm{Det}\left\| t_{44} \right\| = \left(B_{11}^{(2)} / B_{11}^{(1)} \right)^2 \left(B_{66}^{(2)} / B_{11}^{(1)} \right)^2 N^{(2)}(\eta_m^{(2)}) \left\{ K_3^{(2)}(\eta_m^{(2)}) K_1^{(2)}(\eta_m^{(2)}) K_2^{(2)}(\eta_m^{(2)}) \right\} + O(\varepsilon_m^2) = 0 \tag{26}$$

Первое из них при $m \in N$ определяет частоты всевозможных собственных интерфейсных и краевых колебаний ЦО, составленных из конечной и полубесконечной ортотропных замкнутых (незамкнутых) ЦО со свободным торцом $\alpha = l^{(1)}$ [4]. Второе уравнение определяет всевозможные краевые колебания полубесконечной замкнутой (незамкнутой) ЦО со свободным торцом $\alpha = -l^{(2)}$, изготовленной из материала левой (2) ЦО [5]. Численные результаты показывают, что асимптотические уравнения (14), (22) и (24) дисперсионного уравнения (10) являются хорошим ориентиром для нахождения собственных частот интерфейсных и краевых колебаний задачи (1)-(5).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гулгазарян Г.Р., Гулгазарян Р.Г. О свободных интерфейсных колебаниях тонких упругих круговых цилиндрических оболочек // Механика машин, механизмов и материалов. 2013. № 4 (25). С.12-19.
2. Гулгазарян Г.Р., Мелконян А.Т., Саакян С.А. О свободных интерфейсных и краевых колебаниях тонкой упругой пластины-полосы и прямоугольной пластины со свободными противолежащими краями./ АГПУ им. Х. Абовяна. Ученые записки, 2015. №20(21), С.54-68.
3. Гулгазарян Г.Р., Гулгазарян Р.Г., Михасев Г.И. О свободных интерфейсных и краевых колебаниях тонких упругих полубесконечных пластин //Механика машин, механизмов и материалов. 2015. №2 (35). С.29-36.
4. Гулгазарян Г.Р., Гулгазарян Р.Г., Михасев Г.И. Свободные интерфейсные и краевые колебания тонких упругих полубесконечных круговых цилиндрических оболочек со свободными торцами /Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Ереван: Чартарагет, 2014. С.187-191.
5. Gulgazaryan G.R. Vibrations of semi-infinite orthotropic cylindrical shells of open profile // Int. Appl. Mechanics. 40 (2) (2004). Pp. 199-212.

Сведения об авторах:

Гулгазарян Гурген Рубенович, профессор, д.ф.-м.н. АГПУ им. Х.Абовяна. Проф. кафедры мат. анализа и теории функций. Тигран Мец 17, 0010, Ереван, Армения. **Тел.:** (+37410) 649121, (+37491) 706700. **E-mail:** ghulgr@yahoo.com

Гулгазарян Лусине Гургеновна, д.ф.-м.н., ведуший научн. сотр. Института механики НАН Армении. Доцент кафедры мат. анализа и теории функций АГПУ им. Х. Абовяна. Тигран Мец 17, 0010, Ереван, Армения. **Тел.:** (+37410) 618155, (+37491) 302554. **E-mail:** lusina@mail.ru

Михасев Геннадий Иванович, профессор, д.ф.-м.н. Заведующий кафедрой био-и наномеханики БГУ. 220030, Беларусь, г. Минск, Пр. Независимости, 4. **E-mail:** gimikhasev@rambler.ru

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ДВУХСЛОЙНОЙ ОРТОТРОПНОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ПОЛНОМ КОНТАКТЕ МЕЖДУ СЛОЯМИ

Гулгазарян Л.Г., Барсегян М.

Рассматриваются вынужденные колебания двухслойной ортотропной оболочки при полном контакте между слоями, когда нижняя лицевая поверхность подвержена динамическому воздействию. Определены амплитуды вынужденных колебаний. Установлены условия возникновения резонанса.

1. Основные уравнения и постановка краевой задачи. Рассматриваются вынужденные колебания двухслойной ортотропной оболочки $\Omega = \{\alpha, \beta, \gamma; \alpha, \beta \in \Omega_0, -h_2 \le \gamma \le h_1\}$, где Ω_0 – поверхность контакта слоёв, α, β – линии кривизны поверхности контакта слоёв, γ – прямолинейная ось, направленная перпендикулярно к поверхности контакта слоёв. Требуется найти ненулевые решения динамических уравнений теории упругости в выбранной триортогональной системе координат. Для упрощения выкладок будем пользоваться компонентами несимметричного тензора напряжений τ_{ij} [1] и введём обозначения $\tilde{\gamma}_i = 1 + \gamma / R_i \quad (i = 1,2)$, где R_1 и R_2 – главные радиусы кривизны поверхности контакта слоёв.

Имеем:

уравнения движения

$$\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(B\tau_{\alpha\alpha}^{(j)}\right) - k_\beta \tau_{\beta\beta}^{(j)} + \frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(A\tau_{\beta\alpha}^{(j)}\right) + k_\alpha \tau_{\alpha\beta}^{(j)} + \tilde{\gamma}_1 \frac{\partial \tau_{\alpha\gamma}^{(j)}}{\partial\gamma} + \frac{2\tau_{\alpha\gamma}^{(j)}}{R_1} = \rho^{(j)}\tilde{\gamma}_1\tilde{\gamma}_2 \frac{\partial^2 U^{(j)}}{\partial t^2} \quad j = I, II$$

$$(A, B; \alpha, \beta; R_1, R_2; U, V)$$

$$\frac{\partial \tau_{\gamma\gamma}^{(j)}}{\partial\gamma} - \left(\frac{\tau_{\alpha\alpha}^{(j)}}{R_1} + \frac{\tau_{\beta\beta}^{(j)}}{R_2}\right) + \frac{1}{A}\frac{\partial \tau_{\alpha\gamma}^{(j)}}{\partial\alpha} + \frac{1}{B}\frac{\partial \tau_{\beta\gamma}^{(j)}}{\partial\beta} + k_\beta \tau_{\alpha\gamma}^{(j)} + k_\alpha \tau_{\beta\gamma}^{(j)} = \rho^{(j)}\tilde{\gamma}_1\tilde{\gamma}_2 \frac{\partial^2 W^{(j)}}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

$\tilde{\gamma}_1 \tau_{\alpha\beta}^{(j)} = \tilde{\gamma}_2 \tau_{\beta\alpha}^{(j)}$ (условие симметрии)

уравнения состояния (соотношения упругости)

$$\tilde{\gamma}_2\left(\frac{1}{A}\frac{\partial U^{(j)}}{\partial\alpha} + k_\alpha V^{(j)} + \frac{W^{(j)}}{R_1}\right) = \tilde{\gamma}_1 a_{11}^{(j)}\tau_{\alpha\alpha}^{(j)} + \tilde{\gamma}_2 a_{12}^{(j)}\tau_{\beta\beta}^{(j)} + a_{13}^{(j)}\tau_{\gamma\gamma}^{(j)}$$

$$(A, B; \quad \alpha \leftrightarrow \beta; \quad R_1 \leftrightarrow R_2; \quad U \leftrightarrow V; \quad a_{11}^{(j)}, a_{22}^{(j)}; \quad a_{13}^{(j)}, a_{23}^{(j)})$$

$$\tilde{\gamma}_1\tilde{\gamma}_2 \frac{\partial W^{(j)}}{\partial\gamma} = \tilde{\gamma}_1 a_{13}^{(j)}\tau_{\alpha\alpha}^{(j)} + \tilde{\gamma}_2 a_{23}^{(j)}\tau_{\beta\beta}^{(j)} + a_{33}^{(j)}\tau_{\gamma\gamma}^{(j)},$$

$$\tilde{\gamma}_1\left(\frac{1}{B}\frac{\partial U^{(j)}}{\partial\beta} - k_\beta V^{(j)}\right) + \tilde{\gamma}_2\left(\frac{1}{A}\frac{\partial V^{(j)}}{\partial\alpha} - k_\alpha U^{(j)}\right) = \tilde{\gamma}_1 a_{66}^{(j)}\tau_{\alpha\beta}^{(j)}, \quad (1.2)$$

$$\tilde{\gamma}_1\tilde{\gamma}_2 \frac{\partial U^{(j)}}{\partial\gamma} - \tilde{\gamma}_2 \frac{U^{(j)}}{R_1} + \frac{1}{A}\tilde{\gamma}_2 \frac{\partial W^{(j)}}{\partial\alpha} = \tilde{\gamma}_1 a_{55}^{(j)}\tau_{\alpha\gamma}^{(j)}$$

$$(A, B; \quad \alpha, \beta; \quad R_1 \leftrightarrow R_2; \quad U, V; \quad a_{55}^{(j)}, a_{44}^{(j)})$$

где k_α, k_β – геодезические кривизны, A, B – коэффициенты первой квадратичной формы, $\rho^{(j)}$ – плотности слоёв, $a_{ik}^{(j)}$ – постоянные упругости.

На лицевой поверхности $\gamma = h_1$ заданы следующие граничные условия:

$$U^I(h_1)=0,\quad V^I(h_1)=0,\quad W^I(h_1)=0 \tag{1.3}$$

а на поверхности $\gamma=-h_2$

$$U^{II}(-h_2)=u^-(\alpha,\beta)\exp(i\Omega t),\ V^{II}(-h_2)=\mathrm{v}^-(\alpha,\beta)\exp(i\Omega t),\ W^{II}(-h_2)=w^-(\alpha,\beta)\exp(i\Omega t) \tag{1.4}$$

На поверхности контакта слоёв заданы условия полного контакта

$$\tau^I_{\alpha\gamma}(\gamma=0)=\tau^{II}_{\alpha\gamma}(\gamma=0),\ \ \tau^I_{\beta\gamma}(\gamma=0)=\tau^{II}_{\beta\gamma}(\gamma=0),\ \ \tau^I_{\gamma\gamma}(\gamma=0)=\tau^{II}_{\gamma\gamma}(\gamma=0) \tag{1.5}$$

$$U^I(\gamma=0)=U^{II}(\gamma=0),\ \ V^I(\gamma=0)=V^{II}(\gamma=0),\ W^I(\gamma=0)=W^{II}(\gamma=0) \tag{1.6}$$

Условия на боковой поверхности не конкретизируются, ими обусловлено в данном классе задач появление пограничного слоя.

2. Решение внутренней задачи. В уравнениях (1.1), (1.2) перейдём к безразмерным координатам и перемещениям по формулам:

$$\alpha=R\xi,\ \beta=R\eta,\ \gamma=\varepsilon R\zeta=h\zeta,\ U=Ru,\quad V=R\mathrm{v},\ \ W=Rw,\ \ h=\max\{h_1,h_2\}$$

где R – характерный размер оболочки (наименьший из радиусов кривизны и линейных размеров поверхности контакта слоёв), $\varepsilon=h/R$ – малый параметр. Решение преобразованных уравнений будем искать в виде

$$Q^{(j)}_{\alpha\beta}=Q^{(j)}_{mk}(\xi,\eta,\zeta)\exp(i\Omega t)\quad(\alpha,\beta,\gamma);\quad m,k=1,2,3;\quad j=I,II \tag{2.1}$$

где $Q^{(j)}_{\alpha\beta}$ – любая из величин напряжений и перемещений, Ω – частота вынуждающего внешнего воздействия. В результате получается сингулярно возмущённая малым параметром ε система уравнений относительно $Q^{(j)}_{mk}$, решение которой представляется в виде суммы решений внутренней (interior) задачи и пограничных (boundary) слоёв [1,2,6].

Решение внутренней задачи будем искать в виде асимптотического представления [3,4]

$$\begin{gathered}\tau^{\mathrm{int}(j)}_{mk}(\xi,\eta,\zeta)=\varepsilon^{-1+s}\tau^{(j,s)}_{mk}(\xi,\eta,\zeta),\quad m,k=1,2,3;\quad s=\overline{0,N},\ j=I,II\\ \left(u^{\mathrm{int}(j)}(\xi,\eta,\zeta),\mathrm{v}^{\mathrm{int}(j)}(\xi,\eta,\zeta),w^{\mathrm{int}(j)}(\xi,\eta,\zeta)\right)=\varepsilon^s\left(u^{(j,s)}(\xi,\eta,\zeta),\mathrm{v}^{(j,s)}(\xi,\eta,\zeta),w^{(j,s)}(\xi,\eta,\zeta)\right)\end{gathered} \tag{2.2}$$

Здесь и далее $s=\overline{0,N}$ означает, что по немому (повторяющемуся) индексу s происходит суммирование в пределах $0,N$.

Решение задачи должно удовлетворять условиям (1.3)–(1.6). Зная вышеуказанную структуру общего решения, для определения величин $\tau^{(j,s)}_{mk}$, $u^{(j,s)}$, (u,v,w) внутренней задачи из условий (1.3)–(1.6) соответственно будут следовать следующие граничные условия при $\zeta=\zeta_1$ $(\zeta_1=h_1/h)$:

$$u^{(I,s)}(\zeta=\zeta_1)=-\overline{u}^{(I,s)}_b(\zeta=\zeta_1)\quad(u,\mathrm{v},w) \tag{2.3}$$

и условия при $\zeta=-\zeta_2$ $(\zeta_2=h_2/h)$

$$u^{(II,s)}(\zeta=-\zeta_2)=u^{-(II,s)}(\xi,\eta)\qquad(u,\mathrm{v},w) \tag{2.4}$$

где $u^{-(II,0)}=u^-/R,\ \overline{u}^{(I,0)}_b(\zeta=\zeta_1)=0,\ \ u^{-(II,s)}=-\overline{u}^{(II,s)}_b(\zeta=-\zeta_2),\ \ s\neq0\quad(u,\mathrm{v},w)$.

Величины $\overline{u}^{(j,s)}_b$, (u,v,w) определяются после построения решения пограничного слоя.

Подставив выражения (2.2) в полученную сингулярно возмущённую систему уравнений и приравняв в каждом уравнении коэффициенты при одинаковых степенях ε, для определения неизвестных коэффициентов $Q^{(j,s)}_{mk}$ разложения (2.2) получается непротиворечивая система, которая запишется в следующем виде:

$$\tau^{(j,s)}_{12}=P^{(j,s-1)}_{1\tau},\ \tau^{(j,s)}_{21}=P^{(j,s-1)}_{1\tau}-r_2\zeta\tau^{(j,s-1)}_{21}+r_1\zeta\tau^{(j,s-1)}_{12},\ \sum\nolimits_1^{(j,s)}=P^{(j,s-1)}_{2\tau},\sum\nolimits_2^{(j,s)}=P^{(j,s-1)}_{3\tau},\ \ j=I,II$$

$$\frac{\partial\tau^{(j,s)}_{13}}{\partial\zeta}+\rho^{(j)}\Omega^2_*u^{(j,s)}=P^{(j,s-1)}_{6\tau},\ (13,23,33;\quad u,\mathrm{v},w;\quad 6\tau,5\tau,4\tau) \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial u^{(j,s)}}{\partial\zeta}-a_{55}^{(j)}\tau_{13}^{(j,s)}=P_u^{(j,s-1)},\ \frac{\partial \mathrm{v}^{(j,s)}}{\partial\zeta}-a_{44}^{(j)}\tau_{23}^{(j,s)}=P_{\mathrm{v}}^{(j,s\text{-}1)},\ \frac{\partial w^{(j,s)}}{\partial\zeta}-\sum\nolimits_3^{(j,s)}=P_w^{(j,s-1)},$$

$$r_1=\frac{R}{R_1},\ r_2=\frac{R}{R_2},\ \Omega_*^2=h^2\Omega^2,\ \sum\nolimits_i^{(j,s)}=a_{i1}^{(j)}\tau_{11}^{(j,s)}+a_{i2}^{(j)}\tau_{22}^{(j,s)}+a_{i3}^{(j)}\tau_{33}^{(j,s)},\quad j=I,II$$

где

$$P_{1\tau}^{(j,s-1)}=\frac{1}{a_{66}}\left[\frac{1}{B}\frac{\partial u^{(j,s-1)}}{\partial\eta}-k_\beta R\mathrm{v}^{(j,s-1)}+r_1\zeta\left(\frac{1}{B}\frac{\partial u^{(j,s-2)}}{\partial\eta}-k_\beta R\mathrm{v}^{(j,s-2)}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{A}\frac{\partial \mathrm{v}^{(j,s-1)}}{\partial\xi}-k_\alpha Ru^{(j,s-1)}+r_2\zeta\left(\frac{1}{A}\frac{\partial \mathrm{v}^{(j,s-2)}}{\partial\xi}-k_\alpha Ru^{(j,s-2)}\right)-r_1\zeta a_{66}^{(j)}\tau_{12}^{(j,s-1)}\right]$$

$$P_{2\tau}^{(j,s-1)}=\frac{1}{A}\frac{\partial u^{(j,s-1)}}{\partial\xi}+k_\alpha R\mathrm{v}^{(j,s\text{-}1)}+r_1w^{(j,s-1)}-r_1\zeta a_{11}^{(j)}\tau_{11}^{(j,s-1)}+$$

$$+r_2\zeta\left(\frac{1}{A}\frac{\partial u^{(j,s-2)}}{\partial\xi}+k_\alpha R\mathrm{v}^{(j,s-2)}+r_1w^{(j,s-2)}\right)-r_2\zeta a_{12}^{(j)}\tau_{22}^{(j,s-1)}$$

$(2\tau,3\tau;\ A,B;\ \alpha,\beta;\ r_1\leftrightarrow r_2;\ \ \xi,\eta;\ \ u\leftrightarrow \mathrm{v};\ \ \tau_{11}\leftrightarrow\tau_{22};\ a_{11}^{(j)},a_{22}^{(j)})$

$$P_{4\tau}^{(j,s-1)}=r_1\tau_{11}^{(j,s-1)}+r_2\tau_{22}^{(j,s-1)}-\frac{1}{A}\frac{\partial\tau_{13}^{(j,s-1)}}{\partial\xi}-\frac{1}{B}\frac{\partial\tau_{23}^{(j,s-1)}}{\partial\eta}-k_\beta R\tau_{13}^{(j,s-1)}-k_\alpha R\tau_{23}^{(j,s-1)}-$$

$$-(r_1+r_2)\zeta\rho^{(j)}\Omega_*^2w^{(j,s-1)}-r_1r_2\zeta^2\rho^{(j)}\Omega_*^2w^{(j,s-2)} \tag{2.6}$$

$$P_{5\tau}^{(j,s-1)}=-\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(A\tau_{22}^{(j,s-1)}\right)+k_\alpha R\tau_{11}^{(j,s-1)}-\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(B\tau_{12}^{(j,s-1)}\right)-k_\beta R\tau_{21}^{(j,s-1)}-r_2\zeta\frac{\partial\tau_{23}^{(j,s-1)}}{\partial\zeta}-2r_2\tau_{23}^{(j,s-1)}-$$

$$-(r_1+r_2)\zeta\rho^{(j)}\Omega_*^2\mathrm{v}^{(j,s-1)}-r_1r_2\zeta^2\rho^{(j)}\Omega_*^2\mathrm{v}^{(j,s-2)}$$

$(5\tau,6\tau;\quad A,B;\quad u,\mathrm{v};\quad \alpha,\beta;\quad r_2,r_1;\quad \xi,\eta;\quad \tau_{11},\tau_{22};\quad \tau_{12},\tau_{21};\quad \tau_{23},\tau_{13})$

$$P_u^{(j,s-1)}=-\zeta(r_1+r_2)\frac{\partial u^{(j,s-1)}}{\partial\zeta}-\zeta^2r_1r_2\frac{\partial u^{(j,s-2)}}{\partial\zeta}+r_1u^{(j,s-1)}+\zeta r_1r_2u^{(j,s-2)}-\frac{1}{A}\frac{\partial w^{(j,s-1)}}{\partial\xi}-$$

$$-\frac{r_2\zeta}{A}\frac{\partial w^{(j,s-2)}}{\partial\xi}+r_1\zeta a_{55}^{(j)}\tau_{13}^{(j,s-1)}\qquad (u,\mathrm{v};\quad A,B;\quad r_1\leftrightarrow r_2;\quad \xi,\eta;\quad \tau_{13},\tau_{23};\quad a_{55}^{(j)},a_{44}^{(j)})$$

$$P_w^{(s-1)}=-\zeta(r_1+r_2)\frac{\partial w^{(j,s-1)}}{\partial\zeta}-\zeta^2r_1r_2\frac{\partial w^{(j,s-2)}}{\partial\zeta}+r_1\zeta a_{13}^{(j)}\tau_{11}^{(j,s-1)}+r_2\zeta a_{23}^{(j)}\tau_{22}^{(j,s-1)}$$

Используя соотношения (2.5), компоненты тензора напряжений можно выразить через $u^{(j,s)}$, $\mathrm{v}^{(j,s)}$, $w^{(j,s)}$:

$$\tau_{13}^{(j,s)}=\frac{1}{a_{55}^{(j)}}\left[\frac{\partial u^{(j,s)}}{\partial\zeta}-P_u^{(j,s-1)}\right],\qquad \tau_{23}^{(j,s)}=\frac{1}{a_{44}^{(j)}}\left[\frac{\partial \mathrm{v}^{(j,s)}}{\partial\zeta}-P_{\mathrm{v}}^{(j,s-1)}\right] \tag{2.7}$$

$$\tau_{12}^{(j,s)}=P_{1\tau}^{(j,s-1)},\qquad \tau_{21}^{(s)}=P_{1\tau}^{(j,s-1)}-r_2\zeta\tau_{21}^{(j,s-1)}+r_1\zeta\tau_{12}^{(j,s-1)}$$

$$\tau_{11}^{(j,s)}=\frac{1}{\Delta^{(j)}}\left[\Delta_2^{(j)}\frac{\partial w^{(j,s)}}{\partial\zeta}+\Delta_{23}^{(j)}P_{2\tau}^{(j,s-1)}+\Delta_1^{(j)}P_{3\tau}^{(j,s-1)}-\Delta_2^{(j)}P_w^{(j,s-1)}\right]$$

$(11,22,33;\quad \Delta_2,\Delta_3,\Delta_{12};\quad \Delta_{23},\Delta_1,\Delta_2;\quad \Delta_1,\Delta_{13},\Delta_3)$

где

$$\Delta_1^{(j)}=a_{13}^{(j)}a_{23}^{(j)}-a_{33}^{(j)}a_{12}^{(j)},\ \Delta_2^{(j)}=a_{12}^{(j)}a_{23}^{(j)}-a_{22}^{(j)}a_{13}^{(j)},\ \Delta_3^{(j)}=a_{13}^{(j)}a_{12}^{(j)}-a_{11}^{(j)}a_{23}^{(j)} \tag{2.8}$$

$\Delta^{(j)} = a_{11}^{(j)}\Delta_{23}^{(j)} + a_{13}^{(j)}\Delta_2^{(j)} + a_{12}^{(j)}\Delta_1^{(j)}$, $\Delta_{ik}^{(j)} = a_{ii}^{(j)}a_{kk}^{(j)} - (a_{ik}^{(j)})^2$, $\quad i,k = 1,2,3;$

Для определения компонент вектора перемещения получаются уравнения:

$$\frac{\partial^2 u^{(j,s)}}{\partial\zeta^2} + a_{55}^{(j)}\rho^{(j)}\Omega_*^2 u^{(j,s)} = a_{55}^{(j)}P_{6\tau}^{(j,s-1)} + \frac{\partial P_u^{(j,s-1)}}{\partial\zeta},\ (u,\mathrm{v};\quad a_{55}^{(j)}, a_{44}^{(j)};\quad 6\tau,5\tau)$$

$$\frac{\partial^2 w^{(j,s)}}{\partial\zeta^2} + \frac{\Delta^{(j)}}{\Delta_{12}^{(j)}}\rho^{(j)}\Omega_*^2 w^{(j,s)} = F_w^{(j,s-1)} \tag{2.9}$$

$$F_w^{(j,s-1)} = \frac{1}{\Delta_{12}^{(j)}}\left[\Delta^{(j)}P_{4\tau}^{(j,s-1)} - \Delta_2^{(j)}\frac{\partial P_{2\tau}^{(j,s-1)}}{\partial\zeta} - \Delta_3^{(j)}\frac{\partial P_{3\tau}^{(j,s-1)}}{\partial\zeta} + \Delta_{12}^{(j)}\frac{\partial P_w^{(j,s-1)}}{\partial\zeta}\right],\ j = I, II$$

решения которых имеют вид:

$$u^{(j,s)}(\xi,\eta,\zeta) = C_1^{(j,s)}(\xi,\eta)\sin\chi^{(j,u)}\zeta + C_2^{(j,s)}(\xi,\eta)\cos\chi^{(j,u)}\zeta + \overline{u}^{(j,s)}(\xi,\eta,\zeta)$$

$$(u,\mathrm{v},w;\ 1,3,5;\ 2,4,6) \tag{2.10}$$

где

$$\chi^{(j,u)} = \sqrt{a_{55}^{(j)}\rho^{(j)}}\Omega_*,\ \chi^{(j,\mathrm{v})} = \sqrt{a_{44}^{(j)}\rho^{(j)}}\Omega_*,\ \chi^{(j,w)} = \sqrt{\frac{\Delta^{(j)}\rho^{(j)}}{\Delta_{12}^{(j)}}}\Omega_*,\qquad j = I, II$$

а $\overline{u}^{(j,s)}$, $\overline{\mathrm{v}}^{(j,s)}$, $\overline{w}^{(j,s)}$ являются частными решениями уравнений (2.9).

Подставив выражения (2.10) в соотношения (2.7) и удовлетворив условиям контакта и граничным условиям (1.5), (1.6), (2.3), (2.4), получаются три алгебраические системы относительно неизвестных $C_i^{(j,s)}$. После подстановки вычисленных $C_i^{(j,s)}$ в (2.10), компоненты вектора перемещения во внутренней задаче примут вид:

$$\begin{aligned} u^{\mathrm{int}(I,s)} &= \frac{1}{\Delta_u}[B_{1u}^{(I,s)}\sin\chi^{(I,u)}(\zeta-\zeta_1) + B_{2u}^{(I,s)}\sin(\chi^{(I,u)}\zeta - \chi^{(II,u)}\zeta_2) + \\ &+ B_{3u}^{(I,s)}\sin(\chi^{(II,u)}\zeta_2 + \chi^{(I,u)}\zeta)] + \overline{u}^{(I,s)}(\xi,\eta,\zeta)\quad (u,\mathrm{v},w) \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned} u^{\mathrm{int}(II,s)} &= \frac{1}{\Delta_u}[B_{1u}^{(II,s)}\sin\chi^{(II,u)}(\zeta+\zeta_2) + B_{2u}^{(II,s)}\sin(\chi^{(I,u)}\zeta_1 - \chi^{(II,u)}\zeta) + \\ &+ B_{3u}^{(II,s)}\sin(\chi^{(I,u)}\zeta_1 + \chi^{(II,u)}\zeta)] + \overline{u}^{(II,s)}(\xi,\eta,\zeta)\quad (u,\mathrm{v},w) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_u &= (\chi^{(II,u)}a_{55}^I + \chi^{(I,u)}a_{55}^{II})\sin(\chi^{(I,u)}\zeta_1 + \chi^{(II,u)}\zeta_2) + (\chi^{(II,u)}a_{55}^I - \chi^{(I,u)}a_{55}^{II})\sin(\chi^{(I,u)}\zeta_1 - \chi^{(II,u)}\zeta_2) \\ &(u,\mathrm{v},w; a_{55}^{(j)}, a_{44}^{(j)}, \Delta^{(j)}/\Delta_{12}^{(j)}) \end{aligned} \tag{2.12}$$

$$B_{1u}^{(I,s)} = 2a_{55}^I(a_{55}^{II}T_{3u}^{(s)}\sin\chi^{(II,u)}\zeta_2 - T_{4u}^{(s)}\chi^{(II,u)} - T_{2u}^{(s)}\chi^{(II,u)}\cos\chi^{(II,u)}\zeta_2)$$

$$B_{2u}^{(I,s)} = T_{1u}^{(s)}(a_{55}^I\chi^{(II,u)} - a_{55}^{II}\chi^{(I,u)}),\qquad B_{3u}^{(I,s)} = T_{1u}^{(s)}(a_{55}^I\chi^{(II,u)} + a_{55}^{II}\chi^{(I,u)})$$

$$B_{1u}^{(II,s)} = 2a_{55}^{II}(T_{1u}^{(s)}\chi^{(I,u)} - T_{2u}^{(s)}\chi^{(I,u)}\cos\chi^{(I,u)}\zeta_1 - a_{55}^I T_{3u}^{(s)}\chi^{(II,u)}\sin\chi^{(I,u)}\zeta_1)$$

$$B_{2u}^{(II,s)} = T_{4u}^{(s)}(a_{55}^I\chi^{(II,u)} + a_{55}^{II}\chi^{(I,u)}),\qquad B_{3u}^{(II,s)} = T_{4u}^{(s)}(a_{55}^I\chi^{(II,u)} - a_{55}^{II}\chi^{(I,u)})$$

$$T_{1u}^{(s)} = -\overline{u}_b^{(I,s)}(\zeta=\zeta_1) - \overline{u}^{(I,s)}(\zeta=\zeta_1)$$

$$\begin{aligned} T_{2u}^{(s)} &= \overline{u}^{(II,s)}(\zeta=0) - \overline{u}^{(I,s)}(\zeta=0),\qquad T_{4u}^{(s)} = u^{-(II,s)}(\zeta=-\zeta_2) - \overline{u}^{(II,s)}(\zeta=-\zeta_2) \\ &(u,\mathrm{v},w; a_{55}^{(j)}, a_{44}^{(j)}, \Delta^{(j)}/\Delta_{12}^{(j)}) \end{aligned} \tag{2.13}$$

$$T_{3u}^{(s)} = \frac{\chi^{(II,u)}}{a_{55}^{II}}\left[\frac{\partial\overline{u}^{(II,s)}(\zeta=0)}{\partial\zeta} - P_u^{(II,s-1)}(\zeta=0)\right] - \frac{\chi^{(I,u)}}{a_{55}^I}\left[\frac{\partial\overline{u}^{(I,s)}(\zeta=0)}{\partial\zeta} - P_u^{(I,s-1)}(\zeta=0)\right]\quad (u,\mathrm{v}; a_{55}^{(j)}, a_{44}^{(j)})$$

$$T_{3w}^{(s)} = \frac{\Delta_2^{II}}{\Delta^{II}}P_{2\tau}^{(II,s-1)} + \frac{\Delta_3^{II}}{\Delta^{II}}P_{3\tau}^{(II,s-1)} - \frac{\Delta_{12}^{II}}{\Delta^{II}}P_w^{(II,s-1)} - \frac{\Delta_2^I}{\Delta^I}P_{2\tau}^{(I,s-1)} - \frac{\Delta_3^I}{\Delta^I}P_{3\tau}^{(I,s-1)} + \frac{\Delta_{12}^I}{\Delta^I}P_w^{(I,s-1)}\bigg|_{\zeta=0}$$

Приводимые решения справедливы, если $\Delta_u \neq 0 \ (u, \mathrm{v}, w)$. А поскольку уравнения $\Delta_u = 0 \ (u, \mathrm{v}, w)$ являются уравнениями главных значений частот собственных колебаний двухслойных ортотропных оболочек [3,5], то резонанс наступит, когда значения частот вынуждающих внешних воздействий совпадут с этими частотами собственных колебаний. При заданной частоте Ω, во избежание резонанса, необходимо соответствующим образом подобрать параметры оболочки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 414с.
2. Агаловян Л.А., Гулгазарян Л.Г. Асимптотические решения неклассических краевых задач о собственных колебаниях ортотропных оболочек. //ПММ. 2006. Т.70. Вып.1. С.111-125.
3. Гулгазарян Л.Г. Собственные колебания двухслойных ортотропных оболочек при полном контакте между слоями. // Тр. VI межд. конф.: Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Ереван, 2008. С.202–211.
4. Агаловян Л.А., Гулгазарян Л.Г. Неклассические краевые задачи о вынужденных колебаниях ортотропных оболочек.// Прикл. механика. 2009. Т.45. №8. С.105–122.
5. Гулгазарян Л.Г. Собственные колебания двухслойных ортотропных оболочек при неполном контакте между слоями. /Вестник Фонда фундаментальных исследований. Минск: 2013. №3(65). С.51-69.
6. Гулгазарян Л.Г. Вынужденные колебания ортотропных оболочек при наличии вязкого сопротивления.// ПММ. 2015. Т.79. Вып.3. С.405-419.

Сведения об авторах:

Гулгазарян Лусине Гургеновна, д.ф.-м.н., Институт механики НАН Армении, в.н.с.;
АГПУ им. Х. Абовяна, доцент
Адрес: пр. Маршала Баграмян, 24/2, 0019, Ереван, Армения; **тел.:** (+37491)302554,
E-mail: lusina@mail.ru

Барсегян Мариам, АГПУ им Х. Абовяна, факультет математики, физики и информатики, отделение математики, магистратура, 2-ой курс.

ОБ ОДНОМ НОВОМ ПОДХОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В КРУГЛОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЕ С ПРОНИЦАЕМЫМИ СТЕНКАМИ

Даниелян Л.Е., Терджян Ц.Э.

Рассматривается ламинарное стационарное изотермическое движение несжимаемой вязкой жидкости в цилиндрической трубе с проницаемыми стенками.

Приближённые уравнения такого движения в цилиндрических координатах с соответствующими граничными условиями, путём замены переменных, приводится к более удобному виду для решения.

Для одного частного случая определяются законы изменения давления и компоненты скорости движения жидкости.

1. Постановка задачи

Рассматривается ламинарное стационарное изотермическое движение несжимаемой вязкой жидкости в цилиндрической трубе с проницаемыми стенками.

Пусть в круглой неограниченной в одном направлении трубе, радиусом a происходит ламинарное стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости.

Принимается, что поступающая жидкость имеет равномерно распределённые и постоянные по входному сечению скорость U_H и давление P_H.

Приближённые уравнения такого движения в цилиндрических координатах будут [1]:

$$U_H \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial r}\right), \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = 0,$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rV_r\right) = 0,$$

где V_z и V_r – осевая и радиальная компоненты скорости, P – давление, ρ – плотность, ν – кинематический коэффициент вязкости жидкости.

Граничные условия для рассматриваемой задачи имеют вид:

$$\begin{aligned}
&\text{при } z=0 \quad V_z = U_H,\ P = P_H \\
&\text{при } z>0 \quad r=a,\ V_z=0,\ V_r = k\left(P-P_b\right) = \pm V_0 = \text{const} \\
&\text{при } z>0 \quad r=0,\ \frac{\partial V_z}{\partial r} = 0.
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь P_b – внешнее давление, k – коэффициент проницаемости трубы (постоянные величины).

При $k>0$ имеется отсос жидкости из трубы через проницаемую поверхность трубы, а при $k<0$ имеется место вдува жидкости.

Переходим к безразмерным величинам с помощью следующих соотношений (переменных):

$$x = \frac{z}{a},\quad y = \frac{r}{a},\quad u = \frac{V_z - U_H}{U_H},\quad v = \frac{V_r}{U_H},\quad P = \frac{P - P_H}{\rho U_H^2}.$$

Тогда уравнения (1.1) и граничные условия (1.2) в безразмерных переменных примут вид:

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial u}{\partial y} = \mathrm{Re}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial P}{\partial x}\right), \\
\dfrac{dP}{dy} = 0, \\
\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial}{\partial y}\left(vy\right) = 0,
\end{cases} \tag{1.3}$$

$$\begin{cases} \text{при} \quad x=0, \quad u=0, \quad P=0 \\ \text{при} \quad x>0, \quad y=0, \quad \nu=0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=0, \\ \text{при} \quad x>0, \quad y=1, \quad u=-1, \quad \nu=\pm\dfrac{V_0}{U_H}. \end{cases} \tag{1.4}$$

Здесь Re – число Рейнольдса.

2. Решение полученной краевой задачи.

Для решения этой задачи первое и третье уравнения системы (1.3) дифференцируем по переменной y. По условию $\left(\dfrac{\partial P}{\partial x}\right)'_y=0$ система (1.3) примет вид:

$$\begin{gathered} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y}\right)'_y=\mathrm{Re}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\ , \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\left(-\frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}(vy)\right)'_y . \end{gathered} \tag{2.1}$$

Значение $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ из второго уравнения (2.1) подставим в первое уравнение и получим:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y}\right)'_y=\left(-\frac{Re}{y}\frac{\partial}{\partial y}(vy)\right)'_y$$

или

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{Re}{y}\frac{\partial}{\partial y}(vy)\right)'_y=0 \tag{2.2}$$

Из (2.2) следует, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{Re}{y}\frac{\partial}{\partial y}(vy)=\varphi(x), \tag{2.3}$$

где $\varphi(x)$ – произвольная функция.

Из (2.3)

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial y}+Re\frac{\partial}{\partial y}(vy)=y\varphi(x) \tag{2.4}$$

Нетрудно заметить, что левая часть этого уравнения представляет производное по переменной y выражения $y\frac{\partial u}{\partial y}+Re(vy)$ и уравнение (2.4) примет вид

$$\left(y\frac{\partial u}{\partial y}+Re(vy)\right)'_y=y\varphi(x).$$

Интегрируя это равенство по переменной y, получим:

$$y\frac{\partial u}{\partial y}+Re(vy)=\frac{y^2}{2}\varphi(x)+\psi(x), \tag{2.5}$$

где $\psi(x)$ – произвольная функция интегрирования. Разделив (2.5) на y, получим

$$\frac{\partial u}{\partial y}+Rev=\frac{y}{2}\varphi(x)+\frac{\psi(x)}{y}$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{2}\varphi(x) + \frac{\psi(x)}{y} - Rev,$$

откуда для составляющей скорости u получим выражение:

$$u = y^2\varphi(x) + \psi(x)\ln y - Re\int vdy. \qquad (2.6)$$

Для определения вида функции *P(x)*, предварительно вычислим $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ и подставим в первое уравнение системы (1.3).

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y\varphi(x) + \frac{\psi(x)}{y} - Rev,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2\varphi(x) - \frac{\psi(x)}{y^2} - Re\frac{\partial v}{\partial y},$$

Учитывая, что из третьего уравнения системы (1.3)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}(vy),$$

получим следующее выражение:

$$2\varphi(x) - \frac{\psi(x)}{y^2} - Re\frac{\partial v}{\partial y} + 2\varphi(x) + \frac{\psi(x)}{y^2} - \frac{Re}{y}v = Re\left(-\frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}(vy) + \frac{\partial P}{\partial x}\right)$$

или

$$4\varphi(x) - Re\frac{\partial v}{\partial y} - Re\frac{v}{y} = Re\left(-\frac{v}{y} - \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial x}\right)$$

Соединив подобные члены, получим

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{4}{Re}\varphi(x), \qquad (2.7)$$

Интегрируя по переменной *x*, для *P(x)* получим

$$P(x) = \frac{4}{Re}\int\varphi(x)dx. \qquad (2.8)$$

Так как по характеру движения *P(x)*–убывающая функция на множестве [0;+∞), то, в частности, для давления *P(x)* получено следующее выражение:

$$P(x) = P_н e^{-\frac{x}{Re}}$$

Подставляя значение *P(x)* в (2.8) и продифференцируя по переменной *x*, находим произвольную функцию $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = -\frac{P_н}{4}e^{-\frac{x}{Re}} \qquad (2.9)$$

Имея значение функции $\varphi(x)$ из (2.3), из третьего уравнения (1.3) можно определить составляющие скорости движения $U(x;y)$ и $V(x;y)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тарг С.М. Основные задачи теории ламинарных течений. М.–Л.: 1951.
2. Бабаджанян Г.А., Даниелян Л.Е. О нестационарном движении реального газа в трубах с проницаемыми стенками. //Изв. НАН Армении. Механика. 1997. Т.50. №1. С.53–61.
3. Даниелян Л.Е., Терджян Ц.Э. Движение жидкости в круглой цилиндрической трубе с проницаемыми стенками. //Труды VIII международной конференции «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред». Горис-Степанакерт – 2014.

Сведения об авторах:

Даниелян Лейнад Ервандович – профессор, **тел.:**(+37410)254874; (+37494)200129.

Терджян Цолак Эрнестович – доцент, **тел.:** (+37410)77 24 69; (+37455)59 15 74

Национальный аграрный университет Армении, кафедра высшей математики и теоретической механики

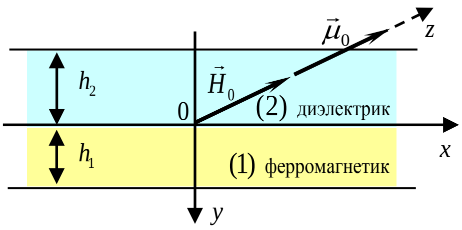
УПРУГО-СПИНОВЫЕ ВОЛНЫ ТИПА ФЛОКЕ В ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ

Даноян З.Н., Агаян К.Л., Атоян Л.А., Саакян С.Л., Манукян С.М.

В работе исследуются вопросы существования и распространения упруго-спиновых волн в периодической среде ферромагнит-диэлектрик. Найдены волновые поля и соответствующее дисперсионное уравнение, установлено также существование зон пропускания и зон умолчания в спектре частот искомых волн.

1. Введение. Как известно, в магнитоупорядоченных средах (например, ферромагнит) могут распространяться волны особой природы, называемые спиновыми (магнитными) волнами, и поскольку существует связь между колебаниями спинов и колебаниями ионов кристаллической решётки, то спиновые волны должны сопровождаться упругими волнами и, наоборот [1-4]. Таким образом, в магнитоупорядоченных кристаллах должны распространяться не чисто спиновые и не чисто упругие, а связанные упруго-спиновые (магнитоупругие) волны, этот эффект в физике называется магнон-фононным взаимодействием. В предлагаемой работе эта взаимосвязь учтена.

В последние годы большое внимание привлекают также вопросы существования и распространения квазипериодических волн, иногда называемых волнами Блоха-Флоке, в периодических структурах [5-8], при этом, особое внимание уделяется исследованию условий, при которых волновой процесс невозможен, т.е. когда в частотном спектре исследуемых волн существуют запретные полосы. Данная работа посвящена вопросам существования и распространения упруго-спиновых волн в слоистой, периодической структуре: ферромагнит-диэлектрик. Задача решается с использованием уравнений, учитывающих взаимосвязь спиновых (магнитных) и упругих возмущений [1-3, 5], перечислим их: это уравнение механического движения среды, уравнение Ландау-Лифшица для движения магнитного момента, а также квазистатическое уравнение Максвелла для магнитного поля.



Фиг. 1.

2. Постановка задачи. Пусть задана периодическая, слоистая структура, состоящая из бесконечно чередующихся ферромагнитных и диэлектрических слоёв разных толщин (h_1 и h_2, соответственно). Структура отнесена к прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$, как показано на фиг.1. Предполагается, что оси анизотропии лёгкого намагничивания ферромагнитных слоёв параллельны друг другу и совпадают с направлением оси Oz.

Далее полагаем, что рассматриваемая структура находится во внешнем постоянном магнитном поле $\vec{H}_0$ и во всех ферромагнитных слоях плотность намагниченности единицы объёма $\vec{M}_0 = \rho_1 \vec{\mu}_0$ ($\vec{\mu}_0$ – плотность намагниченности на единицу массы, ρ_1 – массовая плотность ферромагнетика) одинакова и параллельна магнитному полю $\vec{H}_0$, оба вектора направлены по оси лёгкого намагничивания, т.е. по оси Oz. Рассмотрим случай, когда возмущения в структуре не зависят от координаты z и характеризуются векторами упругого смещения $\vec{u}_1 = \left(0,0,u_1(x,y,t)\right)$, магнитного момента $\vec{\mu} = \left(\mu(x,y,t), \nu(x,y,t), 0\right)$ и магнитостатическим потенциалом $\varphi_1(x,y,t)$ в ферромагнитном слое, вектором упругого перемещения $\vec{u}_2 = \left(0,0,u_2(x,y,t)\right)$ и магнитостатическим потенциалом $\varphi_2(x,y,t)$ в диэлектрическом слое, причём

$$\vec{H}_1 = -\mathrm{grad}\varphi_1, \quad \vec{H}_2 = -\mathrm{grad}\varphi_2,$$

где $\vec{H}_1$ и $\vec{H}_2$ – возмущения напряжённости магнитного поля в ферромагните и диэлектрике, соответственно.

Уравнения движения среды, магнитного момента и квазистатическое уравнение Максвелла для магнитного поля в ферромагнитном слое [1-3, 5]:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = S_1^2 \Delta u_1 + M_0 f\left(\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial \nu}{\partial y}\right)\\
&\frac{\partial \mu}{\partial t} = \omega_M \left(\rho_1^{-1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \hat{b}\nu + \bar{b}\mu_0 \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\\
&\frac{\partial \nu}{\partial t} = -\omega_M \left(\rho_1^{-1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \hat{b}\mu + \bar{b}\mu_0 \frac{\partial u_1}{\partial x}\right)\\
&\Delta \varphi_1 = \rho_1\left(\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial \nu}{\partial y}\right)
\end{aligned}\right\} \qquad (2.1)$$

$S_1^2 = G_1/\rho_1$ – квадрат скорости упругих волн в ферромагнитном слое, G_1 – модуль сдвига, ρ_1 – плотность ферромагнетика. $\omega_M = \gamma M_0$, γ – гиромагнитное отношение, f – коэффициент пьезомагнетизма, обусловленный магнитострикцией, $\hat{b} = b + H_0/M_0$, $\bar{b} = b + f$, b – постоянная магнитной анизотропии, Δ – двумерный оператор Лапласа.

Уравнение движения и уравнение магнитостатики в диэлектрическом слое:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = S_2^2 \Delta u_2\\
&\Delta \varphi_2 = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (2.2)$$

$S_2^2 = G_2/\rho_2$ – квадрат скорости упругих волн в диэлектрическом слое, G_2 – модуль сдвига, ρ_2 – плотность диэлектрика.

Контактные (при $y = 0$) и граничные условия Флоке на границах ячейки периодичности структуры ($y = h_1$, $y = -h_2$):

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(0) = \varphi_2(0);\quad \frac{\partial \varphi_1(0)}{\partial y} - \rho_1 \nu(0) = \frac{\partial \varphi_2(0)}{\partial y}\\
&u_1(0) = u_2(0);\quad \rho_1 S_1^2 \frac{\partial u_1(0)}{\partial y} + M_0 \bar{b} \rho_1 \nu(0) = \rho_2 S_2^2 \frac{\partial u_2(0)}{\partial y}
\end{aligned} \qquad (2.3)$$

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(h_1) = \lambda \varphi_2(-h_2);\quad \frac{\partial \varphi_1(h_1)}{\partial y} - \rho_1 \nu(h_1) = \lambda \frac{\partial \varphi_2(-h_2)}{\partial y}\\
&u_1(h_1) = \lambda u_2(-h_2);\quad \rho_1 S_1^2 \frac{\partial u_1(h_1)}{\partial y} + M_0 \bar{b} \rho_1 \nu(h_1) = \lambda \rho_2 S_2^2 \frac{\partial u_2(-h_2)}{\partial y}
\end{aligned} \qquad (2.4)$$

где λ – параметр Флоке: $\lambda = e^{iqd}$, $d = h_1 + h_2$, q – компонента волнового вектора, перпендикулярного к поверхностям слоёв конструкции, называемая волновым числом Блоха-Флоке [6-8]. Таким образом, задача свелась к решению краевой задачи (2.1)-(2.4).

3. Решение задачи в виде плоских волн. Решение системы уравнений (2.1) и (2.2) в виде плоских волн таково:

$$u_1 = \left[e^{\beta_1 y}\tilde{u}_1^+ + e^{-\beta_1 y}\tilde{u}_1^-\right] e^{i(\omega t - px)} \qquad (3.1)$$

$$\varphi_1 = \left[e^{py}\tilde{\Phi}_1^+ + e^{-py}\tilde{\Phi}_1^- - RM_0\bar{b}e^{\beta_1 y}\tilde{u}_1^+ - RM_0\bar{b}e^{-\beta_1 y}\tilde{u}_1^-\right] e^{i(\omega t - px)}; \qquad (3.2)$$

$$\mu = i\rho_1^{-1}\left[Pp^{py}\tilde{\Phi}_1^+ + Qpe^{-py}\tilde{\Phi}_1^- + M_0\bar{b}\left(Rp + T\beta_1\right)e^{\beta_1 y}\tilde{u}_1^+ + M_0\bar{b}\left(Rp - T\beta_1\right)e^{-\beta_1 y}\tilde{u}_1^-\right] e^{i(\omega t - px)} \qquad (3.3)$$

$$\nu = \rho_1^{-1}\left[Ppe^{py}\tilde{\Phi}_1^+ - Qpe^{-py}\tilde{\Phi}_1^- - M_0\bar{b}\left(Tp + R\beta_1\right)e^{\beta_1 y}\tilde{u}_1^+ - M_0\bar{b}\left(Tp - R\beta_1\right)e^{-\beta_1 y}\tilde{u}_1^-\right] e^{i(\omega t - px)}; \qquad (3.4)$$

$$u_2 = \left[e^{\beta_2 y}\tilde{u}_2^+ + e^{-\beta_2 y}\tilde{u}_2^-\right] e^{i(\omega t - px)}; \qquad (3.5)$$

$$\varphi_2 = \left[e^{py}\tilde{\Phi}_2^+ + e^{-py}\tilde{\Phi}_2^- \right] e^{i(\omega t - px)}; \quad (3.6)$$

здесь введены обозначения:

$$P = \frac{\hat{b}-\Omega}{\hat{b}^2-\Omega^2},\ Q = \frac{\hat{b}+\Omega}{\hat{b}^2-\Omega^2},\ R = \frac{\hat{b}}{\Omega_{SV}^2-\Omega^2},\ T = \frac{\Omega}{\Omega_{SV}^2-\Omega^2}, \quad (3.7)$$

$$\beta_1 = \sqrt{p^2 - \frac{\Omega_{SV}^2-\Omega^2}{\bar{\Omega}_{SV}^2-\Omega^2}\frac{\Omega^2}{\lambda_t^2}},\ \beta_2 = \sqrt{p^2 - \chi\frac{\Omega^2}{\lambda_t^2}}, \quad (3.8)$$

где $\Omega = \dfrac{\omega}{\omega_M}$, $\Omega_{SV}^{\ 2} = \hat{b}(\hat{b}+1)$, $\bar{\Omega}_{SV}^2 = \Omega_{SV}^2 - \hat{b}\varepsilon_p$, $\varepsilon_p = \dfrac{M_0^2\bar{b}f}{G_1}$, $\lambda_t^2 = \dfrac{G_1}{\omega_M^2}$, $\chi = \dfrac{S_1^2}{S_2^2}$.

$\Omega_{SV} = \sqrt{\hat{b}(\hat{b}+1)}$ – частота, характеризующая объёмную спиновую волну, распространяющуюся перпендикулярно к $\vec{H}_0$. ε_p – коэффициент магнитоупругого взаимодействия. Для сильно магнитострикционных материалов, таких как никель и иттрий-железный гранат (YIG), ε_p имеет порядок 10^{-4}.

Подставляя общие решения (3.1)-(3.6) в условия (2.3) и (2.4), получим следующую систему однородных алгебраических уравнений относительно амплитуд $\tilde{\Phi}_1^+$, $\tilde{\Phi}_1^-$, $\tilde{u}_1^+$, $\tilde{u}_1^-$, $\tilde{\Phi}_2^+$, $\tilde{\Phi}_2^-$, $\tilde{u}_2^+$, $\tilde{u}_2^-$:

$$\tilde{\Phi}_1^+ + \tilde{\Phi}_1^- - \Delta R\tilde{u}_1^+ - \Delta R\tilde{u}_1^- = \tilde{\Phi}_2^+ + \tilde{\Phi}_2^- \quad (3.9)$$

$$(P+1)\tilde{\Phi}_1^+ - (Q+1)\tilde{\Phi}_1^- + \Delta T\tilde{u}_1^+ + \Delta T\tilde{u}_1^- = \tilde{\Phi}_2^+ - \tilde{\Phi}_2^- \quad (3.10)$$

$$\tilde{u}_1^+ + \tilde{u}_1^- = \tilde{u}_2^+ + \tilde{u}_2^- \quad (3.11)$$

$$-\Delta Pp\tilde{\Phi}_1^+ + \Delta Qp\tilde{\Phi}_1^- + \left[\beta_1 - \Delta^2(Tp+\beta_1 R)\right]\tilde{u}_1^+ -$$
$$-\left[\beta_1 + \Delta^2(Rp-\beta_1 T)\right]\tilde{u}_1^- = \kappa p\beta_2\tilde{u}_2^+ - \kappa p\beta_2\tilde{u}_2^- \quad (3.12)$$

$$e^{ph_1}\tilde{\Phi}_1^+ + e^{-ph_1}\tilde{\Phi}_1^- - \Delta Re^{\beta_1 h_1}\tilde{u}_1^+ - \Delta Re^{-\beta_1 h_1}\tilde{u}_1^- = \lambda e^{-ph_2}\tilde{\Phi}_2^+ + \lambda e^{ph_2}\tilde{\Phi}_2^- \quad (3.13)$$

$$(P+1)e^{ph_1}\tilde{\Phi}_1^+ - (Q+1)e^{-ph_1}\tilde{\Phi}_1^- + \Delta Te^{\beta_1 h_1}\tilde{u}_1^+ + \Delta Te^{-\beta_1 h_1}\tilde{u}_1^- = \lambda e^{-ph_2}\tilde{\Phi}_2^+ - \lambda e^{ph_2}\tilde{\Phi}_2^- \quad (3.14)$$

$$e^{\beta_1 h_1}\tilde{u}_1^+ + e^{-\beta_1 h_1}\tilde{u}_1^- = \lambda e^{-\beta_2 h_2}\tilde{u}_2^+ + \lambda e^{\beta_2 h_2}\tilde{u}_2^- \quad (3.15)$$

$$-\Delta Ppe^{ph_1}\tilde{\Phi}_1^+ + \Delta Qpe^{-ph_1}\tilde{\Phi}_1^- + \left[\beta_1 - \Delta^2(Tp+\beta_1 R)\right]e^{\beta_1 h_1}\tilde{u}_1^+ -$$
$$-\left[\beta_1 + \Delta^2(Rp-\beta_1 T)\right]e^{-\beta_1 h_1}\tilde{u}_1^- = \lambda\kappa\beta_2 e^{-\beta_2 h_2}\tilde{u}_2^+ - \lambda\kappa\beta_2 e^{\beta_2 h_2}\tilde{u}_2^- \quad (3.16)$$

где

$$\kappa = \frac{G_2}{G_1},\ \Delta = \frac{M_0\bar{b}}{\sqrt{G_1}}.$$

Из условия нетривиальности решений системы (3.9)-(3.16) получается дисперсионное уравнение задачи:

$$\lambda^4 + a(p,\Omega)\lambda^3 + b(p,\Omega)\lambda^2 + a(p,\Omega)\lambda + 1 = 0, \quad (3.17)$$

которое распадается на два уравнения:

$$\cos qd = \frac{-a(p,\Omega) \pm \sqrt{a^2(p,\Omega) + 4\left[b(p,\Omega)-2\right]}}{4}, \quad (3.18)$$

где

$$a(p,\Omega)=-2\left[\operatorname{ch}(h_1p)\operatorname{ch}(h_2p)+\operatorname{ch}(h_1\beta_1)\operatorname{ch}(h_2\beta_2)\right]+\frac{\operatorname{sh}(h_1p)\operatorname{sh}(h_2p)}{\Omega^2-\Omega_{SV}^2}A+$$

$$+\frac{p\Delta^2(\hat{b}^2-\Omega^2)\operatorname{sh}(h_2p)\operatorname{sh}(h_1\beta_1)}{\beta_1(\Omega^2-\Omega_{SV}^2)(\Omega^2-\tilde{\Omega}_{SV}^2)}-\frac{p\Delta^2\operatorname{sh}(h_1p)\operatorname{sh}(h_2\beta_2)}{\beta_2\kappa(\Omega^2-\Omega_{SV}^2)}-$$

$$-\frac{\operatorname{sh}(h_1\beta_1)\operatorname{sh}(h_2\beta_2)}{\beta_1\beta_2\kappa(\Omega^2-\Omega_{SV}^2)(\Omega^2-\tilde{\Omega}_{SV}^2)}\left[B-p^2\Delta^4\Omega^2\right];$$

$$b(p,\Omega)=\frac{2\operatorname{ch}(h_1\beta_1)\operatorname{sh}(h_1p)}{\beta_2\kappa(\Omega^2-\Omega_{SV}^2)}\left[p\Delta^2\operatorname{ch}(h_2p)\operatorname{sh}(h_2\beta_2)-\beta_2\kappa A\operatorname{ch}(h_2\beta_2)\operatorname{sh}(h_2p)\right]+$$

$$+2-\frac{2p\Delta^2\operatorname{sh}(h_1p)\operatorname{sh}(h_1\beta_1)}{\beta_1(\Omega^2-\tilde{\Omega}_{SV}^2)}\left[1-\operatorname{ch}(h_2p)\operatorname{ch}(h_2\beta_2)\right]+\frac{(\hat{b}^2-\Omega^2)\operatorname{sh}(h_2p)\operatorname{sh}(h_2\beta_2)}{\beta_2\kappa(\Omega^2-\Omega_{SV}^2)^2}+$$

$$+\frac{\operatorname{sh}(h_1p)\operatorname{sh}(h_2p)\operatorname{sh}(h_1\beta_1)\operatorname{sh}(h_2\beta_2)}{\beta_1\beta_2\kappa(\Omega^2-\tilde{\Omega}_{SV}^2)(\Omega^2-\Omega_{SV}^2)^2}AB+4\operatorname{ch}(h_1p)\operatorname{ch}(h_2p)2\operatorname{ch}(h_1\beta_1)\operatorname{ch}(h_2\beta_2)$$

$$-\frac{2p\Delta^2(\hat{b}^2-\Omega^2)\operatorname{ch}(h_1p)\operatorname{sh}(h_2p)}{\beta_1\beta_2\kappa(\Omega^2-\tilde{\Omega}_{SV}^2)(\Omega^2-\Omega_{SV}^2)^2}C+$$

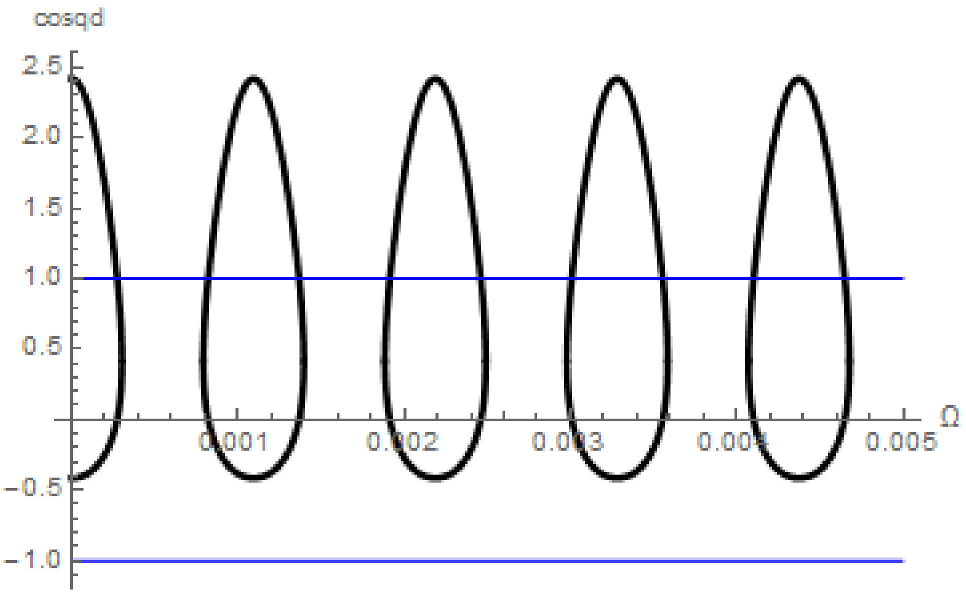
$$+\frac{\operatorname{ch}(h_1p)\operatorname{ch}(h_2p)\operatorname{sh}(h_1\beta_1)\operatorname{sh}(h_2\beta_2)}{\beta_1\beta_2\kappa(\Omega^2-\tilde{\Omega}_{SV}^2)}\left\{\frac{p^2\Delta^4(\hat{b}^2-\Omega^2)\Omega^2+(\Omega^2-\Omega_{SV}^2)B}{(\Omega^2-\Omega_{SV}^2)^2}\right\};$$

$$\tilde{\Omega}_{SV}^2=\Omega_{SV}^2-\hat{b}\Delta^2,\ A=1-2\Omega^2+2\Omega_{SV}^2,\quad B=\beta_1^2(\Omega^2-\tilde{\Omega}_{SV}^2)^2+\beta_2^2\kappa^2(\Omega^2-\Omega_{SV}^2)^2,$$

$$C=\beta_2\kappa(\Omega^2-\Omega_{SV}^2)\operatorname{ch}(h_2\beta_2)\operatorname{sh}(h_1\beta_1)+\beta_1(\Omega^2-\tilde{\Omega}_{SV}^2)\operatorname{ch}(h_1\beta_1)\operatorname{sh}(h_2\beta_2)$$

На фиг.2 показан результат численного эксперимента для частного случая, когда ферромагнитный слой (ЖИГ) имеет параметры: $S_1=3.85\cdot10^5\,см/с$, $\rho_1=5.17\,г/см^3$, $M_0=1750\,гс$, $f=4.08$, $b=0$, $\varepsilon_p\approx0.67\cdot10^{-4}$, $h_1=0.1$, $\hat{b}=1.1$, $p=0.2$, а параметры диэлектрика следующие: $S_2=1.22\cdot10^6\,см/с$, $\rho_2=1.56\,г/см^3$, $h_2=0.2$.

Анализ представленных на фиг.2 кривых позволяет заключить, что весь спектр частот



Фиг. 2. Дисперсионные кривые.

упруго-спиновых волн разбивается на периодически чередующиеся три области, в каждой из которых существует либо одна волна, либо две волны с разными скоростями, либо волнового процесса вообще нет, т.е. это области запрета или умолчания.

В заключение заметим, что в зависимости от параметров структуры рисунок кривой на фиг.2 может существенно меняться, но области умолчания и пропускания существуют почти всегда. Задача находится в процессе дальнейшего исследования.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта N SCS 13-2C097.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахиезер А.И., Барьяхтар В.Г., Пелетминский С.В. Спиновые волны. М.: Наука, 1967. 368 с.
2. Kittel C. Interactions of spin waves and ultrasonic waves in ferromagnetic crystals // Phys. Rev. 110. 1958. P.836-841.
3. Можен Ж. Механика электромагнитных сплошных сред. М.: Мир, 1991. 560с.
4. Гуревич А.Г. Магнитный резонанс в ферритах и ферромагнетиках. М.: Наука, 1973. 591с.
5. Danoyan Z. N., Piliposian G. T., Hasanyan D. J. Reflection of spin and spin-elastic waves at the interface of a ferromagnetic half space. Waves in Random and Complex Media.-Vol. 19, № 4, November 2009, p. 567-584.
6. E.H. Lee, H.Yang. On waves in composite materials with periodic structure. //J. Appl. Math. Vol.25, №3, November 1973, pp. 492-499.
7. S.A. Nikitov, Ph.Tailhades, C.S. Tsai. Spin waves in Periodic Magnetic Structures – Magnonic cristals. //J.Magnet.Mater.,v.23, №3, 2001, pp. 320-331.
8. Даноян З.Н., Казарян К.Б., Атоян Л.А., Даноян Н.З. Квазипериодические спиновые волны типа Блоха-Флоке в периодической слоистой структуре из ферромагнитных и диэлектрических слоёв. //Изв. НАН Армении. Механика. 2013. Т.66. №4. С.29-37.

Сведения об авторах:

Даноян Завен Нерсесович – Д.ф.-м.н., главный науч. сотр. Института механики НАН РА.
Адрес: РА,0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2.
E-mail: zavendanoyan@gmail.com

Агаян Каро Леренцович – Д.ф.-м.н., ведущий науч.сотр. Института механики НАН РА.
Адрес: РА,0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2.
E-mail: karoagayan@mail.ru

Атоян Левон Арутюнович – К.ф.-м.н., ст.науч. сотр. Института механики НАН РА.
Адрес: РА,0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2.
E-mail: levous@mail.ru

Саакян Саак Левонович – ассистент кафедры «Численный анализ и матем. моделирование» Ереванского Гос.Университета.
Тел.: (+37477) 002-408; **E-mail:** ssahakyan@ysu.am

Манукян Сусанна Микаеловна – доцент кафедры «Численный анализ и матем. моделирование» Ереванского Гос.Университета. **Тел.:** (+37491) 469-915;

E-mail: manukyan.susana@gmail.com

УПРАВЛЕНИЕ ИЗГИБНЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ МНОГОСЛОЙНЫХ КОМПОЗИТНЫХ ПЛАСТИН

Дарьядар М.

Исследованы изгибные колебания и решена задача оптимального управления колебаниями композитных шестислойных свободно опёртых на краях прямоугольных пластин. Пластина составленна из пар с симметрично расположенными относительно срединной плоскости пластины одинаковых слоёв. Исследовано поведение основной частоты колебания пластины от отношения её сторон и от направлений волокон в слоях.

В современной технике, в особенности, транспорте большое применение нащли композитные материлы-многокомпонентные материалы, состоящие из полимерной, металлической, углеродной, керамической или др. основой (матрицы), армированной наполнителями из волокон, нитевидных кристаллов, тонкодисперсных частиц и др. Армирующие наполнители воспринимают основную долю нагрузки композиционных материалов [1]. При изготовлении изделий из композитных материалов стоит вопрос в каком виде изготовить композит, наилучшим образом приспособленный для практического применения. Один из основных способов изготовления слоистых композизитов состоит из прессования и отверждения, предварительно пропитанных слоёв с волокнистой арматурой. Управляя последовательностью укладки слоёв, можно создавать композиты, обладающие изотропными, ортотропными и др. свойствами.

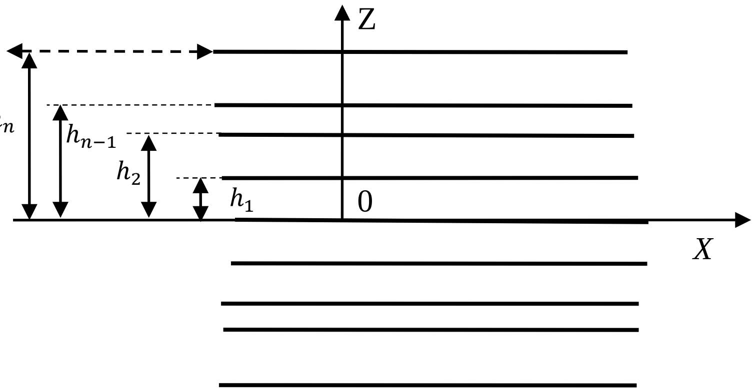


Рис.1.

Предположим, что скольжение соседних слоёв по поверхности контакта исключено вследствие склейки или спайки. Координатная плоскость X0Y расположена в плоскости стыка первых двух слоёв. Толщины слоёв пластины одинаковы и равны h. Общая толщина пластины $H=2hn$. Волокна каждого слоя лежат в его срединной плоскости, которая параллельна координатной плоскости xy. Направление волокон $к$-тых слоёв по обе стороны от срединной плоскости повёрнуты на один и тот же угол $\varphi_к$ к оси X (рис. 1).

Для каждого слоя обобщённый закон Гука имеет следующий вид:

$$\sigma_i^{(k)} = B_{ij}^{(k)} e_j. \tag{1}$$

Пересчёт операторов $B_{ij}^{(k)}$ через операторы A_{ij} выражаются следующим образом [1]:

$$B_{11}^{(k)} = A + B\cos 2\varphi_k + C\cos^2 2\varphi_k, \; B_{22}^{(k)} = A - B\cos 2\varphi_k + C\cos^2 2\varphi_k, \tag{2.1}$$

$$B_3^{(k)} = B_{12} + 2B_{66} = D - 3C\cos^2 2\varphi_k, \; B_{16}^{(k)} = (0.5B + C\cos 2\varphi_k)\sin 2\varphi_k, \tag{2.2}$$

$$B_{26}^{(k)} = (0.5B - C\cos 2\varphi_k)\sin 2\varphi_k \;\; B_{ij}^k = B_{ij}^k - R_{ij}^k, C = 0.25(A_{11} + A_{22} + 2A_3), \tag{2.3}$$

$$B = 0.5(A_{11} - A_{22}), C = 0.25(A_{11} + A_{22} - 2A_3) \; D = 0.25[3(A_{11} + A_{22}) - 2A_3], A_3 = A_{12} + 2A_{66} \tag{2.4}$$

Вынужденные колебания многослойной прямоугольной неортотропной пластины, состоящей из $2n$ слоёв толщиной h и изгибаемой распределённой по поверхности поперечной переменной нагрузкой $Q(x,y,t)$, описывается уравнением для прогибов срединной поверхности *w(x,y,t)* [2].

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16}\frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66})\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26}\frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y} + D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{Q(x,y,t)}{2H\rho} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{3}$$

где

$$D_{11}=\frac{2H^3}{3}\left(A\sum_{k=1}^{n}K(k)+B\sum_{k=1}^{n}K(k)\cos 2\varphi_k+C\sum_{k=1}^{n}K(k)\cos^2 2\varphi_k\right) \quad (4)$$

$$D_{12}=\frac{2H^3}{3}\left(A\sum_{k=1}^{n}K(k)-B\sum_{k=1}^{n}K(k)\cos 2\varphi_k+C\sum_{k=1}^{n}K(k)\cos^2 2\varphi_k\right) \quad (5)$$

$$D_{16}=\frac{2H^3}{3}\left(\frac{B}{2}\sum_{k=1}^{n}K(k)\sin 2\varphi_k+C\sum_{k=1}^{n}K(k)\cos 2\varphi_k\right) \quad (6)$$

$$D_{26}=\frac{2H^3}{3}\left(\frac{B}{2}\sum_{k=1}^{n}K(k)\sin 2\varphi_k-C\sum_{k=1}^{n}K(k)\cos 2\varphi_k\right) \quad (7)$$

$$K(k)=3k(\mathrm{k}-1)+1 \quad (8)$$

D_{11}, D_{22} – жёсткости изгиба вокруг осей X, Y, D_{66} – жёсткость кручения; D_{16}, D_{26} –побочные жёсткости слоёв пластины, отношения $D_{12}/D_{22}=\mu_1$, $D_{12}/D_{11}=\mu_2$–приведённые коэффициенты Пуассона, $D_3=D_{12}+2D_{66}$, ρ – осреднённая плотность материала слоя. Прогиб w должен также удовлетворять граничным условиям. Коэффициенты D_{16} и D_{26} в (3) не позволяют решить уравнение методом разделения переменных. Однако, подбором направлений волокон в слоях пластины D_{16} и D_{26} можно приравнять к нулю.

$$D_{16}=D_{26}=0 \quad (9)$$

Тогда уравнение (2.20) будет иметь вид:

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2D_3\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+2nh\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+Q(x,y,t)=0 \quad (10)$$

Приравнивая (6) и (7) нулю, получим два уравнения с n неизвестными φ_k

$$\left(\frac{B}{2}\sum_{k=1}^{n}K(k)\,\mathrm{Sin}2\varphi_k+C\sum_{k=1}^{n}K(k)\cos 2\varphi_k\sin 2\varphi_k\right)=0, \quad (11.1)$$

$$\left(\frac{B}{2}\sum_{k=1}^{n}K(k)\,\mathrm{Sin}2\varphi_k-C\sum_{k=1}^{n}K(k)\cos 2\varphi_k\sin 2\varphi_k\right)=0. \quad (11.2)$$

Для пластины состоящей из шести слоев эти уравнения нетрудно привести к виду

$$\sin 4\varphi_1+7\sin\left[2\arcsin\left(-1/7\left(\sin 2\varphi_1+19\sin 2\varphi_3\right)\right)\right]+19\sin 2\varphi_3=0, \quad (14a)$$

$$\sin 4\varphi_1+7\sin 4\varphi_2+19\sin\left[2\arcsin\left(-1/19\left(\sin 2\varphi_1+7\sin 2\varphi_2\right)\right)\right]=0 \quad (14б)$$

По значениям этих углов можно определить величины жёсткостей пластины (4-7) .

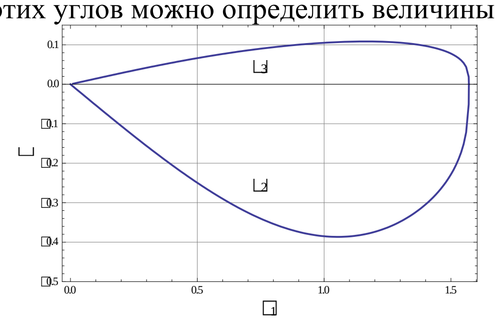


Рис.2. Зависимость направлений укладки волокон второго и третьего слоёв пластин от угла направления волокон двух первых слоёв для шестислойных пластин.

Рассмотрим свободные изгибные колебания шестислойных композитных пластин, при $Q(x,y,t)=0$ с граничными условиями свободного опирания на краях пластины

$$w=0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \quad \text{при } x=0,\ x=a, \quad (15a)$$

$$w=0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0 \quad \text{при } y=0,\ y=b. \quad (15b)$$

Решение уравнения (10) с краевыми условиям (15) будем искать в виде

$$w_{mn} = \left(A\cos pt + B\sin pt\right)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{16}$$

Подставим (16) в (10) и приравнивая результат нулю, получим:

$$D_{11}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 + 2D_3\left(\frac{mn\pi^2}{ab}\right)^2 + D_{22}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 - \omega_{mn}^2\rho 2h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{17}$$

Отсюда находим частоты поперечных колебаний пластины ω_{mn}

$$\omega_{mn} = \frac{\pi^2}{b^2}\sqrt{\frac{1}{2nh\rho}}\sqrt{D_{11}\left(\frac{m}{c}\right)^4 + 2D_3 n^2\left(\frac{m}{c}\right)^2 + D_{22}n^4}\ , \tag{18}$$

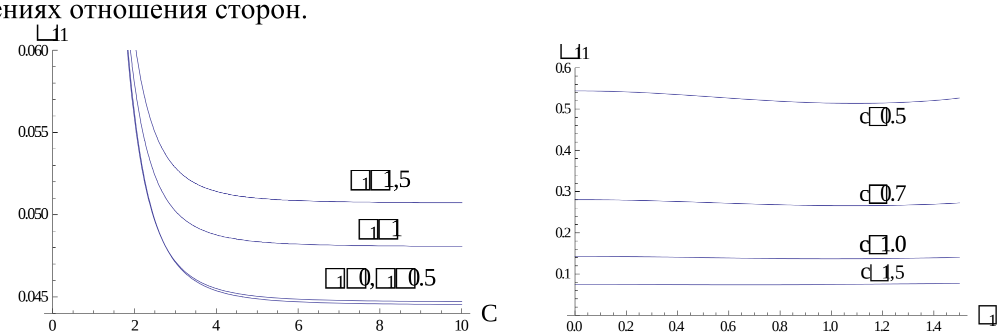
где $c = a/b$. Частота основного тона определяется этим же уравнением при m=1 и n=1

$$\omega_{11} = \frac{\pi^2}{a^2}\sqrt{\frac{1}{2nh\rho}}\sqrt{D_{11} + 2D_3 c^2 + D_{22}c^4}\ . \tag{19}$$

Изгибные жёсткости слоёв пластин D_{11}, D_{22}, D_3 зависят от направлений волокон в слоях пластин и для шестислойных пластин определяются из уравнений (14).

Поперечные колебания для основной частоты, в завимости от отношения сторон пластины и от направления волокон первых слоёв, показаны на рис.3 для композита из слоёв боропластика [2] с объёмной долей наполнителя 0,5 и механическими параметрами: $E_1 = 201$ ГПа, $E_2 = 21.7$ ГПа, G=5.4 ГПа, $\mu_{12} = 0.018$, $\mu_{21} = 0{,}17$. Постоянные A_{11}, A_{22}, A_{12} в (2) тогда будут равны: $A_{11} = E_1$, $A_{22} = E_2$, $A_{12} = A_{21} = E_1\mu_{12}$, $A_{66} = G$.

Зависимость основной частоты колебания пластины от отношения её сторон при разных значениях направления волокон первых слоёв представлены на рис. 3а. На рис. 3б показана зависимость основной частоты колебания пластины от направления волокон при разных значениях отношения сторон.



а б

Рис. 3. Графики зависимостей основной собственной частоты колебаний ω_{11}(в сек.) в зависимости от отношения сторон пластины и направления волокон в первых слоях.

Рассмотрим задачу оптимального управления изгибными колебаниями упругой пластины совершаемых под воздействием переменной нагрузки $Q(x,y,t)$, нормальной к её поверхности. Уравнение вынужденных колебаний пластинки задаётся уравнением (10) и краевыми условиями (15). Зададим перемещения срединной поверхности пластины и её скорости перемещений в начальный момент времени

$$w = F_1(x,y),\ \frac{\partial w}{\partial t} = F_2(x,y) \ \text{ при } \ t = 0. \tag{20}$$

Необходимо найти такую нагрузку $Q(x,y,t)$, при которой система перешла в состояние

$$w(x,y,t) = \Phi_1(x,y)\ ,\ \frac{\partial w(x,y,t)}{\partial t} = \Phi_2(x,y) \ \text{ при } \ t = t_1 \tag{21}$$

оптимальным образом. Для этого необходимо, чтобы функционал J имеел бы минимальное значение $J_{\min}$

$$J = \int_0^a\int_0^b\int_0^{t_1} Q^2 dx\,dy\,dt \tag{22}$$

Решение задачи, удовлетворяющее уравнению колебаний (10) и краевым условиям (15), представим в виде

$w(x,y,t)=\sum_{m,n=1}^{\infty} f_{mn}(t)\sin\lambda_m x\,\sin\mu_n y$ (24)
где $\lambda_m = \pi nx/a$, $\mu_n = \pi ny/b$.

Для определения неизвестных функций $f_{mn}(t)$ подставим (24) в левую часть уравнения (10), а в правую, разложенную в ряд Фурье, функцию нагрузки $Q(x,y,t)$

$Q=\sum_{m,n=1}^{\infty} q_{mn}(t)\ \sin\lambda_m x\,\sin\lambda\mu_n x$. (25)

Приравнивая коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях, получим систему уравнений для определения функций $f_{mn}(t)$ в (24)

$\frac{d^2 f_{mn}(t)}{dt^2}+\omega^2 f_{mn}(t)=\frac{1}{2n\rho h}q_{mn}(t),$ (26)

где $\omega_{mn}^2=\frac{1}{\rho h}(D_{11}\lambda_m^4+2(D_{12}+2D_{66})\lambda_m^2\mu_m^2+D_{22}\mu_n^4).$ (27)

Решение этого уравнения (26) будем искать в виде

$f_{mn}(t)=A_{\mathrm{mn}}\cos\omega_{\mathrm{mn}}\mathrm{t}+B_{mn}\sin\omega_{\mathrm{mn}}\mathrm{t}+\frac{1}{\omega_{\mathrm{mn}}}\int_0^{\mathrm{t}}\mathrm{q}_{\mathrm{mn}}(\tau)\sin\omega_{\mathrm{mn}}(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$ (28)

Разложим в ряды Фурье функции $F_1(x,y)$ и $F_2(x,y)$ в (21) и найдём A_{mn} и B_{mn}:

$F_1(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}(t)\ \sin\lambda_m x\,\sin\mu_n x,$ (29а)

$F_2(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} b_{mn}(t)\ \sin\lambda_m x\,\sin\mu_n x.$ (29б)

Приравнивая частные решения (28) к слагаемым ряда (29) при $t=0$, найдём

$A_{\mathrm{mn}}=a_{mn},\ B_{mn}=b_{mn}/\omega_{\mathrm{mn}}.$ (30)

Для определения функций $\mathrm{q}_{\mathrm{mn}}(\tau)$ в (28) разложим в ряды Фурье $\Phi_1(x,y)$, $\Phi_2(x,y)$ (21).

$\Phi_1(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} d_{mn}(t)\ \sin\lambda_m x\sin\lambda\mu_n x,$ (31)

$\Phi_2(x,y)=\sum_{m,n=1}^{\infty} c_{mn}(t)\ \sin\lambda_m x\sin\lambda\mu_n x.$ (32)

Подставим (31) и (24) в (21) при $t=t_1$ и приравнивая коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях, получим следующие уравнения:

$$a_{mn}\cos\omega_{\mathrm{mn}}t_1+\frac{b_{mn}}{\omega_{\mathrm{mn}}}\sin\omega_{\mathrm{mn}}t_1+\frac{1}{\omega_{\mathrm{mn}}}\int_0^{t_1}q_{mn}(\tau)\left[\sin\omega_{\mathrm{mn}}t_1\cos\omega_{\mathrm{mn}}\tau-\cos\omega_{\mathrm{mn}}t_1\sin\omega_{\mathrm{mn}}\tau\right]d\tau=d_{mn} \quad (33а)$$

$$-a_{mn}\omega_{\mathrm{mn}}\sin\omega_{\mathrm{mn}}t_1+b_{mn}\cos\omega_{\mathrm{mn}}t_1+\frac{1}{\omega_{\mathrm{mn}}}\int_0^{t_1}q_{mn}(\tau)\left[\cos\omega_{\mathrm{mn}}t_1\cos\omega_{\mathrm{mn}}\tau+\sin\omega_{\mathrm{mn}}t_1\sin\omega_{\mathrm{mn}}\tau\right]d\tau=c_{mn} \quad (33б)$$

Однако, из (33) невозможно определить функции $q_{mn}(t)$. Разложим в ряд Фурье функцию $Q(x,y,t)$ (25) и подставим её в (22).

$J=\int_0^{t_1}\int_0^{a}\int_0^{b}(\sum_{n=1}^{\infty} q_{mn}(t)\ \sin\lambda_m x\,\sin\lambda\mu_n x)^2dxdydt$ (34а)

Учитывая ортогональность тригонометрических функций рядов Фурье, минимизация функционала J сводится к минимизации каждого из его слагаемых

$J_{min}=\int_0^{t_1}\sum_{n=1}^{\infty} q_{mn}^2(\tau)d\tau$ (34б)

Отсюда видно, что минимизация каждой гармоники осуществляется независимо друг от друга. Так как под интегралами (4.14) имеются слагаемые $q_{mn}\sin\omega_{\mathrm{mn}}t_1$ и $q_{mn}\cos\omega_{\mathrm{mn}}t_1$, то можно составить функционал

$T=q_{mn}^2+\alpha_{mn}q_{mn}(\tau)\cos\omega_{mn}\tau+\beta_{mn}q_{mn}(\tau)\sin\omega_{mn}\tau,$ (35)

где α_{mn} и β_{mn} искомые множители. Минимизирующие $q_{mn}(\tau)$ из (4.15) определяются [4] выражением

$q_{mn}(\tau)=-0.5(\alpha_{mn}\cos\omega_{mn}\tau+\beta_{mn}\sin\omega_{mn}\tau),$ (36)

Подставив (36) в (33), получим систему уравнений для определения $\alpha_{m,n}$и β_{mn}

$\propto_{mn}=(-a_{mn}\omega-2b_{mn}t_1\omega+2c_{mn}t_1\omega\cos t_1\omega+a_{mn}\omega\cos 2t_1\omega-2c_{mn}\sin t_1\omega+$
$2d_{mn}t_1\omega^2\sin t_1\omega+b_{mn}\sin 2t_1\omega)\frac{4\omega}{1-2t_1^2\omega^2-\cos 2t_1\omega},$ (37а)

$\beta_{mn}=(b_{11}\omega+2a_{11}t_1\omega^2-2d_{mn}t_1\omega^2 cos t_1\omega-b_{mn}\cos 2t_1\omega-2d_{mn}\omega\sin t_1\omega+$
$2c_{mn}t_1\omega\sin t_1\omega+a_{mn}\omega\sin 2t_1\omega)\frac{4\omega}{1-2t_1^2\omega^2-\cos 2t_1\omega}.$ (37б)

Подставляя $q_{mn}(\tau)$ (36) с найденными значениями $\alpha_{m,n}$ и β_{mn} в (25), получим величину оптимальной нагрузки для перевода пластины из начального состояния в требуемое состояние за промежуток времени t_1. Для получения функций перемещения и скорости перемещений подставим (29) с учётом (30) в (24)

$$w(x,y,t)=\sum_{m=1,n=1}^{\infty}\left(a_{mn}\cos\omega t+\frac{b_{mn}}{\omega}\sin\omega t+\frac{1}{4h\rho\omega^2}\left(\beta_{mn}\omega t\cos\omega t-\left(\beta_{mn}+\alpha_{mn}\omega t\sin\omega t\right)\right)\right)\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{m\pi}{b}y$$

$$w_t(x,y,t)=\sum_{m=1,n=1}^{\infty}\frac{\left(t\alpha_{mn}-4bh\rho\right)\omega\cos\omega t+\left(\alpha_{mn}+\omega\left(t\beta_{mn}+4ah\rho\omega\right)\right)\sin\omega t)}{4h\rho\omega}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{m\pi}{b}y$$

Приведённое решение проиллюстрируем на примере шарнирно-закреплённой прямоугольной пластины ($a=1, b=1$) из боросиликата, которые изгибаются по синусоиде. Тогда, разложение (29) будет состоять только из членов с $m=n=1$. Тогда и управляющая нагрузка (25) с амплитудой (36) будет синусоидальной.

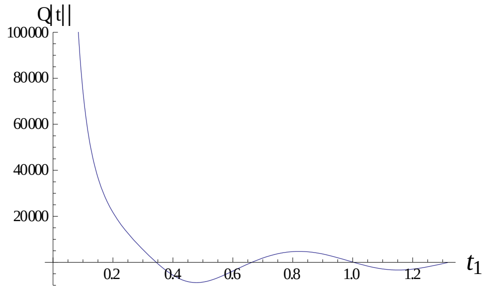


Рис.4. Зависимость амплитуды управляющей нагрузки *Q(h,y,t)* от времени перехода системы в новое состояние

Рассчитаем оптимальную амплитуду управляющей нагрузки для уменьшения амплитуды и скорости перемещений точек срединной плоскости пластины в два раза за время t_1. График оптимальной амплитуды в зависимости от времени t_1 показан на рис.4. С уменьшением времени, необходимого для изменения параметров колебания до заданных значений амплитуда управляюшей нагрузки возрастает и непрерывно растёт с уменьшением t_1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. М.: Гостехтеориздат, 1957.
2. Мовсисян Л.А. К устойчивости упругой и вязкоупругой анозотропной многослойной пластинки. //Изв. АН Армянской ССР. Механика. 1990. № 4. Р.3-11.
3. Timoshenko S.P. and Gere M.J. Theory of Elastic Stability. New York: McGraw-Hill. 1961. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476с.

<u>Сведения об авторе:</u>

Дарьядар Мохаммад – аспирант Института механики НАН Армении, Ереван, Армения, 055781110. **E-main:** yerevan@yahoo.com

УПРУГИЕ ВОЛНЫ В ПЛАСТИНЕ ПРИ НАЛИЧИИ ТОЧЕЧНЫХ ДЕФЕКТОВ

Ерофеев В.И., Шекоян А.В.

В трёхмерном случае линейная система уравнений, описывающая вышеуказанный процесс, имеет вид [1,2]:

$$\rho\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}=\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial t}=q_{01}+q_\varepsilon\varepsilon_{kk}+D_1\Delta n_1-\alpha_{11}n_1-\alpha_{12}n_2 \tag{2}$$

$$\frac{\partial n_2}{\partial t}=q_{02}+q_\varepsilon\varepsilon_{kk}+D_2\Delta n_2-\alpha_{21}n_1-\alpha_{12}n_2 \tag{3}$$

Обозначения общепринятые [1-3], $\varepsilon_{kk}=\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}$ – объёмная деформация, ε_{ik} – деформации, q_{01} и q_{02} – темп генераций дефектов до возмущения, которые, не теряя общности, можно принять $q_{01}=q_{02}=0$.

Граничные условия следующие:

$$\text{при } z=h \qquad n_1^+=n_1(x,y,h,t), \quad n_2^+=n_2(x,y,h,t), \tag{4}$$

$$z=-h \qquad n_1^-=n_1(x,y,-h,t), \quad n_2^-=n_2(x,y,-h,t), \tag{5}$$

$$\text{при } z=\pm h, \ \sigma_{32}=\sigma_{31}=\sigma_{33}=0. \tag{6}$$

Для простоты записи координаты x_1,x_2,x_3 заменены на x,y,z, соответственно. По аналогии с задачами термоупругости (см., напр., [5]), для точечных дефектов принимаются следующие приближения:

$$n_1=n_{11}+n_{12}z, \ n_2=n_{21}+n_{22}z \tag{7}$$

где $n_{11}=\dfrac{n_1^+ + n_1^-}{2}$, $n_{12}=\dfrac{n_1^+ - n_1^-}{2}$, $n_{21}=\dfrac{n_2^+ + n_2^-}{2}$, $n_{22}=\dfrac{n_2^+ - n_2^-}{2}$.

В теории Кирхгофа принимается, что перемещения пластинки имеют вид:

$$u_1=u-z\frac{\partial w}{\partial x}, \ u_2=\nu-z\frac{\partial w}{\partial y}, \ u_3=w \tag{8}$$

где функции u,ν,w не зависят от координаты z.

Подобно тому, как это делается в теории пластин и оболочек, можно получить для планарных колебаний пластин и оболочек уравнение для u,ν и γ_i [7], имеющее следующий вид:

$$\Delta_2 u+\theta\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \nu}{\partial y}\right)-\alpha\frac{\partial\gamma_1}{\partial x}=C_1^{-2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{9}$$

$$\Delta_2 \nu+\theta\frac{\partial}{\partial xy}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \nu}{\partial y}\right)-\alpha\frac{\partial\gamma_1}{\partial y}=C_1^{-2}\frac{\partial^2 \nu}{\partial t^2} \tag{10}$$

А для изгибных колебаний получается

$$D\Delta_2^2 w+D\Delta_2\gamma_2+2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0, \tag{11}$$

где

$$\Delta_2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\,,\quad \theta=\frac{1+\nu}{1-\nu}\,,\; C_1^2=\frac{E}{2(1+\nu)\rho}\,,\; \alpha=\frac{2\theta(1-2\nu)}{E}\,,$$

$$\gamma_1=d_1n_{11}+d_2n_{21}\,,\; D=\frac{2Eh^3}{(1-\nu)^2},\; \gamma_2=d_1n_{12}+d_2n_{22},$$

$$\Delta_2^2\equiv\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\frac{\partial^2}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4},$$

$\nu-$ коэффициент Пуассона, $E-$ модуль Юнга.

Процедуру осреднения можно применить также для кинетических уравнений (2) и (3). Выражения для n_1 и n_2 из (7), а также ε_{kk} подставляются в уравнения (2) и (3). По теории Кирхгофа ε_{kk} имеет вид:

$$\varepsilon_{kk}=\frac{1-2\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}-z\Delta_2 w\right)+E_0^{-1}\left(\gamma_1+z\gamma_2\right)$$

После подстановки и приравнения нулю коэффициенты при z^0 и z получатся уравнения, которые описывают планарные и изгибные колебания пластины, они в одномерном приближении $\left(\dfrac{\partial}{\partial y}=0\right)$ дают следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{(1-\upsilon)(1-2\upsilon)}{E}\frac{\partial\gamma_1}{\partial x}=c_e{}^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\\
&\frac{\partial^2\upsilon}{\partial x^2}=c_t^{-2}\frac{\partial^2\mathrm{v}}{\partial t^2},\; c_e{}^2=\frac{E}{(1-\upsilon^2)\rho}\\
&\frac{\partial n_{11}}{\partial t}=\frac{1-2\upsilon}{1-\upsilon}q_\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x}+D_1\frac{\partial^2 n_{11}}{\partial x^2}-q_{11}n_{11}-q_{12}n_{21}\\
&\frac{\partial n_{21}}{\partial t}=\frac{1-2\upsilon}{1-\upsilon}q_\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x}+D_2\frac{\partial^2 n_{21}}{\partial x^2}-q_{21}n_{11}-q_{22}n_{21}\\
&\gamma_1=d_1n_{11}+d_2n_{21},
\end{aligned}\tag{12}$$

а для изгибных колебаний

$$\begin{aligned}
&D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+D_*\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(d_1n_{12}+d_2n_{22}\right)+2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0\\
&\frac{\partial n_{12}}{\partial t}=-\frac{1-2\upsilon}{1-\upsilon}q_\varepsilon\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+D_1\frac{\partial^2 n_{12}}{\partial x^2}-q_{11}n_{12}-q_{12}n_{22}\\
&\frac{\partial n_{22}}{\partial t}=-\frac{1-2\upsilon}{1-\upsilon}q_\varepsilon\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+D_2\frac{\partial^2 n_{22}}{\partial x^2}-q_{21}n_{12}-q_{22}n_{22},
\end{aligned}\tag{13}$$

где $q_{11}=q_\varepsilon E_0^{-1}d_1-\alpha_{11}$, $q_{12}=q_\varepsilon E_0^{-1}d_2-\alpha_{12}$, $q_{21}=q_\varepsilon E_0^{-1}d_1-\alpha_{21}$, $q_{22}=q_\varepsilon E_0^{-1}d_2-\alpha_{22}$.

Из системы (12) следует, что сдвиговые волны (v) не взаимодействуют с вакансиями и межузельными атомами. Для продольных упругих волн решение представляется в виде

$$u=A\exp i(\omega t-kx),\quad n_{11}=B\exp i(\omega t-kx),\quad n_{21}=C\exp i(\omega t-kx)\tag{14}$$

Подстановка (14) в первое, третье и четвёртое уравнения системы (12) приводит к следующей системе алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных $A,\ B,\ C$:

$$\left(\omega^2-k^2C_l^2\right)A+i\alpha kC_l^2\left(d_1B+d_2C\right)=0$$
$$\beta q_\varepsilon A+\left(\frac{\omega}{k}-iD_1k-i\frac{q_{11}}{k}q\right)B+i\frac{q_{12}}{k}C=0 \qquad (15)$$
$$\beta q_\varepsilon A+i\frac{q_{21}}{k}B+\left(\frac{\omega}{k}-iD_2k-i\frac{q_{22}}{k}\right)=0$$

В (15) приняты обозначения:

$$\alpha=\frac{(1-\nu)(1-2\nu)}{E},\quad \beta=\frac{1-2\nu}{1-\nu} \qquad (16)$$

Условие равенства нулю детерминанта системы (15) приводит к уравнению, определяющему фазовую скорость волны:

$$\frac{\omega^4}{k^4}-i\left(F_1+F_2\right)\frac{\omega^3}{k^4}-\left(C_l^2+\frac{F_1F_2}{k^2}-\frac{q_{12}q_{21}}{k^2}\right)\frac{\omega^2}{k^2}+$$
$$+iC_l^2\left[F_1+F_2-\alpha\beta q_\varepsilon\left(d_1+d_2\right)\right]\frac{\omega}{k^2}-\frac{C_l^2}{k^2}\left[q_{12}q_{21}-\right. \qquad (17)$$
$$\left.-F_1F_2-\alpha\beta q_\varepsilon\left(q_{12}d_1+q_{21}d_2+d_2F_1+d_1F_2\right)\right]=0$$

где

$$F_1=D_1k^2+q_{11},\quad F_2=D_2k^2+q_{22} \qquad (18)$$

Из (17) следует, что упругие колебания и колебания точечных дефектов не взаимодействуют в трёх случаях:

а) $\nu=0,5;$ либо б) $q_\varepsilon=0;$ либо в) $d_1=d_2=0$ (19)

При условиях (19) уравнение (17) приводится к виду:

$$\left(\frac{\omega^2}{k^2}-C_l^2\right)\left[\omega^2-i\left(F_1+F_2\right)\omega-F_1F_2+q_{12}q_{21}\right]=0 \qquad (20)$$

В первых двух равенствах в (17), когда $q_\varepsilon=0$ или $\nu=0,5$ а $d_1\neq 0,\ \ d_2\neq 0$, означает, что деффекты не чувствуют волну, а в слое, как видно из (20), распространяются две волны, первая волна распространяется со скоростью C_l, а частота второй волны определяется из второго множителя в (20), вторая волна затухает, если выполняется неравенство

$$F_1F_2\geq q_{12}q_{21} \qquad (21)$$

При обратном неравенстве (21) амплитуда колебаний будет неограниченно возрастать. В этом случае линейная теория не годится, нужно учитывать нелинейные члены в уравнениях (16).

Когда $d_1=d_2=0$, а $q_\varepsilon\neq 0$ и $\nu\neq 0,5$, то дефекты чувствуют волну, но волна не замечает их. В этом случае второй множитель в (20) описывает процесс увеличения или уменьшения количества дефектов и всё вышесказанное остаётся в силе.

Рассмотрим общий случай, когда все коэффициенты отличны от нуля, однако влияние дефектов на упругую волну слабо.

Для планарных колебаний слоя решение ищем в виде (14), тогда получим систему уравнений (15). Дисперсионное уравнение удобно представить в следующем виде:

$$\omega^2C_2^{-2}-k^2=-k^2\,\frac{\phi_1+i\alpha\beta\omega\left(d_1+d_2\right)}{\phi_2+i\phi_3}, \qquad (22)$$

где

$$\phi_1=-\alpha\beta\left[\left(d_1q_{12}+d_2q_{21}\right)-F_1d_2-d_1F_2\right],\ \phi_2=-\omega_0^2+D_1D_2k^2+D_1k^2q_{22}-q_{11}k^2D_2+q_{11}\alpha_{22}+q_{12}\alpha_{21}$$
$$\phi_3=\omega\left[k^2\left(D_2+D_1\right)+q_{11}+q_{22}\right]$$

Частота комплексное, т.е. $\omega = \omega_0 + \omega_1 + i\alpha_{11}$, ω_1 – малая дисперсия, α_1 – малый коэффициент поглощения, а ω_0 – основная частота, $\omega_0 = kC_2$

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 \left[1 - \frac{\phi_1\phi_2 - \alpha\beta\omega\phi_3\left(d_1 + d_2\right)}{\phi_2^2 + \phi_3^2} \right], \; \alpha_1 = -\frac{\alpha\beta\omega_0\phi_2\left(d_1 + d_2\right) - \phi_1\phi_3}{2\left(\phi_2^2 + \phi_3^2\right)}$$

В том случае, когда в пластине распространяются изгибные волны, которые описываются уравнениями (13), решение ищем в виде (14). Тогда дисперсионное уравнение принимает вид:

$$\frac{Dk^2}{2\rho h} - \omega^2 = -2k^4\beta D_* h\rho \frac{T_1 + i\omega\left(d_2 + d_1\right)}{T_2 + i\omega\left(F_1 + F_2\right)} \tag{23}$$

Если $q_{11} = q_{22} = D_1 = D_2 = q_{12} = q_{21} = d_1 = d_2 = 0$, то $\omega_0^2 = \dfrac{D}{2\rho h} k^2 = v_0 k^2$

В (23) $T_1 = d_2F_1 + d_1F_2 - q_{21}d_2 - d_1q_{12}$, $\quad T_2 = F_1F_2 - \alpha_0\omega^2 - q_{21}q_{12}$,

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 \left[1 - \frac{k^2\beta D_*}{D} \frac{T_1T_2 + \omega_0^2\left(d_1 + d_2\right)\left(F_1 + F_2\right)}{T_2^2 + \omega_0^2\left(F_1 + F_2\right)^2} \right], \; \alpha = \frac{k^4\beta D}{4\rho h} \frac{\left[T_2\left(d_1 + d_2\right) - T_1\left(F_1 + F_2\right)\right]}{\left[T_2^2 + \omega_0^2\left(F_1 + F_2\right)^2\right]}$$

Представляет интерес рассмотреть тот случай, когда в системе уравнений изгибных волн выполняются равенства $Q_1 \neq 0$, $D_1 = D_2 = d_1 = d_2 = 0$. Тогда из системы уравнений для изгибных волн отделяются уравнения для точечных волн. Изменение количества точечных дефектов под воздействием упругих волн дается формулой:

$$k^2 Q_1 \left(1 - \frac{i\omega + \alpha_{22}}{\alpha_{12}} \right) A = \left[\alpha_{21} - \left(i\omega + \alpha_{22}\right)\left(i\omega + \alpha_{11}\right) \right] B$$

Автор благодарит проф. М. Белубекяна за полезные обсуждения и помощь.

ЛИТЕРАТУРА

1. Артамонова О.В., Ерофеев В.И. Некоторые дисперсионные и нелинейные эффекты при распространении волн в материалах с точечными дефектами. //В сб.: IX Всероссийская научная конференция: «Нелинейные колебания механических систем». 2011. С.24-92.
2. Шекоян А.В. Акустическая волна в среде с точечными дефектами. //Известия НАН Армении. Физика. 2015. Т.50. №2.
3. Belubekyan M.V., Erofeev V.I., Shekoyan A.V. Influence of point defects on ultrasonic waves propagating in the thin plate. Materials Physics and Mechanics. V.23. 2015. P.20-24.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.. Теория упругости. М.: Наука, 1987.
5. Новацкий В.. Вопросы термоупругости. М.: Изд.АН СССР, 1962. 362с.
6. Белубекян В.М. Об уравнениях теории пластин, учитывающих поперечные сдвиги. // В сб.: «Проблемы механики тонких деформируемых тел». Ереван: 2002. С.67–88.

Сведения об авторах:

Шекоян Ашот Вазгенович – ст.научн.сотр. Института механики НАН Армении
Адрес: 0019, Ереван, пр.Маршала Баграмяна, 24/2. **Тел.:**(37410) 56 85 69.
E–mail: ashotshek@mechins.sci.am

Ерофеев Владимир Иванович –д.ф.м.н., проф., директор Института проблем машиностроения РАН; **Адрес:** 603024, Нижний Новгород, ул. Белинского, 85.

МЕХАНИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Есаян С.Г.

Весьма сложной задачей теории упругопластичности является то, что неизвестно, по какой закономерности произойдёт процесс деформирования (вид аналитической функции связи – напряжение–деформация) при каждом случае изменения напряжённого состояния упруго-пластической (УП) среды. Предложенная реологическая модель позволяет чётко определить закономерность изменения деформированного состояния УП среды при любом цикле изменения действующих на тело напряжений. На основе работы этой модели удаётся анализировать сопутствующие изменению напряжённо-деформированному состоянию сложнейшие процессы, происходящие в УП среде. В частности, определяется количество диссипированной пластической энергии, получить петлю гистерезиса при каждом цикле изменения напряжений, чётко объяснить сущность эффекта Баушингера, определить точную величину остаточной деформации, получить закономерность изменения коэффициента внутреннего трения (поглощения) при циклическом изменении напряжённого состояния и т.д.

Кусочно-линейное моделирование УП нелинейного деформирования

График одноосного испытания упругопластического образца в общем случае аппроксимируется нелинейной функцией $\varepsilon = F(\sigma)$ (рис.1). Для кусочно-линейного моделирования участка OM функции $F(\sigma)$ разделим σ_M на m равные части: $\overline{\sigma} = \sigma_M / m$. На кривой ε получим точки 1, 2, 3,..., $m\left(M\right)$. Последовательно соединив эти точки, получим ломаную $0123\ldots m$, вписанную в кривую $F(\sigma)$. Ломаная $012\ldots m$ будет кусочно-линейной моделью (КЛМ) функции $\varepsilon = F(\sigma)$. $\overline{\sigma}$ является удельным напряжением для модели, т.е. коэффициентом модели. КЛМ позволяет нелинейный процесс $\varepsilon = F(\sigma)$ представить как сумму линейных процессов 01, 12, 23,.., $(m\text{-}1)m$:

$$\varepsilon = F(\sigma_M) = O'1' + 1'2' + 2'3' + \ldots + (m-1)'m,$$

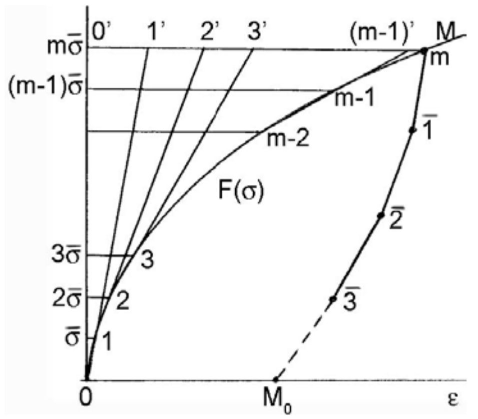


Рис. 1. Замена кривой деформации вписанным многоугольником

притом, каждый участок ломаной 01, 12, 23,… работает как отдельная упругая пружина. Это подсказывает принцип создания механической упругопластической модели (УПМ) нелинейного процесса $F(\sigma)$. Отдельный элемент упругопластической модели (рис. 2в) состоит из упругой пружины У (рис. 2а) и пластического механизма П (рис. 2б). Механизм пластичности представляет собой подвижный жёсткий диск Д, лежащий на неподвижной плите (на рис. 2б неподвижная плита заштрихована). Для скольжения диска на плите необходимо приложить к диску условное напряжение, по величине превосходящее $\overline{\sigma}$.

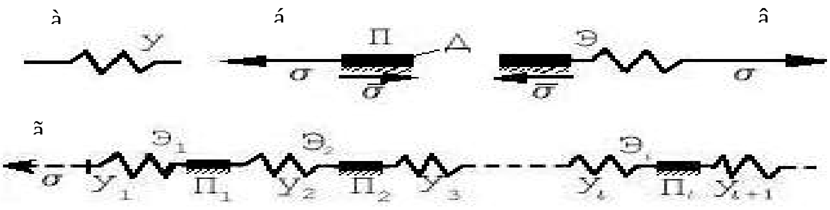


Рис. 2. Схема УП модели: а – упругая пружина; б – пластический элемент; в – элемент упругопластичности; г – УП модель.

Условие неподвижности диска $\sigma \le \overline{\sigma}$ является основным для элемента УПМ (на рис. 2б показан отдельный элемент модели УПМ) и модели в целом. УПМ создаётся последовательным соединением элементов Э$_1$, Э$_2$, Э$_3$,… (рис. 2г). Поскольку УПМ является КЛМ для $F(\sigma)$, то она является реологической моделью упругопластического материала испытуемого образца. Принцип работы УПМ следующий. Внешнесиловое воздействие σ передаётся модели через первую упругую пружину У$_1$. Пока $\sigma = \sigma_1 \le \overline{\sigma}$, напрягается только У$_1$, так как условие неподвижности в П$_1$ не нарушено. При этом показанная деформация УПМ соответствует участку КЛМ: 01. Как только действующее напряжение $\sigma = \sigma_1$ превосходит величину коэффициента УПМ, диск первого пластического механизма (Д$_1$) начинает скользить по плите, напрягая соединённую с ним упругую пружину $У_2$ напряжением $\sigma_2 = \sigma_1 - \overline{\sigma}$. Это значит, что КЛМ наступила в зону второй прямой линии – 12. И пока $\sigma_2 \le \overline{\sigma}$, находимся в зоне 12. Как только $\sigma_2 = \overline{\sigma}$, достигаем точки 2. Все это время в работе участвуют $У_1$, $П_1$ и $У_2$. Как только подключается пружина $У_3$, КЛМ вступает в зону 23. При $\sigma_3 = \overline{\sigma}$ в КЛМ находимся в точке 3. Как только $\sigma_3 > \overline{\sigma}$, в работу подключается $У_4$, и в работе КЛМ начинает участвовать также и прямая 34. Итак, с ростом поочерёдно подключаются пружины $У_1$, $У_2$, $У_3$, $У_4$, $У_5$, $У_6$,…, $У_m$ (соответственно в КЛМ прямые 01, 12, 23, 34,…, (m-1)m), и достигаем точки М. Величина напряжения в каждой пружине $У_i$ будет на $\overline{\sigma}$ меньше, чем в предыдущей пружине $У_{i-1}$: $\sigma_i = \sigma_{i-1} - \overline{\sigma}$. $\overline{\sigma}$ поглощается в пластическом механизме $П_{i-1}$, что характеризует влияние внутреннего трения на упругопластическое деформирование. Для напряжения, действующего в любой пружине под номером i, можно написать $\sigma_i = \sigma_{1-1} - (i-1)\overline{\sigma}$, поскольку поочерёдно в каждом пластическом механизме $П_1$, $П_2$,..., $П_{i-1}$ поглощается напряжение $\overline{\sigma}$, что в сумме составляет (i -1)$\overline{\sigma}$. По ходу роста σ до величины σ_M каждая пружина имеет свою зону действия: $У_1$ – треугольник $OO'1'$, $У_2$ – треугольник 11'2', $У_3$ – треугольник 22'3',…, $У_m$ – треугольник $(m-1)(m-1)'m$. Это обеспечивает условие

$$\varepsilon_M = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots + \varepsilon_m = F(\sigma_M)\,. \tag{1}$$

Условие (1) требует, чтобы коэффициент E_i каждой пружины $У_i$ имел величину

$$\begin{gathered} E_1 = \overline{\sigma}/F(\overline{\sigma}); \quad E_2 = \overline{\sigma}/\left[F(2\overline{\sigma}) - 2F(\overline{\sigma})\right]; \\ E_3 = \overline{\sigma}/\left[F(3\overline{\sigma}) - 2F(2\overline{\sigma}) + F(\overline{\sigma})\right]; \\ E_4 = \overline{\sigma}/\left[F(4\overline{\sigma}) - 2F(3\overline{\sigma}) + F(2\overline{\sigma})\right]; \quad \ldots, \end{gathered} \tag{2}$$

что приводит к рекуррентной формуле (для i=2, 3, 4, ..., m):

$$E_i = \overline{\sigma}/\left\{F(i\overline{\sigma}) - 2F\left[(i-1)\overline{\sigma}\right] + F\left[(i-2)\overline{\sigma}\right]\right\}. \tag{3}$$

Тогда деформация пружины $У_i$ будет

$$\varepsilon_i = \sigma_i / E_i = \left[m-(i-1)\right]\left\{F(i\sigma) - 2F\left[(i-1)\sigma\right] + F\left[(i-2)\sigma\right]\right\},$$

а деформация всей модели УПМ:

$$\begin{gathered} \varepsilon = \sigma_1/E_1 + \sum_{ø=2}^{ü}\left[\sigma - (i-1)\overline{\sigma}\right]/E_i = mF(\overline{\sigma}) = \\ = \sum_{i=2}^{m}\left[m-(i-1)\right]\left\{F(i\sigma) - 2F\left[(i-1)\sigma\right] + F\left[(i-2)\sigma\right]\right\}. \end{gathered} \tag{4}$$

Во многих случаях кривую $\varepsilon(\sigma)$ достаточно удовлетворительно можно аппроксимировать аналитической функцией $\varepsilon = \sigma(a + b\sigma^n)$, где $a,\ b$ – опытные параметры. Если степень нелинейности нулевая: n=0, то $a + b = 1/E$. Из (2) следует, что если степень нелинейности n=0, т.е. в случае линейной деформации, жёсткости пружин $У_2$, $У_3$, $У_4$,… в модели УП предельно велики, и в работе участвует только первая упругая пружина (поскольку при линейной деформации $F(n\overline{\sigma}) = nF(\overline{\sigma})$). Если степень нелинейности равняется единице (n =1), то

$$E_1 = 1/(a + b\overline{\sigma}); \qquad E_2 = E_3 = E_4 = \ldots = 1/2b\overline{\sigma}. \tag{5}$$

При n =2:

$$E_1 = 1/(a + b\overline{\sigma}^2);\ E_2 = 1/6b\overline{\sigma}^2;\ E_3 = 1/12b\overline{\sigma}^2;\ E_4 = 1/18b\overline{\sigma}^2; \ldots;\ E_k = 1/6(k-1)b\overline{\sigma}^2 \ldots \tag{6}$$

Закономерность спада напряжения в упругопластической модели

Напряжённое состояние упругопластической модели УПМ можно представить в виде треугольной матрицы (на рис.3 показана матрица, когда m =8). По горизонтали по очереди расположены упругие элементы $У_1$, $У_2$, ..., а над каждым из них по высоте – действующие в них напряжения $h_1 = \sigma_1, h_2 = \sigma_2$, $h_3 = \sigma_3$ .... Очевидно, что $h_1 - h_2 = h_2 - h_3 = \ldots = h_i - h_{i-1} = \overline{\sigma}$.

Начиная с точки M, изменение напряжения может быть в сторону его роста: $\sigma > \sigma_M$, или же его спада: $\sigma < \sigma_M$. Ожидаемое поведение изменения графика функции ε можно получить, анализируя адекватную реакцию упругопластической модели среды. Изменение σ в сторону его роста производит параллельное смещение LL (пунктирные линии на рис.3) в работе, подключая следующие по очереди упругие пружины $У_{m-1}$, $У_{m-2}$ …. (на рисунке $У_9$, $У_{10}$, …). Это является результатом того, что график функции ε будет прогрессировать по исходно-базовой функции $\varepsilon = F(\sigma)$. Исключительно важное значение имеет поведение УПМ при спаде напряжения: $\sigma < \sigma_M$. В случае, когда σ от уровня σ_M уменьшается на $\bar{\sigma}$, напряжения в $У_1$ и $У_2$ сравниваются ($\sigma_1 = \sigma_M - \bar{\sigma} = h_1 - \bar{\sigma} = h_2 = \sigma_2$), и $У_2$ ещё сохраняет своё исходно-равновесное состояние, поскольку разница напряжений $\sigma_1 - \sigma_2$ ещё не превосходит коэффициента трения пластического механизма $П_1$: $\sigma_1 - \sigma_2 \le |\bar{\sigma}|$. И пока $\sigma_1 - \sigma_2 \le |\bar{\sigma}|$, изменение напряжения σ_1 в $У_1$ не может вызвать адекватное изменение напряжения в пружине $У_2$. Чтобы достичь границы, после которой влияние спада напряжения в $У_1$ передалось на $У_2$, необходим дополнительный спад напряжения ещё на $1\bar{\sigma}$. Таким образом, чтобы спад напряжения в $У_1$ передался следующей пружине $У_2$, необходимо, чтобы этот спад по величине превосходил $2\bar{\sigma}$. Безразличное состояние пружины $У_2$ сохраняется в диапазоне изменения напряжения: $\sigma_M > \sigma \ge \sigma_1 - 2\bar{\sigma}$. При этом, процесс деформирования УПМ происходит по прямой $M\bar{1}$ (рис.2), которая параллельна прямой 01 и по длине равна её двойному размеру: $M\bar{1} = 2 \times 01$. На рис.3 закономерность изменения матрицы напряжённого состояния УПМ в сторону спада наглядно отражает сказанное. Изменение напряжения в $У_1$ в промежутке $\sigma_1 = 8\bar{\sigma} - 7\bar{\sigma}$ благодаря работе пластического механизма П1 не доходит до пружины $У_2$ и не влияет на σ_2. Итак, изменение $\sigma_1 - 2\bar{\sigma} > \sigma \ge \sigma_1 - 4\bar{\sigma}$ оставляет след $\overline{12}$ =2x12, и $\overline{12}$ параллельна прямой 12. Спад напряжения в пределе ($\sigma_1 - 4\bar{\sigma} > \sigma \ge \sigma_1 - 6\bar{\sigma}$) происходит по прямой $\overline{23}$, которая параллельна 23 и равна её двойному размеру. Эти последовательные изменения (количество которых равняется $0{,}5m$) приводят в точку M_0, соответствующую напряжению $\sigma_1 = \sigma$ =0. При этом, напряжение в $У_1$ становится равным 0, но в остальных упругих пружинах $У_2$, $У_3$, …, $У_m$ сохраняются остаточные напряжения, благодаря которым в пружинах УПМ сохраняются остаточные деформации $\varepsilon_2,\ \varepsilon_3, \ldots$, сумма которых равна остаточной деформации испытанного упругопластического образца: $\varepsilon_0 = \varepsilon_{M_0} = OM_0$. Точки $m,\ \bar{1},\ \bar{2}, \ldots$ принадлежат как модели УПМ, так и разгрузочной кривой деформации f_M. Уравнение разгрузочной функции f_M, которое является деформационным следом спада напряжения $\sigma_M \ge \sigma \ge 0$, будет

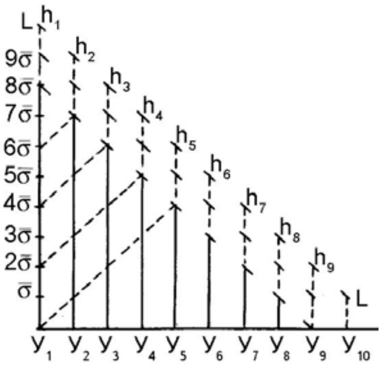


Рис. 3. Матрица напряжений элементов УПМ.

$$f_M = F(\sigma_M) - 2F\left[0{,}5(\sigma_M - \sigma)\right]. \qquad (7)$$

Подставляя в (7) $\sigma = 0$, получим величину остаточной деформации:

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_{M_0} = F(\sigma_M) - 2F(0.5\sigma_M). \qquad (8)$$

Если с позиции M_0 произвести новый загрузочный цикл, изменяя напряжение $\sigma_M \ge \sigma \ge 0$, то получим новую кривую деформации $\bar{f}_{M_0}$ (рис. 4) с уравнением

$$\bar{f}_{M_0} = F(\sigma_M) - 2F(0{,}5\sigma_M) + 2F(0{,}5\sigma). \qquad (9)$$

Функция $\overline{f}_{M_0}$ обратно-симметрична функции f_M. Они создают петлю гистерезиса П(M_0M) с обратно-симметричной осью M_0M. Имея уравнения функций $F(\sigma)$, f_M, $\overline{f}_{M_0}$, легко получим количество упруго-возвратной и безвозвратно диссипированной составляющих израсходованной общей энергии деформирования.

При равной сопротивляемости материала растяжению и сжатию, продолжая f_M, можно найти то значение напряжения $\sigma = \sigma_0$, при котором кривая f_M пересекает ось ординат, решая уравнение (точка $6'$ на рис. 5)

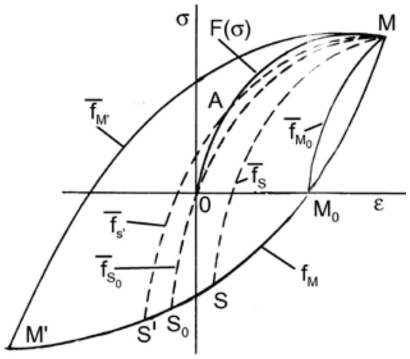


Рис. 4. Кривые разгрузки и загрузки из разных точек S.

$$f_M(\sigma_0) = F(\sigma_M) - 2F\left[0,5(\sigma_M - \sigma_0)\right] = 0. \qquad (10)$$

Обратный процесс изменения напряжённо-деформированного состояния по f_M завершается в точке M', находящейся в зеркально-симметричном расположении по отношению к стартовой точке M. Если с позиции M' произвести новый процесс нагрузки упругопластического материала положительными зарядами напряжений (т.е. произведя спад напряжений), то кривая деформации пройдёт по функции

$$\overline{f}_{M''} = -F(\sigma_M) + 2F\left[\frac{\sigma_M + \sigma}{2}\right] \qquad (11)$$

и завершится в точке M, зеркально–симметричной по отношению к M' (рис. 5).

Если с любой точки S функции $f_M(\sigma)$ провести новый процесс загружения положительными напряжениями, то возвратная кривая $\overline{f}_S(\sigma)$ (рис.4), как показывает анализ напряжённо-деформированного состояния модели УПМ, будет иметь вид:

$$\overline{f}_S(\sigma) = F(\sigma_M) - 2F\left(\frac{\sigma_M - \sigma_S}{2}\right) + 2F\left(\frac{\sigma - \sigma_S}{2}\right). \qquad (12)$$

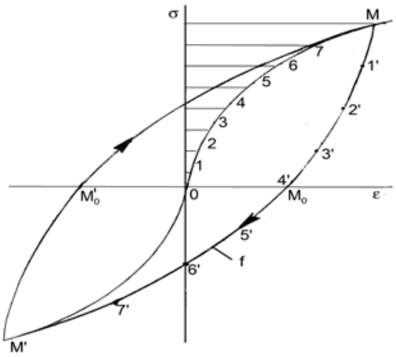


Рис. 5. График кривых f_M и $\overline{f}_{M''}$

Чтобы найти точку S_0 на $f_M(\sigma)$, из которой $\overline{f}_{S0}(\sigma)$ приведёт в начало координат O (рис. 4), достаточно решить уравнение

$$F(\sigma_M) - 2F\left(\frac{\sigma_M - \sigma_{S0}}{2}\right) + 2F\left(-\frac{\sigma_{S0}}{2}\right) = 0 \qquad (13)$$

и найти ординату σ_{S0} интересующей нас точки S_0. Здесь весьма важно иметь в виду, что хотя по вышеотмеченному правилу удаётся освободиться от остаточных деформаций и возвратиться в исходную точку O, все же исходное физическое состояние упругопластического образца не восстанавливается. И если теперь провести процесс загружения, то деформирование не произайдёт по кривой $\varepsilon = F(\sigma)$, а по $\overline{f}_{S0}(\sigma)$ (на рис. 4 показано пунктиром). Как показывает анализ напряжённого состояния элементов УПМ, при проведении загрузка-разгрузка по программе $O - M - S_0 - O$ в образце аккумулируются остаточные разнозначные напряжения (рис.6) (в этом наглядно можно убедиться, проводя изменения напряжений на матрице), вызванные деформации которых взаимно уравновешиваются, приводя к нулевому результату деформации. Однако остаточные внутренние напряжения меняют исходную природу упругопластического материала. Чтобы полностью восстановить начально-исходное нулевое (условно) состояние образца, необходимо полностью освободиться не только от остаточных деформаций, но и от остаточных внутренних напряжений. Как показывает разносторонний анализ кусочно-линейного моделирования нелинейной функции, добиться полного восстановления какого-нибудь уже пройденного физического состояния упругопластической среды невозможно. Если теперь с положения O продолжить процесс загрузки, кривая деформации пройдёт не по базовой функции $F(\sigma)$, а по $\overline{f}_{S0}(\sigma)$ (на рис. 4 показано пунктиром). Это означает, что *упруго-пластический процесс необратим*.

Точка S_0 является граничной. Возврат с любой точки, находящейся на f_M в промежутке MS_0, пересекается с функцией $F(\sigma)$ только в исходной точке M. Если возвратная точка находится на f_M в промежутке S_0M', то тогда возвратная функция $\overline{f}$ пересекает кривую $F(\sigma)$ в промежутке OM (точка A) и в исходной точке M. Возвратная кривая $\overline{f}_{M'}$ пересекает $F(\sigma)$ только в M.

Изменение напряжений в обратном направлении по отношению к базовой функции назовём изменением обратным ходом (ИОХ). Например, если с позиции M базовой функции $F(\sigma)$ продолжать приращения напряжений, то процесс будет следующий: изменение по ходу (ИПХ); если же провести спад напряжений, то изменение будет обратным ходом (ИОХ). Такое разделение вызвано тем, что, как показывает УПМ, направление изменения напряжений качественно и количественно влияет на характер изменения деформированного состояния образца. При изменении напряжений по ходу все характерные особенности процесса продолжают сохраняться консервативно по заданной функции $F(\sigma)$. Если же с какого-то состояния M происходит изменение напряжений обратным ходом, то кривая деформации не только расходится с базовой функцией, но и имеет новые упругопластические качества, которые значительно отличаются от исходного процесса деформирования. Так, например, обратная (разгрузочная) функция $f_M(\sigma)$ имеет процент линейности на порядок выше, чем исходная функция $F(\sigma)$. Относительная упругость функции $f_M(\sigma)$ дважды выше, чем процент упругости исходной функции $F(\sigma)$. Это видно из графика построения обратно-ходовой функции $f_M(\sigma)$ (рис.1). Участкам 01, 12, 23 и т.д. соответствуют участки $M\bar{1}$, $\overline{12}$, $\overline{23}$, ..., которые два раза длиннее, чем исходные 01, 12, 23 и т.д. Это покажем на примере. Если упругопластический материал на начальном участке кривой деформирования имеет ярко выраженную упругую линию OA, то с любой точки M функции $\varepsilon(\sigma)$ обратно-ходовой процесс (разгрузочный) будет иметь начальный прямолинейный участок MN, параллельный прямой OA и по величине равный её двойному размеру (рис. 6). То есть, линейность обратно-ходовой функции $f_M(\sigma)$ становится на порядок выше по отношению к базовой $F(\sigma)$ (обратно-ходовая функция единожды выпрямлена по отношению к исходно-базовой функции). Такая закономерность обратно-ходового изменения деформационного следа упругопластической среды подтверждается опытами (напр., опыты Г. Мазинга [1]).

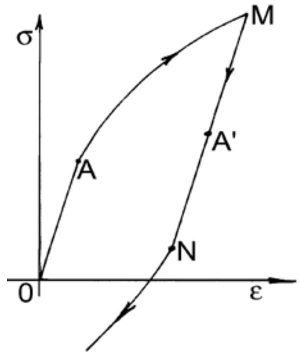


Рис. 6. Кривая разгрузки схематизированной кривой загрузки по ОАМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Москвитин В.В. Пластичность при переменных нагружениях. М.: Изд. МГУ, 1965. 264 с.
2. Есаян С.Г. Реологическое моделирование вязкоупругих, упругопластических и вязкоупругопластических деформаций. Ереван, «Чартарагет», 2009. 370 с.

<u>Сведения об авторе:</u>

Есаян Спартак Гургенович, докт. техн, наук. проф., Ванадзорский филиал Национального Политехнического Университета Армении, **Тел.:** (+374 43) 09 40 66.

E-mail: s.g.yesaqn@mail.ru

ТРЕЩИНЫ И ВКЛЮЧЕНИЯ В СОСТАВНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ СДВИГЕ

Закарян В.Г.

Рассматривается антиплоское напряжённое состояние составного полупространства, состоящее из упругого полупространства и жёстко контактирующей с ней упругого слоя. Полупространство содержит две параллельные трещины или жёсткие включения конечной длины, входящие под прямым углом на линию раздела материалов. В зависимости от заданных на берегах трещин условий, решение задач сводится к системе из 2-4 сингулярных интегральных уравнений относительно скачков перемещений и напряжений на берегах трещин.

Исследованию плоских и антиплоских контактных и смешанных задач для тел с концентраторами напряжений типа трещин, включений или стрингеров посвящено немало работ. Здесь отметим работы [2-7], тесно связанные с рассматриваемой здесь задачей.

Рассмотрим упругое составное полупространство, состоящее из упругого слоя и полупространства. В правосторонней декартовой системе координат $Oxyz$ слой занимает область $\Omega_1\left(-\infty < x, z < \infty; -H < y < 0\right)$, а полупространство – $\Omega_2\left(|x| < \infty; y > 0; |z| < \infty\right)$ с модулями сдвигов G_1 и G_2, соответственно.

Слой и полупространство контактируют по плоскости $y = 0$ и находятся в условиях полного контакта. Полупространство на отрезках $L_1 = A_1B_1\left\{(a_1, 0), (a_1, b_1)\right\}$ и $L_2 = A_2B_2\left\{(a_2, 0), (a_2, b_2)\right\}$, где $a_1 < a_2$, в направлении оси Oz ослаблено туннельными трещинами. Внешние нагрузки, обеспечивающие антиплоскую деформацию в рассматриваемых областях Ω_1 и Ω_2, могут быть приложены на берегах трещин, на верхней свободной поверхности $y = -H$ слоя, а также непосредственно на включениях. Требуется определить основные механические характеристики рассматриваемой задачи: контактные напряжения на защемлённых берегах трещин, на контактной поверхности $y = 0$, коэффициенты интенсивности напряжений на концах трещины, раскрытие берегов трещин.

Поставленная задача, как известно $[1]$, сводится к решению уравнений

$$\frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_j}{\partial y^2} = 0; \qquad (x, y) \in \Omega_j \qquad (j = 1, 2) \tag{1.1}$$

при соответствующих граничных условиях на берегах трещин и на свободной поверхности слоя.

Здесь $w_j(x, y)$– единственная, отличная от нуля компонента упругих перемешений, связанная с напряжениями закона Гука $[1]$. Решение уравнений (1.1), при данной выше постановке задачи, должно сперва удовлетворять следующим условиям контакта:

$$w_1(x, -0) = w_2(x, +0), \qquad G_1 \left.\frac{\partial w_1}{\partial y}\right|_{y=-0} = G_2 \left.\frac{\partial w_2}{\partial y}\right|_{y=0} \qquad |x| < \infty \tag{1.2}$$

Граничные условия, заданные на берегах трещин, могут быть разнообразными. Здесь, в основном, будут рассматриваться следующие три типа граничных условий:

– на берегах трещин заданы напряжения или перемешения:

$$\tau_{xz}^{(2)}\left(a_j \pm 0, y\right) = \tau_j^{(\pm)}(y), \qquad w_2\left(a_j \pm 0, y\right) = g_j^{(\pm)}(y), \qquad y \in L_j \qquad (j = 1, 2) \tag{1.3}$$

– на одном берегу трещины задано напряжение, а на другом – перемещение, например,

$$w_2\left(a_j + 0, y\right) = g_j^{(+)}(y), \qquad \tau_{xz}^{(2)}\left(a_j - 0, y\right) = \tau_2^{(-)}(y) \qquad (j = 1, 2) \tag{1.4}$$

где $\tau_j^{(\pm)}(y)$, $g_j^{(\pm)}(y)$ – заданные напряжения и перемещения на соответствующих краях трещин.

В случае $g_j^{(\pm)}(y) = \text{const}$ граничные условия из (1.3) соответствуют задаче, когда в места трещин в полупространстве Ω_2 вставлены абсолютно жёсткие включения.

Очевидно, что при различных разумных выборах граничных условий (1.3)-(1.4) можно получить решение некоторых новых и интересных в практическом аспекте задач, как при наличии, так и при отсутствии усиливающего слоя.

Обращаясь теперь к построению решения уравнения (1.1) в области Ω_2, введём там обобщённое перемещение $U_2(x,y)$ [2,4,6]

$$U_2(x,y)=\frac{1}{2}\left[\theta(-x+a_1-0)+\theta(x-a_1+0)+\theta(-x+a_2-0)+\theta(x-a_2+0)\right]w_2(x,y) \tag{1.5}$$

где $\theta(x)-$ функция Хевисайда.

Тогда, имея в виду (1.1), для $U_2(x,y)$ получим уравнение:

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2}=g_1(y)\delta'(x-a_1)+q_1(y)\delta(x-a_1)+g_2(y)\delta'(x-a_2)+q_2(y)\delta(x-a_2) \tag{1.6}$$

где $\delta(x)=\theta'(x)-$ функция Дирака, а $g_i(y)$ и $q_i(y)-$ скачки перемещения и напряжения $w_2(x,y)$ и $\tau_{xz}^{(2)}(x,y)$, соответственно через линии трещин L_j.

Решая уравнения (1.6) методом интегрального преобразования Фурье и удовлетворяя граничным условиям в каждом конкретном случае заданных граничных условий на L_1 и L_2, приходим к системе сингулярных интегральных уравнений относительно неизвестных скачков $g_j'(y)$ и $q_j(y)$. Число уравнений в зависимости от заданных граничных условий может быть 2 – 4. Ядра интегральных уравнений, помимо сингулярного ядра Коши, содержат также неподвижную особенность.

Ввиду ограниченности объёма статьи, здесь остановимся на более простых случаях, когда имеется одна трещина $(a_1=a_2=0, b_1=b_2=b)$, отмечая при этом, что все основные особенности задачи сохраняются и в этих случаях.

Рассмотрим случай, когда имеется одна трещина и на её берегах заданы условия типа (1.4):

$$g_2(-0,y)=\text{const}\,,\qquad \tau_{xz}^{(2)}(+0,y)=\tau_2^{+}(y) \tag{1.7}$$

Граничные условия (1.7) фактически соответствуют условиям контактной задачи, когда в места трещины вставлено жёсткое включение, одна сторона которой свободна, а другая соединена с полупространством.

Определяющие интегральные уравнения в этом случае получаются в виде:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^b\left[\frac{1}{\eta-y}+\frac{\gamma}{\eta+y}+K_{11}(\eta,y)\right]g_2'(\eta)\,d\eta-\tau_2(y)=f_1(y),\qquad (0<y<b)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^b\left[\frac{1}{\eta-y}+\frac{\gamma}{\eta+y}-K_{11}(\eta,y)\right]\tau_2(\eta)\,d\eta-g_2'(y)=f_2(y),\qquad (0<y<b) \tag{1.8}$$

где $g_2(y)=w_2(+0,y)-$ неизвестное раскрытие свободного края трещины, а $G_2\tau_2(y)=\tau_{xz}^{(2)}(-0,y)-$ неизвестное сдвигающее контактное напряжение, возникшее под включением.

Решения системы (1.8) должны ещё удовлетворять условиям

$$\int_0^b g_2'(t)dt=0\,,\qquad \int_0^b\tau_2(t)\,dt=\frac{P}{G_2}\,, \tag{1.9}$$

где p – равнодействующая касательных сил, приложенных к свободной поверхности включения.

При помощи подстановок

$\eta=b(\varsigma+1)/2\,,\quad y=b(\xi+1)/2$

$$g(\xi)=g_2'\left(\frac{b(\xi+1)}{2}\right)=\frac{\varphi_1(\xi)-\varphi_2(\xi)}{2}\qquad \tau(\xi)=\tau_2\left(\frac{b(\xi+1)}{2}\right)=\frac{\varphi_1(\xi)+\varphi_2(\xi)}{2} \tag{1.10}$$

система интегральных уравнений (1.8) запишется в следующем каноническом виде:

$$\varphi_1(\xi)-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{\varsigma-\xi}+\frac{\gamma}{\varsigma+\xi+2}\right]\varphi_1(\varsigma)d\varsigma+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}K_{11}^*(\varsigma,\xi)\varphi_2(\varsigma)d\varsigma=-\left[f_1^*(\xi)+f_2^*(\xi)\right]$$

$$\varphi_2(\xi)+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{\varsigma-\xi}+\frac{\gamma}{\varsigma+\xi+2}\right]\varphi_2(\varsigma)d\varsigma-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}K_{11}^*(\varsigma,\xi)\varphi_1(\varsigma)d\varsigma=-\left[f_1^*(\xi)-f_2^*(\xi)\right] \tag{1.11}$$

$$K_{11}^*(\varsigma,\xi)=\frac{4\mu}{(1+\mu)^2}\sum_{k=1}^{\infty}(-\gamma)^k\frac{1}{4\beta(k+1)+\varsigma+\xi+2},\qquad \mu=\frac{G_1}{G_2},\quad \gamma=\frac{1-\mu}{1+\mu},\quad \beta=\frac{H}{b}$$

$$f_1^*(\xi)=\frac{1}{G_2}\tau_2^{(+)}(\xi)+\frac{4\mu}{\pi G_1(1+\mu)}\sum_{k=0}^{\infty}(-\gamma)^k\int_{-\infty}^{\infty}\frac{tq_1(t)dt}{t^2+R_k^2(\xi)}$$

$$f_2^*(\xi)=\frac{1}{\pi G_2}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{\varsigma-\xi}+\frac{\gamma}{\varsigma+\xi+2}-K_{11}^*(\varsigma,\xi)\right]\tau_2^{(+)}(\varsigma)d\varsigma-\frac{4\mu}{\pi G_1(1+\mu)}\sum_{k=0}^{\infty}(-\gamma)^kR_k(\xi)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{q_1(t)dt}{t^2+R_k^2(\xi)}$$

$$R(\xi)=\beta(2k+1)+\frac{\xi+1}{2} \tag{1.12}$$

В формулах (1.12) $q_1(x)=q(bx)$– заданное сдвиговое напряжение, приложенное на поверхности слоя $y=-H$.

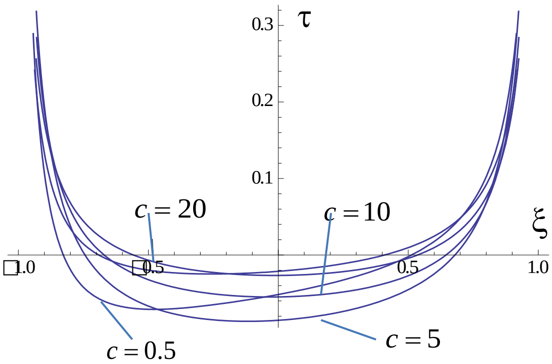
Решение системы (1.11) при условиях (1.9) построено методом механических квадратур [7]. Показатели особенности решений системы (1.11) на концах линии интегрирования определяются из трансцендентных уравнений:

$$\mathrm{ctg}\pi\delta_1+\frac{\gamma}{\sin\pi\delta_1}=\pm1,\qquad \mathrm{ctg}\pi\delta_2=\pm1,\qquad (0<\delta_1,\delta_2<1) \tag{1.13}$$

где δ_1 соответствует точке $\eta=-1+0$, а – $\delta_2-\eta=+1-0$.

При достаточно большом диапазоне изменения параметров задачи была проведена численная реализация, некоторые из которых представлены на рис.1,2 и табл.1 при $P=0$, $\tau_2^{(+)}(y)=0$, $q(t)=q_0\left[\delta(t-c^*)-\delta(t+c^*)\right]$, $(c^*=c/b)$.

На рис.1 показано распределение приведённого контактного напряжения $\tau(\xi)$ относительно bG_1/q_0 при различных значениях c^* $(c^*=0,5;1;5;10;20)$ и $\mu=\beta=1$, а на рис.2 приведено раскрытие $w(\xi)$ свободного берега трещины $g_2(y)$ в зависимости от μ $(\mu=0,2;0,6;0,8;1;1,5)$ при $c^*=\beta=1$. В таблице приведены значения коэффициентов интенсивности напряжений на концах жёсткого включения.



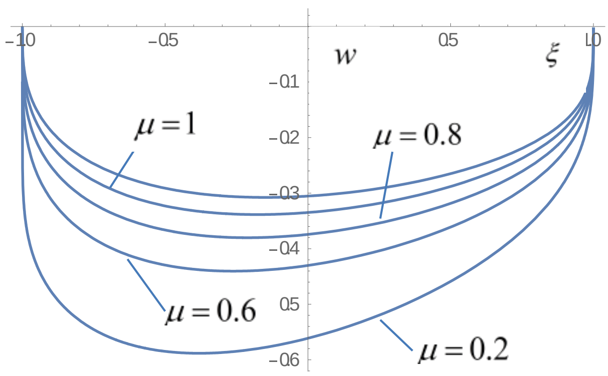


Рис.1 Рис.2

Таблица1

μ	0.2	0.6	0.8	1	1.5	2
K1	0.0900209	0.0803896	0.0683053	0.0610196	0.0512141	0.049514
K2	-0.099008	-0.105253	-0.11781	-0.130418	-0.161913	-0.182345

Рассмотрим теперь случай, когда на берегах трещины заданы условия в виде (1.3) $g_2(\pm 0, y) = \text{const}$, которые соответствуют контактной задаче, когда в места трещины вставлено жёсткое включение и оба края защемлены.

Тогда решение задачи сводится к одному интегральному уравнению относительно скачка неизвестных контактных напряжений:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{\eta-y}+\frac{\gamma}{\eta+y}-K_{11}^{*}(\eta,y)\right]\tau(\eta)\,d\eta = f_{21}(y)\ , \tag{1.14}$$

$$\tau(\eta)=\frac{1}{G_2}\left[\tau_{xz}^{(2)}\left(+0,\frac{b}{2}(\eta+1)\right)-\tau_{xz}^{(2)}\left(-0,\frac{b}{2}(\eta+1)\right)\right]$$

при условии

$$\int_{-1}^{1}\tau_1(\eta)d\eta=0,\qquad -1<y<1 \tag{1.15}$$

Здесь $K_{11}^{*}(\eta,y)$ даётся формулой (1.12), а

$$f_{21}(\eta,y)=\frac{4\mu}{\pi G_1(1+\mu)}\sum_{k=0}^{\infty}(-\gamma)^k R_k(y)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{q_1(t)\,dt}{R_k^2(y)+t^2} \tag{1.16}$$

Показатели особенности $\tau(\eta)$ на концах включения в этом случае определяются из уравнений:

$\mathrm{ctg}(\pi\delta_1)=0$ и $\mathrm{ctg}(\pi\delta_2)=-1$, $(0<\delta_1,\delta_2<1)$

для точек $y=1-0$, и $y=-1+0$, соответственно.

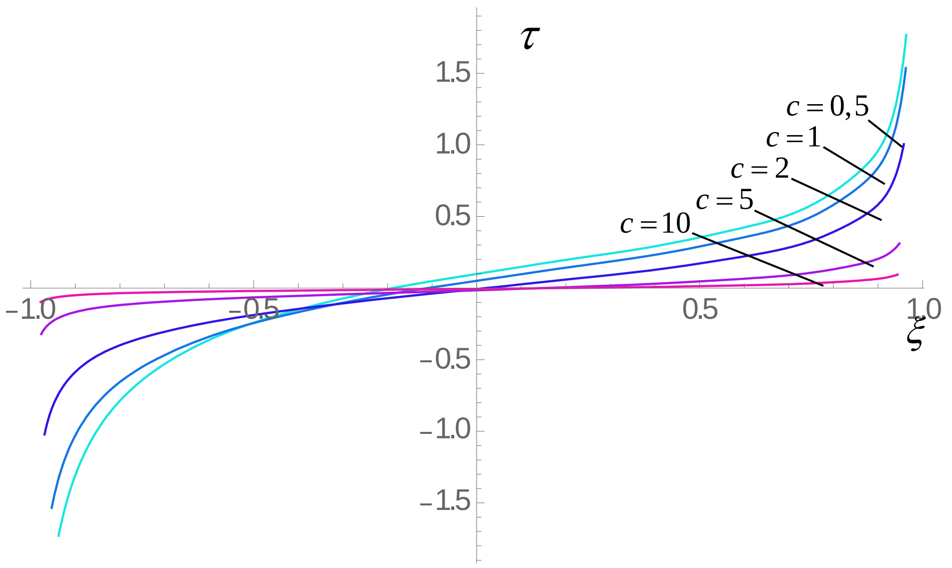


Рис.3

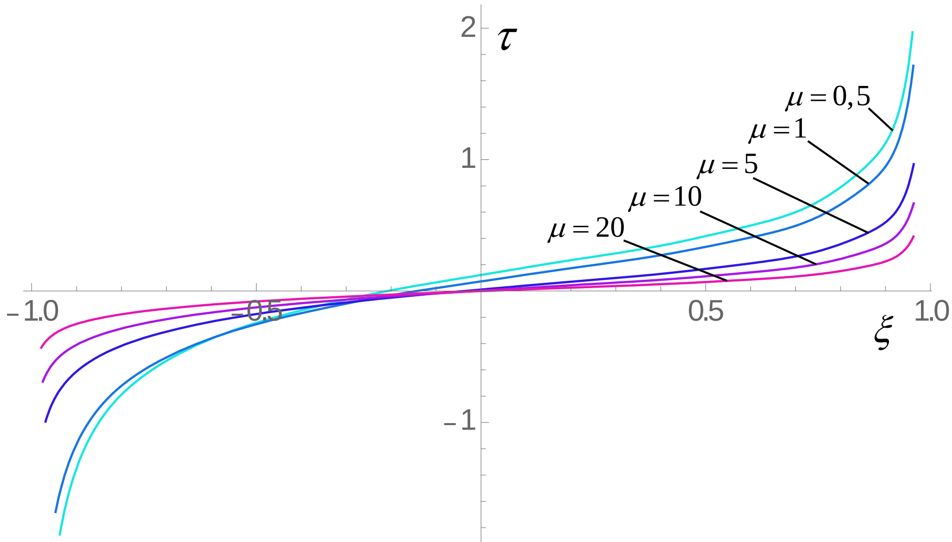


Рис.4

На рис. 3 и 4 показано распределение относительных контактных напряжений $\tau = bG_1\tau(\eta)/q_0$ при тех же значениях параметров задач, что и в предыдущей при чётном $q(t)=q_0\left[\delta\left(t-c^*\right)+\delta\left(t+c^*\right)\right]$. На рис.3 изменяется $c^*(c^*=0,5;1;2;5;10)$, а остальные параметры постоянны, на рис.4 изменяется параметр μ $(\mu=0,5;1;5;10;20)$.

Из (1.16) и (1.14) следует, что нечётным распределением внешней нагрузки $q(t)\left(q(t)=-q(-t)\right)$ скачок напряжений на краях включения отсутствует - $\tau(\eta)=0$, которое соответствует постановке задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 375с.
2. Григорян Э.Х. Решение задачи упругого конечного включения, выходящего на границу полуплоскости. //Уч.зап. ЕГУ, ест. 1981. №3. С.32-43.
3. Акопян В.Н., Даштоян Л.Л., Акопян Л.В. Антиплоское напряжённое состояние составного пространства с трещинами при смешанных граничных условиях. //Изв. НАН Армении. Механика. 2009. №4. С.16-23.
4. Aghayan K.L., Grigoryan E.Kh., Zakaryan V.G. Longitudinal shear of a compound elastic half-space weakened by cracks. Advanced Materials Research Vol.1020(2014) pp.286-290 (2014) Trans Tech Publications, Switzerland doi: 10 4028.
5. Акопян В.Н., Саргсян А.О. Об одной динамической смешанной задаче для составного пространства с трещиной при антиплоской деформации. //В сб. статей: «Избранные вопросы теории упругости, пластичности и ползучести», посв. 75-летию академика М.А. Задояна, Ереван: «Гитутюн», 2006. С.50-56.
6. Агаян К.Л., Закарян В.Г. Продольный сдвиг составного упругого пространства, ослабленного трещинами. //Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. «Труды VIII международной конференции Горис-Степанакерт» 2014, с.23-27.
7. Саакян А.В. Метод дискретных особенностей в применении к решению сингулярных интегральных уравнений с неподвижной особенностью. //Изв. НАН Армении. Механика. 2000. Т.53. №3. С.12-19.

Закарян Ваге Гришаевич, аспирант Института механики НАН Армении.
Тел.: (+37477)789-264, **E-mail**: vahe-zaqaryan@mail.ru

О ПОСТРОЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ТВЁРДОМ ТЕЛЕ С УЧЁТОМ ЭФФЕКТОВ НЕЛОКАЛЬНОСТИ СРЕДЫ

Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю.

С использованием соотношений рациональной термодинамики необратимых процессов с внутренними параметрами состояния, рассмотрен подход к построению математических моделей термомеханических процессов в твёрдом теле с учётом эффектов временной и пространственной нелокальности сплошной среды.

1. Современные конструкционные и функциональные материалы, представляющие собой совокупность микро- или наноструктурных элементов, часто называют структурно-чувствительными материалами. Важной особенностью таких материалов является качественное изменение физических свойств по сравнению с массивным материалом [1-6]. Так при больших флуктуациях физических характеристик микро- или наноструктурных элементов материала его уже нельзя считать простым, так как физические характеристики элементов такого материала подвержены влиянию прочих окружающих элементов структуры, т.е. имеет место так называемая нелокальность среды. Исследованию влияния нелокальности на напряжённо-деформированное состояние среды посвящены работы [7-10]. К структурно-чувствительным материалам в чистом виде не применима методология континуума. Тем не менее, допустимо распространение методов механики сплошной среды, занимающейся изучением механического поведения материалов на макроуровне, на микроуровень. Такой приём распространения взглядов классической механики сплошной среды на среду с микро- и наноструктурой называют методом непрерывной аппроксимации [11]. Область науки, в которой поведение материалов с микро- и наноструктурой изучают с использованием метода непрерывной аппроксимации, иногда называют обобщённой механикой сплошной среды. Ключевыми моментами в этом методе являются установление связи между характеристиками микро-(нано-) уровня и макроуровня, а также учёт эффектов пространственной нелокальности среды.

2. Для получения определяющих уравнения, описывающих термомеханические процессы в твёрдом теле, воспользуемся соотношениями рациональной термодинамики необратимых процессов для среды с параметрами термодинамического состояния [12-14]. Выбор этого подхода объясняется тем, что такая модель позволяет связать макроскопическое поведение тел с рядом микроструктурных процессов, которые протекают на микроуровне.

Для того, чтобы учесть эффект нелокальности по пространству, введём в рассмотрение эффективную температуру Φ и эффективную деформацию $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$, которые определим следующими соотношениями:

$$\Phi = p_1 T + p_2 T^{(nl)}, \quad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = p_1 \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(l)} + p_2 \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(nl)}. \qquad (2.1)$$

Здесь T – абсолютная температура, $T^{(nl)} = \int\limits_V \varphi(|x - x'|) T(x', t) dx'$ – нелокальная температура, $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(l)}$ – тензор малой деформации, $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(nl)} = \int\limits_V \varphi(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(l)}(\mathbf{x}', t) d\mathbf{x}'$ – тензор нелокальной деформации, $\varphi(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)$ – функция влияния, определяющая эффект пространственной нелокальности, причём

$$\int\limits_V \varphi(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) d\mathbf{x}' = 1,$$

p_1, $p_2 \in [0, 1]$ – доли влияния локальных и нелокальных переменных на эффективные переменные, $p_1 + p_2 = 1$.

Соотношения, аналогичные (2.1), используют в механике деформируемого твёрдого тела при построении нелокальных зависимостей компонент тензора напряжений от тензора деформаций [9, 10].

Локальные формулировки первого и второго законов термодинамики в этом случае будут иметь вид [12]:

$$\rho\Phi\dot{h} = -\frac{\partial q_k}{\partial x_k} + q_V - \delta\,, \tag{2.2}$$

$$\rho\Phi\dot{h} + \frac{\partial q_k}{\partial x_k} - \Phi^{-1} q_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} - q_V \geq 0\,, \tag{2.3}$$

где ρ – плотность материала; h – массовая плотность энтропии; q_k – проекции вектора плотности теплового потока на оси Ox_k прямоугольной системы координат, $k = 1, 2, 3$; q_V – объёмная плотность мощности внутренних источников (стоков) теплоты; δ – диссипативная функция. При этом, достаточным условием справедливости неравенства (2.3) являются равенства [12]

$$h = -\frac{\partial A}{\partial \Phi}, \quad \sigma_{ij} = \rho \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\,. \tag{2.4}$$

Принципиальное отличие выражений (2.2) – (2.4) от применявшихся ранее [12-14] заключается в использовании эффективной температуры Φ и эффективной деформации $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$.

В случае, когда характерное время изменения внешней нагрузки близко по величине ко времени релаксации, возникает необходимость учёта изменения внутренних параметров состояния. Введём в рассмотрение два внутренних параметра состояния: скалярный κ и векторный $\boldsymbol{\kappa}$ с проекциями κ_k. Положим, что κ – термодинамическая температура, ассоциированная с локально неравновесными процессами аккумуляции теплоты; κ_k – проекции вектора, характеризующего распространение теплоты и ассоциированного с решеточным (фононным) или другим преобладающим физическим процессом теплопроводности, $|\kappa_k / q_k| \ll 1$. Далее будем считать, что в материале определяющим является только один, фононный, процесс теплопроводности. Тогда кинетические уравнения, описывающие изменение κ_k и термодинамической температуры κ во времени в линейном приближении, можно принять в виде [15, 16]

$$t_q^* \dot{\kappa}_k + A_{kj}\kappa_j = \overline{\kappa}_k, \quad t_T^* \dot{\kappa} + A_{44}\kappa = \overline{\kappa}\,, \tag{2.5}$$

где t_q^*, t_T^* – времена релаксации соответствующих внутренних параметров состояния; $\overline{\kappa}_k, \overline{\kappa}$ – функции, определяющие равновесные значения внутренних параметров состояния; $A_{kj} = A_{jk}$, $\det\left(A_{kj}\right) > 0$, $0 < A_{44} \leq 1$. Термодинамическую температуру определяет спектр частот и амплитуд колебаний атомов на свободной поверхности микро- и наноструктурных элементов, а коэффициент A_{44} зависит от отношения площади свободной поверхности и полной площади элемента [1, 2].

Зададим объёмную плотность свободной энергии в виде разложения в ряд Тейлора в окрестности нулевых значений аргументов при температуре $\Phi = T_0$ естественного состояния, а также примем $\partial A / \partial \kappa_i = 0$. Тогда для окрестности точки с радиус-вектором $\boldsymbol{x}$, принадлежащей области V, занимаемой элементом микро- или наноструктуры, имеем:

$$\begin{aligned} \rho A\left(\varepsilon_{kl}, \Phi, \kappa, \kappa_k\right) = {} & \frac{1}{2} C_{ijkl}\left(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{(T)}\right)\left(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{(T)}\right) + \frac{1}{2} H_{ijkl}\left(\varepsilon_{ij}^{(\kappa)} - \varepsilon_{ij}^{(T)}\right)\left(\varepsilon_{kl}^{(\kappa)} - \varepsilon_{kl}^{(T)}\right) + \\ & + \rho B_1(\Phi) + \rho B_2(\Phi, \kappa) - D_{ijkl}\left(\varepsilon_{ij}^{(\kappa)} - \varepsilon_{ij}^{(T)}\right)\left(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{(T)}\right) + \\ & + \frac{1}{2} C_{ijkl}\left(-\varepsilon_{ij}^{(T)}\right)\left(-\varepsilon_{kl}^{(T)}\right) + D_{ijkl}\left(\varepsilon_{ij}^{(\kappa)} - \varepsilon_{ij}^{(T)}\right)\left(-\varepsilon_{kl}^{(T)}\right), \end{aligned} \tag{2.6}$$

где $A\left(0, T_0, T_0, 0\right) = 0$, $B_1\left(T_0\right) = 0$, $B_2\left(T_0, T_0\right) = 0$, тензоры с компонентами $C_{ijkl}, H_{ijkl}, D_{ijkl}$ характеризуют термомеханические свойства твёрдого тела.

В силу равенств (2.4) и (2.6) определяющие соотношения примут следующий вид:

$$h = \frac{1}{\rho} C_{ijkl}\varepsilon_{kl}\alpha_{ij} - \frac{\partial B_1}{\partial \Phi} - \frac{\partial B_2}{\partial \Phi}, \tag{2.7}$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\left(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{(T)}\right) - D_{ijkl}\left(\varepsilon_{kl}^{(\kappa)} - \varepsilon_{kl}^{(T)}\right), \tag{2.8}$$

где $\alpha_{ij}=\partial\varepsilon_{ij}/\partial\Phi$, далее будем предполагать линейную зависимость ε_{ij} от Φ. С учётом (2.7) закон сохранения энергии (2.2) можно записать в виде

$$\rho c\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\rho c'\frac{\partial\kappa}{\partial t}=-\Phi C_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl}\alpha_{ij}-\frac{\partial q_i}{\partial x_i}+q_V+\delta. \qquad (2.9)$$

где $c=-\Phi\left(d^2B_1/d\Phi^2+\partial^2B_2/\partial\Phi^2\right)$ и $c'=-\Phi\partial^2B_2/(\partial\Phi\partial\kappa)$ – удельные массовые теплоёмкости при постоянной деформации, определяющие изменение свободной энергии пропорционально $\dot{\Phi}$ и $\dot{\kappa}$ соответственно.

Диссипативная функция для рассматриваемой модели имеет вид

$$\delta=-\rho\frac{\partial A}{\partial\kappa}\dot{\kappa}-\rho\frac{\partial A}{\partial\kappa_i}\dot{\kappa}_i.$$

При $c'=\mathrm{const}$ и $\left|\Phi-T_0\right|/T_0\ll 1$ имеем $B_2(\Phi)=-c'(\Phi-T_0)\ln(\Phi/T_0)\approx -c'(\kappa-T_0)(\Phi-T_0)/T_0$ и $\partial^2B_1/\partial\Phi^2=0$. В этом случае диссипативная функция линейна по малым аргументам, поэтому диссипацией энергии, как правило, пренебрегают и полагают $\delta=0$ [16].

Для получения закона сохранения энергии в виде уравнения теплопроводности необходимо конкретизировать выражения для равновесных значений $\overline{\kappa}_i$ и $\overline{\kappa}$ параметров состояния и проекций вектора плотности теплового потока q_i, приняв их, например, в виде

$$\overline{\kappa}_i(\mathbf{x},t)=-Z_{ij}^{(1)}\frac{\partial\Phi(\mathbf{x}',t)}{\partial x_j'}-Z_{ij}^{(2)}\frac{\partial\kappa(\mathbf{x}',t)}{\partial x_j'},\quad \overline{\kappa}(\mathbf{x},t)=\Phi(\mathbf{x},t),\quad q_i=\varphi_{ij}\kappa_j(\mathbf{x}',t). \qquad (2.10)$$

Равенства (2.10) не противоречат основным принципам рациональной термодинамики необратимых процессов [12].

Решив систему уравнений (2.5) относительно κ_i и κ с начальными условиями ($\kappa_i=0$ и $\kappa=T_0$ при $t=0$), можно получить функциональные зависимости для $\kappa_i=\kappa_i\left(\partial\Phi/\partial x_j,\partial\kappa/\partial x_j\right)$ и $\kappa=\kappa(\Phi)$.

В дальнейшем, с целью упрощения окончательного выражения уравнения теплопроводности, положим в первом уравнении (2.5) $A_{ij}=\delta_{ij}$ (δ_{ij} – символ Кронекера). Тогда, пренебрегая диссипацией энергии и внутренним тепловыделением и полагая, что $c=c'$, закон сохранения энергии (2.9) можно записать в виде

$$\begin{aligned}&\frac{\rho c}{A_{44}}\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{\rho c}{A_{44}t_T^*}\int_0^t\exp\left(-\frac{t-t'}{t_T^*/A_{44}}\right)\frac{\partial\Phi(\mathbf{x},t')}{\partial t'}dt'=-\Phi C_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl}\alpha_{ij}+\\&+\frac{\partial}{\partial x_i}\lambda_{ij}^{(T)}\frac{\partial\Phi(\mathbf{x},t)}{\partial x_j}-\frac{\partial}{\partial x_i}\lambda_{ij}^{(T)}\int_0^t\exp\left(-\frac{t-t'}{t_q^*}\right)\frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{\partial\Phi(\mathbf{x},t')}{\partial x_j}\right)dt'+\\&+\frac{\partial}{\partial x_i}\lambda_{ij}^{(\kappa)}\frac{\partial\kappa(\mathbf{x},t)}{\partial x_j}-\frac{\partial}{\partial x_i}\lambda_{ij}^{(\kappa)}\int_0^t\exp\left(-\frac{t-t'}{t_q^*}\right)\frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{\partial\kappa(\mathbf{x},t')}{\partial x_j}\right)dt',\end{aligned} \qquad (2.11)$$

где $\lambda_{ij}^{(T)}=\varphi_{ik}Z_{kj}^{(1)}$, $\lambda_{ij}^{(\kappa)}=\varphi_{ik}Z_{kj}^{(2)}$ – компоненты тензоров теплопроводности, обусловленные абсолютной и термодинамической температурами.

Определяющие соотношения модели термомеханических процессов в твёрдом теле можно переписать в терминах абсолютной температуры и локальной деформации, если подставить во второе равенство (2.7) и в (2.11) соотношения (2.1). В частном случае, когда влияние внутренних параметров состояния не учитывается, эти соотношения будут иметь вид:

$$\begin{aligned}&p_1\frac{\rho c}{A_{44}}\frac{\partial T}{\partial t}+p_2\frac{\rho c}{A_{44}}\int_V\varphi(|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|)\frac{\partial T(\mathbf{x}',t)}{\partial t}d\mathbf{x}'=\\&=-\left(p_1T+p_2\int_V\varphi(|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|)T(\mathbf{x}',t)d\mathbf{x}'\right)C_{ijkl}\alpha_{ij}\left(p_1\dot{\varepsilon}_{kl}^{(l)}+p_2\int_V\varphi(|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|)\dot{\varepsilon}_{kl}^{(l)}(\mathbf{x}',t)d\mathbf{x}'\right)+\end{aligned}$$

$$+p_1 \frac{\partial}{\partial x_i} \lambda_{ij}^{(T)} \frac{\partial T(\mathbf{x},t)}{\partial x_j} + p_2 \frac{\partial}{\partial x_i} \int_V \varphi(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) dV(\mathbf{x}') \int_V \lambda_{ij}^{(T)} \varphi(|\mathbf{x}'' - \mathbf{x}'|) \frac{\partial T(\mathbf{x}'',t)}{\partial x_j''} dV(\mathbf{x}''), \qquad (2.12)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \left(p_1 \varepsilon_{kl}^{(l)} + p_2 \int_V \varphi(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \varepsilon_{kl}^{(l)}(\mathbf{x}',t) d\mathbf{x}' \right).$$

Работа выполнена по грантам НШ--1432.2014.8 и МК-6573.2015.8 программ Президента РФ государственной поддержки ведущих научных школ и молодых кандидатов наук, а также в рамках проекта 1712 в сфере научной деятельности в части государственного задания № 2014/104 Минобрнауки РФ и государственного задания по проекту № 1.2640.2014.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андриевский Р.А., Рагуля А.В. Наноструктурные материалы. М.: Изд. центр. «Академия», 2005. 192 с.
2. Гусев А.И. Наноматериалы, наноструктуры, нанотехнологии. М.: Физматлит, 2005. 416 с.
3. Кобаяси Н. Введение в нанотехнологию / Пер. с японск. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005. 134 с.
4. Пул-мл Ч., Оуэне Ф. Нанотехнологии. М.: Техносфера, 2006. 336 с.
5. Милейко С.Т. Композиты и наноструктуры // Композиты и наноструктуры. 2009. №1. С.6-37.
6. Peddieson J., Buchanan G.R., McNitt R.P. Application of nonlocal continuum models to nanotechnology. International Journal of Engineering Science 41 (2003) 305–312.
7. Кривцов А.М. Деформирование и разрушение твёрдых тел с микроструктурой. М.: Физматлит, 2007. 304 с.
8. Кунин И.А. Теория упругих сред с микроструктурой. Нелокальная теория упругости. М.: Наука, 1975. 416 с.
9. Eringen A.C. Nonlocal continuum field teories. New York-Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2002. 393 pp.
10. Pisano A A, Fuschi P. Closed form solution for a nonlocal elastic bar in tension[J]. International journal of Solids and Structures 40 (2003) 13-23.
11. Введение в микромеханику / Онами М. и др.: Пер. с япон. М.: Металлургия, 1987. 280 с.
12. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М.: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 512 с.
13. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математическое моделирование термомеханических процессов при интенсивном тепловом воздействии //Теплофизика высоких температур. 2003. Т.4. №2. С.300-309.
14. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели термомеханики. М.: Физматлит, 2002. 168 с.
15. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Математическая модель нелокальной среды с внутренними параметрами состояния //Инж.-физический ж. 2013. Т.86. № 4. С.768–773.
16. Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Математическая модель теплопроводности новых конструкционных материалов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия Естеств. науки. 2010. №3. С.72-85.

Сведения об авторах:

Зарубин Владимир Степанович – д.т.н., проф, МГТУ им. Н.Э. Баумана, (499) 263-63-26
E-mail: Zarubin@bmstu.ru

Кувыркин Георгий Николаевич – д.т.н., проф, МГТУ им. Н.Э. Баумана, (499) 263-63-26
E-mail: fn2@bmstu.ru

Савельева Инга Юрьевна –к.ф.м.н.,доцент, МГТУ им. Н.Э. Баумана, (499) 263-63-26
E-mail: Inga.Savelyeva@gmail.com

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИЛЫ СВЕТОВОГО ДАВЛЕНИЯ НА КРУПНОГАБАРИТНЫЕ КОСМИЧЕСКИЕ ТРАНСФОРМИРУЕМЫЕ КОНСТРУКЦИИ

Зимин В.Н., Неровный Н.А.

Определение воздействия светового давления на космические аппараты является важной задачей орбитальной динамики космических аппаратов, равно как и динамики космических аппаратов вокруг центра масс. Точное определение светового давления на космические трансформируемые конструкции необходимо для улучшения расчётных моделей для определения их деформированной формы. В работе рассмотрена задача определения главного вектора и главного момента силы светового давления на космический аппарат с учётом возможного самозатенения и переотражения светового излучения в элементах конструкции. Показано, что при записи выражения для главного вектора и главного момента возможно разделить описание геометрии космического аппарата в совокупности с его оптическими характеристиками от его ориентации в пространстве относительно падающего излучения.

1. Рассмотрим сначала случай, когда поверхность космической конструкции является выпуклой по отношению к падающему излучению. Вводя местный вектор нормали $\vec{n}$ и задавая падающее излучение единичным вектором $\vec{s}$, запишем выражение для элементарной силы светового давления, и, вводя вектор $\vec{r}$, задающий положение элементарной площадки относительно некоторого полюса, запишем выражение для момента от элементарной силы светового давления [1,4]:

$$d\vec{F} = P(R)\left(-a_1(\vec{n}\cdot\vec{s})\vec{s}+a_2(\vec{n}\cdot\vec{s})\vec{n}-2a_3(\vec{n}\cdot\vec{s})^2\vec{n}\right)dA; \tag{1.1}$$

$$d\vec{M} = \vec{r}\times d\vec{F} = P(R)\left(-a_1(\vec{n}\cdot\vec{s})(\vec{r}\times\vec{s})+a_2(\vec{n}\cdot\vec{s})(\vec{r}\times\vec{n})-2a_3(\vec{n}\cdot\vec{s})^2(\vec{r}\times\vec{n})\right)dA, \tag{1.2}$$

где

$P(R) = q_0(R)/c$ – величина силы светового давления на абсолютно поглощающую площадку на расстоянии R от Солнца [2], $q_0(R)$ – солнечная постоянная на данном расстоянии от Солнца, c – скорость света в вакууме; a_1, a_2, a_3 – оптические параметры, характеризующие зеркально-диффузные свойства поверхности следующим образом:

$$a_1 = 1-\rho s;$$

$$a_2 = \frac{2}{3}\rho(1-s)+\frac{2}{3}(1-\rho)\frac{\varepsilon_f-\varepsilon_b}{\varepsilon_f+\varepsilon_b};$$

$$a_3 = \rho s,$$

где ρ – коэффициент зеркального отражения, s – степень зеркальности, ε_f и ε_b – коэффициенты излучения для освещённой и затенённой стороны, соответственно. Коэффициент 2/3 получается путём интегрирования по полусфере собственного излучения элементарной площадки в том случае, когда оно подчиняется закону Ламберта [3]. В случае же, если индикатриса собственного излучения является осесимметричной, но не подчиняется закону Ламберта, то данное выражение также останется в силе, однако, числовой коэффициент может принимать другое значение.

Введём следующие тензоры второго и третьего ранга (в данном случае символы «2» и «3» в обозначениях указывают на ранг тензора):

$$J^2 = \int_A a_2\vec{n}\otimes\vec{n}dA; \tag{1.3}$$

$$J^3 = \int_A \left(a_1\vec{n}\otimes E^2 + 2a_3\vec{n}\otimes\vec{n}\otimes\vec{n}\right)dA; \tag{1.4}$$

$$K^2 = \int_A a_2 R^2 \cdot \vec{n} \otimes \vec{n} dA; \tag{1.5}$$

$$K^3 = \int_A \left(a_1 \vec{n} \otimes R^2 + 2a_3 \vec{n} \otimes R^2 \cdot \vec{n} \otimes \vec{n} \right) dA; \tag{1.6}$$

где E^2 – единичный тензор второго ранга; R^2 – кососимметричный тензор второго ранга такой, что для любого вектора $\vec{a}$: $\vec{r} \times \vec{a} = R^2 \cdot \vec{a}$.

Интегрируя (1.1) и (1.2) по всей поверхности и подставляя (1.3) – (1.6), получим выражения для главной силы и главного момента светового давления:

$$\vec{F} = P(R)\left(J^2 - \vec{s} \cdot J^3\right) \cdot \vec{s}; \tag{1.7}$$

$$\vec{M} = P(R)\left(K^2 - \vec{s} \cdot K^3\right) \cdot \vec{s}. \tag{1.8}$$

В выражениях (1.7) и (1.8) ориентация поверхности по отношению к падающему излучению однозначно отделена от описания самой поверхности, однако, данные выражения выведены без учёта возможного самозатенения, переотражения излучения в космической конструкции.

2. Большинство рассматриваемых космических трансформируемых конструкций (рефлекторы космических телескопов, крупногабаритные солнечные батареи и радиаторы) имеют сложную конфигурацию, поэтому необходимо рассматривать ситуации, когда часть конструкции затеняется, а также, когда в самой конструкции происходят переотражение излучения. Будем считать, что в этом случае выражения (1.7) и (1.8) остаются в силе, однако, тензоры (1.3) – (1.6) вычисляются путём введения некоторой аппроксимации.

Допустим, что путем расчёта (например, стохастического моделирования), были получены значения силы и момента светового давления на конструкцию с учётом самозатенения и переотражения, в некотором конечном наборе ориентаций космической конструкции относительно падающего излучения в количестве n. Учитывая симметрию тензоров (1.3) и (1.4), запишем вектор $\vec{j}$, компонентами которого являются независимые компоненты этих тензоров:

$$\vec{j} = \left(J_{11}^2, J_{22}^2, J_{33}^2, J_{113}^3, J_{223}^3, J_{333}^3\right)^T. \tag{2.1}$$

Зададим вектор проекций силы светового давления при различных расчётных ориентациях:

$$\vec{f}_n = \left(f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, f_3^{(1)}, f_1^{(2)}, \ldots, f_3^{(n)}\right)^T. \tag{2.2}$$

Определим матрицу угловых коэффициентов, определяемых компонентами вектора ориентации в различных расчётных случаях:

$$S_n = \begin{bmatrix} s_1^{(1)} & 0 & 0 & 2s_1^{(1)}s_3^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & s_2^{(1)} & 0 & 0 & 2s_2^{(1)}s_3^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & s_3^{(1)} & s_1^{(1)}s_1^{(1)} & s_2^{(1)}s_2^{(1)} & s_3^{(1)}s_3^{(1)} \\ s_1^{(2)} & 0 & 0 & 2s_1^{(2)}s_3^{(2)} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & s_3^{(n)} & s_1^{(n)}s_1^{(n)} & s_2^{(n)}s_2^{(n)} & s_3^{(n)}s_3^{(n)} \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

Решением переопределённой системы

$$S_n \vec{j} = \vec{f}_n$$

будет являться аппроксимированное значение вектора $\vec{j}$:

$$\tilde{j} = \left(S_n^T S_n\right)^{-1} S_n \vec{f}_n. \qquad (2.4)$$

Выражение (2.4) позволяет определить аппроксимированное значение компонент тензоров, участвующих в выражении для главного вектора светового давления (1.7). Аналогично возможно получить аппроксимацию для момента силы светового давления.

Полученные аппроксимированные выражения возможно использовать для определения главного вектора и главного момента силы светового давления на космическую конструкцию произвольной формы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rios-Reyes L. Solar Sails: Modeling, Estimation, and Trajectory Control. University of Michigan. 2006. 148 p.
2. Sazonov V.V., Sazonov V.V. Calculation of resultant vector and principal moment of light pressure forces acting upon spacecraft with a solar sail // Cosmic Research. 2011. Vol. 49, № 1. P. 56-64.
3. Forward R. Grey solar sails. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1989.
4. He J., Gong S., Li J. A curved surface solar radiation pressure force model for solar sail deformation // Science China Physics, Mechanics and Astronomy. 2012. Vol. 55, № 1. P. 141-155.

Сведения об авторах:

Зимин Владимир Николаевич – доктор технических наук, профессор, первый проректор-проректор по научной работе МГТУ им. Н.Э. Баумана
E-mail: zimin@bmstu.ru

Неровный Николай Алексеевич – аспирант кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители» факультета «Специальное машиностроение» МГТУ им. Н.Э. Баумана
E-mail: nick.nerovny@bmstu.ru

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ВЯЗКО- И ПОРОВЯЗКОУПРУГИХ ТЕЛ

Игумнов Л.А., Аменицкий А.В., Белов А.А., Литвинчук С.Ю., Петров А.Н., Ипатов А.А.

Представлены результаты математического и дискретного моделирования линейных задач динамики вязко- и поровязкоупругих трёхмерных тел. Используются методы и подходы, основанные на формулировке граничных интегральных уравнений, решаемых с помощью граничных элементов. В качестве вязкоупругой модели использованы модели Максвелла, Кельвина-Фойгта, стандартного вязкоупругого тела и наследственная модель со слабосингулярным ядром Абеля. Для описания свойств пороупругого материала применяется полная модель Био. Проводится сравнение примеров численных решений задач с известными результатами решений.

Введение. Исследование волновых процессов в дисперсных средах представляет широкий научный и практический интерес. К таким средам относятся вязкоупругие, пороупругие и поровязкоупругие материалы. Классическая теория вязкоупругости широко представлена в литературе [5, 6]. В исследованиях применяется модель Био пористо-упругой среды[1–3]. Теория Био является расширением классической теории упругости на случай двухфазной среды. Рассматриваемая поровязкоупругая модель является комбинацией пороупругой модели и модели вязкоупругой среды, применённой к упругому скелету [4].

Метод граничных интегральных уравнений (ГИУ) и метод граничных элементов (МГЭ) являются универсальным численно-аналитическим подходом к решению трёхмерных волновых начально-краевых задач как теории вязкоупругости, так и поровязкоупругости [7]. Применяется МГЭ-методика и интегральное преобразование Лапласа для решения трёхмерных задач динамики поровязкоупругих тел при смешанных краевых условиях.

1. Постановка задачи. Рассмотрим кусочно-однородное тело Ω в трёхмерном евклидовом пространстве R^3с декартовой системой координат $Ox_1x_2x_3$. Динамическое состояние упругого тела Ω описывается следующей системой дифференциальных уравнений в перемещениях: $\mu\Delta u(x,t)+(\lambda+\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,u(x,t)=\rho\,\ddot{u}(x,t)$, где $u(x,t)$ – вектор перемещений точки $x=(x_1,x_2,x_3)$ в момент времени *t*, удовлетворяющий условиям: $u(x,0)=\dot{u}(x,0)=0$, ρ – плотность материала, λ,μ – коэффициенты Ламе. Система дифференциальных уравнений теории Био в преобразованиях Лапласа (параметр преобразования *s*) для смещения $\hat{u}_i$ и порового давления $\hat{p}$ имеет следующий вид [2]:

$$\mu\hat{u}_{i,jj}+\left(K+\frac{1}{3}\mu\right)\hat{u}_{j,ij}-(\alpha-\beta)\hat{p}_{,i}-s^2(\rho-\beta\rho_f)\hat{u}_i=-\hat{F}_i\,,\ \frac{\beta}{s\rho_f}\hat{p}_{,ii}-\frac{\varphi^2 s}{R}\hat{p}-(\alpha-\beta)s\hat{u}_{i,i}=-\hat{a}\,,$$

$$\beta=\frac{k\rho_f\varphi^2s^2}{\varphi^2s+s^2k(\rho_a+\varphi\rho_f)},\ R=\frac{\varphi^2K_fK_s^{\,2}}{K_f(K_s-K)+\varphi K_s(K_s-K_f)},$$

где μ,K – константы упругости, φ – пористость, k – проницаемость, α – эффективный коэффициент напряжений, ρ,ρ_a,ρ_f – плотности скелета, присоединенной массы и жидкой среды, $\hat{F}_i,\hat{a}$ – объемные силы. Вязкоупругое и поровязкоупругое решения рассчитываются из упругого и пороупругого решений соответственно путем замены модулей упругости K, λ и μ в области, преобразованной по Лапласу, на преобразованные функции $\hat{K}=\hat{K}(s)$, $\hat{\lambda}=\hat{\lambda}(s)$ и $\hat{\mu}=\hat{\mu}(s)$ модели вязкоупругого материала. Вязкоупругое и поровязкоупругое решения получаются с помощью обратного преобразования.

Функции $\hat{K}$ и $\hat{\mu}$ для различных моделей вязкоупругости имеют следующий вид:

Модель Максвелла: $\hat{K}(s)=sK_\infty/(s+\gamma)$, $\hat{\mu}(s)=s\mu_\infty/(s+\gamma)$.

Модель Кельвина-Фойгта: $\hat{K}(s)=K_\infty\left[1+s/\gamma\right]$, $\hat{\mu}(s)=\mu_\infty\left[1+s/\gamma\right]$.

Модель стандартного вязкоупругого тела:

$$\hat{K}(s)=K_\infty\left[\left(\frac{1}{w^2}-1\right)\frac{s}{s+\gamma}+1\right],\ \hat{\mu}(s)=\mu_\infty\left[\left(\frac{1}{w^2}-1\right)\frac{s}{s+\gamma}+1\right].$$

Параметр вязкости γ – величина обратная характерному времени релаксации/ползучести. Связь длительных и мгновенных модулей определяется следующим соотношением: $K_\infty = K_0 w^2$, $\mu_\infty = \mu_0 w^2$, где индексами «∞» и «0» обозначены длительные и мгновенные модули соответственно.

2. Гранично-элементная методика. Численная схема основана на прямом подходе с использованием формулы Грина-Бетти-Сомильяны. Чтобы ввести ГЭ-дискретизацию, рассматривается регуляризованное ГИУ [6]. Будем аппроксимировать границу области совокупностью четырёхугольных и треугольных восьмиузловых биквадратичных элементов. При этом, треугольные элементы рассматриваются как вырожденные четырёхугольные элементы. Для аппроксимации обобщённых граничных перемещений применим билинейные элементы, а для аппроксимации обобщённых поверхностных сил – постоянные элементы. Такая согласованность аппроксимаций границы области, граничных перемещений и поверхностных сил выбрана из тех соображений, что напряжения определяются через производные от перемещений, а перемещения зависят не только от координат точки, но и от конфигурации границы в окрестности этой точки. В качестве проекционного метода применим метод коллокации.

3. Численные эксперименты. Рассмотрим задачу о торцевом ударе силой $t_2 = 1H/м^2$ составного призматического тела с жёстко закреплённым концом (рис.1). Рассмотрим подобласти с одинаковыми параметрами материала: $E = 2{,}11 \cdot 10^{11} H/м^2$; $\nu = 0{,}0$; $\rho = 7850 кг/м^3$. Задача решается в безразмерных величинах.

Гранично-элементная сетка представлена на рис.2. Каждая из подобластей содержит по 72 элемента и 88 точек на четверти сетки, таким образом, вся геометрическая модель содержит 576 элементов.

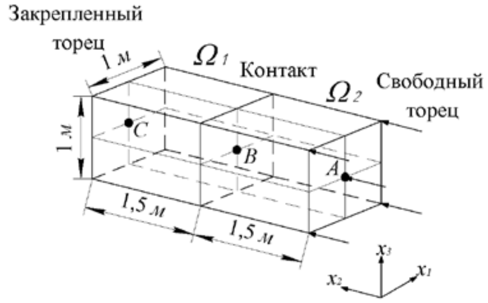


Рис. 1

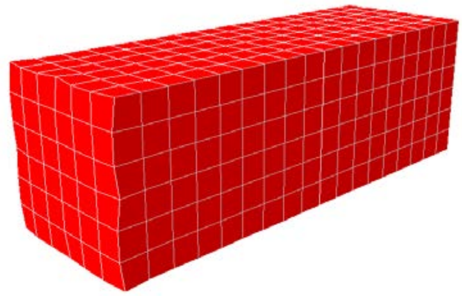


Рис. 2

На рис.3 приведены перемещения u_2 в точке B для модели Максвелла при различных значениях параметра вязкости. На рис.4 приведены перемещения u_2 в точке B для модели Кельвина-Фойгта при различных значениях параметра вязкости. На рис.5 приведены перемещения u_2 в точке B для модели стандартного вязкоупругого тела при различных значениях параметра вязкости.

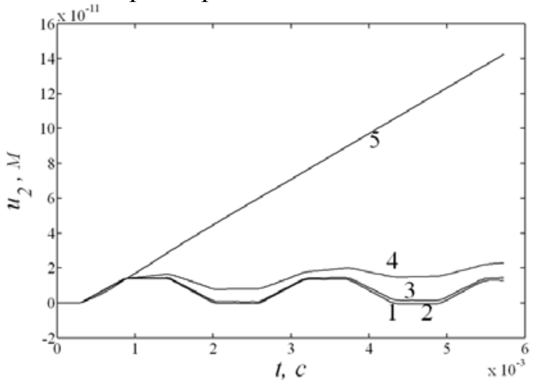


Рис. 3. 1 – упругое ГЭ-решение, ГЭ-решение для модели Максвелла 2 – $\gamma = 0{,}01$; 3 – $\gamma = 0{,}1$; 4 – $\gamma = 1$; 5 – $\gamma = 10$.

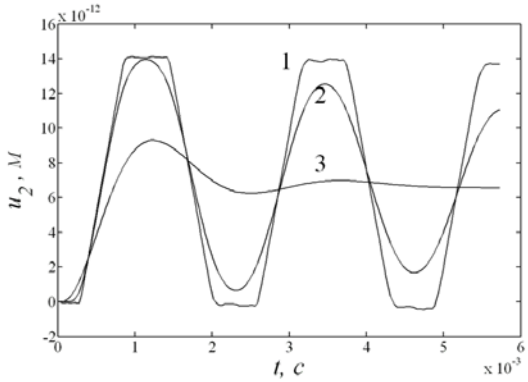


Рис. 4. 1 – упругое ГЭ-решение, ГЭ-решение для модели Кельвина-Фойгта 2 – $\gamma = 100$, 3 – $\gamma = 10$.

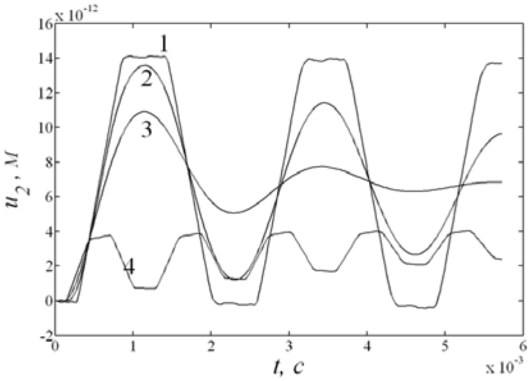
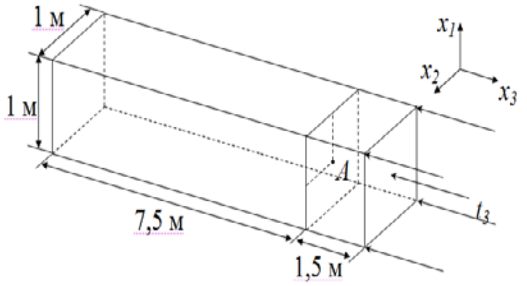


Рис. 5. 1 – упругое ГЭ-решение, ГЭ-решение для модели стандартного вязкоупругого тела 2 – $\gamma = 200$, 3 – $\gamma = 50$, 4 – $\gamma = 1$.

Рассмотрим гранично-элементные решения задачи о действии торцевой силы $t_3 = 1H/м^2$ на призматическое поровязкоупругое тело (рис.6). В качестве пористого материала рассматривается песчаник Berea [4], насыщенный водой. Параметры пороупругого материала: $K = 4,8 \cdot 10^9\ H/м^2$, $G = 7,2 \cdot 10^9\ H/м^2$, $\rho = 2458\,кг/м^3$, $\varphi = 0,19$, $K_s = 3,6 \cdot 1010\,H/м^2$, $\rho_f = 1000\,кг/м^3$, $K_f = 3,3 \cdot 10^9\ H/м^2$ $k = 1,9 \cdot 10^{-10}$ $м^4/(H \cdot c)$, $\nu = 0$. Длина поровязкоупругой консоли равна $9\,м$. Будем исследовать перемещение и давление в направлении оси x3 в точке, удалённой на 1,5 м от нагруженного торца. Для исследования динамических откликов в точке А тело разбивается на две подобласти с помощью фиктивной границы (красная линия) на расстоянии 1,5 м от нагруженного торца (рис.7), ГЭ сетка на каждой из подобластей состоит из 408 и 168 элементов, соответственно.



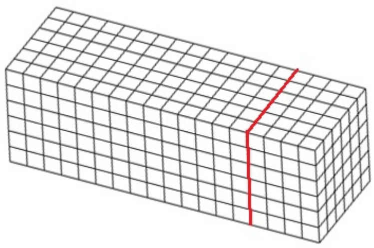


Рис. 6 Рис. 7

Численные решения для перемещений *u* и поровых давлений *p* трёхмерной динамической поровязкоупругости в случае модели Кельвина-Фойгта, где в качестве длительных модулей были взяты параметры упругого скелета пороупругой среды, представлены на рис.8. и рис.9. соответственно. Рассматриваются различные значения параметра γ вязкоупругого материала.

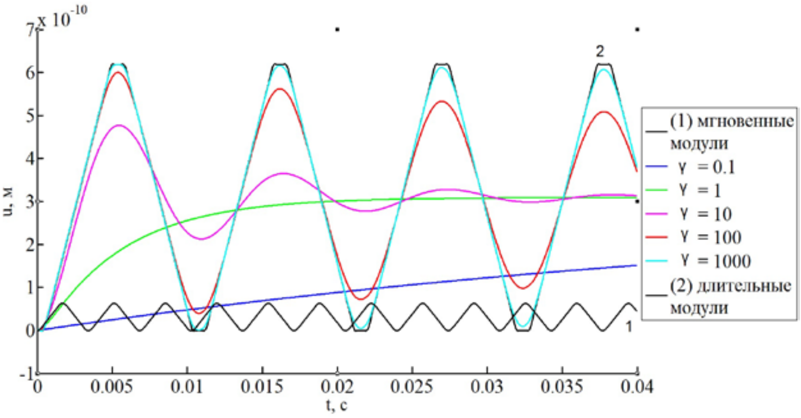


Рис. 8

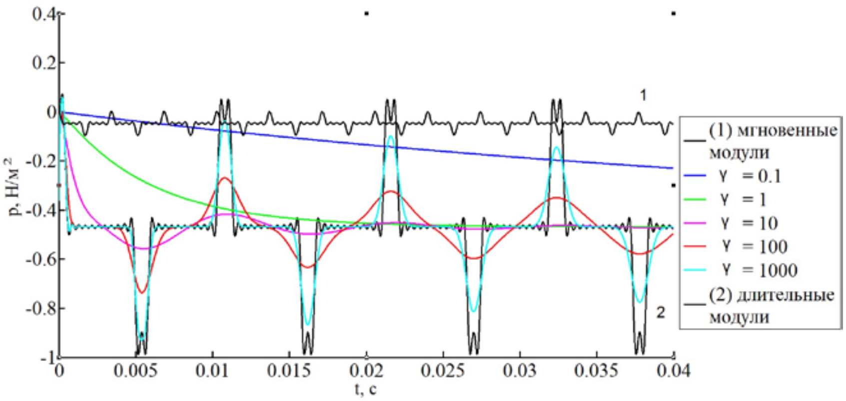


Рис. 9

Численные решения для перемещений u и поровых давлений p трёхмерной динамической поровязкоупругости в случае модели стандартного вязкоупругого тела, где в качестве длительных модулей были взяты параметры упругого скелета пороупругой среды, представлены на рис.10. и рис.11, соответственно. Рассматриваются различные значения параметра γ вязкоупругого материала.

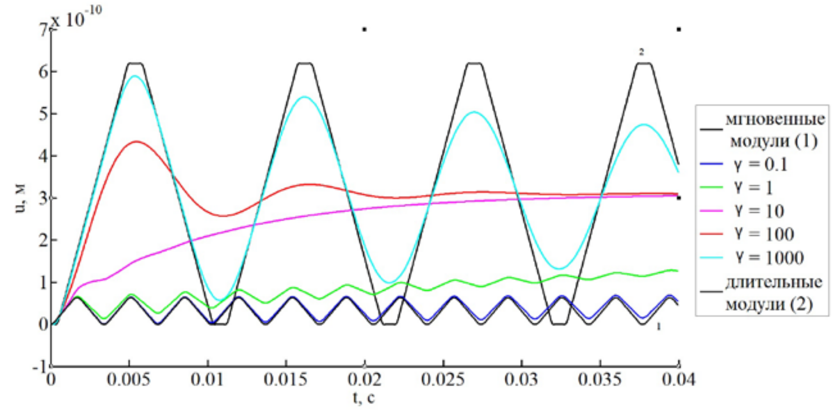


Рис. 10

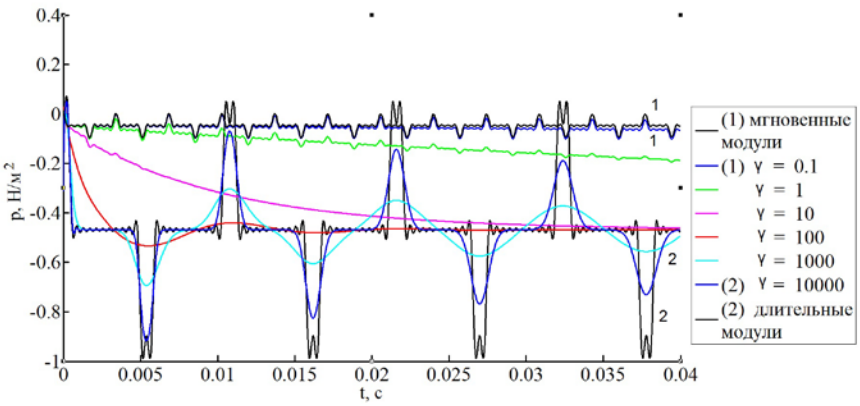


Рис. 11

По итогам экспериментов, результаты которых приведены на рис. 5,12,13, можем заключить, что численно продемонстрирован эффект перестройки волновых полей внутренних перемещений, когда свойства вязкоупругого материала модели стандартного вязкоупругого тела изменялись с мгновенных модулей на длительные.

В откликах перемещений изменялись (увеличивались) амплитуда и период искомой функции. Эффект перестройки граничных полей численно описан ранее в [7]. Из рис. 10-13 можно наблюдать схожее поведение динамических откликов в случае модели Кельвина-Фойгта и модели стандартного вязкоупругого тела.

Заключение. Проведено сравнение вязкоупругих и поровязкоупругих решений с различными параметрами вязкости. Продемонстрирована перестройка волновых полей.

Отмечено сходство поведения откликов перемещений и давлений модели Кельвина-Фойгта и модели стандартного вязкоупругого тела при некоторых значениях параметра вязкости. Оригиналы решения задачи построены на основе метода Дурбина численного обращения преобразования Лапласа.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 15-08-02814-а, 15-38-50405-мол_нр, 15-48-02333- р_поволжье_а, 15-38-20759-мол_а_вед, 15-08-02817-а, 14-08-00811-а, 14-08-31410-мол_а, 14-08-31415-мол_а, 13-08-00658-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Biot M.A. General theory of three-dimensional consolidation // J. Appl. Phys. 12(2). 1941. P.155–164.
2. Biot M.A. Theory of deformation of a porous viscoelastic anisotropic solid // J. Appl. Phys. 27(5). 1956. P.459–467.
3. Biot M.A. Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid // J. Appl. Phys. 26(2). 1955. P.182–185.
4. Schanz M. Wave Propagation in Viscoelastic and Poroelastic Continua // Berlin Springer, 2001. – 170 p.
5. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974. 338 с.
6. Угодчиков А.Г., Хуторянский Н.М. Метод граничных элементов в механике деформируемого твёрдого тела // Казань: Изд. КГУ, 1986. 296 с.
7. Баженов В.Г., Игумнов Л.А. Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трёхмерной динамической теории упругости с сопряжёнными полями. М.: Физматлит, 2008. 352 с.
8. Игумнов Л.А., Белов А.А., Литвинчук С.Ю. Об исследовании влияния вязкости материала на волновые поля перемещений и напряжений методом граничных элементов // Проблемы прочности и пластичности: Межвузовский сборник. Н.Новгород: Изд-во ННГУ. 2006. Вып. 68. С.161-169.

Информация об авторах:

Игумнов Л.А. – директор НИИМ Нижегородского университета, д.ф.-м.н., проф., тел. (831) 4657655**, e-mail:** igumnov@mech.unn.ru

Аменицкий А.В. – старший научный сотрудник НИИМ Нижегородского университета, к.ф.-м.н., тел. (831) 4657655, **e-mail:** igumnov@mech.unn.ru

Белов А.А. – старший научный сотрудник НИИМ Нижегородского университета, к.ф.-м.н., тел. (831) 4657655, **e-mail:** belov_a2@mech.unn.ru

Литвинчук С.Ю. – ведущий научный сотрудник НИИМ Нижегородского университета, к.ф.-м.н., доцент, тел. (831) 4657655, **e-mail:** litvinchuk@mech.unn.ru

Петров А.Н. – младший научный сотрудник НИИМ Нижегородского университета, к.ф.-м.н., тел. (831) 4657655, **e-mail:** igumnov@mech.unn.ru

Ипатов А.А. – младший научный сотрудник НИИМ Нижегородского университета, аспирант Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, тел. (831) 4657655, **e-mail:** igumnov@mech.unn.ru

ГРАНИЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЙ АНАЛИЗ ДИНАМИКИ ТРЁХМЕРНЫХ ТЕЛ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ПОЛЕЙ РАЗЛИЧНОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ПРИРОДЫ

Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю., Марков И.П., Брагов А.М.

Рассматривается следующая проблема механики деформируемого твёрдого тела – решение задач с учётом взаимодействия механических и немеханических полей различной физической природы. Используется прямая формулировка метода граничных элементов. Для компьютерного моделирования динамики соответствующих тел дано развитие метода гранично-временных элементов с использованием шагового метода численного обращения интегрального преобразования Лапласа и формализма схем Рунге-Кутты на основе таблиц Бутчера. Приведены результаты численных экспериментов. В задаче о численном моделировании динамического испытания на изгиб композитной балки гранично-элементные решения сравнивались с результатами эксперимента по методике Кольского и соответствующими результатами, полученными в программных комплексах конечно-элементного моделирования.

1. Математическая постановка задачи. Рассматривается многосвязное тело Ω. Предполагается, что материал составной части тела Ω_k описывается анизотропными вязкоупругими или пороупругими моделями. Для параметров изотропного материала Ω_k полупространства введём следующие обозначения: ρ^k – плотность материала; $K^k(t)$, $G^k(t)$ – функции свойств материала; K^k, G^k – константы упругих свойств материала. Динамическое состояние Ω_k с вектором перемещений u^k и поровым давлением p^k описывается системой дифференциальных уравнений в обобщённых перемещениях

$$L(\partial_t,\partial)\upsilon^k = 0, \quad \upsilon^k = (u^k, p^k).$$

В изображениях по Лапласу система дифференциальных уравнений может быть расписана следующим образом:

$$L(s,\partial)\upsilon^k = 0,$$

где $\upsilon^k(x,s)$ – вектор изображений обобщённых перемещений точки; для изотропного случая

$$L(s,\partial) = \begin{bmatrix} G^k\partial_l\partial_l + \left(K^k + \frac{1}{3}G^k\right)\partial_i\partial_j - s^2(\rho^k - \beta^k\rho_f^k) & -\gamma(\alpha^k - \beta^k)\partial_i \\ -\gamma s(\alpha^k - \beta^k)\partial_j & \gamma\left(\frac{\beta^k}{s\rho_f^k}\partial_l\partial_l - \frac{\phi^{k2}s}{R}\right) \end{bmatrix},$$

∂_m – оператор дифференцирования по координате x_m $m=\overline{1,3}$, $\beta^k = k\rho_f^k\phi^{k2}s^2 / \left[\phi^{k2}s + s^2k(\rho_a^k + \phi^k\rho_f^k\right]$; ϕ^k – пористость; k– проницаемость; α^k – эффективный коэффициент напряжений; $\rho^k, \rho_a^k, \rho_f^k$ – плотности скелета присоединённой массы и жидкой среды; $\gamma = 0$ для вязкоупругого случая и $\gamma = 1$ для пороупругого случая, для анизотропного случая (Norris 1994):

$$L(s,\partial) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Q}}^k(\partial) - s^2\left(\rho^k\mathbf{I} - \gamma\rho_f^{k\,2}\mathbf{m}^{k-1}\right) & -\gamma\mathbf{b}^{kT}(\partial) \\ \gamma s\mathbf{b}^k(\partial) & -\gamma s\left(\kappa^k(\partial) - \frac{1}{M^k}\right) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{Q}_{ik}^k(\partial) = \left(C_{ijkl}^k - \gamma M^{k-1}M_{ij}^kM_{kl}^k\right)\partial_j\partial_l, \;\; b_i^k(\partial) = -\left[M^{k-1}M_{ij}^k + \rho_f^k\left(m^{k-1}\right)_{ij}\right]\partial_j,$$

$$\kappa^k(\partial) = \left(m^{k-1}\right)_{ij}\partial_i\partial_j,$$

коэффициенты $M_{ij}^k = M_{ji}^k$ – упругие модули Био, описывающие взаимодействие компонент материала, $m_{ij}^k(s) = m_{ji}^k(s)$ – линейные вязкодинамические операторы, ассоциированные с подвижностью поровой жидкости и проницаемостью, C_{ijkl}^k – матрица параметров упругого скелета.

При использовании интегрального преобразования Лапласа для функции $\upsilon^k(x,t)$ предполагалось, что она и её производные по времени удовлетворяют нулевым начальным условиям.

Конкретный вид функций $G(t)$ и $K(t)$ определяется моделью вязкоупругого материала. В данной работе принимаются определяющие соотношения следующего вида:

$$\sigma_{ij} = 2G(t) * \varepsilon_{ij} = 2\int_0^t G(t-\tau)d\varepsilon_{ij}(t)\,,\ i \neq j\,,$$

$$G(t) = G(\infty) + (G(0) - G(\infty))e^{-\gamma t}\,,$$

здесь $G(t)$ – функция памяти материала для модели стандартного вязкоупругого тела; γ – величина, обратная характерным временам релаксации. Кроме того, предполагается, что отношение значения модуля на бесконечности к значению модуля в начальный момент определяется параметром $w = G(\infty)/G(0)$.

Рассматриваются следующие типы граничных условий для тел Ω_k:

$$\upsilon_l^k(x,s) = f_l^k(x,s), \quad x \in S^u \cap S_k\ , \quad l = \overline{1,4}\,;$$

$$\tilde{t}_l^k(x,s) = g_l^k(x,s), \quad x \in S^\sigma \cap S_k\,;$$

$$\upsilon_l^k(x,s) = \upsilon_l^s(x,s), \quad \tilde{t}_l^k(x,s) = -\tilde{t}_l^s(x,s), \quad x \in S'_{ks}\ .$$

здесь S^u, S^σ – участки границы S тела Ω, на которых заданы соответственно перемещения и поверхностные силы; S'_{ks}– граница области контакта тел Ω_k и Ω_s; функции $f_l^k(x,s)$ и $g_l^k(x,s)$ – заданные функции координат и параметра преобразования Лапласа.

Для однородного тела интегральное представление имеет вид:

$$\upsilon(x,s) = \int_S \Gamma^0(x,y,s)\tilde{t}(y,s)d_yS - \int_S \Gamma^1(x,y,s)\upsilon(y,s)d_yS\ ,$$

где в случае вязкоупругого тела

$$\Gamma_{ij}^0 \equiv U_{ij}, \quad \Gamma_{ij}^1 \equiv T_{ij}, \quad i,j = \overline{1,3},$$

в случае пороупругого тела

$$\Gamma_{ij}^0 \equiv \begin{bmatrix} \tilde{U}_{ij}^s & -\tilde{P}_j^s \\ \tilde{U}_i^f & -\tilde{P}^f \end{bmatrix}, \quad \Gamma_{ij}^1 \equiv \begin{bmatrix} \tilde{T}_{ij}^s & -\tilde{Q}_j^s \\ \tilde{T}_i^f & -\tilde{Q}^f \end{bmatrix},$$

Γ^0 и Γ^1– компоненты тензоров фундаментальных и сингулярных решений. Выражения для компонент приведены в [1, 2].

Таким образом, система ГИУ имеет вид [1, 2]:

$$C\upsilon(x,s) = \int_S \Gamma^0(x,y,s)\overline{t}(y,s)d_yS - \int_S \Gamma^1(x,y,s)\upsilon(y,s)d_xS, \quad C \equiv \begin{bmatrix} c_{ij} & 0 \\ u & c \end{bmatrix}.$$

Получаемые решения разрешающей системы линейных алгебраических уравнений параметризованы комплексным параметром интегрального преобразования Лапласа. Для получения оригинала решения применяется шаговая схема численного обращения интегрального преобразования Лапласа на узлах метода Эйлера с использованием комбинированной формулы, учитывающей специфику интегрирования сильно осциллирующих функций [3-5]:

$$\overline{f}(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt, \quad f_0 = 0, \quad f(n\Delta t) = \sum_{k=1}^n \omega_k(\Delta t), \quad n = \overline{1,N},$$

$$\omega_n(\Delta t) = \frac{R^{-n}}{2\pi}\sum_{k=0}^{L-1}\frac{\phi_{k+1}-\phi_k}{2}e^{-in\frac{\phi_k+\phi_{k+1}}{2}}\left[D_1(w)\overline{f}\left(s_k\right)s_k + D_2(w)\overline{f}\left(s_{k+1}\right)s_{k+1}\right], \quad s_k = \frac{\gamma(z)}{\Delta t},$$

$$w = -n\frac{\phi_{k+1}-\phi_k}{2}, \quad D_{1,2}(w) = \begin{cases} \dfrac{\sin w}{w} \pm \dfrac{w\cos w - \sin w}{w^2}i & \text{при} \quad |w| > w^*, \\ e^{\mp wi} & \text{при} \quad |w| \le w^*, \end{cases}$$

$$\gamma(z)=3/2-2z+z^2/2,\quad z=Re^{i\phi},\quad \phi_l=l\,\tfrac{2\pi}{L},$$

где R, L, Δt – параметры метода, w^* – ключ при интегрировании сильно осциллирующих функций.

На основе регуляризованного ГИУ строится дискретный аналог, детальное описание которого приведено в [3,5]. Особенностью гранично-элементной схемы является согласованная модель поэлементной аппроксимации границы и граничных функций. В этой модели для описания границы используются биквадратичные формы, граничные функции первого рода являются билинейными, граничные функции второго рода постоянны.

2. Численные эксперименты. Рассмотрим задачу о численном моделировании динамического испытания на изгиб композитной балки (рис.1). Размеры образца составляют $6\text{мм}\times 15\text{мм}\times 80\text{мм}$. На одной стороне на полосе шириной a=1.4мм, расположенной симметрично относительно начала координат, заданы нормальные поверхностные усилия $\tilde{t}_1(t)=t_0 f(t)$, $t_0=1.074748571\cdot 10^8$ Па, вид функции $f(t)$ дан на рис.2. На противоположной стороне имеются две опоры шириной b=1.5мм каждая, расположенные симметрично относительно начала координат. Расстояние между опорами составляет c=45мм. На этих опорах задана скользящая заделка $u_1=0$. Остальная поверхность балки свободна от поверхностных усилий. Использовался ортотропный материал.

Гранично-элементные решения сравнивались с результатами эксперимента и соответствующими результатами, полученными в программных комплексах конечно-элементного моделирования «Динамика-3»* и ANSYS (лицензия ANSYS Academic Research, Customer Number 623640). Расчёты проводились на двух гранично-элементных сетках с различной степенью дискретизации. ГЭ-сетка «а» – 1048 граничных элементов (рис.3), ГЭ-сетка «б» – 1900 граничных элементов (рис. 4). Значение параметра шагового метода численного обращения интегрального преобразования Лапласа выбрано $\Delta t=10^{-7}$ с. Исследовался отклик перемещений $u_1(t)$ в точке $O(0,0,0)$.

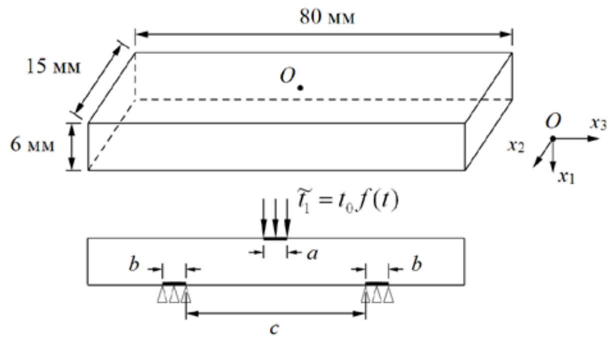


Рис. 1

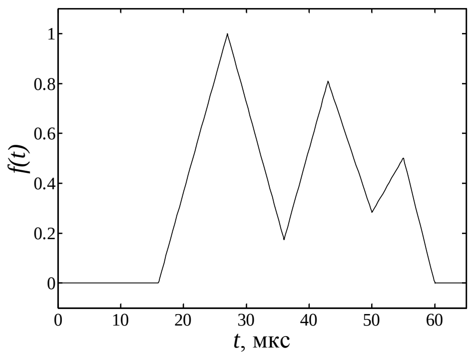


Рис. 2

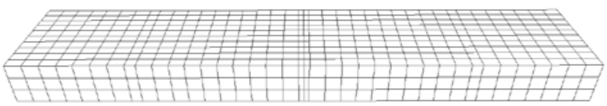


Рис. 3

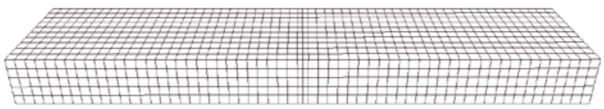


Рис. 4

Приведём краткое описание эксперимента. Нагружение балки-образца осуществлялось в системе «нагружающий стержень – опорная трубка». Схема представлена на рис.5. Мерные трубка и стержень были изготовлены из алюминиевого сплава Д16. Физические и геометрические характеристики экспериментальной установки приведены в табл.1. Фотография экспериментальной установки дана на рис.6.

* Сертификат соответствия Госстандарта России № РОСС RU.ME20.H00338

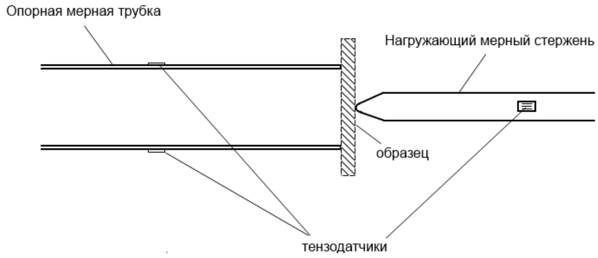


Рис. 5

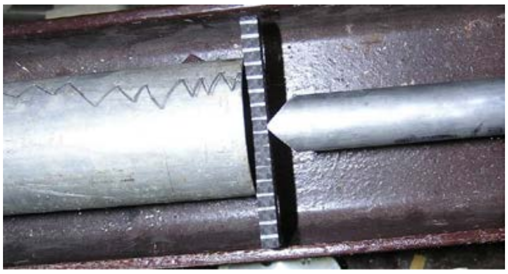


Рис. 6

Таблица 1.

Внешний диаметр опорной трубки	48	мм
Толщина стенки	1,5	мм
Внутренний диаметр трубки	45	мм
Диаметр нагружающего стержня	20	мм
Площадь сечения нагружающего стержня, S_i	314,1593	мм^2
Площадь сечения опорной трубки, S_t	219,1261	мм^2
Модуль Юнга, E	74000	МПа
Стержневая скорость звука, c	5150	м/с

Перемещения точек опоры образца и действующие на образец силы можно определить, используя формулы Кольского. Сила F_1, действующая на балку со стороны нагружающего стержня, сила F_2, возникающая в опорной трубке при изгибе балки, и прогиб балки определяются по импульсам деформации следующим образом:

$$F_1(t) = ES_i(\varepsilon_I(t) - \varepsilon_R(t)),$$

$$F_2(t) = ES_t\varepsilon_T(t),$$

$$U(t) = \int_0^t c(\varepsilon_I(\tau) + \varepsilon_R(\tau) - \varepsilon_T(\tau))d\tau,$$

где ε_I, ε_R ε_T – падающий, отражённый и прошедший импульсы деформации, соответственно.

Сравнение полученных ГЭ-решений прогиба балки с экспериментальным данными дано на рис.7. Сравнения с КЭ-решениями из ANSYS и «Динамика-3» представлены на рис. 8, 9, соответственно.

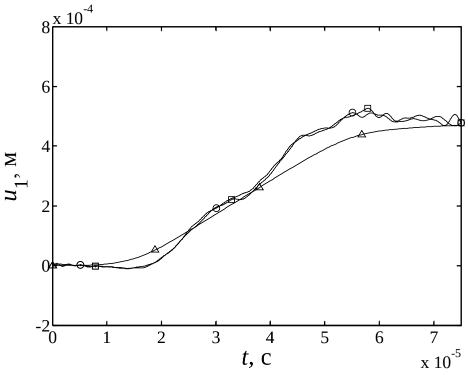


Рис.7. ○ – ГЭ-решение на сетке «а», □ – ГЭ-решение на сетке «б», Δ – эксперимент

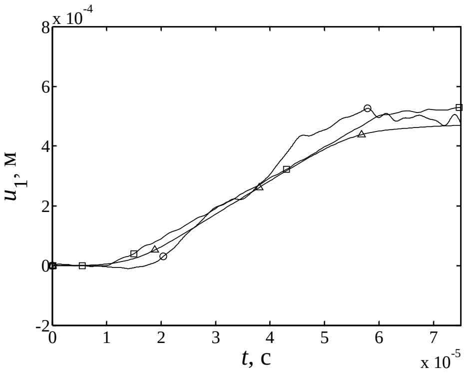


Рис.8. ○ – ГЭ-решение на сетке «б», □ – КЭ-решение из ANSYS, Δ – эксперимент

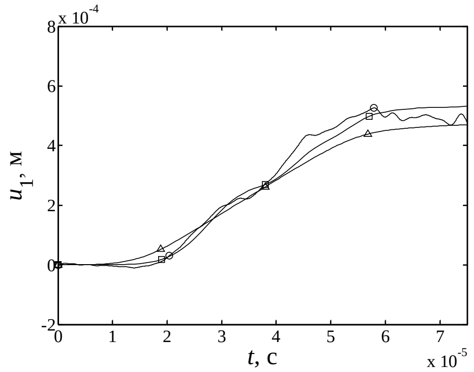


Рис. 9. ○ – ГЭ-решение на сетке «б», □ – КЭ-решение из «Динамика-3», Δ – эксперимент

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 15-08-02814-а, 15-38-50405-мол_нр, 15-48-02333- р_поволжье_а, 15-38-20759-мол_а_вед, 15-08-02817-а, 14-08-00811-а, 14-08-31410-мол_а, 14-08-31415-мол_а, 13-08-00658-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Аменицкий А.В., Игумнов Л.А., Карелин И.С. Развитие метода граничных элементов для решения проблемы распространения волн в пористых средах // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. Н. Новгород: Нижегор. гос. ун-т, 2008. Вып. 70. С. 71-78.
2. Аменицкий А.В., Белов А.А., Игумнов Л.А., Карелин И.С. Граничные интегральные уравнения для решения динамических задач трёхмерной теории пороупругости // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. Н. Новгород: Нижегор. гос. ун-т, 2009. Вып.71. С.164-171.
3. Баженов В.Г., Игумнов Л.А. Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трёхмерной динамической теории упругости с сопряжёнными полями. М.: Физматлит, 2008. 352 с.
4. Игумнов Л.А., Марков И.П. Гранично-элементное моделирование трёхмерных краевых задач электроупругого равновесия // Проблемы прочности и пластичности. Межвуз.сб. Н. Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета. 2013. Вып.75(3). С.185-191
5. Баженов В.Г., Белов А.А., Игумнов Л.А. Гранично-элементное моделирование динамики кусочно-однородных сред и конструкций. Учебное пособие. Н. Новгород: Изд. Нижегородского госуниверситета, 2009. 180с.

Сведения об авторах:

Игумнов Л.А. – директор НИИМ Нижегородского университета, д.ф.-м.н., профессор, **тел.:** (831) 4657655, **e-mail:** igumnov@mech.unn.ru

Литвинчук С.Ю. – ведущий научный сотрудник НИИМ Нижегородского университета, к.ф.-м.н., доцент, **тел.:** (831) 4657655, **e-mail:** litvinchuk@mech.unn.ru

Марков И.П. – младший научный сотрудник НИИМ Нижегородского университета, к.ф.-м.н., **тел.:** (831) 4657655, **e-mail:** igumnov@mech.unn.ru

Брагов А.М. – ведущий научный сотрудник НИИМ Нижегородского университета, д.т.н., профессор, **тел.:** (831) 4657655, **e-mail:** igumnov@mech.unn.ru

О НАПРЯЖЁНОМ СОСТОЯНИИ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО КЛИНА С КОЛЛИНЕАРНОЙ СИСТЕМОЙ ТРЕЩИН И ЖЁСТКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ ПРИ АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Канецян Э.Г., Мкртчян М.М.

В настоящей работе рассматривается задача об определении компонентов напряжённо-деформированного состояния кусочно-однородного клина при антиплоской деформации, грани которого жёстко закреплены, а на горизонтальной линии спая разнородных материалов расположена система из произвольного конечного числа трещин и абсолютно жёстких тонких включений. Аналогичная задача рассмотрена в [1], укажем также на работу [2]. .

1. Пусть, отнесённый к цилиндрической системе координат $r\vartheta z$, кусочно-однородный упругий клин состоит из двух областей $\Omega_\alpha = \{-\infty < z < \infty, 0 \le r \le \infty, 0 \le \vartheta \le \alpha\}$ с модулем сдвига G_+ и $\Omega_\beta = \{-\infty < z < \infty, 0 \le r \le \infty, -\beta \le \vartheta \le 0\}$ с модулем сдвига G_-, и в плоскости $\vartheta = 0$ содержит систему из произвольного конечного числа сквозных трещин и тонких абсолютно жёстких включений, причём их следы в плоскости $r\vartheta$ составляют соответственно, систему интервалов L_1 и L_2:

$$L_1 = \bigcup_{k=1}^{N_1} [a_k, b_k]; \; 0 < a_k < b_k \quad (k = 1,2,..., N_1); \; b_k < a_{k+1} \quad (k = \overline{1, N_1 - 1})$$

$$L_2 = \bigcup_{k=1}^{N_2} [c_k, d_k]; \; 0 < c_k < d_k \quad (k = 1,2,..., N_2); \; d_k < c_{k+1} \quad (k = \overline{1, N_2 - 1}) \; L = L_1 \bigcup L_2 \; .$$

Пусть, далее, свободные грани клиньев жёстко закреплены, кроме того, берега трещин также нагружены силами с заданными интенсивностями $\tau_{\vartheta z}\big|_{\vartheta=\pm 0} = -\tau_\pm^{(1)}(r) \quad (r \in L_1)$, а на систему включений L_2 действуют силы с равнодействующими P_k, направленные вдоль оси Oz и вызывающие продольный сдвиг упругого клина в направлении оси Oz с базовой плоскостью $r\vartheta$.

Требуется определить плотность дислокаций смещений на берегах трещин, скачков напряжений на берегах включений, разрушающие напряжения и коэффициенты интенсивности разрушающих напряжений (КИН).

Для вывода определяющих уравнений поставленной задачи кусочно-однородный упругий клин вдоль оси Or разрежем на две части, а затем для действующих на их гранях $\vartheta = \pm 0$ напряжений введём следующие обозначения $\left(L' = R_+ \setminus L; R_+ = (0, \infty)\right)$:

$$-\tau_{\vartheta z}\big|_{\vartheta=+0} = T_+(r) = \begin{cases} \tau_+^{(1)}(r) & (r \in L_1); \\ \tau_+^{(2)}(r) & (r \in L_2); \\ \tau(r) & (r \in L'); \end{cases} \quad -\tau_{\vartheta z}\big|_{\vartheta=-0} = T_-(r) = \begin{cases} \tau_-^{(1)}(r) & (r \in L_1); \\ \tau_-^{(2)}(r) & (r \in L_2); \\ \tau(r) & (r \in L'). \end{cases} \tag{1}$$

На системе включений L_2 смещения постоянны:

$$u_z^+(r, \vartheta)\big|_{\vartheta=+0} = u_z^-(r, \vartheta)\big|_{\vartheta=-0} = \delta_k = \text{const}; \quad r \in (c_k, d_k) \; (k = \overline{1, N_2}). \tag{2}$$

Запишем также граничные условия на $\vartheta = \alpha, \; \vartheta = -\beta$:

$$u_z^+\big|_{\vartheta=\alpha} = 0; \quad u_z^-\big|_{\vartheta=-\beta} = 0 \quad (0 < r < \infty) \tag{3}$$

где $u_z^{\pm}(r,\vartheta)$ – смещения точек, соответствующих клиньям Ω_α и Ω_β, которые в этих областях удовлетворяют уравнению Лапласа в полярной системе координат:

$$\frac{\partial^2 u_z^{\pm}(r,\vartheta)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_z^{\pm}(r,\vartheta)}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_z^{\pm}(r,\vartheta)}{\partial \vartheta^2}=0. \tag{4}$$

Далее введём в рассмотрение следующие величины:

$$\Omega(r)=T_+(r)+T_-(r); \qquad h(r)=\frac{du_z^+(r,+0)}{dr}+\frac{du_z^-(r,-0)}{dr};$$

$$\chi(r)=T_+(r)-T_-(r)=\begin{cases}\psi(r) & (r\in L_2);\\ \tau_+^{(1)}(r)-\tau_-^{(1)}(r) & (r\in L_1);\\ 0 & (r\in L'),\end{cases} \tag{5}$$

а также плотность дислокаций смещений

$$w(r)=\frac{du_z^+(r,+0)}{dr}-\frac{du_z^-(r,-0)}{dr}=\begin{cases}\varphi(r) & (r\in L_1);\\ 0 & (r\in R_+/L_1).\end{cases} \tag{6}$$

Теперь с помощью прямого и обратного преобразования Меллина [3] по переменной r, из уравнения (4) и граничных условий (1)-(3) с учётом обозначений (5)-(6), аналогично [4], придём к системе ключевых уравнений задачи:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{L_1}\frac{w(r_0)dr_0}{\ln r_0-\ln r}+\frac{1}{\pi)}\int_{L_1}K\left(\ln\frac{r_0}{r}\right)w(r_0)dr_0-\frac{G_+-G_-}{2G_+G_-}r\chi(r)-\frac{1}{\pi}\int_{L_1}M\left(\ln\frac{r_0}{r}\right)\chi(r_0)dr_0-\\ -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{L_2}M\left(\ln\frac{r_0}{r}\right)\chi(r_0)dr_0=-\frac{G_++G_-}{2G_+G_-}r\Omega(r);\\ \dfrac{G_+G_-}{\pi}\displaystyle\int_{L_1}M\left(\ln\frac{r_0}{r}\right)w(r_0)dr_0+\frac{G_+-G_-}{2}rw(r)-\frac{1}{\pi}\int_{L_1}\frac{\chi(r_0)dr_0}{\ln r_0-\ln r}-\frac{1}{\pi}\int_{L_2}\frac{\chi(r_0)dr_0}{\ln r_0-\ln r}+\\ +\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{L_1}Q\left(\ln\frac{r_0}{r}\right)\chi(r_0)dr_0+\frac{1}{\pi}\int_{L_2}Q\left(\ln\frac{r_0}{r}\right)\chi(r_0)dr_0-\frac{G_++G_-}{2(\alpha G_++\beta G_-)}\int_{L_1}\chi(r_0)dr_0=\\ \qquad=\dfrac{G_++G_-}{2}rh(r) \qquad\qquad (r\in R_+)\end{cases} \tag{7}$$

где

$$K\left(\ln\frac{r_0}{r}\right)=\int_0^\infty\frac{G_+[1-\mathrm{th}(\beta s)]+G_-[1-\mathrm{ht}(\alpha s)]}{\Gamma(s)}\sin\left(s\ln\frac{r_0}{r}\right)ds-\frac{\pi(G_++G_-)}{2(\alpha G_-+\beta G_+)};$$

$$M\left(\ln\frac{r_0}{r}\right)=\int_0^\infty\frac{\mathrm{th}(\beta s)-\mathrm{th}(\alpha s)}{\Gamma(s)}\cos\left(s\ln\frac{r_0}{r}\right)ds;$$

$$Q\left(\ln\frac{r_0}{r}\right)=\int_0^\infty\frac{G_+\mathrm{th}(\beta s)[1-\mathrm{th}(\alpha s)]+G_-\mathrm{th}(\alpha s)[1-\mathrm{th}(\beta s)]}{\Gamma(s)}\sin\left(s\ln\frac{r_0}{r}\right)ds;\ \ \Gamma(s)=G_+\mathrm{th}(\beta s)+G_-\mathrm{th}(\alpha s).$$

Рассматривая теперь первое уравнение системы (7) на L_1, а второе уравнение на L_2, придём к определяющей системе сингулярных интегральных уравнений (СИУ) задачи:

$$
\begin{cases}
\frac{1}{\pi}\int\limits_{L_1}\frac{\varphi(r_0)dr_0}{\ln r_0-\ln r}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{L_1}K\left(\ln\frac{r_0}{r}\right)\varphi(r_0)dr_0-\frac{1}{\pi}\int\limits_{L_2}M\left(\ln\frac{r_0}{r}\right)\psi(r_0)dr_0=\\
=\frac{1}{\pi}\int\limits_{L_1}M\left(\ln\frac{r_0}{r}\right)\left[\tau_+^{(1)}(r_0)-\tau_-^{(1)}(r_0)\right]dr_0-r\left[\frac{\tau_+^{(1)}(r)}{G_+}-\frac{\tau_-^{(1)}(r)}{G_-}\right]; \qquad (r\in L_1)\\
\frac{G_+G_-}{\pi}\int\limits_{L_1}M\left(\ln\frac{r_0}{r}\right)\varphi(r_0)dr_0-\frac{1}{\pi}\int\limits_{L_2}\frac{\psi(r_0)dr_0}{\ln r_0-\ln r}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{L_2}Q\left(\ln\frac{r_0}{r}\right)\psi(r_0)dr_0=\\
=\frac{1}{\pi}\int\limits_{L_1}\frac{\left[\tau_+^{(1)}(r_0)-\tau_-^{(1)}(r_0)\right]dr_0}{\ln r_0-\ln r}-\frac{1}{\pi}\int\limits_{L_1}Q\left(\ln\frac{r_0}{r}\right)\left[\tau_+^{(1)}(r_0)-\tau_-^{(1)}(r_0)\right]dr_0; \qquad (r\in L_2)
\end{cases} \tag{8}
$$

Система (8) должна рассматриваться при условиях:

$$\int\limits_{a_k}^{b_k}\varphi(r)dr=0, \qquad (k=\overline{1,N_1}), \tag{9}$$

$$\int\limits_{c_k}^{d_k}\psi(r)dr=P_k, \qquad (k=\overline{1,N_2}). \tag{10}$$

Первые из них эквивалентны условиям непрерывности смещений в концевых точках разреза, а вторые представляет собой условия равновесия включений:

Рассматривая первое уравнение системы (7) вне разрезов и включений, получим

$$
\begin{aligned}
\tau(r)=&-\frac{G_+G_-}{\pi r(G_++G_-)}\int\limits_{L_1}\frac{\varphi(r_0)dr_0}{\ln r_0-\ln r}-\frac{G_+G_-}{\pi r(G_++G_-)}\int\limits_{L_1}K(\ln\frac{r_0}{r})\varphi(r_0)dr_0+\\
&+\frac{G_+G_-}{\pi r(G_++G_-)}\int\limits_{L_1}M(\ln\frac{r_0}{r})\left[\tau_+^1(r_0)-\tau_-^1(r_0)\right]dr_0+\frac{G_+G_-}{\pi r(G_++G_-)}\int\limits_{L_2}M(\ln\frac{r_0}{r})\psi(r_0)dr_0; \quad (r\in L')
\end{aligned} \tag{11}
$$

Таким образом, поставленная задача о напряжённом состоянии кусочно-однородного упругого клина с трещинами и абсолютно жёсткими включениями сводится к решению системы (8) при условиях (9)-(10). После решения (8)-(10), разрушающее напряжение определяется формулой (11).

2. Для общего решения определяющей СИУ (8)–(10) сначала в системе уравнений (8) переходим к новым переменным $(\xi=\ln r_0,\ \eta=\ln r)$, далее интервалы $((\ln a_k,\ln b_k),\ (k=\overline{1,N_1}))$ и $((\ln c_k,\ln d_k),\ (k=\overline{1,N_2}))$ преобразуем в интервал (-1;1), а затем определяющее СИУ преобразуем в систему интегральных уравнений относительно неизвестных функций, заданных на (-1,1). Решение системы (8)–(10) строится числено-аналитическим методом [5,6,7] с привлечением математического аппарата ортогональных многочленов Чебышева.

КИН определяются формулами [5]:

$$K_{III}(a_k)=\frac{G_+}{1+\mu}\lim_{r\to a_k+0}\sqrt{2\pi(r-a_k)}\varphi(r);\ K_{III}(b_k)=-\frac{G_+}{1+\mu}\lim_{r\to b_k-0}\sqrt{2\pi(b_k-r)}\varphi(r).\quad (\mu=G_+/G_-)$$

После преобразования формулы примут вид:

$$K_{III}^0(a_k)=\frac{\sqrt{l}}{\sqrt{2a_k}(1+\mu)}\sqrt{\ln\left(\frac{b_k}{a_k}\right)}x_k(-1);\ K_{III}^0(b_k)=-\frac{\sqrt{l}}{\sqrt{2b_k}(1+\mu)}\sqrt{\ln\left(\frac{b_k}{a_k}\right)}x_k(1);\ \ (k=1,N_1), \tag{12}$$

где введены безразмерные КИН:

$$K_{III}^0(a_k)=\frac{K_{III}(a_k)}{\sqrt{\pi l}G_+};\quad K_{III}^0(b_k)=\frac{K_{III}(b_k)}{\sqrt{\pi l}G_+};\quad (k=1,N_1).$$

Входящие в (12) значения $x_k(\pm 1)$ функции $x_k(t)$ определяются при помощи интерполяционного многочлена Лагранжа по чебышевским узлам и выражаются формулами [5]:

$$x_k(1)=\frac{1}{M}\sum_{n=1}^{M}(-1)^{n+1}x_k(u_n)\mathrm{ctg}\left(\frac{2n-1}{4M}\pi\right);$$
$$x_k(-1)=\frac{1}{M}\sum_{n=1}^{M}(-1)^{M+n}x_k(u_n)\mathrm{tg}\left(\frac{2n-1}{4M}\pi\right);\quad (k=1,N_1). \tag{13}$$

Далее рассмотрим частный случай, в котором на линии соединения разнородных клиньев содержатся трещина и абсолютно жёсткое тонкое включение, $L=L_1\bigcup L_2$, $L_1=(a_1,b_1),L_2=(c_1,d_1)$. Предположим, что на берегах щелей действуют равные между собой напряжения постоянных интенсивностей $\tau_+^{(1)}(r)=\tau_-^{(1)}(r)=\tau_0=\mathrm{const}\ \ (r\in L_1)$.

В рассмотренном частном случае введем, для удобства дальнейших расчетов и численного анализа, следующие вспомогательные параметры и величины $l=b_1-a_1=d_1-c_1;\quad \rho=a_1/l;\ \ k=c_1/l;(l=\mathrm{const})$. При этом, будем иметь:

$\lambda_1^{(1)}=(\beta_1-\alpha_1)/2=\ln\sqrt{(1+\rho)/\rho};\quad \lambda_1^{(2)}=(\delta_1-\gamma_1)/2=\ln\sqrt{(1+k)/k};$

$e_1=(\beta_1+\alpha_1)/2=\ln\sqrt{\rho(1+\rho)};\ e_2=(\delta_1+\gamma_1)/2=\ln\sqrt{k(1+k)};$

В этом случае по известной численно-аналитической методике [6,7], как и в общем случае, из системы (8) и условий на щели L_1 и включения L_2, из (9) и (10) получаем следующую систему ЛАУ:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{M}\sum\limits_{m=1}^{M}\left[\dfrac{1}{u_m-t_r}-\tilde K(t_r-u_m)\right]x_1(u_m)-\dfrac{\mu+1}{M}\sum\limits_{m=1}^{M}\tilde M_1(t_r,u_m)y_1(u_m)=-\dfrac{(\mu+1)^2e^{\lambda_1^{(1)}t_r+e_1}}{\mu}\tilde\tau_0;\quad (r=\overline{1,M-1})\\ \dfrac{\mu}{M(\mu+1)}\sum\limits_{m=1}^{M}\tilde M_2(t_r,u_m)x_1(u_m)+\dfrac{1}{M}\sum\limits_{m=1}^{M}\left[\dfrac{1}{u_m-t_r}-\tilde Q(t_r-u_m)\right]y_1(u_m)=0;\quad (r=\overline{1,M-1})\\ \sum\limits_{m=1}^{M}x_1(u_m)=0;\qquad \dfrac{\pi}{M}\sum\limits_{m=1}^{M}y_1(u_m)=\dfrac{\tilde P}{\lambda_1^{(2)}},\end{cases} \tag{14}$$

где

$$\tilde K(t-u)=\lambda_1^{(1)}\left[\int_0^\infty\frac{\mu[1-\mathrm{th}(\lambda\beta)]+[1-\mathrm{th}(\lambda\alpha)]}{\mu\mathrm{th}(\lambda\alpha)\mathrm{th}(\lambda\beta)+1}\sin(\lambda\lambda_1^{(1)}(t-u)d\lambda+\frac{\pi(\mu+1)}{2(\alpha+\mu\beta)}\right];$$

$$\tilde M_1(t,u)=\lambda_1^{(2)}\int_0^\infty\frac{\mathrm{th}(\lambda\beta)-\mathrm{th}(\lambda\alpha)}{\mu\mathrm{th}(\lambda\beta)+\mathrm{th}(\lambda\alpha)}\cos[\lambda(\lambda_1^{(1)}t+e_1-\lambda_1^{(2)}u-e_2)]d\lambda;$$

$$\tilde M_2(t,u)=\lambda_1^{(1)}\int_0^\infty\frac{\mathrm{th}(\lambda\beta)-\mathrm{th}(\lambda\alpha)}{\mu\mathrm{th}(\lambda\beta)+\mathrm{th}(\lambda\alpha)}\cos[\lambda(\lambda_1^{(2)}t+e_2-\lambda_1^{(1)}u-e_1)]d\lambda;$$

$$\tilde Q(t-u)=\lambda_1^{(2)}\int_0^\infty\frac{\mu\mathrm{th}(\lambda\beta)[1-\mathrm{th}(\lambda\alpha)]+[1-\mathrm{th}(\lambda\beta)]}{\mu\mathrm{th}(\lambda\beta)+\mathrm{th}(\lambda\alpha)}\sin[\lambda\lambda_1^{(2)}(t-u)]d\lambda;$$

$$\tilde P=P_1/[l(G_++G_-)];\ \tilde\tau_0=\tau_0/(G_++G_-).\quad (-1<t<1)$$

Далее, для простоты примем $\tilde\tau_0(t)=0.01$, $\tilde P=0.01$. Тогда, решая систему (14) при различных значениях параметров $\mu,\alpha,\beta,\rho,k\,[0,1]$, и учитывая (13), находим соответствующие значения КИН в концевых точках трещины по формулам (12).

Вычисленные значения КИН $K^0_{III}(a_1)$ и $K^0_{III}(b_1)$ в зависимости от изменения параметра $\alpha \in (0, \pi]$ при фиксированных значениях остальных параметров: $\mu = 0.5,\ \rho = 4,\ k = 2,\ \beta = \pi/3$ (здесь включение находится на правой стороне трещины) приведены в таблице. Данные этой таблицы, характерные для этих КИН и при других фиксированных значениях параметров $\mu,\ \rho,\ k,\ \beta$, показывают, что значения КИН $K^0_{III}(a_1)$, $K^0_{III}(b_1)$ с возрастанием параметра α увеличиваются.

Таблица

α	$\pi/30$	$\pi/20$	$\pi/15$	$\pi/10$	$\pi/6$	$\pi/4$
$K^0_{III}(a_1)$	0.05599	0.05924	0.06108	0.06305	0.06483	0.06583
$K^0_{III}(b_1)$	0.05754	0.06053	0.06211	0.063724	0.06513	0.06595

α	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
$K^0_{III}(a_1)$	0.06635	0.06684	0.06707	0.06714	0.06719	0.06726
$K^0_{III}(b_1)$	0.06638	0.06681	0.067	0.06706	0.06711	0.0671

ЛИТЕРАТУРА

1. Акопян В.Н. Антиплоское напряжённое состояние составного анизотропного клина, содержащего трещину и абсолютно жёсткое включение.//В сб.: «Современные проблемы теории контактных взаимодействий» Ереван: Изд. НАН Армении. 1996. С.45-50.
2. Hakobyan V.N. The mixed problem for anisotropic compound wedge with crack. -In collection of papers «Modern Problems of deformable bodies Mechanics», dedicated to the memory of Prof. P.S. Theocaris, Yerevan, published by «Gitutyun» NAS RA, 2005, pp.114-120.
3. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.: АН СССР, 1963.
4. Мкртчян М.М., Мкртчян М.С. Об антиплоской задаче кусочно-однородного упругого клина, содержащего на линии спая систему коллинеарных щелей и абсолютно жёстких тонких включений // Известия НАН Армении. Механика. 2011. Т.64. №4. С.7-20.
5. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова думка, 1976. 443с.
6. Erdogan F., Gupta G.D., Cook T.S. The numerical solutions of singular integral equations. Methods of Analysis and solution of Crack Problems; pp. 368-425. Noordhoff Intern. Publ., Leyden, 1973.
7. Theocaric P.S., Iokamidis N.I. Numerical Integration Methods for the solution of singular Integral Equations. Quart. Appl. Math., vol XXXV, №1, pp.173-185, 1977.

Сведения об авторах:

Канецян Эгине Гургеновна, канд. физ.-мат.наук, ст. научный сотрудник, Национальний университет архитектуры и строительства Армении,
Адрес: Армения, 0019, Ереван, ул. Теряна 105,
Тел.: 093461588, **E-mail:** info@ysuac.am

Мкртчян Мгер Мушегович, мл. науч. сотрудник Института механики НАН РА,
Адрес: Армения, 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2,
Тел.: (37410)-43-16-52, **E-mail:** mher_1982@mail.ru

РАВНОВЕСИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОГО ЦИЛИНДРА ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И РАЗДУВАНИИ

Карякин М.И., Обрезков Л.П.

С использованием распространённых моделей нелинейно-упругого поведения материалов – Блейтца и Ко, Кирхгофа–Сен-Венана и Мурнагана – рассмотрены процессы одноосного растяжения и раздувания полого цилиндра различной геометрии. Посредством полуобратного метода трёхмерная задача сведена к исследованию нелинейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Численно построенные диаграммы нагружения показали, что даже в области растягивающих напряжений могут существовать зоны неустойчивости. В рамках бифуркационного подхода проведено численное исследование устойчивости равновесия цилиндра в этих зонах, а также влияние на устойчивость материальных и геометрических параметров.

1. Общие соотношения. Опишем деформацию осевого растяжения и раздувания полого кругового цилиндра высоты h с внутренним и внешним радиусами r_0 и r_1 полуобратным представлением вида [1]:

$$R = P(r),\ \Phi = \varphi,\ Z = \alpha z, \tag{1.1}$$

где r, φ, z и R, Φ, Z – цилиндрические координаты в отсчётной и текущей конфигурациях, соответственно, $r_0 \le r \le r_1$, $0 \le z \le h$, α – параметр деформирования, представляющий собой коэффициент удлинения цилиндра, $P(r)$ – функция, описывающая изменение радиуса точки цилиндра. Будем предполагать, что на торцах цилиндра отсутствуют касательные напряжения. Случай $\alpha < 1$ соответствует сжатию цилиндра, а $\alpha > 1$ – его растяжению.

Материал цилиндра будем считать гиперупругим; его свойства описываются функцией удельной потенциальной энергии деформации W, которая в изотропном случае зависит только от трёх аргументов – главных инвариантов меры деформации Коши $\mathbf{G}$. В настоящей работе использовались следующие три модели [2]:

- материал Блейтца и Ко (упрощённый вариант)

$$W = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{I_2}{I_1} + 2I_3^{\frac{1}{2}} - 5\right);$$

- (физически линейный) материал Кирхгоффа–Сен-Венана

$$W = \frac{1}{4}(-3\lambda - 2\mu)I_1 + \frac{1}{8}(\lambda + 2\mu)I_1^2 - \frac{1}{2}\mu I_2;$$

- материал Мурнагана

$$W = \frac{1}{4}\left(-3\lambda - 2\mu + \frac{9}{2}l + \frac{1}{2}n\right)I_1 + \frac{1}{8}(\lambda + 2\mu - 3l - 2m)I_1^2 +$$
$$+ \frac{1}{4}\left(-2\mu + 3m - \frac{1}{2}n\right)I_2 - \frac{1}{4}mI_1I_2 + \frac{1}{24}(l + 2m)I_1^3 + \frac{1}{8}n(I_3 - 1),$$

где материальные параметры λ, μ – коэффициенты Ляме, l, m, n – модули упругости третьего порядка; $I_k = I_k(\mathbf{G})$, $k = 1,2,3$ – главные инварианты меры деформации; $\mathbf{G} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{C}$ – градиент деформации, выражение для которого с учётом (1.1), имеет вид

$$\mathbf{C} = P' e_r e_R + \frac{P}{r} e_\varphi e_\Phi + \alpha e_z e_Z \tag{1.2}$$

В (1.2) e_r, e_φ, e_z и e_R, e_Φ, e_Z – базисные векторы цилиндрических координат в отсчётной и актуальной конфигурациях, соответственно; штрихом обозначено дифференцирование по переменной r.

Для описания напряжённого состояния цилиндра используем тензор напряжений Пиолы $\mathbf{D}$, определяющее соотношение для которого записывается в виде $\mathbf{D} = \partial W / \partial \mathbf{C}$, а уравнения равновесия записываются в области, занимаемой телом в отсчётной конфигурации

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0. \tag{1.3}$$

С учётом (1.1), (1.2) уравнения (1.3) сводятся к одному нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка относительно функции $P(r)$. В общем случае это уравнение достаточно громоздко, но в ряде частных случаев оно имеет весьма компактный вид. В частности, для упрощённого варианта модели Блейтца и Ко это уравнение записывается в виде

$$P'' = -\frac{1}{3}\frac{(r^3 P'^3 - P^3)P'}{rP^3}. \tag{1.4}$$

Граничными условиями для уравнения типа (1.4) служат либо условия отсутствия нагрузки на боковой поверхности цилиндра $e_r \cdot \mathbf{D} = 0$, либо условия равенства этой нагрузки раздувающему давлению : p $e_r \cdot \mathbf{D} = -p(\det \mathbf{C})\mathbf{C}^{-1} \cdot e_r$. Что касается граничных условий на торцах, то часть из них, обеспечивающих условие скользящей заделки

$$D_{zR} = 0, D_{z\Phi} = 0, \tag{1.5}$$

выполняется точно, а условие на продольные напряжения – в интегральном смысле, что гарантирует необходимую величину растягивающей силы и служит для определения связи между этой силой и коэффициентом удлинения α.

Анализ устойчивости построенных решений осуществляется в рамках бифуркационного подхода на основе анализа уравнений нейтрального равновесия [2], которые выводятся следующим образом. Сначала соотношение (1.1) заменяется следующим преобразованием:

$$R = P(r) + \varepsilon u(r,\varphi,z),\ \Phi = \varphi + \varepsilon v(r,\varphi,z),\ Z = \alpha z + \varepsilon w(r,\varphi,z). \tag{1.6}$$

Вычисляя градиент деформации для (1.6), и линеаризуя его по формуле $\dot{\mathbf{C}} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\mathbf{C}\,|_{\varepsilon=0}$, затем последовательно находим выражения для линеаризованной меры деформации Коши $\dot{\mathbf{G}} = \dot{\mathbf{C}}\mathbf{C}^{\mathrm{T}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{C}}^{\mathrm{T}}$, её инвариантов, а затем и линеаризованного тензора напряжений Пиолы $\dot{\mathbf{D}}$. Итогом этого процесса является линейная однородная краевая задача для системы дифференциальных уравнений

$$\operatorname{div}\dot{\mathbf{D}} = 0 \tag{1.7}$$

с соответствующими однородными краевыми условиями для функций $u(r,\varphi,z), v(r,\varphi,z), w(r,\varphi,z)$. Анализ полученной системы проводится методом разделения переменных:

$$\begin{aligned} u(r,\varphi,z) &= U(r)\cos\left(\frac{z\pi m}{h}\right)\cos(n\varphi),\\ v(r,\varphi,z) &= V(r)\cos\left(\frac{z\pi m}{h}\right)\sin(n\varphi),\\ w(r,\varphi,z) &= W(r)\sin\left(\frac{z\pi m}{h}\right)\cos(n\varphi). \end{aligned} \tag{1.8}$$

В (1.8) m и n – натуральные числа, называемые номерами мод потери устойчивости. При таком разделении автоматически выполняются граничные условия (1.5) на торцах цилиндра, а предметом анализа становится линейная однородная система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $U(r), V(r), W(r)$.

2. Одноосное растяжение цилиндра. Сначала ограничимся рассмотрением случая, когда внутренне давление отсутствует. В этом случае нелинейные краевые задачи для функции $P(r)$ для всех рассмотренных моделей материалов имеют аналитическое решение, в частности, для материала Блейтца и Ко

$$P(r) = \frac{1}{\alpha^{1/4}} r,$$

для материала Кирхгофа–Сен-Венана

$$P(r)=\frac{\sqrt{-2(\lambda+\mu)(-3\lambda-2\mu+\lambda\alpha^2)}}{2(\lambda+\mu)}r,$$

для материала Мурнагана

$$P(r)=-\frac{\sqrt{-(m+2l)(n\alpha^2-n-12l+4\lambda+4\mu+4l\alpha^2-2m-2m\alpha^2+\sqrt{d_1}}}{2(m+2l)}r,$$

где

$$d_1=4m^2(1+\alpha^4)-8m^2\alpha^2+n^2\alpha^4-2n^2\alpha^2+n^2+8n(l-\lambda-\mu+l\alpha^4+\alpha^2(\lambda+\mu+m))-$$
$$-4nm(1+\alpha^4)-32(\mu l+\alpha^2 m\lambda-\mu l\alpha^2)-24lm(1+\alpha^4)+$$
$$+16(\lambda^2+\mu^2+\mu m-nl\alpha^2-\mu m\alpha^2)+32\lambda(m+\mu)+48lm\alpha^2.$$

Ограничиваясь случаем потери устойчивости при растягивающих нагрузках, будем предполагать осесимметричный характер форм потери устойчивости [1, 3], для чего положим $n=0$ в соотношениях (1.8). Тогда соотношение $\dot{D}_{r\Phi}=0$ будет выполняться автоматически, а линейная однородная краевая задача, полученная на основе уравнений (1.7) с краевыми условиями $\dot{D}_{rR}=0, \dot{D}_{rZ}=0,$ относительно функций $U(r), W(r)$ для материала Блейтца и Ко запишется как

$$U''=-\frac{V'\pi m}{3\alpha^{15/4}h}+\frac{U}{r^2}-\frac{U'}{r}-\frac{V'\pi m}{3\alpha^{5/4}h}+\frac{U\pi^2m^2}{3\alpha^{5/2}h^2},$$

$$V''=\frac{U'\pi x}{\alpha^{5/4}h}-\frac{V'}{r}+\frac{U\pi m}{\alpha^{5/4}hr}+\frac{3V\pi^2m^2}{\alpha^{5/2}h^2}+\frac{\alpha^{5/4}U\pi m}{hr}+\frac{\alpha^{5/4}U'\pi m}{h};$$

$$\frac{aU}{r}+3aU'+\frac{V\pi m}{\alpha^{1/4}h}=0,\quad -\frac{U\pi m}{\alpha^{11/4}h}+\frac{V'}{\alpha^{3/2}}=0.$$

Для модели Кирхгофа–Сен-Венана эта краевая задача примет следующий вид:

$$U''=\frac{1}{r^2h^2(4\mu(\mu+2\lambda)-2\mu\lambda\alpha^2+\lambda^2(3-\alpha^2))}(4\mu^2h^2(U-U'r)+$$
$$+2\mu(\lambda+\mu)\alpha^2U\pi^2m^2r^2+8\mu\lambda h^2(U-U'r)+2\lambda\alpha^2\mu h^2(U'r-U)-$$
$$-V'(\mu+\lambda)\pi m\alpha hr^2\sqrt{6\lambda^2+10\lambda\mu-2\lambda\alpha^2(\mu+\lambda)+4\mu^2}+$$
$$+3\lambda^2h^2(U-U'r)+\alpha^2\lambda^2h^2(U'r-U)),$$

$$V''=\frac{1}{2rh^2\mu\alpha^2(\lambda+\mu)}(2V\pi^2m^2r(\lambda^2\alpha^2-\mu^2)-$$
$$-2\mu\alpha^2h^2V'(\mu+\lambda)+3(3\lambda+2\mu)\mu\alpha^2V\pi^2m^2r-3\mu\lambda V\pi^2m^2r+$$
$$+(\mu+\lambda)\alpha\pi mh\sqrt{6\lambda^2+10\lambda\mu-2\lambda\alpha^2(\mu+\lambda)+4\mu^2}(U'r+U)).$$

$$-\frac{1}{2r(\lambda+\mu)h}((\alpha^2-3)\lambda^2Uh+((\lambda+2\mu)\alpha^2-(3\lambda+8\mu))\lambda U'rh-$$
$$-2(\lambda U+2\mu U'r)\mu h-\lambda V\pi m\alpha r\sqrt{6\lambda^2+10\lambda\mu-2\lambda\alpha^2(\mu+\lambda)+4\mu^2})=0,$$

$$\frac{\alpha}{2(\lambda+\mu)h}(2V'\alpha\lambda h-U\pi m\sqrt{6\lambda^2+10\lambda\mu-2\lambda\alpha^2(\mu+\lambda)+4\mu^2}+2V'\alpha\mu h)=0.$$

Для пятиконстантной модели Мурнагана аналогичные уравнения не приводятся в силу их чрезвычайной громоздкости.

Одним из средств верификации численного анализа данных краевых задач являлось полученное в работе [1] аналитическое решение задачи устойчивости для частного набора параметров материала Блейтца и Ко. В качестве примера ниже представлены некоторые результаты для цилиндра со следующими размерами: $r_0 / r_1 = 0.9$; $h / r_1 = 10$.

Заметим, прежде всего, что диаграмма растяжения цилиндра для материала Кирхгофа–Сен-Венана монотонно возрастает, что в соответствии с теоремой С.Спектора [3] должно означать отсутствие точек бифуркации. Данный факт был подтверждён расчётами. Для всех остальных типов материалов численно получено, что наименьшее критическое значение достигается при моде $m = 1$.

На рис.1 и 2 приведены диаграммы растяжения для материала Блейтца и Ко и материала Мурнагана, соответственно. В последнем случае набор модулей упругости второго и третьего порядка соответствует материалу «медь» в монографии [2]. Точкой обозначено положение точки бифуркации, которая находится вблизи максимума графика на ниспадающем участке. При увеличении длины цилиндра положение критической точки стремится к точке максимума, как показано на рис. 3 для материала Блейтца и Ко.

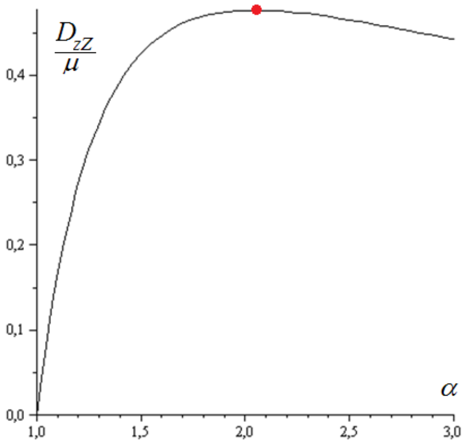


Рис.1. Точка бифуркации на диаграмме растяжения цилиндра из материала Блейтца и Ко

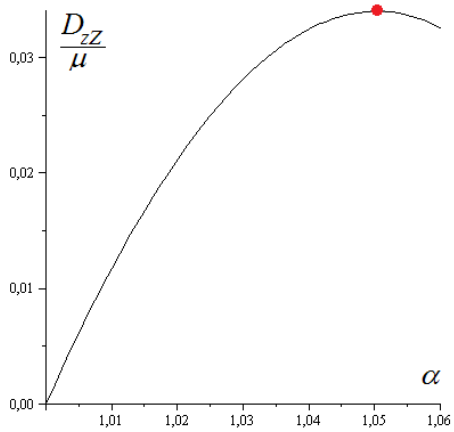


Рис.2. Точка бифуркации на диаграмме растяжения цилиндра из материала Мурнагана (медь)

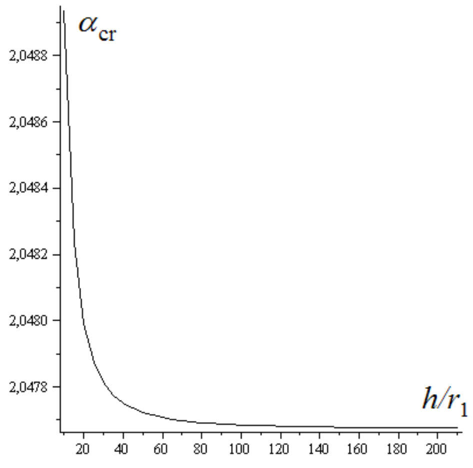


Рис.3. Зависимость величины критического растяжения от длины цилиндра

Описанное выше поведение продемонстрировали все наборы материальных параметров материала Мурнагана, приведённые в [2], за исключением набора значений, соответствующих оргстеклу. Точка бифуркации для этого набора параметров расположена на возрастающем участке диаграммы нагружения. Однако, данный факт не связан с нарушением теоремы С.Спектора, а является следствием невыполнения одного из условий упомянутой теоремы, а именно третьего неравенства Бэйкера-Эриксона. Проведённый вычислительный эксперимент показал, тем самым, существенность дополнительных условий теоремы.

3. Растяжение и раздувание цилиндра. Учёт раздувания не приводит к принципиальным изменениям в схеме анализа, но заметно усложняет задачу по следующим причинам. Прежде всего, функция $P(r)$ не может теперь быть задана аналитически, и на каждом шаге исследования линеаризованной задачи необходимо предварительно решать нелинейную краевую задачу для её определения. Во-вторых, теперь нельзя ограничиваться рассмотрением только осесимметричных форм потери устойчивости, что повышает порядок линеаризованной системы. И, наконец, в-третьих, в задаче появляется дополнительный параметр – внутреннее давление, влияние которого на процесс растяжения является достаточно сложным. Определённым упрощением является выбор другого параметра в качестве определяющего, а именно: радиуса деформированного цилиндра. При таком подходе для определения $P(r)$ вместо краевой задачи можно решать задачу Коши, что многократно ускоряет процесс расчётов.

В качестве примера их результатов на плоскости параметров α и $\eta = P(r_1)/r_1$ изображена область устойчивости для цилиндра из материала Блейтца и Ко с размерами $r_0/r_1 = 0.6$, $h/r_1 = 10$. Оказалось, в частности, что эта область полностью определяется четырьмя бифуркационными кривыми, соответствующими наборам мод $(m,n) = (1{,}0)$, (1,1), (1,2) и (2,2).

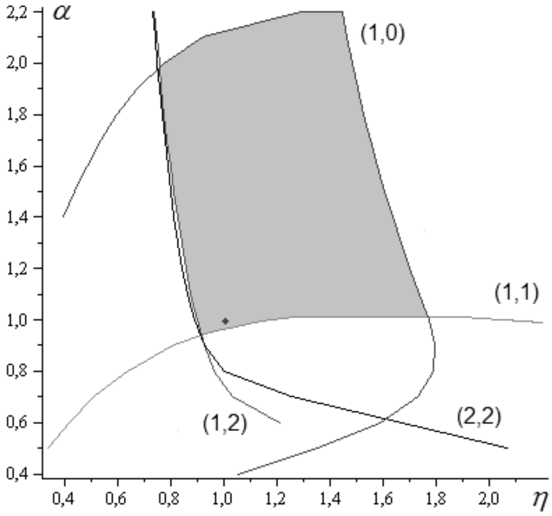


Рис. 4. Область устойчивости на плоскости параметров «растяжение»–«раздувание». Точкой отмечено недеформированное состояние цилиндра.

Работа выполнена в рамках гранта Минобрнауки РФ № 9.655.2014/К на выполнение научно-исследовательской работы в рамках проектной части государственного задания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александрин М.В., Карякин М.И. Об устойчивости растяжения нелинейно-упругого цилиндра // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2010. №1. С.7–12.
2. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 312 с.
3. Spector S. On the absence of bifurcation for Elastic bars in uniaxial tension // Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1984. V.85. №2. P.171-199.

Сведения об авторах:
Карякин Михаил Игоревич – Директор Института математики, механики и компьютерных наук им. И.И.Воровича Южного федерального университета, (+7 863) 275-110
E-mail: karyakin@math.sfedu.ru
Обрезков Леонид Павлович – аспирант Института математики, механики и компьютерных наук им. И.И.Воровича Южного федерального университета, (+7 863) 275-111
E-mail: leonidobrezkov@bk.ru

О БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЯХ ИЗГИБА НЕОДНОРОДНОЙ ПАНЕЛИ

Карякин М.И., Пустовалова О.Г., Шубчинская Н.Ю.

В работе рассмотрены несколько постановок задач о чистом изгибе нелинейно-упругой панели прямоугольного поперечного сечения, неоднородной по толщине. Характер неоднородности соответствует жёсткому покрытию на внешней или внутренней стороне панели. Для описания механических свойств материалов при больших деформациях использованы общеупотребительные модели сжимаемых нелинейно-упругих сред. В двумерной постановке задача сведена к исследованию краевой задачи для ОДУ. Проведён анализ влияния неоднородности на диаграмму нагружения панели и устойчивость панели при изгибе.

Рассмотрим деформацию сплошной среды, описываемую полуобратным представлением

$$R = P(x),\ \Phi = By,\ Z = z. \tag{1}$$

Здесь x, y , z – декартовы координаты в отсчётной конфигурации упругого тела; R , Φ , Z – цилиндрические координаты в его деформированной (текущей) конфигурации, B – положительная постоянная.

Преобразование (1) описывает деформацию изгиба панели прямоугольного поперечного сечения шириной h и толщиной a торцевыми моментами. Функция $P(x)$ в (1) представляет собой радиус точки панели в деформированном состоянии, а параметр $B = \gamma/h$ пропорционален углу раствора сектора, в который превратится сечение панели после деформации (рис.1).

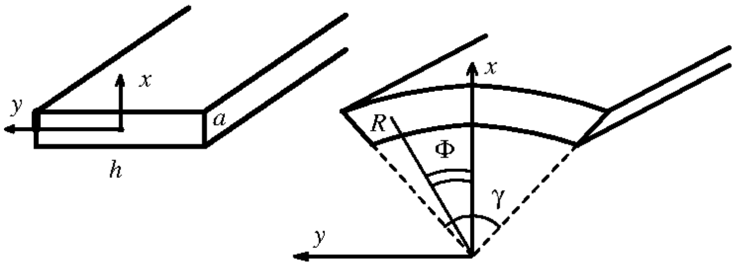


Рис.1. Изгиб панели в сектор цилиндра

Геометрические характеристики деформации: градиент деформации $\mathbf{C}$, мера деформации Коши-Грина $\mathbf{G}$ и её главные инварианты I_k, соответствующие преобразованию (1), определяются следующими выражениями:

$$\mathbf{C} = P'\mathbf{i}_x\mathbf{e}_R + BP\mathbf{i}_y\mathbf{e}_\Phi + \mathbf{i}_z\mathbf{e}_Z,\ \mathbf{G} = \mathbf{C}\cdot\mathbf{C}^{\mathrm{T}} = P'^2\mathbf{i}_x\mathbf{i}_x + B^2P^2\mathbf{i}_y\mathbf{i}_y + \mathbf{i}_z\mathbf{i}_z, \tag{2}$$

$$I_1 = \mathrm{tr}\mathbf{G} = P'^2 + B^2P^2 + 1,\ I_2 = \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}\mathbf{G}^2 + \mathrm{tr}^2\mathbf{G}\right) = P'^2B^2P^2P'^2 + B^2P^2,$$

$$I_3 = \det\mathbf{G} = B^2P'^2P^2.$$

В (2) $\{i_x, i_y, i_z\}$ и $\{e_R, e_\Phi, e_Z\}$ – ортонормированные базисы декартовых координат отсчётной конфигурации и цилиндрических координат текущей конфигурации соответственно; штрихом обозначено дифференцирование по переменной x.

Определяющее соотношение для изотропного сжимаемого упругого материала имеет вид:

$$\mathbf{D} = 2(dW/d\mathbf{G})\cdot\mathbf{C}, \tag{3}$$

где $\mathbf{D}$ – тензор напряжений Пиола, $W(I_1, I_2, I_3)$ – функция удельной потенциальной энергии деформации. Краевая задача изгиба панели, состоящая из уравнений равновесия и граничных условий, выражающих отсутствие напряжений на верхней и нижней гранях, имеет следующий вид:

$$\begin{cases}\mathrm{div}\,\mathbf{D} = 0,\\ \mathbf{i}_x\cdot\mathbf{D} = 0.\end{cases} \tag{4}$$

С учётом (1)–(3) после конкретизации модели материала, т.е. после выбора функции удельной потенциальной энергии W, система (4) сводится к нелинейной, вообще говоря, краевой задаче для дифференциального уравнения второго порядка для определения функции $P(x)$.

Основной характеристикой данной задачи является диаграмма изгиба – график зависимости изгибающего момента от угла изгиба панели γ или, что эквивалентно, параметра B. Изгибающий момент вычислялся по формуле

$$M = \int_{R_0}^{R_1} \sigma_{\Phi\Phi} P dR,$$

в которой $\sigma_{\Phi\Phi} = e_\Phi \cdot \mathbf{T} \cdot e_\Phi$ – диагональная компонента тензора напряжений Коши $\mathbf{T} = (\det \mathbf{C}) \mathbf{C}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{D}$; R_0, R_1 – внутренний и внешний радиусы деформированной панели.

Подробный анализ различных аспектов равновесия и устойчивости однородной нелинейно-упругой панели дан в работах [1,2]. Там, в частности, показано, что для большинства общеупотребительных моделей нелинейно-упругих материалов на диаграмме нагружения имеется точка максимума, что свидетельствует о возможной потери устойчивости при изгибе.

Следует отметить, что как процесс вывода обыкновенных дифференциальных уравнений на основе краевой задачи (4), так и их численный анализ является весьма трудоёмким, особенно для сложного многопараметрического выражения функции W. Быстрое и надёжное решение таких задач осуществлялось с использованием компьютерной системы автоматизации полуобратного метода нелинейной теории упругости, представленной в [3].

Цель настоящей работы состоит в исследовании влияния неоднородности свойств материала панели на её равновесие и устойчивость. Актуальность исследования связана, прежде всего, с тем, что деформация чистого изгиба является одной из базовых при экспериментальном определении и верификации параметров модели упругого, в частности, нелинейно-упругого, поведения материалов. В свою очередь, определение характеристик этих моделей представляется актуальным в связи с необходимостью разрабатывать адекватные модели механического поведения биоматериалов и их искусственных заменителей из высокоэластичных материалов. Другая причина, объясняющая интерес к классическим, на первый взгляд, задачам, связана с проблемой адекватного описания механических свойств композиционных материалов, представляющих собой матрицу с относительно жёсткими волокнами. В этом случае, например, при расчётах на прочность, необходимо учитывать возможность разрушения композита вследствие потери устойчивости, в том числе, и при изгибе, отдельными волокнами [4].

Для того, чтобы изложенная выше схема полуобратного метода осталась применимой без существенных изменений, ограничимся случаем, когда материал плиты неоднороден только по толщине, т.е. относительно координаты x, как показано на рис.2. В качестве упругого потенциала выберем упрощённую модель материала Блейтца и Ко [5]:

$$W = \frac{1}{2}\mu\left(I_2 / I_1 + 2 I_3^{\frac{1}{2}} - 5\right),$$

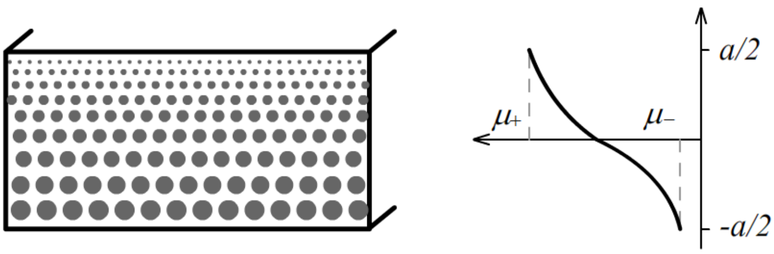


Рис.2. Неоднородность свойств по толщине панели

материальный параметр μ которой при малых деформациях соответствует модулю сдвига. Именно этот параметр задачи и описывает неоднородность, являясь функцией координаты по толщине панели $\mu = \mu(x)$.

В работе представлены результаты для двух типов неоднородности:

- линейная неоднородность $\mu(x)=\mu_0\left(\frac{\delta}{a}x+1+\frac{\delta}{2}\right)$,
- экспоненциальная неоднородность $\mu(x)=\mu_0\exp\left(\frac{\delta}{a}(x+a/2)\right)$,

так что в обоих случаях $\mu_-\equiv\mu(-a/2)=\mu_0$, а $\mu_+\equiv\mu_0\delta$ и $\mu_+\equiv\mu_0\exp(\delta)$ для линейной и экспоненциальной зависимости, соответственно. Вводя обозначение $f(x)=\mu(x)/\mu_0$, нелинейную краевую задачу (4) для определения функции $P(x)$ запишем в виде

$$P''(x)=-\frac{1}{3}\frac{BP(x)f'(x)P'(x)^4}{f(x)}+\frac{1}{3}\frac{f'(x)P'(x)}{f(x)}-\frac{1}{3}\frac{P'(x)^4}{B^2P(x)^3};\qquad(5)$$

$$P'(x)^3BP(x)-1=0,\ x=\pm a/2,$$

где штрихом обозначено дифференцирование по переменной x.

Некоторые результаты численного исследования краевой задачи представлены на рис. 3, демонстрирующем влияние неоднородности на упомянутую выше характеристику диаграммы нагружения – её точку максимума; безразмерный параметр b введён соотношением $b=Ba$.

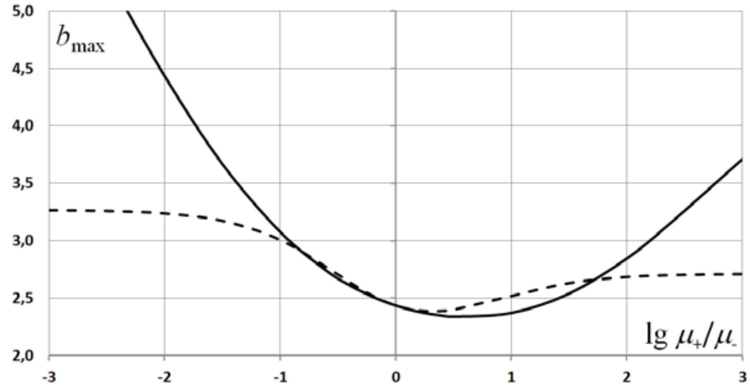


Рис.3. Точки максимума на диаграмме нагружения: пунктирная линия – линейная неодродность, сплошная линия – экспоненциальная неоднородность.

Исследование устойчивости неоднородной панели при изгибе проведено в рамках бифуркационного подхода на основе метода наложения малой деформации на конечную [4]. Для этого в полуобратное представление (1) добавлены возмущения, пропорциональные малому параметру ε:

$$R=P(x)+\varepsilon U(x,y),\ \Phi=B(y+\varepsilon V(x,y)),\ Z=z.\qquad(6)$$

По представлению (6) генерируется краевая задача (4), в которой удерживаются слагаемые только первого порядка по параметру ε. Наличие нетривиальных решений этой задачи, т.е. возмущений, существующих в окрестности основного решения, и считается критерием потери устойчивости. Математический процесс такого анализа изложен ниже.

На первом этапе исследования к линеаризованной краевой задаче применяется метод разделения переменных по схеме

$$U(x,y)=u(x)\cos(2\pi ny/l),\ V(x,y)=v(x)\sin(2\pi ny/l),$$

что позволяет автоматически удовлетворить граничным условиям на боковых гранях панели и свести систему уравнений в частных производных к краевой задаче для системы ОДУ, состоящей из однородных уравнений равновесия

$$\begin{aligned}u''&=D_{11}(x,\mathbf{p})u'+D_{12}(x,\mathbf{p})v'+D_{13}(x,\mathbf{p})u+D_{14}(x,\mathbf{p})v,\\ v''&=D_{21}(x,\mathbf{p})u'+D_{22}(x,\mathbf{p})v'+D_{23}(x,\mathbf{p})u+D_{24}(x,\mathbf{p})v\end{aligned},\qquad(7)$$

и краевых условий

$$u' = A_{11}(x,\mathbf{p})u + A_{12}(x,\mathbf{p})v,$$
$$v' = A_{21}(x,\mathbf{p})u + A_{22}(x,\mathbf{p})v \qquad (8)$$

в точках $x = -a/2$ и $x = a/2$. Через $\mathbf{p}$ обозначен набор параметров (номер моды, геометрические характеристики, угол изгиба).

Исследование существования нетривиальных решений задачи (7), (8) осуществляется по следующей схеме.

Рассмотрим последовательно две задачи Коши для системы (7). Решение первой из них обозначим через (u_1, v_1), начальные условия выберем в виде

$$u_1(-a/2) = 1,\ v_1(-a/2) = 0, \qquad (9)$$
$$u_1'(-a/2) = A_{11}(-a/2),\ v_1'(-a/2) = A_{21}(-a/2). \qquad (10)$$

Начальные условия для второй зададим следующим образом:

$$u_2(-a/2) = 0,\ \ v_2(-a/2) = 1, \qquad (11)$$
$$u_2'(-a/2) = A_{12}(-a/2),\ v_2'(-a/2) = A_{22}(-a/2). \qquad (12)$$

Легко видеть, что в силу (9), (11), эти решения будут линейно независимы, а в силу (10), (12) оба они будут удовлетворять краевому условию (8) в точке $x = -a/2$. Следовательно, общее решение системы (7), удовлетворяющее краевому условию (8) при $x = -a/2$, может быть записано в виде

$$u = C_m u_m,\ v = C_m v_m\ (m = 1{,}2), \qquad (13)$$

где C_m – произвольные постоянные. Удовлетворяя краевому условию (8) в точке $x = a/2$ с учётом представления (13), получаем линейную систему уравнений для определения констант C_m, которая имеет нетривиальные решения, если её определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{11}(\frac{a}{2})u_1(\frac{a}{2}) + A_{12}(\frac{a}{2})v_1(\frac{a}{2}) - u_1'(\frac{a}{2}) & A_{11}(\frac{a}{2})u_2(\frac{a}{2}) + A_{12}(\frac{a}{2})v_2(\frac{a}{2}) - u_2'(\frac{a}{2}) \\ A_{21}(\frac{a}{2})u_1(\frac{a}{2}) + A_{22}(\frac{a}{2})v_1(\frac{a}{2}) - v_1'(\frac{a}{2}) & A_{21}(\frac{a}{2})u_2(\frac{a}{2}) + A_{22}(\frac{a}{2})v_2(\frac{a}{2}) - v_2'(\frac{a}{2}) \end{vmatrix}$$

обращается в ноль. В силу изложенного, этот определитель является функцией вектора $\mathbf{p}$ параметров системы. Поиск точек бифуркации состоит теперь в поиске нулей этого определителя как функции параметра нагружения (изгибающего момента или угла изгиба) в зависимости от геометрических размеров и номера моды.

В качестве примера ниже приведены выражения для коэффициентов линеаризованной краевой задачи (7), (8) для случая линейной неоднородности с использованием безразмерных величин $\xi = x/a, \rho = P/a, L = h/a$, при этом, штрих обозначает дифференцирование по безразмерной координате ξ:

$$D_{11} = S_1 L^2 (8\rho'^3 \rho^5 b^3 \delta - 2\rho^4 b^2 \delta + 8\rho'^3 \rho\delta\xi + 4\rho'^3 \rho\delta - 8\rho'^3 \rho),$$
$$D_{12} = S_1 L (4\rho' \rho^4 \pi b^2 \delta n \xi + 2\rho'^3 \rho^2 \pi\delta n + 4\rho'^3 \rho^2 \pi n),$$
$$D_{13} = S\left(L^2 \rho'^4 \delta(2\rho^4 b^3 - 6\xi - 6) - 4\rho'^2 \rho^2 \pi^2 n^2 [(2\xi + 1)\delta - 2] - 3L^2 \rho'^4 \delta\right),$$
$$D_{14} = 4S_1 L(\rho'^4 \rho^5 v\pi b^3 \delta n - 2\rho'^4 \rho v\pi\delta n\xi - \rho'^4 \rho v\pi\delta n - \rho'^4 \rho v\pi n),$$
$$D_{21} = SL(\rho^5 \pi b^4 n(-6\delta\xi - \delta - 6) - \rho'^2 \rho^3 \pi b^2 n(6\xi\delta + 3\delta + 6))$$
$$D_{22} = S_2 L^2 (2\rho'^4 \rho^6 b^5 \delta - \rho' \rho^5 b^4 \delta + \rho'^4 \rho^2 b^2 (2\delta\xi + \delta + 1))$$
$$D_{23} = S_2 \pi L(-\rho'^5 \delta n(2\rho^4 b^3 + 2\xi + 1) - \rho'^3 \rho^2 b^2 \delta n(6\xi - 3\delta + 6) - $$
$$- 4\rho'^2 \rho^3 b^2 \delta n - 2\rho'^5 (\delta + 1)),$$
$$D_{24} = 18 S_2 \rho'^3 \rho^3 \pi^2 b^2 n(-2\delta - 1 - 32\rho'^3 \rho^3 \pi^2 b^2 n)$$
$$A_{11} = -\rho'^4 b/3,\ A_{12} = -2\rho'^4 \rho\pi b n/(3L),$$

$A_{21} = -2\pi n(b^3\rho^3\rho'^3 - b^2\rho^2 - \rho'^2)/(L\rho'\rho^2 b^2)$, $A_{22} = 0$,

где $S_1 = -\frac{1}{3}\frac{1}{L^2\rho^4 b^2(2\delta\xi + \delta + 2)}$, $S_2 = -\frac{2}{3L^2\rho'\rho^5 b^4(2\delta\xi + \delta + 2)}$.

Рис. 4 демонстрирует расположение критических точек, ближайших к точке максимума диаграммы нагружения. Видно, что для панели с более мягкой нижней гранью точки бифуркации появляются раньше точек максимума.

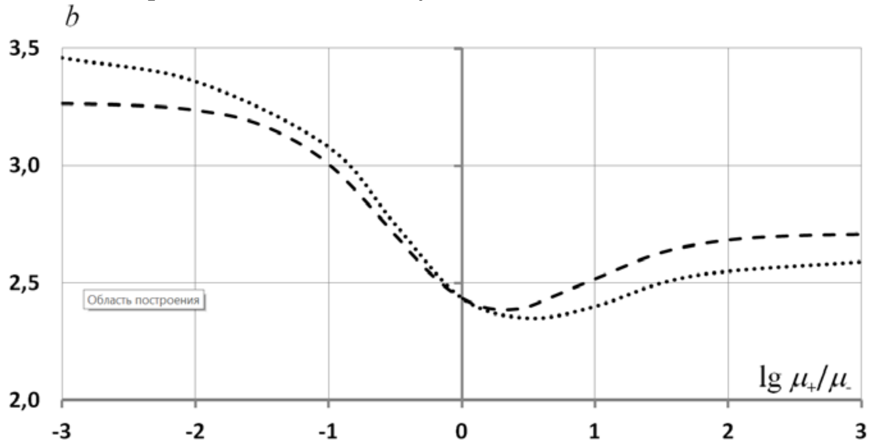


Рис.4. Критические углы изгиба (точечная кривая)
в сравнении с точками максимума диаграмм нагружения (пунктирная кривая)

Работа выполнена в рамках проекта «Моделирование деформирования функционально-градиентных композитов и многофазных сред» Программы фундаментальных исследований Президиума РАН по стратегическим направлениям развития науки на 2015 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карякин М.И., Сухов Д.Ю., Шубчинская Н.Ю. Об особенностях чистого изгиба упругой панели при больших деформациях // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2012. № 4. С.69–75.
2. Karyakin, M., Kalashnikov, V., Shubchinskaya, N. Nonlinear effects in a plane problem of the pure bending of an elastic rectangular panel // International Journal of Engineering Science. 2014. V. 80, pp. 90–105.
3. Gavrilyachenko T. M., Karyakin M. I., Sukhov D. Yu. Designing of the interface for nonlinear boundary value problem solver using Maple // Proceedings of the International Conference on Computational Sciences and its Applications. Los Alamitos-Washington-Tokyo: ICCSA, 2008. P. 284–291.
4. Levy A. J., Shukla A., Xie M. Bending and buckling of a class of nonlinear fiber composite rods // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2006. V.54. Pp.1064–1092.
5. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.

Сведения об авторах:

Карякин Михаил Игоревич – Директор Института математики, механики и компьютерных наук имени И.И.Воровича Южного федерального университета, старший научный сотрудник Южного математического института Владикавказского научного центра РАН (+7 8672)53-98-61
e-mail: karyakin@math.sfedu.ru
Пустовалова Ольга Геннадиевна – старший преподаватель Института математики, механики и компьютерных наук им.И.И.Воровича Южного федерального университета, (+7 863) 275-111,
e-mail: o.g.pustovalova@gmail.com
Шубчинская Наталья Юрьевна – ассистент Института математики, механики и компьютерных наук имени И.И.Воровича Южного федерального университета, (+7 863)275-111; **e-mail:** natalieshubchinskaya@gmail.com

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ УПРУГИХ КОНЕЧНЫХ НАКЛАДОК ПРИ НАЛИЧИИ СДВИГОВЫХ ПРОСЛОЕК

Керопян А.В.

В работе рассматривается задача для упругой полуплоскости, усиленной на конечных отрезках своей границы произвольным конечным числом конечными накладками с различными модулями упругости и малых постоянных толщин. Контактное взаимодействие между накладками и полуплоскостью во всех участках контакта осуществляются посредством сдвиговых прослоек (в виде слоёв клея) с другими физико-механическими и геометрическими характеристиками. В работе задача определения неизвестных контактных напряжений сведена к решению системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода с конечным числом неизвестными функциями определённых на различных конечных интервалах, которые в определённой области изменения характерного параметра задачи в банаховом пространстве B можно решать методом последовательных приближений. Далее рассмотрены некоторые возможные предельные случаи и выяснены поведения контактных напряжений во всех участках контакта.

Пусть упругая полуплоскость (плоская деформация, модуль упругости E или модуль сдвига G, коэффициент Пуассона ν) на конечных отрезках $\left[a_j,b_j\right]\left(b_j>a_j,\ j=\overline{1,n},\ b_j<a_{j+1},\ j=\overline{1,n-1}\right)$ своей границы $y=0$ (в плоскости xOy) усилена конечным числом конечными накладками малых толщин $h_j\ \left(h_j<<b_j-a_j;\ j=\overline{1,n}\right)$, модуль упругости которых при $x\in\left[a_j,b_j\right]\ \left(j=\overline{1,n}\right)$ равен $E_j\ \left(E_j>>E;\ j=\overline{1,n}\right)$, соответственно. Контактное взаимодействие между накладками и полуплоскостью во всех участках контакта осуществляется посредством сдвиговых прослоек (в виде слоёв клея) с физико-механическими и геометрическими характеристиками E_k, ν_k, h_k. Задача заключается в определении неизвестных контактных напряжений, когда на концевых точках накладок $x=b_j$ приложены горизонтальные силы $P_j\ \left(j=\overline{1,n}\right)$ соответственно, которые направлены вдоль оси Ox в одну сторону.

Для накладок принимается модель одномерного упругого континуума в сочетании с моделью контакта по линии, а для прослоек – условия чистого сдвига, благодаря чему под накладками действуют только касательные контактные напряжения [1-4].

Согласно вышесказанному и известным предположениям [1-4], запишем дифференциальные уравнения равновесия накладок, находящихся на отрезках $\left[a_j,b_j\right]\left(j=\overline{1,n}\right)$, в виде:

$$\frac{d^2u^{(j)}}{dx^2}=\frac{\tau_j\left(x\right)}{E_jh_j},\qquad a_j\le x\le b_j,\qquad j=\overline{1,n},\tag{1}$$

Здесь $u^{(j)}\left(x\right)\ \left(j=\overline{1,n}\right)$ – горизонтальные перемещения точек накладок на участках $\left[a_j,b_j\right]\ \left(j=\overline{1,n}\right)$, а $\tau_j\left(x\right)$ – касательные контактные напряжения, действующие под накладками на участках $\left[a_j,b_j\right]\ \left(j=\overline{1,n}\right)$, соответственно.

С другой стороны, согласно вышесказанному, запишем горизонтальные перемещения $u\left(x,0\right)$ граничных точек упругой полуплоскости в виде [3-4]:

$$u\left(x,0\right)=\frac{1}{\pi A}\sum_{i=1}^{n}\int_{a_i}^{b_i}\left(\ln\frac{1}{\left|x-s\right|}+C\right)\tau_i\left(s\right)ds,\tag{2}$$

где $A=E/2\left(1-\nu^2\right)=2G\left(1-\chi^2\right)$, $\chi^2=\left(1-2\nu\right)/2\left(1-\nu\right)$, C – произвольная постоянная.

Теперь полагая, что каждый дифференциальный элемент прослойки (слоя клея) находится в условии чистого сдвига [1-4], будем иметь следующие контактные условия:

$$u^{(j)}\left(x\right)-u\left(x,0\right)=k\tau_j\left(x\right),\qquad a_j\le x\le b_j,\qquad j=\overline{1,n},\tag{3}$$

где $k = h_k / G_k$, $G_k = E_k / 2(1+\nu_k)$, $G_k -$ модуль сдвига материала клея.

Далее, в силу (3), уравнения (1) можно представить в виде:

$$\frac{d^2u^{(j)}}{dx^2} - \gamma_j^2 u^{(j)}(x) = -\gamma_j^2 u(x,0), \quad a_j \le x \le b_j, \quad j = \overline{1,n}, \tag{4}$$

где имеют место также и граничные условия:

$$\left.\frac{du^{(j)}}{dx}\right|_{x=a_j} = 0, \quad \left.\frac{du^{(j)}}{dx}\right|_{x=b_j} = \frac{P_j}{E_j h_j}, \quad j = \overline{1,n} . \tag{5}$$

Здесь $\gamma_j^2 = 1 / kE_j h_j$, $j = \overline{1,n}$.

Решения граничных задач (4), (5) получим в виде:

$$u^{(j)}(x) = u_0^{(j)}(x) + \gamma_j^2 \int_{a_j}^{b_j} G_j(x,s) u(s,0) ds, \quad a_j \le x \le b_j, \quad j = \overline{1,n}, \tag{6}$$

где $u_0^{(j)}(x)$ $\left(j = \overline{1,n}\right) -$ общее решение соответствующих (4) однородных уравнений при соответствующих граничных условиях (5) и имеют вид:

$$u_0^{(j)}(x) = \frac{P_j \operatorname{ch}\left[\gamma_j(x-a_j)\right]}{\gamma_j E_j h_j \operatorname{sh}\left[\gamma_j(b_j-a_j)\right]}, \quad j = \overline{1,n},$$

а $u_*^{(j)}(x) = \gamma_j^2 \int_{a_j}^{b_j} G_j(x,s) u(s,0) ds$, $j = \overline{1,n}$, где $G_j(x,s) -$ функции Грина [5] являются частными решениями уравнения (4) при нулевых граничных условиях:

$\left(du^{(j)} / dx\right)_{x=a_j} = 0$, $\left(du^{(j)} / dx\right)_{x=b_j} = 0$ $\left(j = \overline{1,n}\right)$, причем

$$G_j(x,s) = \frac{1}{\gamma_j \operatorname{sh}\left[\gamma_j(b_j-a_j)\right]} \begin{cases} \operatorname{ch}\gamma_j(x-b_j)\operatorname{ch}\gamma_j(s-a_j), & x > s, \\ \operatorname{ch}\gamma_j(x-a_j)\operatorname{ch}\gamma_j(s-b_j), & x < s, \quad j = \overline{1,n}. \end{cases}$$

Очевидно, что $G_j(x,s) -$ непрерывные функции и $G_j(x,s) = G_j(s,x)$ $\left(j = \overline{1,n}\right)$.

Далее, в силу (6) и согласно условиям (3) получим следующие уравнения:

$$k\tau_j(x) + u(x,0) = \gamma_j^2 \int_{a_j}^{b_j} G_j(x,s) u(s,0) ds + u_0^{(j)}(x), \quad a_j \le x \le b_j, \quad j = \overline{1,n} . \tag{7}$$

В дальнейшем, отметим, что спектром симметричного дифференциального оператора $D = -d^2 / dx^2 + \gamma^2 I$, областью определения которого являются дважды непрерывно дифференцируемые функции $u(x)$, удовлетворяющие условиям $\left(du / dx\right)_{x=a} = 0$, $\left(du / dx\right)_{x=b} = 0$, являются собственные значения $\lambda_n = \gamma^2 + n^2\pi^2 / (b-a)^2$ $(n = 0,1,2,...)$, а соответствующими собственными функциями являются функции $\cos\left[n\pi(x-a)/(b-a)\right]$ $(n = 0,1,2,...)$.

Далее известно [5], что симметричный вполне непрерывный оператор B :

$$B\varphi = \int_a^b G(x,s)\varphi(s) ds ,$$

действующий в $L_2(a,b)$, является обратным оператором оператора D.

Следовательно, будем иметь :

$$\int_{a_j}^{b_j} G_j(x,s)\cos\left[\frac{n\pi(s-a_j)}{b_j-a_j}\right]ds = \frac{(b_j-a_j)^2}{(b_j-a_j)^2\gamma_j^2+n^2\pi^2}\cos\left[\frac{n\pi(x-a_j)}{b_j-a_j}\right],\ n=0,1,2,...,\ j=\overline{1,n}, \tag{8}$$

где функции $\cos\left[n\pi(x-a_j)/(b_j-a_j)\right]$ $(n=0,1,2,...)$ $\left(j=\overline{1,n}\right)$ образуют полную ортогональную систему в пространствах $L_2(a_j,b_j)$ $\left(j=\overline{1,n}\right)$, соответственно.

Теперь, в силу (2) из (7) будем иметь:

$$\begin{gathered}\tau_j(x)+\frac{1}{\pi kA}\sum_{i=1}^{n}\int_{a_i}^{b_i}\left(\ln\frac{1}{|x-s|}+C\right)\tau_i(s)\,ds= \\ =\frac{\gamma_j^2}{\pi kA}\sum_{i=1}^{n}\int_{a_j}^{b_j}G_j(x,s)\left[\int_{a_i}^{b_i}\left(\ln\frac{1}{|s-t|}+C\right)\tau_i(t)\,dt\right]ds+\frac{u_0^{(j)}(x)}{k},\quad a_j\le x\le b_j,\ j=\overline{1,n}.\end{gathered} \tag{9}$$

Далее, после замены переменных x на ax, s на as, t на at, где $a>0$ – координата одной из концевых точек накладок, из системы (9) получим:

$$\begin{gathered}\varphi_j(x)+\frac{\delta^2}{\pi}\sum_{i=1}^{n}\int_{\alpha_i}^{\beta_i}\ln\frac{1}{|x-t|}\varphi_i(t)\,dt-\frac{a\gamma_1^2\delta^2}{\pi}\sum_{i=1}^{n}\int_{\alpha_j}^{\beta_j}G_j(ax,as)\int_{\alpha_i}^{\beta_i}\ln\frac{1}{|s-t|}\varphi_i(t)\,dt\,ds-\frac{u_0^{(j)}(ax)}{k}=0, \\ \alpha_j\le x\le\beta_j,\quad j=\overline{1,n},\end{gathered} \tag{10}$$

Поскольку, согласно (8), имеют место равенства:

$$\int_{\alpha_j}^{\beta_j}G_j(ax,as)\,ds=\frac{1}{a\gamma_j^2},\quad j=\overline{1,n}. \tag{11}$$

Здесь

$$\delta^2=a/kA,\ \alpha_j=a_j/a,\ \beta_j=b_j/a,\ \varphi_j(x)=\tau_j(ax)\quad \left(j=\overline{1,n}\right).$$

Систему интегральных уравнений (10) можно представить и так:

$$\varphi_j(x)+\delta^2\sum_{i=1}^{n}\int_{\alpha_i}^{\beta_i}M_j(x,t)\varphi_i(t)\,dt=g_0^{(j)}(x),\quad \alpha_j\le x\le\beta_j,\ j=\overline{1,n}. \tag{12}$$

где

$$\begin{gathered}M_j(x,t)=\frac{1}{\pi}\left(\ln\frac{1}{|x-t|}-a\gamma_j^2\int_{\alpha_j}^{\beta_j}G_j(ax,as)\ln\frac{1}{|s-t|}ds\right),\quad j=\overline{1,n}, \\ g_0^{(j)}(x)=\frac{u_0^{(j)}(ax)}{k}=\frac{P_jG_k\,\mathrm{ch}\left[a\gamma_j(x-\alpha_j)\right]}{\gamma_jE_jh_jh_k\,\mathrm{sh}\left[a\gamma_j(\beta_j-\alpha_j)\right]},\quad j=\overline{1,n}.\end{gathered} \tag{13}$$

Отметим, что при получении системы (12) был изменён порядок интегрирования, достоверность которого следует из теоремы Фубини [5]. В дальнейшем часто будем пользоваться теоремой Фубини, особо не отмечая.

Отметим также, что при выводе системы (12) нигде не пользовались условиями равновесия накладок:

$$\int_{\alpha_j}^{\beta_j}\tau_j(ax)\,dx=P_j/a\quad \left(j=\overline{1,n}\right). \tag{14}$$

В системе интегральных уравнений (12), условия (14) выполняются автоматически, поскольку имеют место равенства:

$$\int_{\alpha_j}^{\beta_j} g_0^{(j)}(x)\,dx = P_j / a \quad \left(j=\overline{1,n}\right).$$

Далее рассматриваются некоторые возможные предельные случаи, которые непосредственно можно получить из системы (12).

Таким образом, решение задачи сведено к решению системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода (12), ядра которых квадратично интегрируемы по двум переменным и с правыми частями которых являются решения задачи в случае жёсткого основания. Из системы (12) легко заметить, что в концевых точках накладок $x=\alpha_j$, $x=\beta_j$ $\left(j=\overline{1,n}\right)$, неизвестные контактные напряжения $\varphi_j(x)$ $\left(j=\overline{1,n}\right)$ принимают конечные значения.

Далее, систему (12) запишем в виде:

$$\psi + S\,\psi = f_0, \tag{15}$$

где

$$\psi=\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \vdots\\ \varphi_n\end{pmatrix},\quad f_0=\begin{pmatrix}g_0^{(1)}\\ g_0^{(2)}\\ \vdots\\ g_0^{(n)}\end{pmatrix},\quad S=\begin{pmatrix}\delta^2k_{11} & \delta^2k_{12} & \dots & \delta^2k_{1n}\\ \delta^2k_{21} & \delta^2k_{22} & \dots & \delta^2k_{2n}\\ \vdots & & & \\ \delta^2k_{n1} & \delta^2k_{n2} & \dots & \delta^2k_{nn}\end{pmatrix}$$

$$\begin{gathered}
k_{11}\varphi_1=\int_{\alpha_1}^{\beta_1} M_1(x,t)\varphi_1(t)\,dt,\dots,\quad k_{1n}\varphi_n=\int_{\alpha_n}^{\beta_n} M_1(x,t)\varphi_n(t)\,dt,\\
k_{21}\varphi_1=\int_{\alpha_1}^{\beta_1} M_2(x,t)\varphi_1(t)\,dt,\dots,\quad k_{2n}\varphi_n=\int_{\alpha_n}^{\beta_n} M_2(x,t)\varphi_n(t)\,dt,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
k_{n1}\varphi_1=\int_{\alpha_1}^{\beta_1} M_n(x,t)\varphi_1(t)\,dt,\dots,\quad k_{nn}\varphi_n=\int_{\alpha_n}^{\beta_n} M_n(x,t)\varphi_n(t)\,dt.
\end{gathered} \tag{16}$$

Теперь рассмотрим операторное уравнение (15) в банаховом пространстве B вектор-функции $X=\begin{pmatrix}X_1\\ X_2\\ \vdots\\ X_n\end{pmatrix}$, где $X_1\in L_2(\alpha_1,\beta_1),\ X_2\in L_2(\alpha_2,\beta_2),\dots,X_n\in L_2(\alpha_n,\beta_n)$ с нормой

$\|X\|=\max\left\{\|X_1\|_{L_2(\alpha_1,\beta_1)},\|X_2\|_{L_2(\alpha_2,\beta_2)},\dots,\|X_n\|_{L_2(\alpha_n,\beta_n)}\right\}$. L_2 – пространство квадратично суммируемых функций.

Здесь операторы $k_{ji}\left(j,i=\overline{1,n}\right)$ действуют следующим образом k_{ji}: $L_2(\alpha_i,\beta_i)\to L_2(\alpha_j,\beta_j)$ $\left(j,i=\overline{1,n}\right)$, причём, при $j=i=\overline{1,n}$ они действуют в пространствах $L_2(\alpha_1,\beta_1),\dots,L_2(\alpha_n,\beta_n)$, соответственно.

Очевидно, что оператор S действует в пространстве B и является фредгольмовым. Тогда операторное уравнение (15) в пространстве B можно решать методом последовательных приближений, если $\|S\|<1$, причём

$$\|S\|=\max\left\{\delta^2\left(\|k_{11}\|+\dots+\|k_{1n}\|\right),\ \delta^2\left(\|k_{21}\|+\dots+\|k_{2n}\|\right),\dots,\delta^2\left(\|k_{n1}\|+\dots+\|k_{nn}\|\right)\right\}.$$

Следовательно, условие $\|S\|<1$ будет выполняться, если

$$\delta^2\left(\|k_{11}\|+...+\|k_{1n}\|\right)<1,\ \delta^2\left(\|k_{21}\|+...+\|k_{2n}\|\right)<1,...,\delta^2\left(\|k_{n1}\|+...+\|k_{nn}\|\right)<1. \qquad (17)$$

Тогда решение уравнения (15) запишется в виде:

$$\psi=\left(\mathrm{I}+S\right)^{-1} f_0=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n S^n f_0.$$

Теперь находим значения параметра δ^2, при которых будут удовлетворяться условия (17). Не останавливаясь на подробностях, отметим, что в силу неравенства Коши-Буняковского после оценки норм операторов (16), далее с помощью равенства Парсеваля и соотношения (8), можно получить следующие оценки:

$$\|k_{ji}\|\le c_{ji},\ c_{ji}<\frac{l_j}{2}\left(\int_{\alpha_i}^{\beta_i}\int_{\alpha_j}^{\beta_j}\ln^2|x-t|\,dx\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\quad \left(j,i=\overline{1,n}\right),\quad l_j=\beta_j-\alpha_j,$$

$$\|k_{jj}\|\le c_{jj},\ c_{jj}<\frac{l_j}{2}\left(\int_{\alpha_j}^{\beta_j}\int_{\alpha_j}^{\beta_j}\ln^2|x-t|\,dx\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\quad \left(i=j=\overline{1,n}\right). \qquad (18)$$

Тогда условия (17) будут выполняться, если

$$\delta^2<\left(\sum_{i=1}^{n}c_{1i}\right)^{-1}=c_1,\quad \delta^2<\left(\sum_{i=1}^{n}c_{2i}\right)^{-1}=c_2,\quad ...,\quad \delta^2<\left(\sum_{i=1}^{n}c_{ni}\right)^{-1}=c_n. \qquad (19)$$

Следовательно, условия выполнения (17) получим в виде: $\delta^2<\min\left(c_1,c_2,...,c_n\right)$, где $c_\kappa\left(\kappa=\overline{1,n}\right)-$ положительные числа, меньше единицы.Далее, значения контактных напряжений $\varphi_j(x)$ $\left(j=\overline{1,n}\right)$ в концевых точках накладок $x=\alpha_j$, $x=\beta_j$ $\left(j=\overline{1,n}\right)$ получим из (12) подстановками в них $x=\alpha_j$, $x=\beta_j$ $\left(j=\overline{1,n}\right)$, соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lubkin J.L. and Lewis L.C. Adhesive shear flow for an axially loaded, finite stringer bounded to an infinite sheet. //Quart J. of Mech. And Applied Math. Vol. XXIII. 1970. P.521.
2. Григорян Э.Х. О решении задачи для упругой бесконечной пластины на поверхности которой приклеен стрингер конечной длины. //Изв. НАН Армении. Механика. 2000. Т.53. №4. С.11-16.
3. Григорян Э.Х., Керопян А.В., Шагинян С.С. Контактная задача для бесконечной пластины с двумя конечными стрингерами, один из которых склеен с ней, а другой находится в идеальном контакте. //Изв. НАН Армении. Механика. 2002. Т.55. №2. С.14-23.
4. Kerobyan A.V. About Contact Problems for an Elastic Half -Plane and the Infinite Plate with Two Finite Elastic Overlays In the Presence of Shear Interlayers. Proceedings of the Yerevan State University. Physical and Mathematical Sciences №2, 2015, p. 30-38.
5. Шилов Г.Е. Математический анализ. Специальный курс. М.: Физматлит., 1961. 442с.

<u>Сведения об авторе</u>:

Керопян Агаси Вачаганович – к.ф.м.н., доцент кафедры механики ЕГУ.
Тел.: 060 710 366 (раб.), 010 461 941 (дом). **E-mail:** agas50@ysu.am

О НАРАЩИВАНИИ УПРУГОГО ПОЛУШАРА, ЛЕЖАЩЕГО НА ГЛАДКОМ ЖЁСТКОМ ОСНОВАНИИ, ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Койфман К.Г., Манжиров А.В.

Решена модельная задача о наращивании упругого полушара, лежащего на гладком жёстком основании, под действием силы тяжести. Построено аналитическое решение задачи и приведены графики основных характеристик напряжённого состояния.

В природе и технике встречаются процессы, сопровождающиеся увеличением размеров и изменением формы твёрдых тел за счёт притока к ним дополнительного материала, например, возведение насыпей, которое можно представить как рост полушара. Полушар $\mathcal{H}_R$ (центр в точке $\mathfrak{o}\in\mathcal{E}$, радиус R) – множество точек $\mathfrak{p}\in\mathcal{E}$ физического пространства $\mathcal{E}$ (трёхмерное евклидово точечное пространство, с введённой в нём декартовой координатной системой, определённой ортонормированным репером $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ и началом в точке $\mathfrak{o}$):

$$\mathcal{H}_R = \{\mathfrak{p}\in\mathcal{E} \mid \mathfrak{p} = \mathfrak{o} + \mathbf{x}, \|\mathbf{x}\| < R, \mathbf{x}\cdot\mathbf{k} > 0\},$$

где $\mathbf{x}$ – вектор места точки $\mathfrak{p}\in\mathcal{E}$, $\|\cdot\|$ – норма.

Далее $\hat{\mathbf{I}}$ – единичный тензор, $\hat{\mathbf{O}}$ – нулевой тензор, $\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}$ – диада векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$. Основные определения тензорных операций считаются известными, их можно найти, например, в [1].

Рассматриваем плоскость, ортогональную вектору $\mathbf{k}$ и содержащую точку $\mathfrak{o}$ (рис.1), в пространстве определено поле $\mathbf{g}$ плотности массовых сил, а именно, сил тяжести. Здесь $\mathbf{g}$ – ускорение свободного падения (постоянная величина), направленное перпендикулярно к рассматриваемой плоскости.

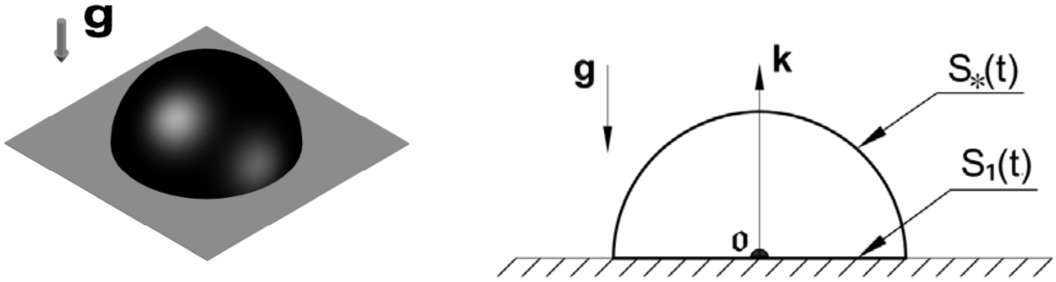


Рис.1. Формируемый полушар $\mathcal{H}_{R(t)}$ с границей $\partial\mathcal{H}_{R(t)} = S_*(t)\cup S_1(t)$

Процесс наращивания описывается следующим образом. С момента времени $t = 0$ к точке $\mathfrak{o}$ присоединяются частицы, формирующие вокруг неё твёрдый деформируемый полушар, занимающий область $\mathcal{H}_{R(t)}$ с границей $\partial\mathcal{H}_{R(t)} = S_*(t)\cup S_1(t)$ и увеличивающийся со временем в размерах (рис.1). Присоединяемые частицы свободны от напряжений и скорость их присоединения к телу нулевая. Процесс наращивания является непрерывным, граница роста [2, 3] – полусфера $S_*(t)$ с заданным законом изменения радиуса $R = R(t)$, который подчиняется следующим условиям: $R\in C^{(1)}[0,\ t_1]$, функция $R(t)$ возрастает по времени t. Поверхность $S_1(t)$ является границей между наращиваемым телом и плоскостью.

Принимаются следующие допущения:

1. Градиенты перемещения и скорости малы по норме, то есть, $\|\nabla\mathbf{u}\|\ll 1$, $\|\nabla\mathbf{v}\|\ll 1$.
2. Процесс квазистатический ($\hat{\mathbf{T}}$ – тензор напряжений):
   $\nabla\cdot\hat{\mathbf{T}}(\mathfrak{p}, t) + \rho\mathbf{g} = \mathbf{0}, \quad \mathfrak{p}\in\mathcal{H}_{R(t)}, t > 0.$
3. Материал полушара упругий, изотропный и однородный: $\mu = \mathrm{const}$ (модуль сдвига), $\nu = \mathrm{const}$ (коэффициент Пуассона), $\rho = \mathrm{const}$ (плотность тела).
4. В качестве уравнения состояния растущего тела принимается соотношение (закон Гука в скоростях, связывающий скорости напряжений и деформации) [3]

$$\hat{\mathbf{S}} = 2\hat{\mathbf{D}} + \frac{\nu}{1-2\nu}(\mathrm{tr}\hat{\mathbf{D}})\hat{\mathbf{I}}, \qquad \text{где} \qquad \hat{\mathbf{S}} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial\hat{\mathbf{T}}}{\partial t}, \quad \hat{\mathbf{D}} = [\nabla\mathbf{v}]^{\mathrm{sym}} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v}^{\mathrm{T}} + \nabla\mathbf{v}).$$

5. Процесс наращивания непрерывный при $t \in [0,\ t_1],\ t_1 > 0$.
6. Начальные напряжения в присоединяемых слоях отсутствуют:

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathfrak{p},\ t) = \hat{\mathbf{O}},\ \ \mathfrak{p} \in S_*(t),\ \ t \in [0,\ t_1].$$

7. Частицы растущего тела на границе S_1 образуют гладкий жёсткий контакт с рассматриваемой плоскостью:

$$(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\big|_{S_1} = 0, \quad (\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{T}}\cdot(\hat{\mathbf{I}} - \mathbf{n}\otimes\mathbf{n}))\Big|_{S_1} = \mathbf{0},$$

где $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к S_1.

Интересует напряжённое состояние растущего полушара.

Используется сферическая система координат $(\mathrm{r}, \theta, \varphi)$, связанная с декартовой соотношением ($r = \|\mathbf{x}\| \in [0, +\infty), \quad \theta \in [0, \pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi)$)

$$\mathbf{x} = r\left(\mathbf{i}\sin\theta\cos\varphi + \mathbf{j}\sin\theta\sin\varphi + \mathbf{k}\cos\theta\right).$$

Через $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi\}$ обозначается физический базис сферической системы координат [1].

Использование вышевведённых допущений и приёмов, описанных в [2-13], приводит к следующей внутренней краевой задаче в скоростях (время t – параметр):

$$\frac{1}{1-2\nu}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{v}) + \nabla^2\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad \mathfrak{p} \in \mathcal{H}_{R(t)},$$

$$\hat{\mathbf{S}} = 2[\nabla\mathbf{v}]^{\mathrm{sym}} + \frac{\nu}{1-2\nu}(\nabla\cdot\mathbf{v})\hat{\mathbf{I}}, \tag{1}$$

$$(\mathbf{e}_r\cdot\hat{\mathbf{S}})\big|_{S_*(t)} = \rho\frac{R_t'(t)}{\mu}\mathbf{g},$$

$$(\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_\theta)\big|_{S_1(t)} = 0, \quad (\mathbf{e}_\theta\cdot\hat{\mathbf{S}}\cdot(\hat{\mathbf{I}} - \mathbf{e}_\theta\otimes\mathbf{e}_\theta))\big|_{S_1(t)} = \mathbf{0}.$$

Для решения задачи (1) использовался следующий приём. Рассматриваемая задача, при фиксированном значении t, сведена к эквивалентной задаче для шара $\mathcal{B}_{R(t)}$ с центром в точке $\mathfrak{o}$ радиуса $R(t)$ и с параметрами ρ, ν, как у полушара $\mathcal{H}_{R(t)}$. Для построения граничных условий, симметричных относительно плоскости $\mathbf{x}\cdot\mathbf{k} = 0$, введена функция

$$\tilde{N}(\theta, t) = \rho\frac{R_t'(t)}{\mu}g\,\mathrm{sgn}(\tfrac{\pi}{2} - \theta),$$

где $\mathrm{g} = \|\mathbf{g}\|$, а $\mathrm{sgn}(z)$ – функция знака числа z.

Внутренняя краевая задача для шара, эквивалентная (1), имеет вид:

$$\frac{1}{1-2\nu}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{v}) + \nabla^2\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad \mathfrak{p} \in \mathcal{B}_{R(t)},$$

$$\hat{\mathbf{S}} = 2[\nabla\mathbf{v}]^{\mathrm{sym}} + \frac{\nu}{1-2\nu}(\nabla\cdot\mathbf{v})\hat{\mathbf{I}}, \tag{2}$$

$$(\mathbf{e}_r\cdot\hat{\mathbf{S}})\big|_{\partial\mathcal{B}_{R(t)}} = -\tilde{N}(\theta, t)(\cos\theta\mathbf{e}_r - \sin\theta\mathbf{e}_\theta).$$

Задача (2) решалась методом, изложенным в [14] (задача о шаре является классической задачей линейной теории упругости). Таким образом, находим вектор $\mathbf{v}$ и тензор $\hat{\mathbf{S}}$. Далее интересует только тензор $\hat{\mathbf{S}}$, его ненулевые компоненты тензора $\hat{\mathbf{S}}$ в физическом базисе $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi\}$ имеют вид:

$$s_{rr}=-\frac{N(t)}{2}+N(t)\sum_{k=1}^{\infty}M_k\left[\frac{R^{-2k}(4k^2-1)(2k^2-k-1-\nu)}{1+2k+4k^2+\nu(1+4k)}r^{2k}+\right.$$
$$\left.+\frac{R^{2-2k}k(1+10k+4k^2-8k^3+4\nu(1+k))}{1+2k+4k^2+\nu(1+4k)}r^{2k-2}\right]\mathcal{P}_{2k}(\cos\theta),$$
$$s_{r\theta}=\frac{N(t)}{2}\sum_{k=1}^{\infty}M_k\left[\frac{R^{-2k}(2k-1)(4k^2+4k-1)+2\nu)}{1+2k+4k^2+\nu(1+4k)}r^{2k}+\right.$$
$$\left.+\frac{R^{2-2k}(1+10k+4k^2-8k^3+4\nu(1+k))}{1+2k+4k^2+\nu(1+4k)}r^{2k-2}\right]\frac{d\mathcal{P}_{2k}(\cos\theta)}{d\theta},$$
$$s_{\theta\theta}=-\frac{N(t)}{2}-N(t)\sum_{k=1}^{\infty}M_k\left[\frac{R^{-2k}(4k^2-1)(2k^2+4k+1+\nu)}{1+2k+4k^2+\nu(1+4k)}r^{2k}+\right.$$
$$\left.+2\frac{R^{2-2k}k^2(1+10k+4k^2-8k^3+4\nu(1+k))}{(2k-1)(1+2k+4k^2+\nu(1+4k))}r^{2k-2}\right]\mathcal{P}_{2k}(\cos\theta)-$$
$$-\frac{N(t)}{2}\sum_{k=1}^{\infty}M_k\left[\frac{R^{-2k}(2k-1)(2k+5-4\nu)}{1+2k+4k^2+\nu(1+4k)}r^{2k}+\right. \tag{3}$$
$$\left.+\frac{R^{2-2k}(1+10k+4k^2-8k^3+4\nu(1+k))}{(2k-1)(1+2k+4k^2+\nu(1+4k))}r^{2k-2}\right]\frac{\mathrm{d}\mathcal{P}_{2k}(\cos\theta)}{d\theta}\operatorname{ctg}\theta,$$

где $M_k=(-1)^k\,\dfrac{(4k+1)(2k-2)!}{4^k(k+1)!(k-1)!}$, $k\in\mathbb{N}$, $N(t)=\rho\dfrac{R_t'(t)}{\mu}g$, $\mathcal{P}_n(z)$ – полином Лежандра порядка n.

При $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$ выражения (3) являются решением задачи (1). Заметим, что согласно выражениям (3), тензор $\hat{\mathbf{S}}$ имеет вид:

$$\hat{\mathbf{S}}(r,\theta,t)=\frac{\rho R_t'(t)g}{\mu}\hat{\mathbf{L}}(r,\theta,R(t);\nu),\quad r\leqslant R(t),\ \theta\in[0,\tfrac{\pi}{2}],\ t\in(0,t_1].$$

Из связи тензоров $\hat{\mathbf{S}}$ и $\hat{\mathbf{T}}$, а именно, $\hat{\mathbf{S}}=\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial\hat{\mathbf{T}}}{\partial t}$, теоремы о замене переменной в определённом интеграле (см. также [2-13]), получаем формулу для определения тензора напряжений $\hat{\mathbf{T}}$:

$$\hat{\mathbf{T}}(r,\theta,t)=\rho g\int_r^{R(t)}\hat{\mathbf{L}}(r,\theta,\xi;\nu)d\xi,\quad r\leqslant R(t),\ \theta\in[0,\tfrac{\pi}{2}]. \tag{4}$$

Из равенства (4) следует, что напряжённое состояние линейно-упругого полушара, наращиваемого в поле сил тяжести, не зависит явно ни от времени, ни от закона увеличения радиуса. Оно определяется лишь текущим размером полушара и параметрами ν, ρ, $\mathbf{g}$.

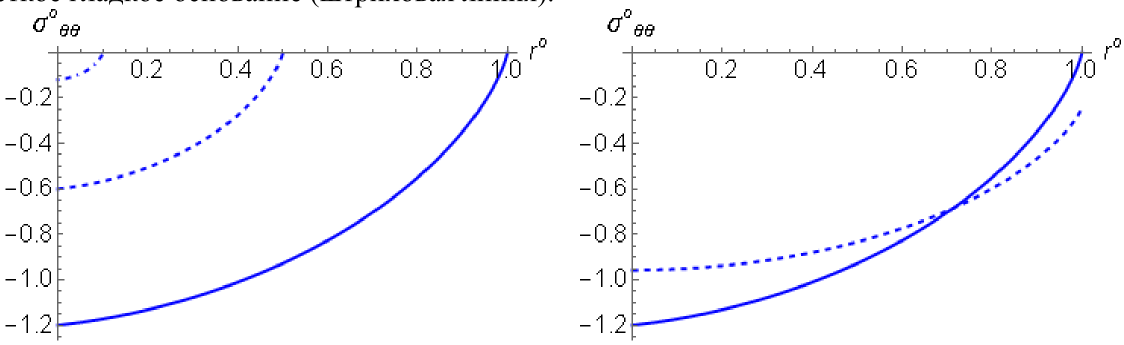
Подставляя равенства (3) в (4), выполняя непосредственное интегрирование, можно получить выражения для компонент тензора напряжений $\hat{\mathbf{T}}$. В настоящей работе в силу их громоздкости они не приводятся.

Для проведения численных расчётов использованы следующие безразмерные комбинации (в расчётах $\nu=0.35$):

$$\hat{\mathbf{T}}^{\circ}=\frac{1}{\rho g R(t_1)}\hat{\mathbf{T}},\qquad r^{\circ}=\frac{r}{R(t_1)},\qquad R^{\circ}(t)=\frac{R(t)}{R(t_1)}.$$

На рис. 2a показаны распределения компоненты $\overset{\circ}{\sigma}_{\theta\theta}$ тензора $\overset{\circ}{\hat{\mathbf{T}}}$ по радиусу полушара $\overset{\circ}{r}$ при значении $\theta = \frac{\pi}{2}$. Штрихпунктирная линия соответствует $\overset{\circ}{R} = 0.1$, штриховая линия соответствует $\overset{\circ}{R} = 0.5$, а сплошная – $\overset{\circ}{R} = 1$.

На рис. 2b показаны распределения компоненты $\overset{\circ}{\sigma}_{\theta\theta}$ по радиусу $\overset{\circ}{r}$ при $\overset{\circ}{R} = 1$, соответствующие решению рассматриваемой задачи (сплошная линия) и решению задачи о деформировании мгновенно сформированного весомого упругого полушара, опирающегося на жёсткое гладкое основание (штриховая линия).



(a) (b)

Рис. 2

На рис. 3 приведены распределения интенсивностей $\tau = \sqrt{-I_2(\mathrm{Dev}(\overset{\circ}{\hat{\mathbf{T}}}))}$ [1] тензора напряжений по радиусу $\overset{\circ}{r}$ полушара при значениях $\theta = \frac{\pi}{2}$ и $\overset{\circ}{R} = 1$. Сплошная линия соответствует рассматриваемой задаче, а штриховая – задаче о деформировании весомого упругого полушара, опирающегося на жёсткое гладкое основание.

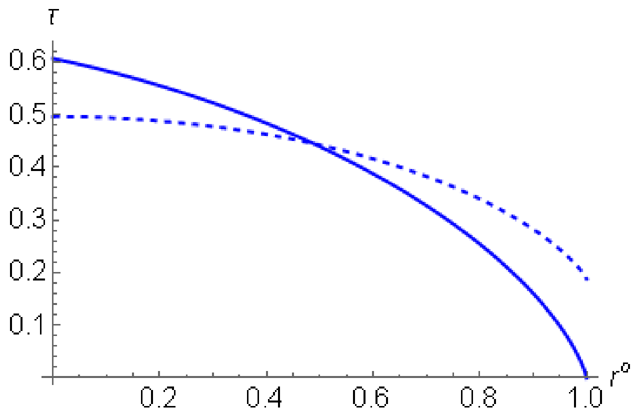


Рис. 3

Результатом проведённых исследований является обнаружение качественных различий между напряжёнными состояниями – результатами двух процессов: рассмотренного выше процесса роста полушара и процесса деформирования мгновенно сформированного весомого упругого полушара. В частности, рис. 2, 3 демонстрируют различия в значениях в центре и на сферической границе полушара компонент $\overset{\circ}{\sigma}_{\theta\theta}$ и интенсивностей τ, построенных для каждого из рассмотренных процессов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 14-19-01280).

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
2. Манжиров А.В., Черныш В.А. Задача об усилении заглубленной арочной конструкции методом наращивания // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 5. С.25–37.
3. Манжиров А.В. Общая безынерционная начально-краевая задача для кусочно-непрерывно наращиваемого вязкоупругого стареющего тела. // ПММ. 1995. Т.59. Вып.5. С.836 – 848.
4. A.V. Manzhirov, D.A. Parshin, “Raising of a semi-circular vault,” IPPT – IFTR Reports. 2008. Vol. 2. PP. 358–359.
5. A.V. Manzhirov, D.A. Parshin, «Erection of a heavy semicircular arch structure» Topical Problems in Solid Mechanics. — New Delhi: IIT Delhi, 2008. PP. 245–265.
6. Кузнецов С.И., Манжиров А.В., Федотов И. Задача теплопроводности для растущего шара // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 6. С.139–148.
7. Манжиров А.В., Лычев С.А. Математическая теория растущих тел при конечных деформациях. // Доклады РАН. 2012. Т.443. № 4. С.438–441.
8. Лычев С.А., Манжиров А.В. Математическая теория растущих тел. Конечные деформации // ПММ. 2013. Т.77. Вып.4. С.585–604.
9. Лычев С.А., Манжиров А.В. Отсчетные конфигурации растущих тел // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 5. С.86–95.
10. A V. Manzhirov and S. A. Lychev, “Mathematical Modeling of Additive Manufacturing Technologies, – in Lecture Notes in Engineering and Computer Science: World Congress on Engineering 2014, pp. 1404–1409. WCE, London, 2014.
11. A.V. Manzhirov, «Mechanics of Growing solids: New Track in Mechanical Engineering» in Proceedings of ASME 2014 International Mechanical Engineering Congress & Exposition, IMECE2014, November 14–20, Montreal, Canada, 2014, 10 p.
12. A.V. Manzhirov and S.A. Lychev, “An approach to modeling of additive manufacturing technologies,” Transactions on Engineering Technologies: The World Congress on Engineering 2014, pp. 99–115. Springer, Netherlands, 2015.
13. A.V. Manzhirov, “Design of Additive Manufacturing Fabricated Viscoelastic Parts,” in Lecture Notes in Engineering and Computer Science: World Congress on Engineering 2015, pp. 710–714. WCE, London, 2015.
14. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. М.: ГИТТЛ, 1955. 492 с.

Сведения об авторах:

Койфман Константин Георгиевич – инженер, ИПМех РАН, Москва
E-mail: koifman_bmstu@yandex.ru

Манжиров Александр Владимирович – иностранный член Национальной академии наук Республики Армении, доктор физико-математических наук, профессор, заместитель директора, ИПМех РАН; заведующий филиалом кафедры прикладной математики, МГТУ им. Н.Э. Баумана; профессор кафедры высшей математики НИЯУ МИФИ; профессор кафедры высшей математики МИРЭА; Москва
E-mail: manzh@inbox.ru

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ МАЯТНИКОВ В ВОДЕ

Коцур О.С., Щеглов Г.А.

При помощи методов вычислительной гидродинамики исследуется переходный режим затухания колебаний маятника в покоящейся несжимаемой среде. Исследуются вихревые структуры, образующиеся при движении маятников различной формы. Сравниваются результаты, полученные сеточным методом контрольных объёмов, бессеточным методом вихревых элементов и результаты экспериментальных исследований, проведённые методами PIV. Делаются выводы об эффективности используемых методов для моделирования данной задачи.

1. Введение. Задачи математического моделирования процесса взаимодействия подвижного тела с жидкостью (Fluid-Structure Interaction - FSI) возникают в самых различных направлениях инженерной деятельности, начиная от строительства зданий и мостов (ветровые автоколебания конструкций), создания аэрокосмических систем (флаттер, бафтинг, динамика топлива в баке с упругими стенками и др.) и заканчивая биомеханикой (движение крови по сосудам с упругими стенками). Для решения многих таких задач проведение полноценных натурных испытаний представляется очень дорогостоящим, что обуславливает создание различных численных подходов и методов для моделирования задач данного класса.

Развиваемые и вновь появляющиеся численные методы задач FSI, тем не менее, требуют верификации, которую можно провести с помощью простых модельных задач. Такие модельные задачи должны быть «достаточными» для описания основных свойств взаимодействия подвижной конструкции и жидкости. С другой стороны, они должны быть «простыми» для возможности постановки недорогого натурного эксперимента, результаты которого позволили бы подтвердить результаты численного моделирования.

Задача о колебаниях маятника в воде представляет собой такую простую модельную задачу. Использование современных технологий, в том числе, метода лазерной трассировки (PIV) [1], позволяет в задачах FSI получать данные о поле скоростей среды в исследуемой зоне, а также поля завихренности, линии тока и другие производные величины. Такие данные можно использовать для сравнения результатов расчётов задачи разными численными методами, а также делать выводы об эффективности таких методов в соответствии с заданными критериями.

Целью данной работы является сопоставление результатов численного моделирования колебаний маятников различных форм в воде с использованием сеточного метода контрольного объёма (МКО), и бессеточного метода вихревых элементов (МВЭ) с результатами натурного эксперимента с использованием технологии PIV.

2. Описание постановки задачи и эксперимента. Конструкция маятника показана на рис.1. В качестве исследуемых тел рассматривались цилиндры с длиной оси 150 мм трёх поперечных сечений: тело K – кругового сечения диаметром 50 мм; тело P – прямоугольного сечения (параллелепипед), размерами 30x50 мм; тело E – эллиптического сечения с осями 30x60 мм.

Исследуемое тело помещалось в резервуар с водой с прозрачными стенками с размерами 500x350x250 мм, заполненный водой до уровня 220 мм (рис.2). Тело погружалось на уровень 110 мм от дна резервуара.

Для получения полей скоростей и завихренности в заданном сечении вокруг маятника использовалась технология лазерной трассировки (2D-PIV). Подробное описание экспериментальной установки можно найти в работе [2]. Следует отметить, что 2D-PIV позволяет получить лишь проекцию поля скоростей течения в некоторой плоскости, являясь по сути лишь «следом» сложного трхмерного течения в виде его проекции на заданную плоскость. В данном эксперименте все исследования проводились в плоскости центрального сечения исследуемого тела маятника, т.е. в плоскости, отстоящей от обоих торцов тела на 75 мм.

Тем не менее, информация о течении в плоскости является ценным результатом, который также может быть использован для сравнения с результатом численного моделирования задачи, поставленной аналогичным образом.

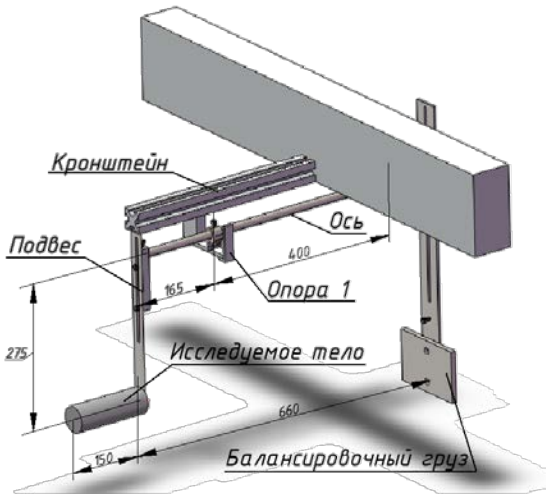


Рис.1. Схема конструкции маятника

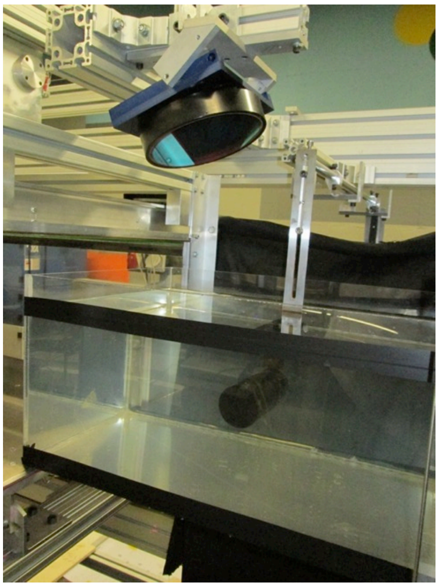


Рис. 2. Маятник, погружённый в резервуар с водой

3. Моделирование с помощью метода контрольного объма с деформируемой сеткой. МКО является одним из самых широко используемых методов решения задач аэро- и гидродинамики [3]. Особенностью задачи FSI является наличие подвижных границ, что создает сложности в использовании сеточных методов, поскольку необходимо модифицировать сетку, отслеживая перемещения тел. Существует несколько подходов решения данной проблемы в рамках МКО: (например, метод погруженных границ [4], метод перекрывающихся сеток). В данной работе используется метод деформируемых сеток, отслеживающих положение подвижных границ путём деформации сетки. Данный приём обладает тем недостатком по сравнению с классическим МКО, что требуется на каждом временном шаге пересчитывать новое положение сетки. Данная процедура отнимает много расчётного времени и значительно замедляет процесс расчёта. Однако, она основана на хорошо отработанных алгоритмах и легко реализуется алгоритмически. Расчёт был реализован на базе свободно распространяемой библиотеки OpenFOAM.

Основные допущения и параметры расчёта:

- Постановка задачи – трёхмерная, в качестве исследуемого тела было выбрано тело К;
- Среда несжимаемая, вязкая;
- Размеры расчётного домена: 2400x1600x900 мм, сетка неструктурированная, ~ 1 млн ячеек;
- Влияние свободной поверхности жидкости, погружённой части подвеса маятника, а также стенок резервуара не учитывается. Фактическими «стенками» в расчёте являются границы расчётного домена;
- Расчёт проводится в турбулентной постановке. Модель турбулентности LES с одним уравнением (турбулентная кинетическая энергия k), максимальное число Рейнольдса 32000;
- Неявная схема второго порядка по времени.

4. Моделирование с помощью метода вихревых элементов. Вторым численным подходом, который был использован для моделирования маятника, является лагранжевый метод вихревых элементов [5]. Данный метод основан на представлении потока в виде суперпозиции вихревых элементов (ВЭ), создающих заданное поле завихренности, Метод не требует сетки, что позволяет избежать недостатков, связанных с необходимостью деформировать сетку на каждом шаге и с возможностью потери качеств сетки при сильной деформации.

Основные допущения и параметры расчёта:

- Среда принимается несжимаемой, невязкой. Вязкость рассматривается только как причина генерации завихренности на поверхности обтекаемого тела;

- Постановка задачи – трёхмерная, в качестве исследуемых тел рассматривались тела *К, Р, Е* с размерами как в эксперименте;
- Влияние свободной поверхности жидкости, погружённой части подвеса маятника, а также стенок резервуара не учитывается. Маятник принимается колеблющимся в безграничном пространстве, заполненном средой (водой);
- Поверхность исследуемых тел разбивается на панели, каждая из которых является местом генерации ВЭ. Каждое тело разбивалось на ~ 1100 панелей;
- Смоделированное время переходного процесса – 8 с.

5. Результаты моделирования МКО и МВЭ и сравнение с экспериментом. В данном разделе приведены некоторые результаты расчётов используемых двух методов в сравнении с экспериментом. Основным критерием сходства/различия принимается результат сравнения кривых затухания трёх тел (*К, Р, Е*), для которых есть данные эксперимента. Это интегральная характеристика, которая говорит о качестве моделирования динамики маятника в системе «маятник-вода».

С другой стороны, представляет интерес также точность моделирования картин течения и основных вихревых структур, возникающих при колебании тел различных форм.

На рис.3 приведено сравнение кривой затухания амплитуды колебаний кругового цилиндра (тело *К*), рассчитанной с помощью МКО с экспериментальной кривой. На рис. 4, 5, 6 приведены аналогичные результаты, полученные для всех трёх тел с помощью МВЭ. Точками обозначены амплитуды колебаний.

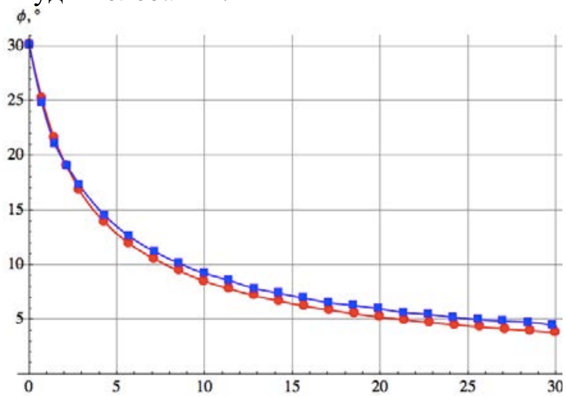


Рис. 3. Тело *К*. Красный – МКО (OpenFOAM); синий – эксперимент

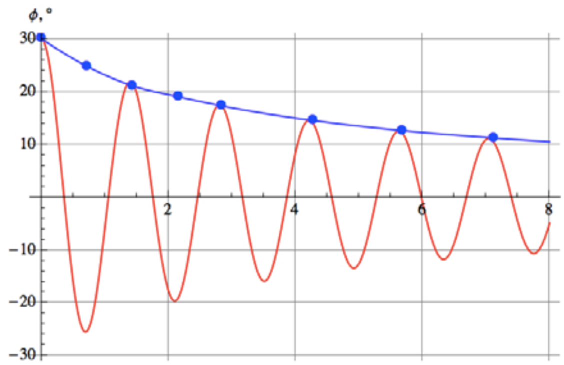


Рис. 4. Тело *К*. Красный – МВЭ; синий – эксперимент

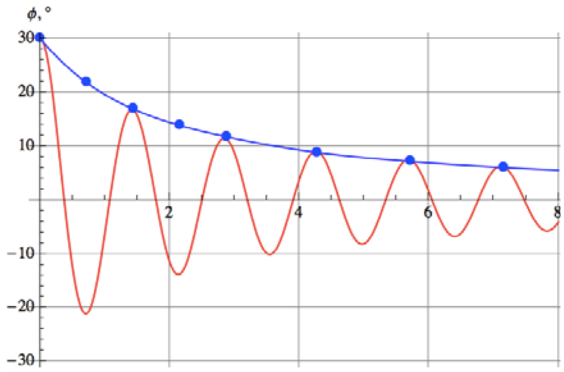


Рис. 5. Тело *Е*. Красный – МВЭ; синий – эксперимент

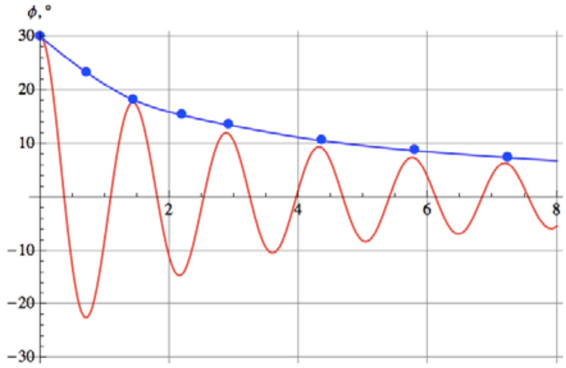


Рис. 6. Тело *Р*. Красный – МВЭ; синий – эксперимент

Как видно из рисунков, оба используемых метода показывают хорошие результаты в плане качества моделирования динамики затухания тел. Некоторое занижение расчётной кривой амплитуды кругового цилиндра (тело *К*) для МКО (рис.3) можно объяснить повышенной схемной вязкостью, которая неизбежно присутствует во всех сеточных схемах. При этом, наибольшее «разделение» графиков происходит преимущественно на 2-3 периодах, когда движение маятника и окружающей среды наиболее интенсивно.

Для тел *E* и *K* (эллиптический и круговой цилиндры – без острых кромок в сечении) расчёт с помощью МВЭ демонстрируют практически полное совпадение кривых затухания, тогда как для тела *P* (параллелепипед) наблюдается небольшое отклонение. Это связано с наличием острых кромок и необходимостью более точной дискретизации поверхности тела в области таких кромок.

На рис. 7 и 8 в качестве примера показано сравнение картин течения вокруг маятника с телом *K* для двух основных фаз колебаний: фазы наибольшей скорости (рис.7) и фазы наибольшего отклонения (рис.8). Все 4 изображения на каждом из рисунков относятся к одному и тому же моменту времени. Изображения сверху – результат обработки эксперимента PIV (левый рисунок – поле скоростей, правый рисунок – линии тока); изображения снизу – результат расчёта МКО с деформируемой сеткой в пакете OpenFOAM (левый рисунок – поле скоростей, правый рисунок – поле завихренности с нанесёнными линиями тока).

На рис. 9, 10 схематически представлено сравнение картин течения для тех же двух фаз при расчёте с помощью МВЭ. Маленькими точками показаны отдельные ВЭ положительной (красные точки), или отрицательной (синие точки) интенсивности. Их скопление определяет концентрацию завихренности в определённой области. Синие и красные окружности – это схематическое изображение вихрей, взятых из эксперимента.

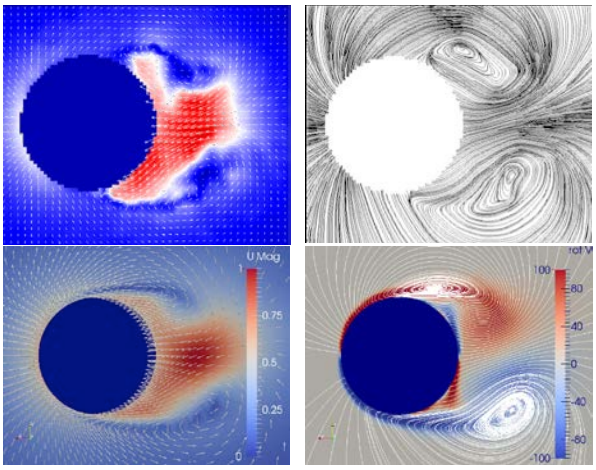


Рис. 7. Сравнение экспериментальных картин течения с результатами моделирования в OpenFOAM для фазы наибольшей скорости маятника (t = ¼ T)

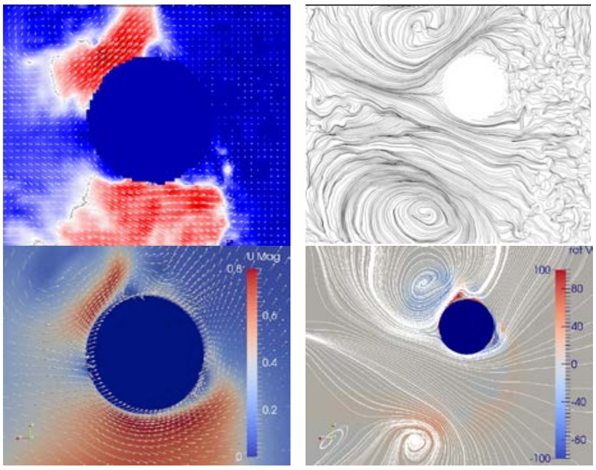


Рис. 8. Сравнение экспериментальных картин течения с результатами моделирования в OpenFOAM для фазы наибольшего отклонения маятника (t = T)

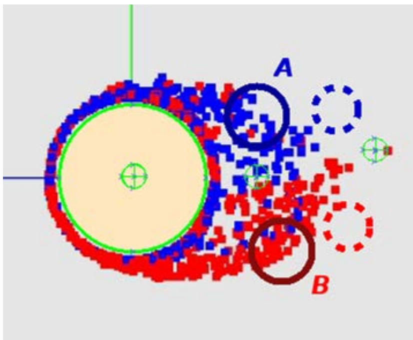


Рис. 9. Картина течения, смоделированного с помощью МВЭ, с нанесенными на нее изображениями вихрей из эксперимента (фаза наибольшей скорости: t = ¼ T)

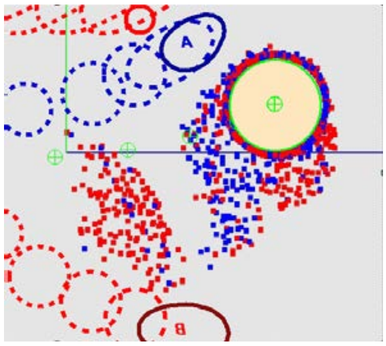


Рис. 10. Картина течения, смоделированного с помощью МВЭ, с нанесенными на нее изображениями вихрей из эксперимента (фаза наибольшего отклонения: t = ½ T)

При сравнении образующихся при колебаниях устойчивых вихревых структур наблюдаются различия. При моделировании сеточным методом положение вихрей описывается точнее: все основные вихревые структуры в расчёте МКО и в эксперименте качественно совпадают (рис. 7,8). МВЭ даёт менее точное положение вихревых структур (рис. 9,10), по сравнению с экспериментом, что, однако, не сказывается на интегральной характеристике затухания (рис. 4–6).

6. Основные выводы. С вычислительной точки зрения использование деформируемой сетки в МКО приводит к увеличению времени счёта, которое нелинейно зависит от количества ячеек сетки. Его вклад в общее время счёта имеет тот же порядок, что и непосредственное интегрирование уравнений Навье-Стокса.

Кроме того, при больших амплитудах колебаний маятника отдельные ячейки сетки могут претерпевать большие деформации, что «ухудшает» численные параметры модели, и что в конечном итоге сказывается на устойчивости счёта. Эта проблема проявляет себя на подробных мелких сетках с хорошо разрешённым пограничным слоем.

При расчётах МКО известной проблемой является, как уже было упомянуто, наличие «схемной вязкости», которая обусловлена погрешностью аппроксимации уравнений Навье-Стокса на сетке. Для ограничения влияния схемной вязкости необходимо уточнять сетку, мельчить её в зоне пограничного слоя, что также приводит к указанным проблемам.

МВЭ не обладает данными ограничениями. Точность расчёта определяется точностью дискретизации поверхности тела, которая разбивается на панели. Каждая панель на каждом шаге генерирует один ВЭ. При этом, чем больше панелей, представляющих поверхность маятника, тем больше ВЭ, тем точнее моделируется жидкая среда и её силовое воздействие на тело. Количество используемых ВЭ ограничивается только вычислительными ресурсами кластера.

Для данных двух расчётов также была оценена нормированная вычислительная стоимость, которая представляет собой время моделирования одной секунды реального процесса на одном вычислительном ядре кластера. Для МКО (в описанной постановке) данная величина составила 218 ч*ядро/с, для МВЭ 65 ч*ядро/с.

Сравнивая вычислительную стоимость обоих подходов, а также учитывая результаты по сравнения по приведённым параметрам, делается вывод об эффективности бессеточного МВЭ по сравнению с сеточным МКО для решения данной конкретной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Particle Image Velocimetry: A Practical Guide. 2nd ed. / M. Raffel, C. Willert, S. Wereley, J. Kompenhans. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer, 2007. 460 p.
2. Kotsur O., Scheglov G., Leyland P. Verification of Modelling of Fluid-structure Interaction (FSI) Problems Based on Experimental Research of Bluff Body Oscillations in Fluids // 29th Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences, 7-12 September 2014, Saint-Petersburg, Russia. Paper ICAS2014-2.6.3-2014_0953.
3. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости: пер. с англ. / под ред. В. Д. Виленского. М.: Энергоатомидат, 1984. 152 с. [S. Patankar Numerical heat transfer and fluid flow. New York: Hemisphere Publishing Corporation, 1980.].
4. Марчевский И.К., Пузикова В.В. Моделирование обтекания кругового профиля, совершающего вращательные колебания, методом LS-STAG // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. «Естественные науки». 2014. № 3. С. 93-107.
5. Щеглов Г.А. Модификация метода вихревых элементов для расчёта гидродинамических характеристик гладких тел // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. «Машиностроение». 2009. №2. С.26-35.

Сведения об авторах:

Коцур Олег Сергеевич – аспирант, Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана, +7(499)263-63-10, **E-mail:** oskotsur@gmail.com;

Щеглов Георгий Александрович – д.т.н, профессор, Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана, +7(499)263-63-10, **E-mail:** shcheglov_ga@bmstu.ru

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ ВЯЗКОУПРУГОГО СЛОЯ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ МИКРОИНДЕНТИРОВАНИЯ

Любичева А.Н., Горячева И.Г., Морозов А.В.

Предложено решение осесимметричной контактной задачи для сферического жёсткого индентора и тонкого вязкоупругого слоя, лежащего на жёстком основании, в условиях нагружения и снятия нагрузки с постоянной скоростью. Слой моделируется стандартным вязкоупругим телом с одним и несколькими временами релаксации. Решение использовано для определения модулей упругости и времён релаксации образцов резиновых покрытий на основании результатов проведённых экспериментов по их микроиндентированию.

1. Введение. Для теоретического изучения механизмов трения вязкоупругих тел в ряде работ используется модель тонкого вязкоупругого слоя, описываемого телом Кельвина, который лежит на жёстком основании [1-5]. Настоящее исследование посвящено разработке способа определения параметров используемой в этих работах модели вязкоупругого слоя на основании проведённых экспериментальных исследований.

2. Постановка и решение контактной задачи. Рассматривается осесимметричная контактная задача о внедрении сферического индентора в тонкий вязкоупругий слой, лежащий на жёстком основании. Исследуется случай, когда скорость перемещения индентора V постоянна и существенно меньше скорости звука в материале, при этом, на первом этапе индентор радиуса R внедряется в слой, а при достижении максимального значения внедрения в момент времени $t=t_1$ происходит снятие нагрузки также с постоянной скоростью перемещения вершины индентора. При $t=0$ вершина индентора касается поверхности слоя в точке, в которой находится начало цилиндрической системы координат, ось z направлена вниз. На стадии увеличения нагрузки, с ростом внедрения индентора $\delta(t)$, область контакта, имеющая круговую границу радиуса $a(t)$, возрастает.

Для описания свойств вязкоупругого слоя толщины h используется обобщённая модель Кельвина (стандартное вязкоупругое тело), с длительным модулем упругости E, и временами последействия T_ε и релаксации T_σ. Определяющее соотношение, связывающее контактное давление $p(r, t)$ и вертикальные перемещения на поверхности слоя $u_z(r, t)$, имеет вид:

$$T_\sigma \frac{dp(r,t)}{dt} + p(r,t) = \frac{E}{h(1-\nu^2)}\left(u_z(r,t) + T_\varepsilon \frac{du_z(r,t)}{dt}\right), \tag{1.1}$$

Использование одномерной модели для упругого слоя, лежащего на жёстком основании, допустимо в случае, если радиус области контакта много меньше толщины слоя. Будем считать, что радиус площадки контакта в случае рассматриваемого вязкоупругого материала также удовлетворяет этому условию.

Решение задачи для этапов нагружения и снятия нагрузки выписываются отдельно. Так, для стадии нагружения $t<t_1$ граничные и начальные условия задачи, с учётом формы индентора $f(r)$, принимают форму:

$$u_z(r,t) = Vt - f(r), \quad f(r) = \frac{r^2}{2R}, \quad p(a(t),t) = 0, \quad p(r,0) = 0. \tag{1.2}$$

С учётом этих условий получим решение уравнения (1.1) для контактного давления:

$$\begin{aligned} p(r,t) &= \frac{E}{h(1-\nu^2)}\left\{Vt + V(T_\sigma - T_\varepsilon)\left(\exp(-t/T_\sigma) - 1\right) - \frac{r^2}{2R}\right\} = \\ &= \frac{E}{2Rh(1-\nu^2)}\left(a^2(t) - r^2\right), \quad r \le a(t), \end{aligned} \tag{1.3}$$

Интегрируя по области контакта, получим зависимость нагрузки на индентор от времени:

$$P(t)=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{a(t)}\frac{E}{2Rh(1-\nu^2)}\left(a^2(t)-r^2\right)rdr=\frac{\pi E}{4hR(1-\nu^2)}a^4(t)=$$
$$=\frac{\pi RE}{h(1-\nu^2)}\left\{Vt+V(T_\sigma-T_\varepsilon)\left(\exp(-t/T_\sigma)-1\right)\right\}^2 \qquad (1.4)$$

Для стадии разгрузки $t>t_1$ граничные и начальные условия принимают такую форму:

$$u_z(r,t)=V(2t_1-t)-\frac{r^2}{2R},\quad r<a(t)$$
$$p(r,t)=0,\quad r\ge a(t) \qquad (1.5)$$

При этом, граница области контакта уже не может быть определена из геометрических условий, как в стадии нагружения, поскольку восстановление свободной поверхности вязко-упругого слоя происходит постепенно. В силу граничных условий на основании соотношения (1.1) получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{dp(r,t)}{dt}+\dfrac{1}{T_\sigma}p(r,t)=\dfrac{E}{T_\sigma h(1-\nu^2)}\left[V\left(2t_1-t-T_\varepsilon\right)-\dfrac{r^2}{2R}\right], & r\le a(t)\\ u_z(r,t)+T_\varepsilon\dfrac{du_z(r,t)}{dt}=0, & r\ge a(t)\end{cases} \qquad (1.6)$$

Решение этой системы имеет вид:

$$\begin{cases}p(r,t)=\dfrac{E}{h(1-\nu^2)}\left(V(T_\sigma-T_\varepsilon)\left(e^{-\frac{t}{T_\sigma}}-2e^{\frac{t_1-t}{T_\sigma}}\right)+V(2t_1+T_\sigma-T_\varepsilon-t)-\dfrac{r^2}{2R}\right), & r\le a(t)\\ u(r,t)=e^{\frac{t_1-t}{T_\varepsilon}}\left(Vt_1-\dfrac{r^2}{2R}\right), & r\ge a(t)\end{cases} \qquad (1.7)$$

Область контакта при разгрузке определяется как:

$$\frac{a^2(t)}{2R}=V(T_\sigma-T_\varepsilon)\left(e^{-\frac{t}{T_\sigma}}-2e^{\frac{t_1-t}{T_\sigma}}\right)+V(2t_1+T_\sigma-T_\varepsilon-t)\,. \qquad (1.8)$$

Тогда контактное давление может быть представлено в виде

$$p(r,t)=\frac{E}{2Rh(1-\nu^2)}\left(a^2(t)-r^2\right),\quad r\le a(t)\,. \qquad (1.9)$$

Общую нагрузку на индентор в момент времени $t>t_1$ получим, интегрируя контактное давление по области контакта аналогично (1.4):

$$P(t)=\frac{\pi RE}{h(1-\nu^2)}\left\{V(2t_1-t)+V\left(T_\sigma-T_\varepsilon\right)\left(e^{-\frac{t}{T_\sigma}}-2e^{\frac{t_1-t}{T_\sigma}}+1\right)\right\}^2\,. \qquad (1.10)$$

Легко убедиться, что в момент времени $t=t_1$ выражения (1.4) и (1.10) совпадают. В случае использования модели Винклера для вязкоупругого полупространства определению подлежит не длительный модуль E, а фиктивный параметр – отношение модуля к толщине слоя E/h. Также отметим, что решение контактной задачи может быть получено и для модели Кельвина с несколькими временами релаксации.

3.Эксперимент. Для получения экспериментальных зависимостей были проведены испытания с образцами резины. Микроиндентирование проводились на микротвердомере UMT, который позволяет регистрировать значения нормальной нагрузки и внедрения с высокой точностью при малых деформациях контактирующих тел. Фотография установки образца на микротвердомере показана на рис.1. Поверхность резинового образца индентируется стальным шариком диаметром 1.6 мм.

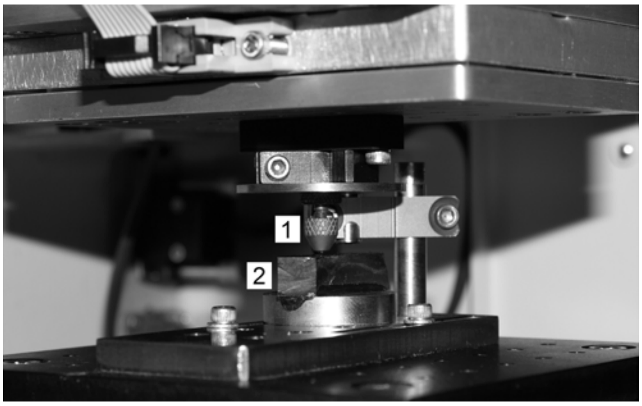


Рис. 1. Фотография испытуемого образца (2) на микротвердомере UMT, где (1) – держатель шарика.

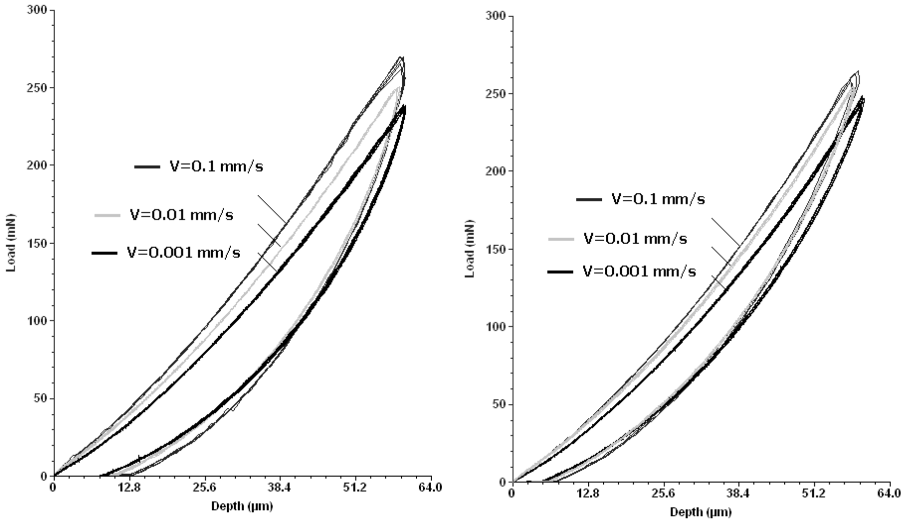


Рис. 2. Зависимость нормальной нагрузки от внедрения для образцов резины с различной жёсткостью.

Были испытаны два образца резины, изготовленных из одного материала, но отличающиеся жёсткостью. Испытания проводились до достижения максимальной глубины внедрения, равной 60 мкм. В каждом опыте в соответствующий момент времени регистрировались значения нагрузки на индентор и внедрения. Число опытов, следующих один за другим, равно 5, причём, все опыты выполнены при размещении индентора в одном и том же месте на поверхности исследуемого образца. Скорость перемещения вершины индентора варьируется от 0,001 до 0,1 мм/с.

4. Результаты и выводы. На основании полученных аналитических зависимостей нагрузки на индентор от времени, а также соответствующих экспериментальных данных с использованием метода наименьших квадратов, были подобраны параметры модели материала. Подбор параметров осуществлялся по ветви нагружения. При этом, предполагалось, что материал слоя является несжимаемым (коэффициент Пуассона $\nu \approx 0{,}49$) . На графике (рис.3) представлены экспериментальные и теоретические зависимости приложенной силы от времени при нагрузке и разгрузке с постоянной скоростью 0,001 мм/с. Кривые для других скоростей имеют аналогичный вид. При нагрузке аналитическая и экспериментальная зависимости практически совпадают. Незначительное отклонение теоретических результатов от экспериментальной кривой может быть объяснено рядом причин, в частности, использованием простой линейной модели материала с одним временем релаксации. Определённые для рассматриваемого образца резины параметры модели материала составили следующие значения: E/h=12 ГП$a/м$, T_σ=8,2с, T_ε=30,5с.

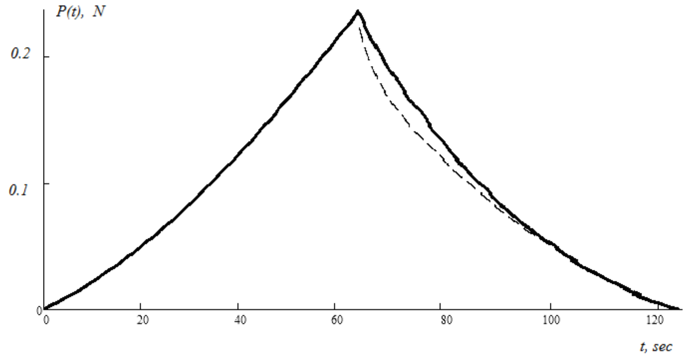


Рис. 3 Зависимость нагрузки на индентор от времени: сплошная линия (эксперимент), штриховая линия (теория).

Заметим, что линейная вязкоупругая модель материала с одним временем релаксации позволяет использовать полученные параметры в строго определённом диапазоне скоростей взаимодействия.

5. Благодарности. Работа поддержана Российским научным фондом грант № 14-29-00198 «Теоретико-экспериментальное исследование трения эластомеров».

ЛИТЕРАТУРА

1. Горячева И.Г., Губенко М.М., Маховская Ю.Ю. Скольжение сферического индентора по вязкоупругому основанию с учётом сил молекулярного притяжения. //Прикладная механика и техническая физика. 2014. Т.55. №1. С.99-107.
2. Горячева И.Г., Шпенёв А.Г. Моделирование скольжения штампа с регулярным рельефом подошвы по вязкоупругому основанию при наличии жидкой смазки. //Прикладная математика и механика. 2012. Т.76. №5. С.754-763.
3. Любичева А.Н., Солдатенков И.А. К вопросу идентификации закона изнашивания вязкоупругих материалов по результатам стандартных испытаний на износ. //Трение и износ. 2011. Т.32. №5. С.451-459.
4. Goryacheva I.G., Makhovskaya Y.Y. Modeling of friction at different scale levels. // Mechanics of Solids. 2010. T.45. №3. C.390-398.
5. Солдатенков И.А. К расчёту деформационной составляющей силы трения для стандартного вязкоупругого основания. //Трение и износ. 2008. Т.29. №1. С.12-21.

Information about authors

Lyubicheva Anastasia – PhD, senior researcher, A. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Tribology Lab. (495) 434 36 92
E-mail: lyubicheva@mail.ru

Goryacheva Irina – academician of RAS, head of Tribology Lab, A. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS (495) 434 36 92
E-mail: goryache@ipmnet.ru

Morozov Alexei – PhD, senior researcher, A. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Tribology Lab. (495) 434 15 87
E-mail: morozovalexei@mail.ru

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ О ТРЕЩИНЕ, ДВИЖУЩЕЙСЯ С КОНЕЧНОЙ СКОРОСТЬЮ, ПОПАДАЮЩЕЙ В ПЕРВЫЙ СВЕРХКРИТИЧЕСКИЙ ДИАПАЗОН

Мартиросян А.Н., Давтян А.В., Динунц А.С., Мартиросян Г.А.

В настоящей работе рассматривается нестационарная смешанная задача для полуплоскости, когда точка раздела граничных условий движется с конечной скоростью, лежащей между скоростями волн Релея и волн сдвига. Определено напряжение на продолжении трещины при постоянной сосредоточенной силе, действующей на берега трещины. Показано, что на крае трещины компоненты напряжений стремятся к нулю, т.е. особенность отсутствует.

Задача о распространении трещины (разреза) в упругой постановке с докритическими скоростями (для антиплоской задачи – меньше скорости волн сдвига, для плоской задачи – меньше скорости волн Релея) решались многими авторами [1-7, 9-14]. Б.В. Костров первым [1] решил задачу о распространении трещины продольного сдвига с произвольной переменной скоростью, не достигающей скорости волн сдвига. В [2,3] найдено общее решение нестационарной задачи о напряжениях на продолжении плоской трещины, движущейся с переменной скоростью. В этих работах установлено, что свёртка напряжений на продолжении полубесконечной трещины с некоторыми функциями, возникающими при факторизации, отлична от нуля лишь на продолжении трещины, а свёртка перемещений берегов трещины с соответствующими функциями – лишь на берегах трещины. Это позволило решить рассматриваемую задачу с неравномерно движущейся точкой раздела граничных условий путём сведения её к решённой ранее задаче для антиплоской деформации [1]. Решения, полученные в [1,2,3], выражаются пятикратными интегралами, а асимптотики у края трещины – трёхкратными. В дальнейшем метод Б.В. Кострова был усовершенствован Л.И.Слепяном, что позволило уменьшить число квадратур в общем решении и в асимптотиках на единицу. В дальнейшем этот метод для сложных смешанных граничных условий, а также для анизотропной среды были развиты в работах А.Н. Мартиросяна [4,5]. В [6], [7] подробно построено точное решение плоской задачи о напряжениях на берегах трещины для случая, когда носик разреза движется с дорэлеевской скоростью. Ниже эта задача решается для случая, когда скорость распространения трещины попадает в первый сверхкритический диапазон, т.е. находится между скоростями волн Рэлея и сдвига.

Рассмотрим линейно-упругое тело, ослабленное прямолинейным разрезом, расположенным на полуоси $x<\ell(t)$, $y=0$. Под разрезом здесь понимается поверхность, на которой вектор перемещения $\vec{u}$ претерпевает разрыв. Пусть на берега разреза (трещины) действует только нормальное напряжение σ_{yy}:

$$\sigma_{yy}(t,x,+0)=\sigma_{yy}(t,x,-0)=\sigma^{-}(t,x,), \qquad x<\ell(t),$$
$$\sigma_{xy}(t,x,+0)=\sigma_{xy}(t,x,-0)=0, \qquad x<\ell(t),$$
$$\sigma_{yz}(t,x,y)=\sigma_{yz}(t,x,y)=0.$$

Если тело и граничные условия симметричны относительно оси x, то относительно оси x симметричны компоненты $u_x(t,x,y),\sigma_{xx}(t,x,y),\sigma_{yy}(t,x,y)$ и антисимметричны $u_y(t,x,y)$, $\sigma_{xy}(t,x,y)$. Тогда на продолжении разреза: $u_y(t,x,0)=\sigma_{xy}(t,x,0)=0,\ x>\ell(t)$ и можно рассматривать лишь половину тела, лежащую например, в верхней полуплоскости $y\geq 0$.

При этом на верхнем берегу разреза задаётся напряжение σ_{yy}, на продолжении разреза – перемещение $u_y\left(u_y=0\right)$, на разрезе и его продолжении – напряжение $\sigma_{xy}\left(\sigma_{xy}=0\right)$. Таким образом, задача о разрезе (трещине) сводится к следующей задаче со смешанными граничными условиями, причём точка раздела граничных условий движется, в общем случае, с переменной скоростью $\dot{\ell}(t)$:

$$\sigma_{yy}\Big|_{y=0} = \rho\left(\left(a^2-2b^2\right)\frac{\partial u_x}{\partial x}+a^2\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)\Bigg|_{y=0} = \sigma^- \quad \text{при } x<\ell(t); \tag{1}$$

$$u_y(t,x)\Big|_{y=0} = u^+(t,x) = 0 \qquad \text{при } x>\ell(t); \tag{2}$$

$$\sigma_{xy}\Big|_{y=0} = \rho b^2\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)\Bigg|_{y=0} = 0 \qquad \text{при } |x|<\infty; \tag{3}$$

где $\ell(t)$ – закон движения носика разреза, $a,b,$ – скорости волн сжатия и сдвига, ρ– плотность среды. Предполагается, что скорость движения носика разреза заключена между скоростями волн Релея и волн сдвига, т.е. попадает в диапазон $c_R<\dot{\ell}(t)<b$, где c_R– величина скорости волны Рэлея.

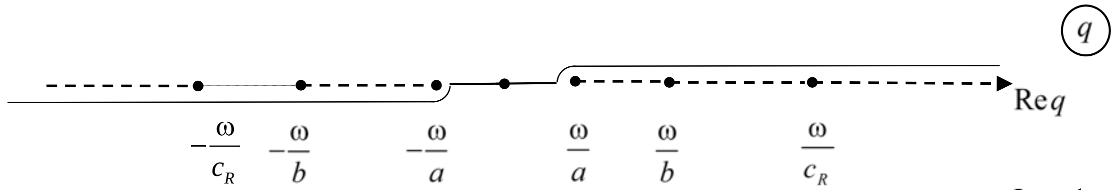
При $t=0$ имеются нулевые начальные условия $u_x\big|_{t=0}=u_y\big|_{t=0}=\frac{\partial u_x}{\partial t}\Big|_{t=0}=\frac{\partial u_y}{\partial t}\Big|_{t=0}=0$. Значения $\sigma_{yy}=\sigma^+(t,x)$ при $x<\ell(t)$ и $u_y=u^-(t,x)$ при $x>\ell(t)$ неизвестны.

Введём обозначения $u_x=u, u_y=v$. Решение задачи ищем методом интегральных преобразований Лапласа по времени и преобразования Фурье по координате (преобразование LF) в виде

$$\{u(\mathrm{t,x});v(\mathrm{t,x})\}=\frac{1}{4\pi^2 i}\sum_{n=1}^{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty}\left\{u_n^{LF}(\mathrm{s,q});v_n^{LF}(\mathrm{s,q})\right\}\exp\left(st-i\bar{\beta}_n y-iqx\right)dsdq, \tag{4}$$

$$\bar{\beta}_1(s,q)=i\sqrt{\frac{s^2+a^2q^2}{a^2}},\quad \bar{\beta}_2(s,q)=i\sqrt{\frac{s^2+b^2q^2}{b^2}},$$

где $s=-i\omega$ и q – есть параметры преобразований Лапласа по t и Фурье по x, контур интегрирования по q показан на фиг.1.



Фиг. 1.

Тогда изображения функций $\sigma_{xy}(t,x), u(t,x)$ (обозначим их через σ_{xy}^{LF}, u^{LF}) связаны соотношением

$$u^{LF}(s,q)=S^{LF}(s,q)\sigma_{xy}^{LF}(s,q), \qquad S^{LF}(s,q)=-\frac{s^2}{\rho b^4 R(s,q)}\sqrt{\frac{s^2}{b^2}+q^2}, \tag{5}$$

$$R(s,q)=\left(\frac{s^2}{b^2}+2q^2\right)^2-4q^2\sqrt{\frac{s^2}{a^2}+q^2}\sqrt{\frac{s^2}{b^2}+q^2}$$

Здесь $R(s,q)$– функция Рэлея. Аналитическая функция $S^{LF}(s,q)$ имеет следующие особые точки: $q=\pm is/a$, $q=\pm is/b$ (точки ветвления) и $q=\pm is/c_R$ (простые полюса). Тогда неизвестные функции $\sigma^+(t,x), u^-(t,x)$, как в [6,5], определяются так:

$$u^-=S_-**\left[\left(S_+**\sigma^- - P_-**u^+\right)H(\ell-x+0)\right], \tag{6}$$

$$\sigma^+=-P_+**\left[\left(S_+**\sigma^- - P_-**u^+\right)H(x-\ell+0)\right].$$

Здесь введены функции $P_\pm^{LF}=1\big/S_\pm^{LF}$, а символ $(**)$ означает свёртку по переменным t и x, $H(x)$– функция Хевисайда.

Стандартным путём можно провести факторизацию [8], т.е. представить $S^{LF}(s,q)=S_{+}^{LF}(s,q)S_{-}^{LF}(s,q)$, причём вид сомножителей $S_{\pm}^{LF}(s,q)$ зависит от диапазона, которому принадлежит скорость распространения трещины $\dot{\ell}(\mathrm{t})$. При $0<\dot{\ell}(t)<c_R$ функция $S_{+}^{LF}(s,q)$ должна иметь все особые точки в нижней полуплоскости q, а $S_{-}^{LF}(s,q)$ – в верхней. В случае, когда $c_R<\dot{\ell}(t)<b$, нужно провести факторизацию так, чтобы $S_{+}^{LF}(s,q)$ имела особые точки $q=-is/a,\ q=-is/b$, а $S_{-}^{LF}(s,q)$ – все остальные. Наконец, для скорости трещины, удовлетворяющей неравенству $b<\dot{\ell}(t)<a$, в результате факторизации $S_{+}^{LF}(s,q)$ должна иметь единственную особую точку $q=-is/a,$ а $S_{-}^{LF}(s,q)$ – все остальные.

Первый случай, где предполагается, что $0<\dot{\ell}(t)<c_R$, для разных граничных задач достаточно подробно были рассмотрены в [5,6,7]. В настоящей работе рассматривается случай, когда $c_R<\dot{\ell}(t)<b$. Вышеуказанным способом сделана факторизация S^{LF} и получено представление

$S^{LF}=S_{+}^{LF}\cdot S_{-}^{LF}$,

$$S_{+}^{LF}(s,q)=\sqrt{\frac{s}{a}-iq}\,D_{+}\left(\frac{iq}{s}\right),\ S_{-}^{LF}=-\frac{1}{2\rho b^4\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)}\frac{\sqrt{\frac{s}{b}+iq}}{\left(\frac{s}{c_R}-iq\right)\left(\frac{s}{c_R}+iq\right)}D_{-}\left(\frac{iq}{s}\right), \tag{7}$$

$$D_{\pm}\left(\frac{iq}{s}\right)=\exp\left(\frac{1}{\pi}\int_{1/a}^{1/b}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta\mp\frac{iq}{s}}d\zeta\right),\qquad \varphi(\zeta)=\operatorname{arctg}\left[4\zeta^2\left(\frac{1}{b^2}-2\zeta^2\right)^{-2}\sqrt{\frac{1}{b^2}-\zeta^2}\sqrt{\zeta^2-\frac{1}{a^2}}\right]$$

Чтобы облегчить дальнейшие вычисления, представим функции $D_{\pm}(iq/s)$ в несколько иной форме [5]:

$$D_{\pm}\left(\frac{iq}{s}\right)=1+\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}}F_1(u)\frac{du}{u\mp\frac{iq}{s}},\qquad D_{\pm}^{-1}\left(\frac{iq}{s}\right)=1+\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}}F_2(u)\frac{du}{u\mp\frac{iq}{s}}, \tag{8}$$

$$F_1(u)=\gamma(u)\exp\left[\chi(u)\right],\qquad F_2(u)=-\gamma(u)\exp\left[-\chi(u)\right],\ \chi(u)=\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}}\varphi(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-u},$$

$$\gamma(u)=\frac{\frac{4}{\pi}u^2\sqrt{u^2-\frac{1}{a^2}}\sqrt{\frac{1}{b^2}-u^2}}{\left[\left(\frac{1}{b^2}-2u^2\right)^4+16u^4\left(\frac{1}{b^2}-u^2\right)\left(u^2-\frac{1}{a^2}\right)\right]^{1/2}},\ \varphi(\zeta)=\operatorname{arctg}\left[\frac{4\zeta^2\sqrt{\zeta^2-\frac{1}{a^2}}\sqrt{\frac{1}{b^2}-\zeta^2}}{\left(\frac{1}{b^2}-2\zeta^2\right)^2}\right]$$

Обозначая через $S_{\pm}(t,x)$ и $\mathrm{P}_{\pm}(t,x)$ оригиналы функций $S_{\pm}^{LF}(s,q)$ и $P_{\pm}^{LF}(s,q)$ и вычисляя их аналогично [5], получим:

$$S_{+}(t,x)=\frac{H(x)}{\sqrt{\pi x}}H\left(\frac{t}{x}-\frac{1}{a}\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{\left(\frac{t}{x}-\frac{1}{a}\right)\left[\frac{1}{2}+\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}}\frac{F_1(u)}{\sqrt{u-\frac{t}{x}}\sqrt{u-\frac{1}{a}}}du\right]-\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}}F_1(u)du+\int_{1/a}^{1/b}\frac{F_1(u)\sqrt{u-\frac{t}{x}}}{\sqrt{u-\frac{1}{a}}}du\right\}=$$

$$=\frac{H(x)}{\sqrt{\pi}}\frac{\partial}{\partial t}H\left(t-\frac{x}{a}\right)\left\{\frac{1}{2x\sqrt{x}}+\frac{\frac{t}{x}-\frac{1}{a}}{x\sqrt{x}}\int_{\frac{t}{x}}^{\frac{1}{b}}\frac{d}{du}\left(\frac{F_1(u)}{\sqrt{u-\frac{1}{a}}}\right)\frac{du}{\sqrt{u-\frac{t}{x}}}\right\}, \tag{9}$$

$$S_-(t,x)=\frac{H(-x)}{\sqrt{-x}\sqrt{\pi}}\frac{\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)^{-1}}{2\rho b^4}\left\{\frac{c_R\sqrt{\frac{1}{c_R}-\frac{1}{a}}}{2\sqrt{\frac{1}{c_R}+\frac{t}{x}}}\left(1+\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}}\frac{F_1(u)}{u-\frac{1}{c_R}}du\right)-\int_{1/a}^{1/b}\frac{F_1(u)\sqrt{u-\frac{1}{a}}}{\left(u^2-\frac{1}{c_R{}^2}\right)\sqrt{u+\frac{t}{x}}}du\right\}, \tag{10}$$

$$P_+(t,x)=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\right)\left\{\sqrt{x}H(x)\left[2D_+^{-1}\left(\frac{1}{a}\right)\delta\left(t-\frac{x}{a}\right)+\int_{1/a}^{1/b}F_3(h)\delta(t-hx)\,dh\right]\right\}, \tag{11}$$

$$F_3(h)=-\int_h^{\frac{1}{b}}\frac{1}{\sqrt{u-h}}\sqrt{u-\frac{1}{a}}\left(u-\frac{1}{a}\right)F_2(u)\,du,\quad D_+^{-1}\left(\frac{1}{a}\right)=1+\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}}\frac{F_2(u)\,du}{u-1/a},$$

где $\delta(x)$ – функция Дирака, $F_1(u),F_2(u)$ даются формулой (8).

Определим напряжения на продолжении трещины при постоянной сосредоточенной силе, действующей на берега трещины,

$$\sigma_0^-(t,\tau,x,\xi)=-\delta(x-\xi)H(t-\tau),\qquad \xi<l(t) \tag{12}$$

Используя формулы (9) и (12), вычислим свёртку $S_+**\sigma_0^-$, которая записывается в виде:

$$S_+**\sigma_0^-=\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t S_+(t',x')\sigma_0^-(t-t',x-x')\,dt'dx' \tag{13}$$

Вычисление интеграла (13) даёт

$$S_+**\sigma_0^-=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{H(x-\xi)}{(x-\xi)^{3/2}}H\left(T-\frac{1}{a}\right)\left[\frac{1}{2}+\left(T-\frac{1}{a}\right)\int_T^{\frac{1}{b}}\frac{d}{du}\left(\frac{F_1(u)}{\sqrt{u-1/a}}\right)\frac{du}{\sqrt{u-T}}\right]. \tag{14}$$

Подставляя (14) и значение $P_+(t,x)$ из (11) в (6), получаем:

$$\sigma^+(t,x)=\frac{1}{\pi}\left[2D_+^{-1}\left(\frac{1}{a}\right)M\left(x,t,\xi,\tau,\frac{1}{a}\right)+\int_{1/a}^{1/b}F_3(h)M(x,t,\xi,\tau,h)\,dh\right], \tag{15}$$

$$\mathrm{M}(x,t,\xi,\tau,h)=\left(M_0(x,t,\xi,\tau,h)+M_1(x,t,\xi,\tau,h)\right)H\left(L_0-1/a\right)H(x-\ell)H(\ell-\xi),$$

$$M_0(x,t,\xi,\tau,h)=$$

$$=\frac{\sqrt{x-\ell}}{(\ell-\xi)^{3/2}}\frac{\frac{1}{a}\dot{\ell}-1}{h\dot{\ell}-1}\left[\frac{1}{2}+\left(L_0-\frac{1}{a}\right)\int_{L_0}^{\frac{1}{b}}\frac{d}{du}\left(\frac{F_1(u)}{\sqrt{u-1/a}}\right)\frac{du}{\sqrt{u-L_0}}\right]H\left(L_0-\frac{1}{a}\right)H(x-\ell)H(\ell-\xi),$$

$$M_1(x,t,\xi,\tau,h)=\frac{(x-\ell)^{3/2}}{2(\ell-\xi)^{3/2}(x-\xi)}\left[1+H(T-h)\int_{L_0}^{\frac{1}{b}}\frac{F_1(u)}{\sqrt{u-1/a}}\psi(x,t,\xi,\tau,u,h)H\left(\frac{1}{b}-L_0\right)du\right],$$

$$\psi(x,t,\xi,\tau,u,h)=\frac{(T-1/a)}{(x-\xi)(T-h)^{3/2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{(x-\ell)(T-h)}{(\ell-\xi)(u-L_0)}}-\frac{\sqrt{(u-L_0)(x-\ell)}(T-1/a)}{\sqrt{\ell-\xi}(x-\xi)(T-h)(u-T)}+$$

$$+\frac{\sqrt{x-\ell}\left(L_0-\frac{1}{a}\right)}{(\ell-\xi)^{3/2}(u-L_0)^{3/2}}\left(\frac{L_0-T}{u-T}+\frac{h-\frac{1}{a}}{u-h}\right), T=\frac{t-\tau}{x-\xi}, L=\frac{t_0-\tau}{\ell-\xi}, \ell=\ell(t_0), \ell(t_0)-x+\frac{t-t_0}{h}=0.$$

Из формулы (15) видно, что при $x\to\ell(t)$ особенности нет и $\sigma^{+}(t,x)$ стремится к нулю как $\sqrt{x-\ell(t)}$. Аналогичный результат при распространении носика раздела со скоростью из первого сверхкритического диапазона получен в [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. Костров Б.В. Неустановившееся распространение трещины продольного сдвига. //ПММ. 1966. Т.30. Вып.6. С.1042-1049.
2. Костров Б.В. Распространение трещин с переменной скоростью. //ПММ. 1974. Т.38. Вып.3. С.551-560.
3. Костров Б.В. Динамическое распространение трещин с переменной скоростью. Mechanica zniszczenia. Teoria i zastosowania. Warschawa. Wydawn. Polskiej Acad. Nauk, 1976. с. 89-I22.
4. Багдоев А.Г., Мартиросян А.Н. Антиплоская задача для анизотропной упругой неодно-родной среды при наличии трещины, движущейся с произвольной скоростью. //Изв. НАН Армении. Механика. 1998. Т.51. № 2. С.12-18.
5. Мартиросян А.Н. Математические исследования нестационарных линейных граничных задач для сплошных сред. Ереван: «Зангак-97», 2007. 244 с.
6. Сарайкин В.А., Слепян Л.И. Плоская задача о динамике трещины в упругом теле. //Изв. АН СССР. МТ. 1979. Вып. 4. С.54-73.
7. Поручиков В.Б. Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986. 328с.
8. Нобл Б. Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений с частными производными. М.: ИЛ, 1962. 278 с.
9. Фишков А.Л. Динамическая смешанная плоская задача для сверхкритических режимов движения точки раздела граничных условий. /Автореф. канд. диссертации. –Л.: 1984, 99 с.
10. Broberg, K.B. The propagation of a brittle crack, Arkiv for Fysik 18, 159–192 (1960).
11. Шер Е.Н. Об энергетическом условии в носике нестационарной трещины. // ПМТФ. 1969. Вып.3. С.175-178.
12. Achenbach J. D., Bazant Z. P.Elastodynamic near-tip stress and displacement field for rapidly propagating cracks in orthotropic materials. //Journal of Applied Mechanics–Trans. ASME J. Appl. Mech.,1975, V 42, p.183–189.
13. Слепян Л.И. Механика трещин. Л*.: Судостроение, I98I. 296с.
14. Freund, L. B. Crack propagation in an elastic solid subject to general loading, I, Constant rate of extension, II, Non-uniform rate of extension, //J. Mech. 1972. V.20. № 3. P.141-152.

Сведения об авторах:

Мартиросян А.Н. – доктор физ.-мат. наук, профессор, Зав. каф. математики Горисского государственного университета. **E-mail:** ashot.martirosyan.14@gmail.com

Давтян А.В. – канд. физ.-мат. наук, Горисский государственный университет.
E-mail: davtyananush@gmail.com

Динунц А.С. – канд.физ.-мат.наук, доцент каф. математики Горисского государственного университета. **E-mail:** dinuntsas@gmail.com

Мартиросян Г.А. – канд. физ.-мат. наук, доцент Горисского государственного университета

ВЛИЯНИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ ВНЕШНЕЙ СРЕДЫ НА СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В СЛОЕ

Мартиросян К.Л.

Представляет теоретический и практический интерес рассмотрение задач, характеризующих влияние сопротивления внешней среды на скорости распространения волн в слое под действием касательных нагрузок [1]. В отличие от [1], в данной работе рассматривается влияние сопротивления трения внешней среды.

1. Рассматривается задача колебания бесконечного слоя толщиной $2h$, на лицевые поверхности которого действуют касательные нагрузки (1.1). Прямоугольная декартовая система координат *(x,y,z)* выбрана так, что срединная плоскость пластинки совпадает с плоскостью *(xOy)*.

$$\begin{aligned} &z = h \qquad \sigma_{33} = 0 \qquad \sigma_{31} = -\beta U_1 \qquad \sigma_{32} = -\beta U_2 \\ &z = -h \qquad \sigma_{33} = 0 \qquad \sigma_{31} = \beta U_1 \qquad \sigma_{32} = \beta U_2 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Относительно перемещений принимаются следующие допущения [2]:

$$U_1 = U - z\frac{\partial W}{\partial x}, \quad U_2 = V - z\frac{\partial W}{\partial y}, \quad U_3 = W \tag{1.2}$$

Относительно основных напряжений, вместо закона Гука, принимаются те же допущения, что и в теории Кирхгофа:

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}), \quad \sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11}), \quad \sigma_{12} = 2G\varepsilon_{12} \tag{1.3}$$

где E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, $E = 2(1+\nu)G$, деформации ε_{ij} определяются согласно (1.2) по известным формулам:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) \tag{1.4}$$

Согласно (1.2) и (1.3), соотношения для напряжений имеют вид:

$$\begin{aligned} &\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial U}{\partial x} + \nu\frac{\partial V}{\partial y} - z\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)\right], \\ &\sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial V}{\partial y} + \nu\frac{\partial U}{\partial x} - z\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)\right], \\ &\sigma_{12} = G\left[\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} - 2z\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right] \end{aligned} \tag{1.5}$$

Осреднённые уравнения движения пластинки в усилиях и моментах имеют вид:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} - 2\beta U = \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_{-h}^{h} U_1 dz, \qquad \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial y} - 2\beta V = \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_{-h}^{h} U_2 dz \\ &\frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - N_1 + 2h^2\beta\frac{\partial W}{\partial x} = \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_{-h}^{h} zU_1 dz \\ &\frac{\partial M_2}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x} - N_2 + 2h^2\beta\frac{\partial W}{\partial y} = \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_{-h}^{h} zU_2 dz \\ &\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} = \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_{-h}^{h} U_3 dz \end{aligned} \tag{1.6}$$

Здесь приняты обозначения:

$$T_1 = \int_{-h}^{h} \sigma_{11} dz, \quad T_2 = \int_{-h}^{h} \sigma_{22} dz, \quad S = \int_{-h}^{h} \sigma_{12} dz,$$

$$M_1 = \int_{-h}^{h} z\sigma_{11}dz\,, \qquad M_2 = \int_{-h}^{h} z\sigma_{22}dz\,, \quad H = \int_{-h}^{h} z\sigma_{12}dz \tag{1.7}$$

$$N_1 = \int_{-h}^{h} \sigma_{13}dz\,, \quad N_2 = \int_{-h}^{h} \sigma_{23}dz$$

Уравнения (1.6) получаются в предположении, что на лицевых поверхностях слоя заданы граничные условия (1.1.) с учётом (1.5), выражения для усилий и моментов принимают вид:

$$T_1 = C\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \nu\frac{\partial V}{\partial y}\right), \quad T_2 = C\left(\frac{\partial V}{\partial y} + \nu\frac{\partial U}{\partial x}\right), \quad S = \frac{1-\nu}{2}C\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right), \; C = \frac{2Eh}{1-\nu^2} \tag{1.8}$$

$$M_1 = -D\left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right], \quad M_2 = -D\left[\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right], \quad H = -(1-\nu)D\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}, \; D = \frac{2h^3E}{3(1-\nu^2)}$$

Подстановка (1.8) в первые два уравнения системы (1.6) приводит к автономным уравнениям, определяющим планарные колебания слоя:

$$\begin{aligned} &\Delta U + \theta\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) - \frac{\rho}{Gh}U = \frac{\rho}{G}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \\ &\Delta V + \theta\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) - \frac{\rho}{Gh}V = \frac{\rho}{G}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \qquad \theta = \frac{1+\nu}{1-\nu} \end{aligned} \tag{1.9}$$

Уравнения изгиба пластинки получаются из трёх последних уравнений системы (1.8) с учётом (1.2):

$$-D\Delta^2 W + \frac{2h^3\rho}{3}\left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^2\partial t^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^2\partial t^2}\right) + 2h^2\beta\left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right] = 2h\rho\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \tag{1.10}$$

2. Рассмотрим одномерную задачу обобщённого плоского напряжённого состояния слоя:

$$W = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} = 0 \tag{2.1}$$

Уравнение колебания слоя имеет вид:

$$(1+\theta)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\beta}{Gh}U = \frac{\rho}{G}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \tag{2.2}$$

Решение будем искать в виде $U = e^{i(\omega t - \lambda x)}$. Отсюда получится $\lambda^2 = \frac{1-\nu}{2Gh}(h\rho\omega^2 - \beta)$, что при $h\rho\omega^2 - \beta < 0$ следует, что λ принимает мнимое значение, то есть в результате этого, волна не распространяется при $\omega^2 < \frac{\beta}{h\rho}$

При $\beta = 0, \quad \lambda^2 = \frac{\rho(1-\nu)}{2G}\omega^2$ (2.3)

Рассмотрим одномерную задачу изгиба пластинки (1.8):

$$-D\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2h^2\beta\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 2h\rho\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \tag{2.4}$$

Пусть на границах заданы условия шарнирного закрепления:

$$x = 0, a \quad W = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 \tag{2.5}$$

Решение уравнения (2.4) будем искать в виде:

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\lambda_n x\,, \quad \text{где} \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{a}, \quad f_n(t) = e^{i\omega t} \tag{2.6}$$

$$\omega^2 = \frac{D\lambda_n^4 + 2h^2\beta\lambda_n^2}{2\rho h} \tag{2.7}$$

При $\beta = 0$ получается $\dfrac{w^2}{\lambda_n^4} = \dfrac{D}{2h\rho}$ (2.8)

Структура уравнений (1.9), характеризующих обобщённое плоское напряжение слоя, показывает возможность разделения системы на автономные уравнения. Процедура разделения аналогична процедуре разделения системы уравнений движения упругости в перемещениях (уравнений Ламе) на уравнения продольных и сдвиговых волн [3]. При помощи преобразования [4]

$$U = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad V = \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{3.1}$$

Система (1.9) приводится к виду:

$$\frac{\partial}{\partial x}L_1(\varphi) + \frac{\partial}{\partial y}L_2(\psi) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}L_2(\psi) - \frac{\partial}{\partial y}L_1(\varphi) = 0 \tag{3.2}$$

Здесь операторы L_1 и L_2 определены следующим образом:

$$L_1(\varphi) = \frac{1-\nu}{2}\Delta\varphi - \frac{\rho}{Gh}\varphi - \frac{\rho}{G}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}, \qquad L_2(\psi) = \Delta\psi - \frac{\rho}{Gh}\psi - \frac{\rho}{G}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{3.3 }$$

Из системы (3.2) следует:

$$L_1(\varphi) = 0, \; L_2(\psi) = 0 \tag{3.4}$$

$$\Delta\varphi - \frac{2\rho}{C}\varphi = \frac{2\rho h}{C}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}, \quad \Delta\psi - \frac{\rho}{Gh}\psi = \frac{\rho}{G}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{3.5}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Miklowitz J. The theory of elastic waves and waverguides. //North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics. 1984. V.22. 618p.
2. Белубекян М.В. Об уравнениях теории пластин, учитывающих поперечные сдвиги. //В сб.: «Проблемы механики тонких деформируемых тел». Ереван: Изд. «Гитутюн» НАН РА, 2002. С.67-88.
3. Белубекян М.В. О полноте решений типа Ламе для плоских задач. //Доклады НАН Армении. 2003. Т.103. №2. С.109-114.
4. Белубекян В.М., Белубекян М.В. О граничных условиях теории пластин // Изв. АН Армении. Механика. 1999. Т.52. №2. С.11-21.

Сведения об авторе:

Мартиросян Кристине Левоновна - канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник Института механики НАН Армении.
Адрес: РА, 0019, Ереван, пр.Маршала Баграмяна, 24/2.
Тел.: (374 93) 83-10-18
E-mail: kristine.martirosyan@gmail.com

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ, КОГДА ПЛОСКОСТЬ ИЗОТРОПИИ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНА К ПЛОСКОСТИ, ОГРАНИЧИВАЮЩЕЙ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

Мгерян Д.Г.

Рассматривается трёхмерная задача распространения упругих поверхностных волн в трансверсально-изотропной упругой среде, когда плоскость изотропии перпендикулярна к плоскости, ограничивающей полупространство, на границе полупространства все напряжения равны нулю. Исследование задачи упрощается введением потенциальных функций по аналогу с задачами [1,2,3]. Получено и решено дисперсионное уравнение, определяющее значение параметра фазовой скорости поверхностной волны, получены условия затухания поверхностной волны. В работе приведены численные значения параметра скорости поверхностной волны для трансверсально-изотропного материала Ti.

1. Рассматривается трансверсально-изотропное упругое полупространство. Предполагается, что плоскость, ограничивающая полупространство, перпендикулярна к плоскости изотропии. Ось z направлена нормально к плоскости изотропии, ось y направлена нормально к плоскости, ограничивающей полупространство в глубь полупространства, а ось x направлена произвольно в плоскости изотропии. В таком случае полупространство в прямоугольной декартовой координатной системе занимает область $(-\infty < x < +\infty,\ 0 \le y < +\infty,\ -\infty < z < \infty)$.

Система дифференциальных уравнений, определяющая волновые процессы в этой среде, имеет вид:

$$
\begin{gathered}
c_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{2}(c_{11}-c_{12})\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+c_{44}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{1}{2}(c_{11}+c_{12})\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+(c_{13}+c_{44})\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\\
\frac{1}{2}(c_{11}-c_{12})\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+c_{11}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+c_{44}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+\frac{1}{2}(c_{11}+c_{12})\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+(c_{13}+c_{44})\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\\
c_{44}\Delta_2 w+c_{33}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+(c_{13}+c_{44})\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

Здесь u, v, w – проекции вектора перемещения на оси координат x, y, z, соответственно, c_{ij} – пять упругих независимых констант трансверсально-изотропной среды, ρ – плотность материала, Δ_2 – двумерный оператор Лапласа:

$$\Delta_2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{1.2}$$

Для первого и второго уравнений из системы (1.1), по аналогии с задачей плоской деформации [1], вводится преобразование

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\chi}{\partial y},\quad v=\frac{\partial\psi}{\partial y}-\frac{\partial\chi}{\partial x} \tag{1.3}$$

Отметим, что преобразование (1.3) было также использовано для пространственной задачи статики трансверсально-изотропного пьезоэлектрика [2], а также для пространственной задачи распространения поверхностных волн в изотропной среде [3].

С помощью преобразования (1.3) первые два уравнения системы (1.1) заменяются следующими уравнениями:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[c_{11}\Delta_2\psi+c_{44}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+(c_{13}+c_{44})\frac{\partial w}{\partial z}-\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{2}(c_{11}-c_{12})\Delta_2\chi+c_{44}\frac{\partial^2\chi}{\partial z^2}-\rho\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}\right]=0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[c_{11}\Delta_2\psi+c_{44}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+(c_{13}+c_{44})\frac{\partial w}{\partial z}-\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right]-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}(c_{11}-c_{12})\Delta_2\chi+c_{44}\frac{\partial^2\chi}{\partial z^2}-\rho\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}\right]=0$$

которые будут удовлетворены, если

$$\frac{1}{2}(c_{11}-c_{12})\Delta_2\chi+c_{44}\frac{\partial^2\chi}{\partial z^2}=\rho\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}, \quad c_{11}\Delta_2\psi+c_{44}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+(c_{13}+c_{44})\frac{\partial w}{\partial z}=\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{1.4}$$

Из первого уравнения системы (1.4) можно найти функцию χ. Из второго уравнения системы (1.4) имеем:

$$\frac{\partial w}{\partial z}=-(c_{13}+c_{44})^{-1}\left[c_{11}\Delta_2\psi+c_{44}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}-\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right] \tag{1.5}$$

Третье уравнение системы (1.1) дифференцируется по z:

$$c_{44}\Delta_2\frac{\partial w}{\partial z}+c_{33}\frac{\partial^3 w}{\partial z^3}+(c_{13}+c_{44})\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Delta_2\psi=\rho\frac{\partial^3 w}{\partial z\partial t^2} \tag{1.6}$$

Подстановка (1.5) в (1.6) даёт

$$\begin{gathered}\Delta_2^2\psi+2\alpha_1\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Delta_2\psi+\alpha_2\frac{\partial^4\psi}{\partial z^4}-\left(\frac{1}{c_1^2}+\frac{1}{c_2^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta_2\psi- \\ -\left(\frac{\alpha_2}{c_2^2}+\frac{1}{c_1^2}\right)\frac{\partial^4\psi}{\partial z^2\partial t^2}+\frac{1}{c_1^2c_2^2}\frac{\partial^4\psi}{\partial t^4}=0\end{gathered} \tag{1.7}$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\alpha_1=\frac{c_{33}c_{11}-c_{13}(c_{13}+2c_{44})}{2c_{11}c_{44}},\quad \alpha_2=\frac{c_{33}}{c_{11}},\quad c_1^2=\frac{c_{11}}{\rho},\quad c_2^2=\frac{c_{44}}{\rho} \tag{1.8}$$

В частном случае изотропной среды $c_{11}=c_{33}=\lambda+2\mu,\ c_{44}=\mu,\ \ c_{12}=c_{13}=\lambda,$ из (1.8) следует, что $\alpha_1=\alpha_2=1$.

Таким образом, система уравнений (1.1) привелась к решению автономных первого уравнения из (1.4) и уравнения (1.7). Второе уравнение из (1.4) будет определять функцию перемещения w после определения искомых ψ и χ.

При постановке задачи нахождения поверхностной волны необходимо удовлетворить условиям затухания:

$$\lim_{y\to\infty}u=0, \lim_{y\to\infty}v=0, \lim_{y\to\infty}w=0. \tag{1.9}$$

Решения уравнения (1.7) представляются в виде:

$$\psi=F(z)\exp i(\omega t-k_1x-k_2y),\ F(z)=Ae^{-p\Gamma z} \tag{1.10}$$

Подставляя (1. 10) в (1.7), получим:

$$\begin{gathered}p^4+\left\{\xi^2(\eta(1+\theta)-2)+(1-\xi^2)(\eta(1+\theta)-2\alpha_1)\right\}p+ \\ +(1-\eta)(1-\theta\eta)\xi^4+(1-\eta)(\alpha_2-\theta\eta)(1-\xi^2)^2+ \\ +\{2\alpha_1+\eta(-1+2(-1+\eta)\theta-\alpha_2)\}(1-\xi^2)\xi^2=0\end{gathered} \tag{1.11}$$

где

$$\theta=\frac{c_{44}}{c_{11}},\quad \eta=\frac{\omega^2}{c_2^2\Gamma^2},\quad \Gamma^2=k_1^2+k_3^2, \xi^2=\frac{k_1^2}{k_1^2+k_3^2}$$

η – безразмерный параметр фазовой скорости поверхностной волны.

Из корней уравнения (1.11) условиям затухания удовлетворяют только две, следовательно,

$$F=A_1e^{-p_1\Gamma z}+A_2e^{-p_2\Gamma z} \tag{1.12}$$

В частном случае, когда $k_1=0$ или $\xi=0$ (аналогичная задача с плоской подстановкой [4]), уравнение (1.11) преобразуется в соответствующее уравнение из [4]. В случае, когда $k_3=0$ или $\xi=1$, т.е. рассматривается распространение волны в плоскости (xy), что в данном случае является плоскостью изотропии, уравнение (1.11) преобразуется в уравнение: $p^4+\left\{\eta-1+\theta\eta-1\right\}p^2+(1-\eta)(1-\theta\eta)=0$, корни которого, очевидно, следующие:

$p^2=(1-\eta),\ \ p^2=(1-\theta\eta)$.

В частном случае изотропной среды: $\alpha_1=\alpha_2=1$ уравнение (1.11) преобразуется в уравнение, корни которого также являются $p^2=(1-\eta),\ \ p^2=(1-\theta\eta)$.

Решение первого уравнения из системы (1.4) представляется в виде:

$$\chi=\Phi(z)\exp i(\omega t-k_1x-k_2y),\ \Phi(z)=Be^{-p_3\Gamma z}\,. \tag{1.13}$$

Подставляя (1.13) в первое уравнение из системы (1.4), получим:

$$p^2=\xi^2(1-\alpha_3\eta)+(1-\xi^2)(\alpha_3-\alpha_3\eta)\,, \tag{1.14}$$

где

$$\alpha_3=\frac{2c_{44}}{c_{11}-c_{12}} \tag{1.15}$$

В частном случае изотропной среды $c_{44}=\mu,\ c_{11}=\lambda+2\mu,\ c_{12}=\lambda,\ \alpha_3=\dfrac{2\mu}{\lambda+2\mu-\lambda}=1,$

следовательно, уравнение (1.14) преобразуется в уравнение $p^2=1-\eta.$

$$u=[-ik_1(A_1e^{-p_1\Gamma y}+A_2e^{-p_2\Gamma y})-p_3\Gamma Be^{-p_3\Gamma y}]\times\exp i(\omega t-k_1x-k_3z)$$

$$v=[-p_1\Gamma A_1e^{-p_1\Gamma y}-p_2\Gamma A_2e^{-p_2\Gamma y}+ik_1Be^{-p_3\Gamma y}]\times\exp i(\omega t-k_1x-k_3z)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{c_{44}\Gamma}{c_{13}+c_{44}}\Big[[\theta^{-1}p_1^2\Gamma^2+\eta\Gamma^2-k_3^2-k_1^2\theta^{-1}]A_1e^{-p_1\Gamma y}+[\theta^{-1}p_2^2\Gamma^2+\eta\Gamma^2-k_3^2-k_1^2\theta^{-1}]A_2e^{-p_2\Gamma y}\Big]\times$$
$$\times\exp i(\omega t-k_1x-k_3z). \tag{1.16}$$

2. Рассматривается полупространство $(-\infty<x<+\infty, 0\le y<+\infty, -\infty<z<\infty)$ со свободной от нагрузки поверхностью

$$\sigma_{yy}=0,\ \ \sigma_{yx}=0,\ \ \sigma_{yz}=0 \quad \text{при} \quad y=0 \tag{2.1}$$

Граничные условия (2.1) в перемещениях имеют вид:

$$\begin{gathered} c_{12}\frac{\partial u}{\partial x}+c_{11}\frac{\partial v}{\partial y}+c_{13}\frac{\partial w}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0,\\ \frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}=0 \text{ или } \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\end{gathered} \tag{2.2}$$

Подстановка (1.16) в (2.2) приводит к следующей системе однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных $A_1,\ A_2,\ B$:

$$\left\{-c_{12}\xi^2+c_{11}p_1^2-\frac{c_{44}c_{13}}{c_{44}+c_{13}}\Big[\theta^{-1}p_1^2+\eta-(1-\xi^2)-\theta^{-1}\xi^2\Big]\right\}A_1+$$
$$\left\{-c_{12}\xi^2+c_{11}p_2^2-\frac{c_{44}c_{13}}{c_{44}+c_{13}}\Big[\theta^{-1}p_2^2+\eta-(1-\xi^2)-\theta^{-1}\xi^2\Big]\right\}A_2+\left\{c_{12}i\xi p_3-c_{11}i\xi p_3\right\}B=0$$
$$2ip_1\xi A_1+2ip_2\xi A_2+\left\{p_3^2+\xi^2\right\}B=0 \tag{2.3}$$
$$p_1\left\{(1-\xi^2)+\frac{c_{44}}{c_{44}+c_{13}}\Big[\theta^{-1}p_1^2+\eta-(1-\xi^2)-\theta^{-1}\xi^2\Big]\right\}A_1+$$
$$p_2\left\{(1-\xi^2)+\frac{c_{44}}{c_{44}+c_{13}}\Big[\theta^{-1}p_2^2+\eta-(1-\xi^2)-\theta^{-1}\xi^2\Big]\right\}A_2-i\xi(1-\xi^2)B=0$$

Равенство нулю детерминанта системы (2.3) приводит к дисперсионному уравнению

$$R(\eta,\xi)=0 \tag{2.4}$$

Таблица 1

ξ	Damping cond	η
0	(0;1)	0.88048
0.1	(0;0.997537)	0.877143 ; 0.99
0.2	(0;0.99015)	0.867709 ; 0.96
0.3	(0; 0.977837)	0.85332; 0.91
0.4	(0; 0.9606)	0.834907; 0.84
0.5	(0; 0.938437)	0.75; 0.813017
0.6	(0; 0.911349)	0.64; 0.787959
0.7	(0; 0.879336)	0.51; 0.759951
0.8	(0; 0.842398)	0.36; 0.729231
0.9	(0; 0.800535)	0.19; 0.696158
1	(0; 0.753747)	0.661374

В частном случае, когда $k_1 = 0$ или $\xi = 0$ (аналогичная задача с плоской подстановкой [4]), уравнение (2.4) преобразуется в соответствующее уравнение из [4]. В случае, когда $k_3 = 0$ или $\xi = 1$, т.е. рассматривается распространение волны в плоскости (*xy*), что в данном случае является плоскостью изотропии и с учётом того, что в случае изотропии $c_{44} = \dfrac{c_{11} - c_{12}}{2}$, уравнение (2.4) преобразуется в уравнение Рэлея для изотропных сред.
В частном случае изотропной среды: $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ уравнение (2.4) также преобразуется в уравнение Рэлея для изотропных сред.

В табл.1 представлены корни уравнения (2.4) и условие затухания в зависимости от значений ξ для трансверсально-изотропного материала Ti.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
2. Wàng Z., Zheng B. The general solution of the three – dimensional problems in piezoelectric media.// Int. J. Solids and Structures. 1995. Vol.32. №1. P.105–115.
3. Белубекян В.М., Белубекян М.В. Трёхмерная задача поверхностных волн Релея. // Докл. НАН Армении. 2005. Т.105. №4. С.362 –369.
4. D. H. Mheryan, V. M. Belubekyan. Surface waves in transversely isotropic media. Proceedings of XXXVII Summer School – Conference Advanced Problems in Mechanics, 2009, St. Petersburg (Repino).

Сведения об авторе:

Мгерян Давид Гензелович – канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник, Института механики НАН Армении, Ереван, Армения, (+374 96) 096444, **E-mail:** davidmher@mail.ru

ВОЗМОЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ФРИКЦИОННЫХ БЕЗАСБЕСТОВЫХ МАТЕРИАЛОВ БАСТЕНИТ В ТОРМОЗАХ ГРУЗОВОГО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

Меликсетян Н.Г., Меликсетян Г.Н.

Для тормозов грузового железнодорожного транспорта разработан фрикционный безасбестовый полимерный материал с применением базальтовых и стеклянных волокон, полученных из минералов армянского месторождения. На основе двухэтапного цикла сравнительных испытаний выявлены трибологические характеристики созданного материала. Рекомендуется его использовать в железнодорожном транспорте.

Безасбестовые фрикционные материалы уже, почти 20 лет, успешно используются в тормозных устройствах автотранспортных средств, подъёмно-транспортных машин, кузнечно-прессового и нефтеперерабатывающего оборудований и многих других фрикционных устройств. Однако, задерживается их использование в тормозах железнодорожного транспорта из-за интенсификаций движений, увеличения инерционных масс движущихся частей машин, повышения нагрузочно-скоростных параметров эксплуатации и необходимости обеспечения экологической безопасности окружающей среды. Применяемые в настоящее время безасбестовые фрикционные материалы не всегда удовлетворяют возросшим требованиям эксплуатации железнодорожного транспорта.

Еще в 1980-х годах совместно с ВНИИАТИ (ТИИР г. Ярославль, РФ) нами проведены комплексные исследования в направлении изучения работоспособности тормозных фрикционных материалов. Установлены основные закономерности высокотемпературного трения и изнашивания поверхностных слоёв традиционных композиционных фрикционных материалов. Эти исследования открыли новые перспективы для создания более работоспособных и, главное, экологически безвредных фрикционных материалов. В результате исследований были разработаны новые фрикционные безасбестовые полимерные материалы под общим названием Бастенит на основе комбинированных связующих, армирующих волокон из минералов армянского месторождения (базальтовые и стеклянные волокна) и фрикционных добавок [1].

Железнодорожный транспорт Армении из-за отсутствия отечественного производства фрикционных материалов пользуется, в основном, тормозными колодками производства РФ. Широко применяется продукция Уральского, Барнаулского и Ярославского заводов асбестотехнических изделий. Поэтому, разработка фрикционных безасбестовых тормозных колодок железнодорожного транспорта является актуальной задачей.

Для реализации больших тормозных мощностей на железнодорожных вагонах Европейских стран применяют колодки из металлокерамических материалов, обладающих стабильным в любую погоду коэффициентом трения, очень высокой износостойкостью, удовлетворительной теплопроводностью. Они обычно содержат 40…50 % бронзы, 10…20% алюмосиликатов, 25…35 % графита и 5…15 % железного порошка, смесь которых формируются в брикеты в пресс-формах при высоком давлении и температуре и подвергаются дополнительной термообработке. Соотношение ингредиентов изменяется в зависимости от задаваемой для колодки средней величины коэффициента трения, необходимой износостойкости, создания благоприятного воздействия на поверхность катания колеса, малого износа рабочей поверхности колеса без образования термических трещин, выработок, прижогов, наваров и прочих дефектов. Однако, металлокерамические колодки могут создать большие термические нагрузки на поверхности катания колес во время торможения при высоких скоростях и больших мощностях (до 800 кВт) на колесную пару. В настоящее время на железнодорожном транспорте (ж/д) применяются также чугунные тормозные колодки по размерам, соответствующим требованиям Международного Европейского союза ж/д. Технические требования этих колодок в странах СНГ регламентируется на основании ТУ-2571-028-00149386-2000 [2,3].

Цель работы: Разработать фрикционный безасбестовый полимерный материал для тормозов грузовых железнодорожных вагонов, эксплуатирующихся в горных условиях.

На основе анализа эусплуатационных характеристик режимные параметров работы железнодорожных тормозов в горных условиях приведены в таблице.

Режимные параметры работы железнодорожных тормозов в горных условиях

Режимные параметры	Величина
Скорость скольжения, м/с	20-30
Удельная нагрузка, ГПа	4,5-10,5
Удельная работа сил трения, $x10^6$ Дж/м^2	1,0-2,5
Удельное давление на контакте, МПа	0,7-5,0
Удельная мощность трения, $x10^6$ Вт/м^2	15-40
Температура на поверхности трения при длительном торможении, ^{0}С	800
Максимальная температура на поверхности трения при повторно-кратковременном режиме торможения, ^{0}С	250-350
Коэффициент взаимного перекрытия дисково-колодочных тормозов	0,10-0,15

Анализ этих параметров показывает, что тормозные колодки железнодорожных вагонов должны обеспечивать высокие трибологические характеристики в более широком диапазоне поверхностных температур (до 800^{0}С) при сравнительно низких удельных давлениях и высоких скоростях скольжения, чем колодки автомобильных тормозов (до 650^{0}С). Кроме того, фрикционный материал тормозов железнодорожных вагонов должен иметь более стабильный коэффициент трения при температурах выше 700^{0}С и выдержать большие мощности трения.

Учитывая ранее полученные результаты [1], в качестве армирующих веществ апробировалась смесь базальтовых и стеклянных волокон в соотношении 60:40 масс.ч. Термохимические свойства сопоставлялись со свойствами различных волокон методом термогравиметрического анализа на дериватографе ОД-102. Для устранения влияния массы на термохимические свойства применялись одинаковые навески материалов (примерно, 25 гр). До начала эксперимента для удаления из составов адсорбированной воды они высушивались в сушилке при температурах 200 ^{0}С и после охлаждения вводились в нагревательную камеру дериватографа. Материалы нагревались со скоростью 10^{0}С/мин по программе до 1000^{0}С. Результаты приведены на рис.1.

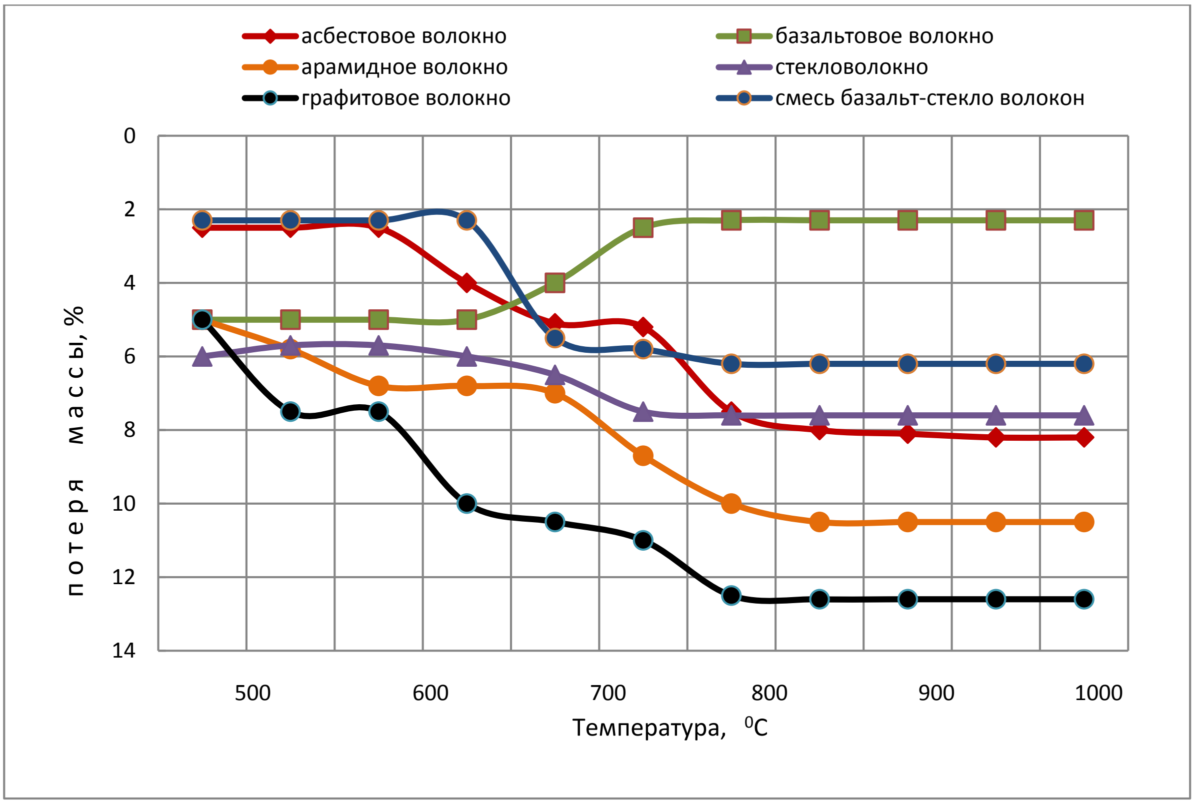


Рис.1. Кривые термогравиметрического анализа различных волокон

Видно, что интенсивное разложение асбестового волокна начинается при температуре 600^{0}С и заканчивается при 800^{0}С, тогда как интенсивное разложение смеси базальтовых и стеклянных волокон начинается при температуре 750^{0}С и заканчивается, примерно, при 900^{0}С. Этот факт указывает на то, что с применением смеси базальтовых и стеклянных волокон взамен асбестового в качестве армирующего наполнителя, стадия механохимических превращений при трении должен протекать при сравнительно высоких температурах [1].

Для подтверждения этого положительного технического эффекта, из композиционного материала [4] были изготовлены железнодорожные тормозные колодки согласно требованиям [2,3]. Выбор ингредиентов был обусловлен опытом эксплуатации и критериями работоспособности железнодорожных тормозных колодок. Принципиальная схема технологии производства представлена на рис.2.

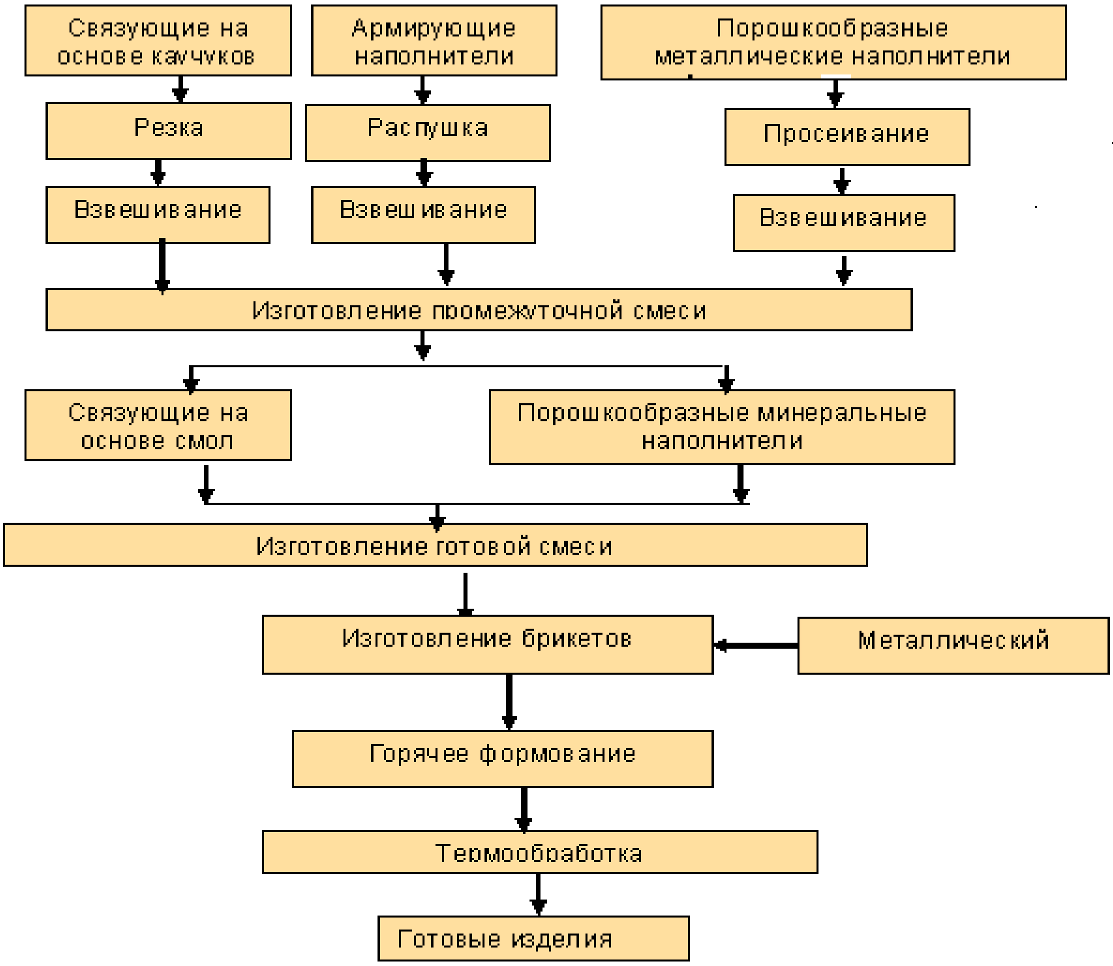


Рис.2. Принципиальная схема технологии производства фрикционного безасбестового композиционного материала для тормозов железнодорожных вагонов

В нагретый до 80 ^{0}С резиносмеситель загружаются бутадиеновый каучук, смесь стеклянных и базальтовых волокон, порошок меди, диабаза и трибромбензойной кислоты. Под давлением 0,5 МПа содержимое смешивается в течение 4 мин. Далее в камеру резиносмесителя добавляются остальные ингредиенты и смешивают полученную массу в течение 6 мин. После выгрузки, с целью снижения внутренних напряжений, производится охлаждение смеси до комнатных температур. Затем в горячих пресс-формах производится прессование колодок под давлением 60 МПа при температуре 180 ^{0}С. Полученные колодки подвергаются дополнительной термообработке в сушильной печи при 230 ^{0}С.

Сравнительная оценка работоспособности предлагаемого материала проводилась на основе двухэтапного рационального цикла испытаний; а) лабораторные – на установке FM-9 по ГОСТ Р ИСО 7881-94, б) стендовые – на инерционном стенде по методике ТМ № 02-001-91 ВНИИЖТ. В качестве аналога выбрана тормозная колодка (ТУ-2571-028-00149386-2000) производства Барнаулского завода АТИ, изготовленная из композиции ТИИР-300.

При лабораторных испытаниях проводились также сравнительные эксперименты материалов в двух режимах трения – изотермического торможения и с нагревом. В изотермическом режиме торможения проводились 20 торможений при начальной температуре 150 ^{0}C с регистрацией конечной температуры каждого торможения. При этом, после каждого торможения, тормозной диск охлаждался до 150 ^{0}C и далее проводилось следующее торможение. При нагревном цикле тормозной диск не охлаждался и торможения проводились через каждый 10 сек с регистрацией конечной температуры. Эксперименты проводились при удельном давлении на фрикционный образец 3,0 МПа и скорости скольжения 7,5 м/с. Фрикционные образцы имели форму кубика с размерами 25,4 x 25,4 x 6 мм. Результаты лабораторных испытаний приведены на рис. 3.

Как видно, при изотермическом режиме трения (рис.3,а) значения коэффициента трения предлагаемого материала примерно на 12% выше, чем ТИИР-300. При нагревном режиме трения (рис.3, б) предлагаемый материал также обеспечивает сравнительно высокие значения коэффициента трения. Это обусловлено тем, что на поверхности трения, базальтовые волокна, находясь в недиспергированном состоянии, при непосредственном контакте с металлическим контртелом, обеспечивают высокие значения коэффициента трения. За весь цикл испытаний весовой износ ТИИР-300 и предлагаемого материала составил 0,45 и 0,42 мг соответственно, что в рамках требований ТУ-2571-028-00149386-2000.

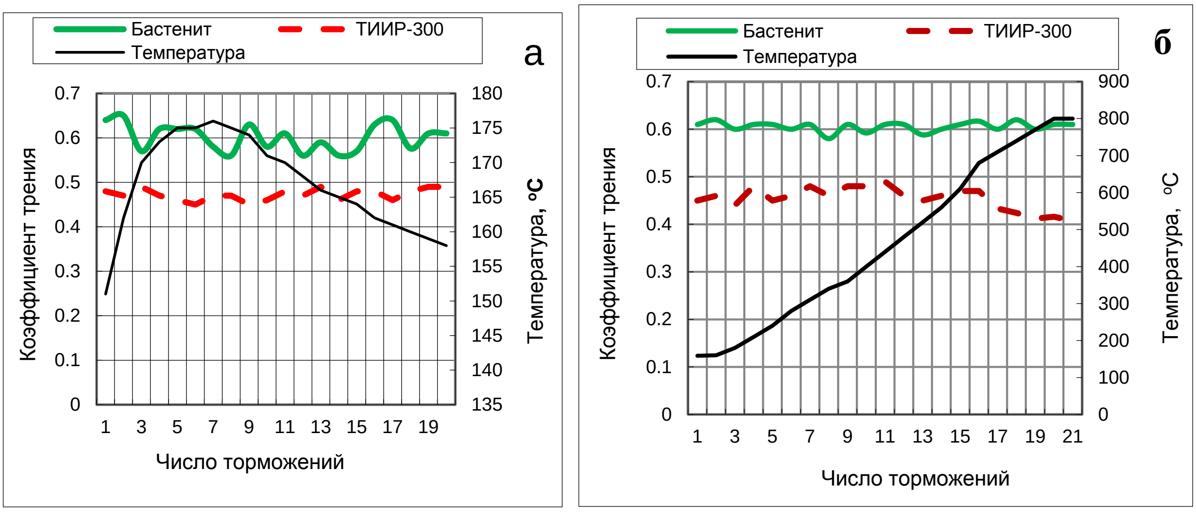


Рис.3. Зависимость коэффициента трения от числа торможений и температуры
при изотермическом (а) и нагревном (б) режимах трения

На основании полученных данных проводились стендовые испытания. Полный цикл испытаний содержал 13 служебных остановочных торможений при начальных скоростях движения вагона 20-160 км/ч и усилии на колодку 10 кН. Полученные данные сравнивались с результатами испытаний тормозных колодок, изготовленных из чугунных, металлокерамических и композиционных фрикционных полимерных материалов (КФПМ). Результаты сравнительного анализа приведены на рис. 4.

Видно (рис.4,а), что в условиях высоких скоростей (выше 60 км/ч) тормозные колодки из материала типа Бастенит, по сравнению с другими, сохраняют повышенные и стабильные значения коэффициента трения. Детальный осмотр поверхностей трения тормозных колодок из предлагаемого материала и колёс после испытаний показал, что фрикционное взаимодействие колодок с поверхностями катания колёс не привело к образованию в колёсах термических трещин, вышербин, неравномерного износа, сдвигов металла на колёсах и другие дефекты, предусмотренные по требованиям НБ ЖТ ЦВ-ЦЛ 009-99. Разброс значений коэффициента трения (рис.4,б) не превышает 8 %, что в рамках требований стандарта РФ НБ ЖТ ЦВ-ЦЛ 009-99.

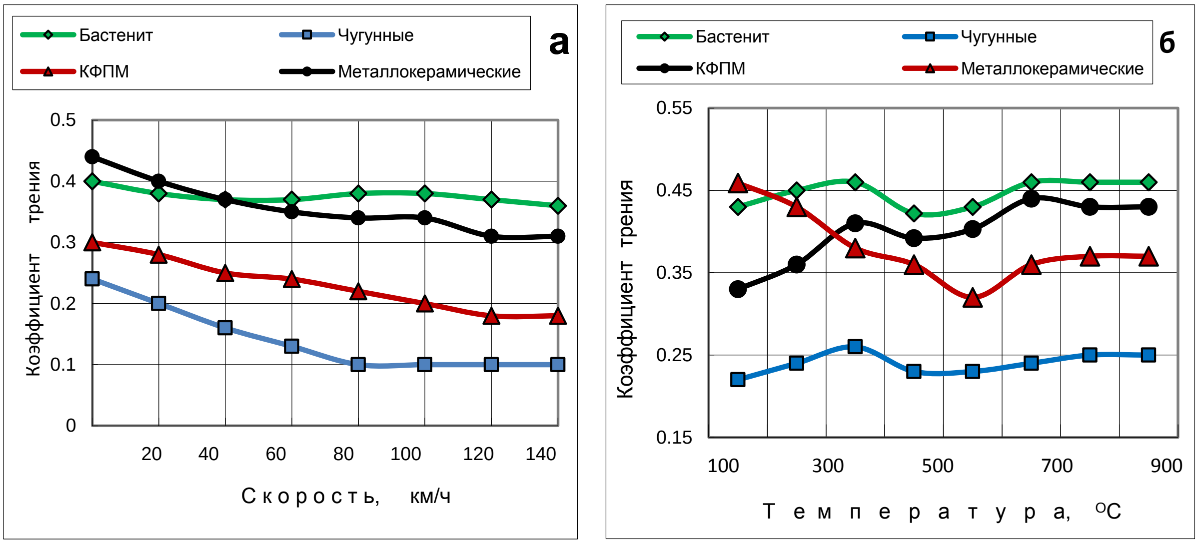


Рис.4. Сравнительные результаты стендовых испытаний а) зависимость коэффициента трения от скорости передвижения, б)зависимость коэффициента
трения от поверхностной температуры

Таким образом результаты лабораторных и стендовах испытаний показывают, что значения коэффициента трения предлагаемого материала примерно на 12% выше, чем выбранного аналога. При нагревном режиме трения предлагаемый материал также обеспечивает сравнительно высокие значения коэффициента трения. Сравнительные стендовые испытания показывают, что в условиях высоких скоростей (выше 120 км/ч) тормозные колодки из разработанного материала сохраняют повышенные и стабильные значения коэффициента трения по сравнению с колодками из чугунных, металлокерамических и композиционных полимерных материалов. Новый фрикционный безасбестовый материал для тормозов железнодорожных вагонов соответствует требованиям международных стандартов и может быть рекомендован для дальнейших дорожных эксплуатационных испытаний в горных условиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Погосян А.К., Сысоев П.В., Меликсетян Н.Г. и др. Фрикционные композиты на основе полимеров . Минск: Информтрибо, 1992. 218 с.
2. ЖДМ-online Информационная служба журнала Железные дороги мира. Фрикционные материалы для тормозов. - ЖДМ 07-2003 http://www.css-rsd.ru/zdm/07-2003
3. Вуколов Л.А., Жаров В.А. Сравнительные характеристики тормозных колодок различных поставщиков // Вестник ВНИИЖТ. – Москва, 2005. №2. С. 16-20.
4. Պողոսյան Ա.Կ., Մելիքսեթյան Ն. Գ., Մելիքսեթյան Գ.Ն. Շփական բաղադրանյութ: ՀՀ Գյուտի արտոնագիր N , 2909A // ԱՐԴՅՈՒՆԱԲԵՐԱԿԱՆ ՍԵՓԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ, Պաշտ. Տեղ. N1, Երևան, 2015:

Сведения об авторах:

Меликсетян Норик Галустович – д.т.н, доц., Ванадзорский филиал Национального Политехнического Университета Армении, **Тел.:** (+374 322) 4-73-74, (374 93) 66 80 04
E-mail: n_meliksetyan@mail.ru

Меликсетян Галуст Норикович –магистрант Национального Политехнического Университета Армении, **Тел.:** (374 93) 44 73 74; **E-mail:** g_meliksetyan93@mail.ru

ФУНКЦИЯ ГРИНА И ДВУМЕРНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПО ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЛОПАСТИ ВЕТРОУСТАНОВКИ

Мещеряков К.И.

В трёхмерной постановке рассматривается задача обтекания лопасти ветроэнергетической установки в идеальной несжимаемой жидкости. Лопасть представляет собой тонкую закрученную пластину с переменной хордой. Лопасть подвергается воздействию одномерного набегающего потока, направленного вдоль оси вращения ветроустановки. За счёт этого лопасть принимает вращательное движение. Таким образом, угол атаки зависит от угла установки и угла, определяемого скоростями набегающего потока и вращения лопасти. Используя функцию Грина для уравнения Лапласса, получено интегральное уравнение, путем решения которого может быть определен крутящий момент, создаваемый лопастью при заданном режиме работы. Предлагается численная схема, позволяющая произвести решение полученного интегрального уравнения.

1. Постановка задачи. Рассмотрим тонкую закрученную лопасть ветротурбинной установки, вращающуюся с угловой скоростью ω в несжимаемой идеальной жидкости. На лопасть с постоянной скоростью u_0 набегает однородный поток, направленный вдоль оси её вращения. Считаем, что угол установки лопасти α_b мал по всему размаху лопасти. В предлагаемой модели будем считать, что течение потенциально всюду за исключением спиральной вихревой пелены, генерируемой лопастью, а также что давление p и компонента вектора скорости, направленная вдоль оси вращения v_1, непрерывны во всей области.

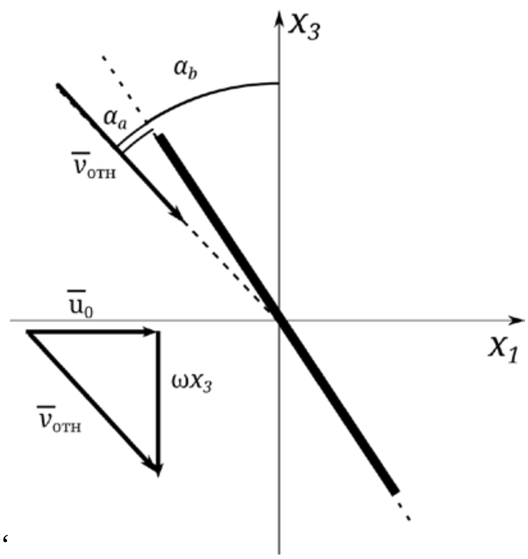


Рис.1. Обтекание лопасти

Будем считать, что угол между нормалью к вихревой пелене и осью вращения лопасти мал, что выполняется при достаточно больших значениях ω. В случае, если угол атаки α_a, определяемый ω и u_0 достаточно мал, можно считать, что возмущения, вносимые вращением лопасти в давление p и скорость $\overline{v}$ малы:

$$p = p_0 + p', \overline{v} = \overline{u}_0 + \overline{v}' \Rightarrow v_1 = u_0 + v_1', v_r = v_r', v_\theta = v_\theta', \left(\frac{|v'|}{u_0} = 1 \right) \tag{1}$$

Кроме того, малость угла установки позволяет в линейном приближении считать, что лопасть лежит очень близко к плоскости $x_1 = 0$, и граничное условие непротекания в линейной постановке принимает следующий вид :

$$\bar{v}\cdot\bar{n}=\bar{v}_b\cdot\bar{n}\Rightarrow u_0+v_1^{'}=\omega r\alpha_b\Rightarrow v_1^{'}|_S=\omega r\alpha_b-u_0 \tag{2}$$

Если считать, что во вращающейся координатной системе, связанной с лопастью, задача является стационарной, то в невращающейся системе выполняется:

$$\varphi(x_1,r,\omega t+\theta,t)=\varphi(x_1,r,\theta,0)\Rightarrow\omega\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0 \tag{3}$$

Учитывая это, из линеаризации интеграла Коши-Лагранжа получим, что

$$\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\text{const}=\frac{p_0}{\rho}+\frac{v_0^2}{2}\Rightarrow\frac{p^{'}}{\rho}+u_0v_1^{'}-\omega\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=0 \tag{4}$$

Отсюда, учитывая, что p и $\bar{v}$ непрерывны, можно сделать вывод, что и функция $\sigma=\partial\varphi/\partial\theta$ является регулярной повсюду внутри жидкости. В этом случае, для этой функции справедливо основное представление теории потенциала:

$$\sigma(x)=\iint\limits_S\left[\sigma(y)\frac{\partial G(y,x)}{\partial n_y}-\frac{\partial\sigma(y)}{\partial n_y}G(y,x)\right]ds_y, \tag{5}$$

где $G(y,x)=\frac{1}{4\pi}$ – функция Грина для уравнения Лапласса $\Delta_y G(y,x)=-\delta(y-x)$ в безграничном пространстве.

2. Вывод интегрального уравнения. Поскольку в линейном приближении считаем, что поверхность лопасти лежит в плоскости $x_1=0$, то

$$\frac{\partial\sigma}{\partial n_y}=\frac{\partial}{\partial n_y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)=\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n_y}\right)=\frac{\partial v_n}{\partial\theta}=0 \tag{6}$$

в силу граничного условия непротекания $v_n=0$.

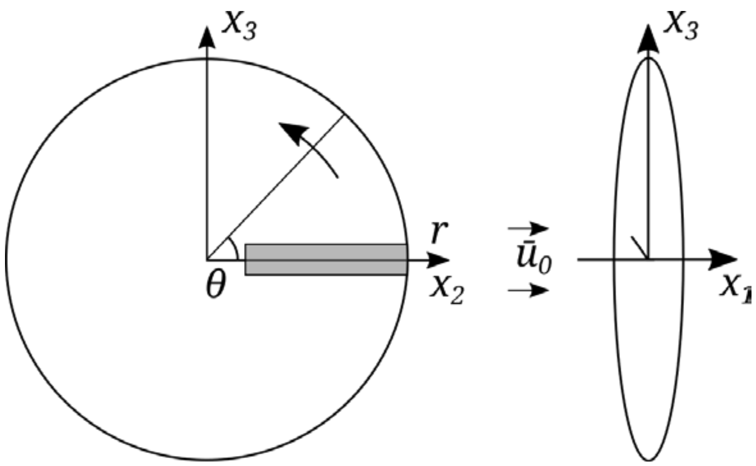


Рис.2. Координатные оси

Обозначим скачок функции σ при переходе сквозь поверхность лопасти через $\gamma(y)=\left[\sigma^+(y)-\sigma^-(y)\right]\Big|_S$. Тогда интегральное представление (5) примет следующий вид: ($x=(x_1,r,\theta),y=(y_1,\mu,\psi)$ в цилиндрической системе координат и $x=(x_1,x_2,x_3),y=(y_1,y_2,y_3)$ – в декартовой системе координат, изображённых на рис.2):

$$\frac{\partial\varphi'(x_1,r,\theta)}{\partial\theta} = \iint_S \gamma(y)\frac{\partial G(y,x)}{\partial y_1}ds_y = \frac{x_1}{4\pi}\iint_S \gamma(y)\frac{dy_2dy_3}{|y-x|^3},$$
$$|y-x| = \sqrt{x_1^2+(y_2-x_2)^2+(y_3-x_3)^2} \quad (7)$$

Проинтегрировав (7) по углу θ, получим:

$$\varphi'(x_1,r,\theta_0)-\varphi'(x_1,r,\theta)=\iint_S \gamma(y)\left[\int_\theta^{\theta_0}\frac{\partial G(y,x)}{\partial y_1}d\tau\right]ds_y = \frac{x_1}{4\pi}\iint_S \gamma(y)\left(\int_\theta^{\theta_0}\frac{d\tau}{|y-x|^3}\right)dy_2dy_3, \quad (8)$$

где θ_0 – угол, достаточно удалённый от положения лопасти в рассматриваемый момент времени.

Проинтегрировав (8) по x_1, получаем:

$$\frac{\partial\varphi'(0,r,\theta_0)}{\partial x_1}-\frac{\partial\varphi'(0,r,\theta)}{\partial x_1}=\iint_S \gamma(y)\left[\int_\theta^{\theta_0}\frac{\partial^2 G(y,x)}{\partial y_1\partial x_1}d\tau\right]_{x_1=y_1=0} ds_y =$$
$$=\frac{1}{4\pi}\iint_S \gamma(y)\left(\int_\theta^{\theta_0}\frac{d\tau}{|y-x|^3}\right)dy_2dy_3, \quad (9)$$

что, с учётом (2), приводит к следующему интегральному уравнению:

$$\frac{\partial\varphi'(0,r,\theta_0)}{\partial x_1}-\omega r\alpha_b+u_0=\frac{1}{4\pi}\iint_S \gamma(y)\left(\int_\theta^{\theta_0}\frac{d\tau}{|y-x|^3}\right)dy_2dy_3,(r,\theta)\in S \quad (10)$$

Данное интегральное уравнение позволяет определить функцию $\gamma(y), y\in S$, после чего разность давлений на верхней и нижней поверхностях лопасти находится из (4)

$p'_- - p'_+ = -\rho\omega\gamma(y),$

поскольку, как следует из (2), v_1' не терпит разрыва при переходе через поверхность лопасти.

3. Численная схема. Для численного решения задачи используем адаптированную схему, данную в [1]. Узлы расчётной сетки расположим следующим образом: по переменной вдоль размаха лопасти $x_2^i=(i-0.5)h_2,(i=1..N_2),h_2=L/N_2$, и по переменной вдоль хорды $x_3^n=-b+(n+0.5)h_3,(n=1..N_3),h_3=2b/(N_3+1),y_3^\ell=x_3^\ell-h_3/2=-b+\ell h_3,(\ell=1..N_3)$. Введём вспомогательные декартовые переменные, соответствующие углу $\tau:\xi_2=r\cos\tau,\xi_3=r\sin\tau,r=\sqrt{(x_2^i)^2+(x_3^n)^2}$. Разобьём интеграл по τ в (10) на два: 1) по лопасти ($\theta\le\tau\le\theta_b$, где θ_b соответствует полярному углу на передней кромке) и 2) по области внутри жидкости перед передней кромкой ($\theta_b\le\tau\le\theta_0$). В силу малости ширины лопасти, примем что в первой области $|\xi_3|=r,|x_3^n|=r.$ Тогда в этой области $r\approx x_2^i$, $d\tau\approx d\xi_3/r$, $\xi_2\approx r\approx x_2^i$. Положим в (10) $\theta_0=\pi$, тогда интеграл по τ в этой формуле при $x_3=x_3^n,y_3=y_3^\ell$ равен:

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\theta}^{\pi}\frac{d\tau}{|y-x|^3} \approx \frac{1}{r}\int\limits_{x_3^n}^{b}\frac{d\xi_3}{[(\xi_3-y_3^{\ell})^2+(y_2-x_2^i)^2]^{3/2}}+\\
+\int\limits_{b}^{r}\frac{d\xi_3}{\sqrt{r^2-\xi_3^2}[(\xi_3-y_3^{\ell})^2+(y_2-\sqrt{r^2-\xi_3^2})^2]^{3/2}}+\\
+\int\limits_{0}^{r}\frac{d\xi_3}{\sqrt{r^2-\xi_3^2}[(\xi_3-y_3^{\ell})^2+(y_2+\sqrt{r^2-\xi_3^2})^2]^{3/2}}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Первый интеграл из (11) берётся в явном виде:

$$
\int\limits_{x_3^n}^{b}\frac{d\xi_3}{[(\xi_3-y_3^{\ell})^2+(y_2-x_2^i)^2]^{3/2}}=\left[\frac{\xi_3-y_3^{\ell}}{(y_2-x_2^i)^2\sqrt{(\xi_3-y_3^{\ell})^2+(y_2-x_2^i)^2}}\right]_{\xi_3=x_3^n}^{b}
\tag{12}
$$

Таким образом, квадратурная формула для интегрального уравнения (10) принимает следующий вид:

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_{S}\gamma(y)\left(\int_{\theta}^{\theta_0}\frac{d\tau}{\left|y-x\right|^3}\right)dy_2dy_3 \quad \approx \quad h_3\sum_{j=1}^{N_2}\sum_{\ell=1}^{N_3}\gamma(x_2^j,y_3^{\ell})\Bigg\{-\frac{1}{r}\left[\frac{\sqrt{(\xi_3-y_3^{\ell})^2+(y_2-x_2^i)^2}}{(\xi_3-y_3^{\ell})(y_2-x_2^i)}\right]_{\xi_3=x_3^n}^{b} + \\
+\quad \int\frac{(y_2-\sqrt{r^2-\xi_3^2})d\xi_3}{\sqrt{r^2-\xi_3^2}(\xi_3-y_3^{\ell})^2\sqrt{(\xi_3-y_3^{\ell})^2+(y_2-\sqrt{r^2-\xi_3^2})^2}}+\\
+\quad \int\limits_{0}^{r}\frac{(y_2+\sqrt{r^2-\xi_3^2})d\xi_3}{\sqrt{r^2-\xi_3^2}(\xi_3-y_3^{\ell})^2\sqrt{(\xi_3-y_3^{\ell})^2+(y_2+\sqrt{r^2-\xi_3^2})^2}}\Bigg\}_{y_2=x_2^j-h_2/2}^{x_2^j+h_2/2}
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Для решения интегрального уравнения (10) введём две опорные точки: $\theta_{0,1}=\pi$ и $\theta_{0,2}=\pi/2$ и используем следующий итеративный процесс:

1) Уравнение (10) решается с опорной точкой $\theta_{0,1}$. В качестве θ выберем срединную линию лопасти, т.е $\theta=0$. Поскольку угол $\theta_{0,1}$ соответствует положению строго напротив лопасти, то в нулевом приближении можно считать, что $\partial\varphi'\left(0,r,\theta_{0,1}\right)/\partial x_1=v_1'(0,r,\pi)=v_1'(0,r,0)=u_0-\omega r\alpha_b$, и ею можно пренебречь. Найдя при этом предположении из (10) функцию $\gamma(y), y\in S$, подставим её в то же интегральное уравнение, взятое с опорной точкой $\theta_{0,2}$ чтобы найти величину $\partial\varphi'\left(0,r,\theta_{0,2}\right)/\partial x_1$.

2) Подставим найденную величину $\varphi'\left(0,r,\theta_{0,2}\right)/\partial x_1$ для опорной точки $\theta_{0,2}$ в (10) и решим это уравнение, найдя таким образом новые значения $\gamma(y), y\in S$. Найденные значения вновь подставим в (10), взятое с опорной точкой $\theta_{0,1}$ для нахождения величины $\partial\varphi'\left(0,r,\theta_{0,1}\right)/\partial x_1$.

3) Повторим процесс, начиная с шага 1, используя в качестве $\partial\varphi'\left(0,r,\theta_{0,1}\right)/\partial x_1$ значение,

полученное на предыдущем шаге.

Если значения величин $\gamma(y), y \in S$, $\partial\varphi'(0,r,\pi)/\partial x_1$ и $\partial\varphi'(0,r,\pi/2)/\partial x_1$ будут стабилизироваться и, кроме того, величины $\partial\varphi'(0,r,\pi)/\partial x_1$ и $\partial\varphi'(0,r,\pi/2)/\partial x_1$ на всех шагах будут оставаться малыми, это будет означать, что итерационный процесс сходится.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ, проект № 9.1371.2014/К.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М.: Наука, 1985.
2. Сумбатян М.А., А Скалия. Основы теории дифракции с приложениями в механике и акустике. М.: Физматлит, 2013.
1. 3.Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Т.1,2. М.: Наука, 1981.
3. Е. Скучик. Основы акустики. Т.2. М.: Мир, 1976.
4. D.G. Duffy, Green's Functions with Applications. CRC Press: Boca Raton, Florida, 2001.

Сведения об авторе:

Мещеряков Константин И. – ассистент кафедры теоретической и компьютерной гидроаэродинамики, Южный федеральный университет, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича, г. Ростов-на-Дону, +7 (950) 848-90-21
E-mail: m.keyran@gmail.com

ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА БЕСКОНЕЧНОГО ПОЛОГО ЦИЛИНДРА ПРОИЗВОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ С ТУННЕЛЬНЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Михаськив В.В., Кириллова О.И.

Решена задача по определению напряжённого состояния вблизи тонкого жёсткого включения в бесконечном полом цилиндре произвольного сечения при колебаниях продольного сдвига. Предложен подход, при котором отдельно удовлетворяются условия на включении и на границах цилиндра. Получены приближённые формулы для вычисления коэффициентов интенсивности напряжений и исследовано влияние на их значения частоты колебаний, а также геометрии цилиндра и расположения дефекта.

Исследование напряжённого состояния в ограниченных телах с включениями, находящихся под действием гармонической нагрузки, является актуальным как для определения условий разрушения тел через оценку коэффициентов интенсивности динамических напряжений возле включения, так и диагностики таких дефектов, исходя из информации об их влиянии на резонансные частоты. Предыдущие результаты в этом направлении относились к неограниченным и полуограниченным телам с дефектами [1-3]. Ситуации, где тела занимают ограниченную область, приводят к усложнению численной реализации, поскольку наиболее часто применяемый метод граничных интегральных уравнений приводит исходную задачу к связанным системам интегральных уравнений и на поверхности дефекта, и на границе тела [4-5]. Далее предложен подход, при котором отдельно удовлетворяются условия на включении и на границах цилиндра.

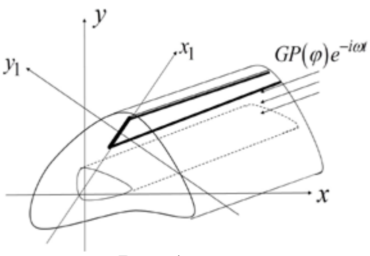


Рис.1.

1. Постановка задачи. Рассматривается бесконечный полый цилиндр с образующими, параллельными оси *Oz*, сечением которого плоскостью *xOy* является двусвязная область, ограниченная произвольными замкнутыми гладкими кривыми (рис.1). В полярной системе координат эти кривые определяются следующими уравнениями: $r = r_0\psi_1(\varphi) -$ внешняя и $r = r_0\psi_2(\varphi) -$ внутренняя границы сечения, $r_0 -$ его характеристический размер, $0 \le \varphi < 2\pi$. В цилиндре содержится тонкое абсолютно жёсткое включение длины $2a$, полностью сцеплённое с цилиндром и не выходящее за границы сечения. Вследствие действия на внешнюю поверхность цилиндра осциллирующей нагрузки $P(\varphi)e^{-i\omega t}$, направленной вдоль оси *Oz*, в последнем происходят колебания продольного сдвига. Множитель $e^{-i\omega t}$ далее опущен и рассматриваются только амплитудные значения. При таких условиях цилиндр находится в состоянии антиплоской деформации, когда отличной от нуля будет только *z*-компонента вектора перемещения *w*. Она удовлетворяет уравнению Гельмгольца, которое в полярной системе координат имеет вид:

$$\Delta w + \kappa_2^2 w = 0,\ \ \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \tag{0.1}$$

где $\kappa_2^2 = \omega^2 c_2^{-2}$, $c_2^2 = G\rho^{-1}$; $G, \rho -$ модуль сдвига и плотность материала цилиндра.

При условии действия нагрузки на внешнюю границу цилиндра на ней выполняется равенство:

$$\tau_{nz}\left(r_0\psi_1(\varphi), \varphi\right) = GP(\varphi),\ \ 0 \le \varphi < 2\pi, \tag{0.2}$$

$\overline{n} -$ вектор нормали к поверхности.

Внутренняя граница цилиндра считается неподвижной:

$$w\left(r_0\psi_2(\varphi), \varphi\right) = 0,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi. \tag{0.3}$$

Для формулирования условий на включении с ним связывается локальная система координат $x_1O_1y_1$, как показано на рис.1. Пусть $w_1(x_1, y_1) - z$-компонента вектора перемещений при переходе от полярной к локальной декартовой системе координат. Считается, что включение полностью сцеплено с цилиндром:

$$w_1(x_1, \pm 0) = d, \ |x| < a. \tag{0.4}$$

Также на поверхности включения разрывны касательные напряжения со скачком

$$\langle \tau_{zy_1} \rangle = G\left(\tau_{zy_1}(x_1, +0) - \tau_{zy_1}(x_1, -0)\right) = \chi(x_1). \tag{0.5}$$

В равенстве (1.4) $d -$ амплитуда продольных колебаний включения, которая определяется из уравнения движения включения как абсолютно жёсткого тела. При гармонических колебаниях это уравнение имеет вид:

$$-md\omega^2 = \int_{-a}^{a} \chi(\eta)\, d\eta, \ m = 2ah\rho_1, \tag{0.6}$$

$h, \rho_1 -$ толщина и плотность включения.

Таким образом, анализ напряжённого состояния рассматриваемого тела с включением сводится к решению дифференциального уравнения (1.1) с краевыми условиями (1.2)-(1.5).

2. Решение задачи. Вначале для включения в локальной системе координат строится разрывное решение [1] уравнения Гельмгольца со скачком (1.5):

$$w_1^{(1)}(x_1, y_1) = \int_{-a}^{a} \frac{\chi(\eta)}{G} f(\eta - x_1, y_1)\, d\eta, \tag{0.7}$$

$$f(\eta - x_1, y_1) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}\left(\kappa_2 \sqrt{(\eta - x_1)^2 + y_1^2}\right),$$

$H_0^{(1)}(Z) -$ функция Ханкеля первого рода нулевого порядка.

Далее в полярной системе координат перемещение представляется в виде

$$w(r, \varphi) = w^{(0)}(r, \varphi) + w^{(1)}(r, \varphi), \tag{0.8}$$

где $w^{(1)}(r, \varphi) -$ перемещение (2.1) после перехода к полярным координатам, а $w^{(0)}(r, \varphi) -$ такое решение уравнения Гельмгольца (1.1), для которого выполняются граничные условия (1.2) и (1.3). Это решение ищем в виде линейной комбинации N частных решений уравнения (1.1), которые в области сечения образуют полную замкнутую систему функций и являются линейно независимыми [6]:

$$w^{(0)}(r, \varphi) = r_0 \sum_{k=1}^{N} \left(A_k g_k(r, \varphi) + B_k h_k(r, \varphi)\right), \tag{0.9}$$

$$g_{2m-1}(r, \varphi) = J_{m-1}(\kappa_2 r)\cos(m-1)\varphi, \qquad g_{2m}(r, \varphi) = J_m(\kappa_2 r)\sin m\varphi,$$

$$h_{2m-1}(r, \varphi) = H_{m-1}^{(1)}(\kappa_2 r)\cos(m-1)\varphi, \qquad h_{2m}(r, \varphi) = H_m^{(1)}(\kappa_2 r)\sin m\varphi.$$

В формулах (2.3) A_k и $B_k -$ неизвестные коэффициенты, $J_m, H_m^{(1)} -$ цилиндрические функции.

С целью реализации граничных условий на включении (1.4) в представлении (2.2) осуществлён переход в локальную систему:

$$w_1(x_1, y_1) = w_1^{(0)}(x_1, y_1) + w_1^{(1)}(x_1, y_1), \tag{0.10}$$

$$w_1^{(0)}(x_1, y_1) = r_0 \sum_{k=1}^{N} \left[A_k g_k^{(1)}(x_1, y_1) + B_k h_k^{(1)}(x_1, y_1) \right].$$

Далее подстановка соотношений (2.4) в краевое условие (1.4) приводит к интегральному уравнению относительно скачка напряжений на включении χ, которое после выделения сингулярной составляющей и введения обозначений

$$\eta = a\tau,\ x_1 = a\varsigma,\ \kappa_0 = \kappa_2 r_0,\ \gamma = a r_0^{-1},\ \kappa_2 a = \gamma\kappa_0,$$
$$r_1 r_0^{-1} = \lambda, d_0 = d r_0^{-1}, \chi(a\tau) = G\varphi(\tau), \varepsilon = h a^{-1}, \bar{\rho} = \rho\rho_1^{-1}$$

принимает вид:

$$\frac{\gamma}{2\pi}\int_{-1}^{1} \varphi(\tau)\big(\ln|\tau-\varsigma| + Q(\tau-\varsigma)\big)d\tau + f(\varsigma) = d_0, \tag{0.11}$$

где

$$f(\varsigma) = \sum_{k=1}^{N}\big(A_k f_k^1(\varsigma) + B_k f_k^1(\varsigma)\big);\ f_k^1(\varsigma) = g_k^{(1)}(a\varsigma, 0);\ f_k^2(\varsigma) = h_k^{(1)}(a\varsigma, 0), Q(z) = O(1), z \to 0.$$

Уравнение (2.5) необходимо рассматривать с равенством

$$d_0 = -\frac{1}{2\gamma\bar{\rho}\varepsilon\kappa_0^2}\int_{-1}^{1}\varphi(\tau)\,d\tau,$$

следующим из (1.6).

Вследствие линейности интегрального уравнения (2.5) его решение можно представить через новые неизвестные функции $S_k^j\ (j = 1, 2)$:

$$\varphi(\tau) = \sum_{k=1}^{N}\big(A_k S_k^1(\tau) + B_k S_k^2(\tau)\big), \tag{0.12}$$

после чего оно трансформируется в последовательность уравнений относительно функций $S_k^j\ (j = 1, 2)$, которые отличаются только правыми частями:

$$\frac{\gamma}{2\pi}\int_{-1}^{1} S_k^i(\tau)\left(\ln|\tau-\varsigma| + Q(\tau-\varsigma) + \frac{\pi}{\gamma^2\bar{\rho}\varepsilon\kappa_0^2}\right)d\tau = -f_k^i(\varsigma),\ i = 1, 2;\ k = \overline{1, N}. \tag{0.13}$$

Для приближённых решений полученных уравнений (2.7) неизвестные функции представляем в виде

$$S_k^i(\tau) = \frac{\psi_k^i(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}, \tag{0.14}$$

после чего согласно методу механических квадратур [7,8] с использованием в качестве точек коллокации корней многочлена Чебышева $U_{n-1}(\varsigma)$, $\varsigma_j = \cos\frac{\pi j}{n+1}$, $j = 1, 2, ..., n$ из интегрального уравнения (2.7) получены системы линейных алгебраических уравнений относительно значений ψ_{km}^i функций $\psi_k^i(\tau)$ в узлах интерполяции:

$$\frac{\gamma}{2\pi}\sum_{m=1}^{n} a_m \psi_{km}^i \left[B_{jm} + Q(\tau_m - \varsigma_j) + \frac{\pi}{\gamma^2\bar{\rho}\varepsilon\kappa_0^2}\right] = -f_k^i(\varsigma_j),\ \ i = 1, 2;\ \ j = \overline{1, n} \tag{0.15}$$

В (2.9) для вычисления интеграла с логарифмической особенностью использована квадратурная формула [9], B_{jm} – её коэффициенты.

После решения систем (2.9) каждая из функций $\psi_k^i(\tau)$ приближается интерполяционным многочленом

$$\psi_k^i(\tau) \approx \sum_{m=1}^{n} \psi_{km}^i \frac{T_n(\tau)}{(\tau-\tau_m)T_n'(\tau_m)} \tag{0.16}$$

где $\psi_{km} = \psi_k(\tau_m)$, $\tau_m = \cos\frac{\pi(2m-1)}{2n}, m = 1,...,n$ – корни многочлена Чебышева 1-го рода.

Неизвестные коэффициенты A_k и B_k из (2.3) определяются путём удовлетворения краевым условиям (1.2) и (1.3):

$$\sum_{k=1}^{N} A_k \left(\int_{-1}^{1} S_k^1(\tau) G(\tau,\varphi)\, d\tau + F_k^1(\varphi) \right) + \sum_{k=1}^{N} B_k \left(\int_{-1}^{1} S_k^2(\tau) G(\tau,\varphi)\, d\tau + F_k^2(\varphi) \right) = P(\varphi),$$

$$\sum_{k=1}^{N} A_k \int_{-1}^{1} S_k^1(\tau) E(\tau,\varphi)\, d\tau + \sum_{k=1}^{N} B_k \int_{-1}^{1} S_k^2(\tau) E(\tau,\varphi)\, d\tau = -\left(\sum_{k=1}^{N} A_k g_k(r_1(\varphi),\varphi) + \sum_{k=1}^{N} B_k h_k(r_1(\varphi),\varphi) \right)$$

Функции $G(\tau,\varphi), E(\tau,\varphi)$ представляются через значения функции $f(\eta - x_1, y_1)$ с (2.1) и её производных на границах сечения, а $F_k^1(\varphi), F_k^2(\varphi)$ – через значения на этих границах производных функций $g_k(r,\varphi), h_k(r,\varphi)$ из уравнения (2.3). Громоздкость этих выражений не позволяет привести их полностью.

Квадратурные формулы Гаусса-Чебышева и использование коллокационного метода в узлах $\sigma_l = \frac{2\pi l}{N}$, $l = 1,..,N$ позволяют получить систему линейных уравнений относительно неизвестных A_k и B_k:

$$\begin{gathered}
\sum_{k=1}^{N} A_k \left(\sum_{m=1}^{n} a_m \psi_{km}^1 G(\tau_m,\sigma_l) + F_k^1(\sigma_l) \right) + \sum_{k=1}^{N} B_k \left(\sum_{m=1}^{n} a_m \psi_{km}^2 G(\tau_m,\sigma_l) + F_k^2(\sigma_l) \right) = P(\sigma_l), \\
\sum_{k=1}^{N} A_k \left(\sum_{m=1}^{n} a_m \psi_{km}^1 E(\tau_m,\sigma_l) + g_k(\sigma_l) \right) + \sum_{k=1}^{N} B_k \left(\sum_{m=1}^{n} a_m \psi_{km}^2 E(\tau_m,\sigma_l) + h_k(\sigma_l) \right) = 0.
\end{gathered} \tag{0.17}$$

Как известно, концентрация напряжения в теле около тонких жёстких включений характеризуется КИН [10]:

$$\begin{bmatrix} \tau_{zy_1} \\ \tau_{zy_1} \end{bmatrix} = -\frac{K^{\pm}}{\sqrt{r}} \begin{bmatrix} \sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix} + O(1),\ r > 0$$

После решения систем (2.9) и (2.11) приближённые значения КИН рассчитываются по формулам:

$$k^{\pm} = \frac{K^{\pm}}{G\sqrt{2a}} = \mp \frac{(\pm 1)^n}{n} \left(\sum_{k=1}^{N} A_k \sum_{m=1}^{n} (-1)^m \psi_{km}^1 \left(\operatorname{tg}\frac{\gamma_m}{2} \right)^{\mp 1} + \sum_{k=1}^{N} B_k \sum_{m=1}^{n} (-1)^m \psi_{km}^2 \left(\operatorname{tg}\frac{\gamma_m}{2} \right)^{\mp 1} \right),$$

где $\gamma_m = \pi(2m-1)/2n$.

3. Численный анализ. Рассматривался цилиндр с сечением, которое ограничено двумя эллипсами (рис.2) с равными эксцентриситетами $\varepsilon = 0,5$, большими полуосями r_0, r_1 и с нагрузкой $P(\varphi) = \sin 2\varphi$.

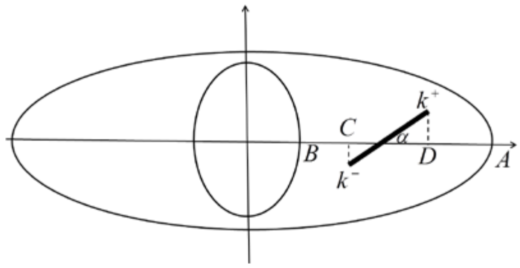


Рис.2

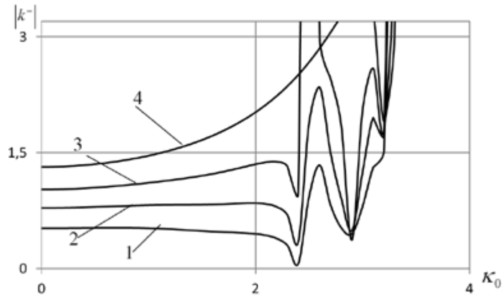


Рис.3

Отношение полуосей эллипсов $r_1/r_0 = 0,5$. Центр включения расположен на большой полуоси внешнего эллипса. Результаты численных исследований поведения КИН в частотной области приведены на рис.3. Он отображает поведение КИН в случае наклонённого включения фиксированной длины, которая равна одной трети расстояния между вершинами эллипсов *AB* при изменении угла наклона. Поведение кривых 1, 2, 3, 4 отображает поведение КИН при $\alpha = 30^0, 45^0, 60^0, 90^0$ соответственно. Анализ кривых свидетельствует, что до достижения первой частоты резонанса при увеличении угла наклона включения КИН возрастают. Также для угла $\alpha = 90^0$ отсутствует резонанс при $\kappa_0 \approx 2,6$, который наблюдается для других значений угла наклона.

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов В.Г. Сравнение полей перемещений и напряжений при дифракции упругих волн сдвига на различных дефектах: трещина и тонкое жёсткое включение // Динамические системы. 1993. вып.12. С.14-23.
2. Ang D.D., Knopoff L. Diffraction of scalar elastic waves by a finite strip // Proc. Math. Sci. USA.-1964.-V.51, № 4.-P.593-598.
3. Mykhas'kiv V.V., Martin P.A., Kalynyak O.I. Time-domain BEM for 3-D transient elastodynamic problems with interacting rigid movable disc-shaped inclusions // Computational Mechanics. – 2014. – Vol. 53, № 6. – P. 1311-1325.
4. Бобылев А.А., Доброва Ю.А. Применение метода граничных элементов к расчёту вынужденных колебаний упругих тел конечных размеров с трещинами // Вестник Харк. нац. ун-та. 2003. №590. Сер. "Математическое моделирование. Информационные техноло-гии. Автоматизированные системы управления", вып. 1. С.49-54.
5. Fedelinski P., Aliabadi M.H., Rooke D.P. A single-regiontime domain BEM for dynamic crack problems // International Journal of Solids and Structures. 1995. V.32. №24. P.3555-3571.
6. Векуа И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. М.: ОГИЗ,1948. 296с.
7. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. М.:Наука, 1985. 253 с.
8. Крылов В.И. Приближённое вычисление интегралов. М.: Наука, 1967. 500с.
9. Назарчук З.Т. Численное исследование дифракции волн на цилиндрических структурах. Киев: Наукова думка, 1989. 256 с.
10. Сулим Г.Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. Львів, 2007. 716 с.

Информация об авторах:

Михаськив Виктор –д.ф.м.н., ИППММ им. Я.С.Подстригача НАН Украины. tex@iapmm.lviv.ua

Кириллова Ольга – ассистент, Одесская нац. морская академия**, E-mai:**l ol007ga@yandex.ru

КРУЧЕНИЕ РАСТУЩЕГО БРУСА С СЕЧЕНИЕМ В ФОРМЕ КАРДИОИДЫ

Михин М.Н.

Рассмотрена задача кручения растущего бруса, сечение которого имеет форму кардиоиды. Проанализированы три основных этапа деформирования тела: до начала наращивания, в процессе и после остановки роста. Все возникающие неклассические краевые задачи приведены к известным краевым задачам, содержащим некоторый параметр. Предложены методы их решения. Истинные характеристики напряжённо-деформированного состояния тел восстанавливаются при помощи известных формул расшифровки.

1. Постановка задачи. Предположим, что в нулевой момент времени из стареющего вязкоупругого материала изготовлен брус Π_1, плоское сечение Ω_1 которого, параллельное основаниям, представляет собой кардиоиду. В момент приложения нагрузки τ_0 к торцам бруса прикладываются усилия, статически эквивалентные паре с моментом $M(t)$. Боковая поверхность бруса свободна от напряжений.

В момент времени $\tau_1 \geq \tau_0$ начинается непрерывное наращивание бруса элементами, изготовленными одновременно с ним. При этом, новые приращиваемые элементы не напряжены. Обозначим через $L(t)$ границу поперечного сечения $\Omega(t)$, которая изменяется с течением времени, при этом, $L(\tau_1) = L_1$ и $\Omega(\tau_1) = \Omega_1$.

Будем считать, что момент приложения нагрузки к приращиваемым элементам $\tau_0(x_1, x_2)$ совпадает с моментом их присоединения к растущему телу $\tau^*(x_1, x_2)$.

В момент $\tau_2 \geq \tau_1$ наращивание бруса прекращается, и с этого момента он занимает область $\Pi_2 = \Pi(\tau_2)$ с поперечным сечением $\Omega_2 = \Omega(\tau_2)$, имеющим границу $L_2 = L(\tau_2)$. Заметим, что всюду далее рассматривается достаточно медленные процессы, такие, что в уравнениях равновесия можно пренебречь инерционными членами.

Краевая задача для основного (нерастущего) вязкоупругого стареющего бруса на интервале времени $[\tau_0, \tau_1]$ представляет собой традиционную задачу кручения.

2. Начально-краевая задача для непрерывно растущего бруса. Начально-краевую задачу для непрерывно растущего бруса на интервале времени $t \in [\tau_1, \tau_2]$ составляют [1,2]:

уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} = 0; \tag{1}$$

соотношения Коши между скоростями деформации $D_{ij} = \partial \varepsilon_{ij} / \partial t$ и скоростями перемещений $\upsilon_i = \partial u_i / \partial t$

$$D_{13} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \upsilon_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \upsilon_3}{\partial x_1} \right), D_{23} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \upsilon_2}{\partial x_3} + \frac{\partial \upsilon_3}{\partial x_2} \right); \tag{2}$$

уравнения состояния

$$\sigma_{13} = 2G(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{N}_{\tau_0(x_1,x_2)})\varepsilon_{13},\ \sigma_{23} = 2G(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{N}_{\tau_0(x_1,x_2)})\varepsilon_{23},$$

$$\tau_0(x_1, x_2) = \begin{cases} \tau_0, & (x_1, x_2) \in \Omega_1, \\ \tau^*(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in \Omega^*(t), \end{cases}$$

$$(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{N}_{\tau_0(x_1,x_2)})^{-1} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{L}_{\tau_0(x_1,x_2)}), \quad \boldsymbol{L_s} f(t) = \int_s^t f(\tau) K_1(t, \tau) d\tau, \tag{3}$$

$$K_1(t, \tau) = G(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau}\left[G^{-1}(\tau) + \omega(t, \tau) \right].$$

на границе роста $L(t)$ задаётся условие контакта профессора Манжирова А.В.

$$\left(x_1,x_2\right)\in L(t):\ \sigma_{ij}^{*}\left(x_1,x_2\right)=\sigma_{ij}\left(x_1,x_2,\tau^{*}(x_1,x_2)\right), \tag{4}$$

которое согласовано с нулевыми внешними силами, т.е.

$$\left(x_1,x_2\right)\in L(t):\sigma_{13}=\sigma_{13}^{*},\ \sigma_{23}=\sigma_{23}^{*},\ \sigma_{13}^{*}n_1+\sigma_{23}^{*}n_2=0\ \ (t=\tau^{*}(x_1,x_2)); \tag{5}$$

условия равновесия торцевых сечений $\Omega(t)$

$$M\left(t\right)=\iint\limits_{\Omega(t)}(x_1\sigma_{23}-x_2\sigma_{13})dx_1dx_2,\ \iint\limits_{\Omega(t)}\sigma_{13}dx_1dx_2=\iint\limits_{\Omega(t)}\sigma_{23}dx_1dx_2=0; \tag{6}$$

где $\boldsymbol{n}=\{n_1,n_2\}$ – единичный вектор внешней нормали боковой поверхности тела, $\Omega^{*}(t)=\Omega(t)\setminus\Omega_1$ – образовавшаяся в процессе наращивания часть тела (дополнительное тело), G – модуль упруго-мгновенной деформации при сдвиге; $K_1(t,\tau)$ – ядро ползучести; $\boldsymbol{I}$ – тождественный оператор. Значения всех функций в момент времени $\tau_0\le t\le\tau_1$ известны из решения задачи для основного тела.

Отличительными особенностями начально-краевой задачи (1)-(6) для наращиваемого тела, выводящими её за рамки классических задач механики деформируемого твёрдого тела, являются: специфическое начально-краевое условие на растущей границе; нарушение условий совместности деформаций в области, занимаемой дополнительным телом, и выполнение лишь его аналога и аналога соотношений Коши в скоростях соответствующих величин; зависимость определяющих соотношений от функции $\tau_0(x_1,x_2)$, которая может иметь разрывы первого рода.

Краевая задача (1)-(6) приводится к виду [1-3]:

$$\begin{gathered}\frac{\partial S_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial S_{23}}{\partial x_2}=0,\ D_{13}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\upsilon_3}{\partial x_1}+\frac{\partial\upsilon_1}{\partial x_3}\right),\ \ D_{23}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\upsilon_3}{\partial x_2}+\frac{\partial\upsilon_2}{\partial x_3}\right),\\ S_{13}=2D_{13},\ S_{23}=2D_{23},\quad S_{ij}=\partial\left((\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L}_{\tau_0(x_1,x_2)})\sigma_{ij}G^{-1}\right)\Big/\partial t.\\ \left(x_1,x_2\right)\in L(t):\quad S_{13}n_1+S_{23}n_2=0,\\ \frac{dM^{0}\left(t\right)}{dt}=\iint\limits_{\Omega(t)}(x_1S_{23}-x_2S_{13})dx_1dx_2+\iint\limits_{L^{*}(t)}(x_1\sigma_{23}^{*}-x_2\sigma_{13}^{*})dx_1dx_2.\end{gathered} \tag{7}$$

Дополненные начальными условиями для основного тела при $t=\tau_1$ соотношения (7), содержащие и начально-краевое условие на границе роста, образуют начально-краевую задачу с параметром времени t.

Для величин S_{ij} и υ_i справедливы формулы:

$$\begin{gathered}\upsilon_1=-\theta_t'\left(t\right)x_2x_3,\ \ \upsilon_2=\theta'\left(t\right)x_1x_3,\ \ \upsilon_3=\theta'(t)\,\varphi(x_1,x_2,t),\\ S_{13}=\theta_t'\left(t\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}-x_2\right),\ S_{23}=\theta_t'\left(t\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+x_1\right),\end{gathered} \tag{8}$$

где $\varphi(x_1,x_2,t)$ – функция кручения, подлежащая определению, $\theta(t)$ — угол закручивания (крутка). Функция кручения $\varphi(x_1,x_2,t)$ является гармонической в области $\Omega(t)$. Она должна удовлетворять краевому условию

$$\left(x_1,x_2\right)\in L(t):\ \ \partial\varphi/\partial\boldsymbol{n}=x_2n_1-x_1n_2.$$

Таким образом, решение задачи кручения при помощи функции кручения $\varphi(x_1,x_2,t)$ сведено к определению в области поперечного сечения $\Omega(t)$ гармонической функции $\varphi(x_1,x_2,t)$ по заданному значению её нормальной производной на контуре $L\left(t\right)$ (задача Неймана).

Очевидно, что с учётом (10) можно получить

$$\frac{dM^{0}(t)}{dt}=\theta_t'(t)D(t)+\iint\limits_{L(t)}(x_1\sigma_{23}^{*}-x_2\sigma_{13}^{*})dl,$$

$$D(t)=\iint\limits_{\Omega(t)}\left(x_1^2+x_2^2+x_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}-x_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)dx_1dx_2, \tag{9}$$

где $D(t)$ — переменная жёсткость растущего тела при кручении.

Решение при заданном крутящем моменте $M(t)$ можно построить следующим образом: по краевому условию определим функцию $\varphi(x_1,x_2,t)$, по формулам (9) найдём $\theta(t)$, по формулам (8) найдем υ_i и S_{ij}, наконец, истинные напряжения σ_{ij} восстановим по формуле

$$\sigma_{ij}(x_1,x_2,t)=G(t)\left\{\frac{\sigma_{ij}(x_1,x_2,\tau_0)}{G(\tau_0)}\left[1+\int\limits_{\tau_0}^{t}R(t,\tau)d\tau\right]+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\tau_0}^{t}\left[S_{ij}(x_1,x_2,\tau)+\int\limits_{\tau_0}^{\tau}S_{ij}(x_1,x_2,\varsigma)d\varsigma R_{ij}(t,\tau)\right]d\tau\right\} \tag{10}$$

где $R_1(t,\tau)$ — резольвента ядра $K_1(t,\tau)$.

Рассмотрим теперь этап кручения тела после остановки роста. В этом случае получаем задачу, аналогичную (7). Для величин υ_i и S_{ij} применимы формулы (8), в которых необходимо положить $t=\tau_2$.

В итоге неклассические краевые задачи, возникающие при исследовании кручения наращиваемых тел, приведены к известным краевым задачам, содержащим некоторый параметр. По найденным решениям последних полностью восстанавливается напряжённо-деформированное состояние тела при помощи представленных формул расшифровки (10).

3. Решение классических краевых задач с параметром. Для решения классических краевых задач с параметром применимы методы теории функций комплексного переменного [4,5]. Для нахождения функции кручения применим метод конформного отображения. Конформное отображение области, ограниченной кардиоидой на круг $|\varsigma|<1$ даётся формулой

$$z=\omega(\varsigma,t)=R(t)\left(\varsigma^2+2\varsigma\right)/2 .$$

Для нахождения компонент S_{31} и S_{32} применимы формулы

$$S_{31}-iS_{32}=\theta_t'(t)\left(\frac{f_z'(z,t)}{\omega_\varsigma'(\varsigma,t)}-i\overline{\omega(\varsigma,t)}\right),\qquad f(\zeta,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma}\frac{\omega(\sigma,t)\overline{\omega(\sigma,t)}}{\sigma-\zeta}d\sigma.$$

В рассматриваемой задаче:

$$f(\zeta,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma}\frac{\omega(\sigma,t)\overline{\omega(\sigma,t)}}{\sigma-\zeta}d\sigma=iR^2(t)\varsigma/2.$$

$$S_{31}-iS_{32}=\frac{\theta_t'(t)R(t)}{2}\left(\frac{iR(t)}{\varsigma+1}-i\overline{\left(\varsigma^2+2\varsigma\right)}\right)$$

Учитывая, что $\varsigma=\rho e^{i\vartheta}$, и отделяя действительную и мнимую части в предыдущем равенстве, получаем:

$$S_{31}=\left(\frac{\rho\sin\vartheta}{\rho^2+2\rho\cos 2\vartheta+1}-\rho^2\sin 2\vartheta-2\rho\sin\vartheta\right)R(t)\theta_t'(t)/2,$$

$$S_{32}=\left(-\frac{1+\rho\cos\vartheta}{\rho^2+2\rho\cos 2\vartheta+1}+\rho^2\cos 2\vartheta+2\rho\cos\vartheta\right)R(t)\theta_t'(t)/2.$$

Скорость крутки $\theta_t'(t)$ находим по формуле

$$\theta_t'(t)=\frac{1}{D(t)}\frac{dM^0(t)}{dt},\quad D(t)=\frac{33\pi R^4(t)}{32}.$$

Получаемые соотношения позволяют предсказывать такие органически присущие растущим телам явления, как возникновение остаточных напряжений после снятия нагрузок, появление в наращиваемом теле поверхностей разрыва напряжений, зависимость напряжённо-деформированного состояния вязкоупругих тел от скорости их роста.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В., Наумов В.Э. Контактные задачи механики растущих тел. М.: Наука, 1991. 176с.
2. Манжиров А.В., Михин М.Н. О кручении растущих тел //Современные проблемы механики сплошной среды. //Труды IX международной конференции, посвященной 85-летию академика РАН И.И. Воровича, г. Ростов-на-Дону, 11–15 октября 2005 г. Ростов-на-Дону: Изд. ООО "ЦВВР", 2005. С.132–137.
3. Михин М.Н. Задача кручения растущего призматического тела с сечением в форме лемнискаты Бута //Современные проблемы механики сплошной среды. Труды XVI международной конференции, г. Ростов-на-Дону, 16–19 октября 2012 г., Т. II. Ростов-на-Дону, Изд. ЮФУ, 2012. С.147–151.
4. Манжиров А.В., Михин М.Н. Методы теории функций комплексного переменного в механике растущих тел //Вестник СамГУ. Естественная серия. 2004. №4(34). С.82–-98.
5. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М: Изд. АН СССР, 1954. 647с.

Information about authors:

Mikhin Mikhail – Docent of Department of Mathematics and natural sciences, The Russian State University for the Humanities (Branch in Domodedovo city), +7 903 6747318
E–mail: mmikhin@inbox.ru

К УСТОЙЧИВОСТИ И КОЛЕБАНИЯМ МНОГОСЛОЙНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Мовсисян Л.А.

Рассматриваются задачи устойчивости, колебания и оптимального управления движением многослойных анизотропных прямоугольных пластин и цилиндрических оболочек. Системы уравнений перечисленных задач при определённом расположении слоёв допускают решения методом разделения переменных. Экстремальные значения собственных чисел (частоты, критические напряжения и давление) определяются методом Лагранжа.

Многослойным тонкостенным системам посвящено огромное количество работ [1,2 и др.]. С появлением армированных композитов их число всё ещё увеличива ется. Как правило, такие материалы обладают свойством анизотропии и в частности, если даже слои ортотропны, то уже при произвольном расположении многослоя, последний проявляет свойство общей анизотропии. Как известно, система разрешающих уравнений в последнем случае не допускает метода разделения переменных. Однако, при определённой ориентации слоёв уже названный метод вполне применим. В [3] таким способом рассмотрена устойчивость прямоугольной пластинки. Здесь изучаются задачи свободных колебаний, устойчивости и оптимального управления движением пластин и задачи устойчивости цилиндрической оболочки при внешнем давлении.

1. Многослойная пластинка ($2n$ слоя одинаковой толщины) из ортотропных слоёв в геометрическом отношении симметрично расположены относительно координатной плоскости. Если определённым образом расположить слои (об этом чуть ниже), то уравнение вынужденных колебаний продольно сжатой пластинки –

$$L(w)+P\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\rho H\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=q(x,y,t) \tag{1.1}$$

$$L(w)=D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\left(D_{12}+2D_{66}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$$

$$D_{ij}=\frac{2h^3}{3}\sum_{k+1}^{n}K(n)B_{ij}^{(k)},\ H=2nh,\ \mathrm{K}(k)=3k(k-1)+1$$

$$B_{11}^{(k)}=A+\frac{C}{2}+B\cos 2\varphi_n+\frac{C}{2}\cos 4\varphi_n \tag{1.2}$$

……………………………………………………………

$$B_{26}^{(k)}=\frac{1}{2}\left(B\sin 2\varphi_k-C\sin 4\varphi_k\right)$$

Приведённые постоянные выражаются через постоянные материала в главных направлениях упругости $\left(A_{11},A_{22},A_{12},A_{66}\right)$ [1,3]

$$\begin{gathered}A=\frac{1}{4}\left(A_{11}+A_{22}+2A_3\right),\ B=\frac{1}{2}\left(A_{11}-A_{22}\right)\\ C=\frac{1}{4}\left(A_{11}+A_{22}-2A_3\right),\ A_3=A_{12}+2A_{66}\end{gathered} \tag{1.3}$$

При получении (1.1) были приняты:
для случая симметричного расположения слоёв.

$$D_{16}=D_{26}=0-\sum_{k=1}^{n}K(k)\sin 2\varphi_k=\sum_{k=0}^{n}K(k)\sin 4\varphi_k \tag{1.4}$$

а для антисимметричного –

$$K_{16}=K_{26}=0-\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\sin 2\varphi_k=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\sin 4\varphi_k=0 \tag{1.5}$$

т.к. окончательный вывод одинаков для обоих случаев, то приведём пример для первого случая.

2. Для задачи свободных колебаний –

$$L(w)+\rho H\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \tag{2.1}$$

при граничных условиях свободного опирания (уже с учётом (1.4))

$$w=f_{mn}e^{i\omega t}\sin\lambda_m x\sin\mu_n y\ ,\quad \lambda_m=\frac{m\pi}{a},\quad \mu_n=\frac{n\pi}{b} \tag{2.2}$$

частоты определятся

$$\Omega_{mn}=\rho H\omega_{mn}^2=D_{11}\lambda_m^4+2\left(D_{12}+2D_{66}\right)\lambda_m^2\mu_n^2+D_{22}\mu_n^4 \tag{2.3}$$

Составляя функцию

$$\Phi=\Omega_{mn}+\sum_{k=1}^{n}K(k)\left(\lambda\sin 2\varphi_k+\mu\sin 4\varphi_k\right), \tag{2.4}$$

с учётом выражений D_{ij} по (1.2) и подвергнем её условиям максимума и минимума

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_k}=0 \tag{2.5}$$

Последние вместе с условиями (1.4) дают систему из $n+2$ уравнений, решением которой будет

$$\varphi_k=0\ \text{ и }\ \varphi_k=\frac{\pi}{2}, \tag{2.6}$$

т.е случай, когда главные направления упругости материала совпадают с координатными осями.

Так как разговор может идти об одной частоте, то естественно, для примера взять наиболее простой случай (хотя бы ради краткости записи). Итак, как здесь, так и в следующих пунктах возьмём $a=b,\ m=n=1$.

В случае, когда $A_{11}=A_{22}\ \left(B=0\right)$*)

$$\Omega_{11}=M\sum_{k=1}^{n}K(k)\left[A+D-C-C\cos 4\varphi_k\right]$$

$$M=\frac{4h^3}{3}\left(\frac{\pi}{a}\right)^4 \tag{2.7}$$

Условия экстремума (2.7) вместе с условием (1.4) даёт

$$\Omega_{11}=Mn^3\begin{cases}2A_{11}\ \ \text{при}\ \ \varphi_k=\pm\dfrac{\pi}{4}\\ A_{11}+A_3\ \ \text{при}\ \ \varphi_k=0\end{cases} \tag{2.8}$$

Конечно, существует много вариантов для φ_k, при которых $D_{ik}=0$, они для Ω_{mn} дадут не экспериментальные значения.

3. Совершенно аналогичное решение даёт и задача устойчивости.

$$L(w)+P\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \tag{3.1}$$

Минимальное критическое усилие –

$$P_{kp}=\frac{2\pi^2}{a^2}\left(D_{11}+D_{12}+2D_{66}\right) \tag{3.2}$$

а его максимум и минимум определяются как и в предыдущем пункте – $\varphi_k=0,\ \varphi_k=\pm\dfrac{\pi}{4}$

---

*) такой случай и будет изучен в последующих пунктах

4. Задачу оптимального управления движением исследуем при $P=0$ и из (1.1) получим (если искать решение в виде (2.2)):

$$\frac{d^2 f_{mn}}{dt^2}+\omega_{mn}^2 f_{mn}=q_{mn}\left(t\right)$$
$$q_{mn}=\frac{1}{\rho H}\int_0^a\int_0^b q\sin\lambda_m x\sin\mu_n y dxdy \tag{4.1}$$

Задача ставится обычным образом: в момент $t=0$ заданы w и $\frac{\partial w}{\partial t}$, а при $t=T$ систему привести к новому состоянию при помощи внешнего давления оптимальным образом: одним из распространённых способов является условие минимума [4]

$$I=\int_0^T\int_0^a\int_0^b q^2 dxdt\ , \tag{4.2}$$

что равносильно минимуму

$$I_{mn}=\int_0^T q_{mn}^2 dt \tag{4.3}$$

Неизвестные

$$q_{mn}\left(t\right)=-\frac{1}{2}\left(\lambda\cos\omega_{mn}t+\mu\sin\omega_{mn}t\right) \tag{4.4}$$

(для каждой гармоники свои множители λ и μ) определяются из условий w и $\frac{\partial w}{\partial t}$ при $t=T$.

В качестве примера возьмём

$$w=f_0\sin\lambda_1 x\sin\mu_1 y,\ \frac{\partial w}{\partial t}=f_1\sin\lambda_1 x\sin\mu_1 y \tag{4.5}$$

и потребуем, чтобы при $t=\frac{\pi}{\omega_{11}}$ имели

$$w=\frac{\partial w}{\partial t}=0\,. \tag{4.6}$$

Тогда множители определятся:

$$\lambda=\frac{4\omega_n}{\pi}f_1\ ,\ \mu=\frac{4\omega_{11}}{\pi}f_0\,, \tag{4.7}$$

а необходимая для осуществления нагрузка –

$$q_n=\frac{2\omega_n}{\pi}\left(\omega_{11}f_0\sin\omega_{11}t-f_1\cos\omega_{11}t\right) \tag{4.8}$$

5. Устойчивость цилиндрической оболочки будем изучать при внешнем нормальном равномерном давлении q.

Если слои расположить так, чтобы $D_{i6}=C_{i6}=0$, к тому же учитывать, что при потере устойчивости число волн в поперечном направлении достаточно большие числа (по сравнению с единицей), то в окончательном виде уравнение устойчивости –

$$D_{22}\frac{\partial^8 w}{\partial y^8}+\frac{1}{R^2}\frac{C_{11}C_{22}-C_{12}^2}{C_{22}}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-Rq\frac{\partial^6 w}{\partial y^6}=0 \tag{5.1}$$

Для случая опёртых краёв

$$w=f\cos\mu_n y\sin\lambda_m x,\ \mu_n=\frac{n}{R},\ \lambda_m=\frac{m\pi}{l} \tag{5.2}$$

Критическое давление

$$q_{kp} = 1,75\lambda_1 \sqrt[4]{D_{22}^3 \frac{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}{R^6 C_{22}}} \tag{5.3}$$

Как и в предыдущих случаях стационарных q_{kp} получаются при $\varphi_n = \frac{\pi}{4}$ и соответственно

$$q_{kp} = 4,82\left(\frac{nh}{R}\right)^{5/2} \frac{R}{l}\sqrt[4]{\gamma}, \quad \gamma = \begin{cases} A_{11}^2\left(A_{11}^2 - A_{12}^2\right) \\ A^2\left[A^2 - \left(A_{12} + 2C\right)^2\right] \end{cases} \tag{5.4}$$

$$\left(A, \mathrm{C}\right) = \frac{1}{2}\left[A_{11} \pm \left(A_{12} + 2A_{66}\right)\right]$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. М.: ГИТТА, 1957. 463 с.
2. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 448с.
3. Мовсисян Л.А. К устойчивости упругих и вязкоупругих анизотропной многослойной пластинки. //Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1990. Т.43. №4. С.3-12.
4. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.

Сведения об авторе:

Мовсисян Лаврентий Александрович – Д.т.н., профессор, главный научный сотрудник Институа механики НАН РА. **Адрес:** 0019, Ереван-19, пр. Маршала Баграмяна, 24/2
Тел.: (+37410). 56821. **E-mail:** mechins@sci.am

МЕТОДИКА ОЦЕНКИ КОЭФФИЦИЕНТА ТРЕНИЯ МОРОЗОСТОЙКОЙ РЕЗИНЫ НА ОСНОВЕ СМЕСЕЙ ПРОПИЛЕНОКСИДНОГО КАУЧУКА И УЛЬТРАДИСПЕРСНОГО ПОЛИТЕТРАФТОРЭТИЛЕНА

Морозов А.В., Петрова Н.Н.

В данной статье представлена экспериментальная методика по определению коэффициента трения высокоэластичных материалов, работающих в сопряжениях с трением. Исследовались морозостойкие эластомеры на основе пропиленоксидного каучука с различной концентрацией антифрикционной добавки – ультрадисперсного порошка политетрафторэтилена (ПТФЭ). Экспериментальные исследования проводились в диапазоне скоростей скольжения 1 ÷ 100 мм/с и объёмной температуры от 22 до -27 ^{0}С. Диапазон нормального давления варьировался от 0,1 до 0,3 МПа. В результате проведённого исследования было установлено: добавление порошка ПТФЭ в концентрации 1÷2 массовых частей на 100 массовых частей каучука в 2 раза снижает коэффициент трения скольжения. Дальнейшее повышение концентрации ПТФЭ не приводит к существенному снижению коэффициента трения скольжения.

Введение. Резины уплотнительного назначения, используемые в трущихся сопряжениях, при эксплуатации в условиях низких температур должны обладать высокими упруго-деформационными свойствами, морозостойкостью с высокой озоно- и атмосферостойкостью и удовлетворять триботехническим критериям закладываемым при проектировании узлов трения. При этом способность материала сохранять комплекс эксплуатационных свойств при низких температурах имеет особую актуальность для эластомерных материалов, предназначенных для работы в северных условиях, где –50 ºС – вполне реальная температура работы уплотнителей. При понижении температуры снижается эластичность эластомера, при достижении определённой температуры происходит переход каучука в стеклообразное состояние. Вследствие температурных перепадов возможно примерзание уплотнений к герметизируемым деталям и дальнейшее разрушение. Поэтому создание резин, обладающих повышенной морозостойкостью, является важной и актуальной задачей. Перспективным материалом для уплотнительной техники Севера является пропиленоксидный каучук (СКПО), выпускаемый в настоящее время в опытно-промышленном масштабе на Стерлитамакском заводе синтетического каучука. Он представляет собой сополимер пропиленоксида и аллилглицидилового эфира (2–5 %). Вследствие низкой температуры стеклования (Тс = –74 ˚С), озоно- и термостойкости, а также положительных результатов испытаний климатической устойчивости в условиях г.Якутска Республики Саха (Якутия) [1] его использование представляется эффективным. Однако из-за насыщенности основной цепи и высокой кинетической гибкости цепей пропиленоксидного каучука, необходимо повышать его масло- и износостойкость. Интересные результаты может дать совмещение СКПО с термопластичными полимерами. Ранее были получены резиновые смеси на основе СКПО и фторопласта Ф-4, имеющие улучшенные свойства по сравнению с исходным материалом [2], при этом, главным образом, улучшалась изностойкость резин. Одной из перспективных добавок является ультрадисперсный политетрафторэтилен. Наполняя резиновую смесь на основе СКПО ультрадисперсным ПТФЭ, авторы в работе [3] показали отсутствие снижения низкотемпературных свойств с повышением износостойкости нового материала. В настоящей работе будет экспериментально показано влияние концентрации наполнения СКПО ультрадисперсным ПТФЭ на коэффициент трения скольжения.

Образцы. Для экспериментального исследования были выбраны эластомеры, изготовленные из резиновых смесей на основе СКПО. В работе исследуются резины из исходного СКПО и с добавлением ультрадисперсного политетрафторэтилена в различной концентрации. Время вулканизации и температура для всех образцов одинаковые: 40 минут и 150 ^{0}С, соответственно. Резиновые образцы были вулканизованы в форме колец высотой 7 мм, с внутренним радиусом 41 мм и внешним - 55 мм. Кольца наклеены на стальную подложку. В проводимом исследовании в качестве контртела использовался полированный диск $R_a \leq 0{,}04$ мкм из нержавеющей стали 08Х18Н10.

Методика испытаний. Экспериментальное исследование резин проводилось на трибометре UMT-2 (CETR INC., USA), принцип работы которого описан в работе [4]. Фотография установленных в приборе образцов приведена на рис.1. Исследуемый кольцевой образец 1 закреплён на самоустанавливающемся держателе образца. Контртело 2 закреплено на предметном столике, который приводится во вращение электродвигателем. Отрицательные температуры в термокамере 3 создается продувкой камеры воздухом от компрессора, пропущенным через осушитель, а затем холодильную установку.

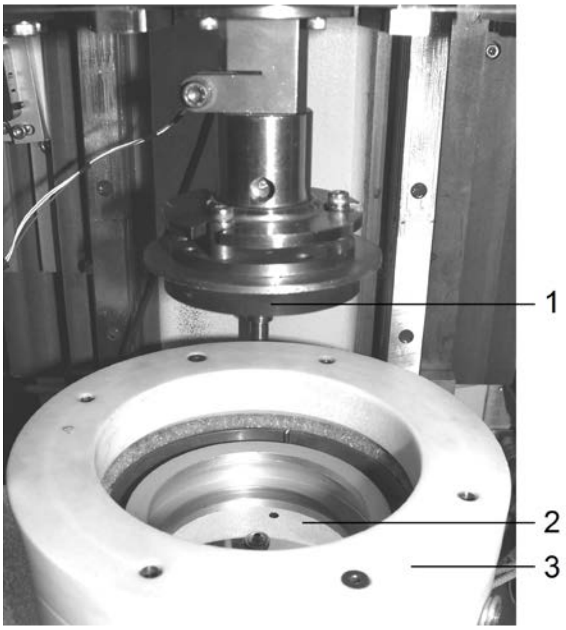


Рис. 1. Фотография испытываемой пары трения, установленной на трибометре UMT-2

Перед началом испытания исследуемую поверхность резинового образца очищают двадцатипроцентным раствором мыла в воде, затем споласкивают и не менее одного часа высушивают при нормальных условиях. После этого образец помещается в испытательную камеру трибометра UMT-2, где он выдерживается при заданной температуре в течение 45-50 минут. Контролируя заданную температуру, трибометр работает в автоматическом режиме, выполняя цикл из 3 последовательностей, непрерывно фиксируя изменение силы трения, нагрузки, скорости скольжения. По окончании цикла испытаний образец вынимают из термокамеры, очищают и высушивают. Отполированную поверхность контртела перед каждым новым циклом очищают от перенесённых частиц резины 95%- раствором этилового спирта. Каждому новому циклу испытаний соответствует своя фиксированная температура. Испытания резиновых образцов проводились при следующих температурах T на контакте:-27, -15, 5 и 20 ^{0}C.

Циклом испытаний названа серия из выполняемых друг за другом последовательностей, где каждая последовательность соответствует заданному давлению. Испытания проводились при 3 давлениях: 0.1, 0.2 и 0.3 МПа. Последовательностью названа серия из 7 выполняемых друг за другом шагов, где каждый шаг соответствует заданной скорости, варьирующейся в диапазоне 1 ÷ 100 мм/с. Шаг представляет собой процедуру, выполняемую трибометром в автоматическом режиме, в течение которой происходит нагружение, а затем и вращение резинового образца на заданную дистанцию равной четверти оборота, при этом путь трения составляет 37,7 мм.

Результатом выполнения шага является протокол испытаний, представляющий собой запись коэффициента трения от времени. Обрабатывая серии полученных протоколов и обобщая данные по коэффициенту трения, получили зависимости коэффициента трения от скорости скольжения при различных давлениях.

В предложенной планированной методике проведения эксперимента учитывается эффект, подобный эффекту Патрикеева-Муллинза [5], который заключается в том, что значение модуля упругости резины как при статическом, так и при динамическом нагружении зависит от максимальной деформации, предшествующей опыту. По аналогии с эффектом Патрикеева-Муллинза перед началом испытания при постоянной нагрузке и с варьирующейся скоростью скольжения резиновый образец испытывают при максимальной скорости скольжения, тем самым, создавая фрикционное нагружение с максимальной деформацией в материале. Такая постановка эксперимента позволяет получать достоверные и повторяемые результаты. Следует отметить, что в процессе выполнения одного испытания (шага) путь трения резинового образца составляет четверть одного оборота, при этом, волновой редуктор трибометра обеспечивает почти мгновенный набор скорости. Таким образом, обеспечивая постоянство скорости скольжения на столь малом пути трения, становится возможным пренебречь влиянием разогрева поверхности резины, находящейся в контакте со стальным контртелом.

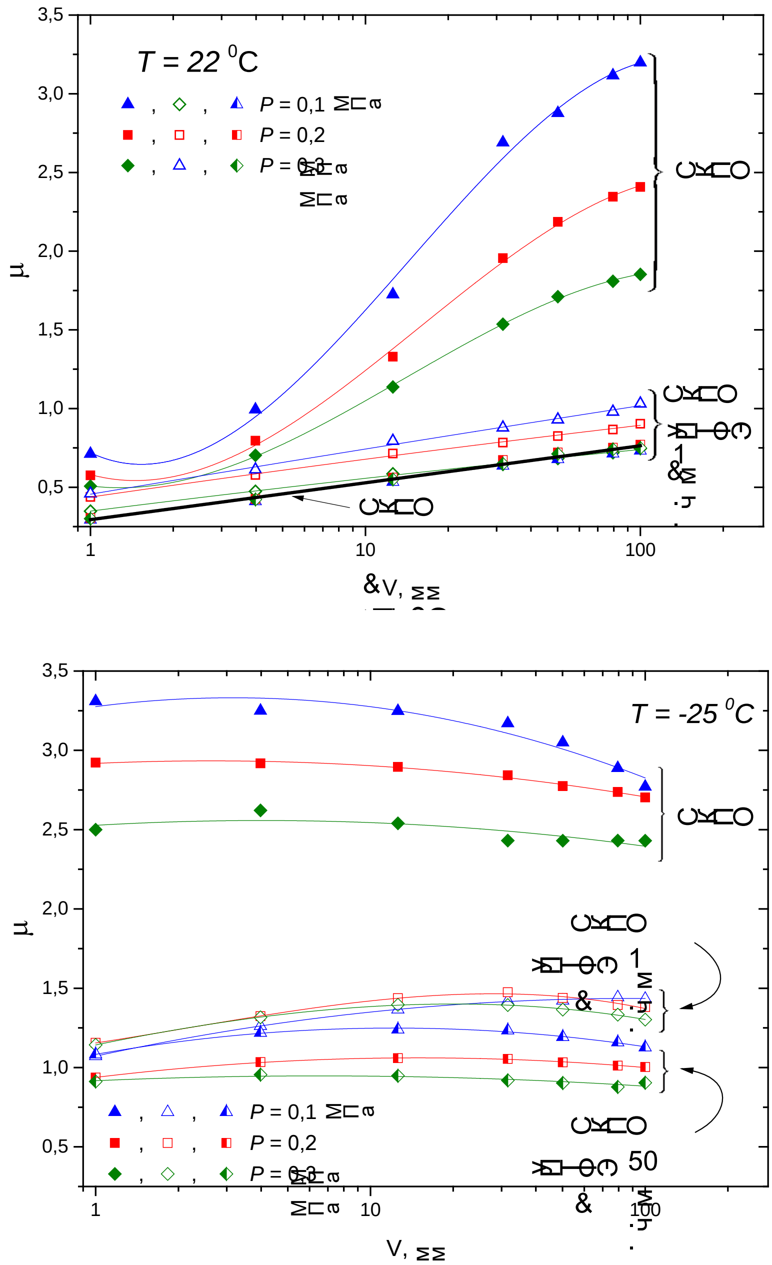


Рис. 2. Зависимость коэффициента трения μ от скорости скольжения V для резин на основе каучука СКПО.

Результаты эксперимента. Результаты выполненных испытаний обобщены и представлены на рис.2 в виде зависимостей коэффициента трения μ от скорости скольжения V при разных значениях номинального давления P. Экспериментальные данные приведены для резины на основе СКПО и её модификации наполнителем в двух крайних концентрациях, а именно: 1 и 50 массовых частей ультрадисперсного ПТФЭ на 100 массовых частей каучука. При этом, результаты, представленные на рис.2 соответствуют температурам испытаний 22 и -27 ^{0}C, соответственно.

Полученные результаты, прежде всего демонстрируют, что введение ультрадисперсного ПТФЭ приводит к существенному снижению коэффициента трения эластомерного материала во всем диапазоне скоростей скольжения, давлений и температур. Этот эффект объясняется образованием на поверхности резинового образца третьего тела, выполняющего роль твёрдой смазки (в работе [3] экспериментально обнаружено повышение концентрации фтора в приповерхностных слоях резины в сравнении с объёмом материала).

Детальный анализ результатов показывает, что при комнатной температуре с увеличением скорости скольжения в исследуемом диапазоне скоростей наблюдается значительный рост коэффициента трения (более чем в 3 раза) для резин на основе СКПО, а для резины, наполненной ультрадисперсным ПТФЭ, рост коэффициента трения также имеется, но влияние скорости скольжения не так значительно. Полученный результат объясняется совместным влиянием несовершенной упругости вязкоупругого материала и молекулярных сил.

Из представленных результатов следует, что номинальное давление оказывает существенное влияние на коэффициент трения скольжения резин на основе СКПО. С увеличением нормальной нагрузки коэффициент трения уменьшается. При этом, введение ультрадисперсного ПТФЭ уменьшает влияние номинального давления.

Из важных полученных в эксперименте результатов следует отметить, что увеличение концентрации uPTFE не приводит к значительному снижению коэффициента трения.

Заключение. Полученные экспериментальные результаты наглядно демонстрируют эффект наполнения эластомерных материалов ультрадисперсным ПТФЭ: коэффициент трения скольжения при низких температурах снижается более чем в 2 раза.

Дальнейшее увеличение концентрации ультрадисперсного ПТФЭ в морозостойком каучуке СКПО не приводит к значительному уменьшению коэффициента трения.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда №14-29-00198 «Теоретико-экспериментальное исследование трения эластомеров».

ЛИТЕРАТУРА

1. Петрова Н.Н. Принципы создания масло- и морозостойких резин и их реализации для эксплуатации в условиях холодного климата: Диссертация д-ра хим. наук. М.: 2006.
2. Пат. 2294346 РФ: МКИ С 08 L 71/02, С 08 Д 18/27
3. Портнягина В.В., Петрова Н.Н. Резины на основе смесей пропиленоксидного каучука и ультрадисперсного политетрафторэтилена // Каучук и резина. 2014. №6. С.40–43.
4. Морозов А.В., Петрова Н.Н. Методика оценки коэффициента трения уплотнительных морозостойких резин // Трение и износ. 2016, *в печати*.
5. Резина конструкционный материал современного машиностроения. //Сборник статей под общ. ред. П.М. Баденкова, В.Ф Евстратова, М.М. Резниковского. М.: Химия, 1967. 320 с.

Сведения об авторах:

Морозов Алексей Владимирович – к.т.н., с.н.с. лаборатории трибологии Института проблем механики им А.Ю. Ишлинского Российской академии наук; (495) 434-15-87
E-mail: morozovalexei@mail.ru

Петрова Наталия Николаевна – д.х.н., зав. каф. общей, аналитической и физической химии Института естественных наук СВФУ им. М.К.Аммосова; (914)267-13-57
E-mail: pnn2002@mail.ru

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ КАЧЕСТВА ПРИ ФОРМООБРАЗОВАНИИ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТОНКОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕК

Назарян Э.А., Аракелян М.М.

На основе анализа исходных уравнений пластического состояния установлены распределения деформаций на начальной и конечной стадиях при формообразовании осесимметричных тонкостенных оболочек. Получены зависимости, позволяющие оценить погрешность линейных и диаметральных размеров с учётом объёмности деформированного состояния.

Введение. Одной из слабо разработанных теоретических проблем процесса формообразования осесимметричных тонкостенных оболочек является оценка влияния величин и распределения напряжений и деформаций на показатели точности и прочности изготавливаемых изделий. В научно-технической и справочной литературе отсутствуют расчётные зависимости, позволяющие определять предельно возможные отклонения линейных и диаметральных размеров и показатели прочности при разных степенях деформаций и технологических характеристик применяемых материалов [1,2 и др.].

В настоящей работе рассматривается процесс формообразования цилиндрических деталей и ставятся следующие задачи:

– установление расчётных зависимостей, позволяющих определить размеры заготовок с учётом объёмности деформированного состояния;

– определение распределения и конечных величин компонент деформаций и показателя сопротивления деформированию .

Анализ начальной стадии процесса формообразования. Многочисленными исследованиями установлено, что процесс формообразования осесимметричных тонкостенных оболочек начинается с пластической деформации кольцевой незажатой части заготовки, находящейся между контактными зонами деформирующих инструментов [1,2]. На этой стадии по мере перемещения деформирующего инструмента растёт усилие деформирования и пластическими деформациями охватывается весь фланец заготовки. Устанавливается определённое равновесие между усилием формообразования и сопротивлением фланца пластическому деформированию и начинается вторая стадия процесса – втягивание фланца заготовки в матрицу .

В [3,4,5] исходные уравнения теории пластического течения при плоском напряжённом состоянии и осевой симметрии деформирования, а именно: *уравнение равновесия с учётом изменения толщины материала, условие пластичности Мизеса, условие постоянства объёма, уравнение связи напряжений и приращений (скоростей) деформаций приведены к единой структуре и отображены на девиаторной плоскости цилиндра пластичности в виде дифференциальной зависимости между радиальным растягивающим напряжением и накопленной деформацией* $d\sigma_\rho = \sigma_s d\varepsilon_i$. Принятие степенного закона деформационного упрочнения $\sigma_s = A\varepsilon_i^n$ позволило проинтегрировать указанную дифференциальную зависимость и получить зависимости для накопленных и компонент деформаций от параметра φ [5].

Анализ второй стадии процесса формообразования. Основной проблемой анализа второй стадии процесса формообразования является отображение полученного для начальной стадии параметрического решения в материальную среду деформируемой заготовки. Для этого, сначала рассмотрим процесс втягивания фланца заготовки в матрицу без учёта упрочнения $(n = 0)$ и влияния изгибных явлений на напряжённо-деформированное состояние .

При сокращении внешнего радиуса фланца заготовки материальные элементы с координатами $R_0 \le \rho \le r_0$, радиально перемещаясь, накапливают определённую деформацию и, достигая радиуса r_0, далее перемещаются вертикально без деформирования. В конце этого процесса по образующей цилиндрической детали устанавливается определённое переменное распределение накопленных деформаций, величины которых могут быть определены при известной взаимосвязи между параметром φ на девиаторной плоскости и относительной координатой ρ/r_0 в материальной среде деформируемой заготовки.

Установлено [5], что для идеально жёстко-пластической модели деформируемого материала характер распределения накопленной деформации и радиальные напряжения в относительных единицах на девиаторной плоскости подобны и описываются одинаковой функциональной зависимостью $F(\varphi) = \left(2/\sqrt{3}\right)\cos(\varphi + \pi/6)$. На начальной стадии формообразования $\left(\sigma_s = \sigma_{0,2};\ \varepsilon_i = 0,2\%;\ n = 0\right)$ толщина заготовки остаётся постоянной, распределение радиальных напряжений в относительных единицах по общеизвестным решениям имеет вид : $\sigma_\rho/\sigma_s = \ln R_0/\rho$ [3 и др.], на основе чего следует:

$$\frac{\rho}{r_0} = K^{\left[1-\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right)\right]} \tag{1}$$

и становится возможным найти распределения накопленных деформаций на девиаторной плоскости и по образующей цилиндрической детали. Для разных φ в диапазоне $0 \le \varphi \le \pi/3$ и фиксированных K определяются отношения ρ/r_0 и по формуле $\varepsilon_\theta = \ln(r_0/\rho)$ рассчитываются величины окружных деформаций. Из соответствующих точек отрицательного направления оси ε_θ опускаются перпендикуляры до пересечения с радиальными лучами φ. Соединяя начала косоугольных координат с точками пересечения, устанавливается векторное поле эквивалентных деформаций для всех материальных элементов. Исходя из общности методического подхода и для упрощения численных расчётов, внешний радиус пластической области R_0 при изменении K принимается фиксированным, а переменным считается радиус матрицы r_0.

Из тригонометрического представления деформаций на девиаторной плоскости следует $\varepsilon_\rho / |\varepsilon_\theta| = \cos\varphi / cos(\pi/3-\varphi)$, где абсолютная величина окружной компоненты определяется из равенства $\varepsilon_\theta = \ln(\rho/r_0)$. На основе установленной взаимосвязи между параметром φ и относительной координатой ρ/r_0 в материальной среде деформируемой заготовки становится возможным установить распределение компонент конечных деформаций и соответствующее векторное поле эквивалентных деформаций:

$$\left.\begin{aligned}
&|\vec{\varepsilon}|_2 = \frac{|\varepsilon_\theta|}{\cos(\pi/3-\varphi)};\\
&\varepsilon_\rho = \left[1-F(\varphi)\right]\frac{\cos\varphi}{\cos(\pi/3-\varphi)}\ln K;\\
&\varepsilon_\theta = -\left[1-F(\varphi)\right]\ln K;\\
&\varepsilon_z = \left[1-F(\varphi)\right]\left[1-\frac{\cos\varphi}{\cos(\pi/3-\varphi)}\right]\ln K
\end{aligned}\right\}, \qquad (2)$$

где $|\vec{\varepsilon}|_2$ – модуль вектора эквивалентной деформации (накопленная деформация) на второй стадии процесса формообразования.

На основе (1) и (2) становится возможным определение размеров заготовок по заданным размерам детали и распределение толщины по образующей с учётом объёмности деформированного состояния. Текущую величину относительной высоты $h(\varphi)$ при заданном K можно определить из сопоставления кольцевых элементов шириной $d\rho$ на исходной заготовке и приращения dh на цилиндрической детали, согласно выражению $\varepsilon_\rho = \ln(dh/d\rho)$, которое после преобразований приводится к следующему дифференциальному уравнению:

$$d\left(\frac{h}{r_0}\right) = K^{\left[1-F(\varphi)\right]\left[\frac{\cos\varphi}{\cos(\pi/3-\varphi)}+1\right]}\frac{2}{\sqrt{3}}\sin(\varphi+\pi/6)\ln K d\varphi. \qquad (3)$$

Интегралы вида $\int_0^\varphi \Phi(\varphi;K)\ln K d\varphi$ позволяют определить текущие величины относительной высоты цилиндрической детали $h/r_0(\varphi)$ из кольцевого участка заготовки $\rho - r_0$, а также распределение толщин в условиях объёмности деформированного состояния.

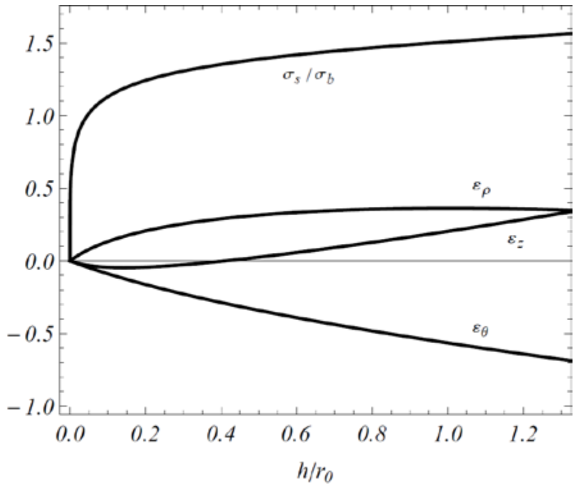


Рис. 1. Распределения компонент деформаций и показателя сопротивления деформированию в конце второй стадии формообразования

Результаты и обсуждения. Сопоставим результаты исследований с аналогичными результатами, полученными на основе принятия допущения о постоянстве толщины материала в процессе формообразования цилиндрической детали диаметром $2r_0$ и высотой h без учёта радиуса закругления [1] :

$$\frac{h}{r_0} = \frac{1}{2}\left(K^2 - 1\right) . \tag{4}$$

При одинаковых K значения h/r_0 с учётом объёмности деформированного состояния, значительно меньше соответствующих значений, рассчитанных по (4) $\left(2,72 \to h/r_0 = 2,66;\ 2 \to h/r_0 = 1,34; 1,5 \to h/r_0 = 0,59\right)$. Выражая указанную разность в виде квадратного трёхчлена, после определения соответствующих постоянных получим выражение: $\Delta\left(h/r_0\right) = 1/3\left[\left(2/3\right)K^2 - \left(5/3\right)K + 1\right]$, из которого следует, что относительную высоту цилиндрической детали, с учётом объёмности деформированного состояния, при $1,5 \le K \le e$ можно представить в виде:

$$\frac{h}{r_0} = \frac{1}{2}\left(K^2 - 1\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}K^2 - \frac{5}{3}K + 1\right) . \tag{5}$$

Из сопоставления (4) и (5) следует, что относительная погрешность высоты цилиндрической детали без учёта изменения толщины достигает 20%.

Несмотря на некоторую условность проведённого анализа, полученные расчётные зависимости позволяют определять относительные погрешности линейных и диаметральных размеров, а также показатели сопротивления деформированию и оценить качество цилиндрических деталей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Metal Forming Handbook/Shuler (c) Springer-Verlag, Heidelberg, 1998.
2. Hill R. The Mathematical Theory of Plasticity, Oxford Classic Texts in the Physical Sciences, 1998, p.362.
3. Назарян Э.А., Константинов В.Ф. Кинематика деформирования в формоизменяющих операциях листовой штамповки // Вестник машиностроения. 1999. №2. С.35-41.
4. Назарян Э.А., Аракелян М.М. и др. Механика формоизменения тонких кольцевых пластин. //Изв. НАН Армении. Механика. 2009. Т.62. №4. С.80-88.
5. Назарян Э.А., Аракелян М.М. Аналитическая модель процесса осесимметричной вытяжки // Заготовительные производства в машиностроении. 2013. №12. С.23-27.

Сведения об авторах:

Назарян Эрнест Агаджанович, доктор техн. наук, профессор, руководитель науч.-исслед. лаборатории «Формообразование оболочек», физического факультета Ереванского государственного унивеситета

Аракелян Милета Мартиросовна, канд. физ.-мат.наук, старший научный сотрудник

Тел.: моб.(37493)267256; **E-mail:** enazaryan@ysu.am

ЗАДАЧА ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ ТОНКОГО СОСТАВНОГО ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО КЛИНА, НА ОДНОЙ ГРАНИ КОТОРОГО ЗАДАНЫ НАПРЯЖЕНИЯ, А НА ДРУГОЙ – ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

Нерсисян Г.Г., Саргсян А.М.

Исследуется электроупругое состояние тонкого кусочно-однородного пьезоэлектрического клина, когда на гранях заданы различные электрические граничные условия. Анализируется поведение напряжений и вектора электрической индукции в окрестности вершины составного пьезоэлектрического клина.

В работах [1–4] исследованы поведения электроупругого поля в тонком кусочно-однородном пьезоэлектрическом клине, когда на гранях клина заданы или напряжения, или перемещения и три различных электрических условий. В данной работе эти вопросы исследуются для случая, когда на î äí î é ãðàí и составного пьезоêëèí à çàäàí û í àï ðÿæåí èÿ, à í à äðóãî é– перемеù åí èÿ. Здесь возможен и четвёртый случай электрических граничных условий.

Пусть два тонких пьезоэлектрических клина с различными электроупругими свойствами жёстко соединены вдоль общей границы. В каждой точке составного пьезоклина имеется плоскость материальной симметрии, параллельно его срединной поверхности.

Электроупругое состояние каждой части кусочно-однородного пьезоэлектрического клина определяется решением систем уравнений [5,6]:

$$4\pi L_4\Phi(x,y)-L_3\Psi(x,y)=0,\; L_3\Phi(x,y)+L_2\Psi(x,y)=0, \tag{1}$$

$$L_4=s_{22}\,\partial^4/\partial x^4-2s_{26}\,\partial^4/\partial x^3\partial y+(2s_{12}+s_{66})\partial^4/\partial x^2\partial y^2-2s_{16}\,\partial^4/\partial x\partial y^3+s_{11}\,\partial^4/\partial y^4,$$

$$L_3=-g_{22}\,\partial^3/\partial x^3+(g_{12}+g_{26})\partial^3/\partial x^2\partial y-(g_{21}+g_{16})\partial^3/\partial x\partial y^2+g_{11}\,\partial^3/\partial y^3,$$

$L_2=\eta_{22}\,\partial^2/\partial x^2-2\eta_{12}\,\partial^2/\partial x\partial y+\eta_{11}\,\partial^2/\partial y^2$, s_{22} ... – коэффициенты упругости, η_{22}, ... – коэффициенты диэлектрической восприимчивости, g_{22}, ... – пьезоэлектрические модули, $\Phi(x,y)$ и $\Psi(x,y)$ – функции напряжения Эри и электрической индукции, через которые выражаются напряжения и компоненты вектора электрической индукции

$$\sigma_x=\partial^2\Phi/\partial y^2,\; \sigma_y=\partial^2\Phi/\partial x^2,\; \tau_{xy}=-\partial^2\Phi/\partial x\partial y,\; D_x=\partial\Psi/\partial y,\, D_y=-\partial\Psi/\partial x. \tag{2}$$

В полярной системе координат граничные условия первой задачи записываются в виде

$$u_r(r,\theta_1)=u_1(r),\; u_\varphi(r,\theta_1)=v_1(r),\; V(r,\theta_1)=V_1(r), \tag{3.1}$$

$$\sigma_\varphi(r,-\theta_2)=\sigma_2(r),\; \tau_{r\varphi}(r,-\theta_2)=\tau_2(r),\, V(r,-\theta_2)=V_2(r).$$

Для второй, третьей и четвёртой задач электрические граничные условия имеют вид:

$$D_\varphi(r,\theta_1)=D_1(r),\; D_\varphi(r,-\theta_2)=D_2(r), \tag{3.2}$$

$$V(r,\theta_1)=V_1(r),\, D_\varphi(r,-\theta_2)=D_2(r), \tag{3.3}$$

$$D_\varphi(r,\theta_1)=D_1(r),\; V(r,-\theta_2)=V_2(r). \tag{3.4}$$

Для всех задач контактные условия записываются в виде:

$$\sigma_{\theta1}(r,0)=\sigma_{\theta2}(r,0),\tau_{r\theta1}(r,0)=\tau_{r\theta2}(r,0),\quad u_{r1}(r,0)=u_{r2}(r,0), \tag{4}$$

$$u_{\theta1}(r,0)=u_{\theta2}(r,0),\quad \partial V_1(r,0)/\partial r=\partial V_2(r,0)/\partial r,\; D_{\theta1}(r,0)=D_{\theta2}(r,0),$$

где $V(r,\theta)$ – потенциал электрического поля, $D_\theta(r,\theta)$ – нормальная компонента вектора электрической индукции.

Общие выражения для функций напряжения $\Phi(x,y)$ и электрической индукции $\Psi(x,y)$ запишем в несколько иной форме, чем принято в работах [5,6]:

$$\Phi(x,y)=\sum_{j=1}^{6}\gamma_j F_j(z_j),\quad \Psi(x,y)=\sum_{j=1}^{6}\gamma_j f_j F_j'(z_j), \tag{5}$$

где $F_j(z_j)$ – произвольные аналитические функции своих аргументов, штрихом обозначена производная по комплексному аргументу $z_j=x+\mu_j y$, μ_j – неравные между собой корни характеристического уравнения

$$4\pi l_4(\mu)l_2(\mu)+l_3^2(\mu)=0,\ \mu_j=\sigma_j+i\nu_j,\ \nu_j>0,\ \ \mu_4=\bar{\mu}_1,\ \ \mu_5=\bar{\mu}_2,\ \ \mu_6=\bar{\mu}_3, \tag{6}$$

$$\gamma_j=1\ \ (j=1,2,4,5),\ \gamma_j=l_3(\mu_j)/4\pi l_2(\mu_j)\ \ (j=3,6),\ f_j=-l_3(\mu_j)/l_2(\mu_j).$$

Полиномы $l_4(\mu), l_3(\mu), l_2(\mu)$ получаются из L_4, L_3, L_2 заменой $\partial/\partial x,\ \partial^2/\partial x^2,\ \partial^3/\partial x^3$, $\partial^4/\partial x^4$ на единицу, а $\partial/\partial y,\ \partial^2/\partial y^2,\ \partial^3/\partial y^3,\ \partial^4/\partial y^4$ – на $\mu,\ \mu^2,\ \mu^3,\ \mu^4$ соответственно.

Записывая в полярной системе координат выражения для $\sigma_\theta,\sigma_r,\tau_{r\theta},\partial u_r/\partial r$, $\partial u_\theta/\partial r, \partial V/\partial r, D_r, D_\theta$

$$\sigma_\theta=\sum_{j=1}^{6}\gamma_j a_j^2(\theta)F_j''(z_j),\qquad \sigma_r=\sum_{j=1}^{6}\gamma_j b_j^2(\theta)F_j''(z_j),$$

$$\tau_{r\theta}=-\sum_{j=1}^{6}\gamma_j a_j(\theta)b_j(\theta)F_j''(z_j),\ \ \frac{\partial u_r}{\partial r}=\sum_{j=1}^{6}\gamma_j a_j(\theta)c_j(\theta)F_j''(z_j),$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial r}=\sum_{j=1}^{6}\gamma_j a_j(\theta)d_j(\theta)F_j''(z_j),\ \ \frac{\partial V}{\partial r}=\sum_{j=1}^{6}\gamma_j a_j(\theta)m_j F_j''(z_j),$$

$$D_r=\sum_{j=1}^{6}\gamma_j b_j(\theta)f_j F_j''(z_j),\qquad D_\theta=-\sum_{j=1}^{6}\gamma_j a_j(\theta)f_j F_j''(z_j),$$

$$a_j(\theta)=\cos\theta+\mu_j\sin\theta,\qquad b_j(\theta)=-\sin\theta+\mu_j\cos\theta,$$

$$M_j=s_{11}\mu_j^2-s_{16}\mu_j+s_{12}-f_j\left(g_{11}\mu_j-g_{21}\right)/4\pi,$$

$$N_j=s_{12}\mu_j-s_{26}+s_{22}\mu_j^{-1}-f_j\left(g_{12}-g_{22}\mu_j^{-1}\right)/4\pi,$$

$$m_j=g_{11}\mu_j^2-g_{16}\mu_j+g_{12}+f_j\left(\eta_{11}\mu_j-\eta_{12}\right),$$

$$c_j(\theta)=M_j\cos\theta+N_j\sin\theta,\quad d_j(\theta)=N_j\cos\theta-M_j\sin\theta$$

и применяя к ним обобщённое интегральное преобразованиеМеллина комплексной функции $f(z)=f(x+\mu y)$ (μ – некоторая комплексная константа) [7]

$$\langle f(z)\rangle=\int_0^\infty f(z)r^{s-1}dr=a^{-s}(\theta)\,\bar{f}(s),\ \bar{f}(s)=\int_0^\infty f(z)r^{s-1}dr, a(\theta)=\cos\theta+\mu\sin\theta, \tag{7}$$

с учётом (2) и (5) будем иметь [2,3,4]

$$\langle\sigma_\theta\rangle=\sum_{j=1}^{6}\gamma_j a_j^2(\theta)a_j^{-s}(\theta)\bar{F}_j(s),\quad \langle\sigma_r\rangle=\sum_{j=1}^{6}\gamma_j b_j^2(\theta)a_j^{-s}(\theta)\bar{F}_j(s), \tag{8}$$

....

$$\langle D_r\rangle=\sum_{j=1}^{6}\gamma_j f_j b_j(\theta)a_j^{-s}(\theta)\bar{F}_j(s),\quad \langle D_\theta\rangle=-\sum_{j=1}^{6}\gamma_j f_j a_j(\theta)a_j^{-s}(\theta)\bar{F}_j(s),$$

$$\bar{F}_j(s)=\int_0^\infty F''(z_j)z_j^{s-1}dz_j.$$

Преобразуя по Меллину гранично-контактные условия (3.1) и (4), предварительно продифференцируя в них $u_r(r,\theta), u_\theta(r,\theta)$, и $V(r,\theta)$ по r и удовлетворяя преобразованным гранично-контактным условиям, для определения неизвестных $\bar{F}_{jk}(s)\ (k=1,2;\ j=1,2,\dots,6)$ получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^{12}B_{lj}U_j=T_l^*(s)\ \ (l=1,2,\dots,12),\ U_j=\left\|\bar{F}_{11}(s),\bar{F}_{21}(s),\dots,\bar{F}_{61}(s),\bar{F}_{12}(s),\bar{F}_{22}(s),\dots,\bar{F}_{62}(s)\right\|, \tag{9}$$

$$T_l^*=\left\|\langle u_1(r)\rangle,\langle v_1(r)\rangle,\langle dV_1(r)/dr\rangle,\langle\sigma_2(r)\rangle,\langle\tau_2(r)\rangle,\langle dV_2(r)/dr\rangle,0,0,0,0,0,0\right\|.$$

Для второй, третьей и четвертой задач изменяются соответствующие строки системы (9) и элементы матрицы T_l^*.

Определяя из (9) неизвестные функции

$$\bar F_{j1} = \left|B_{j1}\right| \big/ \left|B\right| = \sum_{l=1}^{6} T_l^* A_{lj}(s)\Delta_{12}^{-1}(s),\ \bar F_{j2} = \left|B_{j2}\right| \big/ \left|B\right| = \sum_{l=1}^{6} T_l^* A_{(l+6)j}(s)\Delta_{12}^{-1}(s)$$

($|B| = \Delta_{12}(s)$ – определитель системы (9), матрицы $B_{jk}\ (k=1,2)$ получаются из B заменой соответствующего столбца на правые части, $A_{\tilde l j}$ – алгебраические дополнения) и подставляя в (8), получим решение в трансформантах Меллина, $\tilde l = l + 3\left(1+(-1)^k\right)(k=1,2)$

$$\langle\sigma_{\theta k}\rangle = \sum_{l=1}^{6} T_l^* \left[\sum_{j=1}^{6} \gamma_{jk} a_{jk}^2(\theta) a_{jk}^{-s}(\theta) A_{\tilde l j}\right]\Delta_{12}^{-1}(s), \langle\sigma_{rk}\rangle = \sum_{l=1}^{6} T_l^* \left[\sum_{j=1}^{6} \gamma_{jk} b_{jk}^2(\theta) a_{jk}^{-s}(\theta) A_{\tilde l j}\right]\Delta_{12}^{-1}(s), \tag{10}$$

....

$$\langle D_{rk}\rangle = \sum_{l=1}^{6} T_l^* \left[\sum_{j=1}^{6} \gamma_{jk} b_{jk}(\theta) f_{jk} a_{jk}^{-s}(\theta) A_{\tilde l j}\right]\Delta_{12}^{-1}(s), \langle D_{\theta k}\rangle = -\sum_{l=1}^{6} T_l^* \left[\sum_{j=1}^{6} \gamma_{jk} a_{jk}(\theta) f_{jk} a_{jk}^{-s}(\theta) A_{\tilde l j}\right]\Delta_{12}^{-1}(s).$$

Напряжения и компоненты вектора электрической индукции определяются с помощью обратного преобразования Меллина

$$\sigma_{\theta k} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \langle\sigma_{\theta k}\rangle r^{-s} ds, ..., D_{\theta k} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \langle D_{\theta k}\rangle r^{-s} ds, \tag{11}$$

путь интегрирования которого лежит в полосе [5]

$$\max_{\operatorname{Re}s_n<1}\left(\operatorname{Re}s_n\right) < c < \min_{\operatorname{Re}s_n\ge 1}\left(\operatorname{Re}s_n\right).$$

Здесь s_n – точки полюсов $\langle\sigma_{\theta k}\rangle, ..., \langle D_{\theta k}\rangle, \operatorname{Re}s_n < 1, (\operatorname{Re}s_1 > \operatorname{Re}s_2 > ...)$.

Заметим, что при отсутствии пьезоэффекта $(g_{ij}=0)$ каждая из рассматриваемых задач распадается на две независимые задачи: упругую задачу для анизотропного клина $L_4\Phi(x,y)=0$ с граничными условиями $u_r(r,\theta_1)=u_1(r),\ u_\varphi(r,\theta_1)=v_1(r), \sigma_\varphi(r,-\theta_2)=\sigma_2(r),\ \ \tau_{r\varphi}(r,-\theta_2)=\tau_2(r)$ и электростатическую задачу $L_2\Psi(x,y)=0$ с одним из электрических граничных условий. При этом, вместо (5) будем иметь:

$$\Phi(x,y) = F_1(z_1)+F_2(z_2)+F_4(z_4)+F_5(z_5), \Psi(x,y) = F_3'(z_3)+F_6'(z_6),\ l_4(\mu)l_2(\mu)=0.$$

А матрица B становится ступенчатой с диагональными клетками A_2 и A_4

$$\begin{Vmatrix} A_4 & 0 \\ 0 & A_2 \end{Vmatrix}$$

где A_4 – матрица четвёртого порядка, A_2 –второго порядка. Корни $l_4(\mu)=0$ зависят только от упругих коэффициентов, а $l_2(\mu)=0$ – от коэффициентов диэлектрической восприимчивости.

Поведение напряжений в окрестности угловой точки составного пьезоклина определяется решением уравнений $\Delta_{12}(s)=0$ (окрестность угловой точки свободна от внешних воздействий).

Численные расчёты проведены для составного пьезоклина из БФК и БФР [8]. Из условий $\operatorname{Re}s_1=0$ на плоскости (θ_1,θ_2) построены предельные кривые 1- 4 (рис.1), разделяющие в окрестности вершины пьезоклина области малонапряжённости $(\operatorname{Re}s_1<0)$ и сильной концентрации $(0<\operatorname{Re}s<1)$ [9]. Точки области малонапряжённости и начала координат лежат на одной стороне предельной кривой.

Из приведённых на рис.1 кривых следует, что независимо от типа электрических граничных условий, предельные кривые (номера кривых соответствуют номерам электрических

$$
B=\left\|\begin{array}{cccccc}
c_{11}a_{11}^{1-s} & c_{21}a_{21}^{1-s} & \gamma_{31}c_{31}a_{31}^{1-s} & \bar{c}_{11}\tilde{a}_{11}^{1-s} & \bar{c}_{21}\tilde{a}_{21}^{1-s} & \bar{\gamma}_{31}\bar{c}_{31}\tilde{a}_{31}^{2-s} \\
d_{11}a_{11}^{1-s} & d_{21}a_{21}^{1-s} & \gamma_{31}d_{31}a_{31}^{1-s} & \bar{d}_{11}\tilde{a}_{11}^{1-s} & \bar{d}_{21}\tilde{a}_{21}^{1-s} & \bar{\gamma}_{31}\bar{d}_{31}\tilde{a}_{31}^{1-s} \\
m_{11}a_{11}^{1-s} & m_{21}a_{21}^{1-s} & \gamma_{31}m_{31}a_{31}^{1-s} & \bar{m}_{11}\tilde{a}_{11}^{1-s} & \bar{m}_{21}\tilde{a}_{21}^{1-s} & \bar{\gamma}_{31}\bar{m}_{31}\tilde{a}_{31}^{1-s} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & \gamma_{31} & 1 & 1 & \bar{\gamma}_{31} \\
\mu_{11} & \mu_{21} & \gamma_{31}\mu_{31} & \bar{\mu}_{11} & \bar{\mu}_{21} & \bar{\gamma}_{31}\bar{\mu}_{31} \\
M_{11} & M_{21} & \gamma_{31}M_{31} & \bar{M}_{11} & \bar{M}_{21} & \bar{\gamma}_{31}\bar{M}_{31} \\
N_{11} & N_{21} & \gamma_{31}N_{31} & \bar{N}_{11} & \bar{N}_{21} & \bar{\gamma}_{31}\bar{N}_{31} \\
m_{11} & m_{21} & \gamma_{31}m_{31} & \bar{m}_{11} & \bar{m}_{21} & \bar{\gamma}_{31}\bar{m}_{31} \\
f_{11} & f_{21} & \gamma_{31}f_{31} & \bar{f}_{11} & \bar{f}_{21} & \bar{\gamma}_{31}\bar{f}_{31}
\end{array}\right.
$$

$$
\left.\begin{array}{cccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
c_{12}a_{12}^{1-s} & c_{22}\,a_{22}^{1-s} & \gamma_{32}c_{32}a_{32}^{1-s} & \bar{c}_{12}\,\tilde{a}_{12}^{1-s} & \bar{c}_{22}\,\tilde{a}_{22}^{1-s} & \bar{\gamma}_{32}\,\bar{c}_{32}\tilde{a}_{32}^{1-s} \\
d_{12}a_{12}^{1-s} & d_{22}a_{22}^{1-s} & \gamma_{32}d_{32}a_{32}^{1-s} & \bar{d}_{12}\tilde{a}_{12}^{1-s} & \bar{d}_{22}\tilde{a}_{22}^{1-s} & \bar{\gamma}_{32}\bar{d}_{32}\tilde{a}_{32}^{1-s} \\
m_{12}a_{12}^{1-s} & m_{22}a_{22}^{1-s} & \gamma_{32}m_{32}a_{32}^{1-s} & \bar{m}_{12}\tilde{a}_{12}^{1-s} & \bar{m}_{22}\tilde{a}_{22}^{1-s} & \bar{\gamma}_{32}\bar{m}_{32}\tilde{a}_{32}^{1-s} \\
-1 & -1 & -\gamma_{32} & -1 & -1 & -\bar{\gamma}_{32} \\
-\mu_{12} & -\mu_{22} & -\gamma_{32}\mu_{32} & -\bar{\mu}_{12} & -\bar{\mu}_{22} & -\bar{\gamma}_{32}\bar{\mu}_{32} \\
-M_{12} & -M_{22} & -\gamma_{32}M_{32} & -\bar{M}_{12} & -\bar{M}_{22} & -\bar{\gamma}_{32}\bar{M}_{32} \\
-N_{12} & -N_{22} & -\gamma_{32}N_{32} & -\bar{N}_{12} & -\bar{N}_{22} & -\bar{\gamma}_{32}\bar{N}_{32} \\
-m_{12} & -m_{22} & -\gamma_{32}m_{32} & -\bar{m}_{12} & -\bar{m}_{22} & -\bar{\gamma}_{32}\bar{m}_{32} \\
-f_{12} & -f_{22} & -\gamma_{32}f_{32} & -\bar{f}_{12} & -\bar{f}_{22} & -\bar{\gamma}_{32}\bar{f}_{32}
\end{array}\right\|
$$

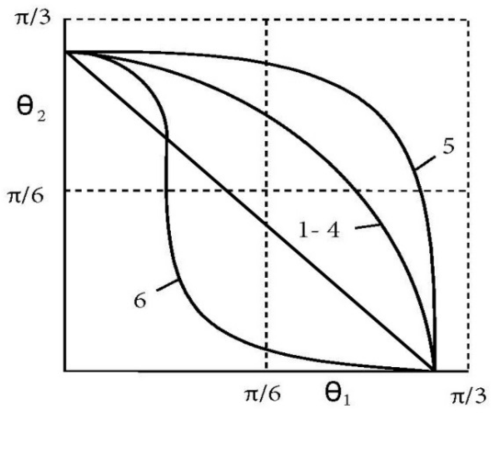


Рис.1

$$a_{jk}=\cos\theta_k-(-1)^k\,\mu_{jk}\sin\theta_k,$$
$$b_{jk}=(-1)^k\sin\theta_k+\mu_{jk}\cos\theta_k,$$
$$c_{jk}=M_{jk}\cos\theta_k+N_{jk}\sin\theta_k,$$
$$d_{jk}=N_{jk}\cos\theta_k-M_{jk}\sin\theta_k,$$

$\bar{a}_{jk},\bar{b}_{jk},\bar{c}_{jk},\bar{d}_{jk}$ – сопряженные по отношению к $a_{jk},b_{jk},c_{jk},d_{jk}$ комплексные числа, $k=1,2;\ j=1,2,3.$

граничных условий) пересекают координатные оси $0\theta_1$ и $0\theta_2$ – оси с точностью до одного градуса в точках $(55\pi/180,0)$ и $(0,55\pi/180)$ соответственно. Между тем, в работах [2,3,4] показано, что при смешанных электрических граничных условиях предельные кривые пересекают координатные оси в точках $(\pi/2,0)$ и $(0,\pi/2)$, а в случае первых двух электрических граничных условий – в точках $(\pi,0)$ и $(0,\pi)$ (на гранях клина были заданы или напряжения, или перемещения). Кривые 5 и 6 соответствуют случаю, когда коэффициент упругости s_{11} увеличен или уменьшён в 17 раз.

В заключение отметим, что полученные результаты и выводы о поведении напряжений в окрестности угловой точки пьезоклина относятся также к компонентам вектора электрической индукции D_r и D_θ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нерсисян Г.Г., Саргсян А.М. Особенности поведения электроупругого поля в кусочно-одно-родном пьезоэлектрическом клине.//МКМ. 2011. Т.47. №6. С.903–912.
2. Нерсисян Г.Г., Саргсян А.М. Краевые задачи электроупругости для кусочно-однородного пьезоэлектрического клина.//МКМ. 2013. №2. С.193-206.
3. Нерсисян Г.Г., Саргсян А.М. О влиянии типа электрических граничных условий на поведение напряжений в тонком кусочно-однородном пьезоэлектрическом клине.//Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред.Труды VIII международной конференции, сентябрь 22–26, 2014, Горис–Степанакерт.С. 320–324.
4. Саргсян А.М. Влияние типа электрических граничных условий на поведение напряжений в кусочно-однородном пьезоэлектрическом клине.// МКМ. 2014. Т.51. №2. С.309–322.
5. Космодамианский А.С., Ложкин В.Н. Обобщённое плоское напряжённое состояние пьезо-электрических пластин. // ПМ. 1975. Т.11. №5. С. 45–53.
6. Вековищева И.А. Плоская задача теории упругости анизотропного тела с учётом электри-ческого эффекта. // ПМТФ. 1970. № 2. С. 97–103.
7. Михайлов С.Е. Об одной плоской задаче для двух соединённых анизотропных клиньев. // МТТ. 1978. №4. С.155-160.
8. Акустические кристаллы / Ред.Шаскольский/ – М.: Наука, 1982. 632 с.
9. Чобанян К.С.Напряжения в составных упругих телах. Ереван:1987. 338с.

Сведения об авторах:

Нерсисян Гриша Геворкович,
Армянский Национальный Аграрный Университет, к.ф.-м.н., доцент,
Адрес: Армения, 0037, Ереван, пр.Азатутян, 7, кв.7. **Тел.:** 20-68-79
Саргсян Азат Мкртычевич,
Институт механики НАН Армении, ведущий научный сотрудник, кандидат физ.-мат наук,
Адрес: Армения, 0018, Ереван, ул. Т.Меци, 40, кв.47
Тел.: 55-21-33,**E-mail:**azat-sargsyan@mail.ru

АНАЛОГИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОДНОРОДНОГО КОНСОЛЬНОГО СТЕРЖНЯ С ТЕЛЕГРАФНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

Оганесян С.М.

В статье показано, что система уравнений, описывающая распространения сдвиговой составляющей изгибных колебаний, аналогична телеграфным уравнениям.

В работе [1] даны постановки задач о распространении упругих волн чистого изгиба и изгиба при свободных колебаниях однородного консольного стержня постоянного поперечного сечения S длины l. Однако, при рассмотрении задачи о вынужденных колебаниях однородного консольного стержня на изгиб оказалось [2,3], что при силовом внешнем воздействии в виде распределённой силы $f\,(x,t)$ истиной причиной изгибных колебаний является её обобщённая частная производная по переменной x, $\dot{f}_x(x,t)$. При этом, в стержне возникают «внутренние» объёмные силы $q(x,t)$, которые обязательно необходимо учитывать при формулировке постановки задачи о свободных и вынужденных колебаниях консольного стержня на изгиб.

Представим, как принято в работах [1-7], перемещение нейтральной линии $\mathrm{U}(x,t)$ и углы поворота $\varphi(x,t)$ поперечных сечений в виде $U = U_1 + U_2$ и $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, где $U_1(\varphi_1)$– перемещения (углы поворотов) нейтральной линии от изгиба, $\mathrm{U}_2(\varphi_2)$– дополнительные перемещения (углы поворотов) с учётом деформации сдвига. В работе [2] показано, что решение задачи с учётом сдвига подразделяется на стационарную и волновую подзадачи, которые принимают соответственно следующий вид:

$$q(x,t) - kSG\frac{\partial^2 \overline{U_2}}{\partial x^2} = f\,(x,t) \qquad (1)$$

где k –численный коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения, G – модуль сдвига Юнга, и

$$\rho S\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} - kGS\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} = \dot{f}_x(x,t) \qquad (2)$$

при нулевых начальных и граничных условий

$$\begin{aligned} &\varphi_2(0,t) = \frac{\partial \varphi_2(l,t)}{\partial x} = 0, \\ &\varphi_2(x,0) = \frac{\partial \varphi_2(x,0)}{\partial t} = 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

и $$\frac{\partial U_2}{\partial x} = \overline{\varphi}_2(x,t), \quad U_2(0,t) = 0 \qquad (4)$$

Покажем, как можно связать «стационарную» и «волновую» подзадачи. Для этого балансирующее равенство (1) при $f\,(x,t) = 0$ представим в виде:

$$\frac{\partial \overline{q}(x,t)}{\partial t} - kGS\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} = 0 \ , \qquad (5)$$

где $\dfrac{\partial \overline{q}(x,t)}{\partial t} = q(x,t)$.

Дополнив уравнение (5) равенством

$$\frac{\partial \overline{q}}{\partial x} = \rho S\frac{\partial \varphi}{\partial t} \qquad (6)$$

получим систему уравнений (5)-(6).

Если уравнение (6) продифференцируем по переменной t, а уравнение (5) – по переменной x, то приходим к равенствам:

$$\rho S\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\overline{q}}{\partial x\,\partial t}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2\overline{q}}{\partial x\partial t}-kGS\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=0. \tag{8}$$

Подставляя выражение $\dfrac{\partial^2\overline{q}}{\partial x\partial t}$ из уравнения (8) в уравнение (7) получим волновое уравнение (2).

$$\rho S\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-kGS\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=0.$$

Система уравнений (5)-(6) аналогична телеграфным уравнениям [8]

$$L\frac{\partial I}{\partial t}=-\frac{\partial U}{\partial x} \tag{9}$$

$$C\frac{\partial U}{\partial t}=-\frac{\partial I}{\partial x} \tag{10}$$

где L, C – соответственно, индуктивность и ёмкость единицы длины линии, I – ток в длине линии, U – напряжение.

Наличие «внутреннего» объёмного импульса (количества движения) $\overline{q}(x,t)$ в системе уравнений (5)-(6) позволяет выдвинуть смелую гипотезу, что референтная частота f_0 и эффективная добротность $\mathrm{Q}_{\text{эф}}$, $[9-11]$, характеризующие затухание сейсмических волн в ближней зоне землетрясения, связаны с затуханием «внутреннего» объёмного импульса $\overline{q}(x,t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Оганесян С.М. Постановка задач о распространения упругих волн чистого изгиба и изгиба при поперечных колебаниях однородного консольного стержня //Доклады НАН Армении. 2013. Т.113. №3. С.259-267.
2. Оганесян С.М. К вопросу о построении новой теории сейсмостойкости// Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружения. 2013. №5. С.26-29.
3. Оганесян С.М. О распространении упругих волн чистого изгиба и изгиба при поперечных колебаниях однородного консольного стержня //В кн.: Сб. науч. тр. I межд. Науч. конф. молодых учёных, посвящ. 70-летию НАН Армении. Современные задачи геофизики, инженерной сейсмологии и сейсмостойкого строительства. Ереван: Изд. «Гитутюн», 2013. С.103-115.
4. Оганесян С.М., Мурадян А.Р., Оганесян А.С. Задача кинематического возбуждения жёстко защемлённого с двух сторон однородного стержня, как модель возникновения и распространения сейсмической волны в ближней зоне очага землетрясения //Там же, с. 256-258.
5. Ляв А. Математическяа теория упругости. М.:-Л: ОНТИ, 1935. 675с.
6. Оганесян С.М. Новая расчётная схема для изгибных колебаний однородного консольного стержня. //В кн.: Сейсмическая опасность и управление сейсмическим риском на Кавказе. Труды V Кавказской международной школы-семинара молодых учёных, Владикавказ-Цой, 15-19 сентября, 2013г. С.22-28
7. Оганесян С.М. Новая расчётная схема для изгибных колебаний однородного консольного стержня при кинематическом возбуждении //Труды VIII Международной конференции. Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред, сентябрь 22-26, 2014, Горис–Степанакерт, Ереван 2014, с.325-329.
8. Белецкий А.Ф. Основы теории линейных электрических цепей. М.: Связь, 1967. 608с.

9. Andrew A. Mitchell. The Dimensions of Advertising Involvement. //in NA - Advances in Consumer 1981. Research Volume 8, p.25-30.
10. Гликман А.Г. Физика техногенных и природных землетрясений. //В кн.: Сб. науч. тр. I Межд. Науч. конф. молодых учёных, посвященная 70-летию НАН РА. Современные задачи геофизики, инженерной сейсмологии и сейсмостойкого строительства. Ереван: Изд. «Гитутюн», 2013, С.202-206.
11. Гликман А.Г. Спектральная сейсморазведка как метод инженерной геофизики. //Там же, с. 292-296.

Сведения об авторе:

Оганесян Севада Мкртичевич – д.ф.-м.н., чл.-корр. НАН РА, зав. отделом ИГИС им. А.Г.Назарова НАН РА, 3115, Армения, Гюмри-15, ул. В.Саргсяна, 5, ИГИС, (374 312)3 12 61, (374 93) 42 04 43
E-mail: iges@mail.ru

ОБОБЩЁННАЯ ИЗГИБО-СДВИГОВАЯ МОДЕЛЬ ПОДГОТОВКИ ТЕКТОНИЧЕСКОГО ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЯ

Оганесян С.М., Гедакян Э.Г., Карапетян Дж.К.

В статье показано, что при квазистатическом трёхстороннем изгибе прямоугольного параллелепипеда в нодальных плоскостях накапливаются тангенциальные напряжения, которые приводят к сдвиговым разрывам при тектонических землетрясениях. При учёте также нормальных сил, действующих на боковые грани параллелепипеда получаем обобщённую изгибо-сдвиговую модель подготовки тектонического землетрясения.

В настоящее время является общепризнанным, что тектоническое землетрясение – это быстрое разрушение (сдвиг по разлому) горных пород под действием упругих (в районе разрыва неупругих) напряжений, накопленных этими породами. Однако, нет единства взглядов на то, как и в каких объёмах горных пород накапливаются механические напряжения, порождающие то или иное тектоническое землетрясение. Известны две альтернативные концепции накапливания напряжений: локальное и региональное [1-8].

Согласно локальной концепции упругие напряжения накапливаются в горных породах вследствие различия в скоростях относительных смещений смежных блоков земной коры и при этом возникают неоднородные поля сдвиговых упругих напряжений, быстро затухающие с удалением от разлома.

Данная концепция удачно описывает процесс накопления тектонических напряжений на протяжённых трансформных разломах. В противоположной концепции полагается существование однородных региональных полей упругих напряжений, способных порождать сильные тектонические землетрясения.

В работах [9,10] предложена изгибная модель подготовки тектонического землетрясения (ИМПТЗ). Показано, что в случае квазистатическом силовом изгибном воздействии тремя парами касательных сил $\vec{F}_i$ и $-\vec{F}_i$, I = $\overline{I,3}$, приложенных к противоположным граням однородного прямоугольного параллелепипеда естественным образом, получаются (рис.1-4 работы [9]) нодальные плоскости N_1, N_2, N_3, нулевая «стрессовая» линия, гипоцентр будущего тектонического землетрясения. На рис.1 схематично показаны розы зон сжатия и растяжения в нодальной плоскости N_3. При этом, максимальные значения растягивающих и сжимающих напряжений в зонах роз составляют угол 45^{o} с нодальными линиями.

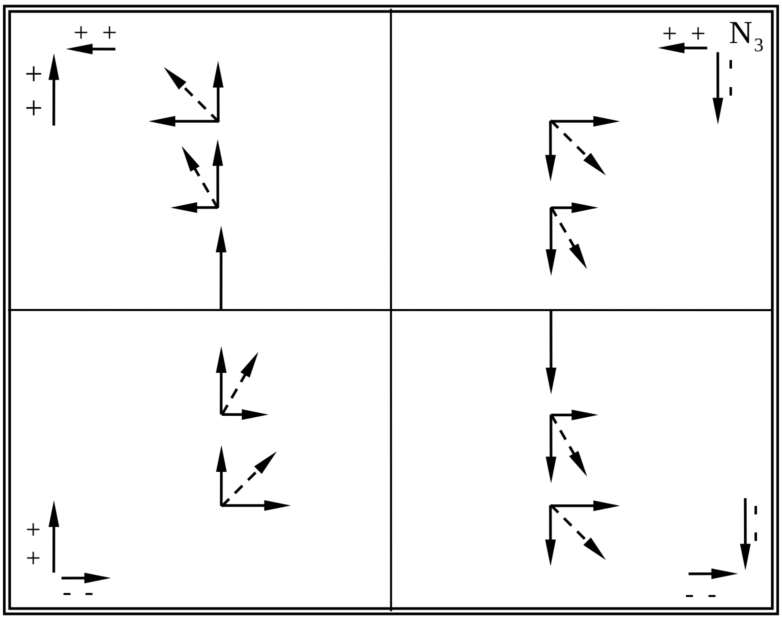


Рис.1. Напряжённое состояние очага землетрясения

Выполнение комбинированного условия в точках перегиба, расположенных в нодальной плоскости N_3, требуют наличия пары противоположно направленных двойных сил с момента действующих по разным сторонам нодальной плоскости. Эти пары двойных сил с моментом компенсируют действие перерезывающих сил, возникающих в нодальных плоскостях. Действие перерезывающих сил содержит «ударную» компоненту. Применение этого подхода при изучении напряжённо-деформированного состояния таких зон указывает, что она адекватно отражает реальные условия сейсмотектонических напряжений.

Предложенная изгибная модель подготовки тектонического землетрясения полностью укладывается в региональную концепцию накапливания механического напряжения в горных породах. Особо отметим, что упругие напряжения при этом образуют однородное деформационное поле. Более того, при взаимодействии тектонических блоков возникают главные сжимающие (растягивающие) напряжения, приводящие к изгибно-сдвиговым процессам в плоскостях соприкосновения различных блоков.

Предложенная ИМПТЗ фактически учитывают только воздействие относительного перемещения различных блоков земной коры относительно друг друга, которые создают только касательные силы. Наряду с этим, данная концепция не опровергает наличие процессов накоплений локальных тектонических напряжений на отдельных участках разломов, разграничиваюшие эти блоки.

В работе предлагают дополнительно учесть, что в зонах континентальных коллизийных областей различные блоки земной коры могут оказывать воздействие (давят, растягивают) друг на друга и в нормальном направлении. В этом случае в прямоугольном параллелепипеде, кроме изгибных напряжений (деформаций) возникают чисто сдвиговые деформации. Эти чисто сдвиговые деформации намного превосходят изгибные деформации и имеют характер, аналогичный деформациям в теории упругой отдачи Рейда [1]. Следовательно, чисто сдвиговые деформации укладываются в рамках локальной концепции упругих напряжений при подготовке тектонического землетрясения [8].

Фактически, предложенная в данной работе обобщённая изгибно-сдвиговая модель подготовки тектонического землетрясения содержит в себе обе модели: региональную и локальную, и позволяет показать какие нормальные и касательные силы возникают в области подготовки очага тектонического землетрясения.

В заключение отметим, что в локальной концепции имеется принципиальная возможность осуществления детерминированного прогноза мест подготовки землетрясений, а в региональной - имеется возможность выделять эти локальные аномальные поля.

Работа выполнена в рамках тематического финансирования по проекту 13-IE201
Государственного Комитета Науки МОН РА.

ЛИТЕРАТУРА

1. Reid H.F. The California earthquake of April 18, 1906, v2. The mechanics of the earthquake. V2 of the (California) State Earthquake Investigation commission (Carnegie Inst. Wash, Pub. 1910. 87, V.2. 192 pp.
2. Введенская А.В. Сейсмодинамика. М.: Наука, 1984. 144 с.
3. Костров Б.В. Механика очага тектонического землетрясения. М.: Наука, 1975. 176 с.
4. Ben-Menahem A., Singh S.J., Seismic waves and sources. -N-Y, Berlin, Neidelberg: Spriger-Verlad, 1981. 1108p.
5. Касахара К. Механика землетрясений-М.: Мир, 1985. 265с.
6. Райс Дж. Механика очага землетрясения. М.: Мир, 1982. 218с.
7. Гоцадзе О.Д., Кейлис-Борок В.И., Кириллова и др. Исследование механизма землетрясений..-М.:Изд-во АН СССР, 1957, Труды геофизического института, N40 (167). 148 с.
8. Певнев А.К. Прогноз землетрясения-геодезические аспекты проблемы//Физика Земли, 1988, N2, с. 88-98
9. Оганесян С. М., Геодакян Э.Г., Карапетян Дж.К., Саакян Б.В., Мурадян А.Р., Оганесян А.С. Трехсторонний квазистатический изгиб прямоугольного параллелепипеда, как модель подготовки очага тектонического землетрясения // Труды VIII Международной конференции. Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред, сентябрь 22-26, 2014г, Горис-Степанакерт, Ереван 2014, с. 330-334.

10. Оганесян С. М., Заалишвили В.Б., Геодакян Э.Г., Карапетян Дж.К., Оганесян А.О. Актуализация детальной карты сейсмической опасности территории Армении // Современные задачи геофизики, инженерной сейсмологии и сейсмостойкого строительства. Сб. Наук.трудов I международной научной конф. Молодых ученых, посв. 70-летию основания НАН РА. Ереван, изд. „Гитутюн”, 2013, с.116-122.

Сведения об авторах:

Оганесян Севада Мкртичевич–д.ф.-м.н., чл.-корр. НАН РА, зав. отделом ИГИС им. А.Г.Назарова НАН РА, 3115, Армения, (374 312)3 12 61,
(374 93) 42 04 43; **E-mail:** iges@mail.ru

Геодакян Эдуард Григорьевич - канд. ф.-м.н. , зав. отделом ИГИС им. А.Г.Назарова НАН РА, 3115, Армения, (374 312)3 12 61, (374 93) 51 31 23
e-mail: geodakyan.e@mail.ru.

Карапетян Джон Костикович - канд. геол. наук, директор, зав лабораторией ИГИС им. А.Г.Назарова НАН РА, 3115, Армения,
(374 312)3 12 61, (374 94) 79 85 80. **e-mail:** iges@sci.am, jon_iges@mail.ru

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОЙ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ, НА ПОВЕРХНОСТИ КОТОРОЙ ПРИКЛЕЕН УПРУГИЙ КОНЕЧНЫЙ СТРИНГЕР

Оганисян Г.В.

В работе рассматривается контактная задача для упругой составной (кусочно-однородной) бесконечной пластины, состоящей из двух полубесконечных упругих пластин с различными упругими свойствами материалов, сцеплённых между собой вдоль общей прямолинейной границы. Считается, что на верхней поверхности составной бесконечной упругой пластины непрерывно приклеен по всей своей длине и ширине упругий конечный стрингер, который перпендикулярен к линии разнородности указанных полубесконечных пластин и имеет отличные от них упругие свойства, а слой клея во время деформации находится в состоянии чистого сдвига.

Принимается, что контактирующая тройка (составная пластина – клей – стрингер) деформируется осевой сосредоточенной силой, приложенной на конце упругого конечного стрингера. Решение рассматриваемой плоской контактной задачи математически сформулирована в виде интегрального уравнения Фредгольма второго рода, ядро которой квадратично интегрируема по двум переменным, правая часть которой является решением поставленной контактной задачи в случае абсолютно жёсткой верхней полубесконечной пластины. Исследования показали, что в концевых точках стрингера распределения интенсивности неизвестных тангенциальных контактных усилий не имеют особенности, что обусловлено наличием материала слоя клея.

1. Пусть упругий сплошной изотропный лист в виде тонкой составной (кусочно-однородной) бесконечной пластины малой постоянной толщины h, составленной из двух сцеплённых между собой вдоль общей прямолинейной границы полубесконечных пластин с различными упругими свойствами материалов, на отрезке $a \le y \le b \ (a\,; b > 0)$ линии $x = 0$ своей верхней поверхности содержит упругий конечный стрингер прямоугольного поперечного сечения F_S с достоточно малой постоянной толщиной h_S и малой постоянной шириной d_S. Предполагается, что упругий конечный стрингер перпендикулярен к линии раздела указанных упругих полубесконечных пластин, непрерывно приклеен по всей своей длине и ширине к верхней упругой полубесконечной пластине, имеет отличные от них упругие характеристики, а контакт между ними осуществляется через тонкий слой клея малой постоянной толщины h_k и малой постоянной ширины $d_k \ (d_k = d_S)$. Здесь ось абсцисс совпадает с линией разнородности указанных полубесконечных упругих пластин.

Цель исследуемой контактной задачи заключается в определении закона распределения интенсивности неизвестных тангенциальных контактных усилий, действующих вдоль линий крепления упругой сплошной изотропной составной (кусочно-однородной) бесконечной пластиной с упругого конечнего стрингера, когда контактирующая тройка (пластина – клей – стрингер) деформируется под воздействием осевой сосредоточенной силы $Q\delta(x)\delta(y-b)$, приложенной на конце упругого конечного стрингера.

Исследуемая плоская контактная задача решается на основе следующих трёх основных предположениях [1 – 11]:

- для упругого конечного стрингера считается справедливой модель одноосного напряжённого состояния в сочетании с моделью контакта по линии, т.е. считается, что тангенциальные контактные усилия сосредоточены вдоль средней линии контактного участка,
- для упругой сплошной изотропной составной (кусочно-однородной) бесконечной пластины считается, что во время деформации она находится в обобщённом плоском напряжённом состоянии, вследствие чего она деформируется как целая плоскость,
- для слоя клея принимается, что во время деформации каждый дифференциальный элемент находится в состоянии чистого сдвига.

Теперь обращаясь к выводу разрешающего функционального уравнения рассматриваемой контактной задачи, заметим, что в вертикальном направлении упругий конечный стрингер растягивается, находясь в одноосном напряжённом состоянии. Тогда, имея в виду закон Гука и на основе вышесказанного, дифференциальное уравнение равновесия элемента упругого конечного стрингера будет иметь вид:

$$\frac{d^2 v_S(0\,;y)}{d\,y^2} = \frac{\tau(y)}{E_S F_S} \qquad (a \le y \le b)\,, \tag{1.1}$$

который удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$\left.\frac{d\,v_S(0\,;\,y)}{d\,y}\right|_{y=a+0}=0\,;\qquad \left.\frac{d\,v_S(0\,;\,y)}{d\,y}\right|_{y=b-0}=\frac{Q}{E_S F_S}\quad, \tag{1.2}$$

а также условию равновесия упругого конечного стрингера:

$$\int_a^b \tau(\eta)\,d\eta = Q\,. \tag{1.3}$$

Здесь в формулах (1.1) – (1.3) $\tau(y)=d_S\tau(0\,;\,y)$ и $v_S(0\,;\,y)$ – соответственно, интенсивность распределения неизвестных тангенциальных контактных усилий и вертикальные перемещения точек упругого конечного стрингера на линии $x=0$ при $a\le y\le b$, где $\tau(0\,;\,y)$ – неизвестные тангенциальные контактные напряжения, возникающие под упругим конечным стрингером на линии $x=0$ при $a\le y\le b$; E_S – модуль упругости, а $F_S=h_S d_S$ – площадь поперечного сечения упругого конечного стрингера; Q – интенсивность осевой сосредоточенной силы, приложенной на конце упругого конечного стрингера в точке $(0;b)$; $\delta(x)$ – известная дельта-функция Дирака.

С другой стороны, не останавливаясь на подробностях, приведём лишь окончательный вид вертикальных перемещений верхней полубесконечной упругой пластины составной (кусочно-однородной) бесконечной упругой пластины, когда на отрезке $a\le y\le b$ $(a\,;b>0)$ линии $x=0$ своей верхней поверхности действуют тангенциальные контактные усилия с интенсивностью $\tau(y)\,(a\le y\le b)$ [8]:

$$h\,l\,v(0\,;\,y)=\frac{1}{\pi}\int_a^b\left[\ln\frac{1}{|\eta-y|}-d_1\ln\frac{1}{\eta+y}-d_2\frac{\eta y}{(\eta+y)^2}+C\right]\tau(\eta)\,d\eta\qquad (0<y<\infty)\,, \tag{1.4}$$

где интеграл в сингулярной точке $\eta=y$ трактуется в смысле его главного значения по Коши. В формуле (1.4) сделаны следующие обозначения:

$$d_1\equiv d_1(k\,;\,\nu\,;\,\nu_1)=\frac{k(3-\nu)\big[k(3-\nu)(1+\nu_1)+2(1-\nu)(1-\nu_1)\big]-(3-\nu_1)\big[8-(3-\nu)(1+\nu)\big]}{(3-\nu)\big[k(3-\nu)+1+\nu\big]\big[3-\nu_1+k(1+\nu_1)\big]}\,,$$

$$d_2\equiv d_2(k\,;\,\nu)=\frac{2(k-1)(1+\nu)^2}{(3-\nu)\big[k(3-\nu)+1+\nu\big]}\quad, \tag{1.5}$$

$$l=\frac{8\mu}{3-\nu}=\frac{4E}{(3-\nu)(1+\nu)}\;;\;k=\frac{\mu_1}{\mu}=\frac{E_1(1+\nu)}{E(1+\nu_1)}\,,$$

здесь $v(0\,;\,y)$ – вертикальные перемещения точек верхней полубесконечной пластины на линии $x=0$; $(E\,;\,\mu\,;\,\nu)$ и $(E_1\,;\,\mu_1\,;\,\nu_1)$ – упругие характеристики верхней и нижней полубесконечных упругих пластин ; E и E_1 – модули упругости, μ и μ_1 – модули сдвига, ν и ν_1 – коэффициенты Пуассона материалов полубесконечных упругих пластин, а C – произвольная постоянная.

Теперь, на основе вышесказанного и имея в виду, что каждый дифференциальный элемент слоя клея во время деформации находится в условиях чистого сдвига, имеем [2 – 4, 7, 9 – 11]:

$$v_S(0\,;\,y)-v(0\,;\,y)=h_k\gamma_k(0\,;\,y)\;;\;\tau(y)=d_S\tau(0\,;\,y)=d_kG_k\gamma_k(0\,;\,y)\qquad (a\le y\le b)\,, \tag{1.6}$$

здесь $\gamma_k(0\,;\,y)$ – деформация сдвига слоя клея, а G_k – модуль сдвига материала слоя клея.

Для получения разрешающего функционального уравнения поставленой контактной задачи поступим следующим образом: из равенства (1.6) (условия контакта) определим значения интенсивности распределения неизвестных тангенциальных контактных усилий $\tau(y)$ $(a\le y\le b)$, и подставляя найденное значение в дифференциальное уравнение (1.1), получим:

$$\frac{d^2 v_S(0\,;\,y)}{d\,y^2}-\alpha^2 v_S(0\,;\,y)=-\alpha^2 v(0\,;\,y)\qquad (a\le y\le b)\,, \tag{1.7}$$

где $\alpha^2 = \frac{d_k G_k}{E_S F_S h_k} = \frac{E_k d_k}{2(1+\nu_k) E_S F_S h_k}$, а $(E_k; \nu_k)$ – соответственно, модуль упругости и коэффициент Пуассона материала слоя клея.

Таким образом, решение рассматриваемой плоской контактной задачи при принятых выше предположениях сводится к решению неоднородного дифференциального уравнения второго рода с постоянными коэффициентами (1.7), левая часть которой содержит вертикальные перемещения точек упругого конечного стрингера $v_S(0\,;\,y)$ $(a \le y \le b)$, а правая часть является вертикальным перемещением точек верхней упругой полубесконечной пластины $v(0\,;\,y)$ $(a \le y \le b)$. Надлежит отметить, что решения дифференциального уравнения (1.7) должны удовлетворять граничным условиям (1.2).

2. Теперь представим решение неоднородного дифференциального уравнения (1.7) при наличии граничных условий (1.2) в следующей форме:

$$v_S(0\,;\,y) = v_0(y) + \alpha^2 B\left[v(0\,;\,y)\right] \qquad (a \le y \le b), \tag{2.1}$$

где функция $v_0(y)$ и оператор $B\left[v(0\,;\,y)\right]$, соответственно, имеют следующий вид:

$$v_0(y) = \frac{Q\,\mathrm{ch}\,\alpha(y-a)}{E_S F_S \alpha\,\mathrm{sh}\,\alpha(b-a)}, \qquad (a \le y \le b), \tag{2.2}$$

$$B\left[v(0\,;\,y)\right] = \int_a^b K(\eta\,;y)\,v(0\,;\,\eta)\,d\eta \qquad (a \le y \le b), \tag{2.3}$$

$$K(\eta\,;\,y) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{ch}\,\alpha(y-b)\,\mathrm{ch}\,\alpha(\eta-a)}{\alpha\,\mathrm{sh}\,\alpha(b-a)} \;;\; a \le \eta \le y, \\[2ex] \dfrac{\mathrm{ch}\,\alpha(\eta-b)\,\mathrm{ch}\,\alpha(y-a)}{\alpha\,\mathrm{sh}\,\alpha(b-a)} \;;\; y \le \eta \le b, \end{cases} \qquad (a \le \eta\,;y \le b). \tag{2.4}$$

Для дальнейших исследований отметим некторые важнейшие свойства функции Грина $K(\eta\,;\,y)$:

- $K(\eta\,;\,y)$ – непрерывная функция в квадрате $\Omega = \left\{(\eta\,;\,y)\,\middle|\, a \le \eta\,;\,y \le b\right\}$,
- $K(\eta\,;\,y)$ – симметричная функция, т.е. почти всюду в Ω : $K(\eta\,;\,y) = K(y\,;\,\eta)$,
- так как ядро $K(\eta\,;\,y)$ – непрерывно и симметрично, то $B[\bullet]$ – симметричный и вполне непрерывный оператор, действующий в $L_2(a\,;\,b)$,
- $$\int_a^b K(\eta\,;\,y)\,d\eta = \int_a^b K(y\,;\,\eta)\,d\eta = \frac{1}{\alpha^2}, \tag{2.5}$$
- $$B\left[\cos\frac{\pi n(y-b)}{b-a}\right] = \frac{(b-a)^2}{\pi^2 n^2 + \alpha^2 (b-a)^2}\cdot\cos\frac{\pi n(y-b)}{b-a} \qquad (n=\overline{0\,;\infty}).$$

Сопоставляя формулы (1.6) и (2.1), в итоге получим следующее равенство:

$$\frac{h_k}{d_k G_k}\tau(y) + v(0\,;\,y) = \alpha^2 \int_a^b K(\eta\,;\,y)\,v\,(0\,;\,\eta)\,d\eta + v_0(y) \qquad (a \le y \le b). \tag{2.6}$$

Далее, подставляя значение вертикальных перемещений верхней полубесконечной упругой пластины $v(0\,;\,y)$, определённой формулой (1.4), в равенство (2.6), после несложных выкладок и упрощений, для нахождения распределения интенсивности неизвестных тангенциальных контактных усилий $\tau(y)$ $(a \le y \le b)$, являющейся основной неизвестной функцией поставленой контактной задачи, получим:

$$\tau(y) - \tau_0(y) + \frac{\lambda}{\pi}\int_a^b \left[\ln\frac{1}{|\eta - y|} - d_1 \ln\frac{1}{\eta + y} - d_2\frac{\eta y}{(\eta + y)^2} + C\right]\tau(\eta)d\eta =$$
$$= \lambda\alpha^2\int_a^b K(\eta\,;\,y)\left[\frac{1}{\pi}\int_a^b\left(\ln\frac{1}{|t-\eta|} - d_1\ln\frac{1}{t+\eta} - d_2\frac{t\eta}{(t+\eta)^2} + C\right)\tau(t)dt\right]d\eta \qquad (a \le y \le b)\,, \qquad (2.7)$$

при этом, здесь введены следующие обозначения:

$$\lambda = \frac{d_k G_k}{h l h_k} = \frac{(3-\nu)(1+\nu)d_k E_k}{8(1+\nu_k)Ehh_k}\,, \qquad (2.7(a))$$

$$\tau_0(y) = \frac{Q\alpha \operatorname{ch}\alpha(y-a)}{\operatorname{sh}\alpha(b-a)} \qquad (a \le y \le b)\,. \qquad (2.7(b))$$

Руководствуясь идеями работы [4], после простых преобразований интегрального уравнения (2.7) , будем иметь:

$$\tau(y) - \tau_0(y) + \frac{\lambda}{\pi}\int_a^b \left[\ln\frac{1}{|\eta - y|} - d_1 \ln\frac{1}{\eta + y} - d_2\frac{\eta y}{(\eta + y)^2}\right]\tau(\eta)d\eta -$$
$$- \lambda\alpha^2\int_a^b K(\eta\,;\,y)\left[\frac{1}{\pi}\int_a^b\left(\ln\frac{1}{|t-\eta|} - d_1\ln\frac{1}{t+\eta} - d_2\frac{t\eta}{(t+\eta)^2}\right)\tau(t)dt\right]d\eta = (a \le y \le b)\,, \qquad (2.8)$$
$$= C\frac{\lambda}{\pi}\int_a^b \tau(\eta)d\eta\left[\alpha^2\int_a^b K(t\,;\,y)dt - 1\right].$$

Вследствие этого, с учётом вышесказанных свойств (2.5) функции $K(\eta\,;\,y)$, с применением теоремы Фубини, нетрудно видеть, что правая часть интегрального уравнения (2.8) обращается в нуль.Тогда, для нахождения распределения неизвестных тангенциальных контактных усилий с интенсивностью $\tau(y)$ $(a \le y \le b)$, окончательно получим следующее интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$\tau(y) + \lambda\int_a^b H(\eta\,;\,y)\tau(\eta)d\eta = \tau_0(y) \qquad (a \le y \le b)\,, \qquad (2.9)$$

где ядро $H(\eta\,;\,y)$ имеет следующий вид:

$$H(\eta\,;\,y) = \frac{1}{\pi}\left[\ln\frac{1}{|\eta-y|} - d_1\ln\frac{1}{\eta+y} - d_2\frac{\eta y}{(\eta+y)^2}\right] -$$
$$- \frac{\alpha^2}{\pi}\int_a^b K(t\,;\,y)\left[\ln\frac{1}{|t-\eta|} - d_1\ln\frac{1}{t+\eta} - d_2\frac{t\eta}{(t+\eta)^2}\right]dt\,. \qquad (2.10)$$

Из интегрального уравнения Фредгольма второго рода (2.9) легко видеть, что функция $\tau_0(y)$ $(a \le y \le b)$, определённая формулой (2.7(b)), является решением рассматриваемой контактной задачи в случае абсолютно жёсткой верхней полубесконечной пластины, т.е. решением интегрального уравнения Фредгольма второго рода (2.9) при $\lambda \to 0$ $(E \to \infty)$, также ограниченным $\tau(y)$ при $y \to a+0$ и $y \to b-0$.

Итак, решение рассматриваемой контактной задачи сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода (2.9), ядро которой квадратично интегрируемая функция по двум переменным, правая часть которой является решением поставленной контактной задачи в случае абсолютно жёсткой верхней полубесконечной пластины.

Кроме того, здесь особенно надо отметить, что при выводе интегрального уравнения (2.9) условие равновесия упругого конечного стрингера (1.3) нигде не используется. Это условие удовлетворяется автоматически в интегральном уравнении (2.9), поскольку, на основе вышесказанных свойств функции Грина (2.5) и формулы (2.10), имеют место следующие равенства, которые и обеспечивают наше вышеупомянутое утверждение:

$$\int_a^b \tau_0(y)dy = Q \quad ; \quad \int_a^b H(\eta\ ;\ y)dy = 0. \tag{2.11}$$

С другой стороны, нетрудно заметить, что фунция $\tau_0(y)$ определённая формулой (2.7(b)) в концевых точках стрингера $y=a$ и $y=b$ принимает конечные значения, следовательно, и распределение неизвестных тангенциальных контактных усилий с интенсивностью $\tau(y)$ в этих концевых точках $y=a$ и $y=b$ тоже принимает конечные значения, что обусловлено наличием материала слоя клея.

В конце отметим, что как оказалось выше, решение рассматриваемой контактной задачи разрешающее интегральное уравнение Фредгольма второго рода (2.9) не содержит постоянную C ($C = \text{const}$). Этого надо ожидать, поскольку, как известно, напряжённое состояние в плоской задачи теории упругости не зависит от постоянной плоской задачи.

Наконец, здесь надо отметить, что при отсутствии слоя клея распределение интенсивности неизвестных тангенциальных контактных усилий в этих точках $y=a$ и $y=b$ имеют корневую особенность.Уместно отметить также, что разрешимость интегрального уравнения Фредгольма второго рода (2.9) приводится аналогично работе [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Муки Р., Стернберг Е. Передача нагрузки от растягиваемого поперечного стержня к полубесконечной упругой пластине. // ПМ. Тр. Амер. общ. инженеров-механиков. Сер. Е.1968. №4. С.124 – 135.
2. Lubkin J.L., Lewis L.C. Adhesive shear flow for an axially loaded, finite stringer bonded to an infinite sheet. // Quart. J. of Mechanics and Applied Mathem. 1970. Vol. XXIII, pp.521 – 533.
3. Benthem J.P. On the diffusion of a load from a semi – infinite stringer bonded to a sheet. // Contril. Theory Aircraft Structure Deflation. 1972. pp.117–134.
4. Григорян Э.Х. О решении задачи для упругой бесконечной пластины, на поверхности которой приклеен стрингер конечной длины. // Изв.НАН РА.Механика. 2000. Т.53. №4. С.11–16.
5. Саркисян В.С. Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками. Ереван: Изд-во ЕГУ. 1983. 260с.
6. Григорян Э.Х., Оганисян Г.В. Контактная задача для упругой кусочно-однородной бесконечной пластины, усиленной двумя параллельными различными бесконечными упругими стрингерами. // Изв. НАН Армении. Механика. 2009. Т.62. №3. С.29 – 43.
7. Григорян Э.Х., Керопян А.В., Шагинян С С. Контактная задача для бесконечной пластины с двумя конечными стрингерами, один из которых склеен с ней, а другой находится в идеальном контакте. // Изв. НАН Армении. Механика. 2002. Т.55. № 2. С.14 – 23.
8. Оганисян Г.В. Контактные задачи для упругой неоднородной (кусочно-однородной) бесконечной пластины со стрингерами. // Диссертация на соискание учёной степени кандидата физ.- мат. наук. Ереван: 1986. 163 с.
9. Hovhannisyan H.V. Contact Problem for an Infinite Composite Elastic (Piecewise – Homogeneous) Plate with an Infinite Elastic Stringer Glued to the Plate Surface. // Proceedings of the Yerevan State University. Physical and Mathematical Sciences. 2012. V.1 (227), pp. 27 – 32.
10. Hovhannisyan H.V. Contact Problem for a Piecewise – Homogeneous Infinite Plate with Stacked Elastic Piecewise – Homogeneous Infinite Stringer. // Proceedings of the Yerevan State University. Physical and Mathematical Sciences. 2012. V.3 (229), pp. 34 – 43.
11. Оганисян Г.В. Контактная задача для полубесконечной пластины, на поверхности которой приклеен бесконечный стрингер. //В сб. тр. международной конференции: «Актуальные проблемы прикл. математики, информатики и механики». Воронеж, 2012. Ч.1. С. 283 – 291.

Сведения об авторе:

Оганисян Гамлет Вараздатович – к.ф.м.н., с.н.с. ЕГУ, **E–mail:** hovhannisyanhamlet@yandex.ru

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СОСТАВНОЙ ПЛАСТИНЫ С УПРУГИМИ КОНЕЧНЫМИ СТРИНГЕРАМИ

Оганисян Г.В., Агабекян П.В., Саркисян С.М.

В предлагаемой работе рассматривается плоская периодическая контактная задача для упругой составной (кусочно-однородной) бесконечной пластины, составленной из двух сцеплённых между собой вдоль общей прямолинейной границы полубесконечных пластин с различными упругими свойствами, усиленной периодической системой упругих конечных стрингеров, параллельных линии разнородности, указанных упругих полубесконечных пластин, расположенных на одной линии и приваренных (приклеенных) к верхней упругой полубесконечной пластине. Предполагается, что все конечные стрингеры имеют одинаковые упругие свойства и площади поперечного сечения, а контактирующая пара (стрингер – пластина) деформируется под воздействием сонаправленных и осевых сосредоточенных сил, приложенных к одному концу каждого стрингера. Решение этой плоской периодической контактной задачи математически сформулировано в виде сингулярного интегрального уравнения первого рода с подвижной особенностью при определённом условии с ядром, состоящим из ядра Гильберта и регулярной части.

Используя математический аппарат классических ортогональных многочленов Чебышева, решение этого интегрального уравнения сведено к решению эквивалентной квазивполне регулярной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений.

1. Пусть упругий сплошной изотропный лист в виде тонкой составной (кусочно-однородной) бесконечной пластины малой постоянной толщины h, составленной из двух сцеплённых между собой вдоль общей прямолинейной границы полубесконечных пластин с различными упругими свойствами, на своей верхней поверхности линий $y = a(a > 0)$ усилена на конечных отрезках $\left[-b + 2kl; d + 2kl\right]$ $\left(2l > b+d > 0\,; b, d > 0\,; k \in \mathbb{Z}\right)$ периодически повторяющимися с периодом $2l$ креплениями в виде приваренных или приклеенных к ней упругих конечных стрингеров прямоугольного поперечного сечения F_S, имеющих достаточно малую постоянную толщину h_S и малую постоянную ширину d_S.

Цель исследования заключается в определении закона распределения интенсивностей неизвестных тангенциальных контактных усилий вдоль линий крепления упругих конечных стрингеров с упругой изотропной сплошной составной (кусочно-однородной) бесконечной пластиной и осевых (нормальных) напряжений, возникающих в упругих конечных стрингерах, когда контактирующая пара (стрингер – составная пластина) деформируется сонаправленными и осевыми сосредоточенными силами $P\delta(x-d-2kl)\delta(y-a)$, приложенными к одному концу каждого стрингера и направленными в положительную сторону горизонтальной оси. Отметим, что здесь ось абсцисс совпадает с линией раздела указанных полубесконечных пластин.

В рассматриваемой периодической контактной задаче для упругих конечных стрингеров принимается модель одноосного напряжённого состояния в сочетании с моделью контакта по линии [1– 8], т.е. считается, что распределение интенсивностей неизвестных тангенциальных контактных усилий сосредоточены вдоль средних линий контактных участков, а для составной (кусочно-однородной) бесконечной пластины считается справедливой модель обобщённого плоского напряжённого состояния, вследствие чего она деформируется как целая плоскость.

Поскольку вследствие периодического характера рассматриваемой плоской контактной задачи закон распределения интенсивностей искомых тангенциальных контактных усилий под упругими конечными стрингерами, расположенными на разных отрезках, одинаковы, то можно ограничиться рассмотрением одного стрингера, например, того, для которого $k = 0$, т.е. рассматривается тот упругий конечный стрингер, который находится на отрезке $[-b\,; d\,]$.

Обращаясь теперь к выводу разрешающего функционального уравнения рассматриваемой плоской периодической контактной задачи, заметим, что в горизонтальном направлении стрингеры растягиваются или сжимаются, находясь в одноосном напряжённом состоянии.

Тогда, на основе вышесказанного, имея в виду закон Гука, дифференциальное уравнение равновесия элемента упругого конечного стрингера в обобщённых функциях будет иметь вид:

$$\frac{du_S(x;a)}{dx} = -\frac{1}{2E_S F_S}\int_{-b}^{d} \operatorname{sgn}(s-x)\tau(s)\,ds + \frac{P}{2E_S F_S} \qquad (-b < x < d), \tag{1.1}$$

который удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$\left.\frac{du_S(x;a)}{dx}\right|_{x=-b+0}=0\ ;\qquad \left.\frac{du_S(x;a)}{dx}\right|_{x=d-0}=\frac{P}{E_S F_S}\ , \tag{1.2}$$

а также условию равновесия упругого конечного стрингера:

$$\int_{-b}^{d}\tau(s)\,ds=P. \tag{1.3}$$

Целесообразно также определить нормальные (осевые) напряжения $\sigma_x(x;a)$ $(-b < x < d)$, возникающие в упругих конечных стрингерах на линии $y=a$. Для этой цели на основе (1.1) будем иметь следующую расчётную формулу:

$$\sigma_x(x;a)=-\frac{1}{2F_S}\int_{-b}^{d}\operatorname{sgn}(s-x)\,\tau(s)\,ds+\frac{P}{2F_S}\qquad (-b<x<d). \tag{1.4}$$

Здесь в формулах (1.1) – (1.4) $\tau(x)=d_S\tau(x;a)$ и $u_S(x;a)-$ соответственно интенсивность распределения тангенциальных контактных усилий и горизонтальные перемещения точек упругих конечных стрингеров на линии $y=a$; где $\tau(x;a)-$неизвестные тангенциальные контактные напряжения, возникающие под упругим конечным стрингером на линии $y=a$; E_S – коэффициент упругости, а $F_S=h_S d_S$ – площадь поперечного сечения конечных стрингеров; $P-$интенсивность осевых сосредоточенных сил, приложенных к одному из концов каждого упругого конечного стрингера в точках $(d+2kl;a)$; $\delta(x)-$дельта-функция Дирака ; а $\operatorname{sgn}x-$ известная единичная ступенчатая сигнум-функция.

С другой стороны, не останавливаясь на подробностях, приведём лишь окончательный вид горизонтальной деформации верхней упругой полубесконечной пластины составной (кусочно-однородной) бесконечной упругой пластины, когда на линии $y=a$ своей верхней поверхности действуют периодически повторяющиеся с периодом $2l$ тангенциальные усилия с интенсивностью $\tau(x)$ $(-b+2kl \le x \le d+2kl)$:

$$hl_1\frac{du(x;a)}{dx}=\frac{1}{\pi}\int_{-b}^{d}\left[\frac{\pi}{2l}\operatorname{ctg}\frac{\pi(s-x)}{2l}+K(s-x)\right]\tau(s)\,ds\qquad(-\infty<x<\infty). \tag{1.5}$$

Здесь сделаны следующие обозначения:

$$\begin{aligned}K(t)\ =\ &-A_1(k;\nu;\nu_1)\cdot\frac{\dfrac{\pi}{2l}\cdot\sin\dfrac{\pi t}{l}}{\operatorname{ch}\dfrac{2\pi a}{l}-\cos\dfrac{\pi t}{l}}+A_2(k;\nu)\cdot\frac{\dfrac{\pi^2 a}{l^2}\cdot\operatorname{sh}\dfrac{2\pi a}{l}\cdot\sin\dfrac{\pi t}{l}}{\left(\operatorname{ch}\dfrac{2\pi a}{l}-\cos\dfrac{\pi t}{l}\right)^2}-\\ &-A_3(k;\nu)\cdot\frac{\dfrac{\pi^3a^2}{2l^3}\cdot\left(ch^2\dfrac{2\pi a}{l}+\operatorname{ch}\dfrac{2\pi a}{l}\cdot\cos\dfrac{\pi t}{l}-2\right)\cdot\sin\dfrac{\pi t}{l}}{\left(\operatorname{ch}\dfrac{2\pi a}{l}-\cos\dfrac{\pi t}{l}\right)^3}\ ,\end{aligned} \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned}&A_1(k;\nu;\nu_1)=\frac{k(3-\nu)\left[k(3-\nu)(1+\nu_1)+2(1-\nu)(1-\nu_1)\right]-(3-\nu_1)\left[8-(3-\nu)(1+\nu)\right]}{(3-\nu)\left[k(3-\nu)+1+\nu\right]\left[3-\nu_1+k(1+\nu_1)\right]}\ ,\\ &A_2(k;\nu)=\frac{(k-1)(1+\nu)}{k(3-\nu)+1+\nu}\ ;\ A_3(k;\nu)=\frac{2(k-1)(1+\nu)^2}{(3-\nu)\left[k(3-\nu)+1+\nu\right]}\ ,\\ &l_1=\frac{8\mu}{3-\nu}=\frac{4E}{(3-\nu)(1+\nu)}\ ;\ k=\frac{\mu_1}{\mu}=\frac{E_1(1+\nu)}{E(1+\nu_1)}\ ,\end{aligned} \tag{1.7}$$

а $u(x;a)-$горизонтальные перемещения точек верхней упругой полубесконечной пластины на линии $y=a$; $(E;\,\mu;\,\nu)$ и $(E_1;\,\mu_1;\,\nu_1)-$упругие характеристики верхней и нижней упругих полубесконечных пластин; E и E_1 –модули упругости, μ и μ_1 – модули сдвига, а ν и ν_1- коэффициенты Пуассона материалов полубесконечных упругих пластин.

Чтобы получить разрешающее функциональное уравнение поставленной контактной задачи, на линиях крепления верхней упругой полубесконечной пластины с упругими конечными стрингерами необходимо удовлетворить контактным условиям:

$$\frac{du_S(x;a)}{dx} = \frac{du(x;a)}{dx} \qquad (-b+2kl \le x \le d+2kl). \tag{1.8}$$

Теперь учитывая контактные условия (1.8) относительно неизвестных тангенциальных контактных усилий $\tau(x)$ $(-b < x < d)$, являющихся основной неизвестной функцией в рассматриваемой плоской периодической контактной задаче, получим следующее сингулярное интегральное уравнение с ядром, состоящим из сингулярного ядра Гильберта и регулярной части:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-b}^{d}\left[\frac{\pi}{2l}\mathrm{ctg}\frac{\pi(s-x)}{2l} + \frac{\lambda\pi}{2}\mathrm{sgn}(s-x) + K(s-x)\right]\tau(s)\,ds = \frac{\lambda P}{2} \qquad (-b < x < d), \tag{1.9}$$

где $\lambda = \dfrac{hl_1}{E_S F_S}$.

Здесь следует также отметить, что интеграл с ядром Гильберта в сингулярной точке $s = x$ в сингулярном интегральном уравнении первого рода (1.9) следует трактовать в смысле его главного значения по Коши.

Таким образом, решение рассматриваемой плоской периодической контактной задачи при вышепринятых предположениях сводится к решению сингулярного интегрального уравнения первого рода с подвижной особенностью (1.9), ядро которой состоит из сингулярного ядра Гильберта и регулярной части, при наличии интегрального условия (1.3).

2. Нынче возвратимся к определению функции распределения тангенциальных контактных усилий с неизвестной интенсивностью $\tau(s)$ $(-b < s < d)$. Тогда с целью решения сингулярного интегрального уравнения первого рода с подвижной особенностью (1.9) при наличии условия (1.3), перейдём из ядра Гильберта к ядру Коши. Для этой цели разложим ядро Гильберта в бесконечный ряд [6 – 8]:

$$\frac{\pi}{2l}\mathrm{ctg}\frac{\pi(s-x)}{2l} = \frac{1}{s-x} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(s-x)}{(2nl)^2-(s-x)^2}. \tag{2.1}$$

Теперь, учитывая представление (2.1), сингулярное интегральное уравнение (1.9) можно представить в следующем виде:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-b}^{d}\left[\frac{1}{s-x} + \frac{\lambda\pi}{2}\mathrm{sgn}(s-x) + K^*(s-x)\right]\tau(s)\,ds = \frac{\lambda P}{2} \qquad (-b < x < d), \tag{2.2}$$

где $K^*(t) = K(t) - \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2t}{(2nl)^2-t^2}$. $\qquad (2.3)$

Таким образом, решение сингулярного интегрального уравнения (1.9), содержащего ядро Гильберта при наличии интегрального условия (1.3), теперь сводится к решению сингулярного интегрального уравнения (2.2) с ядром, состоящим из ядра Коши и регулярной части, при наличии интегрального условия (1.3).

Нынче имея в виду, что вблизи концов участка контакта интенсивности распределения тангенциальных контактных усилий имеют особенности квадратного корня интегрируемого порядка, представим решение сингулярного интегрального уравнения первого рода (2.2) при наличии интегрального условия (1.3) в форме разложения бесконечного ряда по многочленам Чебышева первого рода:

$$\tau(s) = \frac{1}{\sqrt{1-p^2(s)}}\sum_{n=0}^{\infty}X_n T_n\left[p(s)\right]; \quad p(s) = \frac{2s+b-d}{b+d}; \quad |p(s)|<1, \tag{2.4}$$

Подставляя принятое представление из разложения (2.4) для функции $\tau(s)$ $(-b < s < d)$ в сингулярное интегральное уравнение первого рода с подвижной особенностью (2.2), при этом пользуясь следующими спектральными интегральными известными соотношениями [3 – 8]:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-b}^{d}\frac{1}{s-x}\frac{T_n\left[p(s)\right]}{\sqrt{1-p^2(s)}}ds \;=\; \begin{cases} 0\,; & n=0, \\ U_{n-1}\left[p(x)\right]; & \left(n=\overline{1;\infty}\right), \end{cases} \qquad \left(-b<x<d\right),$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-b}^{d}\sqrt{1-p^2(s)}\,U_{n-1}\left[p(s)\right]U_{m-1}\left[p(s)\right]ds \;=\; \begin{cases} 0\,; & n\neq m, \\ \dfrac{b+d}{4}\,; & n=m, \end{cases} \qquad \left(n\,;\,m=\overline{1\,;\infty}\right), \tag{2.5}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-b}^{d}\frac{T_n\left[p(s)\right]T_m\left[p(s)\right]}{\sqrt{1-p^2(s)}}ds \;=\; \begin{cases} 0; & n\neq m, \\ \dfrac{b+d}{4}\;; & n=m\neq 0, \\ \dfrac{b+d}{2}\;; & m=n=0, \end{cases} \qquad \left(n;m=\overline{1;\infty}\right),$$

где $T_n(t)=\cos\left(n\cdot\arccos t\right)$ и $U_{n-1}(t)=\dfrac{\sin\left(n\cdot\arccos t\right)}{\sin\left(\arccos t\right)}$ – многочлены Чебышева первого и второго родов, соответственно, для нахождения неизвестных коэффициентов X_n $\left(n=\overline{1;\infty}\right)$ из разложения (2.4), известным способом [3 – 8] получим следующую квазивполне регулярную бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$X_m+\sum_{n=1}^{\infty}H_{nm}X_n \;=\; \alpha_m \qquad \left(m=\overline{1;\infty}\right). \tag{2.6}$$

Ядро при неизвестных и свободные члены бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (2.6) определяются по следующим формулам:

$$H_{nm} \;=\; H_{nm}^{*} \;+\; H_{nm}^{(1)}\;; \quad \alpha_m \;=\; \alpha_m^{(1)} \;+\; X_0\alpha_m^{(2)}\,; \quad \alpha_m^{(1)} \;=\; \begin{cases} 0\,; & m\neq 1\,, \\ \lambda P/2\,; & m=1\,, \end{cases}$$

$$H_{nm}^{*} \;=\; \frac{4}{\pi^2(b+d)}\int_{-b}^{d}\int_{-b}^{d}\frac{\sqrt{1-p^2(x)}}{\sqrt{1-p^2(s)}}K^{*}(s-x)T_n\left[p(s)\right]U_{m-1}\left[p(x)\right]ds\,dx,$$

$$H_{nm}^{(1)} \;=\; \begin{cases} 0\,; & \left|m-n\right|=1\,, \\ -\dfrac{2\lambda(b+d)m\left[1+(-1)^{m+n}\right]}{\pi\left[(m+n)^2-1\right]\left[(m-n)^2-1\right]}\,; & \left|m-n\right|\neq 1\,, \end{cases} \qquad \left(n\,;\,m=\overline{1;\infty}\right), \tag{2.7}$$

$$\alpha_m^{(2)} \;=\; -H_{0m}^{*} \;+\; \begin{cases} -\dfrac{\lambda\pi(b+d)}{4}\,; & m=1\,, \\ \dfrac{\lambda(b+d)}{\pi}J_m\,; & m\neq 1\,, \end{cases} \;; \quad J_m \;=\; \begin{cases} 0\,; & m=1\,, \\ \dfrac{2m\left[1+(-1)^m\right]}{\left(m^2-1\right)^2}\,; & m\neq 1\,. \end{cases}$$

Отметим, что характерным в бесконечной системе линейных алгебраических уравнений (2.6) является то, что неизвестный коэффициент X_0 в явном виде не фигурирует в левой части, следовательно, остальные коэффициенты X_n $\left(n=\overline{1;\infty}\right)$ будут зависеть от X_0 линейно. При этом, здесь неизвестный коэффициент X_0 определяется из интегрального условия равновесия упругого конечного стрингера (1.3) и имеет следующий вид:

$$X_0=\frac{2P}{\pi(b+d)}\,. \tag{2.8}$$

С другой стороны, так как интенсивность распределения неизвестных тангенциальных контактных усилий $\tau(s)$ $\left(-b<s<d\right)$ в конечном стрингере представлена в виде разложения в бесконечный ряд (2.4), то на основе формулы (1.4) нормальные (осевые) напряжения $\sigma_x(x;a)$ $\left(-b<x<d\right)$ возникающие в упругих конечных стрингерах на линии $y=a$ можно вычислить по следующей формуле:

$$\sigma_x(x;a) = \frac{P}{\pi F_S}\left[\pi - \arccos p(x)\right] - \frac{b+d}{2F_S}\sqrt{1-p^2(x)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}X_n U_{n-1}\left[p(x)\right], \quad (-b < x < d). \qquad (2.9)$$

Таким образом, решение рассматриваемой плоской периодической контактной задачи при принятых выше предположениях сводится к решению квазивполне регулярной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (2.6) с ядром $H_{nm}\left(n\,;m=\overline{1\,;\infty}\right)$ и свободным членом α_m $\left(m=\overline{1\,;\infty}\right)$, которые определяются формулами (2.7). Определив из (2.6) и (2.8) неизвестные коэффициенты X_n $(n=\overline{0\,;\infty})$, с помощью формулы (2.4) найдём значения функций интенсивности распределения тангенциальных контактных усилий $\tau(x)\,(-b<x<d)$, а из формулы (2.9) значения нормальных напряжении $\sigma_x(x\,;a)\,(-b<x<d)$, которые возникают в упругих конечных стрингерах.

В конце отметим, что исследование бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (2.6) в смысле его квазивполне регулярности, можно проводить аналогично, как в [2–6], поскольку регулярное ядро сингулярного интегрального уравнения (2.2) со своими частными производными являются квадратично интегрируемыми функциями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорян Э.Х. Об одной периодической задаче для упругой плоскости с бесконечным кусочно-однородным упругим включением // ДАН АрмССР. 1981. Т.73. № 2. С.103 – 108.
2. Арутюнян Н.Х., Мхитарян С.М. Периодическая контактная задача для полуплоскости с упругими накладками // ПММ. 1969. Т.33. № 5. С.813 –843.
3. Саркисян В.С. Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками. Ереван: Изд-во ЕГУ, 1983. 260 с.
4. Агаян К.Л. Периодическая контактная задача для бесконечной пластины с упругими накладками // Изв. АН АрмССР. Механика.1975. Т.28. № 3. С.3–12.
5. Попов Г.Я. О сведении интегральных уравнений теории упругости к бесконечным системам. // ПММ. 1966. Т.30. № 4. С.672 – 682.
6. Оганисян Г.В. Контактные задачи для упругой неоднородной (кусочно-однородной) бесконечной пластины со стрингерами. // Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико- математических наук. Ереван. 1986. 173 с.
7. Оганисян Г.В. Об одной периодической контактной задаче для кусочно-однородной бесконечной пластины // Материалы второй всесоюзной научно–технической конференции «Прочность, жёсткость и технологичность изделий из композиционных материалов», Ереван: 1984. Т.3. С.5–9.
8. Оганисян Г.В., Агабекян П.В. Передача нагрузки от двух параллельных упругих конечных стрингеров к упругой составной бесконечной пластине // Труды VII конференции «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред», Горис–Степанакерт, Армения. Институт механики НАН РА. 2011. С.320 – 327.

Сведения об авторах:

Оганисян Гамлет Вараздатович – канд.физ-мат.наук, старший научный сотрудник, преподаватель кафедры механики ЕГУ, факультет математики и механики. Ереван: Алека Манукяна, 1. **Тел.:** (+374 93) 27–26–26. **E–mail:** hovhannisyanhamlet@yandex.ru

Агабекян Пайкар Вараздатович – канд.физ-мат.наук, научный сотрудник Института механики НАН Армении. Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2.
Тел.: (+374 93) 24–85–47. **E–mail:** mechins@sci.am

Саркисян Сатеник Малхасовна – математик – программист. Общеобразовательный военный комплекс «Покр Мгер». Армения, Канакераван 24 , **Тел.:** (+374 96) 64–53–88.
E–mail: satenik.sargsyan7@yandex.ru

ВАРИАНТ МОДЕЛИ ИЗОТРОПНОГО РАЗНОМОДУЛЬНОГО МАТЕРИАЛА

Пахомов Б.М.

Предлагаемая модель изотропного разномодульного материала является развитием разномодульной теории упругости С.А. Амбарцумяна. При определении вида напряжённого состояния и выбора коэффициентов в уравнениях, связывающих напряжения и деформации, в качестве критериев принимаются знаки продольных деформаций. Такой подход позволяет преодолеть некоторые трудности, которые возникают при описании поведения разномодульных материалов в случае сложного напряжённо-деформированного состояния.

Изотропный разномодульный материал, строго говоря, надо считать начально изотропным. При наложении нагрузки в каждом элементарном объёме мгновенно образуется материал ортотропный, главные направления которого, очевидно, будут совпадать с направлениями главных напряжений и главных деформаций. Поэтому представляется вполне логичным рассматривать вопрос о том, что происходит с материалом, растягивается он или сжимается, в системе координат, совпадающей с этими направлениями, так как в такой системе будут равны нулю касательные напряжения и деформации сдвига. Таким образом, упрощается процедура выбора соответствующих растяжению или сжатию параметров, входящих в соотношения, связывающие компоненты тензоров напряжений и деформаций. При этом, определяющие соотношения в произвольной системе координат легко получаются с использованием известных формул перехода от одной системы координат к другой.

Именно такой подход был положен в основу разномодульной теории упругости [1,2], разработанной армянской школой механиков под руководством С.А. Амбарцумяна.

Предлагаемая в данной работе модель, в основу которой положена схема разделения обобщённой жёсткости [3,4], во всём идентична разномодульной теории упругости [1,2], кроме одного, но самого важного момента – в определяющих соотношениях компоненты тензора напряжений выражаются через компоненты тензора деформаций, а не наоборот, как в [1,2], и определение того, что происходит с материалом, растягивается он или сжимается, осуществляется по знаку главных деформаций, а не напряжений

Уравнения, связывающие главные напряжения σ_k и главные деформации ε_k, запишем в виде

$$\sigma_k = \bar{G}_k\,\varepsilon_k + L\varepsilon \qquad (1)$$

Здесь $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ – первый инвариант тензора деформаций, ($k = 1, 2, 3$; суммирование по повторяющимся индексам k здесь и дальше не производится).

Коэффициенты $\bar{G}_k$ определяются с помощью следующего правила

$$\bar{G}_k = \begin{cases} \bar{G}^+ & \text{при} \quad \varepsilon_k \geq 0 \\ \bar{G}^- & \text{при} \quad \varepsilon_k < 0 \end{cases} \qquad (2)$$

$$L = \begin{cases} L^+ \ \text{при} \ \varepsilon \geq 0 \\ \\ L^- \ \text{при} \ \varepsilon < 0 \end{cases} \qquad (3)$$

p_k будем называть собственными напряжениями, а Q– напряжением связи.

Из уравнения (1) следует, что связи между направлениями деформирования не работают, когда равна нулю объёмная деформация ε. При этом, материал в каждом направлении имеет собственную жёсткость, значение которой определяется только знаком соответствующей продольной деформации. Отсюда следует физический смысл употребляемого в данной работе определения «собственный», то есть принадлежащий только данному направлению. Величины $\bar{G}^+$ и $\bar{G}^-$ будем называть собственными модулями направления или просто собственными модулями материала, соответствующими растяжению и сжатию, соответственно, а величину L будем называть модулем связи. Параметр L характеризует работу механизма, отвечающего за связи между направлениями деформирования, а параметр $\bar{G}_k$ – работу механизма собственной жёсткости.

Проведя несложные преобразования, получим обратные уравнениям (1) соотношения для продольных деформаций

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\Delta}\,[(\bar{G}_2\bar{G}_3 + \bar{G}_2 L + \bar{G}_3 L)\sigma_1 - \bar{G}_3 L\sigma_2 - \bar{G}_2 L\sigma_3\,]$$
$$\varepsilon_2 = \frac{1}{\Delta}\,[-\bar{G}_3 L\sigma_1 + (\bar{G}_3\bar{G}_1 + \bar{G}_3 L + \bar{G}_1 L)\,\sigma_2 - \bar{G}_1 L\sigma_3] \qquad (4)$$
$$\varepsilon_3 = \frac{1}{\Delta}\,[-\bar{G}_2 L\sigma_1 - \bar{G}_1 L\sigma_2 + (\bar{G}_1\bar{G}_2 + \bar{G}_1 L + \bar{G}_2 L)\,\sigma_3\,]$$

где $\Delta = \bar{G}_1\bar{G}_2\bar{G}_3 + \,(\bar{G}_1\bar{G}_2 + \bar{G}_2\bar{G}_3 + \bar{G}_3\bar{G}_1)\,L$.

Такая схема, когда из обобщённой жёсткости мысленно выделяется жёсткость, отвечающая за связи между направлениями, позволяет преодолеть неопределённость при составлении определяющих соотношений для случаев сложного напряжённого состояния, так как матрицы коэффициентов упругости в (1) и податливостей в (4) оказываются симметричны относительно главной диагонали.

Легко проверить, что в случае, когда параметры $\bar{G}^+$ и $\bar{G}^-$ равны между собой, соотношения (1) и (4) переходят в уравнения для изотропного материала, одинаково реагирующего на растягивающие и сжимающие нагрузки, т.е. закон Гука.

Таким образом, мы сформулировали закон упругости для изотропного разномодульного материала, причём простота соотношений позволяет легко находить неизвестные параметры модели через технические характеристики и без особой сложности использовать их в практических расчётах.

Рассмотрев случаи простого растяжения и сжатия (будем считать, что ε при растяжении обязательно будет больше, а при сжатии меньше нуля), можно вывести следующие формулы для параметров $\bar{G}^{\pm}$ и $\bar{L}^{\pm}$:

$$\bar{G}^+ = \frac{E_t - \nu_t E_c}{1 - \nu_t \nu_c}$$

$$\bar{G}^- = \frac{E_c - \nu_c E_t}{1 - \nu_t \nu_c}$$

$$L^+ = \frac{\nu_t (E_c - \nu_c E_t)}{(1 - \nu_t \nu_c)(1 - 2\nu_t)} \qquad (5)$$

$$L^- = \frac{\nu_c (E_t - \nu_t E_c)}{(1 - \nu_t \nu_c)(1 - 2\nu_c)}$$

Здесь E_t, ν_t и E_c, ν_c – модули упругости и коэффициенты Пуассона, соответствующие одноосным растяжению и сжатию.

В таблице представлены значения модулей упругости, коэффициенты Пуассона, полученные для зернистого композита на основе ненасыщенных полиэфиров (данные взяты из работ [3,4]), а также для графитов ВПП и АРВ (см. [5,6]). Значения модулей при растяжении и сжатии у этих материалов отличаются значительно, коэффициенты Пуассона также сильно разнятся. В таблице также представлены значения параметров $\bar{G}^+$, $\bar{G}^-$, L^+, L^- для этих материалов, рассчитанные по формулам (5).

Таблица

Материал	E_t, МПа	E_c, МПа	ν_t	ν_c	$\bar{G}^+$, МПа	$\bar{G}^-$, МПа	L^+, МПа	L^-, Па
Зернистый композит [3,4]	14000	18900	0,276	0,398	9870	14975	9226	19256
Графит ВПП [5,6]	6600	8550	0,212	0,28	5090	7125	2622	3239
Графит АРВ [5,6]	5220	7990	0,2	0,35	3895	6627	2209	4544

Из (1)-(4) следует, что при кручении разномодульный материал испытывает изменение объёма. Объёмная деформация при этом равна

$$\varepsilon = \frac{1}{\Delta}\,\bar{G}^-(\bar{G}^- - \bar{G}^+)\,\tau_0$$

Это соотношение можно использовать для оценки применимости данной модели, сравнивая с экспериментальными данными, полученными при чистом сдвиге.

Надо отметить, что связь между напряжениями и деформациями мы устанавливали в направлениях, где равны нулю касательные напряжения. Однако, определяющие соотношения необходимо строить в произвольной системе координат. Это нетрудно сделать, использовав известные формулы преобразования тензоров при переходе из одной системы координат в другую. Эта процедура совершенно идентична представленной в (1), если во всех формулах поменять местами деформации и напряжения. Ниже представлены уравнения, связывающие компоненты тензоров напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij} , в произвольной системе координат $(i, j = x, y, z)$.

$\sigma_{xx} = a_{11}\varepsilon_{xx} + a_{12}(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + B_3 m_1^2 \varepsilon_2 + B_2 n_1^2 \varepsilon_3$

$\sigma_{yy} = a_{22}\varepsilon_{yy} + a_{12}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz}) - B_3 l_2^2 \varepsilon_1 + B_1 n_2^2 \varepsilon_3$

$\sigma_{zz} = a_{33}\varepsilon_{zz} + a_{12}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) - B_2 l_3^2 \varepsilon_1 - B_1 m_3^2 \varepsilon_2$

$\sigma_{xy} = A_3\varepsilon_{xy} - B_2 l_1 l_2 \varepsilon_1 - B_1 m_1 m_2 \varepsilon_2$

$\sigma_{yz} = A_1\varepsilon_{yz} + B_3 m_2 m_3 \varepsilon_2 + B_2 n_2 n_3 \varepsilon_3$

$\sigma_{zx} = A_2\varepsilon_{zx} - B_3 l_1 l_3 \varepsilon_1 + B_1 n_1 n_3 \varepsilon_3$

$A_1 = a_{11} - a_{12}\ \ A_2 = a_{22} - a_{12}\ \ A_3 = a_{33} - a_{12}$

$B_1 = a_{33} - a_{22}\ \ \ B_2 = a_{33} - a_{11}\ \ \ B_3 = a_{22} - a_{11}$

Коэффициенты $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}$ определяются по следующим формулам:

1) $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0, \varepsilon_3 > 0,\ \varepsilon > 0$

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = \bar{G}^+ + L^+, a_{12} = L^+$$

2) $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0, \varepsilon_3 < 0, \varepsilon > 0$

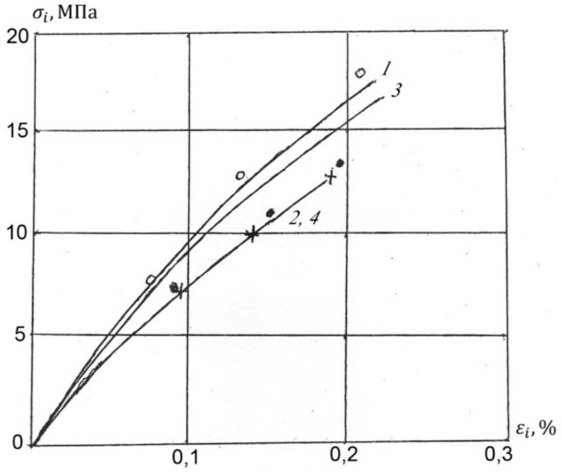
$$a_{11} = a_{22} = \bar{G}^+ + L^+, a_{33} = \bar{G}^- + L^+,\ a_{12} = L^+$$

3) $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0, \varepsilon_3 < 0, \varepsilon < 0$

$$a_{11} = a_{22} = \bar{G}^+ + L^-, a_{33} = \bar{G}^- + L^-,\ a_{12} = L^-$$

и т.п.

На рисунке представлены результаты обработки экспериментальных данных для графита ВПП [5,6], полученные с помощью предложенной модели.



Диаграммы деформирования графита ВПП при пропорциональном нагружении.
Сплошные линии – результаты экспериментов

○ и 1 – $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = 0 : 0 : -1$
• и 2 – $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = +1 : 0 : 0$
3 – $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = +1 : 0 : -1$
+ и 4 – $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = +1 : +1 : 0$

Аналогичные результаты получаются и для других разномодульных материалов: графитов, чугунов, полимеров.

В заключение можно сделать вывод: применение предлагаемого подхода к описанию деформирования изотропных разномодульных материалов представляется вполне обоснованным. Во-первых, имеется полная ясность при определении того, что происходит в материале в данном направлении – растяжение или сжатие. Во-вторых, матрица связи между напряжениями и деформациями оказывается для всех случаев симметричной в отличие от подходов, в основе которых лежит разномодульная теория упругости [1, 2] и где приходится или накладывать сильное ограничение, $(E_t\,\nu_c = E_c\,\nu_t)$ или проводить искусственную процедуру приведения матрицы к симметричному виду [9]. Также можно отметить простоту определяющих соотношений, что позволяет легко находить параметры модели для данного материала и без затруднений использовать в практических расчётах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Разномодульная теория упругости. М.: Наука, 1982. 320 с.
2. Саркисян М.С. О соотношениях теории упругости изотропных тел, материал которых по-разному сопротивляется растяжению и сжатию // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 5. С.87-94.
3. Пахомов Б.М. Условие пластического течения, включающее коэффициент Пуассона // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия «Машиностроение». 2014. № 2. С.15-27.
4. Пахомов Б.М. Применение теории собственных напряжений к описанию нелинейного деформирования металлов и сплавов // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. №7 (19).
5. Бессонов Д.Е., Зезин Ю.П., Ломакин Е.В. Разносопротивляемость зернистых композитов на основе ненасыщенных полиэфиров // Известия Саратовского ун-та. 2009. Т.9. Сер. Математика. Механика. Информатика. Вып. 4. Ч.2. С.9-13.
6. Бессонов Д.Е., Ершова А.Ю., Зезин Ю.П., Мартиросов М.И., Рыбинский Л.Н. Экспериментальное исследование деформирования и разрушения зернистых композитов на основе полиэфирных смол // Механика композиционных материалов и конструкций. 2008. Т.14. №1. С.111-125.
7. Строков В.И., Барабанов В.Н. Методика исследования прочностных и деформационных свойств графита в условиях сложного напряжённого состояния// Заводская лаборатория. 1974. № 9. С.1141-1144.
8. Березин А.В., Строков В.И., Барабанов В.Н. Деформируемость и разрушение изотропных графитовых материалов // Конструкционные материалы на основе углерода. М.: Металлургия. 1976. Вып. И. С.102-110.
9. Джонс Р.М., Нельсон Д.А.Р. Физические модели нелинейной деформации графита // Ракетная техника и космонавтика. 1976. Т.14. № 6. С.7-18.

Сведения об авторах:

Пахомов Борис Максимович,
Доцент кафедры СМ-1 Московского государственного технического университета имени Н.Э. Баумана.
Адрес: 105005, г. Москва, 2-ая Бауманская ул., д. 5, МГТУ им. Н.Э.Баумана
Тел.: 8(499)261-21-88, факс: 8(499) 261-36-14
E-mail: bmpakhomov@yandex.ru, pahomovb@sm.bmstu.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ПРЕССОВАНИЯ ПОРОШКОВОГО МАТЕРИАЛА В ЖЁСТКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ МАТРИЦЕ В ПРОГРАММНОЙ СРЕДЕ «ABAQUS» И АНАЛИТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Петросян Г.Л., Арзуманян М.Г.

Компьютерным моделированием в автоматизированной программной среде (АПС) «ABAQUS» исследован процесс прессования неспечённого порошкового материала в жёсткой цилиндрической матрице. Задача решена также аналитическим методом с использованием условия пластичности Мора-Кулона. Произведены численные расчёты и представлены сравнительные результаты.

В различных сферах народного хозяйства большое применение получили детали из порошковых материалов. Технологический процесс их изготовления, в основном, состоит из двух этапов: сначала производится холодное прессование порошков в специальных пресс-формах, при котором изменяется их пористость, происходит уплотнение материала, в результате чего получаются неспечённые заготовки различных форм и размеров [1]. Затем после спекания их подвергают дополнительной обработке давлением, получая изделия окончательных размеров и плотности [2, 3]. Таким образом, получают высококачественные детали с низким расходом энергии и материалов.

В [4] на основе анализа известных в литературе работ выявлены особенности методов исследования процессов пластического деформирования неспечённых порошковых материалов. При этом, из-за сложности задачи в этом направлении мало теоретических исследований, в основном, известны экспериментальные исследования. Уплотнение порошковых материалов рассматривается как процесс деформирования сжимаемых тел, пластические свойства которых, в основном, определяются величиной плотности пористой среды. На основании условия пластичности Мора-Кулона в [4] аналитическим методом тонких сечений решена задача определения компонентов напряжённого состояния при прессовании брикетов из неспечённого порошка в жёсткой цилиндрической матрице. Полученные формулы позволяют при определённых значениях угла ρ внутреннего трения между частицами порошка и коэффициента сцепления k между ними приближённо определить компоненты напряжённого состояния технологического процесса.

В последнее десятилетие с учётом важности этих процессов проводилось много новых исследований, в которых представлены как уточнённые в какой-то мере аналитическими методами решения, так и данные, полученные на основе метода конечных элементов – одного из усовершенствованных численных методов с применением АПС «ABAQUS». Аналитические исследования не полностью отражают реальную картину процесса прессования, а данных по АПС «ABAQUS» недостаточно. Отметим, что с применением АПС «ABAQUS» можно получить полную картину деформирования и оценить точность теоретических приближённых методов расчёта. Следовательно, моделирование процесса прессования порошкового материала в жёсткой цилиндрической матрице в АПС «ABAQUS» актуально.

Целью настоящей работы является изучение процесса прессования неспечёного порошкового материала в жёсткой цилиндрической матрице моделированием его в АПС «ABAQUS», решение задачи аналитическим методом и её численный расчёт для сравнения полученных данных.

Для изучения процесса прессования неспечённого порошкового образца высотой L = 6 *мм* и диаметром d = 10 мм в жёсткой цилиндрической матрице с помощью АПС «ABAQUS» из [5] были взяты параметры $k = 5\cdot 10^6$ Ï à, $\rho = 30^0$ и соответствующие им величины модуля Юнга $k = 5\cdot 10^6$ Ï à и коэффициента Пуассона $\upsilon = 0,35$. Принято, что коэффициент трения между порошковым образцом и матрицей равен $f = 0,05$, а действующее осевое давление $p_0 = 2\cdot 10^7$ Ï à.

В АПС «ABAQUS» процесс прессования неспечённого порошкового материала моделирован в осесимметричном виде (рис.1). Для всех компонентов напряжённо-деформированного состояния были получены поля распределения. На рис.2–4 приведены компьютерные данные осевого, радиального и окружного напряжений, которые показывают неоднородность их распределения.

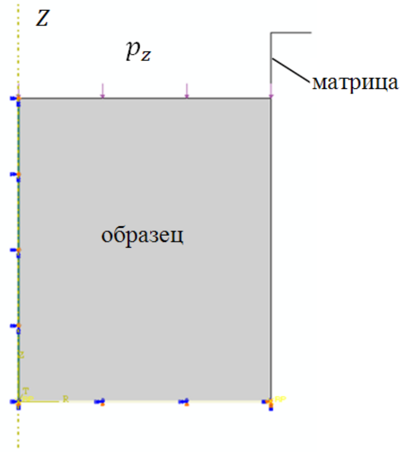


Рис. 1. Схема модели в АПС «ABAQUS»

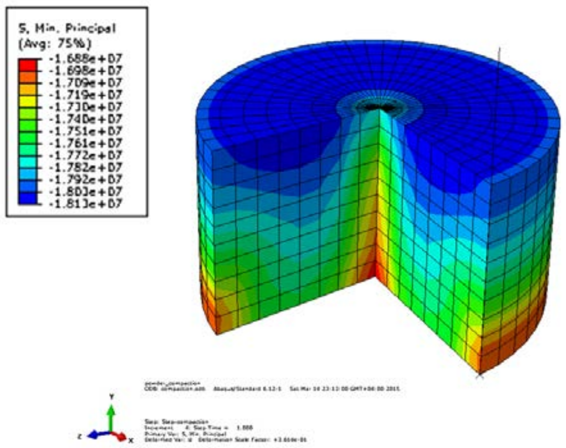


Рис. 2. Поле распределения осевого напряжения в АПС «ABAQUS»

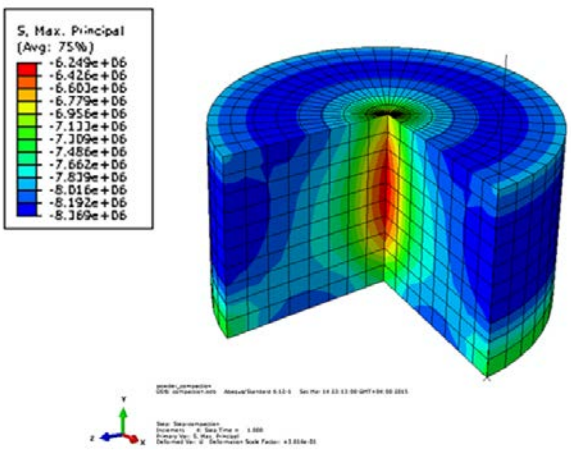


Рис. 3. Поле распределения радиального напряжения в АПС «ABAQUS»

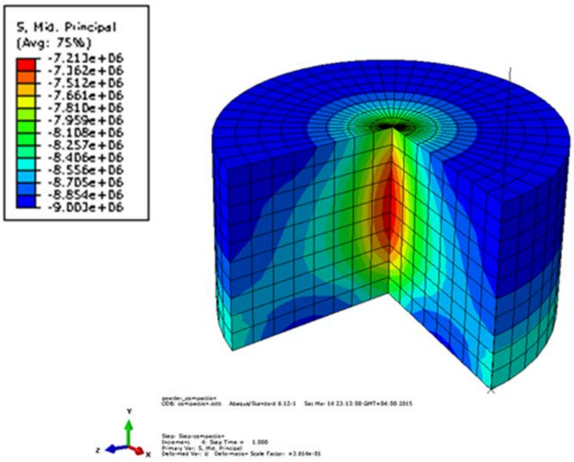


Рис. 4. Поле распределения окружного напряжения в АПС «ABAQUS»

На рис.5 (кривая 1) показано изменение осевого давления в зависимости от осевой координаты образца в краевой части модели, построенной на основе данных, полученных в АПС «ABAQUS».

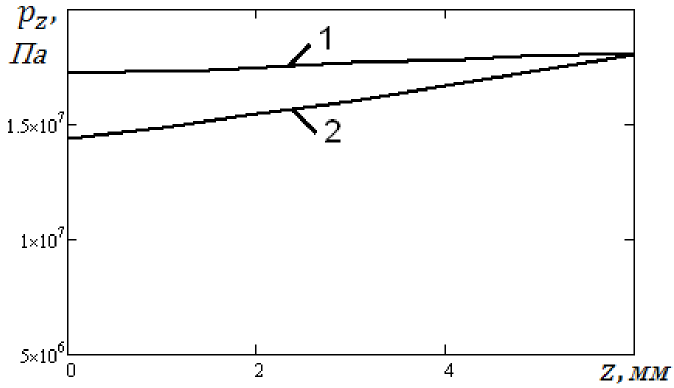


Рис. 5. Графики осевого давления в зависимости от осевой координаты образца:
1– в АПС «ABAQUS», 2 – аналитическим методом

Теперь приведём решение задачи аналитическим методом и произведём её численный расчёт для сравнения полученных данных с результатами АПС «ABAQUS».

Условие пластичности Мора-Кулона устанавливает прямую линейную связь между касательными τ_n и нормальными σ_n напряжениями на рассматриваемой площадке [1, 6] (рис.6):

$$|\tau_n| = \sigma_n \operatorname{tg} \rho + k. \tag{1.1}$$

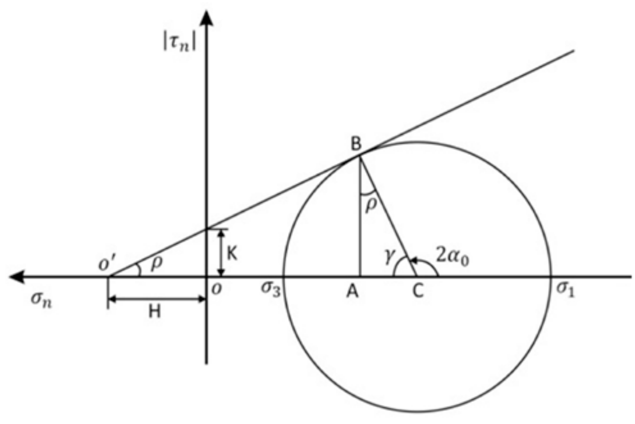


Рис. 6. График, представляющий условие пластичности Мора-Кулона

В [6] условие пластичности Мора-Кулона (1.1), выраженное главными напряжениями σ_1 и σ_3, приводится к более удобному для практического применения виду, а в [7] объясняется получение этого преобразованного условия пластичности наиболее ясным геометрическим методом:

$$\left|\sigma_3 - \sigma_1\right| = \left(\sigma_3 + \sigma_1 + 2H\right)\sin\rho \tag{1.2}$$

Для изучения напряжённого состояния процесса прессования неспечённого порошкового образца высотой L = 6 *мм* и диаметром d = 10 *мм* в жёсткой цилиндрической матрице используется условие равновесия для элемента высотой d, отделённого от этого цилиндрического образца двумя поперечными сечениями (рис.7) [8]

$$d \cdot dp_z = 4 f p_r dz\,, \tag{1.3}$$

где f – коэффициент трения между матрицей и образцом; dp_z – давление, действующее по направлению оси образца; p_r – боковое давление.

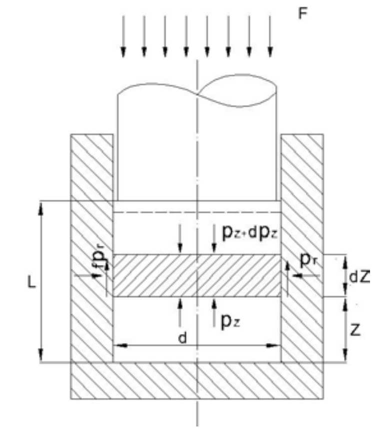


Рис. 7. Схема напряжённого состояния при наличии трения о стенки матрицы (контейнера)

Рассмотрим случай малых величин коэффициентов трения. При анализе напряжённого состояния образца, пренебрегая касательными напряжениями и учитывая, что $p_z > p_r$, принимаем:

$$\sigma_\theta = \sigma_r = \sigma_1 = \sigma_2 = -p_r\,, \qquad \sigma_z = \sigma_3 = -p_z \quad (p_z > p_r)\,.$$

Подставляя величины главных напряжений в условие пластичности Мора-Кулона (1.2), для бокового давления получим следующую формулу [5]:

$$p_r = \frac{p_z(1+\sin\rho) - 2H\sin\rho}{1-\sin\rho}\,. \tag{1.4}$$

Подставляя величину бокового давления (1.4) в уравнение равновесия (1.3), получим:

$$dp_z = 4f\left(\frac{p_z(1+\sin\rho) - 2H\sin\rho}{1-\sin\rho}\right)dz \quad \text{или} \quad dp_z = \left(\frac{4fp_z(1+\sin\rho)}{1-\sin\rho} - \frac{8fk\cos\rho}{1-\sin\rho}\right)\frac{dz}{d}\,. \tag{1.5}$$

Приняв обозначения $a = -\dfrac{8fk\cos\rho}{d(1-\sin\rho)}$ и $b = \dfrac{4fp_z(1+\sin\rho)}{d(1-\sin\rho)}$, путем выбора $L/d = 1,2$ получим:

$$dp_z = (a + bp_z)dz\,. \tag{1.6}$$

Преобразуя (1.6) и интегрируя его, в итоге получим:

$$\frac{d(a+bp_z)}{a+bp_z} = bdz\,, \qquad \int\frac{d(a+bp_z)}{a+bp_z} = \int bdz\,.$$

$$\ln(a+bp_z) = bz + C\,. \tag{1.7}$$

Для определения постоянной интегрирования используем следующее граничное условие: когда $z = L$, то $p_z = p_0$. Таким образом, получим:

$$\ln(a+bp_0) = Lb + C\,, \qquad C = \ln(a+bp_0) - Lb\,. \tag{1.8}$$

Подставляя выражение интегральной постоянной интегрирования в (1.7), найдем:

$$p_z = \frac{(a+bp_0)e^{b(z-L)} - a}{b}. \quad (1.19)$$

Произведён численный расчёт задачи для образца высотой L = 6 *мм* и диаметром d = 10 *мм* при $k = 5 \cdot 10^6\,Па$, $\rho = 30^0$, $f = 0,05$, $p_0 = 2 \cdot 10^7\,Па$ [5]. С помощью полученных данных был построен график $p_z - z$ (рис.5, кривая 2).

Заключение. Исследован процесс прессования неспечённого порошкового материала в жёсткой цилиндрической матрице в АПС «ABAQUS» и аналитическим методом. Показано, что с применением АПС «ABAQUS» компоненты напряжённого состояния распределены неоднородно, в то время как в решении задачи аналитическим методом принято допущение об однородном распределении осевого напряжения в поперечном сечении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Перельман В.Е. Формование порошковых материалов. М.: Металлургия, 1979. 232 с.
2. Петросян Г.Л. Пластическое деформирование порошковых материалов. М.: Металлургия, 1988. 153с.
3. Штерн М.Б. и др. Феноменологические теории прессования порошков. Киев: Наукова думка, 1982. 140 с.
4. Петросян Г.Л., Арзуманян М.Г., Сафарян М.Б., Кесоян Г.Р. Особенности исследования процессов пластического деформирования неспечённых порошковых материалов // Вестник НПУА. Металлургия, материаловедение, недропользование. Ереван: 2015. №1.
5. Amir R.K., Roland W.L. Finit element simulation for dynamic large elastoplastic deformation in metal powder forming // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1998. Vol.45. P.335 - 352.
6. Соколовский В.В. Статика сыпучей среды. М.: Гос.изд. физ.-мат. литературы, 1960. 243с.
7. Петросян Г.Л., Арзуманян М.Г**.** Особенности применения условий пластичности Мора-Кулона и Друккера-Прагера для неспечённых порошковых материалов // Вестник НПУА. Сборник научных статей. Ч.2. Ереван: 2014. С.326-333.
8. Арзуманян М.Г. Изучение напряжённого состояния процесса прессования образца из неспечённого порошка в жёсткой цилиндрической матрице // Вестник НПУА. Сборник научных статей. Ч.2. Ереван: 2015. С.319-325.

Сведения об авторах:

Петросян Геворг Людвигович – доктор техн. н., профессор, Национальный политехнический университет Армении (НПУА), **Тел.:** +374(094) 754103. **E-mail:** gevorglp@seua.am.

Арзуманян Мартин Глерикович – Национальный политехнический университет Армении (НПУА), **Тел.:** +374(094) 751675. **E-mail:** arzmartin@rambler.ru.

ПРОЦЕСС ОБРАЗОВАНИЯ ЗАМКНУТОЙ ПЕТЛИ ГИСТЕРЕЗИСА МАТЕРИАЛОВ

Петросян Т.Л.

В работе приводятся экспериментальные данные о процессе образования замкнутой петли гистерезиса глинистых грунтов. Показано, что линейная теория наследственности с экспоненциальным ядром описывает этот процесс достаточно точно. Приводятся теоретические данные о гистерезисе при различных номерах цикла в зависимости от периода нагружения.

Под гистерезисом принято понимать образование петли на графике зависимости напряжения от деформации при установившихся периодических деформациях у реальных материалов.

Известно, что процесс образования петли гистерезиса при периодическом нагружении связан с реологическими явлениями в материале. Работой Давиденкова Н.Н. [1] было положено начало экспериментальных исследований петель гистерезиса при различных видах циклического нагружения. Для описания петель гистерезиса были использованы аппроксимации их контура с помощью парабол. Важным допущением такого подхода являлось предположение о замкнутости петли гистерезиса. В действительности же, в момент полной разгрузки деформация не равна нулю, а имеет место остаточная деформация OA_1 (рис.1), причём, её приращение от цикла к циклу уменьшается [2,3]: $OA_1 > A_1A_2 > A_2A_3 > \ldots$ и, начиная с некоторого номера цикла, петля может считаться замкнутой. Это подтверждается также результатами экспериментальных исследований, проведённых на разных материалах [4,5,6,7].

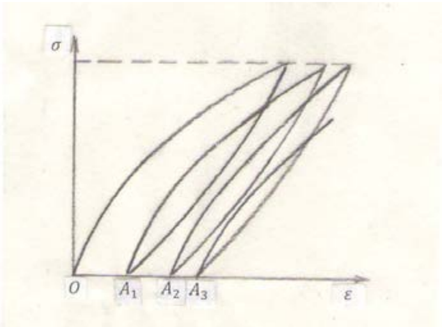


Рис.1. Образование замкнутой петли гистерезиса при циклическом нагружении материала.

Переходные колебательные процессы, описываемые посредством соотношений Давиденкова Н.Н. [2] или посредством других гистерезисных соотношений [8], не описывают динамику образования замкнутой петли гистерезиса.

Целью настоящей работы является изучение процесса образования замкнутой петли гистерезиса материалов в условиях периодических изменений напряжения и возможности его описания при использовании наследственной теории ползучести.

Обозначим через A «остаточную» деформацию A_nA_{n+1} (рис.1) остающуюся после соответствующего цикла нагружения; где $n-$ целое число периодов нагружения T. Если подсчитать A как функцию T и n, то изучение процесса образования замкнутой петли гистерезиса будем связывать с получением выражения для $A(T,n)$ при использовании наследственной теории ползучести.

Для описания деформаций при переменных напряжениях $\sigma(t)$, согласно линейной теории наследственности, будем иметь [9]:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \int_0^t \sigma(t)\frac{\partial C(t-\tau)}{\partial \tau}d\tau \qquad (1)$$

Допустим, что аппроксимация ползучести материала при единичном напряжении (мера ползучести) определяется формулой [10]

$$C(t) = C_0\left(1 - e^{-\alpha t}\right) \tag{2}$$

где C_0 и α – постоянные, определяемые из опыта.

Изменение напряжения во времени представим формулой

$$\sigma(t) = \sigma_0\left[\sin\left(\omega t + \varphi_0\right) + \lambda\right], \tag{3}$$

где σ_0 – амплитуда напряжения, $\omega = 2\pi/T$ – циклическая частота, λ – постоянная, определяющая степень асимметрии цикла, φ_0 – начальная фаза.

При использовании теории наследственности в применении к (2) и (3) будем иметь:

$$\varepsilon(t) = \sigma_0\left\{\frac{\left[\sin\left(\omega t + \varphi_0\right) + \lambda\right]}{E} + \frac{C_0\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}\times\right.$$
$$\left.\times\left[\alpha\sin\left(\omega t + \varphi_0\right) - \omega\cos\left(\omega t + \varphi_0\right) + \omega\cos\varphi_0 e^{-\alpha t} - \alpha\sin\varphi_0 e^{-\alpha t}\right] + \lambda C_0\left(1 - e^{-\alpha t}\right)\right\} \tag{4}$$

В формуле (4), подставляя $t = Tn$ и $\varphi_0 = -\pi/2$, получим значения деформаций в точках $A_1, A_2, A_3, A_4 \ldots$ (рис.1) при $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\varepsilon(Tn) = \frac{\sigma_0\left(\lambda - 1\right)}{E} - \frac{\sigma_0 C_0\alpha^2}{\alpha^2 + \omega^2} + \frac{\sigma_0 C_0\alpha^2}{\alpha^2 + \omega^2}e^{-\alpha Tn} + \sigma_0 C_0\lambda - \sigma_0 C_0\lambda e^{-\alpha Tn} \tag{5}$$

При этом, функция $A(T, n)$ определяется так:

$$A(T, n) = \varepsilon(Tn) - \varepsilon\left(T\left(n - 1\right)\right) = \sigma_0 C_0\left(\lambda - \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \omega^2}\right)e^{-\alpha T(n-1)}\left(1 - e^{-\alpha T}\right) \tag{6}$$

В работе [11] получены формулы расчёта деформаций ползучести при циклическом нагружении, согласно теории старения и теории наследственности, в применении к аппроксимации (2), и дано сравнение с экспериментальными данными, полученными на глинистых грунтах при многократных ступенчатых приложениях компрессионного напряжения, чередующегося с полной разгрузкой $\left(\lambda = 1,\ \varphi_0 = -\pi/2\right)$.

Опыты по изучению ползучести при постоянных и циклических нагружениях проводились на цилиндрических образцах с диаметром 70мм и высотой 20мм на компрессионном приборе М2 [12]. Испытаны два состояния образцов глинистого грунта, которые получены путем консолидации пасты под разными внешними нагрузками. При изготовлении образцов грунтовая паста, имеющая влажность, консолидировалась под компрессионными давлениями $\sigma_y = 0.7$ и $\sigma_y = 1.0$ МПа вплоть до практического затухания реологических деформаций. После консолидации образцы имели, соответственно, следующие физические параметры: плотность $\rho_1 = 2.06$ г/см^3, $\rho_2 = 2.07$ г/см^3, влажность $\omega_1 = 0.209, \omega_2 = 0.190$ и коэффициент пористости $e_1 = 0.58,\ e_2 = 0.55$. После полной разгрузки и остановки деформации декомпрессий образцы подвергались циклической нагрузке и разгрузке, осуществляемой ступенями 0.25МПа и со средней скоростью изменения напряжения 0.05МПа/мин. Испытание грунтов при постоянных напряжениях осуществлялись под давлениями $\sigma = 0.025$ МПа и $\sigma = 0.2$ МПа. Значения C и α для испытанного грунта при разных предварительно уплотняющих давлениях σ_y приведены в таблице. Экспериментальные исследования циклической ползучести были проведены при следующих амплитудных значениях напряжения: 0.05МПа, 0.1МПа, 0.15МПа и 0.2МПа.

Таблица

Параметры ползучести

σ_y МПа	$\sigma = 0.025$ МПа			$\sigma = 0.2$ МПа		
	C	α мин.$^{-1}$	E МПа	C	α мин.$^{-1}$	E МПа
0.7 1.0	0.00118 0.00122	0.193 0.202	38.48 37.55	0.00780 0.00800	0.193 0.202	38.46 37.55

Параметры ползучести, приведённые в таблице, использованы в формуле (6) при расчёте значения функций $A(T,n)$. В формуле (6) параметр C_0 равен отношению экспериментально определённого значения C к значению напряжения, при котором было определено C.

На рис. 2 и 3 показаны кривые зависимости $A(n)$, согласно выражению (6). Точками показаны экспериментальные значения остаточной деформации после каждого цикла.

Как уже сказано выше, для четырёх программ циклического нагружения сохраняется значение скорости нагружения, а период T возрастает с увеличением амплитуды напряжения σ_0.

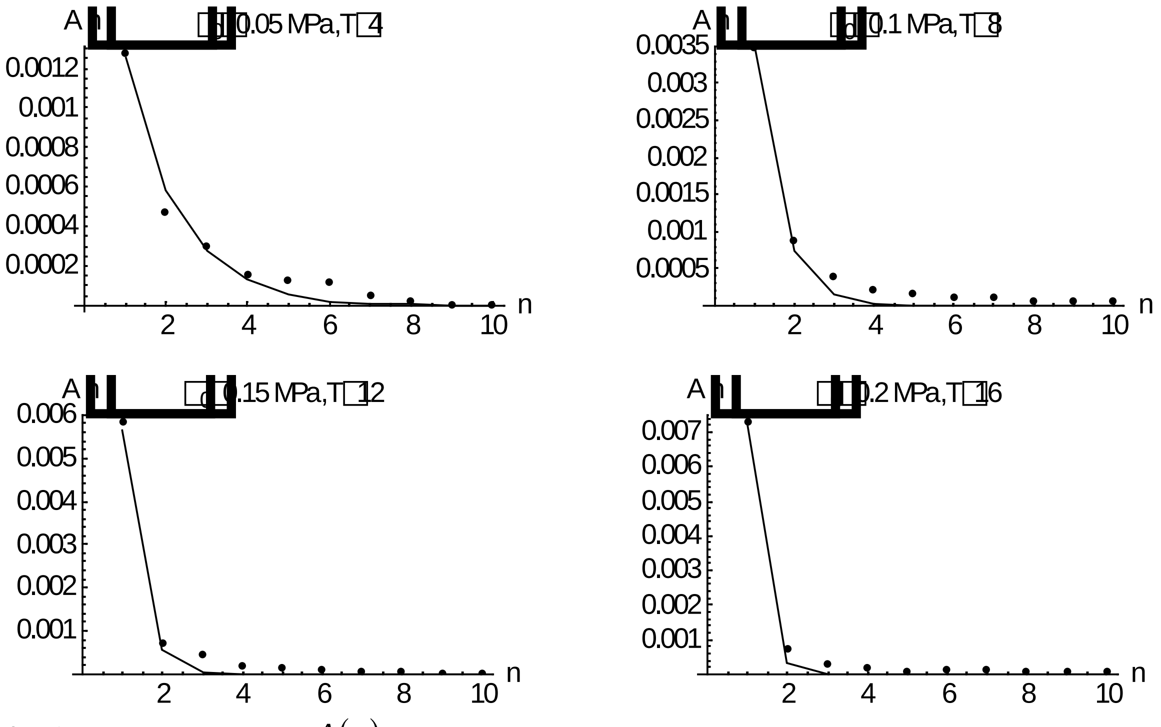


Рис.2. Кривые зависимости $A(n)$ при циклическом нагружении с амплитудами, соответственно, 0.05МПа, 0.1МПа, 0.15МПа и 0.2МПа для первого состояния грунта $\left(\sigma_y = 0.7\text{МПа}\right)$.

На рис. 2 и 3 из сравнения экспериментальных и теоретических данных можно сделать вывод, что для всех четырёх программ циклического нагружения теория наследственности описывает процесс образования замкнутой петли гистерезиса грунта вполне приемлемо.

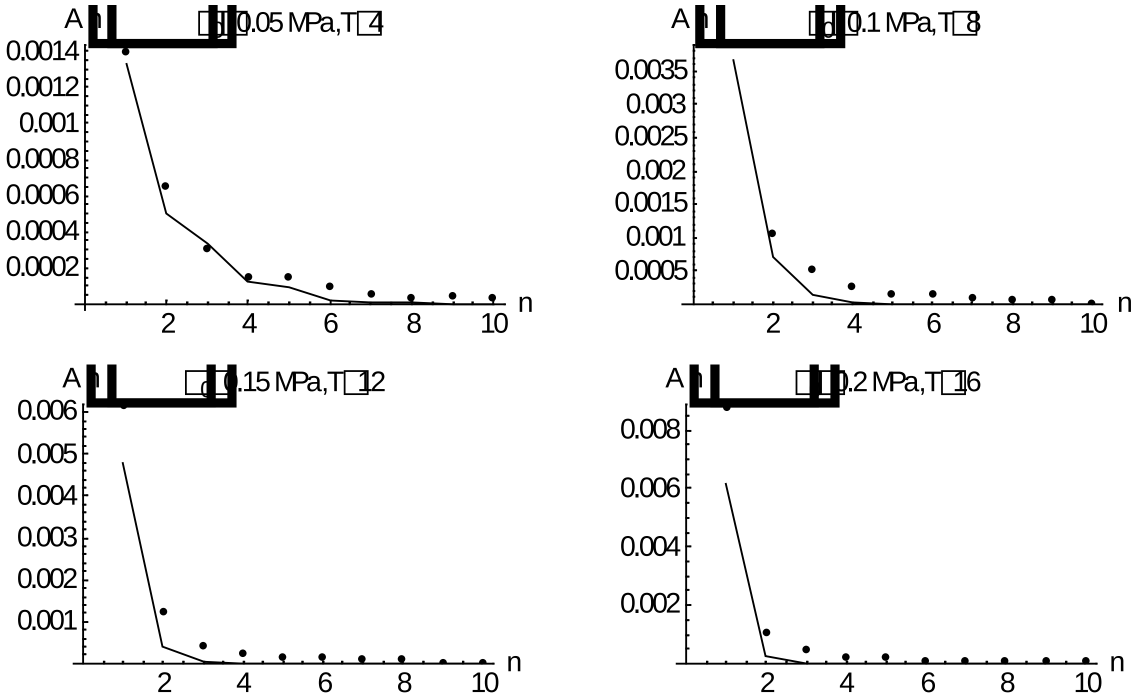


Рис.3. Кривые зависимости $A(n)$ при циклическом нагружении с амплитудами, соответственно, 0.05МПа, 0.1МПа, 0.15МПа и 0.2МПа для второго состояния грунта $(\sigma_y = 1.0\text{МПа})$.

На рис.4 приведены теоретические кривые $A(n)$, построенные согласно формуле (6) для четырех значений амплитуды напряжения σ_0 при постоянном периоде T. Ясно, что при такой программе нагружения значение скорости изменения напряжения возрастает с увеличением σ_0.

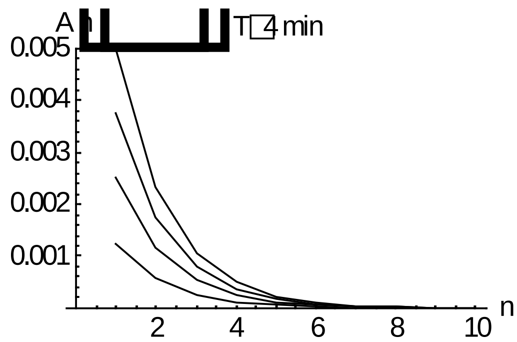


Рис.4. Графики зависимости $A(n)$ при разных значениях σ_0.

На рис.5 приведены теоретические кривые зависимости A от периода T, построенные, согласно (6). С увеличением периода T значения остаточной деформации A сначала увеличиваются и после достижения своего предельного значения уменьшаются, устремляясь к нулю, т.е. имеет место явление, похожее с резонансом. Проявленное резонансообразное явление можно объяснить так: при очень большой частоте (при очень малом периоде) ползучесть не успевает проявиться и поэтому тело ведёт себя как идеально упругое. При очень малой частоте (при очень большом периоде) при экспоненциальном ядре явление обратной ползучести успевает практически полностью проявиться в течение одного цикла нагружения и поэтому по окончании цикла «остаточная» деформация равна нулю. Как видно из рис.5, значение «резонансной» частоты уменьшается от цикла к циклу.

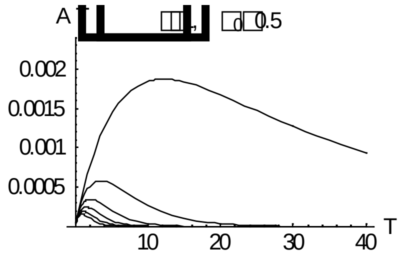


Рис.5. Кривые зависимости $A(T)$ при разных значениях n.

ЛИТЕРАТУРА

1. Давиденков Н.Н. О рассеянии энергии при вибрациях. //АН СССР. ЖТФ. 1938. Т.8. Вып.6. С.483-496.
2. Фридман Я.Б. Механические свойства металлов. Т.1. М.: Машиностроение, 1974. 472с.
3. Шилькрут Д.И. Единая реологическая гипотеза для описания совместного влияния гистерезиса и наследственных (релаксационных) явлений на колебательные процессы в не вполне упругих системах. //В кн.: «Рассеяние энергии при колебаниях упругих систем». Киев: Изд.-во АН УССР, 1963. С.97-109.
4. Карапетян К.А. Деформативные свойства стеклопластиковых труб при повторно-статическом одноосном и комбинированном нагружениях. //Доклады НАН Армении. 2001. Т.101. №4. С.317-323.
5. Месчян С.Р., Петросян Т.Л. Применение статического метода определения логарифмического декремента колебаний для грунтов в условиях компрессии. //Известия НАН Арм. ССР. Науки о Земле. 1989. Т.42. №5. С.69-74.
6. Петросян Т.Л. Экспериментальное исследование влияния степени асимметрии цикла на формы и площади петли гистерезиса водонасыщенных глинистых грунтов при компрессии // Изв. НАН Армении. Науки о Земле. 1993. Т.46. №2. С.60-63.
7. Валесян С.Ш. Экспериментальное исследование петли гистерезиса в зависимости от давления прессования. Информационные технологии и Управление. Ереван: 2000. №4. С.100-105.
8. Сорокин Е.С. К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем. М.: Госстройиздат, 1960. 131с.
9. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкци. М.: Наука, 1966. 752с.
10. Гарофало Ф. Законы ползучести и длительной прочности металлов и сплавов. М.: Металлургия, 1968. 304с.
11. Симонян А.М., Петросян Т.Л. Исследование ползучести глинистых грунтов в условиях многократного нагружения. //Информационные технологии и Управление. 2001. Т.1. №3. С. 208-213.
12. Месчян С.Р. Механические свойства грунтов и лабораторные методы их определения. М.: Недра, 1974. 191с.

<u>Сведения об авторе:</u>

Петросян Тигран Людвикович – к.т.н., научн. сотр. Института механики НАН Армении,
Адрес: 0019, Ереван, пр.Маршала Баграмяна, 24/2.
Тел.: (37410)674304. **E-mail:** tlpetrosyan@mail.ru

ОТРАЖЕНИЕ СДВИГОВОЙ ВОЛНЫ ОТ ОДНОРОДНОГО СЛОЯ В СИСТЕМЕ НЕОДНОРОДНОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО– ОДНОРОДНЫЙ СЛОЙ

Погосян Н.Д.

В работе рассмотрена задача отражения сдвиговой волны в системе неоднородное полупространство–однородный слой. При свободном внешнем слое и при закреплённом внешнем слое определены коэффициенты отражения. Исследования, посвящённые отражению волн от однородного и неоднородного слоёв, отражены в работах [1-3]. В работе Блеховских Л.М. (стр.15-19, 38-44) изучается отражение волн от системы однородных слоёв. Различные типы неоднородности и механизм распространения волн в этих средах рассмотрены в работах [4-7].

Рассмотрим двухслойную упругую среду. Пусть материал упругого полупространства $(0 \le y \le \infty)$ обладает экспоненциальной неоднородностью $\rho(y) = \rho(0)\exp 2\alpha y$, $\mu(y) = \mu(0)\exp 2\alpha y$.

Полупространство закреплено к однородному слою $(-h \le y < 0)$ с постоянными Ламэ λ, μ, ρ.

Рассмотрим вопрос отражения упругой сдвиговой волны от границы их раздела при падении волны на однородный слой.

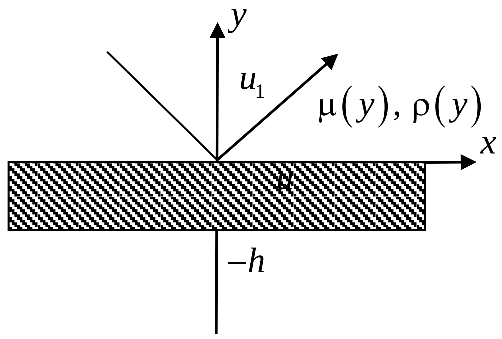


Рис. 1

Введём обозначения:

$$q = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_t^2} - k^2} \quad c_t^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad \gamma = \frac{\mu}{\mu(0)} \quad p = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_{t1}^2} - k^2 - \alpha^2} \quad c_{t1}^2 = \frac{\mu(0)}{\rho(0)} \tag{0}$$

Уравнение распространения сдвиговых волн в неоднородной среде имеет вид:

$$\mu(y)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(y)\frac{\partial u_1}{\partial y}\right) = \rho(y)\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \tag{1}$$

а в однородном слое –

$$\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2}$$

Решение уравнения (1) представляется в виде

$$u_1 = \left(A_0 \sin py + B\cos py\right)e^{-\alpha y}\exp i\left(kx - \omega t\right)$$

Решение уравнения (2) запишется в виде

$$u = \left(C_1 \exp(-iqy) + C_2 \exp(iqy)\right)\exp i\left(kx - \omega t\right) \tag{3}$$

На u и u_1 налагаются граничные условия:

при $y = -h \quad \sigma_{23}^0 = 0 \ \ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$ (4-1) при $y=0 \quad u=u_1 \;\; \mu(0)\dfrac{\partial u_1}{\partial y}=\mu\dfrac{\partial u}{\partial y}$ (4-2)

Пусть на границу раздела падает сдвиговая волна

$W_1 = A_0 \sin Pye^{-\alpha y+i(kx-\omega t)}$,

тогда отражённая волна имеет вид:

$W_2 = Be^{-\alpha y}\cos Py \exp i(kx-\omega\gamma)$,

$u_1 = W_1 + W_2$.

Подставляя u и u_1 в граничные условия (4-1)–(4-2), получим:

$$-C_1 \exp iqh + C_2 \exp(-iqh) = 0$$

$$\mu(0)(PA_0 - \alpha B) = \mu(-c_1 iq + c_2 iq)$$

$$B = C_1 + C_2$$

или получим систему относительно A_0, C_1, C_2, B:

$$C_1 \exp 2iqh - C_2 = 0,$$

$$B = C_1 + C_2,$$

$$q\gamma i(C_2 - C_1) = A_0 P - \alpha B$$

из этой системы выразим B, C_1, C_2 через A_0:

$$C_1 = \frac{A_0 P}{q\gamma i(\exp 2iqh - 1) + \alpha(\exp 2iqh + 1)}$$

$$B = \frac{A_0 P(\exp 2iqh + 1)}{q\gamma i(\exp 2iqh - 1) + \alpha(\exp 2iqh + 1)} \qquad (5)$$

$$C_2 = \frac{A_0 P \exp 2iqh + 1}{q\gamma i(\exp 2iqh - 1) + \alpha(\exp 2iqh + 1)}$$

или получим:

$$C_1 = \frac{A_0 P}{(-q\gamma \sin 2qh + \alpha\cos 2qh + \alpha) + i(\alpha \sin 2qh + q\gamma\cos 2qh - q\gamma)}$$

$$B = \frac{A_0 P(\cos qh + 1 + i\sin 2qh)}{(-q\gamma \sin 2qh + \alpha\cos 2qh + \alpha) + i(\alpha \sin 2qh + q\gamma\cos 2qh - q\gamma)} \qquad (6)$$

$$C_2 = \frac{A_0 P(\cos qh + 1 + i\sin 2qh)}{(-q\gamma \sin 2qh + \alpha\cos 2qh + \alpha) + i(\alpha \sin 2qh + q\gamma\cos 2qh - q\gamma)}$$

В случае закреплённой границы условие (4-1) заменяется на $u(-h)=0$, а остальные граничные условия остаются без изменения:

при $y=0, \quad u=u_1, \quad \mu_0\dfrac{\partial u_1}{\partial y}=\mu\dfrac{\partial u}{\partial y}$,

подставляя u и u_1 в граничные условия, получим:

$$C_1 \exp iqh + C_2 \exp(-iqh) = 0$$

$$\mu(0)(PA_0 - \alpha B) = \mu(-C_1 iq + C_2 iq) \qquad (7)$$

$$B = C_1 + C_2$$

Из этой системы выразим $B,\ C_1,\ C_2$ через A_0:

$$\begin{cases} C_2 = -C_1 \exp 2iqh \\ B = C_1 + C_2 \\ q\gamma i\left(C_2 - C_1\right) = A_0 P - \alpha B \end{cases}$$

$$C_1' = \frac{A_0 P}{q\gamma \sin 2qh - \alpha\cos 2qh + \alpha - i\left(q\gamma\cos 2qh + q\gamma + \alpha\sin 2qh\right)}$$

$$C_2' = \frac{-A_0 P\left(\cos 2qh + i\sin 2qh\right)}{q\gamma \sin 2qh - \alpha\cos 2qh + \alpha - i\left(q\gamma\cos 2qh + q\gamma + \alpha\sin 2qh\right)} \tag{8}$$

$$B' = \frac{A_0 P\left(1 - \cos 2qh - i\sin 2qh\right)}{q\gamma \sin 2qh - \alpha\cos 2qh + \alpha - i\left(q\gamma\sin 2qh + q\gamma + \alpha\sin 2qh\right)}$$

Отношение B/A_0 представляет собой коэффициент отражения. Разделяя действительную и мнимую части числа B, представим его в виде $B = B_1 + iB_2$: где

$$B_1 = \frac{A_0 P\left(\alpha + \alpha\cos 2qh - q\gamma\sin 2qh\right)}{\left(\alpha^2 - q^2\gamma^2\right)\cos 2qh - 2\gamma q\alpha\sin 2qh + \left(\alpha^2 + q^2\gamma^2\right)}$$

$$B_2 = 0$$

То есть B/A_0 – действительное число при $\alpha = 0$ и $\frac{P}{q^2\gamma^2} = \mathrm{tg}qh$, коэффициент отражения равен 1.

В случае закреплённой границы $\operatorname{Im} B'/A_0 = 0$, и B' тоже получается действительным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 342с.
2. Погосян Н.Д. Отражение сдвиговой волны от неоднородного слоя. //Изв. НАН Армении. Механика. 2011. Т.64. №4. С.21-29.
3. Зволинский Н.В. Отражённые и головные волны, возникающие на плоской границе раздела двух упругих сред. Ч.1. //Изв. АН СССР. Сер. Геофизика. 1958. №1. С.3-6.
4. Bhattacharya J. On the propagation of waves in an elastic due to various types of pressures and velocities prescribed on the inner surface of spherical cavity. // Gertands Beitz. Geophys. 1969, vol.7. №3.
5. Chattarjee S.N. Propagation of Reyleigh waves in a Layer, Lying over a heterogeneous half–space. / Pure and Applied Geophysics. 1971. Vol.86. №3. p.69-79.
6. Blenstein J.L. A new surface wave in piezoelectric materials //Appl. Phys. Lett. vol.13. №12. p.412-413.
7. Mangin G.A. Elastic surface waves with transverse horizontal polarization // Advances in Applied Mechanics. 1983. Vol.23. p.373-374.

Сведения об авторе:

Погосян Норик Джанибекович – науч. сотр. Института механики НАН Армении.
Адрес: 0019, Ереван, пр.Маршала Баграмяна, 24/2
Тел.: (37410) 747790
E-mail: Pogosian.Norik@mail.ru

КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГОГО ЦИЛИНДРА, СЦЕПЛЁННОГО С УПРУГИМ ПОЛУПРОСТРАНСТВОМ

Попов В.Г.

В данной работе рассмотрена контактная задача о крутильных колебаниях цилиндра, сцеплённого с упругим полупространством. Эта задача приведена к СИУ, ядро которого содержит неподвижную особенность на обоих концах отрезка интегрирования. Для него разработали метод численного решения, учитывающий особенность неизвестной функции и основанный на применении для сингулярных интегралов специальных квадратурных формул.

1. Постановка задачи и приведение её к СИУ. Пусть на упругом изотропном полупространстве $0 \le r < +\infty,\ -\infty < z \le 0,\ 0 \le \varphi < 2\pi$ находится сцеплённый с ним упругий цилиндр $0 \le r < r_0,\ 0 \le z < a,\ 0 \le \varphi < 2\pi$ (рис.1). С верхним основанием этого цилиндра сцеплена жёсткая накладка того же радиуса, что и цилиндр и толщиной d. На накладку действует гармонически зависящий от времени крутящий момент $Me^{-i\omega t}$ (далее множитель $e^{-i\omega t}$, который определяет зависимость от времени, опущен). При данных условиях в цилиндре и полупространстве реализована осесимметричная деформация кручения и отличным от 0 является только угловое перемещение $w_j(r,z),\ j = 1,2$. Последнее находится из уравнения

$$\frac{\partial^2 w_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w_j}{\partial r} - \frac{w_j^2}{r^2} + \frac{\partial^2 w_j}{\partial z^2} + \kappa_{2j}^2 w_j = 0,\ \kappa_{2j}^2 = \frac{\rho_j^2\omega^2}{G_j},\ j = 1,2, \tag{1.1}$$

где $w_1(r,z)$ – перемещения в цилиндре, $w_2(r,z)$ – перемещения в полупространстве, ρ_1, G_1 – плотность и модуль сдвига цилиндра, ρ_2, G_2 – плотность и модуль сдвига полупространства. В области контакта цилиндра и полупространства выполняются равенства:

$$\begin{aligned} &\tau_{\varphi z}^1(r,+0) = G_1\frac{\partial w_1}{\partial z}(r,+0) = q(r),\ 0 \le r < r_0 \\ &\tau_{\varphi z}^2(r,-0) = G_2\frac{\partial w_2}{\partial z}(r,-0) = q(r) \end{aligned} \tag{1.2}$$

где $q(r)$– неизвестные касательные напряжения в области контакта. Также

$$w_1(r,+0) = w_2(r,-0),\ 0 \le r < r_0\,. \tag{1.3}$$

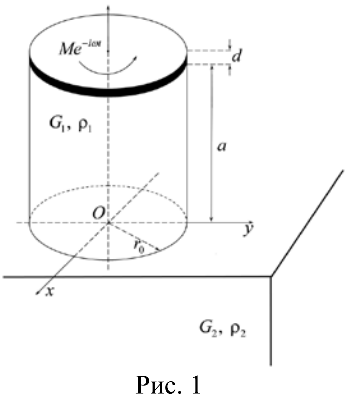


Рис. 1

На верхнем основании цилиндра из условий сцепления с накладкой выполняется равенство

$$w_1(r,a) = \theta_0 r,\ 0 \le r \le r_0\,. \tag{1.4}$$

где θ_0 – неизвестный угол поворота накладки. Он определяется из уравнения колебаний накладки

$$-\omega^2 j_0\theta_0 = M - M_R,\; j_0 = \frac{\pi}{2} r_0^4 d\rho_0,\; M_R = 2\pi\int_0^{r_0} r^2 \tau_{jz}^1(r,a)\,dr\,. \tag{1.5}$$

где j_0 – момент инерции накладки относительно оси Oz, M_R – момент сил реакции, который действует на накладку. Здесь ρ_0 – плотность накладки, $\tau_{\varphi z}^1(r,a)$–касательные напряжения под накладкой. Боковая поверхность цилиндра не загружена:

$$\tau_{r\varphi}^1(r_0,z) = G_1 r \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{w_1}{r}\right)\Bigg|_{r=r_0} = 0,\; 0<z<a\,. \tag{1.6}$$

Поверхность полупространства вне зоны контакта также не загружена

$$\tau_{z\varphi}^2(r,-0) = 0,\; r>r_0. \tag{1.7}$$

Решение краевой задачи (1.1), (1.2), (1.4), (1.6) относительно углового перемещения в цилиндре осуществляется методом интегральных преобразований, так же как и в [1]. В результате, для него получено следующее выражение:

$$u_1(r,z) = -\int_0^{r_0} \eta \frac{q(\eta)}{G_1} F_1(\eta,r,z)\,d\eta + \theta_0 r \frac{\cos\kappa_{21} z}{\cos a\kappa_{21}} \tag{1.8}$$

$$F_1(\eta,r,z) = \frac{2}{a}\sum_{k=1}^{+\infty}\left[g_k^1(\eta,r) + \frac{K_2(q_{k1}r_0)}{I_2(q_{k1}r_0)} I_1(q_{k1}\eta) I_1(q_{k1}r)\right]\cdot\cos\lambda_k z$$

$$g_k^1(\eta,r) = \int_0^{+\infty} \frac{\beta}{\beta^2+q_{k1}^2} J_1(\beta r)J_1(\beta\eta)\,d\beta = \begin{cases} I_1(q_{k1}r)K_1(q_{k1}\eta), & r<\eta \\ I_1(q_{k1}\eta)K_1(q_{k1}r), & r>\eta \end{cases}$$

$$\lambda_k = \frac{\pi(2k-1)}{2a};\; q_{k1} = \sqrt{\lambda_k^2 - \kappa_{21}^2}$$

Угловое перемещение в полупространстве является решением граничной задачи (1.1), (1.2), (1.7). Оно так же легко строится методом интегральных преобразований и равно

$$w_2(\eta,r) = \int_0^{r_0} \eta \frac{q(\eta)}{G_2} \int_0^{+\infty} \frac{\beta e^{q_2(\beta)z}}{q_2(\beta)} J_1(\beta r)J_1(\beta\eta)\,d\beta\, d\eta,\quad q_2(\beta) = \sqrt{\beta^2 - \kappa_{22}^2} \tag{1.9}$$

Теперь для окончательного определения перемещения в цилиндре и полупространстве необходимо найти неизвестные контактные напряжения $q(r)$. Для этого, в результате подстановки (1.8), (1.9) в (1.3) получено интегральное уравнение. Это интегральное уравнение преобразовано в интегральное уравнение второго рода [1] относительно новой неизвестной функции, связанной с контактными напряжениями следующими формулами:

$$\varphi(x) = \int_x^{r_0} \eta \frac{q(\eta)}{\sqrt{\eta^2 - x^2}}\,d\eta,\; q(\eta) = -\frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial\eta}\int_\eta^{r_0} \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{x^2-\eta^2}} \tag{1.10}$$

После этих преобразований и выделения сингулярной части оно имеет вид:

$$(1+c)g(\zeta) + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} g(\tau)\left[\frac{1}{2-\tau-\zeta} + \frac{1}{2+\tau+\zeta} - \frac{15}{4}\ln(2+\tau+\zeta) - \right. \tag{1.11}$$

$$\left. -\frac{\pi}{4}\ln(2+\tau+\zeta) + R(\tau,\zeta)\right]d\tau = \frac{2\theta_0\zeta}{\cos(\gamma\kappa_0)},\; -1<\zeta<1$$

При выводе уравнения (1.11) приняты следующие обозначения:

$$x = r_0\tau,\ \ y = r_0\zeta,\ \ \varphi(r_0\tau) = r_0 G_1 g(\tau),\ \ \kappa_0 = \kappa_{21} r_0,$$

$$\gamma = \frac{a}{r_0},\ \ \rho_{12} = \frac{\rho_2}{\rho_1},\ \ c = \frac{G_1}{G_2},\ \ \mu_0 = \frac{\kappa_{22}}{\kappa_{21}} = \sqrt{\frac{c}{\rho_{21}}}.$$

Так же функция $\varphi(\tau)$ была нечётным образом продолжена на $[-1,1]$. Функция $R(\tau,\zeta)$ является ограниченной при $-1 \le \zeta, \tau \le 1$. Можно видеть, что это уравнение имеет неподвижную особенность при $\tau = \zeta = 1$ и $\tau = \zeta = -1$.

2. Численное решение интегрального уравнения. Для построения эффективного численного метода решения уравнения (1.11) необходимо выяснить особенность неизвестной функции при $\zeta \to \pm 1$. Будем предполагать степенную особенность такую, которая обеспечит интегрируемость контактных напряжений $q(r)$. Это определяет следующий вид решения:

$$g(\tau) = \left(1\text{-}\tau^2\right)^{\sigma} \psi(\tau),\quad \sigma = \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{1}{c+1}, \tag{2.1}$$

где $\psi(\tau)$ – функция, удовлетворяющая условиям Гельдера на $[-1,1]$. Показатель особенности определён путем сравнения асимптотик левой и правой частей [2], [3]. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов основываются на приближении функции $\psi(\tau)$ следующим интерполяционным многочленом:

$$\psi(\tau) \approx \Psi_n(\tau) = \sum_{m=1}^{n} \psi_m \frac{P_n^{\sigma,\sigma}(\tau)}{\left[P_n^{\sigma,\sigma}(\tau_m)\right]'(\tau - \tau_m)}, \tag{2.2}$$

где $\psi_m = \psi(\tau_m)$, $P_n^{\sigma,\sigma}(\tau)$ – многочлен Якоби, τ_m – корни этого многочлена.

Рассмотрим интегралы

$$I_n^{\pm}(\zeta) = \int_{-1}^{1} \frac{\left(1-\tau^2\right)^{\sigma} \Psi_n(\tau)}{2 \pm \tau \pm \zeta} d\tau = \sum_{m=1}^{n} \frac{\Psi_m}{\left[P_n^{\sigma\sigma}(\tau_m)\right]'} \cdot \int_{-1}^{1} \frac{P_n^{\sigma\sigma}(\sigma)\left(1-\tau^2\right)^{\sigma}}{(\tau-\tau_m)(2\pm\tau\pm\zeta)} d\tau \tag{2.3}$$

Вычисляя их методом, подробно изложенным в [4], находим:

$$I_n^{\pm}(\zeta) = \sum_{m=1}^{n} \frac{\Psi_m}{\left(\left(P_n^{\sigma\sigma}(\tau_m)\right)'(2 \pm \tau_m \pm \varsigma)\right)} \left(A_m^{\sigma\sigma}\left[P_n^{\sigma\sigma}(\tau_m)\right]' + (\mp 1)^{n+1} B_n\left(\frac{1 \pm \varsigma}{2}\right)\right). \tag{2.4}$$

$$B_n(Y) = \frac{2^{2\sigma}\Gamma(1+\sigma+n)}{n!}\left[\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j \Gamma(-\sigma-n)\Gamma(1+\sigma+n+j) Y^{\sigma+j}}{j!\,\Gamma(1+\sigma+n+j)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j \Gamma(\sigma-j)\Gamma(1+n+j)}{j!\,\Gamma(1+2\sigma+n-j)} Y^j \right].$$

$A_m^{\sigma\sigma}$ – коэффициенты квадратурной формулы Гаусса–Якоби [5]

Далее рассмотрим интегралы с логарифмическими особенностями:

$$l_n^{\pm}(\zeta) = \int_{-1}^{1} (1-\tau^2)^{\sigma} \psi_n(\tau) \ln(2 \pm \tau \pm \zeta) d\tau. \tag{2.5}$$

Для их вычисления также применяется методика, изложенная в [4] , где рассмотрены аналогичные интегралы. Окончательно формулы для интегралов (2.5) имеют вид:

$$\mathrm{I}_n^{\pm}(\zeta)=\sum_{m=1}^{n}A_m^{\sigma\sigma}\psi_m\sum_{j=0}^{n-1}(\mp1)^j\,\frac{P_j^{\sigma\sigma}(\tau_m)}{\sigma_j^2}h_j\left(\frac{1\pm\zeta}{2}\right),\ \sigma_j^2=\frac{2^{1+2\sigma}\Gamma^2(\sigma+j+1)}{(2\sigma+2j+1)\Gamma(2\sigma+j+1)}.\tag{2.6}$$

$$h_j(Y)=-\frac{\Gamma(1+\sigma+j)}{j!}2^{1+2\sigma}\left[\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p\Gamma(1+\sigma+p+j)\Gamma(-\sigma-p-1)}{p!\Gamma(1+\sigma+j+p)}Y^{1+p+\sigma}+\right.$$

$$\left.+\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p\Gamma(1+\sigma-p)\Gamma(j+p)}{p!\Gamma(2+2\sigma+j-p)}Y^p\right]$$

Далее в уравнении (1.11) к сингулярным интегралам применяются квадратурные формулы (2.4), (2.6), а к регулярным – квадратурные формулы Гаусса-Якоби [5], и в качестве точек коллокации берутся $\zeta=\tau_k,\ k=1,2,...,n$. Результатом этих действий является следующая система линейных алгебраических уравнений:

$$(1+c)(1-\tau_k^2)^{\sigma}\psi_k+\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{n}\psi_m\left(D_{km}^{+}+D_{km}^{-}-\frac{15}{4}b_{km}^{+}-\frac{15}{4}b_{km}^{-}+A_m^{\sigma\sigma}R(\tau_m,\tau_k)\right)=\frac{2\theta_0\tau_k}{\cos\gamma\kappa_0},\tag{2.7}$$

$k=1,2,...,n.$

В системе (2.7) приняты обозначения:

$$D_{km}^{\pm}=\begin{cases}\dfrac{A_m^{\sigma\sigma}}{2\pm\tau_m\pm\tau_k},1\pm\tau_k>\delta>0,\\[2ex]\dfrac{\left[A_m^{\sigma\sigma}\left(P_n^{\sigma\sigma}(\tau_m)\right)'+(\mp1)^{n+1}B_n\left(\dfrac{1\pm\zeta_k}{2}\right)\right]}{(2\pm\tau_m\pm\tau_k)\left(P_n^{\sigma\sigma}(\tau_m)\right)'},0<1\pm\tau_k<\delta,\end{cases}$$

$$b_{km}^{\pm}=\begin{cases}A_m^{\sigma\sigma}\ln(2\pm\tau_m\pm\tau_k),1-\tau_k>\delta>0,\\ A_m^{\sigma\sigma}\sum\limits_{j=0}^{n-1}\dfrac{P_j^{\sigma\sigma}(\tau_m)}{\sigma_j^2}(\mp1)^j h_j\left(\dfrac{1\pm\tau_k}{2}\right),0<1\pm\tau_k<\delta.\end{cases}$$

3.Вычисление угла поворота накладки и контактных напряжений. Непосредственное решение системы (2.7) невозможно, если не будет определён неизвестный угол поворота накладки. Для этого необходимо воспользоваться уравнением движения (1.5). Найдя напряжения под накладкой из (1.7) для момента силы реакции, получаем:

$$M_R=-2\pi r_0^3G_1\left[\int_{-1}^{1}g(\tau)U_R(\tau)d\tau+\int_{-1}^{1}\zeta s(\zeta)V_R(\zeta)d\zeta+\theta_0\frac{\kappa_0}{4}\mathrm{tg}(\kappa_0\gamma)\right],\ s(\zeta)=\frac{q(r_0\zeta)}{G_1},\tag{3.1}$$

$$U_R(\tau)=\frac{\kappa_0}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{J_2(\kappa_0u)}{\mathrm{ch}(\gamma\kappa_0q)}\sin(\kappa_0u\tau)du,\ V_R(\zeta)=\frac{1}{\gamma}\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\frac{u_k}{d_k}K_2\left(\frac{\pi d_k}{2\gamma}\right)I_1\left(\frac{\pi d_k}{2\gamma}\zeta\right).$$

Далее следует получить выражение для контактных напряжений $s(\zeta)$. Из (1.10) находим:

$$s(\zeta)=\frac{\kappa_0^2}{\pi}\int_0^{+\infty}uG(u)J_1(\kappa_0u\zeta)du,\ G(u)=\int_{-1}^{1}g(\tau)\sin(\kappa_0u\tau)d\tau.\tag{3.2}$$

В последний интеграл выполним подстановку (2.1), (2.2) и воспользуемся тождеством Дарбу-Кристоффеля [6]. Тогда получим:

$$G(u)=-\frac{2^{\sigma+1/2}\sqrt{\pi}}{(u\kappa_0)^{\sigma+1/2}}\sum_{m=0}^{n}\Psi_mA_m^{\sigma\sigma}\sum_{l=1}^{2l-1\le n}\frac{(-1)^lP_{2l-1}^{\sigma\sigma}(\tau_m)}{\sigma_{2l-1}^2}\cdot\frac{\Gamma(2l+\sigma+1)}{(2l-1)!}J_{2l+\sigma+1/2}(u\kappa_0)\,.$$

После подстановки выражения для $G(u)$ в (3.2) и вычисления интегралов, преобразования гипергеометрической функции [7] для контактных напряжений получаем:

$$s(\zeta) = \zeta(1-\zeta^2)^{\sigma-1/2}\sum_{m=1}^{n}\Psi_m A_m W_m(\zeta), \tag{3.3}$$

$$W_m(\zeta) = \sum_{l=1}^{2l-1\le n}\frac{P_{2l-1}^{\sigma\sigma}(\tau_m)\Gamma(2l+\sigma+1)\Gamma\left(l+3/2\right)}{(-1)^l\sigma_{2l-1}^2\Gamma(l+\sigma)}\cdot\left[\frac{\Gamma\left(1/2-\sigma\right)}{\Gamma\left(l+3/2\right)}F(1/2-l,1+l+\sigma,\frac{1}{2}+\sigma,1-\zeta^2)+\right.$$

$$\left.+\frac{\Gamma\left(-1/2+\sigma\right)}{\Gamma\left(1/2-l\right)\Gamma(1+l+\sigma)}(1-\zeta^2)^{\frac{1}{2}-\sigma}F(l+3/2,1-l-\sigma,2,\zeta^2)\right].$$

Поскольку из (2.1) следует, что $0\le\sigma\le 1/2$, то (3.3) показывает, что контактные напряжения неограниченны при $\zeta\to\pm1$, кроме случая $\sigma=1/2$, что соответствует упругому цилиндру на жёстком основании. Формула (3.3) даст возможность в (3.1) применить к интегралам квадратурные формулы Гаусса-Якоби и получить следующее выражение для момента сил реакции

$$M_R = -2\pi r_0^3 G_1\left(\sum_{m=1}^{n}A_m^{\sigma\sigma}\psi_M Q_m+\frac{\theta_0 x_0}{4}\mathrm{tg}(x_0\gamma)\right), Q_m = U_R\left(\tau_m+\sum_{j=1}^{n}B_j x_j W_m(x_j)V_R(x_j)\right)$$

$B_j = A_m^{\sigma-\frac{1}{2},\sigma-\frac{1}{2}}$, x_j – корни многочленов $P_n^{\sigma-\frac{1}{2},\sigma-\frac{1}{2}}(x)$. Теперь из (1.5) получим

$$\theta_0 = \frac{4}{\Delta(\kappa_0)}\left(m_0 - \sum_{m=1}^{n}A_m^{\sigma\sigma}\psi_M Q_m\right),\ \Delta(\kappa_0)=\kappa_0 tg(\kappa_0\gamma) - d_0\rho_{12},\ m_0=\frac{M}{2\pi G_1 r_0^3},\ d_0=\frac{d}{r_0}. \tag{3.4}$$

Равенство (3.4) следует добавить к системе (2.11).

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов В.Г. Напряжённое состояние конечного упругого цилиндра с краевой трещиной при крутильных колебаниях//Прикладная механика.2012. Т.48. №4. С.86-93.
2. Максименко В.Н. К контактной задаче для анизотропной пластины, подкреплённой ребром жёсткости//Механика твёрдого тела. 1981. №1. С.59-165.
3. Попов В.Г. Дифракция упругих волн сдвига на включении сложной формы, расположенном в неограниченной упругой среде//Гидроаэромеханика и теория упругости: Численные и аналитические методы решения задач гидроаэродинамики и теории упругости. Днепропетровск: Днепропетровск.гос.ун-т.,1986. С.121-127.
4. Попов В.Г. Динамическая контактная задача, приводящая к сингулярному интегральному уравнению с двумя неподвижными особенностями// Прикладная математика и механика. 2012. Т.76. №3. С.484-496.
5. Крылов В.И. Приближённое вычисление интегралов. М.: Наука,1967. 500с.
6. Сеге Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз,1962. 500с.
7. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений. М.: 1971. 1008с.

Сведения об авторе:

Попов Всеволод Геннадиевич – профессор, д.ф.м.наук, заведующий кафедрой высшей математики, Одесская национальная морская академия, (+38048) 733 23 12, (+38067) 480 65 57.
E-mail: dr.vg.popov@gmail.com

НИЗКОЧАСТОТНОЕ ПРОХОЖДЕНИЕ УПРУГИХ ВОЛН ЧЕРЕЗ МАССИВ ЩЕЛЕЙ ДВОЙНОЙ ПЕРИОДИЧНОСТИ В ТРЁХМЕРНОЙ ПОСТАНОВКЕ

Ремизов М.Ю., Сумбатян М.А.

Данная работа посвящена выводу аналитических выражений для коэффициентов отражения и прохождения, когда плоская волна падает на двумерную решётку с периодическим массивом прямоугольных щелей в упругой изотропной среде в трёхмерной постановке. В режиме частотного диапазона одной моды задача сводится к гиперсингулярному интегральному уравнению. Показано, что кроме свойства гиперсингулярности интегрального уравнения обнаружены новые сингулярности по каждой из координат двумерной решётки.

1.Введение. В настоящей работе мы продолжаем исследование двойной периодической структуры, расположенной в бесконечной плоскости в 3-D случае. Так же, как и в [1-6], мы предполагаем
что при нормальном падении волны имеет место только режим распространения одной моды, т.е. $ak_1 < \pi$, ($a > c$); $ck_1 < \pi$, ($c > a$), где k_1 - волновое число продольной падающей волны $e^{ik_1 x}$

Целью настоящей работы является получение новых аналитических выражений для коэффициентов отражения и прохождения в случае трёхмерного распространения и описание новых свойств ядра полученного гиперсингулярного интегрального уравнения.

2. Математическая постановка задачи. Рассмотрим среду, которая состоит из бесконечной плоскости $x = 0$, содержащую двумерный бесконечный периодический массив трещин, с периодами по осям y и z $2a$ и $2c$, соответственно. Если мы изучаем падение плоской волны на решётку вдоль положительного направления оси x, то в силу симметрии вопрос сводится к рассмотрению волновода ширины $2a$ вдоль оси y и $2c$ вдоль оси z, (рис.1). Следовательно, если падающая волна единичной амплитуды, как предполагается, распространяются нормально к плоскости $x = 0$, то потенциалы Ламэ, удовлетворяющие уравнению Гельмгольца, являются следующие:

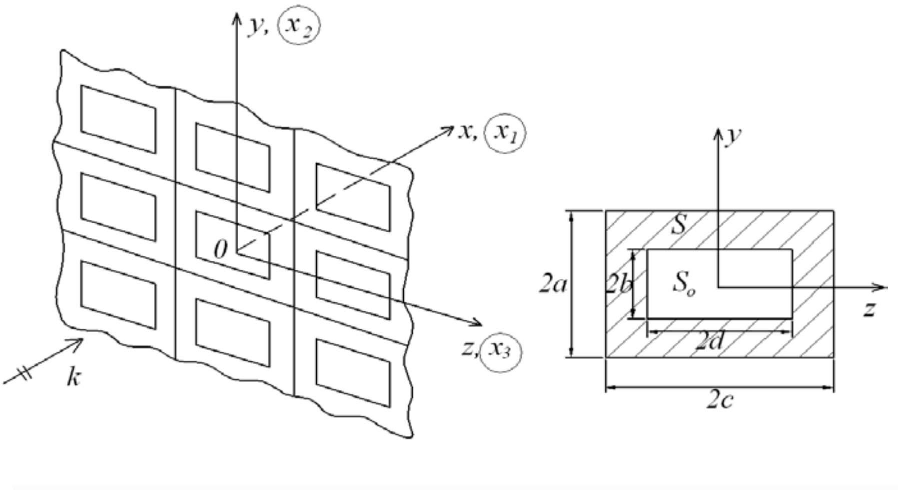


Рис.1. Распространение падающей волны через периодический массив просветов

$$\varphi^{left} = e^{ik_1 x} + Re^{-ik_1 x} + \sum_{n+j>1}^{\infty} A_{nj} e^{q_{nj} x} \cos\left(\frac{\pi n y}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi j z}{c}\right);$$

$$\psi_1^{left} = \sum_{n+j>1}^{\infty} B_{nj}^1 e^{r_{nj} x} \sin\left(\frac{\pi n y}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi j z}{c}\right);$$

$$\psi_2^{left} = \sum_{n+j>1}^{\infty} B_{nj}^2 e^{r_{nj} x} \cos\left(\frac{\pi n y}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi j z}{c}\right);$$

$$\psi_3^{left} = \sum_{n+j>1}^{\infty} B_{nj}^3 e^{r_{nj}x} \sin\left(\frac{\pi ny}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi jz}{c}\right), \quad x<0; \quad n+j>0; \tag{2.1a}$$

$$\varphi^{right} = Te^{ik_1x} + \sum_{n,j=1}^{\infty} C_{nj} e^{-q_{nj}x} \cos\left(\frac{\pi ny}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi jz}{c}\right); \qquad \psi_1^{right} = \sum_{n,j=1}^{\infty} D_{nj}^1 e^{-\eta_{nj}x} \sin\left(\frac{\pi ny}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi jz}{c}\right);$$

$$\psi_2^{right} = \sum_{n,j=1}^{\infty} D_{nj}^2 e^{-\eta_{nj}x} \cos\left(\frac{\pi ny}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi jz}{c}\right);$$

$$\psi_3^{right} = \sum_{n,j=1}^{\infty} D_{nj}^3 e^{-\eta_{nj}x} \sin\left(\frac{\pi ny}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi jz}{c}\right), \quad n+j>0; \quad x>0. \tag{2.1b}$$

Заглавные буквы здесь являются неизвестными константами и

$$q_{nj} = \left[\left(\pi n/a\right)^2 + \left(\pi j/c\right)^2 - k_1^2\right]^{1/2}, \quad r_{nj} = \left[\left(\pi n/a\right)^2 + \left(\pi j/c\right)^2 - k_2^2\right]^{1/2}$$

Гармонической временной множитель берётся в виде $e^{-i\omega t}$, k_1, k_2 являются продольным и поперечным волновыми числами, а $R, T-$ коэффициенты отражения и прохождения, соответственно. Далее возьмём компоненты тензора напряжений $\sigma_{xx}; \sigma_{xy}; \sigma_{xz}$ и вектора перемещений u_x, u_y, u_z в терминах потенциалов, используя стандартные формулам Грина-Ламэ.

Потенциалы $\psi_s(y,z)$, $s=1,2,3$ должны удовлетворять дополнительному условию

$$\operatorname{div}\psi_s(y,z) = 0, \quad s=1,2,3. \tag{2.2}$$

В рассматриваемой задаче плоская продольная волна с потенциалами

$$\varphi_0 = e^{ik_1x}, \quad \overline{\psi} = 0 \tag{2.3}$$

приходит из $-\infty$ и порождает отражённое поле. Предполагая непрерывность поля перемещений u_x, u_y, u_z вне трещин, введём вектор следующих неизвестных функций

$g_x(y,z)$, $g_y(y,z)$, $g_z(y,z)$ $(x=0)$:

$$\overline{u}^{(left)} - \overline{u}^{(right)} = \begin{cases} \overline{g}\ (y,z); & (y,z)\in S_0, \\ 0; & (y,z)\notin S_0, \end{cases} \tag{2.4}$$

Используя (2.1),(2.3), получим все необходимые постоянные, входящие в потенциалы (2.1) в терминах $g_x(y,z)$, $g_y(y,z)$, $g_z(y,z)$. Интегрируя уравнения (2.4) по области $S_0 = \{(y,z): |y|<b, |z|<d\}$, имеем:

$$ik_1(1-R-T) = \frac{1}{4ac}\iint_{S_0} g_x(\eta,\zeta)\,d\eta\, d\zeta. \tag{2.5}$$

Свойство ортогональности тригонометрических функций приводит уравнения (2.4),(2.5) к соотношениям

$$[A_{nj}+C_{nj}]q_{nj} + [B_{nj}^{(3)} - D_{nj}^{(3)}]\frac{\pi n}{a} - [B_{nj}^{(2)} - D_{nj}^{(2)}]\frac{\pi j}{c} = \frac{4}{ac}\iint_S g_x(\eta,\zeta)\cos\left(\frac{\pi n\eta}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi j\zeta}{c}\right)d\eta\, d\zeta; \tag{2.6a}$$

$$-[A_{nj}-C_{nj}]\frac{\pi n}{a} + [B_{nj}^{(1)} - D_{nj}^{(1)}]\frac{\pi j}{c} - [B_{nj}^{(3)} + D_{nj}^{(3)}]r_{nj} = \frac{4}{ac}\iint_S g_y(\eta,\zeta)\sin\left(\frac{\pi n\eta}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi j\zeta}{c}\right)d\eta\, d\zeta; \tag{2.6b}$$

$$-[A_{nj}-C_{nj}]\frac{\pi j}{c} + [B_{nj}^{(2)} + D_{nj}^{(2)}]r_{nj} - [B_{nj}^{(1)} - D_{nj}^{(1)}]\frac{\pi n}{a} = \frac{4}{ac}\iint_S g_z(\eta,\zeta)\cos\left(\frac{\pi n\eta}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi j\zeta}{c}\right)d\eta\, d\zeta; \tag{2.6c}$$

Условия непрерывности напряжений на границе имеют место в виде

$$\sigma_{xx}^{(left)} = \sigma_{xx}^{(right)}; \ \sigma_{xy}^{(left)} = \sigma_{xy}^{(right)}; \ \sigma_{xz}^{(left)} = \sigma_{xz}^{(right)}, \quad x=0 \quad \forall (y,z). \tag{2.7}$$

После применения для (2.7) аналогичной процедуры интегрирования по области S_0 и, принимая во внимание свойство ортогональности тригонометрических функций, получим с учётом (2.6) систему:

$$E_1\frac{k_1^2}{2}(2-c_1^2/c_2^2+q_{nj}^2)+E_6a_nr_{nj}-E_4c_jr_{nj}=0;\quad -E_2q_{nj}a_n-E_5(a_n^2-\frac{k_2^2}{2})+E_3c_ja_n=0;$$

$$-E_2q_{nj}c_j+E_3(c_j^2-\frac{k_2^2}{2})-E_5c_ja_n=0; \tag{2.8}$$

$$E_2q_{nj}+E_5a_n-E_3c_j=\frac{4}{ac}\iint_{S_0}g_x(\eta,\zeta)\cos\left(\frac{\pi n\eta}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi j\zeta}{c}\right)d\eta d\zeta;$$

$$-E_1a_n+E_4a_nc_j/r_{nj}-E_6r_{nj}+E_6c_j^2/r_{nj}=\frac{4}{ac}\iint_{S_0}g_y(\eta,\zeta)\sin\left(\frac{\pi n\eta}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi j\zeta}{c}\right)d\eta d\zeta;$$

$$-E_1c_j-E_6a_nc_j/r_{nj}+E_4r_{nj}-E_4a_j^2/r_{nj}=\frac{4}{ac}\iint_{S_0}g_z(\eta,\zeta)\cos\left(\frac{\pi n\eta}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi j\zeta}{c}\right)d\eta d\zeta, \tag{2.9}$$

где введены переменные $E_m,\ m=1-7$,

$$E_1=A_{nj}-C_{nj};\ E_2=A_{nj}+C_{nj};\qquad E_3=B_{nj}^{(2)}-D_{nj}^{(2)};\ E_4=B_{nj}^{(2)}+D_{nj}^{(2)};$$

$$E_5=B_{nj}^{(3)}-D_{nj}^{(3)};\ E_6=B_{nj}^{(3)}+D_{nj}^{(3)};\qquad E_7=B_{nj}^{(1)}-D_{nj}^{(1)}, \tag{2.10}$$

и обозначено $a_n=\pi n/a; c_j=\pi j/c$. Линейная алгебраическая система шестого порядка относительно E_1-E_6 (2.9) учитывает условие (2.3b) в виде

$$E_4a_n+E_6c_j-E_7r_{nj}=0. \tag{2.11}$$

Решение этой системы $E_m, m=1-6$ сразу определяет постоянные $A_{nj},C_{nj},B_{nj}^{(2)},B_{nj}^{(3)},D_{nj}^{(2)},D_{nj}^{(3)}$, три из которых для $x<0$, используемых ниже, принимают вид:

$$A=\frac{2}{ac\Delta_0}[\alpha_1\iint_{S_0}g_x(\eta,\zeta)\cos\left(\frac{\pi n\eta}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi j\zeta}{c}\right)d\eta d\zeta+\alpha_2\iint_{S_0}g_x(\eta,\zeta)\sin\left(\frac{\pi n\eta}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi j\zeta}{c}\right)d\eta d\zeta$$

$$+\alpha_3\iint_{S_0}g_z(\eta,\zeta)\cos\left(\frac{\pi n\eta}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi j\zeta}{c}\right)d\eta d\zeta];$$

$$B_{nj}^{(2)}=\frac{2}{ac\Delta_0}[\beta_1\iint_{S_0}g_x(\eta,\zeta)\cos\left(\frac{\pi n\eta}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi j\zeta}{c}\right)d\eta d\zeta+\beta_2\iint_{S_0}g_x(\eta,\zeta)\sin\left(\frac{\pi n\eta}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi j\zeta}{c}\right)d\eta d\zeta$$

$$+\beta_3\iint_{S_0}g_z(\eta,\zeta)\cos\left(\frac{\pi n\eta}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi j\zeta}{c}\right)d\eta d\zeta];$$

$$B_{nj}^{(3)}=\frac{2}{ac\Delta_0}[\gamma_1\iint_{S_0}g_x(\eta,\zeta)\cos\left(\frac{\pi n\eta}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi j\zeta}{c}\right)d\eta d\zeta+\gamma_2\iint_{S_0}g_x(\eta,\zeta)\sin\left(\frac{\pi n\eta}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi j\zeta}{c}\right)d\eta d\zeta$$

$$+\gamma_3\iint_{S_0}g_z(\eta,\zeta)\cos\left(\frac{\pi n\eta}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi j\zeta}{c}\right)d\eta d\zeta];$$

$$\Delta_0=[c_j/r_{nj}+a_n^2/(r_{nj}c_j)-r_{nj}/c_j][r_{nj}/\alpha-1/r_{nj}]a_n$$

$$-[-a_n^2/(c_jr_{nj})+r_{nj}/c_j-r_{nj}c_j/\alpha][c_j^2/(r_{nj}a_n)-r_{nj}/a_n+a_n/r_{nj}];\quad \alpha=\frac{k_1^2}{2}(2-c_1^2/c_2^2+q_{nj}^2). \tag{2.12}$$

Теперь мы можем получить все неизвестные константы, взятые из (2.8)-(2.12) и подставить эти значения в условия непрерывности компонентов напряжений (2.7). Здесь мы должны принять во внимание, что в задаче остаётся только одна нетривиальная функция раскрытия трещин – $g_x(y,z);|y|<b;|z|<d$, входящая в соотношение.

$$\sigma_{xx}^{(left)} = \sigma_{xx}^{(right)} = 0, \quad x = 0. \tag{2.13}$$

Опуская некоторые рутинные математические преобразования, окончательно получаем следующее интегральное уравнение для этой функции $g_x(y,z)$:

$$\frac{2}{ac}\iint_{S_0} g_x(\eta,\zeta)\left\{\sum_{n+j>0}^{\infty}\frac{R_{nj}}{q_{nj}}\cos\left[\frac{\pi n(y-\eta)}{a}\right]\cos\left[\frac{\pi j(z-\zeta)}{c}\right]\right\}d\eta d\zeta = -(1+R)k_2^4 \tag{2.14}$$

где числитель выражения ядра принимает форму функции Рэлея $R_{nj} = [2(a_n^2+c_j^2)-k_2^2]^2 - 4r_{nj}q_{nj}(a_n^2+c_j^2)$. При этом, функции раскрытия в направлении осей y, z равны тождественно нулю.

3. Аналитические выражения волновых характеристик. Так же, как и в [3], рассмотрим вспомогательное уравнение

$$\frac{1}{ac}\iint_{S_0} h(\eta,\zeta)\left\{\sum_{n+j>0}^{\infty}\frac{R_{nj}}{q_{nj}}\cos\left[\frac{\pi n(y-\eta)}{a}\right]\cos\left[\frac{\pi j(z-\zeta)}{c}\right]\right\}d\eta d\zeta = 1, \quad H = \iint_{S_0} h(\eta,\zeta)d\eta d\zeta. \tag{3.1}$$

В терминах чётной функции $h(y,z)$ из (2.5) и (2.14) получаем:

$$g_x(y,z) = \{(k_2^4/16acik_1)J_x - k_2^4/2\}h(y,z). \tag{3.2}$$

где было обозначено

$$J_x = \iint_{S_0} g_x(\eta,\zeta)d\eta d\zeta. \tag{3.3}$$

После интегрирования уравнения (3.2) по области S_0 получаем линейное алгебраическое уравнение, решив которое, имеем:

$$J_x = \frac{-Hk_2^4}{2[1-Hk_2^4/16acik_1]}. \tag{3.4}$$

Как только H, J_x определены, находим все необходимые параметры и волновые характеристики. Коэффициенты отражения и преломления будут выражаться так:

$$R = -[8ik_1ac]^{-1}J_x; \quad T = 1 - R - [4ik_1ac]^{-1}J_x. \tag{3.5}$$

4. Свойства интегрального уравнения. Начнём с рассмотрения символа ядра полученного интегрального уравнения L_{nj}.

$$\frac{2}{ac}\iint_{S_0} g_x(\eta,\zeta)K(y-\eta,z-\zeta)d\eta d\zeta = -(1+R)k_2^4;$$

$$K(y,z) = \sum_{n+j>0}^{\infty} L_{nj}\cos\left[\frac{\pi ny}{a}\right]\cos\left[\frac{\pi jz}{c}\right]; \qquad L_{nj} = \frac{R_{nj}}{q_{nj}}. \tag{4.1}$$

Заметим, что $L_{nj} \approx -4k_2^2(a_n^2+c_j^2)^{1/2}$, $(n, j) \to \infty$. Тогда, сумма, составляющая ядро, преобразуется к виду:

$$K(y,z) = \sum_{n+j>0}^{\infty}[L_{nj} + 4k_2^2(a_n^2+c_j^2)^{1/2}]\cos\left[\frac{\pi ny}{a}\right]\cos\left[\frac{\pi jz}{c}\right] - 4k_2^2\sum_{n+j>0}^{\infty}(a_n^2+c_j^2)^{1/2}\cos\left[\frac{\pi ny}{a}\right]\cos\left[\frac{\pi jz}{c}\right]. \tag{4.2}$$

Сейчас первая сумма ядра есть некоторая регулярная функция. Вторая имеет как регулярную, так и и сингулярную части. Выделим регулярную и сингулярную части ядра при $a = c;\ \tilde{y} = \dfrac{y-\eta}{a};\ \tilde{z} = \dfrac{z-\zeta}{c}$ и, опустив далее знак тильды

$$I(y,z) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}(a_n^2+c_j^2)^{1/2}\cos[\pi ny]\cos[\pi jz] - \sum_{n=1}^{\infty} n\cos[\pi ny] - \sum_{j=1}^{\infty} j\cos[\pi jz]$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty} j\cos[\pi jz] - \frac{1}{2\pi^2(y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{1}{2\pi^2 y^2} - \frac{1}{2\pi^2}\sum_{j=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{(y^2+(2j+z)^2)^{3/2}} + \frac{1}{(y^2+(2j-z)^2)^{3/2}}\right\}$$

$$-\frac{1}{2\pi^2}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{jK_1(j|2\pi n+\pi y|)}{|2\pi n+\pi y|}+\frac{jK_1(j|2\pi n-\pi y|)}{|2\pi n-\pi y|}\right\}\cos[\pi jz]. \qquad (4.3)$$

Здесь $K_1(\xi)$ – функция Макдональда (первого рода)?. Далее, используя оценку значения суммы в виде

$$\sum_{j=0}^{\infty} j\cos[\pi jz] = -\frac{1}{4\sin^2(\pi z/2)} \approx -\frac{1}{\pi^2 z^2},\ \ z\to 0,$$

в итоге получаем с сингулярной и регулярной частью, соответственно

$$I_S(y,z)=\frac{1}{2\pi^2}\left\{\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{(y^2+z^2)^{3/2}}\right\};$$

$$I_R(y,z)=-\frac{1}{2\pi^2}\sum_{j=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{(y^2+(2j+z)^2)^{3/2}}+\frac{1}{(y^2+(2j-z)^2)^{3/2}}\right\}-$$

$$-\frac{1}{2\pi^2}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{jK_1(j|2\pi n+\pi y|)}{|2\pi n+\pi y|}+\frac{jK_1(j|2\pi n-\pi y|)}{|2\pi n-\pi y|}\right\}\cos[\pi jz]. \qquad (4.4)$$

Здесь в заключение необходимо отметить, что полученная двойная сингулярность происходит наряду с сингулярностью по каждой из переменной в отдельности. Для анализируемой задачи такая особенность была обнаружена впервые. Стабильность при двумерной сингулярности гиперсингулярных интегральных уравнений доказана, тогда как стабильность всей $I_S(y,z)$ с учётом сингулярности по каждой из координат пока доказанной не является. Сейчас мы проводим расчётные эксперименты для выявления сути новой комбинированной сингулярности.

ЛИТЕРАТУРА

1. J.D. Achenbach JD, Li Z.L. "Reflexion and transmission of scalar waves by a periodic array of screens", Wave Motion 8, 225-234 (1986).
2. J.W. Miles. "On Rayleigh scattering by a grating". Wave Motion 4, 285-292 (1982).
3. E. Scarpetta, M.A. Sumbatyan. "Explicit analytical results for one-mode oblique penetration into a periodic array of screens", IMA Journal of Applied Mathematics 56 109-120 (1996).
4. E. Scarpetta, M.A. Sumbatyan, "Low-frequency penetration of acoustic waves through a periodic arbitrary-shaped grating: the three-dimensional problem", Wave Motion 22, 133-144 (1995).
5. E. Scarpetta, M.A. Sumbatyan, "On wave propagation in elastic solids with a doubly periodic array of cracks,Wave Motion 25, 61-72 (1997).
6. E. Scarpetta, V. Tibullo, On the three-dimensionl wave propagation through cascading screens having a periodic system of arbitrary openings, Int. J. Eng. Sci. 46, 105-111 (2008).

Сведения об авторах:

Ремизов Михаил Юрьевич – доцент, кафедра технической механики, Ростовский государственный строит. университет, г. Ростов-на-Дону, +7 (903)474 76 83. **E-mail:** remizov72@mail.ru

Сумбатян Межлум Альбертович – зав. каф. теоретической и компьютерной гидроаэродинамики, Южный федеральный университет, факультет математики, механики и компьютерных наук, г. Ростов-на-Дону, +7 (928) 139 70 67. **E-mail:** sumbat@math.rsu.ru

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УСТОЙЧИВОСТИ СОСТАВНОЙ ПЛАСТИНЫ В ПОСТОЯННОМ ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ

Саноян Ю.Г.

Рассматривается прямоугольная пластина постоянной толщины, состоящая из трех частей. Относительно плоского напряженного состояния на двух противоположных кромках пластины заданы условия скользящего контакта, а две другие стороны свободны. При нагреве пластины появляются сжимающие напряжения, которые приводят к потери устойчивости. При исследовании задачи устойчивости (задачи прогиба) на краях пластины, перпендикулярных к скользящим граням заданы условия свободного опирания. Для частного случая определены минимальные критические температуры и исследована зависимость устойчивости от отношения сторон пластины.

1.**Введение.** Составные пластины являются важными конструктивными элементами космической техники, высокоскоростного наземного транспорта, атомной и химической промышленностии и других объектов, работающих при больших нагрузках, в тяжелых тепловых и климатических условиях.

Термическая устойчивость однородных пластин со скользящими и свободно опертыми краями были подробно исследованы энергетическим и вариационным методами [1].

В работах [2-4] были рассмотрены вопросы тепловой устойчивости составных пластин, состоящих из двух жестко соединенных частей, по теории Кирхгофа.

В работе [5] было показано, что в строительной технике перекрытия зданий, основания блок-боксов, в конструкциях фундаментов зданий и др. сооружениях, конструкция швов не обеспечивает абсолютно жёсткого или идеально податливого соединения отдельных панелей (частей пластины), то есть швы следует считать упругоподатливыми.

В данной статье представлена методика расчета устойчивости, состоящей из трех однородных частей составной пластины, при ее нагреве в однородном температурном поле.

2. Начальное напряженное состояние. Прямоугольная пластина длиной a, шириной b и толщиной 2h, состоящая из трех частей i= 1,2,3 (рис.1) занимает в прямоугольной декартовой системе координат (X,Y,Z) область $0 \le x \le a$, $-b_2 \le y \le b_2$, $-0.5h \le z \le 0.5h$. Размеры пластины и ее частей показаны на рис.1

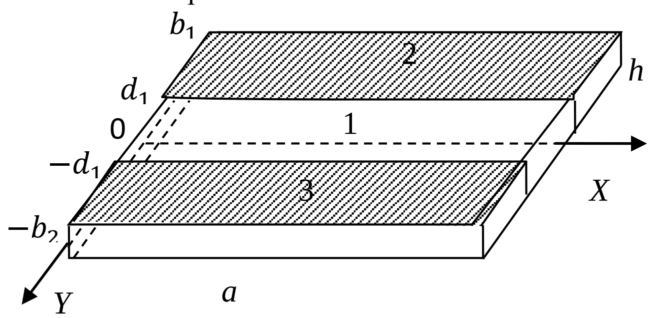


Рис.1. Составная пластина.

Средняя часть пластины шириной d симметрично расположена относительно оси X. Края части пластины 1 $y = d_1$ и $y = -d_1$ жестко скреплены с соседними частями. Пластина равномерно разогрета до температуры θ. Перемещения кромок пластины вдоль оси X при x=0 и x=a ограничены (скользящие контакты). Напряжения σ_i и перемещения, u_i v_i в пластине определяются следующими уравнениями плоского напряженного состояния [7]:

$$\sigma_{xi} = \frac{E_i}{1-\nu_i^2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x} + \nu_i \frac{\partial v_i}{\partial y}\right) - \frac{E_i \alpha_{ti}}{1-\nu_i}\theta, \sigma_{yi} = \frac{E_i}{1-\nu_i^2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial y} + \nu_i \frac{\partial u_i}{\partial x}\right) - \frac{E_i \alpha_{ti}}{1-\nu_i}\theta, \tau_{xyi} = \frac{E_i}{2(1+\nu_i)}\left(\frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial v_i}{\partial x}\right), \quad (2.1a)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xi}}{\partial x} + \nu_i \frac{\partial \tau_{xyi}}{\partial y} = 0, \ \frac{\partial \tau_{xyi}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yi}}{\partial y} = 0, \ i=1,2,3, \quad (2.1b)$$

где E_i -модули упругости, ν_i-коэффициенты Пуассона, α_{ti} коэффициенты линейного температурного расширения (КТЛР). На двух кромках пластины заданы условия скользящего контакта, две другие стороны свободны

$u_i = 0, \tau_{xyi} = 0$, при $x = 0$, x=a, (2.2),

$\sigma_{y2} = 0, \quad \tau_{xy2} = 0$, при $y = b_1$, (2.3a),

$\sigma_{y3} = 0, \quad \tau_{xy3} = 0$ при $y = -b_2$, (2.3b)

На кромках соединения частей пластины заданы условия жесткого контакта:

$$u_1 = u_2, \mathrm{v}_1 = \mathrm{v}_2, \sigma_{y1} = \sigma_{y2}, \tau_{xy1} = \tau_{xy2}, \text{ при } y = d_1, \quad (2.4a)$$

$$u_1 = u_3, \mathrm{v}_1 = \mathrm{v}_3, \sigma_{y1} = \sigma_{y3}, \tau_{xy1} = \tau_{xy3}, \; y = -d_1 \quad (2.4b)$$

Для приведенной задачи обобщенного напряженно-деформированного состояния решение для напряжений и перемещений имеет следующий вид

$$\sigma_{xi} = -E_i \alpha_{ti} \theta, \;\; \sigma_{yi} = \sigma_{yxi} = 0, \quad (2.5a),$$

$$u_i = 0, \quad \mathrm{v}_1 = (1+\nu_1)\alpha_{t1}\theta y, \quad (2.5b),$$

$$\mathrm{v}_2 = (1+\nu_2)\alpha_{t2}\theta y + \left[(1+\nu_1)\alpha_{t1} - (1+\nu_2)\alpha_{t2}\right]\theta d_1, \quad (2.5c)$$

$$\mathrm{v}_3 = (1+\nu_3)\alpha_{t3}\theta y - \left[(1+\nu_1)\alpha_{t1} - (1+\nu_3)\alpha_{t3}\right]\theta d_1, \quad (2.5d)$$

3. Решение задачи устойчивости пластины. Рассмотрим выпучивание прямоугольных пластинок под воздействием продольных сжимающих сил P_i (на единицу ширины), вызванных равномерным нагревом пластины на температуру θ, интегрированием дифференциального уравнения [7, 8]

$$D_i \Delta^2 w_i + P_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} = 0, \quad (3.1)$$

где w_i и D_i прогибы и цилиндрические жесткости соответствующих частей пластины,

$$D_i = \frac{2E_i h^3}{3\left(1-\nu_i^2\right)}, \; P_i = 2hE_i \alpha_{ti}\theta. \quad (3.2)$$

На краях пластины заданы условия скользящего контакта и свободного опирания

$$\frac{\partial w_i}{\partial x} = 0, \;\; \frac{\partial^3 w_i}{\partial x^3} = 0, \text{ при } x=0, a, \quad (3.3a)$$

$$w_2 = 0, \; \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} = 0, \quad \text{при } y = b_1, \quad (3.3b)$$

$$w_3 = 0, \frac{\partial^2 w_3}{\partial y^2} = 0, \quad \text{при } y = -b_2. \quad (3.3c)$$

На стыках частей пластины $y = d_1, \; -d_1$ заданы условия жесткого контакта

$$w_1 = w_2, \; \frac{\partial w_1}{\partial y} = \frac{\partial w_2}{\partial y}, D_1\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + \nu_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\right) = D_2\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}\right), \quad (3.4a–3.4c)$$

$$D_1\left(\frac{\partial^3 w_1}{\partial y^3} + (2-\nu_1)\frac{\partial^3 w_1}{\partial y \partial x^2}\right) = D_2\left(\frac{\partial^3 w_2}{\partial y^3} + (2-\nu_2)\frac{\partial^3 w_2}{\partial y \partial x^2}\right), \quad (3.4d)$$

$$w_1 = w_3, \; \frac{\partial w_1}{\partial y} = \frac{\partial w_3}{\partial y}, \mathrm{D}_1\left(\frac{\partial^2 \mathrm{w}_1}{\partial \mathrm{y}^2} + \nu_1 \frac{\partial^2 \mathrm{w}_1}{\partial \mathrm{x}^2}\right) = \mathrm{D}_3\left(\frac{\partial^2 \mathrm{w}_3}{\partial \mathrm{y}^2} + \nu_3 \frac{\partial^2 \mathrm{w}_3}{\partial \mathrm{x}^2}\right), \quad (3.5a–3.5c)$$

$$D_1\left(\frac{\partial^3 w_1}{\partial y^3} + (2-\nu_1)\frac{\partial^3 w_1}{\partial y \partial x^2}\right) = D_3\left(\frac{\partial^3 w_3}{\partial y^3} + (2-\nu_3)\frac{\partial^3 w_3}{\partial y \partial x^2}\right). \quad (3.5d)$$

Решение, удовлетворяющее уравнениям (3.1) и граничным условиям (3.3), представим в виде бесконечных рядов частных решений М. Леви [8], состоящих из произведений косинусных функций от x на функции $Y_n(y)$,

$$w_2(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_{2n} \mathrm{sh}\chi_n p_{21}(b_1 - y) + C_{2n} \sin\chi_n p_{22}(b_1 - y)) \cos\chi_n x, \; d_1 \le y \le b_1, \quad (3.6a)$$

$$w_1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_{1n} \mathrm{sh}\chi_n p_{11} y + B_{1n} \mathrm{ch}\chi_n p_{11} y + C_{1n} \sin\chi_n p_{12} y + D_{1n} \cos\chi_n p_{12} y) \cos\chi_n x, -d_1 \le y \le d_1, \quad (3.6b)$$

$$w_3(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_{3n} sn\chi_n p_{31}(-b_2 - y) + C_{3n} \sin\chi_n p_{32}(-b_2 - y)) \cos\chi_n x, . -b_2 \le y \le d_1, \quad (3.6c)$$

где $\chi_n = \pi n / a$. В (3.6) приняты следующие обозначени:

$$p_{i1} = \sqrt{1+\eta_{in}}\ ,\ p_{i2} = \sqrt{-1+\eta_{in}}\ ,\ \eta_{in}^2 = \frac{P_i}{\chi_n^2 D_i}\ , \tag{3.7}$$

$A_{1n}, B_{1n}, C_{1n}, D_{1n}, A_{2n}, C_{2n}, C_{3n}, A_{3n}$ восемь неизвестных постоянных. Из (3.7) следует, что каждая часть пластины характеризируется своим значением η_{in}, которые связаны общим для них значением температуры.

$$\eta_{in} = \frac{\sqrt{3(1-\nu_i^2)\alpha_{ti}\theta}}{h\chi_n} \tag{3.8}.$$

Требования условий (3.4) и (3.5 к решению (3.6) приводит к однородной системе из восьми алгебраических уравнений с восмью неизвестными постоянными

$A_{2n}\mathrm{sh}p_{21}\zeta_1 + C_{2n}\sin p_{22}\zeta_1 - A_{1n}\mathrm{sh}p_{11}\xi_1 - B_{1n}\mathrm{ch}p_{11}\xi_1 - C_{1n}\sin p_{12}\xi_1 - D_{1n}\cos p_{12}\xi_1 = 0$, (3.9a)

$A_{2n}p_{21}\mathrm{ch}p_{21}\zeta_1 + C_{2n}p_{22}\cos p_{22}\zeta_1 + A_{1n}p_{11}\mathrm{ch}p_{11}\xi_1 + B_{1n}p_{11}\mathrm{sh}p_{11}\xi_1 + C_{1n}p_{12}\cos p_{12}\xi_1 - D_{1n}p_{12}\sin p_{12}\xi_1 = 0$, (3.9b)

$$\begin{gathered} A_{2n}\kappa_2(p_{21}^2-\nu_2)\mathrm{sh}p_{21}\zeta_1 - C_{2n}\kappa_2(p_{22}^2+\nu_2)\sin p_{22}\zeta_1 - A_{1n}(p_{11}^2-\nu_1)\mathrm{sh}p_{11}\xi_1 - \\ B_{1n}(p_{11}^2-\nu_1)\mathrm{ch}p_{11}\xi_1 + C_{1n}(p_{12}^2+\nu_1)\sin p_{12}\xi_1 + D_{1n}(p_{12}^2+\nu_1)\cos p_{12}\xi_1 = 0, \end{gathered} \tag{3.9c}$$

$$\begin{gathered} A_{2n}\kappa_2 p_{21}(p_{21}^2+\nu_2-2)\mathrm{ch}p_{21}\zeta_1 - C_{2n}\kappa_2 p_{22}(p_{22}^2-\nu_2+2)\cos p_{22}\zeta_1 + A_{1n}p_{11}(p_{11}^2+\nu_1-2)\mathrm{ch}p_{11}\xi_1 + \\ B_{1n}p_{11}(p_{11}^2+\nu_1-2)\mathrm{sh}p_{11}\xi_1 - C_{1n}p_{12}(p_{12}^2-\nu_1+2)\cos p_{12}\xi_1 + D_{1n}p_{12}(p_{12}^2-\nu_1+2)\sin p_{12}\xi_1 = 0, \end{gathered} \tag{3.9d}$$

$A_{3n}\mathrm{sh}p_{31}\zeta_2 + C_{3n}\sin p_{32}\zeta_2 + A_{1n}\mathrm{sh}p_{11}\xi_1 - B_{1n}\mathrm{ch}p_{11}\xi_1 + C_{1n}\sin p_{12}\xi_1 - D_{1n}\cos p_{12}\xi_1 = 0,$, (3.9e)

$A_{3n}p_{31}\mathrm{ch}p_{31}\zeta_2 + C_{3n}p_{32}\cos p_{32}\zeta_2 + A_{1n}p_{11}\mathrm{ch}p_{11}\xi_1 - B_{1n}p_{11}\mathrm{sh}p_{11}\xi_1 + C_{1n}p_{12}\cos p_{12}\xi_1 + D_{1n}p_{12}\sin p_{12}\xi_1 = 0$, (3.9f)

$$\begin{gathered} A_{3n}\kappa_3(p_{31}^2-\nu_2)\mathrm{sh}p_{31}\zeta_2 - C_{3n}\kappa_3(p_{32}^2+\nu_2)\sin p_{32}\zeta_2 + A_{1n}(p_{11}^2-\nu_1)\mathrm{sh}p_{11}\xi_1 - \\ B_{1n}(p_{11}^2-\nu_1)\mathrm{ch}p_{11}\xi_1 - C_{1n}(p_{12}^2-\nu_1)\sin p_{12}\xi_1 + D_{1n}(p_{12}^2-\nu_1)\cos p_{12}\xi_1 = 0, \end{gathered} \tag{3.9g}$$

$$\begin{gathered} A_{3n}k_3 p_{31}(p_{31}^2+\nu_3-2)\mathrm{ch}p_{31}\zeta_2 - C_{3n}\kappa_3 p_{32}(p_{32}^2-\nu_3+2)\cos p_{32}\zeta_2 + A_{1n}p_{11}(p_{11}^2+\nu_1-2)\mathrm{ch}p_{11}\xi_1 - \\ B_{1n}p_{11}(p_{11}^2+\nu_1-2)\mathrm{sh}p_{11}\xi_1 - C_{1n}p_{12}(p_{12}^2+\nu_1-2)\cos p_{12}\xi_1 - D_{1n}p_{12}(p_{12}^2-\nu_1+2)\sin p_{12}\xi_1 = 0, \end{gathered} \tag{3.9h}$$

где $k_2 = D_2/D_1, k_3 = D_3/D_1, \xi_{1=}\chi_n d_1,\ \zeta_1 = \chi_n(b_1 - d_1),\ \zeta_2 = \chi_n(-b_2 + d_1)$. (3.10)

Приравнивая нулю детерминант системы (3.9), получим уравнение для определения критических значений температуры $\theta_{кр}$. Из равенства температур во всех трех частях пластины следует

$$\eta_{in} = \sqrt{\frac{1-\nu_2^2}{1-\nu_1^2}\alpha_2\eta_{1n}}\ , i = 2,3 \tag{3.11}$$

которые зависят не от КЛТР, а их отношений $\alpha_i = \alpha_{ti}/\alpha_{t1}$, $i = 2,3$. Подстановка η_{1n} и η_{3n} в систему (3.9) сводит решение задачи устойчивости пластины, состоящей из трех частей, к задаче определения критических значений η_{1n} и по этим значениям определить критические сжимающие напряжений в каждой части, которые будут равны

$$\sigma_{1x} = \frac{1}{2h}\frac{\pi^2 n^2}{a^2}D_1\eta_{1nkr}^2\ ,\ \sigma_{2x} = \frac{1}{2h}\frac{\pi^2 n^2}{a^2}D_2\eta_{2nkr}^2\ ,\ \sigma_{3x} = \frac{1}{2h}\frac{\pi^2 n^2}{a^2}D_3\eta_{3nkr}^2\ , \tag{3.12}$$

Численные расчеты показали, что величина корня η_{1n} зависит только от отношения внешних сторон пластины, что позволяет критические напряжения среднего слоя выразить в привычном, для таких задач, виде

$$\sigma_x = \frac{1}{2h}\frac{\pi^2 D_1}{b^2}K_\sigma\ , \qquad (3.13$$

где $K_\sigma = \eta_{nkr1}^2(nb/a)^2$ коэффициент зависящий от отношения сторон a/b. Система уравнений (3.9) для каждого значения n имеет множество корней m. Из этих корней необходимо выбрать положительный, не равный нулю минимальный корень, обеспечивающий минимальную температуру выпучивания пластины. Минимальное значение температуры получается при m=1. Необходимо отметить, что при значениях корня $\eta_{in} = 1$ величины p_{22}, p_{32} и p_{12} при C_{2n}, C_{3n}, C_{1n} обращаются в ноль. Для этих значений η_{in} ранг матрицы и число неизвестных равны семи и система (3.9) будет иметь только нулевое решение. Нулевое решение система будет иметь и при $\eta_{in}=0$, поскольку в этом случае ранг матрицы опять будет равен числу неизвестных, поскольку гиперболические косинусы при неизвестных B_{1n} и D_{1n} будут равны и сразу два столбца матрицы становятся одинаковыми.

4. Расчет устойчивости симметричной пластины. Рассмотрим частный случай устойчивости пластины, у которой внешние части имеют одинаковые размеры и одинаковые физико–механические свойства отличные от свойств средней части. Тогда решение (3.9) будет симметричным относительно оси X, а в формулах для прогибов частей 2 и 3 необходимо, чтобы $A_{3n}=A_{2n}$, $C_{3n}=C_{2n}$, $p_{31}=p_{21}$, $p_{32}=p_{22}, b_1=b_2$, а для части 1 оставить только четные члены с коэффициентами B_{1n} и D_{1n}. Исходя из этого в системе уравнений (3.9) остаются только первые четыре уравнения для стыка $y=d_1$ частей пластины 1 и 2

$$A_{2n}\text{sh}p_{21}\zeta_1 + C_{2n}\sin p_{22}\zeta_1 - B_{1n}\text{ch}p_{11}\xi_1 - D_{1n}\cos p_{12}\xi_1 = 0, \quad (4.1a)$$

$$A_{2n}p_{21}\text{ch}p_{21}\zeta_1 + C_{2n}p_{22}\cos p_{22}\zeta_1 - B_{1n}p_{11}\text{sh}p_{11}\xi_1 + D_{1n}p_{12}\sin p_{12}\xi_1 = 0, \quad (4.1b)$$

$$\begin{gathered}A_{2n}\kappa_2(p_{21}^2-\nu_2)\text{sh}p_{21}\zeta_1 - C_{2n}\kappa(p_{22}^2+\nu_2)\sin p_{22}\zeta_1 - \\ B_{1n}(p_{11}^2-\nu_1)\text{ch}p_{11}\xi_1 + D_{1n}(p_{12}^2-\nu_1)\cos p_{12}\xi_1 = 0,\end{gathered} \quad (4.1c),$$

$$\begin{gathered}A_{2n}\kappa_2 p_{21}(p_{21}^2+\nu_2-2)\text{ch}p_{21}\zeta_1 - C_{2n}\kappa p_{22}(p_{22}^2-\nu_2+2)\cos p_{22}\zeta_1 - \\ B_{1n}p_{11}(p_{11}^2+\nu_1-2)\text{sh}p_{11}\xi_1 - D_{1n}p_{12}(p_{12}^2-\nu_1+2)\sin p_{12}\xi_1 = 0,\end{gathered} \quad . \quad (4.1d)$$

Критическая температура и сжимающие напряжения, как и в общем случае, определяются через корни уравнения средней части $\eta_{nкр1}=0$ выражениями (3.8) и (3.12). Поскольку ранг матрицы системы (4.1) при критических значениях η_{nkr1} равен трем, при количестве неизвестных постоянных 4, то система уравнений будет иметь единственное линейно независимое фундаментальное решение. Если решение системы относительно переменных A_{2n}, C_{2n}, B_{1n} есть a_{2n}, c_{2n}, b_{1n} то пологая $D_{1n}=0.1$ этим решением будет $A_{2n}=0.1a_{2n}$, $C_{2n}=0.1c_{2n}$, $B_{2n}=0.1b_{2n}$.

5. Заключение. На левом рис. 2 представленны графики зависимостей значений K_σ от отношения сторон пластины *a/b* при суммарной ширине наружных частей равной ширине средней части. Кривые рассчитаны для пластины с относительной толщиной *2h/a*=0.04., $\nu_1=\nu_2=0.3$.Значения α_t указанны на рисунках.

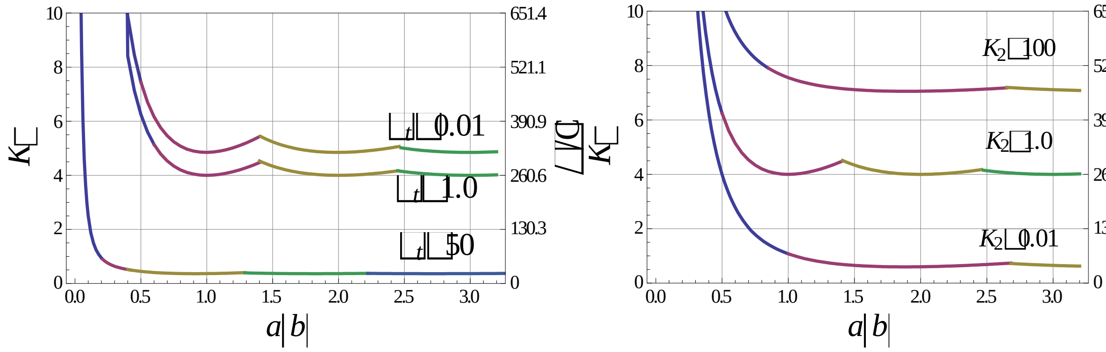


Рис.2. Графики значений K_σ от отношения сторон пластины *a/b* для $k_2=1$, $\alpha_t=0.01$, 1.0, 50 и $k_2=100$, 1.0, 0.01 при $\alpha_t=1$ на левом и правом рисунках соответственно.

На правом рис. 3 показаны зависимости K_σ для разных значениях отношений D_2/D_1 и α_t и остальных параметрах пластины указанных выше. Для пластин, у которых изгибная жесткость внешних частей значительно меньше жесткости внутренней части $k_2 \ll 1$, пластина в окрестности стыка частей пластины перегибается. Из рисунков 3 видно, что поверхность удлиненной пластины состоит из участков, в каждом из которых в направлениях осей образуется одна полуволна.

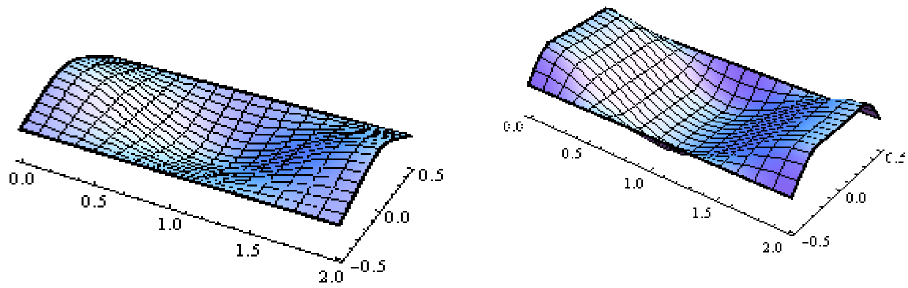


Рис.3. Графики начальных прогибов пластины при отношениях сторон пластины *a/b*=2 и $D_2 / D_1 = 100$ для левого и $D_2 / D_1 = 0.01$ правого рисунков.

При значении *a/b* равным трем-четырем величина K_σ перестает изменяться с ростом *a/b*. В этом случае число полувон *n*, образующихся при вспучивании пластины, примерно равно отношению *a/b*, а $K_\sigma = 4$. Из рисунка 3 видно, что удлиненная пластина при потере устойчивости делится на ряд квадратных свободно опертых на краях $y = b_1$ и $y = -b_1$ пластинок. На двух других краях пластинок выполняются условия скользящих контактов (3.3а).

Автор выражает глубокую признательность Белубекяну М. В. за ценные советы и замечния, которые были учтены при подготовке работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Meyers, C. A., Hyer M. W. A. Thermal Buckling and Postbuckling of Symmetrically Laminated Composite Plates. J. Thermal Stresses. 1991. 14. P. 519-540.
2. Белубекян М. В., Саноян Ю. Г. К задаче устойчивости составной пластины при ее нагреве. Актуальные проблемы механики сплошной среды. Труды международной конференци, посвященной 100-летию академика НАН РА Армении Н. Х. Арутюняна. 08-12 октября 2012, Цахкадзор, Армения.С. 121-125.
3. Belubekyan M. V., Sanoyan, Yu. G. On the Problem of Stability a Composite Plate in Heating. Journal of Mathematical Sciences. 2013. 192. P. 682-690.
4. Belubekyan, M. V. and Sanoyan, Yu. G. Stabilityof the plate consisting of two Parts in a constant temperature Field. Proceedings of State Engineering Uneversity of Armenia. Series: Mechnics, Machine Science,Machine-Building. 2014. Issues 17. №. 2. P. 25-31.
5. Белова О. Ю., Сысоев Ю. Г. Устойчивость составных пластин с упругоподатливыми соединениями различного вида. Известия высших учебных заведений. Нефть и Газ. 2012. N.1. С. 117-120.
6. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. М. Мир. !964
7. Timoshenko S. P. and Gere M. J. Theory of Elastic Stability. New York: McGraw-Hill.1961. P. 541

Сведения об авторе

Саноян Юрий Геворкович – кандидат физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник, Институт Механики НАН Армении, Ереван, Армения, (+374 10) 541319, (+374 10) 524890,E-majl: yuriisanoyan@mail.ru

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МИКРОПОЛЯРНЫХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ БОЛЬШИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ

Саркисян А.А., Саркисян С.О.

В основу вывода определяющих уравнений микрополярных изотропных пологих тонких оболочек при больших прогибах в работе принимаются довольно общие гипотезы, определяющие закон изменения по толщине оболочки кинематических характеристик деформаций, поперечных касательных силовых и нормальных моментных напряжений. Построено общее вариационное уравнение, которое позволяет получить уравнения движения и соотношения упругости микрополярных пологих оболочек при больших перемещениях. Само вариационное уравнение с применением метода Ритца (или Бубнова-Галеркина) используется для решения различных конкретных задач динамического деформирования микрополярных пологих оболочек.

1. Введение. К построению общих прикладных линейной теории микрополярных упругих тонких пластин и оболочек посвящены работы [1,2].

Как и в постановке классической теории упругости [3-5], актуально построение геометрически нелинейной прикладной теории микрополярных упругих тонких пластин и пологих оболочек, которая в случае гибкой пластинки построена в работе [6].

В данной работе, изучая геометрическую сторону деформации срединной поверхности микрополярной пологой оболочки при больших прогибах и основываясь на общие гипотезы построения прикладных теорий микрополярных упругих тонких оболочек [1,2], построена математическая модель динамики геометрически нелинейных микрополярных упругих тонких оболочек. Построен также общий вариационный функционал, который позволяет получить все основные уравнения.

2. Деформации, изгибы-кручения срединной поверхности и изменения кривизн микрополярной тонкой пологой оболочки. Рассмотрим изотропную прямоугольную тонкую пологую оболочку постоянной толщины $2h$, как трёхмерное упругое микрополярное тело. Выберем координатные линии x_1, x_2 таким образом, чтобы они совпадали с линиями кривизны срединной поверхности. Координату z будем отсчитывать по нормали к поверхности, считая z положительным по направлению к центру кривизны.

Примем следующие обозначения: u_1, u_2, w – перемещения точек срединной поверхности оболочки вдоль линий x_1, x_2, z; ψ_1, ψ_2 – полные углы поворота первоначально нормального к срединной поверхности; $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ – свободные их вокруг осей x_1, x_2, z; ι – интенсивность свободного поворота вдоль оси z. Для начальных кривизн линий x_1 и x_2 введём обозначения: k_1 и k_2.

Найдём выражения для деформаций срединной поверхности при прогибах оболочки, сравнимых с её толщиной. Деформации удлинения в направлении линий x_1, x_2 обозначим через Γ_{11}, Γ_{22}, деформации сдвига – через Γ_{12}, Γ_{21}. Изучая деформацию гибкой микрополярной пологой оболочки, мы принимаем, что она получает большие прогибы w; в то же время будем считать перемещения u_1, u_2 в срединной поверхности пологой оболочки величинами малыми. В самом деле, перемещение w совершается в направлении наименьшей жёсткости, в то время как перемещения u_1, u_2 происходят в массиве материала. Такое же допущение сделаем по отношению к производным $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$, считая их малыми в сравнении с величиной $\frac{\partial w}{\partial x_1}$. Далее считаем, что квадрат производной от w имеет тот же порядок малости, что и первая степень производной от перемещений u_1, u_2. В результате этих допущений, как и в случае пластин, для относительных удлинений Γ'_{ii}, без учёта перемещения элемента к центру кривизны, получим:

$$\Gamma'_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - wk_i + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_i}\right)^2 \tag{1}$$

Далее, радиус кривизны элемента, первоначально равный $R_i = \dfrac{1}{k_i}$, после смещения будет $\left(R_i - w\right)$. Относительная деформация, обусловленная перемещением элемента к центру кривизны, оказывается равной:

$$\Gamma''_{ii} = \frac{\left(R_i - w\right)d\theta - R_i d\theta}{R_i d\theta} = -\frac{w}{R_i} = -wk_i \tag{2}$$

Сопоставляя полученные результаты, находим полное выражение для деформации удлинений Γ_{ii} срединной поверхности пологой оболочки:

$$\Gamma_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - wk_i + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_i}\right)^2 \tag{3}$$

Далее для сдвигов срединной поверхности пологой оболочки находим

$$\Gamma_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \left(-1\right)^j \Omega_3 + \frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_j} \tag{4}$$

Для кривизн и кручений $K_{ii}, K_{ij}, \kappa_{ii}, \kappa_{33}, \kappa_{ij}, \kappa_{i3}, \kappa_{3i}, l_{i3}$, обусловленные силовыми и моментными напряжениями в случае пологой оболочки имеем, соответственно [1]:

$$\Gamma_{i3} = \frac{\partial w}{\partial x_i} + \left(-1\right)^j \Omega_j, \quad \Gamma_{3i} = \psi_i - \left(-1\right)^j \Omega_j$$

$$K_{ii} = \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i}, \; K_{ij} = \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i} - \left(-1\right)^j \iota, \; \kappa_{ii} = \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_i}, \; \kappa_{33} = \iota, \; \kappa_{ij} = \frac{\partial \Omega_j}{\partial x_i}, \; \kappa_{i3} = \frac{\partial \Omega_3}{\partial x_i}, \; l_{i3} = \frac{\partial \iota}{\partial x_i} \tag{5}$$

(3)-(5) условимся в дальнейшем объединять термином «деформации, кривизны и кручения срединной поверхности». Зная эти величины, можно полностью определить деформированное состояние любого слоя пологой оболочки, параллельного срединной поверхности и удалённого от него на расстояние *z*. В основу примем обобщённую на микрополярный случай кинематическую гипотезу Тимошенко [1,2]. В результате для компонентов деформаций, изгибов-кручений: $\gamma_{ii}, \gamma_{ij}, \gamma_{i3}, \gamma_{3i}, \chi_{ii}, \chi_{33}, \chi_{ij}, \chi_{i3}, \chi_{3i}$ получим [1,2]:

$$\gamma_{ii} = \Gamma_{ii} + zK_{ii}, \; \gamma_{ij} = \Gamma_{ij} + zK_{ij}, \; \gamma_{i3} = \Gamma_{i3}, \; \gamma_{3i} = \Gamma_{3i}, \; \chi_{ii} = \kappa_{ii}, \; \chi_{33} = \iota, \; \chi_{ij} = \kappa_{ij}, \; \chi_{i3} = \kappa_{i3} + zl_{i3} \tag{6}$$

3. Приближённые уравнения движения. Перейдём к составлению уравнений движения элемента оболочки $2hdx_1dx_2$, по граням которого действуют усреднённые усилия от силовых напряжений $-T_{ii}, S_{ij}, N_{i3}, N_{3i}$; усреднённые моменты от силовых напряжений $-M_{ii}, M_{ij}$; усреднённые моменты от моментных напряжений $-L_{mn}$; усреднённые гипермоменты от моментных напряжений $-\Lambda_{i3}$ [1].

Пользуясь принципом Даламбера, присоединим к заданным силам и динамическим реакциям соседних элементов оболочки (усилиям, моментам и гипермоментам) силы инерции:

$$2\rho h\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \frac{2\rho h^3}{3}\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2}, \quad 2Jh\frac{\partial^2 \Omega_i}{\partial t^2}, \quad \frac{2Jh^3}{3}\frac{\partial^2 \iota}{\partial t^2}.$$

Здесь ρ – плотность материала, J – мера инерции при вращении.

В результате получим:

$$\frac{\partial T_{ii}}{\partial x_i} + \frac{\partial S_{ji}}{\partial x_j} + \left(q_i^+ + q_i^-\right) = 2\rho h\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial L_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial L_{23}}{\partial x_2} + \left(S_{12} - S_{21}\right) + \left(m_3^+ + m_3^-\right) = 2Jh\frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial N_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_1}\left[T_{11}\frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{S_{12} + S_{21}}{2}\frac{\partial w}{\partial x_2}\right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{S_{12} + S_{21}}{2}\frac{\partial w}{\partial x_1} + T_{22}\frac{\partial w}{\partial x_2}\right] + k_1 T_{11} + k_2 T_{22} = 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - (q_3^+ + q_3^-)$$

$$N_{3i}-\left(\frac{\partial M_{ii}}{\partial x_i}+\frac{\partial M_{ji}}{\partial x_j}\right)+\frac{2\rho h^3}{3}\frac{\partial^2\psi_i}{\partial t^2}=h\left(q_i^+-q_i^-\right)$$

$$\frac{\partial L_{ii}}{\partial x_i}+\frac{\partial L_{ji}}{\partial x_j}+(-1)^j\left(N_{j3}-N_{3j}\right)+\left(m_i^++m_i^-\right)=2Jh\frac{\partial^2\Omega_i}{\partial t^2}$$

$$L_{33}-\left(\frac{\partial\Lambda_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial\Lambda_{23}}{\partial x_2}\right)-\left(M_{12}-M_{21}\right)+\frac{2Jh^3}{3}\frac{\partial^2\iota}{\partial t^2}=h\left(m_3^+-m_3^-\right) \qquad (7)$$

Уравнения (7) описывают движение элемента пологой оболочки. К ним должны быть присоединены граничные и начальные условия.

4. Соотношения между деформациями и напряжениями. Предположим, что деформации оболочки лежат в пределах упругости: для достаточно тонкой оболочки значительные прогибы могут иметь место и при малых деформациях. Далее примем гипотезы, принятые при построении линейной теории микрполярных упругих тонких оболочек [1]. В результате этих предположений получим:

$$T_{ii}=\frac{2Eh}{1-\nu^2}[\Gamma_{ii}+\nu\Gamma_{jj}],\quad S_{ij}=2h[(\mu+\alpha)\Gamma_{ij}+(\mu-\alpha)\Gamma_{ji}]$$

$$M_{ii}=\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}[K_{ii}+\nu K_{jj}],\qquad M_{ij}=\frac{2h^3}{3}[(\mu+\alpha)K_{ij}+(\mu-\alpha)K_{ji}]$$

$$N_{i3}=2h[(\mu+\alpha)\Gamma_{i3}+(\mu-\alpha)\Gamma_{3i}],\qquad N_{3i}=2h[(\mu+\alpha)\Gamma_{3i}+(\mu-\alpha)\Gamma_{i3}]$$

$$L_{ii}=2h[(\beta+2\gamma)\kappa_{ii}+\beta(\kappa_{jj}+\iota)],\ L_{33}=2h[(\beta+2\gamma)\iota+\beta(\kappa_{11}+\kappa_{22})]$$

$$L_{ij}=2h[(\gamma+\varepsilon)\kappa_{ij}+(\gamma-\varepsilon)\kappa_{ji}],\quad L_{i3}=2h\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\kappa_{i3},\ \Lambda_{i3}=\frac{2h^3}{3}\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{i3} \qquad (8)$$

Полные напряжения и моменты можно определить с помощью этих величин.

Уравнения движения (7), физические соотношения (8) и геометрические соотношения (3)-(5) представляют математическую модель динамики геометрически нелинейных микрополярных тонких пологих оболочек с независимыми полями перемещений и вращений. К этим уравнениям присоединяются соответствующие естественные граничные и начальные условия.

5. Общий вариационный принцып геометрически нелинейных микрополярных упругих тонких пологих оболочек. Вариационные принципы, как в классической теории упругости и, аналогично, в микрополярной теории упругости, имеют целью заменить краевую задачу непосредственного интегрирования, задачей отыскания экстремума некоторого функционала.

В случае микрополярной тонкой пологой оболочки выражение для усредненного функционала I_0 имеет вид:

$$I_0=\iint_S\Big\langle W_0-\Big\{T_{11}\left[\Gamma_{11}-\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-k_1w+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2\right)\right]+T_{22}\left[\Gamma_{22}-\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}-k_2w+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)^2\right)\right]$$

$$+M_{11}\left[K_{11}-\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}\right]+M_{22}\left[K_{22}-\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}\right]+S_{12}\left[\Gamma_{12}-\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial w}{\partial x_2}-\Omega_3\right)\right]+$$

$$+S_{21}\left[\Gamma_{21}-\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial w}{\partial x_2}+\Omega_3\right)\right]+M_{12}\left[K_{12}-\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}-\iota\right)\right]+$$

$$+M_{21}\left[K_{21}-\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2}+\iota\right)\right]+N_{31}\left[\Gamma_{31}-\left(\psi_1-\Omega_2\right)\right]+N_{13}\left[\Gamma_{13}-\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}+\Omega_2\right)\right]+$$

$$N_{32}\left[\Gamma_{32}-\left(\psi_2+\Omega_1\right)\right]+N_{23}\left[\Gamma_{23}-\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}-\Omega_1\right)\right]+L_{11}\left[\kappa_{11}-\frac{\partial\Omega_1}{\partial x_1}\right]+$$

$$+L_{22}\left[\kappa_{22}-\frac{\partial\Omega_2}{\partial x_2}\right]+L_{33}\left[\kappa_{33}-\iota\right]+L_{12}\left[\kappa_{12}-\frac{\partial\Omega_2}{\partial x_1}\right]+L_{21}\left[\kappa_{21}-\frac{\partial\Omega_1}{\partial x_2}\right]+$$

$$+L_{13}\left[\kappa_{13}-\frac{\partial\Omega_3}{\partial x_1}\right]+\Lambda_{13}\left[l_{13}-\frac{\partial\iota}{\partial x_1}\right]+L_{23}\left[\kappa_{23}-\frac{\partial\Omega_3}{\partial x_2}\right]+\Lambda_{23}\left[l_{23}-\frac{\partial\iota}{\partial x_2}\right]\Bigg\}\Bigg\rangle dx_1dx_2-$$

$$-\iint_{S^+}\left[q_1^+u_1+q_1^+h\psi_1+q_2^+u_2+q_2^+h\psi_2+q_3^+w+m_1^+\Omega_1+m_2^+\Omega_2+m_3^+\Omega_3+m_3^+h\iota\right]dx_1dx_2+$$

$$+\iint_{S^-}\left[q_1^-u_1-q_1^-h\psi_1+q_2^-u_2-q_2^-h\psi_2+q_3^-w+m_1^-\Omega_1+m_2^-\Omega_2+m_3^-\Omega_3-m_3^+h\iota\right]dx_1dx_2+$$

$$+\int_{l_1'}\left(S_{21}^0u_1+T_{22}^0u_2+H_{21}^0\psi_1+M_{22}^0\psi_2+N_{23}^0w+L_{21}^0\Omega_1+L_{22}^0\Omega_2+L_{23}^0\Omega_3+\Lambda_{23}^0\iota\right)dx_1+$$

$$+\int_{l_1''}\left[S_{21}\left(u_1-u_1^0\right)+T_{22}\left(u_2-u_2^0\right)+H_{21}\left(\psi_1-\psi_1^0\right)+M_{22}\left(\psi_2-\psi_2^0\right)+N_{23}\left(w-w^0\right)+\right.$$

$$\left.+L_{21}\left(\Omega_1-\Omega_1^0\right)+L_{22}\left(\Omega_2-\Omega_2^0\right)+L_{23}\left(\Omega_3-\Omega_3^0\right)+\Lambda_{23}\left(\iota-\iota^0\right)\right]dx_1+,$$

$$+\int_{l_2'}\left(T_{11}^0u_1+S_{12}^0u_2+M_{11}^0\psi_1+H_{12}^0\psi_2+N_{13}^0w+L_{11}^0\Omega_1+L_{12}^0\Omega_2+L_{13}^0\Omega_3+\Lambda_{13}^0\iota\right)dx_1+$$

$$+\int_{l_2''}\left[T_{11}\left(u_1-u_1^0\right)+S_{12}\left(u_2-u_2^0\right)+M_{11}\left(\psi_1-\psi_1^0\right)+H_{12}\left(\psi_2-\psi_2^0\right)+N_{13}\left(w-w^0\right)+\right.$$

$$\left.+L_{11}\left(\Omega_1-\Omega_1^0\right)+L_{12}\left(\Omega_2-\Omega_2^0\right)+L_{13}\left(\Omega_3-\Omega_3^0\right)+\Lambda_{13}\left(\iota-\iota^0\right)\right]dx_2 \qquad (9)$$

где поверхностные интегралы распространены на лицевых поверхностях оболочки $S^+,S^-(z=\pm h)$ и, соответственно, на контуре в срединной поверхности оболочки, где на одной части заданы внешние усилия и моменты, а на остальной части – перемещение и повороты; величины с верхними индексами нуль, – это заданные внешние силовые и моментные напряжения на l_1-определённой части контура срединной поверхности оболочки, или, перемещения и повороты, которые заданы на остальной части этого контура l_2-; при этом, $l_1=l_1'\cup l_1''$, $l_2=l_2'\cup l_2''$; W_0-поверхностная плотность потенциальной энергии деформации микрополярной оболочки:

$$\mathrm{W}_0=\frac{1}{2}\left(T_{11}\Gamma_{11}+T_{22}\Gamma_{22}+S_{12}\Gamma_{12}+S_{21}\Gamma_{21}+M_{11}K_{11}+M_{22}K_{22}+M_{12}K_{12}+\right.$$

$$+M_{21}K_{21}+N_{13}\Gamma_{13}+N_{23}\Gamma_{23}+N_{31}\Gamma_{31}+N_{32}\Gamma_{32}+L_{11}\kappa_{11}+L_{22}\kappa_{22}+L_{33}\kappa_{33}+ \qquad (10)$$

$$\left.+L_{12}\kappa_{12}+L_{21}\kappa_{21}+L_{13}\kappa_{13}+L_{23}\kappa_{23}+\Lambda_{13}l_{13}+\Lambda_{23}l_{23}\right)$$

Варьируя I_0 по всем независимым функциональным аргументам, из вариационного уравнения $\delta I_0=0$ (и добавив соответствующие инерционные члены) получим те же основные уравнения (3)-(5), (7), (8) и естественные граничные условия микрополярных упругих геометрически нелинейных тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений.

Отметим, что с точки зрения приведённого утверждения, сформулированная выше вариационная задача соответствует наиболее общему вариационному принципу микрополярных упругих тонких пологих оболочек. Поэтому, из последнего, как частные случаи, будут следовать экстремальные принципы микрополярных упругих тонких пологих оболочек типа принципов Лагранжа и Кастилиано.

В частном случае, из вариационного принципа геометрически нелинейной микрополярной теории упругих тонких пологих оболочек будет следовать вариационный принцип геометрически нелинейной классической теории упругих тонких пологих оболочек [3-5].

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта № SCS 13-2C154.

ЛИТЕРАТУРА

1. Саркисян С.О. Общая теория микрополярных упругих тонких оболочек. // Физическая мезомеханика. 2011. Т.14. №1. С.55-66.
2. Саркисян С.О. Уравнение баланса энергии, энергетические теоремы и вариационное уравнение для общей теории микрополярных упругих изотропных тонких оболочек. / Уч. записки. Гюмрийский государственный techинститут. 2013. № 2. Вып. А. С. 8-23.
3. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
4. Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки. М.: Гостехиздат, 1956. 420 с.
5. Григоренко Я.М., Мукоед А.П. Решение нелинейных задач теории оболочек. Киев: Вища школа. Головное изд., 1983. 286 с.
6. Саркисян А.А., Саркисян С.О. Математическая модель геометрически нелинейных микро-полярных упругих тонких пластин. //Труды XVII международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды». г. Ростов-на-Дону, 14-17 октября 2014 г. Изд. Южного федерального университета. 2014. Т.2. С.180-184.

Сведения об авторах:

Саркисян Арменуи Акоповна – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики, Гюмрийский государственный пединститут им. М. Налбандяна, зав. отделом послевузовского и дополнительного образования (374 94) 42 21 03, **e-mail:** armenuhis@mail.ru

Саркисян Самвел Оганесович – член-корр. НАН РА, доктор физ.-мат.наук, профессор, Гюмрийский государственный пединститут им. М. Налбандяна, зав кафедрой высшей математики, (374 93) 15 16 98, **e-mail:** s_sargsyan@yahoo.com

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В СЛОЕ С УПРУГО-СТЕСНЁННЫМИ ГРАНИЦАМИ

Саркисян А.С., Саркисян С.В.

Исследована задача о распространении периодических волн в упругом слое. Предполагается, что на границах слоя нормальное напряжение равно нулю, а касательное напряжение стеснённо. Для фазовой скорости симметричных и антисимметричных колебаний получены характеристические уравнения. Рассмотрены предельные случаи и приведены числовые расчёты для фазовой скорости волны.

Упругий изотропный слой толщиной $2h$ в прямоугольной декартовой системе координат занимает область $-\infty < x < \infty$; $-\infty < y < \infty$; $-h \le z \le h$. Пусть в этом слое распространяется периодическая волна с фазовой скоростью c. Рассматривается плоская задача: $\vec{u}\left(u(x,z,t),0,w(x,z,t)\right)$, где u, w – проекции упругих перемещений по направлению на координатные оси x, z, соответственно.

Известно, что при помощи преобразований

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial z}, \qquad w = \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{1}$$

система динамических уравнений теории упругости приводится к автономным волновым уравнениям относительно динамических потенциалов $\varphi(x,z,t)$ и $\psi(x,z,t)$ [1]:

$$c_1^2\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}, \quad c_2^2\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}, \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{2}$$

Примем, что на плоскостях, ограничивающих слой, заданы следующие граничные условия:

$$\sigma_{zz} = 0, \quad \sigma_{zx} = -\beta u \ \text{ при } \ z = -h,$$

$$\sigma_{zz} = 0, \quad \sigma_{zx} = \beta u \ \text{ при } \ z = h, \ \beta > 0. \tag{3}$$

Условие (3) было предложено Миндлином [2,3] для исследования задачи отражения упругой волны от границы полупространства. В работе [4] М.В. Белубекяном исследованы условия существования волн Рэлея в случае упруго-стеснённой границы.

В частном случае при $\beta = 0$ получаются условия свободной границы.

С использованием закона Гука и преобразования (1) граничные условия (3) приводятся к виду:

$$\begin{gathered}
(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \lambda\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + 2\mu\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z} = 0 \qquad \text{при } z = \pm h, \\
\mu\left(2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) + \beta\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \beta\frac{\partial\psi}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = -h, \\
\mu\left(2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) - \beta\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \beta\frac{\partial\psi}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = h.
\end{gathered} \tag{4}$$

Математически задача формулируется следующим образом. Найти решения двумерных волновых уравнений (2), удовлетворяющих граничным условиям (4).

Решения уравнений (2) можно представить в виде [1]:

$$\begin{gathered}
\varphi = \left(A\sinh(\nu_1 z) + B\cosh(\nu_1 z)\right)\exp ik(x - ct), \\
\psi = \left(C\sinh(\nu_2 z) + D\cosh(\nu_2 z)\right)\exp ik(x - ct),
\end{gathered} \tag{5}$$

где A, B, C и D – произвольные постоянные, $\nu_1^2 = k^2(1-\eta\theta)$, $\nu_2^2 = k^2(1-\eta)$, $c_1^2 = \dfrac{\lambda+2\mu}{\rho}$,

$c_2^2 = \dfrac{\mu}{\rho}$, $\theta = \dfrac{c_2^2}{c_1^2}$, $\eta = \dfrac{\omega^2}{k^2c_2^2}$.

Подставляя (5) в граничные условия (4), получим систему четырёх линейных однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных. Приравнивание определителя этой системы уравнений нулю приводит к характеристическому уравнению, из которого при заданных значениях ρ, μ, λ, β и ω можно найти фазовую скорость *c*. Упростим задачу, рассмотрев две системы частных решений:

$$\varphi_1 = B\cosh(\nu_1 z)\exp ik(x - ct),$$

$$\psi_1 = C\sinh(\nu_2 z)\exp ik(x - ct) \text{ и} \tag{6}$$

$$\varphi_2 = A\sinh(\nu_1 z)\exp ik(x - ct),$$

$$\psi_2 = D\cosh(\nu_2 z)\exp ik(x - ct). \tag{7}$$

Решение (6) соответствует симметричному виду колебаний, а решение (7) – антисимметричному виду колебаний [1].

Подставляя (6) в граничные условия (4) при $z = h$ получим систему двух уравнений:

$$(2-\eta)B\cosh(\nu_1 h) + 2i\sqrt{1-\eta}\ C\cosh(\nu_2 h) = 0,$$

$$\left(2\sqrt{1-\eta\theta}\sinh(\nu_1 h) - \beta_0\cosh(\nu_1 h)\right)iB + \left((\eta-2)\sinh(\nu_2 h) + \right.$$

$$\left. + \beta_0\sqrt{1-\eta}\cosh(\nu_2 h)\right)C = 0, \tag{8}$$

где $\beta_0 = \dfrac{\beta}{\mu k}$.

Из условия существования нетривиального решения системы уравнений (8) получим следующее уравнение относительно безразмерной характеристики квадрата фазовой скорости η:

$$(2-\eta)^2\tanh\left(kh\sqrt{1-\eta}\right) - 4\sqrt{(1-\eta)(1-\eta\theta)}\ \tanh\left(kh\sqrt{1-\eta\theta}\right) + \beta_0\eta\sqrt{1-\eta} = 0. \tag{9}$$

Уравнение (9) при $\beta_0 = 0$ совпадает с дисперсионным уравнением Рэлея–Лэмба [1]. Рассмотрим предельные случаи. Если длина волны $l = \dfrac{2\pi}{k}$ очень велика по сравнению с толщиной слоя, то величины $\nu_1 h$ и $\nu_2 h$ будут малы при конечном значении *c* и из уравнения (9) получим:

$$c = \frac{c_2}{c_1}\sqrt{4\left(c_1^2 - c_2^2\right) - \frac{\beta_0 c_1^2}{kh}}. \tag{10}$$

Если $\mu = \lambda$ $\left(\nu = \dfrac{1}{4}\right)$, то $c_1^2 = 3c_2^2$ и из формулы (10) получим:

$$c \equiv c_{rp} = \frac{2\sqrt{3}}{3}c_2\sqrt{2 - \frac{3\beta_0}{4kh}}. \tag{11}$$

Если же длина волны очень мала по сравнению с толщиной слоя *2h*, то из уравнения (9) получим:

$$(2-\eta)^2 - 4\sqrt{(1-\eta)(1-\eta\theta)} + \beta_0\eta\sqrt{1-\eta} = 0, \tag{12}$$

которое совпадает с характеристическим уравнением для поверхностных волн Рэлея в случае упруго-стеснённой границы [4]. Коэффициент β_0 характеризует степень стеснённости границы слоя. При $\nu = \dfrac{1}{4}$ и $\beta_0 = 1$ получаем из формулы (12) $c_{rR} \approx 0.6732c_2$.

В общем случае симметричных колебаний фазовую скорость *c* требуется определить из полного дисперсионного уравнения (9). Из обсуждения предельных случаев следует, что для первой формы колебаний фазовая скорость лежит в пределах $c_{rp} \geq c \geq c_{rR}$.

Стеснение типа (3) приводит к уменьшению границ интервала $c_{rp} < c_p$, $c_{rR} < c_R$ [1].

Перейдём к колебаниям, выраженными формулами (7). Удовлетворяя решения (7) граничным условиям (4), для антисимметричных колебаний получим следующее характеристическое уравнение относительно безразмерной характеристики квадрата фазовой скорости η:

$$(2-\eta)^2 \coth\left(kh\sqrt{1-\eta}\right) - 4\sqrt{(1-\eta)(1-\eta\theta)}\coth\left(kh\sqrt{1-\eta\theta}\right) + \beta_0\eta\sqrt{1-\eta} = 0. \qquad (13)$$

В предельном случае, когда длина волны очень мала по сравнению с толщиной слоя и при $kh \to \infty$, $c < c_2 < c_1$ уравнение (13) сводится к уравнению (12), которое характеризует поверхностные волны Рэлея для упруго-стеснённой границы [4]. При другом предельном случае из уравнения (13) можно определить фазовую скорость волн изгиба для первой формы антисимметричных колебаний.

Таким образом, для фазовой скорости симметричных и антисимметричных колебаний слоя с упруго-стеснёнными границами выведены дисперсионные уравнения. Для первой формы колебаний показано влияние коэффициента стеснённости на фазовую скорость.

Авторы выражают благодарность проф. М.В. Белубекяну за плодотворные обсуждения представленной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872с.
2. Miklowitz J. The Theory of Elastic Waves and Waveguides. North – Holland, 1984, 618p.
3. Mindlin R. D. Waves and Vibrations in Isotropic Elastic Plates. In «Structural Mechanics», J.N. Coodier and N.J. Hoff, eds, Pergamon Press, New York, 1960, p.199-232.
4. Белубекян М.В. Волна Рэлея в случае упруго-стеснённой границы. //Изв. НАН Армении. Механика. 2011. Т.64. №4. С.3–6.

Сведения об авторах:

Саркисян Самвел Владимирович – д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедой механики, Ереванский госуниверситет, факультет математики и механики.
Адрес: ул. Алека Манукяна, 1, ЕГУ, Ереван, Армения
Тел.: (+37455) 73-13-13. **E–mail**: vas@ysu.am

Саркисян Арег Самвелович – магистрант ЕГУ

МИКРОПОЛЯРНАЯ СТЕРЖНЕВАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ НАНОКРИСТАЛЛИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА, СОСТОЯЩЕГО ИЗ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПОЧЕК АТОМОВ

Саркисян С.О.

В работе построена дискретная модель линейной атомной цепочки с учётом вращательно-моментного взаимодействия между атомами. Осуществлён предельный переход от дискретной модели к континуальной (непрерывной) модели. Показывается, что полученный континуальная модель атомной цепочки совпадает с моделью прикладной теории микрополярной балки.

Введение. В настоящее время особую актуальность приобретает разработка аналитических моделей, позволяющих описывать при различных видах нагружения деформации углеродных наноструктур, таких как, наностержны, нанопластинки, углеродные однослойные и многослойные нанотрубки, фуллерены, графен и другие [1]. При изучении различных задач для наноструктур, таких как, определение собственных частот и форм колебаний, кратических сжимающих нагрузок для графеновых листов [2] или, при моделировании квазистатических процессов в кристаллах, применяется метод молекулярной механики с использованием соответствующих потенциалов межатомного взаимодействия.

Параллельно с этим, при изучении задач наномеханики получили широкое распространение также методы механики деформируемого твёрдого тела [3]. Большинство существующих континуальных моделей изучения наносистем основано на уравнениях теории упругости или классической теории оболочек, в которых либо не учитывается конкретный характер атомной структуры нанообьекта, либо, как правило, используются значения классических упругих модулей, полученные из макросконических экспериментов, или же, упругие модули определяют в результате исследования дискретных (атомных) моделей по теории молекулярной механики, в которых учитываются только силовое центральное взаимодействие между формирующими наноструктуру атомами (используя соответствующие потенциалы межатомных взаимодействий). Однако, как отмечается в работе [4], существование лишь однослойных нанотрубок свидетельствует о необходимости учёта моментного взаимодействия между атомами.

Теоретические модели, которые способны объединить дискретные и континуальные подходы, присоединяя микроструктуру к макроструктуре, микропараметры (параметры кристаллических решеток и межатомных связей) к макропараметрам(упругие модули), в литературе называются структурными или стержневыми, или иначе, дискретно-континуельными [5].

Отметим, что в указанной работе [5] при построении дискретно-континуальных моделей наносистем не учитываются вращательное(моментное) взаимодействие между атомами систем.Такого рода взаимодействий учитываются в работах [6,7].

В данной работе построена дискретная модель линейной цепочки атомов с учетом вращательного (моментного) взаимодействия между атомами и, осуществлен предельный переход, обосновывая применимость прикладной теории микрополярных упругих тонких стержней [8] как континуальную модель рассматриваемого нанообьекта.

1.Дискретная модель линейных наносистем с учетом нецентрального и вращательного(моментного) взаимодействия между частицами(атомами).

Будем рассматривать одномерную решетку, состоящую из одинаковых атомов(частиц) с массой m и моментом инерции J (относительно центра тяжести), расположенных вдоль прямой Ox и находящихся в состоянии равновесия на равных расстояниях a (постоянная одномерной решетки) друг от друга (рис. 1а).Будем изучать малые колебания такой системы(отметим, что при малыхперемещениях продольные и поперечные колебания независимы друг от друга).

Предположим, что силы или моменты действующие на атомы цепочки и обусловленные влиянием других атомов, являются упругими, т.е. пропорциональными линейными или угловыми отклонениями между взаимодействующими атомами от равновесных. Для простаты как обычно, примем, что сказываются взаимодействия только между ближайшими соседями. Отметим, что для определенности будем рассматривать случай цепочки атомов, при которой имеет место плотная упаковка чистиц(т.е $a = 2r$, где r -радиус атома) (рис. 1б).Силовое-моментное взаимодействие на i -ом атоме показано на рис.1в.

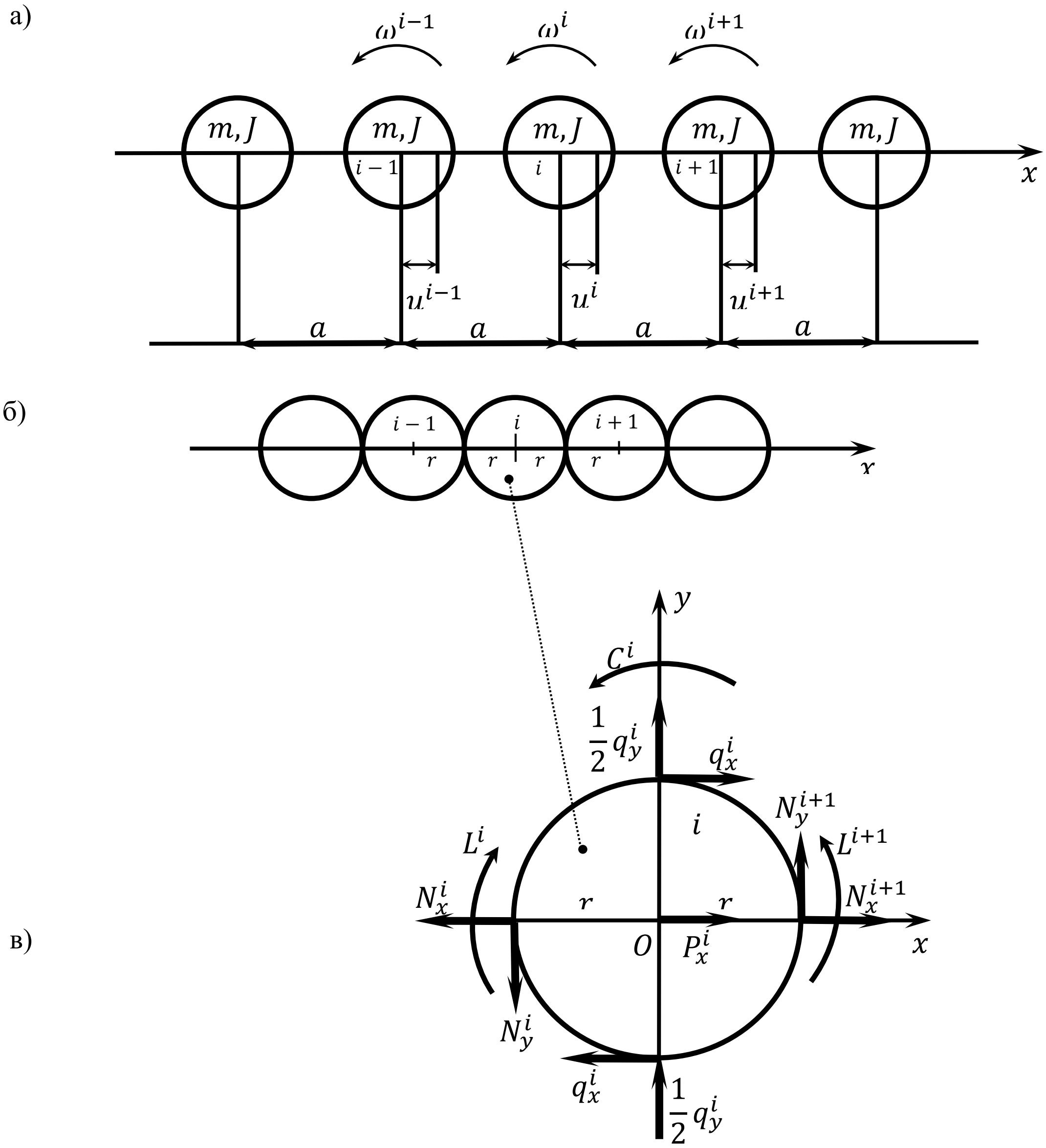


Рис.1.

К поперечным колебаниям цепочки относяться усилия: N_y^i и N_y^{i+1}, которые представляют собой проекциисил нецентрального взаимодействия на оси y, соответственно между $(i-1)$-й, i-й частицами и i-й, $(i+1)$-й частицами (атомами); L^i и L^{i+1} -моментные взаимодействия (связанными чисто собственными поворотами) между указанными частицами; к продольным колебаниям цепочки относятся усилия: N_x^i и N_x^{i+1} -которые представляют собой проекции сил нецентрального взаимодействия на оси x, соответственно между $(i-1)$-й, i-й частицами и i-й, $(i+1)$-й частицами; $\frac{1}{2}q_y^i, \frac{1}{2}q_x^i$ – внешние усилия приложенные на верхней и нижней точках i-й атомы, c_i – внешний момент приложенный на i-й атоме, а P_x^i – внешнее центральное усилие приложенное в центре тяжести i-й атомы.

Напишем уравнения движения для i-го атома (т.к.будем изучать малые колебания, следовательно, эти уравнения будем составлять относительно начальной геометрии цепочки).

Поперечные (изгибные, антисимметричные) колебания

$$N_y^{i+1} - N_y^i + q_y^i = m\frac{\partial^2 w^i}{\partial t^2},$$

$$N_y^{i+1}r + N_y^i r + L^{i+1} - L^i - q_x^i 2r + c_i = J\frac{\partial^2 \Omega^i}{\partial t^2}, \qquad N_y^{i+1}r + N_y^i r = \left(N_y^i + \Delta N_y^i\right)r + N_y^i r \approx 2N_y^i r. \tag{1.1}$$

Продольные (симметричные) колебания

$$N_x^{i+1} - N_x^i + p_x^i = m\frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2}. \tag{1.2}$$

Здесь u^i – продольное, а w^i – поперечное перемещения i – го атома, а Ω^i – собственный независимый от перемещений поворот i – го атома.

К этим уравнениям движения следует присоединить геометрические соотношения (формулы для продольных и поперечных деформаций, угловсдвига, кривизны оси цепочки) и физические законы между силовыми-моментными и деформационными характеристиками.

На рис. 2 показаны положения $(i-1)$-го, i-го и $(i+1)$-го атомов в фиксированный момент временны движения (точками отмечены центрытяжести атомов).

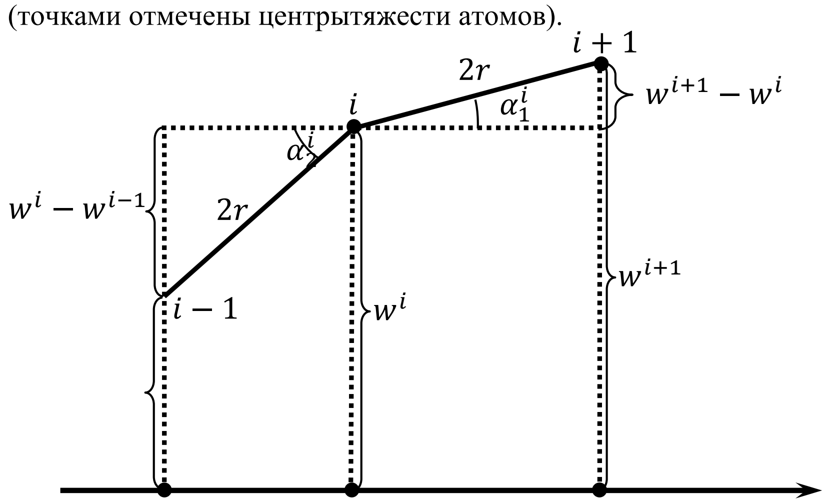


Рис.2

Из этого рисунка легко определить угловая деформация слева и справа у i-й частицы при поперечных колебаниях:

$$\frac{w^{i-1} - w^i}{2r} - \Omega^i, \qquad \frac{w^{i+1} - w^i}{2r} - \Omega^{i+1}, \tag{1.3}$$

где Ω^i – собственный свободный поворот i-й частицы.

Кривизна оси цепочки слева или справа от i-й частицы будет

$$\chi^i = \frac{\Omega^{i-1} - \Omega^i}{2r}, \qquad \chi^{i+1} = \frac{\Omega^{i+1} - \Omega^i}{2r}. \tag{1.4}$$

При продольных колебаниях линейные деформации вдоль оси цепочки слева или справа от i-й частицы будут

$$(\Delta l)^i = \frac{u^{i-1} - u^i}{2r}, \qquad (\Delta l)^{i+1} = \frac{u^{i+1} - u^i}{2r}. \tag{1.5}$$

Физические законы при поперечных колебаниях будут

$$\left(w^i - w^{i-1}\right) - 2r\Omega^i = \frac{1}{k_1}N_y^i - \frac{1}{k_2}q_x^i \quad \text{или} \quad k_1 2r\left(\frac{w^i - w^{i-1}}{2r} - \Omega^i\right) = N_y^i - \frac{k_1}{k_2}q_x^i, \tag{1.6}$$

$$\frac{\Omega^i - \Omega^{i-1}}{2r} = k_3 L^i, \qquad \frac{\Omega^{i+1} - \Omega^i}{2r} = k_3 L^{i+1}.$$

Физические законы при продольных колебаниях следующие

$$\frac{u^i-u^{i-1}}{2r}=k_4N_x^i,\qquad \frac{u^{i+1}-u^i}{2r}=k_4N_x^{i+1}. \tag{1.7}$$

В формулах (1.6), (1.7) коэффициенты k_1,k_2,k_3,k_4 – физические постоянные, коэффиценты упругости соответствующих “пружин”.

К уравнениям дискретной модели цепочки атомов при поперечных колебаниях ((1.1), (1.3), (1.4), (1.6)) или при продольных колебаниях ((1.2), (1.5), (1.7)), следует присоединить соответствующие начальные условия.

2.Континальная модель цепочки атомов при поперечных и продольных колебаниях. В классическом случае (т.е. когда пренебрегаются вращетельно-моментного типа взаимодействия) в длинноволновом приближении закон дисперсии колебаний решетки совпадает с законом дисперсии звуковых колебаний. И, как результат, реализуется предельный переход от уравнений механики кристаллической решетки к уравнениям сплошного упругого твердого тела.Осуществим аналогичный предельный переход в случае длинноволновых колебаний от дискретной модели атомной цепочки (изученной в пункте один) к континуальной (непрерывной) модели стержня.

Для осуществления предельного перехода будем осуществить следующие замены:

$$f_i(t)\to f(x,t),\qquad f_{i+1}(t)\to f\{(x+a),t\}=f(x,t)+\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\frac{1}{2}a+...,$$
$$f_{i-1}(t)\to f\{(x-a),t\}=f(x,t)-\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\frac{1}{2}a+...,\qquad \text{где } a=2r=\Delta x\to 0. \tag{2.1}$$

Рассмотрим сначало отношения $\frac{m}{a}$ и $\frac{J}{a}$, при $a\to 0$, получим

$$\lim_{a\to 0}\frac{m}{a}=\bar{\rho},\qquad \lim_{a\to 0}\frac{J}{a}=\bar{J}, \tag{2.2}$$

где $\bar{\rho}$ – линейная плотность массы стержня, а $\bar{J}$ – линейная плотность момента инерции стержня (т.е. величины с черточкой, это масса и момент инерции единичной длины стержня).
Аналогичным образом получим

$$\lim_{a\to 0}\frac{q_y^i}{a}=\bar{q}_y(x,t),\quad \lim_{a\to 0}\frac{q_x^i}{a}=\bar{q}_x(x,t),\quad \lim_{a\to 0}\frac{c_i}{a}=\bar{c}(x,t),\quad \lim_{a\to 0}\frac{P_x^i}{a}=\bar{P}_x(x,t), \tag{2.3}$$

которые представляют интенсивности по длине стержня распределенныхвнешнихусилий и момента.

На основе формул (2.1) осуществляя предельный переход в дискретной модели с учетом формул (2.2) и (2.3) получим:

Поперечные колебания непрерывного стержня:

Уравнения движения:

$$\frac{\partial N_y(x,t)}{\partial x}+\bar{q}_y(x,t)=\bar{\rho}\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2},$$
$$\frac{\partial L(x,t)}{\partial x}+N_y(x,t)-\bar{q}_x(x,t)2r+\bar{c}(x,t)=\bar{J}\frac{\partial^2\Omega(x,t)}{\partial t^2}, \tag{2.4}$$

Геометрические соотношения:

$$\Gamma_{xy}=\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}-\Omega,\qquad \chi=\frac{\partial\Omega}{\partial x}, \tag{2.5}$$

Физические соотношения упругости:

$$\Gamma_{xy}=\frac{1}{\tilde{k}_1}N_y-\frac{1}{\tilde{k}_2}\bar{q}_x2r,$$
$$\chi=\tilde{k}_3L(x,t), \tag{2.6}$$

где $\tilde{k}_1=2k_1r,\quad \tilde{k}_2=2k_2r,\quad \tilde{k}_3=2k_3r.$ (2.7)

Здесь Γ_{xy} – сдвиговая деформация, а χ – кривизна оси стержня. Если осуществим сравнивание полученной системы уравнений (2.4)-(2.6) непрерывного стержня с уравнениями

[8] микрополярного стержня при изгибной деформации, можем установить, что континуальная модель цепочки, при учете вращательно-моментного взаимодействия между частицами, является микрополярный упругий стержень. Отметим, что при осуществлении предельного перехода были сохранены значения моментов от силовых взаимодействий.

Продольные колебания непрерывного стержня:

Уравнения движения:

$$\frac{\partial N_x(x,t)}{\partial x} + \overline{P}_x = \overline{\rho}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}, \tag{2.8}$$

Геометрические соотношения:

$$\Gamma_{xx} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \tag{2.9}$$

Физические соотношения упругости:

$$\Gamma_{xx} = \overline{k}_4 N_x, \tag{2.10}$$

где $\overline{k}_4 = k_4 r.$ (2.11)

Система уравнений (2.8)-(2.10) представляет собой система уравнений продольных колебаний упругого стержня в классической постановке.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА и РФФИ (РФ) в рамках совместных научных программ 15RS-063 и 15-53-05093 соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Елисеев А.А., Лукашин А.В. Функциональные наноматериалы. /Под ред. Ю.Д. Третьякова. М.: Физматлит, 2010. 456с.
2. Алехин В.В., Аннин Б.Д., Бабичев А.В., Коробейников С.Н. Собственные колебания и выпучивание графеновых листов//Изв. РАН. Механика твердого тела. 2013. №5. С.34-38.
3. Введение в микро- и наномеханику. Математические модели и методы. /Под ред. А.И. Потапова. Н.Новгород: Изд. НГТУ. 2010. 303с.
4. Беринский И.Е., Иванова Е.А., Кривцов А.М., Морозов Н.Ф. Применение моментного взаимодействия к построению устойчивой модели кристаллической решётки графита. //Изв. АН России. Механика твердого тела. 2007. №5. С.6-16.
5. Гольдштейн Р.В., Ченцов А.В. Дискретно-континуальная модель нанотрубки //Известия АН России. Механика твердого тела. 2005. №4. С.57-74.
6. Pavlov I.S., Potapov A.I., Maugin G.A. A 2D granular medium with rotating particles//Intern. J. Solids and Structures. 2006. V.43. №20. P. 6194-6207.
7. Gendelman O.V., Manevitch L.I.Linear and Nonlinear Excitations in a Polyethylene Crystal. 1. Vibrational Modes and Linear Equations//Macromol. Theory Simul. 1998. V.7. P.579-589.
8. Саркисян С.О. Прикладные одномерные теории балок на основе несимметричной теории упругости //Физическая мезомеханика. 2008. Т.11. №5. С.41-54.

Сведения об авторе:

Саркисян Самвел Оганесович – чл-корр. НАН Армении, доктор физ-мат. наук, профессор, зав. каф. Высшей математики Гюмрийского государственного педагогического института им. М. Налбандяна, (093) 15 16 98

E-mail: s_sargsyan@yahoo.com

ЗАКОНОМЕРНОСТЬ ИЗМЕНЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ВЫСОКИХ ГРУНТОВЫХ ПЛОТИН

Саруханян А.А., Веранян Г.Г., Погосян А.А.

Для оценки сейсмической безопасности высоких грунтовых плотин требуется доказательство выбора метода, обеспечивающего надёжные и достоверные результаты по критериям оценки. Правильный выбор расчётной модели позволит обеспечить реальные показатели данного сооружения. Сопоставление и анализ расчётных данных в случаях плоской расчётной модели и пространственной модели с результатами натурных измерений и спектральных анализов акселерограмм Сарсангской плотины показали важность выбора расчётной модели для достижения достоверных результатов.

Применение более сложных моделей физико-механического свойства грунта приводит к достоверным результатам.

Введение. Грунтовые плотины являются основными гидротехническими сооружениями на тех территориях, где их возведение другими строительными материалами экономически необосновано. Этим объясняется тот факт, что на территории РА и НКР построены, в основном, грунтовые плотины. Однако, по сравнению с бетонными или другими типами плотин, грунтовые плотины мало изучены, что связано с постоянным уточнением физико-механических свойств грунтов основания и тела плотины. Определяющим фактором оценки реального состояния грунтовых плотин по прочности и устойчивости является выявление математической модели текущего напряжённо-деформированного состояния грунтов фундамента и тела плотины. Однако, получение данных о текущем физико-механическом состоянии грунтов требует использования дорогостоящих измерительных приборов и наличия высококвалифицированных специалистов, что, в конечном счёте, приводит к повышению стоимости сооружения.

Ввиду особых свойств грунта, плотины из местных материалов хорошо выдерживают динамические нагрузки от землетрясений. Поэтому грунтовые плотины, как более устойчивые сооружения, строят в районах высокой сейсмичности.

При проектировании и, особенно, строительстве грунтовых плотин необходимо соблюдать все технические требования, предусмотренные нормативными документами. Только при неукоснительном соблюдении всех требований при эксплуатации грунтовых плотин можно ожидать их надёжное и безопасное функционирование.

Проектируемые и строящиеся грунтовые плотины, согласно действующим нормативным требованиям по учёту техногенных и природных катастроф, соответствующим реальным показателям, имеют достаточную прочность и устойчивость, что обеспечивает их длительную безопасную эксплуатацию. Однако, часто встречаются сооружения, которые проектировались и строились по нормативным документам, без учёта реальных динамических нагрузок. Так, плотины, построенные на территории РА и НКР, согласно старым нормативным документам, предусмотрены для сейсмических нагрузок, соответствующих горизонтальному ускорению 0,2 g. Однако после Спитакского землетрясения в 1988г. этот показатель возрос до 0,43 g [1]. Ясно, что при резком отклонении этого показателя ни одно сооружение не может отставаться невредимым.

Нами были проведены проверочные расчёты на прочность и устойчивость плотин, построенных на территории НКР в условиях новых нормативных требований. Целью расчётов было выявление реального состояния этих сооружений и, при необходимости, разработка мероприятий для повышения надёжности их безопасной эксплуатации. Чрезвычайно уникальным сооружением является Сарсангская плотина, являющаяся самым высоким грунтовым сооружением на европейском континенте. Сарсангская плотина – важный стратегический объект и обеспечение требований её безопасной эксплуатации имеет особое значение. Исходя из необходимости выявления технического состояния Сарсангской плотины, восстановлена трёхмерная модель рельефа фундамента и боковых призм плотины и составлены пространственные и плоские расчётные модели, по которым выполнены расчёты собственных колебаний. Выявлены количественные связи собственных колебаний в зависимости от форм рельефа и дана их сравнительная оценка по спектральным акселерограммам записанных сильных землетрясений.

Построение расчётных моделей. Из генплана местности по программе ArcGis построена съёмка рельефа raster, размещённого в расчётной сетке. В центре каждой ячейки определены декартовы координаты. С помощью этих координат по программе Mathematica построены треугольные модели рельефа. Далее рельеф с треугольными ячейками введён в программу AutoCAD и построена пространственная модель местности, на которой построена также модель плотины. Построена также расчётная плоская модель плотины с учётом двух наиболее опасных поперечных разрезов, в результате чего плотина имеет наиболее большую высоту.

Так как в основе строительных норм заложены упругие линейные модели грунта [2.4.5], то в наших расчётах используются методы теории упругости. В расчётах механические свойства грунта определялись динамическим способом [2.4.5], а плотности и физико-механические свойства грунтов тела плотины и основания – из результатов лабораторных исследований опытных образцов, доставленных из разных глубин [3].

Проведён сравнительный анализ периодов собственных колебаний, рассчитанных по пространственным плоским моделям с данными измерениями. Здесь важно сопоставление результатов спектральных анализов акселерограмм сильных землетрясений с параметрами собственных колебаний. В качестве акселерограмм были использованы акселерограммы сильных землетрясений Спитака (1988г) и Измира (1999 г), масштабы которых оцениваются 0,45 g [1,6].

Сравнение результатов собственных колебаний и их формы, спектральный анализ. Периоды собственных колебаний плотины и их формы определены численным интегрированием уравнения упругих волн [4-7]:

$$\upsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 . \qquad (1)$$

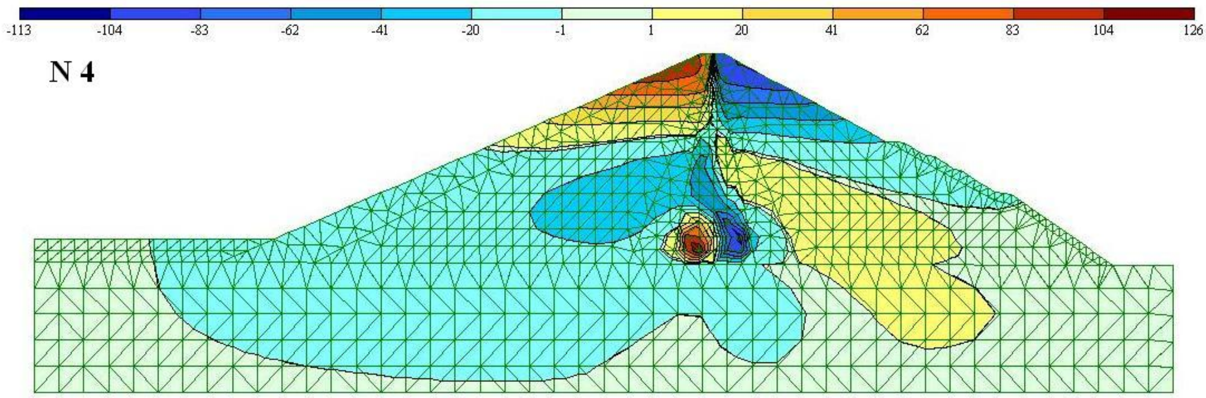


Рис.1. Форма собственных колебаний плотины в расчётном сечении в случае плоской задачи

Уравнение (1) интегрировано для плоской и пространственной задачи. В результате получены периоды колебаний при 20 разных формах колебаний. На рис.1 приведена одна из форм колебаний плотины в случае плоской задачи, а на рис.2. – то же, что и в случае пространственной задачи.

Для каждой формы колебания определены периоды колебаний и построены их графики в случае плоской и пространственной задач (рис.3).

Результаты спектральных анализов приведённых акселерограмм Спитакского и Измирского землетрясений по методу дискретных преобразований Фурье приведены на рис.4 и 5. Расчёты проводились при разных значениях логарифмического декремента, которые соответствуют значениям свойств грунта тела плотины и фундамента.

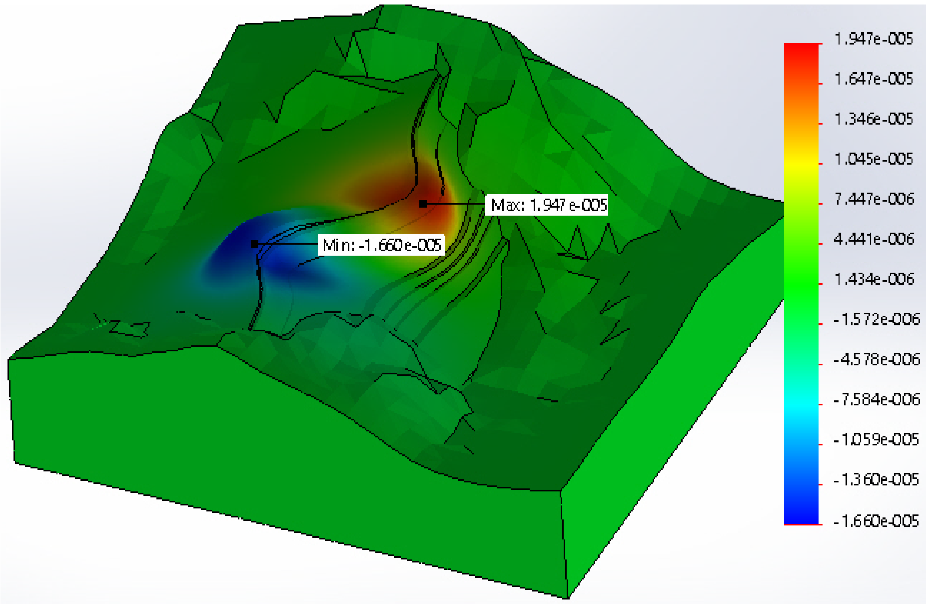


Рис.2. Форма собственных колебаний плотины в случае пространственной задачи

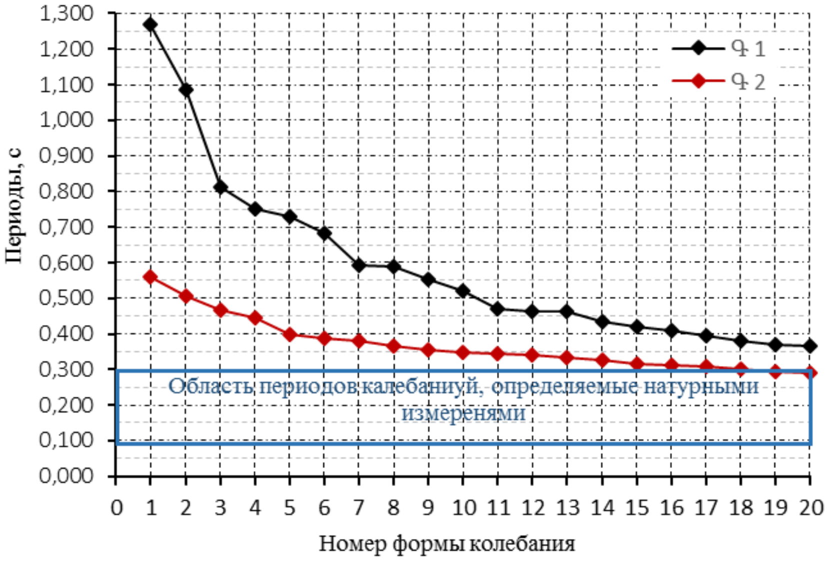


Рис. 3. Графики периодов собственных колебаний при разных формах колебаний: Գ-1 – периоды собственных колебаний в случае плоской задачи, Գ-2 – то же, что и в случае пространственной задачи, Գ-3 – область периодов собственных колебаний по результатам измерений

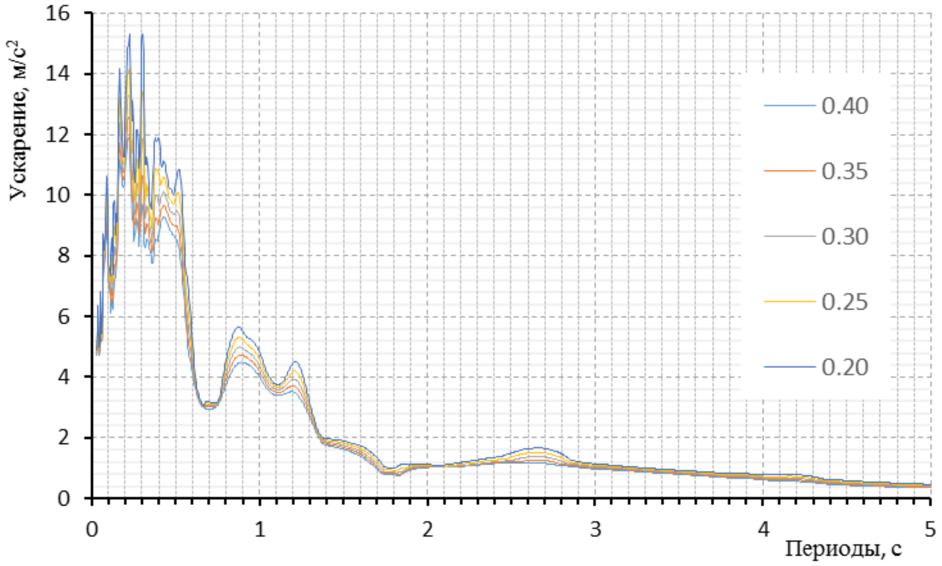


Рис.4. Результаты спектрального анализа акселерограммы Спитакского землетрясения в области логарифмического декремента 0,2 … 0,4

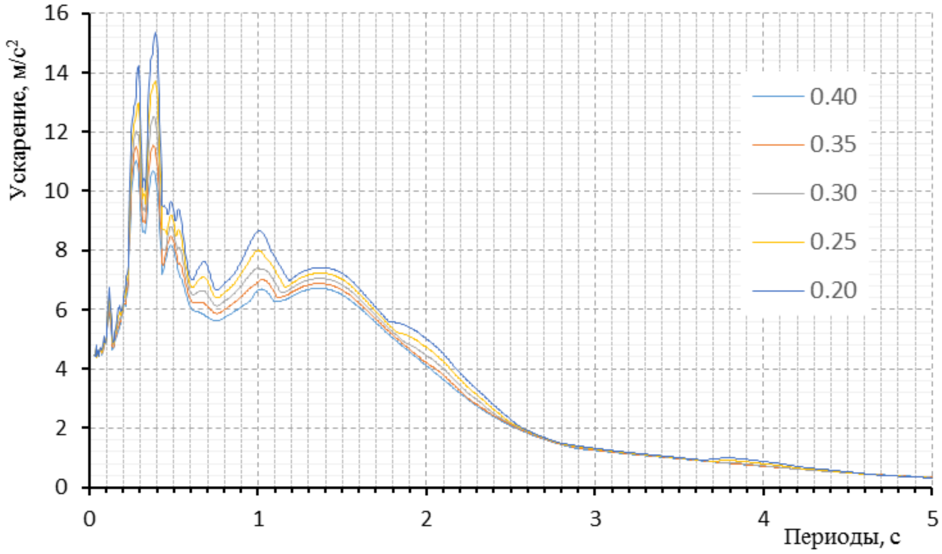


Рис.5. Результаты спектрального анализа акселерограммы Измирского землетрясения в области логарифмического декремента 0,2… 0,4

Анализ полученных результатов показывает, что максимальные горизонтальные ускорения получаются в интервале периода колебаний 0,3 … 0,4 с.

Выводы. Сопоставление расчётных и измерительных данных выявляет суть динамических явлений и даёт некоторые количественные результаты. В случае приближённой плоской задачи получается чрезмерно большая область периодов собственных колебаний, что говорит о чрезмерно упругом свойстве сооружения.

Пространственная модель даёт более приближённые значения периодов собственных колебаний. Однако, здесь также пренебрегаем нелинейными свойствами грунта и коэффициентом затухания. Следует отметить, что при упругих моделях, где пренебрегается действие коэффициента затухания, значение собственных колебаний становится близким их максимальным значениям.

Результаты натурных измерений по собственным колебаниям получаются меньше, чем их расчётные значения. Это означает, что, в действительности, свойства грунта нелинейные, а процесс имеет затухающий характер.

Результаты спектрального анализа акселерограмм показали удовлетворительное совпадение с результатами натурных измерений собственных колебаний. Здесь имеются некоторые риски резонанса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Գիտատեխնիկական հաշվետվություն. «ԼՂՀ Սարսանգի և Մաղաղիսի ջրամբարների պատվարների գործիքային մեթոդներով համալիր հետազոտություններ: Սեյսմիկ միկրոշրջանացում»/ ՀՀ ԳԱԱ Երկրաֆիզիկայի և ինժեներական սեյսմաբանության ինստիտուտ.- Գյումրի, 2008. - 125 էջ:
2. ՀՀՇՆ II-6.02-2006 Սեյսմակայուն շինարարություն: Նախագծման նորմեր.- Երևան, 2006. - 62 էջ:
3. «ԼՂՀ 24 ջրամբարների տեխնիկական վիճակի հետազոտում և անվտանգության հայտարարագրերի մշակում» (N 10-7/NC պայմանագիր)/ ԵՃՇՊՀ.- Երևան, 2012. - 500 էջ:
4. Хачиян Э. Прикладная сейсмология. Ереван: Изд.-во «Гитутюн» НАН РА, 2008. 491с.
5. Учёт сейсмических воздействий при проектировании гидротехнических сооружений. П17-85 ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева, гидропроект им. С.Я.Жука, ГрузНИИЭГЦ-. Л., 1986.
6. Campbell K., Bozorghia. Near-Source Attenuation of Peak Acceleration from Worldwide Accelerograms Recorded from 1957 to 1993// Proc. Fifth National Conf. on Earthquake Engineering, EERI. 1994. Vol.3. P.283-292.
7. Duncan J.M., Chang C.Y. Nonlinear analysis of stress and strain insoils// Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE. 1970. Vol.96. N SM5. P.1629-1654.

Сведения об авторах:

Саруханян Арестак Арамаисович, д.т.н., проф. кафедры гидравлики Национального университета архитектуры и строительства Армении. E-mail asarukhanyan@nuaca.am

Веранян Геворг Гагикович, к.т.н., докторант кафедры ГТС, водных систем и ГЭС Национального университета архитектуры и строительства Армении,

Погосян Анаида Арташевна, доцент кафедры инженерии Арцахского государственного университета.

О ПРЕДЕЛЬНОМ ПЕРЕХОДЕ В ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТАХ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЕ ОТ ЛОКАЛЬНО РАСПРЕДЕЛЁННОГО ПО ПРЯМОУГОЛЬНИКУ РАВНОМЕРНОГО ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЯ К СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛЕ В ЦЕНТРЕ ПРЯМОУГОЛЬНИКА ПРИЛОЖЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ

Сейранян С.П.

Завершается цикл исследований автора, посвящённых изучению предельного НДС (поведения компонент НДС), полученных с применением решения Навье для прогиба в задаче изгиба прямоугольной свободно опёртой пластины при локальной (сосредоточенной) поперечной нагрузке. В предположении, что локальная нагрузка – равномерное поперечное давление, приложенное на прямоугольной площадке, устремлением сторон площадки к нулю при сохранении результирующей силы давления и центра площадки (ξ, η) неизменными, двойным предельным переходом получены бесконечные предельные значения изгибающих моментов в пластине в точке (ξ, η). Отмечается, что полученный результат согласуется с особенностью в точке (ξ, η) изгибающих моментов в пластине, выделенной С.П. Тимошенко и Г.Ю. Джанелидзе после подстановки решения Навье для прогиба при сосредоточенной нагрузке в соответственные соотношения упругости. В итоге, с учётом прежних публикаций автора, значения физических величин – изгибающих и крутящего моментов (в отличие от перерезывающих сил) при предельном переходе от локальной нагрузки к сосредоточенной всюду в замкнутом прямоугольнике плана пластины переходят в значения по Навье изгибающих и крутящего моментов пластины при сосредоточенной нагрузке.

Введение. В краевых задачах механики известны парадоксы, когда нарушается физически обусловленная непрерывная зависимость решений от параметров задачи. В качестве таковых приведём парадокс Циглера [1] и парадокс Бабушки – Сапонджяна [2]. Поэтому решение той или иной задачи механики, сформулированное предельным путем, т.е как обобщённое по С.Л. Соболеву [3] решение, требует дальнейшего анализа. Это обстоятельство приобретает особую актуальность в классической теории пластин и оболочек, ибо в ней обобщённое решение строится лишь для прогиба [4], [5], а величины НДС вычисляются подстановкой предельной функции прогиба в геометрические соотношения и соотношения упругости классической теории пластин, а не построением для каждой из них обобщённого решения, что может при попытке их сравнения привести к несовпадениям, т.е. парадоксам.

К таковым относится и решение Навье для прогиба свободно опёртой прямоугольной пластины при сосредоточенной нагрузке [4], установленное им двойным предельным переходом в им же полученном решении для прогиба данной, но нагружённой на прямоугольной площадке равномерным поперечным давлением пластины при стремлении сторон площадки к нулю.

Важно отметить, что к решениям Навье прямоугольной шарнирно опёртой пластины при частичном и сосредоточенном нагружении обращались широко известные ученые и специалисты: Б.Г. Галеркин [6], С.П. Тимошенко [4], Л.В. Канторович [7], В.И.Крылов [7], Г.Ю. Джанелидзе [8], однако в их работах и работах других авторов, кроме работ автора [9] – [11], парадоксы не встречаются.

В представляемой работе исследуется предельный переход от локально-распределённой нагрузки к сосредоточенной в выражениях для изгибающих моментов в точке (ξ, η).

1. Предварительные результаты. Вторая частная производная от прогиба $w(x,y)$ локально нагружённой на прямоугольной площадке равномерным давлением прямоугольной свободно опёртой пластины по переменной y в центре площадки представляется в виде [4], [12]

$$\frac{\partial^2 w(\xi,\eta)}{\partial y^2} = -\frac{1}{\Delta\xi\,\Delta\eta}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2 w_{mn}^* \sin^2\lambda_m\xi \sin^2\mu_n\eta \sin\lambda_m\,\Delta\xi/2\,\sin\mu_n\,\Delta\eta/2 = -\frac{1}{4\Delta\xi\,\Delta\eta}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n^2 \times$$

$$\times w_{mn}^*\sin\lambda_m\Delta\xi/2\sin\mu_n\,\Delta\eta/2 + \frac{1}{4\Delta\xi\,\Delta\eta}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n^2 w_{mn}^*\,\cos 2\mu_n\eta\,\sin\lambda_m\Delta\xi/2\sin\mu_n\,\Delta\eta/2 + \frac{1}{2\Delta\xi\,\Delta\eta}\times$$

$$\times\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n^2 w_{mn}^*\cos 2\lambda_m\xi\,\sin^2\mu_n\eta\,\sin\lambda_m\,\Delta\xi/2\sin\mu_n\,\Delta\eta/2 \qquad (1.1)$$

Здесь $\lambda_m = m\pi/a$, $\mu_n = n\pi/b$, где a,b – длины сторон прямоугольника плана пластины; величина $w_{mn}^* = B\big/(\lambda_m\mu_n(\lambda_m^2+\mu_n^2)^2)$, в которой $B = 16P/(Dab)$, где D и P – изгибная жёсткость пластины и результирующая сила давления; (ξ,η) и $\Delta\xi, \Delta\eta$ –координаты центра прямоугольника приложения равномерного поперечного давления и длины его сторон.

Переход к окончательному выражению (1.1) связан со сходимостью всех трёх повторных рядов-слагаемых. Действительно, с применением неравенства (1.1) [12] приходим к оценкам

$\lambda_m^k \mu_n^{s-k} w_{mn}^* = B\lambda_m^{k-1}\mu_n^{s-k-1} / (\lambda_m^2+\mu_n^2)^2 \le C\ /(\lambda_m^{2\gamma-k+1}\mu_n^{4-2\gamma-s+k+1})\Big|_{\gamma=1/4+k/2} = C/(\lambda_m^{3/2}\,\mu_n^{9/2-s})$, где C – константа,

$k=0,\,1,\,s=2,\,3.$ (1.2)

Поэтому, при $k=0,\ s=2$ в (1.2) данные ряды мажорируются числовым сходящимся рядом, а значит, сходятся.

2. О двойном предельном переходе от локальной нагрузки к сосредоточенной в изгибающих моментах пластины.

2.1 Исследуется на существование двойного предела при $\Delta\xi \to 0, \Delta\eta \to 0$ отношение первого повторного ряда в (1.1) и $\Delta\xi, \Delta\eta$, представляя прежде в нём ординарный ряд с индексом суммирования n в конечном виде. С использованием известной формулы в [4] (с. 165) имеем:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n \sin\mu_n s/(\lambda_m^2+\mu_n^2)^2 = -\frac{\partial}{\partial s}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\mu_n s/(\lambda_m^2+\mu_n^2)^2 = -\frac{\partial}{\partial s}\left[-\frac{1}{2\lambda_m^4}+\frac{b}{4\lambda_m^3}\frac{ch\lambda_m(b-s)}{shb\lambda_m}-\right.$$

$$\left.-\frac{b(b-s)}{4\lambda_m^2}\frac{sh\lambda_m(b-s)}{shb\lambda_m}+\frac{b^2}{4\lambda_m^2}\frac{ch\lambda_m(b-s)\,chb\lambda_m}{sh^2 b\lambda_m}\right] = -\frac{b^2}{4\lambda_m}\frac{sh\,\lambda_m s}{sh^2 b\lambda_m}+\frac{bs}{4\lambda_m}\frac{ch\lambda_m(b-s)}{shb\lambda_m} =$$

$$= -\frac{b^2}{4\lambda_m}\frac{sh\,\lambda_m s}{sh^2 b\lambda_m}+\frac{bs}{4\lambda_m}\left(\frac{e^{-\lambda_m b}ch\,\lambda_m s}{shb\lambda_m}+e^{-\lambda_m s}\right),\ \text{где } 0\le\mu_1 s\le 2\pi \quad (2.1)$$

Полагая теперь в (2.1) $s=\Delta\eta/2$ и подставляя результат в первый ряд в (1.1), получаем:

$$I_1 = \frac{1}{\Delta\xi\,\Delta\eta}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n^2 w_{mn}^* \sin\lambda_m\Delta\xi/2\,\sin\mu_n\,\Delta\eta/2 = \frac{Bb}{4}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_m^2}\left[\frac{1}{shb\lambda_m}\left(-\frac{b}{shb\lambda_m}\frac{sh\lambda_m\,\Delta\eta/2}{\Delta\eta}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}e^{-\lambda_m b}ch\lambda_m\,\Delta\eta/2\right)+\frac{1}{2}e^{-\lambda_m\Delta\eta/2}\right]\frac{\sin\lambda_m\Delta\xi/2}{\Delta\xi} = \frac{Bb}{4}\left[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_m^2\,shb\lambda_m}\left(-\frac{b}{shb\lambda_m}\frac{sh\lambda_m\,\Delta\eta/2}{\Delta\eta}+e^{-\lambda_m b}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\frac{ch\lambda_m\,\Delta\eta/2}{2}\right)\frac{\sin\lambda_m\Delta\xi/2}{\Delta\xi}+\frac{1}{2\Delta\xi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda_m\Delta\eta/2}}{\lambda_m^2}\sin\lambda_m\Delta\xi/2\right] \quad (2.2)$$

Здесь переход через последний знак равенства связан со сходимостью рядов-слагаемых, так как ряд второй ряд сходится, а первый – есть разность исходного и второго сходящихся рядов [13].

Покажем теперь, что сумма $I_1^{(1)}$ первого ряда в (2.2) справа по модулю ограничена в области $0<\Delta\xi\le a,\ 0<\Delta\eta\le b$. Действительно, для его общего члена E_m с учётом неравенств [13]

$ch\,t\le e^t, \left|\sin t\right|/t\le 1, sh\,t/t = ch\,t' \le e^{t'} \le e^t$, где $0<t'<t<\infty,\ sh\,b\lambda_m \ge e^{b\lambda_m}(1-e^{-2b\lambda_1})/2 = e^{b\,\lambda_m}/C_{ba}$ (2.3)

приходим к оценкам:

$$\left|E_m\right| \le \left(\frac{b}{4sh^2 b\lambda_m}\frac{sh\lambda_m\,\Delta\eta/2}{\lambda_m\Delta\eta/2}+e^{-\lambda_m b}\frac{ch\lambda_m\,\Delta\eta/2}{4\lambda_m shb\lambda_m}\right)\frac{\left|\sin\lambda_m\Delta\xi/2\right|}{\lambda_m\Delta\xi/2} \le \frac{bC_{ba}^2}{4}e^{\lambda_m(\Delta\eta/2-2b)}+\frac{C_{ba}}{4\lambda_m}\times$$

$$\times e^{\lambda_m(\Delta\eta/2-2b)} \le C_{ba}/4\,\left(bC_{ba}+1/\lambda_1\right)e^{-3/2\,b\lambda_m} \quad (2.4)$$

Отсюда, данный ряд мажорируется числовым сходящимся рядом, а значит $I_1^{(1)}$ по модулю ограничена в области изменения $\Delta\xi, \Delta\eta$ [13].

Исследуется существование двойного предела при $\Delta\xi\to 0, \Delta\eta\to 0$ второй ряд в (2.2) с множителем $1/(2\Delta\xi)$. Представляя его в виде

$$I_1^{(2)} = \frac{1}{2\Delta\xi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda_m\Delta\eta/2}}{\lambda_m^2}\sin\lambda_m\Delta\xi/2 = \frac{1}{2\Delta\xi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda_m\Delta\eta/2}}{\lambda_m}\int_0^{\Delta\xi/2}\cos\lambda_m q\,dq = \frac{1}{2\Delta\xi}\int_0^{\Delta\xi/2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda_m\Delta\eta/2}}{\lambda_m}\cos\lambda_m q\,dq \quad (2.5)$$

и используя формулу [14](с.55), полагая в ней $x=\lambda_1 q,\ p=e^{-\lambda_1\Delta\eta/2}$ и подставляя в (2.5), имеем:

$$I_1^{(2)} = -\frac{1}{4\lambda_1\Delta\xi}\int_0^{\Delta\xi/2}\ln[(1-e^{-\lambda_1\Delta\eta/2})^2+4e^{-\lambda_1\Delta\eta/2}\sin^2\lambda_1 q/2]\,dq \quad (2.6)$$

Заметим, что подынтегральная функция в (2.6) переменной q с учётом $\Delta\eta>0$ есть функция непрерывная. Поэтому, применяя интегральную теорему о среднем [13], получаем

$$I_1^{(2)} = -1/(8\lambda_1)\ln[(1-e^{-\lambda_1\Delta\eta/2})^2 + 4e^{-\lambda_1\Delta\eta/2}\sin^2\lambda_1 q'(\Delta\xi,\Delta\eta)], \text{ где } 0 < q'(\Delta\xi,\Delta\eta) < \Delta\xi/2 \qquad (2.7)$$

Далее, переходя к двойному пределу в обеих частях неравенства (2.7) при $\Delta\xi \to 0, \Delta\eta \to 0$, имеем:

$$0 \le \lim_{\substack{\Delta\xi\to 0\\ \Delta\eta\to 0}} q'(\Delta\xi,\Delta\eta) \le \lim_{\substack{\Delta\xi\to 0\\ \Delta\eta\to 0}} \Delta\xi/2 = \lim_{\Delta\xi\to 0} \Delta\xi/2 = 0, \text{ откуда } \lim_{\substack{\Delta\xi\to 0\\ \Delta\eta\to 0}} q'(\Delta\xi,\Delta\eta) = 0 \qquad (2.8)$$

Значит

$$\lim_{\substack{\Delta\xi\to 0\\ \Delta\eta\to 0}} I_1^{(2)} = -1/(8\lambda_1)\lim_{\substack{\Delta\xi\to 0\\ \Delta\eta\to 0}} \ln[(1-e^{-\lambda_1\Delta\eta/2})^2 + 4e^{-\lambda_1\Delta\eta/2}\sin^2\lambda_1 q'(\Delta\xi,\Delta\eta)] = \infty \qquad (2.9)$$

Но, по доказанному, $\left|I_1^{(1)}\right| \le C_1$, где C_1 – некоторая константа. Отсюда,

$$\lim_{\substack{\Delta\xi\to 0\\ \Delta\eta\to 0}} I_1 = Bb/4 \lim_{\substack{\Delta\xi\to 0\\ \Delta\eta\to 0}} (I_1^{(1)} + I_1^{(2)}) \ge Bb/4(-C_1 + \lim_{\substack{\Delta\xi\to 0\\ \Delta\eta\to 0}} I_1^{(2)}) = \infty, \text{ что дает } \lim_{\substack{\Delta\xi\to 0\\ \Delta\eta\to 0}} I_1 = \infty \qquad (2.10)$$

2.2 Исследуется на ограниченность по модулю в области $0 < \Delta\xi \le a,\ 0 < \Delta\eta \le b$ отношение второго повторного ряда в (1.1) и $\Delta\xi, \Delta\eta$. С использованием формул преобразования произведения синуса и косинуса в разность синусов с представлением её интегралом, имеем:

$$I_2 = \frac{1}{\Delta\xi\,\Delta\eta}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n^2 w_{mn}^* \cos 2\mu_n\eta \sin\lambda_m\Delta\xi/2 \sin\mu_n\Delta\eta/2 = \frac{1}{2\,\Delta\xi\,\Delta\eta}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n^2 w_{mn}^* \sin\lambda_m\Delta\xi/2 \times$$

$$\times[\sin\mu_n(2\eta+\Delta\eta/2) - \sin\mu_n(2\eta-\Delta\eta/2)] = \frac{1}{2\,\Delta\xi\,\Delta\eta}\sum_{m=1}^{\infty}\sin\lambda_m\Delta\xi/2\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n^3\, w_{mn}^* \int_{2\eta-\Delta\eta/2}^{2\eta+\Delta\eta/2}\cos\mu_n l\, d\,l = \frac{1}{2\,\Delta\xi\,\Delta\eta}\times$$

$$\times\sum_{m=1}^{\infty}\sin\lambda_m\Delta\xi/2\int_{2\eta-\Delta\eta/2}^{2\eta+\Delta\eta/2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n^3\, w_{mn}^* \cos\,\mu_n l\right] d\,l = \frac{1}{2\,\Delta\xi\,\Delta\eta}\int_{2\eta-\Delta\eta/2}^{2\eta+\Delta\eta/2}\left[\sum_{m=1}^{\infty}\sin\lambda_m\Delta\xi/2\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n^3\, w_{mn}^* \cos\,\mu_n l\right] d\,l \quad (2.11)$$

Здесь последовательное вынесение интегрирования за знаки суммирования ординарных рядов допустимо, так как с использованием неравенства (1.2) при $k = 0$, $s = 3$ получаем

$$\left|\mu_n^3\, w_{mn}^* \cos\mu_n l\right| \le \mu_n^3\, w_{mn}^* \le C/(\lambda_m^{3/2}\mu_n^{3/2}),\ \left|\sin\lambda_m\Delta\xi/2\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n^3\, w_{mn}^*\cos\mu_n l\right| \le C/\lambda_m^{3/2}\sum_{n=1}^{\infty}1/\mu_n^{3/2}, \quad (2.12)$$

откуда каждый подынтегральный тригонометрический ряд мажорируется числовым сходящимся рядом, а значит, сходится равномерно относительно l [13]. Но из их равномерной сходимости последовательно следует, что сумма каждого ряда есть непрерывная функция l [13]. Поэтому, применяя к интегралу в (2.11) интегральную теорему о среднем [13], находим

$$I_2 = \frac{1}{2\,\Delta\xi}\sum_{m=1}^{\infty}\sin\lambda_m\Delta\xi/2\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n^3\, w_{mn}^*\cos\mu_n l', \text{ где } 0 < \eta \le 2\eta - \Delta\eta/2 \le l' \le 2\eta + \Delta\eta/2 \le \eta + b < 2b \quad (2.13)$$

Далее с использованием формулы (2.1) имеем:

$$\lambda_m\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n^3\, w_{mn}^* \cos\,\mu_n l' = B\frac{\partial}{\partial l'}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n \sin\mu_n l'}{(\lambda_m^2+\mu_n^2)^2} = \frac{Bb}{4}\left[-b\frac{ch\,\lambda_m l'}{sh^2\, b\lambda_m} + \frac{ch\lambda_m(b-l')}{\lambda_m sh\, b\lambda_m} - l'\,\frac{sh\lambda_m(b-l')}{sh\, b\lambda_m}\right] \quad (2.14)$$

Таким образом, ряд (2.13) с применением (2.14) приводится к виду:

$$I_2 = \frac{Bb}{8}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{sh\, b\lambda_m}\left[-b\frac{ch\,\lambda_m l'}{sh\, b\lambda_m} + \frac{ch\lambda_m(b-l')}{\lambda_m} - l'\, sh\lambda_m(b-l')\right]\frac{\sin\lambda_m\Delta\xi/2}{\lambda_m\Delta\xi} \qquad (2.15)$$

Но для общего члена B_m ряда (2.15) с учётом неравенств в (2.13) и (2.3) приходим к оценке

$$|B_m| \le \frac{1}{2}\left[b\frac{ch\,\lambda_m l'}{sh^2\, b\lambda_m} + \frac{ch\lambda_m(b-l')}{\lambda_m sh\, b\lambda_m} + l'\,\frac{|sh\lambda_m(b-l')|}{sh\, b\lambda_m}\right]\frac{|\sin\lambda_m\Delta\xi/2|}{\lambda_m\Delta\xi/2} \le \frac{C_{ba}}{2}\left[\ bC_{ba}e^{\lambda_m(\eta-b)} +\right.$$

$$\left. + (2b+1/\lambda_1)\begin{cases} e^{\lambda_m(\eta-b)} \text{при}\, l' \ge b \\ e^{-\lambda_m\eta}, \text{ если } l' < b\end{cases}\right] \le \frac{C_{ba}}{2}(bC_{ba} + 2b + 1/\lambda_1)e^{\lambda_m \max(\eta-b,-\eta)} \qquad (2.16)$$

Поэтому ряд (2.15) мажорируется числовым сходящимся рядом, а значит его сумма по модулю ограничена относительно параметров $\Delta\xi, \Delta\eta$ в области $0 < \Delta\xi \le a,\ 0 < \Delta\eta \le b$.

2.3 Исследуется на ограниченность по модулю в области $0<\Delta\xi\le a$, $0<\Delta\eta\le b$ отношение третьего повторного ряда в (1.1) и $\Delta\xi,\Delta\eta$.

С применением формул преобразования произведения синуса и косинуса в разность синусов с представлением её интегралом, имеем:

$$I_3=\frac{1}{\Delta\xi\,\Delta\eta}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}^{*}\mu_n^2\,\cos 2\lambda_m\xi\,\sin\lambda_m\Delta\xi/2\sin^2\mu_n\eta\sin\mu_n\Delta\eta/2=\frac{1}{2\,\Delta\xi\,\Delta\eta}\sum_{m=1}^{\infty}[\sin\lambda_m(2\xi+\Delta\xi/2)-$$

$$-\sin\lambda_m(2\xi-\Delta\xi/2)]\sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}^{*}\mu_n^2\sin^2\mu_n\eta\sin\mu_n\Delta\eta/2=\frac{1}{2\,\Delta\xi\,\Delta\eta}\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m\int_{2\xi-\Delta\xi/2}^{2\xi+\Delta\xi/2}\cos\lambda_m t\,dt\sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}^{*}\mu_n^2\,\sin^2\mu_n\eta\times$$

$$\times\sin\mu_n\Delta\eta/2=\frac{1}{2\,\Delta\xi\,\Delta\eta}\int_{2\xi-\Delta\xi/2}^{2\xi+\Delta\xi/2}\left[\sum_{m=1}^{\infty}\cos\lambda_m t\;\lambda_m\sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}^{*}\mu_n^2\,\sin^2\mu_n\eta\sin\mu_n\Delta\eta/2\right]dt \qquad (2.17)$$

Здесь вынесение интегрирования за знак суммирования ординарного тригонометрического ряда с индексом суммирования m допустимо, так как с использованием неравенства (1.2) при $k=1$, $s=2$ последовательно приходим к оценкам

$$\left|\lambda_m w_{mn}^{*}\,\mu_n^2\cos\lambda_m t\,\sin^2\mu_n\eta\sin\mu_n\Delta\eta/2\right|\le\lambda_m w_{mn}^{*}\,\mu_n^2\,\le C/(\lambda_m^{3/2}\mu_n^{3/2}) \qquad (2.18)$$

$$\left|\cos\lambda_m t\;\lambda_m\sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}^{*}\,\mu_n^2\,\sin^2\mu_n\eta\sin\mu_n\Delta\eta/2\right|\le C/\lambda_m^{3/2}\sum_{n=1}^{\infty}1/\mu_n^{3/2}<\infty \qquad (2.19)$$

Но из (2.19) следует, что подынтегральный в (2.17) ординарный триг. ряд с индексом суммирования m мажорируется числовым сходящимся рядом, а значит сходится равномерно относительно l [13], что, в силу теоремы 5 [13, **434**], и приводит к требуемому результату.

Далее, из равномерной сходимости названного ряда следует, что его сумма есть непрерывная функция l [13]. Поэтому, применяя в (2.17) интегральную теорему о среднем [13], получаем

$$I_3=\frac{1}{2\,\Delta\eta}\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m w_{mn}^{*}\mu_n^2\cos\lambda_m t'\sum_{n=1}^{\infty}\,\sin^2\mu_n\eta\,\sin\mu_n\Delta\eta/2=\frac{1}{2\,\Delta\eta}\sum_{n=1}^{\infty}\,\sin^2\mu_n\eta\,\sin\mu_n\Delta\eta/2\,\mu_n^2\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m w_{mn}^{*}\times$$

$$\times\cos\lambda_m t',\ \text{где}\ \ 0<\xi\le 2\xi-\Delta\xi/2\le t'(\Delta\xi,\Delta\eta)\le 2\xi+\Delta\xi/2\le a+\xi<2a \qquad (2.20)$$

Здесь с учётом (2.18), в силу теоремы 3 [13, **393**], мы также изменили порядок суммирования.

Заметим теперь, что с применением формулы в [4, с.165], ряд в (2.20) приводится к виду

$$I_3=\frac{B}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\sin^2\mu_n\eta\,\frac{\sin\,\mu_n\Delta\eta/2}{\mu_n\Delta\eta/2}\left[-\frac{1}{2\mu_n^2}+\frac{a}{4\mu_n}\frac{ch\,\mu_n(a-t')}{sh\,a\,\mu_n}-\frac{a\,(a-t')}{4}\frac{sh\,\mu_n(a-t')}{sh\,a\,\mu_n}+\frac{a^2}{4}\frac{ch\,\mu_n(a-t')\,ch\,a\,\mu_n}{sh^2 a\,\mu_n}\right],$$

так как $0\le\lambda_1 t'\le 2\pi$ (2.21)

Но, с использованием (2.3), (2.20) для общего члена $A_n(t',\Delta\eta)$ ряда (2.21) имеем оценку

$$\left|A_n(t',\Delta\eta)\right|\le\left|\sin^2\mu_n\eta\right|\left|\frac{\sin\mu_n\Delta\eta/2}{\mu_n\Delta\eta/2}\right|\left[\frac{1}{2\mu_n^2}+\frac{a\,C_{ab}e^{\mu_n(|a-t'|-a)}}{4}\left(\frac{1}{\mu_n}+a+t'+a\,C_{ab}\right)\right]\le\frac{1}{2\mu_n^2}+\frac{a\,C_{ab}}{4}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{\mu_1}+3a+a\,C_{ab}\right)\begin{cases}e^{-\mu_n\xi} & \text{при } t'\le a\\ e^{\mu_n(\xi-a)} & \text{при } t'>a\end{cases}\le\frac{1}{2\mu_n^2}+\frac{a\,C_{ab}}{4}\left(\frac{1}{\mu_1}+3a+a\,C_{ab}\right)e^{\mu_n\max(-\xi,\,\xi-a)} \qquad (2.22)$$

Оценка (2.22) показывает, что ряд (2.21) мажорируется числовым сходящимся рядом. Отсюда, его сумма по модулю ограничена относительно $\Delta\xi,\Delta\eta$ в области $0<\Delta\xi\le a,\ 0<\Delta\eta\le b$ [13].

2.4 При значениях $x=\xi, y=\eta$ вычисляются двойные пределы, когда $\Delta\xi\to 0,\Delta\eta\to 0$, во вторых частных производных – от прогиба по y или x и в изгибающих моментах пластины.

Пусть, по доказанному, $|I_i|\le C_i$, где $i=2,3$, C_i – некоторые константы. Тогда, с учётом (2.2), (2.13) и (2.17) имеем:

$$\partial^2 w(\xi,\eta)/\partial y^2=-I_1/4+I_2/2+I_3/4\le -I_1/4+C_2/2+C_3/4 \qquad (2.23)$$

Поэтому, переходя к двойному пределу в (2.23) и учитывая (2.10), находим

$$\lim_{\substack{\Delta\xi\to 0\\ \Delta\eta\to 0}}\partial^2 w(\xi,\eta)/\partial y^2\le\lim_{\substack{\Delta\xi\to 0\\ \Delta\eta\to 0}}(-I_1/4+C_2/2+C_3/4_2)=-\infty,\ \text{что дает}\ \lim_{\substack{\Delta\xi\to 0\\ \Delta\eta\to 0}}\partial^2 w(\xi,\eta)/\partial y^2=-\infty \qquad (2.24)$$

Аналогично, изменяя порядок суммирования в повторном ряде для $\partial^2 w(\xi,\eta)/\partial x^2$ с применением (1.2) при $k = 0$, $s = 2$ и повторяя рассуждения с точностью до обозначений, получаем

$$\lim_{\substack{\Delta\xi\to 0\\ \Delta\eta\to 0}} \partial^2 w(\xi,\eta)/\partial x^2 = -\infty \qquad (2.25)$$

Следовательно, переходя к двойному пределу в выражениях для изгибающих моментов пластины (101) [4] в точке (ξ,η) и учитывая (2.24), (2.25), приходим к результатам

$$\lim_{\substack{\Delta\xi\to 0\\ \Delta\eta\to 0}} M_x(\xi,\eta) = \infty,\ \lim_{\substack{\Delta\xi\to 0\\ \Delta\eta\to 0}} M_y(\xi,\eta) = \infty \qquad (2.26)$$

Таким образом, результаты (2.26) согласуются с особенностью в точке (ξ,η) изгибающих моментов в пластине, выделенной С.П.Тимошенко [4] и Г.Ю.Джанелидзе [8] после подстановки решения Навье для прогиба при сосредоточенной силе в выражения для моментов. Обобщая, с учётом [15], [9], значения физических величин – изгибающих и крутящего моментов, в отличие от перерезывающих сил [10,11], при предельном переходе от локальной нагрузки к сосредоточенной в замкнутом прямоугольнике плана пластины переходят в значения изгибающих и крутящего моментов по Навье при сосредоточенной силе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. М: Мир, 1971. 192с.
2. Сапонджян О.М. Изгиб тонких упругих плит. Ереван: Айастан, 1975. 436с.
3. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1965. 433с.
4. Тимошенко С.П., Войновский Кригер С. Пластинки и оболочки. Пер. с англ. М.: Физматгиз, 1963. 635с.
5. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. М.–Л.: Гостехтеориздат, 1949. 784с.
6. Галеркин Б.Г. Собрание сочинений. Т.2. М.: Изд. АН СССР, 1953. 438с.
7. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближённые методы высшего анализа. М.–Л.: Государственное изд. технико-теоретической литературы, Петербург, 1949. 695с.
8. Джанелидзе Г.Ю. Суммирование решения Навье для прямоугольной пластины. //В сб.: «Прикладная математика и механика». М.–Л.: Изд. АН СССР, 1939. Т.III. № 4. С.155–162.
9. Сейранян С.П. О парадоксе в поведении крутящего момента в окрестности точки приложения сосредоточенной силы // Актуальные проблемы механики сплошной среды. Труды III Меж-дународной конференции, посвящ. 100-летию акад. Н.Х. Арутюняна, г. Цахкадзор, Армения, 8 – 12 октября, 2012. Т.2. С.194 – 198.
10. Сейранян С.П. Об одном решении Навье для частично-нагружённой прямоугольной пластины // Математика и механика. Всеросийская конференция, посвященная 130-летию Томского гос. унта. 22 – 25 сентября, 2008, тезисы докл., с.269.
11. Сейранян С.П. О предельном переходе в прямоугольной пластине от распределённого по прямоугольнику равномерного внешнего давления к сосредоточенной силе в перерезывающих силах. Еще один парадокс // Проблемы динамики деформируемых сред. Труды VIII международной конференции, Горис – Степанакерт, 22 – 26 сентября , 2014, с. 398 – 402.
12. Сейранян С.П. Об одном решении Навье для частично-нагруженной прямоугольной пластины // Вестник Томского гос.-унта. Математика и механика. 2009, № 1(5), с.82 –95.
13. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Физматлит, Тт.1 – 3. 2008. 2272 с.
14. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.

1. Сейранян С.П. О предельном переходе от локальной равномерной нагрузки к сосредоточенной во вторых частных производных от прогиба прямоугольной пластины // Проблемы ди-намики взаимодействия деформируемых сред. Труды VII международной конференции, г. Горис – Степанакерт, Армения – Карабах, 19 – 23 сентября, 2011, с. 377 – 385.

<u>Сведения об авторе:</u>

Сейранян Сурен Паруйрович – канд. физ.-мат. наук, ст. научн. сотр. Института механики НАН РА. **Тел.:** (+374 10) 54 28 38, (+374 55) 54 28 38, **E-mail:** seysuren@yandex.ru.

КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В ВЕРШИНАХ РАДИАЛЬНОЙ ТРЕЩИНЫ В СТЕНКЕ ТРУБЫ С ТОНКИМ ПОКРЫТИЕМ

Соболь Б.В., Соловьев А.Н., Рашидова Е.В., Васильев П.В.

Метод, развитый в работах Г.Я. Попова, обобщён при построении разрывных решений в рядах Фурье. Это позволяет свести задачу механики деформируемого твёрдого тела для ограниченной области, содержащей разрез, к решению интегрального уравнения (или системы) относительно разрывов определяемых функций. Метод реализован в применении к решению задачи теории упругости для сечения трубы (плоская деформация), ослабленного внутренней радиальной трещиной. Труба нагружена гидростатическим давлением; на её внешнюю поверхность нанесено тонкое покрытие, улучшающее её физико-механические свойства.

В качестве модели покрытия использованы специальным образом сформулированные граничные условия. С целью проверки адекватности принятой модели, проведён цикл численных экспериментов. В одних случаях, проведены расчёты сечения трубы с покрытием в конечно-элементных пакетах ANSYS и COMSOL. В других, с использованием широких возможностей пакета FlexPDE была построена модель трубы без покрытия, но с применением специальных граничных условий. Сравнение полученных результатов позволило удостовериться в адекватности построенных моделей в определённом диапазоне геометрических и физических параметров.

Задача сведена к решению сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши относительно производной скачка тангенциальной компоненты вектора перемещений на берегах трещины. Его решение строится методом коллокаций с заранее выделенной особенностью. Конечной целью исследования является определение значений коэффициента интенсивности напряжений в вершинах трещины.

1. Обобщённый метод тригонометрических рядов. Рассмотрим плоскую задачу теории упругости для ограниченной области $|\xi| \le l$, $l_1 \le \eta \le l_2$ в произвольной ортогональной системе координат. Предположим, что компоненты вектора перемещений и их нормальные производные терпят разрыв на некотором отрезке вдоль одной из координатных линий:

$$u_i(\xi^* - 0, \eta) - u_i(\xi^* + 0, \eta) = \mathrm{X}_i(\eta) \qquad (i = 1, 2)$$

$$\left.\frac{\partial u_i}{d\xi}\right|_{(\xi^* - 0, \eta)} - \left.\frac{\partial u_i}{\partial \xi}\right|_{(\xi^* + 0, \eta)} = \Psi_i(\eta) \qquad (\eta_1 \le \eta \le \eta_2) \tag{1.1}$$

причём, две из этих четырех функций предполагаются известными, а две другие – подлежащими определению.

Решение задачи строится в виде $(\lambda_k = k\pi\lambda^{-1})$:

$$u_i(\xi, \eta) = \frac{a_{0i}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{ki}\ (\eta) \cos \lambda_k \xi + b_{ki}\ (\eta) \sin \lambda_k \xi$$

$$a_{ki} = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} u_i\ (\xi, \eta) \cos \lambda_k \xi d\xi\,,\ b_{ki} = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} u_i\ (\xi, \eta) \sin \lambda_k \xi d\xi \tag{1.2}$$

При реализации разложений вида (1.2) в уравнениях равновесия (или движения) необходимо предварительно определить вид разложений:

$$\frac{\partial u_i}{\partial \xi} = \frac{c_{0i}\ (\eta)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{ki}\ (\eta) \cos \lambda_k \xi + d_{ki}\ (\eta) \sin \lambda_k \xi$$

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial \xi^2} = \frac{e_{0i}\ (\eta)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e_{ki}\ (\eta) \cos \lambda_k \xi + g_{ki}\ (\eta) \sin \lambda_k \xi \tag{1.3}$$

При построении разрывных решений в тригонометрических рядах воспользуемся идеей обобщённого метода интегральных преобразований [1]. Если при определении коэффициентов разложений (1.3) разбить отрезок интегрирования на два $\xi \in [-l, \xi^* - 0) \cup (\xi^* + 0, l]$ и применить формулу интегрирования по частям, то, с учётом введённых обозначений (1.1), непосредственные вычисления позволяют выразить коэффициенты разложений (1.3) через a_{ki}, b_{ki}, X_i и Ψ_i (k = 0, 1, 2, …; i = 1, 2):

$$
\begin{aligned}
& c_{ki}(\eta) = \lambda_k\, b_{ki}(\eta) + l^{-1}\cos\lambda_k \xi^* X_i(\eta) + (-1)^k l^{-1} u_i \Big|_{(-l,\eta)}^{(l,\eta)} \\
& d_{ki}(\eta) = -\lambda_k\, a_{ki}(\eta) + l^{-1}\sin\lambda_k \xi^* X_i(\eta) \\
& e_{ki}(\eta) = \lambda_k\, d_{ki}(\eta) + l^{-1}\cos\lambda_k \xi^* \Psi_i(\eta) + (-1)^k l^{-1} \frac{\partial u_i}{\partial \xi}\Bigg|_{(-l,\eta)}^{(l,\eta)} \\
& g_{ki}(\eta) = -\lambda_k\, c_{ki}(\eta) + l^{-1}\sin\lambda_k \xi^* \Psi_i(\eta)
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

В результате, система уравнений равновесия (или движения) распадается на бесконечную последовательность систем обыкновенных дифференциальных уравнений для каждой из гармоник. Очевидно, граничные условия задачи на координатных линиях $\eta = l_1$, $\eta = l_2$ предварительно должны быть представлены в виде соответствующих разложений.

Полученные частные решения краевых задач для каждой из гармоник суммируются в ряды, после чего представляется возможным удовлетворить двум заданным условиям вдоль линий разрыва. Описанный алгоритм позволяет в общем случае свести задачу к системе пары интегральных уравнений второго рода относительно двух функций из (1.1), подлежащих определению.

Очевидно, в случае симметрии задачи относительно координатной линии $\xi = \xi^*$, между двумя неизвестными функциями из (1.1) можно установить простую связь и одну из них исключить из рассмотрения, а каждое из разложений (1.2), (1.3) будет содержать только чётные (или нечётные) гармоники.

Заметим, что описанный метод, в сочетании со стандартным интегральным преобразованием, может быть эффективно использован при построении разрывных решений трёхмерных задач теории упругости. В качестве примера подобного сочетания можно назвать работу [2], где вдоль оси, пересекающей разрез, применяется обобщённое интегральное преобразование Фурье, а вдоль оси, где все определяемые функции являются гладкими – стандартное интегральное преобразование Фурье.

2. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о плоской деформации упругого кольца $a \le r \le b$, содержащего разрез вдоль луча $\varphi = 0$ на интервале $c \le r \le d$. На внутренней границе кольца, действует гидростатическое давление интенсивности p; внешняя граница $(r = b)$, усиленная тонким гибким покрытием толщины h, свободна от внешних воздействий. Очевидно, при такой нагрузке трещина будет находиться в раскрытом состоянии, и её берега предполагаются свободными от напряжений.

В качестве математической модели тонкого покрытия сформулируем специальные граничные условия на внешней границе кольца при $r = b$ [3]:

$$
\sigma_r^{(1)} = 0, \quad \frac{h}{b}\frac{d\sigma_\varphi^{(1)}}{d\varphi} = \tau_{r\varphi}^{(2)} \tag{2.1}
$$

На внутренней границе кольца при $r = a$ имеем:

$$
\sigma_r^{(1)} = -p, \qquad \tau_{r\varphi}^{(2)} = 0 \tag{2.2}
$$

Верхний индекс соответствует основному материалу кольца (1) и покрытию (2). В дальнейшем, отсутствие верхнего индекса соответствует материалу кольца. Решение уравнений равновесия в цилиндрической системе координат, в силу симметрии задачи относительно луча $\varphi = 0$, будем строить в виде

$$u(r, \varphi) = \frac{a_0(r)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\ (r) \cos k\varphi\ ,\ \upsilon(r,\ \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k\ (r) \sin k\varphi \tag{2.3}$$

Здесь $u(r, \varphi)$ и $\upsilon(r,\ \varphi)$ – соответственно, радиальная и тангенциальная составляющие вектора перемещений в полярной системе координат. Коэффициенты разложений (2.1) имеют обычный вид:

$$a_k(r) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u\ (r, \varphi) \cos k\varphi\, d\varphi,\ b_k(r) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \upsilon(r, \varphi) \sin k\varphi\, d\varphi$$

Здесь задача сводится к определению функций

$$\upsilon\Big|_{(r,+0)}^{(r,-0)} = X(r)\ ,\ \partial u / \partial\varphi\Big|_{(r,+0)}^{(r,-0)} = \Psi(r) \tag{2.4}$$

на интервале $c \le r \le d$, $\varphi = 0$. Будем считать, что вне этого интервала функции X и Ψ тождественно обращаются в нуль.

Компонента $\tau_{r\varphi}$ тензора напряжений на берегах трещины обращается в нуль. Этот факт позволяет установить зависимость между скачками (2.2) и исключить функцию Ψ из рассмотрения $\Psi = -r^2(X / r)'$.

Коэффициенты разложений Фурье функций

$$\frac{\partial\upsilon}{\partial\varphi} = \frac{c_0(r)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k\ (r) \cos k\varphi\,,\ \ \frac{\partial u}{\partial\varphi} = \sum_{k=1}^{\infty} e_k\ (r) \sin k\varphi$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = \frac{d_0(r)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} d_k\ (r) \cos k\varphi\,,\ \ \frac{\partial^2\upsilon}{\partial\varphi^2} = \sum_{k=1}^{\infty} g_k\ (r) \sin k\varphi$$

в силу рассуждений, приведённых выше, будет иметь вид:

$$\begin{gathered} c_k = X\pi^{-1} + kb_k\ ,\ e_k = -ka_k \\ d_k = r^2\pi^{-1}(r^{-1}X)' - k^2 a_k,\ \ g_k = -k\pi^{-1}X - k^2 b_k \end{gathered} \tag{2.5}$$

В результате, получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для каждой гармоники разложений (2.1):

$$\begin{cases} a_k'' + \dfrac{a_k'}{r} - (1 + \dfrac{1-2\nu}{2(1-\nu)}k^2)\dfrac{a_k}{r^2} + \dfrac{k}{2(1-\nu)}\dfrac{b_k'}{r} - \dfrac{3-4\nu}{2(1-\nu)}\dfrac{k}{r^2}b_k = f_1(r) \\ b_k'' + \dfrac{b_k}{r} - (1 + \dfrac{2(1-\nu)}{1-2\nu)}k^2)\dfrac{b_k}{r^2} + \dfrac{k}{1-2\nu}\dfrac{a_k'}{r} - \dfrac{3-4\nu}{1-2\nu}\dfrac{k}{r^2}a_k = f_2(r) \end{cases}$$

$$f_1(r)=\frac{1}{\pi r}\left(\frac{X}{r}-\frac{\nu}{1-\nu}X'\right),\quad f_2(r)=\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{k}{\pi r^2}X \tag{2.6}$$

где k = 0, 1, 2, . . . , $b_0=0$; здесь и далее ν – коэффициент Пуассона, E – модуль упругости основного материала кольца.

Общее решение системы (2.4) строится методом вариации произвольных постоянных и имеет вид:

$$\begin{aligned}
a_k(r)&=\tfrac{1}{8}r\pi^{-1}(1-\nu)^{-1}[-(k-2)t_{k-2}(r)+(k+2(1-2\nu))t_k(r)-(k-2(1-2\nu))t_k(r)-\\
&-(k+2)t_{-k-2}(r)]+C_{1k}r^{k-1}+C_{2k}r^{1-k}+C_{3k}r^{k+1}+C_{4k}r^{-k-1}\\
b_k(r)&=\tfrac{1}{8}r\pi^{-1}(1-\nu)^{-1}[-(k-2)t_{k-2}(r)+(k-4(1-\nu))t_{-k}(r)+(k+4(1-\nu))t_k(r)-\\
&-(k+2)t_{-k-2}(r)]-C_{1k}r^{k-1}+C_{2k}\frac{k-4(1-\nu)}{k+2(1-2\nu)}r^{-k+1}-C_{3k}\frac{k+4(1-\nu)}{k-2(1-2\nu)}r^{k+1}+C_{4k}r^{-k-1}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

$$t_\alpha(r)=r^\alpha\int_c^r\rho^{-\alpha-2}X(\rho)d\rho$$

Постоянные $C_{ik}\,(i=1,\ldots,4)$ определяются в результате выполнения граничных условий (2.1), (2.2).

3. Интегральное уравнение. Удовлетворение граничному условию свободных берегов трещины позволяет задачу к решению сингулярного интегрального уравнения I рода с ядром Коши в безразмерных переменных:

$$\int_{-1}^{1}g'(\zeta)\left[\frac{1}{z-\xi}+L(\zeta,z)\right]d\zeta=-\pi\, f(z) \tag{3.1}$$

Здесь $g'(\zeta)=\chi'(a\zeta-d),\quad f(z)=\dfrac{2(1-\nu_2)}{G_2}p(az-d)$

Сингулярная часть ядра соответствует задаче о конечной трещине в неограниченной упругой среде; регулярная часть отражает влияние многочисленных геометрических и физических параметров задачи. Его решение строится методом коллокаций в виде линейной комбинации базисных функций, явно учитывающих особенность в окрестности вершин трещины:

$$g'(\zeta)=\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\sum_{n=0}^{m}X_nT_n(\zeta), \tag{3.2}$$

при этом, $g(\zeta)=-\sqrt{1-z^2}\sum_{n=1}^{m}X_n\dfrac{U_{n-1}(\zeta)}{n}$, (3.3)

где T_n, U_n – полиномы Чебышева I и II рода соответственно, X_n – коэффициенты при базисных функциях, m – количество узловых точек.

Узловые точки – корни полиномов Чебышева:

$$z_i=\cos\frac{\pi(2i-1)}{2m},\quad i=1,2,\ldots,m \tag{3.4}$$

Зная $g'(z)$, легко установить значение коэффициента интенсивности нормальных напряжений в окрестности вершин трещины:

$$K_i=-\lim_{z\to1-0}(\theta_p\sqrt{2\pi(1-z)}g'(z)),$$

где $\theta_p=\dfrac{G_2}{1-\nu_2}$.

Отметим, что аналогичная постановка задачи без учёта покрытия была исследована ранее в [4] на основе описанного подхода и последующему определению значений коэффициента интенсивности напряжений в окрестности вершин трещины.

4. Адекватность модели. С целью проверки адекватности принятой модели, проведён цикл численных экспериментов. В одном случае, в пакете ANSYS, строится конечно-элементная модель сечения трубы, усиленной внешним покрытием. На внутреннюю поверхность трубы действует гидростатическое давление. Материал трубы – сталь ($\nu = 0.28$, E = 210 ГПа), материал покрытия – вольфрам ($\nu = 0.29$, E = 350 ГПа). Особое внимание уделено детализации сетки конечных элементов в области покрытия. Форма конечного элемента установлена как Quadrilateral. В пакете COMSOL построена аналогичная конечно-элементная модель. В данном случае форма конечного элемента установлена как Triangular. Также в пакете FlexPDE была построена модель трубы с покрытием, соответствующая двум предыдущим моделям. Проведён ряд расчётов моделей, при этом толщина покрытия варьировалась в пределах от 1 до 10% относительно толщины стенки трубы. Получены значения напряжений внутри объекта, а также на внешней и внутренней поверхностях. Проанализировав полученные результаты, можно сделать вывод о том, что построенные модели средствами FlexPDE, ANSYS и COMSOL идентичны, уравнения, применяемые при моделировании (FlexPDE), адекватно отражают поставленную задачу. При этом, погрешность решений составляет от 0,1% до 2,5%, что позволяет говорить о достоверности полученных результатов и возможности дальнейшего моделирования граничных условий.

Во втором случае, с использованием широких возможностей пакета FlexPDE, была построена модель трубы без покрытия, но с применением специальных граничных условий. Сравнение полученных результатов позволило удостовериться в адекватности построенной модели. При этом, погрешность решения составляет от 1% до 2,5% при толщине моделируемого покрытия до 5% относительно толщины стенки трубы.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 14-08-00142_а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 382 с.
2. Александров В.М., Сметанин Б.И., Соболь Б.В. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. М.: Наука, 1993. 224 с.
3. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1979. 486 с.
4. Ватульян А.О., Соболь Б.В. Об одном эффективном методе построения разрывных решений в задачах механики для тел конечных размеров// Изв. РАН. Механика твёрдого тела. 1995. №6. С.62–69.

Сведения об авторах:

Борис В. Соболь – зав. кафедрой «Информационные технологии», профессор, доктор техн. наук, лауреат премии Правительства РФ. Россия, Ростов-на-Дону, Донской государственный технический университет. **E-mail:** b.sobol@mail.ru

Аркадий Н. Соловьев – д.ф.-м.н. заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики Донского государственного технического университета, профессор кафедры математического моделирования Южного федерального университета, заведующий лабораторией механики активных материалов Южного научного центра РАН, Ростов-на-Дону, Россия.

Рашидова В. Елена – к.ф.-м.н., профессор кафедры «Информационные технологии». Россия, Ростов-на-Дону, Донской государственный технический университет.

Васильев В. Павел – аспирант кафедры «Информационные технологии», Россия, Ростов-на-Дону, Донской государственный технический университет.

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АРМИРОВАННЫХ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ И КОНСТРУКЦИЙ С ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ

Соловьев А.Н., Зиборов Е.Н., Кириллова Е.В., Шевцов С.Н.

Работа посвящена разработке методов определения механических свойств армированных однонаправленных и слоистых композитных материалов, а также разработке методики определения усталостной долговечности лонжерона лопасти вертолета, отдельные детали которой выполнены из композитных материалов (КМ). В работе представлены новые методы масштабного моделирования армированных КМ, целью которых является построение достоверных математической и геометрической моделей, применяемых в дальнейшем для наиболее точных расчётов изделий из КМ с сложной, неоднородной структурой волокон. В современных КМ на их механические характеристики большое влияние оказывает не только количественные и качественные характеристики компонентов структуры, но и их относительная ориентация в материале. В работе предложены методы моделирования композитного материала с различными относительными направлениями волокон и их влияние на параметры механических характеристик и долговечности изделия. Кроме этого, произведено моделирование натурных стендовых испытаний на усталостную долговечность образца лопасти вертолета и сопоставление полученных данных об усталостных характеристиках материала с результатами испытаний.

Анализ литературы по данной теме показывает её актуальность. Так в работе [1] предложены способы моделирования свойств анизотропных композитов. А также способы моделирования дефектов в композитном материале. В работе [2] представлены методы моделирования неоднородностей структуры материалов композит, а также скрытых дефектов структуры. Были рассмотрены различные критерии, влияющие на жизненный цикл изделия из композита. В работе [3] представлены новые методы масштабного моделирования (в том числе, 3D) нанокомпозита, целью которого является получение достоверной информации при расчётах. Этот новый подход позволяет интегрировать собственно отдельные структуры материалов в систему. Метод был проиллюстрирован с применением свойств нанокомпозита и структуры – свойств интегрированной модели. В работе [4] было проведено множество опытов с целью определения механизма передачи напряжений через компоненты в структуре композита.

В данной работе представлена методика определения механических свойств армированного КМ с дальнейшим определением усталостных характеристик.

1. Постановка задачи. Материал лопасти вертолета – армированный КМ. Состав компонентов которого: волокно – стекловолокно (в материале 65%), матрица – эпоксидная смола (в материале 35%). Механические характеристики материалов: эпоксидная смола ($E = 2{,}55 \cdot 10^9$ Мпа, $\upsilon = 0{,}22$), стекловолокно ($E = 8{,}7 \cdot 1010$ Мпа, $\upsilon = 0{,}22$).

Лонжерон лопасти вертолета представляет собой полую несущую конструкцию, состоящую из множества слоёв однонаправленного армированного композита. Укладка произведена таким образом, что направления волокон составляют ±30° относительно плоскости сечения лонжерона. Хвостовое оперение (обшивка) состоит из того же материала, однако, с отличной схемой укладки, которая составляет 0°, +45°, -45°, 0°. Используя фотографии микрошлифа материала лонжерона, возможно судить о величине слоёв и плотности расположения в них волокон. Деформацию данного композита будем рассматривать в рамках линейной анизотропной теории упругости [5].

Исходя из структур материалов, полученных из фотографий микрошлифа, для определения усталостных характеристик материалов лонжерона и обшивки хвостового оперения решаемая задача была разбита на отдельные этапы:

1. Определение коэффициентов матрицы упругих постоянных отдельного слоя КМ.
2. Определение коэффициентов матрицы упругих постоянных представительного объёма материала обшивки хвостового оперения лопасти вертолета.
3. Определение коэффициентов матрицы упругих постоянных представительного объёма материала лонжерона лопасти вертолета.
4. 3D моделирование стендовых испытаний лопасти вертолета с использованием полученных ранее матриц упругих постоянных материалов лонжерона и хвостовика с целью определения мест концентрации и величин напряжений.
5. Определение кривых усталости материалов лонжерона и хвостовика с использованием полученных ранее величин напряжений.

2. Определение упругих постоянных отдельного слоя армированного КМ. Рассмотрим представительный объём отдельного слоя материала лонжерона в виде куба, в котором система координат $OX_1X_2X_3$ ориентирована следующим образом: ось OX_3 направлена вдоль оси волокон (рис.1).

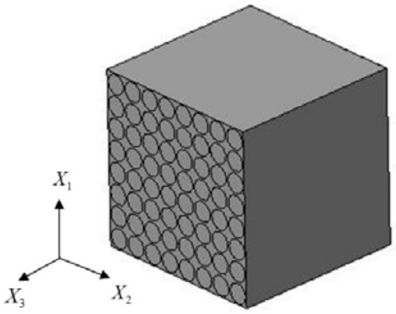


Рис. 1. Представительный объём однонаправленно армированного КМ.

Запишем закон Гука через эффективные упругие постоянные.

$$\begin{pmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{13}\\ \sigma_{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C11 & C12 & C13 & 0 & 0 & 0\\ C12 & C11 & C13 & 0 & 0 & 0\\ C13 & C13 & C33 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & C44 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & C44 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C66\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ 2\cdot\varepsilon_{23}\\ 2\cdot\varepsilon_{13}\\ 2\cdot\varepsilon_{12}\end{pmatrix} \qquad (2.1)$$

Эффективные коэффициенты жёсткости $C11$, $C12$, $C13$, $C33$, $C44$, $C66$ находятся из решения краевых задач растяжения-сжатия и задач сдвига представительного объёма. Расчётная схема задач растяжения-сжатия имеет следующий вид: на одной из граней представительного объёма задавалось давление, на остальных гранях закрепление по схеме гладкого контакта (перемещение вдоль нормали к грани закреплено, в остальных направлениях перемещение грани свободно). Расчётная схема задач сдвига имеет вид: одна из граней жёстко закреплена, на 3-х других действуют касательные напряжения. Граничные условия краевых задач будут иметь вид (здесь и далее координата X соответствует X_1, $Y - X_2$ и $Z - X_3$):

1) На грань элемента с нормалью по оси X действуют напряжения сжатия σ_1, остальные грани закреплены. Дополнительной информацией является измерение смещения $U_x = U_1$ вдоль оси X плоскости, к которой приложено давление.
2) На грань элемента с нормалью по оси Z действуют напряжения сжатия σ_3, остальные грани закреплены. Дополнительной информацией является измерение смещения $U_z = U_3$ вдоль оси Z плоскости, к которой приложено давление.
3) Деформация сдвига по оси X под действием касательных напряжений τ_{13}. Дополнительной информацией будем считать перемещение $U_x = U_2$ верхней грани представительного объёма вдоль оси X.
4) Деформация сдвига вдоль оси Y под действием касательных напряжений τ_{12}. Дополнительной информацией будем считать перемещение $U_y = U_4$ верхней грани представительного объёма вдоль оси Y.
5) На грань элемента с нормалью по оси X действуют напряжения сжатия σ_0, грань элемента с нормалью по оси Z – свободна, остальные грани закреплены. Дополнительной информацией будет являться перемещение $U_x = U_5$ нагружённой и $U_z = U_6$ свободной грани.

Используя аналитические решения приведённых краевых задач 1) - 5), возможно найти эффективные упругие постоянные по формулам:

$$C11=(\sigma_1\cdot l)/U_1;\ C33=(\sigma_3\cdot l)/U_3;\ C44=(\tau_{13}\cdot l)/U_2;\ C66=(\tau_{12}\cdot l)/U_4;$$
$$C13=-(C11\cdot U_5)/U_6;\ C12=C11-2\cdot C44 \qquad (2.2)$$

где U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6 – перемещения; l – высота представительного объёма;

$\sigma_0, \sigma_1, \sigma_3$, τ_{13}, τ_{12} – прилагаемые напряжения;

Перемещения: $U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6$ определены из эксперимента, роль которого выполняет расчёт методом конечных элементов (МКЭ) для модели представительного объёма отдельного слоя в конечно-элементном (КЭ) пакете ANSYS. В результате была получена матрица упругих постоянных единичного слоя материалов (C_0):

$$C_0 = \begin{pmatrix} 8{,}77\cdot 10^9 & 2{,}51\cdot 10^9 & 2{,}63\cdot 10^9 & 0 & 0 & 0 \\ 2{,}51\cdot 10^9 & 8{,}77\cdot 10^9 & 2{,}63\cdot 10^9 & 0 & 0 & 0 \\ 2{,}63\cdot 10^9 & 2{,}63\cdot 10^9 & 3{,}93\cdot 10^{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4{,}27\cdot 10^9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4{,}27\cdot 10^9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3{,}13\cdot 10^9 \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

3. Определение упругих постоянных представительного объёма многослойного КМ. Модель представительного объема материала обшивки хвостового оперения была взята в виде куба, состоящего из определённого количества слоёв. Для каждого из отдельного слоя заданы свойства материала, полученные ранее в виде матрицы упругих постоянных (2.3). В представленной выше задаче, модель представительного объёма отдельного слоя имела систему координат, в которой ось Z направлена вдоль оси волокон. Исходя из этого, для моделирования структуры направлений волокон материала обшивки хвостового оперения был произведён поворот относительно оси Y локальных систем координат каждого слоя на чередующийся угол 0°, +45°, -45°, 0°. Связь между слоями моделировалась, как жёсткое сцепление (рис.2).

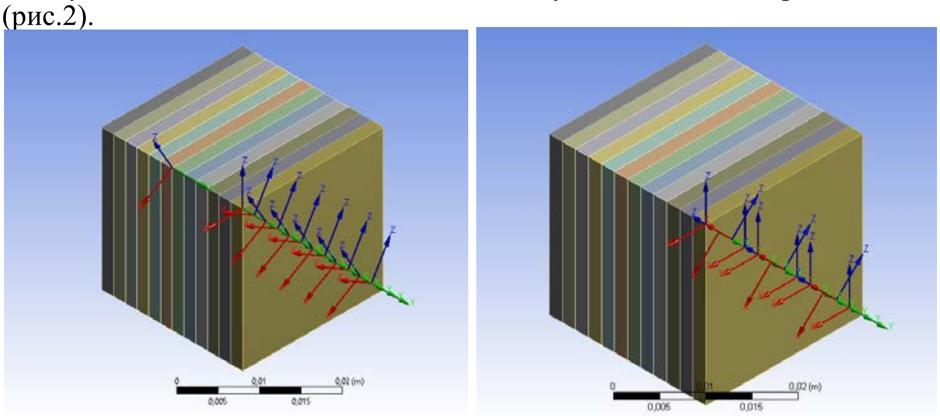


Рис. 2. Представительный объёмы КМ лонжерона (слева) и хвостовика (справа).

Коэффициенты матрицы эффективных упругих постоянных ортотропного материала, который моделирует многослойной материал представительного объёма, определялись с помощью метода, разработанного выше, с добавлением еще трёх краевых задач:

6) На грань элемента с нормалью по оси Y действуют напряжения сжатия σ_2, остальные грани закреплены. Дополнительной информацией является измерение перемещения $\mathrm{U}_\mathrm{Y} = \mathrm{U}_7$ вдоль оси X плоскости, к которой приложено давление.
7) Деформация сдвига по оси Z под действием касательных напряжений τ_{23}. Дополнительной информацией будем считать перемещение $\mathrm{U}_\mathrm{Z} = \mathrm{U}_8$ верхней грани представительного объёма вдоль оси Z.
8) На грань элемента с нормалью по оси X действуют напряжения сжатия σ_0, грань элемента с нормалью по оси Y свободна, остальные грани закреплены. Дополнительной информацией будет являться перемещение $\mathrm{U}_\mathrm{X} = \mathrm{U}_9$ нагружённой и $\mathrm{U}_\mathrm{Y} = \mathrm{U}_{10}$ свободной грани.

Формулы (2.2) дополняются следующими соотношениями:

$$C22 = (\sigma_2 \cdot l)/U_7;\ C55 = (\tau_{23} \cdot l)/U_8;\ \text{и}\ C23 = -(C22 \cdot U_9)/U_{10} \tag{3.1}$$

где: U_7, U_8, U_9, U_{10} – перемещения; l – высота представительного объёма; σ_2, τ_{23} – прилагаемые напряжения.

Т.о. используя аналитические решения приведённых краевых задач (2.2), совместно с решениями трёх дополнительных краевых задач (3.1), представляется возможным определение полного набора констант $C_{11};C_{12};C_{13};C_{23};C_{33};C_{44};C_{55};C_{66}$ матрицы упругих постоянных ортотропного материала. В результате была получена матрица упругих постоянных материала обшивки хвостового оперения (C_H):

$$C_H = \begin{pmatrix} 1{,}21\cdot10^{10} & 2{,}789\cdot10^9 & 5{,}529\cdot10^9 & 0 & 0 & 0 \\ 2{,}789\cdot10^9 & 8{,}75\cdot10^9 & 2{,}7956\cdot10^9 & 0 & 0 & 0 \\ 5{,}529\cdot10^9 & 2{,}7956\cdot10^9 & 2{,}343\cdot10^{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6{,}793\cdot10^9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4{,}257\cdot10^9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4{,}257\cdot10^9 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Матрица упругих постоянных материала лонжерона, со схемой намотки ±30° имеет вид (C_L):

$$C_L = \begin{pmatrix} 1{,}057\cdot10^{10} & 2{,}664\cdot10^9 & 6{,}284\cdot10^9 & 0 & 0 & 0 \\ 2{,}664\cdot10^9 & 8{,}75\cdot10^9 & 2{,}575\cdot10^9 & 0 & 0 & 0 \\ 6{,}284\cdot10^9 & 3{,}575\cdot10^9 & 1{,}982\cdot10^{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7{,}294\cdot10^9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4{,}255\cdot10^9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4{,}255\cdot10^9 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Модули упругости E_i ($i = 1,\ 2, 3$) материалов лопасти находятся из обратных матриц упругих постоянных C_H и C_L по соотношениям:

$$E_i = 1/E_{ii}; \quad (3.4)$$

где E_{ii} – диагональные элементы обратных матриц.

Был проведён натурный эксперимент по определению модулей упругости в 2-х направлениях для материала хвостового оперения, сравнение результатов эксперимента и значений, найденных по представленной методике, даёт расхождение 6 – 7 %. Что позволяет сделать вывод об адекватности результатов и данной методики.

Библиотека конечных элементов программного комплекса ANSYS содержит элементы, способные моделировать однонаправленные армированные композиты. SOLID65 является одним из таких элементов.

С использованием данного элемента было произведено моделирование представительного объема однонаправленного армированного композита и определение эффективных механических свойств данного представительного объёма с помощью разработанной выше методики. Проведённые расчёты показали, что использование конечного элемента SOLID65 дает адекватный результат только в случае одноосного напряжённого состояния, совпадающего с направлением армирующих волокон (погрешность 2% - 4% в определении характеристик НДС). В случае сложного напряжённого состояния использование этого элемента приводит к большим погрешностям. Это обстоятельство подтверждает актуальность разработанного метода моделирования однонаправленных и многослойных композиционных материалов.

4. Моделирование стендовых испытаний образца лопасти вертолета. Настоящий параграф посвящен конечно-элементному моделированию натурных испытаний на долговечность лопасти вертолёта. В процессе натурных испытаний использовалась модель, состоящая из отрезка лонжерона, длиной 3 метра, к которому приклеены два хвостовых отсека. Схема испытания имеет вид: модель лонжерона установлена на динамическом вибростенде, края отрезка лонжерона шарнирно закреплены. На лонжерон действует продольное растягивающее усилие 180кН, а на хвостовых отсеках – растягивающее усилие силой 2500Н, передаваемое им посредством резиновых ремней. Кроме этого, модель на стенде совершает вертикальные колебания, амплитуда которых 0,3 м.

В программном комплексе ANSYS было произведено создание трёхмерной модели сборочной единицы образца лопасти и моделирование данной схема аналогичной натурных испытаний с целью определения напряжённо – деформированного состояния конструкции. В качестве механических характеристик материалов для проведения расчёта МКЭ использовались найденные матрицы упругих постоянных материалов используемых деталей лопасти хвостового оперения (2.5) и лонжерона (2.6) соответственно.

Из анализа напряжённо-деформированного состояния модели стендового образца представилось возможным увидеть, что концентрация напряжений происходит на боковой грани хвостового отсека на стыке соединения с лонжероном. По четвёртой теории прочности (4.1) [5], величина которых составит:

$$\sigma_{экв} = \sqrt{0{,}5\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2+(\sigma_2-\sigma_2)^2+6\cdot(\sigma_{12}^2+\sigma_{23}^2+\sigma_{13}^2)\ \right]} \quad (4.1)$$

На рис.3 представлено распределение напряжения по Мизесу (4.1), нахождение областей с максимальными напряжениями согласуется с результатами эксперимента по разрушению образцов.

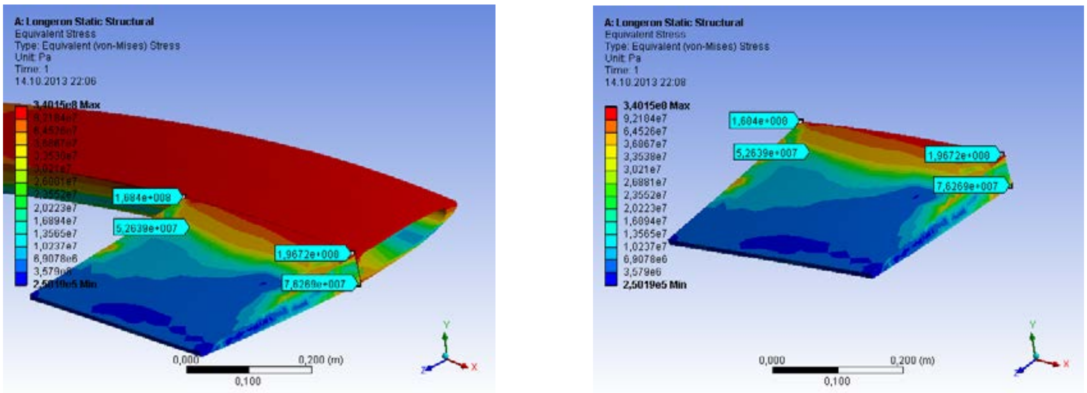


Рис. 3. Результаты моделирования стендовых испытаний: лонжерона (слева) и хвостового оперения (справа)

5. Определение усталостных характеристик материалов лопасти вертолёта. В ходе определения усталостных характеристик рассматриваемых армированных КМ, были построены представительные объёмы материалов лонжерона и хвостового оперения лопасти вертолета, и проведён расчёт на усталостную долговечность по методике предложенной в [6], используя в качестве исходных данных НДС стендового образца лопасти.

Расчетная схема задач имела следующий вид: к одной из граней элементарного объёма приложены циклические переменные напряжения (определённые в ходе моделирования стендовых испытаний), остальные имеют закрепление по схеме гладкого контакта. Результаты усталостных испытаний были представлены в виде графиков.

Анализ полученных кривых усталости, приводит к выводу о неравномерном распределении коэффициента запаса прочности по усталостной долговечности среди элементов конструкции. Так, при коэффициенте нагружения, равном 3,75, что соответствует рабочим нагрузкам, количество циклов лонжерона составляет 12,5 млн. В то время как для материала хвостовика это значение достигается уже при коэффициенте нагружения, равном 1,2.

Выводы. Разработанные методы определения механических и усталостных свойств элементов конструкций из композиционных материалов соответствуют данным натурных экспериментов, что свидетельствует об их работоспособности. Предложенные методы могут служить инструментом для дизайна КМ и проектировки изделий из них, работающих в условиях многоциклового вибрационного воздействия.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (номер гранта 15-08-00849 А)

ЛИТЕРАТУРА

1. Бохоева Л. А. Особенности расчёта на прочность элементов конструкций из изотропных и композиционных материалов с допустимыми дефектами. Изд-во ВСГТУ. 2007. С.11 - 15.
2. Nikishkov Y. Makeev A. Fatigue life assessment for composite materials.18TH International conference on composite material; 2011, p. 76-84.
3. Namin Jeong, David W. Rosen. A multi-scale model for the computer - aideddesig of polymer composites. 18 тн International conference on composite material; 2011, p. 56 - 63.
4. Zhou1 L., Kang Y., Guo J. Micromechanical modeling of double-walledcarbon nanotube pullout from a matrix 18 тн International conference on composite material; 2011, p. 17 - 19.
5. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975.
6. Соловьев А.Н., Зиборов Е.Н. Конечно-элементное моделирование усталостной прочности композитного материала // Вестник ДГТУ. 2013. № 5-6(74). С.104-109.

Сведения об авторах:

Аркадий Н. Соловьев – д.ф.-м.н., проф. каф мат. моделирования Южного федерального ун-та, +7(863)2381509, +7(863)2975282. Ростов-на-Дону, Россия. **E-mail:** solovievarc@gmail.com

Евгений Н. Зиборов – аспирант кафедры теоретической и прикладной механики Донского государственного технического ун-та, Ростов-на-Дону, Россия.

Евгения В. Кириллова–доктор, профессор Университета прикладных наук, Висбаден, Германия.

Сергей Н. Шевцов – д.т.н., проф., зав. лабораторией Южного научного центра РАН, Ростов-на-Дону, Россия.

СВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ГАРАНТИРОВАННОГО ПОИСКА ПОДВИЖНОГО ОБЪЕКТА К ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ С ПОДВИЖНЫМ КОНЦОМ

Степанян В.С.

Рассматривается задача оптимального по минимальному гарантированному времени поиска движущегося на плоскости объекта, начальное состояние которого известно с точностью до заданного множества неопределённости. Установлено, что на основе минимаксного подхода исходную задачу можно свести к задаче оптимального по быстродействию управления с подвижным правым концом.

1. Описание поисковой системы и постановка задачи. Пусть имеются два точечных объекта X (ищущий) и Y (искомый). Объект X совершает пространственное движение, а объект Y – движение по горизонтальной плоскости. Уравнения движения объектов задаются в виде

$$X: \quad \ddot{x} = w_X, \quad x(0) = x^0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad x, w_X \in R^3, \qquad (1.1)$$
$$\left| w_X(t) \right| \le W_X, \quad t \ge 0.$$

$$Y: \quad \ddot{y} = w_Y, \quad y(0) = y^0, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}^0, \quad y, w_Y \in R^2, \qquad (1.2)$$
$$\left| \dot{y}(t) \right| \le V_Y, \quad \left| w_Y(t) \right| \le W_Y, \quad t \ge 0,$$

где x, y – векторы координат, а w_X, w_Y – векторы управляющих ускорений объектов X, Y, которые являются кусочно-непрерывными функциями от t. Положим, что объекту X доступна полная информация о соотношениях (1.1), (1.2), за исключением векторов $y^0, \dot{y}^0$. Однако, известно, что

$$(y^0, \dot{y}^0) \in D_0 \times \dot{D}_0, \qquad (1.3)$$

$$D_0 = \{ y^0 \in R^2 : \left| y^0 - y_c^0 \right| \le r_0 \}, \ \dot{D}_0 = \{ \dot{y}^0 \in R^2 : \left| \dot{y}^0 \right| \le V_Y \},$$

где $D_0, \dot{D}_0$ – известные объекту X множества неопределённости. Задано также изменяющееся во времени множество $G(x(t)) \subset R^2$ [1], позволющее уточнять информацию о положении Y:

$$G(x(t), C) = \left\{ \xi \in R^2 : \left| \xi(t) - x_c(t) \right| \le l(t) = C x_3(t) \right\}, \quad t \ge 0, \qquad (1.4)$$
$$C = \left| \mathrm{tg}\alpha \right|, \quad 0 < \left| \alpha \right| < \pi / 2, \quad G(x(0), C) = G_0,$$

причём,

$$D_0 \cap G_0 = \varnothing. \qquad (1.5)$$

Согласно (1.5), в начальный момент круг обнаружения находится вне круга неопределённости.

Объект Y считается обнаруженным в первый момент $t^* > 0$, когда выполняется условие наблюдения

$$y(t^*) \in G(x(t^*)), \text{ т.е. } \left| y(t^*) - x_c(t^*) \right| = l(t^*). \qquad (1.6)$$

На плоскости (y_1, y_2) множеством неопределённости $D(t, (y^0, \dot{y}^0))$ искомого объекта (1.2) с начальным условием $(y^0, \dot{y}^0) \in D_0 \times \dot{D}_0$ при $t \ge 0$ назовём совокупностью концов $y(t) = (y_1(t), y_2(t))$ всех траекторий этой системы, начинающихся в момент $t = 0$ в точках начального множества неопределённости $D_0 \times \dot{D}_0$ и построенных с помощью всевозможных кусочно-непрерывных управляющих ускорений (допустимых управлений)

$w_Y(\tau) = (w_{Y1}(\tau), w_{Y2}(\tau))$, $\left|w_Y(\tau)\right| \le W_Y$, $0 \le \tau \le t$ при соблюдении ограничения на скорость $\left|\dot{y}(t)\right| \le V_Y$, $0 \le \tau \le t$.

Очевидно, что множество $D(t, D_0 \times \dot{D}_0)$ является объединением всех множеств вида $D(t, (y^0, \dot{y}^0))$, где $(y^0, \dot{y}^0) \in D_0 \times \dot{D}_0$:

$$D(t, D_0 \times \dot{D}_0) = \bigcup_{(y^0, \dot{y}^0) \in D_0 \times \dot{D}_0} D(t, (y^0, \dot{y}^0)). \tag{1.7}$$

Поскольку круг обнаружения $G(x(t))$ (1.7) ищущего объекта X (1.1) в момент t при использовании им всевозможных кусочно-непрерывных управляющих ускорений (допустимых управлений) $w_X(\tau)$, $\left|w_X(\tau)\right| \le W_X$, $0 \le \tau \le t$ представляет собой круг, то условие обнаружения (1.6) гарантированно выполнимо, если существует момент T, $T \ge t^*$ и допустимое управление $w_X(t)$, $0 \le t \le T$ такое, что выполняется включение

$$D(T, D_0 \times \dot{D}_0) \subseteq G(x(T)). \tag{1.8}$$

Для заданного начального состояния $(x^0, \dot{x}^0)$ объекта X и заданных начальных кругов обнаружения G_0 (1.4) и неопределённостей D_0 и $\dot{D}_0$ (1.3), (1.5), число $T > 0$ и допустимое управление $w_X(t)$, $0 \le t \le T$ объекта X назовём гарантированным временем поиска и гарантирующим управлением соответственно, если при любом начальном состоянии $(y^0, \dot{y}^0) \in D_0 \times \dot{D}_0$ и любом допустимом управлении $w_Y(t)$, $0 \le t \le T$ объекта Y выполняется включение (1.8), т.е. гарантируется условие обнаружения (1.6) в некоторый момент времени $t^* > 0$ – не позднее времени T: $t^* \le T$.

Будем полагать, что множество гарантирующих управлений $w_X(t)$, $0 \le t \le T$ не пусто для всех рассматриваемых начальных состояний покоя ($x^0, \dot{x}^0 = 0$). При фиксированном x^0 каждому гарантирующему управлению $w_X(t)$, $0 \le t \le T$ соответствует траектория системы (1.1), приходящая в некоторую точку в момент T такой, что выполняется условие поглощения (1.8).

Сформулируем задачу о минимальном гарантированном времени обнаружения искомого подвижного объекта Y (1.2).

Задача. Найти минимальное гарантированное время быстродействия $T^*(x^0)$ и допустимое управление w_X^*, доставляющее минимум

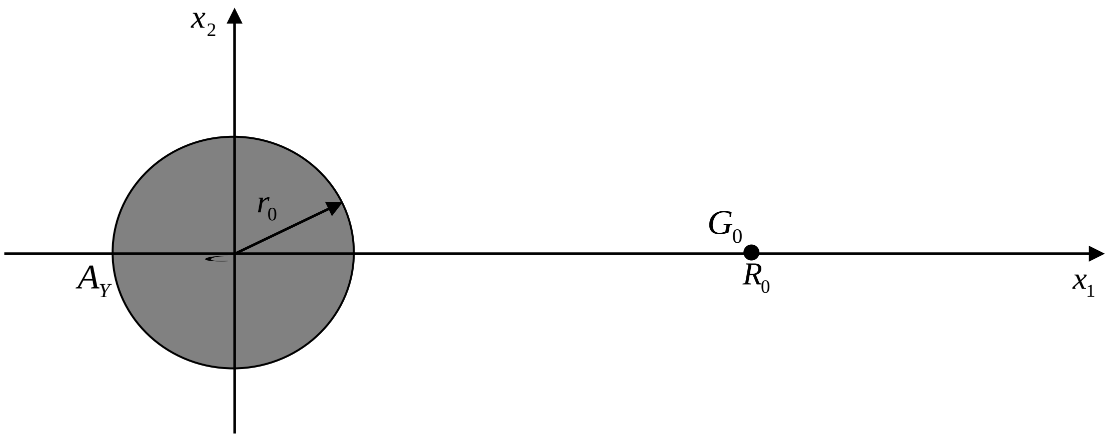
$$T^*(x^0) = \min_{\left|w_X\right| \le W_X} \max_{\left|w_Y\right| \le W_Y} \max_{\left(y^0, \dot{y}^0\right) \in D_0 \times \dot{D}_0} T(x^0, w_X, w_Y, y^0, \dot{y}^0). \tag{1.9}$$

2. Сведение исходной задачи к задаче оптимального быстродействия с подвижным правым концом. Пусть круг неопределённости D_0 имеет центр в начале координат $(x_1, x_2) = 0$, а ищущий объект X (1.1) в начальный момент находится в состоянии покоя в точке $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$, $x_1^0 = R_0 > 0$, $x_2^0 = 0$, $x_3^0 = 0$, т.е. круг обнаружения – точка $x_c^0 = (R_0,\ 0)$ на оси Ox_1 (фиг.1), причём $R_0 > r_0$, что полностью описывает начальное расположение (1.5) кругов G_0 и D_0:

$$G_0 = (R_0, 0), \quad D_0 = \left\{(y_1, y_2):\ y_1^2 + y_2^2 = r_0^2\right\} \tag{2.1}$$

Обозначим через ∂D_0 и $\partial \dot{D}_0$ границы кругов непределённости D_0 и $\dot{D}_0$ (1.3) соответственно:

$$\partial D_0 = \left\{ y^0 \in R^2 : \left| y^0 \right| = r_0 \right\}, \ \partial \dot{D}_0 = \left\{ \dot{y}^0 \in R^2 : \left| \dot{y}^0 \right| = V_Y \right\}. \tag{2.2}$$



Фиг. 1

Утверждение. Искомый объект (1.2) в момент времени t может оказаться на максимальном расстоянии от начала координат, если в начальный момент находится на границе круга неопределённости D_0: $y^0 \in \partial D_0$ имеет максимальную по модулю постоянную начальную скорость $\dot{y}^0 \in \partial \dot{D}_0$, направленную по радиусу круга D_0 от центра

$$\dot{y}^0 = (\dot{y}_1^0, \dot{y}_2^0)^{\mathrm{T}} \equiv \left(V_Y y_1^0 r_0^{-1}, V_Y y_2^0 r_0^{-1} \right)^{\mathrm{T}} \tag{2.3}$$

и движется с нулевым управляемым ускорением:

$$w_Y(\tau) \equiv 0, \ \ 0 \le \tau \le t\,. \tag{2.4}$$

Действительно, используя решения уравнений (1.2)

$$y_i(t) = y_i^0 + t\dot{y}_i^0 + \int\limits_0^t (t-\tau) w_{Yi}(\tau) d\tau, \ \dot{y}_i(t) = \dot{y}_i^0 + \int\limits_0^t w_{Yi}(\tau) d\tau, \ i = 1, 2, \tag{2.5}$$

где управление $w_{Yi}(\tau),\ 0 \le \tau \le t$ из класса кусочно-непрерывных функций представим формулу для вычисления расстояния объекта Y от начала координат $r(t) = \sqrt{y_1^2(t) + y_2^2(t)}$ в виде

$$r(t) = \sqrt{\left| y^0 \right|^2 + t^2 \left| \dot{y}^0 \right|^2 + 2t < y^0, \dot{y}^0 > + 2 < y^0 + t\dot{y}^0, Q(t) > + \left| Q(t) \right|^2}, \ t \ge 0, \tag{2.6}$$

а ограничение на скорость $\left| \dot{y}(t) \right| \le V_Y$ – в виде:

$$\dot{y}_1^2(t) + \dot{y}_2^2(t) = < P(t), P(t) > + 2 < P(t), \dot{y}^0 > + < \dot{y}^0, \dot{y}^0 > \le V_Y^2, \ t \ge 0. \tag{2.7}$$

В (2.6), (2.7) введены следующие обозначения:

$$Q(t) = \left(\int\limits_0^t (t-\tau) w_{Y1}(\tau) d\tau, \int\limits_0^t (t-\tau) w_{Y2}(\tau) d\tau \right)^T, \tag{2.8}$$

$$P(t)=\left(\int_0^t w_{Y1}(\tau)d\tau,\ \int_0^t w_{Y2}(\tau)d\tau\right)^T,\ \ y^0=\left(y_1^0,y_2^0\right)^T,\quad \dot y^0=\left(\dot y_1^0,\dot y_2^0\right)^T, \tag{2.9}$$

где символом $<.\,,.>$ обозначено скалярное произведение двух векторов.

Так как, максимум подкорневого выражения (2.6) относительно векторов $y^0, \dot y^0$ достигается на границах множеств (2.2), причём $\dot y^0=V_Y y^0 r_0^{-1}$, то из (2.7) получим неравенство

$$2V_Y r_0^{-1} < P(t), y^0 > + < P(t), P(t) > \le 0,\ t\ge 0. \tag{2.10}$$

Неравенство (2.10) будет заведомо выполнено, если выполняется

$$2V_Y\left[t\int_0^t [w_{Y1}^2(\tau)+w_{Y2}^2(\tau)]d\tau\right]^{1/2}+t\int_0^t [w_{Y1}^2(\tau)+w_{Y2}^2(\tau)]d\tau\le 0,\ t\ge 0, \tag{2.11}$$

которое получается после последовательного применения к левой части (2.10) неравенств Коши-Буняковского и Шварца. Очевидно, что (2.11) имеет место только при $w_{Yi}(\tau)\equiv 0$, $0\le\tau\le t$, $i=1,2$. С учётом этого, из (2.8) получим $Q(t)\equiv 0,\ t\ge 0$ и, таким образом, максимальное значение $r(t)$ (2.6) будет следующим:

$$\max_{w_Y}\ \max_{(y^0,\dot y^0)\in D^0\times\dot D^0} r(t)=r_0+tV_Y. \tag{2.12}$$

Пусть $D(t,\partial D_0\times\partial\dot D_0)$ – совокупность концов $y(t)=(y_1(t),y_2(t))$ траекторий искомого объекта Y (1.2), стартующих из начальных состояний $(y^0,\dot y^0)\in\partial D_0\times\partial\dot D_0$ (2.2), $\dot y^0=V_Y r_0^{-1}y^0$ (2.3) и построенных при $w_Y=0$ (2.4). Тогда из доказанного утверждения следует, что множество $D(t,\partial D_0\times\partial\dot D_0)$, которое на плоскости (y_1,y_2) представляет собой окружность с центром в точке $(0,0)$ и радиусом $r(t)=r_0+tV_Y$ (2.12), удовлетворяет следующему включению:

$$D(t,\partial D_0\times\partial\dot D_0)\supset D(t,D_0\times\dot D_0),\ t\ge 0. \tag{2.13}$$

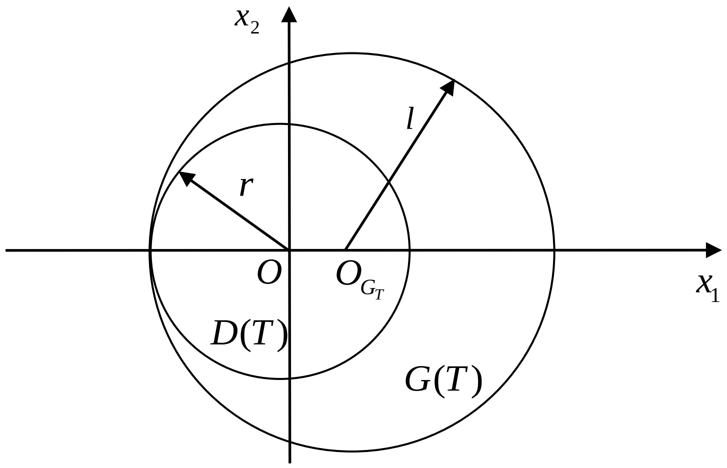
Из (2.13) следует, что для осуществления поглощения (1.8) за наименьшее время, ищущий объект должен строить управление поиском с расчётом на то, что искомый объект в начальный момент времени находится на границе области неопределённости D_0 и имеет максимальную по модулю начальную скорость (2.3), что обеспечивает расширение круга неопределённости с наибольшей скоростью. Такой минимаксный подход позволяет объекту X управление поиском строить с расчётом на движение искомого объекта в любом, в том числе, наихудшем для ищущего объекта направлении. Таким образом, с учётом (2.12), вместо (1.8) достаточно рассматривать следующее условие поглощения:

$$D(T,\partial D_0\times\partial\dot D_0)\subseteq G(x(T)), \tag{2.14}$$

где множество $D(T,\partial D_0\times\partial\dot D_0)$ имеет форму круга

$$D(T)=\left\{(y_1,y_2):\ y_1^2+y_2^2\le r^2(T),\quad r(T)=r_0+V_Y T\right\}. \tag{2.15}$$

Из геометрии взаимного расположения двух окружностей следует, что одно из допустимых расположений кругов $G(x(T))$ и $D(T)$, отвечающее условию поглощения (2.14), является расположение (фиг.2), характеризуемое следующими условиями:



Фиг.2

$$G(T)=\left\{(x_1,x_2):\ (x_1-R(T))^2+x_2^2\le l^2(T)\right\}, \tag{2.16}$$

$$D(T)=\left\{(y_1,y_2):\ y_1^2+y_2^2\le r^2(T)\right\},\quad r(T)=r_0+V_YT, \tag{2.17}$$

$$R(T)\ge 0,\quad R(T)=l(T)-r(T). \tag{2.18}$$

Если ввести фазовые переменные $\dot{x}_i=v_i$ и записать уравнения (1.1) относительно x_i, v_i в виде

$$\dot{x}_i=v_i,\ \dot{v}_i=w_{Xi},\ i=1,2,3, \tag{2.19}$$

то придём к следующей задаче оптимального управления.

Найти допустимые управления $w_{Xi}^*(t)$, $t\in[0,T]$, обеспечивающие приведение объекта X (2.10) из заданного начального состояния

$$x_1(0)=R_0,\quad x_2(0)=0,\quad x_3(0)=x_3^0,\quad v_i(0)=0,\ i=1,2,3, \tag{2.20}$$

переходит на множество

$$S(x(T),T)=\left\{\begin{matrix} g_1(x(T),T)=x_1(T)\ge 0, \quad g_2(x(T),T)=x_2(T)=0, \\ g_3(x(T),T)=x_1(T)-Cx_3(T)+r_0+V_YT=0,\ C>0 \end{matrix}\right\} \tag{2.21}$$

за минимальное время T при соблюдении ограничения на управляющее ускорение (1.1).

Задача (2.19)–(2.21) является задачей оптимального по быстродействию управления с закреплённым левым (2.20) и подвижным правым концами (2.21), которую следует решать методом принципа максимума Понтрягина [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Аветисян В.В., Степанян В.С. Оптимальный по минимальному гарантированному времени поиск подвижного объекта на плоскости // Изв. НАН РА. Механика. 2015. Т.60. № 1. С.68-80.
2. Понтрягин Л.С. и др. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1988. 344с.

Сведение об авторе:

Степанян Ваан Сейранович – аспирант факультета математики и механики ЕГУ,
Тел.: (+374 98) 900846, **E -mail:** nop144d@gmail.com

РАСПОЗНАВАНИЕ СИСТЕМЫ ТРЕЩИН В УПРУГИХ СРЕДАХ С ПОМОЩЬЮ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ВОЛН

Сумбатян М.А., Ложкова Ю.Н.

Рассматриваются задачи одновременной идентификации нескольких трещин в упругих средах с помощью сканирования ультразвуковыми волнами. В акустическом приближении задача может быть сведена к системе интегральных уравнений (ГИУ) по системе граничных поверхностей трещин. При решении прямой задачи дифракции геометрия дефектов известна заранее, в этом случае решение задачи строится численно стандартным методом коллокации. Однако в обратной задаче одновременного распознавания геометрии системы дефектов их форма заранее неизвестна и представляет собой некоторый набор неизвестных функций, подлежащих определению. В итоге приходим к системе нелинейных уравнений, которые решаются с использованием современных методов оптимизации. Приведены примеры идентификации систем линейных трещин.

1. Постановка задачи и основная система ГИУ. Для идентификации неизвестных дефектов в твердых телах используются ультразвуковые (УЗ) методы неразрушающего контроля (НК). Как показано на Рис.1, датчик (сенсор) излучает УЗ пучок волн внутрь упругой среды и принимает отраженный от дефекта сигнал-отклик в эхо-режиме [1]. Предполагается, что амплитуда рассеянного сигнала известна для некоторого диапазона углов $\theta \in (0,2\pi)$.

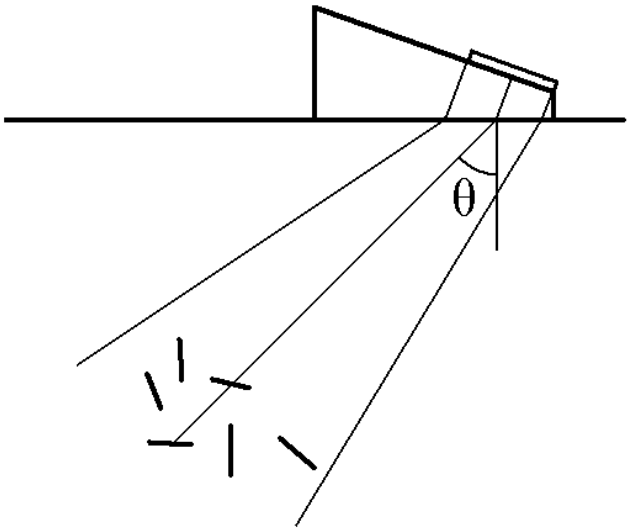


Рис.1. Распознавание системы плоских трещин в упругой среде с помощью УЗ датчика

Ограничимся двумерным случаем. Если бы конфигурация дефектов была бы известна заранее, то решение прямой задачи состояло бы в расчете диаграммы рассеяния на дефекте, т.е. амплитуды отраженной УЗ волны как функции полярного угла, на некоторой фиксированной частоте колебаний ω.

В обратной задаче идентификации системы дефектов выпишем математические соотношения в рамках акустического приближения. Оно состоит в упрощенной трактовке, что оба типа волн – продольные и поперечные, – при отражении не испытывают трансформации, т.е. продольная волна остается продольной, а поперечная – поперечной [1]. Таким образом, если датчик работает на продольных волнах, тогда все расчеты проводятся для продольной волны, а если датчик генерирует внутрь среды поперечную волну, то все расчеты проводятся для поперечной волны. Очевидно, в обоих случаях имеем скалярную теорию.

Если систему трещин обозначить через l, то справедливо стандартное интегральное представление [2]

$$p^{sc}(x) = \int_{\ell} \left(p(y)\frac{\partial \Phi}{\partial n_y} - \frac{\partial p(y)}{\partial n_y}\Phi \right) d\ell_y, \ \Phi(y,x) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k\,|\,y-x\,|), \ x=(x_1,x_2), \ y=(y_1,y_2) \qquad (1)$$

где $k = \omega/c$ – волновое число, $H_0^{(1)}$ – функция Ханкеля, p^{sc} – волна, рассеянная на системе трещин, а значение функции давления без каких-либо индексов означает полное акустическое давление: $p = p^{inc} + p^{sc}$, где p^{inc} – давление в падающей волне. Если трещины в акустическом приближении моделировать непроницаемыми отрезками, то второе слагаемое под знаком интеграла в (1) пропадает в силу нулевого граничного условия по нормальной производной от давления на l, в результате приходим к представлению

$$p^{sc}(x) = \sum_{m=1}^{N} \int_{\ell_m^+} g(y) \frac{\partial \Phi}{\partial n_m^+}\left(k|y-x|\right) d\ell_y^+, \qquad g(y) = p^+(y) - p^-(y), \quad (y \in l_m) \tag{2}$$

где подразумевается, что каждая трещина l_m из множества l, содержащего N трещин, имеет две стороны l_m^+ и l_m^-, на которых давление обозначено соответственно p^+ и p^-.

Для вывода основной системы интегральных уравнений продифференцируем представление (2) по нормали к точке x, устремим эту точку на граничную кривую l и воспользуемся граничным условием непроницания. В итоге получаем:

$$\sum_{m=1}^{N} \int_{\ell_m^+} g(y) K(y-x_j)\, d\ell_y = -\frac{\partial p^{inc}(x_j)}{\partial n_j^+}, \quad (x_j \in l_j),$$
$$K(y-x_j) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial n_j^+ \partial n_m^+}\left(k|y-x_j|\right), \qquad p^{inc} = e^{-ik(x_1 \cos\theta + y_1 \sin\theta)} \tag{3}$$

Можно показать, что ядро здесь имеет гиперсингулярную особенность, при $y \to x$. Как только система интегральных уравнений (3) решена, рассеянное поле в любой точке среды может быть вычислено по формуле (2). В частности, нас будет в первую очередь интересовать вещественная амплитуда рассеянной волны в дальнем поле в направлении обратного отражения под углом θ, т.е. некоторая функция $F(\theta)$, которую мы для простоты считаем известной для всех углов:

$$F(\theta) = \left| \int_{\ell} [n_1(y)\cos\theta + n_2(y)\sin\theta] e^{-ik(y_1\cos\theta + y_2\sin\theta)} g(y) d\ell_y \right|, \quad 0 \le \theta \le 2\pi \tag{4}$$

Известно [3], что для гиперсингуляных интегральных уравнений существуют устойчивые численные методы. Следовательно, прямая задача не создает проблем неустойчивости, характерных для некорректных задач, которые обычно не могут быть решены напрямую и требуют особых подходов в духе регуляризации. Однако очевидно, что постановка прямой задачи дифракции не решает задачу идентификации системы граничных контуров $l_m, (m = 1,...,N)$, которые заранее не известны. Для идентификации геометрической конфигурации системы трещин следует использовать результаты измерений для функции рассеяния вида (4). Т.е. приходим к типичной обратной задаче.

2. Сведение обратной задачи к задаче оптимизации. Дискретизация системы ГИУ (3) выполняется в рамках метода Белоцерковского-Лифанова [4,5]. Учитывая, что для каждой пары трещин (m, j) переменные y_m и x_j изменяют свои значения на конечном промежутке, произведем такое разбиение каждой трещины, при котором количество точек разбиения соответствующих отрезков l_m и l_j на длину волны λ достаточно велико. Как показывает практика, разбиение надо брать таким, чтобы на длину волны приходилось, по меньшей мере, 10 точек. В результате получим достаточно плотную сетку узлов. Запишем основное ГИУ прямой задачи дифракции (3) в символическом операторном виде

$$A(\ell_j)g = f \tag{5}$$

где зависимость оператора A от контура ℓ указана в явном виде, что в дискретном виде эквивалентно зависимости от всего набора элементарных дуг. Запись (5) фактически означает некоторую систему линейных алгебраических уравнений для нахождения значений функции неизвестного давления $g(y) = f$ в точках $y \in \ell$. При этом правая часть этой системы, а также вид матричного оператора A известны.

Как было отмечено выше, операторное уравнение прямой задачи (2) ~ (5) корректно разрешимо, поэтому можно записать результат решения матричной системы (5) в виде

$$g = A^{-1}(\ell_j)f \tag{6}$$

Тогда для функции рассеяния (4), если считать, что результаты измерения этой функции проведены для углов $\theta_q, F(\theta_q) = F_q, \quad q = 1,2,...,M$ и дают массив входных данных размерности M, приходим к соотношениям

$$\left|\int_\ell [n_1(y)\cos\theta_q + n_2(y)\sin\theta_q]e^{-ik(y_1\cos\theta_q + y_2\sin\theta_q)}[A^{-1}(\ell_j)f](y)d\ell_y\right| = F(\theta_q), \quad q = 1,...,M \tag{7}$$

представляющим собой сильно нелинейную алгебраическую систему.

Следует отметить, что соотношение между числом неизвестных N и числом уравнений M в системе (7) может быть любым. Однако надежную реконструкцию дают методы, при которых размерность вектора входных данных не меньше, чем размерность вектора неизвестных: $M \geq N$. При выборе численного метода решения нелинейной системы (7) одним из наиболее эффективных представляется метод, сводящий ее к задаче оптимизации. Более конкретно, можно поставить задачу минимизации функционала невязки между левой и правой частью (7), записанного, например, в квадратичной метрике:

$$\min[\Omega(\ell_j)]:$$

$$\Omega(\ell_j) = \sum_{m=1}^{M}\left[\left|\int_\ell [n_1(y)\cos\theta_q + n_2(y)\sin\theta_q]e^{-ik(y_1\cos\theta_q + y_2\sin\theta_q)}[A^{-1}(\ell_j)f](y)d\ell_y\right| - F_q\right]^2 \tag{8}$$

3. Вейвлет обработка акустического сигнала, полученного из измерений. В процессе проведения идентификации в лабораторных условиях получаем регистрируемый акустический сигнал в виде амплитуды обратно рассеянного волнового поля. Главной задачей является извлечение полезной информации из сигнала, т.е. анализ сигнала и его преобразование в наиболее информационный вид. Для этих целей существуют корреляционный и спектральный анализ сигналов. Вейвлет-преобразование сигналов является обобщением спектрального анализа, типичный представитель которого – классическое преобразование Фурье.

Вейвлеты – это обобщенное название семейств математических функций определенной формы, которые локальны во времени и по частоте, и в которых все функции получаются из одной базовой (порождающей) посредством ее сдвигов и растяжений по оси времени. Вейвлет-преобразование рассматривает анализируемые сигналы в виде колебаний, локализованных по времени и частоте, т.е. обеспечивает частотно-временное представление сигналов. Вейвлеты имеют вид коротких волновых пакетов с нулевым средним значением, локализованных по оси аргументов (независимых переменных), инвариантных к сдвигу и линейных к операции масштабирования (сжатия/растяжения). По локализации во временном и частотном представлении вейвлеты занимают промежуточное положение между гармоническими функциями, локализованными по частоте, и функцией Дирака, локализованной во времени [6].

Особенно эффективно применение вейвлет-преобразований при анализе и обработка сигналов и функций, нестационарных во времени или неоднородных в пространстве, когда результаты анализа должны содержать не только частотную характеристику сигнала (распределение энергии сигнала по частотным составляющим), но и сведения о локальных координатах, на которых проявляют себя те или иные группы частотных составляющих или на которых происходят быстрые изменения частотных составляющих сигнала. Вейвлеты имеют явные преимущества в представлении локальных особенностей функций по сравнению с преобразованием или рядом Фурье. Вейвлеты также эффективны при очистке сигнала от шума.

Эффективность применения вейвлетов к обработке сигналов объясняется их свойствами, главными из которых являются возможность выбора базисных функций, наилучшим образом адаптированных к исследуемому сигналу по его форме и длительности, а также возможность проведения фазового анализа сигналов, с использованием комплексных вейвлетов и оптимальной фильтрации. Именно возможность использования достаточно произвольной функции в качестве базиса позволяет подобрать ее такой, чтобы существенно повысить эффективность обработки данных, увеличить точность определения параметров обрабатываемого сигнала и добиться лучшей фильтрации. Вейвлет-преобразование сигнала, представленное множеством дискретных отсчетов с шагом Δt, имеет следующий вид:

$$W_\psi(i,j)=\sum_{n=0}^{N_t-1} f_n\cdot\psi^*\left[\frac{(n-i)\Delta t}{s_j}\right], \tag{9}$$

где f_n – дискретные отсчеты анализируемого сигнала; N_t – количество отсчетов; i – определяет положение вейвлета на оси времени, $i=0,\dots,N_t$; s_j – числа, называемые масштабами преобразования. Обычно $s_j=\Delta t\cdot 2^{j(\Delta j)+1},\ j=0,1,\dots,\log_2(N_t/2)/\Delta j$, Δj – логарифмический шаг изменения масштаба. Звездочка обозначает комплексное сопряжение. Чем меньше значение масштаба, тем более четкое представление об исследуемом сигнале можно получить и тем большее количество вычислений придется выполнить. Для практики обычно достаточно выбрать значение Δj в интервале 0.125 – 0.5.

Формирование набора вейвлет-функций и нормировка полученных коэффициентов по масштабам осуществляется по следующему выражению:

$$\psi(t)=\psi_0(t)\cdot\sqrt{\frac{\Delta t}{s}}\ , \tag{10}$$

где $\psi_0(t)$ – базисная функция.

При выполнении преобразования (9) необходимо, чтобы базис удовлетворял следующим условиям:

Локализация. Вейвлет-преобразование, в отличие от преобразования Фурье, использует базисную функцию, которая должна быть локализована и во временном пространстве и по частоте.

Нулевое среднее:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_0(t)dt=0. \tag{11}$$

Нормированная энергия:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_0^2(t)dt=1. \tag{12}$$

Результатом вейвлет-преобразования является двумерный массив коэффициентов $W(i,j)$ или вейвлет-спектр обрабатываемого сигнала. Энергетический вейвлет-спектр $E(i,j)=|W(i,j)|^2$, показывающий распределение энергии процесса, как во времени, так и по масштабам, более удобен для анализа чем вейвлет-спектр, представляющий собой в общем случае массив комплексных чисел. Значения коэффициентов энергетического спектра являются действительными величинами и не зависят от знака фазы сигнала. По сравнению с алгоритмами обработки с жестко фиксированной логикой, вейвлет-анализ как «математический микроскоп» позволяет выделить нужный информативный параметр регистрируемого сигнала. В рассматриваемой задаче идентификации этим параметром является амплитуда сигнала, отраженного от скопления дефектов.

4. Решение задачи оптимизации. Конкретные вычисления показывают, что, как правило, в обратных задачах идентификации дефектов по известному рассеянному полю функционал вида (8) является сильно осциллирующей функцией своих аргументов. При этом он может иметь большое число локальных минимумов. Заметим, что $\Omega \geq 0$, при этом, если у него есть истинное решение (что по физическому смыслу подразумевается по умолчанию), то значение $\Omega = 0$ в виде глобального минимума достигается, по крайней мере, на истинном решении. При этом локальные минимумы весьма далеки от глобального $\Omega = 0$. Вопрос о том, существуют ли другие точки, в которых $\Omega = 0$, связан с вопросом единственности восстанавливаемой системы трещин – вопрос, который мы здесь не рассматриваем. Таким образом, необходимо построить численный алгоритм решения оптимизационной задачи (1.10), который обеспечивает устойчивое нахождение глобального минимума.

В литературе описаны различные методы решения оптимизационных задач. Главным недостатком регулярных методов является то, что они приводят лишь к одному из локальных минимумов, в то время, как решение задачи находится в глобальном минимуме. В связи с этим мы применяли метод глобального случайного поиска [7], родственный современным генетическим алгоритмам.

Реальное тестирование алгоритма проведено до числа трещин, не превосходящих $N = 5$. Алгоритм минимизирует функционал (8) последовательно для значений $j = 1,...,5$. Наименьшее значение функционала определяет как число трещин, так и их конфигурацию. Приводятся примеры практической идентификации.

Авторы выражают благодарность Российскому научному фонду за поддержку, грант 15-19-10008.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ермолов И.Н. Теория и практика ультразвукового контроля, М.: Машиностроение, 1981. 240 с.
2. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния, М.: Мир, 1987. 312 с.
3. Sumbatyan M.A., Scalia A. Equations of mathematical diffraction theory, CRC Press: Boca Raton (Florida), 2005. 292 p.
4. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях, М.: Наука, 1985. 254 с.
5. Вайникко Г.М., Лифанов И.К., Полтавский Л.Н. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения, М.: Янус-К, 2001. 508 с.
6. Малла С. Вэйвлеты в обработке сигналов, М.: Мир, 2005. 674 с.
7. Жиглявский А.А. Математическая теория глобального случайного поиска. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985. 293 с.

Сведения об авторах:

Сумбатян Межлум Альбертович – заведующий кафедрой теоретической и компьютерной гидроаэродинамики, Южный федеральный университет, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И.Воровича, г. Ростов-на-Дону.
E-mail: sumbat@math.rsu.ru

Ложкова Юлия Николаевна – ведущий научный сотрудник, Южный федеральный университет, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И.Воровича, г. Ростов-на-Дону. **E-mail:** ljn@bti.secna.ru

ЗАВИСИМОСТЬ ФОРМЫ КОЛЕБАНИЙ УДЛИНЁННОЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНКИ ОТ ДАВЛЕНИЯ В ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЕ

Тарасов А.Е., Барканов Е.Н.

Разработан аналитический алгоритм решения задачи о гармонических колебаниях тонкой упругой пластинки в несжимаемой идеальной жидкости. Задача сводится к основному интегро-дифференциальному уравнению. Решение уравнения позволяет определить функцию колебаний пластинки. Проведён анализ влияния компоненты давления воздуха на форму колебаний пластинки. Полученные результаты сопоставлены с экспериментальными данными.

1. Математическая постановка задачи

Пусть тонкая прямоугольная в плане пластинка $S=(-b,b)\times(-\ell,\ell)$ помещена в идеальную несжимаемую жидкость. Пластинку вынуждает гармонически колебаться внешний источник. Эти колебания распространяются на всю пластинку. Пластинка имеет постоянную изгибную жёсткость EJ и линейную плотность m.

Предполагая малость вносимых пластинкой в поток возмущений, решаем задачу в линейной постановке. Тогда все параметры потока можно считать подчиняющимися гармоническому по времени закону: $\tilde{A}(x,y,z,t)=\operatorname{Re}\left\{A(x,y,z)e^{-i\omega t}\right\}$.

Пусть $\tilde{W}(y,t)=\operatorname{Re}\left\{W(y)e^{-i\omega t}\right\}$ – функция, определяющая форму пластинки. В линейном приближении подразумевается, что $|dW/dy|<<1$.

Форма колебания пластинки и все остальные механические характеристики определяются, с одной стороны, упругими свойствами пластинки, а с другой стороны, гидродинамическим взаимодействием между пластинкой и воздухом. При этом считаем, что упругая пластинка является достаточно удлинённой – так, что её колебания можно описать уравнением колебания балки

$$EJ\frac{\partial^4\tilde{W}(y,t)}{\partial y^4}+m\frac{\partial^2\tilde{W}(y,t)}{\partial t^2}=\tilde{Z}(y,t)+p_0b^2(y-y_0)e^{-i\omega t}$$

$$EJ\frac{\partial^4 W(y)}{\partial y^4}+m\frac{\partial^2 W(y)}{\partial t^2}=Z(y)+p_0b^2(y-y_0),\qquad Z(y)=\int(p_--p_+)dx, \tag{1.1}$$

где p_- и p_+ обозначают давление снизу и сверху от пластинки, тогда p_--p_+ — это разность между давлением снизу и сверху пластинки. Кроме того, функция $p_0(y-y_0)$ обозначает амплитуду внешней гармонической по времени сосредоточенной силы, приложенной к балке в точке $y=y_0$, при этом, множитель b^2 включен для того, чтобы все члены в уравнении (1.1) имели одну и ту же размерность.

Боковые кромки пластинки свободны, тогда граничные условия имеют вид:

$$\frac{d^2W}{dy^2}=\frac{d^3W}{dy^3}=0,\qquad (y=\pm\ell). \tag{1.2}$$

Линейная теория подразумевает малость скорости и изменения давления. При рассмотрении гидродинамической картины предполагаем потенциальность гидродинамического поля на всем трёхмерном пространстве вне пластинки. Потенциал скоростей удовлетворяет уравнению Лапласа, что следует из уравнения неразрывности

$$\Delta\varphi=0. \tag{1.3}$$

Линеаризованный интеграл Коши связывает потенциал скоростей и гидродинамическое давление

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial t}+\frac{\tilde{p}}{\rho}=0,\quad\Rightarrow\ -i\omega\varphi+\frac{p}{\rho}=0, \tag{1.4}$$

где ρ – плотность жидкости.

Поскольку потенциал определён с точностью до произвольного слагаемого, то его можно принять исчезающим на бесконечности: $\varphi \to 0, \ (x, y, z \to \pm\infty)$. Вне пластинки давление и потенциал должны быть непрерывными:

$$p_- = p_+, \quad \varphi_- = \varphi_+, \ z = 0, \quad (x, y) \notin S. \tag{1.5}$$

Условие непроницания на пластине запишем в следующем виде:

$$\frac{\partial \tilde{W}}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial z}, \quad \Rightarrow \quad -i\omega W = \frac{\partial \varphi_-}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_+}{\partial z}, \quad z = 0, \ (x, y) \in S. \tag{1.6}$$

Решаем гидродинамическую задачу. Из (1.5) и (1.6) следует, что $\partial\varphi/\partial z$ — регулярная функция во всем пространстве, причём, чётная относительно z. Таким образом, потенциал φ –нечётный по z для всех (x, y). Тогда, из (1.6) следует, что и аэродинамическое давление p также нечётно по z для всех (x, y). Таким образом, достаточно найти эти базовые функции, например, только для положительных z.

Введём неизвестную функцию $g(x, y)$:

$$\frac{1}{2}(p_+ - p_-)_{z=0} = p_+(x, y, +0) = \begin{cases} 0, & (x, y) \notin S \\ g(x, y) & (x, y) \in S, \end{cases} \tag{1.7}$$

$$Z(y) = -2\int_{-b}^{b} p_+ dx$$

Применяя интегральное преобразование Фурье, сведём краевую задачу (1.3) – (1.5), с учётом (1.6) к основному двумерному интегральному уравнению.

$$\frac{1}{4\pi^2\omega^2\rho}\int_{-b}^{b}\int_{-l}^{l} K(\xi - x, \eta - y)\, g(\xi, \eta)\, d\xi d\eta = -W(y), \qquad (|x| \le b, |y| \le \ell), \tag{1.8}$$

$$K(\xi, \eta) = \int\int_{-\infty}^{-\infty} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\, e^{i(\alpha\xi + \beta\eta)} d\alpha d\beta. \tag{1.9}$$

Ядро $K(\xi, \eta)$ здесь понимается в обобщённом смысле [1].

Следует отметить, что (1.8) должно быть рассмотрено вместе с (1.1). Таким образом, задача сводится к системе двух уравнений: интегрального и дифференциального.

2. Асимптотический анализ основного интегрального уравнения

Ядро в (1.9) может быть выписано в явном виде:

$$K(\xi, \eta) = -\frac{2\pi}{\sqrt{(\xi^2 + \eta^2)^3}}, \tag{2.1}$$

очевидно, что оно гиперсингулярное при $\sqrt{\xi^2 + \eta^2} \to 0$. Известно [1], что ограниченное решение с таким ядром исчезает на граничном контуре S как квадратный корень от расстояния. Тогда, целесообразно искать решение уравнения (1.9) в виде следующего разложения в ряд:

$$g(x, y) = \sqrt{b^2 - x^2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k(y)}{k+1} U_k\left(\frac{x}{b}\right). \tag{2.2}$$

Здесь квадратный корень перед знаком суммы ряда является весом ортогональных многочленов Чебышева второго рода $U_k(x)$.

Подставим разложение (2.2) в уравнение (1.8) и применим скалярное умножение левой и правой частей уравнения (1.8) на ряд таких же полиномов Чебышева второго рода $\sqrt{b^2 - x^2}U_k(x/b), n = 0,1,\ldots$.

Тогда, интегрируя по переменным ξ и x (J_n — функция Бесселя порядка n) [2], получим следующую бесконечную систему одномерных интегральных уравнений:

$$\frac{b^2}{4\rho\omega^2}\sum_{k=0}^{\infty} N_{nk}\left(\eta-y\right)g_k\left(\eta\right)d\eta = F_k\left(y\right), \qquad \left|y\right|\le \ell, \quad n=0,1,\ldots$$

$$F_n\left(y\right) = -\int_{-b}^{b}\sqrt{b^2-x^2}W\left(y\right)U_n\left(\frac{x}{b}\right)dx, \quad N_{nk}\left(\eta\right)=\int_{-b}^{b}L_{nk}\left(\beta\right)e^{i\beta\eta}d\beta, \tag{2.3}$$

$$L_{nk}\left(\beta\right) = i^{k-n}\left(n+1\right)\int_{-b}^{b}\frac{J_{n+1}\left(b\alpha\right)J_{k+1}\left(b\alpha\right)}{\alpha^2}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}d\alpha, \qquad n,k=0,1,\ldots$$

Поскольку большое удлинение пластинки физически эквивалентно малости полуширины b (по сравнению с полуразмахом ℓ), то ядра N_{nk} будем брать в «вырожденном» виде (т.е. при $b\beta\to 0$):

$$N_{nk}\left(\eta\right)\approx\int_{-\infty}^{\infty}L_{nk}\left(0\right)e^{i\beta\eta}d\beta = L_{nk}\left(0\right)2\pi\delta\left(\eta\right), \tag{2.4}$$

При этом,

$$L_{nk}\left(0\right)=0,\left(k\ne n\right); \qquad L_{nk}\left(0\right)=2\left(n+1\right)\int_{0}^{\infty}\frac{J_{n+1}^2\left(\alpha\right)}{\alpha}d\alpha=1, \tag{2.5}$$

Следовательно, для $\lambda=\ell/b\to\infty$ внедиагональные элементы $\left(k\ne n\right)$ системы (2.3) исчезают, и в первом приближении система сводится к набору независимых соотношений:

$$\frac{\pi\left(-1\right)^n}{2\left(n+1\right)\rho\omega^2}g_n\left(y\right)=F_n\left(y\right), \qquad \left|y\right|\le\ell, \quad n=0,1,\ldots \tag{2.6}$$

Из средней строки формулы (2.3) очевидно, что, в силу ортогональности многочленов Чебышева, имеем $F_n\left(y\right)\equiv 0,\ n\ge 1$, поэтому и $g_n\left(y\right)\equiv 0,\ n\ge 1$. Следовательно, из всех функций $g_n\left(y\right)$ ненулевой остаётся лишь функция $g_0\left(y\right)$, которую легко получить из (2.6) и (2.3):

$$\frac{\pi}{2\rho\omega^2}g_0\left(y\right)=F_0\left(y\right)=-\frac{\pi}{2}W\left(y\right), \qquad \Rightarrow \tag{2.7}$$

$$g\left(x,y\right)=\sqrt{b^2-x^2}g_0\left(y\right)=-\rho\omega^2\sqrt{b^2-x^2}W\left(y\right). \tag{2.8}$$

3. Динамическая деформация упругого крыла

Дифференциальное уравнение, определяющее амплитуду колебаний пластинки, функция $W\left(y\right)$, получается при подстановке выражения (2.8) в (1.1) с учётом (1.7). Получим:

$$Z\left(y\right)=\int_{-b}^{b}\left[p_-\left(x,y\right)-p_+\left(x,y\right)\right]dx=-2\int_{-b}^{b}g\left(x,y\right)dx=\pi\rho b^2\omega^2W\left(y\right), \tag{3.1}$$

тогда (1.1) принимает вид:

$$\frac{d^4W\left(y\right)}{dy^4}-\zeta^4W\left(y\right)=\frac{p_0b^2}{EJ}\delta\left(y-y_0\right), \qquad \left(\zeta\ell\right)^4=\frac{\ell^4\omega^2}{EJ}\left(m+\pi\rho b^2\right). \tag{3.2}$$

Решение ОДУ 4-го порядка (3.2) с граничными условиями (1.2) может быть представлено как сумма общего решения соответствующего однородного уравнения:

$$W_h\left(y\right)=A_1\sin\left[\zeta\left(y+\ell\right)\right]+A_2\,\mathrm{sh}\left[\zeta\left(y+\ell\right)\right]+A_3\sin\left[\zeta\left(y-\ell\right)\right]+A_4\,\mathrm{sh}\left[\zeta\left(y-\ell\right)\right], \left|y\right|\le\ell, \tag{3.3}$$

и частного решения полного неоднородного уравнения (3.2). Последнее можно искать в виде тригонометрического ряда по переменной y, не удовлетворяющего никаким граничным условиям, например, в таком виде:

$$W_p\left(y\right)=\sum_{n=1}^{\infty}W_n\sin\left(\frac{\pi ny}{\ell}\right), \ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}W_n\left[\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^4-\zeta^4\right]\sin\left(\frac{\pi ny}{\ell}\right)=\frac{p_0b^2}{EJ}\delta\left(y-y_0\right), \tag{3.4}$$

С использованием ортогональности синусов из (3.4) получим:

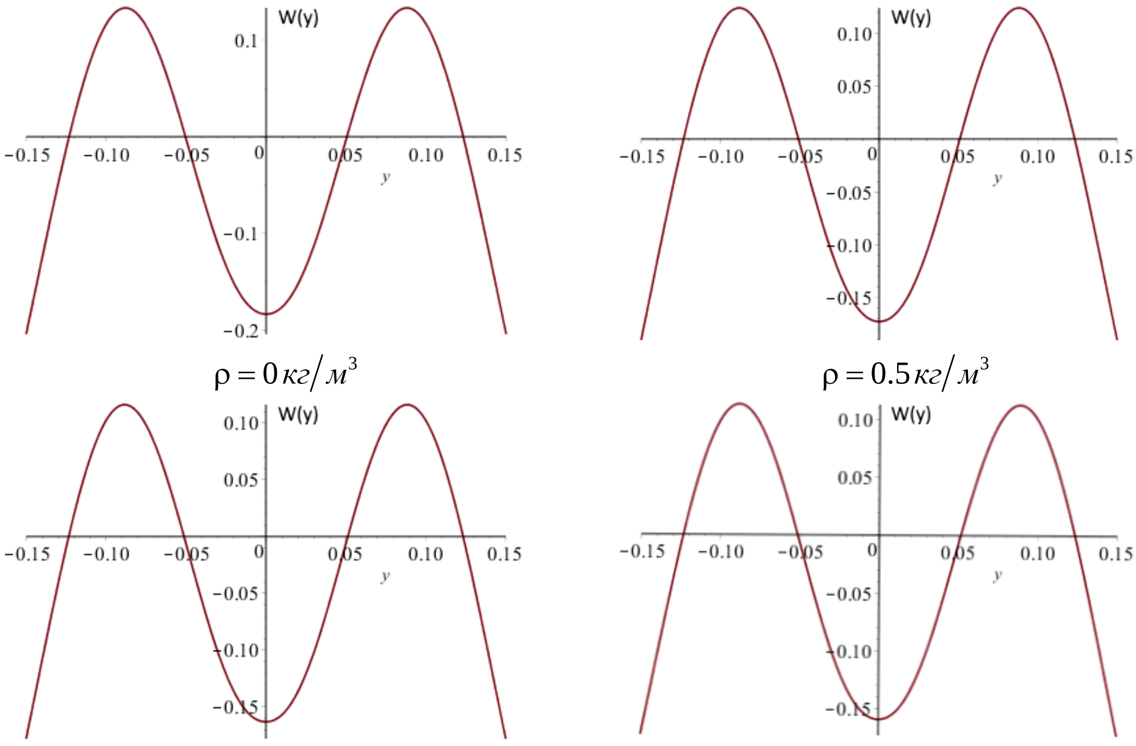
$$W_p(y) = \frac{p_0 b^2}{4EJ\zeta^3}\left\{\frac{\cos\left[\zeta\left(\ell - y - y_0\right)\right] - \cos\left[\zeta\left(\ell - \left|y - y_0\right|\right)\right]}{\sin(\zeta\ell)} + \right.$$
$$\left. + \frac{\mathrm{ch}\left[\zeta\left(\ell - y - y_0\right)\right] - \mathrm{ch}\left[\zeta\left(\ell - \left|y - y_0\right|\right)\right]}{\mathrm{sh}(\zeta\ell)}\right\} \qquad (3.5)$$

Теперь, суммируя выражения (3.3) и (3.5), получаем общее решение ОДУ (3.2) в виде $W(y) = W_h(y) + W_p(y)$, содержащее четыре произвольные постоянные. Удовлетворяя четырём граничным условиям (1.2), легко получить значения неизвестных констант A_1, A_2, A_3, A_4, что, затем, позволяет вывести форму колебаний пластинки $W(y)$ и построить соответствующие графики.

4. Численные результаты

Изменение давления влияет на аэродинамику не напрямую, а через плотность, которая уменьшается пропорционально уменьшению давления. Зависимость от степени разряжения воздуха является сильно нелинейной и проникает в форму колебания пластины через параметр ζ (3.2), содержащий плотность воздуха ρ.

Для сравнения с результатами эксперимента возьмём тонкую алюминиевую пластинку длиной 0,3 м., шириной 0,2 м., толщиной 2 мм. Рассчитаем форму колебаний пластинки $W(y)$ для разных значений плотности ρ, на некоторой частоте колебаний, для определённости, на 700 Гц. Воздействуем на пластинку в точке $y_0 = 0$. На рис.1 представлены графики функций колебания $W(y)$ для разных значений плотности ρ.



$\rho = 0\,кг/м^3$ $\qquad$ $\rho = 0.5\,кг/м^3$

$\rho = 1\,кг/м^3$ $\qquad$ $\rho = 1.225\,кг/м^3$

Рис.1. Форма колебаний $W(y)$ алюминиевой пластинки

$\ell = 0.3м,\ b = 0.2\,м,\ h = 2\,мм$ на частоте 700 Гц

Из рис.1 можно заметить, что $\max|W(y)|,\ y \in (-\ell, \ell)$ увеличивается при уменьшении значения плотности ρ. В рассматриваемом случае общее увеличение амплитуды колебаний составляет около 16%.

Сопоставим результаты с данными натурных экспериментов [3], полученных в Рижском техническом университете для такой же пластинки, для девятой моды колебаний, частота которой близка к 700 Гц [4]. Сравнение с экспериментальными данными для этого случая представлено на рис.2.

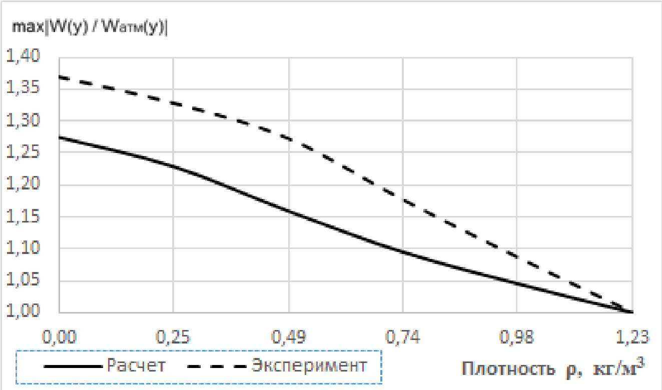


Рис.2. Сравнение изменения max|W(y)| в зависимости от плотности ρ для пластинки $\ell = 0.3 м,\ b = 0.2 м,\ h = 2 мм$ на частоте 700 Гц

Первый автор благодарит Российский научный фонд за поддержку, грант № 15-19-10008.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сумбатян М.А., Скалия А. Основы теории дифракции с приложениями в механике и акустике. М.: Физматлит, 2013. 327 с.
2. Prudnikov A.P., Brychkov Y.A., Marichev O.I. Integrals and Series, vol.1 and 2, Gordon and Breach Science Publishers (Amsterdam), 1986.
3. M. Wesolowski and E. Barkanov. Errors of experimental and numerical models in vibration analysis of structures, Proceedings of the 16th International Congress on Sound and Vibration, 2009, pp.802-809.
4. E. Barkanov, E. Skukis, M. Wesolowski, and A. Chate. Characterization of Adhesive Layers in Sandwich Composites by Nondestructive Technique. The World Academy of Science, Engineering and Technology, Volume 38, 2009, pp.1-6.

Сведения об авторах:

Тарасов Александр Евгеньевич – аспирант, Южный федеральный университет, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича, г. Ростов-на-Дону, Россия +7(918) 55 71 570
E-mail: aetarasov@sfedu.ru

Барканов Евгений Николаевич – профессор, Рижский технический университет, Строительный факультет, г.Рига, Латвия
E-mail: barkanov@latnet.lv

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ШЕРОХОВАТОСТИ НА КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТЕЛ С ПОКРЫТИЯМИ

Торская Е.В.

Взаимодействие упругих шероховатых покрытий и гладкого индентора моделируется с помощью решения контактной задачи на двух масштабных уровнях. Решение основано на использовании функции дополнительного смещения, полученной из исследования контакта на микро-уровне при формулировке задачи на макро-уровне. Дополнительные смещения, зависящие от номинального давления, получены из периодической модели шероховатой поверхности. Для решения задачи используется численно-аналитический метод, основанный на интегральных преобразованиях Ханкеля, методе граничных элементов и итерационной процедуре. Проведён анализ влияния параметров шероховатости и относительной жёсткости покрытий на распределение контактного давления и зависимость внедрения индентора в двухслойное полупространство от нагрузки.

1. Нанесение покрытий является одним из наиболее распространённых способов улучшения фрикционных характеристик и износостойкости поверхностей в узлах трения. Технологии нанесения и последующей поверхностной обработки определяют качество поверхности, её шероховатость, которая является одним из важных факторов в условиях контактного взаимодействия. Качество поверхности обычно контролируется методами профилометрии либо атомно-силовой микроскопии, но эти исследования не используются в качестве базы для моделирования дискретного контакта.

Более распространенными являются модели, в которых шероховатый индентор взаимодействует с гладким покрытием. При исследовании дискретного контакта использовались как результаты профилометрирования [1,2], так и периодические модели шероховатости [3-5]. Эти же подходы позже были использованы при решении двухуровневой задачи, то есть при исследовании влияния параметров микрогеометрии на контактные характеристики на макро уровне [6,7]. В ряде случаев более актуальной является другая постановка – о взаимодействии шероховатого покрытия и гладкого индентора. Такого типа контактное взаимодействие может быть в подшипниках качения с керамическими шариками, а также при индентировании покрытий высокотвёрдыми коническими и сферическими инденторами. Сложность решения задач такого типа состоит в том, что переменная толщина покрытия, обусловленная шероховатостью, делает невозможным использование численно-аналитических методов, основанных на интегральных преобразованиях Ханкеля и Фурье, а разные масштабы параметров контактного взаимодействия на макро- и микроуровнях существенно затрудняют использование численных методов.

В данной работе предложено приближённое решение задачи о контакте гладкого индентора и шероховатого покрытия, которое основано на принципе локализации, сформулированном И.Г. Горячевой для периодических контактных задач [8], а также на методах, разработанных в [6, 9].

Представлены границы применимости модели, проведён анализ влияния параметров микрогеометрии на результаты индентирования.

2. Рассмотрим осесимметричный индентор, который под действием нормальной силы Q внедряется в двухслойное упругое полупространство (рис.1). Шероховатость покрытия моделируется периодической системой осесимметричных неровностей, причём, удовлетворяются следующие условия:

$$h_1 << H\,, \tag{2.1}$$

$$l << a\,. \tag{2.2}$$

Это значит, что высота неровностей h_1 имеет иной масштаб, чем толщина покрытия H (условие (2.1)), а расстояние между неровностями l много меньше, чем размер площадки контакта a.

Нормальные перемещения поверхности определяются следующим соотношением:

$$w(x,y) = C\left[p(x,y)\right] + A\left[p(x,y)\right], \tag{2.3}$$

где $p(x,y)$ – функция, определяющая номинальное давление в области контакта, $C\left[p(x,y)\right]$ – функция дополнительного смещения, которая определяет податливость контакта за счёт наличия слоя шероховатостей и зависит от номинального давления, $A\left[p(x,y)\right]$ определяется из решения контактной задачи без учёта влияния слоя неровностей. Решение двухуровневой контактной задачи включает расчёт функции дополнительного смещения и использование её при решении задачи на макроуровне.

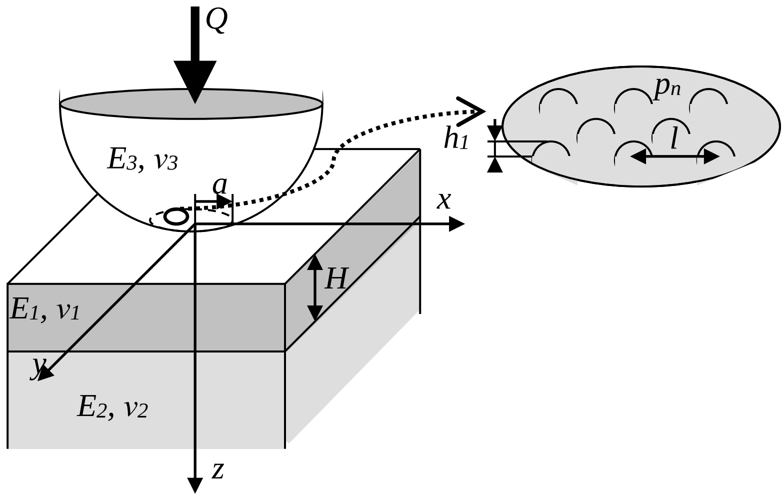


Рис.1

Условие (2.1) позволяет пренебречь влиянием подложки на исследование контактной задачи на микроуровне. Подобный подход позволяет использовать всё многообразие решений, существующих для однородных упругих тел. Условие (2.2) позволяет использовать периодическую контактную задачу для определения функции дополнительного смещения. Задача о контакте периодической системы инденторов и однородного упругого полупространства подробно исследована в [8]. В частности, получена и исследована функция дополнительного смещения в задаче о контакте периодической одноуровневой системы сферических инденторов, расположенных в узлах гексагональной решётки, и упругого полупространства. Показано, что при малой плотности контакта функция дополнительного смещения может быть описана следующим соотношением:

$$\frac{C\left[p(x,y)\right]}{l}=\left(\frac{p(x,y)}{E^*}\right)^{2/3}\gamma_1\left(\frac{R}{l}\right)\left(1+\gamma_2\left(\frac{R}{l}\right)\frac{p(x,y)}{E^*}\right)+B\frac{p(x,y)}{E^*},$$

$$\gamma_1\left(\frac{R}{l}\right)=\frac{3}{8}\left(\frac{9l}{2R}\right)^{1/3},\quad \gamma_2\left(\frac{R}{l}\right)=\frac{R}{l}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}\right)^{1/3}, \tag{2.4}$$

$$B=\frac{6\sqrt{3}}{\pi}-2\sqrt{\frac{14}{\pi\sqrt{3}}},$$

где R – радиус микро индентора.

3. Рассмотрим контакт двухслойного упругого полупространства и осесимметричного индентора, форма которого описывается функцией $f(r)$. На границе раздела слоя и полупространства выполняются условия полного сцепления:

$$w^{(1)}=w^{(2)},\quad u_r^{(1)}=u_r^{(2)},$$
$$\sigma_z^{(1)}=\sigma_z^{(2)},\quad \tau_{rz}^{(1)}=\tau_{rz}^{(2)}, \tag{3.1}$$

где $\sigma_z^{(i)},\tau_{rz}^{(i)}$ и $w^{(i)},\ u_r^{(i)}$ – напряжения и перемещения в слое (i = 1) и полупространстве (i = 2).

Граничные условия на поверхности определяются следующими соотношениями:

$$w^{(1)}(r)+w^{C}(r)+w^{(3)}(r)=f(r)+D,\quad 0\le r\le a,$$
$$\sigma_z^{(1)}(r)=0,\qquad a<r<+\infty, \tag{3.2}$$
$$\tau_{rz}^{(1)}(r)=0,\qquad 0\le r<+\infty,$$

где D – внедрение индентора, $w^{(3)}(r)$ – упругие перемещения поверхности индентора, $w^{C}(r)$ определяется с помощью функции дополнительного смещения, которая зависит от неизвестного номинального давления *p (r)*.

Также используется уравнение равновесия:

$$Q=2\pi\int_0^a p(r)dr. \tag{3.3}$$

Для гладких инденторов дополнительное условие $p(a)=0$ используется для определения неизвестного радиуса области контакта.

Решение контактной задачи без учёта шероховатости представлено в [10]. Ниже изложены его основные этапы, включающие особенности, привнесённые наличием функции $w^{C}(r)$.

Круговая область контакта делится на N колец толщиной Δr, контактное давление представляется в виде кусочно-постоянной функции $p(r)=p_j\ (r_{j-1}<r<r_j,\, r_j=j\cdot\Delta r,\ j=1..N)$, которая определяется из решения следующей системы уравнений:

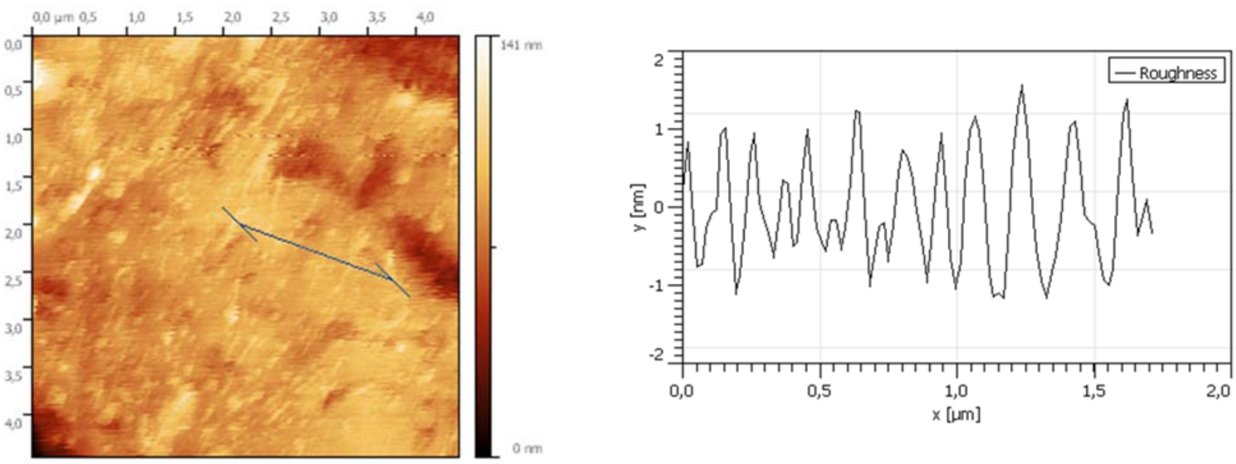
$$p_1\left(\kappa_1^{(n)}-\omega_1^{(n)}\right)+...+p_N\left(\kappa_N^{(n)}-\omega_N^{(n)}\right)+w'(r_j)=f_1(r_j),\quad (n=1,2...N-1),$$
$$\pi\sum_{n=1}^{N}p_n(r_n^2-r_{n-1}^2)=Q,\quad w'=S_m+v_m p_c,\quad p_{m-1}\le p_c\le p_m, \tag{3.4}$$

где $\kappa_j^{(n)}$ и $\omega_j^{(n)}$ – коэффициенты влияния для двухслойного упругого полупространства и упругого индентора соответственно. Система (3.4) также включает уравнение равновесия. Метод расчёта коэффициентов влияния подробно изложен в [9]. Функция дополнительного смещения представляется здесь как кусочно-линейная, S_m, v_m в (3.4) это параметры некоторого линейного сегмента. Алгоритм построения приближённой кусочно-линейной функции включает выбор начальной точки первого линейного сегмента в окрестности $p(x,y)=0$, расчёт изменения производной и определения точки смены сегментов из условия изменения значения производной на 10% от начала до конца сегмента. В качестве начального приближения используется решение задачи без учёта функции дополнительного смещения.

4. Очевидно, что данная приближённая постановка задачи позволяет исследовать только характеристики контактного взаимодействия на макро-уровне. Наиболее интересным представляется анализ зависимости внедрения от нагрузки для разных параметров микрогеометрии, в рамках рассматриваемой периодической задачи это расстояние между инденторами и радиус микро-индентора.

В качестве примера рассмотрим реальную композицию керамическое покрытие-подложка, в которую вдавливается гладкий алмазный сферический индентор с радиусом закругления 1мм. Покрытие имеет толщину 3мкм, модуль упругости покрытия – 410 ГПа, модуль упругости стальной подложки – 210 ГПа. Проведено химическое полирование поверхности покрытия. В результате, шероховатость поверхности такова, что может быть с достаточной степенью адекватности описана периодической моделью. На рис.2 приведены фотография поверхности покрытия и профиль поверхности, полученные на атомно-силовом микроскопе в Лаборатории трибологии ИПМех РАН.

Среднее расстояние между неровностями составляет 0.15 мкм, разброс вычисленных радиусов отдельных неровностей достаточно велик, что может быть связано с поточечным измерением высот. Представленные выше данные послужили основой для расчётов. Варьируемыми параметрами являлись расстояние между инденторами и радиус микро-индентора.



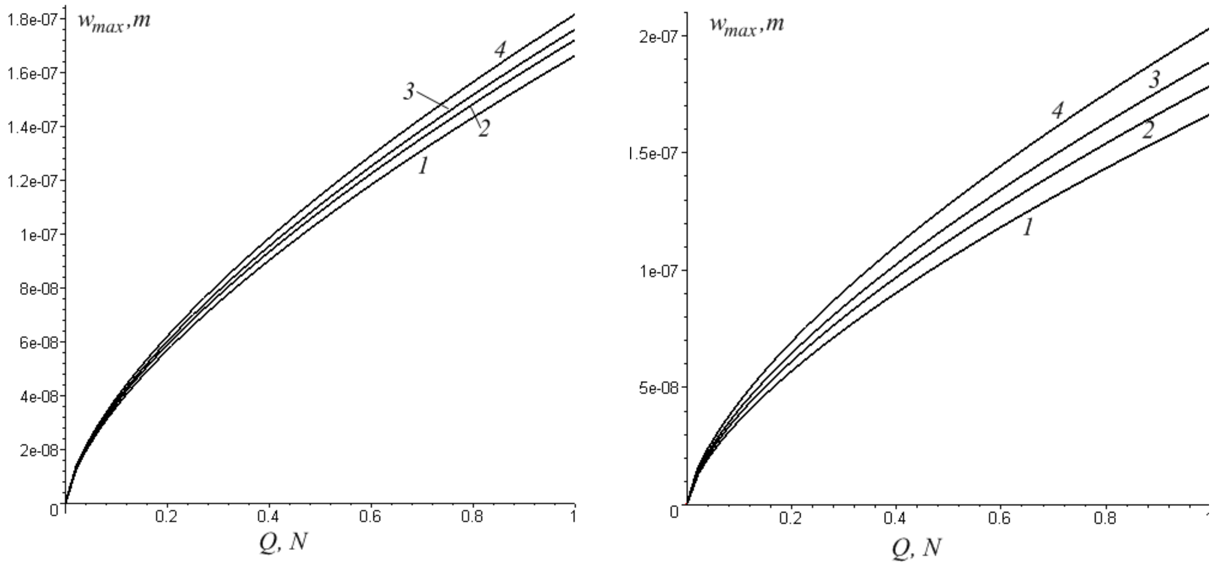
а б

Рис.2

На рис.3 приведены зависимости внедрения от нагрузки для двух характерных значений периода гексагональной решетки $l = 0.15 мкм$ (а), $l = 0.30 мкм$ (б) и трёх значений безразмерного радиуса микро-индентора $R/l = 1.0, 0.2, 0.05$ (кривые 2-4, соответственно). $E_1 = 410\text{ÃÏ à}, E_2 = 210\text{ÃÏ à}, E_0 = 1141\text{ÃÏ à}, \nu_1 = 0.25, \nu_2 = 0.3, \nu_0 = 0.2,$ радиус макро-индентора – 1мм. На рисунках также для сравнения приведены результаты, полученные для гладкого покрытия (кривые 1). Сравнение кривой 1 с кривыми 2-4 показывает, что шероховатость делает систему более податливой.

Следует отметить, что для рассмотренных входных параметров задачи влияние радиуса неровности на смещение макро-индентора меньше, чем влияние расстояния между неровностями. Так, относительный радиус единичной неровности меняется в 5 и в 4 раза при переходе от кривых 2 к кривым 3 и от кривых 3 к кривым 4, соответственно, при этом, рост дополнительного смещения за счёт уменьшения плотности контакта относительно невелик. В то же время увеличение в два раза расстояния между неровностями приводит к заметному увеличению внедрения при аналогичных нагрузках.

Базовые параметры микро геометрии были использованы также при интерпретации результатов индентирования покрытия шариком из оксида алюминия (рис.4). Экспериментальная кривая 1 на ранних стадиях внедрения близка к расчётной кривой 2, полученной с учётом шероховатости.



а б

Рис.3

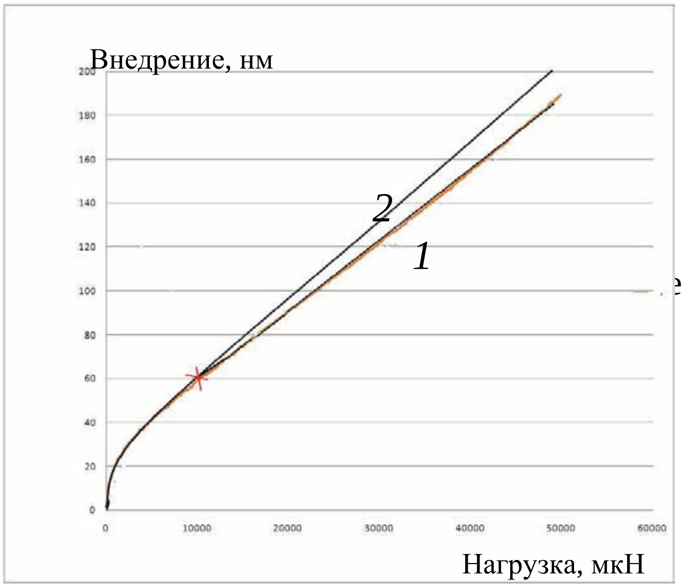


Рис.4.

Таким образом, чем более дискретным является контакт, тем важнее принимать во внимание шероховатость поверхности покрытий. Упругое вдавливание (индентирование) является одним из методов определения модуля упругости покрытия, материал которого часто не существует в больших объёмах, неучёт шероховатости поверхности при интерпретации результатов экспериментов может привести к заниженным расчётным модулям упругости покрытия.

Работа выполнена при поддержке РНФ (грант № 14-19-01033), прикладные исследования выполнены в рамках гранта РФФИ № 15-08-06298.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горячева И.Г., Торская Е.В. Периодическая контактная задача для системы штампов и упругого слоя, сцеплённого с упругим основанием. //Трение и износ. 1995. Т.17. № 4.
2. Goryacheva I.G., Torskaya E.V. Stress and fracture analysis in periodic contact problem for coated bodies. //Fatigue and Fracture of Engng Materials and Structures, vol. 26, № 4, 2003.
3. Cole S.J., Sayles R.S. A numerical model for the contact of layered elastic bodies with real rough surfaces.// Journal of Tribology, № 11, 1991.
4. Sainsot Ph, Leroy JM and Villechase B. Effect of surface coatings in a rough normally loaded contact. //Mechanics of Coatings (Tribology Series 17), 1990.
5. Cai S. and Bhushan B. Three-dimensional sliding contact analysis of multilayered solids with rough surfaces.// ASME Journal of Tribology, 129, 2007.
6. Торская Е.В. Моделирование фрикционного взаимодействия шероховатого индентора и двухслойного упругого полупространства.// Физическая мезомеханика, 2012. Т.15. № 2.
7. Nyqvist J.T., Kadiric A., Sayles R.S. and Ioannides E. Three-dimensional analysis of multilayered rough surface contact. World tribology congress (WTC2013) Proceedings 2013
8. Горячева И.Г. Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.
9. Torskaya E.V. and Goryacheva I.G. The effect of interface imperfection and external loading on the axisymmetric contact with a coated solid. Wear, v. 254, № (5-6), 2003.

Сведения об авторе:

Торская Елена Владимировна – д.ф.-м.н., старший научный сотрудник Лаборатории трибологии, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, +7 495 4343692; **E-mail**: torskaya@mail.ru

ОТРАЖЕНИЕ ИЗГИБНОЙ ВОЛНЫ ОТ ГРАНИЦЫ ПЛАСТИНКИ С УЧЁТОМ НАПРЯЖЕНИЙ СДВИГА

Хачатрян Л.С.

В настоящей работе приводится задача отражения изгибной волны от плоской границы пластинки с учётом напряжений сдвига. Задача рассматривается по теории С.А. Амбарцумяна при различных граничных условиях.

1. Пусть упругая пластинка занимает область $-\infty < x < \infty, 0 \le y < \infty, -h \le z \le h$. На кромку пластинки $y = 0$ падает изгибная волна. Требуется определить отражённую волну при различных условиях закрепления кромки $y = 0$. Задачи колебаний пластинки рассматриваются на основе уточнённой теории высокого порядка С.А.Амбарцумяна [1].

Уравнения изгиба пластинки по теории Амбарцумяна имеют вид [2]:

$$\begin{gathered}\frac{4h}{3}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)-2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-D\frac{\partial}{\partial x}\Delta w+\\+\frac{8h^3}{15}\left[\Delta\varphi_1+\theta\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)\right]-\frac{4h}{3}\varphi_1=-\frac{2\rho h^3}{3}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{4}{5G}\varphi_1\right)\\-D\frac{\partial}{\partial y}\Delta w+\frac{8h^3}{15}\left[\Delta\varphi_2+\theta\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)\right]-\frac{4h}{3}\varphi_2=-\frac{2\rho h^3}{3}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{4}{5G}\varphi_2\right)\end{gathered}\tag{1.1}$$

Систему уравнений (1.1) исключением функций φ_1 и φ_2 можно привести к одному уравнению относительно прогиба w:

$$D\Delta^2 w-\frac{2\rho h^3}{3}\left(1+\frac{12}{5(1-\nu)}\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta w+\frac{4\rho^2h^3}{5G}\frac{\partial^4 w}{\partial t^4}+2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=-q+\frac{4h^2}{5(1-\nu)}\Delta q-\frac{2\rho h^2}{5G}\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}\tag{1.2}$$

При $q = 0$ уравнение изгибных колебаний изотропной пластинки по теории Амбарцумяна имеет вид (1.2), где

$$\begin{gathered}D=\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)},G=\frac{E}{2(1-\nu)},E=2c_1(1-\nu)\\c_1^2=\frac{E}{\rho(1-\nu^2)},c_2^2=\frac{5c_1}{6\rho},\alpha=\frac{2\rho h}{D}\end{gathered}\tag{1.3}$$

Если представить решение уравнения (1.2) в виде гармонических волн [3]

$$\begin{gathered}w=w_0\exp i\left(\omega t-k_1x+k_2y\right)\\\varphi_1=\varphi_{10}\exp i\left(\omega t-k_1x+k_2y\right)\\\varphi_2=\varphi_{20}\exp i\left(\omega t-k_1x+k_2y\right)\end{gathered}\tag{1.4}$$

то получается следующее характеристическое уравнение:

$$\left(k_1^2+k_2^2\right)^2-\left(\frac{1}{c_1^2}+\frac{1}{c_2^2}\right)\omega^2\left(k_1^2+k_2^2\right)+\frac{1}{c_1^2c_2^2}\omega^4-\alpha\omega^2=0,\tag{1.5}$$

откуда можно определить волновое число k_2 в зависимости от k_1 и ω

$$k_2 = \pm\sqrt{\left(\frac{1}{c_1^2}+\frac{1}{c_2^2}\right)\frac{\omega^2}{2} \pm \sqrt{\frac{\omega^4}{4}\left(\frac{1}{c_1^2}-\frac{1}{c_2^2}\right)^2 + \alpha\omega^2} - k_1^2} \tag{1.6}$$

$$k_{21} = -k_{22} = \pm\sqrt{\left(\frac{1}{c_1^2}+\frac{1}{c_2^2}\right)\frac{\omega^2}{2} + \sqrt{\frac{\omega^4}{4}\left(\frac{1}{c_1^2}-\frac{1}{c_2^2}\right)^2 + \alpha\omega^2} - k_1^2} \tag{1.7}$$

$$k_{23} = -k_{24} = \pm\sqrt{\left(\frac{1}{c_1^2}+\frac{1}{c_2^2}\right)\frac{\omega^2}{2} - \sqrt{\frac{\omega^4}{4}\left(\frac{1}{c_1^2}-\frac{1}{c_2^2}\right)^2 + \alpha\omega^2} - k_1^2}$$

Из (1.6) и (1.7) следует, что решение для падающей волны имеет вид:

$$\begin{aligned}
&w_n = A\exp i\left(\omega t - k_1 x + k_{21} y\right), k_1 \geq 0\\
&\varphi_{1n} = \tilde{B}\exp i\left(\omega t - k_1 x + k_{21} y\right)\\
&\varphi_{2n} = \left(-\frac{3\rho\omega^2}{2}A + \tilde{B} i k_1\right)\left(-\frac{1}{ik_{21}}\right)\exp i\left(\omega t - k_1 x + k_{21} y\right)
\end{aligned} \tag{1.8}$$

И для отраженной волны

$$W_{otr} = B\exp i\left(\omega t - k_1 x - k_{21} y\right) + C\exp i\left(\omega t - k_1 x + k_{23} y\right) \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned}
&\varphi_{1otr} = F_1\exp i\left(\omega t - k_1 x - k_{21} y\right) + F_2\exp i\left(\omega t - k_1 x + k_{23} y\right) + a_{1a}\exp i\left(\omega t - k_1 x - k_3 y\right)\\
&\varphi_{2otr} = \left(\frac{3\rho}{2ik_{21}}\omega^2 B - \frac{k_1}{k_{21}}F_1\right)\exp i\left(\omega t - k_1 x - k_{21} y\right) - \left(\frac{3\rho\omega^2}{2ik_{23}}C + \frac{k_1}{ik_{23}}F_2\right)\exp i\left(\omega t - k_1 x - k_{23} y\right) -\\
&-\frac{k_1}{k_3}a_{1a}\exp i\left(\omega t - k_1 x - k_3 y\right)
\end{aligned}$$

где

$$\tilde{B} = -\frac{\tilde{A}}{\alpha_1\beta_1},\ \tilde{A} = \beta_1 A,\ F_1 = -\frac{B}{\alpha_1\beta_2},\ F_2 = -\frac{C}{\alpha_1\beta_3},\ a_{1a} = -\frac{a_{10}}{\alpha_1\beta_4},\ k_3 = \pm\sqrt{-\frac{\alpha_2\omega^2 - \alpha_3}{\alpha_1} - k_1^2}$$

$$\alpha_1 = \frac{8h^3}{15}\alpha_1, \alpha_2 = \frac{8h^3\rho}{15G}, \alpha_3 = \frac{4h}{3},\ \beta_1 = k_1^3 - k_{21}^3 - \frac{1}{15}k_1 h^2\Omega^2,\ \Omega^2 = \frac{2\rho h}{D}\omega^2, \tag{1.10}$$

$$\beta_2 = k_1^2 + k_{21}^2 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\omega^2 + \frac{\alpha_3}{\alpha_1},\ \beta_3 = k_1^2 + k_{23}^2 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\omega^2 + \frac{\alpha_3}{\alpha_1},\ \beta_4 = k_1^2 + k_3^2 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\omega^2 + \frac{\alpha_3}{\alpha_1}$$

2. Рассмотрим случай скользящего контакта:

$$\frac{\partial W}{\partial y}=0, \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}=0, \varphi_2=0, y=0 \tag{2.1}$$

$$\begin{cases} Ak_{21}-Bk_{21}+Ck_{23}=0 \\ \frac{3\rho\omega^2}{2ik_{21}}A-\frac{k_1}{k_{21}}\tilde{B}+\frac{3\rho\omega^2}{2ik_{21}}B-\frac{k_1}{k_{21}}F_1-\frac{3\rho\omega^2}{2ik_{23}}C-\frac{k_1}{k_3}a_{1a}=0 \\ \tilde{B}k_{21}-F_1k_{21}+F_2k_{23}-k_3a_{1a}=0 \end{cases} \tag{2.2}$$

Решение (2.2) имеет вид:

$$A=B,\ C=0,\ a_{1a}=\frac{k_{21}\left(\beta_1-\beta_2\right)}{\alpha_1\beta_1\beta_2k_3}A \tag{2.3}$$

Для частного случая по теории Кирхгофа [5]
$B=A,\ C=0,\ a_{1a}=0$

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360с.
2. Белубекян М.В. Об уравнениях теории пластин, учитывающих поперечные сдвиги. В. сб.: посв. 80-летию академика НАН РА С.А. Амбарцумяна. Ереван. 2002. С.67-88.
3. Бреховских Л.М., Гончаров В.В. Введение в механику сплошных сред (в приложении к теории волн) М.: Наука, 1982. 332с.
4. Коненков Ю.К. Об изгибной волне «рэлеевского» типа. //Акуст. журн. 1960. №1. С. 124-126.
5. Белубекян М.В., Хачатрян Л.С. Отражение изгибной волны от кромки пластинки //Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. №1. С.30-33.

Сведения об авторе:

Хачатрян Лейли Самвеловна – соискатель Института механики НАН Армении,
Тел.: (+37410)66-69-88, **e-mail:** khachatryan.leyli@mail.ru

НЕСТАЦИОНАРНАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ КУСОЧНО-НЕОДНОРОДНОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СЛОЯ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Чебаков М.И., Колосова Е.М., Ляпин А.А.

Работоспособность полимерных подшипников скольжения «сухого трения» зависит от многих параметров, включающих в себя скорость вращения вала, коэффициента трения, термо-механические свойства элементов подшипниковой системы и, как следствие, величины результирующих контактных температур. Целью настоящей работы является разработка расчётной модели работы двухслойного полимерного подшипника скольжения «сухого трения» на основе решения нестационарной контактной задачи термоупругости, определение распределения температур, эквивалентных и контактных напряжений в элементах подшипниковой системы и подбор оптимальных параметров подшипниковой системы, при которых достигается тепловой баланс.

Статическая задача для комбинированного подшипника скольжения с учётом тепловыделения от трения была исследована в работе [1], динамическая термоупругая задача о вращении вала в однослойном подшипнике из бронзы была исследована в работе [2].

Введение.

Одной из центральных задач в триботехнике является выяснение особенностей поведения поверхностных слоёв металлополимерного термоупругого трибоконтакта. Поэтому с целью более глубокого познания процессов на контакте необходимо разрабатывать не только экспериментальные методы диагностики, но и адекватные теоретические модели. В настоящее время установилась единая точка зрения, что определяющим фактором эксплуатационного режима металлополимерного сопряжения является тепловая напряжённость в узле трения.

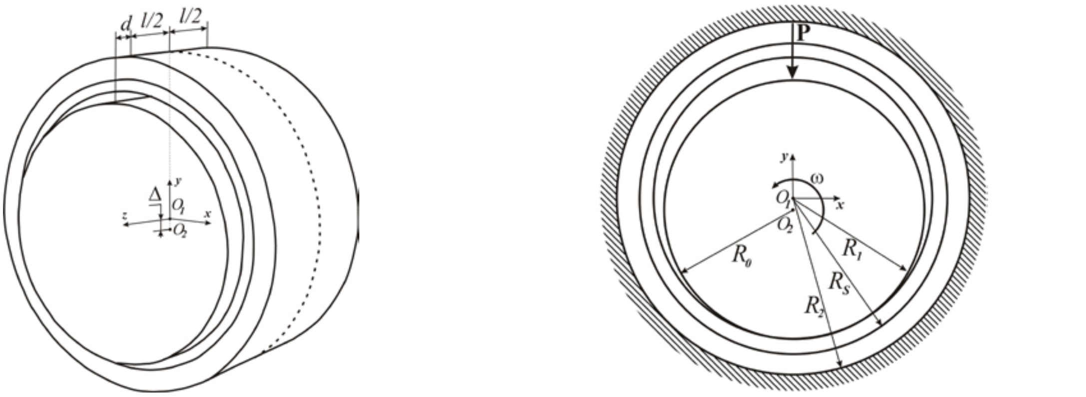
В отечественной и зарубежной научной литературе в последние годы большое внимание уделяется теоретическим (численным, аналитическим) и экспериментальным исследованиям работоспособности полимерных подшипников скольжения «сухого трения» [3-8]. При изготовлении подшипниковых втулок широко применяется полимер фторопласт-4. Основной причиной, вызвавшей интерес к этому материалу, является то, что при «сухом трении» металлов по фторопласту-4 при малой скорости скольжения коэффициент трения очень мал и не превышает обычно нормальных коэффициентов трения в металлических подшипниках при наличии смазки. Чистый фторопласт обладает хорошей химической стойкостью, малым коэффициентом трения и широким диапазоном рабочих температур. В настоящей работе исследуется металлофторопластовый подшипник скольжения в пространственной постановке при нестационарном взаимодействии деталей подшипника с учётом трения, тепловыделения от трения и конвективного теплообмена. В качестве антифрикционного материала используется чистый фторопласт-4.

1. Математическая постановка задачи.

Рассматривается нестационарная динамическая связанная контактная задача термоупругости о взаимодействии упругого однородного цилиндра (далее – вала) с внутренней поверхностью двойного цилиндрического слоя конечной длины (далее – подшипника) в пространственной постановке. Геометрия цилиндрического слоя представляет собой в цилиндрической системе координат $O_1 r\varphi z$ двойной цилиндрический слой, состоящий из внутреннего слоя ($R_1 \le r \le R_s$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $-l/2 \le z \le l/2$) и внешнего слоя ($R_s \le r \le R_2$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $-l/2 \le z \le l/2$), которые жёстко соединены между собой по поверхности ($r = R_s$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $-l/2 \le z \le l/2$). На рис.1,*а)* представлен трёхмерный исследуемый объект, а на рис. 1,*б)* – поставка задачи в разрезе плоскостью $O_1 xy$.

Внешняя поверхность подшипника S^{ext} ($r = R_2$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $-l/2 \le z \le l/2$) жёстко закреплена. Пусть в поверхность $r = R_1$ вдавливается вал радиуса $R_0 = R_1 - \Delta$ ($\Delta \ge 0$ – малая величина), занимающий область ($-l/2 - d \le z \le l/2 + d$) с центром в точке O_2, ось которого параллельна оси подшипника, с линией первоначального касания ($r = R_1$, $\varphi = 0$, $-l/2 \le z \le l/2$).

В локальной цилиндрической системе координат $O_2 r_1 \varphi z$ (рис.1) на поверхностях S_1=($r_1 = R_0$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $-l/2 - d \le z \le -l/2$) и $S_2 =$ ($r_1 = R_0$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $l/2 \le z \le l/2 + d$) вала заданы распределённые нагрузки, каждая из которых суммарно равна $P/2$ и направлена вертикально вниз. Вал вращается против часовой стрелки с угловой скоростью ω (об/сек) в течение T^{int} секунд. Между валом и подшипником действуют силы Кулоновского трения с коэффициентом трения μ. Обозначим через $S_{\pm}^{shaft}$ поверхности торцов вала, лежащие соответственно в плоскостях $z = \pm l/2 \pm d$.



а) б)

Рис.1. К постановке задачи

Предполагается, что на поверхностях вала и подшипника, которые граничат с окружающей средой, определены условия конвективного теплообмена с коэффициентом конвективной теплоотдачи a. Пусть в начальном состоянии температура вала, подшипника и окружающей среды совпадают и равны $0\,°C$.

2. Исследование поставленной задачи.

Для решения поставленной задачи применяется метод конечного элемента с использованием специально разработанного программного модуля для конечно-элементного пакета Abaqus. Для улучшения сходимости алгоритма решения задачи и уменьшения времени расчёта, исследование осуществляется в два этапа. На первом этапе решается статическая контактная задача теории упругости о вдавливании вала во внутреннюю поверхность подшипника, на втором – связанная нестационарная контактная задача термоупругости о вращении вала.

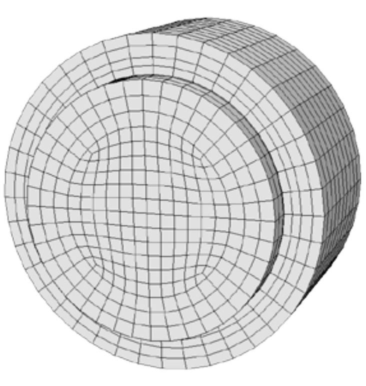


Рис.2. Конечно-элементная модель подшипниковой системы.

Конечно-элементное разбиение строится с помощью 8-узлового связанного термоупругого элемента C3D8T. Полученная конечно-элементная модель подшипниковой системы приведена на рис. 2. Для моделирования контактного взаимодействия внутренняя поверхность подшипника и внешняя поверхность вала покрываются контактными парами элементов. Для решения нестационарной задачи задаются минимальный и максимальный шаги по времени и задаются настройки, дающие возможность пакету Abaqus выбирать оптимальный шаг по времени при проведении расчётов.

3. Результаты расчётов.

При проведении численных экспериментов были заданы следующие значения геометрических и материальных параметров. Внутренний радиус подшипника $R_1 = 0{,}023$ м, внешний радиус подшипника $R_2 = 0{,}03$ м, промежуточный радиус между слоями подшипника $R_s = 0{,}026$ м. Зазор между валом и подшипником $\Delta = 9 \cdot 10^{-5}$ м, длина подшипника $l = 0{,}03$ м, выступ вала $d = 0{,}005$ м.

Внешний слой подшипника предполагается выполненным из бронзы, а внутренний слой, который контактирует с валом, – из фторопласта. При проведении расчётов вал предполагается либо бронзовым, либо стальным. Для бронзы используются следующие материальные константы: плотность $\rho_1 = 8800$ кг/м^3, коэффициенты Ляме $\lambda_1 = 6,3 \cdot 10^{10}$ Па, $\mu_1 = 4,2 \cdot 10^{10}$ Па, теплопроводность $\Lambda_1 = 76$ Вт/(м$\cdot$К), коэффициент теплового расширения $\alpha_1 = 1,8 \cdot 10^{-5}$ К$^{-1}$, удельная теплоёмкость $C_1 = 435$ Дж/(кг$\cdot$К); для фторопласта – $\rho_2 = 2200$ кг/м^3, $\lambda_2 = 2,3 \cdot 10^8$ Па, $\mu_2 = 1,54 \cdot 10^8$ Па, $\Lambda_2 = 0,25$ Вт/(м$\cdot$К), $C_2 = 1040$ Дж/(кг$\cdot$К); для стали – $\rho_3 = 7800$ кг/м^3, $\lambda_3 = 1,21 \cdot 10^{11}$ Па, $\mu_3 = 8,1 \cdot 10^{10}$ Па, $\Lambda_3 = 50,2$ Вт/(м$\cdot$К), $\alpha_3 = 1,1 \cdot 10^{-5}$ К$^{-1}$, $C_3 = 462$ Дж/(кг$\cdot$К).

Зависимость коэффициента теплового расширения для фторопласта от температуры приведена ниже:

t C	-10	20	50	110	120	200	210	280
$\alpha_2(t) \cdot 10^4$ К$^{-1}$	0,8	2,5	1,1	1,1	1,5	1,5	2,1	2,1

Коэффициент конвективной теплоотдачи пары металл-воздух на поверхностях вала и подшипника, граничащих с окружающей средой, обозначен a, при расчётах он находится в пределах $10 - 12000$ Вт/м^2.

Изучено влияние различных значений коэффициента трения μ, угловой скорости ω вращения вала и нагрузки P на максимальные значения контактных $|\sigma_r|$ и эффективных σ_e напряжений, температур $t_{\max}$ в подшипнике (отмечены индексом $bear$) и валу (отмечены индексом $shaft$) для задачи после вращения вала в течение $T^{\text{int}} = 1$ сек. Расчёты были проведены в случае стального вала и коэффициента конвективной теплоотдачи $a = 10$ Вт/м^2.

С целью нахождения максимальных значений температур, возникающих при вращении стального вала в течение 10 сек. и 20 сек. были проведены расчёты распределения температуры. При проведении данных расчётов использовались значения коэффициента конвективной теплоотдачи $a = 20$ Вт/м^2 и трения $\mu = 0,04$. Максимальные значения температур приведены в таблице. Видим, что, как и предполагалось, элементы подшипниковой системы значительно нагреваются в процессе вращения вала, при этом увеличение скорости или времени вращения ведёт к увеличению температуры.

Таблица. Значения максимальных температур

Значения входных параметров	$t_{\max}^{bear}$ $(°C)$	$t_{\max}^{shaft}$ $(°C)$
$P = 30$ kН, $\omega = 10$ $об/с$, $T^{\text{int}} = 10$ сек.	237	149
$P = 15$ kН, $\omega = 10$ $об/с$, $T^{\text{int}} = 10$ сек.	118	70
$P = 15$ kН, $\omega = 10$ $об/с$, $T^{\text{int}} = 20$ сек.	160	112
$P = 15$ kН, $\omega = 5$ $об/с$, $T^{\text{int}} = 20$ сек.	77	55

Проведена серия расчётов распределения температуры в системе в случае стального вала со значением силы $P = 2$ kН, коэффициента конвективного теплообмена $a = 20$ Вт/м^2 и коэффициента трения $\mu = 0,04$. В этих случаях элементы подшипниковой системы греются слабо в силу малых значений силы и скорости.

Были проведены две серии расчётов распределения температуры в системе при значениях скорости вращения бронзового вала $\omega = 1$ $об/с$ и $\omega = 5$ $об/с$, силы $P = 30$ kН, коэффициента конвективной теплоотдачи $a = 20$ Вт/м^2 и трения $\mu = 0,04$. Расчёты показали, что, как и предполагалось, элементы подшипника в случае бронзового вала нагреваются меньше, чем в случае стального при прочих равных условиях.

Проведены расчёты распределения температур в подшипниковой системе и на их основе построены графики изменения температуры от времени в точке подшипника, в которой достигается максимум после окончания вращения вала, при варьировании коэффициента конвективной теплоотдачи $a = 25 - 120000$ Вт/м^2. При расчётах были использованы следующие параметры: скорость вращения $\omega = 1\, об/с$, период вращения $T^{\text{int}} = 60$ сек., сила $P = 30\, k$Н, коэффициент трения $\mu = 0,04$.

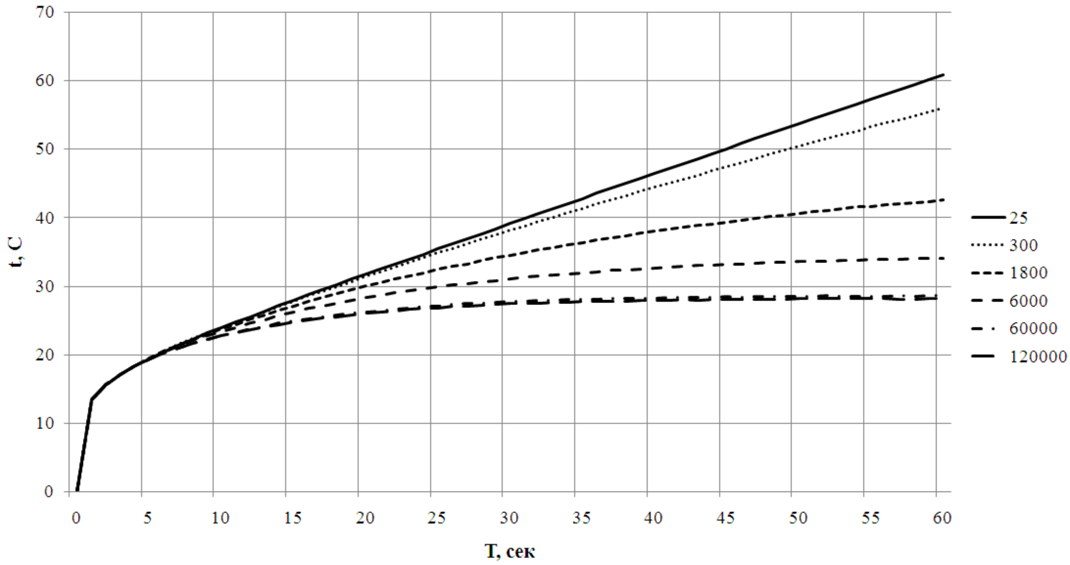


Рис. 3. Изменение максимальной температуры от времени при варьировании коэффициента конвективной теплоотдачи в случае стального вала

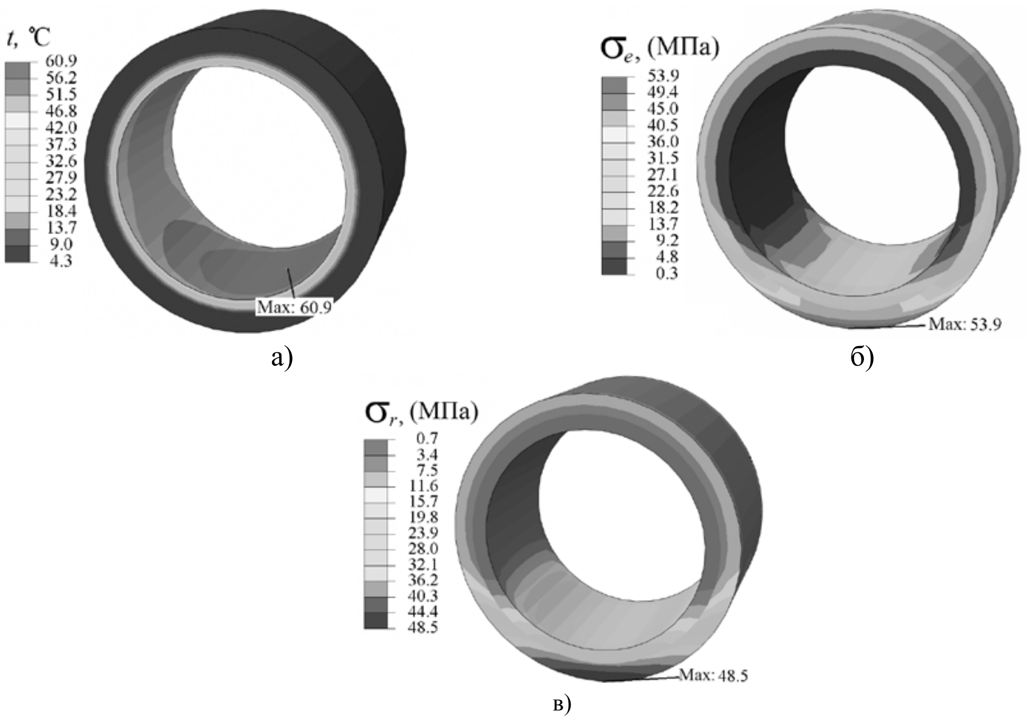


Рис. 4. Распределения температуры, эквивалентных напряжений σ_e и напряжений $|\sigma_r|$ в случае, когда $a = 25$ Вт/м^2

Расчёты проведены для случаев бронзового и стального вала, на рисунке 3 приведён график, когда вал выполнен из стали. Видно, что на графике при $a = 6000$ Вт/м^2 и

$a = 120000$ Вт/м^2 температура с некоторого момента времени достигает постоянного значения. Отметим, что для стального вала это постоянное значение больше, чем для вала из бронзы.

В качестве иллюстрации на рис.4 (а, б, в) приведены распределения температуры t, эквивалентных напряжений σ_e и напряжений $|\sigma_r|$ в случае стального вала, когда $T = 60$ сек., $a = 25$ Вт/м^2.

Выводы. Исследования показали, что большое значение в достижении теплового баланса в рассмотренной модели подшипниковой системы играет теплоотвод с поверхностей вала и подшипника, а при увеличении таких параметров, как скорость вращения вала, значение нагрузки, коэффициент трения, достижение теплового баланса в подшипниковой системе замедляется. Отметим, что конечно-элементный метод с использованием пакета Abaqus для данной задачи оказался достаточно эффективным и позволяет исследовать подобные задачи при различных значениях входных геометрических и механических параметров.

Работа выполнена при поддержке Министрства образования и науки РФ (проект №213.01-11 / 2014-28) и гранта РФФИ № 14-08-31663 мол_а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колосова Е.М. Конечно-элементное моделирование контактного взаимодействия в комбинированном подшипнике скольжения с учётом тепловыделения от трения // Изв.Вузов Сев.-Кавказс. рег. техн. наук. 2010. № 5. С.35-39
2. Колосова Е.М., Ляпин А.А., Чебаков М.И. Расчёт термоупругого контактного взаимодействия в подшипнике скольжения с учётом трения // Изв. Вузов Сев.-Кавказс. рег. Сер. техн. наук. 2014. № 6. С.73-76.
3. Александров В.М. Определение контактных температур в цилиндрическом сочленении // Изв. РАН. Механика твёрдого тела. 2010. № 5. С.86-88.
4. Губарева Е.А., Мозжорина Т.Ю., Щетинин А.Н. Моделирование взаимодействия цилиндрических и сферических тел с покрытиями при износе и тепловыделении // Инженерный журнал: наука и инновации. 2014. № 3 (27). С.5.
5. Tzanakis, M. Conte, M. Hadfield, T.A. Stolarski. Experimental and analytical thermal study of PTFE composite sliding against high carbon steel as a function of the surface roughness, sliding velocity and applied load // Wear, 303 (2013), pp.154–168.
6. Liwen Mu, Yijun Shi, Xin Feng, Jiahua Zhu, Xiaohua Lu. The effect of thermal conductivity and friction coefficient on the contact temperature of polyimide composites: Experimental and finite element simulation // Tribology International, 53(2012), pp.45–52.
7. Ali Rezaei, Wouter Ost, Wim Van Paepegem, Patrick De Baets, Joris Degrieck. Experimental study and numerical simulation of the large-scale testing of polymeric composite journal bearings: Three-dimensional and dynamic modeling // Wear, 270 (2011), pp.431–438.
8. Колесников В.И. Теплофизические процессы в металлополимерных трибосистемах. М.: Наука, 2003. 279с.

<u>Информация об авторах</u>

Чебаков Михаил Иванович – проф, д.ф.м.н., **Колосова Елена Михайловна** – к.ф.м.н., **Ляпин Александр Александрович** – к.ф.м.н., Институт математики, механики и компьютерных наук им.Воровича И.И. Южного федерального университета
344090, г. Ростов-на-Дону, пр.Стачки, 200/1.
Лаборатория механики деформируемых тел и конструкций,
Телефон: 8(863)2975255, 8(904)3421723
e-mail: chebakov@math.sfedu.ru

КОЛЕБАНИЯ РОТОРА ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ МАШИНЫ НА ШАРИКОПОДШИПНИКАХ

Шекян Г.Г., Геворгян А. В., Дарбинян А.З.

При вращении ротора электрической машины на подшипниках качения возникают субгармонические колебания параметрического и комбинационного типа, обусловленные различными факторами: скорости, нагрузки, геометрии дорожек и тел качения, чистоты контактирующих поверхностей, величины радиального зазора, нелинейности жёсткостных характеристик и т.д. Все это вызывает значительные трудности в точном математическом описании движения ротора и приводит к необходимости упрощения задачи и в результате мы имеем лишь приближённые решения, удовлетворяющие в той или иной степени требованиям, предявленным практической стороной [1]. В работе показано, что субгармонические колебания появляются в нелинейной системе в виде резонанса, когда частота изменения возмущающей силы кратна собственной частоте линейной системы [1,6,7]. Показана, что субгармонические колебания валов на шарикоподшипниках с радиальным зазором могут возникнуть в рабочем диапазоне скоростей, т.к. коэффициент при нелинейном члене того же порядка, что и при линейном. И потому для решения уравнения движения обычные асимптотические методы неприемлемы.

Для решения задачи использован метод изображающей функции [1,2,3,4,7], изложенный в монографии О. Блакера.

Результаты исследования и их обсуждение. Нелинейная жёсткость шарикоподшипника, описываемого законом Герца, может быть представлена в виде апроксимирующей функции $F\left(y\right)=ay+by^3$, и уравнение движения ротора по одной из координат запишется в виде

$$\ddot{y}+ay+by^3=H\omega^2\cos\omega t \tag{1}$$

Уравнение (1) относится к классу уравнений Дуфинга. Теоретически и экспериментально доказано, что в нелинейных системах, подчиняющихся уравнениям Дуфинга, существуют колебания, частота которых меньше частоты возмущающей силы в два или три раза. Такие колебания называются субгармоническими порядка $1/2$ или $1/3$ (в отличие от ультрагармонических, частота которых наоборот, выше частоты возмущения) [1,2].

Так как в уравнении (1) коэффициент при нелинейном члене того же порядка величины, что и при линейном, то для решения этого уравнения обычные асимптотические методы, используемые при исследовании квазилинейных систем, здесь не применены. Воспользуемся методом изображающей функции, изложенным в монографии О.Блакера. Этот метод относится к частотным методам анализа и распространяет на нелинейные системы понятие передаточной функции, называемый в этом случае изображающей функцией.

Уравнение (1) после введения демпфирования примет вид [1,2,3,5,6]:

$$\ddot{y}+\eta\dot{y}+ay+by^3=H\omega^2\cos\omega t. \tag{2}$$

Положим, что в системе, описываемой уравнением (2), существуют субгармонические колебания порядка $1/2$. В этом случае решение уравнения (2) будем искать в виде:

$$y=A\cos\left(\omega t-\varepsilon_1\right)+\beta\cos\left(\frac{\omega}{2}t-\varepsilon_1\right) \tag{3}$$

Подставив (3) в уравнение (2) и обращаясь к методу изображающей функции, [1,7,10] запишем:

$$\begin{gathered}U=\ddot{y}+\eta\dot{y}+ay+by^3=-A\omega^2\cos\left(\omega t-\varepsilon_1\right)-\frac{B}{4}\omega^2\cos\left(\frac{\omega}{2}t-\varepsilon_2\right)-\\ -\eta A\omega\sin\left(\omega t-\varepsilon_1\right)-\eta\frac{B}{2}\omega\sin\left(\frac{\omega}{2}t-\varepsilon_2\right)+aA\cos\left(\omega t-\varepsilon_1\right)+aB\cos\left(\frac{\omega}{2}t-\varepsilon_2\right)+\\ +b\frac{3}{4}ZB\left(2A^2+B^2\right)\cos\left(\frac{\omega}{2}t-\varepsilon_2\right)+b\frac{3}{4}A\left(A^2+2B^2\right)\cos\left(\omega t-\varepsilon_1\right)+\\ +b\frac{3}{4}A^2B\cos\left(\frac{3}{2}\omega t-2\omega_1+\varepsilon_2\right)+b\frac{B^2}{4}\cos\left(\frac{3}{2}\omega t-3\varepsilon_2\right)+b\frac{3}{4}AB^2\cos\left(2\varepsilon_2-\varepsilon_1\right)+\ldots\end{gathered} \tag{4}$$

Согласно определению изображающей функции (8,9,11) применение комплексной записи для $y(t)$ и $U(t)$ допустимо.

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = A\exp\left[i(\omega t - \varepsilon_1)\right] + B\exp\left[i\left(\frac{\omega}{2}t - \varepsilon_2\right)\right] \tag{5}$$

$$\begin{gathered}U(t) = \ddot{y} + \mu\dot{y} + ay + b\left[\frac{3}{4}B\left(2A^2 + B^2\right)\exp(-i\varepsilon_2)\right]\exp\left(i\frac{\omega}{2}t\right) + \\ +b\left[\frac{3}{4}A\left(A^2 + 2B^2\right)\exp(-i\varepsilon_1)\right]\exp(i\omega t) + \\ +b\left\{\frac{3}{4}A^2B\exp\left[-i(2\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\right] + \frac{B^2}{4}\exp(-i3\varepsilon_2)\right\}\exp\left(i\frac{3}{2}\omega t\right) + \\ +b\frac{3}{4}AB^2\exp\left[-i(\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2)\right] + \ldots\end{gathered} \tag{6}$$

Перегруппировав одночастотные слагаемые, можно уравнение (6) разделить на 3 части:

$$\begin{gathered}U(t) = U_1(t) + U_2(t) + \Delta(t) = \ddot{y}_1 + \eta\dot{y}_1 + b\left[\frac{3}{4}\left(A^2 + 2B^2\right)\right]y_1 + \ddot{y}_2 + \\ +\dot{\eta}_2 + ay_1 + b\left[\frac{3}{4}\left(2A^2 + B^2\right)\right]y_2 + b\left\{\frac{3}{4}A^2\exp\left[i\left(\frac{3}{2}\omega t - 2\varepsilon_1\right)\right] + \right. \\ \left. + \frac{B^2}{4}\exp\left[i\left(\frac{3}{2}\omega t - 4\varepsilon_2\right)\right] + \frac{3}{4}AB\exp\left[i(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\right]\right\}B\exp(i\varepsilon_2).\end{gathered} \tag{7}$$

В результате, получим двухчастотную передаточную (изображающую) функцию:

$$E_1(\omega, A, B) = -\omega^2 + \left[a + b\frac{3}{4}\left(A^2 + 2B^2\right)\right] + i\omega\eta \tag{8}$$

$$E_2\left(\frac{\omega}{2}, A, B\right) = -\frac{\omega^2}{4} + \left[a + b\frac{3}{4}\left(2A^2 + 2B^2\right)\right] + i\frac{\omega^2}{2}\eta. \tag{9}$$

При этом, необходимо потребовать, чтобы $\Delta(t) = 0$, т.е.

$$3A^2\exp\left[i\left(\frac{3}{2}\omega t - 2\varepsilon_1\right)\right] + B^2\exp\left[i\left(\frac{3}{2}\omega t - 4\varepsilon_2\right)\right] + 3AB\exp\left[i(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\right] = 0.$$

Представляя возмущающее усилие в виде $H\omega^2\exp(i\omega t)$, получим два уравнения:

$$\begin{gathered}E_1(\omega, A, B) = \frac{H\omega^2}{A}\exp(i\varepsilon_1); \\ E_2\left(\frac{\omega}{2}, A, B\right) = 0.\end{gathered} \tag{10}$$

Приступая к определению неизвестных амплитуд и фазовых углов, разделим вещественную и мнимую часть в первом уравнении системы (10):

$$\begin{gathered}\omega A\eta = H\omega^2\sin\varepsilon_1; \\ -\omega^2A + A\left[a + b\frac{3}{4}\left(A^2 + 2B^2\right)\right] = H\omega^2\cos\varepsilon_1.\end{gathered} \tag{11}$$

Далее положим $\eta = 0$ и $\varepsilon_1 = 0, \pi$. Тогда из (11) найдём:

$$A = \frac{4H\omega^2}{4\left(a - \omega^2\right) + 3b\left(A^2 + 2B^2\right)} \tag{12}$$

При $b=0$ уравнение (12) даёт значение амплитуды A для линейной системы с собственной частотой $\omega_0=\sqrt{a}$. Из второго уравнения системы (10) получим:

$$A^2=\frac{\omega^2-4a}{6b}-\frac{B^2}{2} \tag{13}$$

Подставляя (13) в (12), получим:

$$A=\frac{8H\omega^2}{4a-7\omega^2+9B^2b} \tag{14}$$

Дополнительное уравнение для определения соотношения между амплитудами A и B найдём из условия $\Delta(t)=0$. Полагая $\varepsilon_1=0$, выделим вещественную часть из этого уравнения

$$3A^2\cos\frac{3}{2}\omega t+B^2\cos\left(\frac{3}{2}\omega t-4\varepsilon_2\right)=-3AB\cos\varepsilon_2. \tag{15}$$

Разложим $\cos\left(\frac{3}{2}\omega t-4\varepsilon_2\right)$, и коэффициенты при одинаковых синусах приравняем. Тогда будем иметь $B^2\sin 4\varepsilon_2=0$, откуда следует, что при некотором установившемся режиме $4\varepsilon_2=\pi$. Предположим, что при этом $B>A$, тогда будем иметь:

$$A=\frac{\sqrt{2}}{3}B\cos\frac{3}{2}\omega t. \tag{16}$$

Смысл выражения (14) будет ясен, если учесть, что A– амплитуда колебаний ротора. Движения ротора в этом случае представляет собой круговой синхронный процесс. Так как при субгармонических колебаниях на основные колебания накладываются ещё частоты, то процесс ротора не будет круговым и центр шипа ротора опишет три полных колебания около положения статического равновесия за два оборота ротора, т.е. частота процесса ротора будет равна $\frac{3}{2}\omega$.

Из полученных для амплитуд зависимостей видно, что характер движения ротора в подшипнике завсисит от соотношения между жёсткостными коэффициентами a и b, которые, в свою очередь, являются функциями от начальных условий и от области изменения координаты y. Решив уравнение (14) относительно B, получим:

$$B^2=\frac{8H\omega^2+\left(7\omega^2-4a\right)A}{9bA} \tag{17}$$

Отсюда вытекает условие возникновения и существования субгармонических колебаний порядка $1/2$ для рассматриваемой системы

$$H\omega^2\geq\frac{A}{8}\left(4a-7\omega^2\right).$$

Если полагать, что ω_0^2– собственная частота линеаризованной системы ротор– подшипник, то введя безразмерную частоту $\Omega=\omega/\omega_0$ и безразмерную амплитуду $\xi=a/2\delta$, где 2δ – диаметральный зазор в подшипнике, получаем уравнение, определяющее нижнюю границу возникновения субгармонических колебаний при жёсткой установке подшипников в корпусе

$$\Omega^2=\frac{4}{7+\left(8h/\xi_1\right)}. \tag{18}$$

Формула (18) выражает границы возможного появления субгармонических колебаний порядка $1/2$ на плоскости параметров Ω и ξ для значений относительной неуравновешенности h.

Выводы. Как следует из результатов исследования, даже при идеальной балансировке ротора возможно появление субгармонических колебаний. Определение верхней границы для случая жёсткой установки подшипников не представляется возможным. Однако, в системах с нелинейными жёсткостными характеристиками, апроксимируемыми полиномом типа $f(y) = ay + by^3$, кроме колебаний порядка $1/2$ возможны и колебания $1/3$. Следовательно, в системах с жёсткими подшипниками качения можно ожидать перехода колебаний одного из указанных типов в другой.

Понижение же границы возникновения субгармоник порядка $1/2$ при малых амплитудах ξ_1 основной частоты важно для высокоскоростных прецизионных роторных машин, например, шлифовальных шпинделей. Роторы подобных машин вращаются со скоростью 100÷200тыс. об/мин. и являются жёсткими. Они работают на докритических скоростях, имеют значительный запас скорости до критического числа оборотов (не менее 25%). В процессе эксплуатации электрошпинделей нередки случаи, когда тщательно сбалансированный ротор в новых подшипниках качения не даёт требуемой точности вращения, что объясняется возникновением дополнительных гармоник вибрации, т.к. даже незначительная разбалансировка или появление зазора в подшипнике из-за устранения усилия предварительного осевого натяга силами инерции шариков резко снижает границу субгармонических колебаний, вплоть до зоны рабочих скоростей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шекян Г.Г. Динамика роторных машин. Ереван: Изд. «Гитутюн» НАН РА, 2004. 330с.
2. Шекян Г.Г., Халатян Э.П. Параметрические колебания вертикальных роторов. //Изв. НАН Армении. Сер. техн. наук. 2002. №3. С.33-37.
3. Шекян Г.Г. К вопросу о факторах снижающих долговечность подшипников высокоскоростных машин. //Сб. н.т. «Машиностроение», Ереван: 1983. С.42-45.
4. Шекян Г.Г., Захарянц Г.В. Защита современных чувствительных аппаратур от динамических воздействий. Ереван: Изд. «Гитутюн» НАН РА, 2003. 148с.
5. Шекян Г.Г. Динамика гибких роторов на подшипниках качения. //Изв. АН Арм.ССР. Сер.т.н. Т.XXX. №2. 1980. С.7-11.
6. Фролов К.В. Параметрические задачи динамики машин. // Rev. roum. sci. techn. ser. mec. appl. 1979. №2. С.265-290.
7. Блокер О. Анализ нелинейных систем. М.: Мир, 1969. 400с.
8. Позняк Э.Л., Цырлин А.Л. Нелинейные колебания статически нагруженных роторов на подшипниках качения. М.: Машиностроение, №3. 1975. С.13-20.
9. Панфилов Е.А. Параметрический резонанс сепараторов подшипников качения. М.: Машиноведение, №6. 1973. С.18-20.
10. Кутчер Р.И. Влияние эксплуатационного зазора в подшипниках качения на уровень вибрации машин. //Тр. ВНИИПП, №3, 1985. С.40-53.
11. Бурмистров А.Н., Галахов М.А. Параметрические колебания ротора на шарикоподшипниках. М.: Машиноведение, №2, 1983. С.71-81.

Сведения об авторах:

Шекян Гамлет Гургенович – д.т.н., профессор, Институт механики НАН РА

Геворгян Арамаис Варданович – зав. ЗАО НПИЦ „Электромаш ГАМ”

Дарбинян Артавазд Завенович – к.ф.м.н., доцент, Мурманский технический университет

ON THE PRESSURE CALCULATION BY THE ZERO-ORDER OPTIMIZATION METHOD FOR THE ELASTOCREEP MATERIAL WITH MICRODEFECT

Anop M., Murashkin E.

The present study is devoted to the problem of optimal loading pressure identification by the prescribed displacements vector. The framework of finite elastocreep strains is used. The problem of deformation of the material in the vicinity of microdefect was considered. Integro-differential equations for the external pressure, irreversible deformations and displacements were derived. The simple zero-order optimization algorithm like the Monte Carlo method for considering problem was proposed. The optimal strain-stress state parameters were computed and analyzed.

1. The mathematical description of the processes of thermomechanical treatment of contracture materials is faced with the need to consider the elastic properties of materials at all stages of the product life cycle. Consideration of the problems in the classical models of small deformations is impossible when the relative shape change of the body is large. One such typical application is the problem of modeling processes of deformation metals in vicinity of micropore under the action of intense pressure. In this case, we are forced to assume large deformation. Experiments are known [1,2] to significantly increase the long-term strength of metal products after the treatment them under hydrostatic pressure. Attempts to simulate such process of the micropores "healing" in the metal have been made repeatedly. Since classic work E. Lee [3], lots of plastic flow frameworks with large reversible and irreversible deformations were built [3-10]. Lot of them use a Lagrangian description [6-8]. But in this case the results of mathematical modeling is physically difficult interpreted. If we want to build a framework of the flow in Eulerian descriptions, then we are faced with two fundamental problems. The first problem is identification irreversible and reversible components of the total strain tensor. The second problem is definition of irreversible strain source. The mathematical model which was proposed and detail described in [4] is used throughout the paper. The problem of a spherically symmetric compression of the ball with micropore in the center is considered.

2. The calculations of the residual stresses close the microdefects is necessary carried out in the finite irreversible strain framework with complicated rheological properties. Further consideration is provided by the framework of finite elastocreep deformations (see details in [10]). The kinematic equation for parts of the Almansi total strain d_{ij} can be written in the Cartesian system (Eulerian coordinates) in the form

$$\begin{aligned}\frac{De_{ij}}{Dt} &= \varepsilon_{ij} - \gamma_{ij} - \frac{1}{2}\Big((\varepsilon_{ik} - \gamma_{ik} + z_{ik})e_{kj} + e_{ik}(\gamma_{kj} - \varepsilon_{kj} - z_{kj})\Big),\\ \frac{Dp_{ij}}{Dt} &= \gamma_{ij} - p_{ik}\gamma_{kj} - \gamma_{ik}p_{kj},\end{aligned} \tag{1}$$

where $e^e_{ij} = e_{ij} - 0.5e_{ik}e_{kj}$ is the reversible part of the Almansi total strain tensor, p_{ij} is the irreversible part of the Almansi total strain tensor, D/Dt denotes the convective derivative with respect to time, γ_{ij} is the irreversible strain rate tensor, ε_{ij} is the strain rate tensor.

The convective derivative with respect to time in (1) from an arbitrary tensor n_{ij} read:

$$\frac{Dn_{ij}}{Dt} = \frac{dn_{ij}}{dt} - r_{ik}n_{kj} + n_{ik}r_{kj}, \quad r_{ij} = \frac{1}{2}\left(\upsilon_{i,j} - \upsilon_{j,i}\right) + z_{ij}\left(\varepsilon_{sk}, e_{sk}\right). \tag{2}$$

where and $z_{ij}\left(e_{ij}, \varepsilon_{ij}\right)$ is the nonlinear part of the rotation tensor r_{ij} (see in full in [4]). Thus, the components of the Almansi total strains d_{ij} in terms of its parts e_{ij} and p_{ij} taking account of equations (1) and (2) are presented as follows

$$d_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} - u_{i,k}u_{k,j}) = e_{ij} + p_{ij} - \frac{1}{2}e_{ik}e_{kj} - e_{ik}p_{kj} - p_{ik}e_{kj} + e_{ik}p_{ks}e_{sj}, \tag{3}$$

Where u_{ij} are the translational displacements. This assumption allows to derive the constitutive equation like the Murnaghan equation of state well known in the non-linear elasticity [11]:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \frac{\partial Q}{\partial e_{ik}}\left(\delta_{kj} - e_{kj}\right), \tag{4}$$

where Q is the strain-energy function, p denotes the hydrostatic pressure function as a Lagrangian multiplier to enforce the incompressibility constraint. For isotropic hyperelastic materials, the strain-energy function can be expressed in terms of the invariants of the reversible strain tensor. Let us expand Q into the Taylor series in the vicinity of the natural state $e_{ij} = 0$, disregarding the terms of higher order than the second one. The following form of the expansion is obtained for isotropic, homogeneous and incompressible bodies

$$Q = (\alpha - \mu)J_1 + \alpha J_2 + \beta J_1^2 - \kappa J_1 J_2 - \zeta J_1^2,$$
$$J_1 = e_{jj}^e,\ J_2 = e_{ij}^e e_{ji}^e, \tag{5}$$

wherein $a, \mu, \beta, \kappa, \varsigma$ are elastic modules.

During process, anticipating plastic flow, and in the unloading, the irreversible strain rate tensor γ_{ij} is identified by the creep strain rate tensor $\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^v$. The energy dissipation law is valid for creep stage of deforming. Let accept the dissipation potential in the power form like Norton-Bailey creep law [12]:

$$\varepsilon_{ij}^v = \frac{\partial V(\Sigma)}{\partial \sigma_{ij}},\quad V(\Sigma) = B\Sigma^n(\sigma_{ij}),\quad \Sigma = \sqrt{\frac{3}{2}((\sigma_1 - \sigma)^2 + (\sigma_2 - \sigma)^2 + (\sigma_3 - \sigma)^2)} \tag{6}$$

Here $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ are principal values of Cauchy stress tensor and B, n are the creep constants.

3. Let examine the changes in the geometry of a single spherical microdefect (micropore) under hydrostatic compression and stress relaxation process during unloading of the material within the proposed framework. We consider the solid ball of the initial radius R_0 with a single spherical defect (micropore) of the initial radius s_0 in the center of the sphere. The process of deformation is given by the boundary conditions

$$\sigma_{rr}\big|_{r=R(t)} = -P(t),\quad \sigma_{rr}\big|_{r=s(t)} = 0, \tag{8}$$

where σ_{rr} is the radial component of the stress tensor in the spherical coordinates (r, θ, φ), $R(t) >> r_0$ is the radius of the spherical surface which is given by the external pressure $P(t)$, $s(t)$ is the current radius of the micropore. The constraints of the incompressibility in the present case of the spherical symmetry leads to the only nonzero displacement u_r computed by

$$u_r = r - \left(r^3 + \varphi(t)\right)^{\frac{1}{3}},\quad \varphi(t) = s_0^3 - s^3(t) = R_0^3 - R^3(t), \tag{9}$$

Note that the kinematics is specifies with an accuracy of an unknown function $\varphi(t)$.

The equation of motion in considered case of spherical symmetry can be deduced in form

$$\sigma_{rr,r} + 2\frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = -\rho_0\left(\frac{\ddot{\varphi}(t)}{3r^2} + \frac{2}{9}\frac{\dot{\varphi}^2(t)}{r^5}\right), \tag{10}$$

wherein $\sigma_{\theta\theta}$ denotes the angular stress, ρ_0 denotes the mass density.

Equation of motion (9) should be supplemented by equation for components of irreversible strain tensor

$$\frac{dp_{rr}}{dt} = Bn(1 - 2p_{rr})\Psi^{n-1}(e_{rr}, e_{\theta\theta}),\quad p_{\theta\theta} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - 2p_{rr}}}\right),\quad \Psi(e_{rr}, e_{\theta\theta}) = \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}, \tag{11}$$

where Ψ is fully derived in [10].

Resulting system of the integro-differential equations after integrating equation (9) under condition (8) is transformed into

$$P(t) = 2\int_{s(t)}^{R(t)} \frac{\Psi(r, p_{rr}(r,t), \varphi(t))}{r} dr - \rho_0 \left(\frac{\ddot{\varphi}(t)}{3} \left(\frac{1}{R(t)} - \frac{1}{s(t)} \right) + \frac{\dot{\varphi}^2(t)}{18} \left(\frac{1}{R^4(t)} - \frac{1}{s^4(t)} \right) \right),$$

$$\frac{dp_{rr}}{dt} = Bn(1 - 2p_{rr})\Psi^{n-1}\left(e_{rr}, e_{\theta\theta}\right), \tag{12}$$

For the calculations of the strain-stress state parameters, we define the following dimensionless parameters:

$\alpha\mu^{-1} = 0.9,\ \beta\mu^{-1} = 4,\ \xi\mu^{-1} = 20,\ B_0 = nB\rho_0 R_0 \mu^{n-2} = 3.5,\ \chi\mu^{-1} = 80,$

$n = 3,\ k\mu^{-1} = 0.003,\ s_0 R_0^{-1} = 0.03.$

The system (11) is numerically analyzed by using symbolic computation algebra Mathematica.

Optimization Problem And Solution

Let us introduce the functional

$$J(\varphi(\cdot)) = \max_{\varphi(\cdot)} P(t). \tag{13}$$

$J(\varphi(\cdot)) \to inf$ is required to find, given that

$$\varphi(\tau) = 269 * 10^{-7} \left(1 - \exp\left(\sum_{i=0}^{5} \alpha_i \tau^i \right)^2 \right),$$

$$\alpha_i \in [-2.0; 2.0] \tag{14}$$

that is $\varphi(\tau)$ is searched among the set of polynomials with coefficients $a_i \in [-2.0; 2.0]$.

A certain complexity in the problem at hand creates a rather time-taking process of the objective function computing calculated by numerical methods. These conditions impose restrictions on the choice of optimization method. It is required to use only zero-order optimization methods. Direct search methods are best known as unconstrained optimization techniques that do not explicitly use derivatives. As a first try to solve the optimization problem it was choosen the blind random search method. This approach does not adapt the current sampling strategy to information that has been garnered in the search process. Its relative simplicity is an appealing feature to both practitioners and theoreticians. The advantages include relative ease of coding in software, reasonable computational efficiency, broad applicability to non-trivial loss functions. [13]

The algorithm is rather simple and consists just of two steps.

Step 0. Generate a vector of polynomials coefficients as independent values according to the chosen probability distribution. In paper we used the uniform distribution.

Step 1. Calculate the objective function and check the minimality.

This steps are repeated a predetermined number of iterations.

The blind search form of the algorithm is unique among all general stochastic optimization algorithms in that it is the only one without any adjustable algorithm coefficients that need to be "tuned" to the problem at hand. In fact it is the main weakness of the method [14]. Our study showed not too high efficiency and rather low reliability of the convergence. If there is a need to solve the optimization problem effectively this method should not be used.

The Fig. 1 shows graphs of convergence of the method at hand.

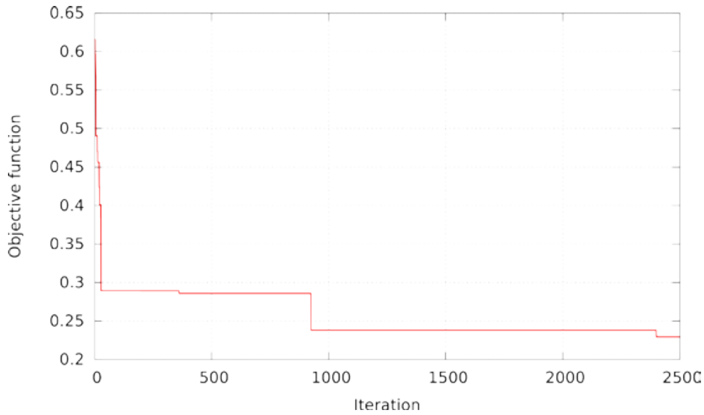


Fig.1. The algorithm convergence

The optimum dynamics of the micropore surface s(t) is shown on Fig. 2. Fig. 3 shows the optimum loading pressure P(t) which determined by the results of the numerical calculations.

This work was supported in part by Russian Foundation for Basic Research (Projects 15-31-21111).

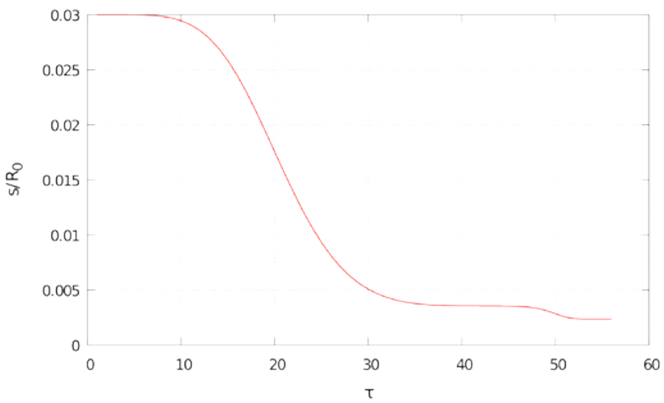


Fig.2. The optimal micropore surface dynamics

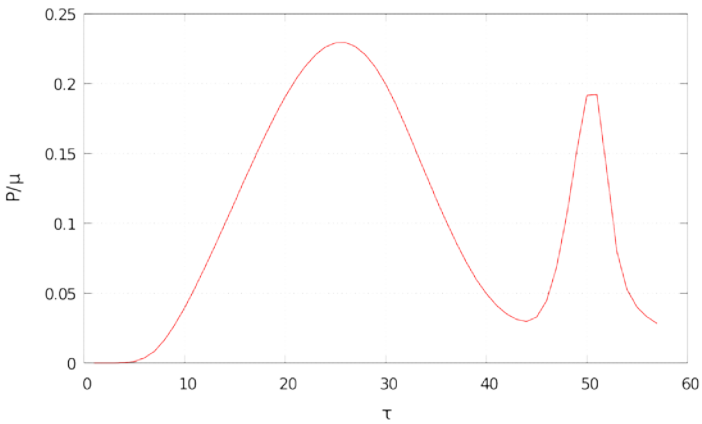


Fig.3. The optimal loading pressure

REFERENCES

1. E. E. Rogachev, M. V. Polonik, O. V. Dudko and E. V. Murashkin, ``Numerical Modeling of Forming a Preform under High Temperature Creep," Advanced Materials Research, Trans Tech Publications, Switzerland, vol. 1040, pp. 898-902, 2014.
2. V. I. Gorelov, ``Effects of high pressures on mechanical characteristics of aluminum alloys," Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, vol. 25, pp. 813-814, 1984.
3. E. H. Lee, ``Elastic-plastic deformation at finite strains," Journal of Applied Mechanics, vol. 36, pp. 1-6, 1969.

4. V. Shitikov and G. I. Bykovtsev, ``Finite Deformations in an Elastoplastic Medium," Dokl. Akad. Nauk SSSR, vol. 311, no. 1, pp. 59-62, 1990. [Sov. Phys. Dokl. (Engl. Transl.) 35, 297 (1980)].
5. O. T. Bruhns, ``A thermodynamically consistent Eulerian description of finite elastoplasticity," Key Engineering Materials, vol. 340-341, pp. 787-794, 2007.
6. Yao Ying Huang, Hong Zheng and Yi Hong Zhou, ``Simulation analysis of concrete Damв's joints based on elastic-plastic creep model," Applied Mechanics and Materials, vol. 137, pp. 243-249, 2011.
7. Wen Ling Chen and Fa Suo Zhao, ``Study on non-linear viscous elastic-plastic creep model of mica-quartzose Schist," Applied Mechanics and Materials, vol. 157-158, pp. 622-627, 2012.
8. Li Wu, Qing Jun Zuo and Zhong Le Lu, ``Study on the Constitutive Model of Visco-Elasticity-Plasticity Considering the Rheology of Rock Mass," Advanced Materials Research, vol. 639-640, pp. 567-572, 2013.
9. E. Murashkin and M. Polonik, ``Development of Approaches to the Creep Process Modeling under Large Deformations," Applied Mechanics and Materials, vol. 249-250, pp. 833-837, 2013.
10. A. Bazhin and E. V. Murashkin, ``Creep and Stress Relaxation in the Vicinity of a Micropore under the Conditions of Hydrostatic Loading and Unloading," Doklady Physics, Pleiades Publishing, Ltd., vol. 57, no. 8, pp. 294-296, 2012.
11. F. D. Murnaghan, ``Finite Deformations of an Elastic Solid," American Journal of Mathematics, vol. 59 pp. 235-260, 1937.
12. F. H. Norton, ``Creep of Steel at High Temperatures'', McGraw Hill, New York. 1929.
13. T. G. Kolda, R. M. Lewis, and V. Torczon. "Optimization by Direct Search: New Perspectives on Some Classical and Modern Methods." SIAM Review , 45, 3, 385–482, 2003.
14. J. C. Spall. ``Introduction to stochastic search and optimization: estimation, simulation, and control". John Wiley and Sons, 2003.

Information about authors

Maxim Anop – Post Graduate Student, Institute of Automation and Control Processes of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Science, 690041, Vladivostok, Radio, 5, Russia
E-mail: manop@dvo.ru

Evgenii Murashkin – Senior Researcher, A. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, 119526, Moscow, prosp. Vernadskogo 101, block 1, Russia
E-mail: murashkin@ipmnet.ru

SURFACE SHEAR SAVES IN MAGNETO-ELECTRO-ELASTIC HALF-SPACE COVERED WITH OPPOSITELY POLARIZED LAYER

Ghazaryan K.B., Ghazaryan R.A., Terzyan S.A.

In the framework of quasi-static setting the surface wave propagation is studied in magneto-electro-elastic layered structure consisting of half-space covered with oppositely polarized layer. The dispersion equations related to surface wave phase speed are obtained and detailed analysis are carry out for three different types of interface conditions between layer and half-space.

Introducion .

Recently, the propagation of coupled electromagnetic and elastic waves in magneto-electro-elastic (MEE) structures attracted much attention due to the wide range of application of these materials in smart structures. MEE materials are a class of new artificial composites that consist of simultaneous piezoelectric and piezomagnetic phases [1]. Researches devoted to wave propagation problems in MEE materials can be found in [2-7]where quasi-static approximation was used to research surface and bulk wave in MEE materials. The Bleustein-Gulyaev surface wave is investigated in [2]. Surface waves in piezoelectric and piezomagnetic materials are considered in [8-11]. Effects arising in oppositely polarized periodic MEE structures were discussed in [12,13].

Statement of the problem

Let consider a half-space $\left(y>0\right)$ made of transversely isotropic magneto-electro-elastic crystal with 6mm symmetry [ ], which crystallographic symmetry axis parallel to axis z. The half-space is covered with the layer $\left(-h<y<0\right)$ made of the same, but oppositely polarized material [12], which crystallographic symmetry axis anti-parallel to axis z. We consider propagation of shear horizontal wave traveling over the contact interface of a semi-infinite MEE solid for which the sagittal plane is normal to a binary axis of symmetry.

The constitutive relations and equations of a two dimensional anti-plane problem describing shear waves propagation (when $\partial/\partial z=0$) can be written in as

$$\sigma_{xz}^{(s)}=c_{44}\partial_x U^{(s)}+\left(-1\right)^s eE_x^{(s)}+\left(-1\right)^s \beta H_x^{(s)};\quad \sigma_{yz}^{(s)}=c_{44}\partial_y U^{(s)}+\left(-1\right)^s eE_y^{(s)}+\left(-1\right)^s \beta H_y^{(s)};$$

$$D_x^{(s)}=-\left(-1\right)^s e\partial_x U^{(s)}+\varepsilon E_x^{(s)}+gH_x^{(s)};\ D_y^{(s)}=-\left(-1\right)^s e\partial_x U^{(s)}+\varepsilon E_y^{(s)}+gH_y^{(s)};$$

$$B_x^{(s)}=-\left(-1\right)^s \beta\partial_x U^{(s)}+gE_x^{(s)}+\mu H_x^{(s)};\qquad B_y^{(s)}=-\left(-1\right)^s \beta\partial_y U^{(s)}+gE_y^{(s)}+\mu H_y^{(s)};\tag{1}$$

$$\partial_x\sigma_{xz}^{(s)}+\partial_y\sigma_{yz}^{(s)}-\rho\partial_{t,t}U^{(s)}=0;\qquad \partial_x D_x^{(s)}+\partial_y D_y^{(s)}=0;\quad \partial_x B_x^{(s)}+\partial_y B_y^{(s)}=0$$

Here , $\sigma_{xz}^{(s)},\sigma_{yz}^{(s)}$ are components of the stress tensor, $U^{(s)}$ is elastic displacement along axis z, $E_x^{(s)},E_y^{(s)}$ are components of electrical field vector, $H_x^{(s)},H_y^{(s)}$ are components of magnetic field vector, $\mathrm{D}_x^{(s)},D_y^{(s)}$ are components of electrical displacement vector , $B_x^{(s)},B_y^{(s)}$ are components of magnetic induction vector, ρ is the bulk density, c_{44}, $e=e_{15}$, $\beta=\beta_{15}$, g are elastic, piezoelectric, piezomagnetic and magneto-elastic modulus respectively, and ε, μ are the dielectric permittivity and magnetic permeability coefficients, while $\partial_x=\partial/\partial x,\partial_y=\partial/\partial y,\partial_{tt}=\partial^2/\partial t^2$. Indexes $s=1,s=2$ stand for half-space and layer, correspondingly.

Introducing main potentials $\varphi^{(s)}\left(x,y\right),\phi^{(s)}\left(x,y\right)$ and auxiliary potentials $F^{(s)}\left(x,y\right),\Phi^{(s)}\left(x,y\right)$

$$\vec{E}^{(s)}=-\vec{\nabla}\varphi^{(s)};\ \ \vec{B}^{(s)}=-\vec{\nabla}\phi^{(s)}$$

$$F^{(s)}=(-1)^s\beta U^{(s)}-\mu\varphi^{(s)}-g\phi^{(s)};\qquad \Phi^{(s)}=(-1)^s eU^{(s)}-\varepsilon\varphi^{(s)}-g\phi^{(s)}\tag{2}$$

we get the following separate equations relate to functions $U^{(s)}, \Phi^{(s)}, F^{(s)}$

$$a^2 \Delta U^{(s)} - \partial_{tt}^2 U^{(s)} = 0; \qquad \Delta \Phi^{(s)} = 0; \qquad \Delta F^{(s)} = 0 \tag{3}$$
$$\Delta \equiv \left(\partial_x^2 + \partial_y^2\right);\ a^2 = G_0/\rho; G_0 = G + \left(\beta^2 \varepsilon + e^2 \mu - 2ge\beta\right)\gamma^{-1}, \gamma = \varepsilon\mu - g$$

Let note that for all MEE materials $\gamma > 0$ [1].

The main potentials, magnetic induction, electrical displacement and stresses via potentials $\Phi^{(s)}, F^{(s)}$ and displacement $U^{(s)}$ can be expressed as

$$\begin{gathered}\phi^{(s)} = \left(-\varepsilon F^{(s)} + \Phi^{(s)} g + \theta^{(s)} U^{(s)}\right)\gamma^{-1};\quad \varphi^{(s)} = \left(-\mu \Phi^{(s)} + \eta^{(s)} U^{(s)} + g F^{(s)}\right)\gamma^{-1} \\ \sigma_x^{(s)} = G_0 \partial_x U^{(s)} - \gamma^{-1} \partial_x \left(\eta^{(s)} F^{(s)} + \theta^{(s)} \Phi^{(s)}\right),\quad \sigma_y^{(s)} = G_0 \partial_y U^{(s)} - \gamma^{-1} \partial_y \left(\eta^{(s)} F^{(s)} + \theta^{(s)} \Phi^{(s)}\right); \\ B_x^{(s)} = \partial_x F^{(s)};\quad B_y^{(s)} = \partial_y F^{(s)};\quad D_x^{(s)} = \partial_x \Phi^{(s)} \quad D_y^{(s)} = \partial_y \Phi^{(s)}\end{gathered} \tag{4}$$

Here $\theta^{(s)} = (-1)^s \left(\beta\varepsilon - eg\right), \eta = (-1)^s \left(e\mu - \beta g\right);$

Solutions and dispersion equations

Presenting solutions in layer and half-space in the form of plane waves travelling along x axis (ω is the frequency, k is the wave number).

$$f\left(x, y\right) = f_0\left(y\right) \exp\left[i\left(kx - \omega t\right)\right]$$

we get the following solutions in half-space $(s = 1, y > 0)$ attenuating along y axis

$$U_0^{(1)} = A_1 \exp\left(kpy\right); F_0^{(1)} = B_1 \exp\left(ky\right); \Phi_0^{(1)} = C_1 \exp\left(ky\right) \tag{5}$$

where $p = \sqrt{1 - \xi^2}; \xi = \sqrt{\rho\omega^2 / G_0 k^2} < 1$, ξ is the dimensionless phase speed of surface wave

In oppositely polarized layer $(s = 2, -\mathrm{d} < y < 0)$ the solutions of (3) can be written as

$$\begin{gathered}U_0^{(2)} = A_{21} \cosh\left(kpy\right) + A_{22} \sinh\left(kpy\right); F_0^{(2)} = B_{21} \cosh\left(ky\right) + B_{22} \sinh\left(ky\right); \\ \Phi_0^{(2)} = C_{21} \cosh\left(ky\right) + C_{22} \sinh\left(ky\right)\end{gathered} \tag{6}$$

We consider three different types of interface conditions at the half=space and layer contact line $y = 0$;

a) Full contact:

$$\sigma_{0y}^{(1)} = \sigma_{0y}^{(2)}, U_0^{(1)} = U_0^{(2)}, F_0^{(1)} = F_0^{(1)}, \Phi_0^{(1)} = \Phi_0^{(2)}, \varphi_0^{(1)} = \varphi_0^{(1)}, \phi_0^{(1)} = \phi_0^{(2)} \tag{7}$$

b) Electromagnetically closed contact and mechanically full contact:

$$\sigma_{0y}^{(1)} = \sigma_{0y}^{(2)}, U_0^{(1)} = U_0^{(2)}, \varphi_0^{(1)} = \varphi_0^{(1)} = 0, \phi_0^{(1)} = \phi_0^{(2)} = 0 \tag{8}$$

c) Smooth mechanical contact and electromagnetically full contact

$$\sigma_{0y}^{(1)} = \sigma_{0y}^{(2)} = 0, F_0^{(1)} = F_0^{(1)}, \Phi_0^{(1)} = \Phi_0^{(2)}, \varphi_0^{(1)} = \varphi_0^{(1)}, \phi_0^{(1)} = \phi_0^{(2)} \tag{9}$$

The smooth (lubricated) mechanical contacts conditions were used in [11] where the problem of surface wave propagation in piezoelectric layered structures was considered..

On the layer boundary at $y = -h$ we take traction free and electromagnetically closed conditions

$$\sigma_{0y}^{(2)} = 0, \qquad \varphi_0^{(2)} = 0, \qquad \phi_0^{(2)} = 0 \tag{10}$$

Using (4) and substituting the solutions (5,6) into the interface and boundary conditions (7-10) we get the homogeneous systems of equations with respect to the nine unknown constants $A_1, B_1, C_1, A_{21}, A_{22},\ B_{21}, B_{22}, C_{21}, C_{22}$. Equating the determinants of these equations to zero we obtain the following dispersion equations:

<u>Full contact interface</u>

$$\begin{gathered}\left(1 + r\right) p\left(p - r(1 - p)\right)(1 + \tanh(d) + \tanh(pd)) + \\ + \left(p^2 - rp(2p - 1) + r^2 (4 - (1 - p)p)\right)\tanh(d)\tanh(pd) = 0;\end{gathered} \tag{11}$$

Electromagnetically shorted contact interface

$$-2r(1+r)p\left(1-\operatorname{sec}h(d)\operatorname{sec}h(pd)\right)-(1+r)p\left(r(1-p)-p\right)\tanh(d)+ \\ \left(r^2-r(1+r)p\right)\tanh(pd)+\left(r^2+(1+r)^2p^2\right)\tanh(d)\tanh(pd)=0 \tag{12}$$

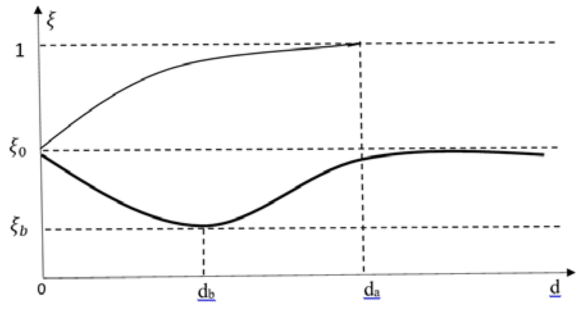
Lubricated contact interface

$$-2r(1+r)p\left(1-\operatorname{sech}(d)\operatorname{sech}(pd)\right)+r\left(r(1-p)-p\right)\tanh(d)+ \\ -(1+r)rp\left(r(1-p)-p\right)\tanh(pd)+\left(r^2+(1+r)^2p^2\right)\tanh(pd)\tanh(d)=0 \tag{13}$$

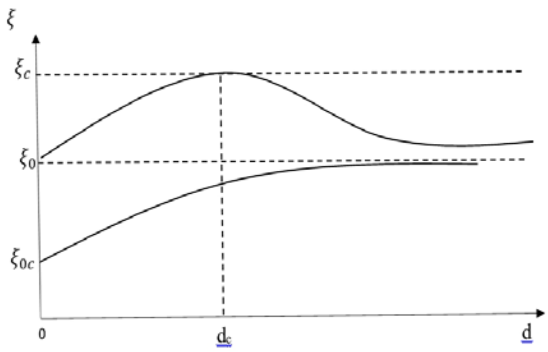
Here $d=kh$, $r=\left(\beta^2\varepsilon+e^2\mu-2ge\beta\right)G^{-1}\gamma^{-1}$ is the electro-magneto mechanical coupling coefficient.

Results and conclusions

Dispersion equations (11-13) impose relationships between dimensionless phase speed of surface wave $\xi<1$ and dimensionless wave number $d=kh$. Numerical analysis of these dispersion equations shows that the dispersions curves corresponding to the three interface conditions considerably differ from each other. The dispersions curves $\xi(d)$ diagrammatically are presented on Fig.1, Fig.2. In Fiq 1. the curve in bold corresponds to b) interface conditions. For thin layer (long wave) $d<<1$ the speeds of the surface waves for all contact interface cases are the same and coincide with the speed of the Bleustein–Gulyaev surface wave for electrically shorted and traction free interface of MEE half-space $\xi_0=\sqrt{1+r^2}(1+r)^{-1}$ [2]. As it follows from Fig.1, in the case of full contact interface, the surface wave speed increasing with the layer height growth approaching to $\xi(d_1)=1$, which results in that the surface wave does not exist in the region $d\geq d_1$. In the case of the electro-magnetically shorted interface we have that both for long and short waves the surface wave speed equal to the speed of the Bleustein–Gulyaev surface wave ξ_0 and has one minimum at d_2.



Fiq1. Dispersion curves for a) and b) interface conditions



Fiq2. Dispersion curves for c) interface conditions

In the case of smooth interface conditions we have two different surface waves, the dispersion curves are presented in Fig.2. At $d\to 0$ the speed of first wave is equal to the speed of the Bleustein–Gulyaev surface wave ξ_0, the speed of the second wave is $\xi_{0c}=(1+r)^{-1}$. With the layer height growth (shortwave range) the speeds of the both waves approach to ξ_0, while the second wave speeds has one maximum at d_c. For MEE crystal BaTiO3–CoFe2O4 with electro-magneto-elastic coupling coefficient $r=0.45$ we have the numerical data for wave speeds and wavenumbers values (see Fig1, Fig2):

$\xi_0 = 0.9506, d_a = 2.42$, $d_b = 1.41$, $\xi_b = 0.905, \mathrm{d}_c = 3.42$, $\xi_c = 0.9902$, $\xi_{0c} = 0.8304$

The existence of two surface waves have been also observed in [1] for the piezoelectric half-space covered with the layer of identical material in the case of lubricated interface condition.

References

1. C.W. Nan, Magnetoelectric effect in composites of piezoelectric and piezomagnetic phases, Physical Review B, vol. 50, 1994, pp. 6082-6088.
2. B.L. Wangab, Y.W. Maib, O.P. Niraulaa, “A horizontal shear surface wave in magnetoelectroelastic materials”, Philosophical Magazine Letters, vol. 87, 2007, pp. 53–58.
3. J.K. Du, X.Y. Jin, J. Wang, Love wave propagation in layered magnetoelectro-elastic structures, Science in China Series G: Physics, Mechanics & Astronomy, vol. 51,2008 , pp. 617-631.
4. W.J. Feng, E. Pan, X. Wang, J. Jin, Rayleigh waves in magneto-electro-elastic half planes, Acta Mech., 2008,vol. 202, pp. 127–134.
5. Melkumyan, “Twelve shear surface waves guided by clamped/free boundaries in magneto-electro-elastic materials”, Journal of Solids and Structures,vol.44,2007,pp. 3594-3599.
6. D. Piliposyan, Shear surface waves at the interface of two magneto-electro-elastic media, Multidiscipline Modelling in Materials and Structures, vol. 8, 2012, pp. 417–426.
7. D. K. Gasparyan, K.B. Ghazaryan, Shear waves in functionally graded electro-magneto-elastic media, International Journal of Engineering Research & Technology (IJERT), V. 3. Iss. 10, 2014, p.769-776.
8. Аветисян А.С. «Поверхностные электроупругие волны Лява в случае неоднородного пьезоэлектрического слоя» //Изв. АН Армении. Механика. 1987. Т.40. № 1. С.24-29.
9. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н. Электромагнитоупругие волны. Ереван: Изд. ЕГУ, 2006. 492с.
10. Белубекян М.В. Экранированная поверхностная сдвиговая волна в пьезоактивном полупространстве гексогональной симметрии. //В сб.: «Проблемы динамики взаимодей-ствия деформируемых сред» Ереван: Институт механики НАН РА, 2008. С.125-130.
11. M.V. Belubekyan, V.M. Belubekyan, Surface waves in piezoactive elastic system of a layer on a semi-space. Proc. of the Yerevan State University., Phys.& Math. Sci., 2013,3, pp.45–48.
12. D. G. Piliposyan, K. B Ghazaryan, G. T. Piliposian, Internal resonances in a periodic magneto-electro-elastic structure, Journal of Applied Physics 116, (2014), p. 044107/1-7.
13. D.G Piliposyan, K.B Ghazaryan, G.T Piliposian, Magneto-electro-elastic polariton coupling in a periodic structure, Journal of Physics D: Applied Physics (2015),48, (17), p.175501

Information of authors

K.B.Ghazaryan, Doctor of science, Professor, Principal science researcher,
Institute of mechanics NAN of Armenia, **E-mail:** ghkarren@gmail.com

R.A.Ghazaryan, Candidate of science, Senior science researcher,
Institute of mechanics NAN of Armenia, **E-mail:** sat_and_21@yahoo.com

S.A.Terzyan, Candidate of science, Senior science researcher,
Institute of mechanics NAN of Armenia

SHEAR STRENGTH REGULARITIES OF THE SWELLING SOILS

Hairoyan S.H.

Issues on the impact of humidity on shear strength of swelling soils are important in modern geotechnics and soil mechanics. The article is devoted to shear strength alterations in the wide range of sealing pressures and humidity. It is of great importance mainly for basement calculations and for stability calculations of slopes.

Shear strength of swelling soils consolidated at the natural. The problem of determining the strength properties of clayey soils retaining the natural moisture content, particularly in swelling soils, is extremely urgent and technically complex, since special measures are required to evaluate specimen drying during testing [2,3,4].

In this connection, the idea of consolidating twin specimens after their saturation under a holding device and determination of the free-swelling pressure has been developed, assuming that within certain limits of variability of the natural moisture content of the swelling soils, their shear strength at the moisture content under a pressure, (is the external pressure, and the pressure on the soil skeleton) should be equal to the shear strength of the twin specimens saturated under the holding devices and consolidated under a total pressure $P_z=\sigma_{sw,o}+\sigma_z$..

To confirm this hypothesis, we tested the betonies/sandy-loam soil mixtures and undisturbed betonies clay from a sliding mass of the Dilizhansk Region of the Armenia, whose mm in diameter and 24 mm thick were tested for shear by the torsion method on model M-5 instruments designed by S.R.Meschian.The consolidating pressure on the specimens was created by manual devices. The pressure of free swelling was determined by the method of compensating for the swelling deformation of the unloaded specimens in the absence of bulk deformations[1].

The test data for the twin specimens of all soils under consolidation, while their shear- strength diagrams are given in fig.1.all of the test results for the twin specimens, and also their average values (dark triangles and circles) were plotted in fig. 1

Solid lines denote consolidation of twin specimens at natural (initial) moisture content; broken lines indicate same thing, after saturation under holding device.

Table 1

Laboratory soil number	ρ_s, g/cm^3	ρ g/cm^3	W_0	Plasticity limits			I_L	Composition and name of soil
				W_L	W_p	I_p		
57-85	2,71	1,71	0,272	0,865	0,387	0,478	-0,245	60%bentonite/40% sand
58-85	2,73	1,73	0,417	0,952	0,442	0,510	-0,049	75% bentonite /25%sandy loams,
		1,74	0,430	-	-	-	-0,023	
59-85	2,75	1,63	0,546	1,705	0,404	1,301	-0,109	100% bentonite clay
		1,72	0,424				-,015	
		1,74	0,320				-0,0646	
		1,80	0,362				-0,032	
60-85	2,74	1,75	0,407	1,08	0,406		0,0015	100% bentonite clay

The results of the tests confirm the correctness of our hypothesis and indicate that at a moisture content Wo, which is approximately equal to the moisture content of the soil at the plastic limit Wp and which exceeds its value, the shear strengths of twin specimens consolidated at a moisture content Wp and after saturation under a holding device are virtually equal. In testing soil specimens 57-85, whose initial moisture contents were many times lower than their moisture contents at the lower plastic limit, the discrepancy between the shear strengths, as determined by the two methods of consolidation considered here, is , at the same time , sufficiently high, and goes to 33% when =0,5

MPa . In this case , the scatter of experimental data is also rather high and fluctuates within the range of from + 5 to +11%, i.e., the discrepancy between their extreme values reaches 22%.

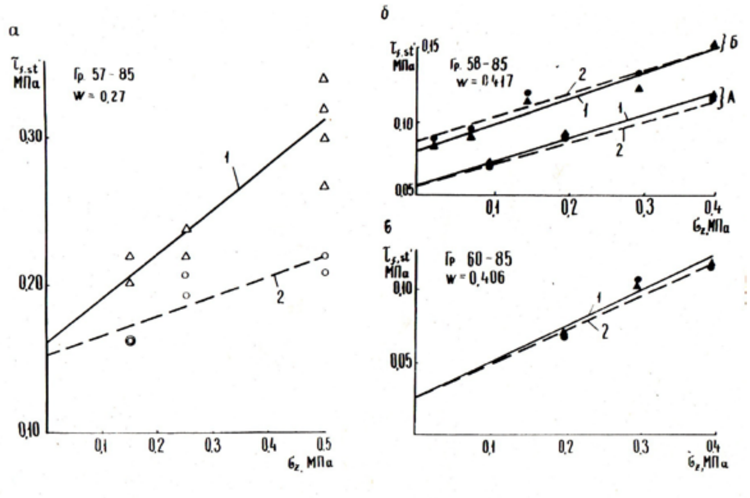


Fig.1 Shear-strength diagrams of swelling soils. a)Soil No . 57-85, Wo=0,27; b)No. 58-85, Wo=0,417;c) No.60-85, Wo=0,406.

Shear strength of swelling soils with variability in normal Five series of twin samples of bentonite clay (diameter 101mm, height 24mm) were tested for shear in the instruments M-5 by the torsion method as per the standard methodology with five different initial compactness and moisture content values. Compacting pressures on the samples were created with laver-operated devices. To ensure identical phisical and mechanical properties, the samples were tested in a over compacted state. For this, the samples were at first compacted wish their initial moisture content W_0 under the action of a certain constant pressure $P_{z,o}$ and , thereafter, fully unloaded and maintained without load till the deformations were completely stabilized . The $\sigma_{sw,o}$ values were determined for W_0 by the method of compensation of the swelling on two to three samples. Thereafter, the remaining samples were so W_0 ed that the compacting pressures were both lower and higher than the free swelling pressure $P_z>\sigma_{sw,o}$;$P_z<\sigma_{sw,o}$. After the deformations were stabilized , a part of the samples was tested for shear with W_0 (without moistening) and the other part was tested after moistening to a moisture content corresponding to complete water-saturation $S_r=1$ and conditional stabilization of the deformations. The shear diagrams are given in Fig.2.

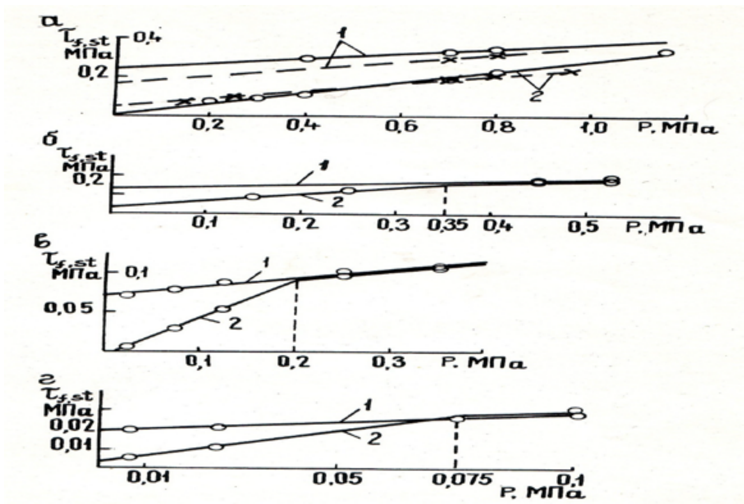


Fig.2 Shear diagrams of betonies clay , a) solid lines for Woo=0,326; dashed lines for W_{oo}=0,433;C) W_o=0,522; d) W_o=0,945; 1)for initial moisture content W_o; 2) for complete water-saturation after application of compacting pressure.σ_z.

The results of the experimental studies made it possible to draw the following conclusions:

1.In the range of variability of the water content $W_o>W_p$, the shear strengths of unmoistened and moistened swelling soil samples after application of the compacting pressure $P_z>\sigma_{sw,o}$ are practically equal.
2.For $P_z<\sigma_{sw,o}$ moistening leads to swelling of the samples and a sharp reduction in their strength. Hence, shear strength parameters tgφ and C obtained from equation $\tau_{f,st}=f(\sigma_{sw,0},\sigma)$ cannot be considered valid. Under the various compacting pressures in the range of $\sigma_z<\sigma_{sw,0}$ the samples have different densities of the skeleton due to the different deformations of swelling under the influence of various σ_z. From this it follows that determined from the dependence of $\tau_{f,st}=f(\sigma_{sw,0},\sigma)$ parameters of shear strength tgφ and C can not be considered valid.
3.The shear strength diagrams of moistened samples under the action $P_z>\sigma_{sw,o}$;$P_z<\sigma_{sw,o}$ of with Wo>Wp have the form of broken lines.
4.The compacting pressure P_z corresponding to break point in the $\tau_{f,st}$- P_z diagram equals $\sigma_{sw,o}$ of the soil in its given state. It is somewhat higher than the free swelling pressure determined before application of P_z .
5.In case of the need to determine $\tau_{f,st}$ for two limiting values of water content Wo and W_f of the swelling soil for $W_o>W_p$, this can be confined to locating only the $\tau_{f,st}$- P_z diagram of the samples moistened under the action of $P_z>\sigma_{sw,o}$. Here , not less than three $\tau_{f,st}$ values should be experimentally determined under the action of $P_z>\sigma_{sw,o}$.
6. The regularities in the shear strength of swelling soils as examined above are destroyed for water content $W_o<W_p$. In this case , the shear strength diagram of the natural water content samples and those moistened after application of are represented in the form of straight lines characterized by the parameters φ and C which differ from each other.
Of particular interest are the equalities confirmed by the present investigation of $\sigma_{sw,o}$ values of the natural water content and water-saturated samples after application of the compacting pressures $P_z>\sigma_{sw,o}$ with Wo>Wp. This phenomenon was conditioned by the relaxation of the swelling pressure $\sigma_{sw,o}$ occurring in the process of the movement of the moistening front in the sample with its volume remaining unchanged [6].

References

1. 1.Месчян С.Р., Экспериментальньная реология глинистых грунтов, Изд. Гитутюн НАН РА Ереван, 2005, с.495.
2. Сорочан Е.А., Строительство сооружений на набухающих грунтах, М.: Стройиздат, 1989, 310с.
3. Barnes G.E., Soil mechanics Principles and Practice, London, WIP DLP, 2000, p.493.
4. Basma A.A., Al-Hamoud A.S. and Malkawi A.H., Laboratory assessment of swelling pressure of expansive soils, Applied Clay Sciences, vol. 9, 1999, pp 355-368.
5. S.R.Meschian, Rheological processes in clay soils with consideration of specific impacts, Yerevan, Hayastan, 1992, p.393.
6. Tsytovich and Z.G. Ter-Martirosyan. Principles of Applied geomechanics in Construction(in Russian), Vysshaya shkola,Moscow 1981 p.450.

Information about author:

Hayroyan Sargis - Doctor of geology, Institute of Mechanics of NAS RA
Phone (+374 93) 226210, E-mail hairoyan@ysu.am

FOR STUDY OF THE ELASTIC MEDIUM REACTION TO THE EFFECT OF SURFACE AND RECESSED SOURCES

Kapustin M.S., Pavlova A.V., Telyatnikov I.S.

A numerical and analytical approach to the study of the problem of steady joint oscillations of the weightless stamp and elastic layer containing a system of rigid vertically or horizontally oriented inclusions, is proposed. The stresses occurring at the contact area of the radiating plate and the base surface are calculated.

The presented approach allows us to investigate the effects of vibration loads of different foundation types, including those simulated by the system of rigid vertical inclusions of pile foundations. Obtained characteristics of the stress-strain state of elastic foundation can be useful in the study of soil deformation during load transfer transmission, etc.

1. For stating the criteria of structure stability and determining their strength characteristics we require the use of different theoretical and experimental methods [1–5 et al.]. The analysis of foundation and base state directly related to the solution of the problem of seismic resistant construction. The development of constructive schemes of foundations requires knowledge of the spatial and temporal distribution of stresses in the base, and the solution of the vibration protection problem requires knowledge about the features of wave energy outflow from the zone of loading. This data may be useful for studying soil deformation in the process of load transmission, etc.

Modern methods of studying the dynamic contact problems of elasticity theory, modeling the state of bases and foundations, include various approaches. The most commonly used numerical methods do not always allow to detect the influence of individual parameters on the solution of the problem. In this paper the problem of steady oscillations of deformable base under the influence of surface and internal loads is regarded as a model of the base-foundation. With the help of semi-analytic methods the quantitative characteristics of the stress-strain state of elastic foundation by the impact of surface and internal sources are obtained, in particular stresses occurring in the contact area of the radiating plate and the surface of the base are calculated.

The presented approach allows us to investigate the effects of vibration loads on the foundations of various types, including – pile foundations simulated by the system of rigid vertical inclusions, when the displacement and the stress fields generated by anchoring columns interact with the main field in the elastic foundation strengthening or weakening it in the process.

2. The problem of steady-state (with frequency ω) oscillations of round weightless rigid stamp on the surface of the elastic layer, coupled with non-deformable foundation in axisymmetric formulation is considered. Displacements of points of the medium in a cylindrical coordinate system are described by the vector of displacement amplitudes $\vec{u} = \{u_r, u_z\}$, satisfying Lame equations. There is no friction in the contact area $\{r \le a, z = 0\}$ of the stamp with the medium. The vertical harmonic load $\vec{P} = \{0, Pe^{-i\omega t}\}$ applied at the center is acting on the stamp with radius *a*. The distribution of the contact stresses under the stamp described by function $q_*(r)$, is unknown. In addition, the system of oscillating recessed inclusions placed in a circle with radius r_0 in an elastic layer of thickness h.

We consider vertically oriented inclusions of the length h_0, forming a cylindrical surface: $r = r_0$ $(r_0 > a)$, $-h_0 \le z \le 0$. The load on inclusions distributed along depth is considered a given and modeled by components of localized volume force using the Dirac function $X_r = \mathrm{Re}\left[f_r(z)\delta(r - r_0)e^{-i\omega t} \right]$, $X_z = \mathrm{Re}\left[f_z(z)\delta(r - r_0)e^{-i\omega t} \right]$.

We are also solving the contact problem of joint oscillations of weightless stamp and elastic layer of thickness h containing at the depth h_0 a system of horizontally oriented rigid inclusions of the length r_0, with specified border contact stresses, thus the components of the volume force vector are as follows: $X_r = \mathrm{Re}\left[f_r(r)\delta(z + h_0)e^{-i\omega t} \right]$, $X_z = \mathrm{Re}\left[f_z(r)\delta(z + h_0)e^{-i\omega t} \right]$. Approaches [6, 7] used for solving both problems.

For unknown stress in the contact area Fredholm integral equation of the first kind is obtained in the form

$$\int_0^a k(r,\tau)\, q_*(\tau)\,\tau d\tau = u_z(r,0) - A(r)\,,\ 0 \le r \le a\,, \tag{2.1}$$

$$k(r,\tau) = \int_{\sigma_0} K(\alpha) J_0(\alpha r) J_0(\alpha\tau)\alpha d\alpha\,,\ A(r) = \int_0^\infty U(\alpha) J_0(\alpha r)\alpha d\alpha\,,$$

$$K(\alpha) = \frac{\kappa_2^2}{4\rho c_2^2 \overline{\Delta}(\alpha)}\left[\sigma_1\left(\alpha^2 \mathrm{ch}(\sigma_1 h)\mathrm{sh}(\sigma_2 h) - \sigma_1\sigma_2 \mathrm{sh}(\sigma_1 h)\mathrm{ch}(\sigma_2 h)\right)\right],$$

$$\overline{\Delta}(\alpha) = \sigma_1\sigma_2\left(s^2 + \alpha^4\right)\mathrm{ch}(\sigma_1 h)\mathrm{ch}(\sigma_2 h) - \alpha^2\left(s^2 + \sigma_1^2\sigma_2^2\right)\mathrm{sh}(\sigma_1 h)\mathrm{sh}(\sigma_2 h) - 2s\alpha^2\sigma_1\sigma_2\,,$$

where $U(\alpha)$ is Bessel transformation of displacements caused by vibration of inclusions

$$U(\alpha) = \frac{r_0 J_0(\alpha r_0)}{4\rho c_2^2 \overline{\Delta}(\alpha)}\Big(\sigma_1\left(\alpha^2\sigma_1\sigma_2 e^{\sigma_1 h} - s\chi_2^+\right)\varphi_{z1}^-(-h_0) + \alpha^2\sigma_1\left(s e^{\sigma_2 h} - \phi_1^+\right)\varphi_{z2}^-(-h_0) -$$

$$-\sigma_1\left(\alpha^2\sigma_1\sigma_2 - s e^{\sigma_1 h}\chi_2^-\right)\varphi_{z1}^+(-h_0) - \alpha^2\sigma_1\left(s + e^{\sigma_2 h}\phi_1^\pm\right)\varphi_{z2}^+(-h_0)\Big),$$

$$\varphi_{zk}^\mp(\beta) = \int_0^\beta f_z(\zeta) e^{\mp\sigma_k\zeta} d\zeta\ \ (k = 1,2)\,,\ \chi_2^\pm = \sigma_1\sigma_2 \mathrm{ch}(\sigma_2 h) \pm \alpha^2 \mathrm{sh}(\sigma_2 h)\,,\ \phi_1^\pm = \sigma_1\sigma_2 \mathrm{sh}(\sigma_1 h) \pm \alpha^2 \mathrm{ch}(\sigma_1 h)\,,$$

$s = \alpha^2 - 0{,}5\kappa_2^2$, $\sigma_j = \sqrt{\alpha^2 - \kappa_j^2}$, $\kappa_j^2 = (\omega/c_j)^2$ $(j = 1,2)$, κ_j are wave numbers of longitudinal and transverse waves respectively, $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$, $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$, λ, μ are Lame coefficients, ρ – density of the elastic layer; J_0 is a Bessel function of the first kind. The contour of integration σ_0 is chosen according to the principle of limiting absorption [8, 9].

Auxiliary equation is used to build solution (2.1)

$$\int_0^a k(r,\tau)\, q_\eta(\tau)\,\tau d\tau = J_0(\eta r)\,,\ 0 \le \tau \le a\,, \tag{2.2}$$

the solution of the auxiliary equation is constructed by method of fictitious absorption [8, 9].

Properties of the function $K(\alpha)$ depend on the type of elastic medium, in the case of the elastic layer, it has the following properties. $K(\alpha)$ is a meromorphic function in the complex plane, even for the parameter α. On the real axis, it can have a finite number of real poles p_k and zeros z_k $(k = \overline{1,N})$ and a countable set of complex z_k, p_k $\left(k = \overline{N+1,\infty}\right)$ [8, 9]. In this case $K(\alpha) = C|\alpha|^{-1}\left[1 + O\left(\alpha^{-1}\right)\right]$ when $|\alpha| \to \infty$.

According to the scheme of the method of fictitious absorption function $K(\alpha)$ is represented in the form $K(\alpha) = K_0(\alpha)\Pi(\alpha)$. Choice of the function $K_0(\alpha)$ is caused by the asymptotic behavior of the kernel symbol, as well as the possibility of its direct factorization. The function $\Pi(\alpha)$ is approximated by a rational function $\Pi(\alpha, N) = \prod_{k=1}^{N}\left(\alpha^2 - z_k^2\right)\left(\alpha^2 - p_k^2\right)^{-1}$, where $\Pi(\alpha, N) = 1 + O\left(\alpha^{-1}\right)$ when $|\alpha| \to \infty$, $\pm z_k$ – zeros, $\pm p_k$ – poles of the function $K(\alpha)$. At the same time we introduce a new unknown function *p* by relation $q_\eta(r) = p(r) + \varphi(r)$, $0 \le r \le a$, where function φ contains the unknown constants.

According to the scheme of fictitious absorption method, any complete system of linearly independent functions can be used for the construction of $\varphi(r)$. Since in the resulting formula the introduced function $\varphi(r)$ stands under the integral operators, we can choose the derivatives of Dirac functions with support in the point *a* as a linearly independent functions.

In this paper the following function $\varphi(r)=\sum_{k=1}^{N} G_k(L)C_k\delta(r-a)$ is selected, $L=-\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\right)\right)$, where G_k have the form $G_k(\alpha^2)=(\alpha^2-p_1^2)\dots(\alpha^2-p_{k-1}^2)(\alpha^2-p_{k+1}^2)\dots(\alpha^2-p_N^2)$, C_k are unknown constants requiring definition.

Solution of the integral equation (2.2) with right side $J_0(\eta r)$, where $\operatorname{Im}\eta=0$, $\eta>0$, takes the form

$$q_\eta(r)=J_0(\eta r)K^{-1}(\eta)+\frac{i\pi a}{2}K_0^{-1}\sum_{l=1}^{N}\beta_l J_0(z_l r)G_1(\eta,z_l)-\frac{a\pi^2}{4}\sum_{k=1}^{N}g_k\sum_{l=1}^{N}\beta_l J_0(z_l r)G_2(z_l,p_k)+$$
$$+b(\eta)\left(\frac{e^{-B(a-r)}}{\sqrt{a^2-r^2}}+i\pi\sqrt{\frac{a\varepsilon}{2}}\sum_{l=1}^{N}\beta_l H_0^1(z_l a)J_0(z_l r)\right)+$$
$$+\sum_{k=1}^{N}\frac{g_k}{\sqrt{B-ip_k}}H_0^1(p_k a)\left[i\sqrt{\frac{a\pi}{2}}\frac{e^{-B(a-r)}}{\sqrt{a^2-r^2}}-\frac{a\pi\sqrt{\pi\varepsilon}}{2}\sum_{l=1}^{N}\beta_l J_0(z_l r)H_0^1(z_l a)\right]$$

up to a constant factor describing the behavior of the function $K(\alpha)$ at infinity.

Here we use the notation

$$G_1(\eta,z)=\left[\eta J_{n+1}(\eta a)H_n^1(za)-zJ_n(\eta a)H_{n+1}^1(za)\right]\left(\eta^2-z^2\right)^{-1},$$
$$G_2(z,p)=\left[pH_{n+1}^1(pa)H_n^1(za)-zH_n^1(pa)H_{n+1}^1(za)\right]\left(z^2-p^2\right)^{-1},\ \varepsilon=1/B,\ K_0(\alpha)=\left(\alpha^2+B^2\right)^{-1/2},$$
$$b(\eta)=\sqrt{\frac{a}{2\pi}}\left[H_0^1(\eta a)\sqrt{B+i\eta}+H_0^2(\eta a)\sqrt{B-i\eta}\right],\quad \beta_l=\prod_{k=1}^{N}\left(z_l^2-p_k^2\right)\prod_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{N}\left(z_l^2-z_k^2\right),\quad B>>1,\quad H_0^j\ -$$

Hankel function $(j=1,2)$.

Unidentified C_k are included in g_k, where $g_k=aC_kE_N(p_k^2)J_0(ap_k)$, $E_N(\alpha)=\prod_{k=1}^{N}(\alpha^2-z_k^2)$. An algebraic system to determine the unknown can be expressed with respect to g_k

$$\sum_{k=1}^{N}g_k\left[\left(p_kH_1^1(ap_k)J_0(a\alpha)-\alpha H_0^1(ap_k)J_1(a\alpha)\right)\left(\alpha^2-p_k^2\right)^{-1}-2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\pi(B-ip_k)}}H_0^1(ap_k)J_0(a\alpha)\right]=$$
$$=\frac{2}{i\pi}\frac{\sqrt{B^2+\eta^2}}{\alpha^2-\eta^2}\left[\eta J_1(a\eta)J_0(a\alpha)-\alpha J_1(a\alpha)J_0(a\eta)\right]-\frac{2}{i\pi}\sqrt{\frac{2\varepsilon}{a}}J_0(a\alpha)b(\eta),\ \alpha=z_l,\ l=\overline{1,N}.$$

Efficiency of factorization method for solving integral equations used for the environments with absorption is determined by the degree of deformation of the integration contours and linked to the value of the parameter *B*. At the same time, the greater the value of *B*, the smaller the order of discarded members [8, 9]. In the calculations $B=10$.

Formulation of the problem allows us to use the relations presented in [6] using the approaches of [7] for the displacement vector of vibration problem of the system of internal sources. Using the solution obtained for the unitary right side $q_1(r)=q_\eta(r)$, when $\eta=0$, expressions for the stresses created by recessed inclusions under the stamp $q_2(r)=-\int_0^\infty U(\alpha)q_0(r)J_0(\alpha r)\alpha d\alpha$ are constructed.

Due to the linearity of the formulation the solution of the original problem is the sum of q_1 and q_2, $q_*(r)=q_1(r)+q_2(r)$. The nature of the contact stress distribution under the stamp, is determined by a combination of system parameters: the size of the sources, the nature of the distribution function of the load on the inclusions and oscillation frequency.

3. In order to describe distribution of the load on the inclusions a linear function is used $f_z(z)=kz+b$, where $k=\frac{b(1-\varepsilon_1)}{h_0}$, $b=\frac{2}{h_0(1+\varepsilon_1)}$, for vertical inclusions a function of the form is

considered $f_z(z)=\varepsilon_2(h_0+z)+e^{z-h_0}+\dfrac{1}{\sqrt{-z}}+\dfrac{1}{\sqrt{z+h_0}}$, $z\in(0,-h_0)$, in formulas ω is dimensionless frequency, defined by the formula $\omega=2\pi\nu l_0/c_0$, where ν – frequency (Гц), $l_0=1$ m, $c_0=10^3$ m/s.

The numerical results showed that the distribution of the contact stresses under the stamp mostly depends on the oscillation frequency and size of sources. At low frequencies of vibration the presence of inclusions does not significantly affect the nature of the stress, the load distribution on the vertical inclusions also has no significant effect on the nature of the stresses under the stamp and their value.

Fig. 1 and 2 show distribution of contact stresses in the contact area of the stamp with the medium, where $c_1=0,2\cdot 10^3$ m/s, $c_2=0,12\cdot 10^3$ m/s, $\rho=1,4\cdot 10^3$ kg/m^3, $\nu=4,0$ Hz, $h=20$ m, $a=2$ m, $h_0=10$ m. Small dotted line corresponds to the distribution of contact stresses in a layer at the unitary oscillation amplitude $q_1(r)$, large dotted – produced by recessed sources of contact stresses $q_2(r)$, solid line – general distribution of contact stresses $q_*(r)$.

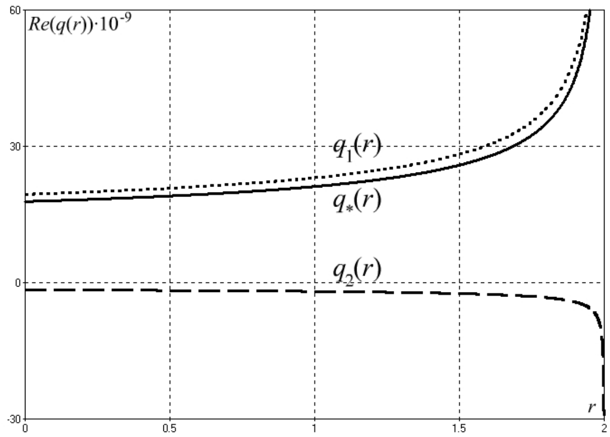


Fig. 1. Contact stress distribution for the case of vertical inclusions $(\varepsilon_2=1)$.

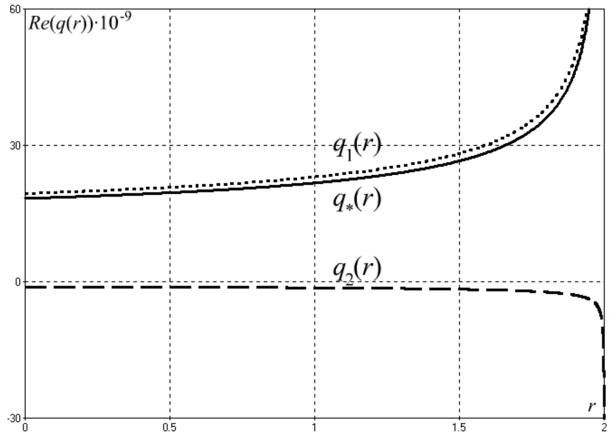


Fig. 2. Contact stress distribution for the case of horizontal inclusions $(\varepsilon_1=1)$.

Obtained results make it possible to study the patterns of contact stress distribution in the layer excited by the surface load and internal inclusions (vertically and horizontally oriented).

Presented in the paper method of solving the problem for the homogeneous elastic foundation can be generalized for the case of a layered base, and the foundation with defects such as flat inclusions and fractures located in parallel planes.

The study has been carried out with support of the grants RFFR 13-01-00132.

REFERENCE

1. Механика грунтов. Основания и Фундаменты / С.Б. Ухов, В.В. Семенов, В.В. Знаменский, З.Г. Тер-Мартиросян, С.Н. Чернышев. М.: АСВ, 1994. 527 с.
2. Саргсян А.Е. Расчетная модель свайных фундаментов с учетом эффекта их взаимодействия с грунтовой средой / А.Е. Саргсян, В.С. Геращенко, Н.Н. Шапошников // Вестник МГСУ. 2012. № 4. С. 69–71.
3. Фиораванте В. Физическое моделирование плитно-свайных фундаментов / В. Фиораванте, М.Б. Ямиолковский // Развитие городов и геотехническое строительство. 2006. № 10. С. 200–206.
4. Muir Wood D. Group effects in stone column foundations: model tests / D. Muir Wood, W. Hu, D.F.T. Nash // Geotechnique. 2000. V. 50, № 6. P. 689–698.
5. Ambily A.P. Behaviour of stone columns based on experimental and FEM analysis / A.P. Ambily, S.R. Gandhi // Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering. 2007. V. 133, № 4. P. 405–415.
6. Vibrations of an elastic half-space with a set of rigid inclusions / O.D. Pryakhina, A.V. Smirnova, A.A. Evdokimov, M.S. Kapustin // Doklady Physics. 2003. V. 48(3). P. 142–145.
7. Model of foundation-base system under vibration load / M. Kapustin, A. Pavlova, S. Rubtsov, I. Telyatnikov // Communications in Computer and Information Science. 2014. V. 487. P. 168–173.
8. Бабешко В.А. Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 265 с.
9. Ворович И.И. Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах / И.И. Ворович, В.А. Бабешко, О.Д. Пряхина. М.: Научный мир, 1999. 248 с

Information about authors:

Kapustin Michael S.
PhD (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Kuban State University, faculty of mathematical modeling
Phone: (7 861) 219 95 78
E–mail: kmm@fpm.kubsu.ru

Pavlova Alla V.
Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Kuban State University, faculty of mathematical modeling
Phone: (7 928) 039 01 04
E–mail: pavlova@math.kubsu.ru

Telyatnikov Ilya S.
PhD (Phys.-Math.), Jr. Researcher, Southern Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences
Phone: (7 928) 280 59 75
E–mail: ilux_t@list.ru

ON EXPLICIT RELAXATION OF STRETCHING (MEMBRANE) ENERGY FUNCTIONALS WITH TWO PREFERRED STATES AND ITS APPLICATIONS

Khurshudyan As. Zh.

Our aim is to familiarize the Armenian school of Mechanics with modern techniques of Variational Calculus applying in various problems of Continuum Mechanics. In many applied problems of engineering mathematically are posed in terms of energy functionals, the minima of which defines the preferable mechanical equilibrium states of the design under study. Such functionals Very often have several minima, corresponding to several (different) preferred states of the design. Those problems require special approach. In this paper such an approach, known as energy relaxation procedure, is described and applied to relax the energy of a stretching elastic membrane with two preferred (mechanical) equilibrium states.

1. Introduction

If you have ever been concerned with proving the existence of a minimizer (or minimizing sequence converging in some sense) for an energy functional[1]

$$E_*[\boldsymbol{r}] = \int_\Omega W_*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r}, \nabla\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\Omega, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^3,$$

obtained in Continuum Mechanics via direct methods of Variational Calculus [5], you have definitely met with difficulty with proving the last step, i.e. the so-called lower semi-continuity. To cover this lack, the so-called stored energy function $W(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r}, \nabla\boldsymbol{r})$ is substituted by its convex (in scalar case) $W_\mathrm{c}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r}, \nabla\boldsymbol{r})$ or its quasi-convex $W_\mathrm{q}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r}, \nabla\boldsymbol{r})$ envelope (in vectorial case):

$$E_\mathrm{r}[\boldsymbol{r}] = \int_\Omega W_\mathrm{q}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r}, \nabla\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\Omega.$$

Then the new energy $E_\mathrm{r}[\boldsymbol{r}]$, called relaxed energy, is necessarily lower semi-continuous and, therefore, the direct method of Variational Calculus may be applied for global minimizer (or, at least, minimizing sequence) searching.

The problem we are concerned with in this paper, the relaxation problem of variational functionals, is one of the most difficult, but, at the same time, one of the most attractive and important problems. The necessity to relax a functional arises in both theoretical and computational Continuum Mechanics. The problem is, that if the energy functional of a design is non-convex, i.e. has several local minima, it is impossible to describe the real behaviour of the design in prescribed conditions. In theory of Continuum Mechanics it will bring to discontinuous transition between mechanical equilibrium states corresponding to each local minimum of the functional. In practice we are faced with more troubles. Any chosen algorithm will oscillate between different minima infinitely long without giving a precise solution. The problem is that for such energy functionals the lower semi-continuity condition fails to be satisfied.

There are several approaches to relax non-convex functionals [1–3, 5, 12, 13]. Even for simple functionals it is very difficult to construct explicit quasi-convex envelope.

2. Main concepts, definitions, notations

Throughout this paper we will widely use the concepts of convexity, quasi-convexity and rank-one convexity, so it is necessary to bring the definitions of those. We restrict those definitions by

Definition (convexity). A function $W : \Omega \to \mathbb{R}^3$ is said to be convex $\left(\text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^3\right)$ if

$$W(\boldsymbol{G} + \theta\boldsymbol{A}) \le (1-\theta) W(\boldsymbol{G}) + \theta W(\boldsymbol{G} + \boldsymbol{A}) \quad (\text{in } \Omega)$$

[1] Since our aim is to show the relaxation advantages mainly for mechanical (often engineering) applications, we restrict our attention to physically reasonable domains and other staff. For general theory we refer to Dacorogna`s book [5], in which many other application aspects are also described.

for all $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{A}$ and $\theta \in [0,1]$.

In vectorial case the convexity is no more reliable and a weaker property is required. It is done by Morrey [5*][2] who introduced the concept of quasi-convexity.

Definition (quasi-convexity). A function $W : \Omega \to \mathbb{R}^3$ is said to be quasi-convex $\left(\text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^3\right)$ if

$$\int_{\Omega} \left[W\left(\boldsymbol{G} + \nabla \boldsymbol{r}_0\right) - W\left(\boldsymbol{G}\right) \right] \mathrm{d}\Omega = 0$$

for all such $\boldsymbol{r}_0 \in C_0^{\infty}\left(\Omega\right)$.

The quasi-convexity inequality is very hard to check even for some simple functionals. For that purpose a weaker but an algebraic (therefore easily verifiable) concept is introduced.

Definition (rank-one convexity). A function $W : \Omega \to \mathbb{R}^3$ is said to be rank-one convex $\left(\text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^3\right)$ if

$$W\left(\boldsymbol{G} + \theta \boldsymbol{A}\right) \le \left(1 - \theta\right) W\left(\boldsymbol{G}\right) + \theta W\left(\boldsymbol{G} + \boldsymbol{A}\right) \ \left(\text{in } \Omega\right)$$

for all $\boldsymbol{G}$, all rank-one matrices $\boldsymbol{A}$ and $\theta \in [0,1]$.

In general, convexity implies quasi-convexity, which in its turn implies rank-one convexity. But none of these concepts implies the previous.

In higher order theories (plates, shells, slabs etc.), the most functionals depend on higher order gradients of the deformation [4, 6, 9–11]. In particular, for plates with bending stiffness the energy functional depends on the second gradient of the deformation and has the form

$$E_{**}\left[\boldsymbol{r}\right] = \int_{\Omega} W_{*}\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r}, \nabla \boldsymbol{r}, \nabla^2 \boldsymbol{r}\right) \mathrm{d}\Omega.$$

Meyers [4*, 5*, 9*] proved that for integrals with higher order derivatives the so-called $k-$quasi-convexity is a necessary and sufficient condition for lower semi-continuity of $E_{**}\left[\boldsymbol{r}\right]$ and therefore for existence of its strong minimizers.

Definition $\left(k - \textbf{quasi-convexity}\right)$. A function $W : \Omega \to \mathbb{R}^3$ is said to be $k-$quasi-convex if

$$\int_{\Omega} \left[W\left(\boldsymbol{G}^k + \nabla^k \boldsymbol{r}_0\right) - W\left(\boldsymbol{G}^k\right) \right] \mathrm{d}\Omega = 0$$

for all $\boldsymbol{G}^k$ and $\boldsymbol{r}_0 \in C_0^k\left(\Omega\right)$.

$\boldsymbol{r} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ always stands for deformation, $\boldsymbol{G}$ for its first, and $\boldsymbol{G}^k -$ for its $k-$th gradient. $\mathrm{SO}\left(k\right)$, $k = 2, 3$, stands for the group of three-dimensional rotations about the origin of $\mathbb{R}^k$. Superscript T denotes the transposition. δ_i^j stands for Kroneker\`s delta, and Id is the identity matrix.

3. Pipkin\`s procedure

For relaxation (quasi-convexification) of energy functionals depending only on the first gradient of the deformation

$$E_{*}\left[\boldsymbol{r}\right] = \int_{\Omega} W_{*}\left(\nabla \boldsymbol{r}\right) \mathrm{d}\Omega, \ \ \Omega \subset \mathbb{R}^2,$$

---

[2] In most cases we do not refer to original source of this or that fact or definition, otherwise the references might be of 10-11 pages. To avoid that, for particular topics, when necessary, we refer to references which is cited independently. In such cases we add superscript * to reference in which the original work is cited.

an efficient and practically easy procedure is suggested in [13] for isotropic and in [14] for anisotropic membranes. The idea is simple, comes from physical considerations and provides explicit formulas for concrete functionals. We will explain it here only for isotropic membranes. Suppose that the energy itself is isotropic and frame indifferent; that is for any deformation of the form $\tilde{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{R}_3 \boldsymbol{r}(\mathbf{R}_2 \boldsymbol{x})$,

$W_*(\tilde{\boldsymbol{G}}) = W_*(\boldsymbol{G})$ for all $\mathbf{R}_3 \in \mathrm{SO}(3)$, $\mathbf{R}_2 \in \mathrm{SO}(2)$,

$\tilde{\boldsymbol{G}} = \nabla \tilde{\boldsymbol{r}}$. Since a membrane is considered, no bending stiffness is attributed to it, therefore no energy is required to fold the membrane ($\boldsymbol{G}$ is always continuous). The isotropy and frame indifference[3] of the energy density leads to decomposition of the deformation gradient

$\boldsymbol{G} = \sigma_1 \boldsymbol{u}_1 \boldsymbol{v}_1^T + \sigma_2 \boldsymbol{u}_2 \boldsymbol{v}_2^T, \quad \boldsymbol{u}_i^T \boldsymbol{u}_j = \boldsymbol{v}_i^T \boldsymbol{v}_j = \delta_i^j,\ i, j = 1, 2,$

in terms of principal stretches $\sigma_1, \sigma_2 \geq 0$. Thus, the apparent energy density can be written in terms of principle stretches: $W_{\mathrm{q}} = W_{\mathrm{q}}(\sigma_1, \sigma_2)$. Frame indifference implies symmetry of quasi-convex energy density $W_{\mathrm{q}} : W_{\mathrm{q}}(\sigma_1, \sigma_2) = W_{\mathrm{q}}(\sigma_2, \sigma_1)$. We restrict our attention to the case of rectangular coordinates: $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{v}_1 = \mathbf{i}$, $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{v}_2 = \mathbf{j}$. Since $W_{\mathrm{q}}(\sigma_1, \sigma_2)$ is quasi-convex, it is automatically rank-one convex, i.e. for any rank one matrix $\boldsymbol{A} \left(= u\, \mathbf{i}\mathbf{i}^T \text{ and then } = u\, \mathbf{j}\mathbf{j}^T \text{ say}\right)$ and $\theta \in [0,1]$,

$W_{\mathrm{q}}(\sigma_1 + \theta u, \sigma_2) \leq (1-\theta) W_{\mathrm{q}}(\sigma_1, \sigma_2) + \theta W_{\mathrm{q}}(\sigma_1 + u, \sigma_2)$

and then

$W_{\mathrm{q}}(\sigma_1, \sigma_2 + \theta u) \leq (1-\theta) W_{\mathrm{q}}(\sigma_1, \sigma_2) + \theta W_{\mathrm{q}}(\sigma_1, \sigma_2 + u)$

at least in Ω, thus the quasi-convex envelope $W_{\mathrm{q}}(\sigma_1, \sigma_2)$ is convex in σ_1 and σ_2 separately. The symmetry and convexity properties of $W_{\mathrm{q}}(\sigma_1, \sigma_2)$ with respect to its arguments lead to

$$W_{\mathrm{q}}(\sigma_1, \sigma_2) = 0 \text{ when } 0 \leq \sigma_1 \leq 1 \text{ and } 0 \leq \sigma_2 \leq 1.$$

Since outside $\Omega_0 = \{(\sigma_1, \sigma_2);\ 0 \leq \sigma_1 \leq 1,\ 0 \leq \sigma_2 \leq 1\}$ the energy cannot decrease, it will attain its minimum with respect to, say, σ_2, when $\sigma_1 > 1$, $\sigma_2 = 0$. Let

$\sigma^0(\sigma_1) = \underset{\sigma_2}{\operatorname{argmin}} \{W_{\mathrm{q}}(\sigma_1, \sigma_2);\ \sigma_1 > 1\},$

$W_{\mathrm{q}}^0(\sigma_1) = W_{\mathrm{q}}(\sigma_1, \sigma^0(\sigma_1)) = \min_{\sigma_2} W_{\mathrm{q}}(\sigma_1, \sigma_2)$ when $\sigma_1 > 1$.

Then it is easy to see (relying on the same argument) that

$W_{\mathrm{q}}(\sigma_1, \sigma_2) = W_{\mathrm{q}}^0(\sigma_1)$ when $\{(\sigma_1, \sigma_2);\ \sigma_1 > 1,\ 0 \leq \sigma_2 \leq \sigma^0(\sigma_1)\} := \Omega_1$,

$W_{\mathrm{q}}(\sigma_1, \sigma_2) = W_{\mathrm{q}}^0(\sigma_2)$ when $\{(\sigma_1, \sigma_2);\ 0 \leq \sigma_1 \leq \sigma^0(\sigma_2),\ \sigma_2 > 1\} := \Omega_2$.

Naturally,

$W_{\mathrm{q}}(\sigma_1, \sigma_2) = W_*(\sigma_1, \sigma_2)$ in $\Omega_3 = \{(\sigma_1, \sigma_2);\ \sigma_1 > \sigma^0(\sigma_2),\ \sigma_2 > \sigma^0(\sigma_1)\}$.

The contribution of Pipkin in this field is significant also in manner that [13] provides also sufficient conditions on first and second derivatives of $W_{\mathrm{q}}(\sigma_1, \sigma_2)$ with respect to its arguments for checking it on quasi-convexity (Legendre-Hadamard conditions) and convexity. An example of explicit relaxation is considered and it turned out that $W_{\mathrm{q}}(\sigma_1, \sigma_2)$ is convex.

Significant difficulties arise when considering energy densities depending on the second gradient of the deformation. A proper definition for isotropy and frame indifference of stored energy density is required since it is absent from existing literature. In [4, 6], for instance, only growth condition on and some continuity condition with respect to the first gradient of the deformation of the stored energy

[3] In view of an extension of polar decomposition theorem proved in [13].

density is required and it is proved that higher order quasi-convexity can be reduced to 1-quasi-convexity. The only notion about frame indifference in higher order theory is postulated in [11]:
$W_*\left(\mathbf{R}_3\nabla \boldsymbol{r},\mathbf{R}_3\nabla^2\boldsymbol{r}\right)=W_*\left(\nabla \boldsymbol{r},\nabla^2\boldsymbol{r}\right)$ for all $\mathbf{R}_3\in \mathrm{SO}(3)$.

5. Some applications

Many designs widely used in engineering and manufacture in natural physical conditions have several preferred states. Such a design is an elastic rectangular membrane which is stretched by factor $\alpha>1$ in both directions. The stretching (or membrane) energy has two local minima- $\nabla \boldsymbol{r}=\mathrm{Id}$ and $\nabla \boldsymbol{r}=\alpha\,\mathrm{Id}$. Then the stored energy function is

$$W_*\left(\nabla \boldsymbol{r}\right)=\min\left\{\left\|\nabla \boldsymbol{r}-\mathrm{Id}\right\|,\left\|\nabla \boldsymbol{r}-\alpha\,\mathrm{Id}\right\|\right\}.$$

Any value of the gradient between Id and $\alpha\,\mathrm{Id}$ corresponds to unstable configuration of the membrane. This region describes wrinkled (or crumpled) state for the membrane [13]. It can be easily resolved relaxing $W_*\left(\nabla \boldsymbol{r}\right)$, i.e. substituting it by its quasi-convex envelope. To do it, one is advised to apply Pipkin`s procedure.

Suppose, for instance, that

$$W_*\left(\sigma_1,\sigma_2\right)=C\left(\mathrm{I}_1-3\right)\left(\mathrm{I}_\alpha-3\right),\;\; \mathrm{I}_\alpha\left(\sigma_1,\sigma_2\right)=\mathrm{I}_1\left(\frac{\sigma_1}{\alpha},\frac{\sigma_2}{\alpha}\right),\;\; \sigma_3=\frac{1}{\sigma_1\sigma_2},$$

in which C is a positive constant, I_1 is the first stress invariant. The multiplier $C\left(\mathrm{I}_1-3\right)$ describes the stored energy density of a unit elastic membrane $\Omega=[0,1]\times[0,1]$.

After similar steps one will have

$$W_{\mathrm{q}}\left(\sigma_1,\sigma_2\right)=C\begin{cases}0, & \left(\sigma_1,\sigma_2\right)\in\Omega_0,\\ \left(\mathrm{I}_1\left(\sigma_1,\sigma^0\left(\sigma_1\right)\right)-3\right)\left[\mathrm{I}_\alpha\left(\sigma_1,\sigma^0\left(\sigma_1\right)\right)-3\right], & \left(\sigma_1,\sigma_2\right)\in\Omega_1,\\ \left(\mathrm{I}_1\left(\sigma^0\left(\sigma_2\right),\sigma_2\right)-3\right)\left[\mathrm{I}_\alpha\left(\sigma^0\left(\sigma_2\right),\sigma_2\right)-3\right], & \left(\sigma_1,\sigma_2\right)\in\Omega_2,\\ \left(\mathrm{I}_1\left(\sigma_1,\sigma_2\right)-3\right)\left(\mathrm{I}_\alpha\left(\sigma_1,\sigma_2\right)-3\right), & \left(\sigma_1,\sigma_2\right)\in\Omega_3,\end{cases}$$

where $\sigma^0\left(\sigma_1\right)$ is the largest positive root of polynomial

$$\chi\left(\sigma_2\right)=2\sigma_1^4\sigma_2^8+2\sigma_1^6\sigma_2^6-\left(1+\alpha^6\right)\sigma_1^4\sigma_2^2-\alpha^6.$$

According to Descartes rule this polynomial has at least one positive root.

There is a very interesting issue in biomechanical applications that needs explanation through relaxation. It is derived recently in [7, 8] that there is a discontinuous transition between two different shapes for each individual cell forming in sequence an epithelium. It brings to existence of two local minima of cell energy functional (see Figure 1).

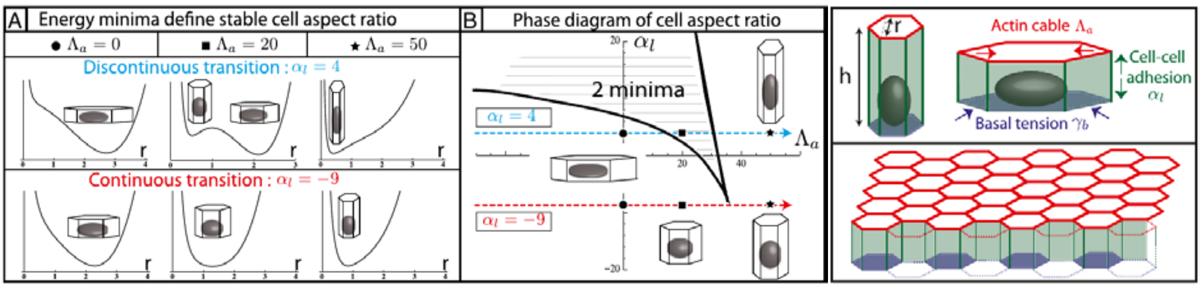


Figure 1. Energy plot and model description of epithelium bending in three dimensions [7]. The energy depends on cell geometry and consists from basal, actin cable and cytoplasm energies.

Better understanding of epithelia bending and justification of unique mechanical equilibrium for fixed configuration of external and internal parameters requires relaxation of its bending energy. The energetic approach seems to be the most reliable tool to describe epithelial morphology in three dimensions.

Acknowledgements. We would like to thank Professor Benedikt Wirth (Institute of Numerical and Applied Mathematics, Muenster, Germany) for constant attention to this work, valuable remarks and effective guidance.

REFERENCES

1. Bredies K., Pock T., Wirth B., A convex, lower semi-continuous approximation of Euler`s elastica energy // SIAM Journal of Mathematical Analysis, 2015, vol. 47, issue 1, pp. 566–613.
2. Bredies K., Pock T., Wirth B., Convex relaxation of a class of vertex penalizing functionals // Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2013, vol. 47, issue 3, pp. 278–302.
3. Brigadnov I. A., Regularization of non-convex strain energy function for non-monotonic stress-strain relation in the Hencky elastic-plastic model // Acta Mechanica, vol. 226, pp. 2681–2691.
4. Cagnetti F. $k-$quasi-convexity reduces to quasi-convexity // Proceedings of Royal Society of Edinburg, 2011, vol. 141A, pp. 673–708.
5. Dacorogna B., Direct methods in the Calculus of Variations. 2^{Nd} ed. NY, Springer, 2008, 622 p.
6. Dal Maso G., Fonseca I., Leoni G. Morini M., Higher-order quasiconvexity reduces to quasiconvexity // Archive for Rational Mechanics and Analysis, 2004, vol. 171, pp. 55-81.
7. Hannezo E., Prost J., Joanny J.-F., Theory of epithelial sheet morphology in three dimensions // PNAS, 2014, vol. 111, issue 1, pp. 27–32.
8. Hannezo E., Prost J., Joanny J.-F., Instabilities of monolayered epithelia: shape and structure of Villi and Crypts // Physical Review Letters, 2011, vol. 107, 078104, 5 pages.
9. Hilgers M. G., Pipkin A. C., Energy-minimizing deformations of elastic sheets with bending stiffness // Journal of Elasticity, 1993, vol. 31, pp. 125–139.
10. Hilgers M. G., Pipkin A. C., Elastic sheets with bending stiffness // Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 1992, vol. 45, part 1, pp. 57–75.
11. Hilgers M. G., Pipkin A. C., The Graves condition for variational problems of arbitrary order // IMA Journal of Applied Mathematics, 1992, vol. 48, pp. 265–269.
12. Kohn R. V., Strang G., Optimal design and relaxation of variational problems. Parts I, II, III // C. P. Applied Mathematics, 1986, vol. 39, issues 1-3, pp. 113–137, 139–182, 353–377.
13. Pipkin A. C., The relaxed energy density for isotropic elastic membranes // IMA Journal of Applied Mathematics, 1986, vol. 36, pp. 85–99.
14. Pipkin A. C., Relaxed energy densities for anisotropic membranes // Proc. IUTAM Symp. Anis., Inhomogeneity and Nonlinearity in Solid Mechanics. Kluwer Academic, 1995, pp. 333–338.
15. Pipkin A. C., Elastic materials with two preferred states // Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 1991, vol. 44, part 1, pp. 1–15.

Information about authors

Khurshudyan Asatur – graduate student at Chair of Mechanics, Yerevan State University, Faculty of Mathematics and Mechanics, 1 Alex Manoogian, 0025 Yerevan, Armenia
Cell: (374 99) 42 07 13
E-mail: khurshudyan@ysu.am

ON SHOCK WAVE AND WEAK WAVE SURFACES IN MICROPOLAR THERMOELASTIC CONTINUUM

Kovalev V.A., Murashkin E.V., Radayev Y.N.

The present study is devoted to problem of propagating shock wave and weak wave surfaces of translational displacements, microrotations and temperature in micropolar (MP) thermoelastic (TE) continuum. An approach attributed to the field-theory is used to investigated the problem. Natural density thermoelastic action and corresponding variational least action principle are formulated for varying domain. A special form of the first variation of the action is employed in order to obtain 4-covariant jump conditions on wave surfaces. Those are given by the the Piola–Kirchhoff stress tensor 4-tensor and energy-momentum tensor.Geometrical and kinematical compatibility conditions due to Hadamard and Thomas are used to study possible propagating surfaces of weak discontinuities in MPTE-I continua. Weak discontinuities are discriminated according to spatial orientations of the discontinuities polarization vectors (DPVs). It is shown that the propagating surfaces of weak discontinuities can exist without weak discontinuities of the temperature field.

1. A notion of micropolar continua takes its origin from the classical E. & F. Cosserat paper [1]. Micropolar continuum theories include not only translational displacements but also additional degrees of freedom. These degrees of freedom are due to changes of a trihedron associated with microvolume. In contrary to conventional elasticity a continuum with microstucture is described by the asymmetric strain and stress tensors known from many previous discussions. Thus the asymmetric elasticity theory is characterized by a comparatively large number of constitutive elastic constants need to be determined from the experimental observations. There are several phenomena (for example, the anomalous piezoelectric effect in quartz, the dispersion of elastic waves, as well as a number of other experimentally observed elastic properties of the pure crystals) being beyond the scope of the conventional thermoelasticity (CTE) and piezoelectroelasticity. That is why a development of complex theories seems to be actual.

Type-I micropolar thermoelastic (MPTE-I) continuum can be described from viewpoint of the Green-Naghdi thermoelasticity (GN-theory). Now such mathematical frameworks of the thermoelastic behavior of solids are rapidly refined [2, 3]. They are based on different modifications of the classical Fourier law of heat conduction. The refinements aim at derivations of *hyperbolic* partial differential equations of coupled thermoelasticity. Those are to simultaneously fulfill the following conditions: 1.) Finiteness of the heat signal propagation velocity, and 2.) Spatial propagation of the thermoelastic waves without attenuation, and 3.) Existence of distortionless wave forms akin to the classical d'Alembert type waves.

In-depth study of plane harmonic type-I thermoelastic waves is given in [4]. It is shown that dispersion equation has exactly two complex wavenumbers for a given frequency. Moreover their real and imaginary parts are strictly positive. In [4] the linear symmetrical thermoelasticity is employed.

2. The field theory formalism involves mathematical description of physical fields by integral action functional.

A general form of action within a variable domain of 4-spacetime with the elementary volume $d^4X = dX^1 dX^2 dX^3 dX^4$ is as follows

$$\mathfrak{I} = \int \mathscr{L}(X^\beta, \varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k) d^4X, \tag{1}$$

wherein φ^k are the physical fields, $\mathscr{L}$ is the Lagrangian density.

The least action principle implies that the actual field is realized in the spacetime in such a way that the action (1) is minimal; i.e., for any admissible variations of the physical fields φ^k and the nonvariable coordinates X^β, one has $\delta\mathfrak{I} = 0$. Then the classical Euler–Lagrange equations hold, $\mathscr{E}_k(\mathscr{L}) = \dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi^k} - \partial_\beta \dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\beta \varphi^k)} = 0.$

In general, a conservation law has the following form

$$\partial_\beta J^\beta = 0,$$

where the vector J^β is the generalized vector 4-current. By finite variation $\delta^\nabla = \delta/\varepsilon$ the 4-current can be obtained as

$$J^{\beta}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_{\beta}\varphi^{k})}\delta^{\nabla}\varphi^{k}+\left(\mathscr{L}\delta^{\beta}_{\alpha}-(\partial_{\alpha}\varphi^{k})\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_{\beta}\varphi^{k})}\right)\delta^{\nabla}X^{\alpha},$$

if the variational symmetries of the action are knownfrom previous considerations.

The variation of action for *finite* variations of spacetime coordinates and physical fields can be represented in the form (see [4])

$$\delta^{\nabla}\mathfrak{I}=\int\partial_{\beta}J^{\beta}d^{4}X. \qquad (2)$$

Assuming the temperature field is continuous and temperature gradient of the first order can be discontinuous by passing through some bilateral surface $\Sigma^{\pm}$ propagating with the normal velocity G and normal unit 4-vector $\mathscr{N}_{\beta}$ in 4-spacetime.

We now replace the integral over 4-volume in equation (2) on sum of surface integrals. Then only two surface integrals over surface Σ are remained when the variations $\delta^{\nabla}\varphi^{k}$ and $\delta^{\nabla}X^{\alpha}$ are fixed on the outer boundary of the field:

$$\delta\mathfrak{I}=\oint_{\Sigma^{+}}J^{\beta}\mathscr{N}_{\beta}d^{3}\tau-\oint_{\Sigma^{-}}J^{\beta}\mathscr{N}_{\beta}d^{3}\tau=\oint_{\Sigma}[J^{\beta}]\mathscr{N}_{\beta}d^{3}\tau. \qquad (3)$$

Hereafter square brackets denote the jumps.

The equation $\delta\mathfrak{I}=0$ is valid for the actual field and a variations of $\delta^{\nabla}\varphi^{k}$ and $\delta^{\nabla}X^{\alpha}$ are continuous in passing through the surface Σ. Therefore following 4-covariant compatibility equations for strong discontinuities is obtained from equation (3):

$$\mathscr{N}_{\beta}\left[-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_{\beta}\varphi^{k})}\right]=0,\qquad \mathscr{N}_{\beta}\left[\mathscr{L}\delta^{\beta}_{\alpha}-(\partial_{\alpha}\varphi^{k})\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_{\beta}\varphi^{k})}\right]=0. \qquad (4)$$

One can then see that the compatibility conditions on strong discontinuities surfaces contain the jumps of the energy-momentum 4-tensor and the Piola-Kirchhoff 4-tensor

$$T^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha}=\mathscr{L}\delta^{\beta}_{\alpha}-(\partial_{\alpha}\varphi^{k})\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_{\beta}\varphi^{k})},\quad S^{\beta\cdot}_{\cdot k}=-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_{\beta}\varphi^{k})}.$$

The compatibility conditions for jumps of the energy-momentum 4-tensor in view of (4) is rewritten in form

$$[T^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha}]\mathscr{N}_{\beta}=[\mathscr{L}]\mathscr{N}_{\alpha}+[\partial_{\alpha}\varphi^{k}S^{\beta\cdot}_{\cdot k}]\mathscr{N}_{\beta}=0, \qquad (5)$$

Relations (5) can be transformed by the compatibility conditions of the strong discontinuities of the Piola-Kirchhoff 4-tensor into

$$[\mathscr{L}]\mathscr{N}_{\alpha}+[\partial_{\alpha}\varphi^{k}]S^{\beta\cdot}_{\cdot k}\mathscr{N}_{\beta}=0.$$

The only significant equation from the compatibility conditions for jumps of the energy-momentum 4-tensor by using the Hadamard-Thomas geometric first order compatibility conditions [6] $[\partial_{\alpha}\varphi^{k}]=\mathscr{N}_{\alpha}\mathscr{F}^{k}$ is obtained

$$[\mathscr{L}]\mathscr{N}_{\alpha}+S^{\beta\cdot}_{\cdot k}\mathscr{N}_{\beta}\mathscr{F}^{k}=0.$$

The three-dimensional form of the compatibility conditions on the surface of strong discontinuity of the field is derived from the resulting 4-covariant form (4):

$$[S^{\beta\cdot}_{\cdot k}]n_{\mu}=0,\qquad [\mathscr{L}]+(-GS^{4\cdot}_{\cdot k}+S^{\mu\cdot}_{\cdot k}n_{\mu})(-G[\partial_{4}\varphi^{k}]+n_{\mu}[\partial_{\mu}\varphi^{k}])=0$$

Hereafter n_{μ} stand for normal unit 3-vector, $\mu=1,2,3$.

The compatibility conditions for strong discontinuities are complemented by well known three-dimensional geometrical and kinematic Hadamard-Thomas compatibility conditions of the first and the second order [6] valid for an arbitrary field φ^{k}. Those are also due to Rankine and Hugoniot [7, 8].

3. The system of coupled partial differential equations of motion and heat conduction for a linear isotropic type-I micropolar thermoelastic continuum in the absence of mass forces, moments, and heat sources can be written as [5]

$$\begin{cases} (\lambda+\mu-\eta)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}+(\mu+\eta)\nabla\cdot\nabla\mathbf{u}+2\eta\nabla\times\boldsymbol{\varphi}-\alpha\nabla\theta-\rho\ddot{\mathbf{u}}=\mathbf{0}, \\ (\beta+\gamma-\varepsilon)\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{\varphi}+(\gamma+\varepsilon)\nabla\cdot\nabla\boldsymbol{\varphi}-4\eta\boldsymbol{\varphi}+2\eta\nabla\times\mathbf{u}-\varsigma\nabla\mathbf{u}-\Im\ddot{\boldsymbol{\varphi}}=\mathbf{0}, \\ \nabla^2\theta-\varsigma\Lambda_*^{-1}\dot{\theta}-\varsigma\Lambda_*^{-1}\nabla\cdot\dot{\mathbf{u}}-\varsigma\Lambda_*^{-1}\nabla\cdot\dot{\boldsymbol{\varphi}}=0. \end{cases} \tag{6}$$

Hereafter $\mathbf{u}$ is the translational displacements; $\boldsymbol{\varphi}$ – the microrotations; θ – the temperature increment over the referential temperature; ρ – the mass density; $\Im$ – the microinertia; ∇ – the three-dimensional Hamiltonian operator (the nabla symbol); dot over a symbol denotes partial differentiation with respect to time at fixed spatial coordinates; $\lambda,\mu,\eta,\beta,\gamma,\varepsilon$ are isothermal constitutive constants of MPTE-I continuum; α,ς are constitutive constants providing coupling of equations of motion and heat conduction; κ is the heat capacity (per unit volume) at constant (zero) strains; Λ_* is the thermal conductivity. Constants α,ς depend not only on the mechanical properties of the continuum, but also depend on the thermal properties.

4. System of partial differential equations (6) includes partial derivative of the order not higher than the second. Let a wave surface Σ of weak discontinuities translational displacements $\mathbf{u}$, microrotations $\boldsymbol{\varphi}$ and temperature θ be propagating with normal velocity G in three-dimensional space.

Kinematical and geometrical compatibility conditions of the second order due to Hadamard and Thomas read

$$\begin{aligned} &[\nabla\otimes\nabla\otimes\mathbf{u}]=\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}\otimes\mathbf{A}, && [\nabla\otimes\nabla\otimes\boldsymbol{\varphi}]=\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}\otimes\mathbf{S}, \\ &[\nabla\otimes\dot{\mathbf{u}}]=-G\mathbf{n}\otimes\mathbf{A}, && [\nabla\otimes\dot{\boldsymbol{\varphi}}]=-G\mathbf{n}\otimes\mathbf{S}, \\ &[\ddot{\mathbf{u}}]=G^2\mathbf{A}, && [\ddot{\boldsymbol{\varphi}}]=G^2\mathbf{S}, \\ &[\nabla\otimes\nabla\theta]=B\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}, \end{aligned} \tag{7}$$

where square brackets denote jump across surface of weak discontinuities. B, $\mathbf{A}$, $\mathbf{S}$ are fields defined on this surface. $\mathbf{A}$ and $\mathbf{S}$ are the DPVs of translational displacements and microrotations respectively. The equalities $B=0$, $\mathbf{A}=\mathbf{0}$, $\mathbf{S}=\mathbf{0}$ cannot be satisfied simultaneously at any point of the surface, if the surface Σ in fact is the surface of weak discontinuities.

Equations (6) and (7) give the following relations between the DPVs:

$$\begin{cases} (\rho G^2-(\mu+\eta))\mathbf{A}-(\lambda+\mu-\eta)\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{A})=\mathbf{0}, \\ (\rho\Im^2-(\gamma+\varepsilon))\mathbf{S}-(\beta+\gamma-\varepsilon)\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{S})=\mathbf{0}, \\ B-\alpha G\Lambda_*^{-1}\mathbf{n}\cdot\mathbf{A}-\varsigma G\Lambda_*^{-1}\mathbf{n}\cdot\mathbf{S}=\mathbf{0}. \end{cases} \tag{8}$$

The DPVs $\mathbf{A}$, $\mathbf{S}$ can be decomposed into sums of projections onto the tangent plane and on the normal direction to the wave surface:

$$\begin{aligned} &\mathbf{A}=A_\perp\boldsymbol{\tau}+A_{||}\mathbf{n}, \quad \mathbf{S}=S_\perp\boldsymbol{\tau}+S_{||}\mathbf{n}, \\ &A_\perp=\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\tau}, \quad A_{||}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}, \quad S_\perp=\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\tau}, \quad S_{||}=\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}, \end{aligned} \tag{9}$$

where $\boldsymbol{\tau}$ is the tangential unit vector and $\mathbf{n}$ is the normal unit one respectively. Taking account of equations (9) the system (8) after rearrangements is transformed into

$$\begin{cases} (\rho G^2-(\mu+\eta))A_\perp=0, \\ (\rho G^2-(\lambda+2\mu))A_{||}=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} (\rho G^2-(\gamma+\varepsilon))S_\perp=0, \\ (\rho G^2-(\beta+2\gamma))S_{||}=0. \end{cases} \tag{10}$$

5. The 16 cases can be discriminated according to (10). These cases are gathered into the following Table. We proceed by considering the discriminated cases separately. For the case (I) $\mathbf{A}=\mathbf{0}$, $\mathbf{S}=\mathbf{0}$

and returning to (8) the scalar equation in (8) is satisfied identically, so the surface Σ is actually not a surface of weak discontinuities. In the case (II), the first equation of system (10) is valid only on a wave surface propagating with normal velocity $G = c_{||} = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$. In the case (III) a weak discontinuity of translational displacements exists only on the surface propagating with the velocity $G = c_{\perp}^{\mu} = \sqrt{(\mu + \eta)/\rho}$. The case (IV) implies existence of a weak discontinuity of microrotations. Then the fourth equation of system (10) is satisfied only on the surface of weak discontinuities propagating with normal velocity $G = c_{\perp}^{\mu\mu} = \sqrt{(\beta + 2\gamma)/\rho}$. In the case (V), the third equation of the system (10) allows to compute the propagation velocity of a weak discontinuities of microrotations $G = c_{\perp}^{\mu\mu} = \sqrt{(\gamma + \varepsilon)/\rho}$.

Table. Discriminated cases for DPVs and scalar intensity B.

No.	Projections of DPV **A**		Projections of DPV **S**		Intensity B
I	$A_{\|} = 0$	$A_{\perp} = 0$	$S_{\|} = 0$	$S_{\perp} = 0$	$B = 0$
II	$A_{\|} = 0$	$A_{\perp} \neq 0$	$S_{\|} = 0$	$S_{\perp} = 0$	$B = 0$
III	$A_{\|} \neq 0$	$A_{\perp} = 0$	$S_{\|} = 0$	$S_{\perp} = 0$	$B = -\frac{\alpha G}{\Lambda_*} A_{\|}$
IV	$A_{\|} = 0$	$A_{\perp} = 0$	$S_{\|} = 0$	$S_{\perp} \neq 0$	$B = 0$
V	$A_{\|} = 0$	$A_{\perp} = 0$	$S_{\|} \neq 0$	$S_{\perp} = 0$	$B = -\frac{\varsigma G}{\Lambda_*} S_{\|}$
VI	$A_{\|} = 0$	$A_{\perp} \neq 0$	$S_{\|} = 0$	$S_{\perp} \neq 0$	$B = -\frac{\alpha G}{\Lambda_*} A_{\|} - \frac{\varsigma G}{\Lambda_*} S_{\|}$
VII	$A_{\|} \neq 0$	$A_{\perp} = 0$	$S_{\|} \neq 0$	$S_{\perp} = 0$	$B = 0$
VIII	$A_{\|} \neq 0$	$A_{\perp} \neq 0$	$S_{\|} = 0$	$S_{\perp} = 0$	$B = -\frac{\alpha G}{\Lambda_*} A_{\|}$
IX	$A_{\|} = 0$	$A_{\perp} = 0$	$S_{\|} \neq 0$	$S_{\perp} \neq 0$	$B = -\frac{\varsigma G}{\Lambda_*} S_{\|}$
X	$A_{\|} \neq 0$	$A_{\perp} = 0$	$S_{\|} = 0$	$S_{\perp} \neq 0$	$B = -\frac{\alpha G}{\Lambda_*} A_{\|}$
XI	$A_{\|} = 0$	$A_{\perp} \neq 0$	$S_{\|} = 0$	$S_{\perp} \neq 0$	$B = 0$
XII	$A_{\|} \neq 0$	$A_{\perp} = 0$	$S_{\|} \neq 0$	$S_{\perp} \neq 0$	$B = -\frac{\alpha G}{\Lambda_*} A_{\|} - \frac{\varsigma G}{\Lambda_*} S_{\|}$
XIII	$A_{\|} = 0$	$A_{\perp} \neq 0$	$S_{\|} \neq 0$	$S_{\perp} \neq 0$	$B = -\frac{\varsigma G}{\Lambda_*} S_{\|}$
XIV	$A_{\|} \neq 0$	$A_{\perp} \neq 0$	$S_{\|} \neq 0$	$S_{\perp} = 0$	$B = -\frac{\alpha G}{\Lambda_*} A_{\|} - \frac{\varsigma G}{\Lambda_*} S_{\|}$
XV	$A_{\|} \neq 0$	$A_{\perp} \neq 0$	$S_{\|} = 0$	$S_{\perp} \neq 0$	$B = -\frac{\alpha G}{\Lambda_*} A_{\|}$
XVI	$A_{\|} \neq 0$	$A_{\perp} \neq 0$	$S_{\|} \neq 0$	$S_{\perp} \neq 0$	$B = -\frac{\alpha G}{\Lambda_*} A_{\|} - \frac{\varsigma G}{\Lambda_*} S_{\|}$

As is it seen from the third equation in (8) a weak discontinuity of temperature is not associated with the tangential projections of polarization vectors of weak discontinuities $A_{\perp}$ and $S_{\perp}$.

In cases (VI), (XII), (XIV), (XVI) the weak discontinuities of temperature can be derived from third equation in (9). In these cases propagating longitudinal waves are possible, if normal projections of the DPVs $\mathbf{A}$ and $\mathbf{S}$ satisfy the equation

$$\alpha/\varsigma = S_{||}/A_{||}$$

and simultaneously $B = 0.$

In other cases propagating wave surfaces of weak discontinuities displacements, microrotations and temperature do not exist if the constitutive characteristics of the MPTE-I continuum do not satisfy the limitations as determined by (10).

The present work was partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 13-01-00139 “Hyperbolic thermal waves in solids with microstructure”) and the Ministry of Education and Science of Russia Federation grant given to Samara State Technical University (No. 16.2518.2014/K).

REFERENCES

1. Cosserat E. et F. Theorie des corps deformables. Paris: Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909. 226 pp.
2. Green A.E., Naghdi P.M. On undamped heat waves in an elastic solid // J. Therm. Stress. 1992. Vol. 15. 253-264 pp.
3. Green A.E., Naghdi P.M. Thermoelasticity without energy dissipation // J. Elasticity. 1993. Vol. 31. 189-208 pp.
4. Kovalev V.A., Radayev Y.N. Wave problems of field theory and thermomechanics. Saratov: Saratov University Press, 2010. 328 pp.
5. Nowacki W. Theory of asymmetric elasticity. Oxford: Pergamon Press, 1986. 384 pp.Lamb H. On waves in an elastic plate. Proceedings of the Royal Society, SA, vol. 93, 1917.
6. Thomas T.Y. Plastic Flow and Fracture in Solids. N.Y.: Academic Press, 1961. 271pp.
7. Rankine W.J.M. On the thermodynamic theory of waves of finite longitudinal disturbance // Proc. of the Royal Society of London. London: The Royal Society, 1870. Vol. 18, P.80-83.
8. Hugoniot P.H. Sur la propagation du mouvement dans les corps et specialement dans les gaz parfaits // J. Ecole Polytechnique, 1887. Vol. CLVII. P.3-98.

Information about authors

Vladimir Kovalev – Professor, Moscow City Government University of Management, 107045, Moscow, Sretenka Str., 28, Russia
E-mail: vlad_koval@mail.ru
Evgenii Murashkin – Senior Researcher, A. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, 119526, Moscow, prosp. Vernadskogo 101, block 1, Russia
E-mail: murashkin@ipmnet.ru
Yuri Radayev – Leading Researcher, A. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, 119526, Moscow, prosp. Vernadskogo 101, block 1, Russia
E-mail: radayev@ipmnet.ru

COATING IN HEAVILY LOADED LINE EHL CONTACTS.
PART 1. DRY CONTACTS

Kudish I.I., Volkov S.S., Vasiliev A.S., Aizikovich S.M.

Contacts of indentors with functionally graded elastic solids may produce pressures significantly different from the results obtained for homogeneous elastic materials (Hertzian results). It is even more so for heavily loaded line elastohydrodynamically lubricated (EHL) contacts. The goal of the paper is to indicate two distinct ways the functionally graded elastic materials may alter the classic results for the heavily loaded line EHL contacts. Namely, besides pressure the other two main characteristics which are influenced by the non-uniformity of the elastic properties of the contact materials are lubrication film thickness and frictional stress/friction force produced by lubricant flow. The approach used for analyzing the influence of functionally graded elastic materials on parameters of heavily loaded line EHL contacts is based on the asymptotic and kernel approximation methods earlier developed by authors [1]-[3]. More specifically, it is based on the analysis of contact problems for dry contacts of functionally graded elastic solids and the lubrication mechanisms in the inlet and exit zones as well as in the central region of heavily lubricated contacts. Dry contacts with free and fixed boundaries involving coatings which are "softer" or "harder" than the substrate are considered. The pressure distributions, contact size as well as the asymptotic behavior of the pressure in the vicinity of the contact boundary are determined.

Analysis Summary

A contact problem for a parabolic indenter pressed against a half-plane made of an elastic functionally graded material can be reduced to the following dimensionless equations (here scaling is done based on the elastic parameters of the material at the surface of the half-plane)

$$x_c^2+\frac{2}{\pi}\int\limits_{-a_c}^{a_c} p_{0c}(t)k(t-x_c)dt=C \tag{1.1}$$

$$\int\limits_{-a_c}^{a_c} p_{0c}(t)dt=\frac{\pi}{2},\ p_{0c}(\pm a_c)=0 \tag{1.2}$$

where x_c is the coordinate along the contact, a_c is the contact boundary, $p_{0c}(x_c)$ is the contact pressure, C is a contact, and $k(x)$ is the kernel of the integral equation. Using the binary integral equations this problem can be transformed into

$$\begin{aligned}&\int\limits_{-\infty}^{\infty} P_0(\alpha)\frac{1}{|\alpha|}L(\frac{\lambda_c\alpha}{a_c})e^{-i\alpha x}d\alpha=\frac{\pi}{2}(C-a_c x^2), && |x|\le 1;\\ &\int\limits_{-\infty}^{\infty} P_0(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha=0, && |x|>1\end{aligned} \tag{1.3}$$

where $P_0(\alpha)$ is the Fourier image of contact pressure $p_{0c}(x), a_c$ is the contact half-width, and C is a constant.
In general, the kernel transform $L(\alpha)$ depends on the properties of the nonhomogeneous materials. In [3]-[6] it was shown that $L(\alpha)$ possesses the following properties

$$\begin{aligned}&L(\alpha)=\bar{A}+\bar{B}|\alpha|+\bar{C}\alpha^2+O(|\alpha|^3), && \alpha\to 0,\\ &L(\alpha)=1+\bar{D}|\alpha|^{-1}+\bar{E}\alpha^{-2}+O(|\alpha|^{-3}), && \alpha\to\infty\end{aligned} \tag{1.4}$$

where $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C},$ and $\bar{D}$ are certain complex constants which values depend on the material properties.

Substituting the approximation of the transform $L(\alpha)$ from (1.4) in equations (1.3) and using the operational analysis and inverting the Fourier transform one can obtain the expression for the contact pressure in the form

$$p_{0c}(x)=\frac{D}{\pi\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\sum_{k=1}^{N}C_k I_1(A_k a_c\lambda_c^{-1})+a_c L_N^{-1}(0)\frac{1-2x^2}{2\sqrt{1-x^2}}-$$
$$-\frac{a_c}{2\lambda_c}\sum_{k=1}^{N}C_k A_k\int_x^1\frac{tI_0(A_k a_c\lambda_c^{-1})\cosh(A_k a_c\lambda_c^{-1}(t-x))-I_1(A_k a_c\lambda_c^{-1})\sinh(A_k a_c\lambda_c^{-1}(t-x))}{\sqrt{1-t^2}}dt, \quad (1.5)$$

where constants C_k are determined from the system of linear algebraic equations

$$\frac{\lambda_c}{a_c}\sum_{i=1}^{N}C_i\frac{A_i I_0(A_i a_c\lambda_c^{-1})K_1(B_k a_c\lambda_c^{-1})+B_k I_1(A_i a_c\lambda_c^{-1})K_0(B_k a_c\lambda_c^{-1})}{A_i^2-B_i^2}=$$
$$=\frac{2\lambda_c D K_0(B_k a_c\lambda_c^{-1})}{\pi B_k a_c}-\frac{\lambda_c L_N^{-1}(0)}{B_k}\{\frac{2\lambda_c K_1(B_k a_c\lambda_c^{-1})}{B_k a_c}+K_0(B_k a_c\lambda_c^{-1})\},\qquad k=1,\ldots,N, \quad (1.6)$$

where $K_0(x)$ and $K_1(x)$ are the modified Bessel functions of the second kind [7].

Using the relationship $a_c=a_{0c}+\epsilon_q\beta_{1c}+o(\epsilon_q^2),\ \beta_{1c}=O(1),\ \epsilon_q\ll 1$, in the case when a_c is fixed and $\epsilon_q\ll 1$ we can introduce a local variable $s_c=\frac{x_c-a_c}{\epsilon_q}$, where $x_c=a_c x$. Then the asymptotic behavior of pressure $p_{0c}(x_c)$ from (1.5) can be represented in the form

$$p_{0c}(x_c)=\epsilon_q^{1/2}\sqrt{a_{0c}}\{N_{0c}\sqrt{-2s_c}+\frac{N_{1c}}{\sqrt{-2s_c}}\}+o(\epsilon_q^{1/2}), \quad (1.7)$$

where constants N_{0c} and N_{1c} are given by formulas

$$N_{0c}=\lim_{\epsilon_q\to 0}\{L_N^{-1}(0)-\frac{1}{2\lambda_c}\sum_{k=1}^{N}C_k(a_c)A_k I_0(A_k a_c\lambda_c^{-1})\},$$
$$N_{1c}=\lim_{\epsilon_q\to 0}\epsilon_q^{-1}\frac{1}{2}\{\frac{1}{a_c}-a_c L_N^{-1}(0)+\sum_{k=1}^{N}C_k(a_c)I_1(A_k a_c\lambda_c^{-1})\}, \quad (1.8)$$
$$a_c=a_{0c}+\epsilon_q\beta_{1c}+o(\epsilon_q^2)$$

If one takes into account the fact that at the contact boundary $p_{0c}(1)=0$ then the formula for the contact pressure takes the form

$$p_{0c}(x)=\left\{\frac{1}{a_{0c}}+\sum_{k=1}^{N}C_k(a_{0c})I_1(A_k a_{0c}\lambda_c^{-1})\right\}\sqrt{1-x^2}-\frac{a_{0c}}{2\lambda_c}\sum_{k=1}^{N}C_k(a_{0c})\times$$
$$\times A_k\int_x^1\frac{tI_0(A_k a_{0c}\lambda_c^{-1})\cosh(A_k a_{0c}\lambda_c^{-1}(t-x))-I_1(A_k a_{0c}\lambda_c^{-1})\sinh(A_k a_{0c}\lambda_c^{-1}(t-x))}{\sqrt{1-t^2}}dt, \quad (1.9)$$

where the set of constants C_k is obtained from the following system of linear algebraic equations

$$\sum_{i=1}^{N} C_i(a_{0c})\{\frac{A_i I_0(A_i a_{0c}\lambda_c^{-1})K_1(B_k a_{0c}\lambda_c^{-1}) + B_k I_1(A_i a_{0c}\lambda_c^{-1})K_0(B_k a_{0c}\lambda_c^{-1})}{A_i^2 - B_i^2} +$$

$$+\frac{1}{B_k} I_1(A_i a_{0c}\lambda_c^{-1})[\frac{2K_1(B_k a_{0c}\lambda_c^{-1})}{B_k a_{0c}\lambda_c^{-1}} + K_0(B_k a_{0c}\lambda_c^{-1})]\} = -\frac{2K_1(B_k a_{0c}\lambda_c^{-1})}{B_k^2 a_{0c}^2 \lambda_c^{-1}}, \quad (1.10)$$

$$k = 1, \ldots, N.$$

At the same time the contact boundary is determined by solving the equation

$$a_{0c} = L_N(0)\{\frac{1}{a_{0c}} + \sum_{k=1}^{N} C_k(a_{0c}) I_1(A_k a_{0c}\lambda_c^{-1})\}. \quad (1.11)$$

The pressure asymptotic (1.7) at the contact boundary is used for further analysis of the lubrication problem for heavily loaded contacts of elastic functionally graded materials.

Acknowledgement

This work was partially supported by the Ministry of Education and Science of Russia and Russian Foundation for Basic Research (Grants 13-08-01435-a, 14-07-00705-a, 14-08-91166 GFENa, 15-07-05820-a). Also, S.S. Volkov was supported by scholarship of the President of Russia no. SP-3708.2015.1.

REFERENCES

1. I.I. Kudish. 2013. Elastohydrodynamic Lubrication for Line and Point Contacts. Asymptotic and Numerical Approaches. Chapman& Hall /CRC Press.
2. I.I. Kudish and M.J. Covitch. 2010. Modeling and Analytical Methods in Tribology. Chapman& Hall/CRC Press.
3. S.M. Aizikovich, V.M. Alexandrov, A.V. Belokon', L.I.Krenev, and I.S. Trubchik. 2006. Contact Problems of Elasticity for Functionally Graded Materials. Moscow, Fizmatlit.
4. S.M. Aizikovich and V.M. Alexandrov. 1982. Properties of Compliance Functions for Layered and Continuously Nonuniform Half-space. Soviet Phys.-Dokl. Vol. 27(9), pp. 765-767.
5. S.M. Aizikovich. 1982. Asymptotic Solutions of Contact Problems of Elasticity Theory for Media Inhomogeneous with Depth. J. Appl. Mech. Vol. 46, pp. 116-124.
6. S.M. Aizikovich, V.M. Alexandrov, J.J. Kalker, L.I. Krenev, and I.S. Trubchik. 2002. Analytical solution of the spherical indentation problem for a half-space with gradients with the depth elastic properties. Int. J. Solids Struct. Vol. 39, pp. 2745 — 2772.
7. G.N. Watson. 1922. A Treatise on the Theory of Bessel Functions. Cambridge University Press.

Information about authors

Kudish Ilya I. - Professor of Mathematics, ASME Fellow, Kettering University, Department of Mathematics, Flint, MI, 48504, USA, (810)603-2779, **E-mail:** ikudish@kettering.edu

Volkov Sergey S., Vasiliev Andrey S. - research fellows, Laboratory of functionally graded and composite materials, Research and Education Center "Materials", Don State Technical University, Rostov-on-Don 344000, Russia, +79508476939, +79054559237:

fenix_rsu@mail.ru, andre.vasiliev@gmail.com

Aizikovich, Sergey M. -Head of Laboratory of functionally graded and composite materials, Research and Education Center "Materials", Don State Technical University, Rostov-on-Don 344000, Russia, +79289341398} **E-mail:** saizikovich@gmail.com

COATING IN HEAVILY LOADED LINE EHL CONTACTS.
PART 2. LUBRICATED CONTACTS

Kudish I.I., Volkov S.S., Vasiliev A.S., Aizikovich S.M.

Contacts with functionally graded elastic solids may produce pressures significantly different from the results obtained for homogeneous elastic materials. It is even more so for heavily loaded line elastohydrodynamically lubricated (EHL) contacts. The goal of the paper is to indicate two distinct ways the functionally graded materials may alter the classic results for the heavily loaded line EHL contacts. Namely, besides pressure the other two main characteristics which are influenced by the non-uniformity of the elastic properties of the contact materials are lubrication film thickness and friction force produced by lubricant flow. The approach used for analyzing the influence of functionally graded elastic materials on parameters of heavily loaded line EHL contacts is based on the asymptotic and kernel approximation methods earlier developed by the authors of [1]-[3]. More specifically, it is based on the analysis of contact problems for dry contacts of functionally graded elastic solids and the lubrication mechanisms in the inlet and exit zones as well as in the central region of heavily lubricated contacts. The effects of functionally graded elastic materials on the lubrication film thickness and friction force are analyzed.

Analysis Summary

Consider a steady plane isothermal EHL problem for a heavily loaded contact of two moving with velocities u_1 and u_2 infinite elastic cylinders with smooth surfaces and radii are R_1 and R_2. The cylinders are made of non-homogeneous versus depth elastic materials with elastic modules and Poisson's ratios $E_1(z), E_2(z)$ and $\nu_1(z)$, and $\nu_2(z)$, respectively. The lubricant is an incompressible Newtonian fluid with the viscosity dependent on pressure $\mu = \mu_0 \exp(\alpha_p p)$, where μ_0 is the ambient lubricant viscosity, α_p is the pressure viscosity coefficient, p is the lubricant pressure. The cylinders are loaded with normal force P per unit length. Making classic assumptions and using the dimensionless variables based on the coating elastic parameters and dimensionless parameters

$$V_c = \frac{24\mu_a (u_1 + u_2) R'^2}{a_{Hc}^3 p_{Hc}}, Q_c = \alpha_p p_{Hc}, H_{0c} = \frac{2R' h_e}{a_{Hc}^2}, \tag{1.1}$$

the EHL problem equations are reduced to (primes at dimensionless variables are omitted)

$$\frac{d}{dx_c}\left[\frac{H_{0c}^2}{V_c}\frac{h^3}{\mu}\frac{dp_c}{dx_c} - h\right] = 0, \qquad \mu = exp(Q_c p_c), \tag{1.2}$$

$$p_c(a) = p_c(c) = \frac{dp_c(c_c)}{dx_c} = 0, \qquad \int\limits_{a_c}^{c_c} p_c(t)dt = \frac{\pi}{2}, \tag{1.3}$$

$$H_{0c}(h-1) = x_c^2 - c_c^2 + \frac{2}{\pi}\int\limits_{a_c}^{c_c} p_c(t)[k(t - x_c) - k(t - c_c)]dt, \tag{1.4}$$

where p_{Hc} and a_{Hc} are the maximum Hertzian pressure and the Hertzian contact semi-width, respectively. Here the value of $E'(H)$ is the effective elastic modules of the coating and H is the coating thickness. The expression for the kernel $k(t - x_c)$ is the same as in Part 1 of the paper [4].

In most cases it is reasonable to say that the kernel $k(x)$ depends on some kind of a positive parameter λ_c which characterizes the specifics of the geometry of the contact materials inhomogeneity, for example, in a case of a coating of the thickness H attached to a substrate material $\lambda_c = \frac{H}{a_{Hc}}$. We will assume that $k(x)=K\left(\frac{x}{\lambda_c}\right)$, where $K(x)$ is a given function. To proceed further we will consider only materials for which

$$K(x)=\ln\frac{1}{|x|}+d_0+K_0(x),\ \lim_{x\to 0}K_0(x)=0, \tag{1.5}$$

where $K_0(x)$ is a continuous function of x and d_0 is an infinite constant.

The EHL problem is considered for the case of heavily loaded lubricated contacts. Specifically, we study the problem for the cases when the problem small parameter $\omega=V\ll 1$ or $\omega=Q^{-1}\ll 1$. We follow the asymptotic procedure developed for precritical lubrication regimes in [1,2] and based on the method of matched asymptotic expansions.

Let us assume that for $\omega\ll 1$ the coordinate of the inlet point a_c is given by

$$a_c=-a_{0c}+\epsilon_q\alpha_{p1},\ \alpha_{p1}=O(1),\ \omega\ll 1, \tag{1.6}$$

where a_{0c} is the half-width of a dry contact of two elastic solids made of non-homogeneous materials, ϵ_q is the characteristic size of the inlet and exit zones, and α_{p1} is a given non-positive constant. Then using the asymptotic behavior of pressure $p_{oc}(x_c)$ and using the principle of matched asymptotic expansions [1,2] in a dry contact [4] the representations of pressure $p_c(x_c)$ and the exit coordinate c_c may be found in the form

$$p_c(x_c)=\epsilon_q^{1/2}q_p(r_p)+o(\epsilon_q^{1/2}),\ q_p(r_p)=O(1)\ r_p=O(1),\ \omega\ll 1, \tag{1.7}$$

$$p_c(x_c)=\epsilon_q^{1/2}g_p(s_p)+o(\epsilon_q^{1/2}),\ g_p(s_p)=O(1)\ s_p=O(1),\ \omega\ll 1, \tag{1.8}$$

$$c_c=a_{0c}+\epsilon_q\beta_{p1}+o(\epsilon_q),\ \beta_{p1}=O(1),\ \omega\ll 1, \tag{1.9}$$

where $q_p(r_p)$ and $g_p(s_p)$ are the major terms of the pressure $p_c(x_c)$ asymptotic expansions in the inlet and exit zones and β_{p1} is an unknown constant and it is subject to calculation during the solution process.

Estimating the terms in the left- and right-hand sides of the Reynolds equation (1.2) using the asymptotic representations of the solution we obtain an asymptotic formula for the film thickness H_{0c} as follows [1,2]

$$H_{0c}=A_p(V_c\epsilon_q^2)^{1/3}+\ldots,\ A_p=O(1),\ \omega\ll 1, \tag{1.10}$$

where A_p is an unknown nonnegative constant independent from ω and ϵ_q. The value of A_p depends on α_{p1}, $N_{0c}\sqrt{a_{0c}}$, and $Q_{0c}=Q_c\epsilon_q^{1/2}$. The value of the coefficient A_p is determined by the inlet zone. After that it is possible to derive the asymptotically valid equations of the EHL problem in the inlet and exit zones. These asymptotic equation closely resemble the ones for the case of homogeneous materials[1,2]. Moreover, using the substitutions

$$r = \frac{r_p}{r_0}, \quad s = \frac{s_p}{r_0}, \quad \alpha_1 = \frac{\alpha_{p1}}{r_0}, \quad \beta_1 = \frac{\beta_{p1}}{r_0}, \quad q(r) = \frac{q_p(r_p)}{q_0}, \quad g(s) = \frac{g_p(s_p)}{q_0},$$
$$q_a(r) = \frac{q_{pa}(r_p)}{q_0}, \quad g_a(s) = \frac{g_{pa}(s_p)}{q_0}, \quad A = A_p N_a^{4/5}, \quad r_0 = N_a^{-6/5}, \quad q_0 = N_a^{2/5}, \tag{1.11}$$

$$N_a = N_{0c}\sqrt{a_{0c}}, \tag{1.12}$$

to reduce the asymptotic equations derived in the inlet and exit zones of the EHL contact of nonhomogeneous elastic materials to their equivalents for homogeneous materials.

The effectiveness/benefit of material coating or usage of functionally graded elastic materials can be considered from different points of view. For example, coating may extend fatigue life or increase wear resistance of lubricated solids, increase lubrication film thickness, decrease frictional stress and friction force in a lubricated contact, etc. In fact, all these benefits are interconnected. Namely, an increase in lubrication film thickness usually decreases frictional stress which, in turn, increases fatigue life [2]. A similar relationships exist for material wear resistance.

As we saw above, in the inlet and exit zones the lubrication conditions are significantly controlled by the behavior of the contact pressure distribution in a corresponding dry (not lubricated) contact near its boundaries which is signified by the parameter N_a. It means that the lubrication film thickness besides lubrication and operational parameters (such as lubricant viscosity, contact surface velocities, etc.) is also controlled by the distribution of the "dry" contact pressure $p_{0c}(x_c)$. In addition to that, in heavily loaded lubricated contacts the frictional stress and friction force can usually be approximated by just the sliding components of these characteristics which mainly depend on the behavior of the pressure in the central part of the contact. In a heavily loaded lubricated contact this pressure is well approximated by the pressure in a corresponding dry contact with free boundaries while the gap is very close to the exit film thickness. Therefore, to a great extent, the lubrication film thickness and frictional characteristics of heavily loaded lubricated contacts are controlled by the behavior of the contact pressure in the corresponding dry contact of coated/functionally graded materials.

Let R_{inhom} be the ratio of the lubrication film thickness obtained for a coated and a corresponding non-coated homogeneous materials (i.e. material coinciding with the substrate material) calculated for the same values of the inlet coordinate α_1 and pressure viscosity coefficient Q_s. It can be shown that for starved lubrication regimes and constant viscosity

$$R_{inhom} = \beta^{2/3} N_a^{-4/5}. \tag{1.13}$$

This ratio is completely determined by the parameters of the "dry" contact and it is independent from the lubricant properties and a particular regime of lubrication.

The second criterion/requirement calculated for the same value of inlet coordinate α_1 which is necessary to impose on an EHL contact of coated solids in order to reduce energy losses in a lubricated contact and increase fatigue life of a lubricated contact [2]. Using the ratio of the friction forces F_S for coated and homogeneous materials for constant viscosity one obtain

$$K_{inhom} \approx \frac{\beta^{-1/2} a_{0s}}{R_{inhom}}, \tag{1.14}$$

where a_{0s} is the half-width of the "dry" contact of coated solids scaled based on the parameters of the substrate.

These two criteria R_{inhom} and K_{inhom} can be used for optimization coating and lubrication properties of a contact.

Acknowledgement

This work was partially supported by the Ministry of Education and Science of Russia and Russian Foundation for Basic Research (Grants 13-08-01435-a, 13-07-00952-a, 14-07-00705-a, 14-08-91166 GFENa, 15-07-05820-a). Also, S.S. Volkov was supported by scholarship of the President of Russia no. SP-3708.2015.1.

REFERENCES

1. I.I. Kudish. 2013. Elastohydrodynamic Lubrication for Line and Point Contacts. Asymptotic and Numerical Approaches. Chapman& Hall /CRC Press.

2. I.I. Kudish and M.J. Covitch. 2010. Modeling and Analytical Methods in Tribology. Chapman& Hall/CRC Press.

3. S.M. Aizikovich, V.M. Alexandrov, A.V. Belokon', L.I.Krenev, and I.S. Trubchik. 2006. Contact Problems of Elasticity for Functionally Graded Materials. Moscow, Fizmatlit.

4. I.I. Kudish, S.S. Volkov, A.S. Vasiliev, and S.M. Aizikovich. 2015. Some Criteria for Coating Effectiveness in Heavily Loaded Line EHL Contacts. Part 1. Dry Contacts. ASME Applied Mechanics, V. , No. , pp.-.

Information about authors

Kudish Ilya I. – Professor of Mathematics, ASME Fellow, Kettering University, Department of Mathematics, Flint, MI, 48504, USA, (810)603-2779
E-mail: ikudish@kettering.edu

Volkov Sergey S., Vasiliev Andrey S. – research fellows, Laboratory of functionally graded and composite materials, Research and Education Center "Materials", Don State Technical University, Rostov-on-Don 344000, Russia, +79508476939, +79054559237
E-mail: fenix_rsu@mail.ru, andre.vasiliev@gmail.com

Aizikovich, Sergey M. – Head of Laboratory of functionally graded and composite materials, Research and Education Center "Materials", Don State Technical University, Rostov-on-Don 344000, Russia, +79289341398}
E-mail: saizikovich@gmail.com

BEHAVOUR OF THE ELASTIC ACCRETING ROD SUBJECTED TO FREE LONGITUDINAL VIBRATIONS

Lekalakala M.L.G., Shatalov M., Feddotov I.

The longitudinally vibrating rod considered in this article is assumed to be accreting in cross-sectional area, while the length is kept constant. The problem arising and the dynamics of such a rod are described and investigated using the Rayleigh-Love model. In this model, the stated boundary-value problem is solved using the Garlekin-Kantorovich method. A coupled system of differential equations is derived and then solved numerically using Mathematica 7.0. The qualitative properties of the solutions are shown graphically. It is shown in these graphs that there is a marked decrease in the amplitude of vibration at any given mode. This decrease in amplitude is proportional to time. It is seen that such a vibration starts at high frequency levels and decreases as time progresses. This behaviour is exhibited at the subsequent modes of vibration.

1. Introduction

The theory of growing structures is a new and fast developing branch of analytical mechanics that is based on the theory of partial differential and integral equations [1, 2012]. The study of a longitudinally vibrating rod that is growing in one or several dimensions is one example. This article considers the vibrating rod that is growing in cross-sectional area, proportional to time, while the length remains constant. It is assumed that the cross-sectional area of the rod is a function of time. The rod is configured such that it is fixed at one end and free at the other. The problem arising and the dynamics of this rod are then described and investigated using the Rayleigh-Love model. A comprehensive review of this model and other models is given by Shatalov et al [3, 2012].

The Rayleigh-Love model is more advanced than the classical model. In this theory the inertia effects of the longitudinally vibrating rod are taken into consideration. These lateral inertia effects are important in the case of non-slender cross-sections of multi-stepped vibrating structures. The theory is described by the governing equation (1), containing a mixed $x-t$ derivative of the fourth order:

$$\left(\rho A(t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\rho \nu^2 I_p \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2}\right)-E\,A(t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 \qquad (1)$$

where ν is the Poisson ratio, $I_p(t)$ a function of time, is the polar moment of inertia, $A(t)$ is the cross-sectional area, and E is the Young's modulus.

2. Equations of motion for the Rayleigh-Love model

The longitudinally vibrating rod considered is of unit length. It is assumed that it is fixed at the left hand end and free at the right hand end as shown in the figure below.

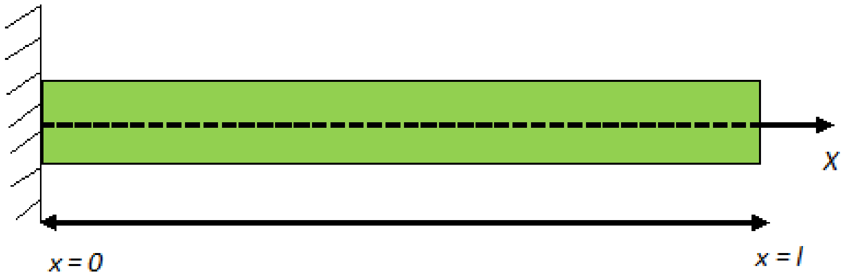


Figure A : Fixed-Free longitudinally vibrating rod

It is further assumed that the rod is elastic and isotropic, and it is governed by the following differential equation:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho A(t)\frac{\partial u}{\partial t}-\rho v^2\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}\right)-E\,A(t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0. \tag{2}$$

Consistent with the configuration of the rod, the corresponding boundary conditions are

$$x=0 \quad u(t,0)=0$$

$$x=1 \quad u(t,1)=0. \tag{3}$$

It is further assumed that the longitudinally vibrating rod is accreting in cross-sectional area, proportional to time, such that

$A(t)=\pi r^2(t)$ and

$$r(t)=\eta t^{\frac{\alpha}{2}}, \tag{4}$$

with η an arbitrary small constant and α an integer or half-integer constant defining a general case of growth of the rod. The moment of inertia is also assumed a function of time t, defined as

$$I_p(t)=\frac{\pi r^4(t)}{2}. \tag{5}$$

Applying the chain rule of differentiation to equation (2), and substituting equations (4) and (5), it is then obtained

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\alpha}{t}\frac{\partial u}{\partial t}-\left(v^2\eta^2 t^{\alpha-1}\right)\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}-\left(\frac{v^2\eta^2 t^{\alpha}}{2}\right)\frac{\partial^4 u}{\partial t^2\partial x^2}-c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \tag{6}$$

where $c=\sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$ is the speed of the longitudinal wave of propagation. The solution of equation (6) is then sought for different values of $\alpha.$ However, in this article the solution is sought only for $\alpha=1.$

Introducing a deliberate change of variables $(t,x)\rightarrow(\tau,y),$ for convenience, equation (6) is re-written as

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tau^2}+\frac{1}{\tau}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau}-\left(\frac{v^2\eta^2\tau}{2}\right)\frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial \tau^2\partial y^2}-\left(v^2\eta^2\right)\frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial \tau\partial y^2}-\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2}=0, \tag{7}$$

with the corresponding boundary conditions in new variables as

$$y=0:\quad \tilde{u}(\tau,0)=0$$

$$y=1:\ \tilde{u}(\tau,1)=0. \tag{8}$$

The numerical solution of equation (7) is obtained by using the Garlekin-Kantorovich method [5, 2007]. In this method a sequence of linearly independent functions of the form

$$\tilde{u} = \sin\left[\frac{(2k+1)\pi}{2} y\right], \text{ for } k = 1, 2, 3, \ldots, N, \tag{9}$$

called the basis function, is chosen such that it satisfies the boundary conditions. The following linear combination of functions is then chosen as an approximate solution of the partial differential equation in (7):

$$\tilde{u} = \tilde{u}(\tau, y) = \sum_{m=1}^{N} C_m(\tau) \sin\left[\frac{(2m-1)\pi}{2} y\right], \tag{10}$$

with the unknown coefficients $C_m(\tau)$, to be determined in the process of solving this boundary-value problem. In order to determine these coefficients, another sequence of linearly independent functions of the form

$$\tilde{u} = 2\sin\left[\frac{(2n-1)\pi}{2} y\right], \text{ for } n = 1, 2, 3, \ldots, N, \tag{11}$$

is considered. Equation (10) is then substituted into equation (7), the result of which is multiplied by equation (11). This result is then integrated over the region $V = \{0 \le y \le 1\}$. The integrals are then each equated to zero, (for exact solutions, these integrals are equal to zero). The following system of coupled differential equations is derived using Mathematica 7.0 :

$$\begin{gathered}
\frac{(8+\omega\tau)}{8}\frac{d^2C_1(\tau)}{d\tau^2} + \frac{(4+\omega\tau)}{4\tau}\frac{dC_1(\tau)}{d\tau} + \frac{c^2\pi^2}{4}C_1(\tau) = 0 \\
\frac{(8+9\omega\tau)}{8}\frac{d^2C_2(\tau)}{d\tau^2} + \frac{(4+9\omega\tau)}{4\tau}\frac{dC_2(\tau)}{d\tau} + \frac{9c^2\pi^2}{4}C_2(\tau) = 0 \\
\frac{(8+25\omega\tau)}{8}\frac{d^2C_3(\tau)}{d\tau^2} + \frac{(4+25\omega\tau)}{4\tau}\frac{dC_3(\tau)}{d\tau} + \frac{25c^2\pi^2}{4}C_3(\tau) = 0 \\
\frac{(8+49\omega\tau)}{8}\frac{d^2C_4(\tau)}{d\tau^2} + \frac{(4+49\omega\tau)}{4\tau}\frac{dC_4(\tau)}{d\tau} + \frac{25c^2\pi^2}{4}C_4(\tau) = 0
\end{gathered} \tag{12}$$

where $\omega = \pi^2 \nu^2 \eta^2$.

3. Numerical Analysis

The system of equations (12) is solved numerically using the computer software Mathematica 7.0. The initial conditions corresponding to the deformation of the rod on the first form of the corresponding non-growing rod of unit length, are introduced, and thus giving the solutions as in the figures below:

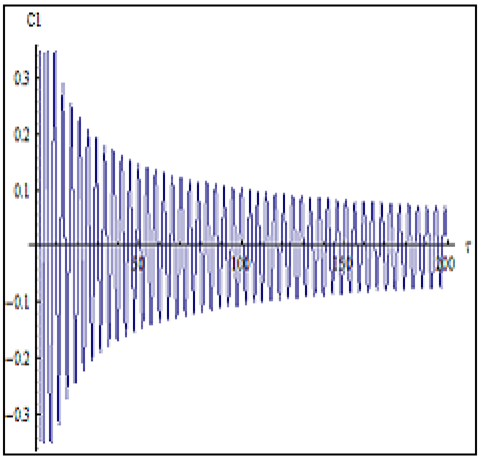


Fig.1 First Mode of Vibration

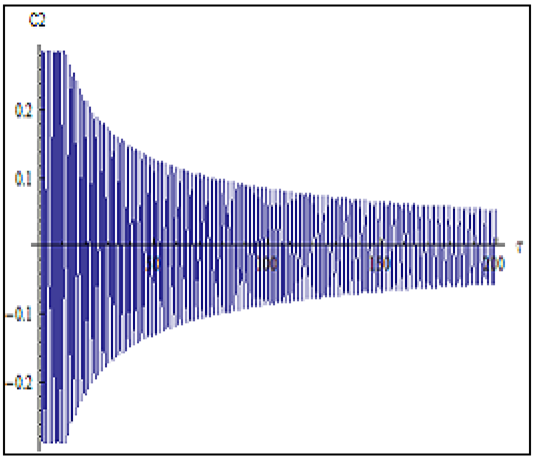


Fig.2 Second Mode of Vibration

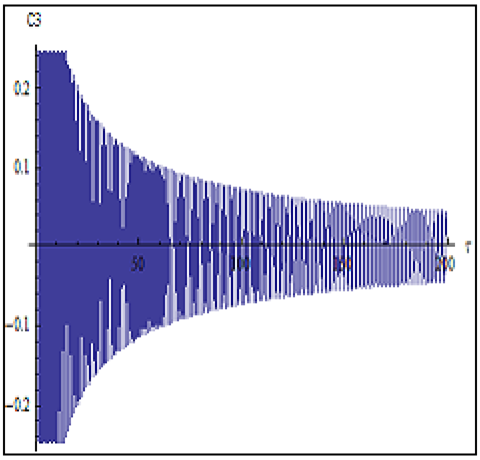


Fig.3 Third Mode of Vibration

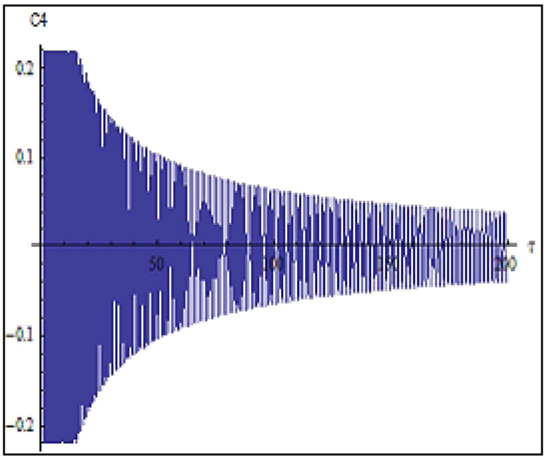


Fig.4 Fourth Mode of Vibration

It can be observed from these graphs that there is a marked decrease in amplitude of vibration at any given mode of vibration. This decrease in amplitude is further observed moving from one mode to the other. It is further observed that the vibrations at given modes of vibration start at a high frequency level and decreases with time. At the subsequent modes of vibration these frequency levels are observed to have increased.

4. Conclusion

In this article the problem of the longitudinally vibrating rod that is accreting in cross-sectional area was considered. The growth in cross-sectional area was such that it was proportional to time. The differential equation describing the dynamics of this rod was solved using the Garlekin-Kantorovich method. A system of coupled differential equations was derived. This system was truncated at $N = 4$, for convenience. This system of differential equations was then solved numerically, the solutions of which were given graphically. The graphs of these solutions demonstrated a decrease in the amplitude of vibration as time progresses at any given mode. It was demonstrated again by these graphs that the oscillations start at a high frequency, and fades out as time progresses. This behaviour is a trend that could be observed at subsequent modes of vibration. These results as obtained from the Rayleigh-Love model exhibit qualitative similarities as those obtained for the classical model, particularly for $\alpha = 1$ [6, 2015].

REFERENCES

1. Shatalov,M., Manzhirov, A., & Fedotov, I. On the behaviour of longitudinally vibrating accreting rods. SACA 2012.
2. Rao, J.S. Advanced Theory of Vibrations (Nonlinear Vibration and One Dimensional Structures). Wiley Eastern Limited. Daryagan, New Delhi, 1992.
3. Shatalov, M., Marais, J., Fedotov, I., & Tenkam, M.D. Longitudinal vibration of isotropic rods : From Classical to Modern theories. In Tech., Shangai, China, 2012.
4. Fedotov, I., Marais, J., Shatalov, M., & Tenkam, M.D. Hyperbolic models arising in the theory of longitudinal vibration of elastic bars. The Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications. Volume 7, Issue 2, Article 14, pp. 1 18. 2011.
5. Polyanin, A.D. and Manzhirov, A.V. HandBook of Mathematics for Engineers and Scientists. Chapman & Hall/CRC. Boca Baton. Florida, USA, 2002.
6. Lekalakala M.L.G., Shatalov, M. & Fedotov, I. The Behavioural Pattern of the Longitudinally Vibrating Rod that is Accreting in Cross-Sectional Area. IUTAM. Moscow, Russia, 2015.

Information about the authors

Lekalakala M.L.G – postgraduate student, Tshwane University of Technology, Pretoria, RSA

E-mail: glen@vut.ac.za

Shatalov M. and Fedotov I. – Supervisors and Professors in the Department of Mathematics and Statistics, Tshwane University of Technolgy.

E-mail: ShatalovM@tut.ac.za

E-mail: fedotovi@tut.ac.za

AVERAGED EQUATIONS IN A HELE-SHAW CELL:
STRATIFICATION ACCOUNTED MODEL

Logvinov O.A.

An averaged model of viscous fluid displacement from a Hele-Shaw cell with transversal stratification of a flow between cell's plates accounted is proposed.

Introduction. Integration of the three-dimensional Navier-Stokes equations for incompressible viscous fluid over a thin direction perpendicular to the Hele-Shaw plates leads to a depth-averaged model of a flow in a cell [1]. In the absence of viscous and inertial terms one of the most fruitful particular cases of this model – classical Darcy law arises. The law describes two-dimensional potential flow with a pressure representing a potential. Neglecting only inertial terms, one can obtain Brinkman's model, which was highly demanded recently [2].

The averaged model derivation is based on the assumption that every vertical section of the cell is completely filled with a single fluid, which velocity profile between the plates is parabolic. Such assumption does not occur in the displacement problem: displacing fluid bursts through the displaced one, leaving a thin layer of the late on the cell's plates. So called three-layer, stratified flow is generated. Without gravity force the flow can be regarded symmetrical (**fig. 1**).

$\alpha = \alpha(x, y, t)$ – displacing fluid «1» volumetric content in displaced fluid «2». The case $\alpha = const$ is considered in the Appendix to the work [3].

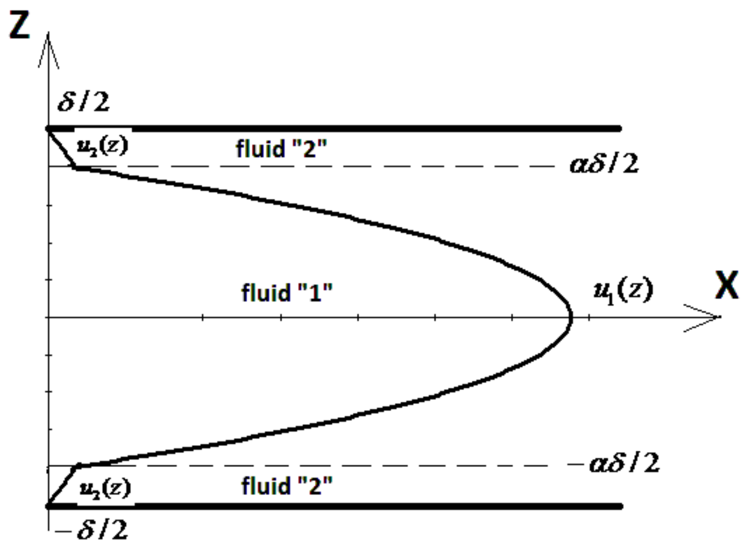


Fig. 1. Three-layer, stratified flow between Hele-Shaw cell's plates.

Stratification accounted model. Introduce averaged parameters of a flow and deviations from averaged values. It is sufficient to consider $z > 0$ region by virtue of symmetry:

$$\langle f_i \rangle (x, y, t) = \frac{1}{|\Omega_i|} \cdot \int_{\Omega_i} f_i(x, y, z, t)\, dz, \quad f_i' = f_i - \langle f_i \rangle,$$

$$i = 1:\ \Omega_1 = [0; \alpha\delta/2], \quad |\Omega_1| = \alpha\delta/2,$$

$$i = 2:\ \Omega_2 = [\alpha\delta/2; \delta/2], \quad |\Omega_2| = (1-\alpha)\delta/2,$$

$f_i = \{u_i, \mathrm{v}_i, w_i, p_i\}$ – velocity components and pressure, δ – a gap between the cell's plates.

Averaging three dimensional Navier-Stokes equations for each of the fluids gives birth to the following terms I–X:

$$I:\ \frac{1}{|\Omega_i|}\cdot\int_{\Omega_i}\frac{\partial f_i}{\partial x}dz=\frac{\partial\langle f_i\rangle}{\partial x}-\frac{1}{|\Omega_i|}\cdot\frac{\partial|\Omega_i|}{\partial x}\cdot f_i\Big|_{\alpha\delta/2},\quad f_i=\{u_i,\,p_i\}$$

$$II:\ \frac{1}{|\Omega_i|}\cdot\int_{\Omega_i}\frac{\partial f_i}{\partial y}dz=\frac{\partial\langle f_i\rangle}{\partial y}-\frac{1}{|\Omega_i|}\cdot\frac{\partial|\Omega_i|}{\partial y}\cdot f_i\Big|_{\alpha\delta/2},\quad f_i=\{\mathrm{v}_i,\,p_i\}$$

$$III:\ \frac{1}{|\Omega_i|}\cdot\int_{\Omega_i}\frac{\partial w_i}{\partial z}dz=\frac{1}{|\Omega_i|}\cdot\frac{d_i|\Omega_i|}{dt}$$

$$IV:\ \frac{1}{|\Omega_i|}\cdot\int_{\Omega_i}\frac{\partial f_i}{\partial t}dz=\frac{\partial\langle f_i\rangle}{\partial t}-\frac{1}{|\Omega_i|}\cdot\frac{\partial|\Omega_i|}{\partial t}\cdot f_i\Big|_{\alpha\delta/2},\quad f_i=\{u_i,\,\mathrm{v}_i\}$$

$$V:\ \frac{1}{|\Omega_i|}\cdot\int_{\Omega_i}\frac{\partial(f_i\cdot g_i)}{\partial x}dz=\frac{\partial(\langle f_i\rangle\cdot\langle g_i\rangle)}{\partial x}-\frac{1}{|\Omega_i|}\cdot\frac{\partial|\Omega_i|}{\partial x}\cdot\langle f_i\rangle\cdot g_i'\Big|_{\alpha\delta/2}-\frac{1}{|\Omega_i|}\cdot\frac{\partial|\Omega_i|}{\partial x}\cdot\langle g_i\rangle\cdot f_i\Big|_{\alpha\delta/2}+$$
$$+\frac{\partial\langle f_i'\cdot g'\rangle}{\partial x}+\frac{1}{|\Omega_i|}\cdot\frac{\partial|\Omega_i|}{\partial x}\cdot\langle f_i'\cdot g'\rangle-\frac{1}{|\Omega_i|}\cdot\frac{\partial|\Omega_i|}{\partial x}\cdot(f_i'\cdot g_i')\Big|_{\alpha\delta/2},\quad f_i=\{u_i,\mathrm{v}_i\},\quad g_i=\{u_i\}$$

$$VI:\ \frac{1}{|\Omega_i|}\cdot\int_{\Omega_i}\frac{\partial(f_i\cdot g_i)}{\partial y}dz=\frac{\partial(\langle f_i\rangle\cdot\langle g_i\rangle)}{\partial y}-\frac{1}{|\Omega_i|}\cdot\frac{\partial|\Omega_i|}{\partial y}\cdot\langle f_i\rangle\cdot g_i'\Big|_{\alpha\delta/2}-\frac{1}{|\Omega_i|}\cdot\frac{\partial|\Omega_i|}{\partial y}\cdot\langle g_i\rangle\cdot f_i\Big|_{\alpha\delta/2}+$$
$$+\frac{\partial\langle f_i'\cdot g_i'\rangle}{\partial y}+\frac{1}{|\Omega_i|}\cdot\frac{\partial|\Omega_i|}{\partial y}\cdot\langle f_i'\cdot g_i'\rangle-\frac{1}{|\Omega_i|}\cdot\frac{\partial|\Omega_i|}{\partial y}\cdot(f_i'\cdot g_i')\Big|_{\alpha\delta/2},\quad f_i=\{u_i,\mathrm{v}_i\},\quad g_i=\{\mathrm{v}_i\}$$

$$VII:\ \frac{1}{|\Omega_i|}\cdot\int_{\Omega_i}\frac{\partial(f_i\cdot w_i)}{\partial z}dz=\frac{1}{|\Omega_i|}\cdot\langle f_i\rangle\cdot\frac{d_i|\Omega_i|}{dt}+\frac{1}{|\Omega_i|}\cdot\frac{d_i|\Omega_i|}{dt}\cdot f_i\Big|_{\alpha\delta/2},\quad f_i=\{u_i,\mathrm{v}_i\}$$

$$VIII:\ \frac{1}{|\Omega_i|}\cdot\int_{\Omega_i}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2}dz=\frac{\partial^2\langle f_i\rangle}{\partial x^2}-\frac{2}{|\Omega_i|}\cdot\frac{\partial|\Omega_i|}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_i'}{\partial x}\Big|_{\alpha\delta/2}-\frac{1}{|\Omega_i|}\cdot\frac{\partial^2|\Omega_i|}{\partial x^2}\cdot f_i\Big|_{\alpha\delta/2},\quad f_i=\{u_i,\mathrm{v}_i\}$$

$$IX:\ \frac{1}{|\Omega_i|}\cdot\int_{\Omega_i}\frac{\partial^2 f_i}{\partial y^2}dz=\frac{\partial^2\langle f_i\rangle}{\partial y^2}-\frac{2}{|\Omega_i|}\cdot\frac{\partial|\Omega_i|}{\partial y}\cdot\frac{\partial f_i'}{\partial y}\Big|_{\alpha\delta/2}-\frac{1}{|\Omega_i|}\cdot\frac{\partial^2|\Omega_i|}{\partial y^2}\cdot f_i\Big|_{\alpha\delta/2},\quad f_i=\{u_i,\mathrm{v}_i\}$$

$$X:\ \frac{1}{|\Omega_i|}\cdot\int_{\Omega_i}\frac{\partial^2 f_i}{\partial z^2}dz=\frac{1}{|\Omega_i|}\cdot\left[\frac{\partial f_i'}{\partial z}\right]_{\Omega_i},\quad f_i=\{u_i,\mathrm{v}_i\}$$

Thus, averaged over the Hele-Shaw cell’s gap equations (1)–(6) (Reynolds type equations) have the form:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\frac{\partial(\alpha\cdot\langle u_1\rangle)}{\partial x}+\frac{\partial(\alpha\cdot\langle \mathrm{v}_1\rangle)}{\partial y}=0 \tag{1}$$

$$\rho_1\left(\frac{\partial\langle u_1\rangle}{\partial t}+\langle u_1\rangle\frac{\partial\langle u_1\rangle}{\partial x}+\langle \mathrm{v}_1\rangle\frac{\partial\langle u_1\rangle}{\partial y}+\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\partial\left(\alpha\cdot\langle u_1'^2\rangle\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\alpha\cdot\langle u_1'\mathrm{v}_1'\rangle\right)}{\partial y}\right)\right)=$$
$$=-\frac{\partial\langle p_1\rangle}{\partial x}+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial x}\cdot p_1'\big|_{\alpha\delta/2}+\mu_1\left(\frac{\partial^2\langle u_1\rangle}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\langle u_1\rangle}{\partial y^2}\right)+\frac{2}{\alpha\delta}\cdot\mu_1\frac{\partial u_1'}{\partial z}\bigg|_{\alpha\delta/2}-$$
$$-\mu_1\frac{1}{\alpha}\left(2\frac{\partial\alpha}{\partial x}\cdot\frac{\partial u_1'}{\partial x}\bigg|_{\alpha\delta/2}+\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}\cdot u_1'\big|_{\alpha\delta/2}+2\frac{\partial\alpha}{\partial y}\cdot\frac{\partial u_1'}{\partial y}\bigg|_{\alpha\delta/2}+\frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2}\cdot u_1'\big|_{\alpha\delta/2}\right)$$

(2)

$$\rho_1\left(\frac{\partial\langle \mathrm{v}_1\rangle}{\partial t}+\langle u_1\rangle\frac{\partial\langle \mathrm{v}_1\rangle}{\partial x}+\langle \mathrm{v}_1\rangle\frac{\partial\langle \mathrm{v}_1\rangle}{\partial y}+\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\partial\left(\alpha\cdot\langle u_1'\mathrm{v}'\rangle\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\alpha\cdot\langle \mathrm{v}_1'^2\rangle\right)}{\partial y}\right)\right)=$$
$$=-\frac{\partial\langle p_1\rangle}{\partial y}+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial y}\cdot p_1'\big|_{\alpha\delta/2}+\mu_1\left(\frac{\partial^2\langle \mathrm{v}_1\rangle}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\langle \mathrm{v}_1\rangle}{\partial y^2}\right)+\frac{2}{\alpha\delta}\cdot\mu_1\frac{\partial \mathrm{v}_1'}{\partial z}\bigg|_{\alpha\delta/2}-$$
$$-\mu_1\frac{1}{\alpha}\left(2\frac{\partial\alpha}{\partial x}\cdot\frac{\partial \mathrm{v}_1'}{\partial x}\bigg|_{\alpha\delta/2}+\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}\cdot \mathrm{v}_1'\big|_{\alpha\delta/2}+2\frac{\partial\alpha}{\partial y}\cdot\frac{\partial \mathrm{v}_1'}{\partial y}\bigg|_{\alpha\delta/2}+\frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2}\cdot \mathrm{v}_1'\big|_{\alpha\delta/2}\right).$$

(3)

$$\frac{\partial(1-\alpha)}{\partial t}+\frac{\partial\left((1-\alpha)\cdot\langle u_2\rangle\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left((1-\alpha)\cdot\langle \mathrm{v}_2\rangle\right)}{\partial y}=0$$

(4)

$$\rho_2\left(\frac{\partial\langle u_2\rangle}{\partial t}+\langle u_2\rangle\frac{\partial\langle u_2\rangle}{\partial x}+\langle \mathrm{v}_2\rangle\frac{\partial\langle u_2\rangle}{\partial y}+\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{\partial\left((1-\alpha)\cdot\langle u_2'^2\rangle\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left((1-\alpha)\cdot\langle u_2'\mathrm{v}_2'\rangle\right)}{\partial y}\right)\right)=$$
$$=-\frac{\partial\langle p_2\rangle}{\partial x}+\frac{1}{1-\alpha}\frac{\partial(1-\alpha)}{\partial x}\cdot p_2'\big|_{\alpha\delta/2}+\mu_2\left(\frac{\partial^2\langle u_2\rangle}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\langle u_2\rangle}{\partial y^2}\right)+\frac{2}{(1-\alpha)\delta}\mu_2\left(\frac{\partial u_2'}{\partial z}\bigg|_{\delta/2}-\frac{\partial u_2'}{\partial z}\bigg|_{\alpha\delta/2}\right)-$$
$$-\mu_2\frac{1}{1-\alpha}\left(2\cdot\frac{\partial(1-\alpha)}{\partial x}\cdot\frac{\partial u_2'}{\partial x}\bigg|_{\alpha\delta/2}+\frac{\partial^2(1-\alpha)}{\partial x^2}\cdot u_2'\big|_{\alpha\delta/2}+2\cdot\frac{\partial(1-\alpha)}{\partial y}\cdot\frac{\partial u_2'}{\partial y}\bigg|_{\alpha\delta/2}+\frac{\partial^2(1-\alpha)}{\partial y^2}\cdot u_2'\big|_{\alpha\delta/2}\right)$$

(5)

$$\rho_2\left(\frac{\partial\langle \mathrm{v}_2\rangle}{\partial t}+\langle u_2\rangle\frac{\partial\langle \mathrm{v}_2\rangle}{\partial x}+\langle \mathrm{v}_2\rangle\frac{\partial\langle \mathrm{v}_2\rangle}{\partial y}+\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{\partial\left((1-\alpha)\cdot\langle u_2'\mathrm{v}_2'\rangle\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left((1-\alpha)\cdot\langle \mathrm{v}_2'^2\rangle\right)}{\partial y}\right)\right)=$$
$$=-\frac{\partial\langle p_2\rangle}{\partial y}+\frac{1}{1-\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial y}\cdot p_2'\big|_{\alpha\delta/2}+\mu_2\left(\frac{\partial^2\langle \mathrm{v}_2\rangle}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\langle \mathrm{v}_2\rangle}{\partial y^2}\right)+\frac{2}{(1-\alpha)\delta}\mu_2\left(\frac{\partial \mathrm{v}_2'}{\partial z}\bigg|_{\delta/2}-\frac{\partial \mathrm{v}_2'}{\partial z}\bigg|_{\alpha\delta/2}\right)-$$
$$-\mu_2\frac{1}{1-\alpha}\left(2\cdot\frac{\partial(1-\alpha)}{\partial x}\cdot\frac{\partial \mathrm{v}_2'}{\partial x}\bigg|_{\alpha\delta/2}+\frac{\partial^2(1-\alpha)}{\partial x^2}\cdot \mathrm{v}_2'\big|_{\alpha\delta/2}+2\cdot\frac{\partial(1-\alpha)}{\partial y}\cdot\frac{\partial \mathrm{v}_2'}{\partial y}\bigg|_{\alpha\delta/2}+\frac{\partial^2(1-\alpha)}{\partial y^2}\cdot \mathrm{v}_2'\big|_{\alpha\delta/2}\right)$$

(6)

The system (1)–(6) is unclosed. The terms with deviations are calculated by determining velocity profiles between the cell's plates. One should consider two identical problems in XOZ (**fig. 1**) and YOZ planes for this purpose:

$$u_1=\frac{12M\left(z^2/\delta^2\right)-3-3\alpha^2\left(M-1\right)}{\alpha^2\left(3-2M\right)-3}\left\langle u_1\right\rangle,\quad u_2=\frac{12\left(z^2/\delta^2\right)-3}{\alpha^2+\alpha-2}\left\langle u_2\right\rangle,\quad M=\frac{\mu_2}{\mu_1}$$

$$u_1'=\frac{12M\left(z^2/\delta^2\right)-M\alpha^2}{\left(3-2M\right)\alpha^2-3}\left\langle u_1\right\rangle,\quad u_2'=\frac{12\left(z^2/\delta^2\right)-\left(\alpha^2+\alpha+1\right)}{\alpha^2+\alpha-2}\left\langle u_2\right\rangle$$

As a result, a «closed» system (7)–(12) of three-layer, stratified flow between Hele-Shaw cell's plates, averaged over its height, is obtained. The system includes a free parameter $\alpha=\alpha\left(x,y,t\right)$ – displacing fluid «1» volumetric content in displaced fluid «2». Under derivation of equations (8)–(9) the equation (7) was used, under derivation of (11)–(12) – equation (10):

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\frac{\partial\left(\alpha\cdot\left\langle u_1\right\rangle\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\alpha\cdot\left\langle \mathrm{v}_1\right\rangle\right)}{\partial y}=0 \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
&\rho_1\left(\frac{\partial\left\langle u_1\right\rangle}{\partial t}-\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial t}\Lambda_1\left\langle u_1\right\rangle+\left\langle u_1\right\rangle\frac{\partial\left(\left\langle u_1\right\rangle\left(1+\Lambda_1\right)\right)}{\partial x}+\left\langle \mathrm{v}_1\right\rangle\frac{\partial\left(\left\langle u_1\right\rangle\left(1+\Lambda_1\right)\right)}{\partial y}\right)=\\
&=-\frac{\partial\left\langle p_1\right\rangle}{\partial x}+\frac{24\mu_1 M}{\delta^2\left(\alpha^2\left(3-2M\right)-3\right)}\left\langle u_1\right\rangle+\mu_1\left(\frac{\partial^2\left\langle u_1\right\rangle}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\left\langle u_1\right\rangle}{\partial y^2}\right)-\\
&-\frac{2\mu_1 M\alpha}{\alpha^2\left(3-2M\right)-3}\left(2\frac{\partial\alpha}{\partial x}\cdot\frac{\partial\left\langle u_1\right\rangle}{\partial x}+\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}-\frac{6}{\alpha}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2\cdot\frac{\alpha^2\left(3-2M\right)-1}{\alpha^2\left(3-2M\right)-3}\right)\cdot\left\langle u_1\right\rangle\right)-\\
&-\frac{2\mu_1 M\alpha}{\alpha^2\left(3-2M\right)-3}\left(2\frac{\partial\alpha}{\partial y}\cdot\frac{\partial\left\langle u_1\right\rangle}{\partial y}+\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2}-\frac{6}{\alpha}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)^2\cdot\frac{\alpha^2\left(3-2M\right)-1}{\alpha^2\left(3-2M\right)-3}\right)\cdot\left\langle u_1\right\rangle\right)
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
&\rho_1\left(\frac{\partial\left\langle \mathrm{v}_1\right\rangle}{\partial t}-\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial t}\Lambda_1\left\langle \mathrm{v}_1\right\rangle+\left\langle u_1\right\rangle\frac{\partial\left(\left\langle \mathrm{v}_1\right\rangle\left(1+\Lambda_1\right)\right)}{\partial x}+\left\langle \mathrm{v}_1\right\rangle\frac{\partial\left(\left\langle \mathrm{v}_1\right\rangle\left(1+\Lambda_1\right)\right)}{\partial y}\right)=\\
&=-\frac{\partial\left\langle p_1\right\rangle}{\partial y}+\frac{24\mu_1 M}{\delta^2\left(\alpha^2\left(3-2M\right)-3\right)}\left\langle \mathrm{v}_1\right\rangle+\mu_1\left(\frac{\partial^2\left\langle \mathrm{v}_1\right\rangle}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\left\langle \mathrm{v}_1\right\rangle}{\partial y^2}\right)-\\
&-\frac{2\mu_1 M\alpha}{\alpha^2\left(3-2M\right)-3}\left(2\frac{\partial\alpha}{\partial x}\cdot\frac{\partial\left\langle \mathrm{v}_1\right\rangle}{\partial x}+\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}-\frac{6}{\alpha}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2\cdot\frac{\alpha^2\left(3-2M\right)-1}{\alpha^2\left(3-2M\right)-3}\right)\cdot\left\langle \mathrm{v}_1\right\rangle\right)-\\
&-\frac{2\mu_1 M\alpha}{\alpha^2\left(3-2M\right)-3}\left(2\frac{\partial\alpha}{\partial y}\cdot\frac{\partial\left\langle \mathrm{v}_1\right\rangle}{\partial y}+\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2}-\frac{6}{\alpha}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)^2\cdot\frac{\alpha^2\left(3-2M\right)-1}{\alpha^2\left(3-2M\right)-3}\right)\cdot\left\langle \mathrm{v}_1\right\rangle\right)
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\frac{\partial\left(1-\alpha\right)}{\partial t}+\frac{\partial\left(\left(1-\alpha\right)\cdot\left\langle u_2\right\rangle\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\left(1-\alpha\right)\cdot\left\langle \mathrm{v}_2\right\rangle\right)}{\partial y}=0 \tag{10}$$

$$\rho_2\left(\frac{\partial\langle u_2\rangle}{\partial t}-\frac{1}{1-\alpha}\frac{\partial(1-\alpha)}{\partial t}\Lambda_2\langle u_2\rangle+\langle u_2\rangle\frac{\partial(\langle u_2\rangle(1+\Lambda_2))}{\partial x}+\langle v_2\rangle\frac{\partial(\langle u_2\rangle(1+\Lambda_2))}{\partial y}\right)=$$

$$=-\frac{\partial\langle p_2\rangle}{\partial x}+\frac{24\mu_2}{\delta^2(\alpha^2+\alpha-2)}\langle u_2\rangle+\mu_2\left(\frac{\partial^2\langle u_2\rangle}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\langle u_2\rangle}{\partial y^2}\right)+$$

$$+\mu_2\frac{2\alpha+1}{\alpha^2+\alpha-2}\left(2\cdot\frac{\partial(1-\alpha)}{\partial x}\cdot\frac{\partial\langle u_2\rangle}{\partial x}+\left(\frac{\partial^2(1-\alpha)}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial(1-\alpha)}{\partial x}\right)^2\cdot\frac{6(\alpha+1)}{\alpha^2+\alpha-2}\right)\cdot\langle u_2\rangle\right)+$$

$$+\mu_2\frac{2\alpha+1}{\alpha^2+\alpha-2}\left(2\cdot\frac{\partial(1-\alpha)}{\partial y}\cdot\frac{\partial\langle u_2\rangle}{\partial y}+\left(\frac{\partial^2(1-\alpha)}{\partial y^2}+\left(\frac{\partial(1-\alpha)}{\partial y}\right)^2\cdot\frac{6(\alpha+1)}{\alpha^2+\alpha-2}\right)\cdot\langle u_2\rangle\right)$$

(11)

$$\rho_2\left(\frac{\partial\langle v_2\rangle}{\partial t}-\frac{1}{1-\alpha}\frac{\partial(1-\alpha)}{\partial t}\Lambda_2\langle v_2\rangle+\langle u_2\rangle\frac{\partial(\langle v_2\rangle(1+\Lambda_2))}{\partial x}+\langle v_2\rangle\frac{\partial(\langle v_2\rangle(1+\Lambda_2))}{\partial y}\right)=$$

$$=-\frac{\partial\langle p_2\rangle}{\partial y}+\frac{24\mu_2}{\delta^2(\alpha^2+\alpha-2)}\langle v_2\rangle+\mu_2\left(\frac{\partial^2\langle v_2\rangle}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\langle v_2\rangle}{\partial y^2}\right)+$$

$$+\mu_2\frac{2\alpha+1}{\alpha^2+\alpha-2}\left(2\cdot\frac{\partial(1-\alpha)}{\partial x}\cdot\frac{\partial\langle v_2\rangle}{\partial x}+\left(\frac{\partial^2(1-\alpha)}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial(1-\alpha)}{\partial x}\right)^2\cdot\frac{6(\alpha+1)}{\alpha^2+\alpha-2}\right)\cdot\langle v_2\rangle\right)+$$

$$+\mu_2\frac{2\alpha+1}{\alpha^2+\alpha-2}\left(2\cdot\frac{\partial(1-\alpha)}{\partial y}\cdot\frac{\partial\langle v_2\rangle}{\partial y}+\left(\frac{\partial^2(1-\alpha)}{\partial y^2}+\left(\frac{\partial(1-\alpha)}{\partial y}\right)^2\cdot\frac{6(\alpha+1)}{\alpha^2+\alpha-2}\right)\cdot\langle v_2\rangle\right)$$

(12)

$$\Lambda_1(\alpha)=\frac{4\alpha^4M^2}{5\left(\alpha^2(3-2M)-3\right)^2},\quad \Lambda_2(\alpha)=\frac{4\alpha^2+7\alpha+4}{5(\alpha+2)^2}$$

Conclusions. An averaged model of viscous fluid displacement from a Hele-Shaw cell with transversal stratification includes a free parameter: displacing fluid volumetric content. Generalized Darcy equations are the particular case of this model in the absence of inertial and viscous terms. These equations can be used for the viscous finger's width evaluation.

REFERENCES

1. Logvinov O. A., Ivashnyov O. E., Smirnov N. N. Evaluation of viscous fingers width in Hele-Shaw flaws // Acta Astr. 2010. **67.** 53–59
2. Nagel M., Gallaire F. A new prediction of wavelength in radial viscous fingering involving normal and tangential stresses // Phys. Fluids 2013. **25**. 124107.
3. Saffman P. G., Taylor G. The penetration of a fluid into a porous medium or a Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid // Proc. Roy. Soc. London. 1958. **A245.** 312–329.

The Author

Logvinov Oleg (Anatolievich) – senior research fellow, gas and wave dynamics department of Lomonosov State University (MSU). Mobile: 8(916)5036050
E-mail: oleglogvinov@mail.ru

Waves in an FGPM Layered Structure
Manukyan G.A., Manukyan Z.K., Manukyan V.K.

An analytical approach is used to investigate the existence and propagation behavior of surface electro-elastic Love waves in an ideally layered structure consisting of a functionally graded piezoelectric substrate and a dielectric layer. The piezoelectric substrate is polarized in the direction perpendicular to the wave propagation plane and its material parameters change continuously along the thickness direction. The dispersion equations for the existence of surface Love waves with respect to phase velocity are obtained for electrically open and shorted cases, respectively. A detailed investigation of the effects of material gradient on dispersion curve, phase velocity, group velocity, and electromechanical coupling factor is carried out. Numerical results show that material gradient significantly affects the fundamental mode of Love waves but has only negligible effects on the high order modes. Large electromechanical coupling factors could be achieved by an appropriate adjustment of gradient coefficients, which is of practical interest for designing acoustic wave devices.

Transverse surface waves are attractive for designing signal-processing devices due to their high performance and simple particle motion. To achieve high performance, many such devices adopt layered piezoelectric structures consisting of a piezoelectric layer and an elastic substrate or an elastic layer and a piezoelectric substrate. Much research work has been done on the propagation of transverse surface waves in such layered structures [1-9]. Much earlier, Curtis and Redwood [1] investigated the existence of transverse surface waves in a piezoelectric substrate carrying a finite-thickness metal layer. Subsequently,. Due to the intrinsic brittle property of ceramic materials and the thermal mismatch between layer and substrate, however, initial stresses appear inevitable during the manufacture process and have significant effects on the propagation behavior of transverse surface waves [1-10].

A concept that may be used to reduce the magnitude of residual and thermal stresses would be the introduction of functionally graded materials (FGMs). An FGM is a special kind of composite material made up of two or more basic materials, and the composition would vary continuously. It is well known that FGMs have the potential to reduce the stress concentration near the material edges or ends and increase the material fracture toughness. The idea of FGM has been applied successfully to piezoelectric materials to be functionally graded piezoelectric materials (FGPMs), and also can be adopted in layered structures to form many kinds of graded layered structures.

Consider a structure consisting of a homogeneous dielectric layer with uniform thickness of h bonded perfectly to a functionally graded piezoelectric substrate. The coordinate system $o-xyz$ is chosen in such a way that the z-axis is directed along the piezoelectric poling direction perpendicular to the x - y plane, the plane $x=0$ occupies the boundary between the layer and the substrate, and the x-axis points down into the substrate, as shown in Figure 1. The domain $x=-h$ is assumed to be a vacuum or air space, and the surface $x=-h$ is free of external forces (mechanically traction free). The material parameters in the substrate change gradually along the x-axis direction.

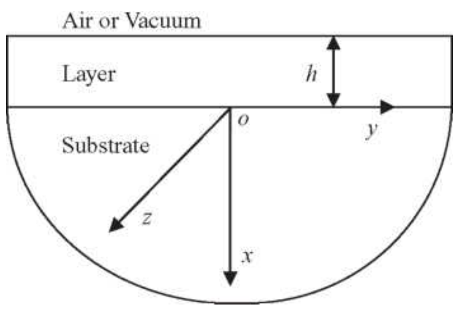


Fig.1

Here, Love wave propagation in such layered structure will be taken into account. It is assumed without loss of generality that the wave propagation is in the positive direction of the y-axis, such that the mechanical displacement components and electrical potential function representing the motion can be written in the following form:

$$\varphi=\varphi(x,y,t), -\infty \le x \le +\infty$$

$$u \equiv v \equiv 0,\ \ w=(x,y,t),\ -h \le x \le +\infty \tag{1}$$

For the dielectric layer in the region $-h < x < 0$, let w_1 and φ_1 denote the mechanical displacement and electrical potential function. If the layer is anisotropic, we assume it to be the same anisotropy as the substrate and with axis of polarization parallel to that of the substrate. Otherwise, the layer is assumed to be isotropic. Then we have the following governing field equations

$$\begin{cases} \nabla^2 w_1 = \dfrac{1}{c_1^2}\dfrac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \varphi_1 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

and the nonzero stress and electric displacement components

$$\begin{cases} \sigma_{yz}^{(1)} = \mu \dfrac{\partial w_1}{\partial y}, \quad \sigma_{zx}^{(1)} = \mu \dfrac{\partial w_1}{\partial x} \\ D_x^{(1)} = -\varepsilon \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x},\ D_y^{(1)} = -\varepsilon \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y} \end{cases} \tag{3}$$

where $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ and is c_1 the shear wave velocity, and μ and ε being the shear modulus and the dielectric constant in the layer.

It is well known that elastic and electric excitations in a piezoelectric media are interconnected and are described in a quasi-static approximation by the following governing field equations,

$$\begin{cases} \sigma_{ij,i} = \rho \ddot{u}_j \\ D_{i,j} = 0 \end{cases} \tag{4}$$

and constitutive relations

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = c_{ijkl} u_{k,l} + e_{lij} \varphi_{,l} \\ D_i = e_{ikl} u_{k,l} - \varepsilon_{il} \varphi_{,l} \end{cases} \tag{5}$$

where u_j are the mechanical displacement components, φ the electrical potential, ρ the mass density of the medium, σ_{ij} and D_i are the stress and electric displacement fields, c_{ijkl}, e_{ikl} and ε_{il} are the elastic, piezoelectric, and dielectric constants, respectively.

For the functionally graded piezoelectric substrate in the region $x > 0$, let w_2 and ϕ_2 denote the mechanical displacement and electrical potential function, then from Eqs. (4) and (5), we have the following coupled electro-mechanical field equations

$$\begin{cases} \dfrac{dc_{44}(x)}{dx}\dfrac{\partial w_2}{\partial x} + c_{44}(x)\nabla^2 w_2 + \dfrac{de_{15}(x)}{dx}\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x} + e_{15}(x)\nabla^2 \varphi_2 = \rho(x)\dfrac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} \\ \dfrac{de_{15}(x)}{dx}\dfrac{\partial w_2}{\partial x} + e_{15}(x)\nabla^2 w_2 - \dfrac{d\varepsilon_{11}(x)}{dx}\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \varepsilon_{11}(x)\nabla^2 \varphi_2 = 0 \end{cases} \tag{6}$$

and the nonzero stress and electric displacement components

$$\begin{cases} \sigma_{yz}^{(2)} = c_{44}(x)\dfrac{\partial w_2}{\partial y} + e_{15}(x)\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y}, \sigma_{zx}^{(2)} = c_{44}(x)\dfrac{\partial w_2}{\partial x} + e_{15}(x)\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x} \\ D_x^{(2)} = e_{15}(x)\dfrac{\partial w_2}{\partial x} - \varepsilon_{11}(x)\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x},\ D_y^{(2)} = e_{15}(x)\dfrac{\partial w_2}{\partial y} - \varepsilon_{11}(x)\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y} \end{cases} \tag{7}$$

where $c_{44}(x), e_{15}(x)$, and $\varepsilon_{11}(x)$ are the elastic, piezoelectric and dielectric constants in the substrate, respectively.

We here assume that all material parameters in the functionally graded piezoelectric substrate have the same exponential function variation along the x-axis direction, i.e.

$$c_{44}(x) = c_{44}^0 e^{\alpha x},\ e_{15}(x) = e_{15}^0 e^{\alpha x}, \varepsilon_{11}(x) = \varepsilon_{11}^0 e^{\alpha x},\ \rho(x) = \rho^0 e^{\alpha x} \tag{8}$$

where α is the exponential coefficient indicating the profile of the material gradient inside the substrate, and the quantities with superscript 0 are the corresponding values of these parameters at the interface $x=0$. Substiution of Eq. (8) into Eq.(6) yields

$$\begin{cases} c_{44}^0(\alpha \dfrac{\partial w_2}{\partial x} + \nabla^2 w_2) + e_{15}^0(\alpha \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \nabla^2 \varphi_2) = \rho^0 \dfrac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} \\ \varepsilon_{11}^0(\alpha \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \nabla^2 \varphi_2) - e_{15}^0(\alpha \dfrac{\partial w_2}{\partial x} + \nabla^2 w_2) = 0 \end{cases} \tag{9}$$

which are the field equations for the functionally graded piezoelectric substrate.

When Love waves propagate in the layered structure, as shown in Fig.1, the related mechanical and electrical quantities must satisfy the boundary conditions and the continuity conditions along the interface, which are described as follows,

1.The mechanical traction-free condition at $x=-h$,

$$\sigma_{zx}^{(1)}(-h,y)=0$$

2.The electrical boundary conditions at $x=-h$,

$$\begin{cases} \varphi_0(-h,y)=\varphi_1(-h,y) \\ D_x^{(0)}(-h,y)=D_x^{(1)}(-h,y) \end{cases}$$ for electrically open case, and

$\varphi_1(-h,y)=0$ for electrically shorted case.

3.The continuity conditions at $x=0$,

$$\begin{cases} w_1(0,y)=w_2(0,y) \\ \sigma_{zx}^{(1)}(0,y)=\sigma_{zx}^{(2)}(0,y) \\ \varphi_1(0,y)=\varphi_2(0,y) \\ D_x^{(1)}(0,y)=D_x^{(2)}(0,y) \end{cases}$$

4.For $x\to+\infty$, $w_2\to 0$, $\varphi_2\to 0$ For $x\to-\infty$, $\varphi_0\to 0$.

The solutions of w_1 and φ_1 for the wave propagation along the y-axis direction in the dielectric layer can be easily obtained from Eq.(2), i.e.,

$$\begin{cases} w_1(x,y,t)=(A_1e^{ikb_1x}+A_2e^{-ikb_1x})\exp[ik(y-ct)] \\ \varphi_1(x,y,t)=(A_3e^{kx}+A_4e^{-kx})\exp[ik(y-ct)] \end{cases} \tag{10}$$

Where A_1, A_2, A_3 and A_4 are arbitrary constants, $(k=2\pi/\lambda)$ is the wave number with λ being the wavelength, $i=\sqrt{-1}$, c is the phase velocity of wave propagation, $b_1=(c^2/c_1^2-1)^{1/2}$ with c_1 being the bulk shear wave velocity in the layer. The derivation of Eq.(10)is under the assumption c_1/c, the existence condition of Love waves for the layer.

$$\begin{cases} w_2(x,y,t)=W_2(x)\exp[ik(y-ct)] \\ \varphi_2(x,y,t)=\Phi_2(x)\exp[ik(x-ct)] \end{cases} \tag{11}$$

where $W_1(x)$ and $\Phi_1(x)$ are the functions to be determined.

Substitution of Eq.(11) into Eq. (9) yields

$$\begin{cases} c_{44}^0(W_2{}''+\alpha W_2'-k^2W_2)+e_{15}^0(\Phi_2''+\alpha\Phi_2'-k^2\Phi_2)=-\rho^0k^2c^2W_2 \\ \varepsilon_{11}^0(\Phi_2''+\alpha\Phi_2'-k^2\Phi_2)-e_{15}^0(W_2''+\alpha W_2'-k^2W_2)=0 \end{cases} \tag{12}$$

Where the prime on the top right corner denotes differentiation with respect to x coordinate.

From the second expression in Eq.(13), we have

$$(\Phi_2''+\alpha\Phi_2'-k^2\Phi_2)=\frac{e_{15}^0}{\varepsilon_{11}^0}(W_2''+\alpha W_2'-k^2W_2) \tag{13}$$

Substitution of Eq.(13) into the first expression in Eq.(12), gives rise to

$$W_2^{''} + \alpha W_2^{'} + (\frac{c^2}{c_2^2} - 1)k^2 W_2 = 0 \qquad (14)$$

where $c_2 = [(c_{44}^0 + e_{15}^0 2 / \varepsilon_{11}^0)] / \rho_0]^{1/2}$ is the bulk shear wave velocity at x=0 in the substrate.

Equation (13) can be regarded as an inhomogeneous equation with respect to Φ_2, so the complete solution of Φ_2 should be the superposition of the general solution Φ_2^h corresponding to the homogeneous equation of Eq.(13) and the particular solution of Φ_2^p of Eq.(14).And obviously $\Phi_2^p = (e_{15}^0 / \varepsilon_{11}^0) W_2$ is a particular solution of Φ_2. Similarly, considering the existence condition of Love waves and the boundary condition 4), we can obtain the complete solution of Φ_2 in Eq.(13) and then get the following solution of the electrical potential function in the substrate from Eq.(11)

$$\varphi_2(x, y, t) = (A_6 e^{rx} + \frac{e_{15}^0}{\varepsilon_{11}^0} A_5 e^{rx}) \exp[ik(y - ct)] \qquad (15)$$

Where $s = -[\alpha / 2 + (\alpha^2 / 4 + k^2)^{1/2}]$ and A_6 is also an arbitrary constant.

Considering the boundary condition 4), the solution of φ_0 in Eq.(9) can be easily obtained as follows

$$\varphi_0 = A_0 e^{kx} \exp[ik(y - ct)] \qquad (16)$$

Where A_0 is an arbitrary constant.

In this paper, we give the dispersion relations for the existence and propagation of surface electro-elastic Love waves in an FGPM layered structure consisting of an FGPM substrate and a dielectric layer. Through the numerical examples, the following conclusions can be drawn:

The effect of gradient coefficient on the fundamental mode is more obvious than that on the high-order modes. Furthermore, the effect of gradient coefficient on dispersion curves is sign sensitive. Positive gradient dominates the cutoff frequency while negative gradient dominates the phase velocity.

The gradient coefficient has a strong influence on the electromechanical coupling factor, which appears more obvious in the case of negative gradient coefficients than in the case of positive ones. And negative gradient coefficients have positive effects on the electromechanical coupling factor while positive gradient coefficients have negative effects.

Negative gradient coefficients can change the dispersion state of the fundamental mode, i.e., from the totally normal dispersion to partly normal dispersion together with partly anomalous dispersion.

The above conclusions are very applicable and could be expected to be utilized designing SAW devices.

REFERENCE

1. R.G. Curtis and M. Redwood, Transverse Surface Waves on a Piezoelectric Material Carrying a Metal Layer of Finite Thickness, J. Appl. Phys., vol. 44, pp. 2002-2007, i973.
2. Z.N. Danoyan and G.T. Piliposian, Surface Electro-Elastic Love Waves in a Layered Structure with a Piezoelectric Substrate and a Dielectric layer, Int. J. Solids Struct. vol. 44, pp. 5829-5847, 2007.
3. Z.N. Danoyan and G.T. Piliposian, Surface Electro-Elastic Shear Horizontal Waves in a Layered Structure with a Piezoelectric Substrate and a Hard Dielectric Layer, Int. J. Solids Struct. vol. 45, pp. 43i-44i, 2008.
4. G.T. Piliposian and Z.N. Danoyan, Surface Electro-Elastic Love Waves in a Layered Structure with a Piezoelectric Substrate and Two Isotropic Layers, Int. J. Solids Struct. vol. 46, pp. i345-i353, 2009.
5. H. Liu, Z.K. Wang, and TJ. Wang, Effect of Initial Stresses on the Propagation Behaviour of Love Waves in a Layered Piezoelectric Structure, Int. J. Solid. Struct. vol. 38, pp. 37-5i, 200i.
6. G.R. Liu and J. Tani, Characteristic of wave Propagation in Functionally Gradient Piezoelectric Material Plates and its Response Analysis Part i: Theory; Part 2: Calculation Results, Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng. vol. 57A (54i), pp. 2i22-2i27, i99i.

7. G.R. Liu and J. Tani, SH Surface Waves in Functionally Gradient Piezoelectric Material Plates, Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng. vol. 58A (547), pp. 504-507, i992.
8. G.R. Liu and J. Tani, Surface Waves in Functionally Gradient Piezoelectric Plates, Trans. ASME J. Vib. Acoust. vol. ii6, pp. 440^48, i994.
9. G.R. Liu, K.Y. Dai, X. Han, and T. Ohyoshi, Dispersion of Waves and Characteristic Wave Surfaces in Functionally Graded Piezoelectric Plates, J. Sound Vib. vol. 268, pp. i3i-i47, 2003.
10. X.Y. Li, Z.K. Wang, and S.H. Huang, Love Waves in Functionally Graded Piezoelectric Materials, Int. J. Solids Struct. vol. 4i, pp. 7309-7328, 2004.
11. J. Liu and Z.K. Wang, The Propagation Behavior of Love Waves in a Functionally Graded Layered Piezoelectric Structure, Smart Mater. Struct. vol. i4, pp. i37-i46, 2005.
12. J. Du, X. Jin, J. Wang, et al. Love Wave Propagation in Functionally Graded Piezoelectric Material Layer, Ultrasonics vol. 46, pp. i3-22, 2007.
13. J. Liu, X.S. Cao, and Z.K. Wang, Propagation of Love Waves in a Smart Functionally Graded Piezoelectric Composite Structure, Smart Mater. Struct. vol. i6, pp. i3-24, 2007.

Information about authors:

Gohar Aslan Manukyan
Cand.phys.-math. sci. Institute of Mechanics NAS of Armenia
Adress: Gr.Artzruny 10/4,Yerevan Armenia, 0012
E-mail: avetisus@gmail.com

Zarine Kliment Manukyan
YSU, Yerevan, Armenia, Alek Manukyan 1.
E-mail: zarulka88000@gmail.com

Viktoria Kliment Manukyan
YSU, Yerevan, Armenia, Alek Manukyan 1.
E-mail: vicamanukyan@yahoo.com

PROBLEMS OF GROWING SOLIDS MECHANICS IN MODERN INDUSTRIAL TECHNOLOGIES

Manzhirov A.V.

Modern industrial technologies include stereolithography, electrolytic deposition, laser and thermal 3D printing, production of 3D integrated circuits and a number of other technologies. Actually, there is a real boom in the development of new technologies since they allow to reproduce a 3D object of arbitrarily complicated shape (in theory from any material) with high accuracy and low expenses in a short time. However, problems of deformation and strength of products fabricated using such technologies remain still unsolved. Mathematical models and methods developed in the paper allow one to study the stress-strain state of parts of devices, machines, and mechanisms created in technological processes from viscoelastic materials. This gives an opportunity to estimate their shape distortion, strength, stability and life time. This problem is of general interest for the modern technologies in engineering, medicine, electronics industry, aerospace industry, and other fields. The process of accretion or deposition of new material to a solid is studied in the fundamental scientific area called Growing Solids Mechanics. This area deals with all sorts of solid materials including elastic, viscoelastic, plastic, composite and graded materials. Currently a great number of fabricated parts are made from viscoelastic materials with complex properties so we consider just such materials. Mathematical model of viscoelastic solid which grows due to the technological process is proposed. Complete system of boundary value problem equations is obtained. A method for solving formulated boundary value problem is developed. Qualitative conclusions concerning the behavior of growing solids are presented.

We consider the stress-strain state (SSS) of a viscoelastic ageing solid Ω_0 in the time interval $[\tau_0, \tau_1]$. We write the equilibrium equation in the form

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \mathbf{0}. \tag{1}$$

We represent the boundary conditions described above as follows

$$\begin{aligned} &\mathbf{x} \in S_1(t): \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{p}_0, \\ &\mathbf{x} \in S_2(t): \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_0, \end{aligned} \tag{2}$$

where $\mathbf{p}_0$ and $\mathbf{u}_0$ are given vectors of surface forces and strains and $\mathbf{n}$ is the unit vector normal to the solid surface. The Cauchy conditions are written as follows

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T]. \tag{3}$$

We take the constitutive equations in the form as follows assuming that the transverse contraction (Poisson's) ratio of the instantaneous elastic strain and the creep strain of the ageing material are identical and are equal to ν. Then we have (see [1–3])

$$\begin{aligned} &\mathbf{T} = G(\mathbf{I} + \mathbf{N}(\tau_0, t))[2\mathbf{E} + (K-1)I_1(\mathbf{E})\mathbf{1}], \\ &(\mathbf{I} + \mathbf{N}(\tau_0, t))^{-1} = (\mathbf{I} - \mathbf{L}(\tau_0, t)), \quad 2G = E(1+\nu)^{-1}, \quad K = (1-2\nu)^{-1}, \\ &\mathbf{L}(\tau_0, t) f(t) = \int_{\tau_0}^{t} f(\tau) K(t,\tau)\, d\tau, \quad \omega(t,\tau) = 2C(t,\tau)(1+\nu), \\ &K(t,\tau) = E(\tau)\frac{\partial}{\partial \tau}[E^{-1}(\tau) + C(t,\tau)] == K_1(t,\tau) = G(\tau)\frac{\partial}{\partial \tau}[G^{-1}(\tau) + \omega(t,\tau)], \end{aligned} \tag{4}$$

where $E = E(t)$ and $G = G(t)$ are the elastic moduli under tension and shear, $C(t,\tau)$ and $\omega(t,\tau)$ are the creep measures under tension and shear, $K(t,\tau)$ is the creep function under tension, and $\mathbf{1}$ is the unit tensor. The arguments are omitted in a number of obvious cases above. They will also be omitted in what follows and will be used only in those cases when their absence may be misleading.

Thus (1)–(4) constitute the boundary-value problem (BVP) of the linear theory of elasticity for a homogeneous ageing basic solid, the SSS of which can be described by the solution of the system for $t \in [\tau_0, \tau_1]$.

We transform the BVP for the basic solid. Let us introduce the notation

$$\begin{aligned} &\mathbf{N}^0 = \mathbf{H}(\tau_0, t)\mathbf{N}G^{-1}, \mathbf{a}^0 = \mathbf{H}(\tau_0, t)\mathbf{a}G^{-1}, \\ &\mathbf{H}(\psi, t) = (\mathbf{I} - \mathbf{L}(\psi, t)), \end{aligned} \tag{5}$$

where $\mathbf{N}$ and $\mathbf{a}$ are an arbitrary tensor and arbitrary vector, respectively. We apply the operator

$\mathbf{H}(\tau_0, t)$ to the relations in (1)–(4) containing $\mathbf{T}$ after dividing them by G. Then, since $\mathbf{H}(\tau_0, t)$ commutes with the Hamilton operator, we obtain the following BVP using (5) ($\tau_0 \le t \le \tau_1$)

$$\nabla \cdot \mathbf{T}^0 = \mathbf{0} \quad ,$$

$$\mathbf{x} \in S_1(t): \qquad \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}^0 = \mathbf{p}_0^0, \tag{6}$$

$$\mathbf{x} \in S_2(t): \qquad \mathbf{u} = \mathbf{u}_0,$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T],$$

$$\mathbf{T}^0 = 2\mathbf{E} + (K-1)I_1(\mathbf{E})\mathbf{1}.$$

Unlike (1)–(4), time occurs in the BVP (6) as a parameter. The latter is mathematically equivalent to the BVP of the theory of elasticity with a parameter t. All analytic and numerical methods of the theory of elasticity can be used when constructing the solution of such a problem, which undoubtedly lends itself better to investigation than the problem of the theory of viscoelasticity.

In order that $\mathbf{T}$, $\mathbf{E}$, and $\mathbf{u}$ be a solution of the BVP (1)–(4) it is necessary and sufficient that $\mathbf{T}^0$, $\mathbf{E}$, and $\mathbf{u}$ form a solution of the BVP (6) and the relation

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = G(t)[\mathbf{T}^0(\mathbf{x}, t) + \int_{\tau_0}^{t} \mathbf{T}^0(\mathbf{x}, \tau) R(t, \tau) d\tau], \tag{7}$$

be satisfied ($\tau_0 \le t \le \tau_1$). Here $R(t,\tau)$ is the resolvent of the kernel $K(t,\tau)$.

We now consider the process of continuous accretion of a solid ($\tau_1 \le t \le \tau_2$). For a growing solid we have:
the equilibrium equation

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \mathbf{0}, \tag{8}$$

the boundary conditions on the stationary part of the surface

$$\mathbf{x} \in S_1(t): \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{p}_0,$$

$$\mathbf{x} \in S_2(t): \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_0, \tag{9}$$

the condition on the growing surface which can be obtained from the solution of a contact problem for solid and surface provided that they interact without friction (smooth contact)

$$\mathbf{x} \in S^*: \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} = p\mathbf{n}, \quad p = -s_n(\mathbf{T}_s : \mathbf{L}),$$

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \quad s_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}, \qquad (t = \tau^*(\mathbf{x})), \tag{1}$$

where $\mathbf{T}_s$ is the 2D tensor of the deposited elastic surface tension, $\mathbf{L}$ is the 2D tensor of this surface curvature, the relation between the rates of strain and displacement

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}[\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T], \tag{11}$$

and the constitutive equation in the form

$$\mathbf{T} = G(\mathbf{I} + \mathbf{N}(\tau_0(\mathbf{x}), t))[2\mathbf{E} + (K-1)I_1(\mathbf{E})\mathbf{1}],$$

$$\tau_0(\mathbf{x}) = \begin{cases} \tau_0, & \mathbf{x} \in \Omega_0, \\ \tau^*(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega^*(t). \end{cases} \tag{12}$$

Relations (8)–(12) form a general non-inertial initial BVP (IVBP) for a continuous growing solid, where the operator $(\mathbf{I} - \mathbf{L}(\tau_0(\mathbf{x}), t)) = \mathbf{H}(\tau_0(\mathbf{x}), t))$ and its inverse $(\mathbf{I} + \mathbf{N}(\tau_0(\mathbf{x}), t))$ can be determined from (4) and with τ_0 replaced by $\tau_0(\mathbf{x})$. We observe that the process of continuous deposition of new elements on the basic solid under investigation leads, in general, to governing relations containing discontinuities on the interface between the original and the additional solids.

Let us transform the IBVP for a continuously accreted viscoelastic ageing solid into a problem with the time parameter that has the same form as the BVP of the theory of elasticity. We omit technical details and obtain the final result in the form of BVP as follows

$$
\begin{aligned}
&\nabla\cdot\mathbf{S}=\mathbf{0},\\
&\mathbf{x}\in S_1(t):\qquad \mathbf{n}\cdot\mathbf{S}=\mathbf{R}\mathbf{p}_0,\\
&\mathbf{x}\in S_2(t):\qquad \mathbf{v}=\mathbf{v}_0,\\
&\mathbf{x}\in S^*(t):\mathbf{n}\cdot\mathbf{S}=\mathbf{R}(p\mathbf{n})\quad (t=\tau^*(\mathbf{x})),\\
&\mathbf{D}=\frac{1}{2}[\nabla\mathbf{v}+(\nabla\mathbf{v}^T],\\
&\mathbf{S}=2\mathbf{D}+(K-1)I_1(\mathbf{D})\mathbf{1},
\end{aligned}
\tag{13}
$$

where $\mathbf{R}$ acts on an arbitrary vector $a(x,t)$ by the rule

$$
\mathbf{R}\mathbf{a}(\mathbf{x},t)=\frac{1}{G(t)}\frac{\partial\mathbf{a}(\mathbf{x},t)}{\partial t}+\int_{\tau_0(\mathbf{x})}^{t}\frac{\partial\mathbf{a}(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau}\frac{\partial\omega(t,\tau)}{\partial t}d\tau+
$$

$$
+\mathbf{a}(\mathbf{x},\tau_0(\mathbf{x}))\frac{\partial\omega(t,\tau_0(\mathbf{x}))}{\partial t},\quad \mathbf{S}=\frac{\partial(\mathbf{HT})}{\partial t},
$$

Note that the conditions on $S_1(t)$ and $S^*(t)$ are identical.

Relations (13) supplemented with the initial conditions for the basic solid at $t=\tau_1$ form the BVP with t as a parameter.

For $\mathbf{T}$, $\mathbf{E}$, and $\mathbf{u}$ to be solutions of IBVP (8)–(12) it is necessary and sufficient that $\mathbf{S}$, $\mathbf{D}$, and $\mathbf{v}$ form the solution of (13) and that the following relations be satisfied

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{T}(\mathbf{x},t)=G(t)\left\{\frac{\mathbf{T}(\mathbf{x},\tau_0(\mathbf{x}))}{G(\tau_0(\mathbf{x}))}\left[1+\int_{\tau_0(\mathbf{x})}^{t}R(t,\tau)d\tau\right]+\right.\\
&\left.+\int_{\tau_0(\mathbf{x})}^{t}\left[\mathbf{S}(\mathbf{x},\tau)+\int_{\tau_0(\mathbf{x})}^{\tau}\mathbf{S}(\mathbf{x},\zeta)d\zeta R(t,\tau)\right]d\tau\right\},\\
&\mathbf{u}(\mathbf{x},t)=\mathbf{u}(\mathbf{x},\tau_0(\mathbf{x}))+\int_{\tau_0(\mathbf{x})}^{t}\mathbf{v}(\mathbf{x},\tau)d\tau.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Hence, the solution of the problem of the accretion of a viscoelastic ageing solid can be obtained by the solution of the mathematically identical problems with a parameter t, which have the same form as the BVP of the classical theory of elasticity. Then the true stresses and displacements in the growing solid can be reconstructed using (14).

Relations (14) indicate that the SSS for a growing viscoelastic solid depends on the whole history of loading and accretion of the solid. The initial values of the displacements $\mathbf{u}(\mathbf{x},\tau^*(\mathbf{x}))$ of the deposited elements in (14) are usually set to be zero (since the SSS of the growing solid does not depend on them).

Let us suppose now that the solid ceases to grow at instant τ_2. At this instant it occupies a domain Ω_1 with surface S_1, on which two kinds of boundary conditions are specified, as in the case of the problem for the basic solid. Moreover $S^*(\tau_2)=S_1^*\subseteq\bigcup_i S_i(t)$ $(i=1,2)$. In this case the problem for the invariable solid occupying Ω_1 is similar to (8)–(12) without the initial-boundary condition on $S^*(t)$

$$
\begin{aligned}
&\nabla\cdot\mathbf{T}+\mathbf{f}=\mathbf{0},\\
&\mathbf{x}\in S_1(t):\qquad \mathbf{n}\cdot\mathbf{T}^0=\mathbf{p}_0^0,\\
&\mathbf{x}\in S_2(t):\qquad \mathbf{u}=\mathbf{u}_0,\\
&\mathbf{D}=\frac{1}{2}[\nabla\mathbf{v}+(\nabla\mathbf{v}^T],
\end{aligned}
\tag{15}
$$

$$\mathbf{T} = G(\mathbf{I} + \mathbf{N}(\tau_0(\mathbf{x}), t))[2\mathbf{E} + (K-1)I_1(\mathbf{E})\mathbf{1}],$$

with $\tau^*(\mathbf{x}) = \tau_2$ for $\mathbf{x} \in S_1^*$. The stresses, strains and displacements at $t = \tau_2$ found by solving the growth problem at the previous step serve as the initial conditions.

One can obtain the following BVP

$$\begin{aligned}
&\nabla \cdot \mathbf{S} = \mathbf{0}, \\
&\mathbf{x} \in S_1(t): \qquad \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{R}\mathbf{p}_0, \\
&\mathbf{x} \in S_2(t): \qquad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0, \\
&\mathbf{D} = \frac{1}{2}[\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v}^T], \\
&\mathbf{S} = 2\mathbf{D} + (K-1)I_1(\mathbf{D})\mathbf{1},
\end{aligned} \tag{16}$$

where the initial conditions remain as before.

For $\mathbf{T}$, $\mathbf{E}$, and $\mathbf{u}$ to be solutions of the IBVP (15) it is necessary and sufficient that $\mathbf{S}$, $\mathbf{D}$, and $\mathbf{v}$ form a solution of BVP (16) and that relations (14) be satisfied.

Hence it follows that the process of piecewise-continuous accretion of a viscoelastic ageing solid with any finite number of instants when the growth starts and stops can be considered using the method proposed. The problem with n instants when growth starts (and, naturally, n instants when it stops) can be reduced to the study of $2n+1$ problems of one type, which have the same form as the BVP of the theory of elasticity containing t as a parameter. Once these $2n+1$ problems are solved, the SSS of the viscoelastic ageing solid under consideration can be easily reconstructed for any time from the above formulas.

The one-to-one correspondence between the solutions of the problem of piecewise continuous accretion of a viscoelastic ageing solid and the BVP of the theory of elasticity established in the present section enables us to conclude that a unique solution of the IBVP exists that describes the piecewise continuous accretion of a viscoelastic solid because a unique solution of the BVP of the theory of elasticity exists.

One can obtain a number of interesting results from (13), (20), (24), (14) and (22) using the property of limited creep of a viscoelastic material. If one assumes that only the surface of the basic solid is subject to a load, the actions are stationary, and accretion does not involve pretension, then the interaction between newly deposited particles and the solid already formed can be neglected starting from some instant t^0. In other words, starting from t^0 the growth process has little effect on the state of the part of the solid formed prior to and the part formed for $t > t^0$ is practically stress-free. In particular, if the instant when a stationary load is applied to the basic solid is much earlier than the instant when the accretion starts, all other conditions being equal, then the effect of accretion on the state of the basic solid will be quite small and practically the whole additional solid will be strain-free. Similar conclusions can be drawn when considering a load regime of the original solid under which the actions remain constant for a prolonged period of time prior to the beginning of growth, irrespective of their variation at earlier times.

The effects considered have a clear mechanical meaning. Indeed, the deformation of a viscoelastic solid will practically cease after a period of time under limited creep conditions and stationary actions. Subsequent deposition of stress-free elements leads to a situation when the interaction between the parts of the solid already formed and those being created during the growth process is negligible.

Relations (6), (13), (14), (15) and (16) also enable us to predict such phenomena inherent in growing solids as the presence of residual stresses after the loads are removed, the presence of surfaces of stress discontinuity in the growing solid, and the dependence of the SSS of a viscoelastic solid on the growth rate (only the order of the acts of deposition and loading matters in the elastic case).

Thus, using the presented approach for mechanical design of fabricated parts from viscoelastic materials one can determine the strength and the shape of final products. Moreover, on the basis of this mechanical analysis one can work out effective recommendations for improving the technological process (see, e.g., [4–10]).

The work was financially supported by the Russian Foundation for Basic Research under the Projects Nos 14-01-00741 and 14-08-93964.

REFERENCES

1. N. Kh. Arutyunyan and A. V. Manzhirov, and V. E. Naumov, Contact Problems in the Mechanics of Growing Solids [in Russian]. Nauka Publ., Moscow, 1991.
2. A. V. Manzhirov, “The General Non-Inertial Initial-Boundary Value Problem for a Viscoelastic Ageing Solid with Piecewise-Continuous Accretion,” Journal of Applied Mathematics and Mechanics, vol. 59, no. 5, pp. 805–816, 1995.
3. N. Kh. Arutyunyan and A. V. Manzhirov, Contact Problems in the Theory of Creep [in Russian]. Izd-vo NAN RA, Yerevan, 1999.
4. A. V. Manzhirov, “Mechanics of growing solids and phase transitions,” Key Engineering Materials, vols. 535–536. pp. 89–93, 2013.
5. A. V. Manzhirov, “Mechanics of Growing solids: New Track in Mechanical Engineering,” in Proceedings of ASME 2014 International Mechanical Engineering Congress & Exposition, IMECE2014, November 14–20, Montreal, Canada, 2014, 10 p.
6. A V. Manzhirov and S. A. Lychev, “Mathematical Modeling of Additive Manufacturing Technologies, – in Lecture Notes in Engineering and Computer Science: World Congress on Engineering 2014, pp. 1404–1409. WCE, London, 2014.
7. S. A. Lychev and A. V. Manzhirov, “Discrete and Continuous Growth of Hollow Cylinder. Finite Deformations,” in Lecture Notes in Engineering and Computer Science: World Congress on Engineering 2014, pp. 1327–1332. WCE, London, 2014.
8. A. V. Manzhirov and S. A. Lychev, “An approach to modeling of additive manufacturing technologies,” Transactions on Engineering Technologies: The World Congress on Engineering 2014, pp. 99–115. Springer, Netherlands, 2015.
9. S. A. Lychev and A. V. Manzhirov, “Discrete and Continuous growth of Deformable Cylinder,” Transactions on Engineering Technologies: The World Congress on Engineering 2014, pp. 239–254. Springer, Netherlands, 2015.
10. A. V. Manzhirov, “Design of Additive Manufacturing Fabricated Viscoelastic Parts,” in Lecture Notes in Engineering and Computer Science: World Congress on Engineering 2015, pp. 710–714. WCE, London, 2015.

<u>Information about the author</u>

Manzhirov Alexander V. – Foreign Member of the National Academy of Sciences of the Republic of Armenia, Professor, S.D., Ph.D. M.S., Head of Department for Modeling in Solid Mechanics, Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences; : Head of Branch Department of Applied Mathematics of the Bauman Moscow State Technical University; Professor of the National Research Nuclear University “MEPhI”; Professor of the Moscow State University of Information Technologies, Radio Engineering and Electronics; (+7 495) 434 4138, (+7 926) 2332511.
E-mail: manzh@ipmnet.ru.

ON A CLASS OF CONTACT PROBLEMS FOR LINEARLY DEFORMABLE FOUNDATIONS

Mkhitaryan S.M.

A class of contact problems of the theory of elasticity on indentation of a rigid punch circular in plan or in the form of an infinite strip or half-plane into a linearly deformable foundation of B.G. Korenev type is considered.

Based on the needs of structural mechanics in calculating foundations of buildings and constructions on deformable foundations, in analyzing bending characteristics of beams and plates on elastic foundations, as well as proceeding from necessity of complete accounting of physical and mechanical properties of foundations (anisotropy and heterogeneity, etc), the concept of a linearly deformable foundation, which generalizes the concept of a classical foundation in the form of an elastic homogeneous isotropic half-space was introduced. Initiation of study of contact problems for linearly deformable foundations was made by B.G. Korenev in [1,2] and then this direction has evolved significantly in the works of G.Ya. Popov [3]. Many results in this field of the theory of elasticity are reflected in [4]. In the present paper we consider a class of contact problems for the two types of linearly-deformable foundations [2], when the influence functions (vertical displacements of foundations boundary points depending on the unit vertical concentrated force) are determined: in the first case, by the ratio of the decaying at infinity exponential function, depending on the distance from the force application point to the reference point, to this distance itself; in the second case, by the Macdonald function of zero index with an argument also depending on this distance.

1. In [2], an important class of linearly deformable foundations was introduced. The influence functions (kernels) of these foundations in right rectangular coordinate system $Oxyz$ are graphically represented by a surface of revolution characterized by equations of the form

$$K(x-\xi, y-\eta) = K\left(\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\right).$$

With the help of these kernels the dependence of boundary points vertical displacements of a linearly deformable foundation $w(x,y)$ on the distributed vertical load of intensity $p(x,y)$ applied in the region ω of its surface is determined by the formula

$$w(x,y) = \iint_{\omega} K(x-\xi, y-\eta)\, p(\xi,\eta)\, d\xi d\eta \, . \tag{1.1}$$

The explicit expressions of five kernels that can, in particular, be used to approximate the experimentally obtained surface settlements were given in [2]. One of them has the form

$$K(x,y) = Ae^{-\chi R_0}/2\pi R_0; \quad R_0 = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2} \tag{1.2}$$

where constants A and χ characterize the elastic properties of the foundation. In particular, when $\chi = 0$, $A = 2(1-\nu^2)/E$, where E is the elastic modulus, ν is the Poisson ratio we get the case of a classical elastic half-space.

Now, let the linearly deformable foundation with the kernel (1.2) occupy the lower half-space $z > 0$ in the coordinate system $Oxyz$ (the axis Oz is directed into the foundation). Assume then that a circular punch is indented into the half-plane under the action of an eccentrically applied force P. Then, on the basis of (1.1) we have an integral equation (IE) [5] for determining the pressure $p(x,y)$ under the punch

$$\frac{A}{2\pi}\iint_{\omega} \frac{e^{-\chi R_0}}{R_0}\, p(\xi,\eta)\, d\xi d\eta = \delta - \beta_y x - \beta_x y - g(x,y) \tag{1.3}$$

where $\omega = \{z=0,\ r<a\}$ or $\omega = \{z=0,\ r>a\}$ is a contact area in the form of a finite circular disk or an infinite annular disc with the inner radius a, $g(x,y)$ is a function characterizing the configuration of the punch base, δ is a vertical punch settlement, and β_x and β_y are angles of punch rotation around the axes Ox and Oy.

Then, the two dimensional IE (1.3) together with three punch equilibrium conditions is written in cylindrical coordinates r,φ,z and reduced to the one-dimensional IE by the well-known method. The solution of this IE is reduced, in its turn, to the solution of the boundary value problem of the potential theory in curvilinear orthogonal coordinates of an oblate spheroid by introducing the generalized potential [6], associated with the Helmholtz differential equation. In the case of a circular region ω of finite radius, spectral and related to them integral relationships were established by means of methods of potential theory for the corresponding integral operator [7]. Using these relationships, containing spheroidal wave functions an exact solution of the contact problem is constructed.

2. In the second case, the kernel of the linearly deformable foundation is [2]

$$K(x-\xi,\ y-\eta)=K_0(\chi R_0) \qquad (\chi>0) \tag{2.1}$$

where $K_0(x)$ is the Macdonald function of zero index. Then the solution of contact problem on indentation of a punch, having flat region ω in plan, into the lower elastic half-plane $z>0$ with the kernel (2.1) is reduced into the solution of the following two-dimensional IE:

$$\iint_{\omega} K_0\left(\chi\sqrt{(\chi-\xi)^2+(y-\eta)^2}\right)p(\xi,\eta)\,d\xi d\eta = f(x,y) \quad \left((x,y)\in\omega\right), \tag{2.2}$$

where $f(x,y)$ is a function that characterizes the punch base. Next, we consider two particular cases of IE (2.2) when 1) the region is a infinite strip $\omega=\{z=0;-\infty<x<\infty;-a\le y\le a\}$; 2) the region is a half-plane, $\omega=\{z=0;-\infty<x<\infty;0\le y<\infty\}$. In these cases, using the Fourier integral transform in variable x, the two-dimensional IE (2.2) is reduced to the Fredholm one-dimensional IE of the first kind

$$\frac{\pi}{c}\int_L e^{-c|y-\eta|}\overline{p}(\eta,\lambda)\,d\eta=\overline{f}(y,\lambda) \quad \left(c=\sqrt{\lambda^2+x^2}\right), \tag{2.3}$$

where $L=[-a,a]$ or $L=[0,\infty)$, λ is the Fourier spectral parameter, $\overline{f}(y,\lambda)$ and $\overline{p}(y,\lambda)$ are the Fourier transforms of the functions $f(x,y)$ and $p(x,y)$ respectively

$$\left\{\overline{f}(\lambda,y);\overline{p}(\lambda,y)\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{f(x,y);p(x,y)\right\}e^{i\lambda x}dx\,.$$

Represent the IE (2.3) for $L=[-a,a]$ in the form of

$$\frac{\pi}{c}\int_{-a}^{y} e^{-c(y-\eta)}\overline{p}(\eta,\lambda)\,d\eta+\int_{y}^{a} e^{-c(\eta-y)}\overline{p}(\eta,\lambda)\,d\eta=\overline{f}(y,\lambda) \qquad (-a<y<a). \tag{2.4}$$

Since the left hand side of this equation has derivatives with respect to y, then the right hand side $\overline{f}(y,\lambda)$ should have the same property. Assume that the function $\overline{f}(y,\lambda)$ is continuous on $[-a,a]$ together with its derivatives up to the second order that means $\overline{f}(y,\lambda)\in C_2[-a,a]$. Then differentiating both sides of (2.4) twice with respect to y, we get

$$\overline{p}(y,\lambda)=\frac{1}{2\pi}\left[c^2\overline{f}-\overline{f}''(y,\lambda)\right] \quad (-a<y<a). \tag{2.5}$$

However, substituting (2.5) in the IE (2.4) and carrying out integration by parts to get rid of the term $\overline{f}''(y,\lambda)$, additional terms appear apart from $\overline{f}(y,\lambda)$ in the left hand side of the IE**.** Eliminating these terms leads to the solution of the IE (2.4):

$$\begin{aligned}\overline{p}(y,\lambda)=\frac{1}{2\pi}\Big\{&c^2\overline{f}-f''+\left[c\overline{f}(a,\lambda)+\overline{f}'(a,\lambda)\right]\delta(y-a)+\\&+\left[c\overline{f}(-a,\lambda)-\overline{f}'(-a,\lambda)\right]\delta(y+a)\Big\} \quad (a\le y\le a)\end{aligned} \tag{2.6}$$

where $\delta(y)$ is the Dirac delta function. The function $\overline{p}(y,\lambda)$ in (2.6) satisfies the IE (2.4).

Thus, if $\overline{f}(y,\lambda)\in C_2[-a,a]$ then the solution of IE (2.4) is represented by the formula (2.6) consisting of a continuous summand $\left(c^2 f - f''\right)/2\pi$ and the remaining two singular summands containing generalized functions in the form of delta functions. In order to have a solution (2.6) bounded at the endpoints of the interval $[-a,a]$, it is necessary and sufficient to satisfy conditions

$$c\overline{f}(a,\lambda)+\overline{f}'(a,\lambda)=0\ ;\quad c\overline{f}(-a,\lambda)-\overline{f}'(-a,\lambda)=0.$$

Formally, considering the parameter a as a variable these equalities can be interpreted as simple differential equations for the function $\overline{f}(a,\lambda)$. Integration of the first equation gives $\overline{f}(a,\lambda)=\overline{f}(0,\lambda)e^{-ac}$ or $\overline{f}(y,\lambda)=\overline{f}(0,\lambda)e^{-cy}$ $(0\le y\le a)$. Similarly, from the second equation we have

$\overline{f}(y,\lambda)=\overline{f}(0,\lambda)e^{cy}$ $(-a\le y\le 0)$ and hence

$$\overline{f}(y,\lambda)=\overline{f}(0,\lambda)e^{-c|y|}\quad(-a\le y\le a). \tag{2.7}$$

Now, using (2.7)

$$c^2\overline{f}-\overline{f}''=\begin{cases}2c\overline{f}(0,\lambda)\delta(y),\ y=0\\ 0,\quad y\in[-a,0)\cup(0,a]\end{cases}.$$

It follows that IE (2.4) has bounded solution on the whole interval $[-a,a]$ if and only if $\overline{f}(0,\lambda)=0$, i.e. according to (2.7) when $\overline{f}(0,\lambda)\equiv 0$ and hence this solution will be identically zero. Simultaneously this means that associated homogeneous IE of (2.4) has only the trivial solution, i.e. the kernel

$$M(y,\eta)=(\pi/c)e^{-c|y-\eta|}\qquad(-a\le y,\eta\le a)$$

is a closed kernel [8].

By the same way the IE (2.3) for $L=[0,\infty)$ has the solution

$$\overline{p}(y,\lambda)=(1/2\pi)\left(c^2\overline{f}-\overline{f}''\right)+(1/2\pi)\left[c\overline{f}(0,\lambda)-\overline{f}'(0,\lambda)\right]\delta(y)\quad(0\le y<\infty).$$

3. Consider the question of the solvability of the IE of the first kind (2.4) in the space of square integrable functions $L_2[-a,a]$. The kernel $M(y,\eta)$ of this equation is symmetrical, square-integrable, moreover continuous and closed. Then, by the well-known theorem of Picard [8], the IE (2.4) for $\overline{f}(y,\lambda)\in L_2[-a,a]$ has a unique solution in the class $L_2[-a,a]$ if and only if the series $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2 f_k^2$ converges. Here λ_k are characteristic numbers of the kernel $M(y,\eta)$ and $\overline{f}_k=\left(\overline{f},\varphi_k\right)$ are Fourier coefficients of the function $\overline{f}(y,\lambda)$ with respect to the eigenfunctions $\varphi_k(y)$ of this kernel:

$$\varphi_k(y)=\lambda_k\int_{-a}^{a}M(y,\eta)\varphi_k(\eta)d\eta=\frac{\pi}{c}\lambda_k\int_{-a}^{a}e^{-c|y-\eta|}\varphi_k(\eta)d\eta.$$

To find these functions and numbers we introduce the potential

$$u(x,y,z)=\iint_{\omega}K_0\left(\chi\sqrt{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2+z}\right)p(\xi,\eta)d\xi d\eta. \tag{3.1}$$

It is easy to show that the function $u(x,y,z)$ satisfies the following differential equation everywhere in a 3-dimensional space except the plane region ω:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{1}{z}\frac{\partial u}{\partial z}-\chi^2 u=0. \tag{3.2}$$

By substitution $u(x,y,z)=\sqrt{|z|}\mathrm{v}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})$ this equation reduces to the equation

$$\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial z^2}-\left(\chi^2+\frac{3}{4z^2}\right)\mathrm{v}=0 \tag{3.3}$$

Now, applying to (3.1) and (3.2) the Fourier integral transform in the variable x, we find that the Fourier transform

$$\overline{u}(y,z;)=\frac{\pi}{c}\int_L e^{-c\sqrt{(y-\eta)^2+z^2}}\,\overline{p}(\eta,\lambda)\,d\eta \qquad \left(c=\sqrt{\lambda^2+\chi^2}\right) \tag{3.4}$$

outside L satisfies the differential equation

$$\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial z^2}-\frac{1}{z}\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}-c^2\overline{u}=0 \tag{3.5}$$

and the equation (3.3) goes over into equation

$$\frac{\partial^2 \overline{\mathrm{v}}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \overline{\mathrm{v}}}{\partial z^2}-\left(c^2+\frac{3}{4z^2}\right)\overline{\mathrm{v}}=0. \tag{3.6}$$

From (3.4)-(3.6) it follows that the solution of the IE (2.3) can be reduced to the solution of the boundary value problem:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 \overline{\mathrm{v}}}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 \overline{\mathrm{v}}}{\partial z^2}-\left(c^2+\dfrac{3}{4z^2}\right)\overline{\mathrm{v}}=0 \quad \left((y,z)\in \Pi \setminus L\right)\\ \sqrt{|z|}\,\overline{\mathrm{v}}(\mathrm{y},\mathrm{z};\lambda)\Big|_{z=0}=\overline{f}(y,\lambda) \quad (y\in L)\,;\ \operatorname{grad}\left(\sqrt{|z|}\,\overline{\mathrm{v}}\right)\to 0 \quad y^2+z^2\to\infty\end{cases} \tag{3.7}$$

where $\Pi=\{-\infty<y,z<\infty\}$. After solving the boundary value problem (3.7), the solution of the IE (2.4) will no longer be determined by the normal derivative $\partial\overline{u}/\partial z$ by the well-known formula of the theory of conventional single-layer potential [6]. In this case, based on the theory of singular integrals [9], the singular kernel is introduced into consideration

$$H_\delta(y-\eta)=\delta^2\Big/2\left[\delta^2+(y-\eta)^2\right]^{3/2} \qquad (\delta>0).$$

This kernel satisfies all three conditions for such kernel [9,10]. Then for any function $\varphi(y)$ of the basic function class we have [11]

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} H_\delta(y-\eta)\varphi(\eta)\,d\eta=\varphi(y), \tag{3.8}$$

i.e. in the sense of generalized functions [11]

$$\lim_{\delta\to 0}\delta^2\Big/\left[2(y-\eta)^2+\delta^2\right]^{3/2}=\delta(y-\eta) \tag{3.9}$$

Now using (3.1) and (3.8)-(3.9), it is easy to show that after solving (3.7), the solution of the IE (2.4) will be determined by the formula

$$\overline{p}(y,\lambda)=\frac{1}{2\pi}\left[c^2\overline{f}(y,\lambda)-\lim_{z\to+0}\frac{\partial^2\left(\sqrt{z}\,\overline{\mathrm{v}}\right)}{\partial \mathrm{y}^2}\right] \tag{3.10}$$

Further, with the help of the Zhukovsky function $w=y+iz=(a/2)(\zeta+1/\zeta)$, $\zeta=\xi+i\eta=\rho e^{i\vartheta}$ mapping conformally the complex plane w with a cut along the segment $\{z=0,-a<y<a\}$ into the unit circle $\rho<1$ of the plane ζ with center at $\zeta=0$ and using (3.10), the following spectral relationship is established by the method represented in [7]:

$$\frac{\lambda_k^1(\theta)}{2a^2c}\int_{-a}^{a} e^{-c|y-\eta|}\frac{Ps_k^1(\eta/a,\theta)}{\sqrt{1-\eta^2/a^2}}=\sqrt{1-y^2/a^2}\,Ps_k^1(y/a,\theta)\,,\ \theta=-a^2c^2/4\left(k=1,2,...,-a<y<a\right) \tag{3.11}$$

where $Ps_k^1(y/a,\theta)$ are spheroidal wave functions forming a complete orthogonal system of functions on the interval $[-a,a]$ and $\lambda_k^1(\theta)$ are characteristic numbers [12,13].

When ω is the half-plane, using the function $w=\zeta^2/2$, $w=y+iz$, $\zeta=\xi+i\eta$, the upper half-plane $\eta>0$ of the complex plane ζ maps conformally into the plane w with a cut along the positive semi-axis. As a result, following [7] the spectral relationship is established

$$\left(k+1\right)\int_0^\infty e^{-c|y-\eta|}e^{-c\eta}L_k^1\left(2c\eta\right)d\eta = ye^{-cy}L_k^1\left(2cy\right) \quad \left(k=0,1,2,...,\ 0<y<\infty\right) \tag{3.12}$$

where $L_k^1\left(y\right)$ are Chebyshev-Laguerre polynomials [13].

Based on the spectral relationships (3.11) and (3.12), the solutions of IE (2.3) are represented (as in [7]) by an infinite series whose coefficients are determined explicitly. In conclusion, we note that the solution to contact problems under discussion in the case of the kernel $K_0\left(\chi R_0\right)$ has a different structure in different functional spaces, and thus, the question of its uniqueness is twofold.

References

1. Korenev B.G. Problems of Analysis of Beams and Plates resting on Elastic Foundation. M.:Gosstroyizdat, 1954. 232 p. (in Russian)
2. Korenev B.G. Some Problems of the Theory of Elasticity and Heat Transfer solvable by means of Bessel Functions. M.: Fizmatgiz, 1960. 460 p. (in Russian)
3. Popov G.Ya. Contact problems for a linearly deformable foundation. Kyiv-Odesa: Vyshcha Shkola, 1982. 168 p. (in Russian)
4. Development of the theory of contact problems in the USSR. / Ed.Galin L.A. M.: Nauka, 1976. 493p. (in Russian)
5. Lur`e A.I. Spatial Problems of the Theory of Elasticity. M.: Gostechizdat, 1955. 492 p. (in Russian)
6. Tichonov A.N., Samarskij A.A. Equations of Mathematical Physics. N.Y.: Courier Corporation, 2013. 800p.
7. Mkhitaryan S.M. On a spectral relationship connected with the theory of potential in spheroidal wave functions and its application to contact problems. //Prikladnaya Matematika i Mekhanika (PMM) (Applied Mathematics and Mechanics), 2015. vol. 79, issue. 3.pp. 434- 446. (in Russian)
8. Krasnov M.L. Integral equations. Introduction to the Theory. M.: Nauka, 1975. 301 p. (in Russian)
9. Natanson I.P. The Theory of Functions of a Real Variable. M.: Nauka, 1974. 480 p. (in Russian)
10. Galin L.A. Contact problems in the theory of elasticity and visco-elasticity. M.: Nauka, 1980. 304p. (in Russian)
11. Shilov G.E. Mathematical analysis. The second special course. M: Nauka, 1965. 327 p. (in Russian)
12. Bateman H., Erdelyi A. Higher Transcendental Functions. V.3. N.Y. etc.: McGraw-Hill, 1955. 292p.
13. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables / Eds. M. Abramowitz and I. A. Stegun. Washington: NBS.

Information about author

Mkhitaryan Suren – Prof., Dr., Corresponding Member NAS RA, Head of Depart. of Institute of Mechanics of NAS, phone (+374) 93 93 61 17, **e-mail:** smkhitaryan39@rambler.ru

MODELING CONTACT SLIP AND SLIDING CONDITIONS WITH ACCOUNT FOR WEAR PROCESS

Mróz Z.

Two classes of contact problems can be considered under normal and tangential loads. The first class pertains to the partial slip condition, when the slip zone is developed on a portion of contact domain with the stick zone at a remaining portion. The second class pertains to the sliding condition, when the contact slip is developed on the whole contact area and the relative displacement is composed of slip and sliding displacements. The case of slip and sliding of two contacting spheres is considered first with the analysis of both regimes. For varying loads, the progressive and reverse slips first develop and the contact response is characterized by the slip memory rules. In a sliding regime the contact response depends on varying contact zone orientation and size. The accompanying wear process then usually proceeds in the sliding regime. In the partial slip regime both wear and damage develop at the contact (fretting wear and damage). In the paper the slip, sliding and combined slip-sliding contact responses are discussed. The induced damage is next analyzed in the sliding regime. The conditions of steady wear states are discussed for monotonic and reciprocal sliding conditions. The variational principle of minimization of the wear dissipation rate is proposed in order to specify the steady state contact conditions. The illustrative examples present the steady thermo-elastic states with contact pressure and temperature distributions. The respective contact shapes are optimal as they are preserved after the transient process.

1.Contact slip and sliding conditions

The analogy exists between the theory of plasticity for rigid-plastic and elastic-plastic bodies and the contact response in slip or sliding modes. When a rigid block is placed on a frictional substrate, its sliding motion induces the instantaneous slip on the whole contact zone. On the other hand, for an elastic block, first the progressive slip develops on the part of contact zone and the sliding motion is reached when the slip zone covers the whole contact zone. For the conformal contact, like the rectangular punch on a plane substrate, the contact zone does not evolve with the normal load. For the non-conformal contact, like the sphere- on- flat or two interacting spheres, both contact zone size and its orientation vary during the sliding motion.

The contact interaction of two elastic spheres under normal and oblique loading has been studied by Mindlin and Deresiewicz [1], where two identical spheres were placed symmetrically in a mutual contact and subjected to the normal compressive force N with a subsequently induced tangential load T. Referring to Fig. 1, first the contact zone of radius a_H is generated by the load N and next the slip ring $c \le r \le a_H$ develops due to action of the load T and the stick zone exists in the central domain $0 \le r \le c$. For $T = \mu N$ (μ -friction coefficient) the slip zone occupies the whole contact domain. In the consecutive sliding process the relative sphere displacement increases until the contact separation occurs. For the inclined loading satisfying the condition $T = \mu N$ the sliding regime is generated instantaneously and the total sphere center displacement s_t is the sum of slip and sliding displacements. $s_t = s_s + s_r$. For two spheres of different radii R_i and elastic moduli E_i, ν_i ($i = 1, 2$), the normal load and the ultimate slip displacement at the transition from slip to sliding regime are expressed as follows

$$N = k_n^* h_0^{3/2}, \qquad \delta_u = \frac{1}{8}\mu\frac{E^*}{G^*}h_0 = \frac{1}{8}\mu\frac{E^*}{G^*}\frac{a_H^2}{R^*}, \quad \text{where} \qquad k_n^* = 4/3\, E^*\sqrt{R^*}, \quad h_0 = a_H^2 / R^*,$$

$$E^* = \frac{E_1E_2}{E_1\left(1-\nu_2^2\right)+E_2\left(1-\nu_1^2\right)}, \quad G^* = \frac{G_1G_2}{G_1\left(2-\nu_2\right)+G_2\left(2-\nu_1\right)}, \quad R^* = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} \tag{1}$$

and h_0 denotes the contact overlap, G_i are the shear moduli. The ultimate slip displacement is not dependent on the loading history and specifies the transition to sliding regime. For spheres of the same elastic moduli it can be presented in a simple form

$$\delta_u \approx \frac{\left(2+\nu\right)}{4}\mu h_0 \approx \frac{1}{4}\mu\left(2+\nu\right)\frac{a_H^2}{R^*} \tag{2}$$

For varying tangent load T within slip regime the hysteretic response and dissipation is generated as presented in Fig. 1b, with slip memory rules specified by the active loading surfaces, Fig. 1c,d. The detailed slip rules are presented in Ref. [2]. Assuming sphere 1 as fixed and sphere 2 executing translation along a straight trajectory, the slip, sliding and separation regimes can be separated, as shown in Fig. 2a. The other typical case for contact interaction and wear testing is the initial normal contact followed by rectilinear sphere motion along an inclined trajectory in the combined slip-sliding regimes. Fig. 3 presents the contact force evolution during the sphere translation along the straight trajectory with account or neglect of slip displacement. It is seen that slip displacement effect is small when the large sliding motion occurs. Due to contact zone orientation and size evolution the configuration effect induces variation of the driving and normal forces. The resultant forces $N^*$and T^* are referred to the sphere center trajectory orientation and its normal direction. The sliding condition is expressed in the form

$$F_L(N_R, F, \alpha_t) = T^*(\alpha_t) - N^*(\alpha_t)\tan(\alpha_t - \mathrm{s_g}\,\varphi) = F(\alpha_t) + N_R(\alpha_t)\tan(\alpha_t - \mathrm{s_g}\,\varphi) = 0 \quad (3)$$

where $\mathrm{s_g} = \mathrm{sign}(v_s(t))$, α_t is the contact plane orientation angle relative to motion trajectory and φ is the friction angle, cf [3].

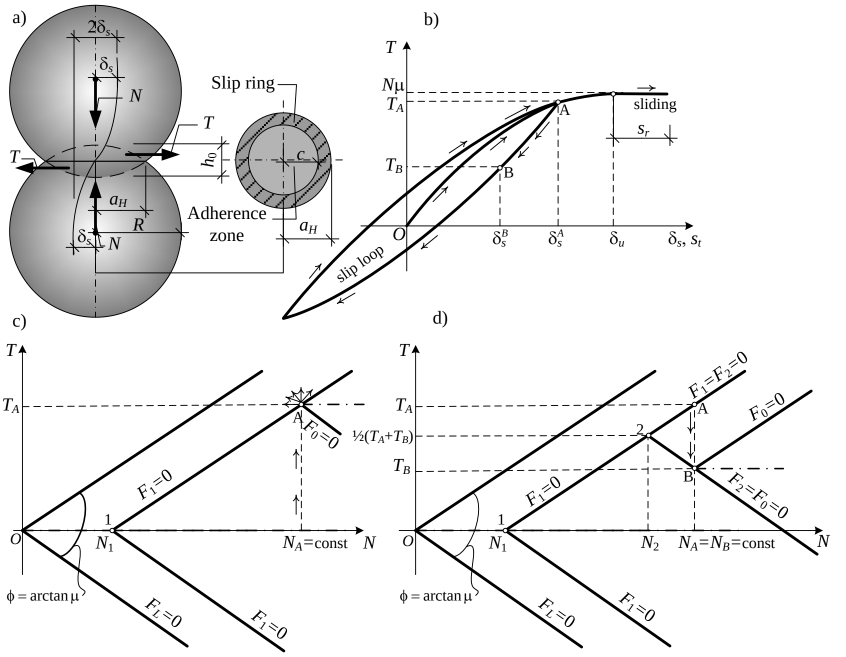


Fig. 1 Two identical spheres in a mutual contact: a) slip and stick zones induced by increasing tangential force *T*, b) slip hysteresis loop for periodically varying *T* , c) elastic and loading surfaces $F_0 = 0$, and $F_1 = 0$ for increasing *T* at constant *N*, d) loading surfaces for decreasing *T* with unloading surface $F_2 = 0$.

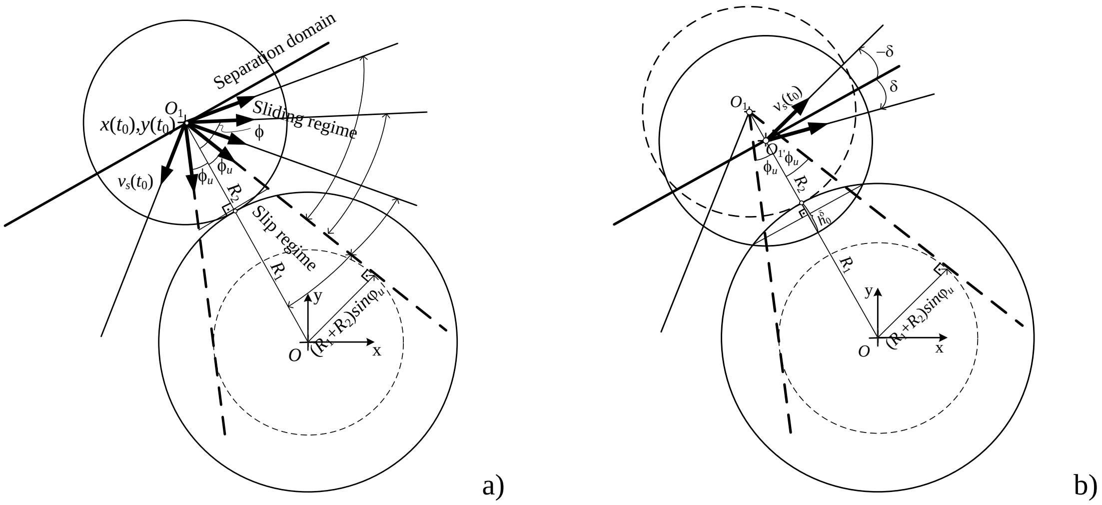


Fig. 2 Slip, sliding and separation domains: a) for the linear paths; b) for bilinear paths.

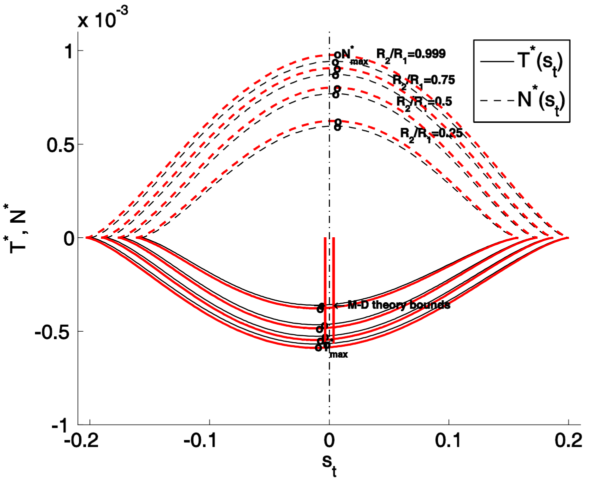


Fig.3.Resultant contact forces-path diagrams for rightward motion (the overlap h_0=0.01R_1).

2.Transient and steady state wear conditions.

The induced wear process can be related to slip and sliding conditions at the contact interface. For partial slip varying reciprocally, only in a slip portion of contact zone the wear process proceeds and induces contact pressure redistribution. The concentration of contact pressure develops at the transition between stick and slip zones, generating cracking of contacting bodies. The fretting wear and damage are then the major combined effects developed in the reciprocal slip .On the other hand, wear process in sliding conditions proceeds in the whole contact zone, inducing contact shape variation and regular pressure distribution. For monotonic or periodic sliding the wear process tends to its steady state, characterized by some general properties and minimization theorems.

The modified Archard wear rule specifies the wear rate $\dot{w}_{i,n}$ of the *i*-th body in the normal contact direction, thus

$$\dot{w}_{i,n} = \beta_i(\tau_n)^{b_i}\left\|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau\right\|^{a_i} = \beta_i(\mu\, p_n)^{b_i}\left\|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau\right\|^{a_i} = \beta_i(\mu\, p_n)^{b_i} v_r^{a_i} = \tilde{\beta}_i\, p_n^{b_i} v_r^{a_i}, \quad i = 1,2 \qquad (4)$$

where μ is the friction coefficient, β_i, a_i, b_i are the wear parameters, $\tilde{\beta}_i = \beta_i \mu^{b_i}$, $v_r = \left\|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau\right\|$ is the relative tangential velocity between the bodies, constrained by the boundary conditions. The shear stress at the contact surface is expressed in terms of the contact pressure p_n by the Coulomb friction law $\tau_n = \mu\, p_n$.

It is assumed that the contact zone is fixed on body 1 allowed for a rigid body motion (like punch action) and moves along the surface of body 2 constrained at its boundary (like a substrate). In general contact conditions the wear rate vector $\dot{\boldsymbol{w}}_i$ is not normal to the contact surface and results from the constraints imposed on the allowed rigid body motion . The fundamental *coaxially rule* was stated in [4], namely: in the steady state the wear rate vector $\dot{\boldsymbol{w}}_R$ is *collinear* with the rigid body wear velocity vector $\dot{\boldsymbol{\lambda}}_R$ of body 1

$$\dot{\boldsymbol{w}}_R = \dot{w}_R\, \boldsymbol{e}_R\,, \quad \boldsymbol{e}_R = \frac{\dot{\boldsymbol{\lambda}}_R}{\left\|\dot{\boldsymbol{\lambda}}_R\right\|} = \frac{\dot{\boldsymbol{\lambda}}_F + \dot{\boldsymbol{\lambda}}_M \times \Delta\mathbf{r}}{\left\|\dot{\boldsymbol{\lambda}}_F + \dot{\boldsymbol{\lambda}}_M \times \Delta\mathbf{r}\right\|} \qquad (5)$$

Let us note that the sliding velocity $v_r = \left\|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau\right\|$ is specified from the boundary conditions, but the translation and rotation wear velocity vectors $\dot{\boldsymbol{\lambda}}_F$ and $\dot{\boldsymbol{\lambda}}_M$ should be determined from the solution of a specific problem. In the analysis of sliding wear problems the elastic term of relative sliding velocity is usually neglected. It has been shown in [4] that the steady state conditions for monotonic motion can be obtained from minimization of the wear dissipation power subject to equilibrium constraints for body 1. The wear dissipation power for the case of wear of two bodies and the equilibrium conditions of body 1 are

$$D_w = \sum_{i=1}^{2}\left(\int_{S_c}(\boldsymbol{t}_i^c \cdot \dot{\boldsymbol{w}}_i)\; dS\right) = \sum_{i=1}^{2} C_i \qquad \begin{aligned} \mathbf{f} &= -\int_{S_c} \boldsymbol{\rho}_c^{\pm}\; p_n^{\pm}\; dS + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \\ \mathbf{m} &= -\int_{S_c} \Delta\mathbf{r} \times \boldsymbol{\rho}_c^{\pm}\; p_n^{\pm}\; dS + \mathbf{m}_0 = \mathbf{0} \end{aligned} \qquad (6)$$

where $\boldsymbol{f}_0$ and $\boldsymbol{m}_0$ denote the resultant force and moment acting on the body 1. The contact pressure distribution resulting from the minimization procedure has the form, cf. [4]

$$p_n^{\pm} = \left(\frac{\dot{\boldsymbol{\lambda}}_F^{\pm} \cdot \boldsymbol{\rho}_c^{\pm} + \left(\dot{\boldsymbol{\lambda}}_M^{\pm} \times \Delta \boldsymbol{r}\right) \cdot \boldsymbol{\rho}_c^{\pm}}{K} \frac{1}{Q} \right)^{\frac{1}{b}} \tag{7}$$

where $K = \sum_{i=1}^{2} \tilde{\beta}_i v_r^{a_i}$, $Q = 1 \pm \mu \tan\chi \cos\chi_1 + \mu_d \tan\chi \sin\chi_1$. This distribution does not depend on the elastic moduli of contacting bodies but depends on friction and wear parameters. The derived non-linear equations (6) and (7) can be solved by a nonlinear equation solver.

Consider now the steady state wear regime for the case of periodic sliding motion. Then the periodicity condition of relative displacement, stress and strain is expressed as follows

$$u_\tau(t) = u_\tau(t + T_*)\,, \quad \boldsymbol{\sigma}(t) = \boldsymbol{\sigma}(t + T_*)\,, \quad \boldsymbol{\varepsilon}(t) = \boldsymbol{\varepsilon}(t + T_*) \tag{8}$$

where T_* is the period of sliding motion. The wear increment accumulated during one cycle should be compatible with the rigid body wear motion of punch, thus

$$w(x, t + T_*) - w(x, t) = \Delta w(x, T_*) = \Delta w^+(x, T_*) + \Delta w^-(x, T_*) = (\Delta \boldsymbol{\lambda}_F + \Delta \boldsymbol{\lambda}_M \times \Delta \boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{e}_z \tag{9}$$

where $\Delta\boldsymbol{\lambda}_F = \Delta\boldsymbol{\lambda}_F^+ + \Delta\boldsymbol{\lambda}_F^-$ and $\Delta\boldsymbol{\lambda}_M = \Delta\boldsymbol{\lambda}_M^+ + \Delta\boldsymbol{\lambda}_M^-$ are the translational and rotational wear increments during one cycle, $\Delta\boldsymbol{\lambda}_F^{\pm}, \Delta\boldsymbol{\lambda}_M^{\pm}$ are rigid body wear velocities for $\pm$ semi-cycles. Let us define the wear dissipation in one cycle of sliding motion

$$E_w = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} \int_0^{T_*/2} \left(\int_{S_c^{(i)}} (\boldsymbol{t}_i^{c+} \cdot \dot{\boldsymbol{w}}_i^+) \; dS \right) d\tau + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} \int_{T_*/2}^{T_*} \left(\int_{S_c^{(i)}} \boldsymbol{t}_i^{c-} \cdot \dot{\boldsymbol{w}}_i^-) \, dS \right) \; d\tau \tag{10}$$

where $\boldsymbol{t}_i^{c+}$, $\boldsymbol{t}_i^{c-}$ is the contact traction vector and $\dot{\boldsymbol{w}}_i^+, \dot{\boldsymbol{w}}_i^-$ is the wear velocity of the *i*-th body in the progressive and reciprocal motion direction, T_* is the period of sliding motion. Minimizing (9) with equilibrium constraints, the stationary condition then provides the relation

$$p_n^+ + p_n^- = \frac{\Delta\boldsymbol{\lambda}_F^+ \cdot \boldsymbol{\rho}_c^+ + \left(\Delta\boldsymbol{\lambda}_M^+ \times \Delta \boldsymbol{r}\right) \cdot \boldsymbol{\rho}_c^+}{K\, Q^+} + \frac{\Delta\boldsymbol{\lambda}_F^- \cdot \boldsymbol{\rho}_c^- + \left(\Delta\boldsymbol{\lambda}_M^- \times \Delta \boldsymbol{r}\right) \cdot \boldsymbol{\rho}_c^-}{K\, Q^-} \tag{11}$$

where $p_n^+(x)$ and $p_n^-(x)$ are the contact pressures during two consecutive semi-cycles. It is seen that at each point of contact zone the equality (10) should be satisfied in the steady state. However, the distribution of pressure during each semi-cycle is not specified from the stationary condition. The results of numerical analysis of steady wear states will be presented. Fig. 4 illustrates evolution of contact shape and pressure for a plane punch sliding periodically on a substrate., cf. ref. [5].

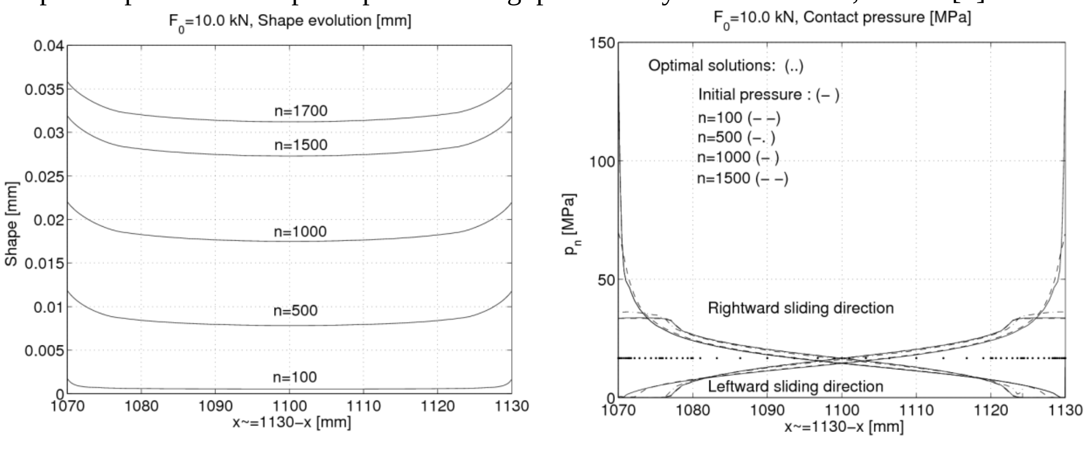


Fig. 4. Evolution of contact shape and pressure with number of cycles of punch sliding

References.

1. Mindlin, R.D., Deresiewicz, H.: Elastic spheres in contact under varying oblique forces, J. Appl. Mech. 20, 327-344,1953.
2. Jarzębowski, A., Mróz,Z.: On slip and memory rules in elastic, friction contact problems, Acta Mech. 102,199-216, 19943.
3. Balevicius, R., Mróz, Z.: A finite sliding model of two identical spheres under displacement and force control, Part 1: Static analysis, Acta Mech, 224, 1659-1684, 2013.
4. Paczelt, I., Mróz, Z.: Numerical analysis of steady thermo-elastic wear regimes induced by translating and rotating punches, Comp. Struct., 89, 2495-2521, 2011.
5. Paczelt, I., Mróz, Z.: Analysis of thermo-mechanical wear problems for reciprocal punch sliding, Adv. Eng. Software, 2015, (in print). Institute of Fundamental Technological Research, Warsaw, Poland

Information about author

Mróz Zenon, Professor, Ph. D., Member of the Polish Academy of Sciences,
Department of Mechanics of Materials, Institute of Fundamental Technological Research,
Polish Academy of Sciences

INTERFACIAL EFFECTS IN PERIODIC PIEZOELECTRIC WAVEGUIDE

Piliposyan D.G., Ghazaryan K.B

Coupled electro-elastic SH waves propagating in a piezoelectric finite width waveguide with periodic structure along the guide are considered in the framework of the full system of Maxwell's electrodynamic equations. Homogeneous or an alternating conditions for the displacement and the magnetic field along the guide walls are taken. The dispersion equation has been obtained and numerical analysis carried out. The results demonstrate the significant effect of piezoelectricity on the widths of band gaps at acoustic frequencies and confirm that it does not affect the band gaps at optical frequencies.

1. Introduction.

The interaction of waves with periodic structures has recently attracted much attention. A periodic modulation of the dielectric or elastic material parameters leads to absolute stop bands and ultimate control of the propagation of elastic and electromagnetic waves in the structure. In the phononic elastic crystal counterpart a periodic modulation of elastic coefficients can create a phononic band gap for which elastic waves are forbidden to propagate [1-3]. The existence of architectures simultaneously exhibiting both a complete photonic(optic) and phononic (acoustic) band gaps have been discussed in [4] opening the possibility of dual acousto-optic devices. Propagation of anti-plane and in-plane waves in periodic elastic waveguides with alternating boundary conditions along the guide walls are discussed in [5,6]. Shear wave propagation in piezoelectric non-homogeneous waveguide is studied in [7].

The purpose of this paper is to investigate shear waves in a finite-width infinite waveguide consisting of two different periodically imperfect contacted piezoactive homogeneous materials. We will investigate the effect of both non alternating and periodically alternating boundary conditions along the guide walls on the structure and properties of band gaps.

We will consider an infinite one-dimensional periodically composed piezoelectric structure with a unit cell of length or period β made of two different piezoelectric materials, as shown in Figure 1. The mass density the elastic, piezoelectric and dielectric constants are will be piecewise continuous functions with period β.

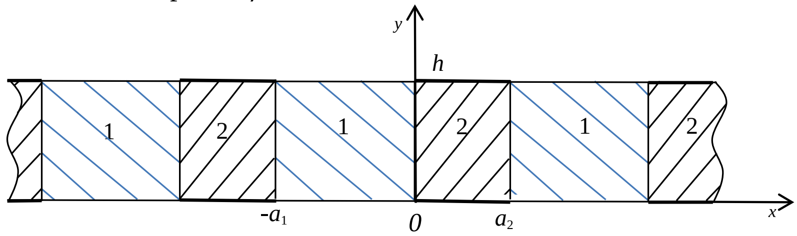


Fig.1. Periodic waveguide made from two piezoelectric media.

For an anti-plane problem the interconnected elastic and electro-magnetic excitations in the framework of full system of Maxwell equations in a transversely isotropic piezoelectric crystal with crystallographic axes directed along the *Oz* direction are with respect to u_z, E_x, E_y, H_z [3,8]

$$\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y}=\rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2},\ \sigma_{xz}=c_{44}\frac{\partial u_z}{\partial x}-e_{15}E_x,\ \sigma_{yz}=c_{44}\frac{\partial u_z}{\partial y}-e_{15}E_y, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathrm{E}_y}{\partial x}-\frac{\partial \mathrm{E}_x}{\partial y}=-\mu_{33}\frac{\partial \mathrm{H}_z}{\partial \mathrm{t}},\ -\frac{\partial H_z}{\partial x}=\frac{\partial D_y}{\partial t},\ \frac{\partial H_z}{\partial y}=\frac{\partial D_x}{\partial t}, \tag{2}$$

$$\mathrm{D_x}=\mathrm{e}_{15}\frac{\partial \mathrm{u_z}}{\partial \mathrm{x}}+\varepsilon_{11}\mathrm{E_x},\quad \mathrm{D_y}=\mathrm{e}_{15}\frac{\partial \mathrm{u_z}}{\partial \mathrm{y}}+\varepsilon_{11}\mathrm{E_y}, \tag{3}$$

where u_z is the displacement, σ_{ik} the stress tensor, D_x, D_y and E_x, E_y the electric displacements and electric field intensities, and H_z the magnetic field intensity, ρ, c_{44}, e_{15}, ε_{11} and μ_{33} are the mass density, the elastic, piezoelectric, dielectric and magnetic constants, respectively. Harmonic time dependence, $\exp(i\omega t)$ for the all physical variables with ω as wave angular frequency is assumed henceforth. We assume that waves propagate in the (*x*,*y*) plane. Taking notations $H = i\omega H_0$, $u_z = u$ we come to the separate system of equations for $H_0(x,y)$ and $u(x,y)$ [3,8]

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + \omega^2 \frac{\rho}{G} u(x,y) = 0, \quad \frac{\partial^2 H_0(x,y)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 H_0(x,y)}{\partial y^2} + +\omega^2 \varepsilon_{11}\mu_{33} H_0(x,y) = 0, \tag{4}$$

Here $G = c_{44} + e_{15}^2 / \varepsilon_{11}$ (5)

2. Boundary conditions:

1. Displacement-clamped and electrically-shorted boundary conditions on the waveguide walls:

$$u(x,0) = 0, \qquad E_x(x,0) = 0, \qquad u(x,1) = 0, \quad E_x(x,1) = 0. \tag{6}$$

2. Traction free and magnetically-closed boundaries:

$$H_0(x,0) = 0, \ \sigma_{yz}(x,0) = 0, \ H_0(x,1) = 0, \ \sigma_{yz}(x,1) = 0,. \tag{7}$$

3. Solutions: The solution of (4) can be found by separating the variables in the form $\left(u(x,y), H_0(x,y)\right) = \left(u(y), H_0(y)\right)\left(e^{iqx}, e^{isx}\right)$, which leads to an eigenvalue problem with discrete eigenvalues q_n and s_n, and corresponding mode solutions $\left(u_n(x,y), H_{0n}(x,y)\right)$ with

$$u_n(x,y) = a_n(x) r_n(y), \ H_{0n}(x,y) = e c_n(x) z_n(y), \tag{8}$$

$$E_{yn}(x,y) = \eta v_n(x) z_n(y), \ \sigma_{xzn}(x,y) = G w_n(x) r_n(y), \tag{9}$$

$$r_n(y) = \begin{cases} \sin(p_n y) \\ \cos(p_n y) \end{cases}, \ z_n(y) = \begin{cases} \cos(p_n y) \\ \sin(p_n y) \end{cases}, \quad p_n = \pi n, \ n = 0,1,2\ldots \tag{10}$$

$$w_n(x) = \left[q_n b_n(x) + (-1)^i \theta p_n c_n(x) \right], \ v_n(x) = \left[(-1)^i p_n a_n(x) + s_n d_n(x) \right], \ i = 1,2, \tag{11}$$

$$\eta = \frac{e}{\varepsilon}, \ \theta = \frac{e^2}{G\varepsilon}, \quad q_n = \sqrt{\frac{\omega^2 h^2}{c_0^2} - p_n^2}, \quad s_n = \sqrt{\frac{\omega^2 h^2}{c^2} - p_n^2}, c_0 = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, c = \sqrt{\frac{1}{\mu\varepsilon}}, \tag{12}$$

Here c_0 is the velocity of a transverse wave in the medium, c is speed of the electromagnetic wave, $i = 1,2$ correspond to the upper and lower terms in (10) corresponding to solutions for boundary conditions 1 and 2, and where following notations are introduced within a homogeneous material for right and left travelling waves:

$$\begin{aligned} a_n(x) &= A_n \exp(iq_n x) + B_n \exp(-iq_n x), \quad b_n(x) = i\left(A_n \exp(iq_n x) - B_n \exp(-iq_n x)\right), \\ c_n(x) &= C_n \exp(is_n x) + D_n \exp(-is_n x), \quad d_n(x) = i\left(C_n \exp(is_n x) - D_n \exp(-is_n x)\right), \end{aligned} \tag{13}$$

where A_n, B_n, C_n, D_n are constants. In (8) $e = e_{15}$ and is included in the expression of $H_n(x,y)$ to harmonise the dimensions of all the wave-field functions.

The interface conditions between two different homogeneous materials are continuity conditions for the displacement and the normal stresses, and electrical field is zero at both sides of the interfaces (Fig1.) The boundary conditions at the interfaces $x = -a_1$ and *x*=0 can be written as

$$\sum_n \begin{pmatrix} a_n^{(1)}(x) r_n^{(1)}(y) \\ G^{(1)} w_n^{(1)}(x) r_n^{(1)}(y) \end{pmatrix} = \sum_n \begin{pmatrix} a_n^{(2)}(x) r_n^{(2)}(y) \\ G^{(2)} w_n^{(2)}(x) r_n^{(2)}(y) \end{pmatrix} \tag{14}$$

$$v_n^{(1)}(x) = v_n^{(2)}(x) = 0, \tag{15}$$

$v_n^{(j)}(x)$ and $w_n^{(j)}(x)$ (j=1,2) are defined by formulae (11).

An inner product can be defined as

$$\langle r_m(y) | r_n(y) \rangle = \int_0^h r_m(y) r_n(y) dy, \tag{16}$$

which has an orthogonality feature within the same material. Taking the inner product of (14) with a single mode m results in the following at the interfaces $x=-a_1$ and x=0

$$\begin{pmatrix} a_n^{(1)}(x)L_{nm} \\ w_n^{(1)}(x)L_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_m^{(2)}(x) \\ \gamma w_n^{(2)}(x) \end{pmatrix}. \tag{17}$$

where $L_{mn} = \int_0^1 r_n^{(1)}(y) r_m^{(2)}(y) dy$, ($n,m = 1,2,3\dots$).

Electrically shorted conditions (15) can be used to eliminate $c_n^{(i)}(x)$ and $d_n^{(i)}(x)$ ($i=1,2$) from (14). From (13) the solutions $d_n^{(1)}(0)$ and $d_n^{(1)}(-a_1)$ are expressed via $a_n^{(1)}(0)$ and $a_n^{(1)}(-a_1)$. After that using notations (11) $c_n^{(1)}(0)$ and $c_n^{(1)}(-a_1)$ can be written in terms of $d_n^{(1)}(0)$ and $d_n^{(1)}(-a_1)$. The same can be done for the second material at $x=0$ and $x=a_2$. This will reduce the interface conditions (14) with respect to vectors $\mathbf{a}^{(1)}(x), \mathbf{b}^{(1)}(x), \mathbf{a}^{(2)}(x), \mathbf{b}^{(2)}(x)$

$$N_1\begin{pmatrix} \mathrm{a}^{(1)}(-a_1) \\ \mathrm{b}^{(1)}(-a_1) \end{pmatrix} = N_2\begin{pmatrix} \mathrm{a}^{(2)}(-a_1) \\ \mathrm{b}^{(2)}(-a_1) \end{pmatrix},\ R_1\begin{pmatrix} \mathrm{a}^{(1)}(0) \\ \mathrm{b}^{(1)}(0) \end{pmatrix} = R_2\begin{pmatrix} \mathrm{a}^{(2)}(0) \\ \mathrm{b}^{(2)}(0) \end{pmatrix} \tag{18}$$

$$R_1 = \begin{pmatrix} L, & 0 \\ LV^{(1)}, & LQ^{(1)} + LW^{(1)} \end{pmatrix}, R_2 = \begin{pmatrix} I, & 0 \\ -\gamma V^{(2)}, & \gamma Q^{(2)} + \gamma W^{(2)} \end{pmatrix},$$

$$N_1 = \begin{pmatrix} L, & 0 \\ LV^{(1)}, & LQ^{(1)} + LW^{(1)} \end{pmatrix}, N_2 = \begin{pmatrix} I, & 0 \\ -\gamma V^{(2)}, & \gamma Q^{(2)} + \gamma W^{(2)} \end{pmatrix}$$

Where I is the identity matrix, matrices $\hat{V}^{(j)}$ and $\hat{W}^{(j)}$ have elements

$$V_{mn}^{(j)} = \left(p_n^{(j)}\right)^2 \frac{\theta^{(j)}\left(\cos\left(a_j s_n^{(j)}\right) - \cos\left(a_j q_n^{(j)}\right)\right)}{s^{(j)}\sin(a_j s_n^{(j)})}\delta_{mn}, W_{mn}^{(j)} = \left(\left(p_n^{(j)}\right)^2 \frac{\theta^{(j)}}{s_n^{(j)}} \frac{\sin(a_j q_n^{(j)})}{\sin(a_j s_n^{(j)})}\right)\delta_{mn},\ \gamma = \frac{G_2}{G_1}. \tag{19}$$

Writing the Bloch-Floquet conditions as $\exp(\imath k_0\beta)\left(\mathbf{a}\left(-a_1^{(2)}\right), \mathbf{b}\left(-a_1^{(2)}\right)\right)^T = \left(\mathbf{a}\left(a_2^{(2)}\right), \mathbf{b}\left(a_2^{(2)}\right)\right)^T$ and using the transfer matrices across the interface (14) and within a homogeneous material (15) the problem under consideration will reduce to the following form

$$\exp(\imath k_0\beta)\begin{pmatrix} \mathbf{a}\left(-a_1^{(2)}\right) \\ \mathbf{b}\left(-a_1^{(2)}\right) \end{pmatrix} = T^{(2)}(a_2)\left(R_2^{-1}R_1\right)T^{(1)}(-a_1)\left(N_1^{-1}N_2\right)\begin{pmatrix} \mathbf{a}\left(-a_1^{(2)}\right) \\ \mathbf{b}\left(-a_1^{(2)}\right) \end{pmatrix}, \tag{20}$$

$$T^{(j)}(x') = \begin{pmatrix} C_{k_n}^{(j)} & S_{k_n}^{(j)} \\ -S_{k_n}^{(j)} & C_{k_n}^{(j)} \end{pmatrix}. \tag{21}$$

For homogeneous boundary conditions on the guide walls matrices L_1 and R_1 in (20) become identity matrices, the propagating modes separate from each other and each gives rise to the following dispersion equation

$$\cos(k_0\beta) + \frac{f(x,\omega)}{g(p,\omega)} = 0, \tag{22}$$

$$f(x,\omega) = A + Q_1Q_2P + Q_1R_1 + Q_2R_2, \quad g(p,\omega) = (1+Q_1)(1+Q_2)$$

where

$$R_{1,2} = \cos\left(a_{1,2}q^{(1,2)}\right)\cos\left(a_{2,1}s^{(2,1)}\right) + \frac{{e^{(2,1)}}^2 \varepsilon^{(1,2)} q^{(1,2)}}{{e^{(1,2)}}^2 \varepsilon^{(2,1)} q^{(2,1)}} \frac{\sin\left(a_{1,2}q^{(1,2)}\right)}{\sin\left(a_{2,1}q^{(2,1)}\right)}\left(\cos\left(a_{2,1}q^{(2,1)}\right)\cos\left(a_{1,2}s^{(1,2)}\right) - 1\right),$$

$$A=\cos\left(a_1 s^{(1)}\right)\cos\left(a_2 s^{(2)}\right)-\frac{(G^{(1)^2}s^{(1)^2}+G^{(2)^2}s^{(2)^2})}{2q^{(1)}q^{(2)}G^{(1)}G^{(2)}}\sin\left(a_1 s^{(1)}\right)\sin\left(a_2 s^{(2)}\right)$$

$$P=\left(\cos\left(a_1 q^{(1)}\right)\cos\left(a_2 q^{(2)}\right)-\frac{q^{(1)^2}e^{(2)^4}\varepsilon^{(1)^2}+q^{(2)^2}e^{(1)^4}\varepsilon^{(2)^2}}{2e^{(1)^2}e^{(2)^2}q^{(1)}q^{(2)}\varepsilon^{(1)}\varepsilon^{(2)}}\sin\left(a_1 q^{(1)}\right)\sin\left(a_2 q^{(2)}\right)\right),$$

$$Q_{1,2}=\frac{p^2 e^{(1,2)^2}\sin\left(a_{1,2}s^{(1,2)}\right)}{G^{(1,2)}\varepsilon^{(1,2)}q^{(1,2)}s^{(1,2)}\sin\left(a_{1,2}q^{(1,2)}\right)},$$

$$e^{(k)}=e_{15}^{(k)},\quad \varepsilon^{(k)}=\varepsilon_{11}^{(k)},\quad \mu^{(k)}=\mu_{33}^{(k)},\qquad k=1,2$$

Without the piezoelectric effect equation (22) gives the propagation of the acoustic wave $\cos(k_0\beta)=A$. Dispersion equations is the same both for displacement-clamped and electrically-shorted (6), and traction free and magnetically-closed (7) boundary conditions on the waveguide walls. In the case of boundary condition (6) mode $n=0$ leads to a solution for the electromagnetic field independent of y, $H(x,y)=H(x)$, and a trivial solution for the displacement, leading to no wave prorogation. In the case of boundary condition (7) mode $n=0$ leads to a solution for the displacement that is independent of y, $u(x,y)=u(x)$, and a trivial solution for the electromagnetic field function, giving the propagation only of an acoustic wave described by the dispersion equation $\cos(\beta k_0)=A$ with the piezoelectric effect present only in the piezoelectrically stiffened elastic modulus G_0.

If materials 1 and 2 are identical and a_1=a_2 then the dispersion equation takes the following form:

$$\cos\left(ak_0\right)=\frac{\cos\left(aq\right)\sin\left(as\right)+\gamma\cos\left(as\right)\sin\left(aq\right)}{\sin\left(as\right)+\gamma\sin\left(aq\right)},\quad \gamma=\frac{e^2p^2}{G_0\varepsilon\, q\, r}. \tag{23}$$

It is clear from (23) that for electrically shorted interfaces between two constituent materials in the waveguide band gaps are even possible if these materials are identical. In this case however the opposite polarization will not affect the band structure.

4.Numerical results and conclusions

The structure of wave propagation depends on the ratio of the length of the unit cell to the height of the waveguide β/h, the reduced wave number $k_0\beta/\pi$, the filling fraction, and differences between the elastic and electromagnetic properties of two piezoelectric materials .

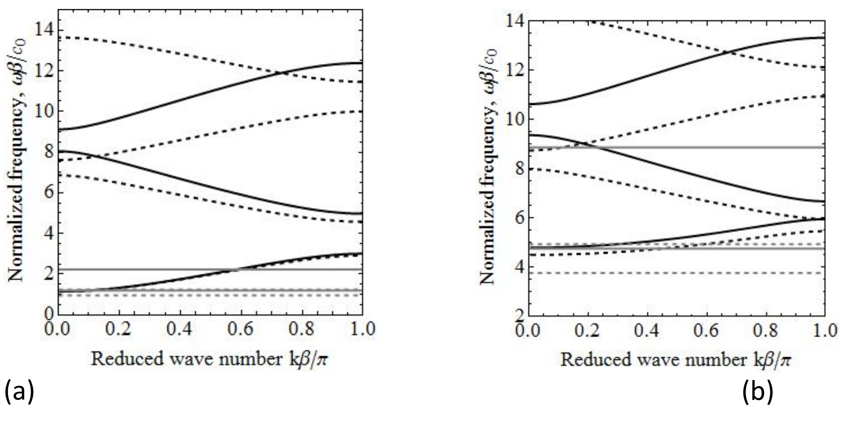
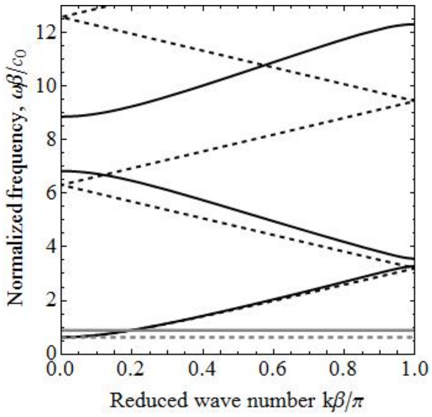


Fig.2. Band structure for a PZT-4 and $BaTiO_3$ piezoelectric phononic crystal with displacement-clamped and electrically-shorted boundaries for $n=1$, (a) β/h=0.2, (b) β/h=1.2 Solid lines and dashed lines show the band structure with and without the piezoelectric effect, horizontal lines show the cut-off frequencies in the two materials..



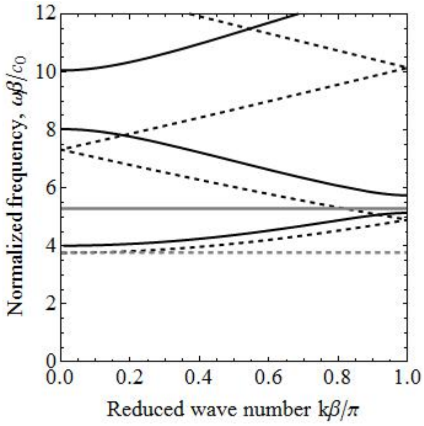


Fig.3. Same PZT-4 crystals, (a) β/h=0.2, (b) β/h=1.2. Dashed lines show the band structure without piezoelectric effect, horizontal gray lines show the cut-off frequencies.

Wave trapping occurs when the waves exponentially decay in one material and propagate in the other. Fig. 3 shows wave trapping for the lowest mode for a PZT 4 and BaTiO3 waveguide, where the horizontal lines show the cut-off frequencies in the two materials. For this materials there is a large difference between the acoustic impedance, the frequency region with trapped waves is much larger and for shorter cells includes several modes (Fig. 4a). The nature of the trapping is not different from a non-piezoelectric waveguide described in detail in [5] and is affected by both the difference in acoustic impedances and the wavelength in the sense. Another interesting feature here is that waves propagate below the cut off frequency (Fig.3), which does not happen when the piezoelectric effect is neglected.

References

1. M.M. Sigalas, E.N. Economou , Elastic and acoustic wave band structure. //J. Sound and Vibration, 158(2), 1992, p.377-382.
2. J.O. Vasseur, P.A.Deymier, B.Chenni, B.Djafari-Rouhani, L.Dobrzynski, D.Prevost, Experimental and theoretical evidence for the existence of absolute acoustic band gaps in two-dimensional solid phononic crystals. Physics Review Letters 86(14), 2001, p.3012–3015.
3. G.T. Piliposian, A.S. Avetisyan, K.B. Ghazaryan, Shear wave propagation in periodic phononic/photonic piezoelectric medium, Wave Motion.49(1),125-134(2012).
4. M. Maldovan, E.L. Thomas, Simultaneous complete elastic and electromagnetic band gaps in periodic structures. //Appl. Phys. B.83. 2006. P.595-600.ы
5. M. Adams, R.V. Craster and S. Guenneau, Guided and standing Bloch waves in periodic elastic strips, Waves in Random and Complex Media, Waves in Random and Complex Media, Vol. 19, No. 2, 2009, p.321–346.
6. Piliposyan D.G, Ghazaryan R.A., Ghazaryan K.B. Shear waves in periodic waveguide with alternating boundary conditions. Изв. НАН Армении. Механика. 2014. Т.67. №3. С.40-48.
7. А.С. Аветисян, А.А. Камалян, «О распространении электроупругого сигнала в неоднородном пьезодиэлектрическом слое класса 6мм» //Доклады НАН Армении. Т.114. №2. 2014. С.108-115
8. М.В. Белубекян, «Экранированная поверхностная сдвиговая волна в пьезоактивном полупространстве гексогональной симметрии».//В сб.: «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред», Ереван: Институт механики НАН РА, 2008. С.125-130.

Information of authors

K.B.Ghazaryan, Doctor of science, Professor, Principal science researcher,
Institute of mechanics NAN of Armenia, **E-mail:** ghkarren@gmail.com
D.G.Piliposyan, Science researcher, Institute of mechanics NAN of Armenia

THE BOUNDARY VALUE CONTACT PROBLEMS OF ELECTROELASTICITY FOR PIEZO-ELECTRIC HALF SPACE WITH ELASTIC INCLUSION

Nugzar Shavlakadze

The problem of finding of mechanical and electric fields in piezo-elastic half-space with elastic inclusion is considered. The inclusion is loaded with forces of constant intensity. The tangential contact stresses along the contact line are determined and the behavior of the contact stresses in the neighborhood of singular points is established. By using methods of the theory of analytic function, the problem is reduced to a singular integro-differential equation in a finite interval. Using an integral transformation a Riemann problem is obtained, the solution of which is presented in explicit form.

Introduction

The problems of determining the mechanical and electric fields in a piezo-electric medium (crystal of hexagonal system, polarized ceramics) weakened with tunnel type rectilinear and curvilinear cuts, the various boundary value problems of fracture mechanics for piezo-electric medium are considered in [1], in [2] are investigate asymptotic properties of solutions to mixed boundary value problems of thermo- electroelasticity for homogeneous anisotropic solids with interior cracks. The boundary value and contact problems of electroelasticity for plane with inclusion of variable rigidity and for half-space with cut are considered in [3].

Statement and solution of the problem

It is considered the problem of finding of mechanical and electric fields in piezo-elastic half-space $x_1 > 0$ of hexagonal class 6mm with elastic inclusion. Let rectilinear inclusion is located in the plane of symmetry $x_3 = 0$: $0 \le x_1 < 1, |x_2| < \infty,$ wherein the axis x_3 coincides with the axis of symmetry of the material. Tensile load acts to the outer edge of the inclusion with intensity τ_0.

It is assumed that components of the displacement vector and an elastic potential are not depend on x_2. According to the equilibrium equations of inclusion element and Hooke's law we have

$$\frac{du_1(x_1)}{dx_1} = \frac{1}{E(x_1)}[\tau_0 - \int_0^{x_1} \tau(t)dt]; \qquad E(x_1) = \frac{h_1(x_1)}{1-\nu_1^2} E_1(x_1) \tag{1}$$

$$\int_0^1 \tau(t)dt = \tau_0, \tag{2}$$

where $u_1(x_1)$ is displacement of inclusion points along axis ox_1, $\tau(x_1)$ is the jumps of unknown tangential contact strains, $E_1(x_1)$, $h_1(x_1)$ and ν_1 are modulus of elasticity, thickness and Poisson's ratio of inclusion material, respectively.

By virtue of statement of this problem the boundary condition in the plane $x_3 = 0$ has the form

$$\begin{gathered} \{\sigma_{33}\} = 0, \quad \{\tau_{13}\} = \tau(x_1), \qquad \left\{\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right\} = 0, \\ \left\{\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right\} = 0, \quad \{E_1\} = 0, \qquad \{D_3\} = 0 \end{gathered} \tag{3}$$

where $\{f\} = f^+ - f^-$, $f^+ = f(x_1, 0+)$, $f^- = f(x_1, 0-)$, and $\sigma_{11}, \sigma_{33}, \tau_{13}, u_1, u_3, E_1, E_3, D_1, D_3$ are stress components, displacement components, components of electrical stress and of electrical inductive, respectively.

In the plane $x_1 = 0$ we have the following conditions

$$\sigma_{11}(0, x_3) = \tau_{13}(0, x_3) = 0, \qquad E_3(0, x_3) = 0, \qquad x_3 \notin (-h_1(0), h_1(0)) \tag{4}$$

Accordingly, the problem can be reduced to the problem of plane strain in the half-plane:

$x_1 > 0, \qquad x_2 = 0.$

In plane x_1ox_3 we obtain the system of differential equations for stress function ϕ_1 and electrical field's potential ϕ_2 [1]:

$$l_{11}\phi_1 + l_{12}\phi_2 = 0, \quad l_{13}\phi_1 + l_{22}\phi_2 = 0 \tag{5}$$

where

$$l_{11} = a_{10}\partial_1^4 + a_{12}\partial_1^2\partial_3^2 + a_{14}\partial_3^4, \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \partial_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$l_{12} = l_{21} = a_{21}\partial_1^2\partial_3 + a_{23}\partial_3^3, \quad l_{22} = a_{20}\partial_1^2 + a_{22}\partial_3^2, \quad a_{10} = s_{33} - s_{13}^2 s_{11}^{-1}$$

$$a_{12} = s_{44} + 2s_{13}(1 - s_{12}s_{11}^{-1}), \quad a_{14} = s_{11} - s_{12}^2 s_{11}^{-1}, \quad a_{21} = s_{13}d_{13}s_{11}^{-1} - d_{33} + d_{15}$$

$$a_{23} = d_{13}(s_{12}s_{11}^{-1} - 1), \quad a_{20} = \varepsilon_{11}, \quad a_{22} = \varepsilon_{33} - d_{13}^2 s_{11}^{-1}.$$

s_{ik}, d_{ik}, ε_{ik} are elastic tractability, piezoelectric modules and dielectric constants, respectively.

By using three analytical functions, general solutions of equations (5) are represented as follows

$$\phi_1 = 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{3}\gamma_k \int \Phi_k(z_k)dz_k, \quad \phi_2 = -2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{3}\lambda_k \Phi_k(z_k) \tag{6}$$

$$z_k = x + \mu_k y, \quad \mu_{3+k} = \overline{\mu}_k, \quad \gamma_k = a_{20} + a_{22}\mu_k^2, \quad \lambda_k = a_{21}\mu_k + a_{23}\mu_k^3$$

μ_k $k = 1,2,3$ are roots of characteristic equation:

$$((a_{10} + a_{12}\mu^2 + a_{14}\mu^4)(a_{20} + a_{22}\mu^2) - \mu^2(a_{21} + a_{23}\mu^2)^2 = 0. \quad \operatorname{Im}\mu_k \neq 0$$

Using formulas (6) we obtain representation for stress component, displacement, vectors of electrical stress and electrical inductive:

$$\sigma_{11} = 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{3}\gamma_k\mu_k^2\Phi_k'(z_k), \quad \sigma_{33} = 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{3}\gamma_k\Phi_k'(z_k)$$

$$\tau_{13} = -2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{3}\gamma_k\mu_k\Phi_k'(z_k), \quad u_1 = 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{3} p_k\Phi_k(z_k),$$

$$u_3 = 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{3} q_k\Phi_k(z_k), \quad .$$

$$E_1 = 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{3}\lambda_k\Phi_k'(z_k), \quad E_3 = 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{3}\lambda_k\mu_k\Phi_k'(z_k), \quad D_1 = 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{3} r_k\mu_k\Phi_k'(z_k),$$

$$D_3 = -\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{3} r_k\Phi_k'(z_k),$$

$$p_k = a_{14}\gamma_k\mu_k^2 + \tfrac{1}{2}(a_{12} - s_{44})\gamma_k - a_{23}\lambda_k\mu_k,$$

$$q_k = \tfrac{1}{2}(a_{12} - s_{44})\gamma_k\mu_k + a_{10}\gamma_k\mu_k^{-1} - (a_{21} - d_{15})\lambda_k, \quad r_k = a_{20}\lambda_k\mu_k^{-1} - d_{15}\gamma_k.$$

By using three analytical functions the conditions (3) can be represented as follows:

$$\operatorname{Re}\sum r_k\left\{\Phi_k(x_1)\right\} = 0, \quad \operatorname{Re}\sum \gamma_k\left\{\Phi_k(x_1\right\} = 0, \quad \operatorname{Re}\sum p_k\left\{\Phi_k(x_1)\right\} = 0$$

$$\operatorname{Re}\sum \gamma_k\mu_k\left\{\Phi_k(x_1)\right\} = \tau(x_1), \quad \operatorname{Re}\sum \lambda_k\left\{\Phi_k(x_1\right\} = 0, \quad \operatorname{Re}\sum q_k\left\{\Phi_k(x_1)\right\} = 0 \tag{7}$$

Without loss of generality, assume that $\mu_k = i\beta_k$, $\beta_k > 0$, we have the following relations

$$\mathrm{Re}\left\{\Phi_k(x_1)\right\}=0$$

$$\Phi_k^+(x_1)-\Phi_k^-(x_1)=\frac{\Delta_k}{\Delta_0}i\tau(x_1) \tag{8}$$

where

$$\Delta_0=\begin{vmatrix} i\gamma_1\mu_1 & i\gamma_2\mu_2 & i\gamma_3\mu_3 \\ i\lambda_1 & i\lambda_2 & i\lambda\gamma_3 \\ iq_1 & iq_2 & iq_3 \end{vmatrix}\neq 0, \qquad \Delta_k\equiv A_{3k}$$

A_{3k} are corresponding algebraic additions.

Since $\tau(x_1)=0, \qquad x_1>1,$ the general solution of problem (8) is represented as follows[4]:

$$\Phi_k(z_k)=\frac{\Delta_k}{2\pi\Delta_0}\int_0^1\frac{\tau(t)dt}{t-z_k}+W_k(z_k)\equiv\Psi_k(z_k)+W_k(z_k), \qquad z_k\in S_k, \qquad \mathrm{Re}\, z_k>0 \tag{9}$$

where $W_k(z_k)$ are analytic functions in half-planes $\mathrm{Re}\, z_k>0, \qquad k=1,2,3$.

To determinate the analytic functions $W_k(z_k)$ let as apply boundary conditions (4) in the plane $x_1=0,$

we obtain

$$W_1(z_1)=A_1\bar{\Psi}_1(-z_1)+A_2\bar{\Psi}_2(-\frac{\beta_2}{\beta_1}z_1)+A_3\bar{\Psi}_3(-\frac{\beta_3}{\beta_1}z_1)$$

$$W_2(z_2)=B_1\bar{\Psi}_1(-\frac{\beta_1}{\beta_2}z_2)+B_2\bar{\Psi}_2(-z_2)+B_3\bar{\Psi}_3(-\frac{\beta_3}{\beta_2}z_2)$$

$$W_3(z_3)=C_1\bar{\Psi}_1(-\frac{\beta_1}{\beta_3}z_3)+C_2\bar{\Psi}_2(-\frac{\beta_2}{\beta_3}z_3)+C_3\bar{\Psi}_3(-z_3)$$

where

$A_k=(-\gamma_k\beta_k^2\tilde{A}_{11}-i\gamma_k\beta_k\tilde{A}_{21}-i\lambda_k\beta_k\tilde{A}_{31})/\tilde{\Delta}$, $B_k=(\gamma_k\beta_k^2\tilde{A}_{12}+i\gamma_k\beta_k\tilde{A}_{22}+i\lambda_k\beta_k\tilde{A}_{32})/\tilde{\Delta},$

$C_k=(-\gamma_k\beta_k^2\tilde{A}_{13}-i\gamma_k\beta_k\tilde{A}_{23}-i\lambda_k\beta_k\tilde{A}_{33})/\tilde{\Delta},$

$$\tilde{\Delta}=\begin{vmatrix} \gamma_1\beta_1^2 & \gamma_2\beta_2^2 & \gamma_3\beta_3^2 \\ i\gamma_1\beta_1 & i\gamma_2\beta_2 & i\gamma_3\beta_3 \\ i\lambda_1\beta_1 & i\lambda_2\beta_2 & i\lambda_3\beta_3 \end{vmatrix}\neq 0, \qquad k=1,2,3.$$

$\tilde{A}_{ij}$ are corresponding algebraic additions.

Since $\mathrm{Re}\,\tilde{\Delta}=0,$ it is shows that $\mathrm{Im}\{A_k,B_k,C_k\}=0, \qquad k=1,2,3$

On the basis of the condition (1-2) we obtain the following singular integro-differential equation with fixed singularity

$$\omega_1\int_0^1\frac{\phi'(t)dt}{t-x_1}+\omega_2\int_0^1\frac{\phi'(t)dt}{t+x_1}+\int_0^1 R(t,x_1)\phi'(t)dt=\frac{\pi[\tau_0-\phi(x_1)]}{2E(x_1)},\qquad 0<x_1<1 \tag{10}$$

$$\phi(0)=0,\qquad \phi(1)=\tau_0$$

where

$$\phi(x_1)=\int_0^{x_1}\tau(t)dt,$$

$$\omega_1=\sum_{k=1}^{3}\frac{p_k\Delta_k}{\Delta_0},\qquad \omega_2=\frac{p_1A_1\Delta_1+p_2B_2\Delta_2+p_3C_3\Delta_3}{\Delta_0},\qquad R(t,x_1)=\sum_{k\neq j=1}^{3}\frac{\omega_{ij}}{\beta_k t+\beta_j x_1}$$

$$\omega_{1l}=\beta_1\frac{p_1A_l\Delta_l}{\Delta_0},\quad l=2,3;\quad \omega_{2r}=\beta_2\frac{p_2B_r\Delta_r}{\Delta_0},\quad r=1,3;\quad \omega_{3m}=\beta_3\frac{p_3C_m\Delta_m}{\Delta_0},\quad m=1,2$$

If the stiffness of the inclusion varies linearly, i.e. $E(x)=hx,\quad x\in(0,1)$, making the substituting $t=e^{\varsigma},\ \ x_1=e^{\xi}$ [5] in the integral-differential equation (10), we obtain

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{\varsigma}\phi'(e^{\varsigma})d\varsigma}{1-\exp(\varsigma-\xi)}-\int_{-\infty}^{\infty}Q(e^{\varsigma-\xi})\phi'(e^{\varsigma})e^{\varsigma}d\varsigma=-\frac{\pi\tau_0}{2h\omega_1}\eta_-(\xi)-\frac{\phi\ (e^{\xi})}{2h\omega_1}+\psi_+(\xi) \tag{11}$$

where $Q(x_1)=\dfrac{\omega_2}{\omega_1}(1+x_1)^{-1}+\sum\limits_{k\neq j=1}^{3}\dfrac{\beta_i\omega_{ij}}{\omega_1\beta_j}(\beta_k+\beta_j x_1)^{-1},\qquad \eta_-(\xi)=\begin{cases}0, & \xi>0\\ -1, & \xi<0\end{cases}$

$$\psi_+(\xi)=\begin{cases}0, & \xi<0\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\phi'(e^{\varsigma})d\varsigma}{1-e^{-(\xi-\varsigma)}}+\int_{-\infty}^{\infty}Q(1,e^{-(\xi-\varsigma)})\phi'(e^{\varsigma})d\varsigma, & \xi>0\end{cases}$$

applying the generalized Fourier transformation[6] in (11) we come to the Riemann problem :

$$\Psi^+(s)=G(s)\Phi^-(s)+g\ (s),\qquad -\infty<s<\infty \tag{12}$$

where

$$G\ (s)=s\,\mathrm{cth}\,\pi s-\frac{\omega_2 s}{\omega_1\,\mathrm{sh}\,\pi s}-s\sum_{k\neq j=1}^{3}\frac{\omega_{kj}}{\omega_1\beta_j}\frac{\exp(-i\alpha_{kj}s)}{\mathrm{sh}\,\pi s}+\frac{2}{\omega_1 h},\qquad \alpha_{kj}=\ln\frac{\beta_j}{\beta_k}$$

$$\Phi^-(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}\phi(e^{\varsigma})e^{\varsigma(1+is)}d\varsigma,\qquad \Psi^+(s)=\frac{i}{\omega_1\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}\psi_+(e^{\varsigma})e^{\varsigma(1+is)}d\varsigma$$

$$g\ (s)=i\tau_0(\mathrm{cth}\,\pi s-\frac{\omega_2}{\omega_1\,\mathrm{sh}\,\pi s}-\sum_{k\neq j=1}^{3}\frac{\omega_{kj}}{\omega_1\beta_j}\frac{\exp(-i\alpha_{kj}s)}{\mathrm{sh}\,\pi s})_- -i\tau_0\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2hs_-}$$

By virtue of functions $\Psi^+(s)$, $\Phi^-(s)$ definition, they will be limit values of the functions, which are
holomorphic in the upper and lower half-planes, respectively.
Condition (2.8) can be represented in the form

$$\frac{\Psi^+(s)}{\sqrt{s+i}}=\frac{G(s)}{\sqrt{1+s^2}}\Phi^-(s)\sqrt{s-i}+\frac{g(s)}{\sqrt{s+i}}$$

The solution of this problem has the form:

$$\Phi^-(z) = \frac{\tilde{X}(z)}{\sqrt{z-i}}, \qquad \operatorname{Im} z \le 0; \qquad \Psi^+(z) = \tilde{X}(z)\sqrt{z+i}, \qquad \operatorname{Im} z > 0 \tag{13}$$

$$\Phi^-(z) = (\Psi^+(z) - g(z))G^{-1}(z) \qquad\qquad 0 < \operatorname{Im} z < 1$$

where

$$\tilde{X}(z) = X(z)\left\{ -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(t)dt}{X^+(t)\sqrt{t+i}(t-z)} \right\}, \qquad X(z) = \exp\left\{ \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln G_0(t)dt}{t-z} \right\}.$$

$G_0(s) = G(s)(1+s^2)^{-1/2}$, $\operatorname{Re} G_0(t) > 0$, $G_0(\infty) = G_0(-\infty) = 1$, $Ind G_0(t) = 0$.

It can be shown that $\Phi^-(s+i0) = \Phi^-(s-i0)$, and consequently, the function $\Phi^-(z)$ is holomorphic in the half-plane $\operatorname{Im} z < 1$, apart from points which are the zeros of the function $G(z)$ in the upper half-plane. We will investigate the behavior of the contact stresses in the neighborhood of the singular points z=0 and z=1. The boundary value of the function $K(z) = \tau_0 - iz\Phi^-(z)$ must be Fourier transform of the function $\phi'(e^{\xi})$, the function

$$\tilde{K}(z) = K(z) - \frac{\tau_0}{2} = \frac{\tau_0}{2} + \frac{C}{\sqrt{z-i}} + \frac{C(X(z)-X(\infty))}{\sqrt{z-i}} + \frac{i\tau_0 z X(z)}{2\pi\sqrt{z-i}}\int_{-\infty}^{0} \frac{g_0(t)dt}{X^+(t)\sqrt{t+i}(t-z)} -$$

$$\frac{i\tau_0 X(z)}{4h\sqrt{2\pi}\sqrt{z-i}}\int_{-\infty}^{0} \frac{dt}{X^+(t)\sqrt{t+i}(t-z)}$$

vanish at infinity and his boundary value $\tilde{K}^-(s) = \dfrac{C}{\sqrt{s-i}} + \tilde{K}_0^-(s)$ is Fourier transform of the function $\phi'(e^{\xi})$, where $\tilde{K}_0^-(s)$ is Fourier transform of the function, continuous on the semiaxis $x \le 0$, apart, possibly, from the point $s = 0$, at which it may have a logarithmic singularity. By an inverse Fourier transformation $\tau(x_1) = \phi'(x_1) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}x_1}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{K}^-(t)e^{-it\ln x_1}dt$ for tangential contact stresses we have the following estimates :

$\tau(x_1) = O(1/\sqrt{1-x_1})$, $\quad x_1 \to 1-$, $\qquad \tau(x_1) = K_1 x_1^{\omega_0 - 1 - i\alpha_0} + O(x_1^{\beta_0 - 1})$, $\quad x \to 0+$,

$G(i\omega_0^1) = 0$, $\quad \omega_0 < \beta_0 < \omega_0^1$, where $\alpha_0 + i\omega_0$ is a simple zero of the function $G(z)$ with minimal absolute value in domain $D_0 = \{z : 0 < \operatorname{Im} z < 1\}$.

References

1. Parton V. Z., Kudriavzev B. A. Electromagneto-elasticity of piezo-electric and electro-conductive bodies. Moscow, Nauka, 1988. 470 p.
2. Buchukuri T., Chkadua O., Natroshvili D. Mixed Boundary value problems of thermopiezoelectricity for solids with interior cracks. Int. equations and Operator Theory, 64(2009), 495-537.
3. R. Bantsuri, N. Shavlakadze, The boundary value and contact problems of thermoelectroelasticity for plane with inclusion and for half-space with cut. Journal of Applied Mathematics and Mechanics.78.2014, No.4, 583-594.
4. Muskhelishvili N. I. Singular integral equations. Moscow, Nauka, 1966. 591 p.
5. N. Shavlakadze . Solution of system of integral differential equations and its application in the theory of elasticity. // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. ZAMM. Z. Angew. Math. Mech. 91. 2011. No. 12. P. 979-992.
6. Gakhov F.D., Cherskii Yu.I. Convolution type equations. Moscow, Nauka 1978. 295 p.

Nugzar Shavlakadze Iv. Javakhishvili Tbilisi State University A.Razmadze Mathematical Institute, Tamarashvili str. 6, 0177, Tbilisi, Georgia

e-mail: nusha@rmi.ge

EXACT NONLINEAR CLOSED-FORM SOLUTIONS FOR THE NEWTONIAN COLLAPSE OF A PERFECT GRAVITATING FLUID

Silbergleit A.S., Chernin A.D.

We give a set of exact nonlinear closed-form solutions for the non-spherical collapse of pressure-less matter in Newtonian gravity, and indicate their possible cosmological applications.

1. Introduction

The Zeldovich approximation [1], of decades ago, is based on an elegant exact nonlinear solution for the Newtonian anisotropic motion of dust-like gravitating matter. It makes a foundation for modern studies of the large-scale cosmic structure formation (see the classic paper [2], recent works [3], and the references therein).

We re-visit the Zeldovich solution and its generalizations [4,5] to reveal their new features emerging under the time-reversal transformation (TrT), $t \to -t$. First, the Friedmann general-relativistic cosmological solution is known to have a Newtonian analog corresponding to a uniform isotropic expansion of a perfect pressure-less gravitating fluid (`dust'). After the TrT, it turns to the solution describing the isotropic gravitational collapse (parabolic motion):

$$\vec{x}(t,\vec{\xi}) = (t_0 - t)^{2/3}\vec{\xi}; \qquad \rho(t) = [6\pi G(t_0 - t)^2]^{-1}. \tag{1}$$

Here $\vec{x}$ is the Euler, and $\vec{\xi}$ is the Lagrange coordinate, G is the Newtonian gravitation constant, $\rho(t)$ is the matter density, and t_0 is the collapse time, when the scale factor $a(t) = (t_0 - t)^{2/3}$ becomes zero and the density goes to infinity. Solution (1) applies to uniform spheres of a finite total mass and any initial radius.

In this paper we give a set of solutions for the non-spherical (anisotropic) collapse using the time reversal of expansion solutions found in [1,4,5], and discuss their properties. Those could be interesting for modern cosmology that recognizes three types of building blocks forming the large-scale Cosmic Web. Those are rich spherical clusters of galaxies, flat superclusters (`pan-cakes'), and elongated filaments. With all the necessary reservations, one may suggest that the formation and evolution of spherical clusters can be described by the solution (2), (3) for the asymptotically spherical collapse. Superclusters and filaments may be treated as highly oblate and highly prolate structures, respectively. Their formation and evolution may be described by the solutions (4),(5) and (8),(9) containing the growing mode. Hopefully, they can correctly expose the basic features of a real finite mass collapse with the same dynamical asymptotics. Formulas (11) generalize all the solutions by including dark energy in the picture.

2. Collapse with decaying asphericity

The well--known Zeldovich's `pan-cake' solution [1] for planar motion of pressure-free matter takes the form, after the TrT :

$$x_1(t,\xi_1) = (t_0 - t)^{2/3}\xi_1 + (t_0 - t)^{4/3} f(\xi_1), \qquad x_{2,3}(t,\xi_{2,3}) = (t_0 - t)^{2/3}\xi_{2,3} \tag{2}$$

$$\rho(t,\xi_1) = \frac{1}{6\pi G(t_0 - t)^2}\frac{1}{1 + (t_0 - t)^{2/3} f'(\xi_1)}, \qquad f'(\xi_1) = \frac{df}{d\xi_1} \tag{3}$$

The deviation in x_1 from the spherically symmetric motion (1) goes to zero when $t \to t_0 - 0$, becoming negligible against the background (a decaying mode). So formulas (2), (3) describe an initially non-spherical collapse which undergoes spherization and becomes completely spherical in the end.

The density (3) is non-singular until the collapse when $1+(t_0-t)^{2/3} f'(\xi_1)>0$ for all ξ_1, guaranteeing also a unique inverse, $\vec{\xi}=\vec{\xi}(t,\vec{x})$, of the law of motion $\vec{x}=\vec{x}(t,\vec{\xi})$, as required. The inequality, and thus the solution, is apparently valid for a *finite* period of time, $t_i<t<t_0$, if $f'(\xi_1)\geq -(t_0-t_i)^{-2/3}$. For $t_i=-\infty$, function $f(\xi_1)$ is non--decreasing, $f'(\xi_1)\geq 0$, so the solution holds on the whole semi-axis $-\infty<t<t_0$.

3. Collapse with growing asphericity

A counterpart to the solution (2), (3) comes from paper [4]. Applying the TrT to the solution obtained in it, one finds:

$$x_1(t,\xi_1)=(t_0-t)^{2/3}\xi_1+(t_0-t)^{-1/3}F(\xi_1), \qquad x_{2,3}(t,\xi_{2,3})=(t_0-t)^{2/3}\xi_{2,3} \tag{4}$$

$$\rho(t,\xi_1)=\frac{1}{6\pi G(t_0-t)^2}\frac{1}{1+(t_0-t)^{-1}F'(\xi_1)} \tag{5}$$

The deviation from spherical symmetry here increases with the time (growing mode); initially $(t=-\infty)$ the flow is entirely spherical. The density is non-singular until $t=t_0$ if and only if $F'(\xi_1)\geq 0$. Unlike the previous two cases (1) and (2), near the collapse it is inversely proportional to the first, instead of the second, power of (t_0-t) and, generically, remains non-uniform, $\rho\sim[6\pi G(t_0-t)F'(\xi_1)]^{-1}$; instead of a point, the dust collapses to the x_1-axis.

If the above inequality is violated, and the minimum of $F'(\xi_1)$ is at a single point,

$$\min_{\xi_1} F'(\xi_1)=F'(\xi_1^*)=-t_*<0 \tag{6}$$

then a *local* collapse occurs at $t=t_0-t_*$ before the global one at $t=t_0$: the density becomes infinite at the plane $\xi_1=\xi_1^*$, or $x_1=t_*^{2/3}\xi_1^*+t_*^{-1/3}F(\xi_1^*)$. If the same minimum is achieved at a number of discrete ξ_1-points, then the `early' collapse happens at all the corresponding planes. If Eq. (6) holds for an *interval* of ξ_1,

$$F(\xi_1)=-t_*\xi, \qquad \alpha<\xi_1<\beta \tag{7}$$

then $x_1(t,\xi_1)=(t_0-t)^{-1/3}(t_0-t_*-t)\xi_1,\ x_1(t_0-t^*,\xi_1)=0$ for $\alpha<\xi_1<\beta$, and this whole ξ_1-layer collapses to a single plane $x_1=0$. Ultimately, when Eq. (6) is valid for *all* ξ_1, the early collapse becomes *global*: the density is uniform, $\rho(t,\xi_1)=\left[6\pi G(t_0-t)(t_0-t_*-t)\right]^{-1}$; the whole space collapses. Still, the flow remains anisotropic, so the dust goes to the plane $x_1=0$, and not to a point.

4. General solution

In paper [4] a solution containing both modes was also found; its time reversal is ($x_{2,3}$ are as before):

$$x_1(t,\xi_1)=(t_0-t)^{2/3}\xi_1+(t_0-t)^{4/3}f(\xi_1)+(t_0-t)^{-1/3}F(\xi_1) \tag{8}$$

$$\rho(t,\xi_1)=\frac{1}{6\pi G(t_0-t)^2}\frac{1}{1+(t_0-t)^{2/3}f'(\xi_1)+(t_0-t)^{-1}F'(\xi_1)}\ . \tag{9}$$

It is general in a sense that the two free functions $f(\xi_1)$ and $F(\xi_1)$ allow one to meet any initial conditions for both the x_1-coordinate and x_1 -velocity. The solution (8),(9) is valid at all times for $f'(\xi_1)\geq 0,\ F'(\xi_1)\geq 0$; other cases are analyzed as above. Of course, the decaying mode plays no role near the collapse, which is thus either an early $(t<t_0)$ planar, or a global axial one at $t=t_0$.

Note that solutions describing the expansion with an anisotropic flow and *uniform* density $\rho(t) = \left[6\pi G(t - t_0)\right]^{-2}$ were studied in paper [6]. Their time reversals can add to the set of non--spherical collapse solutions obtained here.

5. Anisotropic collapse of a finite mass

All the solutions of secs. 2-4 apply to circular cylinders of a finite mass with the symmetry axis along x_1, of an arbitrary initial radius and height, whose density is uniform in both the radial and azimuthal directions. Such a cylinder is specified by the following bounded set of Lagrange variables:
$\alpha < \xi_1 < \beta, \quad \sqrt{\xi_2^2 + \xi_3^2} < \gamma; \qquad -\infty < \alpha < \beta < \infty, \quad 0 < \gamma < \infty$.

The decaying--mode solution of sec. 2 describes the collapse of a cylinder to a point. Two other solutions, of secs. 3 and 4, containing the growing mode, end up with an early $(t < t_0)$ collapse to a disk (or a number of disks) perpendicular to the x_1 axis, when $F'(\xi_1) < 0$ for some values of ξ_1 in the above range. Otherwise $F'(\xi_1) > 0$ for all ξ_1, and the cylinder collapses at $t = t_0$ to a part of the x_1-axis. Depending on the behavior of $F(\xi_1)$, it can be either the whole axis, or semi-axis, or its finite segment moving to infinity when $t \to t_0 - 0$.

6. Collapse on the dark energy background

The original Friedmann cosmological solution includes the cosmological constant Λ, which may be zero or non-zero. The time-reversed isotropic flow with $\Lambda > 0$ is:

$$\vec{x}(t,\vec{\xi}) = a(t)\vec{\xi}, \quad \rho(t) \propto [a(t)]^{-3}; \qquad a(t) \propto \sinh^{2/3}\left[(3/2)(\sqrt{3\Lambda})(t_0 - t)\right] \tag{10}$$

The corresponding non-spherical solution of paper [5] after the TrT becomes:

$$x_1(t,\xi_1) = a(t)\xi_1 + \phi(t) f(\xi_1) + \Phi(t) F(\xi_1), \qquad x_{2,3}(t,\xi_{2,3}) = a(t)\xi_{2,3} \tag{11}$$

The expressions for the decaying, $\phi(t)$, and growing, $\Phi(t)$ modes are found in [5]. Solution (11) is general in the same sense as the solution (8).

REFERENCES

1. Zeldovich Ya.B. *Astrophys.* **6**, 319, 1970; *Astron.&Astrophys.* **5**, 84, 197, 1970;
2. Zeldovich Ya.B., Einasto J., Shandarin S.F. *Nature* **300**, 407, 1982.
3. Shandarin S.F., Habib S., Heitmann K. *Phys. Rev. D* 81j3006S, 2010; Gurbatov S.N., Saichev A.I., Shandarin S.F. *Physics Uspekhi* **55**, 223, 2012; Hidding J., Shandarin S.F., van de Weigaert R. *MNRAS* **437**, 3442, 2014. Suhhonenko I., Einasto J., Liivamagi L.J., *et al. Astron.&Astrophys.* **531**, A149, 2011.
4. Zentsova A.S., Chernin A.D. *Astrophys.* **16**, 108, 1980.
5. Chernin A.D., Nagirner D.I., Starikova S.V. *Astron.&Astrophys.*, **399**, 19, 2003.
6. Silbergleit A.S. *Journ. Math. Phys.* **36**, 847, 1995.

Information about authors

Silbergleit, Alexander S.- Senior Res. Sci., HEPL, Stanford University, Stanford, CA 94305-4085, USA**. e-mail:** alex.gleit@gmail.com

Chernin, Arthur D. - Prof., Sternberg Astronomical Institute, Moscow University,
Moscow, Russia. **e-mail:** chernin@sai.msu.ru.

AN EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF THE MECHANICAL PROPERTIES OF THE AGED GLASS TEXTOLITE SUBJECTED TO TENSILE LOAD

Valesyan S. Sh.

The mechanical properties of the aged glass textolite (GFRP composite-laminate) subjected to the tensile load are studied. The test pieces of two types of fiber orientation are investigated. Approximations of the test results are defined and compared with the experimental data. Based on these data, the corresponding figures are plotted.

INTRODUCTION.

Glass textolite (GFRP composite-laminate) is characterized by excellent thermal conductivity, moisture and biological resistance, and high strength, as well as it is lightweight, has good insulating properties and non-toxic. Taking into account mechanical properties, heat resistance and resistance to external environments, the glass textolite (GFRP composite-laminate) exceeds the PCB, and the maintenance of products manufactured from the glass textolite in the open air for 20 years is an important factor of production.

The glass textolite (GFRP composite-laminate) is possible easily to machine such as the cutting, drilling, turning and grinding, for this reason it has a wide application in aviation, metallurgy, oil and gas processing industry, shipbuilding, during the production of the hardware and technical equipment of trolley buses and trams. Particularly, the glass textolite (GFRP composite-laminate) is used for the production of items applicable in electrical engineering, as a structural and insulation material.

A wide range of papers and books are dedicated to the investigation of mechanical properties of composites.

The influence of long-term storage on the mechanical properties of reinforced polymeric plastics was studied [1]. The research carried out in [2] is studied strength properties and ageing of sheet fiber glasses in the various climatic conditions.

The influence of external conditions in cosmos on the parts of construction subjected to tension, compression, and shear are investigated [3]. Meanwhile, the conditions of ageing both the laboratory conditions and open space are compared.

The effect of dispersed mineral fillers on the mode of deformation during the tensile test and fracture toughness of the polyester is considered [4]. The research of dissipative properties of plate reinforced composited cut out of the composite under $\varphi=0^0$; 5^0; 15^0; 30^0; 45^0; 60^0; 90^0 angles to the direction of reinforcement carried out [5].

In view of the wide application of composites in construction and civil engineering over the last decade, the experimental and theoretical investigation of a composite beam for bridge structures is contemporary issue [6]. Deformation behavior, strength and mechanical properties of unidirectional carbon fiber laminates are considered [7]. The dissipative properties of the polymeric composites determined as a result of their repeated - static loading, considering technology factors and temperature-moisture conditions of an environment are known from work [8].

The first part of the book [9] reviews processes and modeling of composite ageing including physical and chemical ageing of polymeric composites, ageing of glass-ceramic matrix composites, chemical ageing mechanisms, stress corrosion cracking, thermo-oxidative ageing, spectroscopy of ageing composites, modeling physical and accelerated ageing and ageing of silicon carbide composites; the second part examines ageing of composites in transport applications including aircraft, vehicles and ships; and the third part reviews ageing of composites in non-transport applications such as implants in medical devices, oil and gas refining, construction, chemical processing and underwater applications.

An experimental study on mechanical properties of GFRP braid-pultruded composite rods was carried out in [10]. In [10] all braid-pultruded (BP) rod types were subjected to tensile, bending and torsion tests, as well as the experimental results showed that BP rods have considerably higher shear modulus, but lower tensile modulus and flexural rigidity than those of unidirectional (UD) pultruded rods, when fiber volume fraction is kept constant. Moreover, rods produced with higher braid roving linear densities had better torsional, but lower tensile and flexural properties. The highest shear modulus was observed in BP rods with braid angle of 45°.

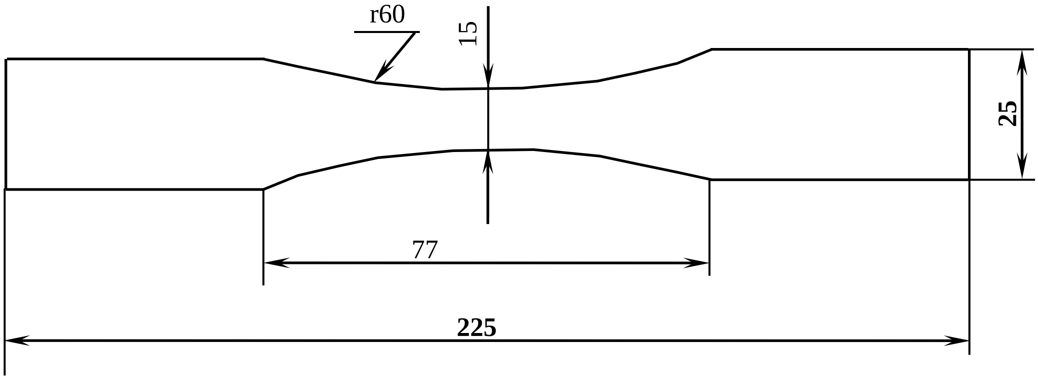
In experimental work [11], the influence of carbon fibers (CFs) added to polyimide (PI) composite plastics was investigated, and the effect of carbon nanotubes (CNTs) on the fiber-matrix interface was studied. The results obtained in [11] show that the mechanical properties of CF/CNT/PI nano-composites are superior to those of CF/PI composites.

In the paper [12], the author analyzes the mechanical properties of plain-weave composites by employing different micromechanical models, and their in-plane and flexural properties are estimated using analytical approaches, including the rule of mixtures and one-dimensional composite beam and two-dimensional mosaic models. The expressions of effective material properties are obtained in [12] for one-, two-, and three-ply woven composites.

EXPERIMENTAL PART.

Experimental samples (Fig.1) as double-sided blades, which sizes satisfy the requirements of GOST (State Standard Specification) 1199-78, were cut out from the sheet of glass textolite (Glass Fibre Reinforced Polimer composite-laminate (GFRP composite-laminate)) with the angle of orientation of the woven fiber 0^0 and 90^0, and thickness ≈ 9 mm.

a)



b)

Fig.1. Experimental double-sided spattle-shape GFRP composite-laminate sample.

Glass textolite (Glass Fibre Reinforced Polimer composite-laminate) is a laminate made of glass-cloth saturated by the thermosetting tar. Glass textolite (GFRP composite-laminate) is intended for the manufacture of sheets and products of constructional purposes.

According to GOST (State Standard Specification) 25500-82 glass textolite (GFRP composite-laminate) test pieces were stored in a horizontal position at a distance of not less than 50 mm from the floor. The storage room was closed, dry indoor air temperature was 20-25 ^{0}C (the temperature interval stated by State Standard Specification from -10 °C to + 35 °C), while the relative humidity did not exceed 80 % (according to State Standard Specification).

Tests were carried out in about 35 years after manufacturing of the experimental samples.

The tests were performed by the testing machine ZD 10/90 at the loading speed 5 mm / min.

During the unidirectional tensile loading samples were tested with the step of loading $0{,}1\sigma_u$ (σ_u - ultimate strength of samples). The maximal value of the applied loading was $0{,}8\ \sigma_u$. Experimental data were written down by clock-type meter. Experimental data are evaluated and curves are plotted (Fig. 2).

Approximation of experimental data (σ and ε) are defined by equation:

$$\sigma = \alpha\varepsilon + \beta\varepsilon^n ,$$

where ε – value of the strain determined from the value of permanent set, and α, β, n - parameters of approximation

RESULTS AND DISCUSSIONS.

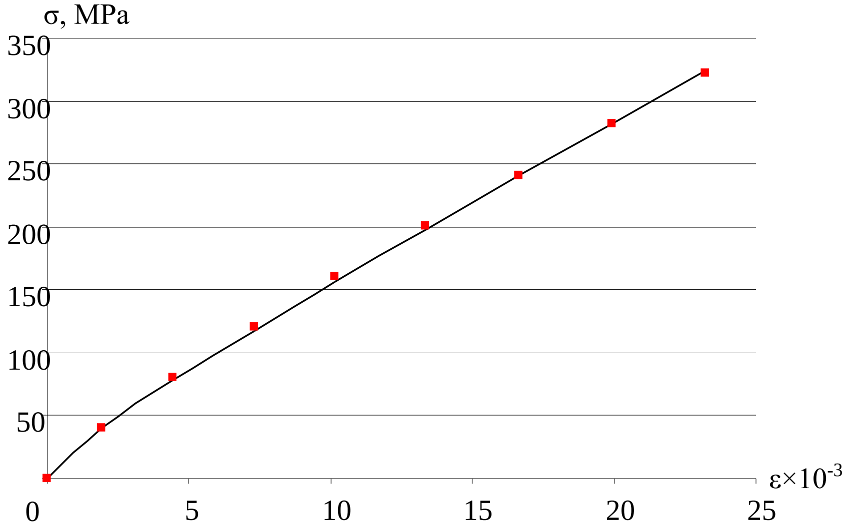
Results of testing are given on Figures 2, 3.

Comparing the values of failure tensile stress brought in the handbook of electrotechnics materials [13] and obtained by the experimental investigation of aged glass textolite (GFRP composite-laminate) with the orientation of the woven fiber 0^0 and 90^0 are increased on 25 % and 35%, correspondingly (Fig. 2).

Fig. 2 Failure test

On the Figure 3 (*a* and *b*), the curves of experimental data are plotted by dots, the curves of theoretical values are plotted by solid lines.

a) the angle of woven fiber orientation - 0^0



b) the angle of woven fiber orientation - 90^0

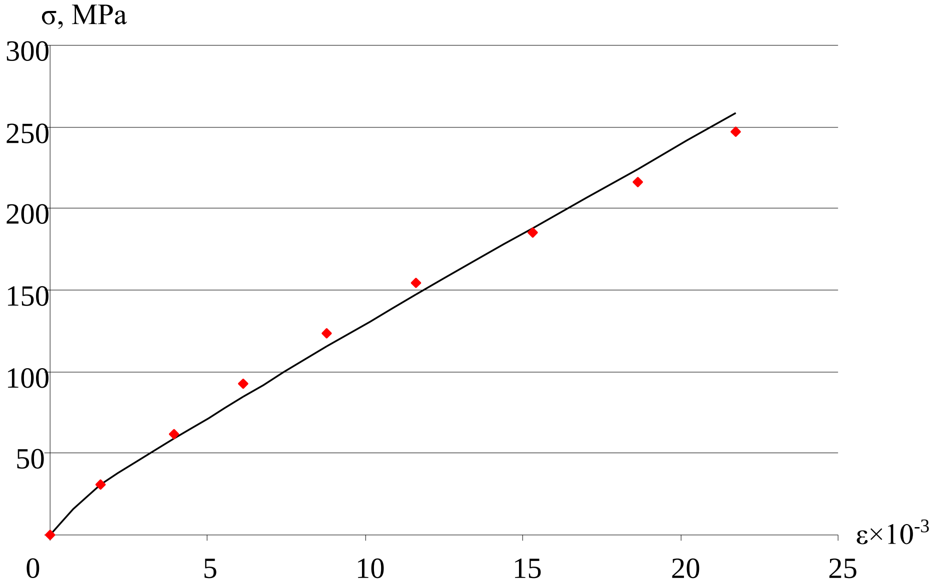


Fig. 3 (*a* and *b*) Curves of the unidirectional tension of glass textolite.

From the diagrams given on fig. 1 it follows, that at short-term force influences ageing results in increase of the deformability of getinacks.

CONCLUSIONS.

The influence of ageing on the mechanical properties of glass textolite (GFRP composite-laminate) subject to the unidirectional tensile load should be insignificant.

The applied equation allows plotting theoretical curves close to curves plotted based on the experimental data. For the glass textolite (GFRP composite-laminate) with the angle of orientation of the woven fiber 0^0 and 90^0, the experimental and theoretical curves' data are coincided on 97% (the error is 3%) and 95.55% (the error is 4.45%), correspondingly.

REFERENCES.

1. Ogibalov P.M. and Tuneeva I.M. Influence of long-term storage on the mechanical properties of reinforced plastics. Mech. of Polymer, 1969, (3), 556-558.
2. Smirnova Z.A. and Vlasov P.V. Strength properties and ageing of sheet fiberglasses in the various climatic conditions. Mech. of Polymer, 1971, (3), 554-558.
3. Jegun E. G., Ivonin U. N., Shlica R. P. and Nikishin E. F. Effect of prolonged exposure at extreme conditions on the properties of pre-loaded composites subjected to tension, compression, and shear. Mechanics of Composite Materials, Latvian. AS, 1987, (5), 813-818.
4. Babaevsky P.G., Belnik A.R., Babayevskaya N.Y., Zhukov N.S. and Roginski S. Effect of dispersed mineral fillers on the deformation-strength properties and fracture toughness of the cured polyester. Mechanics of Composite Materials, Latvian AS, 1987, (5), 819-824.
5. Limonov V.A., Perevozchikov V.G. and Tamuzh V.P. Fatigue of layered composites with different reinforcement schemes. Mechanics of Composite Materials, Latvian.AS, 1988, (5), 786-796.
6. Piskunov V., Grinevitskii B. and Finkelshtein I. Experimental and Theoretical Investigation of a Composite Beam for Bridge Structures. Mechanics of Composite Materials, 2006, 42(4), 315-325.

7. Kucher N. K., Zemtsov M. P., and Zarazovskii M. N. Deformation Behavior and Strength of Unidirectional Carbon Fiber Laminates. Mechanics of Composite Materials, 2006, 42(5), 407-419.
8. Karapetyan K.A. Deformation properties of fiberglass pipes at repeated-static single-axial and combined loading. Reports of NAS RA-Mechanics, 2001, 101(4), 317-323.
9. Martin R. Aging of Composites, Woodhead Publishing, 2008.
10. M. S. Ahmadi, M. S. Johari, M. Sadighi, M. Esfandeh An experimental study on mechanical properties of GFRP braid-pultruded composite rods/ eXPRESS Polymer Letters, 2009, Vol.3, No.9, p. 560–568
11. J. G. Zhang The effect of carbon fibers and carbon nanotubes on the mechanical properties of polyimide composites / Mechanics of composite materials, 2011, Vol. 47, N4.
12. O. Soykasap Analysis of plain-weave composites / Mechanics of composite materials, 2011, Vol. 47, N2.
13. Electrotechnics Materials – Handbook. Editors: U.V. Korickij, V.V. Pasinkov, B.M. Tareev. – M.:Energoizdat, 1986, V.1, 368p.(P.320-322) (Rissian)

Information about author

Valesyan Sona – Doctor of Engineering, Researcher, Institute of Mechanics of NAS RA
Tel.: +37410 23-70-74

THE INVESTIGATION OF GENERATION OF PROPAGATING CRACK DURING PENETRATION OF CONE

Vantsyan A.A.

For known Gurson-Tvergard-Needelman model, describing dynamics of micro pores, in equation of porosity, instead of quassion distribution for probability density, is introduced its nonlinear generalization, which can be calculated for different values of nonlinearity coefficient and can be carried out comparison with experiments. Analogously to that, what is carried out in works of famous physics in study of traffic flow to mentioned nonlinear equation are added diffusion, relaxation and fluctuations terms in complete correspondence with equation for semiconductors. All solutions for traffic flow, including phase transition to bottleneck, are carried out identically with above mentioned solutions for semiconductors, besides due to the method of nonlinear waves is carried out supplementation of nonlinearity in Fokker-Plank equation and are studied spatial stochastic problems where stationary solution already is function from coordinate. All these considerations are transmitted on phenomenological description of problem of motion of micro pores with abrupt phase transition to macro fracture, describing by same model equation as for semiconductors and traffic flow, however already written for porosity by determination of its value in stationary state, as well as of corresponding probability. This allows examine fracture's criteria.

In former paper we carried out same simulations and analogies on the base of two-component Biot equations, where in pores also there is electrical flied, and is used derived previously model evolution equation written for velocity of carcass particles, for nonlinear slow wave. Results of this paper are related to problem of penetration of this body in initially elastic media.

From formulae for potentials ϕ and φ (17) 5 near the cone, where $r \approx 0$, one can approximately obtain [1]

$$\phi = \frac{L^2\left(2b^2 - \mathrm{v}^2\right)}{2}\int_0^{\mathrm{v}t}(\mathrm{v}t - x_1)\frac{dx_1}{\sqrt{\left(x - x_1\right)^2 + r^2}}, \quad \varphi = -\frac{b^2L^2}{2\mathrm{v}}\frac{\partial}{\partial r}\int_0^{\mathrm{v}t}(\mathrm{v}t - x_1)^2\frac{dx_1}{\sqrt{\left(x - x_1\right)^2 + r^2}} \tag{1}$$

Here for simplicity is assumed $\frac{\mathrm{v}}{\alpha} << 1$, $\frac{\mathrm{v}}{b} << 1$ and is examined neighborhood of case far from redialed longitudinal and shear elastic waves.

For derivative on t from σ_{rr} there is

$$\rho^{-1}\sigma_{rr} = \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - 2b^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - 2b^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial r} - 2b^2\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x} \tag{2}$$

One can obtain from (1) for small r and not small x

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \approx \frac{L^2\left(2b^2 - \mathrm{v}^2\right)\mathrm{v}^2}{2\mathrm{v}\sqrt{\left(\mathrm{v}t - x\right)^2 + r^2}}, \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \approx \frac{L^2\left(2b^2 - \mathrm{v}^2\right)}{2\mathrm{v}\sqrt{\left(\mathrm{v}t - x\right)^2 + r^2}}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x\partial r} + \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x} \approx \frac{b^2L^2}{2\mathrm{v}}\left\{\frac{2\mathrm{v}^2t^2}{x^3} + \frac{4}{x} - \frac{2}{\sqrt{\left(\mathrm{v}t - x\right)^2 + r^2}} - \frac{2}{r^2}\sqrt{\left(\mathrm{v}t - x\right)^2 + r^2}\right\}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} \approx \frac{b^2L^2}{2\mathrm{v}}\left\{\frac{\mathrm{v}^2t^2r}{x^3} - \frac{2\left(\mathrm{v}t - x\right)}{2} - \frac{2}{r}\sqrt{\left(\mathrm{v}t - x\right)^2 + r^2} + \frac{2r}{\sqrt{x^2 + r^2}}\right\}, \tag{3}$$

From (2) and (3) one obtains

$$\rho^{-1}\sigma'_{rr} \approx \frac{L^2\left(2b^2 - \mathrm{v}^2\right)}{\mathrm{v}\sqrt{\left(\mathrm{v}t - x\right)^2 + r^2}}\left(\frac{\mathrm{v}^2}{2} - b^2\right) + \frac{b^4L^2}{\mathrm{v}} \times \left\{-\frac{2\mathrm{v}^2t^2}{x^3} - \frac{4}{x} + \frac{2}{\sqrt{\left(\mathrm{v}t - x\right)^2 + r^2}} + \frac{2}{r^2}\sqrt{\left(\mathrm{v}t - x\right)^2 + r^2}\right\} \tag{4}$$

The first and second terms in figure bracket of right-hand-side corresponds to ϕ and are negative and other terms correspond to φ and are positive for small r.

Near cone tip $\left|\mathrm{v}t - x \sim r\right|$ and (4) yields

$$\rho^{-1}\sigma'_{rr} \approx \frac{L^2\left(2b^2 - \mathrm{v}^2\right)\left(\frac{\mathrm{v}^2}{2} - b^2\right)}{\mathrm{v}\sqrt{\left(\mathrm{v}t - x\right)^2 + r^2}} + \frac{2b^4L^2}{\mathrm{v}}\left\{\frac{1}{\sqrt{\left(\mathrm{v}t - x\right)^2 + r^2}} + \frac{\sqrt{\left(\mathrm{v}t - x\right)^2 + r^2}}{r^2}\right\}$$

$$\rho^{-1}\sigma'_{rr} \approx \frac{L^2\left(2\text{v}^2b^2 - \frac{\text{v}^4}{2}\right)}{\text{v}\sqrt{\left(\text{v}t - x\right)^2 + r^2}} + \frac{2b^4L^2}{\text{v}}\frac{\sqrt{\left(\text{v}t - x\right)^2 + r^2}}{r^2} \tag{5}$$

For $\frac{\text{v}}{b} < 1$, $\sigma'_{rr} > 0$. For $\frac{|\text{v}t - x|}{r} >> 1$(4.4), (4.5) give

$$\rho^{-1}\sigma'_{rr} \approx \frac{L^2\left(2\text{v}^2b^2 - \frac{\text{v}^4}{2}\right)}{\text{v}|\text{v}t - x|} + \frac{2b^4L^2}{\text{v}}\frac{|\text{v}t - x|}{r^2} - \frac{b^4L^2}{4}\left(\frac{2\text{v}^2t^2}{x^3} + \frac{4}{x}\right)$$

Which main order yields

$$\rho^{-1}\sigma'_{rr} \approx \frac{2b^4L^2}{\text{v}}\frac{|\text{v}t - x|}{r^2} \tag{6}$$

Ahead of cone tip $x > \text{v}t$ and near x axis one can choose region $\frac{x - \text{v}t}{r} >> 1$, $x - \text{v}t < \alpha$ where (6) holds.

Using method of Barenblatt-Dagdeil in mentioned region one can assume the plastic flow of material and $-\sigma_{rr} = \tau_s$ $\tau_s = const$ is yielding limit. From (6) one can obtain

$$\rho^{-1}\sigma'_{rr} \approx \frac{2b^4L^2}{\text{v}}\frac{x - \text{v}t}{r^2} \tag{7}$$

$$\rho^{-1}\sigma'_{rr} \approx -\frac{2b^4L^2}{\text{v}^2}\left\{\frac{\left(x - \text{v}t\right)^2 - \alpha^2}{r^2}\right\} \tag{8}$$

Where for $x - \text{v}t = \alpha$, $\sigma_{rr} = 0$. Thus for $x - \text{v}t < \alpha$ near x axis $\sigma_{rr} > 0$ and it is opened crack which can propagate almost along x axis, the shape of crack can be obtained by $-\sigma_{rr} = \tau_s$ and (8) as

$$\rho^{-1}\tau_s \approx \frac{2b^4L^2}{\text{v}^2}\frac{\alpha^2 - \left(x - \text{v}t\right)^2}{r^2} \qquad \tau_s = \text{const} \tag{9}$$

$$\frac{\text{v}^2\tau_s}{2b^4\rho L^2}r^2 + \left(x - \text{v}t\right)^2 = \alpha^2$$

Since for $|x - \text{v}t| > \alpha$, $\sigma_{rr} < 0$ compression there must close. One must note that due to penetrating cone produces fracture front separating plastic flow near cone with elastic behavior ahead of front, equation of it $r = \left(\text{v}t - x\right)\alpha\xi_0$, $\xi_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\tau_s}}$, for metals $\xi_0 \approx 10$.

On this front $\sim \sigma_{rr} = \tau_s$ and, it is shown in, linear solution in elastic region can be obtained by satisfaction of boundary condition on this front, then orders of abovementioned ϕ, φ must be decreasing about $\frac{\mu}{\tau_s}$ times and in (8), and (9) $b^2\rho$ one must replace by τ_s and write $\frac{\text{v}^2}{2\text{b}^2L^2}r^2 + \left(x - \text{v}t\right)^2 = \alpha^2$, $\alpha^2 \sim \frac{\text{v}^2}{2\text{b}^2L^2}$ for generated cracks.

REFERENCES

1. A.G. Arakelyan, A.G. Bagdoev, Vantsyan A.A. Investigating the stochastic spatial processes of destruction mechanics at penetration of bodies into media. Proceedings of national polytechnic university of armenia series mechanics, machine science, machine-building. 2015, №1.

Information about author

Vantsayn Anushavan A. – doctor of phys.math.sci., professor, leading sci. researcher of Institute of Mechanics of NAS RA. tel. (374 10) 561 523 (office.), (374 93) 524 501 (mob.),
E – mail: vantsyan@mechins.sci.am, vantsyana@mail.ru

Abstracts of Articles in Russian

Avetisyan A.S., Kamalyan A.A., Hunanyan A.A. 5

The propagation of plane wave signal in piezodielectric waveguide with cross-border geometric and physical inhomogeneities

The propagation of flat electro-active distortion wave signal in the piezodielectric waveguide with cross-border irregularities (surface roughness, burned material surface treatment) is investigated. Homogeneous waveguide with near-surface inhomogeneity is modelled as a three-layer composite. The surface dynamic loads on the free surface of a homogeneous waveguide and the possibility of internal resonance in the waveguide are identified. Amplitude-phase characteristics of the wave process is received. In short wave approximate comparative analysis of the results obtained with the Gulyaev-Bluistein waves.

Avetisyan V.V., Stepanyan V.S. 10

Application of Pontryagin's maxim principle to the problem of optimal guaranteed search of moving object

The paper analyzes the problem of optimal guaranteed dynamic search of target object executing a plain movement at a controlled speed. By the method of Pontryagin's maxim principle a control is built, with the help of which the identification of the searched object is realized in minimal guaranteed time.

Avetisyan S.A. 15

On a boundary value problem for an elastic exponentially inhomogeneous layer under anti-plane deformation

A mixed boundary value problem of elasticity theory for a layer is considered under anti-plane deformation when the shear modulus of the layer is changed exponentially by the vertical coordinate.

Aghalovyan L., Zakaryan T. 20

On a character of stress state of three-layered orthotropic strip at partial contact between upper layers

The first dynamic boundary problem of the theory of elasticity for orthotropic three-layered strip with non-symmetric structure is solved. The solution for inner problem is defined by the asymptotical method. This solution is expressed by vector-components of displacement, which is found from the ordinary differential equations. The conditions for origin of resonance are stated, the dispersion equations are obtained.

Hakobyan V.V., Gevorgyan G.Z. , Mirzoyan E.S 25

Contact problem of joint rotating infinite cone and finite conical shell

The torsional problem of contact interaction between a thin conical shell of finite length and a infinite cone is considered. Problem leads to a singular integral equation of mixed type, and then it solved with the method of mechanical quadrature.

Hakobyan V.N., Hakobyan L.V. 28

The stress state of piece-wise homogeneous space with periodic system of parallel interface defects

The article focuses on the consideration of antiplane stress state of piece-wise homogeneous space, formed by alternating junction of two heterogeneous layers with same thickness, when there is a system of main parallel defects. It builds discontinuous solutions for the equations of the elasticity theory for piece-wise homogeneous space and proposes exact solutions to the problem associated with identification of a defect either in crack itself or one in absolutely rigid inclusion with one side detached from matrix.

Hakobyan V.N., Dashtoyan L.L. 33

Doubly periodic problem for piecewise-homogeneous plane with cracks

Numerous scientific papers are dedicated to periodic and doubly periodic problems of the elasticity theory for homogeneous plane. The results are resumed in [1,2]. Scientific papers [3-5] are focused on periodic problems for piecewise homogeneous plane, formed from two different materials. In present article the stress state of piecewise elastic plane, formed by alternating junction of heterogeneous strips with same thickness in junction line of which the plane contains doubly periodic system of finite cracks is considered. The governing singular integral equation is derived through the method of discontinuous solutions of the plane theory of elasticity. The solution of equation is built by the method of mechanical quadratures.

Hakobyan L.V., Sahakyan A.V. 38

Refined solution of mixed problem for elastic space with T-shaped crack at antiplane strain

The refined solution of the governing equations of the mixed problem for a homogeneous elastic space weakened by two main crack of finite width, one of which perpendicularly terminates at the middle of surface of the second crack with opposite face reinforced by thin rigid inclusion is brought. The behavior of the unknown functions at the ends of the integration interval is more detailed studied and using the method of mechanical quadrature, a detailed numerical analysis of the stated problem is conducted.

Alexandrova O.V., Borodina S.I. ,Gendugov V.M., Sagomonyan E.A...43

About the origin of diamond tubes

The constructing and formation of a kimberlite tube under a comet impact at the angle to horizon onto the Earth is studied. The shock-wave picture allows us to obtain the dependence of the tube geometry from initial conditions.

Antonyan S.S.,Vasilyan N.G...48

The investigation of stress-strain state of plate bending problem in vicinity of the edge, with boundary conditions free edge and restrained free edge

In this article investigated stress - strain state of plate bending problem in vicinity of edge. It is investigated different types of fixing: free edge and restricted free edge. The Nadai's approach is applying. By the theory of S.A. Ambartsumian, which takes into account the transversal shear deformations, is obtained the various boundary conditions, that allows to reveal a difference.

Arakelyan M.M. 52

An analysis of the phenomenon of strain hardening of single crystals

The motion of a dislocation in Aluminum is considered at room temperature with allowance for the Peierls relief. It was shown by means of numerical experiment that the free path length of dislocation depends on the frequency of applied external elastic field. Here a hardening of crystal took place due to the dynamical losses. In the presence of resonant frequency external alternating elastic field the gradient of hardening curve growth, and therefore, the yield strength, is reduced.

Arutyunyan A.R., Arutyunyan R.A. 57

The application of the conception of loosening to the problem of creep and long-term strength

The experiments on creep mainly are performed at constant load. Thus the true stress during creep process increases due to the cross-section reduction (necking) and by reducing the cross-section area due to the formation of defects. In the first case, we can assume that deformation occurs by a mechanism of viscous flow, when the volume of the sample remains constant. In the second case the volume and density of the specimen change, due to the complex physical-mechanical processes promoting to the formation and development of damage. These two processes take place simultaneously, so it is impossible to separate them completely. When the fundamental study of the problem of high-temperature creep and long-term strength are developed it is necessary to carry out the experiments at constant stress.

Harutyunyan L.A. 62
The plane problem for the circular segment and the half-plane with the segment recess under mixed boundary conditions
The plane problem for the circular segment, where at the boundary of the circular portion of the segment are given stresses, while on the other part of the contour given normal stresses tangential displacements are considered. Using Fourier integrals the problems are considered in bipolar of coordinate and solutions are given in self-contained.

Aslanyan N.S. 66
Main equations of thermoelasticity of micropolar thin plates in case of plane stress-strain state
In the present paper mathematical model of thermoelasticity of stress strain state of micropolar orthotropic thin plates is constructed. Energy balance equation and corresponding variation functional are obtained.

Baghdasaryan G.Y., Mikilyan M.A., Saghoyan R.O...71
Dependence "amplitude-frequency" of non-linear flutter type oscillations of flexible plates in post-critical stage
The problem of nonlinear oscillations of an isotropic rectangular plate in a supersonic gas flow is examined. The study was conducted taking into account both types of nonlinearities: wind (quadratic and cubic) and geometric (cubic). It is known that nonlinear dependence of the frequency θ on the amplitude of the oscillations A of the plate in absence of flowing stream has a hard character, i.e. with increasing amplitude the frequency increases. In this paper it is established that the presence of flowing stream may cause both quantitative and qualitative changes of the character of noted monotonically increasing dependence.

Barseghyan V.R. 76
On a problem of boundary control of the bar vibration with given states at the intermediate moments of time.
The problem of boundary control for the equations of transverse vibrations of a bar with given states at the intermediate moments of time is studied, in particular, at certain moments of time only either the value of deflection or velocity, or both values for the points of the bar might be given. The problem is reduced to the problem with zero boundary conditions and by the method of separation of variables, for an arbitrary number of first harmonics the control action is built. As an application of the proposed approach, the control action is built for the control of vibrations of the bar with given deflection of points at some intermediate moment of time.

Barseghyan T.V. 81
The solution of control problem of a compound system with a change of phase space
In this work the problem of control of a compounded system, formed by not fully controllable subsystems, and with a change of phase space is considered. For any initial and final state of the system, the explicit solution of the problem of control is constructed. A numerical example is given.

Belubekyan M.V., Martirosyan S.R. 86
Flutter of rectangular plate under the assumption of presence of concentrated inertial moments
By analyzing, as an example, a thin elastic rectangular plate streamlined by supersonic gas flows, we study the phenomenon of divergence and of panel flutter of the overrunning of the gas flow at its free edge under the assumption of presence of concentrated inertial moments on the free and fixed edges.

The values of the critical velocities of divergence and panel flutter are obtained, depending on the sides of a plate, on the relation of the inertial moments and the Poisson's ratio.

Belubekyan M.V., Papyan A.A. 91
The problem of propagation waves in 6mm piezoelastic materials
The possibility of appearance of internal resonance in the case of propagation of monochromatic, electrostatic signal in piezoelectric layer, at the different boundary conditions is considered. The boundary conditions are installed under which the resonant vibrations are absent.

Belubekyan E.V., Poghosyan A.G., Avetisyan H.R. 95
Optimization of a rectangular plate piecewise the influence of transverse shear
The bending of the hinge supported rectangular plate of a piecewise constant thickness, prepared of orthotropic composite material is examined. Based on the refined theory of plate bending of Ambartsumian S.A., the problem of definition the optimum values of the geometric and physical parameters of the plate ensuring its greatest rigidity with the fixed weight, equal to the weight of the plate of constant thickness, and given the overall dimensions is solved. Numerical examples are presented. Comparison of the results obtained on the basis of the refined and classical theory of bending of plates, allows to evaluate the effect of transverse shear on the optimal design of the plate, depending on its thickness

Berberyan A.Kh., Garakov V.G., Grigoryan L.G. 100
To the problem of propagation of Love waves in piezoactive medium
The pure shear waves in the system of layer–semi space are considered. There are assumed, that the semi–space materials is the piezoelectric of cubic symmetry of the 23 class and the layer material is the piezoelectric of the hexagonal symmetry of the 6mm class. The problems with the different contact conditions are investigated. The existence conditions of the Love type surface waves are established.

Boldyrev G., Idrisov I. 104
Technique identification parameters of soil models
The technique identification of parameters model of soil is given in this article, using results of tests samples in the conditions three-axis and compression and, calculations in LS-DYNA and LS-OPT. Using results of identification parameters model calculation the intense deformed state is executed and comparison results of calculations and experiences is given.

Vatulyan A.O., Dudarev V.V., Mnukhin R.M..109
On the radial oscillations pipes at inhomogeneous field of pre-stresses with regard residual strains
As the object of study in this paper, we consider the isotropic tube in two states. In the initial state undeformed and free from stress pipe was exposed internal operating pressure. In the pipe an inhomogeneous field of residual stresses and strains were appeared. To analyze the effect level and structure of these fields on the acoustic characteristics in the second state the tube undergoes radial oscillations by applying a load to the outer surface. The corresponding equations of oscillations and the boundary conditions are presented in the framework of the pre-stressed state Trefftts-Guzya. The solution of the direct problem of determining the radial component of the displacement is realized by the numerical shooting method. The analysis of changes in the first three resonant frequencies with and without residual strains and stresses. An approach to solve the inverse problem of reconstruction the level of prestress state according to the change of frequency of free oscillations of the pipe is proposed.

Vatulyan A.O., Lyapin A.A., Nedin R.D 114
On indenting of orthotropic material
The problem of indenting of smooth solid paraboloid of revolution in orthotropic half-space is considered. The boundary integral equation regarding unknown normal contact stress is obtained. Properties of a structure of the integral equation solution are investigated. A theorem on the representation of the contact stress solution is proved; on the basis of this theorem, an equation of defining a shape and siz-

es of contact zone is derived and explored. The results of computations of the basic characteristics of the contact problem are presented.

Gasparyan A.V., Davtyan Z.A., Mirzoyan S.E..119
On contact interaction of elastic thin layers under torsion
A contact problem on the interaction of two thin elastic infinite layers under torsion is considered.With the help of Hankel integral transform the solution of the problem is reduced to the solution of Fredholm integral equation of the first kind, permitting a closed solution.

Gevorgyan H. A. 124
Modelling of the process of introduction of nondeformable indenter in the deformable barrier on the basis of the finite elements method
A large number of works in scientific literature is devoted to modeling of the big elasto-plastic deformations arising in the course of introduction of absolutely rigid indenter in a deformable barrier. Here, the results of the numerical solution of above mentioned task in Lagrange's representation on the basis of finite elements method's axis-symmetric problem traditional formulation are suggested.

Gevorgyan G.Z. 129
Vibrations of orthotropic strips of variable thickness taking into account the transverse shear under conditions of elastic joints
Vibrations of variable thickness of orthotropic strips with the account of transverse shear with elastic joints is considered. The obtained set of equations solved numerically by collocation method in various laws of variation of thickness and elastic constants. The results of calculation in some cases compared with known exact solutions.

Golyadkina A. A, Kirillova I.V., Kossovich L.Yu., Polienko A.V., Chelnokova N.O..................134
Biomechanics of arteries of muscular-elastic type
We present results of mechanical properties evaluation for arteries of muscular-elastic type: carotid, femoral and brachial. Analysis of the medical literature and clinical data, as well as acts of Saratov City Bureau of Forensic Medicine, allowed to reveal the occurrence rate of such pathologies as atherosclerosis, separation walls, etc. Carotid and femoral arteries had such pathologies in 86% of cases, and the brachial – less than 2%. Mechanical testing machines Instron 5944 with BioBath and Instron 3342 helped to conduct our studies.The materials for the experiments were the non-fixed tissue samples extracted from the corpses of people of both sexes aged 30 to 80 years, enrolled in the Saratov City Bureau of Forensic Medicine (permission to take samples was given by the Ethics Committee). All the samples were divided by age groups (by decades), taking into account gender. Variability in mechanical properties of arteries tissues was analyzed also for the same body. We revealed 35% increase in the tissue stiffness of femoral and carotid arteries in males over 50 years old and 23% for females over 60 years old. The experiment confirmed the fact of the absence of abnormalities in the brachial artery, and, consequently, this artery demonstrated higher elasticity.

Grigoryan D.H. 139
Calculation specifications for reinforcing concrete structures
The article presents the reconstruction and strengthening specifications of reinforced concrete structure buildings. Taking into account large number of buildings, which need strengthening in our country, it is very important to correctly evaluate the current existing reinforced concrete.

Grigoryan K.L., Musayelyan S.L. 142
Comparative analysis of denture constructions for edentulous jaw, supported by 4, 5 and 6 screw-line implants
The article attempts to review the comparative analysis for stress state of denture constructions, supported by 4, 5 and 6 screw-line implants. The calculations are carried out by SolidWorks computer program. From the perspective of solid mechanics, it is resumed that the optimal result is obtained by 4 implants. However, with the purpose of safe use, more implants can be applied.

Grigoryan M.S., Mkrtchyan M.S., Shekyan L.A. 147
A plane contact problem of bending beam on an elastic rough strip in the presence of compressive or tensile axial forces
The contact problem of the beam bending of finite length on elastic foundation in the form of a rough strip in the plane strain conditions, the generalized model of the bend in the framework of S.P.Timoshenko, where in addition to vertical forces axial compressive or tensile forces also affect the deflection of the beam, is considered. The problem is reduced to the solution of a nonlinear integral equation of Hammerstein type with the additional conditions. An effective solution to the problem is obtained by the developed methodology based on the theory of Hammerstein and the principle of contracting maps. An approximate analytical solution is obtained.

Grigoryan Sh., Manukyan S., Ohanyan G., Sahakyan S.. 152
On frequencies band gap of periodic wave while gas-liquid mixture flows in the closed channel with the alternate corks
The frequencies when there is no wave process are revealed. Dispersion equations for the different stages of the formation of a stationary slug, which describe the connection between the wave number whole cell and local wave’s numbers of the corks are obtained. As an example the system of two corks of air-water mixture are considered.

Grigoryan E.Kh., Aghayan K.L., Jilavyan S.H., Ghazaryan H.A. 157
The diffraction of surface electro-elastic shear wave on semi-infinite crack in compound space
A problem of the propagation of shear wave is considered for space consist of dielectric and piezoelectric semi-spaces. Between semi-spaces, a semi-infinite crack is existing and the conditions of full contact occur in the remaining part of the contact plane. By applying, Fourier's integral transformation the problem of propagating wave diffraction is reduced to functional equation of Riemann's type on the real axis, which is solved by the method of factorization. The diffraction of the shear electro-elastic surface wave on the semi-infinite crack between the piezoelectric and dielectric semi-spaces promotes the propagation of localized waves due to the piezoelectric property and existence of the crack.

Grishin V. I, Glebova M.A., Guseva N.V. 162
Investigation of skin strength due to tearing out the rivet
Experimental data about a rivet tear-out force size with a flat head from polymeric composite materials samples are received. Investigated their stress state using the finite element method. Suggested the deformation criteria to determination of force value required to tear out the rivet head from the composite material skin on the base of comparison the calculated results with experimental data.
Using the proposed criteria the experimental values area of interlaminar stresses arising due to tearing out the river head from composite material is expanded.

Ghukasyan A.A...167
The generalized model of elastic manipulator and the research of motion
The generalized mathematical model of elastic multi-link is considered. The results for kinematics of spatial motion in different coordinate systems and problems on kinematic control by given program are shown.

Ghulghazaryan G. R., Ghulghazaryan L. G., Mikhasev G.I..172
About free interfacial and boundary vibrations of thin elastic circular cylindrical shells with free ends
Free interfacial and boundary vibrations of closed and non-closed cylindrical shells with free ends, composed of two finite orthotropic thin cylindrical shells with different elastic properties, are studied. Using the system of equations of the related classical theory of orthotropic cylindrical shells, dispersion equations and asymptotic formulas for obtaining eigenfrequencies of possible interfacial and boundary vibrations of composed cylindrical shells are derived. An algorithm for separating possible interfacial and boundary vibrations is presented. Asymptotic links are established between the dispersion equations of problems at hand and analogous problems for a composed plate-strip and rectangular plate, respectively. Examples of shells with different lengths of constituents approximate values of dimensionless characteristics of eigenfrequencies and attenuating characteristics of the related vibration forms are given.

Ghulghazaryan L.G., Barseghyan M. 177
The forced vibrations of two-layered orthotropic shell with full contact between layers
Forced vibrations of two-layered orthotropic shells with full contact conditions between layers, when the bottom facial surface of the shell is under dynamical action are considered. Amplitudes of forced vibrations are determined. The conditions of resonance are established.

Danielyan L.E. Terjyan Ts.E. 182
On a new approach of a solution of problem of fluid motion in a circular cylindrical tube with permeable walls
An isothermal laminar steady motion of incompressible viscous fluid in a cylindrical tube with permeable walls is considered. Approximate equations of the motion in cylindrical coordinates with the appropriate boundary conditions by changing variables are brought to a more convenient form for the solution. For a special case, the law of pressure change as well as velocity components of the liquid motion are determined.

Danoyan Z., Agayan K., Atoyan L., Sahakyan S., Manukyan S..185
Spin-elastic Floquet waves in periodic structure
The problems of existence and propagation of spin-elastic waves in periodic layered structures of ferromagnet-dielectric are investigated. The wave fields and the corresponding dispersion equations are derived. The band gaps also is revealed.

Darjadar M. 190
Control flexural vibrations of multilayer composite plates
Investigated six-layer composite bending vibrations of simply supported rectangular plates of constant thickness. The problem of optimal control of vibrations has been solved.

Erofeev V.I., Shekoyan A.V. 195
Elastic waves in a plate in the presence of point defects
Propagation of an elastic wave in a plate with point defect is investigated. The coefficients of absorption and variance ratio are established.

Yesayan S.G. 199
Mechanical modeling of elastic-plastic processes
The most complex problem of the theory of elastoplasticity is not knowing the pattern in which the deformation process will proceed (the form of analytic function of tension-deformation connection) in an elastic-plasters environment during a change of tensional state. The mechanical model suggested by the author gives an ability to exactly determine the pattern of changes of deformation state with respect to each change of tensions in elastic-plasters environment. Based on that model it becomes possible to get the analysis of the most complex ongoing processes in elastic-plasters environment due to the changes of tensional and deformative states. Particularly, the quantity of energy spent on elastic-plasters object, the picture of a cycle corresponding to each and every change of tensions, to give Baushinger's effect's accurate explanation, to determine the accurate measure of decimal deformation, to get the pattern of a change of the coefficient of internal friction etc.

Zaqaryan V.G. 204
Cracks and inclusions in composite half-space under longitudinal shear
An antiplane half-stress state of composite consisting of an elastic half-space and tightly in contact elastic layer is considered. The half-space comprises two parallel crack or rigid inclusions finite length appearing at right angles to the line section materials. Depending on the set on the banks of cracks, provided the tasks is reduced to a system of singular integral equations 2-4 relative jumps of displacements and stresses on the crack.

Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savelyeva I.Yu. 209
About creation of mathematical models of thermomechanical processes in the solid body taking into account effects of nonlocality of the environment
With use of ratios of rational thermodynamics of irreversible processes with internal parameters of a state, approach to creation of mathematical models of thermomechanical processes in a solid body taking into account effects of temporary and spatial not locality of the continuous environment is considered.

Zimin V.N., Nerovny N.A. 213
Determination of light radiation pressure on gossamer space structures
Determination of light radiation forces on the surfaces of space vehicles is an important problem for both orbital dynamics of spacecrafts and for rigid and flexible dynamics of structural elements of spacecrafts. By developing of more complex models of light radiation pressure on the large scales space structures it is possible to improve the calculation model for its deformed state. In this work we discuss the problem of determination of resultant vector and principal moment of light radiation pressure upon rigid space vehicle including possible self-shadowing and reflections in structural elements. It is shown that in the resulted equations of force one can separate the geometry of space vehicle with its optical parameters from the attitude of space vehicle relative to the acting light radiation.

Igumnov L.A., Amenitsky A.V., Belov A.A., Litvinchuk S.Yu., Petrov A.N., Ipatov A.A. 216
Numecally and analytically analyzing the dynamics of visco- and poroviscoelastic bodies
The results of mathematical and discrete modeling of linear dynamic problems of visco- and poroviscoelasic 3-D bodies are presented. Methods and approaches based on formulating boundary-integral equations analyzed using BEM are used. Maxwell's, Kelvin-Voight's and the standard viscoelastic body models, as well as the hereditary model with weakly singular Abel's kernel, are used as a viscoelastic model. To describe the properties of a poroelastic material, full Biot's model is used. The examples of numerical analysis of the problems are compared against the already available results.

Igumnov L.A., Litvinchuk S.Yu., Markov I.P., Bragov A.M. 221
Boundary-element analysis of the dynamics of 3-D bodies under the effect of fields of different physical nature
The following problem of mechanics of deformable solids is considered: analyzing problems, accounting for the interaction of mechanical and non-mechanical fields of different physical nature. A direct BEM formulation is used. To model the dynamics of respective bodies using the computer, a time boundary element method is developed, using stepped method of numerical inversion of integral Laplace transform and a formalism of Runge-Kutta schemes based on Butcher's tables. The results of the numerical experiments are given. In the problem of numerically modeling a dynamic test of a composite beam loaded in bending, the boundary-element solutions were compared against the experimental results using Kolsky method and the corresponding results obtained in software complexes for FE-modeling.

Kanetsyan E.G., Mkrtchyan M.M. 226
On the stress strain state of a piecewise –homogeneous wedge with collinear system of cracks and rigid inclusions under the antiplane deformation
In the present paper the problem on determination of the components of the stress strain state of a piece-wise-homogeneous wedge under the antiplane deformation , the banks of which are rigidly fastened is considered, and on the horizontal line of the heterogeneous materials junction a system from the cracks of an arbitrary number and absolutely rigid thin inclusions is located.

Karyakin M.I., Obrezkov L.P. 231
Equilibrium and stability of nonlinearly elastic cylinder under tension and inflation
Different models describing behavior of nonlinearly elastic compressible material were used to model the process of stretching and inflation of hollow cylinder, both thick- and thin-walled. By means of semi-inverse method three-dimensional problem was reduced to the analysis of boundary value problem for ordinary differential equation of second order. Numerically constructed loading diagrams show that for some models even the regions of positive stresses can contain zones of instability. Within the framework of bifurcation analysis size of these zones and their dependence of material parameters were determined.

Karyakin M.I., Pustovalova O.G., Shubchinskaya N..Yu...236
Large bending strains of non-homogeneous panel
The paper presents different statements of the problem of pure bending of nonlinearly elastic panel non uniform along the thickness. The character of heterogeneity corresponds to the case of hard coating on the inner or outer panel surface. The commonly used models of compressible nonlinearly elastic media were used to describe the mechanical properties of panel's material at the large strains. Plane statement of the problem was reduced to the study of ODE. The influence of the coating on the load diagram and on the stability of bent panel was studied.

Kerobyan A.V. 241
Contact problem for an elastic half-plane with finite number finite elastic overlays in the presence of shear interlayers
The problem of contact interaction is observed for an elastic half-plane which is strengthened of its boundary by arbitrary finite number finite overlays (stringers) with different elastic characteristics and small thickness. The contact interaction between half-plane and overlays is realized through a shear interlayers (in form of layers of glue) with other physic - mechanical properties and geometric configuration. The overlays are deformed under the action of horizontal forces. The determination problem of unknown contact stresses are reduced to the system of second kind of Fredholm's integral equations

within the different finite intervals, which in the certain region of the change of characteristic parameter typical to the problem, in the B space of Banach may be solved by the method of successive approximations. Possible particular cases are observed and the behaviors of contact stresses are illustrated in different constant parts.

Koifman K. G., Manzhirov A.V. 246
The accretion of an elastic hemisphere on a rigid foundation under gravitation

A problem of the accretion of an elastic hemisphere on a rigid smooth foundation under gravitation is considered. Analytical solution of the problem is obtained. Plots of main characteristics of the stress state are presented.

Kotsur O.S.,Shcheglov G.A. 251
Numerical modeling of oscillating pendulum in water

Transient process of bluff body oscillation in uncompressed still medium is studied with the help of computational fluid dynamics (CFD) methods. Vortex structures, created by an oscillating bluff body of different forms, are studied. The results, obtained by a control volume method (CVM), which uses mesh, are compared with a meshless vortex element method (VEM) and with experimental results, obtained using PIV technics. Conclusions are made on the effectiveness of both methods for modeling this particular problem.

Lyubicheva A.N., Goryacheva I.G., Morozov A.V. 256
Determination of a viscoelastic foundation model parameters based on the microindentation

An axisymmetric contact problem for a rigid spherical indenter and a thin viscoelastic layer lying on the rigid foundation is considered under the loading and unloading at a constant speed of penetration. The viscoelastic layer is described by Kelvin model with single relaxation time. The contact problem solution is used to determine the elastic moduli and relaxation times of samples with rubber coatings on the basis of the microindentation test results.

Martirosyan A.N., Davtyan A.V., Dinunts A.S., Martirosyan H.A. 260
Analytical solution of the plane problem of the crack moving with a finite velocity, owned to the first supercritical range

In the present work considered non-stationary mixed problem for the half-plane when the separating point of the boundary conditions is moving at a finite velocity greater than the velocity of propagation of Rayleigh waves. The stress components on the continuation of the crack at the existence the constant concentrated force acting on the edges of the crack is defined. It is shown that at the edge of crack the stress components tend to zero, i.e. singularities are missing.

Martirosyan K.L..265
Influence of the resistance of the external environment on waves propagation velocity in a layer

The theoretical and practical interest is presenting the consideration of problems addressing the influence of the resistance of the external environment on wave's propagation velocity in a layer under the action of tangential loads. In this paper, the influence of the frictional resistance of the environment is considered.

Mheryan D.H. 268
Three-dimensional problem of propagation of surface waves in transversally isotropic semi-space when the plane of isotropy is perpendicular to a plane, limiting semi-space

The problem of propagation of elastic surface waves in a transversally isotropic half space is considered. It is supposed, that the surface of semi-space is perpendicular to a plane of isotropy. The surface of semi space is free from stresses. The investigation of problems is simplified by introducing potential functions, which analogous to the problems [1,2,3]. It is shown, that conditions of damping of surface waves are depending from wave numbers. The new dispersion equation is obtained and solved.

Numerical values of dimensionless parameter of speed of surface wave are brought in offered work for transversally isotropic material Ti.

Meliksetyan N.G., Meliksetyan G. N. 272
Possibilities of use of friction asbestos free materials bastenit in brakes of freight rail transport
The asbestos-free friction material based on polymer filled by basalt and glass fibers obtained from Armenian minerals is created for freight railway brakes. On the basis of a two-stage cycle of comparative tests the tribological characteristics of the developed material were revealed. It is recommended to use them in the freight rail transport.

Mescheryakov K. I. 277
Green's function and two-dimensional integral equation over the surface of a rotating wind turbine's blade.
The problem on a flow around the blade of the wind turbine in inviscid incompressable fluid is considered in the three-dimensional formulation. The blade is represented as a thin curved plate with a variable chord. The uniform stream of air directed along the axis of the tunnel attacks the blade. The blade thus rotates around this axis. The angle of attack depends on both the installation angle and on the angle, which is defined by the speed of the incident flow and the angular velocity of rotation of the blade. The Boundary Integral Equation was obtained using the Green’s function for Laplace equation, which allows to determine the torque moment given by blade for a known regime of rotation. The numerical scheme which allows to solve the boundary integral equation is presented.

Mikhaskiv V.V., Kirillova O.I. 282
Harmonic oscillations of longitudinal shear of infinite hollow cylinder with arbitrary cross section and a tunnel inclusion
The problem is solved to determine the stress state near the crack in an infinite hollow cylinder of arbitrary cross section with oscillations of longitudinal shear. An approach is proposed that allows satisfying separately the conditions on the crack and on the borders of the cylinder.

Mikhin M.N...287
Torsion of growing beam with cardioid cross-section
The task about a growing ellipsoidal cavity in the viscoelastic environment is considered. Three main stages of deformation of a body are analyzed: prior to building, in process and after growth stop. All arising non-classical regional tasks are brought to the known regional tasks containing some parameter. Methods their solutions based on researches of Papkovich and Neuber are proposed. True characteristics intense the deformed condition of bodies are restored by means of known formulas of interpretation.

Movsisyan L.A. 291
About stability and vibrations of anisotropic laminated plate and cylindrical shells
The problems of stability, vibrations and optimal control of the motion of anisotropic laminated rectangular plates and cylindrical shells are considered. The systems of the equations of the enumerated problems by specific location of the layers permit the solution by means of the method of separation of the variables. The extreme values of eigenvalues (frequency, critical strain and pressure) are defined by means of the method of Lagrange.

Morozov A.V., Petrova N.N. 295

Methods to determine the coefficient of friction of frost-resistance rubber compounds based on a propyleneoxide rubber with powder of ultrafine PTFE.

Experimental method of estimation coefficient of friction for elastomers used in the pair of friction is presented. Friction frost-resistance propyleneoxide rubber with well dispersed powder of ultrafine polytetrafluoroethylene (uPTFE) in the different concentration was investigated in a sliding contact conditions. Test conditions were varied in the following ranges: contact pressure P from 0.1 to 0.3 MPa; sliding velocity V from 1 to 100 mm/s; bulk temperature T from 22 to -250C. It was obtained that even low concentrations of the uPTFE (1 part by weight) provided a significant reduction of the sliding friction coefficient. The further increase of the uPTFE concentration in the rubber compound did not decrease the coefficient of sliding friction.

Nazaryan E.A., Arakelyan M.M. 299

Theoretical evaluation of quality parameters in forming axisymmetric thin-walled shells

Based on the analysis of the initial equations of the plastic state, established the distribution of strains in the initial and final stages of axisymmetric drawing. The dependencies that allow assessing the accuracy of linear and diametrical sizes taking into account the volumetric of strain state are obtained.

Nersisyan G.G., Sargsyan A.M. 304

Problem of electroelasticity for a thin compound piezoelectric wedge, when on one edge displacements are given, and on the other one – stresses

An electroelastic state of a thin piecewise homogeneous piezoelectric wedge, when on the banks different elastic boundary conditions are given, is studied. The behavior of stresses and vector of the electric induction in the vicinity of the compound piezoelectric wedge top is analyzed.

Hovhannisyan S.M. 309

The analogy of the equations system describing the bending vibrations of homogeneous cantilever beam with telegraph equation

The analogy of the calculation scheme for flexural vibrations of a cantilever beam under kinematic excitation with telegraph equation is considered. The article shows that under kinematic excitation the equation describing the shear component of the flexural vibration of cantilever beam is similar to the telegraph equation.

Hovhannisyan S.M., Geodakyan E.G., Karapetyan J.K. 312

Generalized bending- shear model of tectonic earthquakes preparation

The article shows that during quasistatic tripartite bending of a rectangular parallelepiped in the nodal planes accumulated tangential stresses, which lead to shear ruptures, during tectonic earthquake. Also taking into account the normal forces acting on the side faces of parallelepiped, we get generalized bending-shear model of tectonic earthquake preparation.

Hovhannisyan H. V. 315

The contact problem for the infinite elastic piecewise – homogenous plate with finite elastic stringer glued to the plate surface

In given work the contact problem for the elastic infinite plate consisting of two heterogeneous semi – infinite plates linked to each other along the straight-line border is considered. It was assumed that a finite elastic stringer is glued over its full length and width to the upper surface of the infinite composite elastic plate perpendicularly to the line of heterogeneity of the mentioned two semi - infinite plates and have different elastic properties. The layer of glue being in the state of pure shear. The solution of considered problem is mathematically formulated as a Fredholm integral equation of the second kind, the kernel of which is square – integrable with two variables.. Research showed that the intensity of distributions of the unknown tangential contact forces have finite values at the edge points of the stringer due to the presence of the material of a glue layer

Hovhannisyan H. V., Aghabekyan P.V., Sargsyan S.M. **320**

The periodic contact problem for the composite plate with the finite elastic stringers

In the present work, the periodic contact problem for the elastic infinite plate consisting of two semi-infinite plates is considered. One of the plates is strengthened by the periodic system of elastic stringers located in one line parallel to the dividing heterogeneity line of the materials. The solution of considered periodic contact problem is mathematically formulated as a singular integral equation with Hilbert kernel, solution of which is reduced to the solution of quasi completely regular infinite system of linear algebraic equations.

Pakhomov B.M. **325**

One version of isotropic material with different modulus of elasticity

The suggested model of isotropic material with different modulus is further advancement of the theory of elasticity for materials with different modulus of elasticity developed by S.A. Ambartsumian. To define a type of stressed state and to choice coefficients in equations connecting tensions and deformations, the signs of longitudinal strains are accepted as criteria. Such method of approach allows to overcome some difficulties arising when response of material with different modulus under complex mode of deformation is described.

Petrosyan G.L., Arzumanyan M.G. **329**

Powder material compaction process modeling in a hard cylindrical die in the program environment <<ABAQUS>> and by analytical method

Non - sintered powder material compaction process in a hard cylindrical die is studied in the automatic program environment (APE) <<ABAQUS>> by computer modeling. The problem is also solved by analytical method, using Mohr-Coulomb plasticity condition. Numerical calculation are performed and comparative results are presented.

Petrosyan T.L...**334**

Process of formation of closed hysteresis loop of materials

The experimental data of process of formation of closed hysteresis loop of clay soil are presented. It is shown that the linear theory of heredity with the exponential approximation describes this process sufficiently exact. The theoretical data of hysteresis at the different number of cycle depending on loading period are presented.

Poghosyan N.D. **339**

Reflection of shear wave from homogeneous layer in the system of inhomogeneous half-space – homogeneous layer

The problem of reflection of shear wave in the system of inhomogeneous half-space-homogeneous layer is considered in given work. At free external layer as well as in fixed external layer the coefficients of reflection are defined. The investigations dedicated to the problem of wave reflection from homogeneous and inhomogeneous layers are referred in the work.

Popov V. G. **342**

The torsion oscillation elastic cylinder, which is coupled with elastic half space

The report containing solving of the dynamic contact problem of the torsion oscillation elastic cylinder which is coupled with elastic half space. The original problem is reduced to the singular integral equation with two fixed singularities only. The numerical method of this integral equation solving which consider real asymptotic unknown function and use special quadrature formulas for singular integral is proposed.

Remizov M. Yu, Sumbatyan M. A. 347
Low-frequency passing of elastic waves through a double-periodicity array of cracks in 3-D
The paper is devoted to the calculation of the reflection and transmission coefficients, when a plane wave is incident on a two-dimensional grating with a periodic array of rectangular cracks in the elastic material in 3-D. In the one-mode frequency range the problem is reduced to a single hipersingular integral equation, which leads to an explicit representation of the wave characteristics for various sizes of the cracks. New singularities along each coordinate of two-dimensional grating have been revealed for the obtained hipersingular integral equation of double singularity.

Sanoyan Yu. G. 352
On a problem of stability ofcompound rectangular plate in a constant temperature field
The thermal stability of a rectangular plate of constant thickness consisting of three parts is considered. At the opposite edges of the plate perpendicular to the sliding faces are given conditions of free support. Two other sides are free to solve the problem of plane stress state and simply supported for the stability problem. For the special case determined the critical temperature and the stability of the plate versus the aspect ratio.

Sargsyan A. H., Sargsyan S. H. 357
Dynamic model of micropolar shallow shells with large displacements
In the present paper on the basis of the conclusion of the defining equations of micropolar isotropic shallow thin shells with large deflections the general hypotheses are accepted, that is defining the law of change of kinematic characteristics of deformations, cross-section tangential force stresses and normal couple stresses on the thickness of the shell. The general variation equation is constructed, which is allows receiving the motion equations and elasticity relations of micropolar shallow shells with large displacements. The variation equation with application of Ritz method (or Bubnov-Galerkin method) is used for the decision of various specific problems of dynamic deformation of micropolar shallow shells.

Sarkisyan A.S., Sarkisyan S.V 362
Waves propagation in a layer with the elastic-restrained boundaries
The problem of propagation of periodic waves in elastic layer is studied. It is assumed that at the layer boundaries normal stress equals zero, and the shear stress restrainedly. For the phase velocity of the symmetric and antisymmetric vibrations characteristic equations are obtained. The limiting cases are considered and the numerical calculations are brought for the phase velocity of the wave.

Sargsyan S. H...365
Micropolar bar model for nano-crystalline material composed of linear chains of atoms
In the present paper discrete model of linear atomic chain is constructed with consideration of rotational-momental interaction between the atoms. Limited transition from discrete model to continual (continuous) one is done. It is shown that the obtained continual model of atomic chain matches with the model of applied theory of micropolar bar.

Sarukhanyan A.A., Veranyan G.G., Pogosyan A.A. 370
High ground dams natural oscillations characteristics change regularity
To evaluate seismic safety of high ground dams the proof of the method of choice is required, which will provide reliable and accurate results in terms of the evaluation criteria. Correct choice of the calculation model enables to provide real characteristics of the given structure. Comparison and analysis of design data in cases of plane and spatial design models with results obtained by actual measurement and spectral analyses of Sarsang dam’s accelerogram have shown the importance of the calculation

model selection for reliable results obtaining. Application of more complicated models of the soil physical and mechanical properties lead to reliable results.

Seyranyan S.P. 375
Limiting transition in the bending moments in the rectangular plate from locally distributed on rectangle uniform external pressure to concentrated force in center of the rectangle of applied pressure
The series of investigations of the author, devoted to the study of the limiting stress-strain-state (behavior of components of SSS), obtained by using the Navier solutions for deflection in the problems of bending a simply supported plate under local (concentrated) transversal load are close to the finish. Assuming that the local load – uniform transversal pressure, applied on a rectangular platform, by tending the sides of the platform to zero with remaining the total force of pressure and center of platform (ξ, η) constant, the double infinite limits of bending moments in plate in point (ξ, η) are obtained. It is noted, that the obtained results is conformed to the singularity in point (ξ, η) of the bending moments, obtained by S.P. Timoshenko and G.U. Janelidze by placed the Navier solution for deflection in the case of concentrating force in correspondence relations of elasticity. It is noted, that the obtained results is conformed to the singularity in point (ξ, η) of the bending moments, separated by S.P. Timoshenko and G.U. Janelidze after placed the Navier solution for deflection in the case of concentrating force in correspondence relations of elasticity. Finally, if we take into consideration the former publications of author, the meanings of physical values – bending and torque moments (as distinct from cutting forces) after limiting transition from local load to concentrated force in all closed rectangle of plane of plate are transformed to values by Navier of bending and torque moments in the plate under concentrated force.

Sobol B.V., Soloviev A.N., Rashidova E.V., Vasiliev P.V.,..380
Stress concentration in the tips of the radial cracks in the pipe wall with a thin coating
The method developed in the works G.Y. Popov, summarized in the construction of discontinuous solutions in Fourier series. The method is implemented in the application to the solution of problems of the theory of elasticity for a section of the pipe (plane strain), weakened by internal radial cracks. Tube is loaded by hydrostatic pressure; on its inner surface coated with a thin coating that improves its physical and mechanical properties. As a model of coverage specially formulated boundary conditions are used. In order to verify the adequacy of the adopted model, carried out a series of numerical experiments. In some cases, the calculations of the cross section of the pipe coated in finite element packages ANSYS and COMSOL. In other using opportunities FlexPDE package, the model was built uncoated pipe but with special boundary conditions. Comparison of the results is allowed to verify the adequacy of the constructed models in a certain range of geometric and physical parameters.
The problem is reduced to the solution of singular integral equations with Cauchy kernel for the derivative of the jump of the tangential component of the vector displacement on the crack. His decision is based collocation method with pre-selected characteristic. The ultimate goal of the research is to determine the values of the stress intensity factor at the crack tip.

Soloviev A.N., Ziborov E.N, Kirillova E.V., Shevtsov S.N...385
FEM modeling of reinforced composite materials and structures with their use
The work is devoted to development of methods for determining the mechanical properties of unidirectional fiber reinforced composites and laminates, as well as the development of methods for determining the fatigue life of the blade longeron of the helicopter, some details of which are made from composite materials (CM). At the paper new methods for large-scale modeling of reinforced CM, whose purpose is to build a reliable mathematical and geometric models used in the future for the most

accurate calculation of specimens from CM with complex heterogeneous structure of the fibers are presented. Modern CM on their mechanical characteristics greatly influenced not only the quantitative and qualitative characteristics of the components of the structure but also the relative orientation of the material. Modeling techniques of composite material with different relative to the direction of the fibers and their influence on the parameters of the mechanical characteristics and durability of the specimens are proposed. Besides modeling natural bench tests on the fatigue life of the blade of the helicopter sample is produced and comparing the data on the characteristics of the material fatigue test results is done.

Stepanyan V.S. 390
Reduction of the problem of optimal guaranteed search of a moving object to the time-optimal problem with moving end
The problem of optimal by minimum guaranteed time of search for a moving object on the plane, the initial state of which is known with exactness to a given multitude of uncertainty is investigated. It was established that on the basis of the minimax approach the initial problem can reduce to the problem of optimal control with moving the right end.

Sumbatyan M.A., Lozhkova J.N. 395
Identification of cracks' clusters in elastic media by ultrasonic waves
We study a simultaneous identification of several cracks in elastic media with in the scanning by ultrasonic waves. In the acoustic approximation, the problem can be reduced to a system of integral equations holding over cracks' surfaces. When solving direct problem, the geometry of the defects is known a priori. In this case, the solution is constructed by a standard collocation technique. However, in the inverse problem of simultaneous identification of a system of cracks their shapes are not known representing a set of unknown function which are to be determined. As a result, we come to a system of nonlinear equations which are solved by using modern optimizations methods. There are demonstrated some examples of the identification.

Tarasov A.E., Barkanov E.N. 400
Pressure dependence of the vibration amplitude of the thin elastic elongated plate
In the present paper an analytical approach to study harmonic vibration of a rectangular elastic plate in non-viscous incompressible fluid is proposed. The problem is reduced to basic integro-differential equation. The solution of the equation let us define the function of plate vibrations form. The influence of the air pressure components on the form of the vibration is determined. The results are compared with experimental data.

Torskaya E.V. 405
The study of roughness influence on contact of coated bodies.
Contact of rough elastic coatings and a smooth indenter is modeled by two-level contact problem. A function of additional displacements is used in macro contact problem formulation. The function, which depends on nominal contact pressure, is obtained from periodic contact problem (the model of discrete contact caused by roughness). Numerical-analytical method of solution is based on Hankel integral transforms, boundary elements, and iteration procedure. The effect of roughness on macro contact characteristics is analyzed for different values of parameters, which describe roughness.

Khachatryan L.S. 410
Reflection of bending wave from edge of the plate taking into account the shear tension.
The problem of reflection of bending waves from flat edge of the plate taking into account the shear tension is presented. The problem is considered by using S.A.Ambartsumian's theory, in various border conditions.

Chebakov M.I., Kolosova E.M., Lyapin A.A. 413
Nonstationary thermoelastic contact problem for a piecewise-inhomogeneous cylindrical layer of finite length
The nonstationary contact problem of coupled thermoelasticity for elastic homogeneous cylinder and cylindrical two-layer foundation of finite length is considered. The cylinder performs rotational movement in the presence of the Coulomb friction in contact zone between cylinder and foundation. As a result, heat generation takes place in the contact zone. As a research method, the finite element method using the Abaqus package was selected. Calculations of stress-strain state and temperature fields have been conducted for different cases of geometrical and mechanical parameters for cylinder and foundation, rotation speed of cylinder, load value and friction coefficient rate.

Shekyan H.G., Gevorgyan A.V., Darbinyan A.Z. 418
The oscillation of the rotor of the electric machine mounted on ball bearings
At the rotor of the electric machine of the bearings occur sub harmonic oscillations of parametric and Roman type, due to different factors speed, nonlinear stiffness, etc. All this causes considerable difficulties in precise mathematical description of the motion of the rotor and leads to the need of simplicity the problem and as a result we have only an approximate solution that satisfies in some degree or other requirements imposed on the practical side. In given work is shown that sub harmonic oscillations appear in the nonlinear system in the form of resonance, when the frequency of disturbing force is a multiple of the natural frequency of the linear system. It is shown that sub harmonic of shafts mounted on ball bearing with radial clearance can occur in the working speed range, since the coefficient of the nonlinear member of the same order as the for linear. So because of to solve the normal equations asymptotic methods unacceptable. That method used here depicting the functions outlined in the monograph of O. Blacker.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Аветисян А.С., Камалян А.А., Унанян А.А. Распространение плоского волнового сигнала в пьезодиэлектрическом волноводе с приграничными геометрическими и физическими неоднородностями....5

Аветисян В.В., Степанян В.С. Применение принципа максимума Понтрягина к задаче оптимального гарантированного поиска движущегося объекта 10

Аветисян С.А. Об одной смешанной задаче для упругого экспоненциально неоднородного слоя при антиплоской деформации 15

Агаловян Л.А., Закарян Т.В. О характере напряжённо-деформированного состояния трёхслойной ортотропной полосы при неполном контакте между верхними слоями 20

Акопян В.В., Геворгян Г.З., Мирзоян Е.С. Контактная задача о совместном кручении бесконечного конуса и конечной конической оболочки 25

Акопян В.Н., Акопян Л.В. Напряжённое состояние кусочно-однородного пространства с периодической системой параллельных межфазных дефектов....28

Акопян В.Н., Даштоян Л.Л. Двоякопериодическая задача для кусочно-однородной плоскости с трещинами....33

Акопян Л.В., Саакян А.В. Уточнённое решение смешанной задачи для упругого пространства с Т-образной трещиной при антиплоской деформации....38

Александрова О.В., Бородина С.И., Гендугов В.М., Сагомонян Е.А. О происхождении алмазных трубок....43

Антонян С.С., Василян Н.Г. Исследование напряжённо-деформированного состояния изгибаемой пластинки в окрестности края с граничными условиями свободного края и стеснённо-свободного края 48

Аракелян М.М. Анализ явления деформационного упрочнения монокристаллов....52

Арутюнян А.Р., Арутюнян Р.А. Приложение концепции разрыхления к решению проблемы ползучести и длительной прочности 57

Арутюнян Л.А. Плоская задача для кругового сегмента и полуплоскости с сегментной выемкой при смешанных граничных условиях....62

Асланян Н.С. Основные уравнения термоупругости микрополярных тонких пластин при плоском напряжённом состоянии....66

Багдасарян Г.Е., Микилян М.А., Сагоян Р.О. Амплитудно-частотная зависимость нелинейных флаттерных колебаний гибкой пластинки в послекритической стадии 71

Барсегян В.Р. Об одной задаче граничного управления колебаниями стержня с заданными состояниями в промежуточные моменты времени 76

Барсегян Т.В. Решение задачи управления одной составной системы со сменой фазового пространства 81

Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. Флаттер прямоугольной пластинки при наличии сосредоточенных инерционных моментов 86

Белубекян М.В., Папян А.А. К задаче распространения волн в слое из пьезоупругого материала класса 6mm 91

Белубекян Э.В., Погосян А.Г., Аветисян Г.Р. Оптимизация прямоугольной пластинки кусочно-постоянной толщины, изготовленной из композиционного материала, при изгибе с учётом влияния поперечных сдвигов....95

Берберян А.Х., Гараков В.Г., Григорян Л.Г. К задаче распространения волн Лява в пьезоактивной среде 100

Болдырев Г.Г., Идрисов И.Х. Методика идентификации параметров моделей грунтов 104

Ватульян А.О., Дударев В.В., Мнухин Р.М. О радиальных колебаниях трубы при наличии неоднородного поля предварительных напряжений с учётом остаточных деформаций....109

Ватульян А.О., Ляпин А.А., Недин Р.Д. Об индентировании ортотропных материалов 114

Гаспарян А.В., Давтян З.А., Мирзоян С.Е. О контактном взаимодействии упругих тонких слоёв при кручении 119

Геворкян Г.А. Моделирование процесса внедрения недеформируемого индентора в деформируемую преграду на основе метода конечных элементов 124

Геворкян Г.З. Об изгибных колебаниях ортотропных полос переменной толщины с учётом поперечных эффектов при условиях упругой заделки 129

Голядкина А.А., Кириллова И.В., Коссович Л.Ю., Полиенко А.В., Челнокова Н.О. Биомеханика артерий мышечно-эластического типа 134

Григорян Д.Г. Особенности расчёта усиливаемых железобетонных конструкций 139

Григорян К.Л., Мусаелян С.Л. Сравнительный анализ протезной конструкции беззубой челюсти, опираемой на 4, 5 и 6 цанговые имплантаты 142

Григорян М.С., Мкртчян М.С., Шекян Л.А. Плоская контактная задача об изгибе балки на упругой шероховатой полосе при наличии сжимающих или растягивающих осевых сил........147

Григорян Ш.А., Манукян С.М., Оганян Г.Г., Саакян С.Л. Частоты запирания периодической волны при течении газожидкостной смеси в замкнутом канале с чередующимся пробками 152

Григорян Э.Х., Агаян К.Л., Джилавян С.А., Казарян А.А. Дифракция поверхностной электроупругой волны сдвига на полубесконечной трещине в составном пространстве........157

Гришин В.И., Глебова М.А., Гусева Н.В. Исследование прочности обшивки при вырыве заклёпок 162

Гукасян А.А. Обобщённая модель упругого манипулятора и исследования движений........167

Гулгазарян Г.Р., Гулгазарян Л.Г., Михасев Г.И. О свободных интерфейсных и краевых колебаниях тонких упругих круговых цилиндрических оболочек со свободными торцами 172

Гулгазарян Л.Г., Барсегян М. Вынужденные колебания двухслойной ортотропной оболочки при полном контакте между слоями........177

Даниелян Л.Е., Терджян Ц.Э. Об одном новом подходе решения задачи движения жидкости в круглой цилиндрической трубе с проницаемыми стенками 182

Даноян З.Н., Агаян К.Л., Атоян Л.А., Саакян С.Л., Манукян С.М. Упруго-спиновые волны типа Флоке в периодической структуре........185

Дарьядар М. Управление изгибными колебаниями многослойных композитных пластин 190

Ерофеев В.И., Шекоян А.В. Упругие волны в пластине при наличии точечных дефектов 195

Есаян С.Г. Механическое моделирование упруго-пластических процессов 199

Закарян В.Г. Трещины и включения в составном полупространстве при продольном сдвиге...204

Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. О построении математических моделей термомеханических процессов в твёрдом теле с учётом эффектов нелокальности среды 209

Зимин В.Н., Неровный Н.А. Определение силы светового давления на крупногабаритные космические трансформируемые конструкции 213

Игумнов Л.А., Аменицкий А.В., Белов А.А., Литвинчук С.Ю., Петров А.Н., Ипатов А.А. Численно-аналитическое исследование динамики вязко- и поровязкоупругих тел 216

Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю., Марков И.П., Брагов А.М. Гранично-элементный анализ динамики трёхмерных тел при воздействии полей различной физической природы 221

Канецян Э.Г., Мкртчян М.М. О напряжённом состоянии кусочно-однородного клина с коллинеарной системой трещин и жёстких включений при антиплоской деформации 226

Карякин М.И., Обрезков Л.П. Равновесие и устойчивость нелинейно-упругого цилиндра при растяжении и раздувании 231

Карякин М.И., Пустовалова О.Г., Шубчинская Н.Ю. О больших деформациях изгиба неоднородной панели........236

Керопян А.В. Контактная задача для упругой полуплоскости с конечным числом упругих конечных накладок при наличии сдвиговых прослоек 241

Койфман К.Г., Манжиров А.В о наращивании упругого полушара, лежащего на гладком жёстком основании, под действием силы тяжести 246

Коцур О.С., Щеглов Г.А. Численное моделирование колебаний маятников в воде 251

Любичева А.Н., Горячева И.Г., Морозов А.В. Определение параметров модели вязкоупругого слоя по результатам микроиндентирования 256

Мартиросян А.Н., Давтян А.В., Динунц А.С., Мартиросян Г.А. Аналитическое решение плоской задачи о трещине, движущейся с конечной скоростью, попадающей в первый сверхкритический диапазон 260

Мартиросян К.Л. Влияние сопротивления внешней среды на скорости распространения волн в слое 265

Мгерян Д.Г. Пространственная задача распространения поверхностных волн в трансверсально-изотропной упругой среде, когда плоскость изотропии перпендикулярна к плоскости, ограничивающей полупространство 268

Меликсетян Н.Г., Меликсетян Г.Н. Возможности использования фрикционных безасбестовых материалов бастенит в тормозах грузового железнодорожного транспорта......272

Мещеряков К.И. Функция грина и двумерное интегральное уравнение по поверхности вращающейся лопасти ветроустановки..277

Михаськив В.В., Кириллова О.И. Гармонические колебания продольного сдвига бесконечного полого цилиндра произвольного сечения с туннельным включением 282

Михин М.Н. Кручение растущего бруса с сечением в форме кардиоиды 287

Мовсисян Л.А. К устойчивости и колебаниям многослойных анизотропных пластин и цилиндрических оболочек..291

Морозов А.В., Петрова Н.Н. Методика оценки коэффициента трения морозостойкой резины на основе смесей пропиленоксидного каучука и ультрадисперсного политетрафторэтилена...295

Назарян Э.А., Аракелян М.М. Теоретическая оценка параметров качества при формообразовании осесимметричных тонкостенных оболочек..299

Нерсисян Г.Г., Саргсян А.М. Задача электроупругости для тонкого составного пьезоэлектрического клина, на одной грани которого заданы напряжения, а на другой – перемещения..304

Оганесян С.М. Аналогия системы уравнений, описывающей изгибные колебания однородного консольного стержня с телеграфными уравнениями..309

Оганесян С.М., Гедакян Э.Г., Карапетян Дж.К. Обобщённая изгибо-сдвиговая модель подготовки тектонического землетрясения..312

Оганисян Г.В. Контактная задача для упругой кусочно-однородной бесконечной пластины, на поверхности которой приклеен упругий конечный стрингер..315

Оганисян Г.В., Агабекян П.В., Саркисян С.М. Периодическая контактная задача для составной пластины с упругими конечными стрингерами 320

Пахомов Б.М. Вариант модели изотропного разномодульного материала................................325

Петросян Г.Л., Арзуманян М.Г. Моделирование процесса прессования порошкового материала в жёсткой цилиндрической матрице в программной среде «ABAQUS» и аналитическим методом 329

Петросян Т.Л. Процесс образования замкнутой петли гистерезиса материалов 334

Погосян Н.Д. Отражение сдвиговой волны от однородного слоя в системе неоднородное полупространство– однородный слой 339

Попов В.Г. Крутильные колебания упругого цилиндра, сцеплённого с упругим полупространством 342

Ремизов М.Ю., Сумбатян М.А. Низкочастотное прохождение упругих волн через массив щелей двойной периодичности в трёхмерной постановке 347
Саноян Ю.Г. Об одной задаче устойчивости составной пластины в постоянном температурном поле 352
Саркисян А.А., Саркисян С.О. Динамическая модель микрополярных пологих оболочек при больших перемещениях 357
Саркисян А.С., Саркисян С.В. Распространение волн в слое с упруго-стеснёнными границами 362
Саркисян С.О. Микрополярная стержневая модель для нанокристаллического материала, состоящего из линейных цепочек атомов 365
Саруханян А.А., Веранян Г.Г., Погосян А.А. Закономерность изменения характеристик собственных колебаний высоких грунтовых плотин 370
Сейранян С.П. О предельном переходе в изгибающих моментах в прямоугольной пластине от локально распределённого по прямоугольнику равномерного внешнего давления к сосредоточенной силе в центре прямоугольника приложения давления 375
Соболь Б.В., Соловьев А.Н., Рашидова Е.В., Васильев П.В. Концентрация напряжений в вершинах радиальной трещины в стенке трубы с тонким покрытием 380
Соловьев А.Н., Зиборов Е.Н., Кириллова Е.В., Шевцов С.Н. Конечно-элементное моделирование армированных композитных материалов и конструкций с их использованием 385
Степанян В.С. Сведение задачи оптимального гарантированного поиска подвижного объекта к задаче оптимального быстродействия с подвижным концом 390
Сумбатян М.А., Ложкова Ю.Н. Распознавание системы трещин в упругих средах с помощью ультразвуковых волн 395
Тарасов А.Е., Барканов Е.Н. Зависимость формы колебаний удлинённой упругой пластинки от давления в окружающей среде 400
Торская Е.В. Исследование влияния шероховатости на контактное взаимодействие тел с покрытиями 405
Хачатрян Л.С. Отражение изгибной волны от границы пластинки с учётом напряжений сдвига 410
Чебаков М.И., Колосова Е.М., Ляпин А.А. Нестационарная контактная задача термоупругости для кусочно-неоднородного цилиндрического слоя конечной длины 413
Шекян Г.Г., Геворгян А.В., Дарбинян А.З. Колебания ротора электрической машины на шарикоподшипниках 418
Anop M., Murashkin E. On the pressure calculation by the zero-order optimization method for the elastocreep material with microdefect 422
Ghazaryan K.B., Ghazaryan R.A., Terzyan S.A. Surface shear saves in magneto-electro-elastic half-space covered with oppositely polarized layer 427
Hairoyan S.H. Shear strength regularities of the swelling soils 431
Kapustin M.S., Pavlova A.V., Telyatnikov I.S. For study of the elastic medium reaction to the effect of surface and recessed sources 434
Khurshudyan As. Zh. On explicit relaxation of stretching (membrane) energy functionals with two preferred states and its applications 439
Kovalev V.A., Murashkin E.V., Radayev Y.N. On shock wave and weak wave surfaces in micropolar thermoelastic continuum 444
Kudish I.I., Volkov S.S., Vasiliev A.S., Aizikovich S.M. Coating in heavily loaded line EHL contacts. Part 1. Dry contacts 449

Kudish I.I., Volkov S.S., Vasiliev A.S., Aizikovich S.M. Coating in heavily loaded line EHL contacts. Part 2. Lubricated contacts 452

Lekalakala M.L.G., Shatalov M., Feddotov I. Behavour of the elastic accreting rod subjected to free longitudinal vibrations.. 456

Logvinov O.A. Averaged equations in a Hele-Shaw cell: stratification accounted model 461

Manukyan G.A., Manukyan Z.K., Manukyan V.K. Waves in an FGPM layered structure 466

Manzhirov A.V. Problems of growing solids mechanics in modern industrial technologies 471

Mkhitaryan S.M. On a class of contact problems for linearly deformable foundations 476

Mróz Z. Modeling contact slip and sliding conditions with account for wear process 481

Piliposyan D.G., Ghazaryan K.B. Interfacial effects in periodic piezoelectric waveguide 486

Shavlakadze N. The boundary value contact problems of electroelasticity for piezo-electric half space with elastic inclusion 491

Silbergleit A.S., Chernin A.D. Exact nonlinear closed-form solutions for the Newtonian collapse of a perfect gravitating fluid 496

Valesyan S. Sh. AN Experimental investigation of the mechanical properties of the aged glass textolite subjected to tensile load 499

Vantsyan A.A. The investigation of generation of propagating crack during penetration of cone 504

Abstracts of Articles in Russian 506