ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ
НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

МЕХАНИКА 2016

труды международной школы-конференции молодых ученых,

3-7 октября 2016, Цахкадзор, Армения

При финансовой поддержке Государственного
комитета по науке МОН РА

ЕРЕВАН – 2016

Национальный комитет по теоретической и прикладной механике Армении
Российский национальный комитет по теоретической и прикладной механике
Институт механики НАН РА
Институт проблем механики РАН
Ереванский государственный университет
Национальный университет архитектуры и строительства Армении

Ответственный редактор: д.ф.-м.н. В.Н.Акопян

Технический редактор: к.ф.-м.н. Г.З.Геворкян

Редакторы: Ж.А.Авдалян и С.С.Овсепян

В сборник включены доклады, представленные на международную школу-конференцию молодых учёных «Механика 2016»

ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ

ՄԵԽԱՆԻԿԱ 2016

Երիտասարդ գիտնականների միջազգային դպրոց - գիտաժողովի նյութեր

3-7 հոկտեմբերի 2016, Ծաղկաձոր, Հայաստան

ԵՐԵՎԱՆ – 2016

INSTITUTE OF MECHANICS
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA

MECHANICS **2016**

Proceedings of International School-Conference of Young Scientists

3-7 October, 2016, Tsakhkadzor, Armenia

YEREVAN – 2016

ПРОДОЛЬНЫЙ СДВИГ СОСТАВНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ШТАМПОМ И ЖЁСТКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Агаян К.Л., Амирджанян А.А., Закарян В.Г.

Исследуется контактная задача для составного упругого полупространства, деформировавшегося в условиях продольного сдвига. Полупространство состоит из упругого бесконечного слоя конечной толщины и контактирующего с ней упругого полупространства с разными модулями сдвига. На границе полупространства приложен жёсткий ленточный штамп с плоским основанием и конечной ширины. Слой, перпендикулярный к поверхности полупространства, содержит тонкую жёсткую полосу – включение, находящееся в полном контакте с матрицей. Внешние воздействия в виде касательных нагрузок приложены на штамп, на включение и на границе полупространства вне штампа, обеспечивают антиплоскую деформацию системы слой – полупространство. Решение задачи математически формулируется в виде краевой задачи для двумерного гармонического уравнения в базовой плоскости с соответствующими граничными и контактными условиями. Задача определения контактных напряжений, возникающих под штампом, и линий соединения включения со слоем, сводятся к системе из двух сингулярных интегральных уравнений (СИУ) с обобщёнными ядрами Коши. Решение СИУ построено численно аналитическим методом Гаусса по узлам многочленов Якоби.

Введение. Рассматриваемая задача относится к классу задач о передаче нагрузок от концентраторов напряжений типа штампов и включений к массивным кусочно-однородным телам. Ввиду актуальности и значимости этих задач при теоретических исследованиях в различных расчётах инженерной практики имеется огромное количество работ, посвящённых изучению контактных и смешанных задач подобного рода. Здесь укажем лишь некоторые работы отечественных исследователей [1-9], в которых можно найти ссылки на большое число работ, связанных с рассматриваемой задачей.

Постановка задачи и вывод определяющих уравнений.

Пусть составное полупространство, отнесённое к декартовой системе координат $Oxyz$, состоит из упругого бесконечного слоя толщины H и контактирующего с ним упругого полупространства. Слой занимает область $\Omega_1(|x,z|<\infty, -H<y<0)$ и имеет модуль сдвига G_1, а полупространство с модулем сдвига G_2 занимает область $\Omega_2(|x,z|<\infty, 0<y<\infty)$. Слой по полосе $\omega_1(x=0, -d\le y\le -c, |z|<\infty)$ содержит жёсткую полосу – включение, находящееся в полном контакте со слоем, а по полосе $\omega_2(-l_1\le x\le l_2, y<-H, |z|<\infty)$ поверхности слоя прикреплён жесткий ленточный штамп (рис.1).

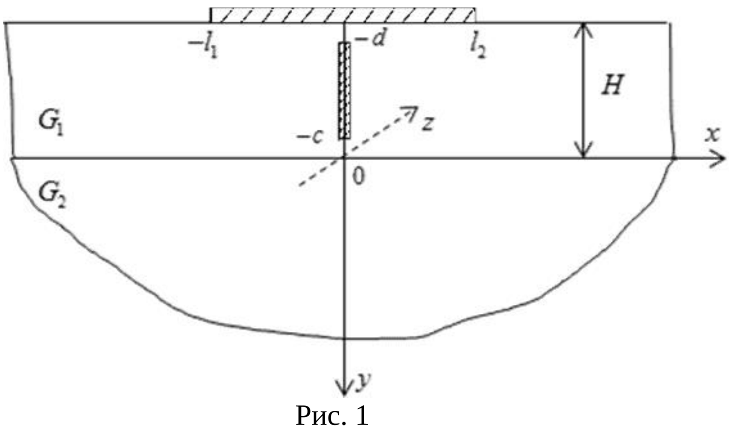


Рис. 1

Внешние воздейсвия в виде касательных сил могут быть приложены к штампу и к включению, а также к свободной поверхности слоя вне полосы штампа. Требуется определить напряжённое состояние в составном полупространстве, а также основные характеристики – контактные напряжения, возникающие под штампом, на боковых поверхностях включения и на поверхностях соединения слоя с полупространством.

Не останавливаясь на подробностях, заметим, что решение поставленной задачи математически сводится к следующей краевой задаче для двумерного уравнения Лапласа в областях Ω_1^* и Ω_2^* на базовой плоскости Oxy:

$$\Delta w_j(x,y)=0,\quad (x,y)\in\Omega_j^*,\quad \Omega_1^*=\{|x|<\infty, -H<y<0\},\quad \Omega_2^*=\{|x|<\infty, 0<y<0\}, \tag{1}$$

$$\begin{cases} w_1(x,-H) = C_1, & x \in [-l_1, l_2], \\ \tau_{yz}(x,-H) = \tau_0(x), & x \in L, \end{cases} \tag{2}$$

$$w_1(\pm 0, y) = C_2, \qquad y \in [-d, -c], \tag{3}$$

при условиях исчезновения напряжений на бесконечности и полного контакта на линии $y = 0$:

$$w_1(x,-0) = w_2(x,0), \quad \tau_{yz}(x,+0) = \tau_{yz}(x,-0), \quad (-\infty < x < \infty). \tag{4}$$

Здесь $w_j(x,y)$ $(j=1,2)$ – упругое перемещение, C_1 и C_2 – жёсткие перемещения штампа и включения, L – область действия внешней нагрузки $\tau_0(x)$, приложенной на границе слоя вне штампа.

Обозначим через $\tau(x)$ подлежащее определению контактное напряжение под штампом и введём функции скачков на линии трещины:

$$g_1(y) = w_1(+0,y) - w_1(-0,y) = 0; \quad f_1(y) = \frac{\tau_{xz}(+0,y) - \tau_{xz}(-0,y)}{G_1} \quad (-d < y < -c). \tag{5}$$

Теперь, следуя [6] и решая краевую задачу (1) – (4), предполагая при этом, что $\tau(x)$ и $f_1(x)$ известны, для определения компонент напряжений в области $\Omega_1^*(x)$ получим:

$$\frac{1}{G_1}\tau_{xz}^{(1)}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-d}^{-c}\left[\frac{x}{x^2+(\eta-y)^2} - \gamma\frac{x}{x^2+(\eta+y)^2} + \frac{x}{x^2+(2H+\eta+y)^2} + \right.$$

$$\left. + K_{11}^{(1)}(x,y,\eta)\right] f_1(\eta)\,d\eta - \frac{1}{\pi G_1}\int_{-l_1}^{l_2} F_1^{(1)}(x,y,t)\tau(t)dt - \frac{1}{\pi G_1}\int_L F_1^{(1)}(x,y,t)\tau_0(t)\,dt$$

$$(x,y) \in \Omega_1^*, \tag{6}$$

$$\frac{1}{G_1}\tau_{yz}^{(1)}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-d}^{-c}\left[\frac{\eta-y}{x^2+(\eta-y)^2} + \frac{\gamma(\eta+y)}{x^2+(\eta+y)^2} - \frac{2H+\eta+y}{x^2+(2H+\eta+y)^2} + \right.$$

$$\left. + K_{12}^{(2)}(x,y,\eta)\right] f_1(\eta)\,d\eta + \frac{1}{2\pi G_1}\int_{-l_1}^{l_2}\left[\frac{H+y}{(t-x)^2+(H+y)^2} + F_1^{(2)}(x,y,t)\right]\tau(t)dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi G_1}\int_L\left[\frac{H+y}{(t-x)^2+(H+y)^2} + F_1^{(2)}(x,y,t)\right]\tau_0(t)\,dt, \qquad (x,y) \in \Omega_1^* \tag{7}$$

где ядра $K_{1j}^{(i)}(x,y,\eta)$, $F_1^{(j)}(x,y,t)$, $(i, j = 1,2)$ даются формулами:

$$K_{11}^{(1)}(x,y,\eta) = -\gamma R_2(x,y,\eta) - \gamma^2 R_1(x,-y,-\eta) - \gamma R_1(x,-y,\eta) + \gamma R_1(x,y,-\eta)$$

$$K_{12}^{(1)}(x,y,\eta) = -\gamma Q_2(x,y,\eta) - \gamma^2 Q_1(x,-y,-\eta) - \gamma Q_1(x,-y,\eta) + \gamma Q_1(x,y,-\eta)$$

$$F_1^{(1)}(x,y,t) = -\gamma P_1^{(1)}(x,y,t) + P_1^{(1)}(x,y,t)$$

$$F_1^{(2)}(x,y,t) = \gamma\left[P_1^{(2)}(x,-y,t) + P_3^{(2)}(x,y,t)\right]$$

$$P_k^{(1)}(x,y,t) = \sum_{n=0}^{\infty}(-\gamma)^n \frac{x-t}{(x-t)^2 + ((2n+k)H+y)^2}$$

$$P_k^{(2)}(x,y,t) = \sum_{n=0}^{\infty}(-\gamma)^n \frac{(2n+k)H+y}{(t-x)^2 + ((2n+k)H+y)^2}$$

$$R_k\left(x,y,\text{¦}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\text{¥}\right)^{n+1}\frac{2\left(n+k\right)h+\text{¦}+y}{x^2+\left(2\left(n+k\right)h+\text{¦}+y\right)^2}$$

$$Q_k\left(x,y,\text{¦}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\text{¥}\right)^{n+1}\frac{x}{x^2+\left(\left(2n+k\right)h+\text{¦}+y\right)^2}$$

Таким образом, решение поставленной задачи (в области Ω_1^*) даётся формулами (6) и (7), где функции $f_1\left(y\right)$ и $\tau\left(x\right)$ пока неизвестны. Для определения этих неизвестных воспользуемся условием (2), которое теперь представляется в следующем виде:

$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{y=-H+0}=0,\quad -l_1<x<l_2;\qquad \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{x=+0}=0,\quad -d<y<-c \tag{8}$$

Теперь, при помощи (6) и (7), удовлетворяя условиям (8), для определения неизвестных функций $\tau\left(x\right)$ и $f_1\left(y\right)$ получим следующую систему интегральных уравнений:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-d}^{-c}\left[\frac{2x}{x^2+\left(H+\eta\right)^2}-\frac{\gamma x}{x^2+\left(H-\eta\right)^2}+L_{11}^{(b)}\left(x,\eta\right)\right]f_1\left(\eta\right)d\eta-$$
$$-\frac{1}{\pi G_1}\int_{-l_1}^{l_2}\left[\frac{1}{t-x}+L_{22}^{(b)}\left(y,t\right)\right]\tau\left(t\right)dt=\frac{1}{\pi G_1}\int_{L}\left[\frac{1}{t-x}+L_{22}^{(b)}\left(y,t\right)\right]\tau_0\left(t\right)dt,\quad\left(-l_1<x<l_2\right) \tag{9}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-d}^{-c}\left[\frac{1}{\eta-y}+\frac{\gamma}{\eta+y}-\frac{1}{2H+\eta+y}+L_{21}^{(b)}\left(y,\eta\right)\right]f_1\left(\eta\right)d\eta+$$
$$+\frac{1}{2\pi G_1}\int_{-l_1}^{l_2}\left[\frac{H+y}{t^2+\left(H+y\right)^2}+L_{22}^{(b)}\left(y,t\right)\right]\tau\left(t\right)dt=-\frac{1}{2\pi G_1}\int_{L}\left[\frac{H+y}{t^2+\left(H+y\right)^2}++L_{22}^{(b)}\left(y,t\right)\right]\tau_0\left(t\right)dt,$$
$$\left(-d<y<-c\right) \tag{10}$$

где $L_{11}^{(b)}\left(x,\eta\right)=K_{12}^{(1)}\left(x,-H,\eta\right)$, $L_{21}^{(b)}\left(y,\eta\right)=K_{12}^{(2)}\left(0,y,\eta\right)$,

$$L_{12}^{(b)}\left(x,t\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\gamma\right)^{n}\frac{2\left(t-x\right)}{\left(t-x\right)^2+\left(2\left(n+1\right)H\right)^2},$$

$$L_{22}^{(b)}\left(y,t\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\gamma\right)^{n+1}\left[\frac{\left(2n+3\right)H+y}{t^2+\left(\left(2n+3\right)H+y\right)^2}-\frac{\left(2n+1\right)H-y}{t^2+\left(\left(2n+1\right)H-y\right)^2}\right] \tag{11}$$

Уравнения, входящие в систему определяющих уравнений (9) и (10), представляют собой СИУ первого рода. Ядра этих уравнений представляются в виде суммы сингулярного ядра Коши и ядер, которые при $d=H$ или $c=0$ содержат ещё слагаемые в виде неподвижной особенности.

Из постановки задачи следует, что при $d\neq H$ неизвестные функции должны ещё удовлетворять следующим условиям равновесия штампа и включения:

$$\int_{-l_1}^{l_2}\tau\left(s\right)ds=P_1,\qquad \int_{-c}^{c}f_1\left(\eta\right)d\eta=P_2 \tag{12}$$

где P_1 и P_2 – равнодействующие внешних сил на штамп и включение, соответственно, которые предполагаются заданными.

Таким образом, решение вышепоставленной задачи в общем случае свелось к системе СИУ (9), (10) относительно $\tau\left(x\right)$ и $f_1\left(x\right)$ с условиями (12).

В этом случае неизвестные $\tau\left(x\right)$ и $f_1\left(y\right)$ имеют корневую особенность на концах линии интегрирования [5].

Если же $c = 0$, то степень особенности $f_1(y)$ в точке $y = 0$ определяется из уравнения [6]

$$\alpha = \frac{1}{\pi}\arccos\gamma, \qquad \gamma = \frac{1-\gamma}{1+\gamma}, \qquad \mu = \frac{G_1}{G_2} .$$

При $d = H$ приходим к задаче с T-образным штампом. Исследование показывает, что в этом случае контактные напряжения обращаются в ноль в точке соединения штампов. При этом, вместо двух условий (12) следует взять условие:

$$\int_{-l_1}^{l_2} \tau(x)\,dx + \int_{-H}^{-c} f_1(\eta)\,d\eta = P_1 + P_2 \tag{13}$$

Численный анализ и выводы.

Проведён численный анализ задачи для случаев, когда включение находится внутри слоя, либо один её конец выходит на линию раздела материалов. Решение СИУ построено методом механических квадратур [10].

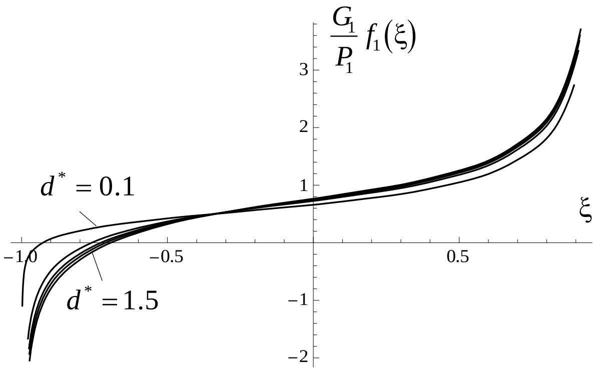


Рис.2

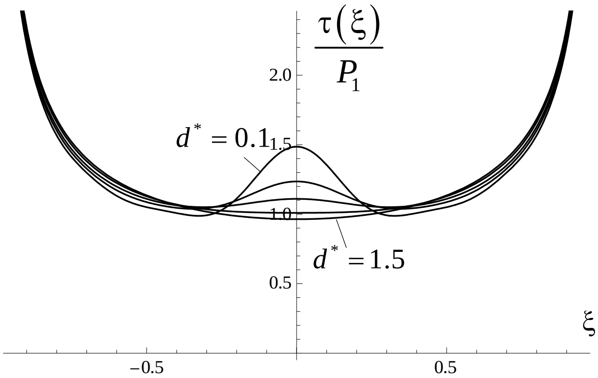


Рис. 3

На рис.2 представлены графики распределения обезразмеренных контактных тангенциальных напряжений на сторонах включения в зависимости от параметра $d^* = d/l = 1.5; 0.5; 0.3; 0.2; 0.1$, представляющего расстояние от конца включения до штампа, когда к штампу и включению приложена одинаково направленная внешняя нагрузка одинаковой интенсивности, другой конец включения выходит на линию раздела материалов, а

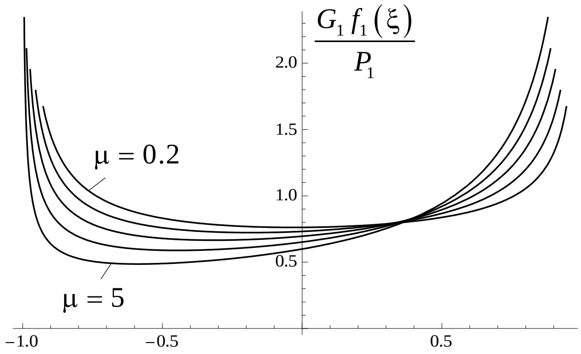


Рис. 4

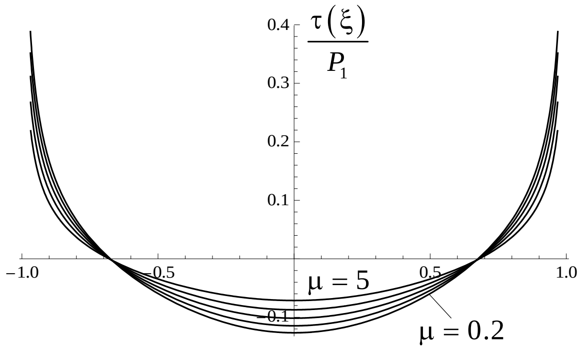


Рис. 5

отношение модулей сдвига слоя и полупространства принято $\mu = 2$. На рис. 3 представлены соответствующие этому случаю обезразмеренные контактные напряжения под штампом.

Наличие горба на рис.3 указывает на то, что в пределе, когда $d \to H$, штамп и включение можно трактовать как одно целое, а именно, как описанный выше T-образный штамп, в этом случае, в угловых точках штампа напряжения принимают одинаковые значения, а в самой точке – соединения равны нулю.

На рис.4 и 5 приведены такие же графики для разных значений отношения модулей сдвига слоя и полупространства в случае, когда включение находится внутри слоя и $d^* = 1.1,\ c^* = 0.2$, а сдвигающая нагрузка действует только на включение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаян К.Л. Некоторые контактные задачи для бесконечной пластины, усиленной упругими накладками. // Изв. АН СССР. МТТ. 1972. №5. С.34-45.
2. Тоноян В.С., Мелкумян Н.С. Антиплоская контактная задача для упругой полуплоскости с полубесконечной трещиной. //Изв. АН Армении. Механика. 1992. Т.42. № 1-2. С.27-32.
3. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488с.
4. Мхитарян С.М. О двух смешанных задачах, связанных с вопросами взаимодействия концентраторов напряжений различных типов с массивными телами при антиплоской деформации. // В сб.: «Механика деформируемого твёрдого тела» Ереван: Изд-во НАН Армении. 1993. С.129-143.
5. Григорян Э.Х. О коэффициентах интенсивности контактных напряжений в задачах для тел с накладками. //Межвузовский сб. научн. трудов, Механика. Ереван: Изд №5. С.130 – 140.
6. Aghayan K.L., Grigoryan E.Kh., Zakaryan V.G. Longitudial shear of a compound elastic half – space weakened by craks. Proc. of 6th Int. Conference «Contemporary Problems in Architecture and Construction», 24-27 June, 2014, Ostrava, Czech Republic, Advanced Materials Research Vol. 1020 (2014) pp. 286 – 290.
7. Акопян В.Н., Саакян А.В. Напряженное состояние упругой полуплоскости, содержащей тонкое жесткое включение. // МТТ. 2002. №6. С.76-82.
8. Акопян В.Н. Смешанные граничные задачи о взаимодействии сплошных деформируемых тел с концентраторами напряжений различных типов. Ереван: Изд-во «Гитутюн» НАН РА, 2014. 322с.
9. Агаян К.Л. О концентраторах напряжений типа стрингеров и трещин в бесконечной пластине и полосе. //В сб.: «Механика – 2013». Конференция молодых ученых. Ереван – 2013. С.5-9.
10. Саакян А.В. Метод дискретных особенностей в применении к решению сингулярных интегральных уравнений с неподвижной особенностью. //Изв. НАН Армении. Механика. 2000. Т.53. №3. С.12-19.

Сведения об авторах:

Агаян Каро Леренцович, доктор физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении.
Тел.: (+37491)485-566, **E-mail**: karo.aghayan@gmail.com

Амирджанян Арутюн Арменович, кандидат физ.-мат. наук, научный сотрудник Института механики НАН РА.
Тел.: (37410) 52-48-90, **E-mail:** amirjanyan@gmail.com

Закарян Ваге Гришаевич, кандидат физ.-мат. наук, научный сотрудник Института механики НАН РА.**Тел**.: (+37477)789-264, **E-mail**: vahe-zaqaryan@mail.ru

ПЛОСКО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ОДНОРОДНОЙ ПЛОСКОСТИ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ, ЧАСТИЧНО ОТОРВАННЫХ ЖЁСТКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Акопян В.Н., Акопян Л.В.

Рассмотрено плоско-деформированное состояние однородной плоскости с периодической системой одинаковых параллельных абсолютно жёстких включений, одна из длинных сторон которых отошли от матрицы, создавая тем самым, трещины. Методом обобщённого преобразования Фурье построены разрывные решения уравнений теории упругости для однородной плоскости с периодической системой одинаковых параллельных дефектов и на их основе получена система определяющих сингулярных интегральных уравнений в случае, когда дефектом является абсолютно жёсткое включение, одна из длинных сторон которого отошла от матрицы. Эффективное решение определяющих уравнений построено методом механических квадратур.

Пусть однородная упругая плоскость, отнесённая к декартовой системе координат Oxy по линиям $y = 2nH$ $(n \in Z)$ содержит периодическую систему одинаковых параллельных дефектов, занимающих область L, которая состоит из конечного числа непересекающихся интервалов, симметрично расположенных относительно оси Oy. Будем считать, что плоскость деформируется под воздействием таких самоуравновешенных, симметричных нагрузок, при которых линии $y = (2n+1)H$ $(n \in Z)$ являются линиями симметрии. Очевидно, что при такой постановке задачи напряжённое состояние в полосах, находящихся между двумя линиями симметрии, будут одинаковые и, следовательно, можно рассмотреть только полосу, находящуюся между плоскостями симметрии $y = -H$ и $y = H$.

Сначала решим вспомогательную задачу и построим разрывные решения уравнений теории упругости для полосы с высотой $2H$, на средней линии которой по линии L имеется дефект, а на линиях $y = \pm H$ заданы условия симметрии. Для этого мысленно разделим полосу по линии $y = 0$ на две полосы и снабдим индексами 1 и 2 соответственно все величины, описывающие напряжённо-деформированное состояние верхней и нижней полос. Тогда, обозначив скачки компонентов нормальных и касательных напряжений соответственно через $\sigma(x), \tau(x)$, а скачки компонентов горизонтальных и нормальных смещений соответственно через $U(x), V(x)$, вспомогательную задачу математически можно представить в виде следующей граничной задачи:

$$\begin{cases} \tau_{xy}^{(1)}(x,H) = V_1(x,H) = 0 \\ \tau_{xy}^{(2)}(x,-H) = V_2(x,-H) = 0 \end{cases} \qquad (-\infty < x < \infty) \tag{1a}$$

$$\begin{cases} \sigma_y^{(1)}(x,0) - \sigma_y^{(2)}(x,0) = \sigma(x) \\ \tau_{xy}^{(1)}(x,0) - \tau_{xy}^{(2)}(x,0) = \tau(x) \\ U_1(x,0) - U_2(x,0) = U(x) \\ V_1(x,0) - V_2(x,0) = V(x) \end{cases} \qquad (x \in L) \tag{1b}$$

При этом, $\sigma(x) = \tau(x) = U(x) = V(x) = 0$ $(x \notin L)$. Здесь $U_j(x,y)$ и $V_j(x,y)$ $(j = 1,2)$ – горизонтальные и вертикальные составляющие векторов смещения полос, удовлетворяющие уравнениям Ламэ, а $\sigma_y^{(j)}(x,y)$ и $\tau_{xy}^{(j)}(x,y)$ – компоненты нормальных и касательных напряжений, действующих в соответствующих полосах.

Для решения этой задачи компоненты смещений точек обеих полос представим в виде интегралов Фурье [1]:

$$U_j(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\left[A_j(s)+iyB_j^*(s)\right]\mathrm{ch}(sy)+\left[B_j(s)+iyA_j^*(s)\right]\mathrm{sh}(sy)\right\}e^{-isx}ds;$$

$$V_j(s,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\left[C_j(s)-yA_j^*(s)\right]\mathrm{ch}(sy)+\left[D_j(s)-yB_j^*(s)\right]\mathrm{sh}(sy)\right\}e^{-isx}ds; \qquad (2)$$

$$A_j^*(s)=\frac{s}{æ}\left[D_j(s)-iA_j(s)\right];\quad B_j^*(s)=\frac{s}{æ}\left[C_j(s)-iB_j(s)\right]\quad (j=1,2),$$

где A_j, B_j, C_j и D_j – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению, а æ – известное постоянное Мусхелишвили. Далее, используя представление (1.2) и связь компонентов напряжений и смещений, удовлетворим условиям (1). В итоге неизвестные коэффициенты, входящие в представление (2), выражаются при помощи трансформантов Фурье функций разрывов напряжений и смещений. После этого, подставляя полученные выражения в соотношения (2) и в закон Гука, находим разрывные решения для полосы, где компоненты напряжения и смещения выражены через функции скачков. Приведём формулы известных комплексных комбинаций напряжений и производных от смещений на линии $y=0$, которые нам понадобятся в дальнейшем. Они следующие:

$$\sigma_y^{(j)}(x,0)-\mathrm{i}\,\tau_{xy}^{(j)}(x,0)=\frac{(-1)^{j+1}}{2}\varphi_1(x)+\frac{i\vartheta_1}{2\pi\vartheta_2}\int_L\frac{\varphi_1(s)ds}{s-x}-\frac{i}{\pi\Delta}\int_L\frac{\varphi_2(s)ds}{s-x}+$$
$$+\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{2}\int_L R_{1k}(s-x)\varphi_k(s)ds; \qquad (3)$$

$$\frac{d}{dx}\left[U_j(x,0)+iV_j(x,0)\right]=\frac{(-1)^{j+1}}{2}\varphi_2(x)-\frac{i\vartheta_1}{2\pi\vartheta_2}\int_L\frac{\varphi_2(s)ds}{s-x}-\frac{i}{4\pi\vartheta_2}\int_L\frac{\varphi_1(s)ds}{s-x}+$$
$$+\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{2}\int_L R_{2k}(s-x)\varphi_k(s)ds. \qquad (4)$$

Здесь введены обозначения:

$$\varphi_1(x)=\sigma(x)-i\tau(x);\quad \varphi_2(x)=U(x)+iV(x);\quad \varphi_3(x)=\overline{\varphi}_1(x);\quad \varphi_4(x)=\overline{\varphi}_2(x);$$

$$R_{11}(x)=-R_{22}(x)=\frac{i}{(1+æ)}\left[-\frac{æ-1}{\pi x}+\frac{(1-\nu)-\nu\,\mathrm{ch}(\pi x/2H)}{H\,\mathrm{sh}(\pi x/2H)}+\frac{\pi x\left(1-\mathrm{ch}(\pi x/2H)\right)}{4H^2\mathrm{sh}^2(\pi x/2H)}\right];$$

$$R_{12}(x)=\frac{i}{\Delta}\left[\frac{2}{\pi x}-\frac{\mathrm{cth}(\pi x/2H)}{H}-\frac{\pi x\left(\mathrm{ch}(\pi x/2H)-1\right)}{4H^2\mathrm{sh}^2(\pi x/2H)}\right];$$

$$R_{13}(x)=-R_{24}(x)=\frac{i}{(1+æ)}\left[\frac{(1-\nu)+\nu\,\mathrm{ch}(\pi x/2H)}{H\mathrm{sh}(\pi x/2H)}-\frac{\pi x\left(1+\mathrm{ch}(\pi x/2H)\right)}{4H^2\mathrm{sh}^2(\pi x/2H)}\right];$$

$$R_{14}(x)=\frac{i}{\Delta H}\left[\mathrm{cth}(\pi x/2H)-\frac{\pi x\left(\mathrm{ch}(\pi x/2H)+1\right)}{4H\mathrm{sh}^2(\pi x/2H)}\right];$$

$$R_{21}(x)=\frac{i\vartheta}{(1+æ)}\left[\frac{2æ}{\pi x}-\frac{(æ+1)+(æ\text{-}1)\operatorname{ch}(\pi x/2H)}{2H\operatorname{sh}(\pi x/2H)}+\frac{\pi x\left(\operatorname{ch}(\pi x/2H)-1\right)}{4H^2\operatorname{sh}^2(\pi x/2H)}\right];$$

$$R_{23}(x)=\frac{i\vartheta}{(1+æ)}\left[\frac{(æ\text{-}1)\operatorname{ch}(\pi x/2H)-(æ+1)}{2H\operatorname{sh}(\pi x/2H)}+\frac{\pi x\left(\operatorname{ch}(\pi x/2H)+1\right)}{4H^2\operatorname{sh}^2(\pi x/2H)}\right];$$

$$\vartheta_1=\frac{(1-2\nu)}{2\vartheta æ};\vartheta_2=\frac{(1-\nu)}{\vartheta æ};\ \vartheta=\frac{(1+\nu)}{E},\Delta=\vartheta(1+æ),$$

ν – коэффициент Пуассона, а E – модуль упругости материала полосы.

При помощи этих решений, удовлетворив условиям на дефектах, легко записать определяющие уравнения ряда новых задач.

В качестве примера рассмотрим случай, когда дефект представляет собой абсолютно жёсткое тонкое включение длины $2a$, занимающее в базовой полосе интервал $(-a,a)$, верхняя сторона которого отошла от матрицы, создавая трещину. Будем полагать, что полоса деформируется под воздействием симметрично распределённых нормальных нагрузок $P(x)$, действующих на свободный берег трещины и сосредоточенной нормальной нагрузки P_0, действующей в срединной точке включения. В указанном случае условия на дефекте в комплексных комбинациях напряжений и смещений записываются в следующем виде:

$$\begin{cases}\sigma_y^{(1)}(x,0)-i\tau_{xy}^{(1)}(x,0)=P(x);\\ \dfrac{d}{dx}\left[U_2(x,0)+iV_2(x,0)\right]=v_0'(x),\end{cases}\tag{5}$$

где функция $v_0(x)$ описывает контур жёсткого включения, сцепленного с полосой.

Удовлетворив этим условиям, придём к следующей определяющий системе сингулярных интегральных уравнений второго рода:

$$\begin{cases}\varphi_1(x)+\dfrac{i\vartheta_1}{\pi\vartheta_2}\displaystyle\int_{-a}^{a}\frac{\varphi_1(s)ds}{s-x}-\frac{2i}{\pi\Delta}\int_{-a}^{a}\frac{\varphi_2(s)ds}{s-x}+\sum_{k=1}^{4}\int_{-a}^{a}R_{1k}(s-x)\varphi_k(s)ds=2P(x)\\ \varphi_2(x)+\dfrac{i\vartheta_1}{\pi\vartheta_2}\displaystyle\int_{-a}^{a}\frac{\varphi_2(s)ds}{s-x}+\frac{i}{2\pi\vartheta_2}\int_{-a}^{a}\frac{\varphi_1(s)ds}{s-x}-\sum_{k=1}^{4}\int_{-a}^{a}R_{2k}(s-x)\varphi_k(s)ds=-2v_0'(x)\end{cases}\tag{6}$$

Полученную систему будем рассматривать при условиях равновесия включения и непрерывности смещений в концевых точках трещины:

$$\int_{-a}^{a}\varphi_1(s)ds=P_0^*;\quad \int_{-a}^{a}\varphi_2(s)ds=0\qquad \left(P_0^*=\int_{-a}^{a}P(x)dx-P_0\right).\tag{7}$$

Для решения системы (6) при условиях (7), приведём её к каноническому виду. С этой целью, умножая второе уравнение (6) на $\lambda_j=(-1)^{j+1}\lambda;\ \left(\lambda=i\vartheta_2\sqrt{æ}/(1-\nu)\right)\ (j=1,2)$ и суммируя с первым уравнением, придём к эквивалентной системе интегральных уравнений, записанной в каноническом виде:

$$\psi_j(x)+\frac{ia_j}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\psi_j(s)ds}{s-x}+\sum_{k=1}^{4}\int_{-a}^{a}Q_{jk}(s-x)\psi_k(s)ds=f_j(x), \tag{8}$$

при этом условия (7) принимают вид:

$$\int_{-a}^{a}\psi_j(s)ds=P_0^*\quad (j=1,2). \tag{9}$$

Здесь

$$\psi_j(x)=\varphi_1(x)+\lambda_j\varphi_2(x);\ \psi_{j+2}(x)=\overline{\psi}_j(x)\quad (j=1,2);$$
$$a_j=\left[2\vartheta_1+\lambda_j\right]/2\vartheta_2;\ f_j(x)=2\left[P(x)-\lambda_j v_0'(x)\right];$$

$$Q_{j1}(x)=R_{11}(x)-R_{22}(x)-i\lambda_j R_{21}(x)+R_{12}(x)/\lambda_j;$$
$$Q_{j2}(x)=R_{11}(x)+R_{22}(x)-i\lambda_j R_{21}(x)-R_{12}(x)/\lambda_j;$$
$$Q_{j3}(x)=R_{13}(x)+R_{24}(x)-i\lambda_j R_{23}(x)-R_{14}(x)/\lambda_j;$$
$$Q_{j4}(x)=R_{13}(x)-R_{24}(x)-i\lambda_j R_{23}(x)+R_{14}(x)/\lambda_j.$$

Таким образом, решение поставленной задачи свелось к решению системы (8) при условии (9). Решение этой системы будем строить методом механических квадратур [2]. Для этого при помощи замены переменных $t=ax,\ u=as$ сформулируем систему (8) и условие (9) на интервале $(-1,1)$ и введя безразмерные функции

$$\psi_j^*(t)=a\psi_j(ax)/P_0;\qquad f_j^*(t)=f(ax)/P_0\quad (j=1,2),$$

запишем в виде:

$$\psi_j^*(t)+\frac{ia_j}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\psi_j^*(u)du}{u-t}+\sum_{k=1}^{4}\int_{-1}^{1}Q_{jk}^*(u-t)\psi_k^*(u)dt=f_j^*(t)\quad (-1<t<1), \tag{10}$$

$$\int_{-1}^{1}\psi_j(s)ds=P_0^*/P_0\quad (j=1,2). \tag{11}$$

По методу Мусхелишвили [3] нетрудно установить поведение искомых функций в концевых точках интервала интегрирования и представить их в виде :

$$\psi_j^*(t)=\frac{\psi_j^{(0)}(t)}{(1+\eta)^{\gamma_j}(1-x)^{1-\gamma_j}}\qquad \left(\gamma_1=\frac{1}{4}-i\beta;\ \gamma_2=\frac{3}{4}-i\beta;\ \beta=\frac{1}{4\pi}\ln æ\right), \tag{12}$$

где $\psi_j^{(0)}(t)\ \ (j=1,2)$ – гладкие функции, ограниченные вплоть до концов интервала $[-1,1]$.

Подставляя значения функций $\psi_j^*(t)$ в (10), (11) и используя соотношения, приведённые в [2], по стандартной процедуре придём к системе алгебраических уравнений относительно значений $\psi_j^{(0)}(\xi_i)$ $(i=1,\dots n;\ \ j=1,2)$. После определения $\psi_j^{(0)}(\xi_i)$ легко восстанавливаются функции $\psi_j^*(t)$ $(-1<t<1)$ и определяются все компоненты напряжений и деформации в базовой полосе. В частности, комплексная комбинация напряжений, действующих на линии

$y=0$ вне трещины, можно определить из соотношения (3), записав её в безразмерном виде при помощи функций $\psi_j^*(t)$ $(j=1,2)$:

$$\chi(t)=\frac{a\left[\sigma_y^{(j)}(at,0)-i\tau_{xy}^{(j)}(at,0)\right]}{P_0}=-\frac{A}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\psi_1^*(u)du}{u-t}+\frac{\bar{A}}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\psi_2^*(u)du}{u-t}+F(t),$$

где $A=\left[\sqrt{æ}-i(1-2\nu)\right]/2(1-\nu)$, а функция $F(t)$ – ограниченная функция вплоть до концов интервала $[-1,1]$. Подставляя сюда выражения функции $\psi_j^*(t)$ из (12), после некоторых выкладок для главной части приведённых напряжений вне трещины $(|x|>1)$ получим

$$\chi(t)=-\frac{1}{(1-t)}\left[A_*\psi_1^{(0)}(t)\left|\frac{1+t}{1-t}\right|^{-\gamma_1}-\bar{A}_*\psi_2^{(0)}(t)\left|\frac{1+t}{1-t}\right|^{-\gamma_2}\right]\quad\left(A_*=A/\sin(\pi\gamma_1)\right).$$

Тогда безразмерные коэффициенты интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещины $x=\pm a$ будут представлены формулами:

$$K_I(1)-iK_{II}(1)=2^{1/2-\gamma_1}\sqrt{\pi}A_*\psi_1^{(*)}(1);\quad K_I(-1)-iK_{II}(-1)=2^{1/2-\gamma_2}\sqrt{\pi}\bar{A}_*\psi_2^{(*)}(-1).$$

Проведён численный анализ и выявлены закономерности изменения контактных напряжений, действующих в зоне контакта включения с основанием, раскрытия трещины и коэффициентов интенсивности в концевых точках трещины в зависимости от упругих характеристик плоскости и контура включений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акопян В.Н. Смешанные граничные задачи о взаимодействии сплошных деформируемых тел с концентраторами напряжений различных типов. Ереван: Изд. «Гитутюн НАН РА», 2014. 322с.
2. Саакян А.В. Метод дискретных особенностей в применении к решению сингулярных интегральных уравнений с неподвижной особенностью. // Изв. НАН Армении. Механика. 2000. Т.53. № 3. С.12-19.
3. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.

<u>Сведения об авторах:</u>

Акопян Ваграм Наслетникович – доктор физ.-мат. наук, директор Института механики НАН РА, **тел.:** (37410) 52-48-90, **e-mail:** vhakobyan@sci.am

Акопян Лусине Ваграмовна – кандидат физ.-мат. наук, научный сотрудник Института механики НАН РА, **тел.:** (37410) 52-48-90.

ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ НАПРЯЖЁННОЕ СОСТОЯНИЕ ОДНОРОДНОГО ПРОСТРАНСТВА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ МОНЕТООБРАЗНЫМИ ДЕФЕКТАМИ

Акопян В.Н., Даштоян Л.Л.

Рассмотрено осесимметричное напряжённое состояние однородного пространства, содержащего периодическую систему монетообразных параллельных дефектов. Методом интегрального преобразования Ханкеля построены разрывные решения уравнений осесимметричной теории упругости, которые дают возможность сразу написать определяющие уравнения ряда задач. В качестве примера рассмотрен случай, когда однородное пространство содержит периодическую систему параллельных монетообразных трещин. На основе полученных разрывных решений написано определяющее интегральное уравнение, которое при помощи операторов вращения сведено к интегральному уравнению второго рода Фредгольмовского типа, решение которого можно построить методом последовательных приближений. Получены простые формулы как для определения раскрытия трещины, так и для определения коэффициента интенсивности разрушающих напряжений.

Введение

Исследованию осесимметричного напряжённого состояния однородного или кусочно-однородного пространства с монетообразными дефектами типа трещин, полностью или частично сцеплённых абсолютно жёстких тонких включений, посвящено много работ. Из них отметим работы [1-2], которые непосредственно связаны с настоящей работой. Исследование аналогичных задач с периодическими параллельными монетообразными дефектами, как нам известно, здесь проводится впервые.

1. Постановка задачи. Вывод разрывных решений

Рассмотрим осесимметричное напряжённое состояние однородного упругого пространства с коэффициентом упругости E и коэффициентами Пуассона ν, отнесённого к полярной системе координат $Or\varphi z$, на плоскостях $z = 2nh$ $(n \in Z)$ которого имеется периодическая система одинаковых монетообразных параллельных дефектов радиуса a. Будем считать, что пространство деформируется под воздействием таких одинаковых самоуравновешенных нагрузок, действующих на дефект, при которых плоскости $z = (2n+1)h$ $(n \in Z)$ являются плоскостями симметрии. Вследствие этого, поставленную задачу можно сформулировать как задачу для однородного слоя (базовой ячейки), занимающего в пространстве область $\Omega\{|z| \le h; 0 \le r < \infty; 0 \le \varphi \le 2\pi\}$, на внешних плоскостях $z = \pm h$ которого заданы условия симметрии, а на срединной плоскости $z = 0$ имеется монетообразный дефект.

Чтобы получить систему определяющих уравнений поставленной задачи при каждом дефекте, сначала запишем разрывные решения уравнений осесимметричной теории упругости для однородного слоя, на внешних плоскостях которого заданы условия симметрии, а на круге $\Omega_1\{z = 0; 0 \le r \le a; 0 \le \varphi \le 2\pi\}$ заданы скачки функций напряжений $\sigma(r)$, $\tau(r)$ и смещений $\mathrm{u}(r)$, $w(r)$. Для этого мысленно разделим слой по плоскости $z = 0$ на два слоя и снабдив индексами 1 и 2 соответственно все величины, описывающие напряжённо-деформированное состояние верхнего и нижнего слоёв, рассмотрим следующую вспомогательную граничную задачу:

$$\begin{cases} \tau_{rz}^{(1)}(r,h) = w_1(r,h) = 0 \\ \tau_{rz}^{(2)}(r,-h) = w_2(r,-h) = 0 \end{cases} \qquad (0 \le r < \infty) \qquad (1.1a)$$

$$\begin{cases} u_r^{(1)}(r,0)-u_r^{(2)}(r,0)=u(r) \\ u_z^{(1)}(r,0)-u_z^{(2)}(r,0)=w(r) \\ \sigma_z^{(1)}(r,0)-\sigma_z^{(2)}(r,0)=\sigma(r) \\ \tau_{rz}^{(1)}(r,0)-\tau_{rz}^{(2)}(r,0)=\tau(r) \end{cases} \qquad (0\le r<\infty) \tag{1.1b}$$

Причем,

$u(r)=w(r)=\sigma(r)=\tau(r)=0 \ \ (a<r<\infty)$.

Здесь $u_r^{(j)}(r,\varphi)$ и $u_z^{(j)}(r,\varphi)$ $(j=1,2)$ – радиальные и вертикальные составляющие векторов смещений точек слоёв, удовлетворяющие уравнениям Ламэ, а $\sigma_z^{(j)}(r,z)$ и $\tau_{rz}^{(j)}(r,z)$ – компоненты нормальных и радиальных напряжений, действующих в соответствующих слоях. При помощи интегрального преобразования Ханкеля решим граничную задачу (1.1) для уравнений осесимметричной теории упругости и выразим компоненты напряжений и смещений на плоскости $z=0$ при помощи функций скачков. Получим:

$$\begin{aligned} \sigma_z^{(j)}(r,0)&=\frac{(-1)^{j+1}}{2}\sigma(r)+\int_0^a K_{1,2}(r,\xi)\xi\tau(\xi)d\xi+\int_0^a K_{1,4}(r,\xi)\xi w(\xi)d\xi; \\ \tau_{rz}^{(j)}(r,0)&=\frac{(-1)^{j+1}}{2}\tau(r)+\int_0^a K_{2,1}(r,\xi)\xi\sigma(\xi)d\xi+\int_0^a K_{2,3}(r,\xi)\xi u(\xi)d\xi; \\ u_r^{(j)}(r,0)&=\frac{(-1)^{j+1}}{2}u(r)+\int_0^a K_{3,2}(r,\xi)\xi\tau(\xi)d\xi+\int_0^a K_{3,4}(r,\xi)\xi w(\xi)d\xi; \\ u_z^{(j)}(r,0)&=\frac{(-1)^{j+1}}{2}w(r)+\int_0^a K_{4,1}(r,\xi)\xi\sigma(\xi)d\xi+\int_0^a K_{4,3}(r,\xi)\xi u(\xi)d\xi. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь введены обозначения:

$$K_{12}(r,t)=\int_0^\infty K_{12}(s)sJ_0(sr)J_1(s\xi)ds; \quad K_{14}(r,t)=\int_0^\infty K_{14}(s)s^2J_0(sr)J_0(s\xi)ds;$$

$$K_{21}(r,t)=\int_0^\infty K_{21}(s)sJ_1(sr)J_0(s\xi)ds; \quad K_{23}(r,t)=\int_0^\infty K_{23}(s)s^2J_1(sr)J_0(s\xi)ds;$$

$$K_{32}(r,t)=\int_0^\infty K_{32}(s)sJ_1(sr)J_1(s\xi)ds; \quad K_{34}(r,t)=\int_0^\infty K_{34}(s)sJ_1(sr)J_0(s\xi)ds;$$

$$K_{41}(r,t)=\int_0^\infty K_{41}(s)sJ_0(sr)J_0(s\xi)ds; \quad K_{43}(r,t)=\int_0^\infty K_{43}(s)sJ_0(sr)J_1(s\xi)ds;$$

$$K_{12}(s)=-K_{34}(s)=\frac{\vartheta_1}{2\vartheta_2}\left[\mathrm{cth}(hs)-\frac{\mu hs}{æ\vartheta_1\,\mathrm{sh}^2(hs)}\right]; \ K_{14}(s)=-\frac{\mu^2}{æ\vartheta_2}\left[\mathrm{cth}(hs)+\frac{hs}{\mathrm{sh}^2(hs)}\right];$$

$$K_{21}(s)=K_{43}(s)=\frac{\vartheta_1}{2\vartheta_2}\left[\mathrm{th}(hs)-\frac{\mu hs}{æ\vartheta_1\,\mathrm{sh}^2(hs)}\right]; \ K_{23}(s)=-\frac{\mu^2}{æ\vartheta_2}\left[\mathrm{th}(hs)+\frac{hs}{\mathrm{ch}^2(hs)}\right];$$

$$K_{32}(s)=-\frac{1}{4s\vartheta_2}\left[\mathrm{cth}(hs)-\frac{hs}{æ\mathrm{sh}^2(hs)}\right]; \ K_{41}(s)=-\frac{1}{4s\vartheta_2}\left[\mathrm{th}(hs)-\frac{hs}{æ\mathrm{ch}^2(hs)}\right];$$

$$\vartheta_1 = \frac{(1-2\nu)\mu}{æ}; \quad \mu = \frac{E}{2(1-\nu)}; \quad \vartheta_2 = \frac{2(1-\nu)\mu}{æ}; \quad æ = 3\text{-}4\nu,$$

а функции $J_i(r)\ (i=1,2)$ – известные функции Бесселя.

Имея представления (1.2) и удовлетворив условиям на дефекте, можно сразу написать определяющие уравнения ряда задач.

2. **Осесимметричное напряжённое состояние однородного пространства с периодическими параллельными монетообразными трещинами.**

В качестве примера рассмотрим случай, когда дефектом является монетообразная трещина радиуса a, на берегах которой действуют одинаковые распределённые нормальные нагрузки величины $P_0(r)$. В этом случае на берегах трещины будут иметь место условия:

$$\begin{cases} \sigma_z^{(1)}(r,0) = \sigma_z^{(2)}(r,0) = -P_0(r); \\ \tau_{rz}^{(1)}(r,0) = \tau_{rz}^{(2)}(r,0) = 0. \end{cases} \quad (0<r<a) \ . \tag{2.1}$$

Используя соотношения (1.2) и учитывая, что в рассматриваемом случае $\sigma(r) = \tau(r) = u(r) = 0$, удовлетворим условиям (2.1). Получим:

$$\int_0^a K_{1,4}(r,\xi)\xi w(\xi)\,d\xi + \sigma_z^{(0)} = -\mathrm{P}_0(r) \tag{2.2}$$

При этом, имеют место условия непрерывности смещений

$$w(a) = 0. \tag{2.3}$$

Вводя функцию [2-3]

$$w_*(t) = \frac{2}{\pi}\int_t^a \frac{\xi w(\xi)\,d\xi}{\sqrt{\xi^2 - t^2}} \qquad \left(w_*(a) = 0\right)$$

и продолжив её на интервал $(-a,0)$ чётным образом, уравнение (1.4) запишем в виде:

$$\int_0^a w_*(t)\,dt \int_0^\infty K_{14}(s)\cos(ts)\cdot J_0(rs)s^2 ds + \sigma_z^{(0)} = -\mathrm{P}_0(r). \tag{2.4}$$

Далее, применим к обеим сторонам уравнения (1.6) оператор [2]

$$I(\varphi(x)) = \int_0^x \frac{\varphi(r)\,r\,dr}{\sqrt{x^2 - r^2}}.$$

Тогда, используя чётность функции $w_*(t)$, значения интегралов [5,6]

$$\int_0^x \frac{J_0(rt)\,r\,dr}{\sqrt{x^2 - r^2}} = \frac{\sin xt}{t}; \qquad \int_0^\infty \sin(ts)\cdot\sin(sx)\,ds = \frac{\pi}{2}\left[\delta(t-x) - \delta(t+x)\right]$$

и продолжив правую часть полученного уравнения на интервал $(-a,0)$ нечётным образом, получим следующее интегральное уравнение второго рода:

$$w_*'(x) + \int_{-a}^a Q(x,t)\,w_*'(t)\,dt = f(x), \tag{2.5}$$

где

$$Q(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{2e^{-hs}\operatorname{sh}(hs) + hs}{\operatorname{sh}^2(hs)}\sin(ts)\sin(xs)\,ds; \quad f(x) = -\frac{4(1-\nu)}{\pi\mu}\left[I(P_0(r))\right].$$

Используя экспоненциальную сходимость интеграла, представляющего ядро интегрального уравнения (2.5), нетрудно установить, что это уравнение Фредгольмовского типа и его решения можно получить методом последовательных приближений. После решения уравнения (2.5) функцию $w_*(x)$ можно определить по формуле

$$w_*(x) = -\int_x^a w_*'(t)\,dt\,,$$

а раскрытие трещин $w(r)$ в исходных координатах при помощи формулы обращения интегрального оператора Абеля [2]

$$w(r) = -\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\int_r^a \frac{s w_*(s)}{\sqrt{s^2 - r^2}}\,ds\,.$$

Напишем также формулу для определения коэффициента интенсивности разрушающих напряжений на окружности $r = a$. Для этого используем первое соотношение из (1.2), рассмотрев его при $r > a$. Ввеём функцию $w_*(t)$ и запишем её в виде

$$\sigma_z^{(j)}(r,0) = \int_0^a w_*(t)\,dt\int_0^\infty K_{14}(s)\,s^2 J_0(sr)\cos ts\,ds = -\int_0^a w_*'(t)\,dt\int_0^\infty K_{14}(s)\,sJ_0(sr)\sin(ts)\,ds =$$
$$= \frac{\mu}{2(1-\nu)}\int_0^a w_*'(t)\,dt\int_0^\infty sJ_0(sr)\sin(ts)\,ds + \int_0^a Q_1(r,t)\,w_*'(t)\,dt \qquad (r > a) \tag{2.6}$$

где

$$Q_1(r,t) = \frac{\mu}{2(1-\nu)}\int_0^\infty \frac{2e^{-sh}\operatorname{sh}(hs) + hs}{\operatorname{sh}^2(hs)}\,sJ_0(sr)\sin(ts)\,ds\,.$$

Теперь, учитывая соотношение [4]

$$sJ_0(sr) = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[rJ_1(sr)\right]$$

и значение известного интеграла Вебера [5]

$$\int_0^\infty J_1(sr)\sin ts\,ds = \begin{cases} 0 & t > r \\ \dfrac{t}{r}\dfrac{1}{\sqrt{r^2 - t^2}} & t < r \end{cases}$$

(1.8) запишем в следующем виде:

$$\sigma_z^{(j)}(r,0) = \frac{\mu}{2(1-\nu)r}\frac{d}{dr}\int_0^a \frac{t w_*'(t)\,dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} + \int_0^a Q_1(r,t)\,w_*'(t)\,dt =$$
$$= \frac{\mu w_*'(a)}{(1-\nu)\sqrt{r^2 - a^2}} + F(r) \qquad (r > a)$$

$$\left(F(r) = \frac{\mu w_*'(a)}{2(1-\nu)r} + \frac{\mu}{2(1-\nu)r}\frac{d}{dr}\int_0^a \frac{t\left[w_*'(t) - w_*'(a)\right]dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} + \int_0^a Q_1(r,t)\,w_*'(t)\,dt\right).$$

Нетрудно заметить, что функция $F(r)$ ограничена на окружности $r = a$. Следовательно, для коэффициента интенсивности разрушающих напряжений на этой окружности получим выражение:

$$K_I(a) = \sqrt{2\pi}\lim_{r\to a+0}\sqrt{r-a}\,\sigma_z^{(j)}(r,0) = \frac{\sqrt{\pi}\mu w_*'(a)}{2(1-\nu)\sqrt{a}}. \tag{2.7}$$

Заметим, что в случае, когда $h \to \infty$, мы получим задачу для однородного пространства с одной монетообразной трещиной. Нетрудно установить, что в этом случае $Q(x,t) \equiv 0$ и из уравнения (2.5) сразу найдём:

$$w'_*(x) = f(x) = -\frac{4(1-\nu)}{\pi\mu}\left[I\left(P_0(r)\right)\right].$$

В случае же, когда на берега трещины действует равномерно распределённая нагрузка интенсивности P_0, т.е., когда $P_0(r) = P_0 = \mathrm{const}$, будем иметь:

$$w'_*(x) = -\frac{4(1-\nu)P_0}{\pi\mu}x.$$

Отсюда

$$w_*(x) = -\int_x^a w'_*(t)\,dt = \frac{2(1-\nu)}{\pi\mu}\left(a^2 - x^2\right).$$

Тогда при помощи формулы обращения интегрального оператора Абеля найдём:

$$w(r) = \frac{4(1-\nu)P_0}{\pi\mu}\sqrt{a^2 - r^2} \qquad (0 < r < a).$$

Для коэффициента интенсивности разрушающих напряжений на окружности $r = a$ получим выражение:

$$K_I(a) = 2\sqrt{a/\pi}\,P_0,$$

которое с точностью совпадает с формулой, приведённой в [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Акопян В.Н. Смешанные граничные задачи о взаимодействии сплошных деформируемых тел с концентраторами напряжений различных типов. Ереван: Изд. «Гитутюн НАН РА», 2014. 322с.
2. Попов Г.Я. О концентрации упругих напряжений возле тонкого отслоившегося включения. //В сб.: «Современные проблемы механики и авиации», посвящённом И.Ф. Образцову. 1980, с.156-162.
3. Попов Г.Я. Осесимметричная контактная задача для упругого неоднородного полу-пространства при наличии сцепления. // ПММ. 1973. Т.37. С.1109-1116.
4. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1971. 1108с.
5. Ватсон Г.Н. Теория Бесселевых функций. Ч.I. М.: Иноиздат, 1949. 798с.
6. Брычков А., Прудников А.П. Интегральные преобразования обобщённых функций. М.: Наука, 1977. 287с.
7. Справочник по коэффициентам интенсивностей напряжений. Т.1. /Под редакцией Ю. Мураками. М.: Мир, 1990. 448с.

Сведения об авторах:

Акопян Ваграм Наслетникович – доктор физ.-мат. наук, директор Института механики НАН РА, **тел.:** (37410) 52-48-90, **e-mail:** vhakobyan@sci.am

Даштоян Лилит Левоновна – кандидат физ.-мат. наук, учёный секретарь Института механики НАН Армении, **тел.:** (37410) 56-81-89, **e-mail:** Lilit_Dashtoyan@mechins.sci.am

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ В ПРАВОЙ ЧАСТИ

Амирджанян А.А., Саакян А.В.

Строится численное решение сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши на конечном интервале, правая часть которого содержит логарифмическую особенность на конце. Показывается необходимость учёта указанной особенности и эффективность предлагаемого подхода к решению такого типа уравнений.

Введение. В работе [1] была рассмотрена задача о вдавливании штампа с вогнутым основанием в упругую полуплоскость при предположении, что в образуемой под штампом каверне имеется наполнитель, вследствие чего в правой части определяющего уравнения поставленной задачи появляется логарифмическая особенность. Решение в работе [1] искалось в виде, содержащем, помимо неизвестной функции, известное слагаемое, устраняющее указанную особенность. В настоящей работе показано, что добавлением нескольких дополнительных слагаемых, устраняющих не только саму логарифмическую особенность, но и её остаточное влияние, можно существенно повысить эффективность численного решения рассматриваемого уравнения методом механических квадратур. Это показано на примере решения конкретной задачи, позволяющей построение решения в замкнутом виде, т.е. в виде интегралов от правой части исходного уравнения, что даёт возможность удостовериться в верности приближённого решения, построенного методом механических квадратур.

Поставленная задача представляет интерес не только в аспекте заглавия работы, но и с точки зрения контактной задачи теории упругости, и посвящена исследованию напряжённо-деформированного состояния под П-образным жёстким штампом, когда в полость под ним подаётся равномерное давление p_0. Решение определяющего уравнения ищется в классе функций, имеющих корневую особенность на обоих концах интервала интегрирования, поскольку именно таковым оно является при малых значениях p_0 и лишь после определённого значения p_0^{cr}, когда коэффициент концентрации напряжений у внутренних концов зон контакта обращается в ноль, переходит в класс функций, рассмотренных в работе [1].

Целью поставленной контактной задачи является определение контактного давления, формы, принимаемой границей полуплоскости под штампом, и критического значения внутреннего давления p_0^{cr}.

Постановка задачи. Введём правостороннюю декартовую систему координат, ось ординат которой совпадает с осью симметрии штампа, а ось абсцисс – с границей полуплоскости. На штамп приложена давящая сила P, действующая по линии симметрии штампа, в полости под штампом действует внутреннее давление p_0, удовлетворяющее очевидному ограничению $2lp_0 < P$. Исходя из симметричности поставленной задачи относительно оси ординат, дальнейшие рассуждения будут вестись с обращением только к правой ножке штампа. При малых значениях p_0 штамп будет контактировать с полуплоскостью по всему основанию, однако коэффициент концентрации напряжений у внутреннего конца зоны контакта будет меньше, чем при отсутствии внутреннего давления. С другой стороны, при больших, в пределах указанного ограничения, значениях давления p_0 длина зоны контакта уменьшается, а контактное давление на внутреннем её конце принимает конечное значение. И, следовательно, существует критическое значение $p_0^{cr}(a_0)$, при котором коэффициент концентрации напряжений у внутреннего конца зоны контакта обращается в ноль (рис.1).

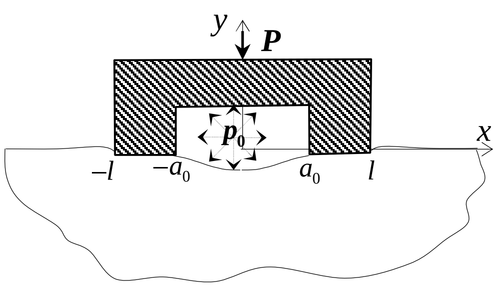


Рис.1

Вывод определяющего уравнения. Вертикальное смещение граничных точек полуплоскости относительно основания штампа от контактных напряжений $\sigma(x)$ и внутреннего давления p_0, с учётом симметричности задачи, определяется формулой [1]:

$$\frac{\pi\mu}{1\text{-}\nu}v^*(x)=\int_a^l \sigma(s)\ln\left|\frac{s^2-x^2}{s^2-l^2}\right|ds+p_0\left[a\ln\frac{\left|a^2-x^2\right|}{l^2-a^2}-x\ln\left|\frac{a-x}{a+x}\right|+l\ln\frac{l-a}{l+a}\right],$$

где $v^*(x)=v(x)-v(l)$ и $0<x<l$.

В зоне контакта имеем равенство

$$v^*(x)=0. \qquad (1)$$

При помощи выкладок, приведённых в работе [1], но учитывая, что в данном случае $f(x)=0$, выпишем определяющее сингулярное интегральное уравнение в виде:

$$\int_a^l \left(\frac{1}{s-x}-\frac{1}{s+x}\right)\sigma(s)ds=-p_0\ln\left|\frac{a-x}{a+x}\right| \qquad (a<x<l)$$

Перейдём к безразмерным величинам:

$$q(y)=\frac{2l}{P}\sigma\left(\frac{l(1-\delta)}{2}y+\frac{l(1+\delta)}{2}\right); \quad p^*=\frac{2l}{P}p_0; \quad \delta=\frac{a}{l}; \quad \delta^*=\frac{1+\delta}{1-\delta} \qquad (2)$$

и сведём полученное уравнение на интервал $(-1,1)$

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{\zeta-y}-\frac{1}{\zeta+y+2\delta^*}\right)q(\zeta)d\zeta=-p^*\ln\frac{1+y}{2\delta^*-1+y} \qquad (-1<y<1) \qquad (3)$$

Таким образом, получено определяющее уравнение поставленной задачи в виде (3), где неизвестными являются обезразмеренное контактное давление $q(y)$ и критическое значение внутреннего давления p^*_{cr}.

Имеем также условие равновесия штампа

$$\int_{-l}^{-a}\sigma(s)ds+2a\,p_0+\int_a^l\sigma(s)ds=P,$$

которое в обозначениях (2) принимает вид:

$$\int_{-1}^{1}q(\zeta)d\zeta=2\frac{1-\delta p^*}{1-\delta}. \qquad (4)$$

Построение замкнутого решения. Записав представление перемещений граничных точек упругой полуплоскости без учёта симметричности задачи относительно оси Oy и удовлетворив условию контакта (2) под обоими ножками штампа, получим уравнение, которое, после дифференцирования по x, подпадает в класс сингулярных интегральных уравнений, для которых в работе [5] строится замкнутое решение.

Для проведения сравнения с приближённым решением это уравнение, при помощи формул (2), запишем в виде:

$$\int_{-2\delta^*-1}^{-2\delta^*+1}\frac{1}{\zeta-y}q(\zeta)d\zeta+\int_{-1}^{1}\frac{1}{\zeta-y}q(\zeta)d\zeta=-p^*\ln\left|\frac{1+y}{2\delta^*-1+y}\right| \quad \left(y\in\left[-2\delta^*-1,-2\delta^*+1\right]\cup\left[-1,1\right]\right) \qquad (5)$$

и, уже для этого уравнения выпишем замкнутое решение из [5], которое удовлетворяет условию равновесия (4)

$$q(\zeta)=\frac{1}{\pi^2\omega(\zeta)}\left[\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{\zeta-y}+\frac{1}{\zeta+y+2\delta^*}\right)p^*g(y)\omega(y)dy+4\pi\frac{1-\delta p^*}{1-\delta}\left(\zeta+\delta^*\right)\right].$$

Здесь

$$g(x) = -\ln\frac{1+x}{2\delta^*-1+x}; \qquad \omega(x) = \sqrt{1-x^2}\sqrt{(x+2\delta^*)^2-1}\,.$$

Приравнивая выражение в квадратных скобках к нулю при $\zeta=-1$, для определения значения критического внутреннего давления p^*_{cr} получим уравнение:

$$p^*_{cr}\int_{-1}^{1}\left(-\frac{1}{1+y}+\frac{1}{-1+y+2\delta^*}\right)f(y)\omega(y)\,dy+4\pi\frac{1-\delta\,p^*_{cr}}{1-\delta}\left(\delta^*-1\right)=0\,. \qquad (6)$$

Построение численного решения.

Определяющее уравнение задачи, рассмотренной в работе [1], практически совпадает с уравнением (3) и решение там искалось в виде, содержащем известное слагаемое, устраняющее логарифмическую особенность в окрестности точки $y=-1$, присутствующую в правой части уравнения.

Здесь же, учитывая асимптотическое поведение следующих интегралов:

$$\int_{-1}^{1}\frac{(1+x)^m\sqrt{1-x}}{x-y}dx \approx (1+y)^m\ln(1+y) \qquad m=0,1,2,\ldots,$$

решение уравнения (3) будем искать в виде:

$$q(\zeta)=p^*Q_m(1+\zeta)\sqrt{1-\zeta}+\varphi(\zeta)\,. \qquad (7)$$

Здесь $\varphi(\zeta)$ является решением уравнения

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{\zeta-y}-\frac{1}{\zeta+y+2\delta^*}\right)\varphi(\zeta)d\zeta=-p^*\left[\ln\frac{1+y}{2\delta^*-1+y}+\int_{-1}^{1}\left(\frac{\sqrt{1-\zeta}}{\zeta-y}-\frac{\sqrt{1-\zeta}}{\zeta+y+2\delta^*}\right)Q_m(1+\zeta)d\zeta\right], \qquad (8)$$

где многочлен $Q_m(1+\zeta)$ подбирается так, чтобы при $m=0$ устранить логарифмическую особенность в правой части уравнения (3), а при $m\geq 1$ снизить её остаточное влияние при $\zeta\to -1$.

Первыми тремя такими многочленами будут:

$$Q_0(z)=\frac{\sqrt{2}}{2}; \qquad Q_1(z)=\frac{\sqrt{2}}{8}(4+z)\,; \qquad Q_2(z)=\frac{\sqrt{2}}{64}\left(32+8z+3z^2\right) \qquad (9)$$

После выбора одного из многочленов (9), с учётом $\delta^*>1$, уравнение (3) переходит в стандартное сингулярное интегральное уравнение первого рода (8). Как было отмечено выше, решение будем искать в классе функций, представимых в виде:

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\varphi^*(x)\,.$$

Согласно методу механических квадратур [3], уравнение (8), вместе с условием (4), сводится к следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi^*(x_i)\left[\frac{1}{x_i-y_k}+\frac{q(x_i)-q\left(-y_k-2\delta^*\right)}{\left(x_i+y_k+2\delta^*\right)q(x_i)}\right]=p^*f(y_k) \qquad \left(k=\overline{1,n-1}\right) \qquad (10)$$

$$\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi^*(x_i)=\frac{2}{(1-\delta)}-p^*\left[\frac{2\delta}{1-\delta}+\int_{-1}^{1}Q_m(1+\zeta)\sqrt{1-\zeta}\,d\zeta\right], \qquad (11)$$

где

$$x_i=\cos\frac{(2i-1)\pi}{2n}\ \left(i=\overline{1,n}\right); \quad y_k=\cos\frac{k\pi}{n}\ \left(k=\overline{1,n-1}\right); \quad q(z)=\begin{cases}U_{n-1}(z) & z\in(-1,1)\\ U_{n-1}(z)-\dfrac{T_n(z)}{\sqrt{z^2-1}} & z\notin[-1,1]\end{cases}$$

При заданных значениях δ и p^*, меньшем критического значения p^*_{cr}, система уравнений (10)-(11) является замкнутой относительно n неизвестных коэффициентов $\varphi^*(\xi_i)$. Для определения же критического значения p^*_{cr} следует в системе уравнений (10)-(11) считать p^* неизвестной и добавить к системе условие равенства нулю коэффициента концентрации контактного давления у внутреннего конца зоны контакта:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi^*(x_i)\left[1+2\sum_{m=1}^{n-1}(-1)^m T_m(x_i)\right]=0. \tag{12}$$

Тем самым, получим замкнутую систему из $n+1$ уравнений, откуда непосредственно будут найдены как само критическое значение p^*_{cr} внутреннего давления, так и закон распределения контактного давления под штампом при его наличии.

По полученным значениям $\varphi*(x_i)\ (i=\overline{1,n})$ функцию $\varphi^*(y)$ можно восстановить по формуле

$$\varphi^*(y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi^*(x_i)\left[1+2\sum_{m=1}^{n-1}T_m(y)T_m(x_i)\right] \tag{13}$$

и, далее, по формуле (7) найти распределение контактного давления под штампом.

Численный анализ. На основе численных расчётов построены графики распределения контактного давления под штампом и перемещения точек границы полуплоскости относительно основания штампа. Выявлено также влияние порядка m присутствующего в (7) многочлена $Q_m(x)$ на сходимость вычислительного процесса.

В табл.1 приведены значения p^*_{cr} при $\delta=0.5$, рассчитанные при различных порядках аппроксимации n для разных случаев представления (7): первый столбец соответствует случаю отсутствия в представлении (7) какого-либо дополнительного слагаемого, остальные три столбца сответствуют случаям $m=0,1,2$. Для сравнения в нижней строке таблицы приводится соответствующее значение, рассчитанное по формуле (6) при помощи стандартной программы численного интегрирования пакета Wolfram Mathematica.

Таблица 1

n	$q(\zeta)=\varphi(\zeta)$	$m=0$	$m=1$	$m=2$
3	0.777319	0.682774	0.681386	0.681471
5	0.739381	0.68179	0.681442	0.6814493
7	0.722958	0.681583	0.681447	0.6814486
10	0.710586	0.681498	0.6814483	0.6814486
14	0.702389	0.681468	0.6814485	0.6814486
17	0.69673	0.681454	0.6814486	0.6814486
по формуле (6)			0.6814486	

По данным табл.1 однозначно можно утверждать, что логарифмической особенностью в правой части уравнения пренебрегать нельзя. При этом с увеличением порядка m многочлена $Q_m(x)$, устраняющего эту особенность, порядок аппроксимации n, при котором приближённое решение до семи значащих цифр совпадает с точным решением, резко уменьшается.

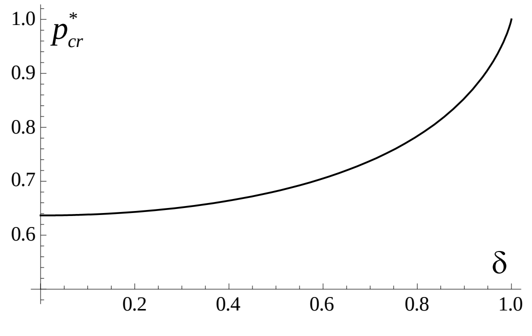


Рис. 2. Кривая зависимости p^*_{cr} от δ.

На рис.2 приведена кривая зависимости критического значения внутреннего давления p^*_{cr} от расстояния между ножками П-образного штампа $\delta=a/l$.

На рис.3 представлены графики распределения давления под штампом при различных значениях внутреннего давления при заданном значении $\delta = 0.6$, а на рис. 4 – перемещения точек границы полуплоскости относительно основания штампа.

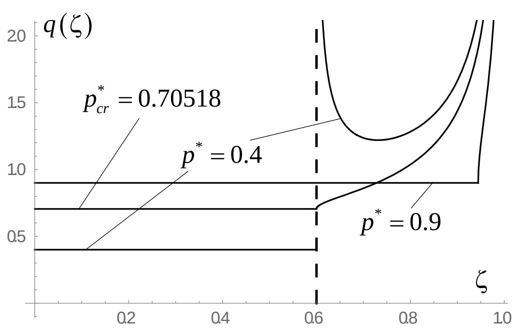


Рис.3. Контактное давление под штампом

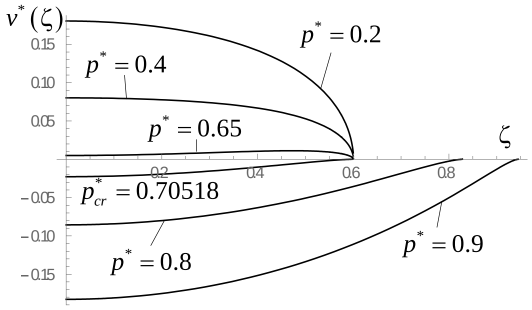


Рис.4. Форма границы полуплоскости под штампом.

Заключение. С точки зрения вычислительной математики представлен эффективный подход к решению сингулярного интегрального уравнения, правая часть которого содержит логарифмическую особенность на одном из концов интервала интегрирования. Решение поставленной задачи методом механических квадратур сводится к решению конечной системы линейных алгебраических уравнений. На примере результатов, полученных при различных порядках аппроксимации, и сравнением полученного решения с аналитическим решением показана эффективность применяемого метода и, тем самым, обосновано его применение к решению более сложных задач.

С точки зрения же теории упругости достаточно детально исследовано влияние нагнетаемого под жесткий штамп всестороннего давления на распределение контактного давления под штампом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амирджанян А.А., Саакян А.В. О вдавливании жёсткого штампа с вогнутым основанием в упругую полуплоскость с учётом влияния наполнителя в каверне. //Известия НАН РА. Механика. 2012. Т.65. №1. С.7-16. http://mechanics.asj-oa.am/1994/1/03AmirjSah7-16.pdf
2. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 510с.
3. Sahakyan A.V. Method of Discrete Singularities for Solution of Singular Integral and Integro-Differential Equations. Proc. of A.Razmadze Mathematical Institute. 156 (2011), p.101-111. http://www.mechins.sci.am/publ/avetik_sahakyan/RazmadzeProceedings.pdf

Сведения об авторах:

Саакян Аветик Вараздатович, доктор физ.-мат. наук, зам.директора Института механики НАН Армении.
Тел.: (37410) 568188, (37494)579348
E-mail: avsah@mechins.sci.am, avsahakyan@gmail.com

Амирджанян Арутюн Арменович, кандидат физ.-мат. наук, научный сотрудник Института механики НАН Армении.
Тел.: (37410) 52-48-90,
E-mail: amirjanyan@gmail.com .

ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ИЗГИБА ИЗОТРОПНОЙ И ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИН

Антонян С.С., Василян Н.Г.

В статье исследовано напряжённо-деформированное состояние изгибаемой пластины в окрестности закреплённого края. Исследована задача полубесконечной пластины-полосы, когда полубесконечные противоположные стороны пластины шарнирно закреплены. Применён подход Надаи. Получены обобщённые перерезывающие силы в середине и углах закреплённой стороны для изотропной и ортотропной пластин.

1. При исследовании малых прогибов пластин примем в качестве плоскости Oxy срединную плоскость пластин в том её положении, какое она занимает, прежде чем произойдёт изгиб. Частицы, лежащие в плоскости Oxy, подвергнутся при изгибе малым смещениям w, перпендикулярным к плоскости Oxy, и в новых своих положениях образуют срединную поверхность пластин, а эти смещения срединной плоскости пластин называются прогибами. Расположим ось z перпендикулярно к плоскости Oxy и рассмотрим элемент, вырезанный из пластин (рис.1), двумя парами плоскостей, параллельных плоскостям Oxz и Oyz.

Приближённая теория пластин строится на следующих двух предположениях:

1) Прямолинейные отрезки, которые в недеформированном состоянии пластин были нормальны к её плоской срединной поверхности, при изгибе остаются прямолинейными и нормальными к изогнутой поверхности («гипотеза прямых нормалей»).

2) Давление слоёв, параллельных срединной плоскости (σ_z), величина малая по сравнению с напряжениями в поперечных сечениях σ_x, σ_y, σ_{xy}.

При этих допущениях уравнение изгиба пластины имеет вид [10]:

$$\Delta\Delta w = \frac{q}{D}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}, \qquad (1.1)$$

где E –модуль Юнга, ν –коэффициент Пуассона.

2. Исследуем в прямоугольной декартовой системе координат полубесконечную пластину–полосу постоянной толщины $2h$, которая занимает область $0 \le x < \infty$, $0 \le y \le b$, $-h \le z \le h$ (рис. 2.1). На пластину действует распределённая нагрузка интенсивностью $q(y)$.

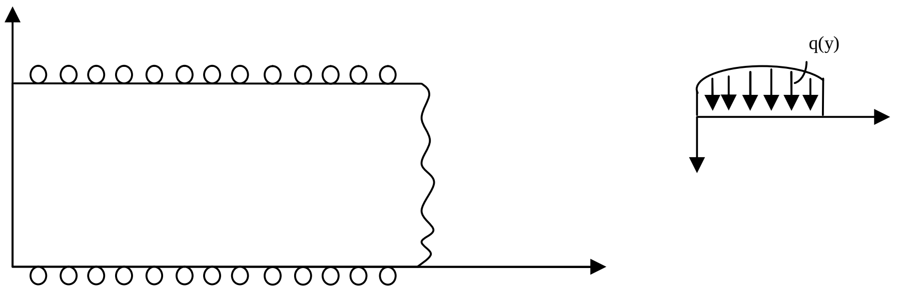


Рис. 2.1. Полубесконечная пластина–полоса

Как и в задаче Надаи, предполагается, что края пластин $y = 0, b$ шарнирно закреплены, что позволяет решение уравнения (1.1) представить следующим образом:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\sin\lambda_n y, \quad q = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin\lambda_n y \qquad (2.1)$$

С учётом, что решение при удалении от кромки $x = 0$ стремилось к решению в виде цилиндрической поверхности, получим:

$$w(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n e^{-\lambda_n x}+B_n x e^{-\lambda_n x}+\frac{q_n}{D\lambda_n^4}\right). \quad (2.2)$$

A_n и B_n – постоянные коэффициенты, которые находятся из граничных условий.

При шарнирном закреплении на краю $x=0$

$$w=0,\quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \quad (2.3)$$

получим:

$$w(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_n}{D\lambda_n^4}\left[1-e^{-\lambda_n x}-\frac{\lambda_n x}{2}e^{-\lambda_n x}\right]\sin\lambda_n y\,. \quad (2.4)$$

Из выражений для обобщённых перерезывающих усилий:

$$V_x(x,y)=-D\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+(2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),\ V_y(x,y)=-D\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+(2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right). \quad (2.5)$$

получим

$$V_x(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_n}{2\lambda_n}\left[(3-\nu)e^{-\lambda_n x}+(1-\nu)\lambda_n x e^{-\lambda_n x}\right]\sin\lambda_n y,$$

$$V_y(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_n}{2\lambda_n}\left[2\left(1-e^{-\lambda_n x}\right)+(1-\nu)\lambda_n x e^{-\lambda_n x}\right]\cos\lambda_n y. \quad (2.6)$$

В углах обобщённые перерезывающие силы равны нулю. $V_x(x,y)$ – максимальное значение получает в $y=b/2$

$$V_x\left(0,\frac{b}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_n}{2\lambda_n}\left[3-\nu+(1-\nu)\frac{\pi n}{2}\right]e^{-\frac{\pi n}{2}}\,. \quad (2.7)$$

3. Положим, что материал пластин в отношении своих упругих свойств обладает тремя плоскостями симметрии – пластина ортотропная. Если эти плоскости принять в качестве координатных плоскостей, то соотношения между компонентами напряжения и деформации можно будет представить следующими уравнениями:

$$\sigma_x=E'_x\varepsilon_x+E''\varepsilon_y,\quad \sigma_y=E'_y\varepsilon_y+E''\varepsilon_x,\quad \sigma_{xy}=G\varepsilon_{xy}. \quad (3.1)$$

Предполагаем, что перпендикулярные к срединной плоскости пластин линейные элементы её остаются прямыми и нормальными к изогнутой поверхности пластин после её изгиба. Воспользуемся выражениями компонентов деформации:

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\quad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial x}-z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\quad \varepsilon_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}-2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\,. \quad (3.2)$$

При исследовании изгиба пластин рассмотрим только перпендикулярное перемещение. Следовательно, для изгибающих и крутящих моментов [2]:

$$M_x=\int_{-h}^{h}z\sigma_x dz=-D_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-D_1\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\ M_y=\int_{-h}^{h}z\sigma_y dz=-D_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-D_1\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ H=-\int_{-h}^{h}z\sigma_{xy}dz=2D_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}, \quad (3.3)$$

где

$$D_x=\frac{2E'_x h^3}{3},\quad D_y=\frac{2E'_y h^3}{3},\quad D_1=\frac{2E'' h^3}{3},\quad D_{xy}=\frac{2Gh^3}{3}. \quad (3.4)$$

Подставляя (3.3) в (1.6), получим:

$$D_x\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\left(D_1+2D_{xy}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+D_y\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=q$$

Обозначим $H_1=D_1+2D_{xy}$. (3.5)

$$D_x\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2H_1\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+D_y\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=q \quad (3.6)$$

Уравнение (3.6) – это уравнение изгиба ортотропной пластины. В частном случае, если пластина изотропная

$$E_x^{'}=E_y^{'}=\frac{E}{1-\vartheta^2},\ E^{''}=\frac{\vartheta E}{1-\vartheta^2},\ G=\frac{E}{2(1+\vartheta)},\ D_x=D_y=H_1=D=\frac{2Eh^3}{3(1-\vartheta^2)},\tag{3.7}$$

получим уравнение изгиба пластин в известной форме $\Delta\Delta w = q/D$.

Примем решение уравнения (2.6) в виде ряда

$$w(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\sin\lambda_n y\tag{3.8}$$

и получим

$$w(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n e^{-\sqrt{\frac{H_1+\sqrt{H_1^2-D_xD_y}}{D_x}}\lambda_n x}+B_n e^{-\sqrt{\frac{H_1-\sqrt{H_1^2-D_xD_y}}{D_x}}\lambda_n x}+\frac{q_n}{D_y\lambda_n^4}\right]\sin\lambda_n y,\tag{3.9}$$

где A_n и B_n определяются из граничных условий.

4. Предположим, что сторона $x=0$ шарнирно закреплена и граничные условия будут иметь вид:

$$w=0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0\tag{4.1}$$

Следовательно, $f_n=0,\ f_n^{''}=0$. Удовлетворяя граничным условиям, получим линейную систему уравнений для A_n и B_n:

$$\begin{cases} A_n+B_n=\dfrac{q_n}{D_y\lambda_n^4} \\ \left(H_1+\sqrt{H_1^2-D_xD_y}\right)A_n+\left(H_1-\sqrt{H_1^2-D_xD_y}\right)B_n=0 \end{cases}\tag{4.2}$$

откуда

$$\mathrm{A}_n=\frac{q_n}{2D_y\lambda_n^4}\frac{H_1-\sqrt{H_1^2-D_xD_y}}{\sqrt{H_1^2-D_xD_y}},\qquad B_n=-\frac{q_n}{2D_y\lambda_n^4}\frac{H_1+\sqrt{H_1^2-D_xD_y}}{\sqrt{H_1^2-D_xD_y}}.\tag{4.3}$$

Следовательно, $w([x,y)$ примет следующий вид:

$$w(x,y)=$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_n}{D_y\lambda_n^4}\left[1+\frac{\left(H_1-\sqrt{H_1^2-D_xD_y}\right)}{2\sqrt{H_1^2-D_xD_y}}e^{-\sqrt{\frac{H_1+\sqrt{H_1^2-D_xD_y}}{D_x}}\lambda_n x}-\frac{\left(H_1+\sqrt{H_1^2-D_xD_y}\right)}{2\sqrt{H_1^2-D_xD_y}}e^{-\sqrt{\frac{H_1-\sqrt{H_1^2-D_xD_y}}{D_x}}\lambda_n x}\right]\sin\lambda_n y\tag{4.4}$$

Перейдём к изотропному случаю ($H_1=D_x=D_y=D=2Eh^3/3(1-\nu^2)$). Сперва внесём следующие обозначения в (1.6):

$$\mathrm{B}=\sqrt{H_1^2-D_xD_y},\ \alpha_1=\sqrt{\frac{H_1+B}{D_x}}\lambda_n x,\ \alpha_2=\sqrt{\frac{H_1-B}{D_x}}\lambda_n x\tag{4.5}$$

и получим

$$w(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_n}{D_y\lambda_n^4}\left[1+\frac{H_1}{2}\frac{\left(e^{-\alpha_1}-e^{-\alpha_2}\right)}{B}-\frac{1}{2}\left(e^{-\alpha_1}+e^{-\alpha_2}\right)\right]\sin\lambda_n y.\tag{4.6}$$

Если перейти к изотропному случаю, то $B\to 0,\ \ \alpha_1\to\alpha_2$ и получается

$$w(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{q_n}}{\mathrm{D}\lambda_\mathrm{n}^4}\left[1-e^{-\lambda_n x}-\frac{\lambda_n x}{2}e^{-\lambda_n x}\right]\sin\lambda_n y\ .\tag{4.7}$$

Решение (4.7) и (2.4) совпадают.

Обобщённые перерезывающие силы для ортотропных материлов будут иметь вид:

$$V_x(x,y) = -D\frac{\partial}{\partial x}\left(D_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + H_2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),\ V_y(x,y) = -D\frac{\partial}{\partial y}\left(D_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + H_2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \tag{4.8}$$

где $H_2 = H_1 + 2D_{xy} = D_1 + 4D_{xy}$.

Для обобщённых перерезывающих сил, когда имеем удлинённую пластину-полосу (на стороне $x=0$ шарнирно закреплённый), используя подход Надаи [9,10], получим следующие выражения:

$$V_x(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_n}{2B\lambda_n}\frac{1}{D_y\sqrt{D_x}}\left[\sqrt{H_1+B}\left(D_xD_y - H_2\left(H_1-B\right)\right)e^{-\sqrt{\frac{H_1+B}{D_x}}\lambda_n x} + \sqrt{H_1-B}\left(D_xD_y - H_2\left(H_1+B\right)\right)e^{-\sqrt{\frac{H_1-B}{D_x}}\lambda_n x}\right]\sin\lambda_n y,$$

$$V_y(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_n}{2B\lambda_n}\left[2B - \left(B+2D_{xy}\right)e^{-\sqrt{\frac{H_1+B}{D_x}}\lambda_n x} - \left(2H_1+B+2D_{xy}\right)e^{-\sqrt{\frac{H_1-B}{D_x}}\lambda_n x}\right]\cos\lambda_n y. \tag{4.9}$$

В $y = b/2$ обобщённая перерезывающая сила будет:

$$V_x(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_n}{2B\lambda_n}\frac{1}{D_y\sqrt{D_x}}\left[\sqrt{H_1+B}\left(D_xD_y - H_2\left(H_1-B\right)\right) + \sqrt{H_1-B}\left(D_xD_y - H_2\left(H_1+B\right)\right)\right]. \tag{4.10}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Costanda C. A mathematical analysis of bending of plates with transverse shear deformation. Longman Scientific Technical. 1992. 170p.
2. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360с.
3. Антонян С.С., Василян Н.Г. Исследование напряжённо-деформированного состояния изгибаемой пластинки в окрестности края пластинки граничным условием скользящего контакта. /Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред /Труды VII междунa-родной конференции, 19-23 сентября , Горис-Степанакерт, Ереван – 2011, с.44-48.
4. Антонян С.С., Василян Н.Г. Исследование напряжённо-деформированного состояния изгибаемой пластинки в окрестности шарнирно закреплённого края. «Young Scientists School-Conference» MECHANICS-2013. 1–4 октября 2013, Цахкадзор, Армения. С.69-73.
5. Баблоян А.А., Токмаджян В.О. Смешанная задача изгиба пластины с учётом поперечных сдвигов. //Изв. НАН Армении. Механика. 2008. Т.61. №4. С.44-51.
6. Багдасарян З.Р. Влияние учёта поперечных сдвигов в задачах изгиба прямоугольных пластин. //Дисс. на соискание уч. степени к.ф.-м.н., Ереван: 2008. 116с.
7. Белубекян М.В. Об уравнениях теории пластин, учитывающих поперечные сдвиги. //В сб.: «Проблемы механики тонких деформируемых тел». Ереван: НАН Армении, 2002. С.67-88.
8. Василян Н.Г. Влияние учёта поперечных сдвигов в задачах изгиба пластин. //Диссерта-ционная работа. Глава 3.2. С.4-102.
9. Nadai A. Elastische Platten, Берлин, 1925, с.72.
10. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Физматлит, 1963. 636с.

<u>Сведения об авторах:</u>

Антонян Саят Сержикович – соискатель Института механики НАН Армении.
Тел.: (+374 99) 339299; **E-mail:** sayatantonyan@rambler.ru

Василян Нарине Гургеновна – к.ф.-м.н., науч. сотр. Института механики НАН РА
Тел.: (+374 91) 707939; **E-mail:** narine@mechins.sci.am

ВЛИЯНИЕ СТАРЕНИЯ НА ДЕФОРМАЦИОННЫЕ И УСТАЛОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОЛИУРЕТАНА

Арутюнян А.Р.

Полимеры и композиционные материалы широко используются в технике, медицине, авиастроении и т.д. В то же время физико-механические характеристики этих материалов после длительной эксплуатации изменяются, что в значительной степени обусловлено процессом старения [1-4]. Таким образом, необходимы исследования процессов старения этих материалов. В работе в качестве модельного материала используется полиуретан. Программа исследований включает опыты на чередование глубокого сжатия прямоугольных образцов и длительного климатического и деформационного старения. Исследовано также влияние эффекта старения на усталостную прочность. Усталостные испытания проводились на круглых образцах в условиях повторного растяжения (коэффициент асимметрии цикла R = 0) при заданной амплитуде изменения перемещения и с частотами нагружения 10 Гц и 5 Гц. Проведённые экспериментальные исследования указывают на существенное упрочнение материала в результате старения. Данный эффект наблюдается как в экспериментах на глубокое сжатие, так и при циклических испытаниях.

Экспериментальные исследования климатического и деформационного старения образцов из полиуретана в опытах на сжатие.

В опытах на глубокое сжатие испытывались образцы из полиуретана квадратного поперечного сечения размерами 20х20х30 мм. Опыты выполнялись при комнатной температуре на машинах марки Instron 1231U-10 и Shimadzu AGX-50 Plus со скоростями нагружения 3,5 мм/мин. На рис.1 цифрой 1 отмечена начальная кривая напряжение-деформация, полученная в опыте над образцом №1 без старения. Кривая 2 рис.1 получена в опыте над образцом №2, состаренным в течение около двенадцати лет в лабораторных условиях. Цифрой 3 отмечена кривая $\sigma-\varepsilon$ для образца №2, который после глубокого сжатия затем старился дополнительно в течение около семи лет в лабораторных условиях. Цифрой 4 отмечена кривая для образца №3, программа испытаний которого аналогична образцу №2.

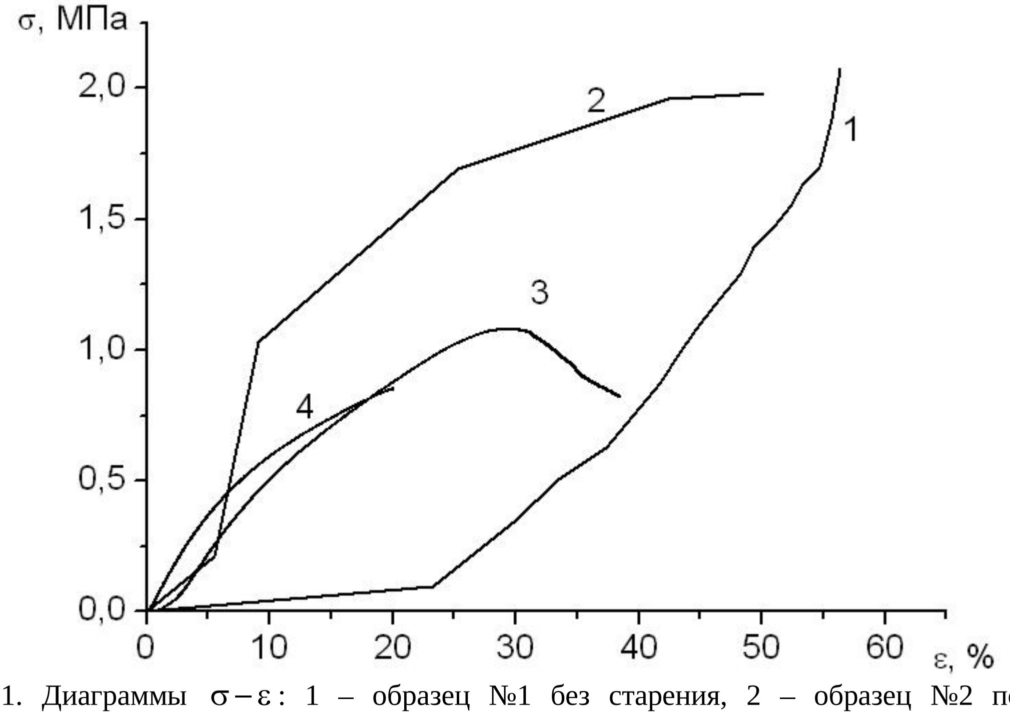


Рис.1. Диаграммы $\sigma-\varepsilon$: 1 – образец №1 без старения, 2 – образец №2 после климатического старения в течение около двенадцати лет, 3 – образец №2 после последующего глубокого сжатия и дополнительного старения в течение около семи лет, 4 – образец №3 после последующего глубокого сжатия и дополнительного старения в течение около семи лет.

Также в экспериментах на глубокое сжатие использовались образцы с размерами 15х15х20 мм. Образец №5 был испытан на глубокое сжатие, старился в лабораторных условиях в течение около двенадцати лет, затем повторно был испытан на сжатие. Кривая $\sigma-\varepsilon$, полученная по результатам этого опыта, отмечена на рис.2 цифрой 2. Цифрой 1 отмечена кривая $\sigma-\varepsilon$ для образца №4 без старения. Цифрой 3 на рис.2 отмечена кривая $\sigma-\varepsilon$ для образца №5, который после глубокого сжатия старился дополнительно в течение около семи лет в лабораторных условиях.

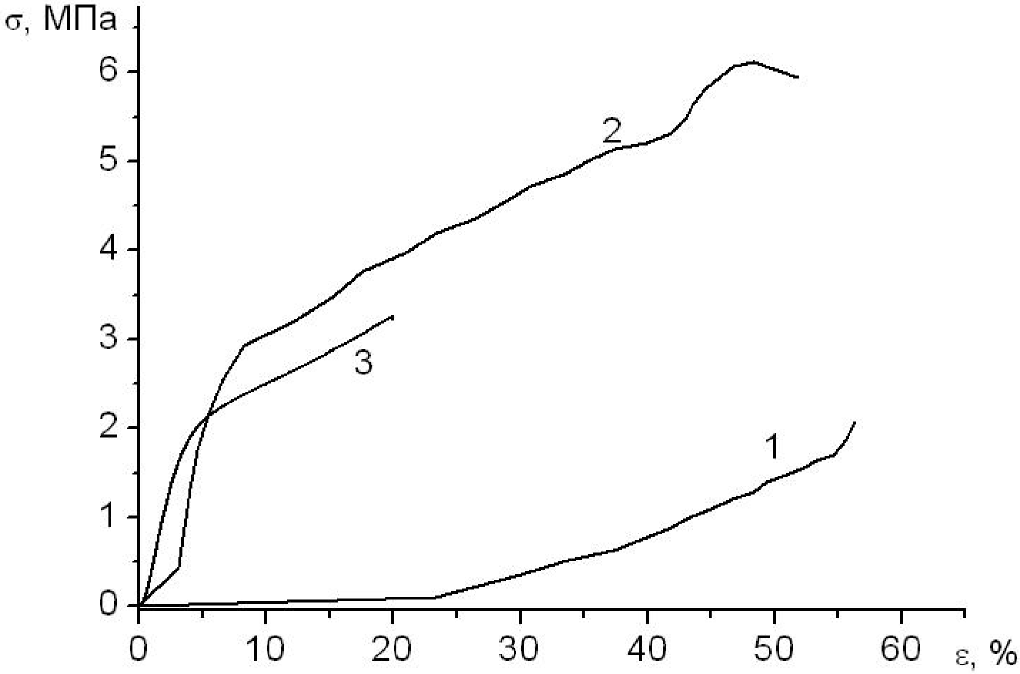


Рис.2. Диаграммы $\sigma-\varepsilon$: 1 – образец №4 без старения, 2 – образец №5 после деформационного старения в течение около двенадцати лет, 3 – образец №5 после последующего глубокого сжатия и дополнительного старения в течение около семи лет.

Согласно полученным экспериментальным результатам в процессе длительного старения порядка девятнадцати лет материал упрочняется немонотонно. Максимальная величина упрочнения (по величине напряжения) составляет более 30 раз по сравнению с образцом без старения. С увеличением времени старения материал разупрочняется. Этот эффект нуждается в дополнительных исследованиях.

Кривые усталости образцов из полиуретана в опытах на повторное растяжение.

Для усталостных испытаний использовался круглый армированный полиуретановый приводной ремень Continental Contitech диаметром 4 мм, из которого вырезались образцы с рабочей длиной 2,5-4,5 мм. Опыты выполнялись в условиях повторного растяжения (коэффициент асимметрии цикла R = 0) при заданной амплитуде изменения перемещения и с частотами нагружения 10Гц и 5Гц на настольной усталостной сервогидравлической испытательной машине Si-Plan SH-B. Полученные кривые усталости показаны на рис.3. Наблюдается существенная частотная зависимость (в пределах одного порядка) кривых усталости.

Влияние климатического и деформационого старения на усталостную прочность образцов из полиуретана.

На следующем этапе исследований были проведены циклические испытания шести круглых образцов из полиуретана при повторном растяжении при амплитуде изменения перемещения Δl = 4 мм и частоте нагружения 10 Гц. Таким образом, было определено среднее число циклов до разрушения, которое составило N ≈ 180 000 циклов.

Для исследования влияния климатического и деформационного старения на усталостную прочность использовалась следующая программа испытаний:

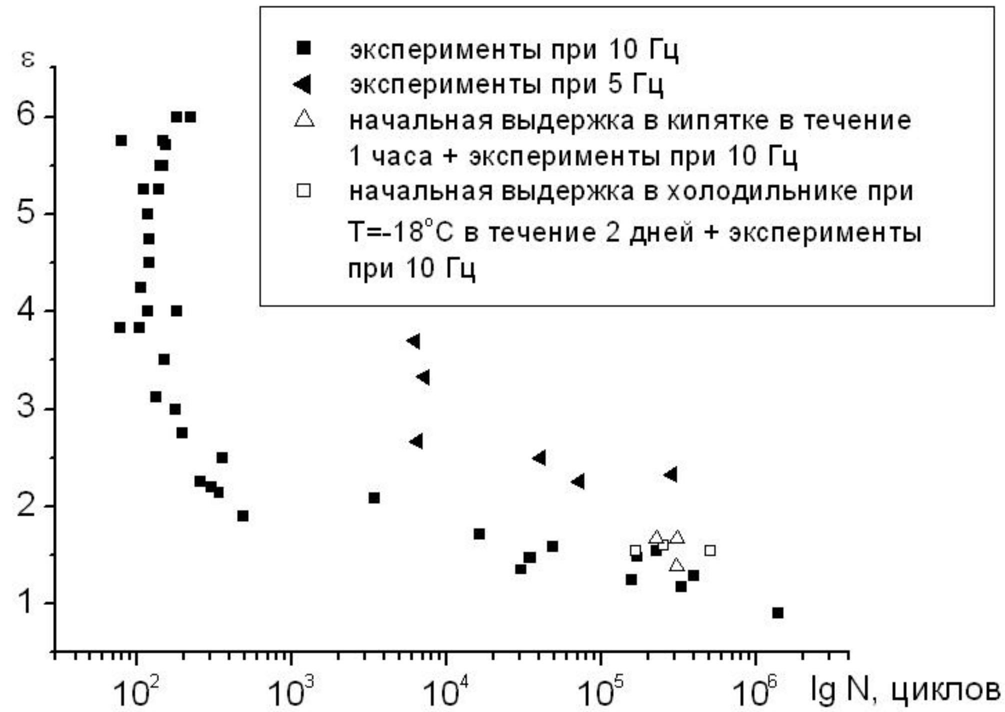


Рис.3. Кривые усталости для образцов из полиуретана при частотах 10 Гц и 5 Гц.

1. Пять образцов испытывались до N/2 = 90 000 циклов при данных параметрах нагружения. Затем образцы старились в лабораторных условиях в течение 1 года, затем они испытывались при данных параметрах нагружения до разрушения.
2. Шесть образцов первоначально старились в кипячённой воде в течение 1 часа. Три из них испытывались при данных параметрах нагружения до разрушения (рис.3). Остальные образцы испытывались до N/2 = 90 000 циклов при данных параметрах нагружения. Далее образцы старились в лабораторных условиях в течение 1 года и затем испытывались при данных параметрах нагружения до разрушения.
3. Пять образцов первоначально старились в холодильнике при T= – 18°C в течение 2 дней. Три из них испытывались при данных параметрах нагружения до разрушения (рис.3). Остальные образцы испытывались до N/2 = 90 000 циклов при данных параметрах нагружения. Далее образцы старились в лабораторных условиях в течение 1 года и затем испытывались при данных параметрах нагружения до разрушения.

Результаты циклических испытаний круглых образцов из полиуретана по различным программам климатического старения представлены в табл. 1.

Таблица 1. Результаты циклических испытаний круглых образцов из полиуретана при Δl = 4 мм и частоте 10 Гц по различным программам климатического старения.

	Без старения	Климатическое старение		
		Программа 1	Программа 2	Программа 3
Среднее число циклов до разрушения N	180 000	745 000	1 855 000	2 365 000
$N/N_{без\ старения}$	1	> 4	> 10	> 13

Согласно полученным результатам наблюдается значительное циклическое упрочнение, которое существенно зависит от программы старения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект N 14-01-00823).

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Р.А. Проблема деформационного старения и длительного разрушения в механике материалов. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2004. 252с.
2. Nadai A. Theory of flow and fracture of solids. McGraw-Hill. New York. 1963. vol.2. 321p.
3. Арутюнян Р.А. Накопление повреждений и разрушение высокоэластичного тонкого слоя при циклическом обжатии // Вестник С.-Петерб. ун-та. 2012. Сер.1. Вып.4. С.53-61.
4. Арутюнян А.Р., Арутюнян Р.А. Критерии длительной прочностии сжимаемой упруго-вязкой стареющей среды // Известия МГТУ «МАМИ». Серия «Естественные науки». №2 (24) 2015. Т.4. С.19-24.

Сведения об авторе:

Арутюнян Александр Робертович – кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, математико-механический факультет, Санкт-Петербургский государственный университет, **тел.:** + 7 (812) 428 4245, **E-mail:** arutalr@rambler.ru

ПРОБЛЕМА МЕХАНИЧЕСКОЙ И ХИМИЧЕСКОЙ ДЕГРАДАЦИИ И РАЗРУШЕНИЯ ПОЛИМЕРНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Арутюнян А.Р., Арутюнян Р.А.

Предложен модифицированный вариант уравнения Максвелла, записанного в шкале эффективного времени, и уравнение для параметра сплошности (повреждённости). Рассмотрены приближённые решения этих уравнений. Для описания деформации ползучести и длительной прочности сжимаемой упруго-вязкой среды применяется уравнение наследственной упруго-вязкой среды Больцмана-Вольтерра. Получено аналитическое решение для параметра сплошности и сформулирован критерий длительной прочности. По полученным решениям построены теоретические кривые для параметра сплошности, критерии длительной прочности и релаксации напряжений.

Введение. При длительном воздействии механических напряжений и умеренных температур происходят взаимосвязанные процессы деформирования и повреждённости, которые определяются деструктивными эффектами, состоящими из термической и механической стадий. В случае композиционных материалов из хрупких компонент повреждённость определяется следующими деградационными процессами: потерей сплошности зоны контакта волокно-матрица, разрушение, образование трещин или пустот в матрице и др. Эти процессы сопровождаются химическими реакциями, которые усиливают изменения структуры и свойств рассматриваемых материалов. Можно выделить два типа разрушения полимерных материалов в процессе длительных механических и тепловых воздействий. Первый тип (механический) реализуется в условиях активного нагружения и в опытах на ползучесть. Второй тип разрыва (химический) связан с накоплением структурной повреждённости в процессе длительного старения при отсутствии внешнего напряжения (статическая усталость). Эти процессы способствуют охрупчиванию и хрупкому разрушению полимеров. В случае стабильных полимеров, разрушения, в основном, связаны с механической повреждённостью.

Согласно концепции рассеянного повреждения (Качанов [1] и Работнов [2]) в работе вводится параметр сплошности ψ $(1 \geq \psi \geq 0)$, который определяется относительным изменением объёма (разрыхлением по терминологии Новожилова [3]) или плотности $\psi = \rho / \rho_0$ (ρ_0 – начальная, ρ – текущая плотность) [4]. Таким образом, параметр сплошности является интегральной мерой накопления структурных микродефектов в процессе длительного нагружения. В начальном состоянии $t = 0$, $\rho = \rho_0$, $\psi = 1$. В момент разрушения $t = t_f$, $\rho = 0$, $\psi = 0$. Введённый нами параметр ψ отличается от параметра повреждённости Работнова [2] ω ($0 \leq \omega \leq 1$), $\omega = F_T / F_0$ (где F_T – площадь трещин, располагающихся к моменту времени t в поперечном сечении растягиваемого образца, F_0 – начальная площадь поперечного сечения образца.). Из соотношения $F = F_0 - F_T$ следует $F = F_0(1-\omega)$ (F_0– начальная, F – текущая площадь поперечного сечения образца). Согласно концепции Качанова и Работнова в случае хрупкого разрушения деформация ползучести равна нулю, тогда можно считать $F = F_0$, из которого следует $\omega = 0$, т.е. теряет смысл само понятие повреждённости. В нашем случае при $F = F_0$ деформация ползучести не равна нулю и согласно закону сохранения массы $\rho_0 l_0 F_0 = \rho l F$ (l_0 – начальная, l – текущая длина стержня) она выражается через параметр сплошности в виде $\varepsilon = \ln 1/\psi$.

Повреждённость и длительная прочность для стареющей среды Максвелла. Рассмотрим задачу о растяжении образца из упруго-вязкого стареющего материала под воздействием постоянной нагрузки P. В качестве реологического уравнения воспользуемся модифицированным уравнением Максвелла, записанным в шкале эффективного времени α [4].

$$\frac{d\varepsilon}{d\alpha} = \frac{1}{E}\frac{d\sigma}{d\alpha} + \frac{\sigma}{\eta}, \quad (1)$$

$$d\alpha = f_1(\alpha, \varepsilon, T, t)dt + f_2(\alpha, \varepsilon, T, t)d\varepsilon, \quad (2)$$

где ε – деформация, T – температура, E – модуль упругости, η – коэффициент вязкости.

Параметр α рассматривается как эффективное время, с помощью которого возможно описание процессов климатического и деформационного старения. Согласно уравнению (2) при мгновенных, активных нагружениях параметр α соответствует деформационному времени ε. В состоянии разгрузки этот параметр описывает кинетику химических процессов старения и сводится к обычному времени t. При такой трактовке можно ввести понятие химического времени.

Используя закон сохранения массы, из которого следует соотношение $\sigma = \sigma_0 \psi e^{\varepsilon}$, уравнение (1) может быть записано в виде

$$\frac{d\varepsilon}{d\alpha} = \frac{\sigma_0}{E}\frac{d(\psi e^{\varepsilon})}{d\alpha} + \frac{\sigma_0 \psi e^{\varepsilon}}{\eta} \qquad (3)$$

Кинетическое уравнение для параметра сплошности ψ, согласно работе [5], выражается в виде

$$\psi^{\alpha}\frac{d\psi}{dt} = -A\sigma_0^n \psi^n e^{n\varepsilon}, \qquad (4)$$

где a, A, n – постоянные.

В общем виде не представляется возможным получения аналитического решения системы (3)-(4). Далее рассматриваются некоторые приближённые решения.

При расчётах по формуле (2) параметр эффективного времени задаётся в виде

$$d\alpha = k(\alpha_{\infty} - \alpha)t^m dt, \qquad (5)$$

где k, α_{∞}, m – постоянные, α – параметр деградации материала ($\alpha = N / N_0$, N_0 – начальное число химических связей, N – текущее число разрушенных химических связей). Таким образом, (5) является уравнением химической реакции.

При решении уравнения (3) принимается предположение о независимости процессов ползучести от повреждённости, согласно условию $\psi e^{\varepsilon} \approx 1$. Тогда решение уравнения (3) при начальных условиях $t = 0$, $\alpha = \alpha_0$, $\varepsilon = \sigma_0 / E_0$ может быть записано в виде

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E_0}\left[1 + \frac{\alpha_{\infty} - \alpha_0}{\tau}\left(1 - \exp\left(-\frac{k}{m+1}t^{m+1}\right)\right)\right] \qquad (6)$$

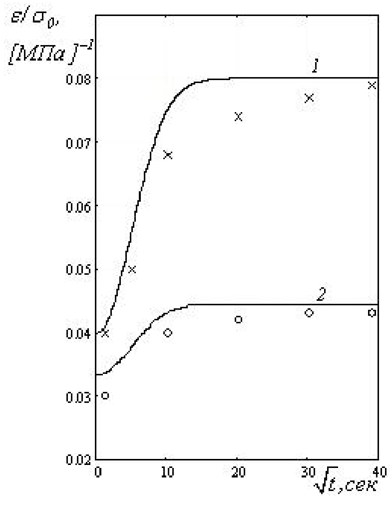


Рис.1. Теоретические кривые ползучести согласно соотношению (6).

Теоретические кривые ползучести согласно (6) показаны на рис.1. Использованы следующие значения коэффициентов: $\alpha_0 = 0$, $\alpha_{\infty} = 1$, $m = 0$, $k = 0{,}021 сек^{-1}$, времена релаксации и модули упругости $\tau_1 = 1\, сек$, $E_0 = 25\, МПа$ (кривая 1) и $\tau_2 = 30\, сек$, $E_0 = 30\, МПа$ (кривая 2). Экспериментальные результаты отмечены кружочками и крестиками. Теоретические кривые на рис.1 хорошо согласуются с результатами экспериментов [6] по ползучести и старению полиэтиленовых пленок. Верхняя кривая получена в экспериментах над образцами без старения, нижняя кривая – после старения. Образцы старились в течение 7 дней при температуре 353 K.

Рассмотрено несколько вариантов приближённого решения уравнения (4). Наиболее простое решение, качественно описывающее экспериментальные кривые повреждённости, может быть получено при следующих приближениях:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E_0}\left[1 + \frac{(\alpha_\infty - \alpha_0)k}{\tau(m+1)} t^{m+1}\right], \tag{7}$$

$$\psi^\alpha \frac{d\psi}{dt} = -A\sigma_0^n \psi^n (1 + n\varepsilon). \tag{8}$$

Внося (7) в (8) и решая его при начальном условии $t = 0$, $\cdot = 1$, получим:

$$\psi = \left[1 - (a-n+1)A\sigma_0^n \left(\frac{n\sigma_0(\alpha_\infty - \alpha_0)k}{E_0\tau(m+1)(m+2)} t^{m+2} + \left(\frac{n\sigma_0}{E_0} + 1\right)t\right)\right]^{\frac{1}{a-n+1}} \tag{9}$$

На рис.2 показаны кривые изменения параметра сплошности согласно уравнению (9) для различных значений постоянных ($\alpha = 6$ – кривая 1, $\alpha = 4$ – кривая 2 и $\alpha = 2$ – кривая 3).

Принимая условия разрушения в виде $t = t_f$, $\psi = 0$, из (9) следует критерий длительной прочности

$$t_f = \frac{E_0\tau}{n\sigma_0(\alpha_\infty - \alpha_0)k}\left[-\left(\frac{n\sigma_0}{E_0} + 1\right) + \left(\left(\frac{n\sigma_0}{E_0} + 1\right)^2 + \frac{n(\alpha_\infty - \alpha_0)k}{E_0\tau(a-n+1)A\sigma_0^{n-1}}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \tag{10}$$

На рис.3 в двойных логарифмических координатах показаны кривые длительной прочности согласно формуле (10) для различных значений коэффициентов ($\alpha = 6$ – кривая 1, $\alpha = 4$ – кривая 2 и $\alpha = 2$ – кривая 3). При расчётах по формулам (9) и (10) приняты следующие значения коэффициентов: $n = 2$, $A = 10^{-7}$ [МПа]$^{-2}$, $\alpha_0 = 0$, $\alpha_\infty = 1$, $m = 0$, $k = 0{,}021\,сек^{-1}$, $\tau = 1\,сек$, $E_0 = 2000\,МПа$, $\sigma_0 = 60\,МПа$.

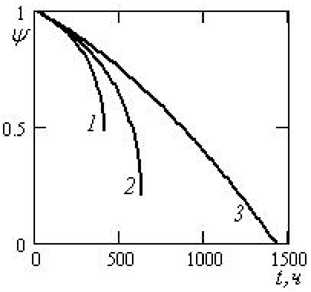


Рис.2. Кривые для параметра сплошности ψ согласно уравнению (9).

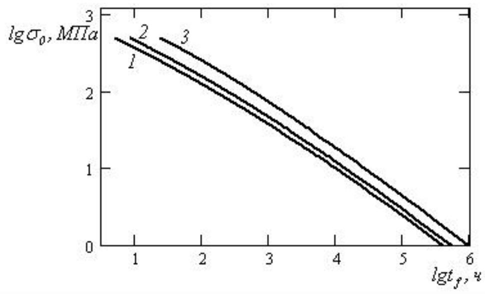


Рис.3. Кривые длительной прочности согласно формуле (10).

Релаксация напряжений. Рассмотрим случай релаксации напряжений. Принимая в (3) $\varepsilon = \mathrm{const}$, получим следующее уравнение:

$$\frac{1}{E}\frac{d\sigma}{d\alpha} + \frac{\sigma}{\eta} = 0 \tag{11}$$

Решая уравнение (11) при начальном условии $t = 0$, $\sigma = \sigma_0$, получим:

$$\sigma = \sigma_0 \exp\left[\frac{1}{\tau}\left(\alpha_\infty - \alpha_0\right)\left(e^{-kt} - 1\right)\right]. \tag{12}$$

На рис.4 показана теоретическая кривая релаксации напряжений согласно формуле (12). При расчётах были приняты следующие значения коэффициентов: $\sigma_0 = 60\,МПа$, $\tau_0 = 0{,}5\,ч$, $k = 0{,}021\,сек^{-1}$, $\alpha_0 = 0$, $\alpha_\infty = 1$.

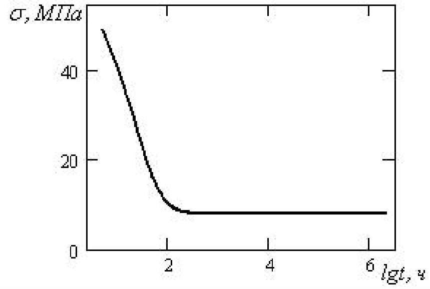


Рис.4. Кривая релаксации напряжений согласно формуле (12).

При $t \to \infty$ из (12) следует:

$$\sigma = \sigma_* = \sigma_0 \exp\left[-\frac{1}{\tau}\left(\alpha_\infty - \alpha_0\right)\right], \qquad (13)$$

где σ_* – предельная величина напряжения.

Релаксация напряжений по модели Максвелла определяется в виде соотношения $\sigma = \sigma_0 \exp(-t/\tau)$, из которого следует $\sigma \to 0$ при $t \to \infty$, что не согласуется с результатами опытов.

Повреждённость и разрушение наследственной упруго-вязкой среды Больцмана-Вольтерра. В случае стабильных полимеров разрушения связаны с механической повреждённостью и для их описания используется уравнение наследственной вязко-упругости Больцмана-Вольтерра

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \frac{1}{E}\int_0^t R(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau, \qquad (14)$$

где $R(t-\tau)$ – некоторая убывающая функция аргумента $(t-\tau)$ (ядро ползучести).

Далее ядро ползучести в виде модифицированного соотношения Больцмана

$$R(t-\tau) = \frac{c}{t-\tau+\tau_0}, \qquad (15)$$

где c, τ_0 – постоянные.

В случае ползучести, когда $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$, из решения уравнения (14) с учётом (15) и начального условия $t = 0$, $\varepsilon = 0$ имеем соотношение для деформации ползучести

$$\varepsilon = \sigma_0\left(\frac{1}{\mathrm{E}} + c\ln\left(\frac{t+\tau_0}{\tau_0}\right)\right) \qquad (16)$$

Внося (16) в уравнение для параметра сплошности (8) и решая это уравнение при начальном условии $t = 0$, $\psi = 1$, получим:

$$\psi = \left[1-(1-n)A\sigma_0^n e^{\frac{n\sigma_0}{E}}\frac{\tau_0}{n\sigma_0 c+1}\left(1-\left(\frac{t+\tau_0}{\tau_0}\right)^{n\sigma_0 c+1}\right)\right]^{\frac{1}{1-n}} \qquad (17)$$

Принимая условие разрушения $t = t_f$, $\rho = 0$, $\psi = 0$, из (17) получим критерий длительной прочности

$$t_\text{f} = \tau_0\left[\left(1-\frac{n\sigma_0 c+1}{(1-n)A\sigma_0^n\tau_0 e^{\frac{n\sigma_0}{E}}}\right)^{\frac{1}{n\sigma_0 c+1}} - 1\right] \qquad (18)$$

На рис.5 представлена кривая изменения параметра ψ согласно формуле (17), а на рис.6 – кривая длительной прочности согласно формуле (18).

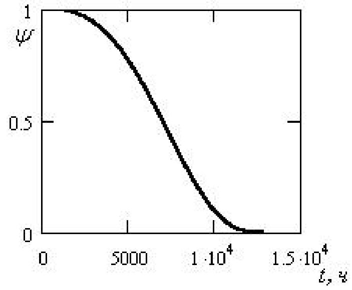


Рис. 5. Кривая изменения параметра сплошности ψ согласно формуле (17).

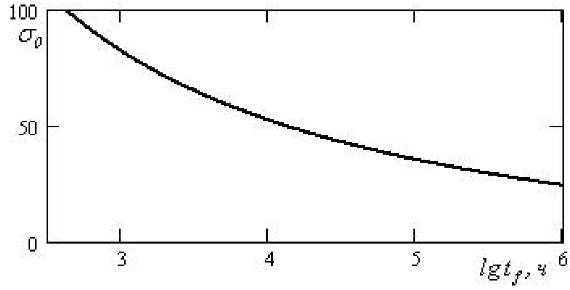


Рис. 6. Кривая длительной прочности согласно критерию (18).

При расчётах по формулам (17) и (18) были приняты следующие значения коэффициентов: $\sigma_0 = 50\,МПа$, $E = 4000\,МПа$, $\tau_0 = 2\,ч$, $n = 0{,}7$, $C = 5\cdot 10^{-2}\,[МПа]^{-1}$, $A = 1\cdot 10^{-11}\,[МПа]^{-0{,}1}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 14-01-00823, № 15-01-03159).

ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Л.М. О времени разрушения в условиях ползучести // Изв. АН СССР. ОТН. 1958. № 8. С.26-31.
2. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752с.
3. Новожилов В.В. О пластическом разрыхлении // Прикладная математика и механика. 1965. №4. С.681-689.
4. Арутюнян Р.А. Проблема деформационного старения и длительного разрушения в механике материалов. СПб.: Изд-во СПбГ, 2004. 252с.
5. Арутюнян Р.А. Высокотемпературное охрупчивание и длительная прочность металлических материалов // Механика твёрдого тела. 2015. № 2. С.96-104.
6. Пестриков В.М. Об определяющих соотношениях стареющих материалов с учётом протекающих физико-химических процессов // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 4. С.134-140.

Сведения об авторах:

Арутюнян Александр Робертович – кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, математико-механический факультет, Санкт-Петербуржский государственный университет, **тел.:** + 7 (812) 4284245, **E-mail:** arutalr@rambler.ru

Арутюнян Роберт Ашотович – профессор, доктор физ.-мат. наук, математико-механический факультет, Санкт-Петербуржский государственный университет, **тел.:** + 7 (812) 5266591, **E-mail:** r.arutyunyan@spbu.ru

УСЛОВИЯ ВПОЛНЕ УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ С МНОГИМИ УПРАВЛЯЮЩИМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ

Барсегян В.Р., Барсегян Т.В.

Рассматриваются вопросы управляемости линейной стационарной системы с многими управляющими воздействиями. Получено необходимое и достаточное условие вполне управляемости. Показано, что система отдельно по каждому управляющему воздействию может быть не вполне управляемой, но по совокупности управляющих воздействий такая система может стать вполне управляемой.

Проблемы управления движением несколькими управляющими воздействиями естественным образом возникают в ряде важных прикладных задач. В работе [1] исследованы задачи приоритетного управления и оптимального управления движением линейных систем несколькими управляющими воздействиями. Вообще для динамических систем важным аспектом является выявление условия вполне управляемости [2-6]. В настоящей работе исследуются вопросы управляемости линейной стационарной системы с многими управляющими воздействиями.

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax + \sum_{i=1}^{k} {}_i B^{(i)} u^{(i)} \qquad (1)$$

где $x(t) \in R^n$ – фазовый вектор системы, $A, B^{(i)}$ – матрицы параметров системы, $u^{(i)}(t)$ – управляющее воздействие, соответственно с размерностями $A-(n\times n)$, $B^{(i)}-(n\times r_i)$, $u^{(i)}(t)-(r_i\times 1)$ $(i=1,\ldots,k)$, а коэффициенты ${}_i \in (0,1]$ характеризуют i-й орган управления.

Определение. Система (1) называется вполне управляемой на отрезке времени $[t_0, T]$, если для любых начальных $x(t_0)=x_0$ и конечных $x(T)=x_T$ состояний можно указать набор управлений $\{u^{(1)},\ldots,u^{(k)}\}$ такой, что решение $x(t)$, начиная из состояния $x(t_0)$, в момент времени $t=T$ удовлетворяет условию $x(T)=x_T$.

Требуется найти условия (критерии), выраженные непосредственно через матрицы A и $B^{(i)}$ $(i=1,\ldots,k)$, при которых объект, описываемый системой (1), будет вполне управляемым.

Учитывая, что нормированная фундаментальная матрица решений однородной части уравнения (1) имеет вид $X[t,t_0]=e^{A(t-t_0)}$, решение для $t\in[t_0,T]$ с начальным условием $x(t_0)=x_0$ можно записать в виде

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \sum_{i=1}^{k} {}_i \int_{t_0}^{t} e^{A(t-^2)} B^{(i)} u^{(i)}(^2)d^2 \qquad (2)$$

Если набор управлений $u^{(i)}(t)$ $(i=1,...,k)$, $t\in[t_0,T]$ обеспечивает переход движения системы (1) к моменту времени $t=T$ в положение $x(T)=x_T$, то при $t=T$ из (2) будем иметь:

$$x(T)=e^{A(T-t_0)}x(t_0)+\sum_{i=1}^{k}\ {}_i\int_{t_0}^{T}e^{A(T-\tau)}B^{(i)}u^{(i)}(\tau)d\tau \tag{3}$$

Известно, что матрица $e^{-A\tau}$ допускает представление

$$e^{-A\tau}=\sum_{j=0}^{p-1}\gamma_j(-\tau)A^j \tag{4}$$

где функции $\gamma_j(\tau)$ – коэффициенты интерполяционного многочлена Лагранжа-Сильвестра [7] и функции $\gamma_j(\tau)$ $(j=0,\dots,p-1)$ линейно независимы. Числа p обусловлены кратностями собственных значений матриц A. Очевидно, что $p\le n$.

В частном случае, когда все корни характеристического уравнения матрицы A являются простыми, имеем:

$$e^{-A\tau}=\sum_{j=0}^{n-1}\gamma_j(-\tau)A^j$$

Учитывая приведённое (4) представление матрицы $e^{-A\tau}$, формулу (3) представим в виде

$$\sum_{i=1}^{k}\ {}_i\sum_{j=0}^{p-1}A^jB^{(i)}\int_{t_0}^{T}u^{(i)}(\tau)\gamma_j(-\tau)d\tau=e^{-AT}x(T)-e^{-At_0}x(t_0) \tag{5}$$

Вводя обозначение $L=e^{-AT}x(T)-e^{-At_0}x(t_0)$, формула (5) запишется в виде

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}\ {}_i\Bigg[&B^{(i)}\int_{t_0}^{T}u^{(i)}(\tau)\gamma_0(-\tau)d\tau+AB^{(i)}\int_{t_0}^{T}u^{(i)}(\tau)\gamma_1(-\tau)d\tau+\\&+\dots+A^{p-1}B^{(i)}\int_{t_0}^{T}u^{(i)}(\tau)\gamma_{p-1}(-\tau)d\tau\Bigg]=L\end{aligned} \tag{6}$$

Введём следующие обозначения:

$$U^{(i)}=\begin{pmatrix}\int_{t_0}^{T}u^{(i)}(t)\gamma_0(-t)dt\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \int_{t_0}^{T}u^{(i)}(t)\gamma_{p-1}(-t)dt\end{pmatrix},\quad K^{(i)}=\ {}_i(B^{(i)},AB^{(i)},\dots,A^{p-1}B^{(i)})\quad(i=1,...,k) \tag{7}$$

где вектор $U^{(i)}$ имеет размерность $(pr_i\times1)=(q_i\times1)$, а блочная матрица $K^{(i)}$ имеет размерность $(n\times pr_i)=(n\times q_i)$.

С помощью обозначения (7) уравнение (6) запишем в виде

$$\sum_{i=1}^{k} K^{(i)} U^{(i)} = L \tag{8}$$

Запишем полученное матричное уравнение (8) по строкам. Поскольку

$$K^{(i)} = \begin{pmatrix} K_{11}^{(i)} & \cdots & K_{1q_i}^{(i)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{n1}^{(i)} & \cdots & K_{nq_i}^{(i)} \end{pmatrix}, \quad U^{(i)} = \begin{pmatrix} U_1^{(i)} \\ \vdots \\ U_{q_i}^{(i)} \end{pmatrix}$$

где $q_i = pr_i$, то уравнение (8) представится в виде следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} K_{11}^{(1)} U_1^{(1)} + \cdots + K_{1q_1}^{(1)} U_{q_1}^{(1)} + \cdots + K_{11}^{(k)} U_1^{(k)} + \cdots + K_{1q_k}^{(k)} U_{q_k}^{(k)} = L_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ K_{n1}^{(1)} U_1^{(1)} + \cdots + K_{nq_1}^{(1)} U_{q_1}^{(1)} + \cdots + K_{n1}^{(k)} U_1^{(k)} + \cdots + K_{nq_k}^{(k)} U_{q_k}^{(k)} = L_n \end{cases} \tag{9}$$

Пусть $q_i \ge n \quad (i = 1, \dots, k)$. Введём вектор-столбец приведённой системы уравнений (9) $K_j^{(i)} = (K_{1j}^{(i)}, K_{2j}^{(i)}, \dots, K_{nj}^{(i)})^T \quad (j = 1, \dots, q_i; i = 1, \dots, k)$.

Здесь и далее верхний индекс "T" означает операцию транспонирования. Тогда систему уравнений (9) можно записать так:

$$\tilde{x}(T) = \sum_{j=1}^{q_1} K_j^{(1)} U_j^{(1)} + \cdots + \sum_{j=1}^{q_k} K_j^{(k)} U_j^{(k)} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{q_i} K_j^{(i)} U_j^{(i)}$$

Таким образом, вектор $L = e^{-AT} x(T) - e^{-At_0} x(t_0)$ представлен в виде линейной комбинации составляющих другого $\sum_{i=1}^{k} q_i$ -мерного вектора $U = (U_1^{(1)}, \dots, U_{q_1}^{(1)}, \dots, U_1^{(k)}, \dots, U_{q_k}^{(k)})^T$.

Для того, чтобы таким образом представить любой n-мерный вектор L из R^n, достаточно иметь n независимых векторов среди векторов $K_j^{(i)} \quad (j = 1, \dots, q_i; \; i = 1, \dots, k)$. А это означает, что ранг матрицы

$$K = (K^{(1)}, \dots, K^{(k)}) = (K_1^{(1)}, \dots, K_{q_1}^{(1)}, \dots, K_1^{(k)}, \dots, K_{q_k}^{(k)}) =$$
$$= \{ \ {}_1(B^{(1)}, AB^{(1)}, \dots, A^{p-1} B^{(1)}), \dots, \ {}_k(B^{(k)}, AB^{(k)}, \dots, A^{p-1} B^{(k)}) \}$$

равен n.

Размерность матрицы K равна $\left(n \times \sum_{i=1}^{k} q_i \right)$. Так как $\sum_{i=1}^{k} q_i = \left(\sum_{i=1}^{k} r_i \right) p \ge n$, то числа $U_1^{(i)}, \dots, U_{q_i}^{(i)} \quad (i = 1, \dots, k)$ определяются из (8) (или из (9)), вообще говоря, неоднозначно. Однако, их однозначность и не требуется. Важно, что эти числа существуют. Каждый их набор определяет функции $u^{(1)}(t), \dots, u^{(k)}(t)$ с помощью интегральных соотношений (7).

В самом деле, пусть числа $U_1^{(i)}, \dots, U_{q_i}^{(i)} \quad (i = 1, \dots, k)$ каким-либо способом определены. Тогда интегральные равенства (7) можно рассматривать как моментные соотношения относительно вектор-функций $u^{(1)}(t),\ldots,u^{(k)}(t)$. При этом, их можно разбить на группы и так как функции $\sim_1(-t),\ldots,\sim_p(-t)$ линейно независимы, то из этих соотношений можно определить функции $u^{(1)}(t),\ldots,u^{(k)}(t)$.

Полученный результат можно сформулировать следующим образом.

Теорема. Линейная стационарная система (1) вполне управляема на отрезке времени $t_0 \le t \le T$ тогда и только тогда, когда матрица

$$K=\{\ {}_1(B^{(1)},AB^{(1)},\ldots,A^{p-1}B^{(1)}),\ldots,\ {}_k(B^{(k)},AB^{(k)},\ldots,A^{p-1}B^{(k)})\} \qquad (10)$$

имеет ранг, равный n.

Отметим, что при доказательстве теоремы не требуется, чтобы постоянные $U_1^{(i)},\ldots,U_{q_i}^{(i)}$ $(i=1,\ldots,k)$ определялись однозначно. Не нужно также, чтобы моментные соотношения (7) определяли вектор-функции $u^{(i)}(t)$ однозначно. Важно было установить лишь существование хотя бы одного управления, переводящего систему из одного заданного состояния x_0 в другое, также заданное состояние x_T.

Следствие. Если все собственные значения матрицы A_j $(j=1,\ldots,m)$ являются простыми, тогда линейная стационарная система (1) вполне управляема на отрезке времени $t_0 \le t \le T$ тогда и только тогда, когда матрица

$$K=\{\ {}_1(B^{(1)},AB^{(1)},\ldots,A^{n-1}B^{(1)}),\ldots,\ {}_k(B^{(k)},AB^{(k)},\ldots,A^{n-1}B^{(k)})\} \qquad (11)$$

имеет ранг равный n.

Число столбцов в матрицах управляемости намного больше, чем число строк. Следовательно, независимые столбцы в матрицах (10) (или (11)) могут иметь произвольные расположения среди столбцов этих матриц. Они могут быть некоторыми столбцами, расположенными в подматрицах (блоках), образованных парами матриц $\{B_1,A_1\},\{B_2,A_2\},\ldots,\{B_m,A_m\}$ и числами $\ _1,\ _2,\ldots,\ _k$ соответственно. Не исключено также, что все независимые столбцы могут быть расположены в подматрице, образованной одной парой матриц $\{B_j,A_j\}$ или несколькими парами матриц. Это означает, что ранги всех подматриц по отдельности, образованных парами матриц $\{B_j,A_j\}$ $(j=1,\ldots,m)$, могут быть не максимальными, несмотря на то, что матрица (10) (или (11)) имеет максимальный ранг или ранг подматриц, образованных одной парой $\{B_j,A_j\}$, или одновременно ранги нескольких подматриц, образованных несколькими парами матриц, могут совпадать с максимальным рангом матрицы (10) (или (11)).

Таким образом, из приведённого рассуждения следует, что система (1) на отрезке времени $t_0 \le t \le T$ по отдельным управляющим воздействиям, которые образуют систему, могут быть не вполне управляемыми, а с многими управляющими воздействиями система (1) может быть вполне управляемой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Барсегян В.Р. Задача приоритетного оптимального управления движения и управляемости линейных систем. //Доклады НАН Армении. 2005. Т.105. № 3. С.235-240.
2. Калман Р. Об общей теории систем управления. //Труды I Конгреса ИФАК, т.2. Изд. АН СССР, Москва, 1961, с.521-547.
3. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476с.
4. Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление. М.: Наука, 1978. 552 с.
5. Барсегян Т.В. Об условии вполне управляемости поэтапно меняющейся линейной стационарной системы. // Изв. НАН Армении. Механика. 2015. Т.68. № 1. С.81-90.
6. Барсегян В.Р., Барсегян Т.В. Критерий управляемости линейных стационарных систем переменной структуры. Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. //Труды VIII международной конференции. Сентябрь 22-26, 2014, Горис-Степанакерт, с.83-87.
7. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. 5-е изд. М.: Физматлит, 2004. 560 с.

Сведения об авторах:

Барсегян Ваня Рафаелович – доктор физ.-мат. наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении, профессор ЕГУ, факультет математики и механики.

Тел.: (091) 20 32 20; **E-mail:** barseghyan@sci.am

Барсегян Тигран Ваняевич – кандидат физ.-мат. наук, научный сотрудник Института механики НАН Армении

E-mail: t.barseghyan@mail.ru

ЛОКАЛИЗОВАННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ ДЕЙСТВИИ СЖИМАЮЩЕЙ НАГРУЗКИ НА СВОБОДНОМ КРАЕ

Белубекян М.В., Саакян А.А.

Рассматривается задача устойчивости прямоугольной пластинки с тремя опёртыми и одним свободным краями. Пластина предварительно сжата нагрузкой, приложенной на свободном крае. Получены условия появления неустойчивости, локализованной в окрестности свободного края, как для случая консервативной нагрузки, так и в случае следящей нагрузки.

1. При наличии у сжатой прямоугольной пластинки свободного края возможна потеря устойчивости, локализованной в окрестности этого края. Явление локализованной неустойчивости следует из результатов основополагающей статьи А.Ю.Ишлинского [1], где исследована задача устойчивости пластинки с двумя противоположными свободными и двумя свободно опертыми краями. В [1] и в последующих работах по этой проблеме рассматривались пластинки, сжатые по противоположным свободно опёртым краям [2-7]. При этом имеет место полная аналогия с задачей Ю.К.Коненкова [8] о локализованных изгибных колебаниях в окрестности свободного края прямоугольной пластинки [4].

В настоящей статье задача локализованной неустойчивости исследуется, когда пластинка предварительно сжата на свободном крае. Решению общей задаче устойчивости таких пластин посвящены работы [9,10].

Пусть тонкая упругая пластинка в прямоугольной декартовой системе координат (x, y, z) занимает область: $0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b,\ -h \le z \le h.$ Уравнение устойчивости пластинки имеет вид [11]

$$\Delta^2 w + \alpha^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0,\ \ \alpha^2 = \frac{P}{D} \tag{1.1}$$

где w – поперечное перемещение (прогиб), P – сжимающая нагрузка, D – изгибная жёсткость пластинки.

Предполагается, что края пластинки $y = 0,\ b$ и $x = a$ свободно опёрты

$$w = 0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{при} \qquad y = 0, b \tag{1.2}$$

$$w = 0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{при} \qquad x = a \tag{1.3}$$

Край пластинки $x = 0$ считается свободным:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{при} \qquad x = 0 \tag{1.4}$$

и

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] + \alpha^2 \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \qquad \text{при} \qquad x = 0 \tag{1.5}$$

в случае консервативной нагрузки, или

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] = 0 \qquad \text{при} \qquad x = 0 \tag{1.6}$$

в случае следящей нагрузки.

Решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2), представляется в виде

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \sin \lambda_n y,\ \lambda_n = n\pi / b \tag{1.7}$$

Подстановка (1.7) в уравнение (1.1) приводит к решению последовательности обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f_n^{(4)} - 2\lambda^2{}_n\left(1-\alpha^2{}_n\right) f_n^{(2)} + \lambda^4{}_n\ f_n = 0 \tag{1.8}$$

где

$$\alpha_n^2 = \alpha^2 \big/ \left(2\lambda_n^2\right) \tag{1.9}$$

Представление решения системы (1.8) в виде

$$f_n\left(x\right) = A_n \exp\lambda_n px \tag{1.10}$$

приводит к характеристическому уравнению

$$p^4 - 2\left(1-\alpha^2{}_n\right) p^2 + 1 = 0. \tag{1.11}$$

В статье [9], для общего решения уравнений (1.8) используются корни уравнения (1.11) в виде

$$p = \pm\left[1-\alpha^2{}_n \pm i\alpha_n\sqrt{2-\alpha^2{}_n}\right]^{1/2}. \tag{1.12}$$

Однако, как показано в [10], более удобно использовать корни (1.12) в преобразованном виде:

$$p_{1,2} = s_1 \pm is_2; \quad p_{3,4} = \pm p_{1,2} \tag{1.13}$$

где

$$s_1 = \sqrt{1-\frac{\alpha^2{}_n}{2}}, \qquad s_2 = \frac{\alpha_n}{\sqrt{2}} \tag{1.14}$$

С помощью (1.13) общее решение уравнения (1.1) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} f_n(x) = {} & A_n \operatorname{sh}\lambda_n s_1 x \sin\lambda_n s_2 x + B_n \operatorname{sh}\lambda_n s_1 x \cos\lambda_n s_2 x + \\ & + D_n \operatorname{ch}\lambda_n s_1 x \sin\lambda_n s_2 x + C_n \operatorname{ch}\lambda_n s_1 x \cos\lambda_n s_2 x \end{aligned} \tag{1.15}$$

Требуя, чтобы решение (1.7), с учётом (1.15), удовлетворяло граничным условиям свободного опирания (1.3) при $x = a,$ получим:

$$f_n\left(x\right) = B_n \operatorname{sh}\lambda_n s_1\left(a-x\right)\cos\lambda_n s_2\left(a-x\right) + D_n \operatorname{ch}\lambda_n s_1\left(a-x\right)\sin\lambda_n s_2\left(a-x\right) \tag{1.16}$$

2. Подстановка (1.7), с учётом (1.16), в граничные условия свободного края (1.4), (1.5) приводит к системе однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных B_n, D_n:

$$\begin{aligned} & \left[\left(s_1^2 - s_2^2 - \nu\right)\operatorname{sh}\zeta_1\cos\zeta_2 - 2s_1s_2\operatorname{ch}\zeta_1\sin\zeta_2\right]B_n + \\ & + \left[\left(s_1^2 - s_2^2 - \nu\right)\operatorname{ch}\zeta_1\sin\zeta_2 + 2s_1s_2\operatorname{sh}\zeta_1\cos\zeta_2\right]D_n = 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} & \left[s_1\left(1-\nu\right)\operatorname{ch}\zeta_1\cos\zeta_2 + s_2\left(1+\nu\right)\cdot\operatorname{sh}\zeta_1\sin\zeta_2\right]B_n + \\ & + \left[s_1\left(1-\nu\right)\operatorname{sh}\zeta_1\sin\zeta_2 - s_2\left(1+\nu\right)\operatorname{ch}\zeta_1\cos\zeta_2\right]D_n = 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Равенство нулю детерминанта системы уравнений (2.1), (2.2) даёт уравнение, определяющее параметры критической нагрузки α_n при действии на свободном крае $x = 0$ консервативной («мертвой») нагрузки.

В (2.1), (2.2) приняты обозначения:

$$\zeta_1 = \lambda_n s_1 a, \qquad \zeta_2 = \lambda_n s_2 a \tag{2.3}$$

В случае неконсервативной (следящей) нагрузки, вместо граничного условия (1.5) необходимо удовлетворить условию (1.6). Тогда уравнение (2.2) заменяется следующим:

$$\left[s_1\left(1-\nu+2\alpha_n^2\right)\operatorname{ch}\zeta_1\cos\zeta_2+s_2\left(1+\nu-2\alpha_n^2\right)\cdot\operatorname{sh}\zeta_1\sin\zeta_2\right]B_n+$$
$$+\left[s_1\left(1-\nu+2\alpha_n^2\right)\operatorname{sh}\zeta_1\sin\zeta_2-s_2\left(1+\nu-2\alpha_n^2\right)\operatorname{ch}\zeta_1\cos\zeta_2\right]D_n=0 \qquad (2.4)$$

Следовательно, для определения критической неконсервативной нагрузки необходимо приравнять к нулю детерминант системы из уравнений (2.1) и (2.4).

Приравнивая к нулю детерминанта систем (2.1), (2.2) и (2.1), (2.4), получим уравнения для определения критических нагрузок. Ими соответственно будут:

$$s_1\left[2\alpha_n^2-\left(1-\nu\right)^2\right]\sin\zeta_2-s_2\left[2\alpha_n^2-\left(1-\nu\right)\left(3+\nu\right)\right]\operatorname{sh}\zeta_1=0 \qquad (2.5)$$

$$s_1\left[-1+\nu\left(2-\nu+2\alpha_n^2\right)\right]\sin\zeta_2+s_2\left[-3+\nu\left(2+\nu-2\alpha_n^2\right)\right]\operatorname{sh}\zeta_1=0 \qquad (2.6)$$

Если полученные уравнения имеют решение, удовлетворяющее условию

$$0<\alpha^2{}_n<2\,, \qquad (2.7)$$

т.е. имеют решения, затухающие от свободного края по координате x, то такие решения принято считать локализованными в окрестности свободного края.

Прежде всего, по аналогии с задачей Рэлея о поверхностных упругих волнах, необходимо посмотреть существуют ли такие решения в пределе при $a\to\infty$ (или $\zeta_1\to\infty$). При $\zeta_1\to\infty$ из уравнения (2.5), соответствующего случаю консервативной нагрузки, получается

$$\alpha_n^2=0.5\left(3+\nu\right)\left(1-\nu\right) \qquad (2.8)$$

Нетрудно проверить, что при произвольном значении коэффициента Пуассона $\nu\in\left[0,0.5\right]$ значения критической нагрузки, найденные из (2.8), удовлетворяют условию существования локализованной неустойчивости (2.7).

Для неконсервативной нагрузки из (2.6) будем иметь:

$$2\nu\alpha^2{}_n=-\left(3+\nu\right)\left(1-\nu\right) \qquad (2.9)$$

т.е. для α_n^2 получаются отрицательные значения и условие существования локализованной неустойчивости (2.7) не выполняется. С другой стороны, поскольку, согласно (1.1) и (1.9), знак α_n^2 определяется внешней нагрузкой, то возникает вопрос, а возможна ли потеря устойчивости при растягивающей неконсервативной нагрузке? По-видимому, в этом случае необходимо применение динамического метода исследования устойчивости [11,12].

Очевидно, что появление локализованной неустойчивости, т.е. существование решения задачи, удовлетворяющего условию (2.7), существенно зависит от отношения сторон пластинки (a/b или от $\lambda_n a$). Нетрудно проверить, что $\alpha^2{}_n=2$ является корнем уравнения (2.5). Однако, подстановка $\alpha^2{}_n=2$ в (1.16) и далее в граничное условие (1.4) приводит к тривиальному решению $w=0$. Для исключения из рассмотрения корня $\alpha^2{}_n=2$ и с целью получения условия появления локализованной неустойчивости, уравнение (2.5) делится на s_1 и совершается предельный переход $s_1\to 0\left(\alpha^2{}_n\to 2\right)$.

В результате получается уравнение

$$2\left(1+\nu\right)\lambda_n a-\left(3-\nu\right)\sin 2\lambda_n a=0 \qquad (2.10)$$

В табл. 1 приводятся численные значения для параметра $\lambda_1 a$, найденные из уравнения (2.10), начиная с которого появляется локализованная неустойчивость в зависимости от коэффициента Пуассона ν. Там же, для наглядности, приводятся и значения для a/b

Таблица 1

ν	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\lambda_1 a$	1.139	1.086	1.03	0.969	0.903	0.83

a/b	0.363	0.346	0.328	0.308	0.287	0.264

Когда свободно опёртый край $(x=a)$ близок к свободному краю $x=0$ $(\lambda_1 a<1.139)$, локализованная неустойчивость не имеет места.

Заключение. Для прямоугольной пластинки с тремя свободно опёртыми и с одним свободным краями, предварительно нагружённым вдоль свободного края, получены условия появления локализованной в окрестности свободного края неустойчивости, в случае консервативной нагрузки. В случае неконсервативной (следящей) нагрузки, показано, что в статической постановке даже в пределе $a\to\infty$, т.е. для полубесконечной пластинки, локализованная неустойчивость не имеет места.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А.Ю. Об одном предельном переходе в теории устойчивости упругих прямоугольных пластин.//ДАН СССР. 1954. Т.XCV. №3. С.477-479.
2. Banichuk N.V., Ishlinskii A.Yu. Some special features of problems of the stability and vibrations of rectangular plate. //J. Appl.Math/ and Mech. 1995, 59(4), p.593-597.
3. Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек (Асимптотические методы). М.: Наука, физматлит, 1995. 320 с.
4. Белубекян М.В. Задачи локализованной неустойчивости пластинки //В сб.: «Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем». Ереван: Изд.ЕГУ, 1997.С.95-99.
5. Белубекян М.В., Чил-Акопян Э.О. Задачи локализованной неустойчивости пластинки со свободным краем. //Изв. НАН Армении. Механика. 2004. Т.57. №2. С.34-39.
6. Белубекян В.М. К задаче устойчивости пластин с учётом поперечных сдвигов. //Изв. РАН. МТТ. 2004. №2. С.126-131.
7. Banichuk N.V., Barsuk A.A. Localization of eigenforms and limit transitions in problems of stability of rectangular plates. // J.Appl.Math. and Mech. 2008, v.72(2), p.302-307.
8. Коненков Ю.К. Об изгибной волне релеевского типа //Акустич. Журнал. 1960. Т.6. №1. С.124-126.
9. Adali S. Stability of a Rectangular Plate under Nonconservative and Compressive forces. //Int.J.Solunds and ctruct. 1982, 18(12), p.1043-1052.
10. Sharifian R., Belubekyan V. Stability of a rectangular plate axially compressed on its two opposite free edges. //ZAMM, 2012, v.92, №7, p.558-564.
11. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984с.
12. Погосян Д.М. Неконсервативная задача устойчивости сжатой прямоугольной пластинки. //Изв. НАН Армении. Механика. 2013. Т.66. №2. С.40-48.

Сведения об авторах:

Белубекян Мелс Вагаршакович – Кандидат физ-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения
Тел: (+374 10) 521503, (+374 10) 580096,
E-mail: mbelubekyan@yahoo.com

Саакян Арег Аветикович – аспирант Института механики НАН РА
Адрес: пр. М.Маштоца 45/1б, кв.106, Ереван, 0019
Тел: (+37499)608866
E-mail: areg1992@gmail.com

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ТРЁХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ С УЧЁТОМ ПЛАСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛА

Горшков С.А., Дац Е.П., Мурашкин Е.В.

В представленной работе рассмотрен подход к численному решению задач теории температурных напряжений с учётом процессов необратимого деформирования материала. В качестве примера рассмотрен упруго-пластический куб, деформирующийся вследствие несвободного теплового расширения. Получена система дифференциальных уравнений, позволяющая на каждом временном шаге численно рассчитать уровень необратимых деформаций, температурных напряжений и перемещений в материале. Разработан алгоритм поиска областей необратимого деформирования при нестационарном тепловом воздействии. Найдены поля остаточных напряжений, формирующихся в процессе остывания материала.

Процесс формообразования за счёт необратимого деформирования при изменяющемся поле температуры требует предварительного расчёта средствами математического моделирования итоговой геометрии формуемого изделия [1-5], времени формования, механических свойств материала изделия и сформированного уровня и распределения остаточных напряжений. Проведение таких расчётов встречает значительные трудности, связанные, в первую очередь, с невозможностью их выполнения в рамках современных программных комплексов «ANSYS», «MSC.MARC» и др. Несмотря на заявляемые возможности расчётов упругопластических процессов, данные программные продукты такими возможностями не обладают. Связано это со следующими обстоятельствами:

1. Проблема определения неизвестной границы зоны необратимого деформирования.
2. Неверное определение разгрузочного состояния материала.

В настоящей работе при помощи нового численного алгоритма сделана попытка преодолеть трудности, связанные с определением напряжённо-деформированного состояния материала. Рассмотрим упругопластический куб, с длиной ребра $l=1$. (рис.1.) Верхняя и нижняя грань куба закреплены (1), в то время, как боковые грани находятся в условиях свободного теплового расширения (2):

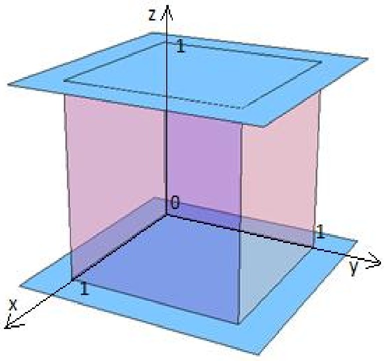


Рис.1.

$$\begin{aligned} &u_x(x,y,0)=0 \quad u_x(x,y,l)=0 \\ &u_y(x,y,0)=0 \quad u_y(x,y,l)=0 \\ &u_z(x,y,0)=0 \quad u_z(x,y,l)=0 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &\sigma_{xx}(0,y,z)=0 \quad \sigma_{xx}(l,y,z)=0 \\ &\tau_{xy}(0,y,z)=0 \quad \tau_{xy}(l,y,z)=0 \\ &\tau_{yz}(x,0,z)=0 \quad \tau_{yz}(x,l,z)=0 \\ &\sigma_{yy}(x,0,z)=0 \quad \sigma_{yy}(x,l,z)=0 \\ &\tau_{xy}(x,0,z)=0 \quad \tau_{xy}(x,l,z)=0 \\ &\tau_{xz}(0,y,z)=0 \quad \tau_{xz}(l,y,z)=0 \end{aligned} \tag{2}$$

Пусть материал куба подвержен некоторому линейному тепловому расширению T. Температурные напряжения в материале описываются соотношениями Дюамеля-Неймана [1]:

$$\sigma_{ij} = (\lambda e_{kk} - (3\lambda + 2\mu)T)\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}\,, \tag{3}$$

где e_{ij} – упругая деформация материала, δ_{ij} – символ Кронекера, λ, μ – параметры Ламе материала.

Очевидно, что вследствие ограничений на свободное тепловое расширение (1) при некотором значении параметра T в материале могут возникнуть необратимые деформации p_{ij}. Для определения приращений пластических деформаций dp_{ij} воспользуемся законом пластического течения, ассоциированным с условием пластичности Мизеса [2]:

$$dp_{ij} = p_{ij} - \tilde{p}_{ij} = d\xi(3\sigma_{ij} - \sigma_{kk}\delta_{ij}) \tag{4}$$

$\tilde{p}_{ij}$ – пластическая деформация, вычисленная в предыдущий момент времени, d¶ – неизвестный множитель. В случае обратимого деформирования материала $d\xi = 0$. Воспользовавшись геометрическими соотношениями $p_{ij} + e_{ij} = 0.5(u_{i,j} + u_{j,i})$, для напряжений (3) с учётом зависимости (4) следуют зависимости:

$$\sigma_{ij} = ((\lambda + L)u_{k,k} - (3\lambda + 2\mu)T)\delta_{ij} + M(u_{i,j} + u_{j,i} - 2\tilde{p}_{ij})$$
$$L = \frac{4\mu^2 d\xi}{(1+6\mu d\xi)}, \quad M = \frac{\mu}{(1+6\mu d\xi)} \tag{5}$$

Тогда система уравнений равновесия $\sigma_{ik,k} = 0$ согласно (5) примет вид:

$$(\lambda + L + M)u_{k,ki} + u_{k,k}L_{,i} - m\Delta T_{,i} + M(u_{i,kk} - 2\tilde{p}_{ik,k}) + M_{,k}(u_{i,k} + u_{k,i} - 2\tilde{p}_{ik}) = 0\,. \tag{6}$$

Для численного решения системы (6) используется метод конечных разностей [6]. В качестве начальных данных задачи выбираются условия $\tilde{p}_{ij} = 0$, $T = 0$. Далее в узлах трёхмерной сетки при каждом приращении параметра T проверяется условие пластичности Мизеса:

$$f = (\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + 3\,(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) - \sigma_{yy}\ \sigma_{zz} + \sigma_{zz}^2 - \sigma_{xx}(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})) - 4(k_0(1 - \beta T))^2\,, \tag{7}$$

где k_0 – начальный предел текучести при $T = 0$, β – константа материала, определяемая на основе экспериментальных данных падения уровня предела текучести при увеличивающейся температуре.

В том случае, если в некотором узле выполняется условие $f < 0$, для данного узла записывается значение $d\xi = 0$ и решается система уравнений (5) совместно с граничными условиями (1), (2):

$$\begin{cases} (\lambda + L + M)u_{k,kx} + u_{k,k}L_{,x} + M(u_{x,kk} - 2\tilde{p}_{xk,k}) + M_{,k}(u_{x,k} + u_{k,x} - 2\tilde{p}_{xk}) = 0 \\ (\lambda + L + M)u_{k,ky} + u_{k,k}L_{,y} + M(u_{y,kk} - 2\tilde{p}_{zk,k}) + M_{,k}(u_{y,k} + u_{k,y} - 2\tilde{p}_{xk}) = 0 \\ (\lambda + L + M)u_{k,kz} + u_{k,k}L_{,z} + M(u_{z,kk} - 2\tilde{p}_{zk,k}) + M_{,k}(u_{z,k} + u_{k,z} - 2\tilde{p}_{xk}) = 0 \end{cases} \tag{8}$$

Для узлов, в которых выполняется условие $f \geq 0$, к системе уравнений (8) добавляется уравнение $f = 0$. Таким образом, численно решается система из четырёх нелинейных уравнений относительно неизвестных величин u_i, $d\xi$. Полученные значения используются для построения функций напряжений (5) и накопленных необратимых деформаций $\tilde{p}_{ij}$.

Совместное решение системы (1), (2), (7), (8) обеспечивает непрерывность искомых величин, что позволяет с высокой точностью оценить размеры областей с накопленными необратимыми деформациями и определить уровень остаточных напряжений при последующем уменьшении параметра T.

Среди недостатков предложенного метода решения следует выделить высокое время расчёта. Точность численного решения зависит от приращения параметра T, которое выбирается таким образом, чтобы при заданном пространственном разбиении для каждого изменения T область пластического течения изменялась максимум на 1 узел в любом из направлений. Несомненным преимуществом предложенного алгоритма является непрерывность функций перемещений, напряжений и деформаций, появляющихся при аппроксимации соответствующих численных решений. Данное обстоятельство позволяет корректно определять области необратимого деформирования и уровень остаточных напряжений деформаций и перемещений.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 15-31-21111.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. // М.: Изд. «МИР», 1964.
2. Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528с.
3. Коваленко А.Д. Развитие исследований в области термоупругости, термопластичности, термовязкоупругости. // Прикладная механика. 1969. Т.5. №12. С.1–16.
4. Седов Л.И. Механика сплошных сред. Т.1. М.: Наука, 1973. 536с.
5. Шевченко Ю.Н. Об определяющих уравнениях теории пластического течения при неизотермических процессах нагружения. // Тепловые напряжения в элементах конструкций. 1987. Вып.18. С.17 23.
6. Горшков С.А., Дац Е.П., Мурашкин Е.В. Расчёт плоского поля температурных напряжений в условиях пластического течения и разгрузки. // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Научный журнал, серия механика предельного состояния. 2014. №3(21). С.169–175.

Сведения об авторах:

Горшков Сергей Александрович – аспирант лаборатории механики необратимого деформирования, Институт автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук, Владивосток.
E-mail: aceberg93@ya.ru

Дац Евгений Павлович – ассистент кафедры математики и моделирования, Владивостокский государственный университет экономики и сервиса, Владивосток.
E-mail: dats@dvo.ru

Мурашкин Евгений Валерьевич – канд.физ.-мат.наук, с.н.с. Института проблем механики им.А.Ю. Ишлинского РАН, Москва.
E-mail: murashkin@ipmnet.ru

ИЗГИБ ДВУХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ УСЛОВИИ СВОБОДНОГО СКОЛЬЖЕНИЯ МЕЖДУ ОРТОТРОПНЫМИ СЛОЯМИ

Гришко А.М.

Рассмотрена двухслойная прямоугольная пластина, ортотропные слои которого закреплены по кромкам. В данной работе принято условие свободного скольжения, на основе которого получены уравнения изгиба и колебаний. Определены условия, при которых отсутствует расслоение.

1. Известно большое количество работ по исследованию упругих многослойных пластин при условии жёсткого контакта между слоями пластины [1], [2]. В современном машиностроении и авиастроении, благодаря ценным свойствам, большое место занимает использование полимеров. Очень часто соединение металл–полимер реализуется с помощью заклёпочных швов по контуру. Для исследования таких задач в работах [3], [4] используется асимптотический метод интегрирования.

В данной работе рассматривается двухслойная пластина при условии скользящего контакта между ортотропными слоями на основе гипотезы Кирхгофа для каждого слоя в отдельности.

Пусть в прямоугольной декартовой системе координат (x, y, z) слой с индексом (1) и толщиной h_1 занимает область $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $0 \le z \le h_1$, а слой с индексом (2) и толщиной h_2 – область $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $-h_2 \le z \le 0$.

Уравнения колебания слоёв имеют вид [1]:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{(k)}}{\partial x_j} = \frac{\partial u_j^{(k)}}{\partial t^2}, \quad k = 1,2 \tag{1.1}$$

Допустим, внешняя лицевая сторона слоя с индексом (1) находится под нормальной нагрузкой

$$\sigma_{33}^{(1)} = -q(x, y, t), \quad \sigma_{31}^{(1)} = \sigma_{32}^{(1)} = 0 \text{ при } z = h_1 \tag{1.2}$$

Внешняя сторона второго слоя свободна:

$$\sigma_{33}^{(2)} = \sigma_{31}^{(2)} = \sigma_{32}^{(2)} = 0 \text{ при } z = h_2 \tag{1.3}$$

Условие скользящего контакта на стыке слоёв запишем в следующем виде:

$$U_3^{(1)} = U_3^{(2)}, \quad \sigma_{33}^{(1)} = \sigma_{33}^{(2)}, \quad \sigma_{31}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{32}^{(1)} = 0 \text{ при } x = 0$$

$$\sigma_{31}^{(2)} = 0, \quad \sigma_{32}^{(2)} = 0 \text{ при } z = 0 \tag{1.4}$$

Принимая гипотезу Кирхгофа относительно компонент упругих перемещений слоёв пластинки и осредняя уравнения (1.1), получим следующие уравнения относительно усилий и моментов:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial S^{(1)}}{\partial y} = \rho_1 h_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(u_1 - \frac{h_1}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\right) \\
&\frac{\partial S^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial T_2^{(1)}}{\partial y} = {}^\circ{}_1 h_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(v_1 - \frac{h_1}{2}\frac{\partial w}{\partial y}\right) \\
&\frac{\partial T_1^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial S^{(2)}}{\partial y} = {}^\circ{}_2 h_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(u_2 + \frac{h_2}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\right) \\
&\frac{\partial S^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial T_2^{(2)}}{\partial y} = {}^\circ{}_2 h_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(v_2 + \frac{h_2}{2}\frac{\partial w}{\partial y}\right)
\end{aligned} \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial N_1^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial N_2^{(2)}}{\partial y} - q(x, y) - \pm_{33}(0) = {}^\circ{}_1 h_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial M_1^{(1)}}{\partial x}+\frac{\partial H^{(1)}}{\partial y}-N_1^{(1)}=\frac{{}^{\circ}{}_1 h_1^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(u_1-\frac{2h_1}{3}\frac{\partial w}{\partial x}\right)\\
&\frac{\partial M_2^{(1)}}{\partial y}+\frac{\partial H^{(1)}}{\partial y}-N_2^{(1)}=\frac{{}^{\circ}{}_1 h_1^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(v_1-\frac{2h_1}{3}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\\
&\frac{\partial N_1^{(2)}}{\partial x}+\frac{\partial N_2^{(2)}}{\partial y}+\pm_{33}(0)={}^{\circ}{}_2 h_2\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\\
&\frac{\partial M_1^{(2)}}{\partial x}+\frac{\partial H^{(2)}}{\partial y}-N_1^{(2)}=-\frac{{}^{\circ}{}_2 h_2^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(u_2+\frac{2h_2}{3}\frac{\partial w}{\partial x}\right)\\
&\frac{\partial M_2^{(2)}}{\partial y}+\frac{\partial H^{(2)}}{\partial y}-N_2^{(2)}=-\frac{{}^{\circ}{}_2 h_2^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(v_2+\frac{2h_2}{3}\frac{\partial w}{\partial y}\right)
\end{aligned}
\qquad (1.6)
$$

Усилия и моменты из (1.5) и (1.6) представим в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
&T_1^{(1)}=\int_0^{h_1}\pm_{11}^{(1)}dz=C_{11}^{(1)}\left[\frac{\partial u_1}{\partial x}+\neg_{22}^{(1)}\frac{\partial v_1}{\partial y}-\frac{h_1}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\neg_{22}^{(1)}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right]\\
&T_2^{(1)}=\int_0^{h_1}\pm_{22}^{(1)}dz=C_{22}^{(1)}\left[\frac{\partial v_1}{\partial y}+\neg_{11}^{(1)}\frac{\partial u_1}{\partial x}-\frac{h_1}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\neg_{11}^{(1)}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right]\\
&S^{(1)}=\int_0^{h_1}\pm_{12}^{(1)}dz=C_{66}^{(1)}\left[\frac{\partial u_1}{\partial y}+\frac{\partial v_1}{\partial x}-h_1\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right]\\
&T_1^{(2)}=\int_{-h_2}^{0}\pm_{11}^{(2)}dz=C_{11}^{(2)}\left[\frac{\partial u_2}{\partial x}+\neg_{22}^{(2)}\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{h_2}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\neg_{22}^{(2)}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right]\\
&T_2^{(2)}=\int_{-h_2}^{0}\pm_{22}^{(2)}dz=C_{22}^{(2)}\left[\frac{\partial v_2}{\partial y}+\neg_{11}^{(2)}\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{h_2}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\neg_{11}^{(2)}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right]\\
&S^{(2)}=\int_{-h_2}^{0}\pm_{12}^{(2)}dz=C_{66}^{(2)}\left[\frac{\partial u_2}{\partial y}+\frac{\partial v_2}{\partial x}+h_2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right]\\
&N_1^{(1)}=\int_0^{h_1}\pm_{13}^{(1)}dz,\quad N_1^{(2)}=\int_0^{h_1}\pm_{23}^{(1)}dz,\\
&N_1^{(2)}=\int_{-h_2}^{0}\pm_{13}^{(2)}dz,\quad N_2^{(2)}=\int_{-h_2}^{0}\pm_{23}^{(2)}dz\\
&M_1^{(1)}=\int_0^{h_1}z\pm_{11}^{(1)}dz=K_{11}^{(1)}\left[\frac{\partial u_1}{\partial x}+\neg_{22}^{(1)}\frac{\partial v_1}{\partial y}-\frac{2h_1}{3}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\neg_{22}^{(1)}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right]\\
&M_2^{(1)}=\int_0^{h_1}z\pm_{22}^{(1)}dz=K_{22}^{(1)}\left[\frac{\partial v_1}{\partial y}+\neg_{11}^{(1)}\frac{\partial u_1}{\partial x}-\frac{2h_1}{3}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\neg_{11}^{(1)}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right]\\
&H^{(1)}=\int_0^{h_1}z\pm_{12}^{(1)}dz=K_{66}^{(1)}\left[\frac{\partial u_1}{\partial y}+\frac{\partial v_1}{\partial x}-\frac{2}{3}h_1\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right]\\
&M_1^{(2)}=\int_{-h_2}^{0}z\pm_{11}^{(2)}dz=-K_{11}^{(2)}\left[\frac{\partial u_2}{\partial x}+\neg_{22}^{(2)}\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{2h_2}{3}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\neg_{22}^{(2)}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right]
\end{aligned}
\qquad (1.7)
$$

$$M_2^{(2)}=\int_{-h_2}^{0} z\sigma_{22}^{(2)}dz=-K_{22}^{(2)}\left[\frac{\partial v_2}{\partial y}+\nu_{11}^{(2)}\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{2h_2}{3}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu_{11}^{(2)}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right]$$

$$H^{(2)}=\int_{-h_2}^{0} z\sigma_{12}^{(2)}dz=-K_{66}^{(2)}\left[\frac{\partial u_2}{\partial y}+\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{2}{3}h_2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right]$$

В (1.7) введены следующие обозначения:

$$C_{ik}^{(j)}=h_j B_{ik}^{(j)},\quad K_{ik}^{(j)}=\frac{1}{2}h_j^2 B_{ik}^{(j)} \tag{1.8}$$

2. Подставляя (1.7) в (1.5), получаем следующую систему уравнений относительно перемещений:

$$\begin{aligned}
&C_{66}^{(1)}\Delta u_1+\frac{\partial}{\partial x}\left((C_{11}^{(1)}-C_{66}^{(1)})\frac{\partial u_1}{\partial x}+(C_{11}^{(1)}\nu_{22}^{(1)}+C_{66}^{(1)})\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)-\\
&\frac{h_1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(C_{11}^{(1)}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+(C_{11}^{(1)}\nu_{22}^{(1)}+2C_{66}^{(1)})\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=\rho_1 h_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(u_1-\frac{h_1}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\right)\\
&C_{66}^{(1)}\Delta v_1+\frac{\partial}{\partial y}\left((C_{22}^{(1)}-C_{66}^{(1)})\frac{\partial v_1}{\partial y}+(C_{22}^{(1)}\nu_{11}^{(1)}+C_{66}^{(1)})\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)-\\
&\frac{h_1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(C_{22}^{(1)}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+(C_{22}^{(1)}\nu_{11}^{(1)}+2C_{66}^{(1)})\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)=\rho_1 h_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(v_1-\frac{h_1}{2}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\\
&C_{66}^{(2)}\Delta u_2+\frac{\partial}{\partial x}\left((C_{11}^{(2)}-C_{66}^{(2)})\frac{\partial u_2}{\partial x}+(C_{11}^{(2)}\nu_{22}^{(2)}+C_{66}^{(2)})\frac{\partial v_2}{\partial y}\right)+\\
&\frac{h_2}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(C_{11}^{(2)}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+(C_{11}^{(2)}\nu_{22}^{(2)}+2C_{66}^{(2)})\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=\rho_2 h_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(u_2+\frac{h_2}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\right)\\
&C_{66}^{(2)}\Delta v_2+\frac{\partial}{\partial y}\left((C_{22}^{(2)}-C_{66}^{(2)})\frac{\partial v_2}{\partial y}+(C_{22}^{(2)}\nu_{11}^{(2)}+C_{66}^{(2)})\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)+\\
&\frac{h_2}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(C_{22}^{(2)}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+(C_{22}^{(2)}\nu_{11}^{(2)}+2C_{66}^{(2)})\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)=\rho_2 h_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(v_2+\frac{h_2}{2}\frac{\partial w}{\partial y}\right)
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Подстановка выражений для $M_1^{(k)}$, $M_2^{(k)}$ и $H^{(k)}$ из (1.7) во второе, третье, пятое и шестое уравнения системы (1.6) приводит к уравнениям:

$$\begin{aligned}
&K_{66}^{(1)}\Delta u_1+\frac{\partial}{\partial x}\left(f_1^1\frac{\partial u_1}{\partial x}+F_{2,1}^1\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)-\frac{2h_1}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(K_{11}^{(1)}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+F_{2,1}^1\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)-N_1^{(1)}=\frac{\rho_1 h_1^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(u_1-\frac{2h_1}{3}\frac{\partial w}{\partial x}\right)\\
&K_{66}^{(1)}\Delta v_1+\frac{\partial}{\partial y}\left(f_2^1\frac{\partial v_1}{\partial y}+F_{1,2}^1\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)-\frac{2h_1}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left(K_{22}^{(1)}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+F_{1,2}^1\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)-N_2^{(1)}=\frac{\rho_1 h_1^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(v_1-\frac{2h_1}{3}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\\
&K_{66}^{(2)}\Delta u_2+\frac{\partial}{\partial x}\left(f_1^2\frac{\partial u_2}{\partial x}+F_{2,1}^2\frac{\partial v_2}{\partial y}\right)+\frac{2h_2}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(K_{11}^{(2)}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+F_{2,1}^2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+N_1^{(2)}=\frac{\rho_2 h_2^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(u_2+\frac{2h_2}{3}\frac{\partial w}{\partial x}\right)\\
&K_{66}^{(2)}\Delta v_2+\frac{\partial}{\partial y}\left(f_2^2\frac{\partial v_2}{\partial y}+F_{1,2}^2\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)+\frac{2h_2}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left(K_{22}^{(2)}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+F_{1,2}^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+N_2^{(2)}=\frac{\rho_2 h_2^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(v_2+\frac{2h_2}{3}\frac{\partial w}{\partial y}\right),
\end{aligned} \tag{2.2}$$

где

$$f_l^k=(K_{ll}^{(k)}-K_{66}^{(k)})$$

$$F_{l,p}^k=\nu_{ll}^{(k)}K_{pp}^{(k)}+K_{66}^{(k)},\quad l,p,k=1,2$$

Определяя $N_1^{(k)}$, $N_2^{(k)}$, пренебрегая в системе уравнений (2.2) членами, имеющими порядок момента инерции вращения, и подставляя в первое и четвёртое уравнения системы (1.6), получаем:

$$\frac{2}{3}h_1[K_{11}^{(1)}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+K_{22}^{(1)}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+A_1\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}]-K_{66}^{(1)}\Delta\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)-f_1^1\frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3}-f_2^1\frac{\partial^3 v_1}{\partial y^3}$$

$$-F_{2,1}^1\frac{\partial^3 v_1}{\partial x^2\partial y}-F_{1,2}^1\frac{\partial^3 u_1}{\partial x\partial y^2}+\rho_1 h_1\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=-q(x,y)-\sigma_{33}(0)$$

$$\frac{2}{3}h_2[K_{11}^{(2)}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+K_{22}^{(2)}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+A_2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}]+K_{66}^{(2)}\Delta\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}\right)$$

$$+f_1^2\frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3}+f_2^2\frac{\partial^3 v_2}{\partial y^3}+F_{2,1}^2\frac{\partial^3 v_2}{\partial x^2\partial y}+F_{1,2}^2\frac{\partial^3 u_2}{\partial x\partial y^2}+\rho_2 h_2\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\sigma_{33}(0), \qquad (2.3)$$

где

$$A_k=(2K_{66}^{(k)}+\neg_{11}^{(1)}K_{22}^{(k)}+\neg_{22}^{(k)}K_{11}^{(k)}).$$

Приходим к решению системы из шести уравнений (2.1), (2.3) относительно шести искомых функций u_1, u_2, v_1, v_2, w, $\sigma_{33}(0)$ от переменных x, y, t.

Исключая $\sigma_{33}(0)=\sigma_{33}(0,x,y,t)$ из уравнений (2.3), получаем:

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+\frac{2}{3}(h_1A_k+h_2A_k)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}-(K_{66}^{(1)}\Delta(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial x})-$$

$$K_{66}^{(2)}\Delta(\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial x}))-\frac{\partial^3}{\partial x^3}(f_1^1u_1-f_1^2u_2)-\frac{\partial^3}{\partial y^3}(f_2^1v_1-f_2^2v_2)- \qquad (2.4)$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}(F_{2,1}^1v_1-F_{2,1}^2v_2)-\frac{\partial^3}{\partial y^2\partial x}(F_{1,2}^1u_1-F_{1,2}^1u_2)+m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=-q(x,y)$$

где

$$m=\rho_1h_1+\rho_2h_2$$

$$D_{kk}=\frac{2}{3}(h_1K_{kk}^{(1)}+h_2K_{kk}^{(2)})$$

Таким образом, из (2.1) и (2.4) следует, что задачи изгибных и планарных колебаний не отделяются.

3. Граничные условия на кромках пластины получаются при помощи осреднения условий задачи в трёхмерной постановке [5] и приведены в [6].

4. Для приведённой выше модели исследования задач изгиба и колебаний двухслойной пластинки исключается возможность отделения слоёв друг от друга в процессе деформации. Возможность отделения слоёв проверяется после решения задачи и определения напряжения $\sigma_{33}(0)=\sigma_{33}(0,x,y,t)$.

Условие отсутствия расслоения есть

$$\sigma_{33}(0)\le 0. \qquad (4.1)$$

Рассмотрим пластинку, которая изгибается в виде цилиндрической поверхности под действием равномерно распределённой нагрузки:

$$q=q_0=\text{const}>0 \qquad (4.2)$$

С учётом цилиндрического изгиба и независимости искомых функций от времени t, из второго уравнения системы (2.3) получаем:

$$\sigma_{33}(0)=\frac{2}{3}h_2K_{11}^{(2)}w^{IV}+K_{11}^{(2)}u_2''' \qquad (4.3)$$

Подставляя выражения для w^{IV} и u_2^{III}, полученные из (2.1) и (2.4), в (4.3) находим:

$$\sigma_{33}(0) = -\frac{h_2 K_{11}^2}{h_1 K_{11}^{(1)} + h_2 K_{11}^{(2)}} q_0 \tag{4.4}$$

Как видно из (4.4) для данной задачи, независимо от граничных условий, нормальное напряжение на стыке пластин сжимающее, поэтому расслоение будет отсутствовать.

Рассмотрим возможность расслоения в частном случае, когда на двухслойную систему действует лишь объёмная сила веса (сила притяжения).

В данном случае меняются только второе и четвёртое уравнения системы (1.7), которые получаются в виде:

$$\frac{\partial N_1^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial N_2^{(1)}}{\partial y} - \rho_1 h_1 g - \sigma_{33}(0) = \rho_1 h_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial N_1^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial N_2^{(2)}}{\partial y} - \rho_2 h_2 g + \sigma_{33}(0) = \rho_2 h_2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{4.5}$$

Для задачи цилиндрического изгиба из второго уравнения (4.5) получаем:

$$\sigma_{33}(0) = \frac{2}{3} h_2 K_{11}^{(2)} w^{IV} + K_{11}^{(2)} u_2''' + \rho_2 h_2 g \tag{4.6}$$

Подставляя выражения для w^{IV} и u_2^{III} в (4.6), получаем:

$$\sigma_{33}(0) = -\frac{h_1 h_2 g}{h_1 K_{11}^{(1)} + h_2 K_{11}^{(2)}} (\rho_2 K_{11}^{(1)} - \rho_1 K_{11}^{(2)}) \tag{4.7}$$

Условием неотделения слоёв будет:

$$\rho_2 K_{11}^{(1)} - \rho_1 K_{11}^{(2)} < 0 \tag{4.8}$$

Условие (4.8) является критерием живучести двухслойной ортотропной пластинки. Согласно (1.8) и (4.8), критерий живучести существенно зависит от толщин слоёв пластинки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. Прочность, устойчивость колебания. М.: Наука, 1987. 360с.
2. Reddy J.N. Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: theory and analysis. CRC Press. 2004. 825p.
3. Агаловян Л.А., Хачатрян А.М. О двумерных уравнениях двухслойной анизотропной пластинки при неполном контакте между слоями // В сб.: «Контактные и смешанные граничные задачи механики деформируемого твёрдого тела» Ереван: 1999. С.23-29.
4. Хачатрян А.М. Об уравнениях двухслойной анизотропной пластинки при нежёстком контакте слоёв. // Доклады НАН Армении. 1999. Т.99. №2. С.159-175.
5. Белубекян М.В. Об уравнениях теории пластин, учитывающих поперечные сдвиги. // В сб.: «Проблемы механики тонких деформируемых тел» (Посв. 80-летию С.А. Амбарцумяна) Ереван: Изд. «Гитутюн», 2002. С.67-88.
6. Белубекян М.В. Изгиб и колебания двухслойной пластинки при условиях свободного скольжения между слоями. // Изв.НАН Армении. Механика. 2013. Т.66. №2. С.14-24.

Сведения об авторе

Гришко Анна Микаеловна – аспирант кафедры механики, Ереванский государственный университет, факультет математики и механики. (374 98) 15 28 20.
E-mail: ann.gevorgyan@gmail.com, annochka1986@gmail.com

СДВИГОВЫЕ ВОЛНЫ В ДВУХСЛОЙНОЙ СРЕДЕ ИЗ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО И ПРОВОДЯЩЕГО МАТЕРИАЛОВ

Даноян З.Н., Мкртчян С.А.

В настоящей работе исследуется существование и поведение электроупругих сдвиговых волн, распространяющихся в двухслойной структуре, которая состоит из пьезоэлектрического (класса 4mm или 6mm) и проводящего слоёв разных толщин h_1, h_2. Сформулирована граничная задача. Найдены упругие и электрические волновые поля, а также дисперсионное уравнение задачи. Дисперсионное уравнение исследовано для различных физико-механических характеристик структуры и при различных соотношениях скоростей объёмных волн в слоях.

Исследование колебательных и волновых процессов в слоистых структурах с различными физико-механическими свойствами в последнее время стало одним из важнейших направлений в механике и физике твёрдого тела [1-7]. Этот интерес вызван большим практическим и теоретическим значением этих исследований. Распространение упругих волн в двухслойной среде исследовалось в работах [1,3,5,7]. Поведение сдвиговых электроупругих волн типа Лява в структуре, состоящей из пьезоэлектрического полубесконечного слоя и второго проводящего или диэлектрического слоя, исследовалось в работах [2,4].

В настоящей работе рассматривается двухслойная структура, которая состоит из пьезоэлектрического и проводящего слоёв разных толщин h_1, h_2. Приводится численное исследование дисперсионного уравнения. Исследуются условия появления электроупругих волн Лява в зависимости от относительных толщин слоёв и физико-механических свойств материала.

1. Уравнения в слоях структуры.

Декартовая система координат выбрана так, что ось Oy направлена параллельно граничной поверхности слоёв**,** а ось Ox перпендикулярна к поверхностям слоёв.

Предполагается, что возмущения упругого и электрического полей в рассматриваемой структуре не зависят от координаты z и характеризуются вектором перемещения w и потенциалом φ электрического поля в пьезоэлектрическом слое, которые представляются следующим образом:

$$\varphi(x, y, t), \quad \vec{E} = -\mathrm{grad}\varphi . \tag{1}$$

Исследуются существование и поведение двумерных электроупругих волн, распространяющихся параллельно поверхностям слоёв.

Используя уравнения и соотношения пьезоэлектрической среды в предположении (1), для компонент деформаций, напряжений и электрической индукции получаются следующие выражения:

$$\gamma_{13} = \frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial x}, \gamma_{23} = \frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial y}, \tag{2}$$

$$\sigma_{13} = c_{44}\frac{\partial w}{\partial x} + e_{15}\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \sigma_{23} = c_{44}\frac{\partial w}{\partial y} + e_{15}\frac{\partial \varphi}{\partial y}: \tag{3}$$

$$D_1 = \varepsilon_{11}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + e_{15}\frac{\partial w}{\partial x}, D_2 = -\varepsilon_{11}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + e_{15}\frac{\partial w}{\partial y}, \tag{4}$$

где c_{44}, e_{15} – упругая и пьезоэлектрическая постоянные.

Для проводящей среды соответствующие соотношения получим, подставив в (1)-(4) $\varphi = 0$, $e_{15} = 0$. Из уравнений электроупругости и упругости, используя вышеприведённые соотношения, получим следующие уравнения, описывающие распространение электроупругих возмушений в пьезоэлектрическом слое и упругие возмушения в проводящем слое:

а) **для пьезоэлектрического слоя:**

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = S_1^2 \Delta w_1, \quad \Delta\varphi_1' = 0, \tag{5}$$

где приняты следующие обозначения:

$$S_1^2 = \frac{\bar{c}_1}{\rho_1} = \frac{c_1}{\rho_1}(1+\chi_1^2) = S_{10}^2(1+\chi_1^2),\ S_{10}^2 = \frac{c_1}{\rho_1},\ \varphi_1' = \varphi_1 - \bar{e}_1 w_1,$$
$$\bar{c}_1 = c_1(1+\chi_1^2),\ \chi_1^2 = \frac{\bar{e}_1 e_1}{c_1},\ \bar{e}_1 = \frac{e_1}{\varepsilon_1},\ c_1 = c_{44}^{(1)},\ \varepsilon_1 = \varepsilon_{11}^{(1)},\ e_1 = e_{15}^{(1)}. \quad (6)$$

Здесь величины с индексом «1» относятся к пьезоэлектрической среде, S_1 – скорость распространения сдвиговых объёмных электроупругих волн, S_{10} – скорость распространения сдвиговых объёмных упругих волн в пьезоэлектрической среде при пренебрежении пьезоэффектом, φ_1' – приведённый потенциал электрического поля, зависящий от истинного потенциала и перемещений пьезоэлектрической среды. Как видно из (5), поле перемещения w_1 отделяется от возмущений потенциала электрического поля, а возмущение электрического поля φ_1' зависит от истинного потенциала и от упругого перемещения:

б) **для проводяшего слоя:**

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} = S_2^2 \Delta w_1, S_2^2 = \frac{c_2}{\rho_2},\ c_2 = c_{44}^{(2)} \quad (7)$$

c_2 – упругая постоянная проводящего слоя, ρ_2 – плотность, S_2 – скорость распространения объёмных упругих волн в проводящем слое.

1. Граничные и контактные условия.

а) **граничные условия:**

1. на границе $x = +h_1$: $\sigma_{13}^{(1)} = 0,\ \varphi_1 = 0$; (8)

2. на границе $x = -h_2$: $\sigma_{13}^{(2)} = 0$; (9)

б**) контактные условия на поверхности** $x = 0$:

$$\sigma_{13}^{(1)} = \sigma_{13}^{(2)},\ w_1 = w_2,\ \varphi_1 = 0 \quad (10)$$

2. Решения в виде плоских волн.

Решение для упругого перемещения w_1 и приведенного потенциала φ_1' в области $0 \le x \le h_1$ и для упругого перемещения w_2 в области $-h_2 \le x \le 0$ представляются в виде:

$$w_1 = W_1(x)e^{i(py-\omega t)},\ \varphi_1' = \Phi_1(x)e^{i(px-\omega t)},\ w_2 = W_2(x)e^{i(py-\omega t)}, \quad (11)$$

где $W_1(x), \Phi_1(x), W_2(x)$ – искомые амплитуды волны, $p > 0$ – продольное волновое число, $\omega > 0$ – круговая частота.

Подставляя выражения (11) в (5) и (7), получим уравнение для определения амплитуд $W_1(x), \Phi_1(x), W_2(x)$, общее решение которого:

$$W_1(x) = W_{10}^+ \exp(ip\beta_1 x) + W_{10}^- \exp(-ip\beta_1 x),\ \beta_1 = \sqrt{\frac{V^2}{S_1^2} - 1},\ V = \frac{\omega}{P}, \quad (12)$$

$$\Phi_1(x) = \Phi_{10}^+ \exp(px) + \Phi_{10}^- \exp(-px), \quad (13)$$

$$W_2(x) = W_{20}^+ \exp(ip\beta_2 x) + W_{20}^- \exp(-ip\beta_2 x),\ \beta_2 = \sqrt{\frac{V^2}{S_2^2} - 1}. \quad (14)$$

V – фазовая скорость волны, β_1 и β_2 – коэффициенты затухания.

Полученные решения (12) - (14) подставляя в граничные условия (9), (10) и контактные условия (11), мы придём к следующим уравнениям для определения искомых амплитуд:

$$
\begin{aligned}
&i\bar{c}_1\beta_1 e^{i\beta_1\xi r}W_{10}^{+} - i\bar{c}_1\beta_1 e^{-i\beta_1\xi r}W_{10}^{-} + e_1 e^{\xi r}\Phi_{10}^{+} - e_1 e^{-\xi r}\Phi_{10}^{-} = 0,\\
&\bar{e}_1 e^{i\beta_1\xi r}W_{10}^{+} + \bar{e}_1 e^{-i\beta_1\xi r}W_{10}^{-} + e^{\xi r}\Phi_{10}^{+} + e^{-\xi r}\Phi_{10}^{-} = 0,\\
&W_{10}^{+} + W_{10}^{-} - W_{20}^{+} - W_{20}^{-} = 0, \quad \bar{e}_1 W_{10}^{+} + \bar{e}_1 W_{10}^{-} + \Phi_{10}^{+} + \Phi_{10}^{-} = 0,\\
&i\bar{c}_1\beta_1 W_{10}^{+} - i\bar{c}_1\beta_1 W_{10}^{-} - ic_2\beta_2 W_{20}^{+} + ic_2\beta_2 W_{20}^{-} + e_1\Phi_{10}^{+} - e_1\Phi_{10}^{-} = 0,\\
&e^{-i\beta_2\xi}W_{20}^{+} - e^{i\beta_2\xi}W_{20}^{-} = 0, \; r = h_1/h_2, \; \xi = ph_2.
\end{aligned} \tag{15}
$$

Условием существования нетривиальных решений системы (15) является равенство нулю его определителя. В результате приходим к следуюшему дисперсионному уравнению:

$$
\begin{aligned}
&-2\bar{c}_1 e_1 \bar{e}_1 \beta_1 + \operatorname{ch}\alpha \cos\alpha_1 \{e_1\bar{e}_1(2\bar{c}_1\beta_1 - c_2\beta_2 \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2) +\\
&+\operatorname{th}\alpha[(-e_1^2\bar{e}_1^2 + \bar{c}_1^2\beta_1^2)\operatorname{tg}\alpha_1 + \bar{c}_1 c_2 \beta_1\beta_2 \operatorname{tg}\alpha_2]\} = 0,
\end{aligned} \tag{16}
$$

где

$$
\alpha_1 = \beta_1\xi r, \; \alpha_2 = \beta_2\xi, \; \alpha = \xi r. \tag{17}
$$

3. Численное исследование дисперсионного уравнения.

а) **Численное исследование дисперсионного уравнения, когда пьезоэлектрический слой изготовлен из материала ЦТС-4, а проводящий слой – из Al:**

Ниже на рис. 1-6 показаны дисперсионные кривые численного расчёта в виде зависимости $V = V(\xi)$ при разных соотношениях толщин $r = h_1/h_2$ слоистой системы.

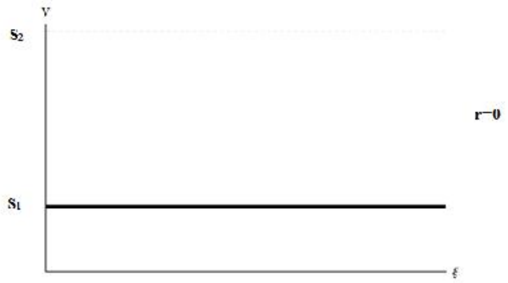


Рис. 1

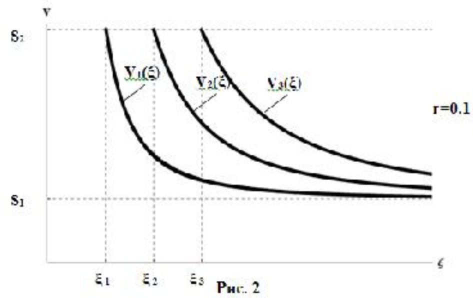


Рис. 2

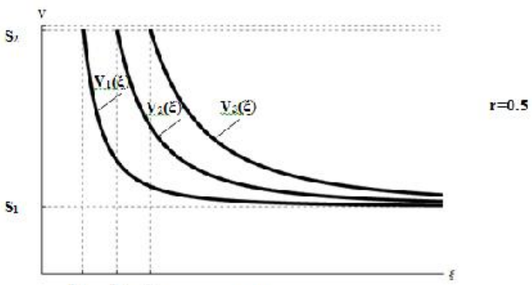


Рис. 3

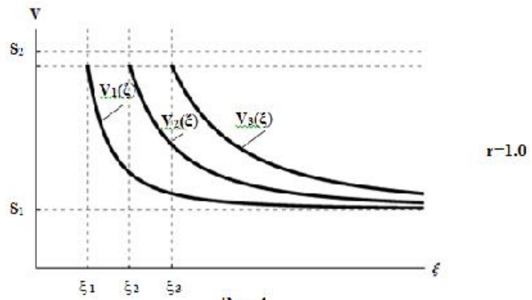


Рис. 4

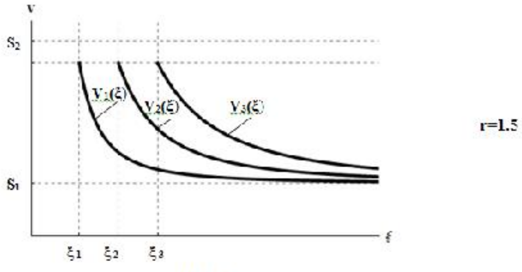


Рис. 5

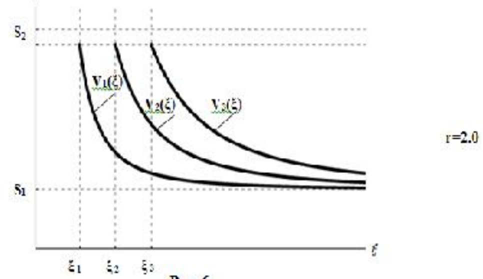


Рис. 6

Исследуя поведение дисперсионных кривых, показанных на рис. 1– 6, приходим к следующему выводу при определённом значении, соотношениях толщин r слоистой системы:

возникает электроупругая волна Лява со скоростью распространения V_1. Из этой волны при увеличении параметра $\boldsymbol{\xi}$ возникает вторая мода волны Лява, скорость распространения которой $\mathrm{V} = \mathrm{V}_2\left(\boldsymbol{\xi}\right)$ при увеличении $\boldsymbol{\xi}$ убывает от значения V_2 и в переделе при $\boldsymbol{\xi} \to \infty$ стремится к значению S_1, равную скорости распространения объёмных упругих волн в пьезоэлектрическом слое. Далее, таким же образом при некотором определённом значения $\boldsymbol{\xi}_3$, возникает третья мода волны Лява, скорость распространения которой $\mathrm{V} = \mathrm{V}_3(\boldsymbol{\xi})$ при увеличении $\boldsymbol{\xi}$ убывает от значения V_3 и в переделе при $\boldsymbol{\xi} \to \infty$ стремится к значению S_1, равную скорости распространения объёмных упругих волн в пьезоэлектрическом слое. Далее, таким же образом возникают остальные более высокие моды $\mathrm{V}_4\left(\xi\right)$, $\mathrm{V}_5(\xi)$ и т.д. волны Лява, числа которых при $\boldsymbol{\xi} \to \infty$ стремятся к бесконечности, и которые распространяются с убывающими скоростями. В переделе при $\boldsymbol{\xi} \to \infty$ все моды сливаясь составляют одну объёмно-поверхностную волну со скоростью распространения S_1, то есть скоростью, равную скорости распространения объёмных упругих волн в пьезоэлектрическом слое.

Следует подчеркнуть что при $r \to 0$ скорость распространения электроупругой волны Лява стремится к значению S_2, равному скорости распространения объёмных упругих волн в проводящем слое, а при значениях $r \gg 1$ скорость распространения электроупругая волн Лява стремится к значению S_1, равному скорости распространения объёмных упругих волн в пьезоэлектрическом слое.

б) **Численное исследование дисперсионного уравнения, когда пьезоэлектрический слой изготовлен из материала ЦТС-4, а проводящий слой – из материала Au:**

Численное исследование дисперсионного уравнения, когда пьезоэлектрический слой изготовлен из материала ЦТС-4, а проводящий слой – из материала Au, при условии $S_1 > S_2$ электроупругие волны Лява не существуют.

в) **Численное исследование дисперсионного уравнения, когда пьезоэлектрический слой изготовлен из материала ЦТС-4, а проводящий слой – из материала Pt:**

Численное исследование дисперсионного уравнения, когда пьезоэлектрический слой изготовлен из материала ЦТС-4, а проводящий слой из материала Pt, при условии $S_1 > S_2$ электроупругие волны Лява не существуют.

4. Заключение.

Исследуя дисперсионное уравнение задачи, приходим к следующему заключению:

1) В слоистой системе из пьезоэлектрического слоя изготовленный из материала ЦТС-4, и проводящего слой из материала Al, при условии $S_1 < S_2$ электроупругие волны Лява существуют и имеют следующую структуру: число волн бесконечно и скорости распространения волн зависят от соотношений толщин r слоёв и величины параметра $\boldsymbol{\xi}$.

2) В слоистых системах из пьезоэлектрического слоя, изготовленных из материала ЦТС-4, и проводящего слоя из Au или Pt, при условии $S_1 > S_2$ электроупругие волны Лява не существуют.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 344 с.
2. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н. Электромагнитоупругие волны. Ереван: Изд. ЕУ, 2006. 492 с.
3. Jones J.P.Wave propagation a two-layered medium. //Journal of Applied Mechanics, 1964, June, pp. 213-222.
4. Даноян З.Н., Даноян Н.З., Манукян Г.А. Поверхностные электроупругие волны Лява для двух слоёв на пьезоэлектрической подложке. //Изв. НАН Армении. Механика. 2001. Т.54. №4. С.22-25.
5. Погосян Н.Д., Саноян Ю.Г., Терзян С.А. Распространение сдвиговых волн в двухслойной среде в антиплоской постановке. //Изв. НАН Армении. Механика. 2013. Т.66. №4. С.12-16.
6. Curtis R.G., Redwood M. Transvers surface wave on a piezoelectric material carring a metal layer of finite thicknees. //J.Appl. fys., 1973, Vol.44, №5, pp.2002-2007.
7. Даноян З.Н., Манукян Г.А., Берберян А.Х., Мкртчян С.А. Распространение сдвиговых электроупругих волн в двухслойной среде с пьезоэлектрическим и проводящим слоями. Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Ереван: Изд. «Чартарагет», 2014. 212 с.

Сведения об авторе:

Мкртчян Сурик Акопович – Аспирант Института механики НАН РА.
Адрес: РА,0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2. **E-mail:** sur_mkrtchyan@mail.ru

АНАЛИЗ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ И НАПРЯЖЕНИЙ В УПРУГОМ ТЕЛЕ С КРИВОЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю.

Расчёт температурных напряжений при неустановившемся тепловом режиме представляет известные трудности из-за меняющихся во времени основных расчётных параметров. На основе одномерной расчётной схемы проанализировано влияние основных параметров нагружения, свойств материала и средней кривизны поверхности на распределения температуры и напряжений.

1. Для многих теплотехнических конструкций характерны участки поверхности двоякой кривизны, в частности, плоские, цилиндрические, сферические. Расчёт температурного и напряжённо-деформированного состояний элементов конструкций с криволинейной границей в полном объёме представляет собой довольно сложную задачу. Наибольшие градиенты температуры и напряжений возникают в поверхностном слое конструкции в первые моменты времени после начала нагружения. В таком случае поведение конструкции необходимо исследовать с учётом динамических эффектов, как при определении напряжений, так и температуры [1-4].

2. Рассмотрим упругое изотропное и однородное тело, ограниченное криволинейной поверхностью, с заданными внешними нагрузками. Для получения уравнений термоупругости и теплопроводности положим, что термомеханическая нагрузка действует по нормали к граничной поверхности, отличной от нуля является только деформация в направлении этой нормали, а температура и напряжения зависят только от времени и координаты x_1, направленной по нормали в глубь тела.

В криволинейной ортогональной системе координат закон сохранения количества движения в проекции на ось $O\mathrm{x}_1$ может быть записан в виде [5, 6]

$$\frac{1}{H_1}\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}-\frac{\sigma_{22}}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial x_1}-\frac{\sigma_{33}}{H_1H_3}\frac{\partial H_3}{\partial x_1}=\rho\ddot{u}_1 \qquad (2.1)$$

а уравнение теплопроводности – в виде

$$\rho c_\varepsilon\dot{T}+\left(3\lambda+2\mu\right)\alpha^{(T)}T_0\frac{1}{H_1}\frac{\partial\dot{u}_1}{\partial x_1}=-\frac{1}{H_1}\left(\frac{\partial q_1}{\partial x_1}+\frac{q_1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial x_1}+\frac{q_1}{H_3}\frac{\partial H_3}{\partial x_1}\right). \qquad (2.2)$$

Здесь σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, $i, j=1,2,3$, ρ – плотность, c_ε – удельная массовая теплоёмкость при постоянной деформации, T – абсолютная температура, $\alpha^{(T)}$ – температурный коэффициент линейного расширения, λ, μ – константы Ламе, q_1 – проекция вектора плотности теплового потока на ось $O\mathrm{x}_1$, u_1 – проекция вектора перемещения на ось $O\mathrm{x}_1$; H_1, H_2, H_3 – коэффициенты Ламе, причем $H_1=1$, $H_2=H_2^0\left(1+x_1/R_2\right)$, $H_3=H_3^0\left(1+x_1/R_3\right)$; H_2^0, H_3^0 – значения коэффициентов Ламе для нагружаемой поверхности, R_2, R_3 – главные радиусы кривизны этой поверхности. Подставляя соответствующие выражения для H_2, H_3 в (2.1) и (2.2) и пренебрегая после дифференцирования величинами $\left|x_1/R_2\right|$ и $\left|x_1/R_3\right|$, малыми по сравнению с единицей, эти уравнения можно привести к виду:

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}-\frac{\sigma_{22}}{R_2}-\frac{\sigma_{33}}{R_3}=\rho\ddot{u}_1, \qquad (2.3)$$

$$\rho c_\varepsilon \dot{T} + (3\lambda + 2\mu)\alpha^{(T)} T_0 \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial x_1} = -\frac{\partial q_1}{\partial x_1} - \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) q_1 . \quad (2.4)$$

Нормальные напряжения σ_{11}, σ_{22}, σ_{33} и проекцию вектора плотности теплового потока q_1, с учётом $H_1 = 1$ и наличием деформации только в направлении оси $O\mathrm{x}_1$, определим соотношениями:

$$\sigma_{11} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - (3\lambda + 2\mu)\alpha^{(T)}(T - T_0), \quad (2.5)$$

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = \lambda \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - (3\lambda + 2\mu)\alpha^{(T)}(T - T_0), \quad (2.6)$$

$$\tau_q \dot{q}_1 + q_1 = -\lambda^{(T)} \partial T / \partial x_1 . \quad (2.7)$$

Здесь $\lambda^{(T)}$ – коэффициент теплопроводности среды, τ_q – время релаксации теплового потока.

При помощи (2.5) и (2.6) уравнение (2.3) можно переписать, используя только нормальное напряжение σ_{11}:

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} - 2\kappa\lambda \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + 4\kappa\mu(3\lambda + 2\mu)\alpha^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_1} = \rho\ddot{\sigma}_{11} + \rho(3\lambda + 2\mu)\alpha^{(T)}\ddot{T}, \quad (2.8)$$

а объединяя уравнения (2.4), (2.5), (2.7), можно переписать уравнение теплопроводности:

$$\left(\rho c_\varepsilon + \frac{(3\lambda + 2\mu)^2}{\lambda + 2\mu}\left(\alpha^{(T)}\right)^2 T_0\right)\left(\tau_q \ddot{T} + \dot{T}\right) =$$

$$= \lambda^{(T)} \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + 2\kappa\lambda^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_1} - \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu}\alpha^{(T)} T_0 \left(\tau_q \ddot{\sigma}_{11} + \dot{\sigma}_{11}\right), \quad (2.9)$$

где $\kappa = \left(1/R_2 + 1/R_3\right)/2$ – средняя кривизна граничной поверхности.

Краевые условия для уравнений (2.8), (2.9) запишем следующим образом:

$$t = 0 \quad T(x_1, 0) = T_0, \quad \dot{T}(x_1, 0) = 0, \quad \sigma_{11}(x_1, 0) = 0, \quad \dot{\sigma}_{11}(x_1, 0) = 0;$$

$$x_1 = 0 \quad -\lambda^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_1} = Q_0(t) + \tau_q \dot{Q}_0(t), \; Q_0(t) = AMt^m \exp(-mt/t_0), \; m \ge 1, \quad t_0 > 0; \quad \sigma_{11}(0, t) = 0$$

$$x_1 \to \infty, \quad T(x_1, t) \to T_0, \quad \sigma_{11}(x_1, t) \to 0 . \quad (2.10)$$

Если ввести безразмерные параметры и переменные

$$z = x_1/\sqrt{at_0}, \quad \bar{t} = t/t_0, \quad \theta = (T - T_0)/T^*, \quad D_q^2 = \tau_q/t_0, \quad T^* = At_0^m \sqrt{at_0}/\lambda^{(T)}, \quad a = \lambda^{(T)}/(\rho c),$$

$$q_0(\bar{t}) = M\bar{t}^m \exp(-m\bar{t}), \; M = m^m/(m-1)!, \quad \bar{\kappa} = \kappa\sqrt{at_0}, \quad \sigma = \sigma_{11}/\left((3\lambda + 2\mu)\alpha^{(T)} T^*\right),$$

$$R^2 = a\rho/(\lambda + 2\mu)/t_0, \quad \delta = \left((3\lambda + 2\mu)\alpha^{(T)}\right)^2 T_0 \Big/ \left(\rho c_\varepsilon (\lambda + 2\mu)\right),$$

то уравнения (2.8), (2.9) и краевые условия (2.10) можно представить в безразмерном виде:

$$R^2\left(\ddot{\sigma} + \ddot{\theta}\right) = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} - 2\bar{\kappa}\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\frac{\partial \sigma}{\partial z} + 4\bar{\kappa}\frac{\mu}{\lambda + 2\mu}\frac{\partial \theta}{\partial z}, \quad (2.11)$$

$$\left(1+\delta\right)\left(D_q^2\ddot{\theta}+\dot{\theta}\right)+\delta\left(D_q^2\ddot{\sigma}+\dot{\sigma}\right)=\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}+2\overline{\kappa}\frac{\partial\theta}{\partial z}, \qquad (2.12)$$

$$\overline{t}=0 \quad \theta\left(z,0\right)=0, \quad \dot{\theta}\left(z,0\right)=0, \quad \sigma\left(z,0\right)=0, \quad \dot{\sigma}\left(z,0\right)=0;$$

$$z=0 \quad -\frac{\partial\theta}{\partial z}=q_0\left(t\right)+D_q^2\dot{q}_0\left(t\right), \quad q_0\left(t\right)=M\overline{t}^{\,m}\exp\left(-m\overline{t}\right), \quad m\geq 1; \quad \sigma\left(0,\overline{t}\right)=0,$$

$$z\to\infty \quad \theta\left(z,\overline{t}\right)\to 0, \quad \sigma\left(z,\overline{t}\right)\to 0. \qquad (2.13)$$

Параметр связанности δ характеризует изменении температуры вследствие деформирования, для металлов он лежит в пределах 0,01…0,03, для полимерных материалов его значения могут быть значительно выше. В данной работе положим $\delta=0$.

Решение уравнения (2.12) с краевыми условиями (2.13), полученное с помощью преобразования Лапласа [7] по переменной $\overline{t}$, при $D_q^2=0$ имеет вид:

$$\theta\left(z,\overline{t}\right)=\exp\left(-\overline{\kappa}z\right)\int_0^{\overline{t}}\exp\left(-\overline{\kappa}^2\tau\right)q_0\left(\overline{t}-\tau\right)\times$$

$$\times\left[\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}\exp\left(-\frac{z^2}{4\tau}\right)-\overline{\kappa}\exp\left(\overline{\kappa}z+\overline{\kappa}^2\tau\right)\mathrm{Erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{\tau}}+\overline{\kappa}\sqrt{\tau}\right)\right]d\tau; \qquad (2.14)$$

Решение уравнения (2.11) с соответствующими краевыми условиями (2.13), также полученное с помощью преобразования Лапласа по переменной $\overline{t}$, при малых значениях времени $\overline{t}$ при $D_q^2=0$ имеет вид:

$$\sigma\left(z,\overline{t}\right)=\exp\left(\overline{\kappa}\beta_1 z\right)\left[\beta_2\int_0^{\overline{t}}q_0\left(t-u\right)\int_0^u F_1\left(z,\tau\right)\left(\frac{1}{R^2}+\frac{u-\tau}{R^4}\right)d\tau du+\right.$$

$$+\int_0^{\overline{t}}\ddot{q}_0\left(t-u\right)\int_0^u F_1\left(z,\tau\right)\left(\frac{2\sqrt{u-\tau}}{\sqrt{\pi}}+\overline{\kappa}\left(u-\tau\right)\right)d\tau du-$$

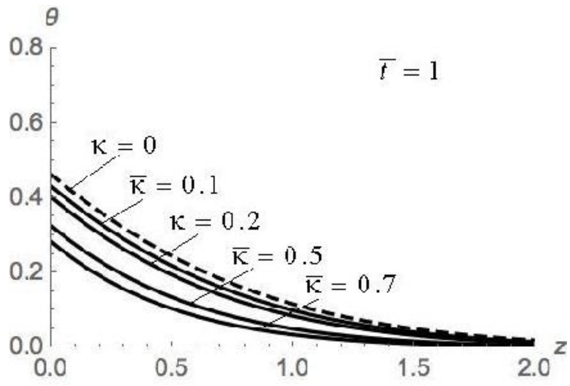
$$-\frac{\beta_2}{R^2}\exp\left(-z(\overline{\kappa}+\beta_1)\right)\int_0^{\overline{t}}q_0\left(t-u\right)\int_0^u\exp\left(-\overline{\kappa}^2\tau-\frac{z^2}{4\tau}\right)\left(u-\tau\right)d\tau du-$$

$$-\int_0^{\overline{t}}\ddot{q}_0\left(t-u\right)\int_0^u F_2\left(z,\tau\right)\left(u-\tau\right)d\tau du, \qquad (2.15)$$

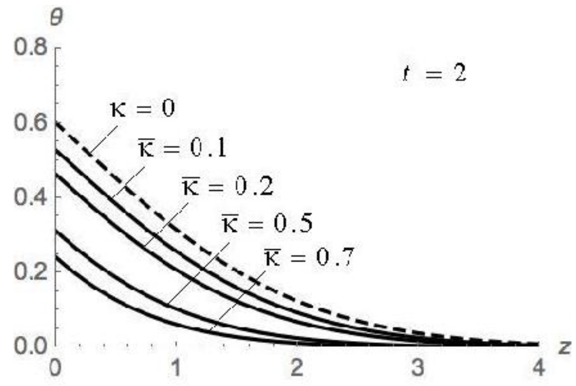
где $\beta_1=\lambda/(\lambda+2\mu)$, $\beta_2=4\overline{\kappa}\mu/(\lambda+2\mu)$, $F_1\left(z,u\right)=J_0\left(\frac{\beta_1}{R}\sqrt{u^2-z^2D_q^2}\right)H\left(u-zR\right)$,

$F_2\left(z,u\right)=\exp\left(-\overline{\kappa}^2u-\frac{z^2}{4u}\right)\frac{1}{\sqrt{\pi u}}-\overline{\kappa}\exp\left(z\overline{\kappa}\right)\mathrm{Erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{u}}+\overline{\kappa}\sqrt{u}\right)$; $H\left(t\right)$ – функция Хевисайда.

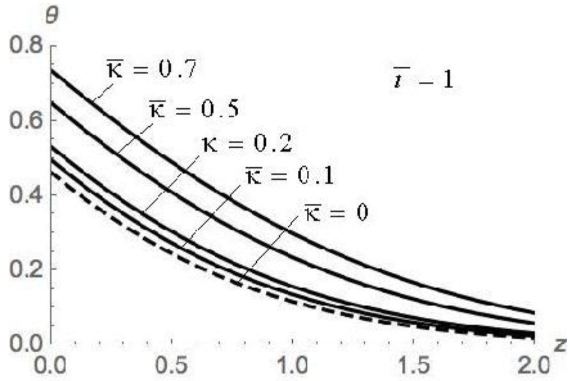
На рис.1 представлены распределения безразмерной температуры θ по координате z в различные моменты времени $\overline{t}$ для $m=2$. Пунктирная линия соответствует случаю $\overline{\kappa}=0$, сплошная – $\overline{\kappa}\neq 0$. Видно, что при наличии положительной средней кривизны поверхности решение параболического уравнения теплопроводности при $\overline{\kappa}=0$ даёт завышенные результаты.



а)



б)



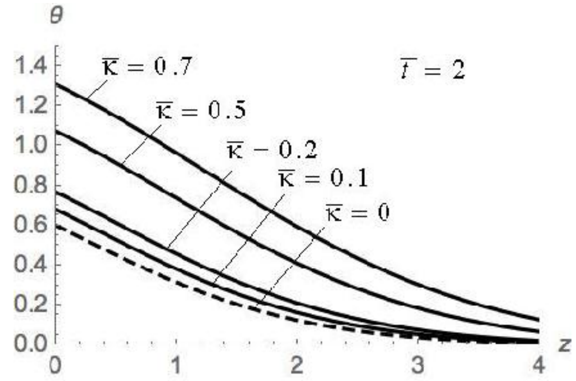
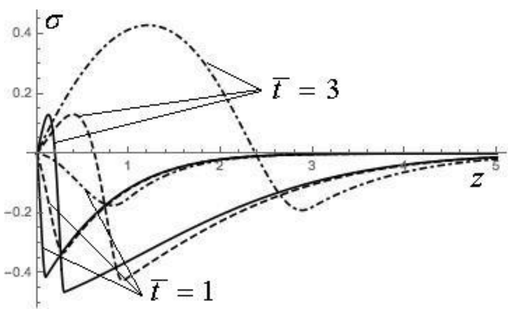
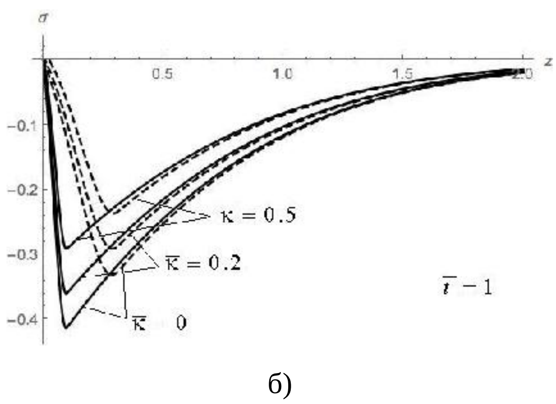


Рис.1. Распределение температуры по глубине полупространства при $D_q^2 = 0$

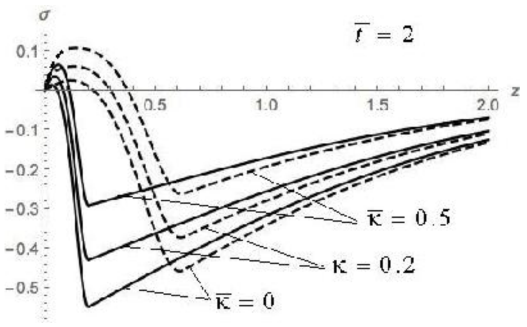
На рис.2а) представлены распределения напряжений при $\overline{\kappa} = 0$ для двух моментов времени: сплошная линия – $R^2 = 100$, пунктирная – $R^2 = 10$, штрихпунктирная – $R^2 = 1$. Так как параметр R^2 обратно пропорционален скорости звука в среде, видно, что с уменьшением значения R^2 волна напряжений быстрее распространяется в среде. На рис.2 б), в) представлены распределения напряжений в зависимости от средней кривизны поверхности для двух моментов времени: сплошная линия – $R^2 = 100$, пунктирная – $R^2 = 10$.



а)



б)



в)

Рис.2. Распределение напряжений по глубине полупространства при $D_q^2 = 0$

Работа выполнена по гранту МК-6573.2015.8 программы Президента РФ государственной поддержки молодых кандидатов наук, а также в рамках проекта 1712 в сфере научной деятельности в части государственного задания № 2014/104 Минобрнауки РФ и государственного задания по проекту № 1.2640.2014.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зарубин В.С., Станкевич И.В. Расчет теплонапряженных конструкций. М.: Машиностроение, 2005.
2. Зарубин В.С. Расчет и оптимизация термоизоляции. М.: Энергоатомиздат, 1991.
3. Кувыркин Г.Н. Термомеханика деформируемого твердого тела при высокоинтенсивном нагружении. М.: Изд. МГТУ, 1993.
4. Грибанов В.Ф., Паничкин Н.Г. Связные и динамические задачи термоупругости, 1984.
5. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970.
6. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М.: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008.
7. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т.1. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. М.: Наука, 1969.

Сведения об авторах:

Зарубин Владимир Степанович – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Прикладная математика» Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана, (499) 263-63-26
E-mail: Zarubin@bmstu.ru

Кувыркин Георгий Николаевич – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Прикладная математика» Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана, (499) 263-63-26
E-mail: fn2@bmstu.ru

Савельева Инга Юрьевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Прикладная математика» Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана, (499) 263-63-26
E-mail: Inga.Savelyeva@gmail.com

РАЗРАБОТКА МЕТОДИКИ РАСЧЁТА ГЛАВНОГО ВЕКТОРА И ГЛАВНОГО МОМЕНТА СВЕТОВОГО ДАВЛЕНИЯ НА КОНСТРУКЦИИ СЛОЖНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

Зимин В.Н., Неровный Н.А.

В работе рассмотрен вопрос определения светового давления на космические конструкции сложной геометрической формы. Для элемента поверхности конструкции записано условие, по которому вклад в световое давление учитывается только с внешней стороны. Данное условие представлено в виде рядов по полиномам Чебышева первого рода. Представление в виде рядов по полинмам Чебышева позволяет перейти к рядам по тензорам возрастающего ранга для определения главного вектора и главного момента светового давления. Получены выражения для приближённого метода для аппроксимации светового давления на космические конструкции сложной геометрии с учётом самозатенения и переотражения. Полученные выражения могут быть использованы для баллистических расчётов солнечных парусов, других космических объектов, на движение которых существенное действие оказывает световое давление. Также приведённые результаты могут быть использованы для анализа динамики вращения крупногабаритных космических конструкций вокруг центра масс под действием светового давления.

1. Рассмотрим выражение для элементарной силы светового давления на элементарную площадку с учётом того, что свет на неё оказывает воздействие только с одной стороны. Для этого в исходном известном уравнении [1] введём замену скалярного произведения единичного вектора местной нормали $\hat{\boldsymbol{n}}$ на единичный вектор направления от Солнца $\hat{\boldsymbol{s}}$ следующим выражением (аналогично [2]):

$$\frac{\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{s}}-|\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{s}}|}{2}.$$

Разложим функцию модуля в ряд по полиномам Чебышева первого рода:

$$|\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{s}}| = \frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n T_{2n}(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{s}})}{-1+4n^2} \approx \sum_{m=0}^{N_{max}} B_m(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{s}})^{2m}, \tag{1.1}$$

где

$$B_m = -\frac{(-1)^m 4^{m+1}}{\pi(2m)!}\sum_{n=m}^{\left\lfloor\frac{N_{max}-1}{2}\right\rfloor}\frac{n(n+m-1)!}{(-1+4n^2)(n-m)!}, \tag{1.2}$$

где $\lfloor x\rfloor$ – функция уровня, равная наибольшему целому числу, меньшему x. Ряд для B_m расходится при стремлении N_{max} к бесконечности, однако для любого конечного числа членов разложения ряда при окончательном суммировании обеспечивается сходимость аппроксимированного значения $|\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{s}}|$ к функции модуля на интервале [-1,1].

Получим следующее выражение для элементарной силы светового давления:

$$d\boldsymbol{F} = \frac{P(R)}{2}(-2a_0\hat{\boldsymbol{n}} - a_1(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{s}})\hat{\boldsymbol{s}} + a_2(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{s}} - |\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{s}}|)\hat{\boldsymbol{n}} - a_3(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{s}} - |\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{s}}|)^2\hat{\boldsymbol{n}})dA, \tag{1.3}$$

где $P(R)$ – сила светового давления на поглощающую пластину на расстоянии R от Солнца; a_0, a_1, a_2, a_3 – некоторые обобщённые оптические постоянные [1].

2. Подставляя в выражение для элементарной силы светового давления (1.3) ряд для $|\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{s}}|$ (1.1), группируя слагаемые, проводя операцию замену скалярного произведения на совокупность скалярных произведений полиад и направляющего вектора светового излучения, как это было сделано в работах [3,4], интегрируя по всей поверхности, получим следующие выражения для главного вектора сил светового давления на тело сложной геометрической формы:

$$\boldsymbol{F} = P(R)\left(I^0\hat{\boldsymbol{s}} + I^1 + \sum_{n=2}^{N_{max}} I^n\cdot\underbrace{\hat{\boldsymbol{s}}\cdot\ldots\cdot\hat{\boldsymbol{s}}}_{n-1}\right). \tag{2.1}$$

Для выражения главного момента получим:

$$\boldsymbol{M} = P(R)\left(K^{2,0}\cdot\hat{\boldsymbol{s}} + K^1 + \sum_{n=2}^{N_{max}} K^n\cdot\underbrace{\hat{\boldsymbol{s}}\cdot\ldots\cdot\hat{\boldsymbol{s}}}_{n-1}\right). \tag{2.2}$$

В выражениях (2.1) и (2.2) используются следующие обозначения:

$I^n = \int J^n dA$; $K^n = \int L^n dA$; $J^0 = \frac{a_1}{2}B_0$; $J^1 = -(a_0 + a_2B_0)\hat{\boldsymbol{n}}$; $J^2 = \left(\frac{1}{2}a_2 + a_3B_0\right)J_A^2$;

$J^3 = \dfrac{1}{2}(-a_1J_B^3 - 2a_3J_A^3 - B_1a_2J_A^3)$;

$$J^n = \frac{1}{2}\left(-B_{\frac{n-1}{2}}\frac{1-(-1)^n}{2}a_2J_A^n + B_{\frac{n-2}{2}}\frac{1+(-1)^n}{2}(a_1J_B^n + 2a_3J_A^n)\right), n > 3;$$

$$J_A^n = \underbrace{[\hat{\boldsymbol{n}}, \dots, \hat{\boldsymbol{n}}]}_{n};\ J_B^n = \left[\underbrace{[\hat{\boldsymbol{n}}, \dots, \hat{\boldsymbol{n}}]}_{n-2}, E^2\right];\ L^{2,0} = \frac{a_1}{2}B_0R^2; L^1 = -(a_0 + a_2B_0)\left(R^2 \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\right);$$

$$L^2 = \left(\frac{1}{2}a_2 + a_3B_0\right)L_A^2; L^3 = \frac{1}{2}(-a_1L_B^3 - 2a_3L_A^3 - B_1a_2L_A^3);$$

$$L^n = \frac{1}{2}\left(-B_{\frac{n-1}{2}}\frac{1-(-1)^n}{2}a_2L_A^n + B_{\frac{n-2}{2}}\frac{1+(-1)^n}{2}(a_1L_B^n + 2a_3L_A^n)\right), n > 3;$$

$$L_A^n = \left[\underbrace{[\hat{\boldsymbol{n}}, \dots, \hat{\boldsymbol{n}}]}_{n-1}, \left(R^2 \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\right)\right]; L_B^n = \left[\underbrace{[\hat{\boldsymbol{n}}, \dots, \hat{\boldsymbol{n}}]}_{n-2}, R^2\right],$$

где $[a, b]$ – диадное произведение двух и более векторов; E^2 – единичный тензор второго ранга; R^2 – тензор второго ранга, получаемый из условия $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a} = R^2 \cdot \boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{a}$ – некоторый произвольный вектор, $\boldsymbol{r}$ – вектор, задающий положение элементарной площадки dA.

Полученные выражения позволяют рассчитать главный вектор и главный момент светового давления на оптически выпуклые тела. Однако подобный подход можно распространить на тела сложной геометрической формы, вводя дополнительную аппроксимацию вектора $\hat{\boldsymbol{s}}$, например, в следующем виде:

$\boldsymbol{s} = D^2 \cdot \hat{\boldsymbol{s}}$,

где D^2 – некоторый тензор второго ранга, аппроксимирующий двунаправленную функцию рассеяния [5] в конструкции, вычисляемую один раз для каждой элементарной площадки.

ЛИТЕРАТУРА

1. McInnes C.R. Solar Sailing: Technology, Dynamics and Mission Applications. Springer Science & Business Media, 2004. 332 p.
2. McMahon J.W., Scheeres D.J. New Solar Radiation Pressure Force Model for Navigation // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2010. Vol.33, №5. P.1418-1428.
3. Rios-Reyes L., Scheeres D.J. Applications of the generalized model for solar sails // AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit. 2004.
4. Зимин В.Н., Неровный Н.А. К расчёту главного вектора и главного момента сил светового давления на солнечный парус // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер.``Машиностроение’’. 2016. Т.106, №1. С.17-28.
5. Kristensen A.W., Akenine-Möller T., Jensen H.W. Precomputed Local Radiance Transfer for Real-time Lighting Design // ACM Transactions on Graphics (TOG). New York, NY, USA: ACM, 2005. Vol.24. P.1208-1215.

Сведения об авторах:

Зимин Владимир Николаевич – первый проректор - проректор по учебной работе, доктор технических наук, профессор кафедры "Космические аппараты и ракеты-носители", Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, факультет "Специальное машиностроение"

E-mail: zimin@bmstu.ru

Неровный Николай Алексеевич - аспирант кафедры "Космические аппараты и ракеты-носители", Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, факультет "Специальное машиностроение", +7(963)677-78-40

E-mail: nick.nerovny@bmstu.ru

ЗАДАЧА МНОЖЕСТВЕННОГО КОНТАКТА РЕГУЛЯРНОЙ СИСТЕМЫ ШТАМПОВ И ПОВЕРХНОСТНО НЕОДНОРОДНОГО ПОКРЫТИЯ

Казаков К.Е., Курдина С.П.

В работе исследуются плоские задачи контактного взаимодействия поверхностно неоднородных стареющих вязкоупругих оснований с покрытиями и регулярной конечной системы жёстких штампов. Учитываются возрастные и структурные неоднородности покрытий, связанные с процессами их изготовления. Такие неоднородности могут описываться как быстро осциллирующими, так и разрывными функциями. Рассмотрены различные варианты возможной постановки задачи. Получена система разрешающих интегральных уравнений, которая приведена к одному интегральному уравнению с тензорным ядром в функциональном векторном пространстве, для решения которого использован проекционно-спектральный метод. Решение задач получено в аналитическом виде, причём, в выражениях для контактных напряжений функция неоднородности поверхности основания выделена в явном виде. Это позволяет проводить расчёты для покрытий, неоднородности которых описываются быстро осциллирующими и даже разрывными функциями. Также получены выражения для определения осадок и углов наклона штампов.

Вязкоупругий однородный стареющий слой толщины H с тонким покрытием толщиной h лежит на подстилающем недеформируемом основании. Покрытие обладает поверхностной неоднородностью, то есть его жёсткость меняется от точки к точке поверхности. В некоторый момент времени τ_0 в поверхность такого слоя начинает вдавливаться регулярная система одинаковых плоских жёстких штампов силами $P_i(t)$ с эксцентриситетами приложения $e_i(t)$ ($i=\overline{1,n}$, n – количество штампов). Области контакта b_i-a_i со временем не меняются и они значительно больше толщины покрытия. Здесь a_i – левая координата штампа, b_i – его правая координата. Предполагается также, что жёсткость покрытия меньше жёсткости нижнего слоя, или же они одного порядка.

Заменив штампы некоторыми нормальными распределёнными нагрузками $q_i(x,t)$, действующими на тех же участках, где и штампы, и приравняв вертикальные перемещения [1], вызванные этими нагрузками, перемещениям штампов, получим ($i=\overline{1,n}$, $x\in[a_i,b_i]$)

$$\frac{q_i(x,t)h}{R(x)}+\frac{2(1-\nu_2^2)}{H}\sum_{j=1}^{n}(\mathbf{I}-\mathbf{V})\mathbf{F}_j\frac{q_j(x,t)}{E_2(t-\tau_2)}=\delta_i(t)+x\alpha_i(x-\eta_i), \tag{1}$$

где $R(x)$ – функция, описывающая жёсткость покрытия и зависящая от условий его соединения с нижним слоем, причем, в случае идеального контакта $R(x)=\dfrac{E_1(x)[1-\nu_1(x)]}{[1+\nu_1(x)][1-2\nu_1(x)]}$, а в случае гладкого $R(x)=\dfrac{E_1(x)}{1-\nu_1^2(x)}$, $\nu_1(x)$, $E_1(x)$ — коэффициент Пуассона и модуль Юнга покрытия, $\neg_2$, $E_2(t-\tau_2)$ – коэффициент Пуассона и модуль упругомгновенной деформации нижнего слоя; $\delta_i(t)$ – осадка i-го штампа, $\alpha_i(t)$ – угол его поворота; $\mathbf{I}$ – тождественный оператор, $\mathbf{V}$ – интегральный оператор Вольтерра с ядром ползучести при растяжении $K(t,\tau)$, $\mathbf{F}_i$ –интегральные операторы Фредгольма с ядром осесимметричной контактной задачи $k_{\rm pl}[(x-\xi)/H]$ [2], зависящие от условий соединения нижнего слоя и недеформируемого основания, $\eta_i=\frac{1}{2}(a_i+b_i)$ – срединная точка i-го штампа.

Условия равновесия штампов на основании описываются уравнениями:

$$\int_{a_i}^{b_i}q_i(x,t)\,dx=P_i(t),\quad \int_{a_i}^{b_i}xq_i(x,t)\,dx=e_i(t)P_i(t),\quad i=\overline{1,n}. \tag{2}$$

Сделав в (1) и (2) замену переменных по формулам

$$x^*=\frac{2(x-\eta_i)}{b},\quad \xi^*=\frac{2(\xi-\eta_j)}{b},\quad t^*=\frac{t}{\tau_0},\quad \tau_2^*=\frac{\tau_2}{\tau_0},\quad \lambda=\frac{2H}{b},\quad \eta_i=\frac{a_i+b_i}{2},$$

$$\delta^{i*}(t^*)=\frac{2\delta_i(t)}{b},\quad \alpha^{i*}(t^*)=\alpha_i(t),\quad c^*(t^*)=\frac{E_2(t-\tau_2)}{E_1},$$

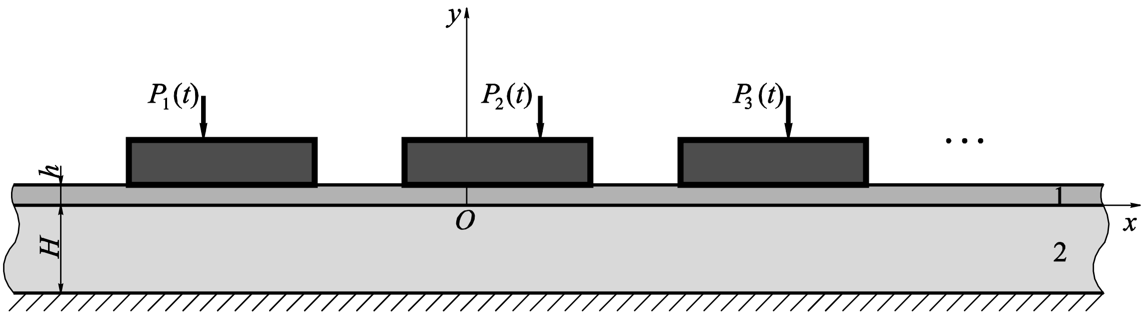
$$m^*(x^*)\equiv m^i(x^*)=\frac{E_0}{R(x)(1-\nu_2^2)}\frac{h}{b},\quad q^{i*}(x^*,t^*)=\frac{2(1-\nu_2^2)q_i(x,t)}{E_2(t-\tau_2)},$$

$$P^{i*}(t^*)=\frac{4P_i(t)(1-\nu_2^2)}{E_2(t-\tau_2)b},\quad M^{i*}(t^*)=\frac{8e_i(t)P_i(t)(1-\nu_2^2)}{E_2(t-\tau_2)b^2},$$

$$\mathbf{F}^{ij*}f(x^*)=\int_{-1}^{1}k^{ij}(x^*,\xi^*)f(\xi^*)\,d\xi^*,\quad k^{ij}(x^*,\xi^*)=\frac{1}{\pi}k_{\mathrm{pl}}\left(\frac{x-\xi}{H}\right),$$

$$\mathbf{V}^*f(t^*)=\int_{1}^{t^*}K^*(t^*,\tau^*)f(\tau^*)\,d\tau^*,\quad K^*(t^*,\tau^*)=K(t-\tau_2,\tau-\tau_2)\tau_0$$

и опустив в окончательных формулах звездочки, получим систему интегральных уравнений ($x\in[-1,1]$)



$$c(t)m(x)q^i(x,t)+(\mathbf{I}-\mathbf{V})\sum_{j=1}^{n}\mathbf{F}^{ij}q^j(x,t)=\delta^i(t)+\alpha^i(t)x, \tag{3}$$

$$\int_{-1}^{1}q^i(\xi,t)\,d\xi=P^i(t),\quad \int_{-1}^{1}\xi q^i(\xi,t)\,d\xi=M^i(t),\quad i=\overline{1,n}. \tag{4}$$

Легко видеть, что на каждом штампе можно задать один из четырёх типов условий: осадку и угол поворота, вдавливающую силу и эксцентриситет её приложения, осадку и момент приложения нагрузки, вдавливающую силу и угол поворота штампа. Разумеется, на каждом штампе возможен свой набор условий. Очевидно, что тогда существует всего 15 возможных вариантов постановки задачи. В данной работе рассмотрим лишь решение для случая, когда на всех штампах заданы силы и эксцентриситеты их приложения (квазистатические условия). Решения для остальных вариантов строятся аналогично.

Приведём систему уравнений (1) с дополнительными условиями (2) к одному операторному уравнению с дополнительным векторным условием. Примем, что

$$\mathbf{q}(x,t)=q^i(x,t)\mathbf{i}^i,\quad \boldsymbol{\delta}(t)=\delta^i(t)\mathbf{i}^i\quad ,\boldsymbol{\alpha}(t)=\alpha^i(t)\mathbf{i}^i,\quad \mathbf{P}(t)=P^i(t)\mathbf{i}^i,$$

$$\mathbf{M}(t)=M^i(t)\mathbf{i}^i,\quad \mathbf{k}(x,\xi)=k^{ij}(x,\xi)\mathbf{i}^i\mathbf{i}^j,\quad \mathbf{Gf}(x)=\int_{-1}^{1}\mathbf{k}(x,\xi)\cdot\mathbf{f}(\xi)d\xi.$$

Здесь и далее по верхним повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до n, если левая часть формулы не зависит от этого индекса. Тогда уравнения (3), (4) можно записать в виде:

$$c(t)m(x)\mathbf{q}(x,t)+(\mathbf{I}-\mathbf{V})\mathbf{Gq}(x,t)=\boldsymbol{\delta}(t)+\boldsymbol{\alpha}(t)x,\quad x\in[-1,1], \tag{5}$$

$$\int_{-1}^{1}\mathbf{q}(\xi,t)\,d\xi=\mathbf{P}(t),\quad \int_{-1}^{1}\xi\mathbf{q}(\xi,t)\,d\xi=\mathbf{M}(t). \tag{6}$$

Введя (5), (6) обозначения

$$\mathbf{Q}(x,t)=\sqrt{m(x)}\mathbf{q}(x,t),\quad \mathbf{K}(x,t)=\frac{\mathbf{k}(x,\xi)}{\sqrt{m(x)m(\xi)}},\quad \mathbf{Ff}(x)=\int_{-1}^{1}\mathbf{K}(x,\xi)\cdot\mathbf{f}(\xi)d\xi,$$

получим ($x\in[-1,1]$)

$$c(t)\mathbf{Q}(x,t)+(\mathbf{I}-\mathbf{V})\mathbf{FQ}(x,t)=\frac{\boldsymbol{\delta}(t)+\boldsymbol{\alpha}(t)x}{\sqrt{m(x)}}=\boldsymbol{\Delta}(x,t), \tag{7}$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{\mathbf{q}(\xi,t)}{\sqrt{m(\xi)}}d\xi=\mathbf{P}(t),\quad \int_{-1}^{1}\frac{\xi\mathbf{q}(\xi,t)}{\sqrt{m(\xi)}}d\xi=\mathbf{M}(t). \tag{8}$$

Решение полученного разрешающего операторного уравнения (7) с векторным дополнительным условием (8) строится в классе вектор–функций из гильбертова пространства $L_2([-1,1],V)$. Так как операторное уравнение и дополнительное условие содержат функции $\sqrt{m(x)}$, то при построении решения следует учитывать, что эта функция может быть быстроосциллирующей и даже разрывной. Поэтому в структуру функционального базиса должны входить функции $\sqrt{m(x)}$. Система ортонормированных базисных вектор–функций, удовлетворяющая вышеописанным условиям, сможет быть построена по следующему правилу:

$$\mathbf{p}_k^i(x)=\frac{\mathbf{p}_k^{i*}(x)}{\sqrt{m(x)}},\quad \mathbf{p}_k^{i*}(x)=p_k^*(x)\mathbf{i}^i,\quad d_{-1}=1,\quad J_k=\int_{-1}^{1}\frac{\xi^k d\xi}{m(\xi)},$$

$$d_k=\begin{vmatrix} J_0 & \cdots & J_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ J_k & \cdots & J_{2k}\end{vmatrix},\quad p_k^*(x)=\frac{1}{\sqrt{d_{k-1}d_k}}\begin{vmatrix} J_0 & J_1 & \cdots & J_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{k-1} & J_k & \ddots & J_{2k-1} \\ 1 & x & \cdots & x^k\end{vmatrix}.$$

Следуя обобщённому проекционному методу [3–6], пространство $L_2([-1,1],V)$ представим в виде прямой суммы евклидова пространства $L_2^{(0)}([-1,1],V)$, базисом которого являются функции $\{\mathbf{p}_0^i(x),\mathbf{p}_1^i(x)\}$, и ортогонального ему гильбертова пространства $L_2^{(1)}([-1,1],V)$ с базисом $\{\mathbf{p}_k^i(x)\}$, $i=\overline{1,n}$, $k=2,3,\ldots$ Тогда неизвестная вектор–функция $\mathbf{Q}(x,t)$ и правая часть уравнения (7) представимы в виде суммы функций, определённых в пространствах $L_2^{(0)}([-1,1],V)$ и $L_2^{(1)}([-1,1],V)$: $\mathbf{Q}=\mathbf{Q}_0+\mathbf{Q}_1$, $\boldsymbol{\Delta}=\boldsymbol{\Delta}_0+\boldsymbol{\Delta}_1$. Причем, из дополнительных условий (8) сразу можно определить:

$$\mathbf{Q}_0(x,t)=z_0^i(t)\mathbf{p}_0^i(x)+z_1^i(t)\mathbf{p}_1^i(x)\in L_2^{(0)}([-1,1],V),\ z_0^i(t)=\frac{P^i(t)}{\sqrt{J_0}},\quad z_1^i(t)=\frac{J_0M^i(t)-J_1P^i(t)}{\sqrt{J_0(J_0J_2-J_1^2)}},$$

а $\boldsymbol{\Delta}_1(x,t)\equiv 0$. Введя ортопроекторы $\mathbf{P}_0: L_2([-1,1],V)\to L_2^{(0)}([-1,1],V)$ и $\mathbf{P}_1=\mathbf{I}-\mathbf{P}_0: L_2([-1,1],V)\to L_2^{(1)}([-1,1],V)$ и подействовав $\mathbf{P}_1$ на (7), получим уравнение с известной правой частью

$$c(t)\mathbf{Q}_1(x,t)+(\mathbf{I}-\mathbf{V})\mathbf{P}_1\mathbf{FQ}_1(x,t)=\boldsymbol{\Delta}_1(x,t)-(\mathbf{I}-\mathbf{V})\mathbf{P}_1\mathbf{FQ}_0(x,t)=\tilde{\boldsymbol{\Delta}}_1(x,t),$$

решение которого строится в виде ряда по собственным функциям оператора $\mathbf{P}_1\mathbf{F}$:

$$\mathbf{P}_1\mathbf{F}\boldsymbol{\varphi}_k(x)=¥_k\boldsymbol{\varphi}_k(x),\ \boldsymbol{\varphi}_k(x)=\sum_{l=2}^{\infty}\psi_{kl}^i\mathbf{p}_l^i(x).$$

Тогда функция $\mathbf{Q}_1(x,t)=\sum_{k=2}^{\infty}z_k(t)\boldsymbol{\varphi}_k(x)$, где функции разложения определяются из соотношений $z_k(t)=(\mathbf{I}-\mathbf{W}_k)\{\Delta_k(t)/[c(t)+\gamma_k]\}$, $\Delta_k(t)$ — функции разложения правой части по $\tilde{\mathbf{\Delta}}_1(x,t)$ по базису $\boldsymbol{\varphi}_k(x)$, $\mathbf{W}_k$ — операторы Вольтерра с ядром, являющиеся резольвентами ядер $\gamma_k K(t,\tau)/[c(t)+\gamma_k]$. Отметим, что решение имеет вид ($i=\overline{1,n}$):

$$q^i(x,t) = \frac{1}{m(x)}[p_0^*(x)z_0^i(t) + p_1^*(x)z_1^i(t) + \ldots],$$

то есть в нем отдельным сомножителем выделена функция $m(x)$, что позволяет производить вычисления в случаях, когда формы оснований штампов и поверхностная неоднородность покрытия описываются быстроосциллирующими и даже разрывными функциями.

Определив функцию $\mathbf{Q}_1(x,t)$ можно найти и осадки и углы поворотов штампов, для чего необходимо подействовать оператором $\mathbf{P}_0$ на уравнение (7). Уравнения для осадок и углов поворота примут вид ($i=\overline{1,n}$)

$$\alpha^i(t) = \sqrt{\frac{J_0}{J_0 J_2 - J_1^2}}\left\{c(t)(\mathbf{I}-\mathbf{V}_1)z_1^i(t) + (\mathbf{I}-\mathbf{V}_2)\left[K_{10}^{ij} z_1^j(t) + K_{11}^{ij} z_1^j(t) + \sum_{k=2}^{\infty} K_{1k}^i z_k(t)\right]\right\},$$

$$\delta^i(t) = \frac{1}{\sqrt{J_0}}\left\{c(t)(\mathbf{I}-\mathbf{V}_1)z_0^i(t) + (\mathbf{I}-\mathbf{V}_2)\left[K_{00}^{ij} z_0^j(t) + K_{01}^{ij} z_1^j(t) + \sum_{k=2}^{\infty} K_{0k}^i z_k(t)\right]\right\} - \frac{J_1}{J_0}\alpha^i(t).$$

Таким образом, поставлена и решена плоская задача о контакте между вязкоупругим стареющим основанием с поверхностно неоднородным покрытием и конечной системой одинаковых жёстких плоских штампов, расположенных на одном и том же расстоянии друг от друга (одно из обобщений периодической задачи). Решение задач получено в аналитическом виде, причем, в выражениях для контактных напряжений функция, описывающая неоднородность покрытия, выделена в явном виде. Это позволяет проводить расчёты для покрытий, неоднородности которых описываются быстро изменяющимися функциями.

Авторы благодарят А.В.Манжирова за постановку задачи, полезные обсуждения и ценные советы. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Москвы в рамках научных проектов № 15-31-70002 «мол_а_мос» и № 16-31-00320 «мол_а».

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В. Контактные задачи теории ползучести. Ереван: Изд. НАН Армении, 1999. 318с.
2. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488с.
3. Polyanin A.D., Manzhirov A.V. Handbook of Integral Equations, 2nd edition. Boca Raton: Chapman & Hall/ CRC, 2008. 1144 p.
4. Манжиров А.В., Казаков К.Е. Проекционный метод решения смешанных интегральных уравнений механики и его приложения к контактным задачам для тел с неоднородными покрытиями // Актуальные проблемы механики: механика деформируемого твёрдого тела: сб. трудов / отв. ред. Р.В. Гольдштейн; Ин-т проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН. М.: Наука, 2009. С.238–263.
5. Манжиров А.В., Курдина С.П., Кухарский С. О согласованном контакте штампов и тел с покрытиями, имеющих сложный профиль поверхности // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Инф. 2012. Т.12. Вып.4. С.80–89.
6. Манжиров А.В., Казаков К.Е., Кухарский С. Системы смешанных интегральных уравнений в проблеме множественного конформного контакта // Развитие идей Л.А. Галина в механике. Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013. С. 280–304.

Сведения об авторах:

Казаков Кирилл Евгеньевич–научный сотрудник Ин-та проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН; **E-mail:** kazakov@ipmnet.ru

Курдина Светлана Павловна – ст. преподаватель кафедры прикладной математики МГТУ им. Н.Э. Баумана **E-mail:** svetlana-ka@yandex.ru

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СДВИГОВОЙ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОУПРУГОЙ ВОЛНЫ В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ С ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ТРЕЩИНОЙ

Казарян А.А.

Рассматривается задача дифракции электроупругой волны сдвига в диэлектрической составной среде, обладающей пьезоэффектом, получены волновые поля упругих перемещений и электрического потенциала.

Упругое диэлектрическое пространство обладает пьезоэлектрическими свойствами, является пьезоэлектриком гексагональной симметрии класса $6mm$ с совпадающей с осью Oz декартовой системы координат главной осью кристалла. Пьезоэлектрические полупространства $y>0,\ y<0$ имеют разные пьезоэлектрические постоянные: $e^{15},\ e_{15}^{(1)}$, соответственно. Полупространства скреплены по плоскости $y=0$, $x>0$, $-\infty<z<\infty$ (полный контакт), а в плоскости $y=0$, $x<0$, $-\infty<z<\infty$ между ними отсутствует акустический контакт (полубесконечная трещина в плоскости Oxz при $x<0$). В полупространстве из бесконечности под углом $\theta_0(0<\theta_0<\pi/2)$ к плоскости $y=0$ распространяется плоская волна сдвига со следующими значениями амплитудных составляющих перемещения и электрического потенциала:

$$w_\infty(x,y)=e^{-ikx\cos\theta_0-iky\sin\theta_0}\ \frac{n!}{r!(n-r)!},\quad \Phi_\infty(x,y)=\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}e^{-ikx\cos\theta_0-iky\sin\theta_0} \qquad (1)$$

Рассматривается дифракция падающей сдвиговой электроупругой волны (1) в пьезоэлектрической среде, обусловленная наличием полубесконечной трещины. Среда находится в условиях антиплоской деформации. Задача заключается в определении волнового поля в составном пространстве. Учитывая гармоническую зависимость от времени (временной множитель $e^{-i\omega t}$, $\omega-$частота колебаний, $t-$параметр времени) всех составляющих волнового поля, для определения амплитуд перемещений и электрического потенциала (в квазистатическом приближении) имеем следующие дифференциальные уравнения [1]:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+k^2w=0,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}+\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}k^1w=0, \qquad y>0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2}+k_1^2w_2=0,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2}+\frac{e_{15}^{(1)}}{\varepsilon_{11}}k_1^2w_1=0, \qquad y<0, \qquad (3)$$

здесь $w(x,y),\Phi(x,y)-$ функции амплитуд перемещения и электрического потенциала при $y>0$, а $w_1(x,y)$, $\Phi_1(x,y)$ при $y<0$, $k=\omega/c, k_1=\omega/c_1-$волновые числа, $c=\sqrt{c_{44}(1+\chi)/\rho}$, $c_1=\sqrt{c_{44}(1+\chi_1)/\rho}-$скорости распространения сдвиговых электроупругих волн, $\chi=e_{15}/c_{44}\varepsilon_{11}, \chi_1=e_{15}/c_{44}\varepsilon_{11}-$ коэффициенты электромеханической связи в пьезоэлектрических средах, соответственно, $\varepsilon_{11}, c_{44}-$диэлектрическая и упругая постоянные пьезоэлектрического пространства, $\rho-$плотность.

На берегах трещины для амплитуд напряжений σ_{yz}, $\sigma_{yz}^{(1)}$ имеем условия [2]:

$$\sigma_{yz}(x,y)=c_{44}\frac{\partial w}{\partial y}+e_{15}\frac{\partial \Phi}{\partial y}=0 \ \text{ при } y=0,\ x<0, \qquad (4)$$

$$\sigma_{yz}^{(1)}(x,y) = c_{44}^{(1)} \frac{\partial w_1}{\partial y} + e_{15}^{(1)} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = 0 \text{ при } y = 0,\ x < 0,$$

а также

$$w(x,y) - w_1(x,y) = w_0(x) \text{ при } y = 0,\ x < 0. \quad (5)$$

Решения уравнений (2), (3) должны удовлетворять контактным условиям:

$$\sigma_{yz}(x,y) = \sigma_{yz}^{(1)}(x,y) = q_0(x) \text{ при } y = 0,\ x > 0, \quad (6)$$

$$w(x,y) - w_1(x,y) = 0 \text{ при } y = 0,\ x > 0. \quad (7)$$

Введём функции $q_+(x) = q_0(x)\theta(x)$, $\psi_-(x) = w_0(x)\theta(-x)$, где $\theta(x)-$ функция Хэвисайда, условия (4)-(7) можно представить в виде [2]:

$$\sigma_{yz}(x,0) = \sigma_{yx}^{(1)}(x,0) = q_+(x), \quad (8)$$

$$w(x,0) - w_1(x,0) = \psi_-(x), \quad (9)$$

т.е. $q_+(x)$ – напряжение при $y = 0$, а $\psi_-(x)$ представляет разницу перемещений на $y = \pm 0$.

Для амплитуд электрического потенциала и составляющей вектора электрической индукции имеем следующие контактные условия:

$$\Phi(x,y) = \Phi_1(x,y) \text{ при } y = 0, \quad (10)$$

$$D_2(x,y) = D_2^{(1)}(x,y) \text{ при } y = 0, \quad (11)$$

где $D_2(x,y) = e_{15} \frac{\partial w}{\partial y} - \varepsilon_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial y}$, $D_2^{(1)}(x,y) = e_{15}^{(1)} \frac{\partial w}{\partial y} - \varepsilon_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ (12)

– составляющие вектора электрической индукции в пьезоэлектрических полупространствах $y > 0$, $y < 0$; $\varepsilon_0 -$ диэлектрическая постоянная среды $y < 0$.

Для решения поставленной задачи применяем интегральное преобразование Фурье:

$$\overline{w}(\sigma,y) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x,y) e^{-\sigma x} dx, \quad \overline{\Phi}(\sigma,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x,y) e^{i\sigma x} dx$$

а) В частности, при $e_{15}^{(1)} = e_{15}$, т.е. при пьезоэлектрическом пространстве с полубесконечной трещиной определение функций $\overline{\psi}_-(\sigma), \overline{q}_+(\sigma)$ сводится к решению функционального уравнения [2]:

$$\overline{q}_+(\sigma) + \frac{c_{44}}{2} \sqrt{\sigma^2 - k^2} (1+\chi) \mathrm{K}(\sigma) \overline{\psi}_- = -2\pi i k c_{44} (1+\chi) \sin\theta_0 \delta(\sigma - k\cos\theta_0), \quad (13)$$

где $\mathrm{K}(\sigma) = 1 + \chi - \frac{\chi|\sigma|}{\sqrt{\sigma^2 - k^2}}$, $\delta(\sigma)-$ известная функция Дирака.

Функция $\mathrm{K}(\sigma)$ имеет нулевые значения только при $\sigma = \pm\sigma_n$, где

$$\sigma_n = k \frac{1+\chi}{\sqrt{1+2\chi}} > k.$$

Следовательно, в полупространстве $x < 0$ распространяется обусловленная дифракцией и пьезоэффектом локализованная у берегов трещины $y = \pm 0$ поверхностная волна со скоростью ω/σ_n:

$$w_N(x,\mathrm{y}) = \pm \mathrm{A}_N\, e^{-i\sigma_n^x} e^{\mp y\sqrt{\sigma_n^2 - k^2}} \quad (14)$$

$$A_n = \frac{\chi(1+\chi)\mathrm{i}}{1+2\chi} \frac{\overline{K}^+(\sigma_n)\sin\theta_0/2}{\overline{K}^+(\mathrm{k}\cos\theta_0)} \frac{\sqrt{2k(\sigma_n + k)}}{k\cos\theta_0 - \sigma_n},$$

волновое поле состоит ещё и из дифрагированной затухающей объёмной волны, падающей и отражённой волн.

б) В случае, если $e_{15}^{(1)} = -e_{15}$, т.е. $\chi_1 = \chi,\ k_1 = k$, трансформанты Фурье функций амплитуд перемещения и потенциала электрического поля для пьезоэлектрических полупространств $y > 0$ и $y < 0$ представляются в виде:

$$\bar{w} = \frac{1}{2}\bar{\psi}_- e^{-\sqrt{\sigma^2 - k^2}\,y} + 2\pi(\mathrm{A}_0 - 1)e^{iky\sin\theta_0}\delta(\sigma - \mathrm{k}\cos\theta_0) +$$
$$+2\pi e^{iky\sin\theta_0}\delta(\sigma - \mathrm{k}\cos\theta_0),$$
$$\bar{\Phi} = -2\pi\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\mathrm{A}_0\, e^{-ky\cos\theta_0} + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\bar{w}, \quad (15)$$

$$\bar{w}_1 = -\frac{1}{2}\bar{\psi}_- e^{-\sqrt{\sigma^2-k^2}\,y} + 2\pi\,\mathrm{A}_0\, e^{-iky\sin\theta_0}\delta(\sigma - \mathrm{k}\cos\theta_0),$$
$$\bar{\Phi}_1 = 2\pi\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\mathrm{A}_0\, e^{ky\cos\theta_0}\delta(\sigma - \mathrm{k}\cos\theta_0) - \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\bar{w}_1, \quad (16)$$

где $\mathrm{A}_0 = \dfrac{(1+\chi)\sin\theta_0}{(1+\chi)\sin\theta_0 - i\chi\cos\theta_0}$,

при $\chi = 0$ (отсутствие пьезоэффекта) $A_0 = 1$.

Функциональное уравнение для определений $\bar{\psi}_-(\sigma), \bar{q}_+(\sigma)$ имеет вид:

$$\bar{q}_+(\sigma) + \frac{c_{44}}{2}\sqrt{\sigma^2 - k^2}(1+\chi)\bar{\psi}_-(\sigma) = -2\pi ik\,\mathrm{c}_{44}(1+\chi)\sin\theta_0\delta(\sigma - k\cos\theta_0), \quad (17)$$

действительная ось комплексной плоскости обходит точки ветвления $-k$ сверху, а k снизу, $\sqrt{\sigma^2 - k^2} = -i\sqrt{k^2 - \sigma^2}$ [2,3].

Принимая во внимание, что

$$2\pi i\delta(\sigma - \mathrm{k}\cos\theta_0) = \frac{1}{\sigma - k\cos\theta_0 - i0} - \frac{1}{\sigma - k\cos\theta_0 + i0},$$

из уравнения (17) получим [2-5]:

$$\bar{\psi}_- = -\frac{2\sqrt{2k}\sin\theta_0/2}{\sqrt{\sigma - k}}\frac{1}{\sigma - k\cos\theta_0 - i0},$$
$$\bar{q}_+(\sigma) = \sqrt{2k}c_{44}(1+\chi)\sin\frac{\theta_0}{2}\frac{\sqrt{\sigma + k}}{\sigma - k\cos\theta_0 + i0}. \quad (18)$$

Следовательно, имея (15), (16), амплитуды перемещений и функций электрического потенциала представляются в виде:

$$\left\{w(x,\mathrm{y}), w_1(x,\mathrm{y})\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\bar{w}(\sigma, y), \bar{w}_1(\sigma, y)\right\}e^{-i\sigma x}dx,$$

$$\{\Phi(x,y), w_1(x,y)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{\bar{\Phi}(\sigma,y), \bar{\Phi}_1(\sigma,y)\}e^{-i\sigma x}dx. \qquad (19)$$

В случае $x<0$, $y>0$ амплитуда перемещения имеет вид:

$$w(x,y) = -\frac{\sqrt{2k}}{2\pi}\sin\frac{\theta_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{\sigma^2-k^2}y}}{\sqrt{\sigma-k}(\sigma-\mathrm{k}\cos\theta_0+i0)}+$$

$$+e^{-ikx\cos\theta_0+iky\sin\theta_0}+A_0e^{-ikx\cos\theta_0+iky\sin\theta_0},$$

волновое поле состоит из дифрагированной объёмной волны, падающей и отражённой волн, т.е. локализованная (поверхностная) волна не возбуждается.

При $x<0$, $y<0$

$$w_1(x,y) = \frac{\sqrt{2k}}{2\pi}\sin\frac{\theta_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\sqrt{\sigma^2-k^2}y}}{\sqrt{\sigma-k}(\sigma-k\cos\theta_0+i0)}(A_0-1)e^{-ikx\cos\theta_0-iky\sin\theta_0}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука, 1982. 240с.
2. Григорян Э.Х., Джилавян С.А. Дифракция плоской сдвиговой волны на полубесконечной трещине в пьезоэлектрическом пространстве. //Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т.58. №1. С.38-50.
3. Нобл Б. Метод Винера – Хопфа. М.: Мир, 1962. 279с.
4. Григорян Э.Х., Джилавян С.А., Казарян А.А. Дифракция сдвиговой плоской волны на полубесконечной трещине в пространстве пьезоэлектрик–диэлектрик. //Труды межд. конф. Горис, Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Ереван: 2011. С.137-143.
5. Джилавян С.А., Казарян А.А. Дифракция плоской сдвиговой волны в пьезоэлектрическом полупространстве при полубесконечном металлическом слое в диэлектрике. //Изв. НАН Армении. Механика. 2015. Т.68. №1. С.45-57.

<u>Сведение об авторе:</u>

Казарян Айказ Арменович – к.ф.-м.н, Институт механики НАН Армении,
Tel.: (+374 96) 00 96 06. **E-mail:** HaykazGhazaryan@gmail.com

НОВЫЙ ТИП ЛОКАЛИЗАЦИИ ВОЛНОВОЙ ЭНЕРГИИ ВБЛИЗИ НЕГЛАДКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПЬЕЗОДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА

Камалян А.А., Унанян А.А.

Показывается, что распространение нормальных сдвиговых электроупругих волн в пьезодиэлектрическом слое-волноводе с шероховатыми поверхностями, наряду с волнами Гуляева-Блюстейна характеризуется новым типом локализации волновой энергии вблизи негладких поверхностей. Виртуальным выделением приповерхностных тонких слоёв переменной толщины задача приводится к исследованию распространения нормальной волны в многослойном волноводе. Решение задачи упрощается вводом гипотез MELS. Получается, что локализация волновой энергии зависит также от функции негладкости поверхностей волновода. При определённых значениях линейных характеристик шероховатости поверхностей может возникать внутренний резонанс и фиктивные динамические нагрузки в приповерхностных слоях. Возникают также зоны запретных частот в волноводе.

Введение. Локализация волновой энергии вблизи поверхности тела при динамических процессах явление ординарное. Часто это явление нужно устранить, как ненужное, а часто можно воспользоваться наличием этого явления.

Впервые о локализации волновой энергии встречаемся в первоисточниках [1÷4]. Более подробно о локализации волновой энергии вблизи границ раздела сред можно найти в [5÷7] и др. Известно, что причиной локализации вблизи границ раздела сред является нарушение однородности эффективных физикомеханических характеристик этих полей, приводящие к эффективным «нагрузкам» на поверхности раздела сред. Наряду с этими причинами на поверхностях волновода геометрическими неоднородностями являются также поверхностные шероховатости, образующие своеобразный эффективный тонкий неоднородный слой в пригpаничных зонах волновода [8÷10]. Здесь исследуется вопрос локализации волновой энергии вблизи шероховатых поверхностей пьезодиэлектрического волновода при разных электромеханических граничных условиях.

Постановка задачи. Рассматривается распространение высокочастотного (коротковолнового) волнового упругого сдвигового сигнала в пьезодиэлектрическом слое-волноводе $\Omega \triangleq \left\{ |x| < \infty;\ h_{-}(x) \le y \le h_{+}(x);\ |z| < \infty \right\}$ переменной толщины, где поверхностные шероховатости описываются слабо меяющимися функциями

$$h_{-}(x) = -h_0\left[1 + \varepsilon_{-}\sin(k_{-}x) + \delta_{-}\cos(k_{-}x)\right];\quad h_{+}(x) = h_0\left[1 + \varepsilon_{+}\sin(k_{+}x) + \delta_{+}\cos(k_{+}x)\right]. \quad (1.1)$$

Длина нормальной волны в волновом сигнале намного меньше базовой толщины слоя $\lambda_0 \ll 2h_0$ и сопоставима с линейными характеристиками шероховатостей $\lambda_0 \sim \gamma_{\pm}$ и $\lambda_0 \sim \lambda_{\pm}$ (рис. 1.1).

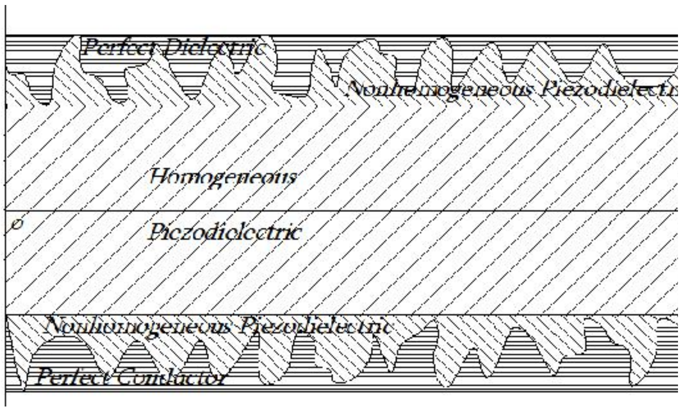


Рис. 1.1 Пьезодиэлектрический волновод, поверхностные шероховатости которого заполнены диэлектриком и/или электропроводником

Здесь $\gamma_{\pm} \triangleq \sqrt{\varepsilon_{\pm}^2 + \delta_{\pm}^2}$ – максимальная амплитуда, а $а_{\pm}$ – средний шаг поверхностных не ровностей соответственно.

Предположим, что неровности поверхности волновода $y = h_{+}(x)$ до уровня $y = h_0 + \gamma_{+}$ залиты хорошим диэлектриком, а неровности поверхности волновода $y = h_{-}(x)$ до уровня $y = -h_0 - \gamma_{-}$ залиты хорошим проводником.

На рис. 1.1 также нужно заметить, что виртуально выделенные из волновода пьезодиэлектрические слои

$$\Omega_{-}^{p} \triangleq \left\{ |x| < \infty;\ h_{-}(x) \le y \le -h_0 + ¥_{-};\ |z| < \infty \right\} \quad (1.2)$$

$$\Omega_{+}^{p} \triangleq \left\{ |x| < \infty;\ h_0 - ¥_{+} \le y \le h_{+}(x);\ |z| < \infty \right\} \quad (1.3)$$

при обработке поверхностей волновода в общем случае оказываются неоднородными по своим тонким толщинам.

Таким образом, пьезодиэлектрический однородный волновод моделируется как пятислойный неоднородный волновод в вакуумном пространстве.

В идеально проводящей прослойке

$$\Omega_{-}^{c} \triangleq \left\{ \left| x \right| < \infty;\ -h_0 - ¥_{-} \le y \le h_{-}(x);\ \left| z \right| < \infty \right\}, \qquad (1.4)$$

который является электрическим экраном $\varphi_{-}^{c}(x,y,t) \equiv 0$, будет решено только уравнение движения упругого сдвига, записанного в виде

$$G^{c}\frac{\partial^2 \mathrm{w}^{c}(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{c}(x,y,t)}{\partial y} = \rho^{c}\frac{\partial^2 \mathrm{w}^{c}(x,y,t)}{\partial t^2} \qquad (1.5)$$

и материальное соотношение для сдвигового механического напряжения

$$\sigma_{yz}^{c}(x,y,t) = G^{c}\frac{\partial \mathrm{w}^{c}(x,y,t)}{\partial y}. \qquad (1.6)$$

При решении задачи, в двух тонких приповерхностных неоднородных пьезодиэлектрических слоях (1.2) и (1.3) уравнения электроактивного сдвига будут записаны соответственно в виде:

$$G_{\pm}(y)\frac{\partial^2 \mathrm{w}_{\pm}(x,y,t)}{\partial x^2} + e_{\pm}(y)\frac{\partial^2 \varphi_{\pm}(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{\pm}(x,y,t)}{\partial y} = \rho_{\pm}(y)\frac{\partial^2 \mathrm{w}_{\pm}(x,y,t)}{\partial t^2} \qquad (1.7)$$

$$e_{\pm}(y)\frac{\partial^2 \mathrm{w}_{\pm}(x,y,t)}{\partial x^2} - \varepsilon_{\pm}(y)\frac{\partial^2 \varphi_{\pm}(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial D_{y}^{\pm}(x,y,t)}{\partial y} = 0, \qquad (1.8)$$

где материальные соотношения для компонент механического напряжения и индукций электрического поля имеют вид:

$$\sigma_{yz}^{\pm}(x,y,t) = G_{\pm}(y)\frac{\partial w_{\pm}(x,y,t)}{\partial y} + e_{\pm}(y)\frac{\partial \varphi_{\pm}(x,y,t)}{\partial y}$$

$$D_{y}^{\pm}(x,y,t) = e_{\pm}(y)\frac{\partial w_{\pm}(x,y,t)}{\partial y} - \varepsilon_{\pm}(y)\frac{\partial \varphi_{\pm}(x,y,t)}{\partial y}. \qquad (1.9)$$

В базовом однородном пьезодиэлектрическом слое-волноводе постоянной толщины

$$\Omega_0 \triangleq \left\{ \left| x \right| < \infty;\ -h_0 + \gamma_{-} \le y \le h_0 - \gamma_{+};\ \left| z \right| < \infty \right\} \qquad (1.10)$$

решаются квазистатические уравнения антиплоской электроупругости

$$\nabla^2 \mathrm{w}(x,y,t) = c_{0t}^{-2}\cdot \ddot{\mathrm{w}}(x,y,t) \qquad (1.11)$$

$$\nabla^{2}\ddot{}\,(x,y,t) = (e_{15}/£_{11})\cdot \nabla^2 \mathrm{w}(x,y,t) \qquad (1.12)$$

Здесь $c_{0t}^{2} \triangleq G_0/\rho_0$ – скорость объёмной сдвиговой электроупругой волны в пьезодиэлектрике, G_0 – жёсткость сдвига, ρ_0 – плотность, e_{15} – пьезоэлектрический модуль и ε_{11} – коэффициент диэлектрической проницаемости среды.

В диэлектрической прослойке $\Omega_{+}^{d} \triangleq \left\{ \left| x \right| < \infty;\ h_{+}(x) \le y \le h_0 + ¥_{+};\ \left| z \right| < \infty \right\}$ (1.13)

будут решены уравнения движения упругого сдвига и уравнение электростатики:

$$G^{d}\frac{\partial^2 \mathrm{w}^{d}(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{d}(x,y,t)}{\partial y} = \rho^{d}\frac{\partial^2 \mathrm{w}^{d}(x,y,t)}{\partial t^2} \qquad (1.14)$$

$$-\varepsilon^{d}\frac{\partial^2 \varphi^{d}(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial D_{y}^{d}(x,y,t)}{\partial y} = 0, \qquad (1.15)$$

где материальные соотношения для компонент механического напряжения и индукций электрического поля имеют вид:

$$\sigma_{yz}^{d}(x,y,t) = G^{d}\frac{\partial \mathrm{w}^{d}(x,y,t)}{\partial y};\quad D_{y}^{d}(x,y,t) = -\varepsilon^{d}\frac{\partial \varphi^{d}(x,y,t)}{\partial y}. \qquad (1.16)$$

Потенциал электрического поля $\varphi^{(e)}(x,y,t)$ вакуумного полупространства

$$\Omega^{(e)} \triangleq \{|x| < \infty;\ h_0 + ¥_+ \le y \le +\infty;\ |z| < \infty\} \tag{1.17}$$

определим из уравнения $\nabla^2\varphi^{(e)}(x,y,t) = 0$ с учётом его затухания в бесконечности $y \to \infty$

$$\varphi^{(e)}(x,y,t) = E_0 e^{-ky} e^{i(kx-\omega_0 t)} \tag{1.18}$$

На внешней, механически свободной поверхности $y = -h_0 - \gamma_-$ идеально проводящего тонкого слоя будем иметь только граничное условие:

$$\sigma^c_{yz}(x,-h_0-\gamma_-,t) = 0\ . \tag{1.19}$$

На негладкой поверхности $y = h_-(x)$ удовлетворяется условие сопряжённости электромеханических полей пьезодиэлектрика и идеального проводника

$$\mathrm{w}_-(x,h_-(x),t) = \mathrm{w}^c(x,h_-(x),t)\ ; \qquad \varphi_-(x,h_-(x),t) = 0 \tag{1.20}$$

$$h'_-(x)\sigma^-_{zx}(x,h_-(x),t) + \sigma^-_{yz}(x,h_-(x),t) = h'_-(x)\sigma^c_{zx}(x,h_-(x),t) + \sigma^c_{yz}(x,h_-(x),t)\ .$$

На виртуально проведённом срезе $y = -h_0 + ¥_-$ удовлетворяются условия сопряжённости электромеханических полей однородного и неоднородного пьезодиэлектрических слоёв

$$\mathrm{w}_0(x,-h_0+\gamma_-,t) = \mathrm{w}_-(x,-h_0+\gamma_-,t)\ ; \qquad \varphi_0(x,-h_0+\gamma_-,t) = \varphi_-(x,-h_0+\gamma_-,t)\ ;$$

$$\sigma^0_{yz}(x,-h_0+\gamma_-,t) = \sigma^-_{yz}(x,-h_0+\gamma_-,t)\ ; \qquad D^0_y(x,-h_0+\gamma_-,t) = D^-_y(x,-h_0+\gamma_-,t) \tag{1.21}$$

Аналогично, на внешней, механически свободной поверхности $y = h_0 + \gamma_+$ удовлетворяются условия сопряжённости электромеханических полей, с учётом того, что через диэлектрический слой электрическое поле просачивается во внешнее вакуумное полупространство

$$\varphi^d(x,h_0+\gamma_+,t) = \varphi^{(e)}(x,h_0+\gamma_+,t)\ ;$$

$$\sigma^d_{yz}(x,h_0+\gamma_+,t) = 0\ ; \quad D^d_y(x,h_0+\gamma_+,t) = -\varepsilon^{(e)}\,\partial\varphi^{(e)}(x,y,t)/\partial y\Big|_{y=h_0+\gamma_+} \tag{1.22}$$

На негладкой поверхности $y = h_+(x)$ соответственно удовлетворяются условия сопряженности электромеханических полей с учётом негладкости поверхности

$$\mathrm{w}_+(x,h_+(x),t) = \mathrm{w}^d(x,h_+(x),t)\ ; \quad \varphi_+(x,h_+(x),t) = \varphi^d(x,h_+(x),t) \tag{1.23}$$

$$h'_+(x)\sigma^+_{zx}(x,h_+(x),t) + \sigma^+_{yz}(x,h_+(x),t) = h'_+(x)\sigma^d_{zx}(x,h_+(x),t) + \sigma^d_{yz}(x,h_+(x),t) \tag{1.24}$$

$$h'_+(x)D^+_x(x,h_+(x),t) + D^+_y(x,h_+(x),t) = h'_+(x)D^d_x(x,h_+(x),t) + D^d_y(x,h_+(x),t) \tag{1.25}$$

и на виртуально проведённом срезе $y = h_0 - ¥_+$ соответственно удовлетворяются условия сопряжённости электромеханических полей, с учётом:

$$\mathrm{w}_0(x,h_0-\gamma_+,t) = \mathrm{w}_+(x,h_0-\gamma_+,t)\ ; \quad \varphi_0(x,h_0-\gamma_+,t) = \varphi_+(x,h_0-\gamma_+,t)\ ; \tag{1.26}$$

$$\sigma^0_{yz}(x,h_0-\gamma_+,t) = \sigma^+_{yz}(x,h_0-\gamma_+,t)\ ; \quad D^0_y(x,h_0-\gamma_+,t) = D^+_y(x,h_0-\gamma_+,t)$$

Из приведённых граничных условий видно, что кроме вышеприведённых материальных соотношений (1.11), (1.13) и (1.16), из-за наличия негладких поверхностей волновода в граничные условия (1.18) и (1.21) входят также касательные компоненты механических напряжений и индукции электрического поля соответствующих слоёв

$$\sigma^\pm_{zx}(x,y,t) = G_\pm(y)\frac{\partial \mathrm{w}_\pm(x,y,t)}{\partial x} + e_\pm(y)\frac{\partial\varphi_\pm(x,y,t)}{\partial x}$$

$$D^\pm_x(x,y,t) = e_\pm(y)\frac{\partial \mathrm{w}_\pm(x,y,t)}{\partial x} - \varepsilon_\pm(y)\frac{\partial\varphi_\pm(x,y,t)}{\partial x} \tag{1.27}$$

$$\sigma^d_{zx}(x,y,t) = G^d\,\frac{\partial \mathrm{w}^d(x,y,t)}{\partial x}\ ; D^d_x(x,y,t) = -\varepsilon^d\,\frac{\partial\varphi^d(x,y,t)}{\partial x} \tag{1.28}$$

$$\sigma^c_{zx}(x,y,t) = G^c\,\frac{\partial \mathrm{w}^c(x,y,t)}{\partial x} \tag{1.29}$$

2. Решение задачи. При прохождении нормального волнового сигнала по композитному волноводу, волновое решение системы уравнений (1.11) и (1.12) в основном слое Ω_0 запишется в виде:

$$\mathrm{w}_0(x,y,t)=\left[A_0 e^{\alpha k y}+B_0 e^{-\alpha k y}\right]e^{i(kx-\omega_0 t)} \qquad (2.1)$$

$$\varphi_0(x,y,t)=\left\{C_0 e^{ky}+D_0 e^{-ky}+(e_{15}/\varepsilon_{11})\cdot\left[A_0 e^{\alpha k y}+B_0 e^{-\alpha k y}\right]\right\}e^{i(kx-\omega_0 t)}\ . \qquad (2.2)$$

В остальных четырёх приграничных слоях, учитывая их тонкость, вводим гипотезы **MELS** [8,9] о распределении искомых характеристик волновых полей по толщине слоёв. В виртуально выделенном неоднородном пьезодиэлектрическом слое Ω_+^p представим упругий сдвиг и потенциал электрического поля в виде:

$$\mathrm{w}_+(x,y,t)=\frac{\mathrm{sh}\left[\alpha k(y-h_0+\gamma_+)\right]}{\mathrm{sh}\left[\alpha k(h_+(x)-h_0+\gamma_+)\right]}\left[\mathrm{w}_+(x,h_+(x),t)-\mathrm{w}_0(x,h_0-\gamma_+,t)\right]+\mathrm{w}_0(x,h_0-\gamma_+,t)\ ;$$

$$\varphi_+(x,y,t)=\frac{\mathrm{sh}\left[\alpha k(y-h_0+\gamma_+)\right]}{\mathrm{sh}\left[\alpha k(h_+(x)-h_0+\gamma_+)\right]}\left[\varphi_+(x,h_+(x),t)-\varphi_0(x,h_0-\gamma_+,t)\right]+\varphi_0(x,h_0-\gamma_+,t) \qquad (2.3)$$

В однородном диэлектрическом слое сглаживания Ω_+^d представим упругий сдвиг и потенциал электрического поля в виде:

$$\mathrm{w}^d(x,y,t)=\frac{\mathrm{sh}\left[\alpha k(y-h_+(x))\right]}{\mathrm{sh}\left[\alpha k(h_0+\gamma_+-h_+(x))\right]}\left[\mathrm{w}^d(x,h_0+\gamma_+,t)-\mathrm{w}_+(x,h_+(x),t)\right]+\mathrm{w}_+(x,h_+(x),t)$$

$$\varphi^d(x,y,t)=\frac{\mathrm{sh}\left[\alpha k(y-h_+(x))\right]}{\mathrm{sh}\left[\alpha k(h_0+\gamma_+-h_+(x))\right]}\left[\varphi^{(e)}(x,h_0+\gamma_+,t)-\varphi_+(x,h_+(x),t)\right]+\varphi_+(x,h_+(x),t) \qquad (2.4)$$

Аналогично соотношениям (2.3) и (2.4), в виртуально выделенном неоднородном пьезо-диэлектрическом слое Ω_-^p представим упругий сдвиг и потенциал электрического поля в виде:

$$\mathrm{w}_-(x,y,t)=\frac{\mathrm{sh}\left[\alpha k(y+h_0-\gamma_-)\right]}{\mathrm{sh}\left[\alpha k(h_-(x)+h_0-\gamma_-)\right]}\left[\mathrm{w}^c(x,h_-(x),t)-\mathrm{w}_0(x,-h_0+\gamma_-,t)\right]+\mathrm{w}_0(x,-h_0+\gamma_-,t)$$

$$\varphi_-(x,y,t)=\left\{1-\frac{\mathrm{sh}\left[\alpha k(y+h_0-\gamma_-)\right]}{\mathrm{sh}\left[\alpha k(h_-(x)+h_0-\gamma_-)\right]}\right\}\varphi_0(x,-h_0+\gamma_-,t)\ , \qquad (2.5)$$

а в идеально проводящем слое сглаживания Ω_-^c представим упругий сдвиг в виде:

$$\mathrm{w}^c(x,y,t)=\frac{\mathrm{sh}\left[\alpha k(y-h_-(x))\right]}{\mathrm{sh}\left[\alpha k(-h_0-\gamma_--h_+(x))\right]}\left[\mathrm{w}^c(x,-h_0-\gamma_-,t)-\mathrm{w}_-(x,h_-(x),t)\right]+ \qquad (2.6)$$
$$+\mathrm{w}_-(x,h_-(x),t)$$

Выбором гипотетических представлений (2.3)÷(2.6) обеспечиваются первые пары граничных условий из систем (1.20), (1.21), (1.23) и (1.26), а также первое граничное условие из системы условий (1.22). Удовлетворяя граничным условиям (1.19), а также вторым парам условий (2.22) и (2.26), обеспечиваем представления входящих в граничные условия величин поверхностных значений $\mathrm{w}_-(x,h_-(x),t)$, $\mathrm{w}^c(x,-h_0-\gamma_-,t)$, $\mathrm{w}^d(x,h_0+\gamma_+,t)$, $\mathrm{w}_+(x,h_+(x),t)$ и $\varphi_+(x,h_+(x),t)$ поверхностными значениями решений (1.18) на плоскости $y=h_0+\gamma_+$ и решений (2.1), (2.2) на плоскостях $y=h_0-\gamma_+$ и $y=-h_0+\gamma_-$, соответственно. Удовлетворяя остальным пяти граничным условиям, третьему условию из (1.20) и последним двум парам условий из (2.21) и (2.23), получаем дисперсионное уравнение образованного волнового поля. Из полученного дисперсионного уравнения определяются, зависящие от поверхностных неоднородностей, волновое число и коэффициент формаобразования для многослойного волновода. Из полученных значений определяются зоны частотного умолчания волн при распространении нормальной волны в сендвидже-волноводе.

Подставляя полученные значения волнового числа и коэффициента формаобразования в представления упругого сдвига и электрического потенциала (2.3)÷(2.6), окончательно определяем полное распределение электроупругого волнового поля по толщине волновода. Из полученных представлений легко определить возможность возникновения внутреннего резонанса, а также эффективной нагрузки в слоях композитного волновода.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Государственного Комитета по науке МОН РА в рамках научного проекта №15 T-2C026.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lord Rayleigh (1885). «On Waves Propagated along the Plane Surface of an Elastic Solid». Proc. London Math. Soc. s1-17 (1): 4–11.
2. A. E. H. Love, «Some problems of geodynamics», first published in 1911 by the Cambridge University Press and published again in 1967 by Dover, New York, USA. (Chapter 11: Theory of the propagation of seismic waves).
3. Lamb, H. «On Waves in an Elastic Plate». Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 93, 114–128, 1917.
4. Bleustein J.L. A new surface wave in piezoelectric materials. - Appl. phys. Lett., 1968, v.13, №2, p.412-413.
5. Achenbach, J. D. «Wave Propagation in Elastic Solids». New York: Elsevier, 1984.
6. Викторов И. А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах., М:, Наука, 1981, 287с.
7. Biryukov S.V**.,** Gulyaev Y.V., Krylov V., Plessky V. Surface acoustic waves in inhomogeneous media, Springer Series on Wave Phenomena, Vol. 20, 1995, 388.
8. Avetisyan A.S. The boundary problem modelling of rough surfaces continuous media with coupled physico mechanical fields, Reports of NAS of Armenia, (2015), vol.115, №2, pp.119-131.
9. Avetisyan A.S. On the formulation of the electro-elasticity theory boundary value problems for electro-magneto-elastic composites with interface roughness, Proc. of NAS of Armenia, Mechanics, (2015), vol. 68, №2, pp.29-42.
10. Avetisyan A.S., Hunanyan A.A. The efficiency of application of virtual cross-sections method and hypotheses MELS in problems of wave signal propagation in elastic waveguides with rough surfaces, (2016), J. Advances in Physics, vol.11, №7, pp.3564-3575.

Сведения об авторах

Камалян Андраник Арменович – канд. физ.-мат наук, мл. научный сотрудник Института механики НАН Армении, (+37494) 90 96 92, **E-mail:** Kamalyan.Andranik@yahoo.com;

Унанян Арег Арменович – аспирант Института механики НАН Армении, (+37491) 77 55 33, **E-mail:** Hunanyan.areg21@gmail.com

О РАЗВИТИИ МОДЕЛЕЙ ВИХРЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ПРИМЕРЕ РАСЧЁТА ПРОСТРАНСТВЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ВИХРЕВЫХ КОЛЕЦ

Коцур О.С.

Рассматривается метод вихревых элементов (МВЭ), предназначенный для моделирования течений несжимаемой жидкости. Сравниваются различные модели ВЭ, построенные на различных допущениях. Рассматривается также метод обмена интенсивностями (PSE - Particle Strength Exchange) ВЭ для учёта вязкости жидкости. Приводится пример расчёта с помощью МВЭ соударения двух вихревых колец.

1. Введение

Методы вихревых элементов предназначены для решения различного класса задач динамики жидкости (несжимаемой) и задач взаимодействия жидкости и твёрдого тела (FSI, Fluid-Structure Interaction). МВЭ рассматриваются как альтернатива традиционным сеточным методам, типа методов конечных объёмов (МКО), конечных элементов (МКЭ) и конечных разностей (МКР), которые де-факто являются стандартом в сфере инженерных расчётов. Сеточные методы имеют известный ряд недостатков: схемная вязкость, большая вычислительная стоимость, большие объёмы памяти жёсткого диска для хранения результатов. FSI задачи также являются одним из слабых мест сеток, поскольку движение твёрдого тела требует использование динамических сеток, что существенно замедляет расчёт и является источником погрешностей аппроксимации и интерполяции. Кроме того, вносится ограничение по максимальному перемещению тела, чтобы сохранить качество сетки при деформации.

МВЭ позволяет частично решить некоторые из этих проблем за счёт использования лагранжевого (бессеточного) подхода к решению уравнений Навье-Стокса, где в качестве зависимых переменных рассматривается завихренность, а не скорость. Поле завихренности раскладывается в суперпозицию элементарных полей особых дискретных вихрей – вихревых элементов (ВЭ). В результате задача сводится к определению на каждом временном шаге интенсивности ВЭ и к их перемещению, которое совпадает с перемещением несущих их жидких частиц (для идеальной жидкости). Поле скоростей восстанавливается из поля завихренности с помощью закона Био-Савара. После перемещения вихревых элементов в соответствии с полученным полем скоростей процедура повторяется для следующего временного шага.

В случае вязкой жидкости вихревые элементы уже не перемещаются в пространстве вместе с материальными частицами. Для описания вязких задач требуется создание новых моделей вихревых элементов. Существует несколько методологий учёта вязкости, одна из них заключается в нахождении т.н. «скорости Фридмана» [1,2], которая реализована к настоящему времени только для двумерного случая. Другой подход, который будет рассмотрен в данной работе – метод обмена интенсивностями (PSE, Particle Strength Exchange).

Основная цель работы – показать тенденции развития МВЭ на примере некоторых моделей ВЭ, указать пути дальнейших исследований для повышения точности моделей и эффективности расчётов.

2. Модели вихревых элементов

Рассмотрим идеальную жидкость в безграничном пространстве. При заданной скорости на бесконечности $\mathbf{V}_\infty$ и начальном распределении завихренности $\mathbf{\Omega}_0(\mathbf{r})$ требуется определить поле скорости $\mathbf{V(r,t)}$ и завихренности $\mathbf{\Omega(r,t)}$ течения жидкости, $\mathbf{r}\in\mathbb{R}^3$, $t\in[0,T]$. Уравнения динамики (1) записывается в форме уравнения Гельмгольца,

$$\begin{aligned}
&\frac{D\mathbf{\Omega}}{Dt}=\mathbf{\Omega}\cdot\nabla\mathbf{V},\\
&\frac{D\mathbf{r}}{Dt}=\mathbf{V},\\
&\mathbf{\Omega}=\nabla\times\mathbf{V},\\
&\lim_{|\mathbf{r}|\to\infty}\mathbf{V}=\mathbf{V}_\infty,\\
&\mathbf{\Omega}\,|_{t=t_0}=\mathbf{\Omega}_0.
\end{aligned}\qquad(1)$$

Произвольное поле завихренности $\mathbf{\Omega}(\mathbf{r})$ можно представить в виде суперпозиции некоторых функций $\boldsymbol{\varphi}_k(\mathbf{r})$, которые назовём базисными функциями ВЭ, с интенсивностью α_k:

$$\mathbf{\Omega}(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \boldsymbol{\varphi}_k(\mathbf{r}) \tag{2}$$

Завихренность является по определению соленоидальным (бездивергентным) полем. Следовательно, желательно, чтобы и базисные функции также были соленоидальными, иначе их суперпозиция будет нарушать фундаментальные свойства вихревых полей, такие как замкнутость вихревых линий, нулевой поток завихренности через замкнутую поверхность и пр.

Существует способ выделить соленоидальную часть из любой достаточно быстро убывающей на бесконечности функции [3]. Это позволяет использовать любые «удобные» функции в качестве заготовок для базисных функций ВЭ.

Пусть $\boldsymbol{\varphi}_{\sim}(\mathbf{r})$ – некоторая непрерывная векторная функция. Соотношение (3) является одной из форм выделения соленоидальной части $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r})$ функции $\boldsymbol{\varphi}_{\sim}(\mathbf{r})$ [3].

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\varphi}_{\sim}(\mathbf{r}) - \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \boldsymbol{\varphi}_{\sim}(\mathbf{r}_0) \cdot \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} dV_0 \,, \tag{3}$$

где интегрирование производится по переменной $\mathbf{r}_0$.

Всё разнообразие методов ВЭ заключается в выборе удобной функции $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r})$ или $\boldsymbol{\varphi}_{\sim}(\mathbf{r})$ (и последующего выделения бездивергентной части $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r})$), которая принимается в качестве базисной функции ВЭ $\boldsymbol{\varphi}_k(\mathbf{r})$. Для каждого такого ВЭ можно восстановить поле скорости, индуцируемое $\boldsymbol{\varphi}_k(\mathbf{r})$ с помощью формулы Био-Савара:

$$\mathbf{V}_k(\mathbf{r}) = \mathbf{V}_\infty + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\boldsymbol{\varphi}_k(\mathbf{r}_0) \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}{4\pi |\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} dV_0 \ . \tag{4}$$

Далее с помощью уравнения Гельмгольца получаются дифференциальные уравнения относительно интенсивностей α_k ВЭ.

Рассмотрим некоторые модели ВЭ.

Метод вортонов. В качестве базисной функции выбирается δ-функция в трёхмерном пространстве, что имеет смысл некоторой «концентрации» завихренности в несущей её материальной точке. Такие ВЭ называются *вортонами*.

$$\mathbf{\Omega}(\mathbf{r},t) = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{\gamma}_k(t) \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_k(t)) \,, \tag{5}$$

где $\boldsymbol{\gamma}_k(t)$ – интенсивность вортона – векторная функция времени, физический смысл которой – интеграл вектора завихренности по любому малому объёму вокруг вортона, расположенного в точке $\mathbf{r}_k$. Наличие δ-функции позволяет избавиться от интеграла в (4), что даёт простое выражение для наведённой скорости вортона:

$$\mathbf{V}_k(\mathbf{r}) = \frac{\boldsymbol{\gamma}_k \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}_k)}{4\pi |\mathbf{r}-\mathbf{r}_k|^3} \tag{6}$$

Поле скорости, наведённое системой вортонов, получается суперпозицией (6) и скорости на бесконечности $\mathbf{V}_\infty$:

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \mathbf{V}_\infty + \sum_{k=1}^{n} \frac{\boldsymbol{\gamma}_k \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}_k)}{4\pi |\mathbf{r}-\mathbf{r}_k|^3} \tag{7}$$

При движении вортонов вектор их интенсивности $\boldsymbol{\gamma}_k$ деформируется. Уравнение деформации вортонов получается как решение уравнения Гельмгольца в слабом смысле, т.е. в среднем по некоторому объёму V:

$$\int_V \frac{D\mathbf{\Omega}}{Dt} dV = \int_V \mathbf{\Omega} \cdot \nabla \mathbf{V} dV \tag{8}$$

После несложных преобразований получается следующая система уравнений, полностью описывающую метод вортонов в самой базовой классической постановке:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_k &= \mathbf{V}(\mathbf{r}_k, t), \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}}_k &= \boldsymbol{\gamma}_k \cdot \nabla \mathbf{V}(\mathbf{r}_k, t) \end{aligned} \tag{9}$$

где $\nabla \mathbf{V}(r_k, t)$ можно найти аналитически, используя (7).

Вортон Новикова. Недостатком классических вортонов является то, что ¢ -функция не описывает соленоидальное поле, а значит нарушаются фундаментальные свойства вихревого движения. Это неизбежно будет приводить к накоплению ошибки даже если векторное поле, выбранное в качестве начального условия для завихренности, было соленоидальным. Для получения базовой функции вортона Новикова воспользуемся соотношением (3) и получим базовую функцию в следующем виде

$$\boldsymbol{\varphi}_k(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\gamma}_k \text{¢}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) + \frac{1}{4\text{®}} \left(\frac{3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k)(\boldsymbol{\gamma}_k \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_k))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|^5} - \frac{\boldsymbol{\gamma}_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|^3} \right) \tag{10}$$

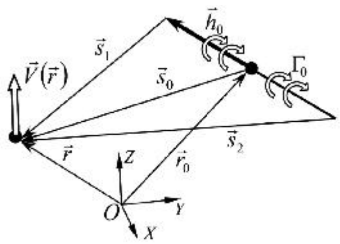
где первое слагаемое описывает сингулярную часть (классический вортон), а второе описывает добавочную завихренность, дополняющую исходное поле до соленоидального.

Подставляя (10) в (8) и используя равенство $\mathbf{\Omega} \cdot \nabla \mathbf{V} = \mathbf{\Omega} \cdot [\nabla \mathbf{V}]^T$, опустив ряд выкладок, можно получить следующее разрешающее уравнение деформации вортона:

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}_k = \frac{3}{4\text{®}} \sum_{t \neq k} \left[-\frac{1}{2} \frac{\boldsymbol{\gamma}_t \times \boldsymbol{\gamma}_k}{|\mathbf{r}_{kt}|^3} + 3 \frac{\mathbf{r}_{kt}(\mathbf{r}_{kt} \cdot (\boldsymbol{\gamma}_t \times \boldsymbol{\gamma}_k))}{|\mathbf{r}_{kt}|^5} - \frac{1}{2} \frac{(\boldsymbol{\gamma}_k \times \mathbf{r}_{kt})(\boldsymbol{\gamma}_t \cdot \mathbf{r}_{kt})}{|\mathbf{r}_{kt}|^5} \right] \tag{11}$$

где $\mathbf{r}_{kt} = \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_t$.

Вортон-отрезок. Точечные вортоны Новикова являются не очень удачным примером базовой функции, поскольку геометрия вихревого поля такого вортона не позволяет в полной мере учитывать процессы деформации, перезамыкания вихревых линий. В этом смысле более удачной является модель вихревого отрезка – «фрагментона» (см. рис). Фрагментон представляет собой направленный отрезок длиной $2h$, который можно ассоциировать с участком вихревой линии. Базисная функция завихренности фрагментона получается интегрированием вдоль своей длины базисной функции вортона Новикова (10) (сингулярную и добавочную части) [4].



$$\begin{aligned} \mathbf{\Omega}_f(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, \mathbf{h}_0, \boldsymbol{\gamma}_0) &= h\boldsymbol{\gamma}_0 \int_{-1}^{1} \delta(\mathbf{r} - (\mathbf{r}_0 + \mathbf{h}_0 s)) \cdot \mathbf{e}_0 ds - \\ &- h\boldsymbol{\gamma}_0 \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^{1} \left(\frac{\mathbf{e}_0}{|\mathbf{r} - (\mathbf{r}_0 + \mathbf{h}_0 s)|^3} - \frac{3(\mathbf{r} - (\mathbf{r}_0 + \mathbf{h}_0 s))((\mathbf{r} - (\mathbf{r}_0 + \mathbf{h}_0 s)) \cdot \mathbf{e}_0)}{|\mathbf{r} - (\mathbf{r}_0 + \mathbf{h}_0 s)|^5} \right) ds \end{aligned} \tag{12}$$

где $\mathbf{e}_0$ – единичный вектор, направленный вдоль фрагментона, h – длина, $\mathbf{h}_0 = h\mathbf{e}_0$. Этот интеграл берётся аналитически. Подробности и конечный вид базисной функции завихренности и индуцируемого поля скорости можно найти в [4].

Для вывода уравнения деформации фрагментона авторы используют уравнение типа (9), где вместо $\boldsymbol{\gamma}_k$ стоит вектор $\mathbf{h}_k$. Такой подход, однако, не в полной мере учитывает влияние добавочной завихренности. Получение более точного уравнения на основании (8) требует дополнительного исследования.

С помощью вортонов-отрезков можно более точно моделировать протяжённые вихревые структуры, замкнутые структуры, типа вихревых колец, вихревых рамок, чем точечные вортоны Новикова. Расчёты и исследования [4] показывают, что требуется значительно меньше отрезков, чем точечных вортонов Новикова для адекватного аппроксимирования вихревых структур. В работе [5] также делается вывод о предпочтительности использования вортонов-отрезков по сравнению с ВЭ точечного типа.

Сглаженные ВЭ. Наличие δ-функции во всех данных моделях приводит к сингулярности поля скорости ВЭ – при приближении к центру ВЭ скорость растёт до бесконечности. Это является причиной неустойчивости счёта. Поэтому на практике чаще используются *сглаженные вортоны* – в которых δ-функция заменяется какой-либо δ-образной функцией [6-8]. В этом случае вортон имеет характерный размер ε, который характеризует область пространства, занятого завихренностью.

В работах [6,8] приведены оценки и конкретный вид и требования к δ-образным функциям, подходящим на роль сглаживающих для ВЭ. Определяются порядки и условия сходимости МВЭ при использовании таких функций. Следует отметить, что их использование зачастую приводит к громоздким и сложным для вычисления уравнениям.

В работе [4] также представлен простой вариант сглаживания сингулярного фрагментона с помощью ядра с постоянной завихренностью радиуса ε. Хотя расчёты обтекания плоских и пространственных профилей показывают хорошее совпадение с экспериментальными данными [5], оценки погрешностей такого подхода и порядков сходимости методов не проводились. Требуется проведение дополнительных исследований для анализа сходимости и влияния на неё различных параметров численной схемы (например, размер ядра вортона ε).

МВЭ с учётом вязкости. Метод обмена интенсивностями (PSE)

Все приведённые модели получены для идеальной жидкости, в которой не учитываются процессы вязкого трения и диссипации энергии. Наличие вязкости вносит сложности в МВЭ, поскольку ВЭ уже не движутся вместе с жидкими частицами, а движутся с т.н. скоростью Фридмана (диффузионная скорость [2]). Для двумерного [2] и осесимметричного [1] течений скорость Фридмана известна, и несложные модификации приведённых выше моделей позволяют построить МВЭ, учитывающий вязкость жидкости. Нахождение скорости Фридмана для трёхмерного течения является пока нерешённой задачей.

Альтернативным подходом к учёту вязкости является метод обмена интенсивностями (PSE), который строится на основе сглаженных вортонов. Принимается, что ВЭ продолжают двигаться вместе с жидкими частицами, их несущими, но интенсивность ВЭ меняется при взаимодействии с ближайшими ВЭ.

Для вязких несжимаемых трёхмерных течений уравнение переноса завихренности имеет вид

$$\frac{D\mathbf{\Omega}}{Dt} = \mathbf{\Omega}\cdot\nabla\mathbf{V} + \nu\Delta\mathbf{\Omega} \qquad (13)$$

Лапласиан вектора завихренности в правой части можно аппроксимировать с помощью интеграла [8]

$$\Delta f(\mathbf{x}) \simeq 2\int (f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}))\eta_\sigma(\mathbf{x}-\mathbf{y})d\mathbf{y} \qquad (14)$$

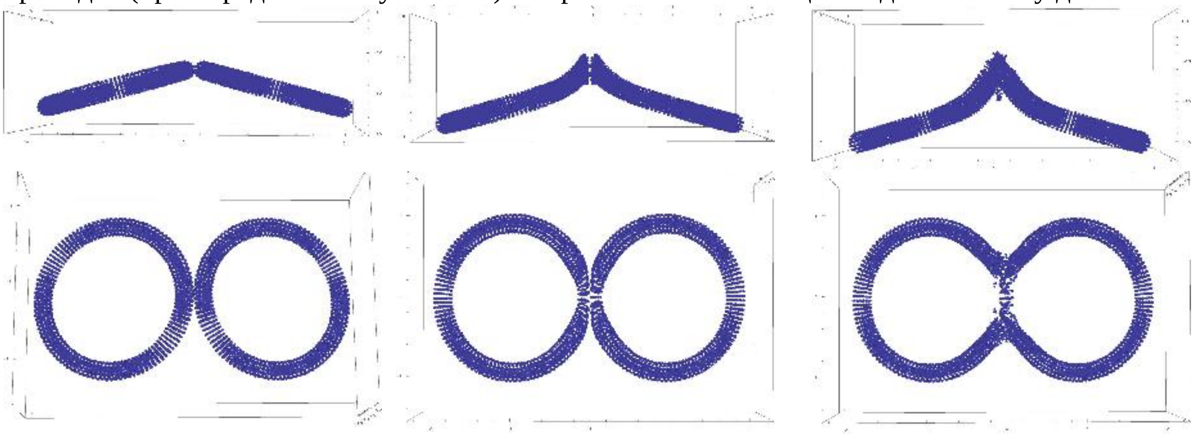
где $\eta_\sigma(\mathbf{x})$ – функция, зависящая от выбранной сглаживающей функции вортонов. Для вычисления (14) достаточно представить $\mathbf{\Omega}$ как суперпозицию полей ВЭ (2) и посчитать интеграл.

В работе [8, с.144] приведён результат применения данной методики к вортонам Новикова с алгебраической сглаживающей функцией. Следует отметить, что PSE пока остаётся нереализованным в модели вортонов-отрезков, что является темой ведущихся исследований.

3. Пример расчёта соударения двух вихревых колец с использованием МВЭ

В качестве примера рассмотрим задачу о соударении двух вихревых колец конечной толщины, расположенных под углом друг к другу. Эта задача представляет сложность для классических невязких МВЭ, поскольку при касании колец происходит процесс их разрыва и перезамыкания, образуя различные вихревые структуры в зависимости от начальных условий. Процесс перезамыкания не может быть описан моделью идеальной жидкости, поскольку в месте касания колец возникает сингулярность, и скорость ВЭ неограниченно растёт. Это приводит к резкому накоплению ошибки и «взрыву» расчёта.

В реальности в месте касания происходит диссипация энергии за счёт сил вязкости, что приводит (при определённых условиях) к перезамыканию колец и их дальнейшему движению.



t = 0 t = 1.7 t = 3.5

На рисунке приведены результаты расчёта перезамыкания колец методом сглаженных вортонов Новикова без учёта вязкости. Радиусы колец – 1, радиус ядра – 0.1, циркуляция 1, углы наклона колец к вертикали – 10°, расстояние между центрами колец – 2, количество вортонов – 5540. Как и ожидалось, полного перезамыкания вихревых линий колец невязким методом достичь не удаётся, и решение распадается при $t = 3.5$. Тем не менее, в решении наблюдается правильная динамика деформации и разрыва колец.

В дальнейшем планируется моделирование этой же задачи с помощью вязких МВЭ. В частности, в работе [8] с использованием методики PSE достигнуто полное перезамыкание колец, приводящее либо к образованию единственного цельного кольца, либо к образованию двух колец, перезамыкающихся в другом направлении.

Этот расчётный случай стоит в одном ряду с другими задачами динамики движения вихревых колец в трёхмерном пространстве, удобных для отладки и тестирования моделей и алгоритмов МВЭ. Для некоторых из них известны аналитические результаты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сизых Г.Б. Эволюция завихренности в закрученных осесимметричных течениях вязкой несжимаемой жидкости // Учёные записки ЦАГИ. 2015. № 3. С.14-20.
2. Дынникова Г.Я. Движение вихрей в двухмерных течениях вязкой жидкости // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2003. № 5. С.11-19.
3. Басин М.А., Корнев Н.В. Аппроксимация поля завихренности в безграничном объёме // Журнал технической физики. 1994. Т.64, № 11. С.179-185.
4. Marchevsky I.K., Scheglov G.A. 3D Vortex Structures Dynamics Simulation Using Vortex Fragmentons // ECOMAS 2012 – European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering. 2012. С.5716-5735.
5. Щеглов Г.А. Модификация метода вихревых элементов для расчёта гидродинамических характеристик гладких тел // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2009. № 4. С.8-12.
6. Cottet G.H., Koumoutsakos P.D. Vortex Methods: theory and practice. Cambridge: CUP, 2000. 326p.
7. Alkemade A.J.Q. On Vortex Atoms and Vortons: PhD Thesis. Delft, Netherlands, 1994.
8. Winckelmans G.S. Topics in Vortex Methods for the Computation of Three- and Two-Dimensional Incompressible Unsteady Flows. PhD Thesis. Pasadena, 1989.

Сведения об авторе:

Коцур Олег Сергеевич – аспирант, Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана, +7(499)263-63-10, **E-mail:** oskotsur@gmail.com;

ИЗМЕРЕНИЯ УПРУГИХ МОДУЛЕЙ В ОБЪЁМНЫХ НАНОСТРУКТУРИРОВАННЫХ МАТЕРИАЛАХ, ПОЛУЧЕННЫХ ИНТЕНСИВНЫМИ ПЛАСТИЧЕСКИМИ ДЕФОРМАЦИЯМИ

Магомедова Д.К.

В последнее время большое внимание уделяется новому классу материалов – с наноразмерными особенностями, свойства которых отличаются от традиционно используемых материалов. Существует целый ряд методов получения объёмных наноструктурированных материалов, к которым относятся, в частности, методы синтеза порошков и их консолидации, в итоге получают материалы, в которых размер зёрен составляет всего несколько нанометров. Таким образом, их внутренняя структура отличается от структуры в традиционных материалах.

Наноструктурным материалам часто соответствуют изменённые фундаментальные характеристики, такие как упругие модули, температуры Кюри и Дебая и др. Знание подобных величин поможет улучшить или создать новые материалы [1].

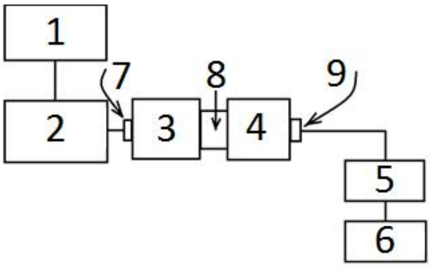
Упругие свойства относятся к фундаментальным характеристикам материала, которые определяют механические свойства, что представляет собой большой практический интерес. Зная эти данные, можно предсказать поведение материала при определённых нагрузках.

В данной работе рассматривается применимость трёх наиболее распространённых методик для нахождения упругих характеристик твёрдого тела, таких как модуль Юнга и коэффициент Пуассона посредством измерения продольной и поперечной скорости распространения звуковых волн в наноструктурированных материалах. По полученным из этих методов данным можно увидеть профили прохождения волн нагрузки по материалу, что может расширить область применения полученных данных.

С помощью измеренных значений продольной V_l и поперечной V_t скоростей распространения волн считались значения параметров, характеризующих упругое состояние тела: $V_l = \sqrt{\frac{E(1-\mu)}{\rho(1+\mu)(1-2\mu)}}$, $V_t = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$, где $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ – модуль сдвига, E – модуль Юнга, μ – коэффициент Пуассона.

Ниже приведены непосредственно методики по проведению экспериментов.

Резонансный метод. Для измерения скорости в образец перпендикулярно к его граням вводится достаточно короткий высокочастотный ультразвуковой импульс. Для введения звукового импульса используется кварцевый преобразователь, который приклеивается к одному из торцов образца. Радиоимпульс от передатчика прикладывается к двум параллельным плоскостям пластинки преобразователя, и в ней в результате пьезоэлектрического эффекта возбуждается упругая волна, которая распространяется в образец. В качестве приёмника используется второй преобразователь на противоположном торце образца. Исходный импульс, пройдя по образцу, отражается от противоположной границы и лишь часть звуковой энергии передаётся преобразователю, с помощью которого превращается обратно в электрический сигнал, который усиливается усилителем и затем поступает на осциллограф **[2]**.

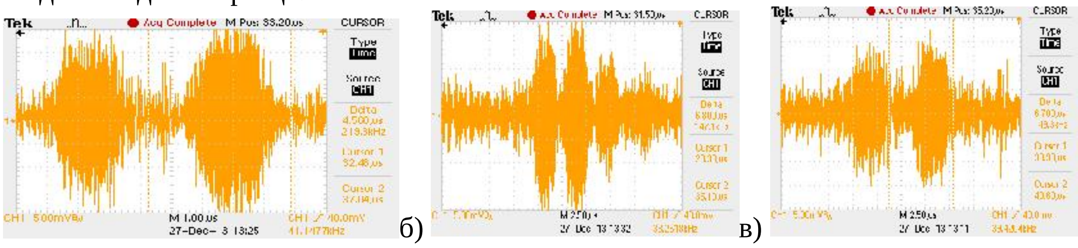


1–генератор прямоугольных импульсов; 2 – генератор высокочастотных импульсов; 3,4 – волновод; 5 – усилитель; 6 – осциллограф; 7 – пьезодатчик генератора; 8 – образец; 9 – пьезодатчик приёмника.

Рис.1. Схема установки.

На осциллографе наблюдаются многократные отображения импульса от плоскопараллельных граней. Время между двух последовательных сигналов – время двойного прохождения импульса по образцу. Таким образом, продольная скорость: $v_l = \frac{2l}{t}$, где l –длина образца, t – время двойного прохождения импульса по образцу.

В ходе работы использовались образцы различной толщины. На рис.2 приведены осциллограммы для каждого образца.

а) 

б) в)

Рис.2. Осциллограммы акустического сигнала для образцов Ti толщиной: а) h = 19,5 мм, б) h =14 мм; в)h = 9,6 мм.

Можем рассчитать продольную скорость звука:

h, толщина образца Ti, мм	v_l *, продольная скорость звука,* $\frac{мм}{мкс}$
19,49	5,8 – 6
13,98	6,1
9,6	5,8

К сожалению, толщина представленных образцов оказалась слишком большой, что не позволило получить данные по поперечным волнам, т.к. сигнал затухал внутри материала. Чтобы найти толщину образцов для применимости данного метода, требуются дополнительные исследования. Нас же интересуют достаточно «массивные» образцы. Данный метод полностью не решает представленную задачу.

Импульсный метод [3]. Производился удар электронным пучком по Al мишени, в ней возбуждался импульс механических напряжений. За мишенью был установлен датчик давления, с помощью которого регистрировалось время распространения волны по образцу (рис.3).

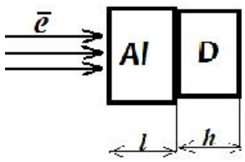


Рис.3. Инициация звукового импульса в Al.

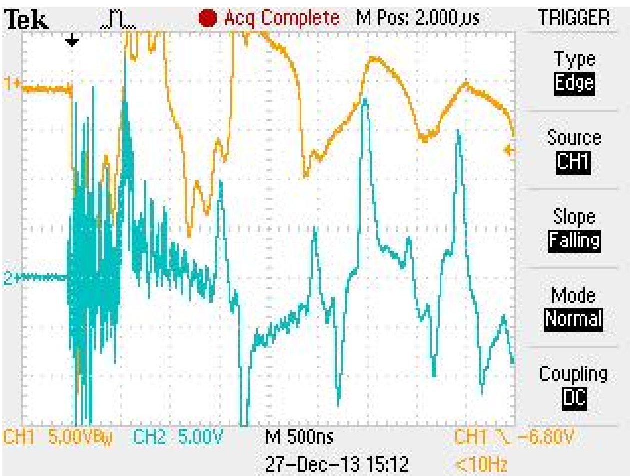


Рис. 4. Осциллограмма звукового импульса в Al.

По выделенному времени рассчитали продольную скорость звука в Al: $V_{Al} = \frac{6мм}{0{,}98мкс} = 6{,}1\ {}^{мм}\!/_{мкс}$ (рис.4).

Далее к Al пристыковывался образец наноструктурированного Ti, а за ним располагали пьезодатчик (рис.5). В полученном сигнале будет наводка из-за методики проведения эксперимента, но наводка будет происходить в то время, когда сигнал распространяется по Al. Скорость распространения волны по Al мы знаем, поэтому может посчитать время распространения по образцу любой длины, следовательно, по итоговой осциллограмме можем выделить сигнал в Ti и посчитать скорость в нём.

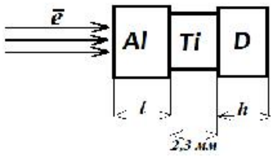


Рис.5. Схема инициация звукового импульса в Ti.

Ниже на рис.6 представлены осциллограммы, полученные при данной методике для различ–ных образцов Ti с толщиной h=2,3мм.

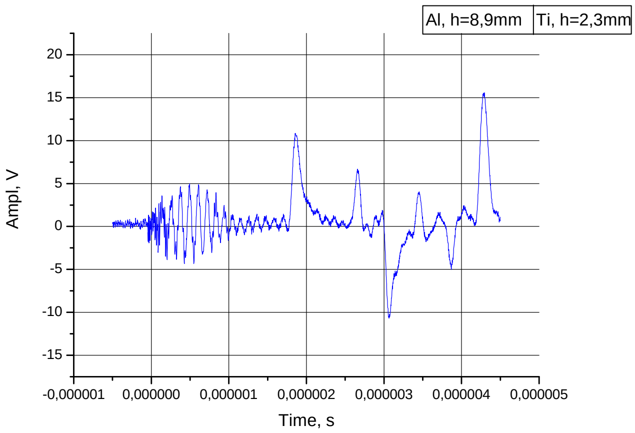


Рис. 6. Осциллограмма звукового импульса в схеме Al+Ti.

Можем рассчитать продольную скорость звука:

h, толщина образца Ti, мм	*v_l, продольная скорость звука, $\frac{мм}{мкс}$*
2,3	5,9
2,3	5,85

Данным методом не удалось измерить поперечную скорость волны, т.к. возникла необходимость создания специального датчика для принятия сигнала, поэтому он также не дал нам полного решения поставленной задачи

Оптико-акустический метод [4]. Из прозрачной среды на границу раздела с поглощающей средой падает лазерный импульс. За счёт неоднородного нагрева при поглощении лазерного излучения среда расширяется, и в ней возникает импульс давления. На границе часть энергии отражается зеркально, часть проходит в поглощающую среду, а оставшаяся часть рассеивается. Оптико-акустический дефектоскоп позволяет контролировать одновременно отражённые и проходящие акустические импульсы в исследуемых образцах.

Дефектоскоп схематически изображён на рис.7. Импульс лазера (1) направляется в оптическое кварцевое волокно (2). Лазерный импульс, вышедший из волокна, через фаску на боковой поверхности прозрачного цилиндра (3) падает на противоположную поверхность цилиндра с нанесённым на неё поглощающим слоем (7). В этом слое генерируются акустические сигналы. Цилиндр с плоскопараллельными шлифованными основаниями является одновременно звукопроводом для термооптически возбуждаемых в образце сигналов. Эти сигналы регистрируются широкополосным пьезоприемником (5)(10 мкм). Акустический контакт исследуемого образца с лицевой поверхностью цилиндра-звукопровода (3) обеспечивается через тонкий слой воды (7). С пьезоприемника (5) сигнал поступал на цифровой осциллограф TDS – 754 (6).

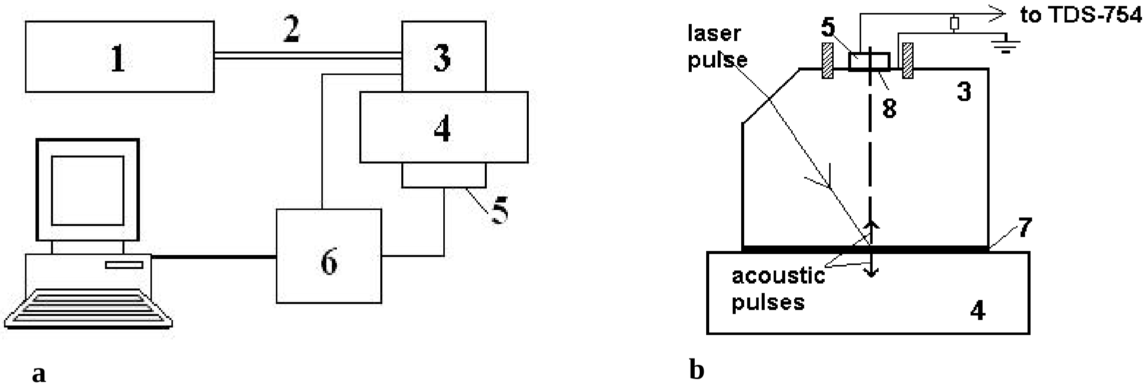


Рис.7. Схема дефектоскопа: а) двухсторонний доступ к образцу; б) съемным днище дефектоскопа: 1 - лазер, 2 - оптическое волокно, 3 - головка дефектоскопа, 4 - образец, 5 - пьезодатчик, 6 – сциллограф, 7- абсорбирующий слой, 8 - отражающий слой.

На рис.8. представлены осциллограммы для различных образцов Ti, с помощью которых считаем продольную скорость распространения волн, измерения проводились по нулевому уровню:

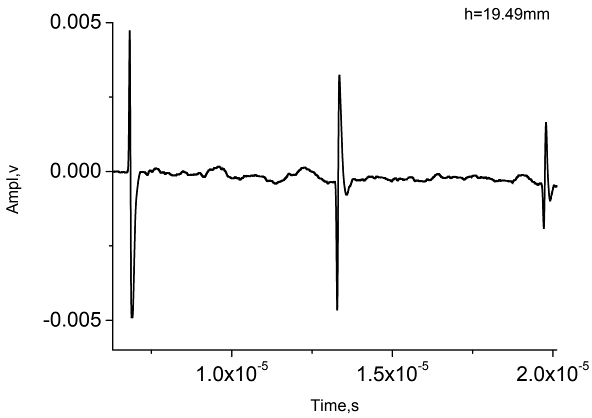


Рис. 8. Осциллограмма звукового импульса в Ti OA метода.

На рис.9 представлена осциллограмма, с помощью которой считаем поперечную скорость распространения волн в Ti.

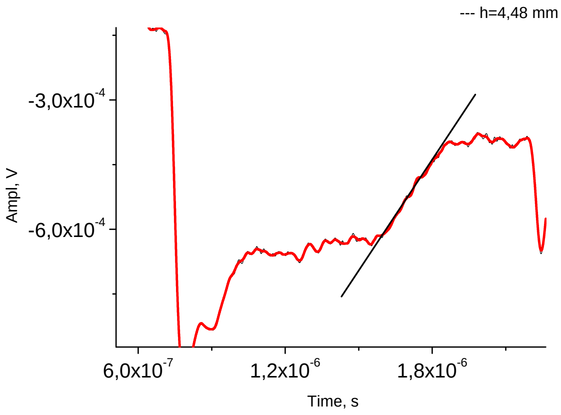


Рис.9. Осциллограмма звукового импульса в Ti ОА метода.

Ниже представлены численные данные для нанотитана, исследуемого ОА методом:

h, толщина образца Ti, мм	v_l, *продольная скорость звука*, $\frac{мм}{мкс}$	v_t, *поперечная скорость звука*, $\frac{мм}{мкс}$
19,49	*6,049*	
13,98	*6,045*	
4,48	*6,001*	*2,9-3,05*

Результаты измерения плотности (метод гидростатического взвешивания):

Нано-Ti	$\rho = 4,4326 \frac{гр}{см^3}$
Исходный Ti	$\rho = 4,2790 \frac{гр}{см^3}$

С помощью ОА метода получены значения продольной и поперечной скоростей звука в наноструктурированном титане. Эти значения: модуль Юнга $E = 1{,}18 \cdot 10^{11}$ (Па) и коэффициент Пуассона $\mu = 0,33$. Они отличаются от табличных: $E = 1{,}12 \cdot 10^{11}$ (Па) и коэффициент Пуассона $\mu = 0,32$. Это показывает влияние наноструктурирования на упругие свойства титана. Данный метод оказался эффективным для измерения упругих свойств объёмного наноструктурированного Ti.

Заключение. В данной работе были рассмотрены только 3 метода, один из которых оказался действующим для данного типа материалов.

В настоящее время ведутся дальнейшие исследования по применению различных методов для измерения упругих свойств наноматериалов для получения более широкого спектра данных

ЛИТЕРАТУРА

1. Валиев Р.З., Александров И.В. Объёмные наноструктурные металлические материалы. ИКЦ «Академкнига» , 2007.
2. Физическая акустика, Т.1, ч. А, Метод и приборы ультразвуковых исследований/ под ред. У. Мэзона – М.: Мир, 1966. – с. 592.
3. B.F. Vorobiev, U. Daubayev, I.P. Makarevich, V.A. Morozov, A.I. Nedbay, Yu.V.Sud'enkov/ Experimental studies of high-speed loading of materials / / Physical mechanics. -L.: LGU, 1984. N5. - pp. 144-169.
4. V. E. Gusev, A. A. Karabutov/ Laser Optico-acoustics // Nauka, Moscow, 1991.

Сведения об авторе:

Магомедова Дарья Курбановна – младший научный сотрудник Исследовательской лаборатории механики массивных перспективных наноматериалов в Санкт-Петербургском Государственном Университете**. E-mail:** magmedva.dasha@mail.ru/

К ТЕОРИИ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Максимова Л. А., Юденков А. В.

В статье развивается стохастическая теория потенциала в связи с её применением к решению основных задач теории упругости. Особое внимание уделяется задаче Дирихле для *N*-аналитических функций. Актуальность темы исследования связана с тем, что теория стохастических краевых задач на классе *N*-аналитических функций только формируется.

В работе дана точная математическая постановка стохастической задачи Дирихле для N-аналитической функции. Разработан необходимый математический аппарат. Доказана теорема о существовании и единственности решения. Получен общий алгоритм решения стохастической задачи Дирихле для достаточно широкого класса областей и контуров, исследована её устойчивость. Даётся пример решения первой основной задачи теории упругости с применением стохастической задачи Дирихле для *n*-аналитических функций.

При исследовании использовалась теория краевых задач для аналитических и бианалитических функций, краевые свойства X-аналитических функций, свойства стохастических дифференциальных систем.

Введение

Задача Дирихле является одной из важнейших задач теории потенциала. Её значение определяется, в основном, двумя причинами: во-первых, она служит основой для решения более сложных краевых задач (задача Гильберта, задача Римана и др.) [4], во-вторых, с её помощью можно определить комплексный потенциал стационарного векторного поля [3]. В большинстве работ задача Дирихле рассматривается для аналитических (гармонических) функций. Это связано с тем, что комплексный потенциал наиболее практически важных векторных полей является аналитической функцией. Несколько особняком стоят краевые задачи статической теории упругости для изотропного тела и тела, обладающего прямолинейной анизотропией. В этом случае комплексный потенциал представляет собой либо бианалитическую функцию, либо аналитический вектор от бианалитических аргументов [1], [4].

В настоящее время можно выделить два основных способа решения задачи Дирихле для аналитических функций. Первый основан на использовании свойств интеграла типа Коши и уравнений Фредгольма 2-го рода. Наиболее полное решение задачи Дирихле указанным методом можно найти в работе Н.И. Мусхелишвили [4]. Помимо этого, начиная с 1923 года, разрабатывался вероятностный подход к решению задачи Дирихле и её обобщений. В 1944 году С. Какутани показал, что решение краевой задачи Дирихле может быть выражено в терминах броуновского движения. Второй подход позволяет существенно ослабить условия, накладываемые на краевые коэффициенты задачи. Это приводит к тому, что задачу Дирихле можно рассматривать в стохастической постановке [5].

Стохастическая задача Дирихле на более широком классе *n*-аналитических функций не рассматривалась. Краевые задачи для *n*-аналитических функций были поставлены Ф.Д. Гаховым с целью дать обобщённую модель основных задач теории упругости для однородных изотропных тел [2]. На сегодняшний день теория краевых задач для *n*-аналитических функций в классической постановке достаточно развита [2], [10], [11]. Полученные решения успешно применяются для исследования основных задач теории упругости [8].
Цель данной работы: провести исследование одной из основных краевых задач – задачи Дирихле для *n*-аналитических функций в стохастической постановке.

Постановка задачи

Приведём основные обозначения, используемые в работе.
C – расширенная плоскость комплексного переменного z.
D – область (конечная или бесконечная) на плоскости C.
L – контур, ограничивающий область D.
$\bar{z} = x - iy$ – комплексно-сопряжённая величина.
Греческими буквами будем обозначать аналитические функции в области D.
$H(L)$ – класс функций, удовлетворяющих на контуре L условию Гельдера

$\left|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)\right| < A\left|t_2-t_1\right|^{\mu}$.

σ –произвольная точка на контуре L.

$\tau_U = \inf\{t>0, X(z)\notin D\}$ – первый момент выхода из D диффузного процесса Ито $\{X(t)\}$.

M(*) – математическое ожидание.

Определение 1. F(z) называется *n*-аналитической функцией в области *D*, если она является решением уравнения

$$\frac{\partial^n F(z)}{\partial \bar{z}^n} = 0. \qquad (1)$$

Можно дать равносильное определение [12], [10].

Определение 2. Функцию *F*(*z*), заданную в некоторой конечной области *D*, назовём *n*-аналитической, если она представима в виде

$$F(z)=\sum_{k=0}^{n-1}\bar{z}^k\varphi_k(z), \qquad (2)$$

где $\varphi_k(z)$ – аналитические компоненты.

В случае, когда *n*=2, функция называется бианалитической

$$F(z)=\varphi_0(z)+\bar{z}\varphi_1(z). \qquad (3)$$

В детерминированном случае задача Дирихле для *n*-аналитических функций формулируется следующим образом.

Требуется определить неизвестную *n*-аналитическую функцию в области D по краевым условиям:

$$\operatorname{Re}\frac{\partial^{n-1}F(\sigma)}{\partial^{n-k}x\partial^{k-1}y}=c_k(\sigma), k=1,...,n. \qquad (4)$$

Здесь $c_k(\sigma)$ – заданные на контуре *L* функции класса $H^{(n-1)}(L)$.

Несложно заметить, что при *n*=1 задача (4) переходит в классическую задачу Дирихле для аналитических (гармонических) функций. При *n*=2 задача (4) представляет собой первую основную задачу упругости для изотропных однородных тел.

Сформулируем теперь стохастический вариант задачи (4).

Требуется определить неизвестную *n*-аналитическую функцию в области *D* по краевым условиям (4), где равенства выполняются почти наверное, $c_k(\sigma)$ принадлежит классу функций, имеющих производную степени (*n*-1), сходящуюся в среднем квадратическом.

Возникает вопрос, вопрос о существовании решения задачи Дирихле для *n*-аналитических функций, удовлетворяющих определениям 1,2. В общем случае ответ отрицателен [5.c.215]. Для решения задачи (4) необходимо расширить понятие *n*-аналитической функции.

Математический аппарат

Введём понятие *N*-аналитической функции.

Определение 3. Функция

$$F(z)=U(x,y)+iV(x,y)=\varphi_0(z)+\bar{z}\varphi_1(z)+...+\overline{z^n}\varphi_n(z)$$

в области *D* называется *N*-аналитической, если для всех $z\in D$ и всех открытых множеств *w*, для которых $\bar{w}\in D$, аналитические компоненты $\varphi_0(z),...,\varphi_n(z)$ представимы в следующем виде:

$$\varphi_k(z)=U_k(x,y)+iV_k(x,y)=M(U_k(X_{\tau_w},Y_{\tau_w}))+iM(V_k(X_{\tau_w},Y_{\tau_w})),(k=0,...,n). \qquad (5)$$

Функции U_k и V_k связаны между собой соотношениями Коши-Римана.

Справедливо утверждение.

Теорема 1. Пусть *F* – *N*-аналитическая функция, тогда

$$A^nF=0,$$

где $Af(z)=\lim\limits_{w\to z}\dfrac{M(f(z_{\tau_w}))-f(z)}{M(\tau_w)}$ – характеристический оператор.

Обратно, если $F\subset C^{2n}(D)$ и $A^nF=0$, то F – N-аналитическая функция.

Доказательство. Для доказательства при n=2 достаточно дважды применить к функции $F(z)=\varphi_0(z)+\bar{z}\varphi_1(z)$ характеристический оператор.

Для доказательства обратного утверждения воспользуемся формулой Дынкина ([5].с.235):

$$M(F(z_{\tau_w}))=\varphi_0(z)+\lim_{k\to\infty}M\left(\int_0^{\tau_w\wedge k}(A\varphi_0)(z_s)ds\right)+\bar{z}\cdot\lim_{k\to\infty}M\left(\int_0^{\tau_w\wedge k}(A\varphi_1)(z_s)ds+\varphi_1(z)\right)=\varphi_0(z)+\bar{z}\varphi_1(z).$$

Теорема доказана.

Таким образом, N-аналитическая функция является стохастическим аналогом n-аналитической функции. С другой стороны, N-аналитическая функция является естественным обобщением Х-аналитических функций, широко используемых в теории случайных процессов [5], [9].

Решение задачи

С учётом предыдущих пунктов сформулируем стохастическую задачу Дирихле.

Требуется определить неизвестную N-аналитическую функцию

$$F(z)=\varphi_0(z)+\bar{z}\varphi_1(z)+\ldots+\overline{z^n}\varphi_n(z)$$

по краевым условиям:

$$\operatorname{Re}\left.\frac{\partial^{n-1}F(z)}{\partial^{n-k}x\partial^{k-1}y}\right|_{z=\sigma_{\tau D}}=c_k(\sigma_{\tau_D}),k=1,\ldots,n. \qquad (6)$$

С учётом (5) и соотношений:

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial\bar{z}},\ \ \frac{\partial}{\partial y}=i\left(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\right).$$

Условия (6) можно переписать в виде:

$$\operatorname{Re}\left\{i^{k-1}\sum_{\alpha=0}^{n-k}C_{n-k}^{\alpha}\sum_{\beta=0}^{k-1}(-1)^{\beta}C_{k-1}^{\beta}\sum_{p=\alpha+\beta}^{n-1}\frac{p!}{(p-\alpha-\beta)!}\bar{\sigma}^{p-\alpha-\beta}\cdot(\varphi_p(\sigma_{\tau_D}))^{(n-\alpha-\beta-1)}\right\}=c_k(\sigma_{\tau_D}). \qquad (7)$$

Исследование задачи начнём со случая, когда контур L представляет собой единичную окружность. В этом случае на контуре выполняется условие

$$\bar{\sigma}=\frac{1}{\sigma}. \qquad (8)$$

Введём вспомогательные функции:

$$\Phi_k(z)=\sum_{\alpha=0}^{n-k}C_{n-k}^{\alpha}\sum_{\beta=0}^{k-1}(-1)^{\beta}C_{k-1}^{\beta}\sum_{p=\alpha+\beta}^{n-1}\frac{p!}{(p-\alpha-\beta)!}\left(\frac{1}{z}\right)^{p-\alpha-\beta}\left(\varphi_p(z)\right)^{(n-\alpha-\beta-1)}. \qquad (9)$$

Учитывая (8), можно переписать условие (7) в следующем виде:

$$\operatorname{Re}\left\{\Phi_k(\sigma_{\tau_D})\right\}=c_k(\sigma_{\tau_D}). \qquad (10)$$

Рассмотрим первое уравнение системы (10).

$$\operatorname{Re}\left\{\Phi_1(\sigma_{\tau_D})\right\}=c_1(\sigma_{\tau_D}). \qquad (11)$$

Задача (11) является задачей Дирихле относительно 1-аналитической или X-аналитической функции.

Зафиксируем точку $z_0=0$. Пусть $\{D_k\}$ – возрастающая последовательность открытых множеств, содержащих точку z, причем $D_k\subset D$ и $D=\bigcup_k D_k$.

Положим $\tau_k = \tau_{D_k}$, $\tau = \tau_D$. Тогда в силу марковского свойства

$$\operatorname{Re}\Phi_1(Z_{\tau k}) = \lim_{k\to\infty} M^{z_{\tau k}}\left[c_1(z_\tau)\right] = M^z\left[c_1(Z_\tau)\middle|F_{\tau k}\right].$$

Справедливо следующее утверждение (см. [5] стр. 218):

$$\lim_{k\to\infty}\operatorname{Re}\Phi_1(Z_{\tau k}) = \lim_{k\to\infty} M^z\left[c_1(Z_\tau)\middle|F_{\tau k}\right] = c_1(z_\tau). \tag{12}$$

Здесь сходимость полагается почти для всех реализаций на пространстве $L^2(Q^z)$.

Рассмотрим следующий процесс

$$N_t = \Phi_1(z_{\tau k} \vee (t \wedge \tau_{k+1})) - \Phi_1(z_{\tau k}).$$

Данный процесс для любых значений k является мартингалом.

Справедлива оценка

$$Q^z = Q^z\left[\sup_{\tau_k \le s \le \tau_{k+1}}\left[\Phi_1(z_s) - \Phi_1(z_{\tau k})\right] > \varepsilon\right] \le \frac{1}{\varepsilon^2} M^z\left[\left|\Phi_1(z_{\tau_{k+1}}) - \Phi_1(z_{\tau_k})\right|^2\right]$$

Получим, что при $k \to \infty$ $Q^z \to 0$.

Следовательно, функция $\Phi_1(z)$ является решением задачи (11), что доказывает существование решения данной задачи.

Докажем единственность задачи.

Пусть $\psi(z)$ – Х-аналитическая функция. Тогда $\psi(z) = M^z(\psi(z_{\tau k}))$ для всех k.

Положим, что $\operatorname{Re}\left\{\psi(\sigma_{\tau_D})\right\} = c_1(\sigma_{\tau_D})$. Тогда

$$\operatorname{Re}\psi(z) = \lim_{k\to\infty} M^z\left[c_1(Z_\tau)\middle|F_{\tau k}\right] = c_1(z_\tau).$$

Таким образом, единственное решение задачи (11) даётся формулой

$$\Phi_1(z) = M(c_1(z_{\tau_D})) + i\left(\int_0^z -\frac{\partial M(c_1(z_{\tau_D}))}{\partial y}dx + \frac{\partial M(c_1(z_{\tau_D}))}{\partial x}dy\right) = G_1(z). \tag{13}$$

Аналогично, можно определить функции $\Phi_k(z)(k = 2, ..., n)$.

Искомые аналитические компоненты определим по формулам [2]:

$$\sum_{p=k-1}^{n-1}\frac{p!}{(p-k-1)!}\bar{z}^{\,p-k-1}\varphi(z)^{(n-k)} = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{q=0}^{n-k} C_{n-k}^q \sum_{\nu=0}^{k-1}(-1)^\nu C_{k-1}^\nu \Phi_{q+\nu+1}(z). \tag{14}$$

Подставляя в равенство (14) последовательно k=n, n-1, …,1, определим функции $\varphi_k(z)$.

Полученный метод решения можно распространить на случай, когда функция $\omega(\xi)$, конформно отображающая внутренность единичного круга на плоскости ξ на область D, является полиномом или рациональной функцией. Напомним, что для конечной области D конформно отображающая функция имеет вид:

$$\omega(\xi) = \alpha_1\xi + \alpha_2\xi^2 + ... + \alpha_g\xi^g.$$

Рассмотрим конечную область. В этом случае

$$\overline{\omega}\left(\frac{1}{\xi}\right) = \xi^{-g}(\overline{\alpha_1}\xi^g + \overline{\alpha_2}\xi^{g-2} + ... + \overline{\alpha_g}\xi). \tag{15}$$

Введём дополнительные функции, которые в силу соотношения (15) будут являться Х-аналитическими:

$$\Phi_k(\xi) = \sum_{\alpha=0}^{n-k} C_{n-k}^\alpha \sum_{\beta=0}^{k-1}(-1)^\beta C_{k-1}^\beta \sum_{p=\alpha+\beta}^{n-1}\frac{p!}{(p-\alpha-\beta)!}\overline{\omega}^{\,p-\alpha-\beta}\left(\frac{1}{\xi}\right)\left(\varphi_p(z)\right)_{z=\omega(\xi)}^{(n-\alpha-\beta-1)}. \tag{16}$$

С учётом (16) краевые условия (7) примут вид:

$$\operatorname{Re}\left\{\Phi_k(s_{\tau_D})\right\} = c_k(\omega(s_{\tau_D})). \tag{17}$$

Здесь s – текущая точка на единичной окружности γ. Система (17) исследуется аналогично системе (10). Для бесконечной области схема решения не изменяется.

Устойчивость задачи. Устойчивость задачи Дирихле для N-аналитических функций зависит от того, устойчивы ли задачи системы (11). Внешние факторы могут менять нагрузки на тело, что в краевых задачах (11) означает изменение параметров $c_k(\sigma)$. Согласно формуле (13) бесконечно малое изменение параметров $c_k(\sigma)$ приведёт к бесконечно малому изменению математического ожидания функций $\Phi_k(z)$. Такое свойство отвечает системам, устойчивым в p-квадратичном [6]. Обычно, выбирается сходимость в среднем квадратичном ($c_k \in L^2(Q^z)$).

Заключение. В работе исследована стохастическая задача Дирихле для N-аналитических функций для достаточно широкого класса контуров. Задача исследована на устойчивость. Приведены численные примеры. Введено понятие N-аналитической функции, исследованы её свойства. Практическая важность работы состоит в том, что разработанная теория позволит применять к решению основных задач теории упругости статистические методы.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 15-41-02453.

ЛИТЕРАТУРА

1. Володченков А.М., Юденков А.В. Моделирование основных задач плоской теории упругости однородных анизотропных тел краевыми задачами со сдвигом. //«Обозрение прикладной и промышленной математики», М.: 2006, вып.3. С.482-483.
2. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М: Наука, 1977. 640 с.
3. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М: Наука, 1973. 736с.
4. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
5. Оксендаль Б. Стохастические дифференциальные уравнения. М.: «Мир», 2003. 300с.
6. Пугачев В.С., Синицын И.Н. Теория стохастических систем. М.: Логос, 2004. 1000с.
7. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. Киев: «Наукова думка», 1975.
8. Редкозубов С.А., Юденков А.В., Володченков А.М. Моделирование процесса линейной деформации упругого однородного тела с помощью бианалитических функций. //Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я.Яковлева. №1(48), г.Чебоксары, 2006. С.128-137.
9. Хант Дж.А. Марковские процессы и потенциалы. М: Мир, 1962.
10. Юденков А.В. Краевые задачи со сдвигом для полианалитических функций и их приложения к вопросам статической теории упругости. Смоленск: «Смядынь». 2002. 268с.
11. Юденков А.В., Романков А.В. Стохастическая задача Дирихле для бианалитических функций в изотропной теории упругости. //Горный информационно-аналитический бюллетень: «Горная книга». 2012. №6. С.160-170.
12. Balk M.B. Polyanalytie functions // In Complex Analysis: Methools, Trends and Applications. Eds.: E. Lanckau, W. Tutschke. – Berlin: Akademie – Verlag, 1983. C.63-84.

Сведения об авторах:

Максимова Людмила Анатольевна–профессор кафедры строительных конструкций, профессор кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, Чувашский государственный педуниверситет им. И.Я. Яковлева, (8352) 62 22 83, (8352) 62 16 19.
E-mail: maximova_ng@mail.ru

Юденков Алексей Витальевич – профессор кафедры информационных технологий и высшей математики, Смоленская государственная сельскохозяйственная академия, (4812) 32 73 22.
E-mail: aleks-ydenkov@mail.ru

КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОВЕРХНОСТНО МОДИФИЦИРОВАННЫХ МАТЕРИАЛОВ И КОНСТРУКЦИЙ

Манжиров А.В., Казаков К.Е.

Поверхностная модификация является одним из самых эффективных и в то же время экономически выгодных способов существенного улучшения физико-механических свойств материалов и конструкций, а также создания их новых свойств, соответствующих заданным техническим характеристикам. Бурное развитие современных технологий, в том числе аддитивных технологий, в последнее время создало условия для существенного развития известных методов модификации поверхности так же, как и для разработки совершенно новых подходов. Известны два основных направления поверхностной модификации материалов и конструкций. Это физико-механическая и геометрическая модификации. К физико-механической модификации поверхности относятся, в частности, технологические процессы нанесения покрытий с разнообразными свойствами, лазерной и термической обработки, ионной имплантации, электрохимической обработки, радиационного облучения. К геометрической модификации поверхности относятся, например, процессы износа, шлифовки, ионное и плазменное воздействие. В работе обсуждаются математические модели и методы исследования деформирования, контактного взаимодействия и износа поверхностно модифицированных тел с покрытиями с учётом реальных физико-механических свойств материалов и геометрии поверхностных слоёв.

Работы по теоретическому и экспериментальному исследованию задач для тел с покрытиями, шероховатостями и физико-механическими и геометрическими модификациями с позиций механики стали все более привлекать внимание инженеров и учёных в 80-е годы XX века. Это внимание обусловлено двумя обстоятельствами. Первое – это сложившееся в научной мысли понимание того фундаментального факта, что закономерности поведения тел при деформировании во многом определяются свойствами их поверхности. Примером здесь может служить шлифовка поверхности, убирающая поверхностные трещины тела, и, таким образом, существенно увеличивающая его предел прочности. Второе обстоятельство – это начало интенсивного развития новых технологий, позволившее на порядки увеличить количество способов модификации или обработки поверхности.

Первыми задачами в рассматриваемой области стали контактные задачи и задачи износа для упругих однородных покрытий (см., например, [1–4]). Естественным развитием этих задач стали задачи для однородных вязкоупругих материалов, а затем и задачи для упругих и вязкоупругих тел с неоднородными по глубине покрытиями (см., например, [5, 6]). Усложнились и их математические модели. Дальнейшее развитие рассматриваемой проблематики было продолжено по пути исследования множественного контакта и износа тел со сложными свойствами и рассмотрены эволюционные системы контактирующих тел. Подобного рода задачи привели к необходимости исследования системы n интегральных уравнений и $2n$ дополнительных условий (n – количество штампов, действующих на слой).

Во всех упомянутых задачах построенное решение было эффективным в случае, когда форма участвующих в процессах контактного взаимодействия и износа тел была гладкой. Другими словами, в задачах о штампах можно было рассмотреть, фактически, только прямолинейную поверхность покрытия и гладкую прямолинейную форму штампа, что безусловно является сильной идеализацией реального явления. Большинство современных исследований продолжают следовать в фарватере упомянутых задач, используя чаще всего численные методы и полагая свойства материалов однородными, а поверхности достаточно гладкими [7–12].

В то же время бурное развитие новых технологий в рамках третьей промышленной революции с очевидностью показало, что поверхностные слои деталей после обработки (температурной, лазерной, ионно-лучевой) сильно изменяют свои свойства от точки к точке поверхности, а геометрия самой поверхности может быть описана сложной быстро изменяющейся функцией [13–23]. В этой связи развивались новые теоретические методы и подходы для адекватного описания деформирования, контактного взаимодействия и износа поверхностно модифицированных материалов и конструкций для их применения в разнообразных приложениях. Безразмерные уравнения для задач о поверхностно неоднородном покрытии и о контакте шероховатых тел имеют вид

$$c(t)m(x)(\mathbf{I}-\mathbf{V}_1)q(x,t)+(\mathbf{I}-\mathbf{V}_2)\int_{-1}^{1}k(x,\xi)q(\xi,t)d\xi=\delta(t)+\alpha(t)x-g(x), \quad (1)$$

$$\int_{-1}^{1}q(\xi,t)d\xi=P(t),\quad \int_{-1}^{1}q(\xi,t)\xi d\xi=M(t),$$

где $m(x)$ – быстро изменяющаяся функция, характеризующая неоднородность покрытия или форму основания штампа, функция $q(x,t)$ связана с контактным давлением под штампом, $P(t)$ и $M(t)$ – с действующей силой и моментом её приложения, $\delta(t)$ и $\alpha(t)$ – с осадкой и углом поворота штампа, $g(x)$ – с формой основания штампа, а $k(x,\xi)$ – ядро плоской контактной задачи, функция $c(t)$ и ядра $K_k(t,\tau)$ операторов Вольтера $\mathbf{V}_k$ связаны с характеристиками покрытия. Естественным продолжением данного направления исследований стали задачи о множественном контакте вязкоупругих тел с поверхностно неоднородными покрытиями и регулярной системы шероховатых штампов.

Для решения задач, описывающихся уравнениями (1), был развит метод, позволяющий эффективно описывать деформирование, контактное взаимодействие и износ поверхностно модифицированных материалов и конструкций. Его можно кратко представить следующим образом.

Выделение особенности решения в явном виде. Особенность решения интегрального уравнения состоит в том, что оно должно, в частности, содержать быстро изменяющуюся функцию $m(x)$. Для определённости рассмотрим уравнение (1). Построим его решение так, чтобы $m(x)$ присутствовало в решении в явном виде. Для этого сделаем замену переменных по формулам

$$Q(x,t)=q(x,t)\sqrt{m(x)},\quad K(x,\xi)=\frac{k(x,\xi)}{\sqrt{m(x)}\sqrt{m(\xi)}}.$$

Тогда уравнения (2) преобразуются к виду

$$c(t)(\mathbf{I}-\mathbf{V}_1)Q(x,t)+(\mathbf{I}-\mathbf{V}_2)\int_{-1}^{1}K(x,\xi)Q(\xi,t)d\xi=\frac{\delta(t)+\alpha(t)x-g(x)}{\sqrt{m(x)}}=F(x,t),$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{Q(\xi,t)}{\sqrt{m(\xi)}}d\xi=P(t),\quad \int_{-1}^{1}\frac{Q(\xi,t)}{\sqrt{m(\xi)}}\xi d\xi=M(t). \quad (2)$$

Решение такого интегрального уравнения с дополнительными условиями следует искать в классе функций непрерывных по времени t в гильбертовом пространстве $L_2[-1,1]$ с некоторым базисом таким, что он содержит $1/\sqrt{m(x)}$, а остальные функции базиса можно было представить в виде произведения функций, зависящих от x и весовой функции $1/\sqrt{m(x)}$:

$$p_k(x)=\frac{P_k(x)}{\sqrt{m(x)}},\quad d_{-1}=1,\quad J_k=\int_{-1}^{1}\frac{\xi^k d\xi}{m(\xi)},$$

$$d_k=\begin{vmatrix} J_0 & \cdots & J_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ J_k & \cdots & J_{2k}\end{vmatrix},\quad P_k(x)=\frac{1}{\sqrt{d_{k-1}d_k}}\begin{vmatrix} J_0 & J_1 & \cdots & J_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{k-1} & J_k & \ddots & J_{2k-1} \\ 1 & x & \cdots & x^k\end{vmatrix}. \quad (3)$$

При $m(x)=\mathrm{const}$ функции $p_k(x)$ являются ортонормированными полиномами Лежандра.

Описанная задача может быть сформулирована и решена в обобщённом виде, представленном ниже.

Обобщенный проекционный метод. Пусть дано операторное уравнение

$$c(t)(\mathbf{I}-\mathbf{V}_1)y(t)+(\mathbf{I}-\mathbf{V}_2)\mathbf{A}y(t)=f(t)\,, \qquad (4)$$

где $y(t)$ и $f(t)$ – непрерывные функции t со значениями из гильбертова пространства H; $c(t)>0$ – непрерывная скалярная функция t; $\mathbf{I}$ – единичный оператор; $\mathbf{A}$ – вполне непрерывный самосопряжённый положительный оператор из H в H; $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$ – операторы Вольтера по t, причём для любых непрерывных по t скалярных функций $\omega_1(t)$ и $\omega_2(t)$ операторы $(\mathbf{I}-\mathbf{V}_1)$, $(\mathbf{I}-\mathbf{V}_2)$, $\{\mathbf{I}-[\omega_1(t)\mathbf{V}_1+\omega_2(t)\mathbf{V}_2]\}$ и им обратные не выводят функции из класса непрерывных.

Гильбертово пространство H можно представить в виде прямой суммы ортогональных подпространств $H=H^\circ\oplus H^*$. Тогда непрерывные функции t со значениями из пространства H можно записать в виде алгебраической суммы функций из подпространства H° и подпространства H^*: $f(t)=f^\circ(t)+f^*(t)$, $y(t)=y^\circ(t)+y^*(t)$, где $f^\circ(t)$, $y^\circ(t)$ – непрерывные функции t со значениями из подпространства H°, а $f^*(t)$, $y^*(t)$ – непрерывные функции t со значениями из подпространства H^*.

Обобщённая проекционная задача состоит в следующем: пусть функции $y(t)$ и $f(t)$ удовлетворяют уравнению (4). Для заданных $y^\circ(t)$ и $f^*(t)$ необходимо найти неизвестные функции $y^*(t)$ и $f^\circ(t)$.

Рассмотрим оператор $\mathbf{P}^\circ$ ортогонального проектирования из пространства H в подпространство H°. Оператор $\mathbf{P}^*=\mathbf{I}-\mathbf{P}^\circ$ проектирует пространство H на подпространство H^*. Также имеют место соотношения:

$$\mathbf{P}^\circ f(t)=f^\circ(t)\,,\ \mathbf{P}^* f(t)=f^*(t)\,,\ \mathbf{P}^\circ y(t)=y^\circ(t)\,,\ \mathbf{P}^* y(t)=y^*(t)\,.$$

Подействуем оператором $\mathbf{P}^*$ на уравнение (4). В результате получим новое уравнение, которое после некоторых преобразований приобретает вид:

$$c(t)(\mathbf{I}-\mathbf{V}_1)y^*(t)+(\mathbf{I}-\mathbf{V}_2)\mathbf{P}^*\mathbf{A}y^*(t)=f^*(t)-(\mathbf{I}-\mathbf{V}_2)\mathbf{P}^*\mathbf{A}y^\circ(t)\,. \qquad (5)$$

Можно показать, что оператор $\mathbf{P}^*\mathbf{A}$ является компактным, самосопряжённым и положительным из H^* в H^*.

Пусть φ_k – собственные функции оператора $\mathbf{P}^*\mathbf{A}$, соответствующие собственным значениям γ_k:

$$\mathbf{P}^*\mathbf{A}\varphi_k=\gamma_k\varphi_k\,. \qquad (6)$$

Эти собственные функции образуют базис пространства H^* и тогда любую непрерывную функцию t со значениями из пространства H^* можно представить в виде разложения по этому базису:

$$y^*(t)=\sum_i y_i^*(t)\varphi_i,\quad f^*(t)=\sum_i f_i^*(t)\varphi_i,\quad \hat{f}^*(t)=(\mathbf{I}-\mathbf{V}_2)\mathbf{P}^*\mathbf{F}y^*(t)=\sum_i \hat{f}_i^*(t)\varphi_i\,, \qquad (7)$$

где $y_i^*(t)$, $f_i^*(t)$, $\hat{f}_i^*(t)$ непрерывны по t.

Подставляя представления (7) в (5) и используя (6), получим уравнение для определения функций разложения $y_k^*(t)$, а, следовательно, и неизвестной функции $y^*(t)$:

$$y_k^*(t)=(\mathbf{I}-\mathbf{V}^k)^{-1}\tilde{f}_k^*(t)=(\mathbf{I}+\mathbf{W}^k)\tilde{f}_k^*(t),\quad \mathbf{V}^k=\frac{c(t)\mathbf{V}_1+\gamma_k\mathbf{V}_2}{c(t)+\gamma_k},\quad \tilde{f}_k^*(t)=\frac{f_k^*(t)-\hat{f}_k^*(t)}{c(t)+\gamma_k}.$$

Определив функцию $y^*(t)$, можно найти и $f^\circ(t)$. Для этого подействуем на уравнение (4) оператором $\mathbf{P}^\circ$. После простейших арифметических преобразований получим уравнение для определения неизвестной функции $f^\circ(t)$:

$$f^\circ(t)=c(t)(\mathbf{I}-\mathbf{V}_1)y^\circ(t)+(\mathbf{I}-\mathbf{V}_2)\mathbf{P}^\circ\mathbf{A}(y^\circ(t)+y^*(t))\,.$$

Решение интегрального уравнения задачи. Используя приём выделения особенности решения и обобщённый проекционный метод, в итоге получим следующее решение задачи (1) для поверхностно модифицированного тела. Ранее было показано, что при помощи замены переменных уравнение (1) приводится к интегральному уравнению с дополнительными условиями (2), в котором функции $c(t)$, $m(x)$, $g(x)$, $P(t)$, $M(t)$ известны, а функции $q(x,t)$, $\delta(t)$ и $\alpha(t)$ подлежат определению. Также было указано, что в качестве базиса следует использовать функции, которые строятся при помощи (3).

Заметим, что гильбертово пространство $L_2[-1,1]$ можно представить в виде прямой суммы ортогональных подпространств $L_2[-1,1] = L_2^{(1)}[-1,1] \oplus L_2^{(2)}[-1,1]$, где $L_2^{(1)}[-1,1]$ – евклидово пространство с базисом $\{p_0(x), p_1(x)\}$, а $L_2^{(2)}[-1,1]$ – гильбертово пространство с базисом $\{p_2(x), p_3(x), \ldots\}$. Подынтегральная функция и правая часть (4) представляются в виде алгебраической суммы функций, непрерывных по времени t в $L_2^{(1)}[-1,1]$ и $L_2^{(1)}[-1,1]$, соответственно, т.е. $Q(x,t) = Q_1(x,t) + Q_2(x,t)$, $F(x,t) = F_1(x,t) + F_2(x,t)$.

Введём оператор ортогонального проектирования, который отображает пространство $L_2[-1,1]$ на $L_2^{(1)}[-1,1]$: $\mathbf{P}_1\varphi(x,t) = \int_{-1}^{1} [\, p_0(x)p_0(\xi) + p_1(x)p_1(\xi)\,]\varphi(\xi,t)\, d\xi$.

Подействуем на уравнение (2) оператором ортогонального проектирования $\mathbf{P}_2 = \mathbf{I} - \mathbf{P}_1$. Получим уравнение для определения $Q_2(x,t)$ с известной правой частью. Его решение следует строить в виде ряда по собственным функциям оператора $\mathbf{P}_2\mathbf{A}$. Спектральная задача для оператора $\mathbf{P}_2\mathbf{A}$ может быть записана в форме:

$$\mathbf{P}_2\mathbf{A}\varphi_k(x) = \gamma_k\varphi_k(x), \quad \varphi_k(x) = \sum_{i=2}^{\infty}\varphi_i^{(k)} p_i(x), \quad k = 2, 3, \ldots,$$

$$k(x,\xi) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} R_{ij}\, p_i(x)\, p_j(\xi), \quad R_{ij} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} k(x,\xi)\, p_i(x) p_j(\xi)\, dx\, d\xi, \quad i,\ j = 0, 1, \ldots$$

Представив исходную функцию $Q_2(x,t)$ и известную функцию $F_2(x,t)$ в виде разложения по новым базисным функциям $\varphi_k(x)$ ($k = 2, 3, \ldots$) в $L_2^{(2)}[-1,1]$, т.е. $Q_2(x,t) = \sum_{k=2}^{\infty} z_k(t)\varphi_k(x)$, $F_2(x,t) = -\sum_{k=2}^{\infty} G_k\varphi_k(x)$, и подставив эти представления в (10), получим, что неизвестные функции разложения $z_k(t)$ ($k = 2, 3, \ldots$) можно найти по формуле:

$$z_k(t) = -(\mathbf{I} + \mathbf{W}_k)\,\frac{G_k + (\mathbf{I} - \mathbf{V})[z_0(t)K_k^{(0)} + z_1(t)K_k^{(1)}]}{c(t) + \gamma_k},$$

где $K_k^{(0)} = \sum_{n=2}^{\infty} R_{0n}\varphi_n^{(k)}$, $K_k^{(1)} = \sum_{n=2}^{\infty} R_{1n}\varphi_n^{(k)}$, $\mathbf{W}_k\varphi(x,t) = \int_{1}^{t} R_k^*(t,\tau)\varphi(x,\tau)\, d\tau$, а $R_k^*(t,\tau)$ – резольвента ядра $K_k^*(t,\tau) = \gamma_k K(t,\tau)/[c(t) + \gamma_k]$ ($k = 2, 3, \ldots$).

Отметим, что решение имеет структуру $q(x,t) = \frac{1}{m(x)}\left[z_0(t)P_0(x) + z_1(t)P_1(x) + \ldots\right]$, т.е. удаётся выделить в решении в явном виде весовую функцию $m(x)$. Предложенный метод даёт приближение высокой точности при удержании небольшого числа членов разложения. Другие известные методы дают ошибку до 100% даже при удержании максимально возможного числа членов в полученных на их основе разложениях.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РНФ (проект № 14-19-01280).

ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
2. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488 с.
4. Горячева И.Г., Добычин М.Н. Контактные задачи в трибологии. М.: Машиностроение, 1988. 254 с.
5. Арутюнян Н.Х., Наумов В.Э., Манжиров А.В. Контактные задачи механики растущих тел. М.: Наука, 1991. 176 с.
6. Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В. Контактные задачи теории ползучести. //Изд-во НАН РА, 1999. 320 с.
7. Горячева И.Г., Солдатенков И.А. Контактные задачи с учётом износа. М.: Физматлит, 2001. С.438–458.
8. Горячева И.Г. Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.
9. Солдатенков И.А. Износоконтактная задача с приложениями к инженерному расчёту износа. М.: Физматкнига, 2010. 160 с.
10. Манжиров А.В. Контактные задачи о взаимодействии вязкоупругих оснований, подверженных старению, с системами неодновременно прикладываемых штампов // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 4. С. 670–685.
11. Манжиров А.В. О некоторых постановках и решениях контактные задач теории ползучести для произвольных систем штампов // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 3. С.139–151.
12. Манжиров А.В., Черныш В.А. О последовательном усилении неоднородных вязкоупругих цилиндрических тел системами жестких элементов. М.: ИПМ АН СССР, 1991. 56 с.
13. Казаков К.Е. Контактные задачи для тел с покрытиями // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2007. №4(54). С.176–196.
14. Манжиров А.В., Казаков К.Е. О конформном контакте слоистых оснований и штампов // Изв РАН. МТТ. 2008. No. 3. С. 227–240.
15. Манжиров А.В., Казаков К.Е. Проекционный метод решения смешанных интегральных уравнений механики и его приложения к контактным задачам для тел с покрытиями // Актуальные проблемы механики: механика деформируемого твёрдого тела: сб. трудов / Под ред. Р.В. Гольдштейна; Ин-т проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН. – М.: Наука, 2009. С. 238–263.
16. Kazakov K.E. Modeling of contact interaction for solids with inhomogeneous coatings // J. Phys.: Conf. Ser. 2009. Vol.181. 012013.
17. Манжиров А.В., Курдина С.П., Кухарский С. О согласованном контакте штампов и тел с покрытиями, имеющих сложный профиль поверхности // Изв. Саратовск. ун-та. Новая сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2012. Вып. 4. С.42–48.
18. Манжиров А.В., Курдина С.П., Казаков К.Е., Федотов И. Согласованный контакт вязкоупругого основания с шероховатым покрытием и системы одинаковых жёстких штампов // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. №4(26). С.26–38.
19. Manzhirov A.V., Kazakov K.E. Contact problem for a foundation with rough coating // Lecture Notes in Engineering and Computer Science. 2016, Vol. 2224. № 1. P.877–882.
20. Манжиров А.В. Смешанное интегральное уравнение механики и обобщённый проекционный метод его решения // Доклады РАН. 2016. Т. 470. № 4.

Информация об авторах:

Манжиров Александр Владимирович – иностранный член Национальной академии наук Республики Армении, доктор физико-математических наук, профессор; заместитель директора по научной работе Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, заведующий филиалом кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана в ИПМех РАН, профессор кафедры высшей математики НИЯУ «МИФИ», профессор кафедры высшей математики Московского технологического университета, г. Москва.

E-mail: manzh@inbox.ru

Казаков Кирилл Евгеньевич – научный сотрудник лаборатории моделирования в механике деформируемого твёрдого тела Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, доцент кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва.

E-mail: kazakov@ipmnet.ru

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ШТАМПЕ ПРИ ДИНАМИЧЕСКИХ УСЛОВИЯХ И ПРИ НАЛИЧИИ ИЗНОСА

Мартиросян А.Н., Давтян А.В., Динунц А.С., Мартиросян Г.А.

Задача о штампе при наличии износа для статики решена в [1], где показано, что наличие износа или шероховатости приводит к устранению известной особенности напряжения, имеющей место у края штампа в той же задаче при отсутствии шероховатости. Осесимметричные задачи об ударе штампа по упругому полупространству при наличии шероховатости решены в [2]. Задачи о штампах при наличии трения и износа, так же, как в [2], в квазистатической постановке решены в [3]. Другие нестационарные задачи о штампах с трением и износом решены методами настоящей статьи в [4], где также показано отсутствие особенностей у края штампа.

В настоящей статье даётся исследование задачи о штампе при нестационарных смешанных граничных условиях и при наличии износа методом интегральных преобразований Лапласа и Фурье в сочетании с методом Винера-Хопфа. Показано, что при наличии износа особенности решения у края штампа исчезают, однако, расчёты напряжений под штампом показывают, что при некоторых значениях граничного перемещения имеют место превышение предела упругости напряжений и, как следствие, разрушение среды в некоторой области под штампом.

Уравнения движения в перемещениях для изотропной среды в плоском случае имеют вид:

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+(a^2-b^2)\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2};\quad a^2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+b^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+(a^2-b^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \qquad (1)$$

Граничные условия имеют вид (рис.1):

$$\sigma_{yy}\Big|_{y=0}=\rho\left(\left(a^2-2b^2\right)\frac{\partial u}{\partial x}+a^2\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Bigg|_{y=0}=0 \quad \text{при } x<0,$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}+k\sigma_{yy}\right)\Bigg|_{y=0}=C_0H(x)\delta(t) \quad \text{при } x>0, \qquad (2)$$

$$\sigma_{xy}\Big|_{y=0}=b^2\rho\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Bigg|_{y=0}=0 \quad \text{при } -\infty<x<\infty,$$

где u,v – компоненты перемещений, a,b – скорости упругих волн, k есть коэффициент вертикального износа.

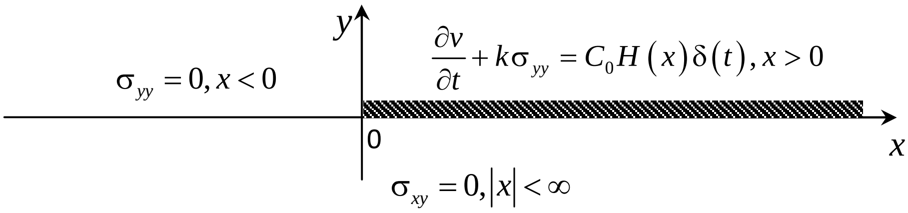


Рис. 1

Решение ищется методом интегральных преобразований Лапласа по t и Фурье по x. Обозначая $u^L;v^L$ преобразование Лапласа по t от $u;v$, через $u^{LF};v^{LF}$ – преобразование Фурье по x от $u^L;v^L$ можно искать решение в виде

$$u^L;v^L=\sum_{n=1}^{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\bar{\alpha}x+i\bar{\beta}_n y}u_n^{LF};v_n^{LF}d\bar{\alpha}, \qquad (3)$$

где контур интегрирования по $\bar{\alpha}$ показано на рис.2

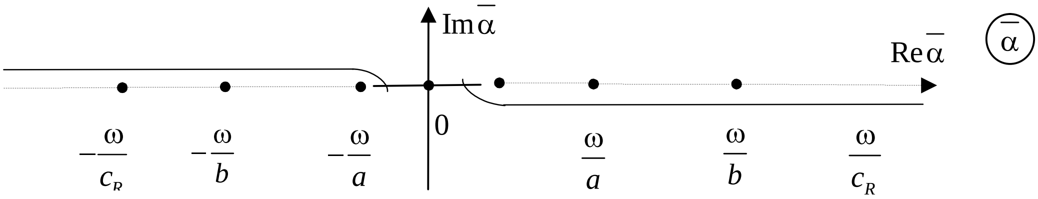


Рис.2

Подставляя (3) в уравнениях движения (1), получим

$$\bar\beta_n=\sqrt{\frac{\omega^2}{c_n^2}-\bar\alpha^2};\ \bar\beta_n^{\pm}=\sqrt{\frac{\omega}{c_n}\pm\bar\alpha};\ \bar\beta_n=\bar\beta_n^{+}\bar\beta_n^{-};\ c_1=a;\ c_2=b;\ n=1,2;\ v_1^{LF}=\frac{\bar\beta_1}{\bar\alpha}u_1^{LF};\ v_2^{LF}=-\frac{\bar\alpha}{\bar\beta_2}u_2^{LF}; \qquad (4)$$

где $s=-i\omega$ есть параметр преобразования Лапласа по t.

Подставляя (3) в (2), учитывая (4) и проводя обратное преобразование Фурье по x, можно получить уравнение Винера-Хопфа:

$$-\sigma_{yy}^{-}\frac{kF_2(\bar\alpha)}{F(\bar\alpha)}=\Omega_2^{+}\left(\bar\alpha\right)+\Omega_2^{-}\left(\bar\alpha\right);\ \Omega_2^{-}=\frac{C_0}{2\pi i\bar\alpha}; \qquad (5)$$

$$u_1^{LF}=\frac{1}{\rho i b R\left(\bar\alpha\right)}\bar\alpha\left(\frac{\omega^2}{b^2}-2\bar\alpha^2\right)\sigma_{yy}^{-};\ u_2^{LF}=-\frac{2\bar\beta_1\bar\beta_2u_1^{LF}}{\frac{\omega^2}{b^2}-2\bar\alpha^2}, \qquad (6)$$

где

$$F_2(\bar\alpha)=\frac{-R(\bar\alpha)+\frac{\bar\beta_1\omega^3}{\rho k b^4}}{2\left(\frac{\omega^2}{b^2}-\frac{\omega^2}{a^2}\right)\bar\beta_1\bar\beta_2};\ F(\bar\alpha)=\frac{R(\bar\alpha)}{2\bar\beta_1\bar\beta_2\left(\frac{\omega^2}{b^2}-\frac{\omega^2}{a^2}\right)}; \qquad (7)$$

$$\sigma_{yy}^{-}\left(\bar\alpha\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\sigma^L{}_{yy}\Big|_{y=0}e^{-i\bar\alpha x}dx;\ \Omega_2^{+}\left(\bar\alpha\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}\left(sv^L+k\sigma^L{}_{yy}\right)\Big|_{y=0}e^{-i\bar\alpha x}dx;$$

$R(\bar\alpha)=\left(\frac{\omega^2}{b^2}-2\bar\alpha^2\right)^2+4\bar\alpha^2\bar\beta_1\bar\beta_2$ – функция Рэлея, σ^L – преобразование Лаплаcа по t от σ_{yy}.

Можно доказать, что $\left|F(\bar\alpha)\right|\to 1,\ \left|F_2(\bar\alpha)\right|\to 1$ при $\bar\alpha\to\infty$.

Отметим, что индекс (+) указывает на функции, аналитические в верхней полуплоскости $\bar\alpha$, а индекс (-) – на функции, аналитические в нижней полуплоскости. Уравнение (5) Винера-Хопфа решается известным методом [6]. Можно показать, как в [7], что функция $F_2(\bar\alpha)$ имеет два нуля. Обозначим их через $\pm\frac{\omega}{a}\alpha_0$. При $\frac{a}{b}=\sqrt{3},\ ak\rho=0.4$ имеем $\alpha_0\approx 0.998188$, а при $\frac{a}{b}=\sqrt{3},\ ak\rho=0.8$ имеем $\alpha_0\approx 0.97917$.

С помощью теоремы Винера-Пэли [8], вводя вспомогательную функцию, получена факторизация функции $F_2(\bar\alpha)$ в виде

$$F_2(\bar\alpha)=\frac{1}{\bar\beta_1\bar\beta_2}\left(\frac{\omega^2}{a^2}\alpha_0{}^2-\bar\alpha^2\right)D_2^{+}\left(\bar\alpha\right)D_2^{-}\left(\bar\alpha\right)\ \text{или}\ F_2\left(\bar\alpha\right)=F_2^{+}\left(\bar\alpha\right)F_2^{-}\left(\bar\alpha\right), \qquad (8)$$

где

$$F_2^{\pm}\left(\bar{\alpha}\right)=\frac{\frac{\omega}{a}\alpha_0\pm\bar{\alpha}}{\sqrt{\frac{\omega}{a}\pm\bar{\alpha}}\sqrt{\frac{\omega}{b}\pm\bar{\alpha}}}D_2^{\pm}\left(\bar{\alpha}\right);$$

$$D_2^{\pm}\left(\bar{\alpha}\right)=\exp\left\{\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\omega}{a}}^{\frac{\omega}{b}}\operatorname{arctg}\frac{4\bar{\zeta}^2\sqrt{\bar{\zeta}^2-\frac{\omega^2}{a^2}}\sqrt{\frac{\omega^2}{b^2}-\bar{\zeta}^2}-\frac{\omega^3}{k\rho b^4}\sqrt{\bar{\zeta}^2-\frac{\omega^2}{a^2}}}{\left(\frac{\omega^2}{b^2}-2\bar{\zeta}^2\right)^2}\frac{d\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}\pm\bar{\alpha}}\right\}.$$

Аналогично для $F\left(\bar{\alpha}\right)$ получим [9]

$$F\left(\bar{\alpha}\right)=F^{+}\left(\bar{\alpha}\right)F^{-}\left(\bar{\alpha}\right), \tag{9}$$

где

$$F^{\pm}\left(\bar{\alpha}\right)=\frac{\frac{\omega}{c_R}\pm\bar{\alpha}}{\sqrt{\frac{\omega}{a}\pm\bar{\alpha}}\sqrt{\frac{\omega}{b}\pm\bar{\alpha}}}D^{\pm}\left(\bar{\alpha}\right);D^{\pm}\left(\bar{\alpha}\right)=\exp\left\{\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\omega}{a}}^{\frac{\omega}{b}}\operatorname{arctg}\frac{4\bar{\zeta}^2\sqrt{\bar{\zeta}^2-\frac{\omega^2}{a^2}}\sqrt{\frac{\omega^2}{b^2}-\bar{\zeta}^2}}{\left(\frac{\omega^2}{b^2}-2\bar{\zeta}^2\right)^2}\frac{d\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}\pm\bar{\alpha}}\right\}$$

После этого уравнение Винера-Хопфа (5) с учётом (8) примет вид

$$-k\sigma_{yy}^{-}\frac{F_2^{+}\left(\bar{\alpha}\right)F_2^{-}\left(\bar{\alpha}\right)}{F^{+}\left(\bar{\alpha}\right)F^{-}\left(\bar{\alpha}\right)}=\Omega_2^{+}+\frac{C_0}{2\pi i\bar{\alpha}} \tag{10}$$

Используя равенства (8), (9), уравнение (10) можно записать в виде:

$$-k\sigma_{yy}^{-}\frac{\frac{\omega}{a}\alpha_0-\bar{\alpha}}{\frac{\omega}{c_R}-\bar{\alpha}}\frac{D_2^{-}\left(\bar{\alpha}\right)}{D^{-}\left(\bar{\alpha}\right)}=\frac{C_0}{2\pi i\bar{\alpha}}\frac{D^{+}\left(\bar{\alpha}\right)}{D_2^{+}\left(\bar{\alpha}\right)}\frac{\frac{\omega}{c_R}+\bar{\alpha}}{\frac{\omega}{a}\alpha_0+\bar{\alpha}}+\frac{D^{+}\left(\bar{\alpha}\right)}{D_2^{+}\left(\bar{\alpha}\right)}\frac{\frac{\omega}{c_R}+\bar{\alpha}}{\frac{\omega}{a}\alpha_0+\bar{\alpha}}\Omega_2^{+}\left(\bar{\alpha}\right). \tag{11}$$

Решение этой задачи для любого $y\geq 0$ приведено в [7]. В частном случае, при $y=0$, т.е. на крае полуплоскости, оно имеет вид:

$$\sigma_{yy}=-\frac{C_0}{k}\frac{a}{x}\frac{a}{\alpha_0 c_R}\frac{D^{+}(0)}{D_2^{+}(0)}H(x)\left(-\frac{1}{\alpha_0}\left(\frac{a}{c_R}-\alpha_0\right)\left(D_2^{-}\left(\frac{\alpha_0}{a}\right)\right)^{-1}D^{-}\left(\frac{\alpha_0}{a}\right)\delta\left(\frac{at}{x}-\alpha_0\right)+\right. \tag{12}$$

$$\left.+\frac{a}{\alpha_0 c_R}\frac{D^{-}(0)}{D_2^{-}(0)}\delta\left(\frac{at}{x}\right)+\frac{x}{at}\left(\frac{\alpha_0}{a}-\frac{t}{x}\right)^{-1}F_1^{*}\left(\frac{t}{x}\right)\left(\frac{1}{c_R}-\frac{t}{x}\right)H\left(\frac{1}{b}-\frac{t}{x}\right)H\left(\frac{t}{x}-\frac{1}{a}\right)\right);$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+k\sigma_{yy}=\frac{H(-x)C_0}{t}\frac{a}{\alpha_0 c_R}\frac{D^{+}(0)}{D_2^{+}(0)}\left[-\frac{at}{x}\frac{c_R}{a}\left(D^{+}\left(-\frac{a}{c_R}\right)\right)^{-1}D_2^{+}\left(-\frac{a}{c_R}\right)\left(\alpha_0-\frac{a}{c_R}\right)\delta\left(\frac{at}{x}+\frac{a}{c_R}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\alpha_0+\frac{at}{x}\right)\left(\frac{a}{c_R}+\frac{at}{x}\right)^{-1}F_1^{*}\left(-\frac{at}{x}\right)H\left(\frac{a}{b}+\frac{at}{x}\right)H\left(-\frac{at}{x}-1\right)\right]+C_0H(x)\delta(t). \tag{13}$$

Из формулы (12) и (13) видно, что решение при $x\to\pm 0$ не имеет особенностей. Кроме того, из этих формул следует, что решение удовлетворяет граничным условиям (2) поставленной задачи.

Проведены численные расчёты для значений а) $a/b=\sqrt{3},\ ak\rho=0.4$, б) $a/b=\sqrt{3},\ ak\rho=0.5$ и получены графики зависимости величины $\pi kt\left(C_0\right)^{-1}\sigma_{yy}$ от x/at (рис.3 а), б)).

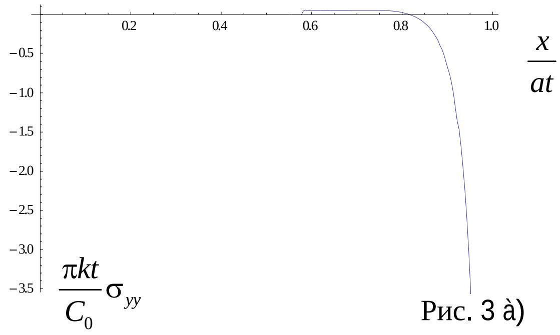


Рис. 3 à)

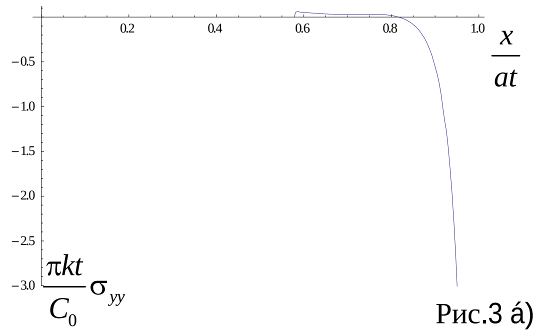


Рис.3 á)

Из формулы (12) видно, что при $0<\frac{x}{at}<\frac{b}{a}$ имеем $\frac{\pi kt}{C_0}\sigma_{yy}\equiv 0$, а для $\frac{b}{a}<\frac{x}{at}<1$ несколько значений приведены в табл.1

Таблица 1

x/at	0.57735	0.74955	0.84615	0.93435	0.95955	0.98895
а) $\pi kt\left(C_0\right)^{-1}\sigma_{yy}$	0.0000102	0.05554	-0.09082	-1.94117	-5.2744	-26.5978
б) $\pi kt\left(C_0\right)^{-1}\sigma_{yy}$	0.0000371	0.03156	-0.06873	-1.69922	-4.616	-21.67161

В частном случае, когда $k=0$, решение задачи (1)-(2) получается в виде

$$\sigma_{yy}=-\frac{2C_0\rho b^4\left(\frac{a^2}{b^2}-1\right)}{a^2c_RD^+(0)}H(x)\left[\frac{a\delta(t)}{c_RD^-(0)}-\frac{1}{\pi t}\frac{\left(\frac{a}{c_R}-\frac{at}{x}\right)H\left(\frac{at}{x}-1\right)}{D^-\left(\frac{t}{x}\right)\sqrt{\frac{at}{x}-1}}\right], \tag{14}$$

где

$$D_\pm\left(\frac{t}{x}\right)=\exp\left\{\frac{1}{\pi}\int_1^{\frac{a}{b}}\operatorname{arctg}\frac{4\zeta^2\sqrt{\zeta^2-1}\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-\zeta^2}}{\left(\frac{a^2}{b^2}-2\zeta^2\right)^2}\frac{d\zeta}{\zeta\pm\frac{at}{x}}\right\}=1+\int_1^{\frac{a}{b}}\frac{E_1(u)}{u\pm\frac{at}{x}}du,\ D_\pm^{-1}\left(\frac{t}{x}\right)=1+\int_1^{\frac{a}{b}}\frac{E_2(u)}{u\pm\frac{at}{x}}du, \tag{15}$$

$$\theta(u)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}}\psi(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-u}=\frac{1}{\pi}\int_1^{\frac{a}{b}}\operatorname{arctg}\left[\frac{4\zeta^2\sqrt{\zeta^2-1}\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-\zeta^2}}{\left(\frac{a^2}{b^2}-2\zeta^2\right)^2}\right]\frac{d\zeta}{\zeta-u},\psi(\zeta)=\ell n\frac{R(\zeta)}{\overline{\overline{R(\zeta)}}},$$

$$E_1(u)=\gamma(u)\exp\left(\theta(u)\right),E_2(u)=-\gamma(u)\exp\left(-\theta(u)\right),$$

$$\gamma(u)=\frac{\frac{4u^2}{\pi}\sqrt{\frac{1}{b^2}-u^2}\sqrt{u^2-\frac{1}{a^2}}}{\sqrt{16u^4\left(u^2-\frac{1}{a^2}\right)\left(\frac{1}{b^2}-u^2\right)+\left(\frac{1}{b^2}-2u^2\right)^4}},\ R(\zeta)=\left(\frac{1}{b^2}-2\zeta^2\right)^2-4i\zeta^2\sqrt{\zeta^2-\frac{1}{a^2}}\sqrt{\frac{1}{b^2}-\zeta^2}$$

Из (14) видно, что у края штампа имеем известную особенность вида $x^{-1/2}$. Проведены численные расчёты для значении $\frac{a}{b}=\sqrt{3}$ и получен график зависимости величины $\frac{\pi t}{C_0\rho b}\sigma_{yy}$ от $\frac{x}{at}$ (рис.4), а несколько значений приведены в табл. 2.

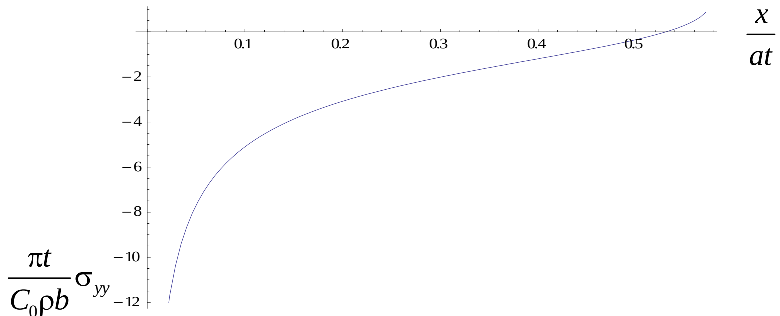


Рис. 4

Таблица 2

x/at	$1\cdot10^{-45}$	0.00577	0.25403	0.3926	0.49652	0.54848
$\pi t(C_0\rho b)^{-1}\sigma_{yy}$	$-5.76\cdot10^{22}$	-23.8199	-2.4489	-1.2514	-0.3823	0.26338

ЛИТЕРАТУРА

1. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. М.: Ленинград, 1949. 270с.
2. Мхитарян С.М., Шекян А.Л., Шекян Л.А. Об ударе штампа по упругому шероховатому полупространству //Тр. VI международной конференции «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред», 2009, с.345-349.
3. Горячева И.Г., Добычин М.Н. Контактные задачи в трибологии. М.: 1988. 253с.
4. Багдоев А.Г., Мартиросян А.Н., Варданян С.В., Мартиросян Г.А., Костандян К.С., Динунц А.С. Нестационарные задачи о трещинах и штампах //Ереван: Вестник, 2007. С.106-119.
5. Мартиросян А.Н. Математические исследования нестационарных линейных граничных задач для сплошных сред // Ереван: Зангак-97, 2007. 244с.
6. Нобл Б. Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений с частными производными //М.: ИЛ, 1962. 278с.
7. Давтян А.В. Решение нестационарных смешанных граничных задач теории упругости при наличии трещин и штампов, движущихся с конечной скоростью. /дис. канд. физ. мат. наук, - Ереван: 2014. 148 с.
8. Винер Н., Пэли П. Преобразование Фурье в комплексной области. М.: Наука, 1964. 268с.
9. Maue A.W. Die Die entspannungswellle bei plotzlichem einschnitt eines gespannten elastischen korpes. //ZAMM, 1954, Bd. 34, № 1-2, pp. 1-12.

Сведения об авторах:

Мартиросян Ашот Навасардович – доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. каф. математики Горисского государственного университета. **E-mail:** ashot.martirosyan.14@gmail.com

Давтян Ануш Володяевна – канд. физ.-мат. наук, Горисский государственный университет **E-mail:** davtyananush@gmail.com

Динунц Арпине Серобовна – канд. физ.-мат. наук, доцент, декан факультета естественных наук Горисского государственного университета. **E-mail:** dinuntsas@gmail.com

Мартиросян Гайк Ашотович – канд. физ.-мат. наук, доцент Горисского государственного университета. **E-mail:** hayk.martirosyan.75@mail.ru

УСТОЙЧИВОСТЬ КОНСОЛЬНОЙ БАЛКИ С СОСРЕДОТОЧЕННОЙ МАССОЙ ПРИ НАЛИЧИИ МАССЫ БАЛКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СЛЕДЯЩЕЙ НАГРУЗКИ

Микаелян А.О.

Рассматривается задача устойчивости упругой консольной балки при наличии массы балки, когда балка нагружена следящей силой, приложенной на свободном конце. При этом, конец балки жёстко закреплён, а на свободном конце имеется сосредоточенная масса. Найдена критическая сила, при которой балка теряет динамическую устойчивость.

Рассмотрим задачу о поведении гибкой упругой балки постоянного сечения, нагружённого следящей силой P и совершающего малые колебания около невозмущённой (прямолинейной) формы равновесия (рис.1).

Упругая консольная балка длиной l, имеющая жёсткость EI, нагружена следящей нагрузкой P, приложенной на свободном конце балки $x = l$. При этом, конец балки $x = 0$ жёстко закреплён, а на свободном конце $x = l$ имеется сосредоточенная масса M

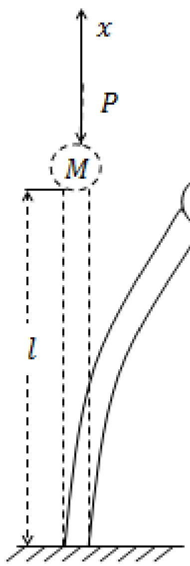


Рис.1

В рамках обычных предположений элементарной теории изгиба уравнение малых колебаний балки принимает вид [1]:

$$EI\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + P\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + m\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где m – погонная масса балки.

В рассматриваемой задаче граничные условия по концам балки принимаются в виде:

$$W = 0, \ \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \qquad \text{при} \ \ x = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{при} \ \ x = l, \quad (3)$$

$$EI\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} = M\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \qquad \text{при} \ \ x = l, \quad (4)$$

Задача устойчивости консольной балки, нагружённой следящей силой, состоит в нахождении критических значений параметра P, при которых краевая задача, описываемая уравнением (1) и граничными условиями (2) - (4), имеет решения, отличные от тривиального.

Уравнение (1) будет удовлетворено, если положить:

$$W(x,t) = f(x)e^{i\Omega t}, \tag{5}$$

где $f(x)$– неизвестная функция, Ω – частота колебания балки.

Подстановка в уравнение (1) даёт:

$$\frac{\partial^4 f}{\partial \xi^4} + \beta \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} - \omega^2 f = 0, \tag{6}$$

где введены безразмерные параметры:

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \beta = \frac{Pl^2}{EI}, \ \omega = \Omega l^2 \sqrt{\frac{m}{EI}}. \tag{7}$$

Решение уравнения (6) ищем в виде $f(\xi) = Ae^{p\xi}$. Подставляя это решение в уравнение (6) и разделяя две части уравнения на выражение $Ae^{p\xi}$, получим:

$$p^4 + \beta p^2 - \omega^2 = 0. \tag{8}$$

Решая уравнение (8), общее решение f будет иметь следующий вид:

$$f(\xi) = C_1 \sin p_1\xi + C_2 \cos p_1\xi + C_3 \operatorname{sh} p_2\xi + C_4 \operatorname{ch} p_2\xi, \tag{9}$$

где

$$\begin{cases} {p_1}^2 = \frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \omega^2}, \\ {p_2}^2 = -\frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \omega^2}. \end{cases} \tag{10}$$

Удовлетворяя граничным условиям (2) – (4), получим следующие уравнения для определения постоянных интегрирования:

$$C_2 + C_4 = 0, \quad p_1C_1 + p_2C_3 = 0.$$

$$\begin{cases} C_1({p_1}^2 \sin p_1 + p_1p_2 \operatorname{sh} p_2) + C_2({p_1}^2 \cos p_1 + {p_2}^2 \operatorname{ch} p_2) = 0, \\ C_1\left(-{p_1}^3 \cos p_1 - p_1{p_2}^2 \operatorname{ch} p_2 + \frac{M}{ml}\omega^2\left(\sin p_1 - \frac{p_1}{p_2}\operatorname{sh} p_2\right)\right) + \\ +C_2\left({p_1}^3 \sin p_1 - {p_2}^3 \operatorname{sh} p_2 + \frac{M}{ml}\omega^2(\cos p_1 - \operatorname{ch} p_2)\right) = 0 \end{cases} \tag{11}$$

Отсюда, приравнивая определитель нулю, получим характеристическое уравнение:

$$\Delta(p_1, p_2, M, m, l, \omega) = {p_1}^4 + {p_2}^4 + p_1p_2({p_1}^2 - {p_2}^2) \sin p_1 \operatorname{sh} p_2 -$$

$$-\frac{M}{ml}\omega^2 \frac{1}{p_1p_2}({p_1}^2 + {p_2}^2)(p_2 \sin p_1 \operatorname{ch} p_2 - p_1 \cos p_1 \operatorname{sh} p_2) +$$

$$+ 2{p_1}^2{p_2}^2 \cos p_1 \, ch\, p_2 = 0. \tag{12}$$

Возвращаясь к обозначениям (7), получим:

$$\Delta(p_1, p_2, M, m, l, \omega, \beta) = \beta^2 + 2\omega^2 + \beta\omega \sin p_1 \operatorname{sh} p_2 +$$

$$+2\omega^2 \cos p_1 \operatorname{ch} p_2 - \frac{M}{ml} 2\omega \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \omega^2} (p_2 \sin p_1 \operatorname{ch} p_2 - p_1 \cos p_1 \operatorname{sh} p_2) = 0, \quad (13)$$

где β представляет сжимающую силу, а ω – частоту колебаний, так как они линейно зависят от P и Ω, соответственно.

При $M = 0$ получаем задачу Бека, т.е. задачу устойчивости консольной балки, сжатой следящей силой, при наличии массы балки. В задаче Бека критическая нагрузка получается в следующем виде:

$$P_{кр} = \frac{2\pi^2}{l^2} EI. \quad (14)$$

Для нахождения критической силы рассмотрены частные случаи, когда $M = ml$, $M = \frac{1}{2}ml$, $M = \frac{1}{4}ml$ и $M = \frac{3}{4}ml$.

Для каждого случая получается, что малые частоты получаются при $\beta = \frac{3}{2}\pi^2$. Следовательно, как видно из формулы (7), значение β соответствует критической силе P:

$$P_{кр} = \frac{3\pi^2}{2l^2} EI. \quad (15)$$

Во всех случаях с возрастанием параметра β два наименьших частоты колебания балки сближаются между собой и при некотором значении β становятся кратными (рисунки 2, 3, 4, 5). При дальнейшем увеличении β частоты колебания становятся комплексными.

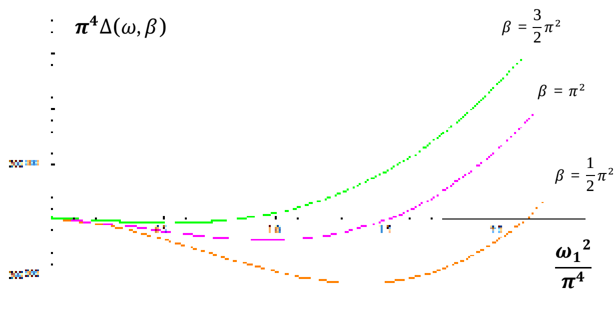


Рис. 2. $M = ml$.

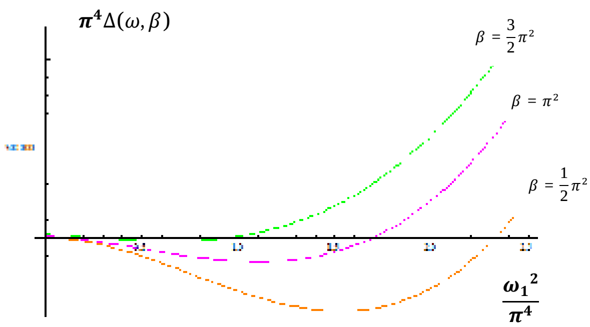


Рис. 3. $M = \frac{1}{2}ml$.

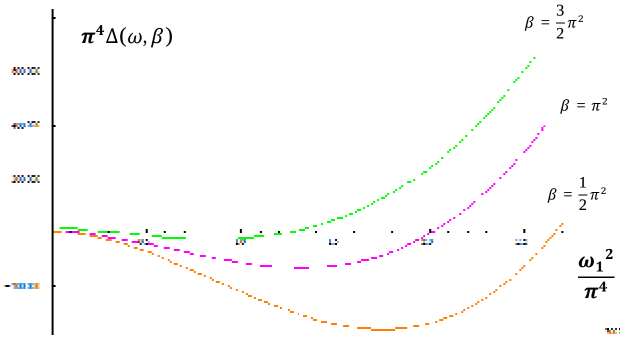


Рис. 4. $M = \frac{1}{4}ml$.

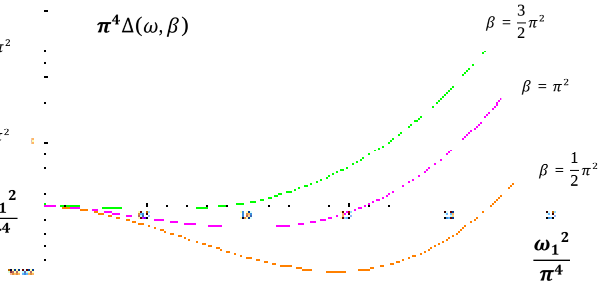


Рис. 5. $M = \frac{3}{4}ml$.

При частных случаях, когда $M = ml$, $M = \frac{1}{2}ml$, $M = \frac{1}{4}ml$ и $M = \frac{3}{4}ml$, частоты колебания балки из уравнения (13) при разных значениях β представлены в табл. 1, 2, 3, 4.

Таблица 1. $\boldsymbol{M = ml}$**.**

$\boldsymbol{\beta}$	$\boldsymbol{\omega_1^2/\pi^4}$	$\boldsymbol{\omega_2^2/\pi^4}$
$\frac{1}{2}\pi^2$	0,04	2,11
π^2	0,08	1,49
$\frac{3}{2}\pi^2$	0,19	0,78

Таблица 2. $\boldsymbol{M = \frac{1}{2}ml}$**.**

$\boldsymbol{\beta}$	$\boldsymbol{\omega_1^2/\pi^4}$	$\boldsymbol{\omega_2^2/\pi^4}$
$\frac{1}{2}\pi^2$	0,07	2,33
π^2	0,12	1,69
$\frac{3}{2}\pi^2$	0,29	0,94

Таблица 3. $\boldsymbol{M = \frac{1}{4}ml}$**.**

$\boldsymbol{\beta}$	$\boldsymbol{\omega_1^2/\pi^4}$	$\boldsymbol{\omega_2^2/\pi^4}$
$\frac{1}{2}\pi^2$	0,09	2,66
π^2	0,17	2,01
$\frac{3}{2}\pi^2$	0,36	1,23

Таблица 4. $\boldsymbol{M = \frac{3}{4}ml}$**.**

$\boldsymbol{\beta}$	$\boldsymbol{\omega_1^2/\pi^4}$	$\boldsymbol{\omega_2^2/\pi^4}$
$\frac{1}{2}\pi^2$	0,05	2,19
π^2	0,09	1,56
$\frac{3}{2}\pi^2$	0,23	0,84

В результате получается, что значения критических нагрузок, полученных в частных случаях $M = ml$, $M = \frac{1}{2}ml$, $M = \frac{1}{4}ml$, и $M = \frac{3}{4}ml$, совпадают, т.е. сосредоточенная масса не влияет на критическую нагрузку устойчивости.

Таким образом, получается, что значение критической нагрузки, полученной в рассматриваемой задаче, получается меньше от значения найденного Беком в задаче устойчивости консольной балки, сжатой следящей силой, при наличии массы балки [2], и меньше от значения критической силы найденного Болотиным в задаче устойчивости консольной балки с сосредоточенной массой, сжатой следящей силой, при отсутствии массы балки [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. М.: Физматлит, 1963. 879 с.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматлит, 1961. 339с.

Сведения об авторе:

Микаелян Асмик Овиковна – аспирант кафедры механики, Ереванский государственный университет, факультет математики и механики, (+374 77) 03 63 49, (+374 96) 03 63 49.
E-mail: hasmik.mikaelyan.hm@gmail.com

УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССОМ ЛОКАЛИЗАЦИИ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ СДВИГОВЫХ ВОЛН В ПЬЕЗОДИЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ

Мкртчян М.Г.

Сформулирована задача граничного управления процессом локализации волновой энергии вблизи механически свободных, электродизированных поверхностей пьезодиэлектрического слоя-волновода. Посредством временного изменения потенциала электрического поля на поверхностях волновода, первоначальное нормальное распределение амплитудных функций электроупругой волны приводится к предпочитаемому распределению по толщине волновода. Рассмотрен частный случай граничного управления амплитудного распределения электроупругой волны в пьезодиэлектрическом волноводе из пьезокристалла класса *6mm* гексагональной симметрии.

Введение. Существование и свойства электроупругих поверхностных волн в пьезоэлектриках тесно связаны с граничными условиями. Эффект различных граничных условий на распространение поверхностных волн в пьеоэлектрических материалах исследован Ингебригстеном [1]. В работе Блюстейна [2] показано, что при свободной границе пьезоэлектрического полупространства (класс 6mm) поверхностные сдвиговые волны возможны и распространяются со скоростью $v_B^2 = c_t^2\left[1-\left(\chi_1^4\varepsilon_0^2\right)/\left(\varepsilon_0+\varepsilon_{11}\right)^2\right]$.

Наличие электропроводящего слоя на границе пьезополупространства изменяет скорость распространения поверхностных волн на $v_G^2 = c_t^2\left(1-\chi_1^4\right)$. В работах [3,4] рассмотрены щелевые волны, где электрические колебания просачиваются в вакуумную щель и часть волновой энергии передаётся в другую пьезодиэлектрическую среду, возбуждая в нём электроупругую волну. В статье [5] показывается, что варьируя шириной щели, изменяем воздействие электрического экрана на поверхность пьезодиэлектрика. Это приводит к изменению дисперсии сдвиговой электроупругой волны и её амплитудного распределения по глубине пьезополупространства.

В настоящей статье формулируется задача граничного управления процессом локализации сдвиговой электроупругой волны вблизи механически свободных, электродизированных поверхностей пьезодиэлектрического слоя-волновода.

Постановка задачи. Рассмотрим распространение электроупругих сдвиговых волн в пьезодиэлектрическом слое-волноводе толщиной l, с электродизированными, механически свободными повехностями. Пусть координатная ось Oz совпадает с главной осью симметрии пьезокристалла класса ***6mm*** гексагональной симметрии. Нормаль к поверхности кристалла направлена по оси Oy, а волна распространяется вдоль оси Ox.

Уравнения электроупругости антиплоской задачи $\bar{W} = [0; 0; W(x,y,t)]$ для пьезоэлектрических кристаллов, принадлежащих классам $6mm$-гексагональной и $4mm$-тетрагональной симметрий, имеют вид [6]:

$$\bar{c}_{44}\nabla^2 W = \rho\ddot{W},\ \nabla^2\varphi = (e_{15}/\varepsilon_{11})\nabla^2 W \tag{1}$$

где $\bar{c}_{44} = c_{44}(1+\chi^2)$ – приведенная жёсткость сдвига, а $\chi^2 = e_{15}^2/(\varepsilon_{11}c_{44})$ – коэффициент электромеханической связи материала.

Известно, что в таких волноводах всегда существует высокочастотная электроупругая волна $W(x,y,t) = F(y,t)\exp[i(kx)]$ с толщённым распределением амплитудной функции $F(y,t)$, определяющая формообразование в волноводе.

Одномерное волновое уравнение по толщине пьезодиэлектрического слоя можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - k^2F = a^{-2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2},\qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - k^2\varphi = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - k^2F\right] \tag{2}$$

Начальные условия для функции формообразования в момент времени $t = 0$ имеют вид:

$$F(y,0) = \Phi(y), \quad F_t(y,0) = \Psi(y), \tag{3}$$

а соответствующие финальные условия в момент времени $t = T$ (по целевым конечным значениям функций) запишутся в виде:

$$F(y,\mathrm{T}) = \Phi_1(y), \quad F_t(y,\mathrm{T}) = \Psi_1(y), \tag{4}$$

где, соответственно функция $\Phi(y)$, задающая форму волны в начальный момент времени, $\Psi(y)$–скорость точки на фронте волны в начальный момент, которые заранее известны. $\Phi_1(y)$–функция, задающая форму волны и $\Psi_1(y)$–функция, задающая скорость точки на фронте волны в конечный момент времени.

Граничные условия на плоскостях волновода задаются электрическими потенциалами:

$$\varphi(0,t) = \mu(t), \quad \varphi(l,t) = \nu(t). \tag{5}$$

Требуется найти такие управляющие функции $\mu(t)$ и $\upsilon(t)$ в пространстве $C^2[0,T]$, чтобы для решения $W(y,t)$ уравнение (2) с заданными начальными условиями (3) и граничными условиями (5) в момент времени $t = T$ выполнилось финальное условие (4).

Решение задачи. Для решения системы уравнений пользуемся методом Даламбера. Для первого уравнения системы (2) оно имеет следующий вид:

$$F(y,t) = \frac{\Phi(y-at)+\Phi(y+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{y-at}^{y+at}\Psi(z)\,dz, \tag{6}$$

проинтегрируя второе уравнение, получим:

$$\varphi(y,t) = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}F(y,t) + Ay + B. \tag{7}$$

Удовлетворим условие (5)

$$\begin{cases} \mu(t) = \dfrac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}F(0,t) + B \\ \nu(t) = \dfrac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}F(l,t) + Al + B \end{cases}$$

Для удобства примем $A = B = 0$, откуда получим

$$F(0,t) = \frac{\varepsilon_{11}}{e_{15}}\mu(t), \quad F(l,t) = \frac{\varepsilon_{11}}{e_{15}}\nu(t) \tag{8}$$

Учитывая последнее, решение примет следующий вид:

$$F(y,t) = \frac{\Phi(y-at)+\Phi(y+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{y-at}^{y+at}\Psi(z)\,dz + \frac{\varepsilon_{11}}{e_{15}}\left[\bar{\mu}\left(t-\frac{y}{a}\right) + \bar{\nu}\left(t-\frac{l-y}{a}\right)\right] \tag{9}$$

где $\bar{\mu}(t) = \mu(t)$ на отрезке $[0,T]$, $\bar{\mu}(0) = 0$ и $\bar{\mu}(t) \equiv 0$ при аргументах $t < 0$. Аналогичным условиям удовлетворяет и функция $\bar{\nu}(t)$.

Удовлетворим финальные условие (4)

$$\begin{cases} \dfrac{\Phi(y-aT)+\Phi(y+aT)}{2} + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{y-aT}^{y+aT}\Psi(z)\,dz + \\ \quad + \dfrac{\varepsilon_{11}}{e_{15}}\left[\mu\left(\dfrac{l-y}{a}\right) + \nu\left(\dfrac{y}{a}\right)\right] = \Phi_1(y) \\ \dfrac{\Phi'(y+aT)-\Phi'(y-aT)}{2} + \dfrac{\Psi(y+aT)+\Psi(y-aT)}{2a} + \\ \quad + \dfrac{\varepsilon_{11}}{e_{15}a}\left[\mu'\left(\dfrac{l-y}{a}\right) + \nu'\left(\dfrac{y}{a}\right)\right] = \Psi_1(y) \end{cases} \tag{10}$$

Производное по $\boldsymbol{y}$ первого уравнения будет:

$$\frac{\Phi'(y+aT)+\Phi'(y-aT)}{2} + \frac{\Psi(y+aT)-\Psi(y-aT)}{2a} - \frac{\varepsilon_{11}}{e_{15}}\left[\mu'\left(\frac{l-y}{a}\right) - \nu'\left(\frac{y}{a}\right)\right] = \Phi_1'(y). \tag{11}$$

Сложим полученное уравнение и второе уравнение системы (10) и вычтем полученное из второго уравнения системы (10). После преобразований получаем два уравнения относительно производных функции μ и υ:

$$\begin{cases} \dfrac{2\varepsilon_{11}}{e_{15}a}\mu'\left(\dfrac{l-y}{a}\right) = \Psi_1(y) - \Phi_1'(y) + \Phi'(y-aT) - \dfrac{\Psi(y-aT)}{\mathrm{a}} \\ \dfrac{2\varepsilon_{11}}{e_{15}a}\nu'\left(\dfrac{y}{a}\right) = \Psi_1(y) + \Phi_1'(y) - \Phi'(y+aT) - \dfrac{\Psi(y+aT)}{\mathrm{a}} \end{cases} \tag{12}$$

Сделаем замену $t = (l - y)/a$ в первом уравнении, а во втором уравнении положим $t = y/a$. Затем проинтегрируем уравнение и воспользуемся условиями продолжения функций относительно точек $y = 0$ и $y = l$, где $\mu(0) = \nu(0) = 0$. Получим выражение для $\mu(t)$ и $\nu(t)$:

$$\begin{cases} \mu(t) = \frac{e_{15}}{2\varepsilon_{11}}\begin{bmatrix}\Phi_1(l - at) - \Phi_1(l) - \Phi(l - at - aT) + \Phi(l - aT) - \\ -\int_l^{l-at}\Psi_1(z)dz + \frac{1}{a}\int_l^{l-at}\Psi(z - aT)dz\end{bmatrix} \\ \nu(t) = \frac{e_{15}}{2\varepsilon_{11}}\begin{bmatrix}\Phi_1(at) - \Phi_1(0) - \Phi(at + aT) + \Phi(aT) + \\ +\int_0^{at}\Psi_1(z)dz - \frac{1}{a}\int_0^{at}\Psi(z + aT)dz\end{bmatrix}\end{cases} \quad (13)$$

Пример. Расмотрим частный случай с начальными условиями:

$$W(y,0) = \mathrm{C}e^{-y}, \quad W_t(y,0) = \mathrm{D}e^{-y} \quad (14)$$

финальные условия:

$$W(y,\mathrm{T}) = \mathrm{C}e^{-2y}, \quad W_t(y,\mathrm{T}) = \mathrm{D}e^{-2y} \quad (15)$$

и граничные условия:

$$\varphi(0,t) = \mu(t), \quad \varphi(l,t) = \nu(t) \quad (16)$$

Построим нечётное продолжение функций (14) в области (-∞,0):

$$\widetilde{\Phi}(z) = \begin{cases}\mathrm{C}e^{-y} & \text{при } z < 0 \\ 0 & \text{при } z = 0 \\ -\mathrm{C}e^{y} & \text{при } z > 0\end{cases}, \qquad \widetilde{\Psi}(z) = \begin{cases}De^{-y} & \text{при } z < 0 \\ 0 & \text{при } z = 0 \\ -\mathrm{D}e^{y} & \text{при } z > 0\end{cases}$$

Решение волнового уравнения имеет вид:

$$W(y,t) = \frac{\Phi(y - at) + \Phi(y + at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{y-at}^{y+at}\Psi(z)\,dz + \frac{\varepsilon_{11}}{e_{15}}\left[\bar{\mu}\left(t - \frac{y}{a}\right) + \bar{\nu}\left(t - \frac{l-y}{a}\right)\right]$$

Графическое представление в начальный $t = 0$ и конечный $t = T$ моменты времени приведены на рис.1.

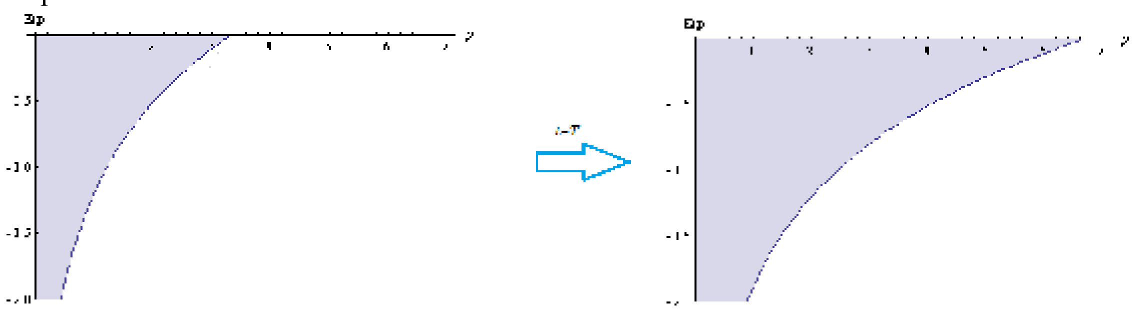


Рис. 1. Изменения интенсивности волны посредством электрического потенциала на данном промежутке времени

Удовлетворим (15) финальным условиям.

$$\begin{cases} \dfrac{\Phi(y-aT)+\Phi(y+aT)}{2}+ \\ +\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{y-aT}^{y+aT}\Psi(z)\,dz+\dfrac{\varepsilon_{11}}{e_{15}}\left[\mu\left(\dfrac{l-y}{a}\right)+\nu\left(\dfrac{y}{a}\right)\right]=\mathrm{Ce}^{-2y} \\ \dfrac{\Phi'^{(y-aT)}-\Phi'^{(y+aT)}}{2}+\dfrac{\Psi(y+aT)+\Psi(y-aT)}{2a}- \\ -\dfrac{\varepsilon_{11}}{e_{15}a}\left[\mu'\left(\dfrac{l-y}{a}\right)+\nu'\left(\dfrac{y}{a}\right)\right]=\mathrm{De}^{-2y} \end{cases}$$

Решим задачу для финального времени $T = l/a$. Получим:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{Ce}^{-(y-l)}+\mathrm{Ce}^{-(y+l)}}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{y-l}^{y+l}\mathrm{De}^{-y}\,dz+\dfrac{\varepsilon_{11}}{e_{15}}\left[\mu\left(\dfrac{l-y}{a}\right)+\nu\left(\dfrac{y}{a}\right)\right]=\mathrm{Ce}^{-2y} \\ \dfrac{\mathrm{Ce}^{-(y-l)}-\mathrm{Ce}^{-(y+l)}}{2}+\dfrac{\mathrm{De}^{-(y+l)}+\mathrm{De}^{-(y-l)}}{2a}+\dfrac{\varepsilon_{11}}{e_{15}a}\left[\mu'^{\left(\frac{l-y}{a}\right)}+\nu'^{\left(\frac{y}{a}\right)}\right]=\mathrm{De}^{-2y} \end{cases}$$

Далее, решая систему уравнений относительно функций μ и ν, и делая замену, как в (13), найдём управляющие функции:

$$\begin{cases} \dfrac{2\varepsilon_{11}}{e_{15}a}\mu'\left(\dfrac{l-y}{a}\right)=\mathrm{De}^{-2y}+2\mathrm{Ce}^{-2y}-\mathrm{Ce}^{-(y-l)}-\dfrac{\mathrm{De}^{-(y-l)}}{a} \\ \dfrac{2\varepsilon_{11}}{e_{15}a}\nu'\left(\dfrac{y}{a}\right)=\mathrm{De}^{-2y}-2\mathrm{Ce}^{-2y}+\mathrm{Ce}^{-(y+l)}-\dfrac{\mathrm{De}^{-(y+l)}}{a} \end{cases} \tag{17}$$

Сделаем замену $t = (l-y)/a$ в первом уравнении, а во втором уравнении положим $t = y/a$. Затем проинтегрируем уравнение и воспользуемся условиями продолжения функций относительно точек $y = 0$ и $y = l$, где $\mu(0) = \nu(0) = 0$. Получим выражение для $\mu(t)$ и $\nu(t)$:

$$\begin{cases} \mu(t)=\dfrac{e_{15}}{2\varepsilon_{11}}\left[\mathrm{Ce}^{-2(l-at)}-\mathrm{Ce}^{-2l}-\mathrm{Ce}^{at}+\mathrm{C}+\dfrac{De^{-2l}}{2}\left(-1+e^{2\mathrm{at}}\right)+\dfrac{D}{a}\left(1-e^{\mathrm{at}}\right)\right] \\ \nu(t)=\dfrac{e_{15}}{2\varepsilon_{11}}\left[\mathrm{Ce}^{-2at}-\mathrm{C}-\mathrm{Ce}^{-(l+at)}+\mathrm{Ce}^{-l}+\dfrac{D}{2}\left(1-e^{-2\mathrm{at}}\right)+\dfrac{De^{-l}}{a}\left(e^{-\mathrm{at}}-1\right)\right] \end{cases},$$

графическое представление которых приведено на рис.2.

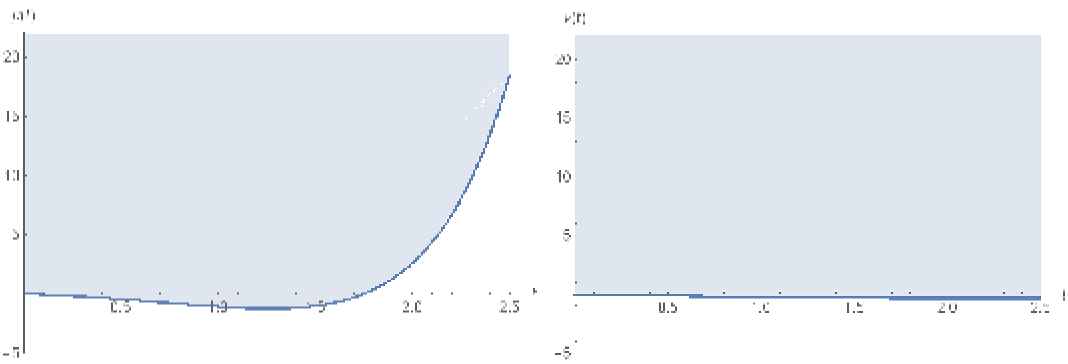


Рис. 2. Графики управляющих функций

Заключение. Сформулирована задача управления локализацией волновой энергии вблизи механически свободных поверхностей пьезодиэлектрического слоя-волновода. Посредством временного изменения потенциала электрического поля на поверхностях волновода, первоначальное нормальное распределение амплитудных функций электроупругой волны приводится к предпочитаемому распределению по толщине волновода. Рассмотрен частный случай граничного управления распределением электроупругой волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ingebrigtsen K.A. Surface waves in piezoelectrics. J. Appl. Phys. 1969. V.40. №7. Pp.2681–2686.
2. Bleustein F.L. “A new surface wave in piezoelectric materials.”Appl. Phys. Lett. 1968. V.13. №12. Pp.412–413.
3. Гуляев Ю.В., Плесский В.П. Щелевые акустические волны в пьезоэлектрических материалах. //Акустич.журнал. 1977. Т.23. №5, С.716–723.
4. Балакирев М.К., Горчаков А.В. Связанные поверхностные волны в пьезоэлектриках. //ФТТ. 1977. Т.19. №2. С.613–615.
5. Аветисян А.С. О поверхностных волнах в пьезоэлектрике при наличии электропроводящей среды вблизи его границы. //Материалы Второй Всесоюзной научно-технической конференции «Прочность, жёсткость и технологичность изделий из композиционных материалов», (Ереван, 13–16 ноября, 1984 г.), Т.1. Изд. ЕрГУ, (1984), с. 27-29.
6. Аветисян А.С. К задаче распространения сдвиговых волн в пьезоэлектрической среде. //Изв. АН АрмССР. Механика. 1985. Т.38. №1. С.12–19.

Сведения об авторе:

Мкртчян Манук Грайрович – научный сотрудник Института механики НАН Армении,
E-mail: mkmanuk@yandex.ru

ОБ ИЗГИБЕ БАЛКИ ПОПЕРЕЧНЫМИ И ПРОДОЛЬНЫМИ СИЛАМИ ПРИ КОНТАКТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ С УПРУГИМ МАССИВНЫМ ТЕЛОМ

Мкртчян М.М., Шекян Л.А.

Основываясь на предложенной С.П.Тимошенко [1] обобщённой модели изгиба балки, когда помимо поперечных сил, продольные сжимающие или растягивающие осевые силы также влияют на прогибы балки, рассмотрены некоторые плоские задачи контактного взаимодействия балки и упругого массивного тела в виде основания типа упругой полуплоскости или упругого шероховатого слоя.

Задачи приведены к решению линейных или нелинейных интегральных уравнений при дополнительных условиях. Математическое исследование рассмотренных задач проведено на основании известного численно-аналитического метода решения сингулярных интегральных уравнений [2] или по разработанной в [3] методике, основанной на теории нелинейных интегральных уравнений Гаммерштейна [4] и принципа сжимающих отображений.

Аналогичные контактные задачи об изгибе балки на упругом основании рассмотрены в [5-7] и др.

1. Рассмотрим изгиб горизонтальной упругой балки длиной $2a$ под действием поперечных распределённых сил $q(x)$, $p(x)$ и осевых сжимающих сил T (рис.1). Дифференциальное уравнение изгиба балки получается из общего дифференциального уравнения изгиба прямоугольной пластинки при совместном воздействии поперечных сил и сил в срединной плоскости пластинки, находящейся в условиях плоской деформации с базовой плоскостью Oxz ([1], стр.422, формула 217, $N_x = -T$, $w = -\mathrm{v}$, $N_y = N_{xy} = 0$). Оно имеет вид:

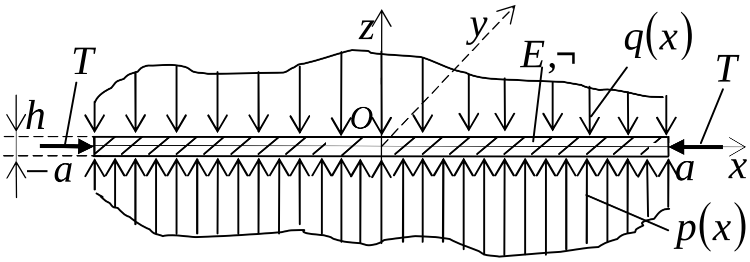


Рис.1

$$D\frac{d^4\mathrm{v}}{dx^4} + T\frac{d^2\mathrm{v}}{dx^2} = p(x) - q(x), \quad (-a < x < a) \tag{1}$$

где $D = Eh^3/12(1-\neg^2)$ – жёсткость балки на изгиб, h, E и $\neg$ – высота, модуль упругости и коэффициент Пуассона соответственно, а $\mathrm{v} = \mathrm{v}(x)$ – смещения точек оси балки в направлении вертикальной оси Oz.

Дифференциальное уравнение (1) рассматривается при следующих граничных условиях:

$$M(x)\big|_{x=\pm a} = D\frac{d^2\mathrm{v}}{dx^2}\bigg|_{x=\pm a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2\mathrm{v}}{dx^2}\bigg|_{x=\pm a} = 0, \tag{2}$$

указывающих на то, что в концевых точках балки $x = \pm a$ изгибающие моменты $M(x)$ отсутствуют. При этом условия равновесия балки имеют вид:

$$\int_{-a}^{a}\left[p(x) - q(x)\right]dx = 0, \qquad \int_{-a}^{a} x\left[p(x) - q(x)\right]dx = 0. \tag{3}$$

Общее решение дифференциального уравнения (1) относительно $d^2\mathrm{v}/dx^2$ можно представить в виде [7]:

$$\frac{d^2\mathrm{v}}{dx^2} = C_1\cos kx + C_2\sin kx + \frac{1}{2kD}\int_{-a}^{a}\sin(k|x-s|)[p(s) - q(s)]ds, \quad \left(k = \sqrt{T/D}\right) \tag{4}$$

где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования.

На основании (4), из граничных условий (2) получим относительно C_1 и C_2 систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} C_1 \cos ka - C_2 \sin ka = -\dfrac{1}{2kD} \displaystyle\int_{-a}^{a} \sin[k(a+s)] \cdot [p(s) - q(s)] ds, \\ C_1 \cos ka + C_2 \sin ka = -\dfrac{1}{2kD} \displaystyle\int_{-a}^{a} \sin[k(a-s)] \cdot [p(s) - q(s)] ds. \end{cases} \quad (5)$$

Вычисляя главный определитель этой системы $\Delta = \sin 2ka$, убедимся, что при $0 < k < \pi/2a$ система (5) имеет единственное решение

$$C_1 = -\frac{\operatorname{tg}(ka)}{2kD} \int_{-a}^{a} \cos(ks)\left[p(s) - q(s)\right] ds, \quad C_2 = \frac{\operatorname{ctg}(ka)}{2kD} \int_{-a}^{a} \sin(ks)\left[p(s) - q(s)\right] ds. \quad (6)$$

Тогда формула (4) принимает вид

$$\frac{d^2 \mathrm{v}}{dx^2} = \frac{1}{kD \sin 2ka} \int_{-a}^{a} \left(\cos^2 ka \sin kx \sin ks - \sin^2 ka \cos kx \cos ks\right)[p(s) - q(s)] ds +$$

$$+ \frac{1}{2kD} \int_{-a}^{a} \sin\left(k|x-s|\right)[p(s) - q(s)] ds. \quad (7)$$

Проведя в формуле (7) предельный переход $k \to 0$ и учитывая условия равновесия (3), получим:

$$\frac{d^2 \mathrm{v}}{dx^2} = \frac{1}{2D} \int_{-a}^{a} |x-s| \cdot [p(s) - q(s)] ds. \quad (8)$$

При $k = \pi/2a$, учитывая обозначение в (4), получим $T = (\pi/2a)^2 D$. Это – первое критическое значение $T_{\text{кр}}$, полученное формулой Эйлера [1] устойчивости сжатого стержня с шарнирно-опёртыми концами (рис.2). Граничные условия (2) также выполняются.

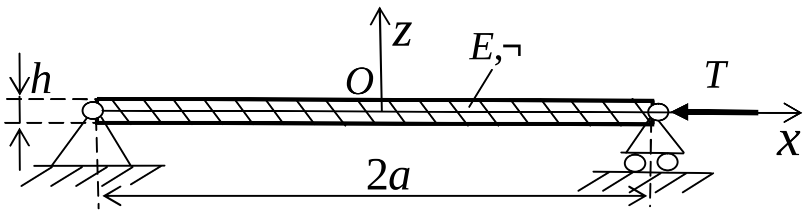


Рис.2

В случае $k > \pi/2a$ имеем $T > (\pi/2a)^2 D$. Тогда балка потеряет устойчивость, независимо от наличия поперечных нагрузок $p(x)$ и $q(x)$.

В случае осевых растягивающих сил в уравнении (1) следует T заменить на $-T$. При этом, в формуле (7) следует параметр k формально заменить на ik, где i – мнимая единица, и от тригонометрических функций перейти к соответствующим гиперболическим функциям.

Далее проинтегрируя уравнение (7), получим:

$$\frac{d\mathrm{v}}{dx} = \frac{1}{2k^2} \int_{-a}^{a} H(x,s)[p(s) - q(s)] ds + C, \quad (-a \le x \le a) \quad (9)$$

где

$$H(x,s) = \{1 - \cos[k(x-s)]\} sign(x-s) + ctg(ka)[1 - \cos(kx)]\sin(ks) - tg(ka)\sin(kx)\cos(ks), \quad (10)$$

C – постоянное интегрирования.

2. Пусть горизонтальная балка, отнесённая к правой прямоугольной системе координат Oxz, длины $2a$, высоты h, модуля упругости E и коэффициента Пуассона ¬ под действием распределённых вертикальных сил интенсивности $q(x)$ и действующих вдоль срединной линии балки осевых горизонтальных сжимающих сил T $\left(0 \le T < (\pi/2a)^2 D\right)$, изгибаясь вдавливается в нижнюю упругую полуплоскость с модулем упругости E_1 и коэффициентом Пуассона $¬_1$ (рис.3). Требуется определить законы распределения контактных давлений $p(x)$, действующих между балкой и полосой, вертикальные перемещения $\mathrm{v}(x)$ точек изогнутой оси балки, функции изгибающих моментов $M(x)$ и поперечных перерезающих сил $Q(x)$ в сечениях балки.

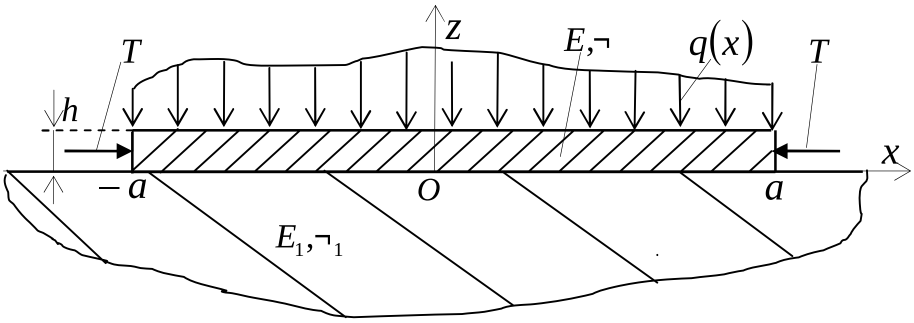


Рис.3

Предполагая, что упругая полуплоскость $z < 0$ находится в условиях плоской деформации, запишем выражение вертикальных перемещений $\mathrm{v}_1(x)$ его граничных точек [8]:

$$\mathrm{v}_1(x) = -\frac{2\left(1-\nu_1^2\right)}{\pi E_1}\int_{-a}^{a} \ln\frac{1}{|x-s|} p(s)\,ds + C_*, \quad (-\infty < x < \infty). \tag{11}$$

Условие контакта балки и упругого основания $\mathrm{v}_1(x) = \mathrm{v}(x)$, $(-a < x < a)$, которое после дифференцирования принимает вид

$$\left(d\mathrm{v}_1/dx\right) = \left(d\mathrm{v}/dx\right), \quad (-a < x < a). \tag{12}$$

Теперь подставляя выражения (9) и (11) в условие контакта (12), получим относительно контактных давлений $p(x)$ следующее сингулярное интегральное уравнение (СИУ):

$$\frac{2\left(1-\nu^2\right)}{\pi E}\int_{-a}^{a}\frac{p(s)\,ds}{s-x} = -\frac{1}{2k^2 D}\int_{-a}^{a} H(x,s)\left[p(s)-q(s)\right]ds + C, \; (-a < x < a) \tag{13}$$

решение которого должно удовлетворять условиям равновесия балки (3).

Обозначая через P и M величины главного вектора и относительно центра O главного момента заданной нагрузки $q(x)$ и введя безразмерные координаты, функции и величины

$$\xi = x/a, \quad \eta = s/a, \quad \chi = ka, \quad \varphi(\xi) = p(a\xi)/E_1, \quad r(\xi) = q(a\xi)/E_1, \quad K(\xi,\eta) = H(x,s),$$

$$\lambda = \frac{3\pi E_1}{\left(1-\nu_1^2\right)\chi^2 E}\left(\frac{a}{h}\right)^3, \quad \gamma = \frac{C}{2\left(1-\nu_1^2\right)}, \quad P_0 = \frac{P}{aE_1}, \quad M_0 = \frac{M}{a^2 E_1}, \quad f(\xi) = \int_{-1}^{1} K(\xi,\eta) r(\eta)\,d\eta, \tag{14}$$

СИУ (13) и условия равновесия (3) преобразуются к виду:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\eta)\,d\eta}{\eta-\xi} + \frac{\lambda}{\pi}\int_{-1}^{1} K(\xi,\eta)\varphi(\eta)\,d\eta = \frac{\lambda}{\pi} f(\xi) + \gamma, \qquad (-1 < \xi < 1) \tag{15}$$

$$\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)\,d\xi = P_0, \qquad \int_{-1}^{1}\xi\varphi(\xi)\,d\xi = M_0. \tag{16}$$

Коль скоро будем иметь безразмерное контактное давление $\varphi(\xi)$, сначала формулами (14) и (7) определим $d^2\mathrm{v}/dx^2$, затем изгибающий момент $M(x)=D\cdot d^2\mathrm{v}/dx^2$ и перерезающую силу $Q(x)=D\cdot d^3\mathrm{v}/dx^3$ в любом поперечном сечении балки с координатом x $(-a<x<a)$.

Для получения эффективного решения СИУ (15) при условии (16) применяем известный численно-аналитическим метод [2]. С этой целью положим

$$\varphi(\xi)=\Phi(\xi)\big/\sqrt{1-\xi^2}\,, \qquad (-1<¶<1), \tag{17}$$

где функция $\Phi(\xi)$ определена на отрезке $[-1<\xi<1]$ и принадлежит гельдеровскому классу функций. В результате, придём к следующей системе $(N+1)$ линейных алгебраических уравнений относительно $(N+1)$ неизвестных $\Phi(\eta_1)$, $\Phi(\eta_2),...,\Phi(\eta_N)$, γ:

$$\begin{gathered}\sum_{m=1}^{N}\frac{1}{N}\left[\frac{1}{\eta_m-\xi_r}+\lambda K(\xi_r,\eta_m)\right]\Phi(\eta_m)=\frac{\lambda}{\pi}f(\xi_r)+\gamma \quad (r=1,2,...,N-1),\\ \frac{\pi}{N}\sum_{m=1}^{N}\Phi(\eta_m)=P_0, \qquad \frac{\pi}{N}\sum_{m=1}^{N}\eta_m\Phi(\eta_m)=M_0.\end{gathered} \tag{18}$$

Здесь

$$\eta_m=\cos\left(\frac{2m-1}{2N}\pi\right)\ (m=1,2,..., N), \quad \xi_r=\cos\left(\frac{\pi r}{N}\right)(r=1,2,...,N-1) \tag{19}$$

– известные чебышевские узлы.

3. Рассмотрим задачу об изгибе горизонтальной балки поперечными и продольными сжимающими силами на шероховатой полосе, нижняя грань которой жёстко защемлена.

Вертикальное упругое перемещение $\mathrm{v}_1(x)$, которое получает точка с координатой $x\in[-a;a]$ границы $z=0$ полосы, представим в виде суммы двух перемещений [9]

$$\mathrm{v}_1(x)=\mathrm{v}_{\text{шерох}}(x)+\mathrm{v}_{\text{глоб}}(x), \quad (-a\le x\le a). \tag{20}$$

Перемещение $\mathrm{v}_{\text{шерох}}(x)$ обусловлено деформациями верхнего тонкого граничного шероховатого слоя полосы, согласно экспериментам [10], пропорционально некоторой степени контактного давления $p(x)$ данной точки

$$\mathrm{v}_{\text{шерох}}(x)=A\cdot[p(x)]^{\beta}, \qquad (-a\le x\le a), \tag{21}$$

где A и β – положительные постоянные, притом $0{,}3<\beta\le 1$.

Перемещение $\mathrm{v}_{\text{глоб}}(x)$ возникает вследствие глобальной деформации полосы толщины h_1, с модулем упругости E_1 и коэффициентом Пуассона $¬_1$, когда на участке $-a\le x\le a$ её верхней границы $z=0$ приложены нормальные контактные давления $p(x)$, а нижняя граница $z=-h_1$ жёстко защемлена [11]

$$\mathrm{v}_{\text{глоб}}(x)=\frac{2\left(1-\nu_1^2\right)}{\pi E_1}\int_{-a}^{a}U\left(\frac{s-x}{h_1}\right)p(s)\,ds, \ (-a\le x\le a), \tag{22}$$

где ядерная функция $U(z)$ выражается формулой

$$U(z)=\int_0^{\infty}\frac{(2\varepsilon\operatorname{sh}2t-4t)\cos zt}{\varepsilon\left(2\varepsilon\operatorname{ch}2t+1+\varepsilon^2+4t^2\right)}dt, \quad (\varepsilon=3-4\nu_1). \tag{23}$$

На основании (9), (20)-(22) условие контакта балки и упругой полосы $\mathrm{v}(x)=\mathrm{v}_1(x)$ $(-a\le x\le a)$ можно свести к нелинейному интегральному уравнению типа Гаммерштейна [4] относительно неизвестной функции $p_0(\xi)$, которая характеризует контактное давление между балкой и слоем:

$$p_0(\xi)=\int_{-1}^{1}K(\xi,\eta)\cdot\left[p_0(\eta)\right]^{1/\beta}d\eta+q_0(\xi)+k_0\xi+\mathrm{v}_0,\quad(-1\le\xi\le1),\tag{24}$$

где $K(\xi,\eta)$ и $q_0(\xi)$ – известные функции, а v_0 и k_0 – неизвестные постоянные интегрирования, характеризующие соответственно жёсткое перемещение и угловой коэффициент касательной к изогнутой оси балки в точке с координатой $x=0$. При этом, условия равновесия (3) принимают вид:

$$P_0=\int_{-1}^{1}\left[p_0(\xi)\right]^m d\xi,\quad M_0=\int_{-1}^{1}\left[p_0(\xi)\right]^m \xi d\xi.\tag{25}$$

Таким образом, решение поставленной плоской контактной задачи сводится к определению $p_0(\xi)$, v_0 и k_0 из системы уравнений (24)-(25). Эффективное аналитическое решение этой системы получается методом последовательных приближений, сходимость которого в зависимости от характерных параметров задачи, а также оценку степени точности полученных результатов можно выяснить согласно разработанной в [3] методике, основаной на теории нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна и принципа сжимающих отображений в пространстве непрерывных функций с чебышевской метрикой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М.: Наука, 1966. 636с.
2. Theocaris P. S., Ioakimidis N. I. Numerical Integration Methods for the Solution of Singular Integral Equations. // Quart. Appl. Math., vol. 35. №1. 1997. P.173-185.
3. Мхитарян С.М., Шекян Л.А. Плоская контактная задача для двух шероховатых твёрдых тел, изготовленных из степенно упрочняющихся материалов // Изв. АН АрмССР. Механика. 1977. Т.30. №3. С.15-32.
4. Трикоми Ф. Интегральные уравнения. М.: ИЛ, 1960. 300с.
5. Агаян К.Л., Григорян Э.Х. О задаче изгиба полубесконечной балки на границе упругой полуплоскости. // Изв. НАН Армении. Механика. 2008. Т.61. №4. С.5-19.
6. Andreev V.I., Barmenkova E.V. A two-layer beam bending on an elastic basis with consideration of mass forces // 18-th Polish-Russian-Slovak Seminar «Teoretical Foundation of Civil Enginering». Warszawa, 2009, pp. 51-56.
7. Амирбекян А.Н., Мкртчян М.С., Мхитарян С.М., Шекян Л.А. О контактной задаче изгиба балки конечной длины на упругой полуплоскости с учётом сдвигающих сил в её срединной линии. //Изв. НАН Армении. Механика. 2014. Т.67. №1. С.6-21.
8. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 304с.
9. Горячева И.Г. Плоские и осесимметричные контактные задачи для шероховатых упругих тел // ПММ. 1979. Т.43. Вып.1. С.99 -105.
10. Огар П.М., Горохов Д.Б. Контактирование шероховатых поверхностей: фрактальный подход. Братск : БрГУ, 2007. 171 с.
11. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455с.

Сведения об авторах:

Мкртчян Мгер Мушегович – младший научный сотрудник Института механики НАН РА
Тел.: (+37410) 43-16-52, , **E-mail:** mher1982@mail.ru

Шекян Лаврентий Арамович – доктор физ.-мат. наук, профессор Национального политехнического университета Армении **Тел:** (+37410)39 89 01; (+37499) 28 34 40; **E-mail:** lshekyan@mail.ru

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕКЛАССИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ТРЁХСЛОЙНОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ С УЧЁТОМ ОБЪЁМНЫХ СИЛ

Погосян А.М., Саргсян М.З., Гулгазарян Л.Г., Агаловян М.Л.

На основе известных исходных GPS данных для области между северных широт 39.00’-42.00’ и восточных долгот 42.00’-47.00’ (территория Армении) исследована задача определения напряжённо-деформированного состояния трёхслойной пластины при полном контакте между слоями с учётом веса слоёв. Рассмотрен трёхслойный пакет из осадочного, гранитного и базальтового слоёв. На основе выведенных ранее рекуррентных формул в программной среде Wolfram Mathematica написаны универсальные скрипты: проведены численные расчёты напряжённо-деформированных состояний слоёв и представлены их графические изображения.

Определение напряжённо-деформированных состояний сейсмоактивных зон земной коры и мониторинг их изменения во времени является актуальной проблемой современной науки. Ниже изложенный подход позволяет определить НДС (напряженно-деформированное состояние) земной коры на любом участке Земли при наличии данных, полученных из сейсмостанций и GPS систем.

В настоящей работе рассмотрена задача определения НДС области между северных широт 39.00’-42.00’ и восточных долгот 42.00’-47.00’ (территория Армении) с учётом объёмных сил. Рассмотрен трёхслойный пакет (трёхслойная пластина) из осадочного, гранитного и базальтового слоёв при полном контакте между слоями с учётом веса слоёв. В программной среде Wolfram Mathematica на основе выведенных ранее рекуррентных формул написаны универсальные скрипты: проведены численные расчёты напряжённо-деформированных состояний слоёв и представлены их графические изображения.

1. Основные уравнения и постановка краевой задачи.

Рассматривается пакет из трёх ортотропных слоёв толщины $h=h_1+h_2+h_3$ в прямоугольной системе координат $Oxyz$, занимающий область (рис.1)

$$\Omega=\left\{x,y,z:\ 0\le x\le a, 0\le y\le b,\ 0\le z\le h=h_1+h_2+h_3\right\}$$

где $b=333.6$ км, $a=432$ км, $h_1=5$ км, $h_2=10$ км, h_3=20 км, $h=35$ км.

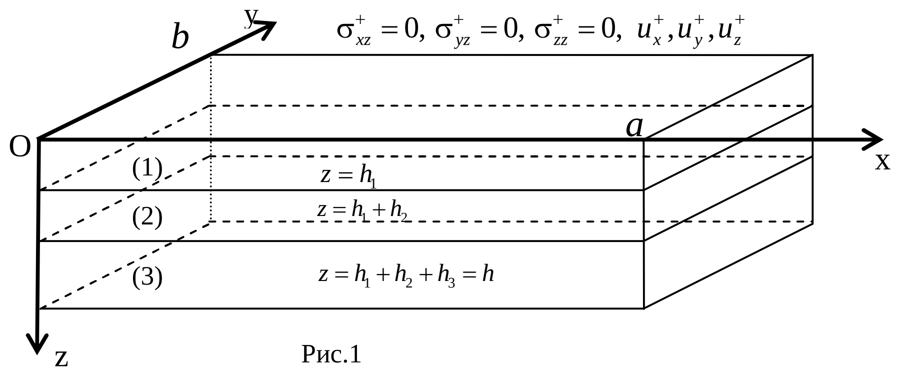


Рис.1

Требуется найти ненулевое решение системы уравнений и соотношений трёхмерной задачи теории упругости с учётом объёмных сил и температурного поля по модели Дюамеля-Неймана при граничных условиях на верхней плоскости $z=0$:

$$\sigma_{jz}(x,y,0,t)=0,\quad j=x,y,z$$
$$u_j(x,y,0,t)=u_j^+(x,y,t) \tag{1}$$

(где время t входит как параметр),

когда на поверхностях контакта между слоями $z=h_1$, $z=h_1+h_2$ заданы условия полного контакта:

$$z=h_1:\sigma^{(1)}_{jz}=\sigma^{(2)}_{jz},\ u^{(1)}_j=u^{(2)}_j,\quad j=x,y,z \tag{2}$$

$$z=h_1+h_2:\quad \sigma^{(2)}_{jz}=\sigma_{jz}^{(3)},\quad u^{(2)}_j=u_j^{(3)},\quad j=x,y,z \tag{3}$$

Условия на боковых поверхностях $x=0,a; y=0,b$ не конкретизируется, поскольку для данного класса неклассических краевых задач ими обусловлен пограничный слой [5,6].

2. Общее асимптотическое решение задачи.

Рассматривается система уравнений и соотношений трёхмерной задачи теории упругости с учётом объёмных сил и температурного поля по модели Дюамеля-Неймана для ортотропного тела:

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z}+P_x=0 \qquad (x,y,z)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}=e_1+\alpha_{11}\theta \qquad (x,y,z;1,2,3),\ \ \frac{\partial u_y}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial y}=a_{44}\sigma_{yz} \quad (y,z,x;4,5,6) \tag{4}$$

$$e_m=a_{1m}\sigma_{xx}+a_{2m}\sigma_{yy}+a_{3m}\sigma_{zz}, \quad m=1,2,3$$

$$P_z^k=\rho^k g\,,\ P_x^k,P_y^k=0 \qquad k=1,2,3.$$

Асимптотическое решение этой системы состоит из решения внутренней задачи и решения типа пограничного слоя [6]. В данной работе рассматривается только внутренняя задача, решение которой получено в [1]:

$$\sigma_{jz}^{(k,s)}=\sigma_{jz0}^{(k,s)}(\xi,\eta)+\sigma_{jz*}^{(k,s)}(\xi,\eta,\varsigma), \quad j=x,y,z$$

$$\sigma_{xx}^{(k,s)}=-\frac{A_{23}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}}\sigma_{zz0}^{(k,s)}-\frac{\gamma_{11}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}}\theta^{(k,s)}+\sigma_{xx*}^{(k,s)}(\xi,\eta,\varsigma) \tag{5}$$

$$\sigma_{yy}^{(k,s)}=-\frac{A_{13}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}}\sigma_{zz0}^{(k,s)}-\frac{\gamma_{22}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}}\theta^{(k,s)}+\sigma_{yy*}^{(k,s)}(\xi,\eta,\varsigma)$$

$$\sigma_{xy}^{(k,s)}=\frac{1}{a_{66}^{(k)}}\left[\frac{\partial \mathrm{v}^{(k,s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial u^{(k,s-1)}}{\partial\eta}\right]$$

$$u^{(k,s)}=a_{55}^{(k)}\varsigma\sigma_{xz0}^{(k,s)}+u_0^{(k,s)}(\xi,\eta)+u_*^{(k,s)}(\xi,\eta,\varsigma)$$

$$\mathrm{v}^{(k,s)}=a_{44}^{(k)}\varsigma\sigma_{yz0}^{(k,s)}+\mathrm{v}_0^{(k,s)}(\xi,\eta)+\mathrm{v}_*^{(k,s)}(\xi,\eta,\varsigma)$$

$$w^{(k,s)}=\frac{A_{33}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}}\varsigma\sigma_{zz0}^{(k,s)}+w_0^{(k,s)}(\xi,\eta)+w_*^{(k,s)}(\xi,\eta,\varsigma)$$

где

$$\sigma_{jz*}^{(k,s)}=-\int_0^\varsigma\left[F_j^{(k,s)}+\frac{\partial\sigma_{jx}^{(k,s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{jy}^{(k,s-1)}}{\partial\eta}\right]d\varsigma, \quad j=x,y,z$$

$$\sigma_{xx*}^{(k,s)}=\frac{1}{A_{11}^{(k)}}\left[a_{22}^{(k)}\frac{\partial u^{(k,s-1)}}{\partial\xi}-a_{12}^{(k)}\frac{\partial \mathrm{v}^{(k,s-1)}}{\partial\eta}-A_{23}^{(k)}\sigma_{zz*}^{(k,s)}\right]$$

$$\sigma_{yy*}^{(k,s)}=\frac{1}{A_{11}^{(k)}}\left[a_{11}^{(k)}\frac{\partial \mathrm{v}^{(k,s-1)}}{\partial\eta}-a_{12}^{(k)}\frac{\partial u^{(k,s-1)}}{\partial\xi}-A_{13}^{(k)}\sigma_{zz*}^{(k,s)}\right] \tag{6}$$

$$u_*^{(k,s)}=\int_0^\varsigma\left[a_{55}^{(k)}\sigma_{xz*}^{(k,s)}-\frac{\partial w^{(k,s-1)}}{\partial\xi}\right]d\varsigma, \quad \mathrm{v}_*^{(k,s)}=\int_0^\varsigma\left[a_{44}^{(k)}\sigma_{yz*}^{(k,s)}-\frac{\partial w^{(k,s-1)}}{\partial\eta}\right]d\varsigma$$

$$w_*^{(k,s)}=\int_0^\varsigma\left[a_{13}^{(k)}\sigma_{xx*}^{(k,s)}+a_{23}^{(k)}\sigma_{yy*}^{(k,s)}+a_{33}^{(k)}\sigma_{zz*}^{(k,s)}\right]d\varsigma$$

$$A_{11}^{(k)}=a_{11}^{(k)}a_{22}^{(k)}-(a_{12}^{(k)})^2,\ \ A_{13}^{(k)}=a_{11}^{(k)}a_{23}^{(k)}-a_{12}^{(k)}a_{13}^{(k)}$$

$$A_{23}^{(k)}=a_{22}^{(k)}a_{13}^{(k)}-a_{12}^{(k)}a_{23}^{(k)},\ \ A_{33}^{(k)}=a_{33}^{(k)}A_{11}^{(k)}-a_{13}^{(k)}A_{23}^{(k)}-a_{23}^{(k)}A_{13}^{(k)}$$

$$\gamma_{11}^{(k)}=\alpha_{11}^{(k)}a_{22}^{(k)}-a_{12}^{(k)}\alpha_{22}^{(k)},\ \ \gamma_{22}^{(k)}=\alpha_{22}^{(k)}a_{11}^{(k)}-a_{12}^{(k)}\alpha_{11}^{(k)}$$

$k=1,2,\quad Q^{(k,m)}\equiv 0$ при $m<0.$

$$F_j^{(0)}=\varepsilon^2\ell F_j,\ F_j^{(s)}=0,\ s\neq 0$$

Известно, что когда функции $u^{+}, \mathrm{v}^{+}, w^{+}$ являются многочленами от координат x, y, итерационный процесс обрывается на определённом приближении и соответствующее решение трёхмерной задачи становится математически точным.

Поскольку накопление деформаций в Литосферных плитах – медленный процесс (длится обычно десятилетия), процесс практически будет квазистационарным.

3. Численное решение.

Пусть в некоторый момент времени $t = t_k$ в «n» точках лицевой поверхности известны компоненты вектора перемещения $u_i^{(+)}(x_i, y_i, t_k)$, $\mathrm{v}_i^{(+)}(x_i, y_i, t_k)$, $w_i^{(+)}(x_i, y_i, t_k)$ – как данные GPS. Тогда перемещения лицевой поверхности можно аппроксимировать многочленами в программной среде Wolfram Mathematica. Отметим, что имея GPS данные в разных периодах времени, можно исследовать критические напряжения и дать координаты приблизительной территории возможной потери сейсмоустойчивости.

Как исходные данные и материалы слоёв, выбраны [2,4]:

	Толщина слоя – h (м)	***Модуль сдвига - G (Па)***	***Модуль Юнга - E (Па)***	***Объёмный модуль упругости - K(Па)***	***Коэффициент Пуассона - $\upsilon(\mu)$***	***Плотность слоев - ρ (кг/м^3)***
Осадочный слой	5×10^{3}	$23{,}2\times10^{9}$	$54{,}99\times10^{9}$	$29{,}09\times10^{9}$	0.184	$2{,}45\times10^{3}$
Гранитный слой	10×10^{3}	$30{,}82\times10^{9}$	$74{,}83\times10^{9}$	$43{,}58\times10^{9}$	0.21	$2{,}61\times10^{3}$
Базальтовый слой	35×10^{3}	$29{,}22\times10^{9}$	$75{,}11\times10^{9}$	$55{,}7\times10^{9}$	0.27	$2{,}91\times10^{3}$

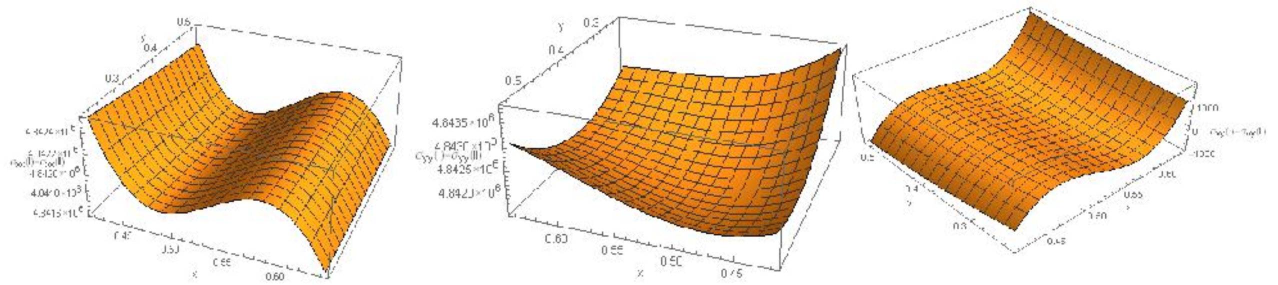
Температурное поле для начала не учитывается, а для $u^{+}, \mathrm{v}^{+}, w^{+}$ рассмотрены данные следующих станций (рис.2) из работы [3].

Рассмотрена модель ITRF 2000 /JOURNAL OF GEOPHYSICAL RESEARCH, VOL.107, NO. B10, 2214, doi:10.1029/2001JB000561, 2002/, проведена аппроксимация исходных данных, т.е. отклонения не учитываются и предполагается, что месячный сдвиг выбранных точек равномерен.

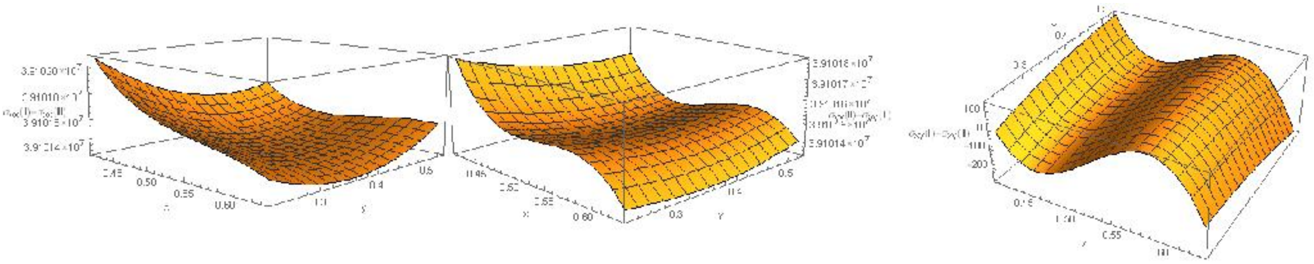
Рис. 2.

При вышеприведённых данных получены графики, характеризующие напряженно-деформированное состояние исследованной области: в частности, ниже приведены графики некоторых компонентов вектора перемещения и тензора напряжений в зонах контакта ($h = h_1$, $h = h_1 + h_2$) и по толщине пластины ($h = h_1 + h_2 + h_3$):

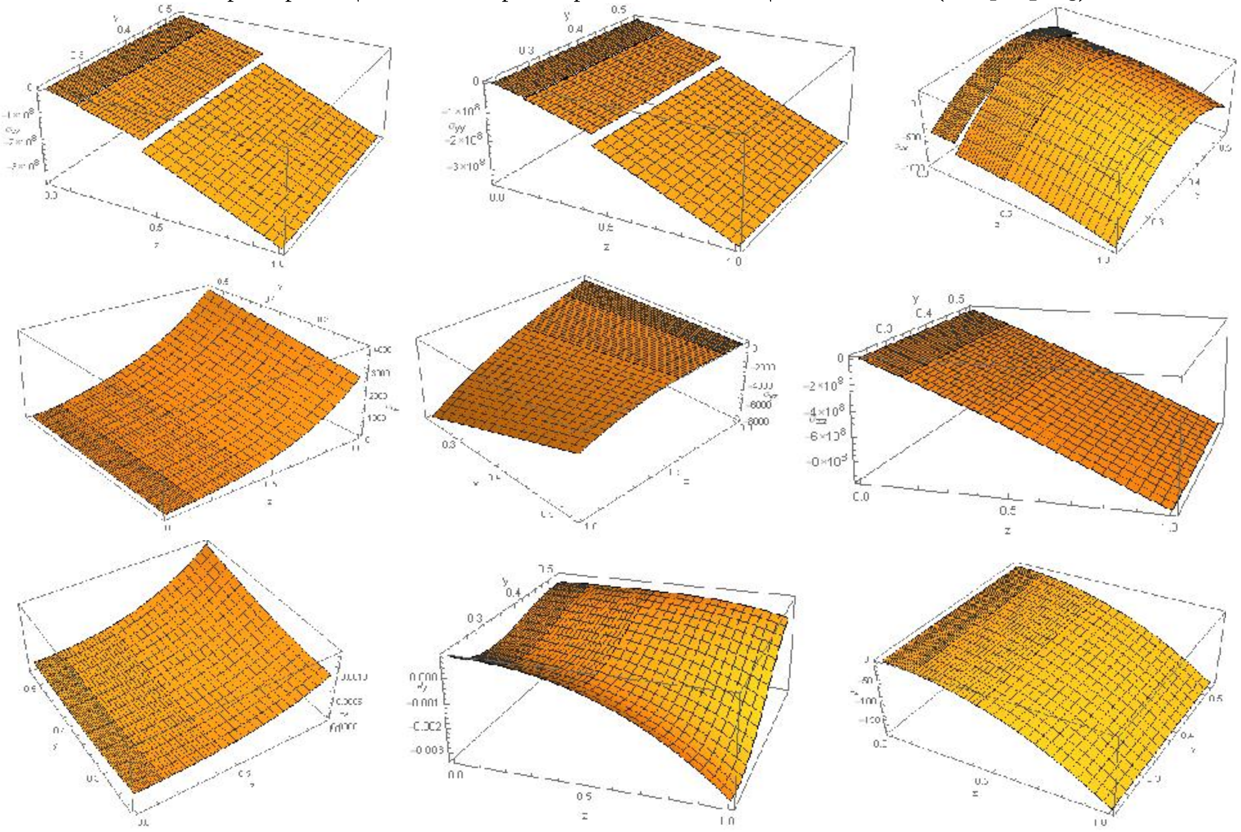
разница компонент тензора напряжений $\sigma_{xx}^{(I)} - \sigma_{xx}^{(II)}$, $\sigma_{yy}^{(I)} - \sigma_{yy}^{(II)}$, $\sigma_{xy}^{(I)} - \sigma_{xy}^{(II)}$ в зоне контакта $h = h_1$:



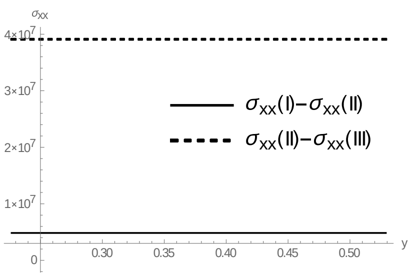
разница компонент тензора напряжений $\sigma_{xx}^{(II)} - \sigma_{xx}^{(III)}$, $\sigma_{yy}^{(II)} - \sigma_{yy}^{(III)}$, $\sigma_{xy}^{(II)} - \sigma_{xy}^{(III)}$ в зоне контакта $h=h_1+h_2$:

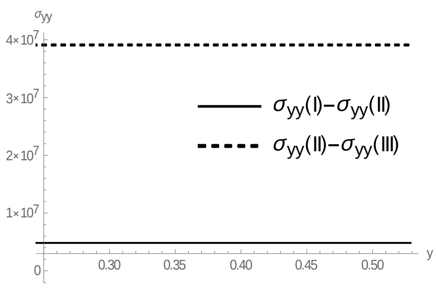


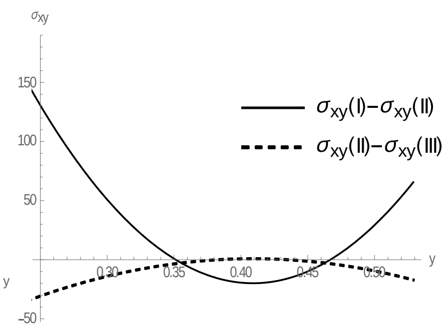
компоненты вектора перемещения и тензора напряжений по толщине пластины ($h=h_1+h_2+h_3$):



разница напряжений в зонах контакта слоёв:







Полученные результаты позволяют сделать некоторые заключения. Вес слоёв, в основном, влияет на значение вертикальных перемещений слоёв и мало влияет на тангенциальные компоненты перемещений; учёт веса приводит к существенному возрастанию значений напряжений, кроме значений σ_{xy}^{k}. Напряжения вне зависимости учёта или неучёта веса слоёв имеют тенденцию возрастания по глубине пакета [7,8].

Исследование выполнено при финансовой поддержке Государственного комитета по науке МОН РА в рамках научного проекта № 15T-2C343.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С., Гулгазарян Л.Г. К определению напряжённо-деформированных состояний Литосферных плит Земли на основе данных GPS систем. //Докл. НАН Армении. Т.112. №3. 2012. С.264-272.
2. Хачиян Э. Прикладная сейсмология. Ереван: Изд. «Гитутюн» НАН РА, 2008. 491с.
3. Davtyan V., Doerflinger E., Karakhanyan A., Philip H., Avagyan A., Champollion C. and Aslanyan R. Fault slip rates in Armenia by the GPS data. //Izvestia NAS of RA. Nauka o Zemle. 2006. T.LIX. №2.
4. Farmer I.W. Engineering Properties of Rock. 180 p., 1968. E. and F. N. Spon Ltd., London (Barnes and Noble, New York).
5. Aghalovyan L.A. Proceeding of A. Razmadze Mathematical Institute of Georgia. 2011. Vol.155. P.3-10.
6. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука-Физматлит, 1997. 414с.
7. Погосян А.М., Саргсян М.З., Агаловян М.Л., Гулгазарян Л.Г. О характере напряжённо-деформированного состояния территории Армении на основе данных GPS систем. //Труды VIII межд. конф.: Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Ереван: 2014. С.349-353.
8. Погосян А.М., Саргсян М.З., Агаловян М.Л., Гулгазарян Л.Г. Способ мониторинга напряжённо-деформированных состояний территории Армении на основе данных GPS систем. //Доклады НАН Армении. Т.115. №4. С.290-297.

Сведения об авторах:

Погосян Айк Меникович,
К.ф.м.н., научный сотрудник Института механики НАН РА
Тел.: (+37491) 290209, **E-mail:** haikp@mail.ru
Саргсян Месроп Зогракович,
К.ф.м.н., научный сотрудник Института механики НАН РА
Тел.: (+37455) 049950**, E-mail:** messarg@gmail.com
Гулгазарян Лусине Гургеновна
Д.ф.м.н, ведущий научный сотрудник Института механики НАН РА,
Доцент, факультет математики, физики и информатики АГПУ им. Х. Абовяна,
Тел.: (+37491) 302554, **E-mail:** lusina@mail.ru
Агаловян Мгер Ленсерович,
Д.ф.м.н, ведущий научный сотрудник Института механики НАН РА,
Тел.: (+37493) 055070, **E-mail:** mheraghalovyan@rambler.ru

ВОЛНЫ В СЛОЕ С УПРУГО-СТЕСНЁННЫМИ ГРАНИЦАМИ

Саркисян А.С., Саркисян С.В.

Исследована задача о распространении периодических волн в упругом слое. Предполагается, что на границах слоя нормальное и касательное напряжения стеснённы. Для фазовой скорости симметричных и антисимметричных колебаний получены характеристические уравнения. Рассмотрены предельные случаи и приведены числовые расчёты для фазовой скорости волны.

1. Рассмотрим упругий изотропный слой толщиной 2h. Слой в прямоугольной декартовой системе координат $0xyz$ занимает область $x, y \in (-\infty, \infty), z \in [-h, h]$. В этом слое распространяется периодическая волна с фазовой скоростью *c*. Ниже рассмотрим плоскую задачу: $\vec{u}\left(u(x,z,t), 0, w(x,z,t)\right)$, где *u*, w– проекции упругих перемещений по направлению на координатные оси *x*, *z* соответственно.

При помощи преобразований

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial z}, \qquad w = \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{1.1}$$

система динамических уравнений теории упругости приводится к автономным волновым уравнениям относительно динамических потенциалов $\varphi(x,z,t)$ и $\psi(x,z,t)$ [1]:

$$c_1^2 \Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}, \quad c_2^2 \Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}, \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,. \tag{1.2}$$

Примем, что на плоскостях $z = \pm h$, ограничивающий слой, заданы следующие граничные условия:

$$\sigma_{zz} = -\alpha w, \quad \sigma_{zx} = -\beta u \quad (\alpha, \beta > 0). \tag{1.3}$$

Условия (1.3) были предложены Миндлином [2, 3] для исследования задачи отражения упругой волны от границы полупространства. В работе [4] М.В. Белубекяном исследованы условия существования волн Рэлея в случае упруго-стеснённой границы. Распространение периодических волн в упругом слое исследована в [6]. Предполагается, что на границах слоя нормальное напряжение равно нулю, а касательное напряжение стеснённо.

В частном случае при $\alpha = \beta = 0$ получаются условия свободной границы.

С использованием закона Гука и преобразования (1.1) граничные условия (1.3) при $z = \pm h$ приводятся к виду:

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \lambda\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + 2\mu\frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial z} + \alpha\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = 0, \tag{1.4}$$

$$\mu\left(2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) \mp \beta\frac{\partial\varphi}{\partial x} \pm \beta\frac{\partial\psi}{\partial z} = 0$$

Поставим следующую задачу. Найти решения двумерных волновых уравнений (1.2), удовлетворяющих граничным условиям (1.4).

Решения уравнений (1.2) можно представить в виде [1]:

$$\varphi = \left(A\,\mathrm{sh}(\nu_1 z) + B\,\mathrm{ch}(\nu_1 z)\right)\exp ik(x - ct),$$
$$\psi = \left(C\,\mathrm{sh}(\nu_2 z) + D\,\mathrm{ch}(\nu_2 z)\right)\exp ik(x - ct), \tag{1.5}$$

где *A*, *B*, *C* и *D* – произвольные постоянные, $\nu_1^2 = k^2(1-\eta\theta)$, $\nu_2^2 = k^2(1-\eta)$, $c_1^2 = \dfrac{\lambda+2\mu}{\rho}$, $c_2^2 = \dfrac{\mu}{\rho}$, $\theta = \dfrac{c_2^2}{c_1^2}$, $\eta = \dfrac{\omega^2}{k^2 c_2^2}$.

Подставляя (1.5) в граничные условия (1.4), получим систему четырёх линейных однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных. Приравнивание определителя этой системы уравнений к нулю приводит к характеристическому уравнению, из которого при заданных значениях ρ, μ, λ, α, β и ω можно найти фазовую скорость *c*. Упростим задачу, рассмотрев две системы частных решений:

$$\varphi_1 = B\,\mathrm{ch}(\nu_1 z)\exp ik(x-ct),\ \psi_1 = C\,\mathrm{sh}(\nu_2 z)\exp ik(x-ct), \tag{1.6}$$

$$\varphi_2 = A\,\mathrm{sh}(\nu_1 z)\exp ik(x-ct),\ \psi_2 = D\,\mathrm{ch}(\nu_2 z)\exp ik(x-ct). \tag{1.7}$$

Решение (1.6) соответствует симметричному виду колебаний, а решение (1.7) – антисимметричному виду колебаний. При (1.6) перемещение u, напряжение σ_{zz} симметричны; перемещение w, напряжение σ_{zx} антисимметричны относительно плоскости $z=0$; а при (1.7) перемещение u, напряжение σ_{zz} антисимметричны; перемещение w, напряжение $\pm_{zx}$ симметричны относительно плоскости $z=0$ [1].

Подставляя (1.6) в граничные условия (1.4), при $z=h$ получим систему двух уравнений:

$$\begin{gathered} B\big((2-\eta)\,\mathrm{ch}(\nu_1 h) - \alpha_0\nu_1\,\mathrm{sh}(\nu_1 h)\big) + Ci\big(2\sqrt{1-\eta}\ \mathrm{ch}(\nu_2 h) - \alpha_0\,\mathrm{sh}(\nu_2 h)\big) = 0, \\ \big(2\sqrt{1-\eta\theta}\,\mathrm{sh}(\nu_1 h) - \beta_0\,\mathrm{ch}(\nu_1 h)\big)iB + \big((\eta-2)\,\mathrm{sh}(\nu_2 h) + \\ +\beta_0\sqrt{1-\eta}\,\mathrm{ch}(\nu_2 h)\big)C = 0, \end{gathered} \tag{1.8}$$

где $\beta_0 = \dfrac{\beta}{\mu k}, \alpha_0 = \dfrac{\alpha}{\mu k}$.

Из равенства нулю детерминанта системы уравнений (1.8) получим следующее уравнение относительно безразмерной характеристики квадрата фазовой скорости η:

$$\begin{gathered} (2-\eta)^2\,\mathrm{th}\big(kh\sqrt{1-\eta}\big) - 4\sqrt{(1-\eta)(1-\eta\theta)}\ \mathrm{th}\big(kh\sqrt{1-\eta\theta}\big) + \beta_0\eta\sqrt{1-\eta} + \\ +\alpha_0\eta\sqrt{1-\eta\theta}\,\mathrm{th}\big(kh\sqrt{1-\theta\eta}\big)\mathrm{th}\big(kh\sqrt{1-\eta}\big) + \alpha_0\beta_0\Big(\sqrt{(1-\eta)(1-\eta\theta)}\,\mathrm{th}\big(kh\sqrt{1-\theta\eta}\big) - \\ -\mathrm{th}\big(kh\sqrt{1-\eta}\big)\Big) = 0. \end{gathered} \tag{1.9}$$

Уравнение (1.9) при $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ совпадает с дисперсионным уравнением Рэлея–Лэмба [1].

2. Рассмотрим предельные случаи.

Пусть длина волны очень мала по сравнению с толщиной слоя *2h*. Тогда из уравнения (1.9) получим:

$$\begin{gathered} (2-\eta)^2 - 4\sqrt{(1-\eta)(1-\eta\theta)} + \beta_0\eta\sqrt{1-\eta} + \alpha_0\eta\sqrt{1-\eta\theta} + \\ +\alpha_0\beta_0\Big(\sqrt{(1-\eta)(1-\eta\theta)} - 1\Big) = 0. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Уравнение (2.1) при $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ совпадает с классическим уравнением Рэлея [1]. В отличие от уравнения Рэлея, уравнение (2.1) – дисперсионное, т.е. фазовая скорость η зависит от волнового числа k. При $\alpha_0 = 0$ или $\beta_0 = 0$ уравнение (2.1) приводится к аналогичным уравнениям, исследованным в работе [4].

Уравнение (2.1) имеет корень $\eta = 0$, которому соответствует тривиальное решение. Следуя работе [5] , исключая корень $\eta = 0$, уравнение (2.1) сводится к виду:

$$S(\eta) \equiv \eta - \frac{(1-\theta)\sqrt{1-\eta}}{\sqrt{1-\eta}+\sqrt{1-\theta\eta}}(4-\alpha_0\beta_0)+\beta_0\sqrt{1-\eta}+\alpha_0\sqrt{1-\theta\eta}-\alpha_0\beta_0 = 0. \qquad (2.2)$$

Исследуем свойства функции $S(\eta)$. $S(\eta)$ при $\eta = 0$ и $\eta = 1$ принимает следующие значения:

$S(0) = -0.5(1-\theta)(4-\alpha_0\beta_0)+\alpha_0+\beta_0-\alpha_0\beta_0,$

$S(1) = 1+\alpha_0\sqrt{1-\theta}-\alpha_0\beta_0.$

Уравнение (2.2) будет иметь решение в интервале $\eta \in (0,1)$, если $S(0) < 0, S(1) > 0$. При этом, решение будет единственным, если $\frac{dS}{d\eta} > 0$. Выбирая значения α_0 и β_0, удовлетворяющие данным условиям, можно получить значения фазовой скорости поверхностной волны в зависимости от степени стеснённости поверхности полупространства.

α_0	β_0	η
0	0	0.8464
0	0.2	0.8132
0	0.4	0.7672
0	0.6	0.7013
0	0.8	0.6032
0	1	0.4532
0.2	0	0.7765
0.4	0	0.6888
0.6	0	0.5819
0.8	0	0.4545
1	0	0.3054
0.2	0.2	0.7427
0.4	0.4	0.6108
0.6	0.6	0.4479
0.8	0.8	0.2497
1	1	0.0099

В таблице приводятся численные результаты, вычисленные по уравнению (2.2) для параметра η, характеризующего квадрат фазовой скорости поверхностной волны в зависимости от параметров, характеризующих степень стеснённости поверхности полупространства (θ =0.33).

Если длина волны $l = \frac{2\pi}{k}$ очень велика по сравнению с толщиной слоя, то величины $\nu_1 h$ и $\nu_2 h$ будут малы при конечном значении *c*. Заменяя в уравнении (1.9) гиперболические тангенсы их аргументами, получим:

$$c = \frac{c_2}{c_1}\sqrt{\frac{4(c_1^2-c_2^2)-kh\alpha_0 c_1^2}{1-kh\alpha_0\frac{c_2^2}{c_1^2}}-\frac{\beta_0 c_1^2}{kh}}. \qquad (2.3)$$

Если $\mu = \lambda \; \left(\nu = \frac{1}{4}\right)$, то $c_1^2 = 3c_2^2$ и из формулы (2.3) получим:

$$c = c_2\sqrt{\frac{8-3kh\alpha_0}{3-kh\alpha_0}-\frac{\beta_0}{kh}}. \qquad (2.4)$$

В общем случае симметричных колебаний, фазовую скорость (c) требуется определить из полного дисперсионного уравнения (1.9).

Перейдём к колебаниям, выраженными формулами (1.7). Удовлетворяя решения (1.7) граничным условиям (1.4), для антисимметричных колебаний получим следующее характеристическое уравнение относительно безразмерной характеристики квадрата фазовой скорости η:

$$(2-\eta)^2 \operatorname{cth}\left(kh\sqrt{1-\eta}\right)-4\sqrt{(1-\eta)(1-\eta\theta)}\ \operatorname{cth}\left(kh\sqrt{1-\eta\theta}\right)+\beta_0\eta\sqrt{1-\eta}+$$
$$+\alpha_0\eta\sqrt{1-\eta\theta}\operatorname{cth}\left(kh\sqrt{1-\theta\eta}\right)\operatorname{cth}\left(kh\sqrt{1-\eta}\right)+\alpha_0\beta_0\left(\sqrt{(1-\eta)(1-\eta\theta)}\operatorname{cth}\left(kh\sqrt{1-\theta\eta}\right)-\right. \quad (2.5)$$
$$\left.-\operatorname{cth}\left(kh\sqrt{1-\eta}\right)\right)=0.$$

В предельном случае, когда длина волны очень мала по сравнению с толщиной слоя и при $kh\to\infty$, $c<c_2<c_1$ уравнение (2.3) сводится к уравнению (2.1), которое характеризует поверхностные волны Рэлея для упруго-стеснённой границы. При другом предельном случае из уравнения (2.3) можно определить фазовую скорость волн изгиба антисимметричных колебаний.

Таким образом, для фазовой скорости симметричных и антисимметричных колебаний слоя с упруго-стесненными границами выведены дисперсионные уравнения и показано влияние коэффициента стеснённости на фазовую скорость.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872с.
2. Miklowitz J. The Theory of Elastic Waves and Waveguides. North–Holland, 1984, 618p.
3. Mindlin R.D. Waves and Vibrations in Isotropic Elastic Plates. In «Structural Mechanics», J.N. Coodier and N.J. Hoff, eds, Pergamon Press, New York, 1960, p.199-232.
4. Белубекян М.В. Волна Рэлея в случае упруго-стеснённой границы. //Изв. НАН Армении. Механика. 2011. Т.64. №4. С.3-6.
5. Белубекян М.В. Поверхностные волны в упругих средах. //В сб.: «Проблемы механики деформируемого твёрдого тела». Ереван: Институт механики НАН Армении, 1997. С.79-100.
6. Саркисян А.С., Саркисян С.В. Распространение волн в слое с упруго-стеснёнными границами.//В сб.тр. IV Международной конференции: «Актуальные проблемы механики сплошной среды», 21-26 сентября 2015 г., Цахкадзор, Армения, с.362-364.

Сведения об авторах:

Саркисян Арег Самвелович – магистрант ЕГУ .

Саркисян Самвел Владимирович – доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой механики, Ереванский государственный университет, факультет математики и механики.
Адрес: ул. Алека Манукяна 1, ЕГУ, Ереван, Армения
Тел.: (+37455) 73-13-13, **E–mail:** vas@ysu.am

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ РОСТА БИОЛОГИЧЕСКИХ ТКАНЕЙ

Стадник Н.Э.

Рассматривается биологический рост тканей животных и человека. Раскрывается содержание понятия тканевый рост в широком и узком смыслах. Анализируются компоненты ткани: межклеточное вещество и клетки, вариации состава и механических свойств межклеточного вещества различных типов тканей, которые в большинстве случаев и обуславливают её механические свойства. Приводятся отличия твёрдых и мягких тканей на молекулярном уровне. В первом приближении рассматриваются математические предпосылки для построения адекватной модели биологического роста тканей. Даётся краткий обзор уже существующих математических моделей.

Математическое моделирование процессов роста биологических тканей привлекает всё большее внимание современных исследователей. При этом, существующие модели тканевого роста можно подразделить на два типа в соответствии с характером исследуемого биологического процесса: на модели объёмного [1-3] и поверхностного роста [4-7]. Построение подобных моделей необходимо проводить с глубоким пониманием биологических процессов протекающих в исследуемых объектах (тканях, органах и т.д.).

Основной целью данной работы является формулировка главных особенностей процессов роста тканей для построения адекватных математических моделей объёмного [8] или поверхностного роста [9-17] различных тканевых структур человеческого и животного организмов. Обсуждается адекватность применения того или иного подхода для описания роста конкретных биологических тканей.

Ткань – это совокупность однородных клеток и межклеточного вещества, объединённых общей функцией и источником происхождения. У животных и человека в общем случае выделяют четыре типа ткани: соединительная, мышечная, эпителиальная и нервная. Каждый из четырёх типов тканей характеризуется присущими только ему характеристиками, однако внутри одного типа ткани могут существенно отличаться как по механическим, так и по биохимическим свойствам. Любая ткань имеет два основных компонента, это сами клетки ткани и межклеточное вещество. Клетка – это оформленная мембраной цитоплазма, включающая в себя различные органеллы и ядро. На определённом этапе эмбрионального развития клетки зародыша растут, делятся и дифференцируются сначала на один из четырёх типов тканей, затем на его подтипы. Клетки ткани между собой могут образовывать контакты, которые характеризуются различной степенью прочности, что в целом может существенно влиять на механические свойства ткани в целом. Межклеточное вещество является окружением клеток ткани, продуцируется самими клетками и включает в себя ряд компонентов: основное вещество (вода, неорганические вещества, органические вещества, задерживающие воду, например, гиалуроновая кислота), фибриллярные белки (коллаген, эластин и др.), а также адгезивные белки. Механические свойства конкретной ткани могут сильно отличаться даже в рамках одного типа и зависят в большей степени именно от качественного и количественного состава межклеточного вещества, т.к. строение и механика клеток различных тканей обычно очень схожи (исключение составляют, например, мышечные клетки, т.к. в их состав входят специализированные сократительные структуры, которые существенно изменяют механические свойства типичной клетки). Наибольшее число вариаций подтипов тканей представлено у соединительной ткани. К данному типу относятся как твёрдые ткани: кость и хрящ, а также ряд мягких тканей: жировая ткань, сухожилия, связки, рыхлая соединительная ткань и т.д. Твёрдость межклеточного вещества костной ткани, которая обуславливает основные механические свойства, зависит от большого содержания в ней солей кальция, осаждённых на фибриллярные белки (коллаген), придавая ему прочность и твёрдость, характерную для кости. Развитие трубчатой кости как органа, или непрямой остеогенез – это сложный биологический процесс, который протекает в несколько стадий, как показано на рис.1.

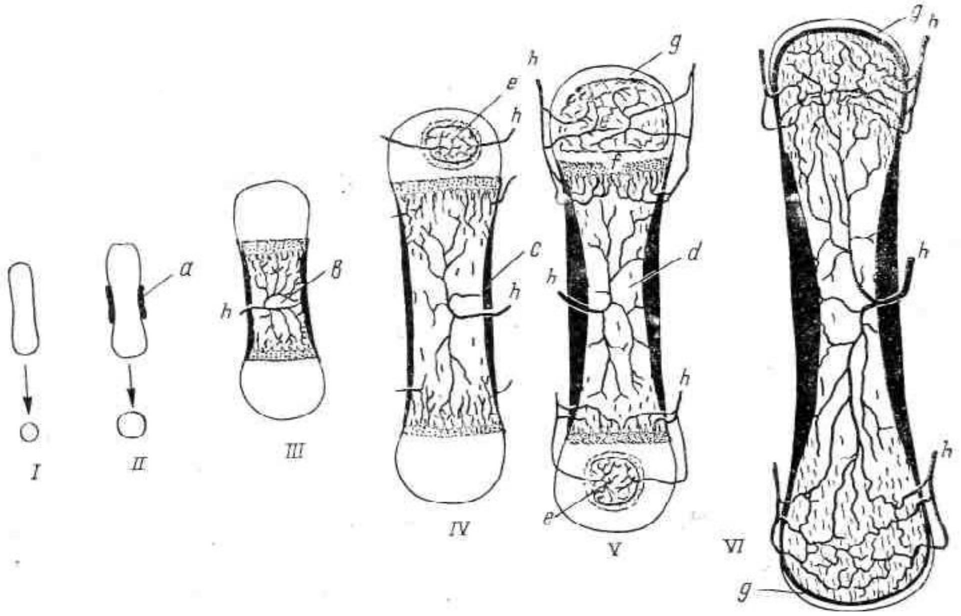


Рис.1. Остеогенез трубчатой кости:
I – хрящевая закладка будущей кости; II – перихондральное (периостальное) окостенение в диафизе (a); III – начало энхондрального окостенения (b); IV – образование компактной кости (c); V – появление костной полости (d); очаги энхондрального окостенения в эпифизах (e); метаэпифизарный хрящ (f): – законченный рост трубчатой кости; g – суставной хрящ; h – кровеносные сосуды.

В организме животных и человека соединительная ткань занимает до 50% от всех типов тканей и характеризуется в первую очередь наличием большей доли межклеточного вещества. Образование органических компонентов межклеточного вещества ткани это, как правило, сложный и многоплановый процесс, в общем случае, включающий в себя синтез первичных белковых – молекул с определёнными свойствами внутри клетки, их первичную модификацию внутри клетки, выход из клетки и вторичную модификацию (обычно, усложнение путём объединения) в составе межклеточного вещества. Ярким и наиболее обширным примером данного процесса является синтез и образование коллагеновых волокон (рис.2).

Состав межклеточного вещества соединительной ткани сильно разнится, что в большей степени и определяет механические свойства различных подтипов данной ткани.

Рассматривая частный рост тканей человека и животных, можно выделить основные принципы и закономерности. Определённый интерес представляет процессы гисто- и органогенеза, ремоделирования и регенерации, особенности роста и морфогенеза различных типов тканей человека и животных (нервной, соединительной, мышечной и эпителиальной) как отдельно, так и в структуре органа. В частности, уникальным является механизм развития хрящевой ткани, оппозиционный и интерстициальный рост, прямой и непрямой остеогенез, процессы ремоделирования и регенерации костной и хрящевой тканей. Так, репаративная регенерация костной ткани может протекать по двум механизмам: с образованием фрагментов хрящевой ткани, замещающихся костной мозолью, или в случае оптимальной репозиции с образованием щели между репанированными концами кости. Рост различных структур нервной системы (рост межнейронных связей, рост нерва и его восстановление при повреждениях) так же протекает по специфическим механизмам. Отдельный интерес вызывают процессы роста мышечной ткани в норме и патологии, в частности, возрастная гипертрофия миокарда, патологическая дегенерация сердечной мышечной ткани и её замещение соединительной тканью в ассоциации с ишемической болезнью сердца. Основные особенности роста жировой соединительной ткани в постнатальном периоде заключаются в том, что рост осуществляется преимущественно за счёт увеличения в объёме и массе каждой жировой клетки в отдельности.

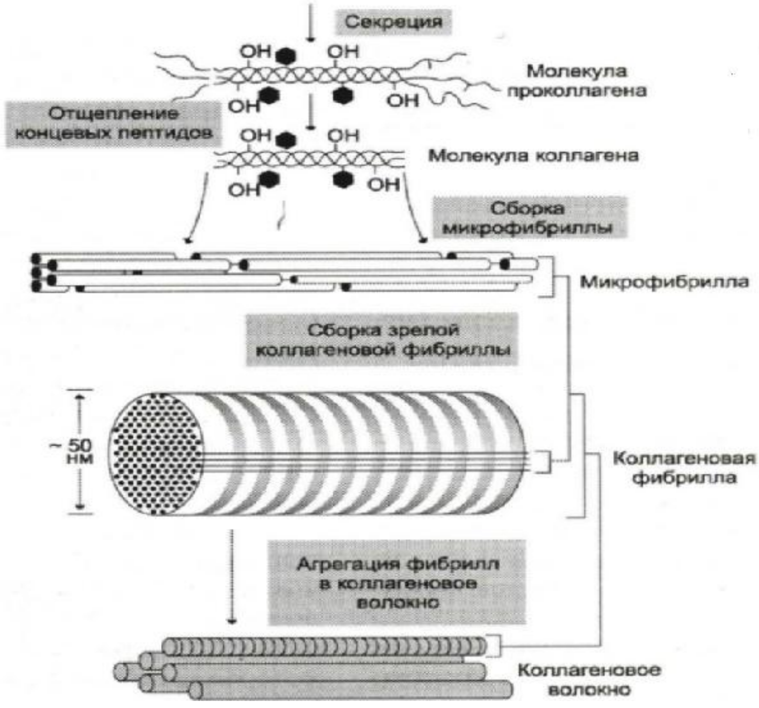


Рис. 2. Этапы образования коллагена в ткани.

Современные представления о процессе роста тканей довольно расплывчаты. В первом приближении под ростом ткани можно понимать процесс увеличения массы и объёма. С точки зрения морфофизиологии, тканевый рост подразделяется на собственно рост, ремоделирование и регенерацию. Собственно рост – пропорциональное увеличение органа при развитии молодого организма. Ремоделирование – изменение качественного состава ткани, её механических свойств в процессе адаптации к изменившимся условиям среды. Регенерация – восстановление структуры ткани при её повреждении. Рассматривая рост биологических тканей, выделяют поверхностный или аппикальный рост, когда новые клетки из камбиального слоя дифференцируются и накладываются на поверхность существующей модели ткани. Данный рост является основным на этапе роста организма и в большей степени характерен для твёрдых тканей, в силу их механических особенностей, а также для эпителиальной ткани, когда деление клеток происходит в тонком слое ткани, прилежащем к базальной мембране. Объёмный или интерстициальный рост ткани характеризуется тем, что отсутствует четко выделенная поверхность роста, деление и рост клеток, а также образование нового межклеточного вещества происходит в толще ткани. Такой тип роста преобладает, например, в жировой и мышечной тканях. Рассмотренные закономерности дают предпосылки для построения математических моделей, а также верификации параметров их моделей.

Автор благодарит профессора А.В. Манжирова за постановку задачи и помощь.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №14-01 00741, №15-31-21111).

ЛИТЕРАТУРА

1. Klisch S. M., Van Dyke T. J., Hoger A. A theory of volumetric growth for compressible elastic biological materials //Mathematics and Mechanics of Solids. – 2001. – Т. 6. – №. 6. – С. 551-575.
2. Bleker O. P. et al. The volumetric growth of the human placenta: a longitudinal ultrasonic study //American journal of obstetrics and gynecology. – 1977. – Т. 127. – №. 6. – С. 657-661.
3. Kroon W. et al. Computational modeling of volumetric soft tissue growth: application to the cardiac left ventricle //Biomechanics and modeling in mechanobiology. – 2009. – Т. 8. – №. 4. – С. 301-309.
4. Barabási A. L., Stanley H. E. Fractal concepts in surface growth. – Cambridge university press, 1995.
5. Novick P., Schekman R. Secretion and cell-surface growth are blocked in a temperature-sensitive mutant of Saccharomyces cerevisiae //Proceedings of the national academy of sciences. – 1979. – Т. 76. – №. 4. – С. 1858-1862.
6. Tong W. M., Williams R. S. Kinetics of surface growth: phenomenology, scaling, and mechanisms of smoothening and roughening //Annual Review of Physical Chemistry. – 1994. – Т. 45. – №. 1. – С. 401-438.
7. Harris S. J., Weiner A. M. Surface growth of soot particles in premixed ethylene/air flames //Combustion Science and Technology. – 1983. – Т. 31. – №. 3-4. – С. 155-167.
8. Epstein M., Maugin G. A. Thermomechanics of volumetric growth in uniform bodies //International Journal of Plasticity. – 2000. – Т. 16. – №. 7. – С. 951-978.
9. Manzhirov A. V., The general non-inertial initial-boundary value problem for a viscoelastic ageing solid with piecewise-continuous accretion // Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 1995. vol. 59, no. 5, pp. 805–816.
10. Manzhirov A. V. Mechanics of growing solids and phase transitions //Key Engineering Materials. – Trans Tech Publications, 2013. – Т. 535. – С. 89-93.
11. Manzhirov A. V. Mechanics of growing solids: New track in mechanical engineering //ASME 2014 International Mechanical Engineering Congress and Exposition. – American Society of Mechanical Engineers, 2014. – С. V009T12A039-V009T12A039.
12. A. V. Manzhirov and S. A. Lychev,“Mathematical Modeling of Additive Manufacturing Technologies,” In Lecture Notes in Engineering and Computer Science: World Congress on Engineering 2014, pp. 1404–1409. IAENG, London, 2014.
13. A. V. Manzhirov and S. A. Lychev, “An approach to modeling of additive manufacturing technologies.” In Transactions on Engineering Technologies: World Congress on Engineering 2014, pp. 99–115. Springer, Netherlands, 2015.
14. A. V. Manzhirov and D. A. Parshin, “Arch structure erection by an additive manufacturing technology under the action of the gravity force”. Mechanics of Solids, vol. 50, no. 5, pp. 559–570, 2015.
15. A. V. Manzhirov and D. A. Parshin, “Influence of the erection regime on the stress state of a viscoelastic arched structure erected by an additive technology under the force of gravity.” Mechanics of Solids, vol. 50, no. 6, pp. 657–675, 2015.
16. A. V. Manzhirov and N. K. Gupta, “Fundamentals of continuous growth processes in technology and nature”. In IUTAM Symposium on Growing solids. Symposium Materials, pp. 73–76. In-t Probl. Mech. RAS, Moscow, 2015.
17. A. V. Manzhirov, A Method for Mechanical Design of AM Fabricated Viscoelastic Parts // In Transactions on Engineering Technologies. Springer, Netherlands, 2016, pp. 223– 235.

Сведения об авторе:

Стадник Никита Эдуардович – м.н.с. Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва**. E-mail:** nik-122@mail.ru

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОРОДНОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ, УСИЛЕННОЙ ДВУМЯ КОНЕЧНЫМИ И ОДНИМ БЕСКОНЕЧНЫМ УПРУГИМИ СТРИНГЕРАМИ

Сукиасян Дж.С.

В работе рассматривается контактная задача о передаче нагрузки от параллельных двух упругих конечных и одного бесконечного стрингеров к изотропной однородной сплошной упругой бесконечной пластине. Решение рассматриваемой плоской контактной задачи математически сформулирована в виде сингулярного интегрального уравнения первого рода.

1. Пусть упругий сплошной изотропный лист в виде тонкой однородной бесконечной пластины малой постоянной толщины H на линиях $y = b$ и $y = -b$ $(b > 0)$ в отрезке $-a \leq x \leq a$ $(a > 0)$ своей верхней поверхности содержит два параллельных конечных, а на линии $y = 0$ один бесконечный стрингер с разными упругими свойствами и достаточно малыми одинаковыми поперечными сечениями. Предполагается, что относительно горизонтальной оси симметрично расположенные упругие конечные стрингеры имеют одинаковые упругие свойства, а бесконечный стрингер – другие упругие свойства.

Цель работы заключается в определении закона распределения интенсивностей неизвестных тангенциальных контактных усилий вдоль линий крепления упругих конечных и бесконечного стрингеров с упругой сплошной изотропной однородной бесконечной пластиной и тем самым определить взаимовлияние упругих конечных и бесконечного стрингеров, когда контактирующая пара (пластина-стрингер) деформируется осевыми сосредоточенными силами P, приложенными на концах упругого конечного стрингера (рис.1).

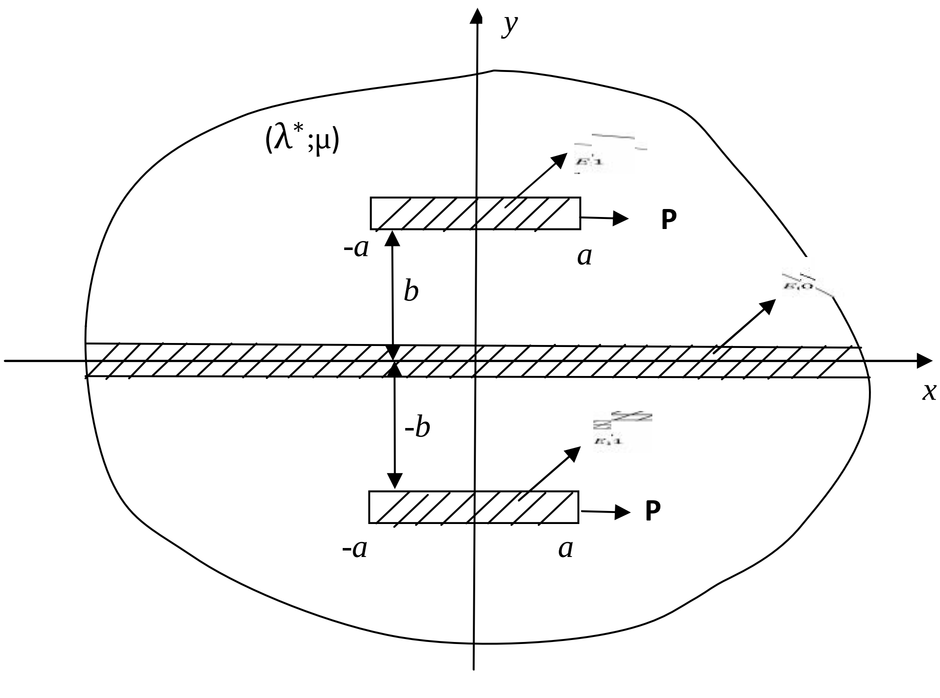


Рис. 1.1. Схема поставленной задачи

В рассматриваемой контактной задаче для упругих стрингеров принимается модель одноосного напряжённого состояния в сочетании с моделью контакта по линии, т.е. считается, что распределение интенсивностей неизвестных тангенциальных контактных усилий сосредоточены вдоль средних линий контактных участков и предполагается, что стрингеры не сопротивляются изгибу. Относительно упругой сплошной изотропной однородной бесконечной пластины считается справедливой модель обобщённого плоского напряжённого состояния [1-7].

Обращаясь теперь к выводу разрешающих функциональных уравнений поставленной контактной задачи, заметим, что упругие бесконечный и конечный стрингеры в горизонтальном направлении растягиваются или сжимаются, находясь в одноосном напряжённом состоянии.

Тогда известно, что если в любой точке однородной бесконечной изотропной пластины применяется осевая сосредоточенная сила, то трансформанта Фурье горизонтальных перемещений пластины будет иметь следующий вид [2-5]:

$$\bar{u}(\sigma\,;\,y\text{-}\eta)=\frac{P}{H}\left[\frac{\lambda^{*}+3\mu}{4\mu(\lambda^{*}+2\mu)}\times\frac{1}{|\sigma|}-\frac{\lambda^{*}+\mu}{4\mu(\lambda^{*}+2\mu)}|y\text{-}\eta|\right]e^{-|\sigma||y-\eta|} \qquad (1)$$

$(-\infty<\sigma\,;\,y<\infty\,,\,0<\eta<\infty)$,

где $\bar{u}(\sigma\,;\,y-\eta)=F[\,u(x\,;\,y-\eta)\,]$ − трансформанта Фурье горизонтальных перемещений точек пластины; $F[\,]$ − оператор Фурье; σ $(-\infty<\sigma<\infty)$ − параметр преобразования Фурье; P − интенсивность сосредоточенной силы, приложенной на конце упругого конечного стрингера; $(\lambda^{*};\mu)$ − упругие постоянные Ламе, причем:

$$\lambda^{*}=\frac{E\nu}{1-\nu^{2}}, \qquad \mu=\frac{E}{2(1+\nu)}, \qquad (2)$$

где ν − коэффициент Пуассона материала бесконечной пластины.

Для трансформантов Фурье горизонтальных перемещений, согласно (1), соответственно на линиях $y=\pm\,b$ и $y=0$ получим:

$$\bar{u}(\sigma;y-b)=\frac{\bar{\tau}(\sigma;b)}{H}\left[\frac{\lambda^{*}+3\mu}{4\mu(\lambda^{*}+2\mu)}\cdot\frac{1}{|\sigma|}-\frac{\lambda^{*}+\mu}{4\mu(\lambda^{*}+2\mu)}|y-b|\right]e^{-|\sigma||y-b|} \qquad (3)$$

$(-\infty<\sigma\,;\,y<\infty\,)$,

$$\bar{u}(\sigma;y+b)=\frac{\bar{\tau}(\sigma;-b)}{H}\left[\frac{\lambda^{*}+3\mu}{4\mu(\lambda^{*}+2\mu)}\cdot\frac{1}{|\sigma|}-\frac{\lambda^{*}+\mu}{4\mu(\lambda^{*}+2\mu)}|y+b|\right]e^{-|\sigma||y+b|}\,, \qquad (4)$$

$(-\infty<\sigma\,;\,y<\infty)$,

$$\bar{u}(\sigma;y)=\frac{\bar{\tau}(\sigma;0)}{H}\left[\frac{\lambda^{*}+3\mu}{4\mu(\lambda^{*}+2\mu)}\cdot\frac{1}{|\sigma|}-\frac{\lambda^{*}+\mu}{4\mu(\lambda^{*}+2\mu)}|y|\right]e^{-|\sigma||y|}\,, \qquad (5)$$

$(-\infty<\sigma\,;\,y<\infty\,)$,

Учитывая симметричность конечных стрингеров относительно горизонтальной оси, получим:

$$\bar{u}(\sigma\,;\,b)=\bar{u}(\sigma\,;\,-\,b)\,, \qquad (-\infty<\sigma<\infty)\,, \qquad (6)$$

следовотельно, и

$$\bar{u}(\sigma\,;\,b)=\bar{\tau}(\sigma\,;\,-\,b)\,, \qquad (-\infty<\sigma<\infty\,)\,, \qquad (7)$$

Теперь, учитывая соотношение (3)-(7), окончательно для трансформантов горизонтальных перемещений получим:

$$\bar{u}(\sigma;b) = \frac{\bar{\tau}(\sigma;b)}{H}\left[\frac{\lambda^*+3\mu}{4\mu(\lambda^*+2\mu)}\cdot\frac{1}{|\sigma|} - \frac{\lambda^*+\mu}{4\mu(\lambda^*+2\mu)}2b\right]e^{-|\sigma|2b}$$

$$+\frac{\bar{\tau}(\sigma;0)}{H}\left[\frac{\lambda^*+3\mu}{4\mu(\lambda^*+2\mu)}\cdot\frac{1}{|\sigma|} - \frac{\lambda^*+\mu}{4\mu(\lambda^*+2\mu)}b\right]e^{-|\sigma|2b} \qquad (8)$$

$$+\frac{\bar{\tau}(\sigma;b)}{H}\frac{\lambda^*+3\mu}{4\mu(\lambda^*+2\mu)}\cdot\frac{1}{|\sigma|}, \qquad (-\infty < \sigma < \infty) \ .$$

$$\bar{u}(\sigma;0) = \frac{\bar{\tau}(\sigma;b)}{H}\left[\frac{\lambda^*+3\mu}{2\mu(\lambda^*+2\mu)}\cdot\frac{1}{|\sigma|} - \frac{\lambda^*+\mu}{2\mu(\lambda^*+2\mu)}b\right]e^{-|\sigma|b} + \frac{\bar{\tau}(\sigma;0)}{H}\frac{\lambda^*+3\mu}{4\mu(\lambda^*+2\mu)}\cdot\frac{1}{|\sigma|}, \qquad (9)$$

$$(-\infty < \sigma < \infty)$$

Учитывая модель контакта по линии, уравнение равновесия стрингеров на линиях $y = 0$ и $y = b$ будут иметь следующий вид:

$$\frac{d^2u_s}{dx^2}(x\ ;\ 0) = \frac{\tau(x\ ;\ 0)}{E_0 F}, \qquad (-\infty < x < \infty), \qquad (10)$$

$$\frac{du_s}{dx}(x\ ;\ b) = \frac{1}{E_1 F}\int_{-\alpha}^{x}\tau(s\ ;\ b)ds, \qquad (-\alpha < x < \alpha), \qquad (11)$$

где F − площадь поперечного сечения стрингеров; $\tau(x;0)$ и $\tau(x;b)$ − интенсивности тангенциальных контактных усилий, которые проявляются под бесконечным и конечными стрингерами; $u_s(x\,;b)$ и $u_s(x\,;0)$ − горизонтальные перемещения точек на линиях $y = b$ и $y = 0$, E_0 − модуль упругости бесконечного стрингера, E_1 − модуль упругости конечных стрингеров.

Применив к уравнению (10) преобразование Фурье, получим:

$$-\sigma^2\overline{u_s}(\sigma;0) = \frac{1}{E_0F}\bar{\tau}(\sigma;0), \ (-\infty < \sigma < \infty). \qquad (12)$$

Далее, имея ввиду условие контакта

$$\overline{u_s}(\sigma;0) = \bar{u}(\sigma;0), \qquad (-\infty < \sigma < \infty), \qquad (13)$$

на основе (8) и (12) получим связь между $\bar{\tau}(\sigma;0)$ и $\bar{\tau}(\sigma;b)$:

$$\bar{\tau}(\sigma;0) = \bar{\tau}(\sigma;b)\frac{2(kb\sigma^2 - |\sigma|)e^{-|\sigma|b}}{T+|\sigma|} \qquad (-\infty < \sigma < \infty). \qquad (14)$$

Следовательно, на основе (9) и (14) получим связь $\bar{u}(\sigma;b)$ и $\bar{\tau}(\sigma;b)$ в следующем виде:

$$\bar{u}(\sigma;b) = \frac{\bar{\tau}(\sigma;b)}{TE_0F}\left(\frac{T - 2kbT|\sigma| - K^2b^2|\sigma|^3}{|\sigma|(T+|\sigma|)}\cdot e^{-2|\sigma|b} + \frac{1}{|\sigma|}\right) \qquad (-\infty < \sigma < \infty). \qquad (15)$$

при этом, здесь введены следующие обозначения:

$$T=\frac{4\mu\left(\lambda^{*}+2\mu\right)}{\lambda^{*}+3\mu}\frac{H}{E_{0}F},\qquad k=\frac{\lambda^{*}+\mu}{\lambda^{*}+3\mu} \tag{16}$$

Теперь, применяя обратное преобразование Фурье на (15) и учитывая следующие условия контакта:

$$\frac{d\acute{u}(x\,;\mathrm{b})}{dx}=\frac{du_{S}(x\,;\mathrm{b})}{dx},\qquad \left(-a\le x\le a\right) \tag{17}$$

на основе (11) относительно $\tau\left(s;0\right)$, проявляющегося в конечном стрингере, получим следующее сингулярное интегральное уравнение:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\left[\frac{1}{s-x}+R_{1}(s-x)\right]\tau\left(s;b\right)ds=A_{0}\int_{-a}^{x}\tau\left(s;b\right)ds,\qquad \left(-a<x<a\right), \tag{18}$$

где введены следующие обозначения:

$$R_{1}\left(t\right)=\int_{0}^{\infty}\frac{\left(T-2bkT\sigma\text{-}\mathrm{K}^{2}b^{2}\sigma^{2}\right)e^{-2b\sigma}\sin(\sigma t)}{T+\sigma}d\sigma,\qquad A_{0}=\frac{4\mu\left(\lambda^{*}+2\mu\right)}{\lambda^{*}+3\mu}\frac{H}{FE_{1}}. \tag{19}$$

Заметим, что сингулярное интегральное уравнение (18) надо решать при наличии условия равновесия конечного стрингера:

$$\int_{-a}^{a}\tau\left(s;b\right)ds=P. \tag{20}$$

Для численного анализа перейдём к безразмерным коорднатам, вследствие чего уравнения (18) и (20) запишутся в виде:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{s-x}+R\left(x-s\right)\right]\varphi\left(s\right)ds=A\int_{-1}^{x}\varphi\left(s\right)ds,\qquad \left(-1<x<1\right), \tag{21}$$

$$\int_{-1}^{1}\varphi\left(s\right)ds=1, \tag{22}$$

где сделаны следующие обозначения:

$$R\left(u\right)=\int_{0}^{\infty}\frac{\left(aT-2bkTt-K^{2}\left(\frac{b}{a}\right)^{2}t^{3}\right)e^{-\frac{2b}{a}t}\sin(ut)}{aT+t}dt$$

$$\varphi\left(s\right)=\frac{a}{p}\tau\left(s;0\right),\qquad A=aA_{0}=\frac{4\mu\left(\lambda^{*}+2\mu\right)}{\lambda^{*}+3\mu}\frac{Ha}{FE_{1}}. \tag{23}$$

В итоге, решения сингулярного интегрального уравнения (21) при условии (22) получены графики, которые описывают поведение функции $\varphi\left(x\right)$ на интервале (-1,1) в зависимости от физических и геометрических параметров системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Муки Р., Стернберг Е. Передача нагрузки от растягиваемого поперечного стержня к полубесконечной упругой пластине. // ПМ. Труды Амер. Общ. Инж. мех. Сер. Е. 1968. №4. С.124-135.
2. Григорян Э.Х., Агаян К.Л. Полубесконечная пластина, усиленная полубесконечным стрингером, параллельным границе пластины. // Избранные вопросы теории упругости, пластичности и ползучести. Ереван: Изд. «Гитутюн» НАН Армении. 2006. С.138-143.
3. Григорян Э.Х., Оганисян Г.В. Контактная задача для упругой кусочно-однородной бесконечной пластины, усиленной двумя параллельными различными бесконечными упругими стрингерами. // Изв.НАН Армении. Механика. 2009. Т.62. №3. С.29-43.
4. Григорян Э.Х., Саркисян К.С. Контактная задача для упругой пластины, усиленной двумя бесконечными стрингерами. // Изв. НАН Армении. Механика. 2004. Т.57. № 2. С.3-10.
5. Саркисян К.С., Оганисян Г.В., Мелтонян Б.А. Контактная задача для упругой бесконечной пластины, усиленной двумя параллельными бесконечным и полубескнечным стрингерами. // Изв. НАН Армении. Механика. 2013. Т.66. №1 С.5-13.
6. Григолюк Э.И., Толкачев В.М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. М.: Машиностроение, 1980. 411 с.
7. Григорян Э.Х. Передача нагрузки от кусочно-однородной бесконечной накладки к упругой полуплоскости. // Уч. записки ЕГУ, Естеств. науки. 1979. № 3. С.29-34.

Сведения об авторе:

Сукиасян Джанибек Симонович − аспирант кафедры машиноведения, Национальный политехнический университет Армении, факультет механики и машиноведения,
(374 96) 61 65 69
E-mail: Jsukiasyan@gmail.com

О РЕШЕНИИ НЕРЕГУЛЯРНОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПОСРЕДСТВОМ ОДНОГО АНАЛОГА ФОРМУЛЫ ФРОБЕНИУСА

Торосян В.С.

В работе получено достаточное условие, при котором решение нерегулярной бесконечной системы уравнений можно получить по схеме решения квазирегулярной бесконечной системы. Приведён соответствующий численный пример.

При исследовании бесконечных систем линейных алгебраических уравнений зачастую удаётся доказать существование ограниченного (главного) решения, используя то, что в некотором функциональном пространстве оператор, соответствующий бесконечной матрице в правой части, является сжимающим. В частности, это выполнено, если бесконечная система

$$z_m = \sum_{n=1}^{\infty} c_{nm} z_n + b_m \quad m = 1,2,... \tag{1}$$

удовлетворяет условиям регулярности

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_{nm}| < 1 \quad m = 1,2,... \tag{2}$$

Если указанное условие выполняется не с первого, а с некоторого $m > p$, т.е

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_{nm}| < 1 \quad m = p+1, p+2,... \tag{3}$$

и, кроме того,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_{nm}| < +\infty \quad n = 1,2,..., p \tag{4}$$

$$|b_m| \le K\,{}^{\circ}{}_n = K\left(1 - \sum_{n=p+1}^{\infty} |c_{nm}|\right) \quad m = p+1, p+2,..., \tag{5}$$

то бесконечная система называется квазирегулярной. Известно, что решение квазирегулярной бесконечной системы представляется в виде одной конечной и одной бесконечной систем [1,2]:

$$z_m = \sum_{n=1}^{p} c_{nm} z_n + \left(\sum_{n=p+1}^{\infty} c_{nm} z_n + b_m\right) \quad m = 1,2,..., p, \tag{6}$$

$$z_m = \sum_{n=p+1}^{\infty} c_{nm} z_n + \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_{nm} z_n + b_m\right) \quad m = p+1, p+2,... \tag{7}$$

Далее, сначала решается регулярная бесконечная система (7) (это решение можно найти методом редукции), где искомые $\{z_m\}(m = p+1, p+2,...)$ оказываются зависимыми от $\{z_m\}$ $(m = 1,2,..., p)$. После решения регулярной бесконечной системы (7) решается конечная система (6) относительно $\{z_m\}$ $(m = 1,2,..., p)$. Легко убедиться в том, что после усечения квазирегулярной системы на основе условия (3), введением очевидных обозначений, решение полученной конечной системы даётся при помощи формулы Фробениуса [3]:

$$\begin{pmatrix} C_0 & C_1 \\ C_2 & C_3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} H^{-1} & -H^{-1} C_1 C_3^{-1} \\ -C_3^{-1} C_2 H^{-1} & C_3^{-1} + C_3^{-1} C_2 H^{-1} C_1 C_3^{-1} \end{pmatrix}, \tag{8}$$

где

$$H = C_0 - C_1 C_3^{-1} C_2, \tag{9}$$

если существуют все выписанные обратные матрицы. Для квазирегулярной бесконечной системы матрица C_3 – неособенная. Возникает вопрос: возможно ли использовать аналогичный подход к решению нерегулярных бесконечных систем и, если да, то при каких условиях?

1. Пусть рассматривается бесконечная система линейных алгебраических уравнений (1), коэффициенты и свободные члены которой удовлетворяют следующим условиям:

$$1 < \sum_{n=1}^{\infty} |c_{nm}| < +\infty \quad m = p+1, p+2,... \tag{10}$$

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} |c_{nm}| < 1 \quad m = p+1, p+2,... \tag{11}$$

$$|b_m| \le K_0 {}^{\circ}{}_{n} = K_0 \left(1 - \sum_{n=p+1}^{\infty} |c_{nm}|\right) \quad m = p+1, p+2,... \tag{12}$$

$$|c_{nm}| \le K_n \left(1 - \sum_{n=p+1}^{\infty} |c_{nm}|\right) \quad n = 1,2,..., p\,;\ m = p+1, p+2,... \tag{13}$$

Тогда систему (1) можно решить тем же способом, что и квазирегулярнуую систему. Действительно, рассмотрим регулярную систему уравнений

$$z_m = \sum_{n=p+1}^{\infty} c_{nm} z_n + \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_{nm} z_n + b_m\right) \quad m = p+1, p+2,... \tag{14}$$

Регулярная система (14) со свободными членами b_m имеет ограниченное решение $|\xi_m| \le K_0$, при свободных членах c_{nm} $(n = 1,2,..., p)$ эта система также имеет ограниченное решение $\left|\beta_m^{(n)}\right| \le K_n$. Следовательно, решение регулярной системы (14) можно выразить формулой

$$z_m = \beta_m^{(1)} z_1 + \beta_m^{(2)} z_2 + ... + \beta_m^{(p)} z_1 + b_m \quad m = p+1, p+2, ... \tag{15}$$

Подставляя эти значения в уравнение

$$z_m = \sum_{n=1}^{\infty} c_{nm} z_n + b_m \qquad m = 1,2,..., p\,, \tag{16}$$

которое можно осуществить в силу условия (16), получим систему p уравнений с p неизвестными для определения $z_{1,}, z_2, ..., z_p$. Если эта конечная система уравнений имеет решение, то с помощью формулы (15) найдём решение нерегулярной системы. Если решение этой конечной системы единственно и выполнено условие для единственности решения регулярной системы (14), то и решение нерегулярной системы единственно.

2. Численный пример. Рассмотрим систему уравнений:

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_{im} z_i + b_m = 0 \quad m = 1,2,...\,, \tag{17}$$

где

$$c_{im} = \frac{1}{(2m+1-2i)(2m-1-2i)} \quad i, m = 1,..., p; \quad i \ne m$$

$$c_{ii} = \frac{1}{2} + \frac{1}{24i} \quad i = 1,2,.., p$$

$$c_{im} = \frac{1}{(2m+1-2i)(2m-1-2i)} \quad i, m = p+1, p+2,...\,,\ p \in N$$

$$c_{1.p+i} = \frac{3}{8m-2} \quad i = 1,2,... \tag{18}$$

$$c_{im} = -\frac{1}{18i^2 + 10m^2} \quad i = 2,..., p;\ m = p+1, p+2,...$$

$$c_{p+1.i} = \frac{p}{(2i-1)(2p-2i+1)} \quad i = 1,2,...,p$$

$$c_{p+i.m} = -\frac{1}{i^2+m^2} \quad m = 1,2,...p; \; i = 2,3,...$$

Легко проверить, что бесконечная система (17), коэффициенты которой определяются из (18), является нерегулярной $\forall p \in N$. Численный эксперимент проведён для нерегулярной системы (17)–(18) при $z_i = -\frac{1}{i+2}$ $i = 1,2,...$, полагая $p = 4$. Тогда свободные члены нерегулярной системы (17) определятся по формуле

$$b_m = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_{im}}{i+2} \quad m = 1,2,... \tag{19}$$

Обозначим через S_n среднеквадратичную погрешность ($n-$порядок усечённой бесконечной системы). Результаты для S_n при различных значениях n представлены в таблице.

n / p=4	8	32	64	128	300
S_n	0.2246	0.1048	0.0831	0.0692	0.0563

Численные результатуы показывают, что при определённых условиях нерегулярную систему эффективно можно решить также и с помощью формулы Фробениуса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближённые методы высшего анализа. М.-Л.: Физматгиз, 1962. 695с.
2. Канторович Л.В., Вулих Б.З., Пинскер А.Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. М.-Л.: 1950. 550с.
3. Гатмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967. 576с.

<u>Сведения об авторе:</u>

Торосян Вардан Стёпаевич – Научный сотрудник Института механики НАН Армении. **Адрес:** 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2, **тел.:** (+37495)362006

E-mail: vtorosyan99@gmail.com

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ВЫСОКОЧАСТОТНОЙ НОРМАЛЬНОЙ СДВИГОВОЙ ВОЛНЫ В УПРУГОМ ОДНОРОДНОМ ВОЛНОВОДЕ С СЛАБО НЕОДНОРОДНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

Унанян А.А.

Исследуется влияние слабой неоднородности поверхностей упругого слоя-волновода на распространение нормальной сдвиговой волны при разных механических граничных условиях. Показывается, что при механически свободных негладких поверхностей в приповерхностных зонах происходит частичная локализация волновой энергии. Вследствие воздействия неоднородности поверхностей на распространение высокочастотной нормальной волны появляются две новые приведенные частоты. Слабая неоднородность механически свободных поверхностей приводит к появлению зон частотного умолчания, а также частотных зон пропускания вновь формированной волны и локализации волновой энергии в приповерхностных прослойках волновода.

Введение. Взаимодействие ультразвука с шероховатой поверхностью волновода в настоящее время активно исследуется как с теоретической, так и с экспериментальной точки зрения [1-3] и др., поскольку приложения упругих волновых явлений становятся все более важными в области электросвязи (обработка сигнала), медицины (ультразвуковое измерение), металлургии (неразрушающий контроль) и в других областях.

Учёт неоднородности поверхностей волновода безусловно усложняет математическую краевую задачу, но даёт возможность выявить приповерхностные волновые новые эффекты и более точно вычислить количественные характеристики образованного волнового поля в приповерхностной зоне. Разным случаям потери устойчивости распространяющейся нормальной высокочастотной волны (монохроматический коротковолновой сигнал), будь это локализация волновой энергии, внутренний резонанс, появления запретных частотных зон или другое, посвящено много работ [4÷7] и др. В статье [8] исследованы возможные искажения амплитудной и фазовой функций при распространении нормального волнового сигнала в физически слабо неоднородном упругом волноводе. Выявлены случаи возникновения внутреннего резонанса, условия существования зон запретных частот.

В представленной статье исследуется влияние геометрической неоднородности поверхностей (шероховатость) слоя-волновода на распространение нормальной сдвиговой волны.

1. Постановка задачи. В упругом, изотропном волноводе шероховатыми поверхностями $y = h_-(x)$ и $y = h_+(x)$, $\Omega := \{|x| < \infty;\ h_-(x) \le y \le h_+(x);\ |z| < \infty\}$ распространяется нормальный волновой сигнал чистого сдвига

$$\{u(x,y,t) \equiv 0;\ v(x,y,t) \equiv 0;\ w(x,y,t) = W_0(y)\cdot\exp[i(k_0 x - \omega_0 t)]\}.$$

Тогда, в упругом однородном слое решается уравнение движения среды

$$\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} = c_0^{-2}\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial t^2}, \tag{1.1}$$

где $c_0^2 \triangleq G_0/\rho_0$ – скорость предельной сдвиговой волны в волноводе, G_0 – модуль сдвига и ρ_0 – плотность соответственного однородного материала.

Не нарушая общности, шероховатость поверхностей волновода $y = h_\pm(x)$ представляется гармоническими функциями:

$$h_+(x) \triangleq h_0[1 + \varepsilon_+\cdot\sin(k_+\cdot x) + \delta_+\cdot\cos(k_+\cdot x)]$$
$$h_-(x) \triangleq -h_0[1 + \varepsilon_-\cdot\sin(k_-\cdot x) + \delta_-\cdot\cos(k_-\cdot x)] \tag{1.2}$$

где h_0 – базовая полутолщина слоя-волновода, $\varepsilon_\pm$ и $\delta_\pm$ – амплитудные относительные коэффициенты высот профилей шероховатости, для которых известно, что $\{\varepsilon_\pm;\ \delta_\pm\} \ll 1$, поскольку высоты выступов шероховатости $h_0\cdot\varepsilon_\pm$ и $h_0\cdot\delta_\pm$ всегда намного меньше базовой толщины слоя: $\{h_0\cdot\varepsilon_\pm;\ h_0\cdot\delta_\pm\} \ll h_0$. $k_\pm \triangleq 2\pi/\lambda_\pm$ – число волнистости профиля шероховатости и $\lambda_\pm$ – шаг (длина волны) профиля шероховатости.

Тогда граничные условия на механически свободных негладких поверхностях волновода $\sigma_{ij}(x,y)\cdot n_j^{\pm}(x)=0$ запишутся соответственно в виде:

$$h'_{\pm}(x)\cdot\left.\frac{\partial w(x,y)}{\partial x}\right|_{y=h_{\pm}(x)}+\left.\frac{\partial w(x,y)}{\partial y}\right|_{y=h_{\pm}(x)}=0 \quad (1.3)$$

Из формулированной граничной задачи (1.1) и (1.3) очевидно, что воздействие геометрической неоднородности поверхностей (1.2) в решение задачи входит через граничные условия. Поскольку шероховатость – естественная слабая неоднородность $\{h_0\cdot\varepsilon_{\pm};\ h_0\cdot\delta_{\pm}\}\ll h_0$, то взаимодействие шероховатости, в основном, будет относиться к высокочастотным (коротковолновым) волновым сигналам, при которых $\lambda_0\sim\lambda_{\pm}\ll h_0$, или что то же самое – $k_0h_0\sim k_{\pm}h_0\gg 1$. Тогда естественно, интересно исследовать влияние геометрической неоднородности поверхностей слоя-волновода на распространение нормальной высокочастотной сдвиговой волны.

2.Решение задачи. Решение задачи проведём двумя методами: методом последовательных приближений и методом введения гипотез.

Подход первый: при распространении в упругом слое-волноводе высокочастотного нормального сдвигового сигнала $w_0(x,y,t)=W_0(y)\cdot\exp\left[i(k_0x-\omega_0t)\right]$ в приповерхностных зонах происходит взаимодействие волнового сигнала с волнистостью поверхностей, что соответственно приводит к амплитудному и фазовому искажениям первичного сигнала. Естественно, возникают новые гармоники и образуется новое амплитудно-фазовое взаимодействие.

Представим решение краевой задачи (1.1) и (1.3) в виде ряда гармоник, функциями с разделенными переменными

$$w(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}W_n(y)\cdot X_n(x)\cdot\exp(-i\omega_{0n}t) \quad (2.1)$$

Тогда, условия механически свободных поверхностей волновода, на шероховатых поверхностях $y=h_{\pm}(x)$ соответственно, для каждой гармоники распространяющейся волны

$$W'_n(h_{\pm}(x))=\mp h_0k_{\pm}\cdot\left[\varepsilon_{\pm}\cdot\cos(k_{\pm}\cdot x)-\delta_{\pm}\cdot\sin(k_{\pm}\cdot x)\right]\cdot\frac{X'_n(x)}{X_n(x)}W_n(h_{\pm}(x)) \quad (2.2)$$

подсказывает, что незатухающие по направлениям распространений $\pm x$ (при $\mathrm{Im}\left[k_n\right]\equiv 0$), решение (2.1) уравнения (1.1) можно представить в виде множителей:

$$X_n(x)=C_{\pm}\exp\left(\pm ik_nx\right) \quad (2.3)$$

$$W_n(y)=C_{1n}\exp\left(ik_n\alpha_ny\right)+C_{2n}\exp\left(-ik_n\alpha_ny\right), \quad (2.4)$$

которые при медленных волнах, когда $\alpha^2\triangleq\eta_n^2-1<0$, где $\eta_n^2\triangleq\omega_n^2k_n^{-2}c_0^{-2}$ соответствует затухающим от поверхностей в глубь волновода гармоникам, а при быстрых волнах, когда $\alpha^2\triangleq\eta_n^2-1\geq 0$ соответствует незатухающим по толщине слоя-волновода гармоническим формам.

Учитывая, что геометрическая неоднородность поверхностей волновода слабая и её воздействие на распространяющуюся волну описывается граничными условиями (2.2), решение уравнения (2.3) представим в виде:

$$X_n(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\gamma^m\cdot A_{mn}\exp\left(ik_{*m}x\right)\quad \text{при}\quad n;m\in\mathbb{N}^{+}. \quad (2.5)$$

Причём, значение $m=0$ соответствует случаю волновода с однородными поверхностями. Введённое здесь волновое число k_{*m} должно образоваться воздействием нормального волнового сигнала и волнистости поверхностей волновода. Волнистость поверхностей, в свою очередь, характеризуется наибольшим общим делителем волновых чисел, $k_*\triangleq\min\left\{k_+/p;\ k_-/q\right\}=(2\pi/\lambda_*)$ – наименьшее общее волновое число неровностей на поверхностях, соответствующих возбужденной m-ой гармоники волне, а $\gamma \triangleq \max\left\{\sqrt{\varepsilon_{\pm}^2 + \delta_{\pm}^2}\right\} \ll 1$ – малый параметр, характеризующий слабую неоднородность поверхностей волновода.

Тогда граничные условия принимают вид:

$$k_n\alpha_n\left[C_{n1}\exp\left(ik_n\alpha_n h_{\pm}(x)\right) - C_{n2}\exp\left(-ik_n\alpha_n h_{\pm}(x)\right)\right]\sum_{m=0}^{\infty}\gamma^m \cdot A_{mn}\exp\left(ik_{*m}x\right) =$$
$$= \mp h_0 k_{\pm}\cdot\left[\varepsilon_{\pm}\cdot\cos(k_{\pm}\cdot x) - \delta_{\pm}\cdot\sin(k_{\pm}\cdot x)\right]\times \quad (2.6)$$
$$\times\left[C_{n1}\exp\left(ik_n\alpha_n h_{\pm}(x)\right) + C_{n2}\exp\left(-ik_n\alpha_n h_{\pm}(x)\right)\right]\sum_{m=0}^{\infty}k_{*m}\gamma^m \cdot A_{mn}\exp\left(ik_{*m}x\right)$$

Учитывая, что правые части граничных условий (2.6) – малые $m+1$ порядка, в нулевом приближении для нетривиальных решений из (2.6) получаем дисперсионное уравнение со следующим решением:

$$\omega_{0n} = k_{0n}c_0 = c_0\left(2\pi/\lambda_{0n}\right) = c_0\left(n\pi/h_0\right), \quad (2.7)$$

следовательно, в нулевом приближении ещё не появляется взаимодействие нормальной волны $w_0(x,y,t) = W_0(y)\cdot\exp\left[i(k_0x - \omega_0 t)\right]$ с поверхностными неровностями $h_{\pm}(x)$, и распространяющая волна пока будет нормальной, как в нулевом приближении продольно слабо неоднородного волновода с механически свободными поверхностями [8]:

$$w_0(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}A_{0n}\cdot\exp\left[i(n\pi x/h_0 - \omega_{0n}t)\right]. \quad (2.8)$$

Для искажений нетривиальных решений в первом приближении, с учётом условий синхронизма поверхностных искажений в срединной плоскости волновода $y=0$, легко получить разрешаемые длины волн:

$$\lambda_*(x) = \lambda_0\cdot 2\pi\arccos^{-1}\left\{-\frac{k_+\cdot\left[\varepsilon_+\cdot\cos(k_+\cdot x) - \delta_+\cdot\sin(k_+\cdot x)\right]}{k_-\cdot\left[\varepsilon_-\cdot\cos(k_-\cdot x) - \delta_-\cdot\sin(k_-\cdot x)\right]}\right\}, \quad (2.9)$$

из граничных уравнений (2.6) будем иметь:

$$\exp\left(ik_{0n}\alpha_n\left(h_+(x) - h_-(x)\right)\right) - \exp\left(-ik_{0n}\alpha_n\left(h_+(x) - h_-(x)\right)\right) = 0,$$

откуда находим коэффициент формообразования генерируемых искажений:

$$k_{0n}\alpha_{1n} = n\pi/\left(h_+(x) - h_-(x)\right). \quad (2.10)$$

Волновое число первой генерированной гармоники уже зависит от поверхностных негладкостей волновода

$$k_{1n}(x) = \left(n\pi/h_0\right)\left(h_+(x) - h_-(x)\right)\left[h_0^2 + \left(h_+(x) - h_-(x)\right)^2\right]^{-1/2} \quad (2.11)$$

и уже в первом приближении взаимодействие нормальной волны с поверхностными негладкостями приводит к распространяющейся волне:

$$w_1(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[C_{1n}\exp\left(i\frac{h_0\cdot k_{1n}(x)y}{\left(h_+(x) - h_-(x)\right)}\right) + C_{2n}\exp\left(-i\frac{h_0\cdot k_{1n}(x)y}{\left(h_+(x) - h_-(x)\right)}\right)\right]\cdot\exp\left[i(k_{1n}(x)\cdot x - \omega_{0n}t)\right].$$

Подход второй: при исследовании распространения нормального волнового сигнала чистого сдвига: $w_0(x,y,t) = W_0(y)\cdot\exp\left[i(k_0x - \omega_0 t)\right]$, а также $u(x,y,t) \equiv 0$ и $v(x,y,t) \equiv 0$, с учётом того, что в изотропном упругом волноводе $\Omega := \left\{|x| < \infty;\ h_-(x) \le y \le h_+(x);\ |z| < \infty\right\}$ неоднородности шероховатых поверхностей $y = h_-(x)$ и $y = h_+(x)$ описываются функциями слабой неоднородности (1.2), виртуально выделим приповерхностные тонкие слои переменной толщины, представляя имеющийся волновод в виде трёхслойного $\Omega = \Omega_- \cup \Omega_0 \cup \Omega_+$, где $\Omega_- \triangleq \left\{|x| < \infty;\ h_-(x) \le y \le -h_0 + \gamma_- \cup -h_0 + \gamma_- \le y \le h_0 - \gamma_+ \cup h_0 - \gamma_+ \le y \le h_+(x);\ |z| < \infty\right\}$.

Во всех трёх упругих однородных слоях решается уравнение движения среды (1.1) с граничными условиями (1.3) на механически свободных негладких поверхностях $y = h_-(x)$ и $y = h_+(x)$ для упругих перемещений $w_\pm(x, y, t)$ соответственно, слоёв $\Omega_\pm$, а также условий полной сопряжённости на виртуальных сечениях $y = -h_0 + \gamma_-$ и $y = h_0 - \gamma_+$:

$$w_0(x,y,t)\big|_{y=-h_0+\gamma_-} = w_-(x,y,t)\big|_{y=-h_0+\gamma_-}; \qquad w_0(x,y,t)\big|_{y=h_0-\gamma_+} = w_+(x,y,t)\big|_{y=h_0-\gamma_+} \tag{2.12}$$

$$\left.\frac{\partial w_0(x,y,t)}{\partial y}\right|_{y=-h_0+\gamma_-} = \left.\frac{\partial w_-(x,y,t)}{\partial y}\right|_{y=-h_0+\gamma_-}; \quad \left.\frac{\partial w_0(x,y,t)}{\partial y}\right|_{y=h_0-\gamma_+} = \left.\frac{\partial w_+(x,y,t)}{\partial y}\right|_{y=h_0-\gamma_+} \tag{2.13}$$

Учитывая тонкость приповерхностных слоёв $\Omega_\pm$, решения в них с учётом характера изменений исходящих из неровностей поверхностей $y = h_-(x)$ и $y = h_+(x)$ представим в соответствии с гипотезой MELS-а [7,9]:

$$w_+(x,y) = \frac{\operatorname{sh}\left(\mu_+\left[y - h_0 + \gamma_+\right]\right)}{\operatorname{sh}\left(\mu_+\left[h_+(x) - h_0 + \gamma_+\right]\right)} \cdot \left[w_+\left(x, h_+(x)\right) - w_0\left(x, h_0 - \gamma_+\right)\right] + w_0\left(x, h_0 - \gamma_+\right) \tag{2.14}$$

$$w_-(x,y) = \frac{\operatorname{sh}\left(\mu_-\left[y + h_0 - \gamma_-\right]\right)}{\operatorname{sh}\left(\mu_-\left[h_-(x) + h_0 - \gamma_-\right]\right)} \cdot \left[w_-\left(x, h_-(x)\right) - w_0\left(x, -h_0 + \gamma_-\right)\right] + w_0\left(x, -h_0 + \gamma_-\right) \tag{2.15}$$

решения в приповерхностных тонких слоях волновода формирующиеся вследствие распространения нормальной волны $w_0(x,y,t) = W_0(y) \cdot \exp\left[i(k_0 x - \omega_0 t)\right]$ в базовом слое Ω_0

$$w_+(x,y) = F_+\left\{\mu_+(x); h_+(x); \operatorname{sh}\left(\mu_+(x)\left[h_+(x) - h_0 + \gamma_+\right]\right)\right\} \cdot w_0\left(x, h_0 - \gamma_+\right) \tag{2.16}$$

$$w_-(x,y) = F_-\left\{\mu_-(x); h_-(x); \operatorname{sh}\left(\mu_-(x)\left[h_-(x) + h_0 - \gamma_-\right]\right)\right\} \cdot w_0\left(x, -h_0 + \gamma_-\right). \tag{2.17}$$

Представляя нормальную волну в базовом слое Ω_0 в общем виде:

$$w_0(x,y,t) = \left[A\cos(\mu_* y) + B\sin(\mu_* y)\right] \cdot \exp\left[i(k_* x - \omega_0 t)\right]. \tag{2.18}$$

Здесь $k_* \triangleq \min\left\{pk_+;\ qk_-\right\} = (2\pi/\lambda_*)$ – наименьшее общее волновое число неровностей на поверхностях, соответствующих возбужденной гармонике волны.

Из условий сопряжённости механических напряжений (2.24) получим дисперсионное уравнение для определения коэффициентов формообразования μ_*:

$$\begin{aligned} &\mu_*^2 - \mu_* \cdot \operatorname{ctg}\left(\mu_*(2h_0 - (\gamma_+ + \gamma_-)\right) \cdot \left(f_+\left(\mu_+; h_+(x)\right) - f_-\left(\mu_-; h_-(x)\right)\right) = \\ &= -f_+\left(\mu_+; h_+(x)\right) \cdot f_-\left(\mu_-; h_-(x)\right), \end{aligned} \tag{2.19}$$

где введённые функциональные обозначения $f_+\left(\mu_+; h_+(x)\right)$ и $f_-\left(\mu_-; h_-(x)\right)$ характеризуют влияния шероховатых поверхностей на коэффициент формообразования.

Заключение. Показано, что слабые поверхностные неоднородности приводят к неустойчивости распространяющейся нармальной волны в волноводе. Наличие поверхностных неоднородностей может привести к запрету волн определённых длин в зависимости от характеристических величин функций неоднородностей (2.10). Происходит только частичная локализация волновой энергии в тонких приповерхностных зонах неоднородностей. Локализованные поверхностные волны не возникают. Метод ввода гипотез MELS позволяет более подробно исследовать процесс искажения нормальной волны, что, безусловно, сделает его удобным при исследованиях волновых процессов в волноводах с усложнёнными свойствами и сложными характерными неоднородностями материала волновода и его поверхностей.

Исследоваание выполнено при финансовой поддержке Государственного Комитета по науке МОН РА в рамках научного проекта №15 Т-2С026.

ЛИТЕРАТУРА

1. Potel C., Bruneua M., N'Djomo L.C.F., Leduc D., Elkettani M.E., Izbicki J.-L.; Shear horizontal acoustic waves propagating along two isotropic solid plates bonded with a non-dissipative adhesive layer: Effects of the rough interfaces, //Jour. Of Appl. Physics vol.118, (2015),
2. T. Valier-Brasier, C. Potel, M. Bruneau, D. Leduc, B. Morvan, and J.-L.Izbicki, «Coupling of shear acoustic waves by gratings: Analytical and experimental analysis of spatial periodicity effects», ActaAcust.97(5),717–727 (2011).
3. S. Banerjee and T. Kundu, «Elastic wave propagation in sinusoidally corrugated waveguides» //J. Acoust. Soc. Am.119(4), 2006–2017 (2006).
4. Golub M.V. and Zhang C. In-plane time-harmonic elastic wave motion and resonance phenomena in a layered phononic crystal with periodic cracks, //J. Acoust. Soc. Am. Vol.137, Issues 1, 2015, 238.
5. Piliposyan D.G., Ghazaryan K.B., Piliposyan G.T., Internal resonances in a periodic magneto-electro-elastic structure, //J. Appl. Phys., (2014), vol.116, 044107
6. Vashishth A.K., Vishakha Gupta, Wave propagation in transversely isotropic porous piezoelectric materials, //Int. J. of Solids and Structures, (2009), vol.46, pp. 3620-3632
7. Avetisyan A.S. On the formulation of the electro-elasticity theory boundary value problems for electro-magneto-elastic composites with interface roughness, //Proc. of NAS Armenia, ser. Mechanics, vol.68, №2, (2015), pp.29-42.
8. Hunanyan A.A., The instability of shear normal wave in elasticwaveguide of weakly inhomogeneous material,// Proc. of NAS Armenia, ser. Mechanics, vol.69, №3, (2015), pp.29-42.
9. Avetisyan A.S., Hunanyan A.A. The efficiency of application of virtual cross-sections method and hypotheses MELS in problems of wave signal propagation in elastic waveguides with rough surfaces, //Journal of Advances in Physics, vol.11, №7, (2016), pp.3564-3574.

Сведения об авторе:

Унанян Арег Арменович – аспирант Института механики НАН Армении,
Тел.: (+37491) 77 55 33; **E-mail:** Hunanyan.areg21@gmail.com

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ КРУГОВЫХ ТОНКИХ СТЕРЖНЕЙ

Хачатрян М.В.

В работе рассматриваются система уравнений и граничные условия плоского напряжённого состояния микрополярной теории упругости в круговой плоской области. Для рассматриваемого случая, обобщая гипотезы работ [1], построена прикладная модель микрополярных упругих круговых тонких стержней.

Введение. В работе [1] асимптотическим методом изучена трёхмерная краевая задача микрополярной теории упругости в области тонкой пластинки и на основе качественных результатов этого исследования сформулированы адекватные гипотезы, при помощи которых построена общая прикладная теория микрополярных упругих тонких оболочек (из которого следуют также прикладные теории для микрополярных тонких пластин и стержней).

Как указано в работе [1], на основе соответствующих аналогичных гипотез можно построить также классические прикладные теории с учётом поперечных сдвигов для упругих тонких оболочек, пластин и стержней. В работах [2,3] на основе таких гипотез построены классические прикладные статическая и динамическая модели для кругового упругого стержня с учётом поперечных сдвигов. В работе [4], развивая подход гипотез работы [1], построена статическая модель микрополярного упругого кругового тонкого стержня. В данной работе аналогичным подходом построена прикладная модель динамики микрополярных упругих круговых тонких стержней.

Постновка задачи. Рассмотрим микрополярный упругий стержень с криволинейной осью (ось-дуга окружности радиуса r_0), имеющий постоянное поперечное сечение: высотой $2h = r_2 - r_1$ и шириной b, последнее настолько мало, что в стержне имеет место плоское напряжённое состояние.

В срединной плоскости стержня, где будем вводить полярную систему координат (r, φ) $(r_1 \le r \le r_2,\ 0 \le \varphi \le \varphi_1)$, имеют место динамические уравнения плоского напряжённого состояния микрополярной теории упругости [5]:

Уравнения движения:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\sigma_{21} + \sigma_{12}\right) = \rho \frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\sigma_{22} - \sigma_{11}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \varphi} = \rho \frac{\partial^2 V_2}{\partial t^2}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \mu_{13}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \mu_{23}}{\partial r} + \frac{1}{r}\mu_{23} + \sigma_{12} - \sigma_{21} = I \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial t^2}. \tag{1.1}$$

Соотношения упругости:

$$\gamma_{11} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{11} - \upsilon \sigma_{22}\right], \quad \gamma_{22} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{22} - \upsilon \sigma_{11}\right], \quad \gamma_{12} = \frac{\mu + \alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{12} - \frac{\mu - \alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{21}$$

$$\gamma_{21} = \frac{\mu + \alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{21} - \frac{\mu - \alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{12}, \quad \chi_{13} = \frac{1}{B}\mu_{13}, \quad \chi_{23} = \frac{1}{B}\mu_{23} \tag{1.2}$$

Геометрические соотношения:

$$\gamma_{11} = \frac{1}{r}\frac{\partial V_1}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}V_2, \quad \gamma_{22} = \frac{\partial V_2}{\partial r}, \quad \gamma_{12} = \frac{1}{r}\frac{\partial V_2}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}V_1 - \omega_3, \quad \gamma_{21} = \frac{\partial V_1}{\partial r} + \omega_3,$$

$$\chi_{13} = \frac{1}{r}\frac{\partial \omega_3}{\partial \varphi}, \quad \chi_{23} = \frac{\partial \omega_3}{\partial r}. \tag{1.3}$$

Здесь σ_{11}, σ_{22}, σ_{12}, σ_{21} – силовые (обычные) напряжения; μ_{13}, μ_{23} – моментные напряжения; γ_{11}, $\gamma_{22}, \gamma_{12}, \gamma_{21}$ – деформации; χ_{13}, χ_{23} – изгиб-кручения; V_1, V_2 – перемещения; ω_3 –

свободный поворот; E, ν, $\mu = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$, α, B– упругие постоянные микрополярного материала; ρ– плотнось материала, I – мера инерции материала при вращении.

Будем считать, что на лицевых линиях $r = r_1$, $r = r_2$ заданы внешние усилия и моменты:

$$\begin{aligned} &\text{на } \ r = r_1, \ \sigma_{21} = q_1^-, \ \sigma_{22} = q_2^- \ ; \ \mu_{23} = m^-, \\ &\text{на } \ r = r_2, \ \sigma_{21} = q_1^+, \sigma_{22} = q_2^+; \ \mu_{23} = m^+, \end{aligned} \tag{1.4}$$

а на крайных сечениях области $(\varphi = 0, \ \varphi = \varphi_1)$ имеет место один из вариантов нижеприведённых граничных условий:

а) на $\varphi = 0$, $\sigma_{11} = \sigma_{11}'$, $\sigma_{12} = \sigma_{12}'$, $\mu_{13} = \mu_{13}'$; на $\varphi = \varphi_1$, $\sigma_{11} = \sigma_{11}''$, $\sigma_{12} = \sigma_{12}''$, $\mu_{13} = \mu_{13}''$ (1.5)

b) на $\varphi = 0$, $V_1 = V_1'$, $V_2 = V_2'$, $\omega_3 = \omega_3'$; на $\varphi = \varphi_1$, $V_1 = V_1''$, $V_2 = V_2''$, $\omega_3 = \omega_3''$, (1.6)

в) на $\varphi = 0$, $\sigma_{11} = \sigma_{11}'$, $V_2 = V_2'$, $\mu_{13} = \mu_{13}'$; на $\varphi = \varphi_1$, $\sigma_{11} = \sigma_{11}''$, $V_2 = V_2''$, $\mu_{13} = \mu_{13}''$ (1.7)

Следует также присоединить начальные условия для u, w, Ω_3 $\dfrac{\partial u}{\partial t}$, $\dfrac{\partial w}{\partial t}$ и $\dfrac{\partial \Omega_3}{\partial t}$.

В дальнейшем радиус вектор r произвольной точки рассматриваемой области представим так: $r = r_0 + z$, где $-h \le z \le h$ $\left(r_1 = r_0 - h, \ r_2 = r_0 + h\right)$.

2. Гипотезы. Вывод основной системы уравнений динамики микрополярного упругого кругового стержня. Будем считать, что толщина стержня $2h$ намного меньше радиуса r_0 средней линии стержня, а также от длины дуги этой криволинейной оси. Наша цель заключается на основе некоторых общих предположений (гипотез) [1]: построение прикладной модели динамики микрополярного упругого кругового стержня. Принимаемые здесь гипотезы по содержанию можно рассматривать как кинематические и статические [1].

Кинематические гипотезы, характеризующие изменение поперечных деформаций, а также изменение поведения свободного поворота ω_3, представляются в виде:

$$V_1 = u(\varphi,t) + z\psi(\varphi,t), \ V_2 = w(\varphi,t), \ \omega_3 = \Omega_3(\varphi,t) \ , \tag{2.1}$$

где $u(\varphi,t)$ и $w(\varphi,t)$– перемещения точек средней линии в направлениях по её касательной и по нормали (т.е. $w(\varphi,t)$– это прогиб стержня); $\psi(\varphi,t)$– угол поворота первоначально нормального элемента; $\Omega_3(\varphi,t)$– свободный поворот точек этого элемента.

Наряду с принятой кинематической моделью деформации микрополярного упругого кругового тонкого стержня примем следующие статические предположения:

1. Предположения по малости нормального напряжения σ_{22} относительно нормального напряжения σ_{11} в первом уравнении закона Гука ($(1.2)_1$).

2. При определении деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений, сначала для касательного напряжения σ_{21} примем:

$$\sigma_{21} = \overset{0}{\sigma}_{21}(\varphi,t) \ . \tag{2.2}$$

После определения вышеуказанных величин, формулу для σ_{21} будем поправлять следующим образом. Интегрируем по z второе из (1.1) ($(1.1)_2$) уравнение движения и при определении постоянного интегрирования (вернее функции от φ), будем требовать равенство нулю интеграла от $-h$ до h от полученного выражения. После указанного интегрирования полученное окончательное выражение будем прибавлять к формуле (2.2).

И, наконец, примем условие о тонкостенности кругового стержня:

$$1 + \frac{h}{r_0} \approx 1, \tag{2.3}$$

при помощи которого еще можем написать:

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_0+z}=\frac{1}{r_0\left(1+z/r_0\right)}\approx\frac{1}{r_0}. \qquad (2.4)$$

В соответствии с принятым законом распределения перемещений и поворота (2.1), подставляя их в формулы (1.3), находим деформации и изгибы-кручения:

$$\gamma_{11}=\left(\frac{1}{r_0}\frac{\partial u}{\partial\varphi}+\frac{1}{r_0}w\right)+z\frac{1}{r_0}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}, \quad \gamma_{22}=0, \quad \gamma_{12}=\frac{1}{r_0}\frac{\partial w}{\partial\varphi}-\frac{1}{r_0}u-\Omega_3$$

$$\gamma_{21}=\psi+\Omega_3, \quad \chi_{13}=\frac{1}{r_0}\frac{\partial\Omega_3}{\partial\varphi}, \quad \chi_{23}=0. \qquad (2.5)$$

Примем следующие обозначения:

$$\Gamma_{11}=\frac{1}{r_0}\frac{\partial u}{\partial\varphi}+\frac{1}{r_0}w, \quad \Gamma_{12}=\frac{1}{r_0}\frac{\partial w}{\partial\varphi}-\frac{1}{r_0}u-\Omega_3, \quad \Gamma_{21}=\psi+\Omega_3,$$

$$\mathrm{K}_{11}=\frac{1}{r_0}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}, \quad k_{13}=\frac{1}{r_0}\frac{\partial\Omega_3}{\partial\varphi}, \qquad (2.6)$$

тогда для деформаций, изгибов-кручений получим:

$$\gamma_{11}=\Gamma_{11}+z\mathrm{K}_{11},\ \gamma_{22}=0,\ \gamma_{12}=\Gamma_{12},\ \gamma_{21}=\Gamma_{21},\ \chi_{13}=k_{13},\ \chi_{23}=0. \qquad (2.7)$$

Здесь Γ_{11} представляет собой продольную относительную деформацию средней линии; K_{11} – изменение кривизны средней линии (от силовых напряжений); Γ_{12} , Γ_{21} – сдвиговые деформации; k_{13} – изменение кривизны средней линии (от моментных напряжений).

Используя гипотезу 1) и формулу $(2.7)_1$, из формулы $(1.2)_1$ для напряжений σ_{11} будем иметь:

$$\sigma_{11}=\overset{0}{\sigma}_{11}\left(\varphi,t\right)+z\overset{1}{\sigma}_{11}\left(\varphi,t\right), \qquad (2.8)$$

где

$$\overset{0}{\sigma}_{11}\left(\varphi,t\right)=\mathrm{E}\Gamma_{11},\quad \overset{1}{\sigma}_{11}\left(\varphi,t\right)=\mathrm{E}\mathrm{K}_{11}. \qquad (2.9)$$

Для определения силового напряжения σ_{12}, используя формулы $(1.2)_3$, $(2.5)_3$, $(2.5)_4$, получим:

$$\sigma_{12}=\left(\mu+\alpha\right)\Gamma_{12}+\left(\mu-\alpha\right)\Gamma_{21}. \qquad (2.10)$$

Принимая во внимание формулы для σ_{11} ((2.8)) и σ_{12} ((2.10)), рассмотрим второе уравнение движения ($(1.1)_2$), которое проинтегрируем по r , с учётом тонкостенности области и граничных условий из (1.4) для σ_{22} , окончательно получим:

$$\sigma_{22}=\frac{1}{2}\left(q_2^{+}+q_2^{-}\right)-\frac{h^2}{2}\frac{1}{r_0}\overset{1}{\sigma}_{11}+z\left(\frac{1}{r_0}\overset{0}{\sigma}_{11}-\frac{1}{r_0}\frac{\partial\overset{0}{\sigma}_{12}}{\partial\varphi}+\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)+\frac{1}{r_0}\overset{1}{\sigma}_{11}\frac{z^2}{2}. \qquad (2.11)$$

Для моментного напряжения μ_{13} на основании формул $(1.2)_5$ и с учётом формулы из (2.7) для χ_{13}, будем иметь:

$$\mu_{13}=Bk_{13}. \qquad (2.12)$$

Значение для моментного напряжения μ_{23} получим из третьего уравнения движения ($(1.1)_3$) интегрированием по r с учётом формул (2.12), (2.10) и (2.2):

$$\mu_{23}=\frac{1}{2}\left(m^{+}+m^{-}\right)-z\left(\frac{1}{r_0}\frac{\partial\overset{0}{\mu}_{13}}{\partial\varphi}+\overset{0}{\sigma}_{12}-\overset{0}{\sigma}_{21}-I\frac{\partial^2\Omega_3}{\partial t^2}\right) \qquad (2.13)$$

Для определения силового напряжения σ_{21}, в основу будем принимать статическую гипотезу 2), тогда с использованием первого уравнения движения ($(1.1)_1$), а также формулу (2.2), окончательно получим:

$$\sigma_{21} = \overset{0}{\sigma}_{21}(\varphi, t) + \frac{h^2}{6}\frac{1}{r_0}\frac{\partial \overset{1}{\sigma}_{11}}{\partial \varphi} - \rho\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\frac{h^2}{6} - z\left(\frac{1}{r_0}\frac{\partial \overset{0}{\sigma}_{11}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r_0}\overset{0}{\sigma}_{12} - \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) - \frac{z^2}{2}\left(\frac{1}{r_0}\frac{\partial \overset{1}{\sigma}_{11}}{\partial \varphi} - \rho\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right). \quad (2.14)$$

Вводим обобщённые усилия и моменты:

$$\mathrm{N} = \int_{-h}^{h}\sigma_{11}dz, \quad Q_1 = \int_{-h}^{h}\sigma_{12}dz, \quad Q_2 = \int_{-h}^{h}\sigma_{21}dz, \quad \mathrm{M}_{11} = \int_{-h}^{h}\sigma_{11}z\,dz, \quad L_{13} = \int_{-h}^{h}\mu_{13}dz. \quad (2.15)$$

Теперь будем принимать в основу формулы для σ_{21} ((2.14)), σ_{22} ((2.11)) и μ_{23}((2.13)), удовлетворяя граничным условиям (1.4), с учётом формул (2.15), приходим к системе уравнений движения прикладной модели микрополярного упругого кругового стержня:

$$\frac{1}{r_0}\mathrm{N} - \frac{1}{r_0}\frac{\partial Q_1}{\partial \varphi} = \left(q_2^+ - q_2^-\right) - 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \frac{1}{r_0}Q_1 + \frac{1}{r_0}\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial \varphi} = -\left(q_1^+ - q_1^-\right) + 2\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$Q_2 - \frac{1}{r_0}\frac{\partial \mathrm{M}_{11}}{\partial \varphi} = h\left(q_1^+ + q_1^-\right) - \frac{2\rho h^3}{3}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad Q_2 - Q_1 - \frac{1}{r_0}\frac{\partial L_{13}}{\partial \varphi} = \left(m^+ - m^-\right) - 2Ih\frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2}. \quad (2.16)$$

Далее при помощи формул для σ_{11}((2.8)), σ_{12}((2.10)), σ_{21}((2.14)), μ_{13}((2.12)) получим соотношения упругости для указанной модели:

$$\mathrm{N} = 2\mathrm{E}h\Gamma_{11}, \quad Q_1 = 2h(\mu+\alpha)\Gamma_{12} + 2h(\mu-\alpha)\Gamma_{21}, \quad Q_2 = 2h(\mu+\alpha)\Gamma_{21} + 2h(\mu-\alpha)\Gamma_{12},$$

$$\mathrm{M}_{11} = \frac{2\mathrm{E}h^3}{3}\mathrm{K}_{11}, \quad L_{13} = 2Bhk_{13}. \quad (2.17)$$

Присоединим к уравнениям движения (2.16) и соотношениям упругости (2.17) ещё и геометрические уравнения (2.6):

$$\Gamma_{11} = \frac{1}{r_0}\frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{1}{r_0}w, \quad \Gamma_{12} = \frac{1}{r_0}\frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{1}{r_0}u - \Omega_3, \quad \Gamma_{21} = \psi + \Omega_3, \quad \mathrm{K}_{11} = \frac{1}{r_0}\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \quad k_{13} = \frac{1}{r_0}\frac{\partial \Omega_3}{\partial \varphi}. \quad (2.18)$$

Уравнения движения (2.16), соотношения упругости (2.17) и геометрические соотношения (2.18) представляют собой основные уравнения прикладной модели микрополярного упругого кругового стержня.

Граничные условия для полученной системы прикладной модели микрополярного упругого кругового тонкого стержня будем выводить вариационным способом после построения принципа типа Гамильтона для указанной модели. Этому вопросу будет посвящена отдельная статья.

Пользуясь случаем, выражаю глубокую благодарность моему научному руководителю члену-корреспонденту НАН Армении С.О. Саркисяну за постановку задачи и за ценные указания при её выполнении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sargsyan S.H. Asymptotically Confirmed Hypotheses Method for the Costruction of Micropolar and Classical Theories of Elastic Thin Shells. Advances in Pure Mathematics, №5. p.629-642. 2015.
2. Саркисян С.О., Хачатрян М.В. Математическая модель плоского кривого (кругового) упругого стержня по классической теории упругости с учетом поперечных сдвиговых деформаций. //Доклады НАН Армении. 2016. Т.116. №1. С.34-42.
3. Саркисян С.О., Хачатрян М.В. Математическая модель динамики кругового упругого стержня (по классической теории упругости) с учётом поперечных сдвигов. /Материалы XXII международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова, Московский авиационный институт, Москва-Вятичи, 15-19 февраля 2016г., Т.1. С.157-159.
4. Саркисян С.О., Хачатрян М.В. Вариационный принцип и энергетика деформаций прикладной модели микрополярного упругого кругового тонкого стержня. //Изв.НАН Армении. Механика. 2016. Т.69. №2. С.55-56.
5. Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Pergamon Press. Oxford. New York. Toronto. Sydney. Paris. Frankfurt. 1986. 383p.

Сведения об авторе:

Хачатрян Мелине Вардановна - аспирант кафедры Высшей математики Гюмрийского государственного педагогического института им. М. Налбандяна, (094) 61 82 13,
E-mail: khachatryanmeline@mail.ru

THE THICKNESS INHOMOGENEITY IN LINEAR AND NONLINEAR MAGNETOELECTRIC EFFECT IN MAGNETOSTRICTIVE-PIEZOELECTRIC LAYERED STRUCTURES

Galichyan T.A., Firsova T.O.

Theoretical and experimental studies of linear and nonlinear magnetoelectric effect in bilayer magnetostrictive-piezoelectric structure in the low-frequency spectral region and in the electromechanical resonance region are presented. Influence of the thickness inhomogeneity on the amplitude of magnetoelectric effect is investigated. The case of longitudinal orientation of the electric and magnetic fields was considered for structures in the form of a rectangular plate. The frequency dependence of the magnetoelectric effect is obtained using motion equation and electrostatic equations for both phases taking into account the boundary conditions on the interface. The results of experimental research of permendur–lead zirconate titanate bilayer structure are presented to examine the nonlinear magnetoelectric effect.

Magnetostrictive-piezoelectric structures have attracted much attention because in these structures there are effects which can be absent in magnetostrictive and piezoelectric components separately. They appear due to mechanical interaction between the magnetostrictive and piezoelectric subsystems. Magnetoelectric (ME) effect is one of such effects, which is caused by the elastic interaction of magnetostrictive and piezoelectric subsystems in bilayer structures. The action of the magnetic field in the magnetostrictive phase induces mechanical deformations which pass via mechanical coupling into the piezoelectric phase and leads to a change of the polarization of the sample.

The theoretical consideration of the ME effect in magnetostrictive-piezoelectric composites has two main methods at the present time. The method of effective parameters is one of these methods. Using this method, theory of the ME effect in bulk and multilayer composites was presented in works [1-6]. In these papers, an expression for ME voltage coefficient was defined by the method of effective parameters and the frequency dependence was analyzed. One of the disadvantages of the method of effective parameters is its usage limitation. The method is applicable when the characteristic size of the structural units of the composite is much smaller than the length of the acoustic oscillations, so that the composite can be considered as a homogeneous medium. Thus, the method of effective parameters is applicable for bulk composites. Bilayer structures attract much attention because of the value of ME effect, which is greater than in bulk composites [7]. But the method of effective parameters can not be used for these structures, because the thickness of the layers is comparable with the acoustic wavelengths. The second method is based on the simultaneous solution of the equations of motion and the constitutive relations for magnetostrictive and piezoelectric phases taking into account the boundary conditions on the interface. It was previously presented in [8-13]. The problem of this method is the consideration of the boundary condition between magnetostrictive and piezoelectric layers. These boundary conditions are presented formally by an interface coupling coefficient in [8-11] or by an assumption of ideal coupling [12,13]. The ME effect was investigated in laminated composite structure in work [14] where strain and ME voltage coefficient distributions were presented in piezoelectric, but in this work, the amplitude change of the oscillations over the thickness of the sample (in direction perpendicular to the interface) was not assumed. Recently the wave propagation and the ME effect in bilayer magnetostrictive-piezoelectric structure has been presented in case of a perfect bonding taking into account the changes of the amplitude in oscillations over the thickness of the sample in works [15-17]. But in these works, the spatial distribution of displacement and stress on the thickness of the sample were not analyzed and the influence of inhomogeneous distribution on the value of the effect was insufficiently analyzed.

In this paper, the dependencies of displacement and stress on the thickness of the sample are presented and their influence on the ME voltage coefficient is analyzed. The expressions for the ME voltage coefficient in the cases of longitudinal and transverse orientations of electric and magnetic fields were obtained using these dependencies and the open circuit condition. It is shown that the consideration of the change of oscillations amplitude over the thickness leads to a noticeable contribution to the magnitude of the effect.

As a model, we consider a bilayer structure in the form of a rectangular plate of length L and width W, consisting of mechanically interacting magnetostrictive and piezoelectric layers of thickness ${}^{m}t$ and ${}^{p}t$, the values which are not assumed to be small (Fig.1). Thin metal contacts are applied on the top and the bottom of the plate. Let us consider that the origin of the coordinates coincides with the boundary of the partition of magnetostrictive and piezoelectric layers.

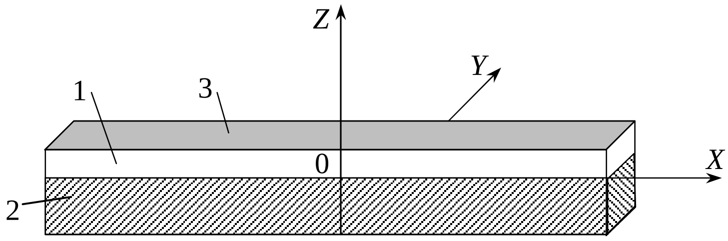


Fig.1. Schematic view of the sample. 1-Magnetostrictive phase with ${}^{m}t$ thickness, 2-Piezoelectric phase with ${}^{p}t$ thickness, 3-Electrodes.

Preliminarily, the piezoelectric layer is polarized perpendicularly to the contact (Z axis). In the case of longitudinal orientation of the electric and magnetic fields (longitudinal effect) the magnetic fields (bias $\boldsymbol{H_0}$ and alternating $\boldsymbol{H}$ with the frequency) coincide in direction with the polarization vector $\boldsymbol{P}$. We restrict our consideration to the planar vibrations propagating along the X axis. The alternating magnetic field causes elastic oscillations in the magnetostrictive component, transferring through the interface of the partition to the piezoelectric component through the shear stresses, which brings to interconnected oscillations of magnetostrictive and piezoelectric subsystems. As there is a nonuniformity along Z axis and the width of the plate is small (Y axis), under the first approximation we can assume that the displacements along plane Y are homogeneous and the nonzero components of stress are only ${}^{\alpha}T_{xx}$ and ${}^{\alpha}T_{xz}$. The value of the stresses will depend on the thickness of the sample, perpendicularly to the interface between magnetostrictive and piezoelectric phases. Therefore the equations of motion for the x projection of the ${}^{\alpha}u_x$ displacement vector for the magnetostrictive and piezoelectric phases are of the form

$$ {}^{\alpha}\rho\frac{\partial^2\, {}^{\alpha}u_x}{\partial t^2}=\frac{\partial\, {}^{\alpha}T_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\, {}^{\alpha}T_{xz}}{\partial z}, \quad (1)$$

where upper-case index «α» is correspondingly «m» for ferrite and «p» for piezoelectric, ${}^{\alpha}\rho$ is the density of ferrite and piezoelectric layers, ${}^{\alpha}T_{xx}$ and ${}^{\alpha}T_{xz}$ are the components of the stress tensor. The constitutive equations for the magnetostrictive and piezoelectric phases are

$$ {}^{p}S_{xx}=\frac{1}{{}^{p}Y}\,{}^{p}T_{xx}+{}^{p}d_{xx,z}\,{}^{p}E_z, \quad (2)$$

$$ {}^{p}S_{xz}=\frac{1}{{}^{p}G}\,{}^{p}T_{xz}, \quad (3)$$

$$ {}^{p}D_z={}^{p}\varepsilon_{zz}\,{}^{p}E_z+{}^{p}d_{xx,z}\,{}^{p}T_{xx}, \quad (4)$$

$$ {}^{m}S_{xx}=\frac{1}{{}^{m}Y}\,{}^{m}T_{xx}+{}^{m}q_{xx,z}\,{}^{m}H_z, \quad (5)$$

$$ {}^{m}S_{xz}=\frac{1}{{}^{m}G}\,{}^{m}T_{xz}, \quad (6)$$

where ${}^{\alpha}S_{xx}$ and ${}^{\alpha}S_{xz}$ $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ are the strain tensor components; ${}^{p}E_z$ and ${}^{m}H_z$ are the vector components of the electric and magnetic fields; ${}^{p}D_z$ is the vector component of the electric displacement; ${}^{\alpha}Y$ and ${}^{\alpha}G$ are the Young's and shear moduli; ${}^{p}d_{xx,z}$ and ${}^{m}q_{xx,z}$ are the piezoelectric and piezomagnetic coefficients; ${}^{p}\varepsilon_{zz}$ is the tensor component of permittivity.

Using the solution of equation for the displacement vector of the medium and the condition of mechanical equilibrium at the free surfaces of the plate, i.e. points $x=\mp L/2$, we obtain the expression for displacement of the magnetostrictive and piezoelectric media in final forms

$$ {}^{m}u_x=\left[\exp(-2\,{}^{m}\kappa)\exp({}^{m}\chi z)+\exp(-\,{}^{m}\chi z)\right]B\sin(kx), \quad (7)$$

$$ {}^{p}u_x=\left[\left(\cos({}^{p}\chi z)-\mathrm{tg}({}^{p}\kappa)\sin({}^{p}\chi z)\right)\left(1+\exp(-2\,{}^{m}\kappa)\right)\right]B\sin(kx), \quad (8)$$

where $B = \dfrac{{}^mY\,{}^mt\,{}^mq_{xx,z}\langle {}^mH_z\rangle + {}^pY\,{}^pt\,{}^pd_{xx,z}\langle {}^pE_z\rangle}{k\cos(\kappa)\left(1+\exp(-2\,{}^m\kappa)\right)\left({}^mY\,{}^mt\,\dfrac{\mathrm{th}({}^m\kappa)}{{}^m\kappa} + {}^pY\,{}^pt\,\dfrac{\mathrm{tg}({}^p\kappa)}{{}^p\kappa}\right)}$, $\kappa = kL/2$ and

${}^\alpha\kappa = {}^\alpha\chi\,{}^\alpha t$ are non-dimensional parameters; ${}^m\chi^2 = -2(1+\nu)\left[\dfrac{\omega^2}{{}^mV_L^2} - k^2\right]$,

${}^p\chi^2 = 2(1+\nu)\left[\dfrac{\omega^2}{{}^pV_L^2} - k^2\right]$, $\dfrac{1}{{}^\alpha V_L^2} = \dfrac{{}^\alpha\rho}{{}^\alpha Y}$; ${}^{\sim}V_L$ are the velocities of longitudinal waves respectively in the magnetostrictive and piezoelectric medium and ¬ is the Poisson's ratio.

Expressing the stress tensor components ${}^\alpha T_{xx}$ and ${}^\alpha T_{xz}$ by the strain tensor components in Eqs. (7), (8), (10) and (11), we obtain the final expressions

$${}^mT_{xx} = {}^mY\left[kB\cos(kx)\left(\exp(-2\,{}^m\kappa)\exp({}^m\chi z) + \exp(-{}^m\chi z)\right) - {}^mq_{xx,z}\,{}^mH_z\right], \tag{9}$$

$${}^mT_{xz} = {}^mG\,{}^m\chi\left[\exp(-2\,{}^m\kappa)\exp({}^m\chi z) - \exp(-{}^m\chi z)\right]B\sin kx, \tag{10}$$

$${}^pT_{xx} = {}^pY\left[kB\cos(kx)\left(1+\exp(-2\,{}^m\kappa)\right)\left(\cos({}^p\chi z) - \mathrm{tg}({}^p\kappa)\sin({}^p\chi z)\right) - {}^pd_{xx,z}\,{}^pE_z\right], \tag{11}$$

$${}^pT_{xz} = -{}^pG\,{}^p\chi\left(1+\exp(-2\,{}^m\kappa)\right)\left[\sin({}^p\chi z) - \mathrm{tg}({}^p\kappa)\cos({}^p\chi z)\right]B\sin kx. \tag{12}$$

As can be seen in Eqs. (7) and (8), the solution is represented as plane waves whose amplitude is changed over the thickness of the sample. These dependencies have nonlinear character and depend on the frequency of oscillations in general. It is easy to show that in the case of low frequencies, when the dimensionless parameters ${}^m\kappa$ and ${}^p\kappa\dfrac{n!}{r!\left(n-r\right)!}$ are less than one, the amplitude ceases to depend on the thickness of the sample. Thus, the results obtained earlier in [12], where the change of oscillations amplitude was not taken into account, take place only at low frequencies and thin layers. Using Eqs. (7) and (8), the distributions of relative displacements ${}^\alpha u_x = \dfrac{{}^\alpha u_x(z)}{{}^\alpha u_x(0)}$ on the thickness of magnetostrictive and piezoelectric phases are presented in figure 2 and the distribution of relative displacement in the piezoelectric phase is presented for three different cases of frequency (fig.3) in bilayer nickel–lead zirconate titanate (Ni-PZT) structure.

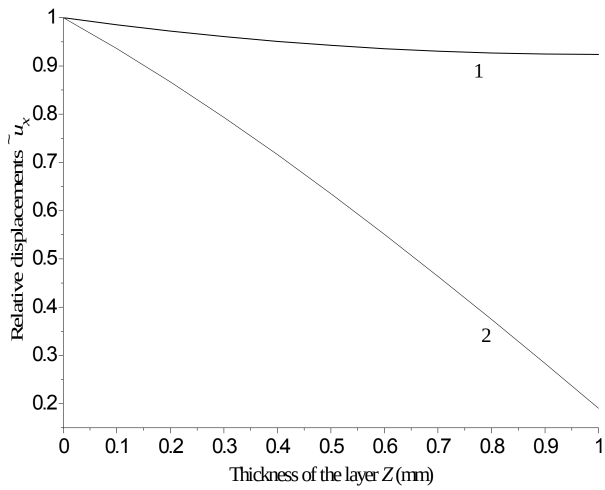


Fig.2. Relative displacement distributions on the thickness of magnetostrictive (line 1) and piezoelectric layers (line 2). Frequency of the ac magnetic field is f = 300 kHz.

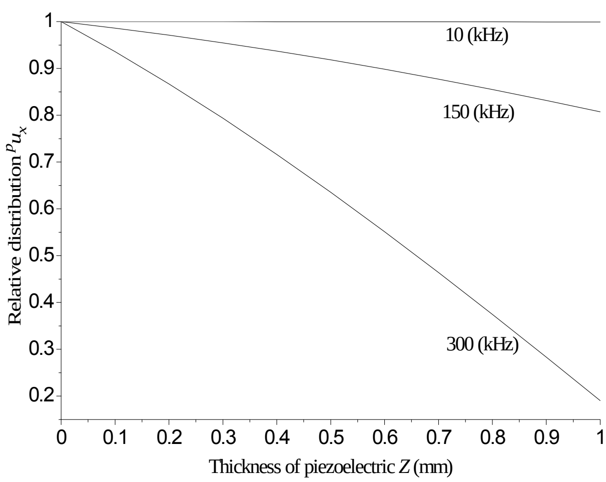


Fig.3. Relative displacement distribution on the thickness of piezoelectric layer in cases of different frequencies. Frequencies of the ac magnetic field are f = 10 kHz, f = 150 kHz, f = 300 kHz.

The following parameters of the structure were used in the calculations; for nickel $-{}^{m}Y = 204\,\text{GPa}$, ${}^{m}\rho = 8900\,\text{kg/m}^3$, ${}^{m}q_{xx,z} = 1156\cdot 10^{-12}\,\text{m/A}$; and for the PZT: ${}^{p}Y = 65\,\text{GPa}$, ${}^{p}\rho = 7600\,\text{kg/m}^3$, ${}^{p}d_{xx,z} = -175\cdot 10^{-12}\,\text{m/V}$, ${}^{p}\varepsilon_{zz}/\varepsilon_0 = 1750$, ac magnetic field H = 100 Oe.

Magnetoelectric voltage coefficient is defined as the ratio of the average value of the electric field to the average value of the external magnetic field, which induced it, i.e.:

$$\langle\alpha_E\rangle = \langle E\rangle / \langle H\rangle, \tag{13}$$

where $\langle E\rangle = U/({}^{m}t + {}^{p}t)$ is the average value of the electric field of the structure, U is the potential difference between the electrodes.

In order to define a theoretical expression for the ME voltage coefficient, we use the method developed earlier [15,16]. Substituting the expression in Eq. (11) into Eq. (4), using the condition of open circuit and the fact that the potential difference between the electrodes is defined as $U = \langle {}^{p}E_z\rangle\, {}^{p}t$, we obtain the expression for the ME voltage coefficient in the case of longitudinal orientation of the fields in the final form

$$\alpha_{E,L} = \frac{{}^{p}Y\,{}^{p}d_{xx,z}\,{}^{m}q_{xx,z}}{{}^{p}\varepsilon_{zz}\Delta_L} \frac{{}^{m}Y\,{}^{m}t}{{}^{m}Y\,{}^{m}t\,\dfrac{\text{th}({}^{m}\kappa)}{{}^{m}\kappa} + {}^{p}Y\,{}^{p}t\,\dfrac{\text{tg}({}^{p}\kappa)}{{}^{p}\kappa}} \frac{\text{tg}(\kappa)}{\kappa} \frac{\text{tg}({}^{p}\kappa)}{{}^{p}\kappa} \frac{{}^{p}t}{{}^{m}t + {}^{p}t}, \tag{14}$$

where $\Delta_L = 1 - K_p{}^2 \left(1 - \dfrac{{}^{p}Y\,{}^{p}t}{{}^{m}Y\,{}^{m}t\,\dfrac{\text{th}({}^{m}\kappa)}{{}^{m}\kappa} + {}^{p}Y\,{}^{p}t\,\dfrac{\text{tg}({}^{p}\kappa)}{{}^{p}\kappa}} \dfrac{\text{tg}(\kappa)}{\kappa} \dfrac{\text{tg}({}^{p}\kappa)}{{}^{p}\kappa}\right)$, with $K_p^2 = \dfrac{{}^{p}Y({}^{p}d_{xx,z})^2}{{}^{p}\varepsilon_{zz}}$ the squared coefficient of electromechanical coupling. As follows from Eq. (14), the peak increase in the effect is observed at the so-called antiresonance frequencies when condition $\Delta_L = 0$ is fulfilled. It should be noted that the antiresonance frequencies are near the resonance frequencies determined by condition $\kappa = (\pi/2)(2n - 1)$ or $L = (\lambda/2)(2n - 1)$, where λ is the wavelength of acoustic vibrations, and n = 1, 2, … is the integer number. Then, with allowance for Eq. (10), the frequency of the first or main resonance will be observed near the frequency determined by condition

$$f_{res} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{{}^{m}Y\,{}^{m}t + {}^{p}Y\,{}^{p}t}{{}^{m}\rho\,{}^{m}t + {}^{p}\rho\,{}^{p}t}}\,. \tag{15}$$

The experimental studies of the effect were performed on bilayer rectangular structures having the composition permendur–lead zirconate titanate (PZT). The plate length was L = 28 mm, and the plate width was W = 4.6 mm. The piezoelectric thickness was ${}^{p}t$ = 0.4 mm, and the permendur thickness was ${}^{m}t$ = 0.2 mm. Using these parameters of the structure, the Young's moduli ${}^{m}Y$ = 180 GPa and ${}^{p}Y$ = 67 GPa, and the numerical values of the permendur density ${}^{m}\rho = 8.1 \times 103$ kg/m^3 and PZT density ${}^{p}\rho = 7.0 \times 103$ kg/m^3, we calculated the frequency of the electromechanical resonance by Eq. (15) and obtained the value of about 70 kHz. In the experiments, we measured the frequency dependence of the voltage induced on the capacitor electrodes placed in an ac magnetic field generated by the Helmholtz coils. Figure 4 shows the dependence of the voltage induced on the capacitor electrodes on the frequency of the applied magnetic field at the bias fields H_{bias} = 0 and 2 Oe. We see well two resonances in Fig.4: the first resonance is at a frequency of 35 kHz, and the second resonance at a frequency of 70 kHz. The second resonance height increases with increasing bias field, and it is due to usual electromechanical resonance appeared during the linear effect [6,18].

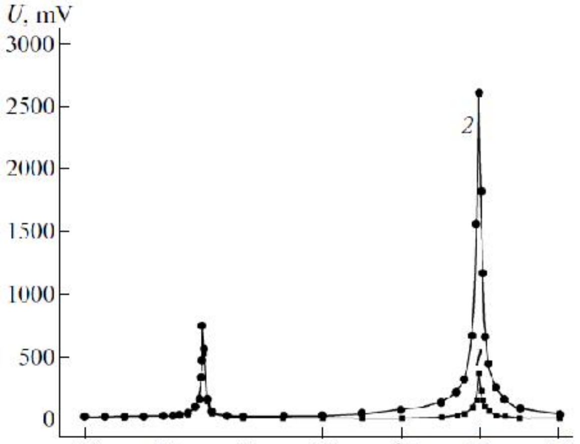


Fig. 1. Frequency dependence of the magnetoelectric effect in bias fields H_{bias} – (1) 0 and (2) 2 Oe.

The existence of the second resonance at a zero bias field seems to be due to the Earth's magnetic field. The first resonance frequency is a half of the frequency of the electromechanical resonance, and it is related to the nonlinear ME effect. As follows from Fig. 1, its value remains unchanged with varying the bias field. It should be noted that the nonlinear resonance becomes almost invisible against the background of the resonance related to the linear effect at the bias field strength exceeding the ac magnetic field strength by several times, because the resonance value of the ME effect at the frequency of the electromechanical resonance increases with increasing bias field strength.

In the low-frequency region of the spectrum, expression (14) can be significantly simplified using the circumstance that dimensionless parameters κ, ${}^{m}\kappa$, ${}^{p}\kappa$<<1. Going to the limit κ, ${}^{m}\kappa$, ${}^{p}\kappa$ tends to zero, we obtain for the low-frequency value of the nonlinear ME effect the expression

$$\alpha_{E,low} = \frac{{}^{p}Y\,{}^{p}d_{xx,z}\,{}^{m}q_{xx,z}}{{}^{p}\varepsilon_{zz}\Delta_{low}} \frac{{}^{m}Y\,{}^{m}t}{{}^{m}Y\,{}^{m}t + {}^{p}Y\,{}^{p}t} \frac{{}^{p}t}{{}^{m}t + {}^{p}t}, \tag{16}$$

where $\Delta_{low} = 1 - K_p^2\left(1 - \frac{{}^{p}Y\,{}^{p}t}{{}^{m}Y\,{}^{m}t + {}^{p}Y\,{}^{p}t}\right)$.

So we may assume that the inhomogeneity of the structure, associated with the presence of the ferrite-piezoelectric interface, leads to the change of displacement and stress amplitudes over the thickness of the sample. This inhomogeneity can be neglected, and we can assume that the amplitude is not changed over the thickness of the sample only at low frequencies.

Composite multiferroics based on magnetostrictive–piezoelectric structures demonstrate the nonlinear ME effect, along with the effect linear in ac magnetic field. The nonlinear ME effect leads to resonance excitation of electric field oscillations under the action of an ac magnetic field whose frequency is two times less than the frequency of the electromechanical resonance. The nonlinear effect is quadratic in ac magnetic field strength and does depend on the bias field in weak fields.

References

1. Harshe G., Dougherty J.P. and Newnham R.E. 1993 *Int. J. Appl. Electromagn. Mater.* **4** 145.
2. Harshe G., Dougherty J.P. and Newnham R.E. 1993 *Int. J. Appl. Electromagn. Mater.* **4** 161.
3. Bichurin M.I., Petrov V.M. and Srinivasan G. 2002 *J. Appl. Phys.* **92** 7681.
4. Osaretin I.A. and Rojas R.G. 2010 *Phys. Rev.* B **82** 174415.
5. Bichurin M.I., Filippov D.A., Petrov V.M., Laletsin V.M., Paddubnaya N.N. and Srinivasan G.2003 *Phys. Rev.* B **68** 132408.
6. Filippov D.A., Bichurin M.I., Petrov V.M., Laletin V.M. and Srinivasan G. 2004 *Phys. Solid State* **46** 1674.
7. Filippov D.A., Laletin V.M. and Srinivasan G. 2012 *Tech. Phys.* **57** 44.
8. Filippov D.A. 2004 *Tech. Phys. Lett.* **30** 983.
9. Filippov D.A. 2005 *Phys. Solid State* **47** 1118.
10. Chang C.M. and Carman G.P. 2008 *J. Intell. Mater. Syst. Struct.* **19** 1271.
11. Filippov D.A., Srinivasan G. and Gupta A. 2008 *J. Phys.: Condens. Matter* **20** 425206.
12. Bichurin M.I., Petrov V.M., Averkin S.V. and Filippov A.V. 2010 *Phys. Solid State* **52** 2116.
13. Wang Y., Hasanyan D., Li M., Gao J., Li J., Viehland D. and Luo H. 2012 *J. Appl. Phys.* **111**124513.
14. Hasanyan D., Wang Y., Gao J., Li M., Shen Y., Li J. and Viehland D. 2012 *J. Appl. Phys.* **112**064109.
15. Filippov D.A., Laletin V.M. and Galichyan T.A. 2013 *Phys. Solid State* **55** 1840.
16. Filippov D.A., Galichyan T.A. and Laletin V.M. 2013 *Appl. Phys.* A **115** 1087.
17. Galichyan T.A. and Firsova T.O. 2013 *J. Phys.: Conf. Ser.* **461** 012016.
18. Filippov D.A., Bichurin M.I., Petrov V.M., Laletin V.M., Poddubnaya N.N, and Srinivasan G. 2004 *Tech. Phys. Lett.* **30** 6.

Information about authors

Galichyan T.A. – PhD, Institute of Mechanics (NAS of Armenia), Yerevan, Armenia,
Tel.: +374 77 77 62 91; **E-mail:** GalichyanTigran@gmail.com
Firsova T.O. – PhD, Novgorod State University, Veliky Novgorod, Russia. **Tel.:** +7 951 7248259,
E-mail: firsovatati@mail.ru

FINITE ELEMENT ANALYSIS OF EPITHELIAL TISSUE BENDING DUE TO APICAL CONSTRICTIONS

Khurshudyan As.Zh., Ohanyan S.K.

Finite element analysis of epithelial tissue bending caused by apical constriction of cells is performed. A single cell is modeled as elastic hexagonal prism of constant thickness. Apical junctions and cell-cell adhesion are also contributing to the bending. Epithelia are modeled as continuous sequence of cells. Stress-state analysis for epithelial tissues of flat, cylindrical and spherical initial configuration is performed and main characteristics of deformation are studied.

1. Introduction

Morphogenesis, the evolutionary process of shape and structure development of an organism or its parts, is driven by certain types of cell shape changes (deformations). One type of such deformations is the apical constriction– visible shrinkage of the apical side of cells, leading to bending of epithelia– cell sheets which surround organs throughout the body. First occurring at early stages of embryogenesis, apical constriction results initially at epithelia to be bent obtaining three-dimensional form, which, depending on physiological context and morphogenetic stage, leads to different consequences. It has been first hypothesized in [1], that in various developmental systems the apical constriction may drive the bending of epithelia. Using bulky mechanical construction, the hypothesis of Rhumbler is first practically tested in [2]. The testing mechanism was consisting from 13 identical bars (cell walls) that are kept apart by means of stiff tubes connecting their centers (cell kernels), and are held in a row by rubber bands connecting their ends (cell membrane). In the first stage, the rubber bands at both sides are stretched equally and the mechanism is in straight equilibrium. Shortening the rubber bands at one, for instance, upper side uniformly in each segment, the mechanism naturally is bent on the side of the greater tension. So, there were evidences proving Rhumbler‘s hypothesis.

A more illustrative, computer model to prove Rhumbler‘s hypothesis is suggested in [3], where bars and bands are replaced by virtual cells. Prescribing certain mechanical properties to the cell membrane and cytoplasmic components, and assuming that as a result of deformations (which is implicitly done by Rhumbler and Lewis), the volume of a single cell is preserved, a model of cuboidal epithelia folding is suggested, based on the local behavior of individual cells. The model is demonstrated for ventral furrow formation in Drosophila. A sequence of cells in the form of cylindrical shell, representing the cross section of ventral furrow, is deformed such that apical constriction occurs in its lower row of cells. Increasing the applied stresses, different steps of the furrow formation are illustrated. Fig.1 expresses how much the Odell‘s model is close to the real microscopic picture [4].

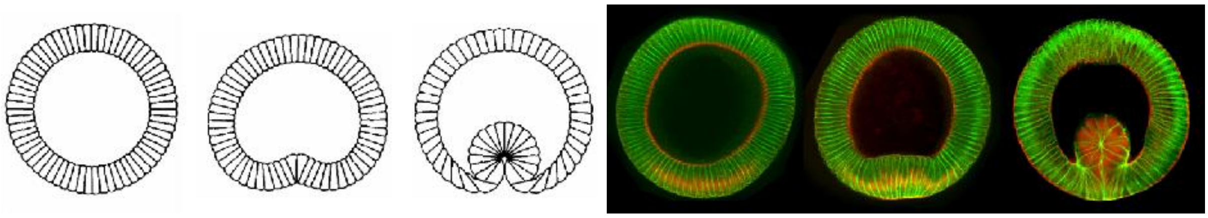


Fig. 1. Ventral furrow formation in Drosophila according to [3] (upper) and [4] (lower)

Much is known about causes of apical constriction, but some issues still remain unexplored [5–8]. The most studied causes include contraction of actin filaments– fibrous network localized at the cortex of the cell, by interacting with motor protein myosin– the most known converter of chemical energy into mechanical work. Under influence of myosin, actin fibers contract leading to shrinkage of the cell at area of their localization [9, 10]. The contraction size and principal direction of the fibers, i.e. the microscopical deformation of a single cell, mainly depends on the tissue type: actin-myosin network contraction may deform columnar (occurring, for instance, in digestive tract and female reproductive system) or cuboid (resp. in kidney tubules) cells into trapezoidal, wedge or bottle-shaped cells. The deformation size strongly depends also on emplacement of the cells: cells with different placement are constricted differently, so that macroscopically one observes localized wrinkles (see Fig.2).

Because of mechanical nature of cell shape change, in particular, apical constriction, its theoretical study first of all must rely on mechanical principles and constitutive laws. In early mechanical models the tissue is modeled as a continuum material, so that the position and behavior of individual cells are unimportant, i.e. only macroscopic deformation of the tissue is studied.

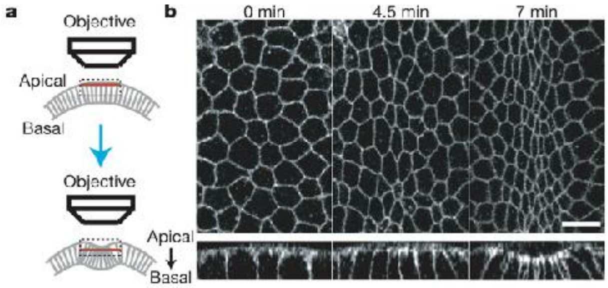


Fig. 2. Apical constriction of ventral furrow at different times [10]

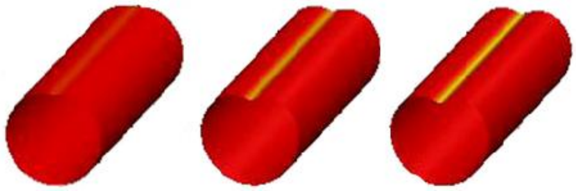


Fig. 3. Ventral furrow formation in Drosophila according to [11]

Moreover, the height of the cells (viz. thickness of the tissue) is supposed to be negligible with respect to other measures, such that the deformation of the tissue can be described in terms of its middle surface. In such models the actin network is not explicitly accounted and the contraction forces are modeled as a force term acting on the outer surface of the epithelium. Actin network is explicitly accounted in [11], where thin elastic shell model based on linear Cauchy relations is derived to describe apical constriction in initially non-at epithelia. The model is tested to simulate ventral furrow formation in Drosophila (Fig.3).

It becomes evident from comparison of Fig.1 and 3 that the model, being three-dimensional, is in good correspondence with that from [3]: Figure 1 corresponds to cross section of cylindrical shell from Fig. 3. However, it does not involve the behavior of individual cells.

For further introduction into other mechanical models see [12–19] and references therein.

2. Main Results

In this section we summarize main results of finite element analysis of a single layer tissue model, the elastic energy of which is given by [20, 21]

$$E[\mathbf{r}] = hE_m[\nabla\mathbf{r}] + h^3 E_b[\nabla\mathbf{r}, \nabla^2\mathbf{r}],$$

in which $\mathbf{r}$ is the deformation, h is the thickness of the tissue, E_m and E_b are the stretching and bending contributions to the energy.

In Fig.4 we bring the model of a single cell (element) and cell-cell junction (in red). All structures (plate and shell) considered in this section entirely consist of such cell groups. In all tissues considered below the height of a cell $h = 4r = 200d$, in which r is its side and d is the diameter of actin fibers. The ratio of Young‘s moduli of a cell and actin fibers is $E_{act} = 3E_{cell}$, and of actin fibers and cell-cell links $E_{act} = 1.5E_{link}$.

We consider

i) rectangular plate (Fig. 5 (left)),
ii) cylindrical shell (Fig. 7 (left)),
iii) spherical shell (Fig. 9 (left)).

Elements of the middle part of the rectangular tissue are compressed in apical sides to imitate apical constriction in cells. Increasing the compressing stresses, the tissue is bent and a blaster shaped pattern is formed as shown in Fig. 5 (right). The quantitative picture of the stresses arising in the tissue is drawn in Figure 6.

Next we consider a cylindrical shell to imitate ventral furrow (generally all tubular patterns) formation. Elements of the top part of the cylinder are constrained in the apical sides by compressing the links standing for apical fibers (see Fig.7). Increasing the compressing stresses, ventral furrow formation is simulated similar to stages presented in Fig.1. The quantitative picture of the stresses arising in the tissue is drawn in Fig.8.

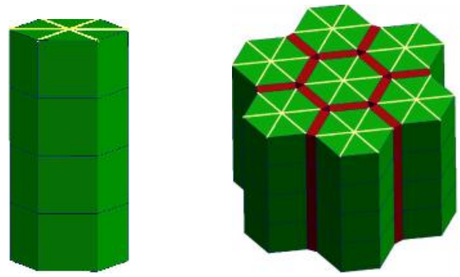


Fig. 4. Single cell model (left) and adherens junction model (right): diagonals of the top hexagon imitate actin fibers, red areas between cells imitate junction bonds

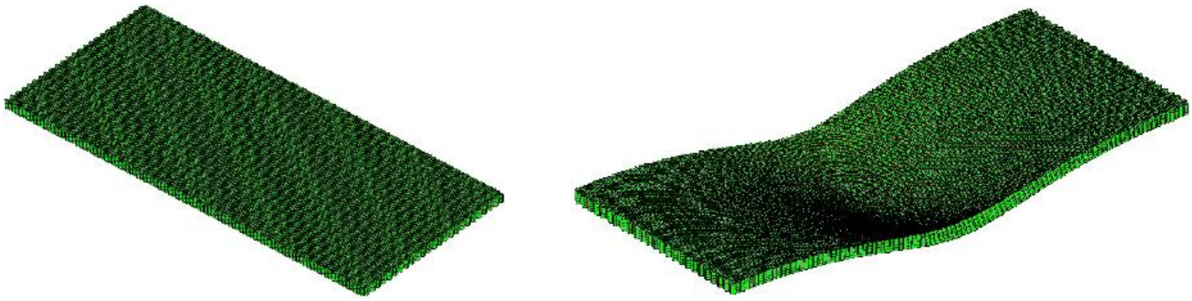


Fig. 5. Apical constriction of initially flat tissue. It consists from 5050 elements or cells and has 529245 DOFs.

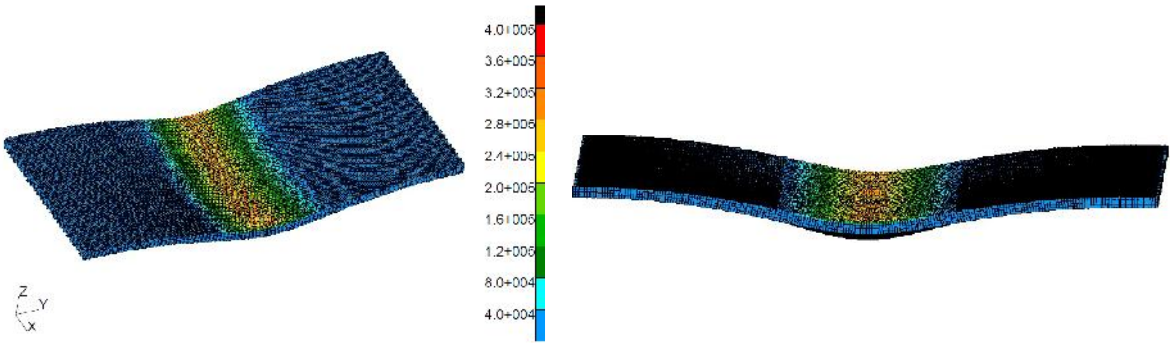


Fig. 6. von Mises stress distribution in deformed configurations

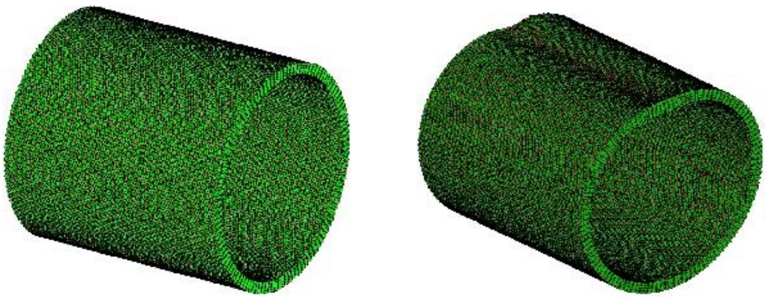


Fig. 7. Apical constriction of initially cylindrical tissue. It consists from 5975 elements or cells and has 621375 DOFs.

Finally, a spherical shell is simulated. Cells at the top of a semi-sphere are constrained in apical sides and depending on values of compressing stresses various stages of blastopore formation in archenteron can be described (see Fig. 9 (right)). The quantitative picture of the stresses arising in the tissue is drawn in Fig. 10.

3. Conclusions

A three-dimensional discretized model of epithelial tissues undergoing combined stretching and bending deformations is constructed. Discretization elements correspond to single cells forming the tissue. Actin fibers and cell-cell adhesion links, mainly contributing on the tissue energy, are explicitly embedded in elements. Deformations characteristic to specific embryonic tissues (ventral furrow, neutral tube, neurosphere) observed earlier are described quantitatively increasing contractile stresses in fibers.

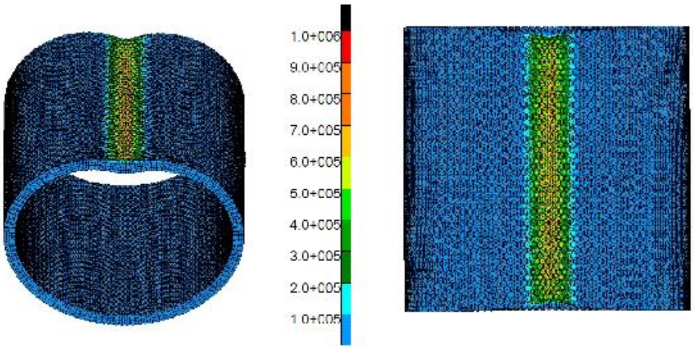


Fig. 8. von Mises stress distribution in deformed configurations

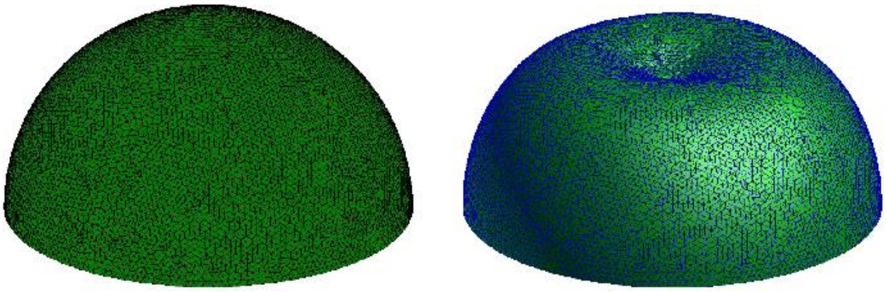


Fig. 9. Apical constriction of initially spherical tissue. It consists from 3126 elements or cells and has 325245 DOFs.

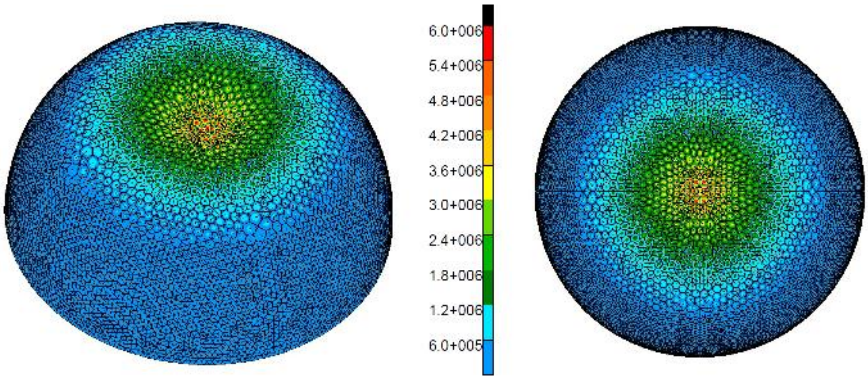


Fig. 10. von Mises stress distribution in deformed configurations

Acknowledgements. The theoretical part of the chapter is investigated under guidance of Doctor, Professor Benedikt Wirth, Institute for Computational and Applied Mathematics, University of Muenster, Muenster, Germany, whom we heartily thankful. The work was made possible in part by a research grant from the Armenian National Science and Education Fund (ANSEF) based in New York, USA.

REFERENCE

[1] Rhumbler L., Zur Mechanik des Gastrulationsvorganges insbesondere der Invagination Eine entwickelungsmechanische Studie // Arch. Ent.mech. Organism., 1902, vol. 14, issue 3, pp. 401–476.
[2] Lewis W. H., Mechanics of invagination // The Anatom. Rec., 1947, vol. 97, issue 2, pp. 139–156.
[3] Odell G. M., Oster G., Alberch P., Burnside B., The mechanical basis of morphogenesis: I. Epithelial folding and invagination // Developmental Biology, 1981, vol. 85, issue 2, pp. 446–462.
[4] Polyakov O., Bing H., et al., Passive mechanical forces control cell-shape change during Drosophila ventral furrow formation // Biophysical Journal, 2014, vol. 107, issue 4, pp. 998–1010.
[5] Keller R., Developmental biology. Physical biology returns to morphogenesis // Science, 2012, vol. 338, pp. 201–203.
[6] Mammoto T., Ingber D. E., Mechanical control of tissue and organ development // Development, 2010, vol. 137, pp. 1407–1420.
[7] Martin A. C., Goldstein B., Apical constriction: themes and variations on a cellular mechanism driving morphogenesis // Development, 2014, vol. 141, pp. 1987–1998.
[8] Sawyer J. M., Harrell J. R., et al., Apical constriction: a cell shape change that can drive morphogenesis // Developmental Biology, 2010, vol. 341, pp. 5–19.
[9] Martin A. C., Pulsation and stabilization: contractile forces that underlie morphogenesis // Developmental Biology, 2010, vol. 341, pp. 114–25.
[10] Martin A. C., Kaschube B., Wieschaus E. F., Pulse contractions of an actin-myosin network drive apical constriction // Nature, 2009, vol. 457, issue 22, pp. 495–501.
[11] Jones G. W., Chapman S. J., Modeling apical constriction in epithelia using elastic shell theory // Biomechanics and Modeling in Mechanobiology, 2010, vol. 9, issue 3, pp. 247–261.
[12] von Dassow M., Davidson L., Variation and robustness of the mechanics of gastrulation: the role of tissue mechanical properties during morphogenesis // Birth Defects Research Part C: Embryo Today, 2007, vol. 81, issue 4, pp. 253–269.
[13] Du. X., Osterfield M., Shvartsman S. Y., Computational analysis of three-dimensional epithelial morphogenesis using vertex models // Physical Biology, 2014, vol. 11, issue 6, 15 p.
[14] Fletcher A. G., Osterfield M., Baker R. E., Shvartsman S. Y., Vertex Models of Epithelial Morphogenesis // Biophysical Journal, 2014, vol. 106, issue 11, pp. 2291–2304.
[15] Imai M., Furusawa K., et al., Three-dimensional morphogenesis of MDCK cells induced by cellular contractile forces on a viscous substrate // Scientific Reports, 2015, vol. 5, 14208.
[16] Inoue Y., Suzuki M., Watanabe T., Yasue N., Tateo I., Adachi T., Ueno N., Mechanical roles of apical constriction, cell elongation, and cell migration during neural tube formation in Xenopus // Biomechanics and Modeling in Mechanobiology, 2016, DOI 10.1007/s10237-016-0794-1
[17] Jauvert S., Peyroux R., Richefeu V., A mechanical model for cell motility and tissue morphogenesis // Comp. Methods in Biomechanics and Biomedical Engin., 2013, vol. 16, pp. 13–14.
[18] Vaughan B. L. Jr., Baker R. E., Kay D., Maini P. K., A modified Oster-Murray-Harris mechanical model of morphogenesis // SIAM Journal of Appl. Math., 2013, vol. 73, issue 6, pp. 2124–2142.
[19] Wyczalkowski M. A., Chen Z., et al., Computational models for mechanics of morphogenesis // Birth Defects Research Part C: Embryo Today: Reviews, 2012, vol. 96, issue 2, pp. 132–152.
[20] Hilgers M. G., Pipkin A. C., Bending energy of highly elastic membranes // Quarterly of Applied Mathematics, 1992, vol. L, issue 2, pp. 389–400.
[21] Hilgers M. G., Pipkin A. C., Bending energy of highly elastic membranes II // Quarterly of Applied Mathematics, 1996, vol. LIV, issue 2, pp. 307–316.

Information about authors:

Khurshudyan Asatur – PhD in Mechanics, Institute of Mechanics, National Academy of sciences of Armenia, Institute of Computational and Applied Mathematics, Muenster, Germany
E-mail: khurshudyan@mechins.sci.am

Ohanyan Sergey – post graduate student, Institute of Mechanics, National Academy of sciences of Armenia**, E-mail:** sergohanyan@mail.ru

METAMATERIAL MODELS OF CONTINUUM MULTIPHYSICS

Kovalev V.A., Murashkin E.V., Radayev Y.N.

The present study deals with multiphysics modelling framework problem in order to describe the thermomechanical behavior of the metamaterials having highly specific mechanical and physical properties. The complementary microstructural variables are introduced in order to describe essential physical characteristics of metamaterials. An approach attributed to the field theoretical formalism is used. Natural density of thermoelastic action and corresponding variational least action principle are discussed. Differential field equations and constitutive ones are derived from a special form of the first variation of the action. The objectivity of constitutive equations is provided by the frame indifference principle. The rotationally invariance principle for thermoelastic continuum allows to obtain two discriminated sets of functionally independent thermodynamical arguments. The constitutive equations for dissipative thermoelastic continuum follow from the general rules of the irreversible thermodynamics formalism and the thermodynamics orthogonality principle. Only two functionally independent phenomenological functions (the dissipative potential and the Helmholtz free energy) are needed for specification the constitutive equations.

1. In recent years, metamaterials manufacturing and processing have attracted significant attention from the engineer's community and researchers. These artificial metamaterials exhibit abnormal physical properties not usually found in nature. Examples include negative Poisson's ratio (auxetic materials), negative thermal expansion, negative electric permittivity and the magnetic permeability. These physical phenomena cannot be described in terms of the theory of classical continuum mechanics. In this case, microstructure continuum theories based on the necessity of additional (extra) freedom degrees are required. The physically infinitesimal volume in such continua is not a material point, but a much more sophisticated object, with its intrinsic additional freedom degrees (microrotations, microoscillations). Therefore, the derivations of non-linear Lagrangian, Hamiltonian, extra-stress and extra-strain, valid in the most general case of finite deformations and microrotations, to continua with microstructure [1,2,3]. It stands today as one of the most important problems of the continuum mechanics. That is why a development of complex continuum theories seems to be actual.

The thermomechanical behavior of metamaterials can be described in terms of field formalism and frameworks of micropolar thermoelasticity. In the present study the Green–Naghdi (GN-theory) [4] thermoelastic model is employed. Application of the field formalism principles to continuum mechanics leads to a natural forms of constitutive equations [5,6]. Rotationally invariant Lagrangian forms along with the requirement of the Galilean translational invariance provide determination of a complete system of strain measures.

2. Theory of micropolar thermoelasticity can be developed in terms of the field theory formalism by using the action integral. Following considerations shall be restricted to a plane spacetime. Thus a general form of action furnishes

$$\Im = \int \mathscr{L}(X^{\beta}, \varphi^{k}, \partial_{\beta}\varphi^{k})\, d^4X, \qquad (1)$$

where φ^{k} are covariant physical fields; $\mathscr{L}$ is the Lagrangian density; X^{β} are the referential coordinates; $d^4X = dX^1 dX^2 dX^3 dX^4$ is spacetime elementary volume.

The least action principle states that the actual field is realized in the spacetime in a way that the action integral (1) is minimum, i.e. for any admissible variations of physical fields $\delta\varphi^{k}$ and $\delta X^{\beta} = 0$ the following equation is valid

$$\delta\Im = 0. \qquad (2)$$

The Euler–Lagrange field equations corresponding to action (1) are

$$\mathscr{E}_k(\mathscr{L}) = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi^{k}} - \partial_{\beta}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_{\beta}\varphi^{k})} = 0.$$

In field theory a conservation law can be formulated as the following equation

$$\partial_{\beta} J^{\beta} = 0, \qquad (3)$$

where the vector $J^{\beta} = J^{\beta}(X^{\beta}, \varphi^{k}, \partial_{\beta}\varphi^{k})$ is called the 4-current. The 4-current can be obtained in the form

$$J = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial \;\ddot{}\;^{k})}\text{¢}^{\nabla \ddot{}\, k} + \left(\mathcal{L}\text{¢}_{\tilde{}} - (\partial_{\tilde{}}\ddot{}\;^{k})\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial \;\ddot{}\;^{k})}\right)\text{¢}^{\nabla} X^{\tilde{}}, \qquad (4)$$

wherein $\text{¢}^{\nabla} = \text{¢}/\text{£}$ denote finite variations corresponding to symmetry transformations of X and $\ddot{}\;^{k}$.

In fact the current (4) can be determined if variational symmetries of action (1) are known.

3. Thermoelastic action for micropolar continuum is taken in the form

$$\mathfrak{I} = \int \mathcal{L}(X^{\tilde{}}, x^{j}, \underset{A}{d}^{j}, \text{g}, \partial_4 x^{j}, \partial_4 \underset{A}{d}^{j}, \partial_4 \text{g}, \partial\; x^{j}, \partial\; \underset{A}{d}^{j}, \partial\; \text{g})dX^1 dX^2 dX^3 dX^4. \qquad (5)$$

In (5) $X^{\tilde{}}$ $(\tilde{} = 1,2,3)$ are referential coordinates; x^{j} $(j = 1,2,3)$ are spatial coordinates; $\underset{A}{d}^{j}$ are micropolar directors; g is temperature displacement. Equations $x^{j} = x^{j}(X^{\tilde{}})$ determine the deformation of continuum.

We assume the action density (5) in the following form

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_4 x^{k})\,°_{kj}(\partial_4 x^{j}) + \frac{1}{2}(\partial_4 \underset{A}{d}^{i})\overset{AB}{\mathfrak{I}}_{ij}(\partial_4 \underset{A}{d}^{j}) - \cdot\;(X^{\tilde{}}, x^{j}, \underset{A}{d}^{j}, \text{g}, \partial_4 \text{g}, \partial_{\tilde{}} x^{j}, \partial_{\tilde{}} \underset{A}{d}^{j}, \partial_{\tilde{}} \text{g}). \qquad (6)$$

Hereafter $\overset{AB}{\mathfrak{I}}_{ij}$ denotes the microinertion tensor; $°_{ij}$ is mass density tensor; $\cdot$ is referential volume density of the Helmholtz's free energy. For tensors $\overset{AB}{\mathfrak{I}}_{ij}$ and $°_{ij}$ the symmetry conditions $°_{ij} = °_{ji}$, $\overset{AB}{\mathfrak{I}}_{ij} = \overset{AB}{\mathfrak{I}}_{ji}$ are to be valid.

The differential field equations corresponding to action integral (5) read

$$\partial_{\tilde{}} S^{\tilde{}\cdot}_{\cdot j} - \partial_4 P_j = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^{j}} \quad (\tilde{} = 1,2,3;\ j = 1,2,3),$$

$$\partial_{\tilde{}} \underset{A}{M}^{\tilde{}\cdot}_{\cdot j} + \underset{A}{A}_{j} - \partial_4(\underset{A}{Q}_{j}) = 0 \quad (\tilde{} = 1,2,3;\ j = 1,2,3), \qquad (7)$$

$$\partial_{\tilde{}} j^{\tilde{}}_{R} + \partial_4 s = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \text{g}} \quad (\tilde{} = 1,2,3),$$

and are supplemented by the following equations:

$$S^{\tilde{}\cdot}_{\cdot j} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\tilde{}} x^{j})}, \quad \underset{A}{M}^{\tilde{}\cdot}_{\cdot j} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\tilde{}} \underset{A}{d}^{j})}, \quad \underset{A}{A}_{j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underset{A}{d}^{j}}, \quad P_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_4 x^{j})},$$

$$\underset{A}{Q}_{j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_4 \underset{A}{d}^{j})}, \quad s = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_4 \text{g})}, \quad j^{\tilde{}}_{R} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\tilde{}} \text{g})}, \qquad (8)$$

where $S^{\tilde{}\cdot}_{\cdot j}$ is the first Piola–Kirchhoff tensor; $\underset{A}{M}^{\tilde{}\cdot}_{\cdot j}$ are the extra-stress tensors; $\underset{A}{A}_{j}$ are generalized moments; P_j and $\underset{A}{Q}_{j}$ are generalized momenta; s is entropy density; $j^{\tilde{}}_{R}$ is the referential entropy flux. 1st eq. of (7) is the motion balance equation. 2nd eq. of (7) is the momentum balance equation. If $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\tilde{}} \text{g})} = 0$ then 3rd eq. of (7) constitutes the entropy balance equation.

We proceed to conservation laws for the system of field eqs. (7). It is known that action integral $\mathcal{L}$ is invariant under translations of all coordinates $X^{\tilde{}}$ if $\mathcal{L}$ does not depends on $X^{\tilde{}}$ explicitly. Therefore, the 4-covariant energy-momentum tensor can be easily obtained and the corresponding conservation laws are formulated. There are four groups of equations for the components of the canonical energy-momentum tensor $T^{«\cdot}_{\cdot ª}$ $(ª, « = 1,2,3,4)$:

$$T^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha} = \mathscr{L}\delta^{\beta}_{\alpha} + S^{\beta\cdot}_{\cdot l}(\partial_{\alpha} x^{l}) + \underset{A}{M}{}^{\beta\cdot}_{\cdot l}(\partial_{\alpha} \underset{A}{d}{}^{l}) - j^{\beta}_{R}(\partial_{\alpha}\theta) \qquad (\alpha,\beta = 1,2,3), \tag{9}$$

$$T^{\beta\cdot}_{\cdot 4} = S^{\beta\cdot}_{\cdot l}\dot{x}^{l} + \underset{A}{M}{}^{\beta\cdot}_{\cdot l}\underset{A}{\dot{d}}{}^{l} - j^{\beta}_{R}\dot{\theta} \qquad (\beta = 1,2,3), \tag{10}$$

$$T^{4\cdot}_{\cdot\alpha} = -(\partial_{\alpha} x^{l})P_{l} - (\partial_{\alpha}\underset{A}{d}{}^{l})\underset{A}{Q}{}_{l} - s(\partial_{\alpha}\theta) \qquad (\alpha = 1,2,3), \tag{11}$$

$$T^{4\cdot}_{\cdot 4} = \mathscr{L} - \dot{x}^{l}P_{l} - \underset{A}{\dot{d}}{}^{l}\underset{A}{Q}{}_{l} - s\dot{\theta}. \tag{12}$$

It is clearly seen that the above components of the energy-momentum tensor for micropolar thermoelastic field can be treated as: $T^{4\cdot}_{\cdot 4} = H$, is the Hamiltonian, $T^{4\cdot}_{\cdot\alpha} = P_{\alpha}$ is Umov–Poynting vector, $T^{\beta\cdot}_{\cdot 4} = \Gamma^{\beta}$ is pseudomomentum vector, $T^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha} = P^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha}$ is the Eshelby stress tensor.

Conservation laws corresponding to the translational symmetries of action read

$$\partial_{\beta}T^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha} = 0 \qquad (\alpha,\beta = 1,2,3,4). \tag{13}$$

Eqs. (13) are splitted into the following symmetric canonical equations

$$-\dot{H} + \partial_{\beta}\Gamma^{\beta} = 0, \qquad -\dot{P}_{\alpha} + \partial_{\beta}P^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha} = 0. \qquad (\alpha,\beta = 1,2,3) \tag{14}$$

Eqs. (14) are the energy balance equation and the pseudomomentum balance equation respectively.

4. Action and action density are to satisfy some conditions of invariance with respect to arbitrary rotations of spatial coordinate system and time translations. Since the choice of spatial coordinates is rather arbitrary it should not in any way affect formulations of physical laws. For this reason the action invariance under rotations and translations of spatial coordinates and time translations is presumed.

The action, in particular, should be invariant under translations and rotations of the observer's coordinate system and time translations:

$$\tilde{x}^{i} = R^{i}_{j}x^{j} + C^{i}, \quad \underset{A}{\tilde{d}}{}^{i} = R^{i}_{j}\underset{A}{d}{}^{j}, \quad \tilde{t} = t + C, \tag{16}$$

wherein C^{i}, C are constants; R^{i}_{j} is an arbitrary orthogonal tensor.

The action invariance under spatial coordinates translations is known as the Galilean relativity principle. This principle is supplemented by the temperature displacement translational invariance (C' is an arbitrary constant):

$$\tilde{\theta} = \theta + C', \tag{17}$$

that is provided by the following condition

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\theta} = 0. \tag{18}$$

By the above reasons the Helmholtz free energy is a function of the variables

$$X\ ,\ \dot{\theta},\ \partial_{\sim}\theta, \tag{19}$$

and the following independent and invariant with respect to rotations of the spatial coordinate system arguments [3]:

$$g_{\sim} = g_{ij}(\partial_{\sim}x^{i})(\partial\ x^{j}), \quad \underset{A\sim}{R} = g_{ij}(\partial_{\sim}x^{i})\underset{A}{d}{}^{j}, \quad \underset{A\sim}{T} = g_{ij}(\partial_{\sim}x^{i})(\partial\ \underset{A}{d}{}^{j}). \tag{20}$$

Here g_{ij} is spatial metric tensor; $g_{\sim}$ is convective metric tensor.

It can be shown that (19) and (20) constitute a complete system of independent rotationally invariant argument of $\cdot$.

The completeness of the rotationally invariant arguments system given by (20) can be proved by means of the algebraic invariants theory considering the contravariant vectors

$$\partial_{\sim}x^{i},\ \underset{A}{d}{}^{j},\ \partial\ \underset{A}{d}{}^{j}. \tag{21}$$

A complete system of vectors invariants (21) consists of pairwise inner products, which leads to the rotational invariants (20).

This system of invariants also has all kind of 3×3-determinants, which are located in columns of various components of the Euler vector triples (21). It is clear that the determinants must contain at least one column of Euler component of strain gradient $\partial_{\sim} x^i$. The determinants calculation can be carried out using the Gram–Schmidt process, i.e. through the determinants, which are all kinds of internal products of Euler vectors arranged in columns basic determinants, and the metric coefficients $\overset{\circ}{g}_{\sim}$.

Assuming that the continuum is homogeneous, i.e.,

$$\partial^{expl} \mathscr{L} = 0 \qquad (\quad = 1,2,3), \tag{22}$$

and, consequently, all Lagrangian variables X are cyclic (neglected). We get the following rotationally-invariant form of the Helmholtz free energy, which satisfies the frame indifference principle: $(\mathrm{A}, \sim, \quad = 1,2,3)$

$$\cdot = \cdot (g_{\sim}, \underset{\mathrm{A}\sim}{R}, \underset{\mathrm{A}\sim}{T}, \dot{\mathrm{g}}, \partial_{\sim}\mathrm{g}). \tag{23}$$

We implicitly assume that the reduced form (23) should also depend on the referential metrics and referential position of d -vectors $\overset{\circ}{\underset{\mathrm{A}}{d}}{}^j$ $(\mathrm{A} = 1,2,3)$.

Thus one can conclude that mathematical models of modern metamaterials and their multiphysics behavior (including finite deformations and heat conduction) are formulated in the unified framework provided by thermomechanical field theory.

The present work was partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 15-31-21111) and the Ministry of Education and Science of Russia Federation grant given to Samara State Technical University (No. 16.2518.2014/K).

REFERENCES

1. Cosserat E. et F. Theorie des corps deformables. Paris: Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909. 226 pp.
2. Nowacki W. Theory of asymmetric elasticity. Oxford: Pergamon Press, 1986. 384 pp.Lamb H. On waves in an elastic plate. Proceedings of the Royal Society, SA, vol. 93, 1917.
3. Toupin R. A. Theories of elasticity with couple-stress // Archive for Rational Mechanics and Analysis. – 1964. – T. 17. – №. 2. – C. 85-112.
4. Green A.E., Naghdi P.M. On undamped heat waves in an elastic solid // J. Therm. Stress. 1992. Vol. 15. 253-264 pp.
5. Murashkin E. V., Radayev Y. N. On a classification of weak discontinuities in micropolar thermoelasticity // Materials Physics and Mechanics. – 2015. – T. 23. – C. 10-13.
6. Kovalev V.A., Radayev Y.N. Wave problems of field theory and thermomechanics. Saratov: Saratov University Press, 2010. 328 pp.

Information about authors

Vladimir Kovalev – Professor, Moscow City Government University of Management, 107045, Moscow, Sretenka Str., 28, Russia
E-mail vlad_koval@mail.ru
Evgenii Murashkin – Senior Researcher, A. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, 119526, Moscow, prosp. Vernadskogo 101, block 1, Russia
E-mail murashkin@ipmnet.ru
Yuri Radayev – Leading Researcher, A. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, 119526, Moscow, prosp. Vernadskogo 101, block 1, Russia
E-mail radayev@ipmnet.ru

ON HYPERBOLIC THERMOELASTIC WAVES IN A CYLINDRICAL WAVEGUIDE

Kovalev V.A., Radayev Y.N.

The present paper is devoted to problem of coupled hyperbolic thermoelastic waves propagation via a long cylindrical waveguide with circular cross-section. Sidewall of the waveguide is assumed free from tractions, insulated from or permeable to heat. The present study is carried out in the framework of coupled theory of type-III thermoelasticity (GNIII). The theory combines the both significant mechanisms of heat transfer known as thermodiffusion and propagating wave. Type-III generalized thermoelasticity includes classical thermoelasticity (GNI/CTE) and the theory of hyperbolic thermoelasticity (GNII) as limiting cases. Solution of the coupled GNIII-thermoelasticity equations satisfying the required boundary conditions is obtained. As an example, wavenumbers, displacement and thermal modes of the coupled type-III thermoelastic waves of a given azimuthal number are computed and visualized by the aid of Mathematica system. Sample numerical results for the coupled thermoelastic waves of the first and the seventh azimuthal numbers are presented. Real wavenumbers for the case of the hyperbolic thermoelastic propagating wave are localized. A numerical analysis of the coupled thermoelastic waves of the higher azimutal numbers is discussed. Numerics for thermoelastic waves of the 7th and 70th azimutal numbers are obtained.

1. Introductory remarks and requisite equations. Although much efforts have been put into theories of thermoelasticity, the scientific community has not yet accepted one approach and systematic studies especially of non-classical theories are going on worldwide. Bio first in 1956 [1] proposed a correct theory of coupled thermoelasticity by the methods of irreversible thermodynamics. The theory of thermoelasticity developed by Green and Naghdi [2] incorporates the approach based on the Fourier heat conduction law (usually referred to as GNI/CTE (conventional thermoelasticity)), the theory without energy dissipation (GNII) and a theory which allows finite wave propagation as well as energy dissipation (GNIII). Thermomechanical orthogonality in the nonlinear theory of type-III thermoelasticity is discussed in [3].

We start from recalling the constitutive laws of linearized variant of type-III thermoelasticity. One of them is the Duhamel-Neumann law which is formulated by the equation

$$\pm = 2\mu \pounds + (\lambda \mathrm{tr} \pounds - \alpha(\theta - \theta_0))\mathrm{f}\,, \qquad (1.1)$$

where we employ the following notations: $\pm$ for the stress tensor, $\pounds$ for the strain tensor, f for the three-dimensional unit tensor, λ, μ for the isothermal Lame parameters, α for the thermomechanical constant ($\alpha = \frac{1}{3}(3\lambda + 2\mu)\beta^*$), β^* for the coefficient of thermal expansion, θ for the absolute temperature, and θ_0 for the referential temperature.

The second one states that the heat flux vector $\mathbf{h}$ is a linear combination of the temperature displacement gradient and temperature gradient

$$\mathbf{h} = -\Lambda_* ď\theta - \Lambda ď\vartheta\,, \qquad (1.2)$$

where ϑ is the temperature displacement (the basic thermal state variable in GN theories), Λ_* is the thermal conductivity, Λ is the thermal conductivity rate, ď denotes the three-dimensional nabla operator.

Besides, the closed system of equations of linear type-III thermoelasicity includes:
the balance of momentum

$$ď \cdot \pm - \rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}\,, \qquad (1.3)$$

where $\mathbf{u}$ is the displacement vector, ρ is the mass density;
the entropy balance equation

$$\dot{s} + ď \cdot \boldsymbol{j} = \Sigma + \xi\,, \qquad (1.4)$$

where s is the entropy density per unit volume, $\boldsymbol{j}$ is the entropy flux vector, Σ is the external entropy production, $\xi > 0$ is the internal entropy production, or in another form

$$\theta\dot{s} + ď\cdot(\theta\boldsymbol{j}) = (ď\theta)\cdot\boldsymbol{j} + \theta(\Sigma+\xi)\,; \tag{1.5}$$

the balance of energy

$$-(\dot{\psi}+\theta\dot{s}) + \mathrm{tr}(\pm\cdot£) - \mathbf{h}\cdot\frac{ď\theta}{\theta} = \theta\xi\,, \tag{1.6}$$

where ψ is the Helmholtz free energy density per unit volume.

The following equations for the heat flux, internal entropy production and small strains are added to those given above:

$$\mathbf{h} = \theta\boldsymbol{j}\,, \tag{1.7}$$

$$\theta\xi = -\left(\boldsymbol{j} + \frac{\partial\psi}{\partial ď\vartheta}\right)\cdot ď\dot{\vartheta}\,, \tag{1.8}$$

$$2£ = ď\otimes\mathbf{u} + (ď\otimes\mathbf{u})^{\mathrm{T}}. \tag{1.9}$$

We shall use the notation θ for the temperature increment $\theta-\theta_0$. Let © denote heat capacity per unit volume at zero strains. Finally the equations of linear type-III thermoelasticity can be formulated as follows

$$\begin{gathered}\mu\Delta\mathbf{u} + (\lambda+\mu)ďď\cdot\mathbf{u} - \alpha ď\theta - \rho\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0},\\ \Delta\theta + \frac{\Lambda_*}{\Lambda}\Delta\dot{\theta} - \frac{\kappa}{\Lambda}\ddot{\theta} - \frac{\alpha}{\Lambda}ď\cdot\ddot{\mathbf{u}} = 0.\end{gathered} \tag{1.10}$$

In this equation the constants Λ, Λ_* and κ have been related to referential temperature θ_0. Symbol Δ designates the three-dimensional Laplace operator.

Equations (1.10) are very convenient when discriminating the limiting case of hyperbolic dissipationless type-II thermoelasticity (GNII) as $\Lambda_* \to 0$ from the conventional thermoelasticity (GNI/CTE) as $\Lambda \to 0$.

Problem of propagation of harmonic type-III thermoelastic wave via a waveguide requires the equations (1.10) have to be resolved inside infinite circular cylinder of radius R. The equations (1.10) are to be complemented by boundary conditions on the sidewall of waveguide.

The first of boundary conditions expresses the fact that the sidewall is free from tractions

$$\mathbf{n}\cdot\pm = 0\,. \tag{1.11}$$

The second is the linear law of convective heat exchanging on the sidewall

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{h} = \sigma(\theta-\theta_{\mathrm{env}})\,, \tag{1.12}$$

where σ is the thermoexchange coefficient, θ_{env} is the environmental temperature, $\mathbf{n}$ is the outward unit normal vector. In the following discussion the equality $\theta_0 = \theta_{\mathrm{env}}$ is assumed.

2. Displacement vector and temperature in propagating thermoelastic wave. Solution of equations (1.10) in the form of propagating harmonic thermoelastic wave satisfying boundary conditions (1.11) and (1.12) on the sidewall can be obtained by separation of variables in the co-ordinates of the circular cylinder r, φ, z. Omitting details (see [4] for the comprehensive study) we give the final formulae for displacements and temperature in a propagating type-III thermoelastic wave

$$u_r = \left[C_1(p_1^2 - g^2)\left(\frac{n}{r} I_n(p_1 r) + p_1 I_{n+1}(p_1 r) \right) + C_2(p_2^2 - g^2)\left(\frac{n}{r} I_n(p_2 r) + p_2 I_{n+1}(p_2 r) \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{n}{r} C_5 I_n(q_2 r) \pm ik\left(C_3 \frac{2n}{q_2 r} + (C_3 - C_4) I_{n+1}(q_2 r) \right) \right] \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz - i\omega t},$$

$$u_\varphi = \left[\pm ik\left(C_3 \frac{2n}{q_2 r} + (C_3 + C_4) I_{n+1}(q_2 r) \right) + C_5\left(\frac{n}{r} I_n(q_2 r) + q_2 I_{n+1}(q_2 r) \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{n}{r}\Big((p_1^2 - g^2) I_n(p_1 r) + C_2(p_2^2 - g^2) I_n(p_2 r) \Big) \right] \begin{Bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz - i\omega t},$$

$$u_z = \left[\pm ik\Big((p_1^2 - g^2) I_n(p_1 r) + C_2(p_2^2 - g^2) I_n(p_2 r) \Big) + (C_3 + C_4) q_2 I_n(q_2 r) \right] \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz - i\omega t},$$

$$\theta = \frac{h\omega\alpha}{\Lambda_*}\left[C_1(k^2 - p_1^2) I_n(p_1 r) + C_2(k^2 - p_2^2) I_n(p_2 r) \right] \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz - i\omega t}.$$

In these formulae n is the azimuthal number, k is the wavenumber, $p_j^2 = k^2 - \gamma_j^2$,

$$\frac{2\gamma^2}{k_\parallel^2} = \frac{ih_3^2 - h_1^2 + \sqrt{(ih_3^2 - h_1^2)^2 + 4h_2^2(ih_3^2 - 1)}}{ih_3^2 - 1},$$

$$h = h_3^2 \frac{1 + ih_3^2}{1 + h_3^4}, \quad h_1^2 = 1 + h_2^2 + \frac{\alpha^2}{\rho\Lambda}, \quad h_2^2 = \frac{c_l^2}{l^2}, \quad h_3^2 = \frac{\Lambda_*\omega}{\Lambda}, \quad \frac{1}{l} = \frac{\kappa}{\Lambda}, \quad g^2 = k^2 - \frac{hh_2^2}{h_3^2} k_\parallel^2,$$

$k_\parallel$ is the wavenumber of the longitudinal elastic wave (*P*-wave), $k_\perp$ is the wavenumber of the shear wave (elastic *S*-wave), $C_1 - C_5$ are arbitrary constants. I_n designates the modified Bessel function of the integer order.

3. Determinant equation for coupled thermoelastic wave of an arbitrary azimuthal number. Arbitrary constants $C_1 - C_5$ in the representations of $u_r, u_\varphi, u_z, \theta$ are determined by the boundary conditions (1.11) and (1.12) which can be rewritten for the sidewall of circular cylinder as

$$r = R: \qquad \sigma_{rr} = 0, \quad \sigma_{r\varphi} = 0, \quad \sigma_{rz} = 0; \tag{3.1}$$

$$r = R: \qquad \Lambda \frac{\partial \theta}{\partial r} + \Lambda_* \frac{\partial \dot\theta}{\partial r} + \sigma\dot\theta = 0. \tag{3.2}$$

Substitution of $u_r, u_\varphi, u_z, \theta$ in (3.1) and (3.2) and taking account of the calibrating equation lead to a 5×5 system of linear algebraic equations

$$D_{ij} C_j = 0. \tag{3.3}$$

The coefficients D_{ij} are obtained as a result of rather lengthy symbolic computations:

$$D_{11} = \frac{1}{k^2 - q_1^2}(p_1^2 - g^2)\Big((n^2 - n + p_1^2) I_n(p_1) - p_1 I_{n+1}(p_1) \Big) + \frac{(2q_1^2 - q_2^2 - k^2)(p_1^2 - g^2)}{(k^2 - q_1^2)(k^2 - q_2^2)} \times$$

$$\times\Big((n - n^2 - k^2) I_n(p_1) + p_1 I_{n+1}(p_1) \Big) - hs_*^2(k^2 - p_1^2) I_n(p_1),$$

$$D_{12} = \frac{1}{k^2 - q_1^2}(p_2^2 - g^2)\Big((n^2 - n + p_2^2) I_n(p_2) - p_2 I_{n+1}(p_2) \Big) + \frac{(2q_1^2 - q_2^2 - k^2)(p_2^2 - g^2)}{(k^2 - q_1^2)(k^2 - q_2^2)} \times$$

$$\times\Big((n - n^2 - k^2) I_n(p_2) + p_2 I_{n+1}(p_2) \Big) - hs_*^2(k^2 - p_2^2) I_n(p_2),$$

$$D_{13} = \mp ik \frac{2}{k^2 - q_2^2} \left(\frac{2n^2 - 2n + q_2^2}{2n} (I_{n-1}(q_2) - I_{n+1}(q_2)) + (n-1) I_{n+1}(q_2) \right),$$

$$D_{14} = \mp ik \frac{2}{k^2 - q_2^2} \left(-q_2 I_n(q_2) + (n+1) I_{n+1}(q_2) \right),$$

$$D_{15} = \mp ik \frac{2}{k^2 - q_2^2} \left((n^2 - n) I_n(q_2) + q_2 n I_{n+1}(q_2) \right),$$

$$D_{21} = 2(p_1^2 - g^2) \left((n - n^2) I_n(p_1) - n p_1 I_{n+1}(p_1) \right),$$

$$D_{22} = 2(p_2^2 - g^2) \left((n - n^2) I_n(p_2) - n p_2 I_{n+1}(p_2) \right),$$

$$D_{23} = \pm ik \left(\frac{4n^2 - 4n + q_2^2}{2n} (I_{n-1}(q_2) - I_{n+1}(q_2)) + (2n-2) I_{n+1}(q_2) \right),$$

$$D_{24} = \pm ik \left(q_2 I_n(q_2) - (2n-2) I_{n+1}(q_2) \right),$$

$$D_{25} = (2n - 2n^2 - q_2^2) I_n(q_2) + 2 q_2 I_{n+1}(q_2),$$

$$D_{31} = \pm 2ik (p_1^2 - g^2) \left(n I_n(p_1) + p_1 I_{n+1}(p_1) \right),$$

$$D_{32} = \pm 2ik (p_2^2 - g^2) \left(n I_n(p_2) + p_2 I_{n+1}(p_2) \right),$$

$$D_{33} = \frac{2k^2 + q_2^2}{2} (I_{n-1}(q_2) - I_{n+1}(q_2)) + (k^2 + q_2^2) I_{n+1}(q_2),$$

$$D_{34} = -n q_2 I_n(q_2) - (k^2 + q_2^2) I_{n+1}(q_2),$$

$$D_{35} = \pm ikn I_n(q_2),$$

$$D_{41} = (k^2 - p_1^2) \left(n I_n(p_1) + p_1 I_{n+1}(p_1) \right) + h_7 (k^2 - p_1^2) I_n(p_1),$$

$$D_{42} = (k^2 - p_2^2) \left(n I_n(p_2) + p_2 I_{n+1}(p_2) \right) + h_7 (k^2 - p_2^2) I_n(p_2),$$

$$D_{43} = 0, \quad D_{44} = 0, \quad D_{45} = 0, \quad D_{51} = 0, \quad D_{52} = 0, \quad D_{53} = q_2,$$

$$D_{54} = q_2, \quad D_{55} = \pm ik.$$

Hereafter the notations $q_1^2 = k^2 - k_\parallel^2$, $s_*^2 = \frac{\alpha^2}{\rho \Lambda_*}$, $h_4^2 = \frac{\alpha^2 R}{\rho \Lambda_* c_l}$ and dimensionless constants

$h_5^2 = h_6^2 \widetilde{k}_\parallel$, $h_6^2 = \frac{\sigma c_l}{\Lambda}$, $h_7^2 = \frac{i h_5^2}{1 + i h_3^2}$, $\widetilde{s}_* = \frac{s_*}{\sqrt{\omega}}$, $\widetilde{k}_\parallel = k_\parallel R$, $\widetilde{p}_j = p_j R$, $\widetilde{q}_j = q_j R$, $h_0^2 = \frac{\Lambda_* c_l}{\Lambda R}$ are used. The superimposed widetilde symbol will be omitted. The dimensionless constants h_0, h_2, h_4, h_6, $\frac{k_\perp}{k_\parallel} = \frac{c_l}{c_t} > \sqrt{2}$ can be varied independently. Their values do not depend on frequency. The sixth dimensionless constant $\widetilde{k}_\parallel$ we treat as dimensionless frequency.

The linear system (3.3) has a non-trivial solution if and only if the determinant $D = \det(D_{ij})$ equals zero. Thus we can formulate the determinant equation

$$D = 0. \quad (3.4)$$

We employ *Mathematica* computation system to deal with the equation (3.4).

4. Localization of complex wavenumbers for the coupled thermoelastic wave. A number of complex roots of the determinant equation (3.4) when $n = 1$ has been localized by the aid of *Mathematica*. For example, the four roots (when “dimensionless frequency” $k_\parallel = 0.1$)

$$-0.011814 + 6.085313i, \quad -0.19 - 3.39887\times 10^{-18} i,$$
$$1.98107\times 10^{-13} + 2.81428i, \quad 1.71312\times 10^{-14} + 0.456983i$$

are computed for given values of the independent dimensionless ratios:

$$h_0 = \sqrt{\frac{\Lambda_* c_l}{\Lambda R}} = 0.1, \quad h_2 = \frac{c_l}{l} = 100.0, \quad h_4 = \alpha\sqrt{\frac{R}{\rho\Lambda_* c_l}} = 0.01, \quad h_6 = \sqrt{\frac{\sigma c_l}{\Lambda}} = 1.1, \quad \frac{c_l}{c_t} = 1.9.$$

The complex wavenumber
$k = 0.35813631327764267 + 0.13995345934802972i$.
can be numerically localized for the same values of dimensionless frequency and ratios considering the thermoelastic wave of the seventh $n = 7$ azimuthal number.

Localization of the thermoelastic wavenumbers on complex plane k becomes much more difficult problem as the azimuthal number n of thermoelastic wave is increasing. This problem is still not completely solved for azimuthal numbers exceeding $n = 250$ due to direct computations in *Mathematica* shows that the determinant D has very small values (approximately 10^{-295}) near the co-ordinate origin if the independent dimensionless ratios have those values assigned previously. For this reason, for instance, the D-determinant zero isolines are not plotted by *Mathematica*.

However using a special decomposition of the determinant D makes it possible to plot to some extent the zero isoline curves for propagating thermoelastic wave of the 70th azimuthal number while scaling the complex determinant D by the factor 10^{300}. Even more accurate computations demonstrates that the zero isolines of D densely cover the considered domain of complex plane and are characterized by a chaotic geometry.

REFERENCES

1. Biot M.A. Thermoelasticity and irreversible thermodynamics. //J. Appl. Phys. 1956. Vol. 27(3). Pp. 240-253.
2. Green A.E., Naghdi P.M. On undamped heat waves in an elastic solid. //J. Thermal Stresses. 1992. Vol. 15. Pp. 253-264.
3. Kovalev V.A., Radayev Y.N. Thermomechanical orthogonality in nonlinear type-III thermoelasticity. //Izvestiya Saratovskogo Universiteta. 2012. Vol.12. №3. Pp. 72-82 (in Russian).
4. Kovalev V.A., Radayev Y.N. Wave Problems of Field Theory and Thermomechanics. Saratov State University Publisher. 2010 (in Russian).

Information about authors:

Kovalev Vladimir – Prof., Moscow City Government University of Management
E-mail: kovalev@migm.ru

Radayev Yuri – Prof., Leading Researcher, Institute for Problems in Mechanics of Russian Academy of Sciences, +7 495 4343592
E-mail: radayev@ipmnet.ru

SHEAR WAVES IN A LAYERED ANISOTROPIC WAVEGUIDE

Papyan A.A.

Based on the constitutive model and the equations of anisotropic elastic body of monoclinic symmetry the shear wave propagation in a bilayer waveguide is studied. The waveguide consists of two layers made from different elastic anisotropic materials of monoclinic symmetry. For waveguide with traction free or clamped walls the corresponding dispersion equations are obtained. The analytical and numerical stimulations are presented.

Shear wave propagation problems are studied in numerous works, particularly in [1, 3, 4, 6]. Effects of localization in the vicinity of free edges of elastic body and resonance vibrations are considered in [2, 3, 4]. In [3] the problem of propagation of shear horizontal waves is studied in bilayer isotropic elastic waveguide. Here the propagation problems of shear horizontal waves are studied in waveguide consisting of two layers made from different elastic anisotropic materials of monoclinic symmetry.

The problem of propagation for shear horizontal wave in bilayer waveguide is studied. The waveguide consists of two layers made from different anisotropic materials of monoclinic symmetry. The thickness of first layer is a the second is b.

We consider antiplane problem, the components of displacement are presented in the following way [5].

$$u^{(i)} = v^{(i)} = 0, \quad w^{(i)} = w^{(i)}(x, y, t) \tag{1}$$

Hereafter index $i = 1, 2$ stand for materials of the first and the second layers.

For monoclinic anisotropic materials stresses can be written as [5].

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(i)}(x, y, t) &= C_{55}^{(i)} \frac{\partial w^{(i)}}{\partial x} + C_{45}^{(i)} \frac{\partial w^{(i)}}{\partial y} \\ \sigma_y^{(i)}(x, y, t) &= C_{45}^{(i)} \frac{\partial w^{(i)}}{\partial x} + C_{44}^{(i)} \frac{\partial w^{(i)}}{\partial y} \end{aligned} \tag{2}$$

where $C_{44}^{(i)}, C_{55}^{(i)}, C_{45}^{(i)}$ – are the elastic constants.

The equations of motion without body forces have the following form

$$\frac{\partial \sigma_x^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^{(i)}}{\partial y} = \rho^{(i)} \frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial t^2} \tag{3}$$

Inserting (2) into (3), we come to

$$C_{55}^{(i)} \frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial x^2} + 2C_{45}^{(i)} \frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial x \partial y} + C_{44}^{(i)} \frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial y^2} - \rho^{(i)} \frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial t^2} = 0 \tag{4}$$

Here $\rho^{(i)}$ – are the bulk densities of layer materials.

On the walls of the waveguide we take the two alternative types of boundary conditions:

Traction free conditions:

$$\text{a)} \quad \begin{aligned} y = -a, \quad \sigma_y^{(1)} = 0 \\ y = b, \quad \sigma_y^{(2)} = 0 \end{aligned} \quad , \tag{5}$$

Clamped and free traction conditions

$$\text{b)} \quad \begin{aligned} y = -a, \quad w^{(1)} = 0 \\ y = b, \quad \sigma_y^{(2)} = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

The boundary conditions must be considered together with contact conditions of displacements and stress continuities y on the material separation line $y = 0$

$$w^{(1)} = w^{(2)} \ , \quad \sigma_y^{(1)} = \sigma_y^{(2)} \tag{7}$$

Presenting the solutions of the problem under consideration in the form of plane wave

$$w^{(i)}(x, y, t) = f_{(i)}(y) \exp i(\omega t - kx) \tag{8}$$

we get the following equations related to wave amplitudes

$$f_{(i)}(y) - 2ik\frac{C_{45}^{(i)}}{C_{44}^{(i)}} f_{(i)}(y) - \left(k^2\frac{C_{45}^{(i)}}{C_{44}^{(i)}} + \frac{\rho^{(i)}\omega^2}{C_{44}^{(i)}}\right) f_{(i)}(y) = 0 \tag{9}$$

The solutions of differential equation (9) can be written in the form:

$$f_{(i)}(y) = \exp(\alpha_i i\,k)\left\{c_{1i}\sin\left(p_{(i)}y\right) + c_{2i}\cos\left(p_{(i)}y\right)\right\} \tag{10}$$

where the following notations are used

$$\alpha_{(i)} = \frac{C_{45}^{(i)}}{C_{44}^{(i)}}, \qquad p_{(i)} = \sqrt{\frac{\rho^{(i)}\omega^2}{C_{44}^{(i)}} - \frac{C_{55}^{(i)}C_{44}^{(i)} - C_{44}^{(i)2}}{C_{44}^{(i)2}}k^2},\ \ i = 1,\ 2 \tag{11}$$

Satisfying the solutions to the boundary and contact conditions (5, 6, 7) we'll get a simultaneous sets of algebraic equations with respect to the arbitrary constants c_{1i}, c_{2i} . From the solvability condition of these simultaneous sets the dispersion equations can be obtained by equating the determinants of these simultaneous sets to zero.

The equation (12) corresponds to the displacements functions of the first and the second layers in the case of traction free wall boundary conditions.

$$w^{(1)}(x,y,t) = C_1\exp(\alpha_1 i\,ky)\left\{\sin\left(p_{(1)}y\right) + \mathrm{ctg}\left(p_{(1)}a\right)\cos\left(p_{(1)}y\right)\right\}\exp i(\omega t - kx)\,, \tag{12}$$

$$w^{(2)}(x,y,t) = C_1\exp(\alpha_2 i\,ky)\left\{\frac{p_{(1)}}{p_{(2)}}\sin\left(p_{(2)}y\right) + \mathrm{ctg}\left(p_{(1)}a\right)\cos\left(p_{(2)}y\right)\right\}\exp i(\omega t - kx)$$

The equation (13) is the dispersion equation according to the case of the traction free wall boundary conditions

$$\frac{\sqrt{\eta^2 - k^2a^2\theta^2}}{\beta\gamma\sqrt{\frac{\alpha^2}{\gamma^2}\eta^2 - k^2a^2\theta^2}}\,\mathrm{tg}\left(\xi\sqrt{\eta^2 - k^2a^2\theta^2}\right) = -\mathrm{tg}\left(\beta\xi\gamma\chi\sqrt{\frac{\alpha^2}{\gamma^2}\eta^2 - k^2a^2\theta^2}\right) \tag{13}$$

The corresponding equations for the displacement functions and dispersion equation according to the case of the clamped wall boundary conditions are the following

$$w^{(1)}(x,y,t) = C_1\exp(\alpha_1 i\,ky)\left\{\sin\left(p_{(1)}y\right) + \mathrm{tg}\left(p_{(1)}a\right)\cos\left(p_{(1)}y\right)\right\}\exp i(\omega t - kx)\,,$$

$$w^{(2)}(x,y,t) = C_1\exp(\alpha_2 i\,ky)\left\{\frac{p_{(1)}}{p_{(2)}}\sin\left(p_{(2)}y\right) + \mathrm{tg}\left(p_{(1)}a\right)\cos\left(p_{(2)}y\right)\right\}\exp i(\omega t - kx) \tag{14}$$

$$\frac{\sqrt{\eta^2 - k^2a^2\theta^2}}{\beta\gamma\sqrt{\frac{\alpha^2}{\gamma^2}\eta^2 - k^2a^2\theta^2}}\,\mathrm{ctg}\left(\xi\sqrt{\eta^2 - k^2a^2\theta^2}\right) = \mathrm{tg}\left(\beta\gamma\xi\chi\sqrt{\frac{\alpha^2}{\gamma^2}\eta^2 - k^2a^2\theta^2}\right) \tag{15}$$

Here the following notations are used

$$\beta^2 = \frac{C_{55}^{(1)}C_{44}^{(2)}}{C_{55}^{(2)}C_{44}^{(1)}},\quad \alpha^2 = \frac{c_1^2}{c_2^2},\quad \gamma = \frac{\left(C_{55}^{(2)}C_{44}^{(2)} - C_{45}^{(2)2}\right)C_{55}^{(1)}C_{44}^{(1)}}{\left(C_{55}^{(1)}C_{44}^{(1)} - C_{45}^{(1)2}\right)C_{55}^{(2)}C_{44}^{(2)}},$$

$$\eta^2 = \frac{\rho_{(1)}\omega^2}{k^2C_{44}^{(1)}},\quad \xi = \frac{C_{55}^{(1)}}{C_{44}^{(1)}},\quad \theta = \frac{C_{55}^{(1)}C_{44}^{(1)} - C_{45}^{(1)2}}{C_{55}^{(1)}C_{44}^{(1)}},\quad \chi = \frac{b}{a}$$

From solutions of the dispersion equations (13, 15) the relative thickness χ of layers can be chosen in such way that these equations would have the simple simultaneous analytical solutions, which can be defined from the equations.

Case a)

$$\mathrm{tg}\left(\xi\sqrt{\eta^2-k^2a^2\theta^2}\right)=0$$

$$\mathrm{tg}\left(\beta\gamma\xi\chi\sqrt{\frac{\alpha^2}{\gamma^2}\eta^2-k^2a^2\theta^2}\right)=0\,.$$

Equating solutions of these equations (frequencies) we'll get the conditions for the relative thickness of layers in the following form.

$$\chi=\frac{\pi n}{\alpha\beta\sqrt{(\pi m)^2+k^2a^2\xi^2\theta^2\left(1-\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\right)}} \tag{16}$$

Case b)

$$\chi=\frac{\pi n}{\alpha\beta\sqrt{\frac{\left(\pi(2m+1)\right)^2}{4}+k^2a^2\xi^2\theta^2\left(1-\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\right)}} \tag{17}$$

where n, m are integer numbers.

The dispersion equations (13) and (15) have two types of solution, solutions satisfying both conditions

$\eta^2>\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\theta^2$ or $\eta^2\le\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\theta^2$.

The dispersion equations (13) and (15) have solutions satisfying $\eta^2>\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\theta^2$ (natural oscillations), and $\eta^2\le\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\theta^2$ (localized vibration at a free edge). The frequency of localized vibrations with increasing of ka increases and in the case of $ka=K$ can coincide with the frequency of natural oscillations in the which can be reason of an vibration inner resonance of bilayer waveguide.

Numerical results.

For numerical calculations, the following mechanical property data is used [6] for the bilayer waveguide materials

$C_{55}^{(1)}=57.94\times10^9\,N/m^2$ $C_{44}^{(1)}=39.88\times10^9\,N/m^2$

$C_{45}^{(1)}=-17.91\times10^9\,N/m^2$ $\rho^{(1)}=2649kg/m^3$

$C_{55}^{(2)}=94\times10^9\,N/m^2$ $C_{44}^{(2)}=93\times10^9\,N/m^2$

$C_{45}^{(2)}=-11\times10^9\,N/m^2$ $\rho_1=7450kg/m^3$

In the case of given elastic constants, from (16) and (17) equations we can determine calculate the values of the ratio of layers thickness depending on m, n, ka

In the Tab.1 the relative thicknesses of layer are presented based on (16) and (17) for the cases admitting the exact analytical solutions for waveguide

n	*m*	*ka*	Ratio $\chi=b/a$ according to (16)	Ratio $\chi=b/a$ according to according to (17)
1	1	1	0.61	0.41
1	2	1	0.31	0.25
3	2	1	0.94	0.75
1	1	0.5	0.62	0.42
1	2	0.5	1.25	0.84

Table 1. The relative thicknesses data

For the fixed χ and the elastic constants in the case of $(ka)=1$, let's find the frequency of natural oscillation, the minimum value of η which satisfy the condition $\eta^2 > \frac{\gamma^2}{\alpha^2}\theta^2$.

We demand that the frequency of natural oscillations will coincide with the frequency of localized vibrations for some values of parameter (ka), which will be determined from the following equations

$$\frac{\sqrt{\eta^2 - k^2a^2\theta^2}}{\beta\gamma\sqrt{k^2a^2\theta^2 - \frac{\alpha^2}{\gamma^2}\eta^2}} \operatorname{tg}\left(\xi\sqrt{\eta^2 - k^2a^2\theta^2}\right) = \operatorname{th}\left(\beta\xi\gamma\chi\sqrt{k^2a^2\theta^2 - \frac{\alpha^2}{\gamma^2}\eta^2}\right) \quad (18)$$

$$\frac{\sqrt{\eta^2 - k^2a^2\theta^2}}{\beta\gamma\sqrt{k^2a^2\theta^2 - \frac{\alpha^2}{\gamma^2}\eta^2}} \operatorname{ctg}\left(\xi\sqrt{\eta^2 - k^2a^2\theta^2}\right) = \operatorname{tg}\left(\beta\gamma\xi\chi\sqrt{k^2a^2\theta^2 - \frac{\alpha^2}{\gamma^2}\eta^2}\right) \quad (19)$$

In the Table 2 are presented the frequencies of the natural oscillations and localized vibrations η_1, η_2 as well as dimensionless values of wavelength $(ka)^*$, $(ka)^/$ under which the frequencies of natural oscillations and the frequencies of localized vibrations are coincide. The two data are presented correspond to case a) (equations (13, 18)) and to case b) (equations (15, 19)). Here $(ka)^*$ stands for natural oscillation wavelength $(ka)^/$ for localized vibration wavelength

χ	η_1 according to (13)	$(ka)^/$ in the case when $\eta_{loc} = \eta_1$ according to (18)	η_2 according to (15)	$(ka)^/$ in the case when $\eta_{loc} = \eta_2$ according to (19)
0.33	4.56	3.87	3.54	3.55
0.16	4.96	4.41	3.78	2.94
0.07	5.16	4.72	3.92	4.06
3.00	3.75	3.90	6.02	5.27
0.10	5.09	4.61	6.32	5.28

Table 2. The frequency of natural oscillations and localized vibrations $(ka)^/$, η_1, η_2 – the minimal frequency of the natural oscillations, η_{loc} - the frequency of the localized vibration ($(ka)^* = 1$)

From the data of Table 2 it follows that exist such value of parameter of $(ka)^/$ under which the frequency of natural oscillations coincide with the frequency of localized vibrations.

Conclusion.

For the problem of the horizontal shear wave of propagation in the anisotropic bilayer waveguide for the two cases on waveguide wall boundary conditions the analytical and numerical analysis of dispersion equations are carried out. As a result it is shown that for bilayer waveguide the effect of vibration inner resonance is possible when the frequencies of natural and localized vibrations are coincide.

This research was supported by the State Committee of Science of Armenia Grant No. SCS 115T-2C031.

REFERENCES

1. McHale, G.; Newton, M.I.; Matin, F. Layer guided shear horizontally polarized acoustic plate modes // Appl. Phys. Lett. 2002, 91, pp.5735–5744.
2. Вильде М.В., Каплунов Ю.Д., Коссович Л.Ю. Краевые и интерфейсные резонансы явления в упругих телах // М.: Физматлит, 2010. 280с.
3. Newton M.I., Mchale G., Martin F., Gizeli E. Meizak R.F. Generalized Love waves // Europhysics letters. 2002. V.58. №6. P.818-822.
4. Белубекян В.М., Белубекян М.В. Резонансные и локализованные сдвиговые колебания в слое с прямоугольным поперечным сечением // Доклады НАН Армении. 2015. Т.115. №. С.40-43.
5. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела (2-е изд.) М.: Наука, 1977. 416с.
6. A. Chattopadhyay, S. Gupta, S.A. Sahu, A.K. Singh. Dispersion equation of magnetoelastic shear waves in irregular monoclinic layer // Appl. Math. Mech. -Engl. Ed. 32 (5), 571–586 (2011).

Information about authors:

Papyan Ararat – PhD in Mechanics, Department on Dynamics of Deformable Systems and Coupled Fields, Institute of Mechanics, National Academy of Sciences of Armenia, (374 10) 35 43 11, (374 93) 05 00 93.
E-mail: aro088@mail.ru

CONTROL OF SH WAVES IN A PIEZOELECTRIC PERIODIC WAVEGUIDE WITH A LINE DEFECT

Piliposyan D.G.

The paper investigates coupled electro-elastic waves propagating along a piezoelectric finite width waveguide consisting of same piezoelectric layers separated by metallized interfaces and arranged in a periodic way along the guide with a line defect. An analytical expression for the transmission coefficient is found that can be used to accurately detect and control the position of the passband within a stopband.

1. Introduction

In order to control the frequency band structure, including the location and bandwidth of stopbands, tunable periodic structures can be designed by introducing defect layers into the structure, changing the geometry and altering the elastic characteristics of these inclusions [1-2]. In this paper, we propose a novel tunable phononic waveguide with a defect mode made by inserting a dielectric layer into a piezoelectric waveguide with metalized interfaces. The Sylvester theorem allows us to find an analytical formula for the reflection/transmission coefficient which can be used to easily modify different parameters, the number of layers and develop a tunable phononic waveguide.

2. The statement of the problem

We investigate the reflection/transmission properties of a finite stack of cells in a piezoelectric waveguide by coupling the wave fields in neighbouring layers via a matrix propagator. We consider a structure consisting of a stack of M cells, each containing a pair of layers a_j, j= 1,2 made from different piezoelectric crystals and one additional single layer, thus 2M+1 layers altogether. On each side the waveguide has two infinite piezoelectric substrates made from material 2 (Fig 1.).

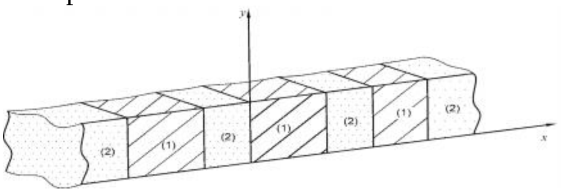


Fig. 1. Periodic waveguide with the unit cell made froim two piezoelectric media.

For an anti-plane problem the interconnected elastic and electro-magnetic excitations in a transversely isotropic piezoelectric crystal are described by the following equations for u_z, E_x, E_y, H_z

$$\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y}=\rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2},\ \sigma_{xz}=c_{44}\frac{\partial u_z}{\partial x}-e_{15}E_x,\ \sigma_{yz}=c_{44}\frac{\partial u_z}{\partial y}-e_{15}E_y, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=-\mu_{33}\frac{\partial H_z}{\partial t},\ -\frac{\partial H_z}{\partial x}=\frac{\partial D_y}{\partial t},\ \frac{\partial H_z}{\partial y}=\frac{\partial D_x}{\partial t}, \tag{2.2}$$

$$D_x=e_{15}\frac{\partial u_z}{\partial x}+\varepsilon_{11}E_x,\quad D_y=e_{15}\frac{\partial u_z}{\partial y}+\varepsilon_{11}E_y, \tag{2.3}$$

where u_z is the displacement, σ_{ik} the stress tensor, D_x, D_y and E_x, E_y the electric displacements and electric field intensities, and H_z the magnetic field intensity, ρ, c_{44}, e_{15}, ε_{11} and μ_{33} are the mass density, the elastic, piezoelectric, dielectric and magnetic constants respectively. The mass density ρ, the elastic, piezoelectric and dielectric constants c_{jk}, e_{jk} and ε_{jk} are piecewise continuous functions with a period β. Harmonic time dependence, $\exp(i\omega t)$ for the all physical variables with ω as wave angular frequency is assumed henceforth. We assume that waves propagate in the (*x*,*y*) plane. Taking notations $H = i\omega H_0$, $u_z = u$ the system of equations (1.1)-(1.3) can be reduced to the following uncoupled system of equations for $H_0(x)$ and $u(x)$

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} - p^2u(x) + \omega^2\frac{\rho}{G}u(x) = 0, \quad \frac{d^2H(x)}{dx^2} - p^2H(x) + \omega^2\varepsilon_{11}\mu_{33}H(x) = 0, \tag{2.4}$$

$$\sigma_{xz}(x) = Gu'(x) + \frac{e_{15}p}{\varepsilon_{11}}H(x), \quad \sigma_{yz}(x) = Gpu(x) + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}H'(x), \tag{2.5}$$

$$E_x = -i\frac{e_{15}u'(x) + pH(x)}{\varepsilon_{11}}, \quad E_y(x) = -i\frac{e_{15}pu(x) + H'(x)}{\varepsilon_{11}}. \tag{2.6}$$

The solutions of $u(x)$, $H(x)$ and $\sigma_{xz}(x)$, $E_y(x)$ in the m^{th} cell have the following form

$$\begin{pmatrix} u_{(m)}(x) \\ \sigma_{xz(m)}(x) \\ H_{(m)}(x) \\ E_{y(m)}(x) \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i}Gq \\ 0 \\ ep/\varepsilon \end{pmatrix}e^{\mathrm{i}q(x-m\beta)} + B\begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i}Gq \\ 0 \\ ep/\varepsilon \end{pmatrix}e^{-\mathrm{i}q(x-m\beta)} + C\begin{pmatrix} 0 \\ -e^2p/\varepsilon \\ 1 \\ -\mathrm{i}e^2s/\varepsilon \end{pmatrix}e^{\mathrm{i}s(x-m\beta)} + D\begin{pmatrix} 1 \\ -e^2p/\varepsilon \\ 1 \\ \mathrm{i}e^2s/\varepsilon \end{pmatrix}e^{-\mathrm{i}s(x-m\beta)}. \tag{2.7}$$

For continuity of wave fields between layers the matrix propagator can be constructed directly. The electrically shorted case however cannot be obtained from this as a particular case since the amplitudes at interfaces will become connected via degenerate matrices which cannot be inverted. To get around this problem electrically shorted boundary conditions

$$E_y^{(1)}(x) = 0, \; E_y^{(2)}(x) = 0, \tag{2.8}$$

at the interfaces $x = (m+1)\beta - a_1$ between two layers (*m*,1) and (*m*,2) (the same at the interface (*m*,2)/ (*m*+1,1)) can be incorporated into the continuity boundary conditions for displacements and stresses

$$\begin{pmatrix} u^{(1)}(x) \\ \sigma_{xz}^{(1)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^{(2)}(x) \\ \sigma_{xz}^{(2)}(x) \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

and all the parameters apart from *p* have superscripts (*j*) which are omitted and (*j*=1,2) correspond to the material number in the unit cell. We will investigate the transmission properties only of acoustic waves since the piezoelectric effect does not have a noticeable effect on electromagnetic waves. From (2.8) the amplitudes $C^{(j)}$ and $D^{(j)}$ in the expression for $E_y^{(j)}(x)$ can be expressed via the amplitudes $A^{(j)}$ and $B^{(j)}$ in the following way:

$$\begin{pmatrix} C^{(1)} \\ D^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_+^{(1)}e^{\mathrm{i}a_1(s^{(1)}-q^{(1)})} & \eta_-^{(1)}e^{\mathrm{i}a_1(s^{(1)}+q^{(1)})} \\ -\eta_-^{(1)} & -\eta_+^{(1)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{(1)} \\ B^{(1)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C^{(2)} \\ D^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_+^{(2)}e^{\mathrm{i}\beta(s^{(2)}-q^{(1)})} & \eta_-^{(2)}e^{\mathrm{i}\beta(s^{(2)}+q^{(1)})} \\ -\eta_-^{(2)}e^{-\mathrm{i}a_1(s^{(2)}+q^{(1)})} & -\eta_+^{(2)}e^{-\mathrm{i}a_1(s^{(2)}-q^{(1)})} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{(2)} \\ B^{(2)} \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

$$\eta_\pm^{(j)} = \frac{ip(1 - e^{ia_j(s^{(j)} \pm q^{(j)})})}{s^{(j)}(e^{2ia_js^{(j)}} - 1)}.$$

The amplitudes $C^{(j)}$ and $D^{(j)}$ will be eliminated by substituting (2.10) into the expression for $\sigma_{xz}^{(j)}(x)$ in the boundary conditions .(2.9). Formulae (2.9) will have only the incident and reflected amplitudes $A^{(j)}$ and $B^{(j)}$ of a coupled elasto-electric wave. Using the modified boundary conditions (2.9) a 2×2 unimodular transfer matrix coupling the amplitudes of forward and backward travelling waves $A_m^{(1)}$ and $B_m^{(1)}$ in a_1 layers of the two neighbouring cells (*m*) and (*m*+1) can be constructed as follows:

$$\begin{pmatrix} A_m^{(1)} \\ B_m^{(1)} \end{pmatrix} = \mathrm{S} \begin{pmatrix} A_{m+1}^{(1)} \\ B_{m+1}^{(1)} \end{pmatrix}, \ \mathrm{S} = \mathrm{S}^{(2)}\mathrm{S}^{(1)} \tag{2.11}$$

the elements of matrices $S^{(1)}$ and $S^{(2)}$ are

$$S_{11}^{(1)} = S_{22}^{(1)*} = e^{-i\beta q^{(2)}} \frac{(\psi_+^{(1)} - 1) + \gamma(\psi_+^{(2)} - 1)}{\psi_+^{(1)} - \psi_-^{(1)} - 2}, \ S_{12}^{(1)} = S_{21}^{(1)*} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta q^{(2)}} \frac{(\psi_+^{(1)} - 1) + \gamma(\psi_2^{(2)} + 1)}{\psi_+^{(1)} - \psi_-^{(1)} - 2}, \tag{2.12}$$

$$S_{11}^{(2)} = S_{22}^{(2)*} = e^{-\mathrm{i}a_1\left(q^{(1)} - q^{(2)}\right)} \frac{(\psi_+^{(1)} - 1) + \gamma(\psi_+^{(2)} - 1)}{\gamma(\psi_+^{(2)} - \psi_-^{(2)} - 2)}, \ S_{12}^{(2)} = S_{21}^{(2)*} = e^{ia_1\left(q^{(1)} + q^{(2)}\right)} \frac{(\psi_-^{(1)} + 1) + \gamma(\psi_+^{(2)} - 1)}{\gamma(\psi_+^{(2)} - \psi_-^{(2)} - 2)}, \tag{2.13}$$

$$\psi_\pm^{(j)} = \chi^{(j)} \frac{1 - 2\mathrm{e}^{ia_j(s^{(j)} \pm q^{(j)})} + e^{2ia_j s^{(j)}}}{e^{2ia_j s^{(j)}} - 1}, \ \chi^{(j)} = \frac{p^2\theta^{(j)}}{q^{(j)} s^{(j)}}$$

Using Sylvester’s theorem for a 2 by 2 unimodular matrix, the mth power of thematrix (2.11) can be written as

$$\mathrm{S}^{M+1} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^* & S_{11}^* \end{pmatrix}^{M+1} = \begin{pmatrix} S_{11}U_M - U_{M-1} & S_{12}U_M \\ S_{12}^*U_M & S_{11}^*U_N - U_{M-1} \end{pmatrix}, \tag{2.14}$$

where $U_M = \dfrac{\sin((M+1)k\beta)}{\sin(k\beta)}$,

and * in the superscript denotes the complex conjugate. The amplitudes of the incident A_I, reflected B_r and transmitted A_T acoustic waves in the two substrates will thus have the relation

$$\begin{pmatrix} A_I \\ B_r \end{pmatrix} = \mathrm{S}^M \begin{pmatrix} A_T \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.15}$$

S^{m} is a unimodular transfer matrix connecting the amplitudes of incident and reflected waves in the a_2 layers of (*m*) and (*m*+1) cells, and where the Bloch wave number *k* is defined by the equation $\cos(k\beta) = (S_{11} + S_{11}^*)/2$.

From (14) and (15) the reflection/transmission problem can be written as

$$\begin{pmatrix} A_I \\ B_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11}U_M - U_{M-1} & S_{12}U_M \\ S_{12}^*U_M & S_{11}^*U_M - U_{M-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_T \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.16}$$

From (16) we find that

$$\mathrm{R} = \frac{B_R}{A_I} = \frac{\mathrm{S}_{12}^* U_M}{\mathrm{S}_{11} U_M - U_{M-1}} \tag{2.17}$$

and

$$R|^2 = \frac{|\hat{S}_{12}|^2}{|S_{12}|^2 + (\sin(k\beta)/\sin((M+1)k\beta))^2}. \tag{2.18}$$

At the band edges, where $k\beta = \pi n$, the reflectivity and the transmissivity will be given by

$$R|^2 = \frac{|S_{12}|^2}{|S_{12}|^2 + (1/(M+1))^2}, \ |T|^2 = 1 - |R|^2. \tag{2.19}$$

Within the band gaps, where $k\beta$ is complex, $k\beta = \pi n + \mathrm{i}\delta$, formula (2.19) takes the form

$$|R|^2 = \frac{|S_{12}|^2}{|S_{12}|^2 + (\sinh(\delta)/\sinh((M+1)\delta))^2}. \tag{2.20}$$

It follows from (2.19) that the reflection coefficient will approach unity as the number of cells increases and the total reflection regions will precisely coincide with the stopband for Bloch waves.

3. Transmission coefficient in the piezoelectric composite waveguide with a defect layer

We now introduce a defect layer *Z* as shown in Fig.2, such that the wave guide has a mirror symmetry about this layer.

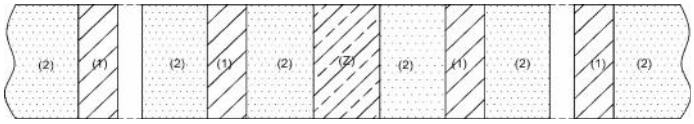


Fig. 2. Finite stack piezoelectric waveguide between two infinite substrates and a defect layer.

The transfer matrix now will have the following form:

$$\begin{pmatrix} A_I \\ B_r \end{pmatrix} = \mathrm{S}^M \mathrm{Z}\, \mathrm{S}^M \begin{pmatrix} A_T \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

and Sylvester's theorem can be used to obtain an elegant expression for the transmission coefficient

$$T = \frac{A_T}{A_I} = \frac{1}{Z_{11}U_{M-2}^2 - Z_2 U_{M-2} U_{M-1} + Z_3 U_{M-1}^2}\ , \tag{3.2}$$

where

$$Z = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{12}^* & Z_{11}^* \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

is the transfer matrix through the defect layer and the following notations are introduced:

$$Z_2 = 2\hat{S}_{11}Z_{11} + \hat{S}_{12}^* Z_{12} + \hat{S}_{12} Z_{12}^*\, , \mathrm{Z}_3 = |\, \hat{S}_{12}\, |^2 Z_{11}^* + \hat{S}_{11}\left(Z_2 - \hat{S}_{11}Z_{11}\right).$$

The analytical expression for the transmission coefficient (47) can be used to investigate the defect mode in a waveguide having a finite stack of cells each with either two different or two identical piezoelectric elements.

3. Numerical Results

Numerical calculations have been carried out for two piezoelectric phononic crystals. Material parameters of PZT-4 and BaTiO3 have been used for one photonic crystal and PZT-4[1]. for the piezoelectric waveguide with identical layers. Using the transmission coefficient (3.2) the transmission properties of SH waves are investigated in the piezoelectric waveguide with a defect layer (Fig. 2)

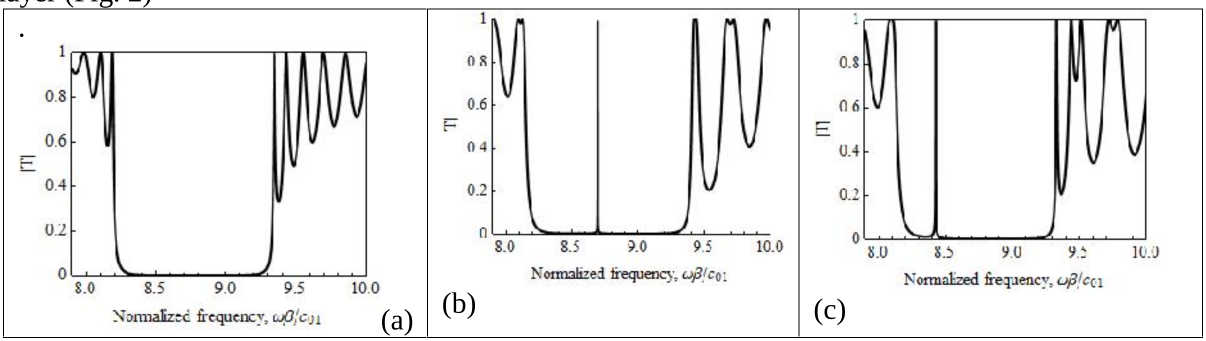


Fig.3. Absolute values of the transmission coefficient for a $LiIO_3$ and $BaTiO_3$ piezoelectric phononic crystal with displacement-clamped and electrically-shorted boundaries on the guide walls for β/*h*=0.5, *M*=25 (a) without a defect layer, (b)with a defect layer with thickness $d_c = \beta$, (c) with a defect layer with thickness $d_c = 1.5\beta$.

Fig.3 compares the transmission spectrum of the piezoelectric composite waveguide $LiIO_3$ and $BaTiO_3$ with and without a defect layer. Without a defect layer (Fig.3a) a typical propagation feature with an acoustic bandgap is observed. The presence of a defect layer (Figs.3b & 3c) results in a broadening of the forbidden band. Further, a passband with a transmission peak of 100% appears within the bandgap. Increasing the thickness of the defect layer from $d_c = \beta$ (Fig. 3b) to $d_c = 1.5\beta$ (Fig.3c) moves the passband from $\omega\beta / c_{01} = 8.7$ to $\omega\beta / c_{01} = 8.4$, demonstrating that the passband can be tuned by changing the thickness of the defect layer.

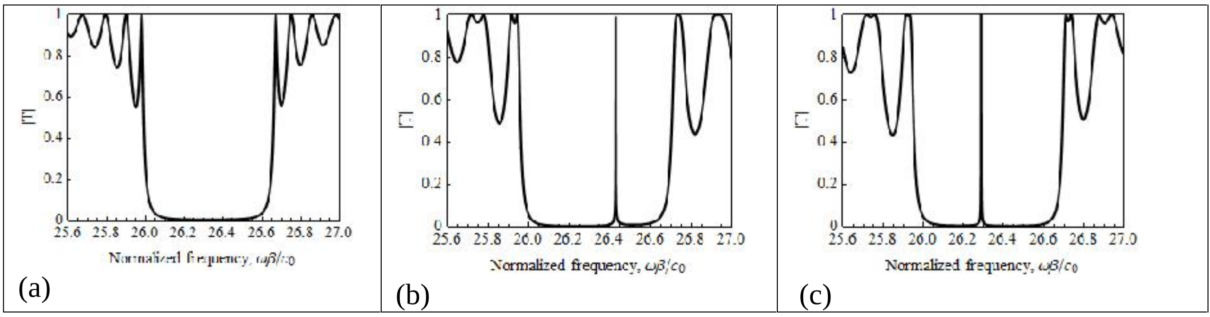


Fig. 4. Absolute values of the transmission coefficient identical PZT-4 crystals in both layers of the unit cell with displacement-clamped and electrically-shorted boundaries on the guide walls for *h*β/=0.5, *M*=25, (a)without a defect layer, (b)with a defect layer with thickness $d_c = \beta$, (c) with a defect layer with thickness $d_c = 1.5\beta$.

Fig.4 shows similar results for a piezoelectric waveguide with cells composed of identical piezoelectric materials PZT-4. The transmission spectrum for a waveguide without a defect layer is shown in Fig.4a. Figs.4b & 4c show that the presence of a defect layer results in a slight broadening of the bandgap and the appearance of a 100% transmission passband within the bandgap. Changing the thickness of the defect layer from $d_c = \beta$ (Fig.4b) to $d_c = 1.5\beta$ (Fig.4c) moves the passband from $\omega\beta / c_{01} = 2.263$ to $\omega\beta / c_{01} = 2.262$ though in this case without changing the width of stopband.

4. Conclusion

The propagation of elasto-electromagnetic coupled SH waves in a quasi-one dimensional periodic piezoelectric waveguide is considered within the full system of Maxwell's equations. Such a setting of the problem with perfectly matched physical fields at the interfaces allows the investigation of Block-Floquet waves in a wide range of frequencies including both acoustic and electromagnetic waves.
Controlling wave propagation properties including slowing down the propagation of light or sound or creating passband inside the stopband is also possible by introducing some disorder in periodically layered structures. We have found an analytical expression for the transmission coefficient that can be used to accurately detect the position of the passband inside a stopband. This can have applications in designing tunable waveguides which can even be made of layers of identical piezoelectric crystal separated by metallized interfaces.

This research was supported by the State Committee of Science of Armenia Grant No. SCS 115T-2C031.

REFERENCE

1. Bertoldi, K., Boyce, M.C., 2008. Mechanically triggered transformations of phononic band gaps in periodic elastomeric structures. Phys. Rev. B: Condens. Matter 77, 052105.
2. Goffaux, C., Vigneron, J.P., 2011. Theoretical study of a tunable phononic band gap system. Phys. Rev. B: Condens. Matter 64, 075118.
3. Piliposian, G., A.Avetisyan, and K.Ghazaryan, Shear wave propagation in periodic phononic/photonic piezoelectric medium. Wave Motion, 2012. **49**(1): p. 125-134.

Information about authors:

Davit Piliposyan junior researcher at Institute of Mechanics of National Academy of Sciences of Armenia, Tel: (374 91) 24 11 11. **E-mail:** piliposyan@mechins.sci.am

OPTIMAL STABILIZATION OF DOUBLE MATHEMATICAL PENDULUM VIA PRIORITY BASED CONTROL

Shahinyan A.S.

We consider the problem of the optimal stabilization of double mathematical pendulum via the mathematical framework of the priority based control, where different control actions are prioritized by different weights, or coefficients. We address the problem by means of Lyapunov's second method, by minimizing an appropriately defined functional. Specifically, we construct the optimal Lyapunov's function and optimal control actions. Our solution also allows to numerically find the values of the priority coefficients corresponding to the optimal control.

Introduction

The problems of optimal control and stabilization of dynamic systems with more than one control for the priority of controls have been studied recently. Such problems arise in different applications. In those problems it is sometimes necessary to take into considerations some parameters which describe the controls, so that choosing those parameters enables one to decide the priority of each control. Several problems of control, optimal control and optimal stabilization of linear systems with more than one control have been formulated and solved for the priority of controls in [1-3]. As a concrete application of the above framework, Ref. [3] solved the problem of controlling the dynamics of center of mass of an artificial earth satellite in a circular orbit.

In this paper we consider the problem of the optimal stabilization of double mathematical pendulum using the framework of priority based control. The solution of the problem is constructed by means of Lyapunov's second method and functional (double) minimization. We construct an optimal Lyapunov's function and optimal control actions. We also numerical methods to find the priority coefficients corresponding to optimal control.

Problem Statement

Suppose we have double mathematical pendulum constructed with lightweight rods 1 and 2 with lengths l_1 and l_2, respectively, and material points M_1 and M_2 with masses m_1 and m_2, respectively (Fig. 1). Assume that the lower pendulum swings about the axis Oz, which is perpendicular to the plane of drawing (perpendicular to the plane Oxy) and the upper pendulum swings about an axis which passes through the point M_1 and is parallel to the axis Oz. There are two controlling moments $\vec{\xi}_1$ and $\vec{\xi}_2$ applied to the rods 1 and 2 respectively. The gravitational forces $m_1\vec{g}$ and $m_2\vec{g}$ act on the material points M_1 and M_2 respectively. φ_1 and φ_2 are the angles between Oy and the rods 1 and 2 respectively, which uniquely determine the state of the system.

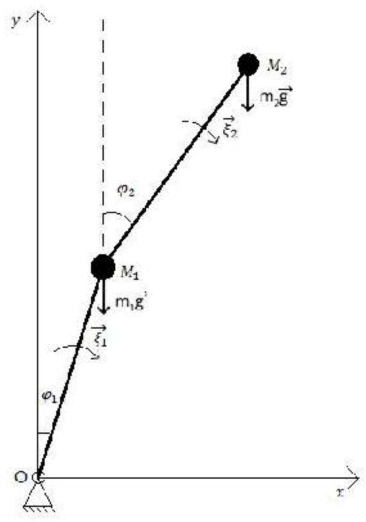


Fig. 1.

We use the Lagrange equations [4] to describe the dynamics of this system:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot{\varphi}_i}\right)-\frac{dT}{d\varphi_i}=-\frac{d\Pi}{d\varphi_i}+\alpha_i\xi_i,\quad i=1,2 \tag{1.1}$$

where T and Π are the kinetic and potential energies of the system, respectively, and $\alpha_i \in [0;1]$ are the parameters which describe the importance of the controlling momentums ξ_i.

The kinetic energy T and the potential energy Π of the system can be written as:

$$\begin{aligned} T &= \frac{m_1}{2} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2}\left(l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)\right) \\ \Pi &= -(m_1+m_2)\,gl_1(1-\cos\varphi_1) - m_2gl_2(1-\cos\varphi_2) \end{aligned} \tag{1.2}$$

Inserting the expressions (1.2), into (1.1) we get the following system of equations

$$\begin{cases} (m_1+m_2)l_1^2\ddot{\varphi}_1 + m_2l_1l_2\ddot{\varphi}_2\cos(\varphi_2-\varphi_1) - m_2l_1l_2\dot{\varphi}_2\sin(\varphi_2-\varphi_1)(\dot{\varphi}_2-\dot{\varphi}_1) - \\ \qquad -m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sin(\varphi_2-\varphi_1) = (m_1+m_2)\,gl_1\sin\varphi_1 + \alpha_1\xi_1 \\ m_2l_2^2\ddot{\varphi}_2 + m_2l_1l_2\ddot{\varphi}_1\cos(\varphi_2-\varphi_1) - m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1\sin(\varphi_2-\varphi_1)(\dot{\varphi}_2-\dot{\varphi}_1) + \\ \qquad +m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sin(\varphi_2-\varphi_1) = m_2gl_2\sin\varphi_2 + \alpha_2\xi_2 \end{cases} \tag{1.3}$$

We can linearize the system (1.3) with the assumption that the angles φ_1 and φ_2 are small, i.e. $\cos(\varphi_2-\varphi_1)\approx 1, \sin(\varphi_2-\varphi_1)\approx(\varphi_2-\varphi_1), \sin\varphi_1\approx\varphi_1, \sin\varphi_2\approx\varphi_2$. After linearization and some simplification, we get

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_1 = \dfrac{(m_1+m_2)g}{m_1l_1}\varphi_1 - \dfrac{m_2g}{m_1l_1}\varphi_2 + \dfrac{\alpha_1}{m_1l_2^2}\xi_1 - \dfrac{\alpha_2}{m_1l_1l_2}\xi_2 \\ \ddot{\varphi}_2 = -\dfrac{(m_1+m_2)g}{m_1l_2}\varphi_1 + \dfrac{(m_1+m_2)g}{m_1l_2}\varphi_2 - \dfrac{\alpha_1}{m_1l_1l_2}\xi_1 + \dfrac{\alpha_2(m_1+m_2)}{m_1m_2l_2}\xi_2 \end{cases} \tag{1.4}$$

To make the system (1.4) look simpler we introduce the following notations:

$$A = \frac{(m_1+m_2)g}{m_1l_1}; B = -\frac{m_2g}{m_1l_1}; k^2u_1 = \frac{\xi_1}{m_1l_2^2}; k^2u_2 = -\frac{\xi_2}{m_1l_1l_2} \tag{1.5}$$

where k has the meaning of frequency. We now have

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_1 = A\varphi_1 + B\varphi_2 + \alpha_1k^2u_1 - \alpha_2k^2u_2 \\ \ddot{\varphi}_2 = -AL_1\varphi_1 + AL_1\varphi_2 - \alpha_1L_1k^2u_1 + \alpha_2L_2k^2u_2 \end{cases} \tag{1.6}$$

where $L_1 = \dfrac{l_1}{l_2}, L_2 = \dfrac{m_1+m_2}{m_2}L_1$. To have dimensionless quantities we define $\tau = kt$. Eq. (1.6) then becomes

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_1 = a\varphi_1 + b\varphi_2 + \alpha_1u_1 - \alpha_2u_2 \\ \ddot{\varphi}_2 = -aL_1\varphi_1 + aL_1\varphi_2 - \alpha_1L_1u_1 + \alpha_2L_2u_2 \end{cases} \tag{1.7}$$

where

$$a = \frac{(m_1+m_2)g}{k^2m_1l_1}; b = -\frac{m_2g}{k^2m_1l_1} \tag{1.8}$$

Let us use $\ddot{\varphi}_1$ and $\ddot{\varphi}_2$ for $\dfrac{d^2\varphi_1}{d\tau^2}$ and $\dfrac{d^2\varphi_2}{d\tau^2}$, respectively. Now let us introduce phase coordinates by defining $x_1 = \varphi_1; x_2 = \dfrac{d\varphi_1}{d\tau}; x_3 = \varphi_2; x_4 = \dfrac{d\varphi_2}{d\tau}$. The system (1.7) now will be written as

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = ax_1 + bx_3 + \alpha_1 u_1 - \alpha_2 u_2 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -aL_1 x_1 + aL_1 x_3 - \alpha_1 L_1 u_1 + \alpha_2 L_2 u_2 \end{cases} \tag{1.9}$$

Here for simplicity the notation $\dot{x}_i = \dfrac{dx_i}{d\tau}$, $(i = 1, 2, 3, 4)$ was adopted. The acquired system (1.9) is a controlled system of linear nonhomogeneous differential equations.

The necessary and sufficient condition for the existence of a unique solution of the system (1.9) requires that the system is completely controlled [3,5], i.e. $\text{rank}K = 4$, where K is the Kalman matrix and has the following form

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_1 & -\alpha_2 & 0 & 0 & \alpha_1(a - bL_1) & \alpha_2(bL_2 - a) \\ \alpha_1 & -\alpha_2 & 0 & 0 & \alpha_1(a - bL_1) & \alpha_2(bL_2 - a) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_1 L_1 & \alpha_2 L_2 & 0 & 0 & a\alpha_1 L_1(L_1 - 1) & a\alpha_2 L_1(1 + L_2) \\ -\alpha_1 L_1 & \alpha_2 L_2 & 0 & 0 & a\alpha_1 L_1(L_1 - 1) & a\alpha_2 L_1(1 + L_2) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

It is obvious that $\text{rank}K = 4$ so that the solution u_i^o $(i = 1, 2)$ for the system (1.9) exists and is unique. Now let us formulate the optimal stabilization problem for the system (1.9).

Problem. The optimal control problem is to find the actions u_i^o and parameters $\alpha_i^0 \in (0;1]$ $(i = 1, 2)$ so that the solution $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ of the system (1.9) asymptotically stable and satisfies the constraint

$$J[\bullet] = \int_0^\infty \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + u_1^2 + u_2^2 \right) d\tau \to \min \tag{1.10}$$

Solution. To solve the problem, we use the Lyapunov-Bellman method [3,5]. In this case the Bellman expression is as follows:

$$B[\bullet] = \frac{dV}{dx_1}\dot{x}_1 + \frac{dV}{dx_2}\dot{x}_2 + \frac{dV}{dx_3}\dot{x}_3 + \frac{dV}{dx_4}\dot{x}_4 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + u_1^2 + u_2^2 \tag{1.11}$$

where $V = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ is the Lyapunov function for the system (1.9). Now substituting the expressions for $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, \dot{x}_4$ into the Bellman expression, and taking into consideration that $\left.\dfrac{\partial B[\bullet]}{\partial u_i}\right|_{u=u^o} = 0 (i = 1, 2)$ we get

$$u_1^o = -\frac{\alpha_1}{2}\left(\frac{dV}{dx_2} - L_1 \frac{dV}{dx_4} \right), \quad u_2^o = -\frac{\alpha_2}{2}\left(L_2 \frac{dV}{dx_4} - \frac{dV}{dx_2} \right) \tag{1.12}$$

To find the optimal controls, we substitute the expressions for u_1^o and u_2^o into the Bellman expression Eq. (1.11), and require that the resulting expression is zero. Thus, we get

$$B[\bullet]\big|_{u=u^0} = \frac{dV}{dx_1}x_2 + \frac{dV}{dx_2}\left(ax_1 + bx_3 - \frac{\alpha_1^2}{2}\left(\frac{dV}{dx_2} - L_1\frac{dV}{dx_4}\right) + \frac{\alpha_2^2}{2}\left(L_2\frac{dV}{dx_4} - \frac{dV}{dx_2}\right)\right) +$$
$$+\frac{dV}{dx_3}x_4 + \frac{dV}{dx_4}\left(-aL_1x_1 + aL_1x_3 + \frac{\alpha_1^2 L_1}{2}\left(\frac{dV}{dx_2} - L_1\frac{dV}{dx_4}\right) - \frac{\alpha_2^2 L_2}{2}\left(L_2\frac{dV}{dx_4} - \frac{dV}{dx_2}\right)\right) + \qquad (1.13)$$
$$+x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + \frac{\alpha_1^2}{4}\left(\frac{dV}{dx_2} - L_1\frac{dV}{dx_4}\right)^2 + \frac{\alpha_2^2}{4}\left(L_2\frac{dV}{dx_4} - \frac{dV}{dx_2}\right)^2 = 0$$

The Lyapunov function is sought for in the following form

$$V = c_{11}x_1^2 + c_{22}x_2^2 + c_{33}x_3^2 + c_{44}x_4^2 + 2c_{12}x_1x_2 + 2c_{13}x_1x_3 + 2c_{14}x_1x_4 + 2c_{23}x_2x_3 +$$
$$+2c_{24}x_2x_4 + 2c_{34}x_3x_4 \qquad (1.14)$$

We now introduce the Lyapunov function (1.14) into (1.13). Thus, we obtain a system of equations with respect to $c_{ij},(i,j=1,2,3,4)$ in case of $l_1 = 2l_2, m_1 = 2m_2, k^2 = \frac{g}{l_1}$ (*i.e.* $a = \frac{3}{2},\ b = -\frac{1}{2},$ $L_1 = 2,\ L_2 = 6)$

$$\begin{cases} 3c_{12} - 6c_{14} - (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)c_{12}^2 + 4(\alpha_1^2 + 3\alpha_2^2)c_{12}c_{14} - 4(\alpha_1^2 + 9\alpha_2^2)c_{14}^2 + 1 = 0 \\ 2c_{12} - (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)c_{22}^2 + 4(\alpha_1^2 + 3\alpha_2^2)c_{22}c_{24} - 4(\alpha_1^2 + 9\alpha_2^2)c_{24}^2 + 1 = 0 \\ -c_{23} + 6c_{34} - (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)c_{23}^2 + 4(\alpha_1^2 + 3\alpha_2^2)c_{23}c_{34} - 4(\alpha_1^2 + 9\alpha_2^2)c_{34}^2 + 1 = 0 \\ 2c_{34} - (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)c_{24}^2 + 4(\alpha_1^2 + 3\alpha_2^2)c_{24}c_{44} - 4(\alpha_1^2 + 9\alpha_2^2)c_{44}^2 + 1 = 0 \\ 2c_{11} + 3c_{22} - 6c_{24} - 2c_{12}c_{22}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + 4(\alpha_1^2 + 3\alpha_2^2)(c_{12}c_{24} + c_{22}c_{14}) - 8(\alpha_1^2 + 9\alpha_2^2)c_{14}c_{24} = 0 \\ -c_{12} + 3c_{23} - 6c_{34} + 6c_{14} - 2c_{12}c_{23}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + 4(\alpha_1^2 + 3\alpha_2^2)(c_{12}c_{34} + c_{23}c_{14}) - 8(\alpha_1^2 + 9\alpha_2^2)c_{14}c_{34} = 0 \\ 3c_{24} + 2c_{13} - 6c_{44} - 2c_{12}c_{24}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + 4(\alpha_1^2 + 3\alpha_2^2)(c_{12}c_{44} + c_{24}c_{14}) - 8(\alpha_1^2 + 9\alpha_2^2)c_{14}c_{44} = 0 \\ 2c_{13} + 6c_{22} + 6c_{24} - 2c_{22}c_{23}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + 4(\alpha_1^2 + 3\alpha_2^2)(c_{22}c_{34} + c_{23}c_{24}) - 8(\alpha_1^2 + 9\alpha_2^2)c_{24}c_{34} = 0 \\ 2c_{14} + 2c_{23} - 2c_{22}c_{24}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + 4(\alpha_1^2 + 3\alpha_2^2)(c_{22}c_{44} + c_{24}^2) - 8(\alpha_1^2 + 9\alpha_2^2)c_{24}c_{44} = 0 \\ -c_{24} + 2c_{33} + 6c_{44} - 2c_{23}c_{24}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + 4(\alpha_1^2 + 3\alpha_2^2)(c_{23}c_{44} + c_{24}c_{34}) - 8(\alpha_1^2 + 9\alpha_2^2)c_{34}c_{44} = 0 \end{cases} \qquad (1.15)$$

Solving the system (1.15) for different values of α_1 and α_2 from the interval $[0;1]$ with step 0.1 for each α_1 and α_2 we will get the optimal values of the coefficients $c_{ij},(i,j=1,2,3,4)$. The obtained values show that the minimal value of the functional in case of initial conditions $x_i(0) = 1,\ (i = 1,2,3,4)$ is, $J^o[\bullet] = 29.8658$ which is gained in case $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. The optimal values of the coefficients $c_{ij},(i,j=1,2,3,4)$ are the following,

$c_{11}^o = 5,9206,\ c_{22}^o = 5,2064,\ c_{33}^o = 1,4539,\ c_{44}^o = 0,3821,\ c_{12}^o = 5,0023,\ c_{13}^o = 0,5229$
$c_{14}^o = 0,8513,\ c_{23}^o = 0,7097,\ c_{24}^o = 0,9776,\ c_{34}^o = 0,3876.$

For the optimal Lyapunov function we have

$$V^o(x_1,x_2,x_3,x_4) = 5,9206x_1^2 + 5,2064x_2^2 + 1,4539x_3^2 + 0,3821x_4^2 + 10,0046x_1x_2 + 1,0458x_1x_3 +$$
$$+1,7026x_1x_4 + 1,4194x_2x_3 + 1,9552x_2x_4 + 0,7752x_3x_4,$$

And the optimal controls are given by

$u_1^o = -3,2997x_1 - 3,2512x_2 + 0,0655x_3 - 0,2134x_4,$

$u_2^o = -0,1055x_1 - 0,6592x_2 - 1,6159x_3 - 1,3168x_4.$

Thus we have obtained a closed form expressions for the optimal control actions for the system (1.9).

REFERENCES

1. Gabrielyan M.S, Barsegyan V.R O prioritete vibora ypravlyayushcikh vozdeysviy// Thesis of report in the 8th international seminar “Ustoychivost I kolebaniya neleneynikh sistem upravleniya” after E.S. Pyatnickiy: ICS RAS, 2004. p.36-37. (In Russian)
2. Barseghyan V.R. Zadacha prioritetnogo optimalnogo upravleniya dvijeniy I upravlyaemosti lineynikh sistem // Report NAS Armenia. 2005. V. 105. №3. P.235-240. (In Russian)
3. Barseghyan V.R., Shahinyan S.G., Barsegyan T.V. Zadacha optimalnoy stabilizacii lineynikh dinamicheskikh sistem po prioritetnomu optimalnomu upravleniyu. //Mechanics of Solids, IAMM NAS Ukraine, 2011, issue 41, p. 210-215. (In Russian)
4. Bukhgoltz N.N. Osnovnoy Kurs Teoreticheskoy Mekhaniki. M.: Nauka, 1972, part 2, 332 p. (in Russian).
5. Albrekht E.G., Shelement‘ev G.S. Lekcii po Teorii Stablizacii. Sverdlovsk: UrGU, 1972, 274 p. (in Russian).

Information about author:

Arman Shahinyan – undergraduate student, Yerevan State University, Faculty of Mathematics and Mechanics (374 55) 66 37 41

E-mail: armanshah1995@gmail.com

TO THE MODELLING OF DEFORMATION PROCESSES IN ELASTIC MEDIUM WITH COMPOSITE COATING

Telyatnikov I.S.

Dynamic problems of the coating interactions with deformable base have numerous applications in material science, mechanical engineering and construction, as well as in seismology and other fields.
A problem of harmonic vibrations of a composite coating, modeled by system of plates rigidly coupled with an elastic substrate, was considered. Differential factorization method for block structure with different dimensions was used in the construction of solution. A simplified method of block element was applied in case of plates with rectilinear boundaries. New types of functional equations, solvable by the method of factorization, were constructed based on the proposed method.
Values of the stress-strain state parameters of described structure, allowing to formulate and solve specific problems of geophysics and the strength theory of materials with composite coating, including defective ones, can be calculated with help of the presented approach.

The mechanical concept of the area seismicity evaluation based on the determination of the stress concentration zones in lithospheric plates [1–3], which is one of the signs by which one can judge the possible locations of the seismic events, their consequences and sometimes - probable time of their occurrence.

We consider the implementation of this mechanical concept on the example of the simplest model of the lithospheric plates. Therefore we focus on the topological approach in the theory of block structures in the case of different-sized blocks. Usually such a situation arises when considering structures in the form of three-dimensional deformable bodies contacting with two-dimensional shells or plates. A three-dimensional body can be coated with a two-dimensional shell or contain inclusions in the form of plates, wherein the plates and the shells may be layered, some of them may have cracks. Namely this situation is characteristic for lithospheric structures that can have both internal and opening onto the surface fractures.

Based on the model described above, we consider the plate with fractures as a two-dimensional manifold with boundary. The area occupied by the plate is denoted by Ω. We divide the plate into homogeneous blocks with constant properties; moreover, we divide the resulting blocks on the fractures crossing them, if any exist. As a result, we obtain a partition of the area $\Omega=\bigcup_{j=1}^{M}\Omega_j$, where M – number of derived blocks. On different parts $\partial\Omega_{jk}$ of block boundaries $\partial\Omega_j=\bigcup_k \partial\Omega_{jk}$, $j=\overline{1,M}$ different boundary conditions can be met: a rigid coupling with an adjacent block, the contact with the friction, free displacement, etc.

Further we use the notation adopted in the theory of plates [4]: $\vec{u}=\{u_1,u_2,u_3\}$, u_1, u_2 – displacements of the middle surface points of the plate in its tangential directions, u_3 – in directions of its normal. In the scalar case of vertical oscillations for steady-state mode (with frequency ω) differential equations of a flat coating displacement have the form [4]

$$R_j(\partial x_1,\partial x_2)u_{3j}(x_1,x_2)-\varepsilon_{j5}g_{3j}(x_1,x_2)=-\varepsilon_{j5}t_{3j}(x_1,x_2),\ j=\overline{1,M}\ . \quad (1)$$

Here $R_j=\varepsilon_{j3}\left(\frac{\partial^4}{\partial x_1^4}+2\frac{\partial^4}{\partial x_1^2\partial x_2^2}+\frac{\partial^4}{\partial x_2^4}\right)-\varepsilon_{j4}$; $g_{3j}(x_1,x_2)$ – vertical component of the contact stress amplitude acting on the lower border of the plate in the area Ω_j, $\varepsilon_{j3}=\frac{h_j^2}{12}$; $\varepsilon_{j4}=\omega^2\rho_j\frac{1-\nu_j^2}{E_j}$; $\varepsilon_{j5}=\frac{1-\nu_j^2}{E_jh_j}$; h_j – thickness of the j-th plate; ρ_j – its density; ν_j – Poisson's ratio; E_j – Young's modulus.

Homogeneous layer or stack of layers, homogeneous or layered half-space, etc. can be considered as a deformable substrate. For specified substrate variants it is possible to build the integral relations between the amplitudes of displacements u_3 and stresses g_3 on the surface of the substrate of the form

$$u_3(x_1,x_2,0)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{\sigma_2}\int_{\sigma_1}K_{33}(\alpha_1,\alpha_2,0)G_3(\alpha_1,\alpha_2)\exp\left(-i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)\right)d\alpha_1 d\alpha_2\ , \tag{2}$$

where K_{33} – function of complex variables α_1, α_2, which has a finite number of real zeros z_k and poles p_k, examples of which for various media types are presented in [5, 6]; $K_{33}(\alpha_1,\alpha_2,0)=O(\alpha^{-1})$ when $\alpha=\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}\to\infty$; $G_3=\mathrm{V}_2\, g_3$; V_2 – a two-dimensional Fourier transform operator, the position of σ_1,σ_2 is determined by the principle of limiting absorption [6].

After applying to (1) the integral Fourier transform by the variables x_1,x_2 the equation of displacement for each element of the plate partition takes the form

$$R_j(-i\alpha_1^j,-i\alpha_2^j)U_{3j}\equiv\left[\varepsilon_{j3}\left((\alpha_1^j)^2+(\alpha_2^j)^2\right)-\varepsilon_{j4}\right]U_{3j}=\varepsilon_{j5}\mathrm{V}_2\left[g_{3j}+t_{3j}\right]-\int_{\partial\Omega_j}\omega_j\ ,\ j=\overline{1,M}\ . \tag{3}$$

Here ω_j – the external form is as follows:

$$\omega_j=\varepsilon_{j3}\exp\left(i(\alpha_1^j x_1^j+\alpha_2^j x_2^j)\right)\left[-\left(\frac{\partial^3 u_{3j}}{\partial(x_2^j)^3}-i\alpha_2^j\frac{\partial^2 u_{3j}}{\partial(x_2^j)^2}-(\alpha_2^j)^2\frac{\partial u_{3j}}{\partial x_2^j}+i(\alpha_2^j)^3u_{3j}+2\frac{\partial^3 u_{3j}}{\partial(x_1^j)^2\partial x_2^j}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-2i\alpha_2^j\frac{\partial^2 u_{3j}}{\partial(x_1^j)^2}\right)dx_1^j+\left(\frac{\partial^3 u_{3j}}{\partial(x_1^j)^3}-i\alpha_1^j\frac{\partial^2 u_{3j}}{\partial(x_1^j)^2}-(\alpha_1^j)^2\frac{\partial u_{3j}}{\partial x_1^j}+i(\alpha_1^j)^3u_{3j}\right)dx_2^j\right].$$

Further the conditions specified on the interblock boundaries should be added in the pseudo-differential equations constructed on the basis of the execution of the automorphism requirement of the manifold applied to functional equations (3). To construct a pseudo-differential equations we need to find the zeros of the expression $R_j(-i\alpha_{1j},-i\alpha_{2j})$, and then calculate the corresponding Leray's residues [2, 3].

For a rectilinear part of the block boundary $\partial\Omega_{jk}$ the outer form in a local coordinate system takes the form [7]

$$\omega_{jk}=-\varepsilon_{j3}\exp\left(i(\alpha_1^{jk}x_1^{jk}+\alpha_2^{jk}x_2^{jk})\right)\left(i\alpha_2^{jk}M_{jk}D_j^{-1}-Q_{jk}D_j^{-1}-\left[(\alpha_2^{jk})^2+\nu_j(\alpha_1^{jk})^2\right]\frac{\partial u_{3jk}}{\partial x_2^{jk}}+\right.$$

$$\left.+i\alpha_2^{jk}\left[(\alpha_2^{jk})^2+(2-\nu_j)(\alpha_1^{jk})^2\right]u_{3jk}\right)dx_1^{jk}\ ,$$

where $Q_{jk}=-D_j\left(\frac{\partial^3 u_{3jk}}{\partial(x_2^{jk})^3}+(2-\nu_j)\frac{\partial^3 u_{3jk}}{\partial(x_1^{jk})^2\partial x_2^{jk}}\right)$ – transverse force, $D_j=\frac{\varepsilon_{j3}h_j}{\varepsilon_{j5}}$ – rigidity of the plate occupying the area Ω_j, $M_{jk}=-D_j\left(\frac{\partial^2 u_{3jk}}{\partial(x_1^{jk})^2}+\nu_j\frac{\partial^2 u_{3jk}}{\partial(x_2^{jk})^2}\right)$ – bending moment. Curved sections of interblock boundaries can be approximated by broken lines.

Built on a rectilinear part of the border $\partial\Omega_{jk}$ group of pseudo-differential equations can be represented as

$$\mathrm{V}_1^{-1}(x_1^{jk})\left\{\int_{\partial\Omega_{jk}}\left(\frac{1}{D_j}\left(i\alpha_{2l-}^{jk}M_{jk}-Q_{jk}\right)-\left[(\alpha_{2l-}^{jk})^2+\nu_j(\alpha_1^{jk})^2\right]\frac{\partial u_{3jk}}{\partial x_2^{jk}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+i\alpha_{2l-}^{jk}\left[(\alpha_{2l-}^{jk})^2+(2-\nu_j)(\alpha_1^{jk})^2\right]u_{3jk}\right)\exp(i\alpha_1^{jk}x_1^{jk})dx_1^{jk}-\varepsilon_{j5}\mathrm{V}_2\left[g_{3jk}-t_{3jk}\right]-\int_{\partial\Omega_j\setminus\partial\Omega_{jk}}\omega_j\right\}=0\ ,$$

where $\alpha_2^{jk} = \alpha_{2l-}^{jk}$, $l = 1,2$, $\alpha_{21-}^{jk} = -i\sqrt{\left(\alpha_1^{jk}\right)^2 - \sqrt{\frac{\varepsilon_{j4}}{\varepsilon_{j3}}}}$; $\alpha_{22-}^{jk} = -i\sqrt{\left(\alpha_1^{jk}\right)^2 + \sqrt{\frac{\varepsilon_{j4}}{\varepsilon_{j3}}}}$, $x_1^{jk} \in \partial\Omega_{jk}$,

V^{-1} – Fourier inversion operator.

Piecewise linear approximation can be constructed for the curved sections of the boundaries, then for each rectilinear section pseudo-differential equations will have a similar look. At the same time, the main operator of pseudo-differential equations contains all types of boundary conditions possible for the considered case of vertical oscillations of plates [7]. By writing the pseudo-differential equations for all sections of the border and adding in them given boundary conditions we obtain the system of integral equations, deciding which we obtain the representation of the solution in the following form in each planar block:

$$u_{3j} = V_2^{-1}\left[R_j^{-1}\left(-i\alpha_1^j, -i\alpha_2^j\right)\left(\varepsilon_{j5} V_2\left[g_{3j} - t_{3j}\right] - \int\limits_{\partial\Omega_j} \omega_j\right)\right], \ j = \overline{1, M}, \tag{4}$$

where V_2^{-1} – a two-dimensional Fourier inversion operator.

Constructed in this way expressions for the displacement amplitudes u_{3j} for the case of vertical oscillations of the two-dimensional composite block structure, further should be equated to the values of the displacement amplitudes of substrate (2) (in the case of ideal contact) in the area $\left(x_1, x_2\right) \in \Omega_j$, when $x_3 = 0$. The resulting integral equations will allow us to determine the stresses at the contact areas of the coating and substrate.

Consider the case where the coating is a system of two extensive plates, bordering along a straight line. The coordinate system is chosen so that the axis Ox_3 is perpendicular to the surface of the coating/substrate system and the axis coincides with the boundary between the plates. Let's denote the right half-plane of the plane $x_3 = 0$ as $\Omega_1 = \left\{\left(x_1, x_2\right): 0 < x_1 < \infty, -\infty < x_2 < \infty\right\}$, and the left as – $\Omega_2 = \left\{\left(x_1, x_2\right): -\infty < x_1 < 0, -\infty < x_2 < \infty\right\}$. Suppose that the system is exposed to the focused harmonic surface load $A\delta\left(x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0\right)\exp\left(-i\omega t\right)$, $A = \text{const}$, $x_1^0, x_2^0 > 0$. Then the integral equation for the stress amplitudes at the border of the coating and substrate can be reduced to the following functional equation

$$G_{31}^+ + KG_{32}^- = K_1^{-1}\left(\frac{C_{11}}{\alpha_1 + iq_{11}} + \frac{C_{12}}{\alpha_1 + q_{12}} + \frac{C_{21}}{\alpha_1 - iq_{21}} + \frac{C_{22}}{\alpha_1 - q_{22}} - \right.$$
$$-\frac{\varepsilon_{15} C\exp\left(i\alpha_1 x_1^0\right)}{R_1} + \frac{\varepsilon_{15}}{2\left(q_{11}^2 + q_{12}^2\right)\varepsilon_{13}}\left[\frac{C\exp\left(iq_{12}x_1^0\right) - G_{31}^+\left(q_{12}, \alpha_2\right)}{q_{12}\left(\alpha_1 - q_{12}\right)} + i\frac{A\exp\left(-q_{11}x_1^0\right) - G_{31}^+\left(iq_{11}, \alpha_2\right)}{q_{11}\left(\alpha_1 - iq_{11}\right)}\right] +$$
$$\left. + \frac{\varepsilon_{25}}{2\left(q_{21}^2 + q_{22}^2\right)\varepsilon_{23}}\left[\frac{G_{32}^-\left(-q_{22}, \alpha_2\right)}{q_{22}\left(\alpha_1 + q_{22}\right)} + \frac{iG_{32}^-\left(-iq_{21}, \alpha_2\right)}{q_{21}\left(\alpha_1 + iq_{21}\right)}\right]\right), \tag{5}$$

where $K = -K_1^{-1}K_2$, $C \equiv C\left(\sim_2\right) = A\exp\left(i\sim_2 x_2^0\right)$, $K_j\left(\alpha_1, \alpha_2\right) = \pm\left(K_{33}\left(\alpha_1, \alpha_2, 0\right) - \varepsilon_{j5}\left(R_j\right)^{-1}\right)$, here we use the representation $R_j\left(\alpha_1, \alpha_1\right) = \varepsilon_{j3}\left(\alpha_1 - iq_{j1}\right)\left(\alpha_1 - q_{j2}\right)\left(\alpha_1 + iq_{j1}\right)\left(\alpha_1 + q_{j2}\right)$, $q_{jk} = q_{jk}\left(\alpha_2\right)$, $j, k = 1,2$, the superscripts «+» and «–»indicate the regularity of the function above and below the contour σ_1.

Equation (5) is solved by the Wiener – Hopf method with factorization by the parameter α_1 relative to the contour σ_1. The unknown C_{jk} $\left(j, k = 1,2\right)$ are determined further from the boundary conditions in the contact area of plates.

To perform the factorization on the α_1 in relation to the selected contour σ_1 function $K_{33}\left(\alpha_1, \alpha_2\right)$ is represented in the form $K = S\left(\alpha_1, \alpha_2\right)\Pi\left(\alpha_1, \alpha_2\right)$ [6, 7], where

$S(\alpha_1,\alpha_2)=d_1\Big/\sqrt{\alpha_1^2+d^2}$, $d^2(\alpha_2)=d_2^2+\alpha_2^2$, $d_1=\lim\limits_{|\alpha|\to\infty}\alpha K(\alpha_1,\alpha_2)$, the parameter d_2 is selected large enough [6] (for numerical implementation $d_2=10$). The behavior of S matches the behavior of the function K_{33} at infinity, and the function S has no singularities on the real axis. The function $\Pi(\alpha_1,\alpha_2)=S^{-1}K_{33}$ has the same singularities as K_{33}, moreover, $\lim\limits_{|\alpha|\to\infty}\Pi(\alpha_1,\alpha_2)=1$ and it can be approximated by a rational function $\Pi(\alpha_1,\alpha_2)\approx\Pi^*=\prod\limits_{k=1}^{N}\left(\alpha_1^2-z_{1k}^2\right)\left(\alpha_1^2-p_{1k}^2\right)^{-1}$, $z_{1k}^2=z_k^2-\alpha_2^2$, $p_{1k}^2=p_k^2-\alpha_2^2$. Functions K_j $(j=1,2)$ have the same behavior at infinity as K_{33}, poles of these functions are: poles of K_{33} and zeros of R_j. Then they can be represented as $K_j=\dfrac{d_{1j}}{\sqrt{\alpha_1^2+d^2}}\Pi_j(\alpha_1,\alpha_2)$, where

$$\Pi_j\approx\Pi_j^*=\left(\alpha_1^2+q_{j1}^2\right)^{-1}\left(\alpha_1^2-q_{j2}^2\right)^{-1}\prod_{k=1}^{N_j}\left(\alpha_1^2-z_{1k}^2\right)\prod_{k=1}^{N}\left(\alpha_1^2-p_{1k}^2\right)^{-1},\ d_{1j}=\lim_{|\alpha|\to\infty}\alpha K_j(\alpha_1,\alpha_2).$$

For each value of the frequency ω rational functions Π^*, Π_j^* can be approximated using the Bernstein polynomials.

Integral characteristics of the plate displacement amplitudes are determined from the relations (4)

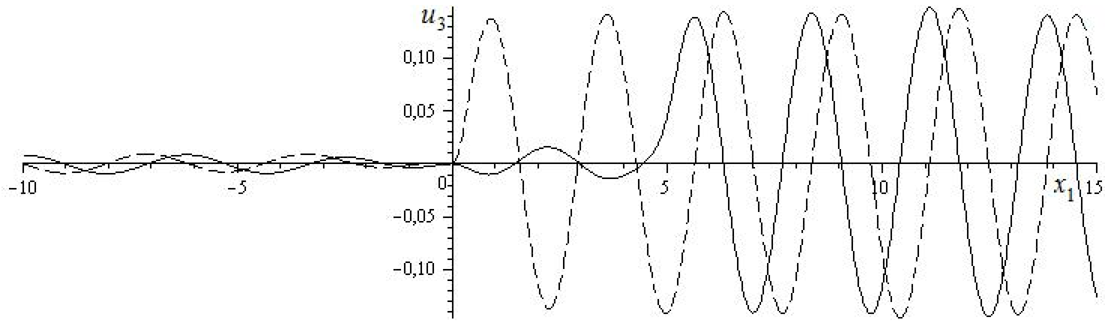
$$U_{3j}(\alpha_1,\alpha_2)=\frac{\varepsilon_{j5}G_{3j}(\alpha_1,\alpha_2)+B_{3j}(\alpha_1,\alpha_2)}{R_j}+\frac{C_{j1}}{\alpha_1\pm iq_{j1}}+\frac{C_{j2}}{\alpha_1\pm q_{j2}}\mp$$

$$\mp\frac{1}{2\left(q_{j1}^2+q_{j2}^2\right)\varepsilon_{j3}}\left[\frac{\varepsilon_{j5}G_{3j}(\pm q_{j2},\alpha_2)}{q_{j2}(\alpha_1\mp q_{j2})}+\frac{i\varepsilon_{j5}G_{3j}(\pm iq_{j1},\alpha_2)}{q_{j1}(\alpha_1\mp iq_{j1})}+\frac{B_{3j}(\pm q_{j2},\alpha_2)}{q_{j2}(\alpha_1\mp q_{j2})}+\frac{iB_{3j}(\pm iq_{j1},\alpha_2)}{q_{j1}(\alpha_1\mp iq_{j1})}\right],$$

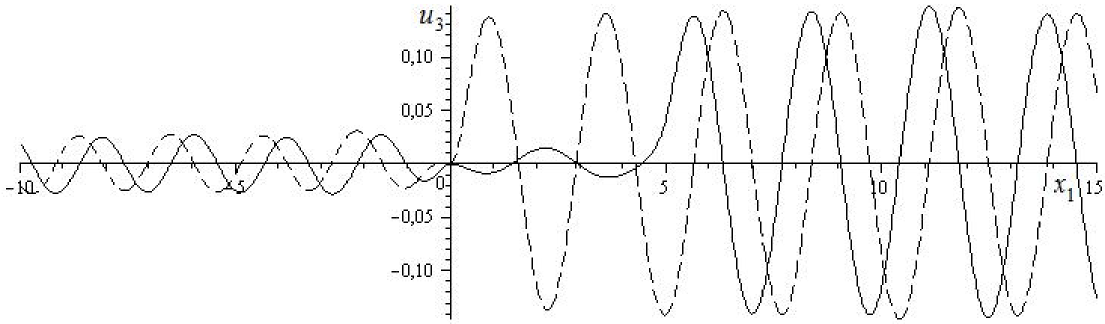
where $B_j=-\varepsilon_{15}V_2t_{3j}$, $B_1(\alpha_1,\alpha_2)=-\varepsilon_{15}A\exp\left(i\left(\alpha_1x_1^0+\alpha_2x_2^0\right)\right)$, $B_2(\alpha_1,\alpha_2)=0$, the top sign in the storeyed symbols «$\pm$» corresponds to the value $j=1$, the lower – $j=2$.

Representations of transforms of the plates displacement amplitudes contain the unknown constants C_{jk} $(j,k=1,2)$, which are determined from the boundary conditions.

The proposed approach allows to study the influence of the properties of plates and foundation, as well as the type of boundary conditions in the area of contact of the coating elements on the deformation properties of the system and the nature of the signal passage. Figures 1, 2 show the graphs of the complex displacement amplitudes of the surfaces of plates on elastic foundation in the case of constant properties of the system in the direction of the axis Ox_2 for the following dimensionless parameters of the substrate: $\rho=1$, $\mu=1$, $\nu=0{,}3$, $\overline{\omega}=2{,}5$. Dimensionless frequency is determined by the formula $\overline{\omega}^2=\rho\omega^2a^2\mu^{-1}$, where « – shear modulus, a ° – the density of the elastic foundation, *a* – characteristic linear dimension. Concentrated vertical load specified in the point $x_1=5$. On graphs the displacement amplitude plotted on the vertical axis (the real part of the complex displacement amplitudes corresponds to the solid line, the imaginary – to dotted), on the horizontal axis – coordinate x_1. The calculations were performed for two relations of plate rigidity: $\mu_2/\mu_1=5$ (a), $\mu_2/\mu_1=0{,}2$ (b). The figures illustrate the case of clamped edges of the plates $\left(u_{3j}\Big|_{x_1=0}=0,\ \dfrac{\partial u_{3j}}{\partial x_1}\Big|_{x_1=0}=0\right)$.



a



b

Fig.1. Real and imaginary components of the displacement amplitudes of plates

The problems of studying the objects discussed in this paper, including the cases with fractures, occur in seismology, geophysics and in various fields of technology, where constructions, which can be modelled by structures of described kind, are used.

The study has been carried out with support of the grants of RFFR 16-31-00067 and 16-41-230184_r_south.

REFERENCE

1. Бабешко В.А., Бабешко О.М., Евдокимова О.В. К теории блочного элемента // ДАН. 2009. Т.427. № 2. С.183–187.
2. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. Об автоморфизме и псевдодифференциальных уравнениях в методе блочного элемента // ДАН. 2011. Т.438. № 5. С.623–625.
3. Бабешко В.А., Бабешко О.М., Евдокимова О.В. Блочные элементы в теории плит сложной формы // Изв. РАН. МТТ. 2012. №5. С. 92–97.
4. Бабешко В.А., Бабешко О.М, Евдокимова О.В. К проблеме исследования материалов с покрытиями // Д АН. 2006. Т. 410. №1. С.49–52.
5. Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320с.
6. Ворович И.И. Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах / И.И. Ворович, В.А. Бабешко, О.Д. Пряхина. М.: Научный мир, 1999. 248с.
7. О поведении и резонансах некоторых блочных структур сейсмологии и материаловедения / В.А. Бабешко, Е.В. Кириллова, М.Н. Колесников, О.В. Евдокимова, О.М. Бабешко, И.С.Телятников, Д.В. Грищенко, В.В. Лозовой, А.В. Плужник, А.А. Шишкин // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2013. № 1. С. 6–12.

Information about author:

Telyatnikov Ilya – Junior researcher, Laboratory of Applied Mathematics and Mechanics of Southern Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, Cand. Sci. (Phys.-Math.)
Phone: (7 928) 280 59 75. **E–mail:** ilux_t@list.ru

CONTENTS AND ABSTRACTS

Contact problem for compound half-space consisting of elastic infinite layer attached to elastic half-space with different young's moduli is considered. A rigid stamp with a flat base is attached to the external surface of the half-space. Layer contains a rigid, thin inclusion perpendicular to the layer boundary. External sheering loads, applied to the stamp, external surface of the layer and on the surface of the crack, create anti-plane stress state in the compound half-space. Solution of the problem is reduced to a system of two singular integral equations for unknown stresses under the stamp and on the boundary between the layer and inclusion. Solution is constructed using method of mechanical quadratures based on roots of Jacobi polynomials. Formulas for contact stresses and intensity coefficients are obtained and numerical analysis is performed.

The stress state of homogeneous plane with periodic system of identical parallel absolutely rigid inclusions, one long side of which is detached from matrix, thus creating cracks, is considered in present paper. By the generalized Fourier transformation method the discontinuous solutions for the equations for the elasticity theory for homogeneous plane with periodic system of identical parallel defects are built. On the base of these solutions the governing system singular integral equations in special case, when defect is the absolutely rigid inclusion, one side of which is detached from matrix, is obtained. The effective solution of governing system of equations is constructed by the method of mechanical quadratures.

The axially symmetrical stress state of homogeneous space with periodical system of coin-shaped parallel defects is considered in present paper. The discontinuous solutions for equations of axially symmetrical theory of elasticity, which make it possible to directly write the governing equations of a number of problems, are constructed by Hankel transform method. As an example the special case, when the homogeneous space contains the periodical system of parallel coin-shaped cracks, is discussed. On base of obtained discontinuous solutions the governing integral equation is written. After application of rotation operator the governing equation is reduced to the Fredholm type integral equation, the solution of which can be constructed by the iteration method. The simple formulas for determining the crack opening and to determine the stress intensity factor are obtained.

The numerical solution of a singular integral equations with Cauchy kernel on the finite interval, a right part of which have a logarithmic singularity on the end, is built. The necessity of taking into account the mentioned singularity and efficiency of proposed approach to solution of such equations is shown.

In this article, the stress-deformation state of bending plate in around of fixed edge is investigated. A problem of semi-infinite plate strips, which one edge is jointed supported is investigated. An approach of Nadai is applied. The generalized cutting forces in the center of fixed edge for isotropic and orthotropic plates are obtained.

Polymers and composite materials are widely used in engineering, medicine, aircraft building, etc. At the same time physical and mechanical characteristics of these materials after long-term exploitation are significantly changed caused by the aging process [1-4]. So the investigation of aging processes in these materials is needed. In this work as a model material is used polyurethane. The experimental research program includes experiments on deep compression of rectangular samples at various times of climatic and deformation aging. It is also investigated the effect of aging on fatigue strength. Fatigue experiments of round specimens under repeated tension (the coefficient of asymmetry of a cycle is equal to 0) at a given amplitude variation of displacement and loading frequencies equal to 10 and 5 Hz were carried out. The received experimental resuls shown a significant hardening of the material due to aging. This effect is observed both in experiments on deep compression, and cyclic loadings.

Taking into account the aging effects the interconnected kinetic equations for the creep rate and damage parameter are formulated. The Maxwell equation, written in the scale of effective time, and the equation of the hereditary theory of visco-elasticity of Boltzmann-Volterra are used for the description of the degradation and destruction processes in polymer and composite materials. The analytical relations for creep, stress relaxation, damage parameter and the criteria of long-term strength are obtained. Corresponding theoretical curves are constructed and their qualitative agreement with the experimental curves is shown.

The issues of controllability of a linear stationary system with many control actions are considered. The necessary and sufficient condition for complete controllability is obtained. It is shown that the system separately for each control action can be not completely controllable, but in combination with control actions such a system can become completely controllable.

The problem of stability of a rectangular plate with three freely-supported and one free edges is investigated. The plate is pre-compressed by the load applied at the free edge. The conditions of occurrence of instability, localized in the vicinity of the free edge, as in the case of conservative load, as well as in case of load tracking are obtained.

The present study deals with the approach to the numerical solution of the thermal stresses theory problems during the irreversible deformation process. As an example, the elastic-plastic cube deforms due to thermal non-free expansion has been considered. The differential equations system, allowing at each time step to numerically calculate the irreversible strains, thermal stresses and displacements in the material has been derived. The algorithm of search of the irreversible deformation domains under unsteady heat has been developed. The fields of residual stresses formed during cooling of the material have been computed and analyzed.

The two layered rectangular plate, two layers of which are clumped, is discussed. The equations of the bending and vibrations are obtained under the smooth contact conditions between the edges. The conditions under which layers do not laminate are determined.

Existence and behavior of shear waves in two layered structure consisting of piezo-electric and conducting materials is investigated. The dispersion equation is obtained and investigated.

Calculation of temperature tension at the unsteady thermal mode presents the known difficulties because of the key calculated parameters changing in time. On the basis of the one-dimensional settlement scheme influence of key parameters of loading, properties of material and average curvature of a surface on distributions of temperature and tension is analyzed.

Zimin V.N., Nerovny N.A. 65

Development of the method for calculation of the main vector and main moment of light pressure on structures of complex geometric shape

In this paper we consider the question of determination of the light pressure on the space structures of complex geometric shape. For the infinitesimal surface element of structure we wrote the condition that this element can be illuminated only from the front side. This condition is represented in the form of series of Chebyshev polynomials of the first kind. Representation of a series in Chebyshev polinomials can be reformulated as the series in increasing rank tensors to determine the main vector and main moment of light pressure. We obtained expressions for the approximate method for determination of light pressure on space structures of complex geometry taking into account self-shadowing and reflections within the structure. The proposed expressions can be used in the ballistic analysis of solar sails and other space objects, which are significantly affected by the radiation pressure. Also, these results can be used to analyze the dynamics of movement of large scale space structures around the center of gravity under the light pressure.

Kazakov K.E., Kurdina S.P. 67

Multiple contact problem for regular system of punches and surface inhomogeneous coating

Plane problems of contact interaction of surface inhomogeneous viscoelastic aged foundations with coatings and regular system of rigid punches are under consideration. Aging and structural inhomogeneities connected with manufacturing processes taken into account. Such inhomogeneities can be described by rapidly oscillating and even discontinuous functions. Various versions of the mathematical formulation of the problems are under consideration. Main system of integral equations is obtained. It is reduced to one integral equation with tensor kernel in functional vector space. The projection-spectral method is applied. The solution of the problem is obtained analytically, and, in the expressions for the contact stresses, the stiffness function of the foundation is distinguished explicitly, which allows one to perform computations for actual inhomogeneities of the coating surface, which are described by oscillating and discontinuous functions. The explicit formulas were obtained for the punch settlement and the tilt angle.

Ghazaryan H.A. 71

Diffraction of surface shear electro-elastic wave on the semi-infinite metal layer in piezoelectric-dielectric space.

Thr electroelastic wave diffraction problem of a shift in the composite dielectric medium having a piezoelectric effect is considered and the wave field of elastic displacements and electric potential is obtained

Kamalyan A.A., Hunanyan A.A. 75

A new type of localization of wave energy at a rough surface piezodielectric waveguide

It is shown that along with well-known waves of Bleustein-Gulyaev, near rough surfaces piezo-dielectric waveguide, is characterized by a new energy localization of an electro-elastic shear wave signal. Virtual emitting surface roughened zone, as a thin heterogeneous layer of variable thickness, built a wave solution of the propagation of electro-elastic monochromatic signal in a homogeneous waveguide. The solution of the problem is simplified by the insertion of hypotheses MELS. It turns out that the localization of wave energy will also halt functions are not smooth surfaces of the waveguide. Under certain values of the linear characteristics of the roughness of surfaces can cause interior resonance and the dynamic dummy load in the surface layers. There is also the zone of forbidden frequencies in the waveguide.

Kotsur O.S. 80

About the development of vortex element models through the example of simulation of vortex rings spatial movement

The article demonstrates Vortex Element Method (VEM), intended to simulate incompressible fluid dynamics. Various vortex element models, created within certain assumptions, are compared with each other. We review also Particle Strength Exchange (PSE) method to account for viscous effects. Finally, we present an example of VEM simulation of collision of two vortex rings.

A review of measurement methods for the elastic characteristics of solid-state materials was made. Methods for determination of elastic moduli on measurement of the longitudinal and transverse velocities of sound-wave propagation both in harmonious and in pulse modes [1, 2] were implemented for a number of nanostructured materials (copper, aluminium, titanium alloys) and original substances. Nanostructuring influence on values of elastic properties of the sampling materials was revealed. The distinctions between obtained values of the measured quantities for different methods were established. The physical nature of these differences is analyzed.

The article develops a stochastic potential theory in its application to the solution of basic problems of the theory of elasticity. The Dirichlet problem for N-analytic functions attracts special attention. Topicality of the research subject relates to the fact that the theory of stochastic boundary value problems on the class of N-analytic functions is just being formed. The authors give an exact mathematical formulation of a stochastic Dirichlet problem for N-analytic functions and developed the necessary body of mathematics. A theorem about existence and uniqueness of the solution is proved. The researchers developed a general solution algorithm for stochastic Dirichlet problem for various classes of areas and contours, and investigated its stability. They give an example of solving the first basic problem of elasticity theory with stochastic Dirichlet problem for n-analytic functions.
The researchers applied the theory of boundary value problems for analytic and bianalytical functions, boundary properties of X-analytic functions, properties of stochastic differential systems.

Surface modification is one of the most effective and at the same time cost-effective way to significant improvement in the physical and mechanical properties of materials and structures, as well as the creation of new properties corresponding to predetermined specifications. The rapid development of modern technologies in recent years has created conditions for a substantial development of the known methods of surface modification as well as for the formation of entirely new approaches. The paper deals with two main areas of surface modification of materials and designs. They are physical and mechanical and geometric modifications. The physical and mechanical surface modification includes, in particular, the processes of coating, laser and thermal spraying, ion implantation, electrochemical treatment, and radiation effects. Geometrical surface modification includes, for example, the wear and polishing process as well as ion and plasma impacts. The paper contains an overview of mathematical models, contact problems, and research methods for surface modified solids, including those with real properties and geometry of surface layers.

In the present paper non-stationary mixed boundary plane problem of stamp is studied by the Wiener-Hoph method, along with the Laplace and Fourier integral transforms. In the analytical solution of this mixed boundary problem of stamp where the impact of the wear of contact surface on the performance of the stresses on the edge of a stamp is studied, it is shown that the wear eliminates the singularities on the edge of the stamp. The calculations of the stress distribution under the stamp are given in the form of graphs, on which one can notice the possibility of exceeding the yield stress, not on the edge, as in the classical formulations without wear, but in some areas, under the stamp. i.e. for certain values of the boundary movements of stamps the stresses exceed the elastic limit for these materials resulting in destruction of structure.

The stability of elastic cantilever beam under the influence of a following load is considered. One edge of a beam is rigidly fixed and on the free edge there is a concentrated mass. The critical force is determined in which cantilever beam looses dynamic stability.

thermodynamics formalism and the thermodynamics orthogonality principle. Only two functionally independent phenomenological functions (the dissipative potential and the Helmholtz free energy) are needed for specification the constitutive equations.

The present paper is devoted to problem of coupled hyperbolic thermoelastic waves propagation via a long cylindrical waveguide with circular cross-section. Sidewall of the waveguide is assumed free from tractions, insulated from or permeable to heat. The present study is carried out in the framework of coupled theory of type-III thermoelasticity (GNIII). The theory combines the both significant mechanisms of heat transfer known as thermodiffusion and propagating wave. Type-III generalized thermoelasticity includes classical thermoelasticity (GNI/CTE) and the theory of hyperbolic thermoelasticity (GNII) as limiting cases. Solution of the coupled GNIII-thermoelasticity equations satisfying the required boundary conditions is obtained. As an example, wavenumbers, displacement and thermal modes of the coupled type-III thermoelastic waves of a given azimuthal number are computed and visualized by the aid of Mathematica system. Sample numerical results for the coupled thermoelastic waves of the first and the seventh azimuthal numbers are presented. Real wavenumbers for the case of the hyperbolic thermoelastic propagating wave are localized. A numerical analysis of the coupled thermoelastic waves of the higher azimutal numbers is discussed. Numerics for thermoelastic waves of the 7th and 70th azimutal numbers are obtained.

Based on the constitutive model and the equations of anisotropic elastic body of monoclinic symmetry the shear wave propagation in a bilayer waveguide is studied. The waveguide consists of two layers made from different elastic anisotropic materials of monoclinic symmetry. For waveguide with traction free or clamped walls, the corresponding dispersion equations are obtained. The analytical and numerical stimulations are presented.

The paper investigates coupled electro-elastic waves propagating along a piezoelectric finite width waveguide consisting of same piezoelectric layers separated by metallized interfaces and arranged in a periodic way along the guide with a line defect. An analytical expression for the transmission coefficient is found that can be used to accurately detect and control the position of the passband within a stopband.

We consider the problem of the optimal stabilization of double mathematical pendulum via the mathematical framework of the priority based control, where different control actions are prioritized by different weights, or coefficients. We address the problem by means of Lyapunov's second method, by minimizing an appropriately defined functional. Specifically, we construct the optimal Lyapunov's function and optimal control actions. Our solution also allows to find numerically the values of the priority coefficients corresponding to the optimal control.

Dynamic problems of the coating interactions with deformable base have numerous applications in material science, mechanical engineering and construction, as well as in seismology and other fields.

A problem of harmonic vibrations of a composite coating, modeled by system of plates rigidly coupled with an elastic substrate, was considered. Differential factorization method for block structure with different dimensions was used in the construction of solution. A simplified method of block element was applied in case of plates with rectilinear boundaries. New types of functional equations, solvable by the method of factorization, were constructed based on the proposed method.

Values of the stress-strain state parameters of described structure, allowing to formulate and solve specific problems of geophysics and the strength theory of materials with composite coating, including defective ones, can be calculated with help of the presented approach.

О Г Л А В Л Е Н И Е