

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ

**АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ
СПЛОШНОЙ СРЕДЫ**

Материалы V международной конференции
02-07 октября 2017, Цахкадзор, Армения

ЕРЕВАН – 2017

УДК 531/534:06

ББК 22.25

А 437

**Институт механики НАН РА
Институт проблем механики им. А.Ю.Ишлинского РАН
Национальный комитет по теоретической и прикладной механике Армении
Российский национальный комитет по теоретической и прикладной механике
Национальный университет архитектуры и строительства Армении**

Сопредседатели: д.ф.-м.н. В.Н. Акопян (Армения)

д.ф.-м.н. А.В. Манжиров (Россия)

д.ф.-м.н. А.А. Гукасян (Армения)

Зам. председателя: д.ф.-м.н. А.В.Саакян (Армения), д.ф.-м.н. М.А.Сумбатьян (Россия)

Ученые секретари: к.ф.-м.н. Л.Л.Даштоян (Армения), к.ф.-м.н. Е.В.Мурашкин (Россия)

Ответственный редактор: д.ф.-м.н. В.Н. Акопян

Технический редактор: к.ф.-м.н. Г.З.Геворкян

Редактор: Ж.А.Авдалян

А 437

Актуальные проблемы механики сплошной среды. Материалы V
международной конференции 02-07 октября 2017, Цахкадзор,
Армения.- Ер.: НУАСА, 2017.- ... с.

В сборник включены доклады, представленные на V-ую международную конференцию «Актуальные проблемы механики сплошной среды», включающую специальную сессию, посвященную 60-летию юбилею иностранного члена НАН РА, профессора А.В.Манжирова.

УДК 531/534:06

ББК 22.25

ISBN 978-9939-63-285-8

© ИМ НАН РА, 2017

© ИПМех РАН, 2017

© NUACA, 2017

**Dedication to Professor
Alexander Vladimirovich Manzhirov**



Prof. A.V. Manzhirov is a prominent scientist in the field of mechanics and applied mathematics. The principal directions of his academic activity are Mechanics of Growing Solids, Theory of Creep and Viscoelasticity, Contact Mechanics, Tribology, Integral Equations and their applications.

A.V. Manzhirov is a founder of a new scientific area (Mechanics of Growing Solids), which has been originated in connection with the needs of the applied mechanics in the study of complex technological and natural processes. The Mechanics of Growing Solids, in particular, can effectively describe a wide range of phenomena, such as concreting, solidification and polymerization, electroforming and pyrolytic deposition, laser spraying and fusing, melting curing and crystal growth. It also provides means for an adequate description of the glaciers formation, sedimentation and volcanic rock massif growth, gravitating objects accreting, volumetric and surface growth of biological tissues. From the beginning of 80th of the previous age until now he extensively developed the foundations of the Mathematical Theory of Growing Solids, proposed a classification of growing processes, derived models governing equations and resolved a number of boundary value problems. Early experimental studies have been carried out in order to identify the physical properties of growing solids and to predict the stress-strain state evolution. New mechanical effects attributed exceptionally to the growing solids have been found and studied under his supervision.

A.V. Manzhirov is a leading Russian scientist in the area of Contact Mechanics. He developed the theory of mixed integral equations with constant and variable integration limits aimed at study of complex evolutionary processes of contact interaction and wearing. His projection method for solving mixed integral equations allows us to study the contact problems by employing experimental surface profilograms described by rapidly changing functions. He is also an outstanding expert in the field of Nonlinear Creep and Viscoelasticity of Inhomogeneous Aging Materials.

A.V. Manzhirov is an author of several fundamental reference guides on Higher Mathematics and Integral Equations published in Russia and abroad. "Handbook on Integral Equations" is a unique sample of reference books. "Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists" published by CRC Press in 2006 in English is the comprehensive one in the math world, covering the huge material from

different branches of modern mathematics and until now is unsurpassed with respect to collected methods for solving various equations arising in numerous applications of mathematics.

A.V. Manzhirev considers Academician of *Academy of Sciences of the USSR (RAS)* I.I. Vorovich (1920-2001), Academician of *National Academy of Sciences of the Republic of Armenia (NAS RA)* N.Kh. Arutyunyan (1912-1993) and Prof. V.M. Aleksandrov (1936-2012) as his teachers. He very much appreciates his contacts with academicians A.Yu. Ishlinsky (1913-2003), V.A. Babeshko, D.M. Klimov, N.F. Morozov, F.L. Chernoushko and Prof. V.N. Kukudzhanov (1931-2013) during joint work in the editorial boards of several scientific journals, *Scientific Council of the Russian Academy of Sciences on Mechanics of Solids*, *Higher Attestation Commission (HAC) of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation* and *Russian Foundation for Basic Research (RFBR)*. Their fundamental works, books, papers and viewpoints mostly formed his scientific backgrounds.

A.V. Manzhirev was born on May 24, 1957 in the city of Rostov-on-Don. His father Vladimir M. Manzhirev was a well-known expert in the field of chemical technology of leather and fur production, an Honorable Rationalizer of the USSR, and was awarded by Medals for Valorous Work and Veteran of Labour. His mother, Tamara S. Manzhireva, began working during the Great Patriotic War (1941-1945) in 28th Army of the 4th Ukrainian Front. As a veteran of the Great Patriotic War she was awarded by Jubilee Medals in Honor of the Victory in the Great Patriotic War. In the post-war years she worked in industry and pharmacy production. However she devoted herself mostly to her family. His sister Tatyana V. Manzhireva also is mathematically educated (she graduated *Faculty of Mechanics and Mathematics of Rostov State University*). Now she works as IT specialist (since 1983 in Spain).

In 1974 A.V. Manzhirev graduated with excellence *Specialized Secondary School No. 14* in Rostov-on-Don with deep study of English. In 1974 he entered *Faculty of Mechanics and Mathematics of Rostov State University*, where he was specialized in mechanics and applied mathematics at *Department of Theory of Elasticity. Mechanics and Mathematics Department of Rostov State University* in those years provided the highest level of education in various branches of mathematics and mechanics. Lectures at that time were delivered by such brilliant scientists and lecturers as Corresponding Member of RAS (Academician of RAS since 1990) I.I. Vorovich, Prof. V.M. Aleksandrov, Prof. (Academician of RAS since 1997) V.A. Babeshko, Assoc. Prof. (later Prof., Rector of RSU) A.V. Belokon (1941-2013), Assoc. Profs. (later Profs.) Yu.A. Ustinov, L.M. Zubov, S.G. Samko, E.N. Potetyunko, I.G. Kadamtsev, Assoc. Prof. (currently Prof., head of *Department of Elasticity Theory of the Southern Federal University*) A.O. Vatulyan.

In 1979 A.V. Manzhirev graduated with excellence the Rostov State University and was awarded by Master of Mechanics Degree (M.Sc.). Title of his master thesis is “Dynamical Problem for a Stripe: Limiting Amplitude Method”.

On the invitation of N.Kh. Arutyunyan and V.M. Aleksandrov (August 22, 1979) A.V. Manzhirev came to *Institute for Problems in Mechanics of the Academy of Sciences of the USSR (IPMech AS USSR)*. At that time N.Kh. Arutyunyan was the head of *Laboratory of Mechanics of Viscoelastic Solid*. V.M. Aleksandrov was a leading researcher at the same laboratory. Despite A.V. Manzhirev was educated at *Moscow Engineering and Construction Institute (MISI)* as a postgraduate student after he had passed the entrance examinations in December 1979, actually in 1979-1982 he studied mechanics under the supervision of N.Kh. Arutyunyan at *IPMech AS USSR*.

N.Kh. Arutyunyan is an outstanding scientist and statesman of the USSR and one of the founders of the scientific school of mechanics in Armenia. He and his students determined a number of new scientific trends in the Mechanics of Solids, in particular, in Mechanics of Growing Solids. By now A.V. Manzhirev is the head of the scientific school at *IPMech RAS* founded in early 1980s by N.Kh. Arutyunyan. At the same time Prof. V.M. Aleksandrov involved A.V. Manzhirev to the studies

of contact and mixed problems of the Mechanics of Solids. Until now these studies are a part of his permanent scientific interests.

In November 10, 1983 A.V. Manzhirrov successfully defended his Ph.D. thesis titled “Stress-Strain Analysis of Inhomogeneous Viscoelastic Solids and their Interaction with Stress Concentrators and Rigid Indentors” and was awarded by Ph.D. Degree in Physics and Mathematics from *Moscow Institute of Electronics and Mathematics*.

In April 1983 A.V. Manzhirrov entered *Institute for Problems in Mechanics of the Academy of Sciences of the USSR* as an engineer at *Laboratory of Mechanics of Viscoelastic Solids*. Since 1984, after the approval of his Ph.D. thesis by the *Higher Attestation Commission*, as a junior researcher. In 1989-1992 he worked as a researcher, and since 1992 as a senior researcher. In October 7, 1993 he defended his doctor dissertation titled “Contact Problems of the Theory of Viscoelasticity of Growing Solids” at Dissertation Council of the *IPMech RAS*.

Since 1995 he has been working as a leading researcher, since 2004 as the head of *Laboratory for Modeling in the Mechanics of Solids of IPMech RAS*. In September 2015 he was appointed to the position of deputy director for scientific work.

In 1988 the results related to contact problems were summarized in the joint monograph by N.Kh. Arutyunyan and A.V. Manzhirrov “Contact Problems of Creep Theory”, Yerevan, Publishing House of NAS RA, 1999. For the first time the foundations of the creep theory of inhomogeneous aging solids (including various types of constitutive equations and relaxation kernels, analysis of creeping structures, study of the correspondence principles) have been elucidated. Theory of Nonlinear Steady Creep, as well as the Mechanics of Growing Solids, and within the framework of the above theories the problems of contact interaction have been formulated and investigated. A significant place in this book is given to mathematical methods for constructing solutions of integral equations and systems of integral equations usable in the analysis of contact problems in the creep theory and algorithms for constructing exact and approximate solutions of nonlinear problems. One of the principal scientific achievements there has been a method of solving integral equations, which in application to contact problems allows us to obtain a sequence of independent Volterra’s equations instead of infinite systems of integral Volterra’s equations. The monograph includes solutions of a number of applied problems.

In 1991 the monograph by N.Kh. Arutyunyan, A.V. Manzhirrov, and V.E. Naumov “Contact Problems of the Mechanics of Growing Solids”, Moscow, Nauka was published and recognized as a an important step in the development of continuum mechanics. This book is entirely devoted to the new problems of mechanics of solids: contact problems of continuously and discretely built up solids with complex rheological properties (including aging and age-related inhomogeneity). In this study the theoretical foundations of the mechanics of the contact interaction of solids have been broadly discussed.

Since the mid of 1990s A.V. Manzhirrov devoted himself to the development of the Theory of Integral Equations. Integral equations can be found in many areas of the continuum mechanics and physics (in Elasticity, Plasticity, Theory of Heat and Mass Transfer, Hydromechanics, Electrodynamics and the Theory of Wave Propagation). Since 1998 A.V. Manzhirrov published a series of joint books devoted to exact solutions of integral equations and methods for their solution.

In 2006 A.V. Manzhirrov with the co-author published a remarkable reference guide: A.D. Polyanin and A.V. Manzhirrov “Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists”, Boca Raton, London, Chapman & Hall / CRC Press, 2006. In 2007 they released the most complete, extended and revised second edition of the handbook on integral equations: A.D. Polyanin and A.V. Manzhirrov “Handbook of Mathematics for Engineers And Scientists”, Chapman & Hall / CRC Press, Boca Raton, London, 2007.

A.V. Manzhirov actively participates in international scientific cooperation with Armenian, Indian, Polish, and South African scientists. During recent years A.V. Manzhirov is a coordinator of the Integrated Long Term Program of Scientific and Technical Cooperation between Russia and India in the field of mechanics. Together with the coordinator from India, Prof. N.K. Gupta he organized a permanent Russian-Indian seminar, which had been personally attended by the leading scientists from the two countries. The result of this activity was the publication of three collective Indo-Russian monographs. The work being a joint project of *RFBR* and *Ministry of Science and Technology of India* includes the latest theoretical and experimental achievements in continuum mechanics.

Traditional relations and cooperation with *Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences of the Republic of Armenia* are now realized in the framework of the agreement between *RAS* and *NAS RA*, being extended to new areas of mechanics, in particular, to the processes of growth. In 2007 Prof. A.V. Manzhirov organized (in conjunction with the Director of *Institute of Mechanics of NAS RA*, Prof. V.N. Hakobyan) the International Conference “Actual Problems of Continuum Mechanics” dedicated to the 95th anniversary of the birth of N.Kh. Arutyunyan. Since then, this conference has become a traditional, the most representative and popular among the scientific community in Armenia.

Important studies devoted to thermomechanics of laser processing of materials have been carried out in cooperation with *Tshwane University of Technology* (Pretoria, South Africa) following a plan supported by a joint grant (*RFBR* and the *National Research Foundation of South Africa*). These studies are focused on the theoretical and experimental problems of laser deposition and fusing.

A.V. Manzhirov put into practice the fruitful cooperation with *Instytut Podstawowych Problemów Techniki Polskiej Akademii Nauk (IPPT PAN)* under the Agreement of Cooperation between *RAS* and *PAN*.

Professor Manzhirov is a winner of the First Competition of the Science Support Foundation in 2001, Moscow. He was awarded by the State scientific grant for outstanding Russian scientists (1997-2003).

Due to Prof. A.V. Manzhirov the studies in the Mechanics of Growing Solids has been internationally supported: in 2015 the IUTAM Symposium on Growing Solids took place in Moscow at *Institute for Problems in Mechanics of RAS*.

Since 1994 A.V. Manzhirov works as a professor of higher mathematics at *Moscow State University of Instrument Engineering and Computer Science*; since 1997 he is a professor of *Department of Applied Mathematics of Bauman Moscow State Technical University*; since 2002 he is the head of *Branch of MSTU at the IPMech RAS*; since 2014 he is a professor of *Department of Mathematics of the National Research Nuclear University (MEPhI)*. He delivered original lecture courses on analytical geometry, higher algebra, calculus, differential equations, probability theory and mathematical statistics, queuing theory, mathematical physics. Special courses on the theory of creep of solids, mechanics of growing solids, non-classical problems of solid mechanics, mechanics of materials of constructions, integral equations have been also prepared.

A.V. Manzhirov is a member of the editorial boards of scientific journals *Mechanics of Solids*, *Computational Continuum Mechanics*, *Izv. of Saratov State University. New Series. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, *Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia. Mechanics*, *Vestnik of Yakovlev Cheboksary State Pedagogical University. Series of Mechanics of Limit State*. He is a member of *Russian National Committee on Theoretical and Applied Mechanics*, *American Society of Mechanical Engineers (ASME)*, *American Mathematical Society (AMS)*, *International Association of Applied Mathematics and Mechanics (GAMM)*, *International Association of Engineers (IAENG)*, *European Society for Mechanics (EUROMECH)*.

Since 2015 A.V. Manzhurov is a foreign member of the *National Academy of Sciences of the Republic of Armenia (NAS RA)*. 19 May 2017 he was elected as a full member of the *International Academy of Engineering (IAE)*.

Prof. A.V. Manzhurov is a specialist of the highest qualification deeply involved in Russian educational and research systems. He is very kind to colleagues, associates and students. He always defends the principal scientific viewpoints in all professional and educational controversies. In view of it Prof. A.V. Manzhurov is known as a respectful professional in the Science of Mechanics.

The author is grateful to Ph.D. E.V. Murashkin for his assistance in preparing the present paper.

Publications about Prof. A.V. Manzhurov in the press:

- Y.N. Radayev, Dedication to Professor A.V. Manzhurov on Occasion of his 50th Birthday [in Russian]. Vestnik of Samara State University. No. 4. (2007)
- D.D. Ivlev, Manzhurov Alexander Vladimirovich [in Russian]. Vestnik of Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. No. 2. (2007)
- B.G. Mironov and Y.N. Radayev, On Election of Professor A.V. Manzhurov as a Member of the National Academy of Sciences of the Republic of Armenia [in Russian]. Vestnik of Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. No. 3(25). (2015)
- G. Iskandaryan, Alexander Manzhurov [in Armenian]. The Gitutyun Newspaper, 2016, February. No 2(291). (2016)
- H. Altenbach, R. Goldstein, E. Murashkin, Preface. In Mechanics for Materials and Technologies. Series: Advanced Structured Materials. Cham: Springer. (2017)
- The 60th Birthday of Professor A.V. Manzhurov [in Russian]. Mechanics of Solids. No. 5 (2017)

Selected Publications by Prof. A.V. Manzhurov

Monographs and Textbooks:

- N.Kh. Arutyunyan, A.V. Manzhurov, and V.E. Naumov, Contact Problems in Mechanics of Growing Solids [in Russian], Nauka Publishers, Moscow, 1991
- A.D. Polyanin and A.V. Manzhurov, Handbook of Integral Equations: Exact Solutions [in Russian], Factorial Press, Moscow, 1998
- A.D. Polyanin and A.V. Manzhurov, Handbook of Integral Equations, CRC Press, Boca Raton, 1998
- A.V. Manzhurov and A.D. Polyanin, Methods for the Solution of Integral Equations: A Handbook [in Russian], Factorial Press, Moscow, 1999
- N. Kh. Arutyunyan and A.V. Manzhurov, Contact Problems in Creep Theory of Creep [in Russian], National Academy of Sciences of Armenia, Erevan, 1999
- A.D. Polyanin and A.V. Manzhurov, Handbuch der Integralgleichungen: Exakte Lösungen, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, 1999
- A.V. Manzhurov and A.D. Polyanin, Handbook of Integral Equations: Solution Methods [in Russian], Factorial Press, Moscow, 2000
- A.D. Polyanin and A.V. Manzhurov, Handbook of Integral Equations [in Russian]. Nauka Publishers, Moscow, 2003.
- A.D. Polyanin and A.V. Manzhurov, Handbook of Integral Equations. Second Edition. Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2007
- N.K. Gupta and A.V. Manzhurov, Eds., Topical Problems in Solid Mechanics, Elite Publishing, New Delhi, 2008

- A.D. Polyanin and A.V. Manzhirov, Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists, Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton–London, 2008
- A.I. Chernoutsan, A.V. Egorov, A.V. Manzhirov, etc., A Concise Handbook of Mathematics, Physics, and Engineering Sciences. Ed. by A.D. Polyanin and A.I. Chernoutsan. Boca Raton-London: Chapman & Hall/CRC Press, 2010
- A.V. Manzhirov, N.K. Gupta, and D. A. Indeitsev, Eds., Topical Problems in Solid and Fluid Mechanics, Elite Publishing, New Delhi, 2011
- N.K. Gupta, A.V. Manzhirov, and R. Velmurugan, Eds., Topical Problems in Theoretical and Applied Mechanics, Elite Publishing, New Delhi, 2013
- A.D. Polyanin, A.V. Manzhirov, Integral Equations in 2 volumes. Handbook for Higher Education. Part 1. Second Edition, revised and extended [in Russian]. Urait Publ. House, Moscow, 2017
- A.D. Polyanin, A.V. Manzhirov, Integral Equations in 2 volumes. Handbook for Higher Education. Part 2. Second Edition, revised and extended [in Russian]. Urait Publ. House, Moscow, 2017

Selected Papers:

- Manzhirov, A.V., Kovalenko, E.V.: Contact problem for a two-layer aging viscoelastic foundation. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 46(4) (1982)
- Manzhirov, A.V.: Axisymmetric contact problems for non-uniformly aging layered viscoelastic foundations. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 47(4) (1983)
- Manzhirov, A.V.: Plane and axisymmetric problems of the action of loads on a thin nonuniform viscoelastic layer. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 24(5) (1983)
- Manzhirov, A.V.: On a method of solving two-dimensional integral equations of axisymmetric contact problems for bodies with complex rheology. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 49(6) (1985)
- Grishin, S.A., Manzhirov, A.V.: Contact problems for a thin layer in nonlinear steady creep. *Mechanics of Solids*. 21(6) (1986)
- Manzhirov, A.V.: Some formulations and solutions of contact problems of creep for arbitrary systems of dies. *Mechanics of Solids*. 22(3) (1987)
- Manzhirov, A.V.: Contact problems of the interaction between viscoelastic foundations subjected to ageing and systems of stamps not applied simultaneously. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 51(4) (1987)
- Aleksandrov, V.M., Manzhirov, A.V.: Two-dimensional integral equations in applied mechanics of deformable Solids. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 28(5) (1988)
- Arutyunyan, N.Kh., Manzhirov, A.V.: Contact problems of the mechanics of bodies with accretion. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 53(1) (1989)
- Manzhirov, A.V.: The torsion of a growing cylinder by a rigid indenter. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 54(5) (1990)
- Manzhirov, A.V., Chernysh, V.A.: Contact problem for a layered inhomogeneous aging cylinder reinforced by a rigid ring. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 31(6) (1990)
- Manzhirov, A.V., Chernysh, V.A.: The contact problem of the discrete fitting of an inhomogeneous viscoelastic ageing cylinder with a system of rigid collars. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 55(6) (1991)
- Manzhirov A. V., Chernysh, V.A.: Contact problem for a layered inhomogeneous aging cylinder reinforced by a rigid ring. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 31(6) (1991)
- Manzhirov, A.V.: The general quasistatic initial-boundary value problem for a viscoelastic ageing solid with piecewise-continuous accretion. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 59(5) (1995)
- Polyanin, A.D.; Manzhirov, A.V.: The model solution method in the theory of linear integral equations. *Doklady Mathematics*. 55(3) (1997)
- Kazakov, K.E., Manzhirov, A.V.: Conformal contact between layered foundations and indentors. *Mechanics of Solids*. 43(3) (2008)
- Manzhirov, A.V., Lychev, S.A.: Mathematical modeling of growth processes in nature and engineering: A variational approach. *Journal of Physics: Conference Series*. 181(1) (2009)

- Lychev, S.A., Manzhairov, A.V.: Differential operators associated with the equations of motion and non-dissipative heat conduction in the Green-Naghdi theory of thermoelasticity. *Journal of Physics: Conference Series*. 181(1) (2009)
- Manzhairov, A.V.: The wear contact problem for an elastic foundation with an inhomogeneous coating. *Proceedings of World Tribology Congress 2009*. 6-11 September 2009. Kyoto, Japan. Kyoto: Japanese Society of Tribologist. (2009)
- Lychev, S.A., Manzhairov, A.V., Joubert, S.V.: Closed solutions of boundary value problems of coupled thermoelasticity. *Mechanics of Solids*. 45(4) (2010)
- Lychev, S.A., Lycheva, T.N., Manzhairov, A.V.: Unsteady vibration of a growing circular plate. *Mechanics of Solids*. 46(2) (2011)
- Kuznetsov, S.I., Manzhairov, A.V., Fedotov, I.: Heat conduction problem for a growing ball. *Mechanics of Solids*. 46(6) (2011)
- Manzhairov, A.V., Lychev, S.A.: The mathematical theory of growing solids: Finite deformations. *Doklady Physics*. 57(4) (2012)
- Levitin, A.L., Lychev, S.A., Manzhairov, A.V., et al.: Nonstationary vibrations of a discretely accreted thermoelastic parallelepiped. *Mechanics of Solids*. 47(6) (2012)
- Manzhairov, A.V., Shatalov, M., Fedotov, I.: On the resonant behaviour of longitudinally vibrating accreting rods. *8th South African Conference on Computational and Applied Mechanics (SACAM2012)*, Johannesburg, South Africa, 3–5 September 2012. (2012)
- Lychev, S.A., Manzhairov, A.V.: The mathematical theory of growing bodies. Finite deformations. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 77(4) (2013)
- Lychev, S.A., Manzhairov, A.V.: Reference configurations of growing bodies. *Mechanics of Solids*. 48(5) (2013)
- Manzhairov, A.V., Lychev, S.A., Gupta, N.K.: Nonlinear Models of Growing Solids. *Proceedings of the Indian National Science Academy*. 79(4) (2013)
- Manzhairov, A.V.: Mechanics of growing solids and phase transitions. *Key Engineering Materials*. 535-536 (2013)
- Joubert, S.V., Shatalov, M.Y.; Manzhairov, A.V.: Bryan's effect and isotropic nonlinear damping. *Journal of Sound and Vibration*. 332(23) (2013)
- Manzhairov, A.V.: Multi-body contact problem for a nonhomogeneous elastic coated foundation with wear. *Conference: 5th World Tribology Congress, WTC 2013*, 3 (2014)
- Manzhairov, A.V., Lychev, S.A.: Mathematical modeling of additive manufacturing technologies *Lecture Notes in Engineering and Computer Science*. 2212(1) (2014)
- Lychev, S.A., Manzhairov, A.V.: Discrete and continuous growth of hollow cylinder. Finite deformations. *Lecture Notes in Engineering and Computer Science*. 2212(1) (2014)
- Manzhairov, Alexander V.: Mechanics of growing solids: new track in mechanical engineering. *Proceedings of the ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition*, 9 (2014)
- Manzhairov, A. V., Parshin, D. A.: Influence of the Erection Regime on the Stress State of a Viscoelastic Arched Structure Erected by an Additive Technology under the Force of Gravity. *Mechanics of Solids*. 50(6) (2015)
- Manzhairov, A. V., Parshin, D. A.: Arch Structure Erection by an Additive Manufacturing Technology under the Action of the Gravity Force. *Mechanics of Solids*. 50(5) (2015)
- Manzhairov, A.V.: A Method for Mechanical Design of AM Fabricated Viscoelastic Parts. *Transactions on Engineering Technologies*. Springer: Singapore. (2016)
- Manzhairov, A.V.: A mixed integral equation of mechanics and a generalized projection method of its solution. *Doklady Physics*. 61(10) (2016)
- Manzhairov, A.V., Parshin, D.A.: Application of prestressed structural elements in the erection of heavy viscoelastic arched structures with the use of an additive technology. *Mechanics of Solids*. 51(6) (2016)
- Manzhairov, A.V.: Fundamentals of Mechanical Design and Analysis for AM Fabricated Parts. *Procedia Manufacturing*. 7 (2016)

- Manzhirov, A.V.: Mechanical Design of AM Fabricated Prismatic Rods under Torsion. MATEC Web of Conferences. 95 (2017)
- Manzhirov, A.V.: Advances in the Theory of Surface Growth with Applications to Additive Manufacturing Technologies. Procedia Engineering. 173 (2017)
- Kazakov, K.E., Kurdina, S.P., Manzhirov, A.V.: Contact interaction between surface nonuniform bases and regular systems of rigid punches. Procedia IUTAM. 23 (2017)
- Lychev, S.A., Manzhirov, A.V., Shatalov, M., Fedotov, I.: Transient Temperature Fields in Growing Bodies Subject to Discrete and Continuous Growth Regimes. Procedia IUTAM. 23 (2017)
- Manzhirov, A.V., Gupta, N.K.: Fundamentals of Continuous Growth Processes in Technology and Nature. Procedia IUTAM. 23 (2017)
- Manzhirov, A.V., Kazakov, K.E.: Contact problem with wear for a foundation with a surface nonuniform coating. Doklady Physics. 62(7) (2017).
- Manzhirov, A.V.: Mechanical Analysis of an AM Fabricated Viscoelastic Shaft under Torsion by Rigid Disks. Proceedings of the World Congress on Engineering 2017, 5–7 July 2017, London, U.K. Vol. II. London: IAENG (2017)
- Manzhirov, A. V., Parshin, D.A.: Additive Manufacturing of Conical Viscoelastic Parts under Axial Tension–Compression. Proceedings of the World Congress on Engineering 2017, 5–7 July 2017, London, U.K. Vol. II. London: IAENG (2017)
- Manzhirov, A.V., Kazakov, K.E.: The Interaction Between a Coated Foundation and a Rigid Punch with Rough Surfaces. Proceedings of the World Congress on Engineering 2017, 5–7 July 2017, London, U.K. Vol. II. London: IAENG (2017)
- Manzhirov, A. V., Kazakov, K. E.: Axisymmetric Contact Between an Annular Rough Punch and a Surface Nonuniform Foundation. Mechanics of Solids, 52(4) (2017)
- Manzhirov, A. V., Bychkov, P.S., Kozintsev, V.M., Popov, A.L.: The Determination of Residual Stresses in Additive Manufacturing Parts Fabricated by Layerwise Photopolymerization. Mechanics of Solids, 52(5) (2017)

Yuri N. Radayev

Prof., D.Sc., Ph.D., Department for Modeling in Solid Mechanics, Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
E-mail y.radayev@gmail.com, radayev@ipmnet.ru

ЭЛЕКТРОАКУСТИЧЕСКИЙ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЬ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ УПРУГИХ ВОЛН

Аветисян А.С.

Аннотация: Предлагается схема двухслойного пьезоэлектрического преобразователя электроакустических волн. Показывается, что можно индуцированием локализованной у свободной поверхности электроупругой сдвиговой волны в одном слое генерировать электроупругую волну плоской деформации в другом слое и, наоборот. Также надлежащим выбором материала (и среза) одного слоя (где возможна плоская электроупругая деформация) можно усилить или ослабить локализацию волновой энергии сдвиговой электроупругой волны в другом слое и, наоборот. Можно получить внутренний резонанс в волноводе или организовать линии запретных частот, индуцируя в нём волну с нерезонансной частотой для отдельных пьезоэлектрических слоёв.

Введение. Возможная локализация волновой энергии плоской деформации (PV – волна) вблизи механически свободной поверхности упругой изотропной среды была обнаружена ещё в 1885г. Рэлеем **Rayleigh J.W.** [1]. Известно, что механически свободная поверхность упругой изотропной среды не допускает локализацию энергии чисто сдвиговой упругой волны (SH – волны антиплоской деформации). Однако, в 1968г. Блюстейном было показано **Bluestein J.L.** [2], возможность локализации энергии SH – упругой волны при механически свободной поверхности пьезоэлектрической среды определённой симметрии. На основе анализа структур тензоров физико-механических постоянных материала, в 1985г. **Аветисян А.С.** [3] опубликовал условия о возможности распространения разделённых полей плоской и антиплоской упругой деформации в пьезоэлектрических кристаллах. Статья потом в целом была приведена в книге **Партон В.З., Кудрявцев Б.А.** [4].

Настоящим предлагается системный подход трансформации локализованных волн электроактивной плоской деформации в волны антиплоской деформации и, наоборот.

Постановка задачи. Пьезоэлектрическое полупространство, материал которого допускает раздельное распространение электроупругой волны антиплоской деформации $\{0; 0; w_1(x_\alpha; x_\beta; t); \varphi_1(x_\alpha; x_\beta; t)\}$, без механического контакта граничит с другим пьезоэлектрическим полупространством, материал которого допускает раздельное распространение $\{u_2(x_\alpha; x_\beta; t); v_2(x_\alpha; x_\beta; t); 0; \varphi_2(x_\alpha; x_\beta; t)\}$ – электроупругой волны плоской деформации. Выбором координатной системы так, чтобы срезы, допускающие разделения полей деформаций, совпадали с координатной плоскостью xOy , а поверхность разделения полупространств соответствовала координатной плоскости $y = 0$, квазистатические уравнения электроупругости в общей записи можно представить в виде

$$L_{11}[w_{10}(x; y); \varphi_{10}(x; y)] = -\rho_1 \omega^2 w_{10}(x; y); \quad L_{12}[w_{10}(x; y); \varphi_{10}(x; y)] = 0 \quad (0.1)$$

$$L_{21}[u_{20}(x; y); v_{20}(x; y); \varphi_{20}(x; y)] = -\rho_2 \omega^2 u_{20}(x; y); \quad (0.2)$$

$$L_{22}[u_{20}(x; y); v_{20}(x; y); \varphi_{20}(x; y)] = -\rho_2 \omega^2 v_{20}(x; y) \quad (0.3)$$

$$L_{23}[u_{20}(x; y); v_{20}(x; y); \varphi_{20}(x; y)] = 0,$$

где $L_{ij}[*]$ – дифференциальные операторы в частных производных второго порядка. Для затухающих в глубь соответствующих полупространств электромеханических волновых полей условия сопряжения электрических полей на поверхности раздела полупространств будут иметь вид:

$$\varphi_{10}(x; 0) = \varphi_{20}(x; 0); \quad B_{21}[u_{20}(x; y); v_{20}(x; y); \varphi_{20}(x; y)]|_{y=0} = B_{11}[w_{10}(x; y); \varphi_{10}(x; y)]|_{y=0} \quad (0.4)$$

Условия механически свободных поверхностей также имеют простой однородный вид:

$$B_{12}[w_{10}(x; y); \varphi_{10}(x; y)]|_{y=0} = 0 \quad (0.5)$$

$$B_{22}[u_{20}(x; y); v_{20}(x; y); \varphi_{20}(x; y)]|_{y=0} = 0; \quad B_{23}[u_{20}(x; y); v_{20}(x; y); \varphi_{20}(x; y)]|_{y=0} = 0$$

В граничных соотношениях (1.4) и (1.5) $B_{ij}[*]$ – дифференциальные операторы в частных производных первого порядка.

Решение граничной задачи. Из формулированной граничной задачи очевидно, что индуцированные в первом полупространстве нормальные электроупругие сдвиговые волны

$$\{w_{10}(x; y) \cdot \exp(-i\omega t); \varphi_{10}(x; y) \cdot \exp(-i\omega t)\} \quad (0.6)$$

как решения системы уравнений (1.1), посредством условий сопряжения электрических полей на поверхности раздела полупространств (1.4) связаны с решениями во втором полупространстве и, следовательно, могут генерировать в нём электроупругой волны плоской деформации

$$\{u_{20}(x; y) \cdot \exp(-i\omega t); v_{20}(x; y) \cdot \exp(-i\omega t); \varphi_{20}(x; y) \cdot \exp(-i\omega t)\} \quad (0.7)$$

Подставляя затухающие в глубь соответствующих полупространств решения (1.6) и (1.7) в граничные условия (1.4) и (1.5), из условия существования нетривиальных решений получим дисперсионное уравнение

$$\det \|g_{ij}(\omega; k(\omega))\|_{5 \times 5} = 0 \quad (0.8)$$

решением которого находим фазовые скорости существующих локализованных волн в полупространствах $V_{\text{нф}}(\omega)$. Фазовая скорость естественно в этом случае должна удовлетворять условиям локализации в обоих полупространствах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rayleigh J.W. On waves propagated along the plane surface of an elastic solid. //Proc. Math. Soc. London. 1885/1886, vol. 17, p. 4-11.
2. Bluestein J.L. A New Surface Wave in Piezoelectric Medium. //Appl. Phys. Lett., vol.13 (1968), p. 412-413.
3. Аветисян А.С. К задаче распространения сдвиговых волн в пьезоэлектрической среде // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1985. Т.38. №1. С.12-19.
4. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 472с.

Сведения об авторе:

Аветисян Ара Сергеевич – Доктор физ.-мат. наук, Член-корреспондент НАН Армении, Институт механики НАН Армении, Зав. Отделом «Динамика деформируемых систем и связанные поля»,

Тел.: (+374 91) 20 20 02; (+374 93) 00 44 55

E-mail: ara.serg.avetisyan@gmail.com

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОЙ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛОСКОСТИ С КОНЕЧНЫМИ И ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМИ СТРИНГЕРАМИ **Агабекян П.В., Ароян Э.П.**

Аннотация. В работе рассматривается контактная задача для полубесконечной плоскости, усиленной двумя конечными и полубесконечными стрингерами, причём, все три стрингера расположены на границе полуплоскости.

Задача заключается в определении тангенциальных напряжений действующих на месте соединения стрингеров с полуплоскостью.

Пусть упругая полуплоскость деформируется под действием сил, приложенных на концах стрингеров.

Предполагается, что под стрингерами действуют только тангенциальные контактные напряжения и стрингеры не сопротивляются изгибу [1,2,4].

Уравнения равновесия стрингеров в силу вышесказанного запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{dU^{(1)}}{dx} = & \frac{P}{E_1 h} \delta(x) - \frac{Q}{E_1 h} \delta(x-a) + \frac{Q}{E_2 h} \delta(x-b) - \frac{R}{E_2 h} \delta(x-c) + \\ & + \frac{R}{E_3 h} \delta(x-d) - \frac{\tau_1(x)}{E_1 h} - \frac{\tau_2(x)}{E_2 h} - \frac{\tau_3(x)}{E_3 h}, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} U^{(1)}(x) = & [\theta(x) - \theta(x-a)] \frac{du^{(1)}}{dx} + [\theta(x-b) - \theta(x-c)] \frac{du^{(1)}}{dx} + \theta(x-a) \frac{du^{(1)}}{dx}; \\ \tau_1(x) = & [\theta(x) - \theta(x-a)] \tau(x), \quad \tau_2(x) = [\theta(x-b) - \theta(x-c)] \tau(x), \quad \tau_3(x) = \theta(x-d) \tau(x), \\ \tau_1(x) + \tau_2(x) + \tau_3(x) = & [\theta(x) - \theta(x-a) + \theta(x-b) - \theta(x-c) + \theta(x-d)] \tau(x) = \tau^+(x) \end{aligned}$$

$\delta(x)$ – функция Дирака, $\theta(x)$ – функция Хевисайда, $\tau(x)$ – интенсивность тангенциальных контактных напряжений, $u^{(1)}$ – горизонтальные перемещения точек стрингеров, h – толщина стрингера, P, Q, R – интенсивности сосредоточенных сил, действующих на концах стрингеров, E_1, E_2, E_3 – модули упругости стрингеров.

С другой стороны, для граничных точек упругой полуплоскости имеем [2,4]:

$$\frac{du^{(2)}}{dx} = -\frac{1}{\pi \varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau^+(s)}{s-x} ds, \quad \varepsilon = \frac{2\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu},$$

где $u^{(2)}$ – горизонтальные перемещения граничных точек полуплоскости, λ, μ – коэффициенты Ляме.

Далее представим $\frac{du^{(2)}}{dx}$ в виде

$$\frac{du^{(2)}}{dx} = \frac{G(x)}{\varepsilon} - U^{(2)}(x) + U_-^{(2)}(x) = -\frac{1}{\pi \varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau^+(s)}{s-x} ds, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} G(x) = & [\theta(x-a) - \theta(x-b) + \theta(x-c) - \theta(x-d)] \varepsilon \frac{du^{(2)}}{dx}, \\ U^{(2)}(x) = & [\theta(x) - \theta(x-a) + \theta(x-b) - \theta(x-c) + \theta(x-d)] \frac{du^{(2)}}{dx} \end{aligned}$$

$U_-^{(2)}(x) = \theta(-x) \frac{du^{(2)}}{dx}$, после чего, условие контакта между плоскостью и стрингерами будет следующее:

$$U^{(1)}(x) = U^{(2)}(x). \quad (3)$$

Теперь применив к (1), (2) и (3) преобразование Фурье, задача сводится к решению функционального уравнения

$$(|\sigma| + \lambda_3) \bar{\tau}^+(\sigma) + i\sigma \varepsilon U_-^{(3)}(\sigma) = \lambda_1 P - i\sigma \bar{G}(\sigma) + (\lambda_3 - \lambda_1) \bar{\tau}_1(\sigma) + (\lambda_3 - \lambda_2) \bar{\tau}_2(\sigma) + \bar{f}(\sigma), \quad (4)$$

$$\text{где } \bar{f}(\sigma) = Q(\lambda_2 e^{i\sigma b} - \lambda_1 e^{i\sigma a}) + R(\lambda_3 e^{i\sigma d} - \lambda_2 e^{i\sigma c}), \quad \bar{\tau}^+(\sigma) = \bar{\tau}_1(\sigma) + \bar{\tau}_2(\sigma) + \bar{\tau}_3(\sigma)$$

$$\lambda_1 = \frac{\varepsilon}{E_1 h}, \quad \lambda_2 = \frac{\varepsilon}{E_2 h}, \quad \lambda_3 = \frac{\varepsilon}{E_3 h}.$$

Функциональное уравнение (4) методом факторизации и с помощью интегрального преобразования Фурье приводится к следующему интегральному уравнению [2,3]:

$$\begin{aligned} \tau^+(x) = & (\lambda_3 - \lambda_1) \int_{-\infty}^{\infty} L(x, s) \tau_1(s) ds + (\lambda_3 - \lambda_2) \int_{-\infty}^{\infty} L(x, s) \tau_2(s) ds - \\ & - \int_{-\infty}^{\infty} L^*(x, s) G(s) ds + Q[\lambda_2(x, b) - \lambda_1 L(x, a)] + \\ & + R[\lambda_3 L(x, d) - \lambda_2 L(x, c)] + A_0 K_+(x), \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$L(x, s) = \int_0^{\infty} K_+(x-t) K_-(t-s) dt, \quad L^*(x, s) = \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} K_+(x-t) K_-(t-s) dt,$$

$$\bar{K}_{\pm}(\sigma) = (\sigma \pm i0)^{\pm \frac{1}{2}} \exp[\bar{R}_{\pm}(\sigma)], \quad R(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{\lambda_3 + |\sigma|}{|\sigma|} e^{i\sigma x} d\sigma$$

Имея в виду, что $\tau^+(x) = 0$ при $x \in \{(a, b) \cup (c, d)\}$ и $\tau^+(x) = \tau(x)$ – при $x \in \{(0, a) \cup (b, c)\}$, из (5) получим разрешающую систему интегральных уравнений относительно касательных напряжений, действующих под конечными стрингерами и относительно деформации точек, находящегося в промежуточном интервале между стрингерами.

Из исследований ядер $L(x, s)$ и $L^*(x, s)$ следует, что полученная система интегральных уравнений с помощью полиномов Чебышева можно свести к решению квазивполне регулярных бесконечных систем алгебраических уравнений, следует также, что тангенциальные контактные напряжения в концах стрингера имеют корневую особенность [2,4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н.Х. Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением. // ПММ. 1968. Т.32. №4. С.632-646.
2. Григорян Э.Х. О контактной задаче для упругой полуплоскости, усиленной полубесконечной кусочно-однородной накладкой. Механика, Ереван, 1982, №1, с.66-72.
3. Агабекян П.В. Контактная задача для упругой полуплоскости, усиленной на своей границе конечной и полубесконечной накладками. // Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1989. Т.42. №3. С.21-26.
4. Григорян Э.Х., Агаян К.Л. Полубесконечная пластина, усиленная внутренним полубесконечным стрингером, параллельным границе пластины. Ереван: «Гитутюн», 2006, с.138-143.

Сведения об авторах:

Агабекян Пайкар Вараздатович – к.ф.м.н., н.с. Института механики (374 93) 248547

E-mail: mechins@sci.am

Ароян Эдик Пандухтович – к.ф.м.н., доцент Ванадзорского филиала Политехнического университета (374 91) 700801.

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ДВУХСЛОЙНОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ НАЛИЧИИ ВЯЗКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

Агаловян Л.А., Гулгазарян Л.Г.

Аннотация. Рассматриваются вынужденные колебания двухслойной ортотропной оболочки при наличии вязкого сопротивления в нижнем слое оболочки. На верхней лицевой поверхности оболочки заданы два варианта пространственных граничных условий, а на нижней задан вектор перемещения. Асимптотическим методом получено решение соответствующих динамических уравнений и соотношений трёхмерной задачи теории упругости. Определены амплитуды вынужденных колебаний, установлены условия возникновения резонанса.

1. Основные уравнения и постановка краевой задачи. Требуется найти ненулевые решения динамических уравнений и соотношений теории упругости в области $\Omega = \{\alpha, \beta, \gamma; \alpha, \beta \in \Omega_0, -h_2 \leq \gamma \leq h_1\}$ [1], удовлетворяющие на лицевых поверхностях оболочки граничным условиям: при $\gamma = h_1$

$$\tau_{\alpha\gamma}^I(h_1)=0, \quad \tau_{\beta\gamma}^I(h_1)=0, \quad \tau_{\gamma\gamma}^I(h_1)=0 \quad (1.1)$$

или

$$U^I(h_1)=0, \quad V^I(h_1)=0, \quad W^I(h_1)=0 \quad (1.2)$$

а при $\gamma = -h_2$

$$U^{II}(-h_2)=u^-(\alpha, \beta)\sin(\Omega t), \quad V^{II}(-h_2)=v^-(\alpha, \beta)\sin(\Omega t), \quad W^{II}(-h_2)=w^-(\alpha, \beta)\sin(\Omega t) \quad (1.3)$$

На поверхности контакта слоёв должны выполняться условия полного контакта.

Условия на боковой поверхности не конкретизируются, в задачах данного класса ими обусловлено появление пограничного слоя [1].

2. Решение внешней задачи. Для решения сформулированных краевых задач, в динамических уравнениях теории упругости совершается переход к безразмерным координатам и перемещениям по формулам $\alpha = R\xi, \quad \beta = R\eta, \quad \gamma = \varepsilon R\zeta = h\zeta, \quad U = Ru, \quad V = Rv, \quad W = Rw, \quad h = \max\{h_1, h_2\}$, где R – характерный размер оболочки (наименьший из радиусов кривизны и линейных размеров поверхности контакта слоёв), $\varepsilon = h/R$ – малый параметр. Решение преобразованных уравнений отыскивается в виде

$$Q_{\alpha\beta}^{(j)}(x, y, z, t) = Q_1^{(j)}(\xi, \eta, \zeta)\sin(\Omega t) + Q_2^{(j)}(\xi, \eta, \zeta)\cos(\Omega t) \quad (\alpha, \beta, \gamma); \quad j = I, II \quad (2.1)$$

где $Q_{\alpha\beta}^{(j)}$ – любая из величин напряжений и перемещений, Ω – частота вынуждающего внешнего воздействия, j – номер слоя.

В результате получается сингулярно возмущенная малым параметром ε система уравнений относительно $Q_1^{(j)}, Q_2^{(j)}$, решение которой есть сумма решений внешней (outerior) задачи и пограничных (boundary) слоёв: $I = Q^{out} + R_b$ [1,2,4].

Решение внешней задачи отыскивается в виде асимптотического представления [3,4]

$$\tau_{mk,i}^{out(j)}(\xi, \eta, \zeta) = \varepsilon^{-1+s} \tau_{mk,i}^{(j,s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad m, k = 1, 2, 3; \quad s = 0, \overline{N}; \quad j = I, II; \quad i = 1, 2 \quad (2.2)$$

$$(u_i^{out(j)}(\xi, \eta, \zeta), v_i^{out(j)}(\xi, \eta, \zeta), w_i^{out(j)}(\xi, \eta, \zeta)) = \varepsilon^s (u_i^{(j,s)}(\xi, \eta, \zeta), v_i^{(j,s)}(\xi, \eta, \zeta), w_i^{(j,s)}(\xi, \eta, \zeta))$$

Подставив выражения (2.1) в полученную сингулярно-возмущённую систему уравнений, компоненты тензора напряжений выражаются через $u_i^{(j,s)}, v_i^{(j,s)}, w_i^{(j,s)}$, а для определения компонент вектора перемещения получаются уравнения:

$$\frac{\partial^2 u_i^{(I,s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55}^I \rho^I \Omega_*^2 u_i^{(I,s)} = a_{55}^I P_{6\tau i}^{(I,s-1)} + \frac{\partial P_{ui}^{(I,s-1)}}{\partial \zeta}, \quad (u, v; \quad a_{55}^I, a_{44}^I; \quad 6\tau, 5\tau)$$

$$\frac{\partial^2 w_i^{(I,s)}}{\partial \zeta^2} + \frac{\Delta^{(I)}}{\Delta_{12}^{(I)}} \rho^I \Omega_*^2 w_i^{(I,s)} = F_{wi}^{(I,s-1)} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial^2 u_p^{(II,s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55}^{II} (\rho^{II} \Omega_*^2 u_p^{(II,s)} + (-1)^{p+1} 2K \Omega_* u_{p+1}^{(II,s)}) = a_{55}^{II} P_{6\tau p}^{(II,s-1)} + \frac{\partial P_{up}^{(II,s-1)}}{\partial \zeta}, \quad (u, v; \quad a_{55}^{II}, a_{44}^{II}; \quad 6\tau, 5\tau)$$

$$\frac{\partial^2 w_p^{(II,s)}}{\partial \zeta^2} + \frac{\Delta^{(II)}}{\Delta_{12}^{(II)}} (\rho^{II} \Omega_*^2 w_p^{(II,s)} + (-1)^{p+1} 2K \Omega_* w_{p+1}^{(II,s)}) = F_{wp}^{(II,s-1)} \quad (p=1; p \leftrightarrow (p+1))$$

где $a_{ik}^{(j)}$ – постоянные упругости, $\rho^{(j)}$ – плотности слоёв, $\Delta^{(j)} = a_{11}^j \Delta_{23}^{(j)} + a_{13}^j \Delta_2^{(j)} + a_{12}^j \Delta_1^{(j)}$, $\Delta_1^{(j)} = a_{13}^j a_{23}^j - a_{33}^j a_{12}^j$, $\Delta_2^{(j)} = a_{12}^j a_{23}^j - a_{22}^j a_{13}^j$, $\Delta_3^{(j)} = a_{13}^j a_{12}^j - a_{11}^j a_{23}^j$, $\Delta_{nk}^{(j)} = a_{nn}^j a_{kk}^j - (a_{nk}^j)^2$, $n, k = \overline{1,3}$. После удовлетворения граничным условиям (1.1), (1.3), во избежание резонанса необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\Delta_{ut} = \frac{\delta_u^2 + \gamma_u^2}{2a_{55}^{II}} \cos^2 \chi^{(I,u)} \zeta_1 (\text{ch} 2\gamma_u \zeta_2 + \cos 2\delta_u \zeta_2) + \frac{(\chi^{(I,u)})^2}{2a_{55}^{I\ 2}} \sin^2 \chi^{(I,u)} \zeta_1 (\text{ch} 2\gamma_u \zeta_2 - \cos 2\delta_u \zeta_2) - \frac{\chi^{(I,u)}}{2a_{55}^{I\ 2} a_{55}^{II}} \sin 2\chi^{(I,u)} \zeta_1 (\delta_u \sin 2\delta_u \zeta_2 + \gamma_u \text{sh} 2\gamma_u \zeta_2) \neq 0, \quad (u, v, w) \quad (2.4)$$

а при граничных условиях (1.2), (1.3) – условие:

$$\Delta_{uu} = \frac{\delta_u^2 + \gamma_u^2}{2a_{55}^{II}} \sin^2 \chi^{(I,u)} \zeta_1 (\text{ch} 2\gamma_u \zeta_2 + \cos 2\delta_u \zeta_2) + \frac{(\chi^{(I,u)})^2}{2a_{55}^{I\ 2}} \cos^2 \chi^{(I,u)} \zeta_1 (\text{ch} 2\gamma_u \zeta_2 - \cos 2\delta_u \zeta_2) + \frac{\chi^{(I,u)}}{2a_{55}^{I\ 2} a_{55}^{II}} \sin 2\chi^{(I,u)} \zeta_1 (\delta_u \sin 2\delta_u \zeta_2 + \gamma_u \text{sh} 2\gamma_u \zeta_2) \neq 0, \quad (u, v, w) \quad (2.5)$$

$$\gamma_u = \sqrt{a_{55}^{II} \Omega_* / 2(\sqrt{\rho^{II\ 2} \Omega_*^2 + 4K^2} - \Omega_*)}, \quad \delta_u = \sqrt{a_{55}^{II} \Omega_* / 2(\sqrt{\rho^{II\ 2} \Omega_*^2 + 4K^2} + \Omega_*)},$$

$$\chi^{(I,u)} = \sqrt{a_{55}^{I\ 2} \rho^{I\ 2} \Omega_*}, \quad (u, v, w; a_{55}, a_{44}, \Delta / \Delta_{12})$$

В случае однослойной оболочки [3] без вязкого сопротивления всегда есть резонанс (амплитуда бесконечна), а при наличии вязкого сопротивления [5] при резонансе в оболочке амплитуда вынужденных колебаний конечна. В данном случае наличие вязкого сопротивления только в нижнем слое оболочки приводит к возникновению резонанса с неограниченной амплитудой вынужденных колебаний, так как уравнения $\Delta_{ut} = 0$, $\Delta_{uu} = 0$ (u, v, w) имеют действительные корни, которые являются значениями главных частот собственных колебаний, и при совпадении приведённой частоты вынуждающего воздействия с частотой собственных колебаний возникнет резонанс.

ЛИТЕРАТУРА

1. Aghalovyan L.A. Asymptotic Theory of Anisotropic Plates and Shells. Singapore-London. World Scientific Publishing. 2015. 375p.
2. Aghalovyan L.A., Ghulghazaryan L.G. Asymptotic solutions of non-classical boundary-value problems of the natural vibrations of orthotropic shells. ELSEVIER. Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 70. 2006.
3. Aghalovyan L.A., Ghulghazaryan L.G. Non-classical boundary-value problems of the forced vibrations of orthotropic shells. International sciences journal of Applied Mechanics. SPRINGER. T.45. N8. 2009.
4. Агаловян Л.А. О классах задач для деформируемых однослойных и многослойных тонких тел, решаемых асимптотическим методом. Механика композитных материалов. Т.47. № 1. 2011.
5. Ghulghazaryan L.G. Forced vibrations of orthotropic shells when there is viscous resistance. Journal of Applied Mathematics and Mechanics. №79. 2015.

Сведения об авторах:

Агаловян Ленсер Абгарович – академик НАН Армении, доктор физ.-мат. наук, профессор. Институт механики НАН Армении, (374 10) 529630, (374 93) 200570

E-mail: lagal@sci.am, aghal@mechins.sci.am

Гулгазарян Лусине Гургеновна – ведущий научный сотрудник, доктор физ.-мат. наук, Институт механики НАН Армении, доцент кафедры математики и методики её преподавания АГПУ им. Х. Абовяна, (374 10) 618155, (374 91) 302554, **E-mail:** lusina@mail.ru

ПРОДОЛЬНЫЙ СДВИГ СОСТАВНОГО УПРУГОГО ПРОСТРАНСТВА С КОНЦЕНТРАТОРАМИ НАПРЯЖЕНИЙ ТИПА ТРЕЩИН И ЖЁСТКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Агаян К.Л., Закарян В.Г., Мусаелян А.А.

Аннотация. Исследуется антиплоская смешанная задача для двухкомпонентного упругого пространства, содержащего произвольное конечное число трещин и жёстких включений, расположенных в полупространствах и на линии раздела материалов. Изучаются некоторые конкретные задачи с сингулярными случаями, когда концы трещин и включений отдельно или вместе выходят на линию разнородности.

Введение. Задачи для составных тел с концентраторами напряжений, в частности, задачи с частично оторванными от матрицы жёстких включений, принадлежат смешанным и контактными задачам теории упругости. Ввиду их актуальности для теоретических исследований и в расчётах инженерной практики, подобными задачами занимались многие исследователи. Здесь укажем лишь некоторые работы отечественных исследователей [1-5], цитированных там работ. При общих (одноимённых и смешанных) граничных условиях на берегах трещин построено разрывное решение рассматриваемой задачи, т.е. получены явные выражения упругих перемещений через возможные скачки заданных граничных условий.

1. Постановка задачи. Разрывное решение. Рассмотрим составное упругое пространство, состоящее из двух разных упругих полупространств. В правосторонней декартовой системе $Oxyz$ полупространства занимают области $\Omega_1 (y > 0)$ и $\Omega_2 (y < 0)$ с модулями сдвигов G_1, G_2 .

Полупространства по полосам $\left\{ x = a_{1k}, L_1^{(k)} = (a_k < y < b_k), |z| < \infty \right\}_1^{N_1}$ области Ω_1 , $\left\{ x = a_{2k}, L_2^{(k)} = (-d_k < y < -c_k), |z| < \infty \right\}_1^{N_2}$ области Ω_2 и $\left\{ L_0^{(k)} = l_k^{(1)} < x < l_k^{(2)}, y = 0, |z| < \infty \right\}_1^{N_0}$

области Ω_0 ослаблены туннельными полосами – трещинами, внутри некоторых из них могут быть спаяны жёсткие включения. Предполагается любое взаимно возможное сочетание расположения трещин и включений. Внешние нагрузки, равномерно распределённые по оси Oz , задаются на берегах трещин в виде касательных напряжений или перемещений, а также значение главного вектора в виде сосредоточенной силы, приложенной на каждом включении.

Требуется определить основные механические характеристики: контактные напряжения на заземленных берегах трещин и на линии контакта $y = 0$, коэффициенты интенсивности напряжений на концах трещин, и раскрытие берегов трещин.

Очевидно, что в такой постановке, рассматриваемая упругая система будет деформироваться в условиях продольного сдвига (антиплоская деформация) в базовой плоскости Oxy с отличным от нуля перемещением $w_j(x, y)$ – по направлению оси Oz , которая, как известно, является гармонической функцией в соответствующих областях базовой плоскости. Фундаментальное решение уравнения Лапласа в этих полуплоскостях, когда на отрезках $L_j^{(k)} (j = 1, 2)$ и $L_0^{(k)}$ расположения трещин и включений заданы, значения скачков перемещений и соответствующих напряжений представляются в виде:

$$\begin{aligned} \varphi_j(x, y) = & \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{N_0} \int_{L_0^{(k)}} \left[\mu_j \operatorname{arctg} \frac{x-\eta}{y} g'_{0k}(\eta) - \ln \sqrt{y^2 + (t-x)^2} f_{0k}(\eta) \right] d\eta + \\ & + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N_j} \int_{L_j^{(k)}} \left\{ \left[\operatorname{arctg} \frac{y-\eta}{x-a_{jk}} + \gamma \operatorname{arctg} \frac{y+\eta}{x-a_{jk}} \right] g'_{jk}(\eta) + \left[\ln \sqrt{(x-a_{jk})^2 + (\eta-y)^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \gamma \ln \sqrt{(x-a_{jk})^2 + (\eta+y)^2} \right] f_{jk}(\eta) \right\} d\eta - \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+\mu} \sum_{k=1}^{M_j} \int_{L_{mj}^{(k)}} \left[\operatorname{arctg} \frac{\eta-y}{x-a_{jk}} g'_{mj}(\eta) + \right. \end{aligned}$$

$$+ \ln \sqrt{(\eta - y)^2 + (x - a_{jk})^2} f_{mjk}(\eta) \Big] d\eta \quad (j = 1, 2) \quad (1)$$

где $\mu = G_1/G_2$, $\gamma = (1 - \mu)/(1 + \mu)$, $M_j = N_1\delta_{j2} + N_2\delta_{j1}$, $m_j = 2 - \delta_{j2}$, $\mu_j = \delta_{j1} + \mu\delta_{j2}$

$$\begin{cases} g_{jk}(y) = w_j(a_{jk} + 0, y) - w_j(a_{jk} - 0, y) \\ f_{jk}(y) = [\tau_{xz}(a_{jk} + 0, y) - \tau_{xz}(a_{jk} - 0, y)]/G_j \\ g_{0k}(x) = w_1(x, +0) - w_2(x, -0) \\ f_{0k}(x) = [\tau_{yz}(x, +0) - \tau_{yz}(x, -0)]/(G_1 + G_2) \end{cases}$$

На краях жёстких включений задаются одинаковые скачки перемещений ($g'_{jk} \equiv 0$), а скачки напряжений f_{jk} являются неизвестными функциями. В случае трещин, наоборот, неизвестны функции скачков перемещений при известных разрывах напряжений.

Удовлетворяя граничным условиям, при помощи (1), приходим к системе интегральных уравнений для каждой задачи. Присоединив к этой системе дополнительные условия, обеспечивающие непрерывность перемещений на концах трещин или же условие равновесия включений, получим разрешающую систему сингулярных интегральных уравнений.

В работе для некоторых частных (сингулярных) случаев расположения трещин и жёстких включений, построено решение этих задач. Методом механических квадратур построены их решения. Для каждого случая в результате численного анализа выявлены зависимости искомых скачков тангенциальных напряжений и смещений, имеющих место на концентраторах, от геометрических параметров и отношения модулей сдвига материалов.

Заключение. Построено решение вышепоставленной общей задачи. Во всех рассмотренных конкретных случаях проведено исследование разрешающих систем по выявлению возможных особенностей, присущих решениям системы. Эффективное решение определяющих уравнений построены методом механических квадратур (в двух случаях решение даётся в замкнутом виде).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бережницкий А.Г., Панасюк В.В., Сташук Н.Г. Взаимодействие жёстких линейных включений и трещин в деформируемом теле. Киев: Наукова Думка, 1983. 288с.
2. Мхитарян С.М. О двух смешанных задачах, связанных с вопросами взаимодействия концентраторов напряжений различных типов с массивными телами при антиплоской деформации. //В сб.: «Механика деформируемого твёрдого тела». Ереван: Изд-во НАН Армении, 1993. С.129-143.
3. Агаян К.Л. Контактная задача для бесконечной пластины о взаимодействии пересекающихся трещины и стрингеров. /В сб. трудов: «Проблемы механики деформируемого твердого тела». Ереван 2012, с. 42-47.
4. Акопян В.Н. Смешанные граничные задачи о взаимодействии сплошных деформируемых тел с концентраторами напряжений различных типов. Изд-во «Гитутюн» НАН РА, Ереван -2014, 322с.
5. Агаян К.Л., Закарян В.Г. Продольный сдвиг составного упругого пространства, ослабленного трещинами. /Труды 8-ой межд. конф. «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред», 22-25 сентября, 2014, Горис – Степанакерт. Ереван: Чартарагет – 2014, с. 23-27.

Сведения об авторах:

Агаян Каро Леренцович – д.ф.м.н., ведущий науч. сотр. Института механики НАН РА.

Закарян Ваге Гришаевич – к.ф.м.н., науч. сотр. Института механики НАН РА.

Мусаелян Артур А. – аспирант НУАСА

ОСОБЕННОСТИ СОПРОТИВЛЕНИЯ СДВИГУ ГЛИНИСТЫХ ГРУНТОВ В УСЛОВИЯХ ДИНАМИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ С МЕНЯЮЩЕЙСЯ В ШИРОКИХ ПРЕДЕЛАХ КОНСИСТЕНЦИЕЙ.

(с целью оценки устойчивости склонов)

Айроян Г.С., Айроян С.Г., Карапетян К.А.

Аннотация Обсуждаются результаты лабораторных исследований образцов глинистых пород трех различных консистенций (I_L) и влажности (w) на предмет выявления отличительных особенностей значений сопротивления сдвигу при различных режимах, в условиях циклично изменяющихся сдвигающих напряжений. Экспериментально обосновано, что внесение соответствующих поправок в принятых расчетных схемах для реальной оценки устойчивости склонов является проблемой, требующей скорейшего решения.

Основной целью данной работы является: экспериментальным путем установить, что для реальной оценки устойчивости склонов следует учитывать изменения параметров сопротивления сдвигу, которые появляются в грунтах вследствие динамических воздействий.

Следует отметить, что в малочисленных работах по данной проблеме [1,4] рассматриваемый здесь вопрос серьезно не обсуждался, а в действующих Нормам[5] вообще не упоминается явление каких-либо изменений сопротивления сдвигу в грунтах из-за динамических воздействий

Экспериментальная работа была осуществлена на модернизированном приборе кручения М-5. Как объект исследования послужили цилиндрические образцы ($h=24\text{мм.}$; $d=101\text{мм}$) глинистых грунтов при трех различных консистенциях (I_L) и влажности (w): полутвердой $I_L=0,045$, $w=0,155$; тугопластичной $I_L=0,28$, $w=0,186$; мягкопластичной $I_L=0,727$, $w=0,245$. Образцы были помещены внутри защитных колец высотой $h=2-4\text{мм.}$, что позволило во время эксперимента следить за процессом развития деформации сдвига [2,3]. Испытания образцов (5 серий по 9 образцов для каждого случая консистенции и влажности) проводились по следующей методике. Сначала, опытные образцы, предварительно находящиеся в условиях нормальных уплотняющих напряжений (с соответствующими значениями $\sigma=0,1; 0,2; 0,3\text{МПа}$), нагружались относительными сдвиговыми напряжениями $\tau_0/\tau_{f,ст}=\text{const}$, где $\tau_{f,ст}$ - стандартное сопротивление сдвигу для данного вида грунта [2]). Затем, после стабилизации деформации сдвига, образцам придавались динамические разнознаковые напряжения сдвига $\Delta\tau = \pm (\tau_{f,ст}-\tau_0)$ различной частоты f и проводились замеры колебания амплитуды деформации через каждые 10; 30; 60; 120; 360 секунд.

Таблица

NN	Влажность, W	Показатель консистенции I_L	Коэффициент внутреннего трения		Сцепление	
			Статический $\text{tg}\varphi_{ст.}$	Динамический $\text{tg}\varphi_{дин.}$	Статическое $C_{ст.}, \text{МПа}$	Динамическое $C_{динам.}, \text{МПа}$
1	0,155	0,045	0,421	0,379	0,018	0,015
2	0,186	0,280	0,338	0,257	0,016	0,013
3	0,245	0,727	0,224	0,124	0,018	0,005

Полученные результаты, представленные в виде графиков и таблиц были тщательно проанализированы.

Выводы

Колебания напряжений сдвига, возникающие по разным причинам, могут привести к уменьшению способности грунта сопротивляться сдвигу, степень которого существенно будет зависеть от консистенции грунта (I_L), от величины относительного статического напряжения сдвигу $\tau_0/\tau_{f,st}$, от частоты f колебаний динамических сдвиговых $\pm\Delta\tau$ напряжений.

При этом когда:

$\tau_0/\tau_{f,st} < 0,7$ и $f < 12$ герц, в грунтах с полутвердой и тугопластичной консистенций истощение сопротивления сдвигу не происходит;

$\tau_0/\tau_{f,s} > 0,7$ и $8 < f < 12$ герц в грунтах с полутвердой и тугопластичной консистенцией наблюдается постепенное уменьшение и истощение сопротивления сдвигу. Необходимое время для истощения сопротивления сдвигу с увеличением $\tau_0/\tau_{f,s}$ и f уменьшается;

$\tau_0/\tau_{f,st} > 0,4$ и $f > 6$ герц в грунтах с мягкопластичной консистенцией всегда происходит истощение сопротивления сдвигу, и в этом случае необходимое время для истощения сопротивления сдвигу с увеличением значения $\tau_0/\tau_{f,st}$ и f уменьшается.

Таким образом, на основании анализа результатов, проведенных экспериментальных исследований, можно утверждать, что внесение соответствующих поправок действующих расчетных схемах для реальной оценки устойчивости склонов является проблемой, требующей скорейшего решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вознесенский Е.А. Поведение грунтов при динамических нагрузках: Учебное пособие.-М Изд-во МГУ, 1997.-288с.
2. Месчан С.Р. Экспериментальная реология глинистых грунтов. Ер.; Гитутюн НАН РА. 2005; 495с.
3. Тер-Мартirosян З.Г. Прошин М. В. Кратковременная и длительная устойчивость склонов //ОФМГ, N 2-2002 с.2-5
4. Трофимов В.Т.; Королев В.А. Вознесенский Е.А., Голодковская Г.А., Васильчук Ю.К.; Зиянгиров Р.С. Грунтоведение . М.; Изд.МГУ, 2005, 1024 с.
5. СНРА II-6.-2006

Сведения об авторах

Айроян Грач Саркисович –аспирант кафедры гидрогеологии и инженерной геологии, Ереванский государственный университет, факультет географии и геологии,

Айроян Саркис Грачикович-доктор геологических наук, завед. кафедры гидрогеологии и инженерной геологии, Ереванский государственный университет, факультет географии и геологии,

Карпетян К. А.-доктор технических наук, завед.лабораторией экспериментальных исследований Института механики НАН РА

НАПРЯЖЁННОЕ СОСТОЯНИЕ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО РАВНОМЕРНО СЛОИСТОГО ПРОСТРАНСТВА С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВНУТРЕННИХ ТРЕЩИН

Акопян В.Н., Акопян Л.В.

Аннотация. В настоящей работе исследовано антиплоское напряжённое состояние равномерно кусочно-однородного пространства, полученного поочерёдным соединением двух разнородных слоёв равной толщины из различных материалов, которые на своих срединных плоскостях расслаблены периодическими параллельными туннельными трещинами. Записана система определяющих сингулярных интегральных уравнений и показаны пути их решений в общем случае. В одном конкретном случае, когда в разнородных слоях имеются одинаковые центральные трещины, получено замкнутое решение задачи.

Введение

Одним из развивающихся направлений теории контактных и смешанных задач математической теории упругости являются периодические и двояко-периодические задачи для упругих однородных массивных тел с трещинами. Многие результаты, полученные в этом направлении, приведены в монографиях [1]. Число исследованных аналогичных задач для кусочно-однородных тел очень мало. Рассмотрены лишь несколько антиплоских и плоских периодических задач для составного двухкомпонентного пространства и несколько периодических и двояко-периодических задач для равномерно кусочно-однородных тел с межфазными трещинами. Среди них отметим работы [2-4].

1. Постановка задачи и вывод разрывных решений

Рассмотрим антиплоское напряжённое состояние кусочно-однородного пространства, изготовленного при помощи поочерёдного соединения двух разнородных слоёв толщины $2h$ с модулями сдвигов G_1 и G_2 , на срединных плоскостях которых $y = (2n+1)h$ ($n \in \mathbb{Z}$) соответственно по бесконечным полосам L_1 и L_2 ($-\infty < z < \infty$), состоящих соответственно из совокупности конечного числа непересекающихся интервалов (a_j, b_j) ($j = 1-n$) и (c_i, d_i) ($i = 1-m$), разнородных слоёв содержит периодическую систему туннельных параллельных трещин. Будем считать, что пространство деформируется под воздействием одинаковых, противоположно направленных распределённых нагрузок $\tau_0^{(1)}(x)$ и $\tau_0^{(2)}(x)$, действующих соответственно на берегах трещин в разнородных слоях.

Ставится задача: построить решение поставленной задачи, выяснить закономерности изменения коэффициента интенсивности напряжений в концевых точках трещин и раскрытия трещин в зависимости от упругих характеристик разнородных слоёв.

Поставленная задача математически формулируется в виде граничной задачи для двухкомпонентного слоя между плоскостями $y = \pm h$, решение которой, при помощи преобразования Фурье сводится к решению системы определяющих сингулярных интегральных уравнений относительно производной от смещений берегов трещин. Нетрудно показать, что в общем случае, когда L_1 и L_2 – произвольные, определяющую систему можно решить методом ортогональных многочленов Чебышева или методом механических квадратур.

2. Напряжённое состояние кусочно-однородного пространства с периодической системой одинаковых параллельных внутренних трещин

Для простоты рассмотрим частный случай поставленной задачи, когда трещины в разнородных слоях одинаковые $L_1 = L_2 = (-a, a)$. В этом частном случае решение задачи сводится к решению двух независимых сингулярных интегральных уравнений, допускающих

замкнутые решения. Получены явные виды производных от смещений точек берегов трещин и коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений. В случае, когда $\tau_0^{(1)}(x) = \tau_0^{(2)}(x) = \tau_0(x)$, они имеют вид:

$$W_j'(x) = \frac{(-1)^j}{2hG_j\omega_*(x)} \int_{-a}^a \frac{\omega_*(\xi)\tau_0(s)ds}{\operatorname{sh}\mu(s-x)}; \quad \left(\omega_*(x) = \sqrt{ch(2\mu a) - ch(2\mu x)}\right);$$

$$K_{III}^{(j)}(\pm a) = \mp \frac{1}{\pi\sqrt{h}\sqrt{\operatorname{sh}(2\mu a)}} \int_{-a}^a \frac{\omega_*(s)\tau_0(s)ds}{\operatorname{sh}\mu(s \mp a)}; \quad (j=1,2; \mu = \pi/2h).$$

Отсюда видно, что коэффициенты интенсивности разрушающих напряжений не зависят от механических свойств материалов слоёв.

Заключение

Построены определяющие уравнения антиплоской задачи теории упругости для равномерно кусочно-однородного пространства с туннельными параллельными внутренними трещинами. Показано, что в случае, когда трещины в разнородных слоях одинаковые, можно построить замкнутые решения этих уравнений. Построены решения в случае, когда в разнородных слоях имеются одинаковые центральные трещины. Получены также простые формулы для определения коэффициентов интенсивности в концевых точках трещин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова думка, 1976. 443с.
2. Мкртчян М.С., Мхитарян С.М. К задаче о напряжённом состоянии составного упругого бесконечного тела с периодической системой коллинеарных трещин при продольном сдвиге. // Доклады АН Арм. ССР. 1993. Т.94. №2. С.104-110.
3. Акопян В.Н. Смешанная задача для составной плоскости, ослабленной периодической системой трещин // Доклады НАН Армении. 2002. Т.102. №1. С. 29-34.
4. Акопян В.Н., Даштоян Л.Л. Двоякопериодическая задача для кусочно-однородной плоскости с трещинами // Сборник трудов IV-ой международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды», Ереван-2015. С.33-37
5. Акопян В.Н., Акопян Л.В. Напряжённое состояние кусочно-однородного пространства с периодической системой параллельных межфазных дефектов // Сборник трудов IV-ой международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды», Ереван-2015. С.28-32.

Сведения об авторах:

Акопян Ваграм Наслетникович – доктор физ.-мат. наук, проф., директор Института механики НАН Армении, тел.: (37410) 52-48-90, e-mail: vhakobyan@sci.am

Акопян Лусине Ваграмовна – кандидат физ.-мат. наук, научный сотрудник Института механики НАН РА, тел.: (37410) 52-48-90

НАПРЯЖЁННОЕ СОСТОЯНИЕ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ РАВНОМЕРНО СЛОИСТОЙ ПЛОСКОСТИ С ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ ВНУТРЕННИХ ТРЕЩИН

Акопян В.Н., Даштоян Л.Л.

Аннотация. В работе рассмотрено плоско-деформированное состояние кусочно-однородной, равномерно слоистой плоскости, полученной путём поочерёдного соединения двух разнородных полос равных высот, на срединных линиях которых имеются двоякопериодические системы трещин. Получена система определяющих сингулярных интегральных уравнений относительно плотностей дислокации трещин и указаны пути её решений. В случае, когда только одна из разнородных полос содержит одну двояко-периодически повторяющуюся трещину, построено решение задачи методом механических квадратур.

Введение

Исследованию периодических и двоякопериодических задач для массивных однородных тел с трещинами посвящено огромное количество работ. Из них отметим монографии [1], где подытожены основные результаты, полученные в этом направлении. Периодические и двоякопериодические задачи для кусочно-однородных равномерно слоистых тел с межфазными дефектами рассмотрены в работах [2-4]. Что же касается исследования напряжённо-деформированного состояния кусочно-однородных равномерно слоистых тел с внутренними двоякопериодическими трещинами, как нам известно, здесь рассматривается впервые.

1. Постановка задачи и вывод определяющих уравнений

Пусть кусочно-однородная упругая плоскость, отнесённая к декартовой системе координат Oxy , изготовленная при помощи поочерёдного соединения полос толщины $2h$ из разнородных материалов с коэффициентами упругости E_1, E_2 и коэффициентами Пуассона ν_1 и ν_2 на срединных линиях разнородных полос $y = (2n+1)h$ ($n \in Z$) по линиям L_1 и L_2 , состоящей из совокупности конечного числа непересекающихся интервалов и симметрично расположенных относительно линии $x = 2nl$ ($n \in Z$), содержит периодические с периодом $2l$ одинаковые внутренние трещины. Будем считать, что плоскость деформируется под воздействием симметричных относительно линий $x = 2nl$ ($n \in Z$), одинаковых нагрузок, приложенных к берегам трещин таким образом, что линии $x = (2n+1)l$ и $(n \in Z)$ являются линиями симметрии. Вследствие этого, поставленную $y = (2n+1)h$ задачу можно сформулировать как задачу для кусочно-однородного прямоугольника (базовой ячейки), занимающей на плоскости область $\Omega\{|x| \leq l; |y| \leq H\}$, на границах и $y = \pm h$ которого вне трещин заданы условия симметрии, а на берегах трещин – нормальные напряжения соответственно интенсивностей $P_0^{(j)}(x)$ ($j = 1, 2$).

Ставится задача: построить решения поставленной задачи, выяснить закономерности изменения коэффициента интенсивности напряжений в концевых точках трещин и раскрытия трещин в зависимости от упругих и геометрических характеристик задачи.

Решение поставленной задачи при помощи функции напряжений Эри сводится к системе сингулярных уравнений относительно производных от нормальных смещений точек берегов трещин $V_j(x)$ ($j = 1, 2$). Показано, что в общем случае полученную систему можно решить как при помощи аппарата ортогональных многочленов Чебышева, так и методом механических квадратур [4,5].

2. Кусочно-однородная плоскость с двоякопериодической системой внутренних трещин, расположенных в одной из повторяющихся полос

Не останавливаясь на решении задачи в общем случае, в качестве примера рассмотрим случай, когда имеется периодически повторяющаяся одна трещина, занимающая на краю базовой ячейки $y = h$ интервал $(a_1, b_1) = (-a, a)$. В этом частном случае определяющее сингулярное интегральное уравнение имеет вид:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{V_1'(s) ds}{s-x} + \int_{-a}^a R_{11}(s-x) V_1'(s) ds = f_1(x) \quad (|x| < a)$$

при условии

$$\int_{-a}^a V_1'(s) ds = 0,$$

где $R_{11}(x)$ и $f_1(x)$ – заданные регулярные функции.

Решение этого уравнения построено методом механических квадратур [4]. Проведён численный расчёт в случае, когда $P_0^{(1)}(x) = \text{const.}$, и изучены закономерности изменения раскрытия трещины и безразмерного коэффициента интенсивности в концевых точках трещины в зависимости от соотношения модулей Юнга разнородных полос $\mu = E_2 / E_1$ при заданных значениях остальных параметров. Показано, что при возрастании параметра μ как раскрытие трещины, так и коэффициенты интенсивности напряжений уменьшаются, стремясь к определённому пределу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова думка, 1976. 443с.
2. Акопян В.Н., Даштоян Л.Л. Двоякопериодическая задача для кусочно-однородной плоскости с трещинами // Сборник трудов IV-ей международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды», Ереван-2015. С.33-37.
3. Hakobyan V., Dashtoyan L. Doubly periodic problem for piecewise homogeneous plane with absolutely rigid inclusions // Proceedings of 8th International Conference Contemporary Problems of Architecture and Construction, Yerevan, 2016, pp.125-128.
4. Саакян А.В. Метод дискретных особенностей в применении к решению сингулярных интегральных уравнений с неподвижной особенностью. // Известия НАН Армении. Механика. 2000. Т.53. № 3. С.12-19.
5. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488с.

Сведения об авторах:

Акопян Ваграм Наслетникович – доктор физ.-мат. наук, профессор, директор Института механики НАН Армении, тел.: (37410) 52-48-90, e-mail: vhakobyan@sci.am

Даштоян Лилит Левоновна – кандидат физ.-мат. наук, учёный секретарь Института механики НАН Армении, тел.: (37410) 56-81-89, e-mail: lilit_dashtoyan@mechins.sci.am

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ИЗГИБА БАЛОК НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Амирбемян А.Н., Мкртчян М.М., Шекян Л.А.

Аннотация. В рамках теории С.П. Тимошенко [1] об обобщённой модели изгиба балок, где помимо поперечных сил, продольные сжимающие или растягивающие осевые силы также влияют на прогибы балок, проведено теоретическое исследование одного класса контактных задач изгиба одной, двух или периодической системы балок на упругом основании в условиях плоской деформации.

Задачи формулируются относительно действующих в контактной области нормальных контактных напряжений к соответствующему сингулярному интегральному уравнению (СИУ). Эффективное решение этих СИУ получается непосредственным применением к ним известного численно-аналитического метода [2,3], основанного на квадратурных формулах Гаусса для интегралов типа Коши и обычных интегралов с привлечением математического аппарата многочленов Чебышева.

Введение

Проблемы, связанные с исследованием конструкций, лежащих на упругом основании, представляют собой одно из актуальных, сложных и наиболее интересных задач теории упругости. Обширные классы задач об изгибе тонкостенных элементов в виде балок, плит, оболочек на деформируемых основаниях различных форм и в рамках различных физических допущений, тесно примыкающие к классическим контактным задачам теории упругости, ввиду их актуальности и практической значимости стали предметом исследования многих авторов [4,5].

1. Постановка задач

В условиях плоской деформации рассматриваются задачи об изгибе одной балки, двух балок, а также периодической системы балок на нижней упругой полуплоскости под действием заданных вертикальных распределённых сил интенсивностью $q(x)$ и осевых сжимающих или растягивающих сил T , приложенных на концевых точках срединной линии балок.

Ставится задача: определить влияние осевых сжимающих или растягивающих сил на прогибы балок $v_1 = v_1(x)$, законы распределения изгибающих моментов $M(x)$ и перерезающих сил $Q(x)$ в поперечных сечениях балок, а также контактных давлений $p(x)$, действующих между балками и полуплоскостью.

2. Вывод и решение определяющих уравнений поставленных плоских контактных задач

Дифференциальное уравнение изгиба одинарной горизонтальной балки поперечными распределёнными силами $q(x)$ и $p(x)$, учитывая при этом по теории С.П. Тимошенко влияние осевых сжимающих сил T на срединной линии балки, имеет вид:

$$D \frac{d^4 v_1}{dx^4} + T \frac{d^2 v_1}{dx^2} = p(x) - q(x), \quad (x \in L) \quad (1)$$

где D – жёсткость балки на изгиб, L – область контакта. Дифференциальные уравнения (1) рассматриваются при граничных условиях, указывающих отсутствие изгибающих моментов в концах балок.

Путём интегрирования дифференциального уравнения (1) получено аналитическое выражение прогибов балки $v_1(x)$, при этом рассмотрен только случай, когда величина осевых сжимающих сил не превышает первое критическое значение, полученного формулой Эйлера об устойчивости балки при осевом сжатии, когда изгибающие моменты в концах балки отсутствуют. Аналогичным образом (заменяя в (1) T на $-T$) получены также прогибы горизонтальной упругой балки при указанных выше поперечных нагрузках и при осевых растягивающих силах, приложенных также на концевых точках срединной линии балки.

Далее приведены аналитические выражения вертикальных перемещений $v_2(x)$, которые получают граничные точки упругой нижней полуплоскости под действием нормальных контактных давлений $p(x)$ для рассмотренных всех трёх контактных задач, предполагая, что полуплоскость находится в условиях плоской деформации. Теперь, учитывая выражения $v_1(x)$ и $v_2(x)$, условие контакта задачи об изгибе балки длиной $2a$ на нижней полуплоскости, записанной в виде $v_1'(x) = v_2'(x)$ $x \in (-a, a)$, представляется относительно контактных давлений $p(x)$ сингулярное интегральное уравнение (СИУ), которое в безразмерных величинах имеет вид:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\beta \varphi(\eta) d\eta}{\eta - \xi} + \frac{\lambda}{\pi} \int_{-1}^1 K(\xi, \eta) \varphi(\eta) d\eta = \frac{\lambda}{\pi} f(\xi) + \gamma, \quad \xi \in (-1, 1) \quad (2)$$

где $\beta \varphi(\xi)$ – безразмерное контактное давление, γ – неизвестный параметр, характеризующий угол поворота центрального поперечного сечения балки, а параметр λ и регулярные функции $K(\xi, \eta)$, $f(\xi)$ – известные. В аналогичных СИУ, полученных при решении контактных задач об изгибе двух балок или периодической системы балок на упругой полуплоскости, перейдена к новым переменам, и, в итоге, получены соответствующие СИУ вида (2). При решении указанных контактных задач, соответствующие СИУ рассматриваются с условиями равновесия балок.

Применяя известный численно-аналитический метод [2,3], решение каждого из указанных СИУ при соответствующих дополнительных условий сведено к конечной замкнутой системе линейных алгебраических уравнений. Далее приводятся результаты численного анализа основных механических характеристик задачи и выясняется эффект влияния на них сжимающих и растягивающих осевых сил, действующих на срединной линии каждой балки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер. Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 635с.
2. Erdogan F., Gupta G.D., Cook T.S. The numerical solutions of singular integral equations. Methods of Analysis and solution of crack problems, pp 368-425, Noordhoff Intern. Publ., 1973.
3. Theocaris P. S., Ioakimidis N. I. Numerical Integration Methods for the Solution of Singular Integral Equations. // Quart. Appl. Math., vol. 35, №1, 1997. P. 173-185.
4. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: Физматгиз, 1960. 491 с.
5. Корнев Б.Г. Вопросы расчета балок и плит на упругом основании. М.: Госстройиздат, 1954. 232 с.

Сведения об авторах:

Амирбекян Аревик Норайровна – внештатный научный сотрудник, Институт механики НАН РА. Тел.: (+37494)158590. E-mail: a.amirbekyan@mail.ru

Мкртчян Мгер Мушегович – мл. науч. сотрудник, Институт механики НАН Армении, Тел.: (+37493)462850, E-mail: mmkrtchyan66@gmail.com

Шекян Лаврентий Арамович – докт. физ.-мат. наук, проф., ведущий научный сотрудник, Институт механики НАН Армении. Тел: (+37499)283440. E-mail: lshekyan@mail.ru

УСЛОВИЕ ПЕРЕХОДА В НЕСТАБИЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ (ШЕЙКООБРАЗОВАНИЕ) МЕТАЛЛИЧЕСКОГО ОБРАЗЦА ПРИ РАСТЯЖЕНИИ

Арутюнян А.Р., Арутюнян Р.А.

Аннотация. С учётом текущего коэффициента поперечной деформации сформулировано условие перехода в неустойчивое состояние для сжимаемой пластической среды.

Типичная диаграмма напряжение-деформация для металлического образца, полученная в опытах на простое растяжение, показана на рис.1, где $\sigma = P / F = \sigma_0 F_0 / F$ – истинное напряжение, P – сила, $\sigma_0 = P / F_0$ – условное (номинальное) напряжение, $\varepsilon_0 = l - l_0 / l_0$ – условная, $\varepsilon = \ln(l / l_0)$ – логарифмическая деформации, l_0, F_0 – начальные, l, F – текущие длина и площадь поперечного сечения стержня.

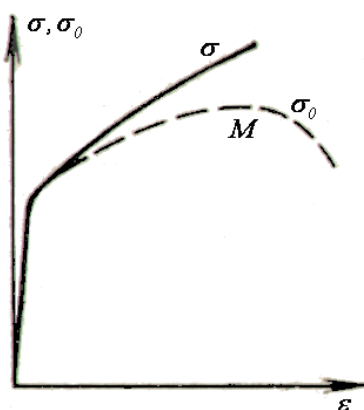


Рис. 1. Диаграмма напряжение-деформация в истинных и условных напряжениях.

В точке M на рис.1 условное напряжение достигает максимума, на образце возникает шейка и процесс деформирования становится неустойчивым. Для определения условия достижения максимума в точке M (рис.1) принимается условие несжимаемости $l_0 F_0 = l F$ и формулируется соотношение [1-2]

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \sigma, \quad (1)$$

В реальных металлических материалах в процессе пластической деформации, в особенности в области неустойчивости, возникают многочисленные повреждения (поры, трещины), поэтому при формулировке условия перехода в неустойчивое состояние необходимо учитывать процессы разрыхления и считать материал сжимаемым. Эти процессы можно учесть с помощью текущего коэффициента поперечной деформации

$$v = -\frac{\ln R / R_0}{\ln l / l_0}, \quad (2)$$

где R_0 – начальный, R – текущий радиус поперечного сечения образца.

Принимая во внимание соотношение $F_0 / F = (l / l_0)^{2v}$ [3], имеем $P = \sigma F_0 e^{-2v\varepsilon}$. Дифференцируя это соотношение по ε и принимая условие достижения максимума на кривой напряжение-деформация $dP / d\varepsilon = 0$, получим условие перехода в неустойчивое состояние

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = 2\sigma v + 2\sigma\varepsilon \frac{dv}{d\varepsilon} \quad (3)$$

Согласно опытам можно считать $dv / d\varepsilon = 0$ в точке максимума, тогда из (3) следует [4]

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = 2\nu\sigma \quad (4)$$

Для несжимаемого материала $\nu = 1/2$ и соотношение (4) совпадает с формулой (1). В приложении рассматривается уравнение жёстко-пластической среды Людвига, записанное через текущий коэффициент поперечной деформации ν

$$\sigma_0 = (\sigma_T + b\varepsilon^m) e^{-2\nu\varepsilon}, \quad (5)$$

где σ_T – предел текучести, b , m – постоянные.

Теоретические кривые (5) при $\sigma_T = 200 \text{ МПа}$, $b = 5 \cdot 10^2 \text{ МПа}$, $m = 0,5$ и для различных значений ν показаны на рис.2.

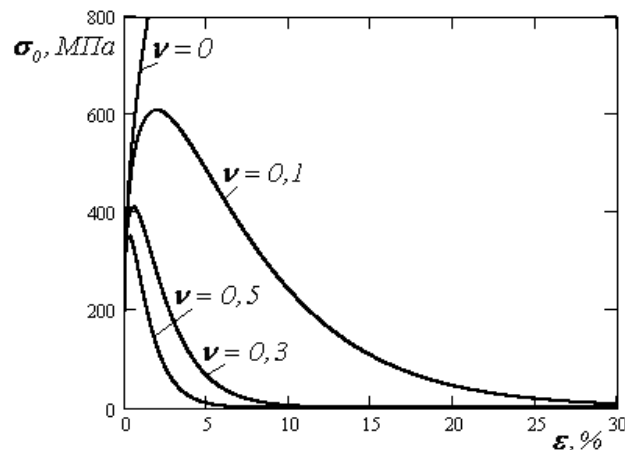


Рис. 2. Теоретические кривые согласно формуле (5).

ЛИТЕРАТУРА

1. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 408с.
2. Качанов Л.М. Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974. 311с.
3. Арутюнян Р.А. Проблема деформационного старения и длительного разрушения в механике материалов. С.-Петербург: Изд-во СПбГУ, 2004. 253с.
4. A.R. Arutyunyan, R. A. Arutyunyan. The condition of transition to unstable state (necking) of a compressible elastic-plastic medium // Materials Physics and Mechanics 2017, 31. 89-92 p.

Сведения об авторах:

Арутюнян Александр Робертович – кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, математико-механический факультет, Санкт-Петербургский государственный университет, тел.: + 7 (812) 4284245, E-mail: a.arutyunyan@spbu.ru

Арутюнян Роберт Ашотович – профессор, доктор физ.-мат. наук, математико-механический факультет, Санкт-Петербургский государственный университет, тел.: + 7 (812) 5266591, E-mail: r.arutyunyan@spbu.ru

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ВНЕШНОСТИ КРУГОВОЙ ЛУНОЧКИ

Арутюнян Л.А., Едоян В.А.

Аннотация. Рассматривается плоская задача внешности круговой луночки при смешанных граничных условиях. В биполярной системе координат, при помощи автоморфных функций, решение задачи приводится к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода.

Внешние задачи для этой области решаются в несколько видоизменной системе биполярных координат [1]:

$$gx = \sin \beta, \quad gy = \operatorname{sh} \alpha, \quad ag = \operatorname{ch} \alpha - \cos \beta, \quad a - \text{размерный параметр.} \quad (1)$$

Задача решается при помощи функции напряжений $\phi(\alpha, \beta)$, которая удовлетворяет бигармоническому уравнению [1]

$$\left[\frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right] (g\phi) = 0 \quad (2)$$

Бигармоническую функцию $\phi(\alpha, \beta)$ ищем в виде интеграла Фурье

$$g\phi(\alpha, \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[A_1(t) \operatorname{cht}(\beta_2 - \beta) \cos(\beta - \beta_1) + A_2(t) \operatorname{cht}(\beta - \beta_1) \cos(\beta_2 - \beta) + \right. \\ \left. + A_3(t) \operatorname{sht}(\beta_2 - \beta) \sin(\beta - \beta_1) + A_4(t) \operatorname{sht}(\beta - \beta_1) \sin(\beta_2 - \beta) \right] e^{-id\alpha} dt \quad (3)$$

На линии $\beta = \beta_1$ заданы перемещения, а на линии $\beta = \beta_2$ – напряжения:

$$u(\alpha, \beta_1) = u_0(\alpha); \quad v(\alpha, \beta_1) = v_0(\alpha); \quad g\phi(\alpha, \beta) \Big|_{\beta=\beta_2} = \sigma_0(\alpha), \quad \frac{\partial(g\phi)}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\beta_2} = \tau_0(\alpha) \quad (4)$$

Подставляя (3) в (4), учитывая связь напряжений и перемещений в биполярных координатах через функции напряжений $\phi(\alpha, \beta)$ [1], получаем характеристическую систему сингулярных интегральных уравнений:

$$\sum_{m=1}^2 a_{km}(t) X_m(t) = \frac{K(t)}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E'(\tau) X_k(\tau)}{E(\tau) - E(t)} d\tau + c_k(t) \quad (k=1, 2), \quad (5)$$

где

$$a_{11}(t) = (\lambda_1^2 - 1) \operatorname{sh}^2 t\gamma + (\lambda_1 - 1)^2 t^2 \sin^2 \gamma + \lambda_1 t \sin 2\gamma + \lambda_1^2 \\ a_{12}(t) = e^{-2t(\pi + \beta_1)} \left[(\lambda_1^2 + 1) \operatorname{sh}^2 t\gamma + \lambda_1 \operatorname{sh} 2t\gamma + (\lambda_1^2 - 1)^2 t^2 \sin^2 \gamma + \lambda_1^2 \right] \\ a_{21}(t) = a_{12}(-t); \quad a_{22}(t) = a_{11}(-t); \quad K(t) = 2i\lambda_1 t \sin^2 \gamma; \quad E(t) = e^{2\pi t} \\ c_1(t) = 2\lambda_1 e^{-t(2\pi + \beta_1)} \left\{ [\bar{u}_0(t) + \bar{v}_0(t)] t \sin^2 \gamma - \bar{\sigma}_0(t) [\operatorname{sht} \gamma \cos \gamma + t \operatorname{cht} \gamma \sin \gamma + \right. \\ \left. + \lambda_1 (\operatorname{cht} \gamma \cos \gamma + t \operatorname{sht} \gamma \sin \gamma)] + \bar{\tau}_0(t) \sin \gamma (\operatorname{sht} \gamma + \lambda_1 \operatorname{cht} \gamma) \right\} \\ c_2(t) = 2\lambda_1 e^{t\beta_1} \left\{ [\bar{u}_0(t) - \bar{v}_0(t)] t \sin^2 \gamma - \bar{\sigma}_0(t) [\operatorname{sht} \gamma \cos \gamma + t \operatorname{cht} \gamma \sin \gamma - \right. \\ \left. - \lambda_1 (\operatorname{cht} \gamma \cos \gamma + t \operatorname{sht} \gamma \sin \gamma)] - \bar{\tau}_0(t) \sin \gamma (\operatorname{sht} \gamma - \lambda_1 \operatorname{cht} \gamma) \right\} \\ \gamma = \beta_2 - \beta_1, \quad \lambda_1 = 2 + \frac{\lambda}{\mu}, \quad \bar{\sigma}_0(t), \quad \bar{\tau}_0(t), \quad \bar{u}_0(t) \quad \text{и} \quad \bar{v}_0(t) \quad \text{преобразование Фурье от функции} \\ \bar{\sigma}_0(\alpha), \quad \bar{\tau}_0(\alpha), \quad \bar{u}_0(\alpha) \quad \text{и} \quad \bar{v}_0(\alpha). \quad (6)$$

Коэффициенты $A_k(t)$ $k=(1, 2, 3, 4)$ через $X_1(t)$ и $X_2(t)$ выражаются формулами:

$$\begin{aligned}
A_1(t) &= \frac{F_1(t)}{\Delta(t)}; \quad A_2(t) = \frac{F_2(t)}{\Delta(t)}; \quad \Delta(t) = \operatorname{sh}^2 t\gamma + \sin^2 \gamma \\
A_3(t) &= \frac{F_1(t)}{t \sin^2 \gamma} + \frac{F_2(t)}{\Delta(t)} \frac{\operatorname{sh} t\gamma}{\sin \gamma} + \left[e^{t(2\pi+\beta_1)} X_1(t) - e^{-t\beta_1} X_2(t) \right] \frac{\operatorname{sh} t\gamma}{2\lambda_1 t \sin^2 \gamma} - \frac{\bar{\tau}_0(t)}{t \sin \gamma} \\
A_4(t) &= \frac{F_1(t)}{\Delta(t)} \frac{\operatorname{sh} t\gamma}{\sin \gamma} - \left[e^{t(2\pi+\beta_1)} X_1(t) - e^{-t\beta_1} X_2(t) \right] \frac{\operatorname{sh} t\gamma}{2\lambda_1 t \sin \gamma} \\
F_1(t) &= \left[e^{t(2\pi+\beta_1)} X_1(t) + e^{-t\beta_1} X_2(t) \right] \frac{\operatorname{ch} t\gamma}{2} - \bar{\sigma}_0(t) \cos \gamma \\
F_2(t) &= - \left[e^{t(2\pi+\beta_1)} X_1(t) + e^{-t\beta_1} X_2(t) \right] \frac{\cos \gamma}{2} + \bar{\sigma}_0(t) \operatorname{ch} t\gamma
\end{aligned}
\tag{7}$$

Введём однопериодические автоморфные функции

$$R_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E'(\tau) X_k(\tau)}{E(\tau) - E(z)} d\tau \quad (k=1,2) \tag{8}$$

По формуле Сохоцкого–Племеля интегральные уравнения (5) сведём к краевой задаче Римана–Гильберта [2,3]. Решение этого уравнения приводится путем регуляризации, т.е. приведением к интегральному уравнению Фредгольма [3].

$$\begin{aligned}
R^-(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E'(\tau)}{E(\tau) - E(t)} \left[(G(t))^{-1} G(\tau) - E_0 \right] R^-(\tau) d\tau + \\
&+ \frac{(G(t))^{-1}}{2} \left[\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E'(\tau) H(\tau)}{E(\tau) - E(t)} d\tau - H(t) \right]
\end{aligned}
\tag{9}$$

где $G(t)$ – матрица коэффициентов полученных систем, а $H(t)$ – векторы свободных членов, E_0 – единичная матрица. После несложных преобразований векторные уравнения (9) приводятся к уравнениям относительно $X_k(t)$ ($k=1,2$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1968. 402с.
2. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511с.
3. Чибрикова Л.И. О краевой задаче Римана для автоморфных функций. //Уч. Зап. Казанского Ун-та. 1956. Т.116, кн.4. С.59–110.

Сведения об авторе:

Арутюнян Левон Арсенович – к.ф.м.н., Институт механики НАН Армении. 099 675747,
e-mail: mechins@sci.am
Едоян Вардгес Айкович – к.ф.м.н., ЕГУАС, 093 984040,
E-mail: edoyan@nuasa.am

ОТРАЖЕНИЕ УПРУГОЙ СДВИГОВОЙ ВОЛНЫ ОТ ПОВЕРХНОСТИ ФЕРРОМАГНИТНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Атоян Л.А., Терзян С.А.

Аннотация. Предлагаемая работа посвящена изучению вопроса отражения и преломления упругой сдвиговой волны, падающей из немагнитной упругой среды на поверхность упругого ферромагнитного полупространства, примыкающего к немагнитной среде.

1. Постановка задачи. Декартова система координат выбирается так, что плоскость xOz совпадает с поверхностью соприкосновения двух полупространств, а ось Oy направлена вглубь ферромагнитной среды. Уравнение в немагнитной среде имеет вид:

$$\ddot{w}_1 = c_{t1}^2 \Delta w_1, \quad (1)$$

система уравнений, описывающая волновой процесс в ферромагнетике, представляется в следующем виде:

$$\begin{aligned} \ddot{w} &= c_t^2 \Delta w + f M_0 (\mu_{,x} + \mu_{,y}) \\ \dot{\mu} &= \omega_M (\hat{b} v + \bar{b} \mu_0 w_{,y}) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\dot{v} = -\omega_M (\hat{b} \mu + \bar{b} \mu_0 w_{,x})$$

где $c_{t1}^2 = G_1/\rho_1$, $c_t^2 = G/\rho$, $\hat{b} = b + H_0/M_0$, $\bar{b} = b + f$, H_0 – напряжённость внешнего магнитного поля, b и f – коэффициенты пьезомагнитной связи, G_1, ρ_1 и G, ρ – модули сдвигов и плотности материалов обеих сред, M_0 – объёмная плотность намагниченности насыщения ферромагнетика, $\mu_0 = \frac{1}{\rho} M_0$ – массовая плотность намагниченности насыщения, $\omega_M = \gamma M_0$,

γ – гиромагнитное отношение, w, w_1 – перемещения, μ, v – компоненты вектора намагниченности $\vec{\mu}$ по осям координат Ox и Oy .

В системе (2) возмущение напряжённости магнитостатического поля и обменное взаимодействие не учтены. Условия непрерывности перемещений и напряжений на границе $y = 0$ представляются в виде:

$$[w_1]_{y=0} = [w]_{y=0}, \quad [\sigma_{yz}^{(1)}]_{y=0} = [\sigma_{yz}]_{y=0} \quad (3)$$

где $\sigma_{yz}^{(1)} = G_1 \frac{\partial w_1}{\partial y}$, $\sigma_{yz} = G \frac{\partial w}{\partial y} + \bar{b} M_0 v$, $w_1 = w_{1n} + w_{10}$; w_{1n}, w_{10} – падающая и отражённая волны, [1,4].

Задача заключается в том, чтобы выяснить вопрос существования отражённой и преломленной волн, а также найти зависимости их параметров от параметров падающей волны. Похожие задачи рассматривались и в работах [1-4].

2. Решение задачи. Решения уравнения (1) и системы (2) ищутся в виде плоских гармонических волн, в результате мы приходим к дисперсионным уравнениям в магнитной и немагнитной средах:

$$k_2^2 = \omega^2/c_{t1}^2 - k_1^2; \quad k_1^2 + k_3^2 = \frac{\omega^2 (\omega^2 - \hat{b}^2 \omega_M^2)}{f \bar{b} \hat{b} \mu_0 \omega_M^2 M_0 + c_t^2 (\omega^2 - \hat{b}^2 \omega_M^2)} \quad (4)$$

где k_1, k_2, k_3 – компоненты волновых векторов. Далее, воспользовавшись граничными условиями (3), получаем связи между амплитудами отражённой (преломлённой) и падающей волн:

$$B = \frac{k_2 G_1 - k_3 G + \bar{b} M_0 \beta}{k_2 G_1 - k_3 G - \bar{b} M_0 \beta} A, \quad C = \frac{2 k_2 G_1}{k_3 G + k_2 G_1 - \bar{b} M_0 \beta} A,$$

$$M = \frac{2 \alpha k_2 G_1}{k_3 G + k_2 G_1 - \bar{b} M_0 \beta} A, \quad N = \frac{2 \beta k_2 G_1}{k_3 G + k_2 G_1 - \bar{b} M_0 \beta} A,$$

где $\alpha = \frac{\omega_M \bar{b} \mu_0 (\omega k_3 + i k_1 \hat{b} \omega_M)}{\hat{b}^2 \omega_M^2 - \omega^2}, \quad \beta = \frac{\omega_M \bar{b} \mu_0 (i \hat{b} k_3 \omega_M - k_1 \omega)}{\hat{b}^2 \omega_M^2 - \omega^2}.$

Таким образом, чисто упругая сдвиговая волна, падающая из немагнитного полупространства на поверхность раздела двух сред (немагнит/ферромагнит) в общем случае частично отражается в виде упругой волны и частично преломляется, возбуждая в магнитной среде взаимосвязанную упруго-спиновую волну.

В заключение выражаем благодарность проф. М.В. Белубекяну за идею задачи и полезные обсуждения при её решении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахиезер А.И., Барьяхтар В.Г., Пелетминский С.В. Спиновые волны. М.: 1967. 368с.
2. Baghdasaryan A., Belubekyan M. On the Problem of Reflection of shear Wave from a Boundary of Piezoelectric Media of class 6mm. In the «3-th Intern. Congress on Thermo stresses», Univ. of Illinois. USA, 2009, v.1, p.183-186.
3. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Р., Атоян Л.А., Манукян Г.А. Отражение спиновых волн от границы ферромагнитного полупространства. //Тр. VI межд. конф. сентябрь, 2008, Горис–Степанакерт, с.115-125.
4. Hasanyan D.J., Batra R.C. Antiplane shear Waves in two Contacting Ferromagnetic Half spaces. J. Elast. (2011) 103: 189-203.

Сведения об авторах:

Атоян Левон Арутюнович – к.ф.м.н., ст. научн сотр. Института механики НАН Армении.
(+374 10) 630692, (+374 91) 315057
E-mail: levous@mail.ru

Терзян Саркис Арутюнович – к.ф.м.н., н.с. Института механики НАН Армении.
(+374 91) 340432
E-mail: sat_and_21@yahoo.com

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ МАГНИТОСТРИКЦИОННОЙ ПЛАСТИНКИ Багдасарян Г.Е., Даноян Э.А., Микилян М.А.

Аннотация. Рассмотрена тонкая пластинка, составленная из трёх однородных изотропных упругих слоёв. Пусть слои пластинки, симметрично собранные относительно срединной плоскости, изготовлены из диэлектрических магнитоэлектрических ферромагнитных материалов. Пластинка отнесена к прямоугольной декартовой системе координат $x_1x_2x_3$ так, что координатная плоскость $0x_1x_2$ совпадает со срединной плоскостью среднего слоя. Верхние и нижние слои изготовлены из одного материала и имеют одинаковую толщину. Считается, что слои после деформации остаются упругими и работают совместно без скольжения.

Постановка задачи. Пусть пластинка помещена в стационарное магнитное поле, которое в отсутствии пластинки характеризуется индукцией внешнего поляризирующего магнитного поля $\mathbf{B}^0(0,0,B_3^0)$. При помещении слоистой магнитоэлектрической пластинки в магнитное поле происходит намагничивание слоёв пластинки, приводящее как к изменению характеристик магнитного поля во всем пространстве, так и к деформированию пластинки. Представим характеристики магнитного поля в виде

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \mathbf{m}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}. \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{B}_0, \mathbf{M}_0$ и $\mathbf{H}_0$ – соответственно, магнитная индукция, намагниченность и напряжённость магнитного поля, возникающее во всем пространстве вследствие помещения недеформируемой пластинки во внешнее поляризующее магнитное поле, $\mathbf{b}, \mathbf{m}, \mathbf{h}$ – характеристики индуцированного магнитного поля. Окружающая тело среда в отношении электромагнитных свойств принимается в приближении вакуума.

В работах [1,2], используя основные положения нелинейной теории магнитоупругости ферромагнитных тел [1] и теории малых возмущений, путём линеаризации получены следующие линейные уравнения и граничные условия, описывающие поведение малых возмущений в указанной магнитоактивной деформируемой среде:

для внутренней области пластинки в слое с номером α ($\alpha = 1, 2, 3$)

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(s_{ik}^{(\alpha)} + s_{im}^{(\alpha)non} \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \right) + \mu_0 M_i^{(\alpha)non} \frac{\partial h_k^{(\alpha)}}{\partial x_i} + \mu_0 m_i^{(\alpha)} \frac{\partial H_i^{(\alpha)non}}{\partial x_i} = \rho_0^{(\alpha)} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2},$$

$$\text{rot } \mathbf{h}^{(\alpha)} = 0, \quad \text{div } \mathbf{b}^{(\alpha)} = 0, \quad \mathbf{b}^{(\alpha)} = \mu_0 (\mathbf{h}^{(\alpha)} + \mathbf{m}^{(\alpha)}), \quad (2)$$

$$s_{ij}^{(\alpha)} = c_{ijkl}^{(\alpha)} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \mu_0 e_{ijk}^{(\alpha)} m_k^{(\alpha)}, \quad h_i^{(\alpha)} = g_{ijk}^{(\alpha)} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + A_{ik}^{(\alpha)} m_k^{(\alpha)},$$

где s_{ik} – возмущения компонент тензора магнитоупругих напряжений; s_{im}^{non} – компоненты тензора напряжений невозмущённого состояния; u_k – компоненты возмущения вектора упругих перемещений; h_k, m_k и b_k – компоненты векторов $\mathbf{h}, \mathbf{m}$ и $\mathbf{b}$, представляющие возмущения соответственно напряжённости $\mathbf{H}^{non}$, намагниченности $\mathbf{M}^{non}$ и магнитной индукции $\mathbf{B}^{non}$ невозмущённого магнитного поля. Здесь и в дальнейшем, при соответствии величин или уравнений к конкретному слою, очевидно, будем записывать их, опуская указанные индексы;

для внешней области

$$\text{rot } \mathbf{h}^{(e)} = 0, \quad \text{div } \mathbf{h}^{(e)} = 0, \quad \mathbf{b}^{(e)} = \mu_0 \mathbf{h}^{(e)}, \quad (3)$$

индекс «e» здесь и в дальнейшем означает принадлежность к внешней среде;

условия на поверхности S_0 недеформируемого тела, граничащей с вакуумом ($x_3 = \pm h$)

$$\left[s_{ik} + s_{km}^{non} \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \right] n_k^0 = \left[t_{ki}^{(e)} - t_{ki} \right] n_k^0 + \left[T_{km}^{non(e)} - T_{km}^{non} \right] \frac{\partial u_i}{\partial x_m} n_k^0, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} [b_k - b_k^e] n_k^0 &= [B_m^{non} - B_m^{non(e)}] \frac{\partial u_i}{\partial x_m} n_k^0, \\ \varepsilon_{ijk} \left\{ [h_n - h_n^{(e)}] n_k^0 - [H_n^{non} - H_n^{non(e)}] \frac{\partial u_i}{\partial x_m} n_k^0 \right\} &= 0, \end{aligned}$$

где T_{km}^{non} и $T_{km}^{non(e)}$ – тензоры напряжений Максвелла невозмущённого состояния для тела и окружающей среды, соответственно, n_k^0 – компоненты вектора внешней нормали, ε_{ijk} – символ Леви-Чивита,

$$t_{ki} = b_i H_k^{non} + h_k B_i^{non} - \mu_0 \delta_{ki} \mathbf{H}^{non} \mathbf{h}, \quad t_{ki}^{(e)} = \mu_0 \left[h_k^{(e)} H_i^{non(e)} + h_k^e H_i^{non(e)} - \delta_{ki} \mathbf{H}^{non(e)} \mathbf{h}^{(e)} \right]. \quad (5)$$

условия на поверхности раздела двух диэлектрических магнитострикционных слоёв ($x_3 = \pm \delta$)

$$\begin{aligned} \left[s_{ik} + s_{km}^{non} \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \right] n_k^0 &= [t_{ki}^{(\alpha+1)} - t_{ki}^{(\infty)}] n_k^0 + [T_{km}^{(\alpha+1)} - T_{km}^{(\alpha)}] \frac{\partial u_i}{\partial x_m} n_k^0, \\ [b_k^{(\alpha)} - b_k^{(\alpha+1)}] n_k^0 &= [B_m^{(\alpha)} - B_m^{(\alpha+1)}] \frac{\partial u_i}{\partial x_m} n_k^0, \quad \varepsilon_{ijk} \left\{ [h_n^{(\alpha)} - h_n^{(\alpha+1)}] n_k^0 - [H_n^{(\alpha)} - H_n^{(\alpha+1)}] \frac{\partial u_i}{\partial x_m} n_k^0 \right\} = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\alpha = 1$ при $x_3 = -\delta$ и $\alpha = 2$ при $x_3 = \delta$.

В приведённых уравнениях и условиях использованы обозначения, которые здесь не приводятся из-за громоздкого вида. К уравнениям (2) необходимо присоединить условия затухания возмущений магнитных величин на бесконечности.

На основе приведённых уравнений и условий, применяя процедуру выведения двумерных уравнений магнитоупругой устойчивости тонких пластин, необходимо найти характеристики (напряжённость, магнитную индукцию и намагниченность) магнитных полей невозмущённого и возмущённого состояний. Их определяем, решая определённые трёхмерные задачи математической физики. Для приведения трёхмерных уравнений магнитоупругой устойчивости (1) к двумерным принимается гипотеза Кирхгофа для всего пакета в целом.

Для замыкания полученной системы следует определить компоненты индуцированного магнитного поля в пластинке. С этой целью для j -того слоя, введя потенциальную функцию и определяя индуцированное магнитное поле в слое, сначала решается задача для бесконечной пластинки, а затем неизвестные волновые числа определяются с использованием асимптотического метода интегрирования [1] и условий закрепления краёв пластинки. Используя полученные формулы и граничные условия индуцированного магнитного поля, находим выражения для магнитных потенциалов слоёв пластинки и вне пластинки. Подставляя найденные выражения в соответствующие формулы, получена система двумерных уравнений колебаний рассматриваемой трёхслойной магнитострикционной пластинки в поперечном магнитном поле.

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдасарян Г.Е., Даноян Э.А. Математическое моделирование колебаний двухслойных магнитострикционных пластин. //Изв. РАН. МТТ. 1992. №3. С.87-94.
2. Багдасарян Г.Е., Даноян Э.А. Возбуждение вынужденных поперечных колебаний в слоистой магнитострикционной пластинке при помощи нестационарного магнитного поля. //В кн: «Инженерно-физические проблемы новой техники» Тезисы докладов третьего международного совещания. Изд-во МГТУ им. Э.Баумана, 1990, с.96-98.

Information about authors

Baghdasaryan Gevorg Yervand – Academician of the NAS RA, Professor, Main researcher at the Institute of Mechanics NAS RA; **E-mail:** gevorgb@rau.am

Danoyan Edvard Haykaz – Ph.D., Docent, Yerevan State University; **E-mail:** edan@ysu.am

Mikilyan Marine Alexander – Ph.D., Docent, Senior researcher at the Institute of Mechanics NAS RA; **E-mail:** mikilyan@rau.am

ТЕРМОУПРУГАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ЗАМКНУТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ГАЗА

Багдасарян Г.Е., Микилян М.А., Варданян И.А.

Аннотация. В настоящей работе в линейной постановке рассмотрена осесимметричная задача устойчивости цилиндрической оболочки под действием переменного по толщине температурного поля и обтекающего сверхзвуковым потоком газа (с невозмущенной скоростью, направленной вдоль образующих). Получены условия устойчивости невозмущенного состояния рассматриваемой термогазоупругой системы и на их основе построена область устойчивости. Показано, что совместным действием температурного поля и обтекающего потока можно регулировать процесс устойчивости и при помощи температурного поля существенно изменить величину критической скорости флаттера.

Постановка задачи и основные результаты. Рассмотрим тонкую изотропную замкнутую круговую цилиндрическую оболочку постоянной толщины h , радиуса R и длины l . Оболочка отнесена к ортогональным координатам α, β, γ . Координатные линии α и β совпадают с линиями кривизны срединной поверхности оболочки (α – вдоль образующей, β – по дуге поперечного сечения). Пусть оболочка обтекается внешним сверхзвуковым потоком газа с невозмущенной скоростью U , направленной вдоль оси $O\alpha$. Исследуются вопросы устойчивости рассматриваемой аэроупругой системы в случае осесимметричности деформаций. В основу исследования принимаются следующие известные предположения:

- а) гипотеза Кирхгофа-Лява о недеформируемых нормалях [1,2];
- б) деформации как невозмущенного, так и возмущенного состояний настолько малы, что можно воспользоваться линейной теорией аэротермоупругости;
- в) «закон плоских сечений» при определении аэродинамического давления [1];
- г) линейный закон изменения температурного поля $T(\alpha, \beta, \gamma)$ по толщине оболочки [1];
- д) гипотеза Неймана об отсутствии сдвигов от изменения температуры.

Для простоты и наглядности принимается также, что из лицевых поверхностей ($\gamma = \pm h/2$) оболочки происходит теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона-Рихмана (на поверхностях сохраняется постоянная температура со значениями T^+ и T^- , соответственно), а боковые поверхности ($\alpha = 0$ и $\alpha = l$) теплоизолированы. При таком предположении, в области занимаемой оболочкой, задача определения стационарного температурного поля в оболочке сводится к решению уравнения теплопроводности соответствующих поверхностных условиях. Сформулированная задача теплопроводности представляется в виде $T = T_0(\alpha, \beta) + \gamma \Theta(\alpha, \beta)$, где

$$T_0 = \frac{T^+ + T^-}{2}, \quad \Theta = \frac{k(T^+ - T^-)}{kh - 2\lambda}.$$

Здесь λ – коэффициент теплопроводности, k – коэффициент теплоотдачи.

Под действием неоднородного по толщине стационарного температурного поля ($\Theta \neq 0$) происходит выпучивание оболочки и вследствие этого появляется аэроупругое давление, которое, согласно предположению (в), определяется известной формулой поршневой теории. Указанное выпученное состояние принимается как невозмущенное [3] и исследуется его устойчивость под действием температурного поля и давления обтекающего потока газа.

На основе принятых предположений и теории термоупругости изотропного тела, аналогично [1,3] получается следующее линейное дифференциальное уравнение устойчивости рассматриваемой термогазоупругой системы:

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^4} - \delta \left[N_1^T \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + N_1 \left(\frac{1}{R} + \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{d^2 w_T}{d\alpha^2} \right) \right] + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \left(\rho h \varepsilon + \frac{\alpha p_\infty}{a_\infty} \right) \frac{\partial w}{\partial t} + \alpha p_\infty M \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{\alpha^2 (\alpha + 1)}{2} p_\infty M^2 \frac{dw_T}{d\alpha} \frac{\partial w}{\partial \alpha} = 0 \quad (1)$$

где введены следующие обозначения:

$$N_1^T = -\frac{Eh}{1-\mu} \alpha T_0, \quad N_1 = \frac{Eh}{a(1-\mu^2)} \int_0^a \frac{dw_T}{d\alpha} \frac{\partial w}{\partial \alpha} d\alpha, \quad \delta = \begin{cases} 0, & \text{когда края оболочки свободно смещаются,} \\ 1, & \text{когда края оболочки неподвижны.} \end{cases} \quad (2)$$

В (1) и (2) $w(\alpha, t)$ – возмущения поперечного перемещения оболочки, $D = Eh^3 / 12(1-\mu^2)$, E – модуль упругости, μ – коэффициент Пуассона, α – коэффициент линейного теплового расширения, ρ – плотность материала оболочки, ε – коэффициент линейного затухания, $M = U a_\infty^{-1}$ –

число Маха для невозмущённого потока, p_∞ – давление газа в невозмущённом состоянии, κ – показатель политропы.

Сформулированная краевая задача решена методом Фурье и используя теорему Гурвица, построены области устойчивости на плоскостях (U, T_0) (случай однородного температурного поля $(\Theta = 0)$) и на плоскости (U, Θ) (случай однородного температурного поля $(T_0 = 0)$). На рис. 1 и 2 приведены указанные области, построенные при следующих данных: $\alpha = 23.8 \cdot 10^{-6}$ град $^{-1}$; $k = 1200$ Вт/(м 2 град); $\lambda = 210$ Вт/(м град); $\mu = 0.34$; $a = 1$ м; $h/a = 1/100$, $R = \infty$. На рис. 1 и 2 обозначены:

$$\bar{T} = RT_0 \left(\frac{a}{h} \right)^2 \left(\frac{12}{\pi^2} \right), \bar{\Theta} = R\Theta_0 h \left(\frac{a}{h} \right)^2 \frac{1}{36 + K^2 v^2}, K = \frac{4\kappa p_\infty}{\rho \omega_1^2 h^2}, v = M \frac{h}{a}, \omega_i = \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \left(\frac{i\pi}{a} \right), \gamma = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \chi = \frac{1}{\omega_1} \left(\varepsilon + \frac{a_x p_\infty}{\rho h} \right);$$

$v_* = 3(\gamma^2 - 1)/4K \left(1 + 2\chi^2(\gamma^2 + 1)/(\gamma^2 - 1)^2 \right)^{1/2}$ – критическая скорость потока при отсутствии температурного поля (или в случае оболочки со свободными краями в присутствии рассматриваемых температурных полей).

Из этих рисунков видно, что: а) если $T_0 > 0$, то температурное поле существенно сужает область устойчивости; б) если $T_0 < 0$, то температурное поле существенно увеличивает область устойчивости; в) если $\Theta > 0$, то температурное поле заметно сужает область устойчивости; г) если $\Theta < 0$, то до некоторого определённого отрицательного значения Θ_* область устойчивости заметно увеличивается, после чего, с увеличением $|\Theta|$ происходит существенное уменьшение области устойчивости.

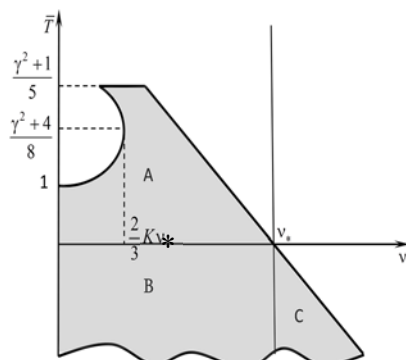


Рис. 1

Область устойчивости при постоянном температурном поле

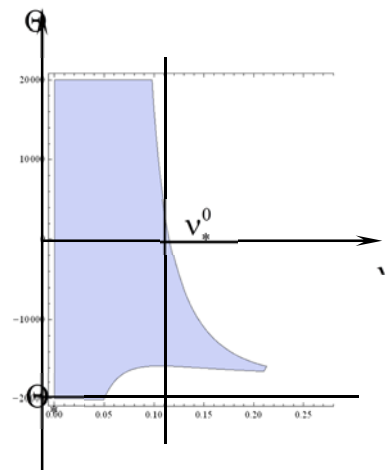


Рис. 2

Область устойчивости при $T_0 = 0$

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
2. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
3. Багдасарян Г.Е., Микилян М.А., Сагоян Р.О. Термоупругая устойчивость удлиненной прямоугольной пластинки в сверхзвуковом потоке газа. //Изв. НАН РА. Механика. 2011. Т.64. №4. С.51-67.

Information about authors:

Baghdasaryan Gevorg Yervand – Academician of the NAS RA, Professor, $\square$ ain researcher at the Institute of $\square$ echanics NAS RA; **E-mail:** gevorgb@rau.am

Mikilyan Marine Alexander – Ph.D., Docent, Senior researcher at the Institute of $\square$ echanics NAS RA; **E-mail:** mikilyan@rau.am

Vardanyan Iren Armen – Institute of $\square$ echanics NAS RA; **E-mail:** irena_123@bk.ru

ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НАГРУЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Барсегян В.Р., Барсегян Т.В.

Аннотация. Рассмотрена задача управления и оптимального управления одной системой линейных нагруженных дифференциальных уравнений. Сформулированы необходимое и достаточное условие вполне управляемости, условия существования программного управления и движения. Построен явный вид управляющего воздействия для задачи управления и предложен способ решения задачи оптимального управления.

Изучение разнообразных процессов управления из различных областей науки и техники позволяет заключить, что будущее течение многих процессов управления оказывается зависящим не только от настоящего, но и существенно определяется предысторией процесса. Математическое описание указанных динамических процессов может быть осуществлено при помощи обыкновенных дифференциальных уравнений с памятью различных видов, называемых также уравнениями с последействием или нагруженными дифференциальными уравнениями. Нагруженными дифференциальными уравнениями в литературе [1-5] принято называть уравнения, содержащие в коэффициентах или в правой части какие-либо функционалы (функции) от решения, в частности, значения решения, в которых фазовое состояние процесса в какой-либо точке и в какой-либо момент может оказывать влияние на динамику процесса в целом. На практике такого рода задачи возникают, например, когда при необходимости вести наблюдение динамического процесса, измеряются фазовые состояния в какие-либо моменты времени и непрерывно передаются информации с помощью обратной связи.

Наличие в динамике системы нагруженного слагаемого не всегда позволяет непосредственно применять известные методы исследований, развитые при исследованиях обычных (ненагруженных) динамических систем. Это подчеркивает как теоретическую, так и практическую актуальность исследования различных задач управления для нагруженных дифференциальных уравнений. В последние годы проводится интенсивное исследование нагруженных дифференциальных уравнений, связанное с различными прикладными задачами механики, биологии, экологии и химии, моделированных с нагруженными уравнениями.

Интерес исследователей к задачам управления нагруженных динамических систем связан также с возможностями современной вычислительной и измерительной техники, которые позволяют использовать наиболее адекватные математические модели рассматриваемых процессов. Исследованию вопросов существования решения нагруженных линейных дифференциальных уравнений посвящено много работ, но задачам их управления уделялось сравнительно мало внимания.

В данной работе рассматривается управляемый процесс, динамика которого описывается нагруженными линейными дифференциальными уравнениями

$$\dot{x} = A_0(t)x + A_1(t)x(t_1) + A_2(t)x(t_2) + A_3(t)x(t_3) + B(t)u \quad (1)$$

где $x(t) \in R^n$ – фазовый вектор системы, $A_k(t)$, $B(t)$ ($k = 0, 1, 2, 3$) – матрицы параметров системы (непрерывны на $[t_0, T]$), $u(t)$ – управляющее воздействие, соответственно, с размерностями $A_k(t) - (n \times n)$, $B(t) - (n \times r)$, $u(t) - (r \times 1)$.

В формуле (1) слагаемые $A_k(t)x(t_k)$ ($k = 1, 2, 3$) как функции, влияют на систему, начиная с момента времени $t \geq t_k$. Так как значение фазового состояния $x(t_k)$, как результат измерения, определяется в момент времени $t = t_k$ и с этого момента (при $t \geq t_k$) непрерывно влияет на систему.

Предполагается, что заданы моменты времени точек нагружения t_k ($k = 1, 2, 3$) и $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 = T$, а также начальное $x(t_0) = x_0$ и конечное $x(T) = x_T$ состояния

системы (1). Функция $x(t)$ непрерывна на интервалах $[t_{k-1}, t_k)$ ($k = 1, 2, 3, 4$) и в точках нагружения t_k имеет конечные левосторонние пределы $\lim_{t \rightarrow t_k - 0} x(t) = x(t_k)$.

Предполагается, что система нагруженных дифференциальных уравнений (1) на промежутке времени $[t_0, T]$ является вполне управляемой [6-9].

Требуется найти условия, при которых существует программное управляющее воздействие $u = u(t)$ и программное движение, переводящее движение системы (1) из начального состояния $x(t_0)$ в конечное состояние $x(T)$ на промежутке времени $[t_0, T]$, а также построить их.

Предполагается, что для отбора оптимальных решений на промежутке времени $[t_0, T]$ задан критерий качества $\mathfrak{A}[u]$, который может иметь смысл нормы некоторого нормированного пространства. Рассматривается также задача оптимального управления для системы (1) с заданными начальными, конечными условиями и критерием качества $\mathfrak{A}[u]$.

В работе предложен конструктивный подход исследования задач управления для рассмотренной системы линейных нагруженных дифференциальных уравнений (1). Введена формула определения фазового состояния системы для любого момента времени, при заданном начальном состоянии. Сформулированы необходимое и достаточное условие вполне управляемости, условия существования программного управления и движения. Построено решение задачи управления линейных нагруженных дифференциальных уравнений и предложен способ решения задачи оптимального управления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применение. М.: Наука, 2012. 232 с.
2. Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И. Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений. Алматы. 2010. 334 с.
3. Дженалиев М.Т. Оптимальное управление линейными нагруженными параболическими уравнениями // Дифференциальные уравнения. 1989. Т.25. № 4. С.641 – 651.
4. Кожанов А.И. Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2004. Т.44. № 4. С. 694–716.
5. Бакирова Э.А., Кадирбаева Ж.М. О разрешимости линейной многоточечной краевой задачи для нагруженных дифференциальных уравнений // Изв. НАН РК. Сер. физ.-мат., 2016. № 5, с. 168–175.
6. Барсегян В.Р. Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями. М.: Наука, 2016. 230 с.
7. Barseghyan V.R. Control of stage by stage changing linear dynamic systems // Yugoslav Journal of Operations Research. 2012. Vol. 22. № 1. Pp.31-39.
8. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
9. Zubov B.I. Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975. 496 с.

Сведения об авторах:

Барсегян Ваян Рафаелович – доктор физ.-мат. наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении; профессор факультета математики и механики ЕГУ
Тел.: (37410) 52 36 40; E-mail: barseghyan@sci.am

Барсегян Тигран Ваянович – кандидат физ.-мат. наук, научный сотрудник Института механики НАН Армении
E-mail: t.barseghyan@mail.ru

О ДИВЕРГЕНЦИИ СЖАТОЙ ПАНЕЛИ ПРИ НАБЕГАНИИ СВЕРХЗВУКОВОГО ПОТОКА ГАЗА НА ЕЁ СВОБОДНЫЙ КРАЙ

Белубекян М.В., Мартирисян С.Р.

Аннотация. В предлагаемой статье на примере сжатой прямоугольной пластинки с одним свободным и с тремя шарнирно закреплёнными краями, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край, в линейной постановке исследуется своеобразное влияние начального напряжённого состояния на устойчивость невозмущённого состояния равновесия пластинки.

Показано, что при обтекании начальное напряжённое состояние приводит к эффекту дестабилизации – «скачкообразному» падению значений критической скорости дивергенции панели и локализованной дивергенции.

Рассматривается тонкая упругая прямоугольная пластинка, занимающая в декартовой системе координат $Oxyz$ область $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $-h \leq z \leq h$. Сверхзвуковой поток газа обтекает пластинку с одной стороны в направлении оси Ox с невозмущённой скоростью V .

Предполагается, что край $x=0$ пластинки свободен, а остальные края шарнирно закреплены. Пластика сжата вдоль краёв $y=0$ и $y=b$ сжимающими силами $N_y = 2h\sigma_y$. Усилия σ_y предполагаются постоянными во всей срединной поверхности панели и неменяющимися с изменением прогиба точек срединной поверхности пластинки $w = w(x, y)$.

В предположении справедливости гипотезы Кирхгофа и «поршневой теории» дифференциальное уравнение изгиба прямоугольной пластинки имеет вид [1,2]

$$D\Delta^2 w + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + a_0 \rho_0 V \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \quad (1)$$

Здесь, $\Delta^2 w = \Delta(\Delta w)$, Δw – оператор Лапласа; D – цилиндрическая жёсткость, a_0 – скорость звука в невозмущённой газовой среде, ρ_0 – плотность невозмущённого потока газа.

Граничные условия в принятых предположениях относительно способа закрепления кромок пластинки имеют вид [1]

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \quad \text{при } x = 0; \quad (2)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = a; \quad (3)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = 0 \text{ и } y = b; \quad (4)$$

ν – коэффициент Пуассона.

Требуется найти наименьшую скорость потока газа – критическую скорость V_{cr} , приводящую к потере статической устойчивости невозмущённого состояния равновесия обтекаемой прямоугольной пластинки с нагружёнными краями $y=0$ и $y=b$.

С помощью графоаналитических методов анализа произведено разбиение пространства существенных параметров системы «пластинка–поток» на области устойчивости и статической неустойчивости. Исследована граница области устойчивости.

Определены условия, позволяющие выявить возможность потери статической устойчивости пластинки в форме дивергенции панели или в форме локализованной дивергенции ранее, ещё до получения и исследования дисперсионных уравнений, характеризующих достаточные признаки потери устойчивости.

Найдены критические скорости дивергенции панели и локализованной дивергенции, разграничивающие области устойчивости и статической неустойчивости.

Показано существенное дестабилизирующее влияние начального напряжённого состояния на устойчивость невозмущённого состояния равновесия пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, приводящее к «скачкообразному» («мгновенному») падению значений критических скоростей дивергенции панели и локализованной дивергенции. Значения критических скоростей дивергенции панели и локализованной дивергенции пластинки с

нагружёнными краями примерно 1.5–4 раза меньше соответствующих скоростей, найденных при решении задачи устойчивости обтекаемой пластинки с ненагружёнными краями [3–5].

Наиболее ярко эффект дестабилизации проявляется в случаях, в которых у достаточно длинной пластинки коэффициент напряжения превышает значение 25, а также при умеренных значениях отношения сторон пластинки при превышении коэффициентом напряжения значения 1.25. В этих случаях начальное напряжённое состояние пластинки при обтекании

приводит к «мгновенной» потере устойчивости невозмущённого состояния равновесия пластинки в форме дивергенции панели.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Наука. 1961. 329 с.
2. Мовчан А.А. Об устойчивости панели, движущейся в газе. // Изв. АН СССР. ПММ. 1957. Т.21. № 2. С. 231–243.
3. Belubekyan M.V., Martirosyan S.R. The Localized Instability of the Elastic Plate-Strip, Streamlined by Supersonic Gas Flow. // Изв. НАН Армении. Механика. 2012. Т. 65(1). С. 29–34.
4. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О флаттере упругой прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край. // Изв. НАН Армении. Механика. 2014. Т.67. № 2. С.12 - 42.

Сведения об авторах:

Белубекян Мелс Вагаршакович – канд. физ.-мат. наук, профессор, главный научн. сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения (+374 10) 521503, (+374 10) 580096

E-mail: mbelubekyan@yahoo.com

Мартиросян Стелла Размиковна – кандидат физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения (+374 10) 524890

E-mail: mechinsstella@mail.ru

КОЛЕБАНИЯ, ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ В ОКРЕСТНОСТИ ШАРНИРНОГО СОЕДИНЕНИЯ СОСТАВНОЙ ПЛАСТИНЫ

Белубекян М.В., Саноян Ю.Г.

Аннотация. В рамках теории Кирхгофа решена задача изгибных колебаний, локализованных в составной пластине, состоящей из двух шарнирно-соединённых прямоугольных частей (пластинок). Края пластины свободно опёрты. Получено дисперсионное уравнение. Для частных случаев, когда изгибные жёсткости одной части значительно больше другой и для пластинок с разными значениями коэффициентов Пуассона, найдены условия существования локализации колебаний.

Введение. В 1960 г. Ю.К. Коненков представил решение задачи об изгибных колебаниях, локализованных в окрестности свободного края пластины [1]. Колебания, локализованные в окрестности жёстко скрепленных полубесконечных пластинок, впервые были рассмотрены в статье А.С. Зильберглейта и И.Б. Сусловой [2]. Полное решение этой задачи дано в работе [3]. Решение аналогичных задач для составных пластин конечных размеров приводится в [4,5]. В этой статье рассмотрены локализованные колебания составной пластины конечных размеров, состоящей из шарнирно соединённых прямоугольных пластинок.

Пластина состоит из состыкованных вдоль оси y пластинок с длинами b , ширинами a_i ($i=1,2$), толщинами $h/2$, с плотностями ρ_i , изгибными жёсткостями D_i и коэффициентами Пуассона ν_i . Срединные плоскости пластинок совпадают с координатной плоскостью $z=0$. Первая пластинка занимает область $-a_1 \leq x < 0$, а вторая $0 < x \leq a_2$ для $0 \leq y \leq b$. В рамках теории Кирхгофа уравнения колебаний для каждой пластинки имеют вид:

$$D_i \Delta^2 w_i + 2\rho_i h \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

где Δ – оператор Лапласа, $D_i = E_i h^3 / [12(1 - \nu_i^2)]$, E_i – модули Юнга. Края пластины свободно опёрты – перемещения $w_i = 0$, а изгибающие моменты на краях пластины

$$M_x^{(1)} = M_x^{(2)} = 0 \text{ при } x = -a_1, a_2; \quad M_y^{(1)} = M_y^{(2)} = 0 \text{ при } y = 0, b \quad (2)$$

На стыке пластин имеют место следующие условия соединения (цепь):

$$w_1 = w_2, \quad M_x^{(1)} = M_x^{(2)} = 0, \quad N_x^{(1)} = N_x^{(2)} \text{ при } x=0. \quad (3)$$

Решения уравнений (1) с произвольными постоянными A_i , C_i , удовлетворяющих условиям свободного опирания на краях частей пластин, представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} w_1(x, y, t) &= e^{j\omega t} [A_1 \text{sh} \lambda_n p_{11}(a_1 + x) + C_1 \text{sh} \lambda_n p_{21}(a_1 + x)] \sin \lambda_n y, \\ w_2(x, y, t) &= e^{j\omega t} [A_2 \text{sh} \lambda_n p_{12}(a_2 - x) + C_2 \text{sh} \lambda_n p_{22}(a_2 - x)] \sin \lambda_n y, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\text{где } p_{1i} = \sqrt{1 - \eta_i}, \quad p_{2i} = \sqrt{1 + \eta_i}, \quad \eta_i^2 = 2\rho_i h \omega^2 / (D_i \lambda_n^4) \quad (5)$$

Между η_2 и η_1 имеется следующая связь:

$$\eta_2 = \kappa \eta_1, \quad \kappa = \sqrt{\frac{\rho_2 D_1}{\rho_1 D_2}}. \quad (6)$$

Подставляя (4) в условия (3), получим систему однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных A_i , C_i :

$$\begin{aligned} A_1 \text{sh} p_{11} \xi_1 + C_1 \text{sh} p_{21} \xi_1 &= A_2 \text{sh} p_{12} \xi_2 + C_2 \text{sh} p_{22} \xi_2, \\ A_1 (p_{11}^2 - \nu_1) \text{sh} p_{11} \xi_1 + C_1 (p_{21}^2 - \nu_1) \text{sh} p_{21} \xi_1 &= 0 \\ A_2 (p_{12}^2 - \nu_2) \text{sh} p_{12} \xi_2 + C_2 (p_{22}^2 - \nu_2) \text{sh} p_{22} \xi_2 &= 0, \\ A_1 p_{11} (p_{11}^2 - 2 + \nu_1) \text{ch} p_{11} \xi_1 + C_1 p_{21} (p_{21}^2 - 2 + \nu_1) \text{ch} p_{21} \xi_1 &= \\ -\gamma [A_2 p_{12} (p_{12}^2 - 2 + \nu_2) \text{ch} p_{12} \xi_2 + C_2 p_{22} (p_{22}^2 - 2 + \nu_2) \text{ch} p_{22} \xi_2], \end{aligned} \quad \text{где } \xi_i = \lambda_n a_i = n\pi a_i / b \quad (7)$$

В частном случае $\gamma = 0$ ($D_2 \ll D_1$) определение частот колебаний первой части пластины становится автономной и сводится к решению системы уравнений второй и четвёртой строк с постоянными A_1 , C_1 . Приравнявая детерминант этой системы нулю получим:

$$p_{21}(p_{11}^2 - \nu_1)(p_{21}^2 - 2 + \nu_1) \operatorname{th} p_{11} \xi_1 = p_{11}(p_{21} - \nu_1)(p_{11}^2 - 2 + \nu_1) \operatorname{th} p_{21} \xi_1. \quad (8)$$

Из решения (4) следует, что условие $0 < \eta_1 < 1$ приводит к локализованным колебаниям в пластине. Уравнение (8) имеет тривиальный корень $\eta_1 = 1$ ($p_{21} = 0$). Если разделить уравнение (8) на p_{21} и перейти к пределу $\eta_1 \rightarrow 1$, то получим

$$(2 - \nu_1)^2 \operatorname{th}(\sqrt{2} \xi_1) = \sqrt{2} \nu_1^2 \xi_1. \quad (9)$$

Если обозначить корень уравнения (8) ξ_{1*} , то условие существования решений, удовлетворяющих условию $0 < \eta_1 < 1$, будет $\xi_1 > \xi_{1*}$. Численные расчёты показывают, что приближение $\operatorname{th}(\sqrt{2} \xi_1) \approx 1$ даёт достаточно точное выражение для условия $\xi_1 > \xi_{1*}$.

$$\xi_1 \geq (2 - \nu_1)^2 / (\sqrt{2} \nu_1^2) \quad (10)$$

Таким образом, в случае $\gamma = 0$ частоты колебаний (общие для обеих частей пластины) будут определяться из автономного уравнения частот первой части пластины (8). Эти частоты будут соответствовать колебаниям, локализованным в окрестности $x=0$ первой части пластины, если удовлетворяются условия $0 < \eta_1 < 1$. Амплитуды колебаний второй части пластины (A_2, C_2) определяются из первого и третьего уравнений системы (7) через отношение C_1 / A_1 . Колебания второй части пластины будут локализованными, если $\eta_2 = k \eta_1 < 1$, и нелокализованными, если $\eta_2 = k \eta_1 \geq 1$. Т.е. при наличии локализованных колебаний первой части пластины, существование их во второй части существенно (или только) зависит от k . Аналогичные результаты получаются и в другом частном случае $\gamma = \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коненков Ю. К. Об изгибных волнах рэлеевского типа. //Акустический журнал. 1960. Т.6. Вып.1. С.124-126.
2. Зильбергейт А.С., Суслова И.Б. Контактные волны изгиба в тонких пластинах. //Акустический журнал. 1983. Т.29. Вып.2. С.186-191.
3. Каплунов Ю.Д., Косович Е.Л., Мухомодьяров Р.Р., Сорокина О.В. Явные модели распространения изгибных краевых и интерфейсных волн в тонких изотропных пластинах. //Изв. Саратовского университета. Т.13. Сер. Математика. Механика. Информатика. Вып.1. Ч.1. 2013. С.56-63.
4. Белубекян М.В., Саноян Е.Ю. Локализованные колебания в составных свободно опёртых пластинах. //Труды XVIII международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды». Ростов-Дон. 7-10 ноября. Т.1. 2016. С. 61-64.
5. Белубекян М.В., Саноян Е.Ю., Гаракон В.Г. О существовании локализованных изгибных колебаний в составных свободно опёртых пластинах. Вестник. 2016. Т.16. Вып. 2. С. 9-15.
6. Белубекян М.В. Поверхностные волны в упругих средах. Проблемы механики деформируемого твердого тела. Институт механики НАН РА Армении. 1997. С.79-96.

Информация об авторах:

Белубекян М.В. – Профессор, главный научный сот. института механики НАН Армении **Адрес:** 0019, Ереван-19, пр. Маршала Баграмяна, 24/2. **Тел.:** 522503, **E-mail:** mbelubekyan@yahoo.com

Саноян Ю.Г. – Канд. физ.-мат.н., старший научный сотр. Института механики НАН Армении **Адрес:** 0019, Ереван-19, пр. Маршала Баграмяна, 24/2. **Тел.:** 541319, **E-mail:** yuriisanoyan@mail.ru

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ КУСОЧНО-ПОСТОЯННОЙ ТОЛЩИНЫ, ИЗГОТОВЛЕННОЙ ИЗ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА, ПРИ ИЗГИБЕ С УЧЁТОМ ВЛИЯНИЯ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ

Белубекян Э.В., Даниелян С.В., Аветисян Г.Р.

Аннотация. Рассматривается прямоугольная пластинка кусочно-постоянной толщины, изготовленной из композиционного материала, шарнирно опёртой по двум противоположным продольным сторонам и заделанной по торцевым краям, под действием поперечной нагрузки.

На основе уточнённой теории изгиба пластин С.А. Амбарцумяна, решается задача определения оптимальных геометрических и физических параметров ступенчатой пластинки, обеспечивающих её наибольшую жёсткость при заданных габаритных размерах пластинки и постоянном весе, равном весу пластинки постоянной толщины.

Приводятся числовые примеры. Сравнение результатов, полученных на основе уточнённой и классической теорий изгиба пластин, позволяет оценить влияние поперечных сдвигов на оптимальный проект пластинки в зависимости от её толщины.

Рассматривается изгиб свободно опёртой по контуру прямоугольной пластинки кусочно-постоянной толщины размерами $2L \times b$ под действием поперечной нагрузки $q(y)$. Предполагается, что пластинка изготовлена из композиционного материала (КМ) путём поочерёдной укладки его монослоев под углом $\pm\varphi$ к оси x пластинки, причем на участке $-a \leq x \leq a$ пластинка имеет толщину h_2 , а на участках $-L \leq x \leq -a$ и $a \leq x \leq L$ – толщину h_1 (рис.1).

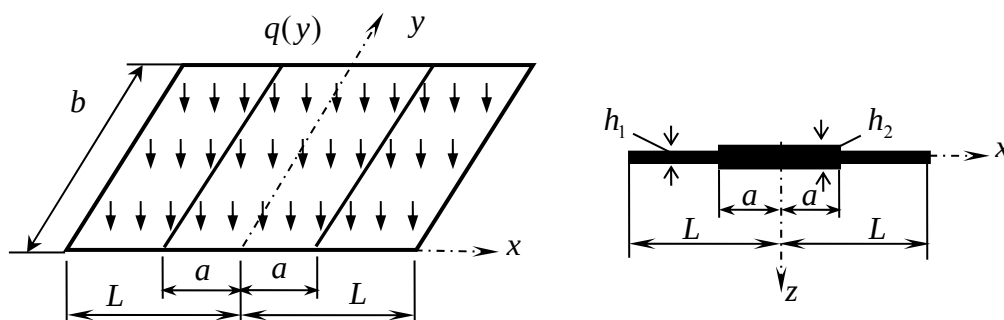


Рис. 1. Расчётная схема пластинки

На основе уточнённой теории изгиба пластин [1], учитывающей влияние поперечных сдвигов, решается задача определения оптимальных значений параметров пластинки a , h_1 , h_2 , φ , обеспечивающих минимальное значение наибольшего прогиба при её постоянном весе, равном весу пластинки постоянной толщины h_0 и заданных габаритных размерах $\xi = 2L/b$.

Решение рассматриваемой задачи на основе классической теории изгиба ортотропных пластин приведено в работе [2]. Расчёту оптимальной ребристой пластинки из композиционного материала с учётом поперечных сдвигов посвящена работа [3].

Задача определения напряжённо-деформируемого состояния пластинки решается для каждой из областей ($p=1, 2$), соответствующих толщинам h_1 и h_2 , с удовлетворением условий сопряжения на линии их раздела. При этом, ввиду симметрии рассматривается половина пластинки ($x \geq 0$).

Принятая структура пакета пластинки позволяет считать её ортотропной. Согласно уточнённой теории изгиба ортотропных пластин [1], задача сводится к определению потенциальных функций $\Phi_p(x, y)$ для каждой из областей ($p=1, 2$), удовлетворяющих

уравнениям

$$\left[D_{11}^{(p)} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2(D_{12}^{(p)} + 2D_{66}^{(p)}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22}^{(p)} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right] \Phi_p - \frac{12}{h_p^3} \frac{h_p^2}{10} \left\{ a_{44} D_{11}^{(p)} D_{66}^{(p)} \frac{\partial^6}{\partial x^6} + \right. \\ \left. \left[a_{44} (D_{11}^{(p)} D_{22}^{(p)} - 2D_{12}^{(p)} D_{66}^{(p)} - (D_{12}^{(p)})^2) + a_{55} D_{11}^{(p)} D_{66}^{(p)} \right] \frac{\partial^6}{\partial x^4 \partial y^2} + \right. \\ \left. \left[a_{55} (D_{11}^{(p)} D_{22}^{(p)} - 2D_{12}^{(p)} D_{66}^{(p)} - (D_{12}^{(p)})^2) + a_{44} D_{22}^{(p)} D_{66}^{(p)} \right] \frac{\partial^6}{\partial y^4 \partial x^2} + a_{55} D_{22}^{(p)} D_{66}^{(p)} \frac{\partial^6}{\partial y^6} \right\} \Phi_p = \frac{144}{h_p^6} q, \quad (1)$$

и следующим граничным условиям:

– шарнирного опирания на сторонах $y = 0$ и $y = b$

$$w_p = 0, \quad M_y^{(p)} = 0, \quad \varphi_p = 0 \quad (p = 1, 2) \quad \text{при} \quad y = 0, \quad y = b, \quad (2)$$

– симметрии на линии $x = 0$

$$\varphi_2 = 0, \quad \frac{\partial w_2}{\partial x} = 0, \quad M_{xy}^{(2)} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad (3)$$

– жёсткой заделки (в случае жёсткой заделки края $x = L$)

$$w_1 = 0, \quad \psi_1 = 0, \quad -\frac{\partial w_1}{\partial x} + \left(\frac{h_1^2}{4} - \frac{z_0^2}{3} \right) a_{55} \varphi_1 = 0 \quad \text{при} \quad x = L, \quad (4)$$

– сопряжения на линии $x = a$

$$w_1 = w_2, \quad -\frac{\partial w_1}{\partial x} + \left(\frac{h_1^2}{4} - \frac{z_0^2}{3} \right) a_{55} \varphi_1 = -\frac{\partial w_2}{\partial x} + \left(\frac{h_2^2}{4} - \frac{z_0^2}{3} \right) a_{55} \varphi_2, \quad \left(z_0 = \frac{h_1}{2} \right), \quad \psi_1 = \psi_2, \\ M_x^{(1)} = M_x^{(2)}, \quad M_{xy}^{(1)} = M_{xy}^{(2)}, \quad N_x^{(1)} = N_x^{(2)} \quad \text{при} \quad x = a. \quad (5)$$

Задача решается методом Недлера-Мида [5] в сочетании с методом прямого поиска.

Как следует из результатов расчёта, для сравнительно тонких пластин значения прогибов, полученных по уточнённой и классической теориям, отличаются несущественно (до 1.6% при $\bar{h}_0 = 0.02$ и до 5.7% при $\bar{h}_0 = 0.04$). При увеличении толщины пластинки учёт поперечных сдвигов даёт более значительные поправки к результатам классической теории (до 27.8% при $\bar{h}_0 = 0.1$ и до 51% при $\bar{h}_0 = 0.2$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360 с.
2. Белубекян Э.В., Аветисян Г.Р., Погосян А.Г. Оптимизация прямоугольной пластинки кусочно-постоянной толщины, изготовленной из композиционного материала при изгибе. //Изв. НАН Армении. Механика. 2012. Т.65. №1. С.35-42.
3. Белубекян Э.В., Дарбинян А.З. Расчёт оптимальной ребристой платинки из композиционного материала с учётом поперечных сдвигов. //Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1987. Т.40. №4. С.7-14.
4. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974. 331с.
5. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. М.: Мир, 1975. 532с.

Сведения об авторах:

Белубекян Эрнест Вагаршакович – докт. техн. наук, профессор, тел.: (091) 43 11 94,

E-mail: ebelubekyan@yahoo.com

Даниелян Света Вазгеновна – доцент кафедры АЯП НПУА, канд. техн. наук,

тел.: (093) 26 97 82; **E-mail:** savetisyanoba@seua.am

Аветисян Грайр Робертович – ассистент АЯП НПУА, канд. техн. наук, тел.: 34 87 12,

E-mail: roba@seua.am

ОТРАЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ ОТ ГРАНИЦЫ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА КУБИЧЕСКОЙ СИММЕТРИИ

Берберян А.Х., Гараков В.Г.

Аннотация. Исследованию влияния пьезоэлектрических свойств материала на распространение упругих волн посвящено большое количество работ [1–3]. При этом, в основном, использовалась квазистатическая модель пьезоупругости. В задаче отражения электромагнитной волны от упругой среды со свойствами пьезоэлектрика появляется необходимость учёта гиперболических уравнений [4].

1. В прямоугольной декартовой системе координат (x, y, z) полупространство из материала, обладающего пьезоупругими свойствами кубической симметрии, занимает область $(-\infty < x < \infty, 0 \leq y < \infty, -\infty < z < \infty)$.

В работе [5] была предложена квазигиперболическая модель для исследования распространения волн в пьезоэлектрических средах кубической симметрии. Указанная модель представляет упрощение точной системы уравнений с сохранением свойства гиперболичности.

Аналогичная модель квазигиперболичности для пьезоэлектриков гексагональной системы ранее была предложена в статье [6].

Уравнение распространения сдвиговых электроупругих волн, согласно [2], имеют вид

$$c_{44}\Delta w + 2e_{14}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \Delta \varphi - \frac{2e_{14}}{\varepsilon} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (1.1)$$

Материальные уравнения следующие:

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= c_{44} \frac{\partial w}{\partial x} + e_{14} \frac{\partial \varphi}{\partial y}, & \sigma_{23} &= c_{44} \frac{\partial w}{\partial y} + e_{14} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ D_1 &= -\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x} + e_{14} \frac{\partial w}{\partial y}, & D_2 &= -\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial y} + e_{14} \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \quad (1.2)$$

При распространении волн появляется также магнитное поле, перпендикулярное к плоскости распространения, которое определяется из уравнения

$$\frac{\partial H_3^{(1)}}{\partial x} = -\frac{1}{c_1} \frac{\partial D_2}{\partial t}, \quad c_1 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \quad (1.3)$$

В соответствии с приведёнными уравнениями (1.1)–(1.3) падающая на границу пьезоэлектрического полупространства $y = 0$. Электромагнитная волна из области $y < 0$, которая отождествляется с вакуумом, должна быть решением уравнений

$$\frac{\partial H_3}{\partial y} = \frac{1}{c} \frac{\partial E_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_3}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial E_2}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_2}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial y} = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_3}{\partial t} \quad (1.4)$$

Таким образом, падающая (и отражённая) электромагнитная волна является решением уравнений (1.4), а преломленная волна – уравнений (1.1).

На границе раздела $y = 0$ необходимо удовлетворить граничным условиям [7]

$$E_1 = E_1^{(1)}, \quad H_3 = H_3^{(1)}, \quad \sigma_{23} = 0 \quad (1.5)$$

Здесь величины электромагнитного поля без верхнего индекса относятся к области $y < 0$, а с индексом (1) – к области $y > 0$.

2. Известно, что из (1.4) выражения для падающей и отражённой волны магнитного поля имеют вид:

$$H_{3n} = A \exp i(\omega t - k_1 x - k_2 y), \quad H_{30} = B \exp i(\omega t - k_1 x + k_2 y) \quad (1.6)$$

Используя (1.6) и удовлетворяя граничным условиям (1.5), получаем выражения для коэффициентов отражённой и преломленной волн.

Падающая на полупространство из пьезоэлектрического материала кубической симметрии электромагнитная волна приводит к возбуждению упругой волны. Амплитуда упругой волны зависит от угла падения электромагнитной волны и коэффициента электромеханической связи. При нормальном падении электромагнитной волны ($k_1 = 0$) упругая волна не возбуждается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Auld B.A. Modern Problems in Elastic Wave Propagation. 1978, Wiley, New York, 459p.
2. Балакирев М.К., Гишинский И.А. Волны в пьезо-кристаллах. Новосибирск: Наука, 1982. 239с.
3. Бардзокас Д.И., Кудрявцев Б.А., Сеник Н.А. Распространение волн в электроупругих средах. М.: Едитория. УРСС, 2003. 336с.
4. Baghdasaryan A., Belubekyan M. On the Problem of Reflection of shear wave from a Boundary of Piezoelectric Media of class 6mm. In the 3th Intern. Congress on Thermoelastostresses. University of Illinois USA.2009, v.1.p183–198.
5. Белубекян М.В. Разделение волн электромагнитного поля для антиплоской задачи пьезоэлектрика класса 23. В сб. «Актуальные проблемы механики сплошной среды» Ереван: Изд. ЕРГАС, 2010. Т.1. С.138–142.
6. Schaofan L. The electromagnetic–acoustic surface wave in piezoelectric medium. The Bleustein–Gulyaev mode. //Journ. Appl. Phys. 1996. 80(9), p.5264–5269.
7. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343с.

Сведения об авторах:

Берберян Армен Хачатурович – научный сотрудник Института механики НАН Армении.

Тел.: (+374 10) 462096, E-mail: slavia555@yahoo.com

Гараков Владимир Герасимович – научный сотрудник Института механики НАН Армении

Тел.: (+374 93) 338166, E-mail: garakov@yandex.ru

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ДЕТАЛЯХ ПРИ ИХ ПРОИЗВОДСТВЕ МЕТОДОМ ПОСЛОЙНОЙ ФОТОПОЛИМЕРИЗАЦИИ

Бычков П.С., Козинцев В.М., Попов А.Л., Ченцов А.В.

Аннотация. Предложена расчётно-экспериментальная модель определения усадочных напряжений, проявляющихся после аддитивного изготовления деталей методом DLP печати. Модель разработана на основе анализа изгибных усадочных деформаций серии образцов в форме пластин-полос из фотополимерной смолы с одинаковыми размерами, но с разным временем полимеризации.

Введение. Усадка деталей из полимеров, изготовленных с помощью 3D принтеров, является одной из основных проблем соответствия детали исходному проекту. Для ее решения производители принтеров используют при печати специальные подложки, которые препятствуют усадке материала детали в ходе изготовления. Однако при этом в детали формируются остаточные усадочные напряжения, которые при отделении детали от подложки стремятся продеформировать деталь, нарушая её проектные размеры.

1. Формирование усадочных напряжений при 3D печати. Из-за того, что при засветке жидкого фотополимера происходит образование полимерной цепочки с уменьшением расстояния между молекулами мономера, твердеющий материал проявляет склонность к усадке, которой препятствует адгезия материала к подложке. В результате, в полученной детали возникают усадочные напряжения. При отделении детали от подложки, на которой происходил рост, усадочные напряжения создают деформации, искажающие проектные размеры детали [1].

2. Теоретическая модель для оценки усадочных напряжений. Напряжённо-деформированное состояние, вызванное усадочными деформациями при 3D печати, может быть описано с помощью модели внецентренного изгиба упругой пластины-полосы. Такое представление объясняется тем, что каждый последующий напечатанный слой получает неодинаковую по сравнению с предыдущим слоем дозу облучения, что объясняется светопрозрачностью фотополимера. Вследствие этого, первый слой, примыкающий к подложке, оказывается твёрже второго, второй твёрже третьего и т.д. Вместе с тем, увеличивается модуль упругости полосы [2].

Уравнение, связывающее кривизну $1/\rho$ нейтрального слоя балки прямоугольного поперечного сечения с крайними изгибающими моментами M имеет вид [3]:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ}, \quad J = \frac{bh^3}{12}$$

где E – модуль упругости, b , h – соответственно, ширина и толщина поперечного сечения балки.

Величина изгибающего момента M может быть выражена через максимальное значение приведённых усадочных напряжений $\sigma_{sm} = \max \sigma_s(y) = \sigma_s(h/2)$, результирующую осевую силу P и

плечо δ , задающее расстояние точки приложения результирующей силы (центр тяжести прямоугольного треугольника с катетами h и σ_{sm}) от положения нейтральной оси балки:

$$M = P\delta, \quad P = \frac{1}{2}\sigma_{sm}bh, \quad \delta = \frac{h}{6}$$

Сопоставляя две предыдущие формулы, получим простое выражение для максимального значения приведённого усадочного напряжения

$$\sigma_{sm} = E \frac{h}{\rho}$$

3. Экспериментальное моделирование усадочных деформаций. Для экспериментального моделирования деформаций, обусловленных усадочными напряжениями при послойной 3D печати, исследовались прямоугольные полосы с одинаковыми размерами, но разным числом слоёв и временем засветки отдельных слоёв. Одновременно были напечатаны образцы с тонкой рабочей частью и широкими краями для определения механических характеристик на разрывной машине получающихся материалов с тем же количеством слоёв и теми же временами засветки, что и у тестовых прямоугольных полосок.

Определение модулей упругости образцов производилось на испытательной установке MTS Synergie 400. Растяжение образцов, напечатанных в тех же условиях засветки, что и полоски, производилась синхронно с окончанием изгибной усадки полосок.

Исследования показали, что реальный изгиб снятой с подложки полоски затвердевшего фотополимера под действием усадочных напряжений вполне адекватно аппроксимируется окружностью. Таким образом, предложенный экспериментально-теоретический подход позволяет определять остаточные напряжения, возникающие при **аддитивном** изготовлении пластины-полоски методом послойной фотополимеризации.

REFERENCE

1. Z. Chen, G.S. Huang, I.Trase, X.M. Han, Y.F. Mei. Mechanical self-assembly of a strain-engineered flexible layer: Wrinkling, rolling and twisting. Phys. Rev. Applied 2016, 5, pp. 017001-33.
2. Z. Zhao, J. Wu, X. Mu, H. Chen, H.J. Qi, D. Fang. Origami by frontal photopolymerization. Sci. Adv. 2017, 3, e1602326, pp. 1-7.
3. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. М.: Наука, 1974. 560 с.

Сведения об авторах:

Бычков П.С. – м.н.с., Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, лаборатория моделирования в механике деформируемого твёрдого тела.

Ченцов А.В. – к.ф.-м.н., н.с., Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Лаборатория механики прочности и разрушения материалов и конструкций.

Козинцев В.М. – к.ф.-м.н., н.с., Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Лаборатория механики прочности и разрушения материалов и конструкций.

Попов А.Л. – д.ф.-м.н., в.н.с., Ин-т проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Лаборатория механики прочности и разрушения материалов и конструкций. **E-mail:** popov@ipmnet.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНОЙ ЗАВИСИМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ТЕРМОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ УДЛИНЁННОЙ ПЛАСТИНКИ В КРИТИЧЕСКИХ СКОРОСТЯХ ОБТЕКАЮЩЕГО ПОТОКА СВЕРХЗВУКОВОГО ГАЗА

Варданян И.А., Сагоян Р.О.

Аннотация. Настоящая работа посвящена исследованию амплитудно-частотной зависимости удлиненной прямоугольной пластинки под действием переменного по толщине температурного поля и обтекающего пластинку сверхзвукового потока газа (с невозмущенной скоростью, направленной вдоль коротким сторонам пластинки). Показано, что совместным действием температурного поля и обтекающего потока можно регулировать процесс устойчивости и при помощи температурного поля существенно изменить величину критической скорости флаттера (нижняя критическая скорость). При решении нелинейной задачи устойчивости, кроме обычной кубической геометрической нелинейности, учитываются также как квадратичную, так и кубическую аэродинамическую нелинейности.

Постановка задачи и основные результаты. Рассмотрим тонкую изотропную прямоугольную пластинку постоянной толщины h , находящуюся в стационарном температурном поле $T=T_0(x_1, x_2)+x_3\Theta(x_1, x_2)$. Введём декартовую систему координат (x_1, x_2, x_3) так, чтобы срединная плоскость пластинки совпала с координатной плоскостью (x_1, x_2) . Пусть пластинка обтекается с одной стороны сверхзвуковым потоком газа с невозмущенной скоростью U , направленной вдоль оси $0x_1$. Исследуются вопросы устойчивости рассматриваемой аэротермоупругой системы, а также влияние температурного поля на амплитудно-частотную зависимость нелинейных флаттерных колебаний указанной системы.

На основе теории термоупругости изотропного тела получается следующая нелинейная система дифференциальных уравнений движения пластинки относительно возмущения $w(x_1, t)$ поперечного перемещения пластинки [1]:

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} - N_1^T \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - N_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{d^2 w_T}{dx_1^2} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \left(\rho h \varepsilon + \frac{\alpha p_\infty}{a_\infty} \right) \frac{\partial w}{\partial t} + \alpha p_\infty M \frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{\alpha(\gamma+1)}{4} p_\infty M^2 \left[2 \frac{dw_T}{dx_1} + \frac{\partial w}{\partial x_1} \right] \frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{12} p_\infty M^3 \left[3 \frac{dw_T}{dx_1} + \frac{\partial w}{\partial x_1} \right] \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 = 0 \quad (1)$$

где

$$w_T(x_1) = -R\Theta \left\{ \frac{1}{2} x_1 (x_1 - a) + \frac{a^2 K v}{36 + K^2 v^2} \left[\frac{3}{8\pi} K v \sin \frac{\pi x_1}{a} + \frac{9}{16\pi} \sin \frac{2\pi x_1}{a} \right] \right\},$$

$$N_1^T = \begin{cases} 0, & \text{когда края пластинки свободно смещаются,} \\ -\frac{Eh}{1-\mu} \alpha T_0, & \text{когда края пластинки неподвижны;} \end{cases} \quad N_1 = \begin{cases} 0, & \text{когда края свободно смещаются,} \\ t_{11}, & \text{когда края неподвижны.} \end{cases}$$

Решения уравнения (1) должны удовлетворять следующим условиям:

$$w=0, \quad \partial^2 w / \partial x_1^2 = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = 0, \quad x_1 = a, \quad (2)$$

Полученная нелинейная задача (1)–(2) решена приближенно, представляя решение ее в виде

$$w = f_1(t) \sin \pi x / a + f_2(t) \sin 2\pi x / a.$$

и относительно безразмерных функций $x_i = f_i(t)/h$ получена система:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + \chi \frac{dx_1}{d\tau} + (1 - \bar{T}\delta) x_1 - \frac{2}{3} K v x_2 + \alpha_{11} x_1^2 + \alpha_{12} x_2^2 + x_2 (\beta_{11} x_1^2 + \beta_{12} x_2^2) + \\ + 3x_1 (x_1^2 + 4x_2^2) \delta + \bar{\Theta} [\delta_{11}^\Theta x_1 + \delta_{12}^\Theta x_2 + \alpha_{11}^\Theta x_1^2 + \alpha_{12}^\Theta x_2^2 + \alpha_{13}^\Theta x_1 x_2] = 0, \\ \frac{d^2 x_2}{d\tau^2} + \chi \frac{dx_2}{d\tau} + (\gamma^2 - 4\bar{T}\delta) x_2 + \frac{2}{3} K v x_1 + \alpha_{21} x_1 x_2 + x_1 (\beta_{21} x_1^2 + \beta_{22} x_2^2) + \\ + 12x_2 (x_1^2 + 4x_2^2) \delta + \bar{\Theta} [\delta_{21}^\Theta x_1 + \delta_{22}^\Theta x_2 + \alpha_{21}^\Theta x_1^2 + \alpha_{22}^\Theta x_2^2 + \alpha_{23}^\Theta x_1 x_2] = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

где наряду с безразмерным временем $\tau = \omega_1 t$ введены следующие обозначения:

$$\bar{T} = RT_0 \left(\frac{a}{h} \right)^2 \left(\frac{12}{\pi^2} \right), \quad \bar{\Theta} = R\Theta h \left(\frac{a}{h} \right)^2 \frac{1}{36 + K^2 v^2}, \quad K = \frac{4\alpha p_\infty}{\rho \omega_1^2 h^2}, \quad v = M \frac{h}{a}, \quad \omega_i = \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \left(\frac{i\pi}{a} \right)^2 \quad (i=1,2),$$

$$\gamma = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad \chi = \frac{1}{\omega_1} \left(\varepsilon + \frac{a_\infty \rho_\infty}{\rho h} \right), \quad \delta = \begin{cases} 0, & \text{когда края пластинки свободно смещаются,} \\ 1, & \text{когда края пластинки неподвижны.} \end{cases}$$

а также коэффициенты α_{ik} и β_{ik} , учитывающие аэродинамическую нелинейность, коэффициенты δ_{ij}^Θ , учитывающие линейное взаимодействие температуры и обтекающего потока с колеблющейся пластинкой и коэффициенты α_{ij}^Θ , учитывающие нелинейное (квадратное) взаимодействие указанных процессов.

Приближённое периодическое решение системы (3) будем искать в виде

$$x_1 = A_1 \cos \theta \tau + B_1 \sin \theta \tau + C_1 + \dots, \quad x_2 = A_2 \cos \theta \tau + B_2 \sin \theta \tau + C_2 + \dots \quad (4)$$

Здесь A_i , B_i , C_i и θ ($i=1,2$) – неизвестные постоянные. Решение (4) подставляется в систему (3) и приравняются нулю коэффициенты при свободном члене, $\cos \theta \tau$ и $\sin \theta \tau$. Получающаяся при этом система нелинейных алгебраических уравнений довольно громоздка для исследования и здесь не приводится. Приведём лишь некоторые результаты численного исследования этой системы при следующих исходных данных: $E = 7.3 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$; $\mu = 0.34$; $\rho_0 = 2.79 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ (дюрал),

$\alpha = 1.4$; $\rho_\infty = 1.29 \text{ кг/м}^3$; $a_\infty = 340.29 \text{ м/с}$ (воздух). При $\Theta = 0$, когда края пластинки свободно смещаются в своей плоскости ($\delta = 0$), вычисления показывают, что влияние геометрических параметров на указанную зависимость имеет лишь количественный характер: при уменьшении значений параметра h/a значение амплитуды флаттерных колебаний увеличивается (Рис.1). Когда края пластинки неподвижны в своей плоскости ($\delta = 1$) как температура, так и геометрические параметры пластинки имеют существенное влияние на амплитудно-частотную зависимость флаттерных колебаний пластинки (Рис.2).

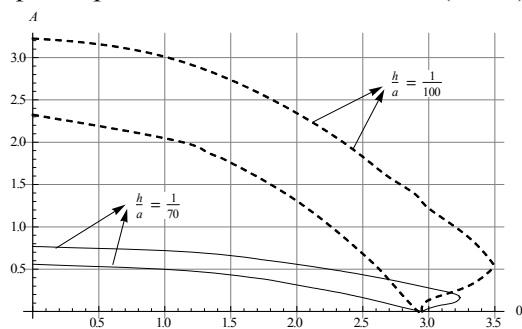


Рис.1. При $\Theta=0$, $\delta=0$.

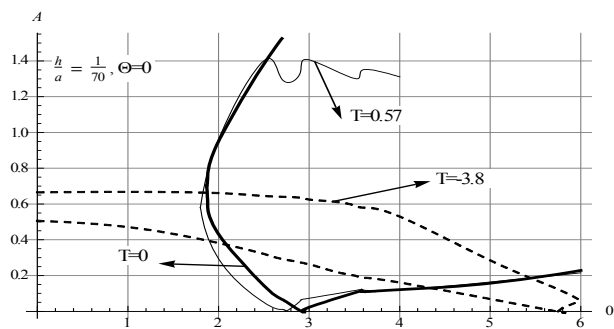


Рис.2. При $\Theta=0$, $\delta=1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдасарян Г.Е., Микилян М.А., Сагоян Р.О. Термоупругая устойчивость удлиненной прямоугольной пластинки в сверхзвуковом потоке газа. //Изв. НАН Армении. Механика. 2011. Т.64. №4. С.51-67.

Information about authors:

Saghoian Rafayel Onik – Institute of Mechanics NAS RA; E-mail: rafayel1984@mail.ru

Vardanyan Iren Armen – Institute of Mechanics NAS RA; E-mail: irena_123@bk.ru

К МОДЕЛИРОВАНИЮ И ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ОСТАТОЧНОГО НАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ В ЭЛЕКТРОУПРУГИХ ТЕЛАХ

Ватульян А.О., Недин Р.Д., Дударев В.В.

Аннотация. Получена общая слабая постановка задачи для пьезоэлектрического тела при наличии полей остаточных напряжений и деформаций. На её основе сформулированы прямые и обратные коэффициентные задачи о колебаниях электроупругого стержня и тонкого диска. Решение прямых задач получены численно с помощью метода пристрелки. На основе анализа свободных колебаний рассматриваемых объектов предложено решение соответствующих обратных задач об определении уровня предварительного напряжённо-деформированного состояния (ПНДС).

1. Общая слабая постановка. Рассмотрим колебания пьезоэлектрического тела объёма V с учётом полей предварительных напряжений и остаточных деформаций. На основе соответствующей линеаризованной модели, выписанной в метрике возмущённой конфигурации, получена слабая постановка задачи:

$$\begin{aligned} & \int_V \left[(C_{ijkl} u_{k,l} + e_{mij} \varphi_{,m}) v_{i,j} + (e_{kij} u_{i,j} - \epsilon_{kn} \varphi_{,n}) \psi_{,k} \right] dV + \\ & + \int_V \left[(C_{ijkl}^0 u_{k,l} + \hat{e}_{mij}^0 \varphi_{,m} + u_{i,m}^0 (\hat{C}_{ijkl} u_{k,l} + \hat{e}_{mij}^0 \varphi_{,m}) + u_{i,m}^0 \sigma_{mj}^0) v_{i,j} + \right. \\ & \left. + (e_{kij}^0 u_{i,j} - \epsilon_{kn}^0 \varphi_{,n}) \psi_{,k} \right] dV = \int_{S_0} P_i v_i dS + \int_V \rho \omega^2 u_i v_i dV. \end{aligned} \quad (1.1)$$

При этом, эффективные модули определяются по правилам: $\tilde{C}_{ijkl}^0 = (\delta_{im} + u_{i,m}^0) C_{mjkl}^0 + u_{i,m}^0 C_{mjkl} + \delta_{ik} \sigma_{lj}^0$, $C_{ijkl}^0 = C_{ijml} u_{k,m}^0 + C_{ijklmn} u_{m,n}^0 + e_{mijkl} \varphi_{,m}^0$, $e_{mij}^0 = e_{mnj} u_{i,n}^0 + e_{mijkl} u_{k,l}^0 - l_{mnij} \varphi_{,n}^0$, $\epsilon_{mn}^0 = l_{mnij} u_{i,j}^0 - \epsilon_{mnj} \varphi_{,j}^0$. Компоненты C_{ijkl} – упругие постоянные, e_{mij} – пьезоэлектрические постоянные, ϵ_{mn} – диэлектрические проницаемости, C_{ijklmn} , e_{mijkl} , ϵ_{mnj} , l_{mnij} характеризуют электроупругие свойства материала, σ_{ij}^0 и u_i^0 – компоненты тензора ПН и вектора остаточных перемещений, соответственно; v_i и ψ – пробные функции для перемещений и потенциала, удовлетворяющие главным граничным условиям задачи.

Слабая постановка исходной задачи полезна при решении частных задач с помощью метода конечных элементов, а также для вывода уравнений для решения обратных задач по идентификации механических или электрических свойств.

2. Постановка задачи для пьезоэлектрического преднапряжённого стержня. На основе слабой постановки (1.1) сформулирована краевая задача об установившихся продольных колебаниях предварительно напряжённого пьезоэлектрического стержня длины l , консольно закреплённого на левом конце:

$$\begin{aligned} & \left[(E^* u' + d^* \varphi') F \right]' + \rho F \omega^2 u = 0, \quad \left[(d^* u' - \epsilon \varphi') F \right]' = 0, \\ & u(0) = 0, \quad E^* u'(l) + d^* \varphi'(l) = P, \quad d^* u'(0) - \epsilon \varphi'(0) = 0, \quad d^* u'(l) - \epsilon \varphi'(l) = 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь $\sigma_{11}^0 = \sigma^0(x)$ и $u_1^0 = u^0(x)$ – компоненты одноосных предварительных напряжений и перемещений, $E^* = E(1 + u_0')^2 + \sigma_0$, $d^* = d(1 + u_0')$. Электроды на торцах стержня отсутствуют.

3. Постановка задачи для пьезоэлектрического преднапряжённого тонкого диска. Получена постановка задачи об установившихся радиальных колебаниях электроупругого тонкого диска с электродированными торцевыми поверхностями. Колебания вызываются путём подачи разности потенциалов с фиксированной частотой. После реализации процедуры осреднения по толщине получены уравнения колебаний и граничные условия относительно радиальной компоненты смещения и потенциала:

$$u_{r,rr} S_2 + u_{r,r} S_1 + u_r (\rho \omega^2 - S_0) = -\frac{2}{h} \tilde{e}_{31} V_0 U^0, \quad \bar{T}_{rr} \Big|_{r=r_1, r_2} = 0, \quad (1.3)$$

$$\varphi_{,rr} + \frac{1}{r}\varphi_{,r} + \beta\varphi_{,zz} = -\alpha\frac{z}{r}(rU_{,r})_{,r}, \quad \varphi|_{z=\pm h/2} = \pm V_0, \quad D_r|_{r=r_1, r_2} = 0, \quad (1.4)$$

где $S_0 = \frac{1}{r^2} \left(\tilde{C}_{11} \left(1 + \frac{u_r^0}{r} \right)^2 + \sigma_{\theta\theta}^0 \right) - \frac{\tilde{C}_{12}}{r} \left((1 + u_{r,r}^0) \left(1 + \frac{u_r^0}{r} \right) \right)_{,r},$ $S_1 = \left(\tilde{C}_{11} (1 + u_{r,r}^0)^2 + \sigma_{rr}^0 \right)_{,r} + \frac{\tilde{C}_{11} (1 + u_{r,r}^0)^2 + \sigma_{rr}^0}{r},$

$$S_2 = \tilde{C}_{11} (1 + u_{r,r}^0)^2 + \sigma_{rr}^0, \quad U^0 = u_{r,rr}^0 + \frac{u_{r,r}^0}{r} - \frac{u_r^0}{r^2}, \quad U = (1 + u_{r,r}^0) u_{r,r} + \left(1 + \frac{u_r^0}{r} \right) \frac{u_r}{r}, \quad \alpha = \frac{e_{15} C_{13}}{\tilde{C}_{11} C_{33}}, \quad \beta = \tilde{C}_{33} / \tilde{C}_{11},$$

$$\tilde{C}_{11} = C_{11} \left(1 - \frac{C_{13}^2}{C_{11} C_{33}} \right), \quad \tilde{C}_{12} = C_{12} \left(1 - \frac{C_{13}^2}{C_{12} C_{33}} \right), \quad \tilde{e}_{31} = e_{31} \left(1 - \frac{C_{13} e_{33}}{C_{33} e_{31}} \right), \quad \tilde{e}_{15} = e_{15} \left(1 - \frac{C_{44} e_{33}}{C_{33} e_{15}} \right).$$

4. Решение модельных задач. Прямые задачи для стержня и диска об определении функции смещения решены численно путём сведения к системам дифференциальных уравнений первого порядка и последующим применением метода пристрелки. Проведён анализ изменения функции смещения и АЧХ, измеренной на нагружаемых частях границы, при различных уровнях ПНДС.

Предложен подход для решения обратной задачи об определении уровня этого состояния по данным об изменении частоты свободных колебаний и форме колебаний рассматриваемых объектов при отсутствии преднапряжений.

Работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных исследований по стратегическим направлениям развития науки Президиума РАН №1 «Фундаментальные проблемы математического моделирования» (1140-7287-0112) «Математическое моделирование неоднородных и многофазных структур», гранта Президента Российской Федерации № МК-5440.2016.1, РФФИ №16-01-00354.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ватульян А.О., Соловьев А.Н. Прямые и обратные задачи для однородных и неоднородных упругих и электроупругих тел. Ростов-н/Д: Изд-во Южного федерального университета, 2008. 176 с.
2. Dudarev V.V., Nedin R.D., Vatulyan A.O. Nondestructive identification of inhomogeneous residual stress state in deformable bodies on the basis of the acoustic sounding method // Advanced Materials Research, 2014. vol. 996. pp. 409-414.
3. Nedin R.D., Vatulyan A.O. Inverse problem of non-homogeneous residual stress identification in thin plates // International Journal of Solids and Structures, 2013. vol. 50. pp. 2107-2114.
4. Kuang Z.B. Theory of Electroelasticity. Heidelberg, New York: Springer, 2014. 431 pp.

Information about authors:

Alexander O. Vatulyan – Head of Department of Elasticity Theory, Russian Federation, Southern Federal University, I.I. Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics, and Computer Sciences, +7 863 297-51-11; Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Southern Mathematical Institute; **E-mail:** vatulyan@math.rsu.ru

Rostislav D. Nedin – Senior Teacher, Russian Federation, Southern Federal University, I.I. Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics, and Computer Sciences, +7 863 297-51-11; Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Southern Mathematical Institute; **E-mail:** rdn90@bk.ru

Vladimir V. Dudarev – Associate Professor, Russian Federation, Southern Federal University, I.I. Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics, and Computer Sciences, +7 863 297-51-11; Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Southern Mathematical Institute; **E-mail:** dudarev_vv@mail.ru

НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ КАЛИБРОВОЧНОЙ ПЛАСТИНЫ, ПОДВЕРГНУТОЙ ДРОБЕСТРУЙНОЙ ОБРАБОТКЕ

Виндокуров И.В., Виндокуров Д.В., Владыкин А.В., Келлер И.Э., Ощепкова Ю.Д., Трофимов В.Н.

Аннотация. Исследованы качественные особенности напряжённо-деформированного состояния стальной калибровочной пластинки, подвергнутой односторонней дробеструйной обработке. С этой целью построена модель, позволяющая связать профиль погранслоя пластических деформаций с экспериментально наблюдаемыми параметрами – прогибом пластинки и профилем остаточных напряжений в погранслое. Выполнен эксперимент, данные которого удалось удовлетворительно согласовать друг с другом в рамках модели.

Введение. Современные регламенты проектирования авиационного двигателя содержат требования прямого учёта в расчётах на прочность поверхностного слоя тангенциальных сжимающих остаточных напряжений, наводимых дробеструйной обработкой с целью повышения усталостной долговечности. Необходимая длительность дробеструйной обработки детали определяется по пластинке, прогиб которой калибруют в соответствии с уровнем остаточных напряжений, измеряемым для неё методом Н.Н. Давиденкова. Целью настоящей работы является построение и верификация модели напряжённо-деформированного состояния калибровочной пластинки.

1. Модель и метод её верификации. Метод Н.Н. Давиденкова позволяет экспериментально определять профиль тангенциальной компоненты тензора остаточных напряжений по глубине поверхностного слоя. Нахождение равновесного поля остальных компонент данного тензора представляет собой определённую проблему. Наиболее широко распространён сейчас метод прямого моделирования технологического процесса, посредством которого наводятся остаточные напряжения [1]. Вместо этого в настоящей работе предлагается подобрать функцию погранслоя пластических деформаций $f(z)$ (источника остаточных напряжений), параметры которой могут быть найдены по данным эксперимента в результате решения обратной задачи. Для верификации модели рассматривается калибровочный эксперимент по односторонней дробеструйной обработке пластинки, наблюдаемыми параметрами (индикаторами) для которого выступают амплитуда и глубина остаточных напряжений в погранслое и прогиб пластинки. Сама модель в сильной постановке включает в себя уравнения равновесия упругого тела с пластическими деформациями

$$\mu \nabla \cdot \nabla \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} = 2\mu \nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (1.1)$$

и условия

$$\lambda \mathbf{n} \nabla \cdot \mathbf{u} + \mu \mathbf{n} \cdot (\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla) = 2\mu \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (1.2)$$

на границах пластины ($\mathbf{u}$ – вектор перемещений, $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ – тензор пластических деформаций, $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к границе). В (1.1)-(1.2) приняты гипотезы об изотропии и идентичности упругих свойств в погранслое калибровочной пластинки и вне его. Функция источника $f(z)$, определяющая ненулевые компоненты тензора пластических деформаций $\varepsilon_{xx}^p = \varepsilon_{yy}^p = -\frac{1}{2} \varepsilon_{zz}^p = f(z)$, задавалась в виде $f(z) = a \operatorname{th}(kz - b)$.

2. Эксперимент, расчёт и их сопоставление. Калибровочная пластина из стали 65Г, закалённой до твёрдости HRC51, размерами 100x19x1,3 мм, была обработана с одной стороны микрошариками на пневмодробеструйной установке. Прогиб обработанной пластины оказался равным 0,32 мм. Из этой пластины электроэрозионным способом были вырезаны три образца, для которых на установке АПООН методом Н.Н. Давиденкова по методике ПИ 1.4.804-84 были определены распределения остаточных напряжений по глубине. Численный расчёт, выполненный в пакете ANSYS Mechanical 14, позволил восстановить функцию $f(z)$, обеспечивающую соответствие рассчитанных значений индикаторных параметров экспериментальным данным (рис.1). В расчёте задавались фиктивные массовые и поверхностные силы в соответствии с постановкой задачи (1.1)-(1.2). Качественный характер поведения полей позволил построить точное аналитическое решение задачи (1.1)-(1.2). Распределение напряжений качественно отличается от выражения, полученного Заркой [2].

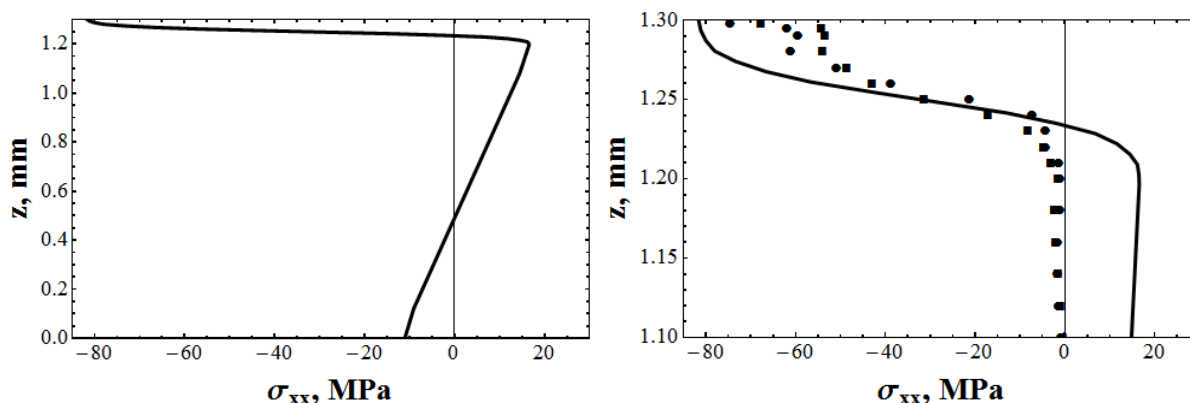


Рис. 1. Рассчитанный профиль остаточных напряжений по толщине пластины (слева) и в погранслое в сопоставлении с экспериментальными данными (справа).

Закключение. Построена модель, основанная на допущениях о характере пограничного слоя пластических деформаций и об однородности упругих свойств пластины после её обработки, с помощью которой удалось воспроизвести экспериментально наблюдаемые индикаторы напряжённо-деформированного состояния пластины, подвергнутой односторонней дробеструйной обработке.

Благодарность. Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект №17-08-01085).

ЛИТЕРАТУРА

1. Zimmermann M., Klemenz M., Schulze V. Literature review on shot peening simulation. Int. J. of Computational Materials Science and Surface Engineering. 2010, vol 3, no. 4. p. 289-310.
2. Gallitelli D. et al. Simulation of shot peening: From process parameters to residual stress fields in a structure. Comptes Rendus Mecanique. 2016, vol 344, no. 4-5, p. 355-374.

Информация об авторах:

Виндокуров Илья Владимирович – студент, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, кафедра динамики и прочности машин

E-mail: dpm13b@mail.ru

Виндокуров Денис Владимирович – студент, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, кафедра динамики и прочности машин, инженер-технолог, АО «ОДК-Пермские моторы», центр прогрессивных технологий

E-mail: vindokurovdenis@mail.ru

Владыкин Алексей Валерьевич – заместитель начальника, АО «ОДК-Пермские моторы», центр прогрессивных технологий

E-mail: vladykin-av@pmz.ru

Келлер Илья Эрнстович – профессор, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, кафедра динамики и прочности машин, +7 (342) 239 13 40, научный сотрудник, Институт механики сплошных сред УрО РАН, лаборатория нелинейной механики деформируемого твердого тела, +7 (342) 237 83 07

E-mail: kie@icmm.ru

Ощепкова Юлия Дмитриевна – студентка, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, кафедра динамики и прочности машин

E-mail: haruchansky@gmail.com

Трофимов Виктор Николаевич – профессор, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, кафедра динамики и прочности машин, +7 (342) 239 13 40

E-mail: tvn_perm@mail.ru

ЗАДАЧА ЛАМЕ ДЛЯ МНОГОСЛОЙНОГО ВЯЗКОУПРУГОГО ПОЛОГО ШАРА С УЧЁТОМ НЕОДНОРОДНОГО СТАРЕНИЯ

Гаспарян А.В., Давтян З.А., Мирзоян С.Е.

Аннотация. Определение характеристик напряжённо-деформированного состояния составных упругих и вязкоупругих тел представляет теоретический и практический интерес.

В настоящей работе в рамках теории ползучести неоднородно наследственно стареющих тел Н.Х. Арутюняна [1, 2] рассматривается задача Ламе для разновозрастного многослойного вязкоупругого полого шара.

Решение указанной задачи сводится к решению конечно-разностного неоднородного уравнения второго порядка, содержащего операторы по временным и по пространственным координатам.

Полученные формулы позволяют определить требуемые контактные напряжения и другие механические характеристики задачи, связанные с разновозрастностью контактирующих шаров.

1. Пусть композит представляет собой пакет из произвольного конечного числа n вязкоупругих шаров $(r_{k-1} \leq r \leq r_k) \ (k = \overline{1, n})$ с мгновенными модулями деформации $E_k(t)$, спаянных по боковым поверхностям. Будем считать, что контактирующие шары обладают свойствами ползучести и имеют разные возрасты. Пусть далее в момент времени $t = \tau_0$ к поверхностям $r = r_0$ и $r = r_n$ приложены равномерно распределённые касательные силы интенсивностей $P_0(t)$ и $P_n(t)$, соответственно:

$$\sigma_r(r, t)|_{r=r_0} = -P_0(t), \quad \sigma_r(r, t)|_{r=r_n} = -P_n(t) \quad (1.1)$$

Здесь $\sigma_r(r, t)$ – компонента радиальных напряжений. При этом, в силу симметрии, касательные напряжения будут равны нулю.

Для вывода определяющих уравнений поставленной задачи рассмотрим k -ый слой пакета. Тогда, согласно формулам Ламе, для определения упруго-мгновенных напряжений и перемещений слоёв имеем следующие выражения [3]:

$$\sigma_r^{(k)}(r, t) = \frac{\lambda_k(t)}{\nu_k} A_k(t) + \frac{\lambda_k(t)(3\nu_k - 2)}{\nu_k} \frac{B_k(t)}{r^3}, \quad \lambda_k(t) = \frac{E_k(t)\lambda_k}{(1 + \nu_k)(1 - 2\nu_k)} \quad (1.2)$$

$$U_r^{(k)}(r, t) = A_k(t) + B_k(t)/r^2 \quad (k = \overline{1, n})$$

$$\sigma_r^{(k)}(r, t)|_{r=r_{k-1}} = -P_{k-1}(t), \quad \sigma_r^{(k)}(r, t)|_{r=r_k} = -P_k(t) \quad (1.3)$$

Здесь $A_k(t)$ и $B_k(t)$ – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению, $U_r^{(k)}(r, t)$ – упруго-мгновенное радиальное перемещение k -ого слоя, $P_{k-1}(t)$ и $P_k(t)$ – неизвестные радиальные контактные напряжения, соответственно, на окружностях $r = r_{k-1}$ и $r = r_k$ слоёв, ν_k – коэффициенты Пуассона материалов слоёв, а $E_k(t)$ – их упруго-мгновенный модуль деформации.

Удовлетворяя граничным условиям (1.3), для радиального перемещения из (1.2) получим:

$$U_r^{(k)}(r, t) = \frac{r_k^3 r_{k-1}^3 (P_k(t) - P_{k-1}(t))}{d_k(t) l_k} \frac{1}{r^2} - \frac{(r_k^3 P_k(t) - r_{k-1}^3 P_{k-1}(t))}{c_k(t) l_k} r, \quad (1.4)$$

где $c_k(t) = \lambda_k(t)/\nu_k$, $d_k(t) = \lambda_k(t)(3\nu_k - 2)/\nu_k$, $l_k = r_k^3 - r_{k-1}^3$.

Теперь, условия непрерывности смещений на поверхности контакта $r = r_k$ двух шаров, с учётом ползучести, принимают вид:

$$(I - L_k)U_r^{(k)}(r, t) = (I - L_{k+1})U_r^{(k+1)}(r, t) \quad (k = \overline{1, n}) \quad (1.5)$$

Здесь $L_i[Y(t)] = \int_0^t E_i(u) K_i(t + \rho_i, u + \rho_i) Y(u) du$, $\rho_i = \tau_i - \tau_0$

$$K_i(t, u) = \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{1}{E_i(u)} + C_i(t, u) \right] \quad (i = \overline{1, n-1}),$$

где τ_i – возрасты, а $C_i(t, u)$ – меры ползучести слоёв $(i = \overline{1, n-1})$.

Уравнения (1.5) при помощи (1.4) можно свести к конечно-разностным уравнениям второго порядка [4]

$$(I - L_k)(a_k(t)q_{k-1}(t) + b_k(t)q_k(t)) = f_k(t) \quad (1.6)$$

$$(I - L_{k+1})(\delta_{k+1}(t)q_k(t) + a_{k+1}(t)q_{k+1}(t)) = g_{k+1}(t) \quad (1.7)$$

$$\text{при условиях} \quad f_k(t) + g_{k+1}(t) = 0 \quad (k = \overline{1, n-1}). \quad (1.8)$$

Уравнения (1.6) и (1.7) можно соответственно представить в виде

$$a_k(t)q_k(t) + b_k(t)q_k(t) = (I + R_k)f_k(t) \quad (1.9)$$

$$\delta_{k+1}(t)q_k(t) + a_{k+1}(t)q_{k+1}(t) = (I + R_{k+1})g_{k+1}(t). \quad (1.10)$$

Здесь $R_s(t, u)$ – резольвента ядра $K_s(t, u)$ $(s = \overline{1, n-1})$, введены также обозначения

$$a_k(t) = 1/c_k(t)l_k - 1/d_k(t)l_k \quad q_k(t) = r_k^3 P_k(t) \quad \varphi_k = r_{k-1}^3 / r_k^3$$

$$b_k(t) = \varphi_k / d_k(t)l_k - 1/c_k(t)l_k \quad \delta_k(t) = 1/\varphi_k d_k(t)l_k - 1/c_k(t)l_k.$$

2. Решение конечно-разностных уравнений первого порядка (1.9) и (1.10) построим известным методом [4, 5]. Опуская промежуточные выкладки и учитывая (1.8), относительно неизвестных $f_i(t)$ $(i = \overline{1, n-1})$ получим систему интегральных уравнений Вольтерра второго порядка:

$$(I + R_k)f_k(t) + \sum_{i=1}^{k-1} Q_i(t) \frac{M_i(t)}{M_1(t)} (I + R_i)f_i(t) +$$

$$+ \sum_{i=k}^{n-1} H_i(t) \frac{N_{i+1}(t)}{N_k(t)} (I + R_{i+1})f_i(t) = \frac{P_0(t)}{M_k(t)} - \frac{P_n(t)}{N_k(t)} \quad (k = \overline{1, n-1}) \quad (2.1)$$

где $Q_i(t) = 1/b_i(t)$ $H_i(t) = 1/a_{i+1}(t)$

$$M_i(t) = \prod_{r=1}^i b_r(t)/a_r(t) \quad (i = \overline{1, k}) \quad N_i(t) = \prod_{r=i}^{n-1} \delta_{r+1}(t)/a_{r+1}(t) \quad (i = \overline{k, n-1}).$$

После решения определяющей системы интегральных уравнений (2.1), из уравнений (1.9) и (1.10) определяются контактные радиальные напряжения $q_k(t)$ $(k = \overline{1, n-1})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н.Х., Колмановский В.Б. Теория ползучести неоднородных сред. М: Наука, 1983. 336 с.
2. Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В. Контактные задачи теории ползучести. Ереван: 1999. 320 с.
3. Рекач В.Г. Руководство к решению задач по теории упругости. М.: ВШ, 1984. 287 с.
4. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. М: Наука, 1967. 375 с.
5. Гаспарян А.В., Мхитарян С.М. О напряжённом состоянии композита в виде пакета из произвольного конечного числа упругих слоёв при антиплоской деформации. //Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. № 2. С.10-20.

Сведения об авторах:

Гаспарян Ануш Вараздатовна, к.ф.-м.н. старший научный сотрудник

Давтян Завен Азобекович, к.ф.-м.н. старший научный сотрудник

Мирзоян Саак Езникович, к.ф.-м.н. старший научный сотрудник

Институт механики НАН Армении, 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2

Тел.: (+37410)52-48-90, E-mail: anush@mechins.sci.am

О ДИНАМИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ С ОДНИМ СВОБОДНЫМ КРАЕМ

Геворгян Г.З., Саакян А.А.

Аннотация. Рассматривается задача устойчивости прямоугольной пластинки свободно опертой по двум сторонам, третья сторона которой либо шарнирно оперта, либо жестко защемлена, а четвертая сторона свободна и является носителем конечной массы. Пластина сжимается следящей нагрузкой, приложенной к этому краю. Получены зависимости критической нагрузки от относительной длины пластины, т.е. расстояния между сторонами с разными условиями.

Введение. Не останавливаясь здесь на множестве работ, посвященных устойчивости сжатой прямоугольной пластинки, отметим, что в работе [1] была исследована статическая локализованная неустойчивость пластинки при различных условиях опирания сторон.

В настоящей работе рассматривается динамическая устойчивость упругой прямоугольной пластинки в постановке В.В.Болотина [2].

Постановка задачи. Пусть тонкая упругая пластинка в прямоугольной декартовой системе координат (x, y, z) занимает область: $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $-h \leq z \leq h$. Согласно [2] уравнение устойчивости пластинки имеет вид:

$$\Delta^2 w(x, y, t) + \alpha^2 \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial x^2} = 0, \quad \alpha^2 = \frac{P}{D} \quad (1)$$

где $w(x, y, t)$ – прогиб, зависимость которого от времени t проявляется лишь в граничных условиях, P – интенсивность равномерно распределенной сжимающей нагрузки, которая полагается следящей, D – изгибная жесткость пластинки.

Полагая, что края пластинки $y = 0, b$ свободно оперты, на этих краях будем иметь следующие граничные условия

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, b, \quad (2)$$

На свободном крае ($x = 0$), где предполагается наличие равномерно распределенной по нему массы m , будем иметь условия

$$\frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial y^2} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial y^2} \right] = - \frac{m}{D} \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2}$$

Условия на крае $x = a$ будут заданы ниже.

Решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2) и (3), можно записать в виде

$$w(x, y, t) = e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \sin \lambda_n y \quad (4)$$

где $s_1 = \sqrt{1 - \frac{\alpha_n^2}{2}}$, $s_2 = \frac{\alpha_n}{\sqrt{2}}$, $\alpha_n^2 = \frac{P}{2D\lambda_n^2}$, $\eta = \frac{m\omega^2}{D\lambda_n^3}$, $\lambda_n = n\pi/b$,

$$f_n(x) = B_n \left\{ \cos \lambda_n s_2 x \operatorname{sh} \lambda_n s_1 x + \frac{s_1(1 - \nu + 4s_2^2)}{s_2(1 + \nu - 4s_2^2)} \sin \lambda_n s_2 x \operatorname{ch} \lambda_n s_1 x \right\} +$$

$$+ C_n \left\{ - \frac{1 - \nu - 2s_2^2}{2s_1 s_2} \sin \lambda_n s_2 x \operatorname{sh} \lambda_n s_1 x + \left[\frac{\eta}{s_2(1 + \nu - 4s_2^2)} \sin \lambda_n s_2 x + \cos \lambda_n s_2 x \right] \operatorname{ch} \lambda_n s_1 x \right\} \quad (5)$$

удовлетворяющем условиям на трёх краях пластинки и содержащем две произвольные постоянные для удовлетворения условиям на четвёртой стороне, которые рассмотрим отдельно.

На крае $x = a$ будем иметь условия

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{для свободно опёртого края} \quad (6)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{для защемлённого края} \quad (7)$$

Из условия равенства нулю детерминанта матрицы однородных с.л.а.у., получаемых после удовлетворения условиям (6) или (7), находим:

$$\eta = \frac{s_1 \left((1-\nu)^2 - 4s_2^2 \nu \right) \sin 2\zeta_2 - s_2 \left((1+\nu)^2 - 4 - 4s_2^2 \nu \right) \operatorname{sh} 2\zeta_1}{2s_1 s_2 (\operatorname{ch} 2\zeta_1 - \cos 2\zeta_2)}, \quad \zeta_i = \lambda_n s_i a \quad (i=1,2) \quad (8)$$

$$\eta = \frac{(1-\nu)^2 + 4s_2^2 (1-2s_2^2) - s_1^2 \left[(1-\nu)^2 - 4s_2^2 \nu \right] \cos 2\zeta_2 - s_2^2 \left[(1+\nu)^2 - 4 - 4\nu s_2^2 \right] \operatorname{ch} 2\zeta_1}{2s_1 s_2^3 (s_2 \operatorname{sh} 2\zeta_1 - s_1 \sin 2\zeta_2)} \quad (9)$$

Учитывая представление $\eta = \frac{m\omega^2}{D\lambda_n^3}$, для динамической устойчивости пластины необходимо

выполнение условия $\eta > 0$. Исследуя нули числителя и знаменателя, приводящие к изменению знака η , найдено, что корней, удовлетворяющих условию $\alpha_n^2 < 2$, в обоих случаях нет, т.е. локализованная неустойчивость не может иметь места. На рис.1, показаны графики зависимости безразмерного параметра $\delta \equiv \alpha_1 / \sqrt{2}$, характеризующего внешнюю нагрузку, от параметра $a^* = a/b$.

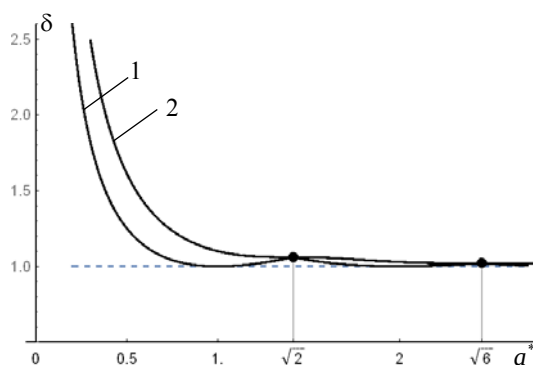


Рис.1. Зависимость критической следящей нагрузки от параметра a^* : кривая 1 соответствует шарнирному опиранию, а кривая 2 – жёсткому защемлению края $X = a$.

Авторы выражают благодарность проф. М.В.Белубекяну за постановку задачи и ценные советы при выполнении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белубекян М.В., Саакян А.А. Локализованная неустойчивость прямоугольной пластинки при действии сжимающей нагрузки на свободном крае. //Тр. Межд. школы-конф. «Механика – 2016», 03-08 октября 2016, Цахкадзор, Армения, Ер.: НУАСА, 2016, с. 43-46.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости М.: Физматлит, 1961. 340с.

Сведения об авторах:

Геворгян Гнун Завенович – к.ф.м.н., вед.н.с., Институт механики НАН РА,

E-mail: gnungev@gmail.com

Саакян Арег Аветикович – аспирант, Институт механики НАН РА,

E-mail: areg1992@gmail.com

ОБ ОДНОЙ РАЗНОВИДНОСТИ ДИНАМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА МАНИПУЛЯТОРОВ ПОСРЕДСТВОМ ОБРАЩЕНИЯ ИХ МАТРИЦЫ МАСС

Геворкян Г.А.

Аннотация. Доказано, что основанные на методе Ньютона-Эйлера прогрессивные формализмы расчёта динамических систем превосходят по скорости вычислительного процесса методы и формализмы, основанные на процедуре обращения матрицы масс указанных систем, ничем при этом им не уступая по точности вычислений. Однако, выясняется, что при малом числе степеней свободы некоторые модификации метода с обращением матрицы масс не уступают по расчётной скорости наиболее прогрессивным формализмам. Об одной из таких модификаций вычислительной стратегии с обращением матрицы масс здесь и пойдет речь.

Введение. В течение последних десятилетий установлено, что призванные для исследования широкого класса динамических систем формализмы, которые базируются на *методе Ньютона-Эйлера*, или *методе без обращения матрицы масс*, превосходят по скорости вычислительного процесса формализмы, являющиеся теми или иными модификациями *метода Лагранжа*, или *метода без обращения матрицы масс*, сохраняя неизменной точность вычислительного процесса. Как известно [1 – 3], в методе Ньютона-Эйлера линейная зависимость числа производимых арифметических операций от размерности кинематических цепей применительно к численному решению прямой и обратной задач динамики манипуляторов достигается посредством внедрения в алгоритм ряда вспомогательных итеративно-символических величин – матриц, векторов и скаляров. Понятно, что наличие этих вспомогательных параметров существенно загромождает тело алгоритма.

В робототехнике широкое распространение получили трёхзвенные манипуляторы, которые в зарубежной литературе принято называть роботами SCARA, для которых системы автоматизированного проектирования и управления формулируются в наиболее доступной и лаконичной форме. Выясняется, что для этой разновидности манипуляторов при создании САПР целесообразно использовать не метод Ньютона-Эйлера, который, казалось бы, по показателю быстродействия безоговорочно опережает все другие существующие методы динамического исследования, а одну особую разновидность метода Лагранжа, использующую процедуру обращения матрицы масс.

1. Приведение фундаментальных уравнений Ньютона-Эйлера к глобальному виду. В современной литературе по моделированию и управлению роботами [1] метод Ньютона-Эйлера формулируется следующим образом. Во-первых, задаются кинематические соотношения между положениями, скоростями и ускорениями звеньев манипулятора, число которых полагается равным n ; последние векторные соотношения, в соответствии с терминологией источника [1], записываются:

$${}^j\ddot{\vec{V}}_j = {}^j\vec{T}_{j-1} \cdot {}^{j-1}\ddot{\vec{V}}_{j-1} + \ddot{q}_j {}^j\vec{a}_j + {}^j\ddot{\gamma}_j, \quad j=1, \dots, n, \quad (1)$$

где ${}^j\ddot{\vec{V}}_j = [{}^j\ddot{V}_j, {}^j\ddot{\omega}_j]^T$ – обобщённые скорости, ${}^j\vec{T}_{j-1}$ – обобщённая матрица преобразования движения между звеньями C_{j-1} и C_j размерности 6×6 , а ${}^j\vec{a}_j$ и ${}^j\ddot{\gamma}_j$ – обобщённые единичный и гироскопический шестимерные векторы, выражения которых приводятся в монографии [1].

Во-вторых, устанавливаются дифференциальные уравнения динамического равновесия звеньев цепи; согласно терминологии [1] эти уравнения принимают вид:

$${}^j\vec{J}_j \cdot {}^j\ddot{\vec{V}}_j = {}^j\vec{F}_j - {}^{j+1}\vec{T}_j^T \cdot {}^{j+1}\vec{F}_{j+1} + {}^j\vec{\beta}_j, \quad j=1, \dots, n, \quad (2)$$

где ${}^j\vec{F}_j = [{}^j\vec{F}_j, {}^j\vec{M}_j]^T$ – вектор внутренних усилий в сопряжениях звеньев C_{j-1} и C_j .

Путем объединения шестимерных векторных уравнений (1) и (2) в два глобальных векторных уравнения размерности $6n$, получаем:

$$\vec{H}\ddot{\vec{V}} = \vec{A}\ddot{\vec{Q}} + \vec{\gamma} \quad \text{и} \quad \vec{J}\ddot{\vec{V}} = \vec{H}^T\vec{F} + \vec{\beta}, \quad (3) - (4)$$

где

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{6 \times 6} & \mathbf{0}_{6 \times 6} & \dots & \mathbf{0}_{6 \times 6} \\ -{}^2\mathbf{T}_1 & \mathbf{I}_{6 \times 6} & \dots & \mathbf{0}_{6 \times 6} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0}_{6 \times 6} & \mathbf{0}_{6 \times 6} & \dots & \mathbf{I}_{6 \times 6} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} {}^1\vec{\mathbf{a}}_1 & \mathbf{0}_{6 \times 1} & \dots & \mathbf{0}_{6 \times 1} \\ \mathbf{0}_{6 \times 1} & {}^2\vec{\mathbf{a}}_2 & \dots & \mathbf{0}_{6 \times 1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0}_{6 \times 1} & \mathbf{0}_{6 \times 1} & \dots & {}^n\vec{\mathbf{a}}_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} {}^1\mathbf{J}_1 & \mathbf{0}_{6 \times 6} & \dots & \mathbf{0}_{6 \times 6} \\ \mathbf{0}_{6 \times 6} & {}^2\mathbf{J}_2 & \dots & \mathbf{0}_{6 \times 6} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0}_{6 \times 6} & \mathbf{0}_{6 \times 6} & \dots & {}^n\mathbf{J}_n \end{bmatrix}$$

и

$$\vec{\mathbf{V}} = [{}^1\vec{\mathbf{V}}_1, {}^2\vec{\mathbf{V}}_2, \dots, {}^n\vec{\mathbf{V}}_n]^T, \quad \vec{\mathbf{F}} = [{}^1\vec{\mathbf{F}}_1, {}^2\vec{\mathbf{F}}_2, \dots, {}^n\vec{\mathbf{F}}_n]^T, \quad \vec{\mathbf{Q}} = [{}^1\vec{\mathbf{Q}}_1, {}^2\vec{\mathbf{Q}}_2, \dots, {}^n\vec{\mathbf{Q}}_n]^T, \\ \vec{\mathbf{\beta}} = [{}^1\vec{\mathbf{\beta}}_1, {}^2\vec{\mathbf{\beta}}_2, \dots, {}^n\vec{\mathbf{\beta}}_n]^T, \quad \vec{\mathbf{\gamma}} = [{}^1\vec{\mathbf{\gamma}}_1, {}^2\vec{\mathbf{\gamma}}_2, \dots, {}^n\vec{\mathbf{\gamma}}_n]^T.$$

2. Численное решение второй задачи динамики упругих манипуляторов. В результате исключения из глобальных векторных уравнений вектора внутренних усилий $\vec{\mathbf{F}}$ образуется система линейных уравнений относительно вектора обобщенных ускорений $\vec{\mathbf{Q}}$:

$$\vec{\mathbf{Q}} = [\mathbf{H}^3]^{-1} (\vec{\mathbf{\tau}} - \mathbf{H}^2 \vec{\mathbf{\gamma}} + \mathbf{H}^1 \vec{\mathbf{\beta}}), \quad (5)$$

где $\mathbf{H}^1 = \mathbf{A}^T \mathbf{H}^{-T}$, $\mathbf{H}^2 = \mathbf{A}^T \mathbf{H}^{-T} \mathbf{J} \mathbf{H}^{-1}$ и $\mathbf{H}^3 = \mathbf{A}^T \mathbf{H}^{-T} \mathbf{J} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{A}$,

в которых $\vec{\mathbf{\tau}} = [\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n]^T$ выражает вектор приводных усилий, т.е. обобщенных сил с учётом влияния трений в кинематических парах. Численное решение (5) второй задачи динамики упругих манипуляторов упрощается тем обстоятельством, что матрицы $\mathbf{H}^{-1}$ и $\mathbf{H}^{-T} = (\mathbf{H}^{-1})^T$ для абсолютно жёстких звеньев цепи без особого труда рассчитываются аналитически.

3. Сравнительная оценка методов с обращением и без обращения матрицы масс. На примере численного решения смешанной задачи динамики манипуляторов [3] построен график зависимостей расчётного времени от размерности манипулятора при использовании методов динамического анализа без обращения (метод Ньютона-Эйлера, прямая 1 на рис.1) и с обращением (модифицированный метод Лагранжа, кривая 2 на рис.1) матриц масс. Из рис.1

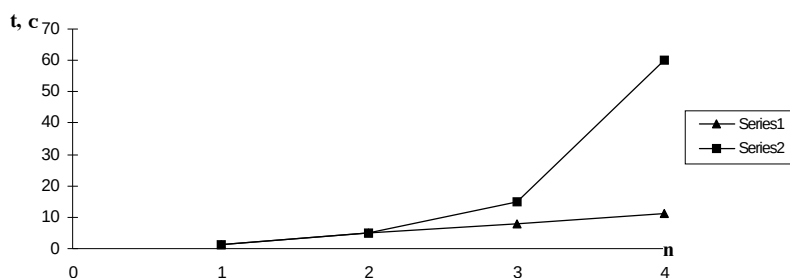


Рис.1

видно, что расчётное время для обоих методов при исследовании трёхзвенных манипуляторов, т.е. манипуляторов, состоящих из одного неподвижного (стойки) и двух подвижных звеньев, практически одинаково.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dombre E. and Khalil W. Modélisation et commande des robots. – Edition Hermès, 1988. – 448 p.
2. Dombre E. and Khalil W. Modélisation, identification et commande des robots. – Edition Hermès, 1999. – 480 p.
3. Саркисян Ю.Л., Степанян К.Г., Азуз Н., Геворкян Г.А. Динамический анализ упругих манипуляторов обобщенным методом Ньютона-Эйлера // Изв. НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. – 2004. Т. LVII, №1. С. 3 – 10.

Сведения об авторе:

Геворкян Грант Араратович – к.т.н, научный сотрудник Института механики НАН РА, Ереван – 19, пр. Маршала Баграмяна, 24/2, Институт механики НАН Армении,
Тел.: (374 10) 390 301 (дом.), (374 96) 390 315 (моб.),
E-mail: hrgevorkian@mail.ru

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ И СМЕШАННОЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ОРТОТРОПНЫХ ТОНКИХ ПОЛОС КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

Геворкян Р.С.

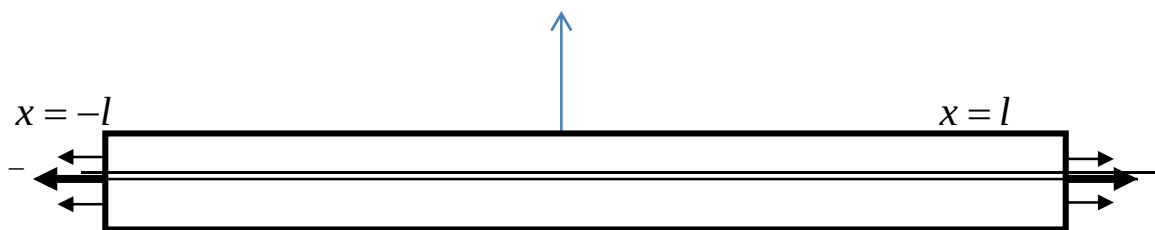
Аннотация. Асимптотическим методом выведены рекуррентные расчётные формулы для компонент тензора напряжений и вектора перемещения внутренней задачи упругой тонкой полосы. После определённого количества шагов итерации вводятся четыре неизвестных функций, которые затем однозначно определяются из условий заданных на торцах полосы.

Асимптотический метод решения неклассических краевых задач теории упругости (когда на продольных поверхностях тонкого тела заданы компоненты вектора перемещения) был предложен и впервые применён в [1]. Эффективность метода позволила решить множество статических и динамических задач для анизотропных полос (балок), пластин и оболочек [1,2]. Эта эффективность, в частности, заключается в том, что предложенным подходом [1-3] выводятся рекуррентные расчётные формулы для компонент тензора напряжений и вектора перемещения упругого тонкого тела, которые позволяют вычислить их значения с любой асимптотической точностью. И, поскольку эти расчётные рекуррентные формулы после каждого шага итерации подразумевают одно дифференцирование по продольным координатам и одно интегрирование по поперечной координате, они приводят к замкнутому математическому решению краевой задачи для анизотропных полос и пластин бесконечных продольных размеров, после конечного числа шагов, когда заданные в уравнениях и в граничных условиях функции являются полиномами продольных координат.

В работе путём наложения дополнительных условий на асимптотическое решение внутренней задачи ортотропной полосы бесконечной длины, когда на её продольных краях заданы компоненты вектора перемещения, строится алгоритм для решения задачи пограничного слоя ортотропной полосы с заданными на продольных краях однородными условиями первой или смешанной краевых задач теории упругости. Предполагается, что на поперечных краях (торцах) полосы условия первой, второй или смешанной краевых задач теории упругости заданы в полиномиальном виде (или приведены к такому виду). Приведены примеры, когда полоса конечных размеров самоуравновешена внешними воздействиями (1)-(4)

1. Требуется определить напряжённо-деформированное состояние полосы (фиг.1).

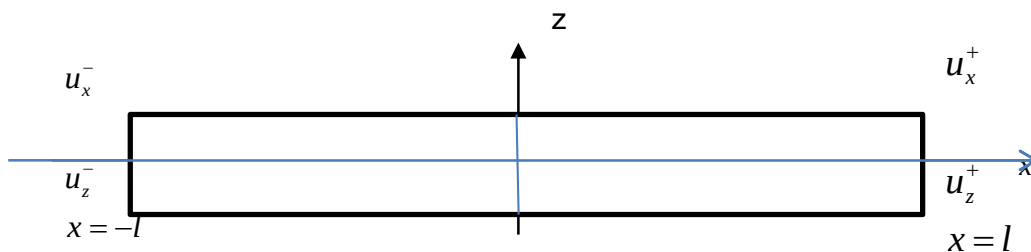
$$\begin{aligned} z = \pm h : \sigma_{jz}(x, z = \pm h) = 0 \Rightarrow u_x^{\pm}(x, z = \pm h) = ?, \quad u_z^{\pm}(x, z = \pm h) = ? \\ x = \pm l : \sigma_{jz}(\pm l, z) = \sigma_{jz}^{\pm}(z) \Rightarrow u_x^{\pm}(x) = ?, \quad u_z^{\pm}(x) = ? \end{aligned} \quad (1)$$



Фиг. 1

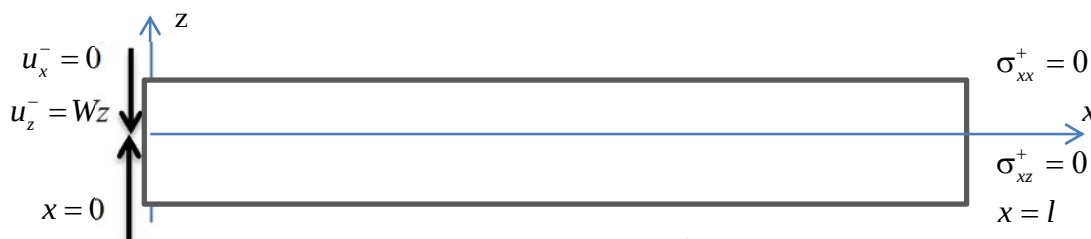
2. Когда на торцах полосы заданы компоненты вектора перемещения (фиг.2)

$$x = \pm l : u_x(\pm l, z) = u_0^{\pm} + u_1^{\pm}z + u_2^{\pm}z^2, \quad u_z(\pm l, z) = w_0^{\pm} + w_1^{\pm}z + w_2^{\pm}z^2 \quad (2)$$

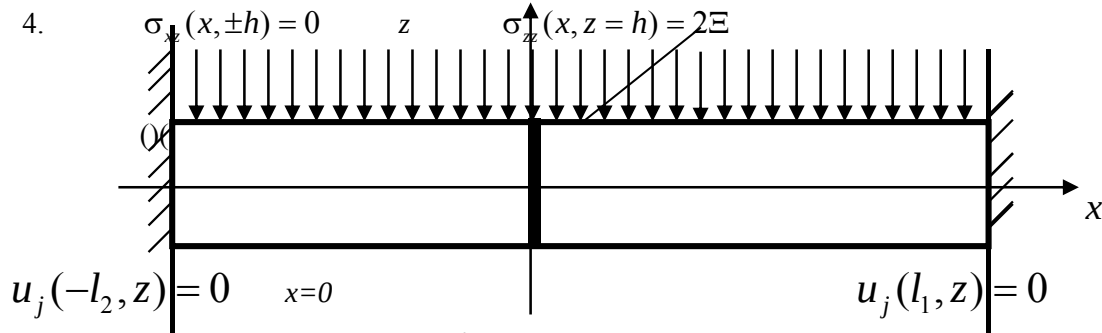


Фиг.2

3. А для полосы со смешанными граничными условиями на торцах (фиг.3)
 $x = 0 : u_x = (0, z) = 0, u_z(0, z) = Wz, x = l : \sigma_{xx}(0, z) = 0, \sigma_{xz}(0, z) = 0$ (3)



Фиг.3



Фиг.4

ЛИТЕРАТУРА

1. Aghalovyan L.A. Asymptotic Theory of Anisotropic Plates and Shells. Singapore - London: World Scientific Publ. 2015. 376 p. (Russian edition of Moscow, Science - Fizmatlit, 1997. 414 c).
2. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: Гитутюн, 2005. 468с.
3. Геворкян Р.С. Асимптотические решения первой и смешанной краевых задач теории упругости для ортотропных тонких полос конечных размеров// III International Scientific and Practical Conference "Innovative Technologies in Science" (February 28, 2017, Dubai, UAE) С. 1-15

Сведения об авторе:

Геворкян Рубен Степанович – профессор, доктор физ-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института механики НАН РА.

Тел.: (37410) 270828; **Дом. адрес:** ул. Киевяна, 12, кв. 6. 375028, Ереван, Армения.

e-mail: gevorgyanrs@mail.ru

РЕГУЛЯРИЗИРОВАННОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАМЕ

Григорьев Ю.М.

Аннотация. В инженерной практике возникает необходимость восстановления напряжённо-деформированного состояния внутри элемента конструкции по данным измерений на доступной части его границы. В рамках упругой модели такая постановка приводит к необходимости решения некорректной задачи Коши для эллиптической системы уравнений Ламе. В данной работе предлагается аналитический метод решения такой задачи внутри прямоугольника.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть граница $S = S_1 \cup S_2$ упругого элемента конструкции состоит из двух частей: S_1 и S_2 . Часть S_1 доступна для измерений, а оставшаяся часть S_2 недоступна. Таким образом, на S_1 будем иметь переопределённые граничные данные и математическая постановка задачи сводится к решению задачи Коши для системы уравнений Ламе (векторного уравнения Ламе). Такие задачи являются условно корректными и основная трудность состоит в неустойчивости задачи. Для приближённого решения задачи Коши в теории упругости разработаны численные методы, основанные на различных методах регуляризации (см. [1, 2]).

Для более простого случая уравнения Лапласа имеются различные варианты постановки задачи Коши. В первом из них необходимо найти гармоническую функцию в цилиндрической области $\Omega = S \times (0, T) \in \mathbb{R}^3$, ограниченной нижним основанием $S_1 \in \mathbb{R}^2$, боковой поверхностью S_2 и верхней поверхностью S_3 . На S_1 задаются данные Коши: $u = f, \partial u / \partial n = g$, на боковой поверхности S_2 задаются обычные краевые условия, например, $u = 0$, на верхней поверхности краевые условия не заданы. Такая задача называется начально-краевой задачей для уравнения Лапласа (см. Гл. 9 в [1]). В другой постановке имеется ограниченная область $\Omega \in \mathbb{R}^3$ с граничной поверхностью $S = S_1 \cup S_2$ и данные Коши заданы на части S_1 границы S . Мы будем иметь дело с аналогом первой постановки в теории упругости внутри прямоугольника. Автору неизвестны публикации об аналитических методах решения такой задачи в теории упругости. Известные результаты с использованием метода Карлемана касаются аналога второй постановки в теории упругости.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Уравнение Ламе равновесия теории упругости имеет вид

$$L\mathbf{u} \equiv \mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0. \quad (1)$$

Закон Гука в декартовых координатах x_i ($i = 1, 2, 3$), выражающий связь компонент тензора напряжений σ_{ij} и тензора деформаций ε_{ij} , имеет вид

$$\sigma_{ij} = (\lambda + 2\mu) \nabla \cdot \mathbf{u} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2)$$

Для простоты рассмотрим случай плоской деформации, когда компоненты вектора перемещений $\mathbf{u}$ имеют вид: $u_x = u(x, y)$, $u_y = v(x, y)$, $u_z = 0$. Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^2$ – область в виде прямоугольника $\mathbf{r} \in (0, a) \times (0, b)$. Рассматриваемая задача имеет вид:

$$L\mathbf{u}(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega; \quad \mathbf{u} = \mathbf{v}, \quad \mathbf{T}_n = \mathbf{F} \quad \text{при } y = b; \quad u_x = \sigma_{xy} = 0 \quad \text{при } x = 0 \text{ и } x = a, \quad (3)$$

где $\mathbf{T}_n$ – вектор напряжения; $\mathbf{v}$ и $\mathbf{F}$ – заданные граничные функции. Таким образом, на верхней стороне прямоугольника имеем данные Коши, условия гладкого контакта на боковых сторонах, а на нижней стороне граничные условия не заданы.

3. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Будем предполагать, что решение имеет достаточную гладкость и граничные условия в угловых точках сопряжены для обеспечения такой гладкости. Введём вспомогательную гармоническую функцию $f_0 = (\lambda + 2\mu)\nabla \cdot \mathbf{u}$. Используя граничные условия из (2) и закон Гука (3), можно показать, что для этой функции мы получаем упомянутую выше задачу Коши для гармонического уравнения. Регуляризованное решение f_0^α такой задачи получаем методом Лиу [2], в следующем виде:

$$f_0^\alpha(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^\alpha \frac{\sinh[k\pi(b-y)/a]}{\sinh[k\pi b/a]} \sin \frac{k\pi x}{a}, \quad (4)$$

$$a_k^\alpha = \frac{2 \sinh[k\pi b/a]}{k\pi + \alpha \sinh[k\pi b/a]} \int_0^a h(\xi) \sin \frac{k\pi \xi}{a} d\xi,$$

где α – параметр регуляризации, функция $h(x)$ выражается через граничные функции исходной задачи (3). При этом, решается интегральное уравнение первого рода методом регуляризации М.М. Лаврентьева с использованием рядов Фурье. Ядро этого интегрального уравнения имеет почленно разделённые переменные, что позволяет получить решение в замкнутом виде. После нахождения f_0^α для нахождения компонент перемещения u_x и u_y мы также получаем задачи Коши, но для уравнения Пуассона. Эти задачи также решаются аналитически. Таким образом, для компонент перемещения u_x и u_y в задаче Коши (3) мы получаем формулы, аналогичные (4), но с тремя параметрами регуляризации. Если граничные функции из (3) ограничены на замкнутых интервалах, то ряды, выражающие решение, сходятся абсолютно и равномерно к точному решению и могут быть почленно продифференцированы любое количество раз внутри области. Получены оценки для отклонения приближённого решения от точного. Численные примеры показывают эффективность нового метода.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Метод Лиу аналитического решения задачи Коши для уравнения Лапласа обобщён для задачи Коши в теории упругости. Это позволяет получить приближённое регуляризованное решение задачи в виде абсолютно и равномерно сходящихся рядов, позволяющих эффективно провести численные расчёты. Плоская задача рассмотрена для простоты, метод непосредственно обобщается на трёхмерную задачу.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 15-41-05081).

ЛИТЕРАТУРА

1. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009.
2. B. Durand, F. Delvare and P. Bailly. Numerical solution of Cauchy problems in linear elasticity in axisymmetric situations, Int. J. Sol. Str., Vol. 48, 2011.
3. C.-S. Liu. An Analytical Method for the Inverse Cauchy Problem of Laplace Equation in a Rectangular Plate, J. Mech., Vol. 27, N 04, 2011.

Информация об авторе:

Григоьев Ю.М. – Заведующий кафедрой «Теоретическая физика», Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова, Академия наук Республики Саха (Якутия), Якутск, Россия

E-mail: grigyum@yandex.com

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОЙ СОСТАВНОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С МЕЖФАЗНОЙ ТРЕЩИНОЙ

Григорян А.Ж.

Аннотация. Рассматривается плоская контактная задача для составной упругой полуплоскости, состоящей из бесконечной полосы и полуплоскости из различных ортотропных материалов. На линии соединения полосы и полуплоскости составная полуплоскость ослаблена трещиной конечной длины. На свободной границе полосы и на краях трещины заданы напряжения. На линии соединения полосы и полуплоскости, вне трещины, имеют место условия полного контакта. Решение задачи сведено к решению сингулярных интегральных уравнений.

1. Введение. В последнее время в инженерной практике широко используются анизотропные, в частности, ортотропные материалы. Поэтому, изучение закономерностей разрушения этих материалов является актуальной. Особую важность приобретают контактные задачи для составных ортотропных тел, которые ослаблены концентраторами напряжений разного типа. В данной работе исследовано напряжённо-деформированное состояние составной ортотропной полуплоскости, имеющую конечную горизонтальную трещину на стыке двух разных ортотропных материалов. Аналогичные задачи можно найти в [1,2] и цитированных там работах.

2. Постановка задачи, граничные и контактные условия. Пусть упругая составная ортотропная полуплоскость, отнесённая к декартовой системе координат oxy , направления осей которого совпадают с главными направлениями ортотропии материала, изготовлена соединением бесконечной полосы шириной b ($-b \leq y \leq 0$; $-\infty < x < \infty$) с полуплоскостью ($y \geq 0$; $-\infty < x < \infty$), из различных ортотропных материалов, на линии стыка которых ($y = 0$) имеется конечная трещина ($-a < x < a$). Предполагается, что на границе составной полуплоскости ($y = -b$) действуют нормальные и касательные напряжения, а на краях трещины ($x \in (-a; a)$) – нормальные напряжения.

Граничные условия задачи и условия полного контакта полосы и полуплоскости записываются в следующем виде (функции $f_i(x)$ удовлетворяют условиям Дирихле):

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(2)}(x; -b) = f_1(x); \quad \tau_{xy}^{(2)}(x; -b) = f_2(x); \quad |x| < \infty; \quad \begin{cases} \sigma_y^{(1)}(x; 0) = \sigma_y^{(2)}(x; 0); \\ \tau_{yx}^{(1)}(x; 0) = \tau_{yx}^{(2)}(x; 0); \end{cases} \quad a < |x| < \infty \\ \begin{cases} \sigma_y^{(2)}(x; 0) = f_3(x); \\ \sigma_y^{(1)}(x; 0) = f_4(x); \end{cases} \quad \begin{cases} \tau_{xy}^{(2)}(x; 0) = f_5(x); \\ \tau_{xy}^{(1)}(x; 0) = f_6(x); \end{cases} \quad |x| < a; \quad \begin{cases} U_x^{(1)}(x; 0) = U_x^{(2)}(x; 0); \\ U_y^{(1)}(x; 0) = U_y^{(2)}(x; 0); \end{cases} \quad a \leq |x| < \infty \end{aligned} \quad (1)$$

3. Общее решение задачи. Решение задачи построим с помощью бигармонических функций напряжения Эйри для полуплоскости ($i = 1$) и полосы ($i = 2$). Функции Эйри представлены в виде следующих интегралов Фурье:

$$\Phi^{(1)}(x; y) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^2 \frac{A_j(\alpha)}{a_{11}a_{44}\alpha e^{\alpha t_j y}} e^{-i\alpha x} d\alpha; \quad \Phi^{(2)}(x; y) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^2 \frac{[B_k(\alpha)sh(\alpha \tau_k y) + C_k(\alpha)ch(\alpha \tau_k y)]}{b_{11}b_{44}\alpha e^{i\alpha x}} d\alpha \quad (2)$$

Здесь $a_{11}; a_{12}; a_{22}; a_{44}$ – модули упругости полуплоскости, а $b_{11}; b_{12}; b_{22}; b_{44}$ – модули упругости полосы, $A_j(\alpha); B_k(\alpha)$ и $C_k(\alpha)$ – неизвестные функции интегрирования, которые должны определяться из граничных условий и условий полного контакта (1), а t_j и τ_k определяются из следующих биквадратных уравнений ($\text{Re}(t_j) > 0$, $t_1 < t_2$; $\text{Re}(\tau_j) > 0$, $\tau_1 < \tau_2$) [1,2]:

$$\begin{aligned} a_{22}a_{11}^{-1}t_j^4 + (a_{12}^2a_{11}^{-1}a_{44}^{-1} + 2a_{12}a_{11}^{-1} - a_{22}a_{44}^{-1})t_j^2 + 1 &= 0; \\ b_{22}b_{11}^{-1}\tau_j^4 + (b_{12}^2b_{11}^{-1}b_{44}^{-1} + 2b_{12}b_{11}^{-1} - b_{22}b_{44}^{-1})\tau_j^2 + 1 &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Компоненты напряжений и перемещений выражаются через неизвестные функции интегрирования известными соотношениями теории упругости [3].

Введём функции скачков смещений и напряжений $U(x); V(x); \sigma(x)$ и $\tau(x)$:

$$\begin{aligned}\sigma(x) &= \sigma_y^{(2)}(x; 0) - \sigma_y^{(1)}(x; 0); & U(x) &= U_x^{(2)}(x; 0) - U_x^{(1)}(x; 0); \\ \tau(x) &= \tau_{xy}^{(2)}(x; 0) - \tau_{xy}^{(1)}(x; 0); & V(x) &= U_y^{(2)}(x; 0) - U_y^{(1)}(x; 0)\end{aligned}\quad (4)$$

Имея ввиду, что на линии стыка вне трещины эти скачки обращаются в ноль, для определения $U'(x)$ и $V'(x)$ получим систему сингулярных интегральных уравнений второго рода [1,4]:

$$\begin{cases} U'(x) + \frac{b_1}{\pi i} \int_{-a}^a \frac{iU'(\zeta)}{\zeta - x} d\zeta + \frac{b_2}{\pi i} \int_{-a}^a \frac{iV'(\zeta)}{\zeta - x} d\zeta + \int_{-a}^a K_1^*(x; \zeta) U'(x) d\zeta + \int_{-a}^a K_2^*(x; \zeta) V'(x) d\zeta = F_1(x) \\ iV'(x) - \frac{b_3}{\pi i} \int_{-a}^a \frac{iU'(\zeta)}{\zeta - x} d\zeta - \frac{b_4}{\pi i} \int_{-a}^a \frac{iV'(\zeta)}{\zeta - x} d\zeta + \int_{-a}^a K_3^*(x; \zeta) U'(x) d\zeta + \int_{-a}^a K_4^*(x; \zeta) V'(x) d\zeta = F_2(x) \end{cases};$$

$$|x| < a \quad (5)$$

Здесь b_i выражены через модули упругости полуплоскости и полосы, а $F_i(x)$ – через известные функции и трансформантов Фурье скачков напряжений на трещине.

Систему (5) нужно рассматривать при условиях:

$$\begin{aligned}\int_{-a}^a \sigma(x) dx &= \int_{-a}^a [f_3(x) - f_4(x)] dx; & \int_{-a}^a \tau(x) dx &= \int_{-a}^a [f_5(x) - f_6(x)] dx; \\ \int_{-a}^a U'(x) dx &= 0; & \int_{-a}^a V'(x) dx &= 0\end{aligned}\quad (6)$$

Для решения системы (5) первое из уравнений умножим на постоянное число λ и просуммируем со вторым. В результате получим:

$$\Psi(x) + \frac{\lambda b_2 - b_4}{\pi i} \int_{-a}^a \frac{\Psi(\zeta)}{\zeta - x} d\zeta + \int_{-a}^a K_1(x; \zeta) \Psi(\zeta) d\zeta + \int_{-a}^a K_2(x; \zeta) \bar{\Psi}(\zeta) d\zeta = F(x), \quad (7)$$

где λ определяется из квадратного уравнения $\lambda^2 b_2 - (ib_1 + b_4)\lambda + ib_3 = 0$, а

$$\begin{aligned}\Psi(x) &= \lambda U'(x) + iV'(x); & \bar{\Psi}(x) &= \lambda U'(x) - iV'(x); & F(x) &= \lambda F_1(x) + F_2(x); \\ K_{1,2}(x; \zeta) &= \frac{1}{2\lambda} [\lambda K_1^*(x; \zeta) + K_3^*(x; \zeta)] \pm \frac{1}{2i} [\lambda K_2^*(x; \zeta) + K_4^*(x; \zeta)];\end{aligned}\quad (8)$$

Решение уравнения (7) построено методом механических квадратур.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акопян В.Н. Смешанные граничные задачи о взаимодействии сплошных деформируемых тел с концентраторами напряжений различных типов. Ереван: Гитутюн, 2014. 322 с.
2. Григорян А.Ж. О несимметричном вдавливании двух жёстких штампов в упругую ортотропную полуплоскость, ослабленную выходящим на границу конечным и внутренним полубесконечным вертикальными соосными разрезами. //Изв. Национального университета архитектуры и строительства Армении. 2014. № 3(41). С. 66-71.
3. Саркисян В.С. Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела. Ереван: Изд. ЕГУ, 1976. 535 с.
4. Агаян К.Л. Взаимодействие стрингеров с бесконечной пластиной, ослабленной двоякопериодической системой трещин. //В сб.: «Механика деформируемых тел и конструкций». Ереван: Изд. АН Арм. ССР. 1985. С. 26-32.

Сведения об авторе:

Григорян А.Ж. – к.т.н., доцент кафедры математики и естест. предметов, Национальный политехнический университет Армении, Капан.

Тел.: (+37493) 952420; E-mail: aram_grigoryan@mail.ru

РАСПРОСТРАНЕНИЕ УПРУГИХ ВОЛН В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ С УСИЛИВАЮЩИМ ТОНКИМ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМ УПРУГИМ СЛОЕМ

Григорян Э.Х., Агаян К.Л., Багдасарян Р.А.

Аннотация. Исследуется динамическая контактная задача о распространении и дифракции упругих плоских волн, падающих из бесконечности, в системе полупространство – полубесконечный слой. Предполагается, что вследствие малости толщины пластины воздействие усиливающего слоя заменяется определёнными граничными условиями на границе полупространства. Решение задачи сводится к функциональному уравнению типа Римана на действительной оси, решение которого построено методом факторизации.

Введение. По задачам распространения и отражения упругих и поверхностных волн Рэлея или Лява в упругом полупространстве, слое или в системе полупространство – слой, при различных граничных и контактных условиях имеется обширная литература. Не останавливаясь подробно на этих работах, укажем лишь статьи [1,2] с цитированной там библиографией, а также работы [3–5], тесно связанные с рассматриваемой здесь задачей о дифракции упругих волн на крае полубесконечных неоднородностей.

1. Постановка задачи и разрешающее уравнение. Пусть упругое полупространство (упругие характеристики $-\lambda, \mu, \rho$) и тонкий полубесконечный слой (E_1, ν_1, ρ_1) толщины h_1 соединены по поверхности $x_3 = 0$ и находятся в условиях полного контакта (рис.1). На крае

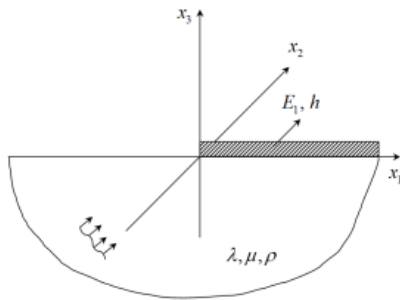


Рис.1

полупространства из бесконечности падает вертикально поляризованная волна.

В условиях плоской деформации требуется определить распределение волнового поля в полупространстве, когда из бесконечности подает вертикально поляризованная плоская волна. Решение задачи, относительно трансформантов Фурье амплитуд волновых потенциалов $\bar{\phi}(x_1, x_3)$ и $\bar{\psi}(x_1, x_3)$ сводится к следующей краевой задаче:

$$\begin{cases} \bar{\phi}''(\sigma, x_3) - (\sigma^2 - k_1^2) \bar{\phi}(\sigma, x_3) = 0, \\ \bar{\psi}''(\sigma, x_3) - (\sigma^2 - k_3^2) \bar{\psi}(\sigma, x_3) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$\left(\bar{\phi}'' - \lambda(\lambda + 2\mu)^{-1} \bar{\phi} - 2i\mu(\lambda + 2\mu)^{-1} \sigma \bar{\psi}' \right) \Big|_{x_3=0} = 0 \quad (2)$$

$$\left(\bar{\phi}'' + \sigma^2 \bar{\psi} + 2i\sigma \bar{\phi}' \right) \Big|_{x_3=0} = -\mu^{-1} \bar{\tau}^+(\sigma)$$

где $k_3^2 = \xi^2 - \chi_3^2$, $\chi_3 = k_3 \cos \gamma$, $\psi(x_1, x_2, t) = \Psi(x_1, x_2, t) - \psi_0(x_1, x_2, t)$;

$\psi_0(x_1, x_2, t) = b_+^0 \exp(i(\xi x_1 - \chi_3 x_3 - \omega t))$ – падающая поперечная волна (случай продольной волны рассматривается аналогично).

В (1), (2) ω – частота, t – время, k_1, k_3, ξ – соответствующие волновые числа, b_+^0 – амплитуда подающей поперечной волны, γ – угол подания, $\tau_1^+(x_1, t)$ – контактное напряжение под слоем.

Решая краевую задачу (1)–(2) совместно с уравнением колебания полубесконечного слоя [2,3]

$$(\sigma^2 - q^2) \bar{u}_1 + (\sigma) - i\bar{u}_1(0) \cdot \sigma + (E_1 h_1)^{-1} \bar{\tau}^+(\sigma), \quad (3)$$

где $q = \omega/c_1 = \omega/\sqrt{E_1/\rho_1}$, $\bar{u}_1^+(\sigma)$ – трансформанта Фурье осреднённого значения горизонтальных перемещений $\bar{u}_1(x_1, x_3)$ слоя, и удовлетворяя условию контакта $\bar{u}_1^+(\sigma) = \bar{u}^+(\sigma, 0)$, приходим к следующему функциональному уравнению (краевая задача типа Римана) на действительной оси относительно $\bar{\tau}^+(\sigma)$ и $\bar{u}^-(\sigma, 0)$:

$$(\sigma - q)\bar{u}^-(\sigma, 0) - \bar{K}(\sigma)\bar{\tau}^+(\sigma)/(\sigma + q) = 4\pi i b_+^0 f(\xi)(\xi + q)\delta(\sigma + q) - i\bar{u}_1(0)\sigma/(\sigma + q), \quad (4)$$

где $q = \omega/c_1 = \omega/\sqrt{E_1/\rho_1}$, $f(\xi)$ и $\bar{K}(\sigma)$ – заданные функций, а $\bar{u}_1(0)$ определяется из условия равновесия слоя.

Решение уравнения (4) построено методом Винера–Хопфа [4,5]. В итоге решение задачи представляется в виде $(\bar{\psi}(\sigma))$ имеет аналогичный вид)

$$\bar{\tau}^+(\sigma) = 2i\chi_3 \frac{f(\xi)}{\bar{p}_+(\sigma)\bar{p}_+(\xi)} \left[\frac{2q}{1 - iE_1 h_1 \bar{p}_+^2(q)} - \frac{(\xi + q)(\sigma + q)}{\sigma + \xi + i0} \right] \quad (5)$$

$$\bar{\Phi}(\sigma, x_3) = \frac{4\sigma}{R(\sigma)} \left\{ \frac{\chi_3 f(\xi)}{\mu \bar{p}_+(\xi)} \frac{\sigma \sqrt{\sigma^2 - k_3^2}}{\bar{p}_+(\sigma)} \left[\frac{2q}{1 - iE_1 h_1 \bar{p}_+^2(q)} - \frac{(\xi + q)(\sigma + q)}{\sigma + \xi + i0} \right] - \right. \quad (6)$$

$$\left. - \pi \left[\chi_3 (2\sigma^2 - k_3^2) + i(\sigma^2 - \chi_3^2) \sqrt{\sigma^2 - k_3^2} \right] \delta(\sigma + \xi) \right\} b_+^0 e^{\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} x_3}$$

где $R(\sigma) = (2\sigma^2 - \chi_3^2)^2 - 4\sigma^2 \sqrt{(\sigma^2 - k_1^2)(\sigma^2 - k_3^2)}$ – функция Рэлея, а $\bar{p}_+(\sigma)$ – известная функция, связанная с факторизуемой функцией.

После обратного преобразования, из (5) получим распределение контактных напряжений на линии контакта, а из (5) – распределение волнового поля в полупространстве. При $h_1 = 0$ ($\bar{\tau}^+(\sigma) \equiv 0$) (5) даёт известное решение [1], а при $E_1 = \infty$ – решение поставленной задачи, когда слой не сопротивляется изгибу, а в продольном направлении не деформируется.

Исследование решения показало, что в дальних зонах у границы полупространства при $x_1 < 0$ имеется обычный процесс отражения, а при $x_1 > 0$ вследствие дифракции появляются и поверхностные волны Рэлея.

Заключение. Построено решение задачи о распределении волнового поля в упругом полупространстве, контактирующей с полубесконечной пластиной малой толщины. Получены асимптотические формулы, представляющие дифрагированное волновое поле в дальних зонах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белубекян М.В. Поверхностные волны в упругих средах. //В сб.: Пр. Мех. Деформ. Твердого тела, Ереван: Изд. НАН РА, 1997. С.79-96.
2. Агаян К.Л., Багдасарян Р.А. Распространение упругих волн в полупространстве с тонким упругим усиливающим слоем. //Тр. VII междунар. конференц. 19-23 сентября, Горис-Степанакерт, с.18-25.
3. Агаян К.Л., Григорян Э.Х., Джилаван С.А. Дифракция сдвиговой плоской волны в упругом пространстве с полубесконечным упругим включением // Изв. НАН Армении. Механика. 2003. Т.56. №4. С.3-17.
4. Григорян Э.Х., Агаян К.Л. О новом методе определения асимптотических формул в задачах дифракции волн // Докл. НАН Армении. 2010. №3. С. 261–271.
5. Григорян Э.Х. О двух динамических контактных задачах для полуплоскости с упругими накладками. //Изв АН СССР. МТТ. 1972. №5.

Сведения об авторах:

Агаян Каро Леренцович– д.ф.м.н., ведущий науч. сотр. Института механики НАН РА.
E-mail: karo.aghayan@gmail.com

Багдасарян Рафик А. – к.ф.м.н., доцент каф. мат. ЕИУ (Политех.)

ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛИ ПРОГРЕССИРУЮЩЕГО ПОВРЕЖДЕНИЯ К ОЦЕНКЕ ПРОЧНОСТИ КОМПОЗИТНЫХ СОЕДИНЕНИЙ

Гришин В.И., Коваленко Н.А., Гусева Н.В.

Аннотация. Проведено экспериментальное исследование прочности образцов болтового соединения из углепластиков КМКУ и Тогауса Т700. На основе модели прогрессирующего повреждения проведена расчётная оценка разрушающей нагрузки и типа разрушения двухсрезных болтовых соединений в слоистых композитах. Результаты расчёта сравниваются с экспериментальными данными.

Предлагается модель прогрессирующего разрушения композиционных материалов (КМ), реализованная в трёхмерной постановке и включающая в себя анализ напряжённого состояния, анализ разрушений и деградацию свойств материала в зависимости от обнаруженного вида разрушения.

Для моделирования соединений использована трёхмерная конечно элементная модель (КЭМ) контактного взаимодействия болтового соединения с учётом коэффициента трения, созданная на основе вычислительного комплекса ANSYS. Слои КМ смоделированы однородным ортотропным материалом с механическими характеристиками монослоя, по толщине монослоя расположен один конечный элемент.

После проведения расчёта на основе встроенного в ANSYS языка программирования APDL разработан макрос, который проводит анализ разрушений, представляющий собой проверку на наличие повреждений по критериям разрушения. В представленном исследовании для анализа разрушений используются критерии Хашина [1]. Выбранные критерии позволяют различить семь видов разрушения внутри пакета: растрескивание матрицы при растяжении и сжатии, разрушение волокна при растяжении и сжатии, отрыв матрицы от волокна посредством сдвига и расслоение при растяжении и сжатии.

Обнаружение определённого вида разрушения предполагает, что в области повреждения материал перестаёт воспринимать соответствующую нагрузку полностью или частично в зависимости от использованного правила деградации материала. Используемые на практике правила деградации получены эмпирическим путем и заключаются в снижении определённых свойств материала в повреждённой области в зависимости от вида разрушения. В данной работе использованы правила деградации, предложенные Таном и его коллегами [2].

Верификация применимости и эффективности модели прогрессирующего разрушения в исследовании прочности болтовых соединений в слоистых КМ выполнялась на образцах, эскиз которых приведён на рис.1.

Первая часть образцов композитных пластин, включала 16 групп, вырезанных из углепластика типа КМКУ. Вторая часть образцов была изготовлена из углепластика на основе монослоя Тогауса Т700 и включала четыре группы. Металлические пластины в образцах были изготовлены из листа Д16Т толщиной 6 мм. Болты, используемые в образцах, выполнены из высокопрочной стали. Общий вид КЭМ образца болтового соединения представлен на рис. 2.

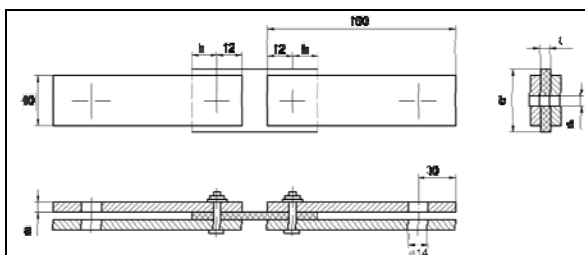


Рис.1. Эскиз образца болтового соединения

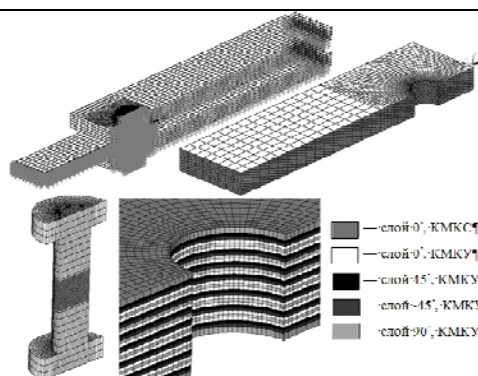


Рис.2. КЭМ образца болтового соединения

На рис.3 представлены расчётные диаграммы «нагрузка-перемещение» и диаграммы, полученные при испытании некоторых образцов второй группы. Сопоставление диаграмм показывает существенное различие в углах наклона экспериментальных и численных кривых, что объясняется разницей в податливости КЭМ болтового соединения и испытанного образца с приспособлением.

Результаты работы [8] показывают, что учёт вклада касательных напряжений при оценке разрушения волокна при растяжении, используемое в критериях Хашина, а именно,

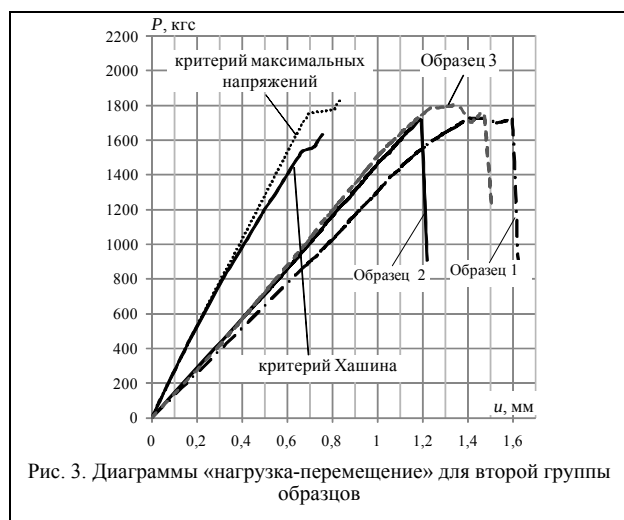


Рис. 3. Диаграммы «нагрузка-перемещение» для второй группы образцов

более высокую оценку разрушающей нагрузки по сравнению с критерием Хашина. Выбор критерия практически не влияет на результат расчётной оценки прочности соединения в случае, когда в укладке слои 0° составляют 50%. Для всех остальных образцов изменение в расчётной оценке лежит в пределах 5-13%.

Определение в процессе расчёта с использованием модели прогрессирующего повреждения последовательности разрушенных монослоёв в элементах конструкций, позволяет предсказать тип разрушения образца (разрыв, скол, смятие), что важно при проектировании ответственных соединений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Nahin Z. Failure criteria for unidirectional fibre composites // J. Appl. Mech. – 1980. – Vol. 47. – P. 329–334
2. Tan S.C. A progressive failure model for composite laminates containing openings // J. Compos. Mater. – 1991. – Vol. 25. – P.556–577

Information about authors:

Гришин Вячеслав Иванович, д.т.н., профессор, главный научный сотрудник ФГУП «ЦАГИ».
E-mail: dzuba@tsagi.ru (для Гришина), (495) 556-47-06, 8-916-565-88-78

Коваленко Наталья Андреевна, аспирант кафедры прочности летательных аппаратов НГТУ.
E-mail: natasha_kovalenko@mail.ru Коваленко Н.А.

Гусева Наталья Вячеславовна, к.т.н., научный сотрудник ФГУП «ЦАГИ».
E-mail: nata_gus@rambler.ru, 8-916-578-27-48

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ ТОЧКИ ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

Гукасян А.А., Матевосян А.Г.

Аннотация. Рассматривается задача оптимального по быстродействию управления точкой переменной массы. Приведён синтез оптимального управления. Получены оптимальные фазовые траектории для случая, когда масса точки возрастает и убывает квадратичным законом.

Рассматривается задача оптимального по быстродействию управления точкой переменной массы. Приведём основное уравнение Мещерского для движения материальной точки переменной массы [1]

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{dm}{dt}(\vec{v}_1 - \vec{v}) \quad (1)$$

где $m = m(t)$ – переменная масса точки, $\vec{v}$ – абсолютная скорость точки, $\vec{v}_1$ – абсолютная скорость отделяющихся или присоединяющихся частиц, $\vec{F}$ – внешняя сила.

Ниже рассматривается задача управления движением материальной точки переменной массы в частном случае, когда абсолютная скорость отделяющихся или присоединяющихся частиц равна нулю [1].

Уравнение движения точки в этом случае в векторной форме имеет вид

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{u} \quad (2)$$

Здесь $\vec{u}$ – управляющее воздействие.

Управляемое движение точки переменной массы с одной степенью подвижности описывается уравнением

$$\ddot{x} = -\frac{\dot{m}}{m}\dot{x} + \frac{u}{m} \quad (3)$$

где $\dot{m} = f(t)$. Введя следующие обозначения:

$$x = x_1, \dot{x} = x_2, m = x_3, \quad (4)$$

уравнения (3) переписываются в виде следующей системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{x_2 \dot{x}_3}{x_3} + \frac{u}{x_3} \\ \dot{x}_3 = f(t) \end{cases} \quad (5)$$

Рассмотрим случай, когда масса материальной точки изменяется квадратично, то есть $\dot{m} = f(t) = \text{const} = \beta t + \alpha$, где $\beta t + \alpha$ – скорость изменения массы.

Отдельно интегрируя третье уравнение системы (5) $x_3 = \frac{\beta}{2}t^2 + \alpha t + \gamma$, где γ – начальное значение массы материальной точки, и подставляя x_3 во второе уравнение, получим следующую систему линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad (6)$$

$$\text{где } A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\beta t + \alpha}{\frac{\beta}{2}t^2 + \alpha t + \gamma} \end{pmatrix}, B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\beta}{2}t^2 + \alpha t + \gamma \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}$$

Рассмотрим задачу оптимального быстрогодействия.

Задача 1. Требуется привести материальную точку из начального состояния $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ в начало координат $(0, 0)$ за минимальное время $(T - \min)$ при следующем ограничении на управляющее воздействие:

$$|u| \leq 1. \quad (7)$$

Вполне управляемость системы (6) следует из того условия, что существует значение t , для которой $\text{rang} K(t) = 2$, где $K(t)$ – матрица Кальмана для линейных нестационарных систем [2]:

$$K(t) = \left\{ B(t), A(t)B(t) - \frac{dB(t)}{dt} \right\} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\frac{\beta}{2}t^2 + \alpha t + \gamma} \\ 1 & 0 \\ \frac{\beta}{2}t^2 + \alpha t + \gamma & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Для решения поставленной задачи используем принцип максимума Понтрягина [3].

Приведён синтез оптимального управления и построены оптимальные фазовые траектории. Для конкретных значений параметров α, β, γ численными методами можно вычислить координаты точки переключения и определить множество начальных точек фазовой плоскости, для которых существует решение задачи оптимального управления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Космодемьянский А.А. Курс теоретической механики. М.: Изд. Просвещение, 1966. Ч 2.
2. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
3. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.
4. Гукасян А.А., Матевосян А.Г. Об управляемом движении материальной точки с нефиксированной массой. //Известия НАН Армении. Механика. 2002. Т.55. №1. С.75-81.
5. Гукасян А.А., Матевосян А.Г. Задача оптимального управления движением точки переменной массы. Математический анализ и его приложения. //Сборник научных трудов: АГПУ им. Х.Абовяна. Ереван 2003. Выпуск 3. С. 29-40.

Гукасян Артуш Апресович

Ректор Горисского Государственного Университета
Доктор физико-математических наук, профессор Ереванского Госуниверситета
E-mail: ghukasyan10@yandex.ru

Матевосян Арам Гагикович

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры механики Ереванского Госуниверситета
E-mail: amatevosyan@ysu.am

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА ОБСЛУЖИВАНИЯ МАНИПУЛЯТОРОМ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО УЧАСТКА

Гукасян А.А., Ордян А.Я.

Аннотация. Приводятся результаты математического моделирования процесса обслуживания технологического участка, который состоит из k подвижных или неподвижных объектов (целей) и управляемого многозвенного манипулятора [1,2]. Предполагается, что в процессе обслуживания, динамические характеристики манипулятора в зависимости от массы переносимого груза или инструмента может изменяться в некоторые конечные моменты времени [3].

Исследуется случай, когда движение манипулятора на каждом интервале обслуживания описывается линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, а динамика движения объектов заданы.

$$\dot{\mathbf{x}}^i = \mathbf{A}_i \mathbf{x}^i + \mathbf{b}^i u, \text{ где } \mathbf{A}_i = \mathbf{A}(\boldsymbol{\omega}^i) \quad (i = 1, 2, \dots, k) \quad (1.1)$$

где k – количество этапов обслуживания, которым соответствуют интервалы времени $[t_{i-1}, t_i]$ ($i = 1, 2, \dots, k$), $\mathbf{x}^i$ n_i -мерный фазовый вектор состояния манипулятора на интервале времени $t \in [t_{i-1}, t_i]$, $\mathbf{A}_i$ $(n_i \times n_i)$ -мерная матрица с постоянными элементами на интервале $[t_{i-1}, t_i]$, в зависимости от параметра $\boldsymbol{\omega}^i$, $\mathbf{b}^i$ n_i -мерный постоянный вектор, u – скалярная функция управления $t \in [t_0, T]$ (t_0 – начальный, $t_k = T$ – конечный момент времени, соответственно). Промежуточные моменты времени t_i ($i = 1, 2, \dots, k$) ($t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{k-1} < t_k = T$) могут быть фиксированными или определяться из дополнительных условий.

Пусть в пространстве состояния заданы произвольные начальное (при $t = t_0, i = 1$) и конечное (при $t = T, i = k$) положения системы (1.1) в виде

$$\mathbf{x}^1(t_0) = \mathbf{x}_{t_0}^1, \mathbf{x}^k(t_k) = \mathbf{x}^k(T) = \mathbf{x}_T^k \quad (1.2)$$

где фазовый вектор $\mathbf{x}_{t_0}^1$ имеет размерность n_1 , а $\mathbf{x}_T^k$ – размерность n_k .

В общем случае предполагается, что $n_1 \neq n_k$ и в промежуточные моменты времени t_i ($i = 1, 2, \dots, k-1$) фазовые векторы составных систем (1.1) должны удовлетворять условиям:

$$\mathbf{x}^i(t_i) = \mathbf{z}^i(t_i) = \mathbf{x}^{i+1}(t_i), (i = 1, 2, \dots, k-1) \quad (1.3)$$

где $\mathbf{z}^i(t_i)$ – фазовое состояние объектов в моменты времени t_i ($i = 1, 2, \dots, k-1$). (1.3) является условием преемственности и означает [4], что конец движения манипулятора на интервале времени $t \in [t_{i-1}, t_i]$ является началом движения на следующем интервале времени $t \in [t_i, t_{i+1}]$.

Не нарушая общности, предполагаем что $n_{i+1} > n_i$ ($i = 1, 2, \dots, k-1$). Для согласования размерности фазовых векторов на разные этапы движения, формально считаем, что движение на i -ом этапе происходит на n_{i+1} -мерном пространстве, где последние $(n_{i+1} - n_i)$ компоненты фазового вектора $\mathbf{x}^i(t)$ тождественно равны нулю, то есть

$$\mathbf{x}^i(t) = (x_1^i, x_2^i, \dots, x_{n_i}^i, 0_{n_{i+1}}, 0_{n_{i+2}}, \dots, 0_{n_{i+1}})^T, \quad \mathbf{x}^{i+1}(t) = (x_1^{i+1}, x_2^{i+1}, \dots, x_{n_i}^{i+1}, x_{n_i+1}^{i+1}, x_{n_i+2}^{i+1}, \dots, x_{n_{i+1}}^{i+1})^T \quad (1.4)$$

$$(x_1^{i+1}(t_i) = x_1^i(t_i), x_2^{i+1}(t_i) = x_2^i(t_i), \dots, x_{n_i}^{i+1}(t_i) = x_{n_i}^i(t_i), x_{n_i+1}^{i+1}(t_i) \equiv 0, x_{n_i+2}^{i+1}(t_i) \equiv 0, \dots, x_{n_{i+1}}^{i+1}(t_i) \equiv 0)$$

Аналогичным образом, можно формально увеличить размерность пространства состояний на $i+1$ этапе движений на величину $(n_i - n_{i+1})$, когда $n_{i+1} < n_i$ ($i = 1, 2, \dots, k-1$).

Важным вопросом для дальнейшего исследования процесса обслуживания манипулятором объектов (технологического участка) являются вопросы управляемости, как на отдельных этапах обслуживания, так и управляемость всей системы в целом, то есть на всем интервале времени [5]. На всем интервале времени $[t_0, T]$ матрицы управляемости $\mathbf{M}^k$ (2.4), с учётом (2.28), (2.39), имеет следующую структуру:

$$\mathbf{M}^k = \{\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_{k-1}, \mathbf{M}_k\} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & 0_{12} & 0_{13} & \dots & 0_{1k-1} & 0_{1k} \\ 0_{21} & \mathbf{M}_{22} & 0_{23} & \dots & 0_{2k-1} & 0_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0_{k-11} & 0_{k-12} & 0_{k-13} & \dots & \mathbf{M}_{k-1k-1} & 0_{k-1k} \\ 0_{k1} & 0_{k2} & 0_{k3} & \dots & 0_{kk-1} & \mathbf{M}_{kk} \end{bmatrix}, \quad (1.5)$$

Матрица $\mathbf{M}^k$ имеет размерность $\left[\left(\sum_{j=1}^k n_j \right) \times \left(\sum_{j=1}^k n_j \right) \right]$. Определитель матрицы управляемости является $\det \mathbf{M}^k = \det \mathbf{M}_{11} \times \det \mathbf{M}_{22} \times \dots \times \det \mathbf{M}_{kk}$, где $\mathbf{M}_{jj}$ ($j = 1, 2, \dots, k$) является матрицей управляемости системы под номером j ($j = 1, 2, \dots, k$) на интервале времени движения $[t_{j-1}, t_j]$ и имеет размерность $(n_j \times n_j)$ [6].

Следовательно, из (1.5) следует что, процесс обслуживания манипулятором на всем интервале времени $[t_0, T]$ вполне управляем, если каждый этап обслуживания вполне управляем и неуправляем, если хотя бы на одном интервале обслуживания процесс неуправляемый.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черноусько Ф.Л., Градецкий В.Г., Болотник Н.Н. Манипуляционные роботы. М.: Наука, 1989. 363 с.
2. Гукасян А.А. Об одной задаче оптимального моделирования технологического процесса, обслуживаемого манипуляционным роботом. //Известия АН Арм. ССР, Механика. 1986. Т.39. №6. С.39-49.
3. Гукасян А.А., Матевосян А.Г. Об управляемом движении материальной точки с нефиксированной массой. //Известия НАН РА. Механика. 2002. Т.55. №1. С.75-81.
4. Величенко В.В. Условия оптимальности в задачах управления с промежуточными условиями. //ДАН СССР. 1967. Т.174. №5. С.1011-1013.
5. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475с.
6. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Физматлит, 2004. 560 с.

Сведения об авторах:

Гукасян А.А.— Институт механики НАН Армении, Горисский Государственный Университет .
E-mail: ghukasyan10@yandex.ru.

Ордян А.Я.—кафедра математики и информатики, Горисский Государственный Университет .
E-mail: oarpine@rambler.ru

О СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ТОНКОЙ УПРУГОЙ ОРТОТРОПНОЙ НЕЗАМКНУТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ СО СВОБОДНЫМИ КРАЯМИ

Гулгазян Г.Р.

Аннотация. В работе, используя систему уравнений соответствующей классической теории ортотропных цилиндрических оболочек, исследуются свободные колебания ортотропной тонкой упругой незамкнутой цилиндрической оболочки со свободными краями. Для нахождения приближённых собственных частот и соответствующих собственных форм применяется метод сведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям Канторовича-Власова. Получены дисперсионные уравнения для нахождения приближённых собственных частот возможных типов колебаний. Установлена асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемой задачи и аналогичной задачи для ортотропной прямоугольной пластинки.

Исследования краевого резонанса пластин и незамкнутых цилиндрических оболочек со свободными краями являются наиболее трудной задачей в теории колебаний пластин и оболочек [1]. Предполагается, что образующие цилиндрической оболочки ортогональны торцам оболочки. На срединной поверхности оболочки вводятся криволинейные координаты (α, β) , где $\alpha (0 \leq \alpha \leq l)$ и $\beta (0 \leq \beta \leq s)$ являются, соответственно, длиной образующей и длиной направляющей окружности. l – длина цилиндрической оболочки, а s – длина направляющей окружности. В качестве исходных уравнений, описывающих колебания оболочек, используются уравнения, которые соответствуют классической теории ортотропных цилиндрических оболочек, записанные в выбранных криволинейных координатах [2-4]. Вводятся дисперсионные уравнения и асимптотические формулы для нахождения приближённых собственных частот возможных типов колебаний. Решение исходного уравнения ищется в виде

$$(u_1, u_2, u_3) = \{u_m w_m''(\theta_m \beta), v_m w_m''(\theta_m \beta), w_m''(\theta_m \beta)\} \beta^2 (\beta - s)^2 \exp(\theta_m \chi \alpha), \quad (1)$$

где (u_1, u_2, u_3) – вектор перемещения точки срединной поверхности, u_m, v_m, χ – неопределённые постоянные, а $\theta_m^4, m = \overline{1, \infty}$ и $w_m(\theta_m \beta), m = \overline{1, \infty}$ – собственные значения и соответствующие собственные функции задачи: $w^{IV} = \theta^4 w$, $w''|_{\beta=0,s} = w'''|_{\beta=0,s} = 0$.

$$w_m(\theta_m \beta) = \text{ch} \theta_m \beta + \cos \theta_m \beta - \frac{\text{ch} \theta_m s - \cos \theta_m s}{\text{sh} \theta_m s - \sin \theta_m s} (\text{sh} \theta_m \beta + \sin \theta_m \beta), \quad (2)$$

а θ_m – корни уравнения: $\text{ch} \theta s \cos \theta s - 1 = 0$.

Характеристическое уравнение исходной системы имеет вид:

$$R_{mm} C_m + \varepsilon_m^2 \left\{ C_m - (B_{12} / B_{22}) \chi^2 a_m - b_m \beta_m + a^2 \left[R_{mm} d_m g_m + b_m (1 + \beta_m^2 + 2((B_{12} + 4B_{66}) / B_{22}) \beta_m \chi^2) \right] + \right. \\ \left. + a^2 \varepsilon_m^2 d_m (b_m + (B_{12} / B_{11}) \chi^2) - a^4 l_m g_m (\beta_m + ((B_{12} + 4B_{66}) / B_{22}) \chi^2) \right\} = 0. \quad (3)$$

Здесь $R_{mm}, C_m, d_m, g_m, a_m, b_m, l_m$ – некоторые многочлены от χ^2 и β_m , $B_{ij}, i, j = 1, 2, 6$ – коэффициенты упругости, $\varepsilon_m = R^{-1} / \theta_m$, где R – радиус направляющей окружности срединной поверхности,

$$\beta_m = \int_0^s \beta^2 (\beta - s)^2 w_m''(\theta_m \beta) w_m(\theta_m \beta) d\beta / \int_0^s \beta^2 (\beta - s)^2 w_m''^2(\theta_m \beta) d\beta, \quad a^2 = \theta_m^2 h^2 / 12. \quad (4)$$

Для дисперсионного уравнения имеем

$$\text{Det} \|m_{ij}\|_{i,j=1}^8 = (B_{66} / B_{11})^2 N^2 (\eta_m^2) \bar{E}(\eta_m^2) \bar{B}(\eta_m^2) K_3^2 (\eta_m^2) + O(\varepsilon_m^2) = 0. \quad (5)$$

При $\varepsilon_m \rightarrow 0$ уравнение (5) распадается на уравнения

$$\bar{E}(\eta_m^2) = K_2^2 (\eta_m^2) (1 + \exp(2z_1 + 2z_2)) + \frac{8B_{11}^2 l_{11} l_{22} l_{21} l_{12}}{(B_{12} + B_{66})^2} \exp(z_1 + z_2) - \frac{4B_{11}^2 l_{11} l_{21} (l_{11} l_{22} + l_{12} l_{21})}{(B_{12} + B_{66})^2} (\exp(z_2) - \\ \exp(z_1)) [z_1 z_2] - \frac{B_{11}^2 (l_{11} l_{22} + l_{12} l_{21})^2}{(B_{12} + B_{66})^2} (\exp(2z_1) + \exp(2z_2)) - \frac{4B_{11}^2 l_{11}^2 l_{21}^2}{(B_{12} + B_{66})^2} [z_1 z_2]^2 = 0 \quad (6)$$

$$\bar{B}(\eta_m^2) = K_1^2 (\eta_m^2) (1 + \exp(2z_3 + 2z_4)) + 8b_{11} b_{22} b_{21} b_{12} \exp(z_3 + z_4) - 4b_{11} b_{21} (b_{11} b_{22} + b_{12} b_{21}) (\exp(z_4) -$$

$$\exp(z_3)[z_3 z_4] - (b_{11}b_{22} + b_{12}b_{21})^2 (\exp(2z_3) + \exp(2z_4)) - 4b_{11}^2 b_{21}^2 [z_3 z_4]^2 = 0 \quad (7)$$

$$K_3^2(\eta_m^2) = \prod_{j=1}^2 \left(a_m^{(j)} + a^2 B_{22} (B_{12} + B_{66}) / (B_{11} B_{66}) l_m^{(j)} \right)^2 = 0, \quad (8)$$

$$K_2(\eta_m^2) = (\beta_m + \eta_m^2) \left(\frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2}{B_{11} B_{66}} \beta_m + \eta_m^2 \right) - \eta_m^2 \chi_1 \chi_2, \quad \eta_m^2 = \frac{\omega^2 \rho}{B_{66} \theta_m^2},$$

$$N(\eta_m^2) = (\chi_1 + \chi_3)(\chi_1 + \chi_4)(\chi_2 + \chi_3)(\chi_2 + \chi_4), \quad z_j = \theta_m \chi_j l, \quad (9)$$

$$K_1(\eta_m^2) = \chi_3^2 \chi_4^2 + 4(B_{66} / B_{11}) \beta_m \chi_3 \chi_4 - (B_{12} / B_{11})^2 \beta_m^2, \quad [z_i z_j] = \theta_m l (\exp(z_i) - \exp(z_j)) / (z_i - z_j).$$

Здесь ω – угловая частота, ρ – плотность материала, h – толщина оболочки. χ_1, χ_2 и χ_3, χ_4 – корни уравнений

$$C_m = \chi^4 + \left[\frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2 - 2B_{12} B_{66}}{B_{11} B_{66}} \beta_m + \frac{B_{11} + B_{66}}{B_{11}} \eta_m^2 \right] \chi^2 + (\beta_m + \eta_m^2) \left(\frac{B_{22}}{B_{11}} \beta_m + \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_m^2 \right) = 0, \quad (10)$$

$$R_{mm} = a^2 \left(\frac{B_{11}}{B_{22}} \chi^4 + \frac{2(B_{12} + 2B_{66})}{B_{22}} \beta_m \chi^2 + 1 \right) - \frac{B_{66}}{B_{22}} \eta_m^2 = 0 \quad (11)$$

с неположительными действительными частями соответственно. $l_m^{(j)}, b_m^{(j)}, a_m^{(j)}, l_m^{(j)}, l_{ij}, b_{ij}$ – некоторые многочлены от χ_j и β_m .

Уравнения (6) и (7) являются дисперсионными уравнениями планарного и изгибного колебаний аналогичной задачи для прямоугольной пластинки, соответственно. Уравнение (8) определяет частоты преимущественно планарного типа колебаний цилиндрической оболочки.

Если $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4$ – корни уравнений (3) имеют отрицательные действительные части, то при $\theta_m l \rightarrow \infty$ дисперсионное уравнение задачи преобразуется в уравнение

$$\text{Det} \|m_{ij}\|_{i,j=1}^8 = \left(\text{Det} \|m_{ij}\|_{i,j=1}^4 \right)^2 + \sum_{j=1}^4 O(\exp Z_j) = 0, \quad Z_j = \theta_m \chi_j l, \quad (12)$$

а при $\theta_m l \rightarrow \infty$ и $\varepsilon_m \rightarrow 0$ уравнение (5) и (12) преобразуются в уравнение

$$\text{Det} \|m_{ij}\|_{i,j=1}^8 = (B_{66} / B_{11})^2 N^2(\eta_m^2) K_1^2(\eta_m^2) K_2^2(\eta_m^2) K_3^2(\eta_m^2) + O(\varepsilon_m^2) + \sum_{j=1}^4 O(\exp z_j) = 0. \quad (13)$$

Заметим, что уравнение $\text{Det} \|m_{ij}\|_{i,j=1}^4 = 0$ является дисперсионным уравнением полу-бесконечной незамкнутой цилиндрической оболочки со свободными краями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вильде М.В., Каплунов Ю.Д., Кассович Л.Ю. Краевые и интерфейсные резонансные явления в упругих телах. М.: Физматлит, 2010. 279с.
2. Ghulghazaryan G.R., Ghulghazaryan L.G. and Saakyan R.D. The vibrations of a thin elastic orthotropic circular cylindrical shell with free and hinged edges// J. Appl. Math. Mech. 72(3), 2008.
3. Gulgazaryan G.R., Gulgazaryan R.G. and Khachanyan A.A. Vibrations of an orthotropic cylindrical panel with various boundary conditions// Int. Appl. Mech. 49, No 5, 2013.
4. Ghulghazaryan G.R., Ghulghazaryan R.G. and Srapionyan Dg.L. Localized vibrations of a thin-walled structure consisted of orthotropic elastic non-closed cylindrical shells with free and rigid-clamped edge generators. ZAMM. Z. Math. Mech. 93. No 4, 2013.

Сведения об авторе:

Гулгазарян Гурген Рубенович, профессор, доктор физ.-мат. наук. АГПУ им. Х.Абовяна. кафедры математики и методики её преподавания. Тел.: (+37491)706700.

E-mail: ghulgr@yahoo.com

ДИФРАКЦИЯ ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ СДВИГА НА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ТРЕЩИНЕ В СОСТАВНОМ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Джилавян С.А., Саргсян А.С.

Аннотация. Исследуется распространение электроупругой поверхностной волны сдвига в пространстве, состоящем из пьезоэлектрических полупространств. Между двумя полупространствами существует полубесконечная трещина, а на остальной части контактной плоскости имеют место условия полного электромеханического контакта. Задача дифракции распространяющейся волны сводится к решению функционального уравнения типа Римана на действительной оси, которое решается методом факторизации. Дифракция поверхностной электроупругой сдвиговой волны на полубесконечной трещине приводит к распространению локализованных волн, обусловленных пьезоэффектом и наличием полубесконечной трещины.

Рассматривается задача дифракции поверхностной сдвиговой волны в составной среде, обладающей свойством пьезоэффекта. Электроупругое пространство состоит из двух пьезоэлектрических полупространств – пьезоэлектриков гексагональной симметрии класса 6mm с совпадающей с осью Oz главной осью кристалла, и отнесено к прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$, при этом, $c_1, e_1, \varepsilon_1, \rho_1$ – упругая, пьезоэлектрическая, диэлектрическая постоянные и плотность среды, занимающей полупространство $y > 0$; $c_2, e_2, \varepsilon_2, \rho_2$ – соответствующие характеристики пьезоэлектрического полупространства $y < 0$. В плоскости Oxz при $x < 0$ пьезоэлектрические полупространства взаимодействуют между собой без акустического контакта. В этой же плоскости контакта при $x > 0$ между полупространствами осуществляется электромеханический полный контакт, т.е. принимается, что рассматриваемая составная среда имеет полубесконечную трещину в плоскости Oxz при $x < 0$.

Из бесконечности ($x < 0$) по направлению оси Ox распространяется электроупругая поверхностная волна сдвига, обусловленная наличием пьезоэффекта в полупространствах [1,2]. Пьезоэлектрическая среда находится в условиях антиплоской деформации, учитывается гармоническая зависимость от времени всех составляющих волнового поля (временной множитель $e^{-i\omega t}$, ω – частота колебаний, t – параметр времени).

Амплитудные составляющие перемещений и электрических потенциалов волны, распространяющейся из бесконечности, имеют вид:

$$\begin{aligned} w_{1\infty}(x, y) &= e^{i\sigma_* x} e^{-\sqrt{\sigma_*^2 - k_1^2} y}, \\ \Phi_{1\infty}(x, y) &= \frac{e_1}{\varepsilon_1} w_{1\infty}(x, y) - \frac{e_1}{\varepsilon_1} D e^{i\sigma_* x} e^{-\sigma_* y}, \quad y > 0 \\ w_{2\infty}(x, y) &= \frac{e_1}{\varepsilon_2} \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - D \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right) e^{i\sigma_* x} e^{\sqrt{\sigma_*^2 - k_2^2} y}, \\ \Phi_{2\infty}(x, y) &= \frac{e_2}{\varepsilon_2} w_{2\infty}(x, y) + \frac{e_2}{\varepsilon_2} D e^{i\sigma_* x} e^{\sigma_* y}. \end{aligned} \quad y < 0 \quad (1)$$

В этих соотношениях $\sigma_* > k_n$ – волновое число поверхностной волны, при этом,

$$\frac{\chi_1}{1 + \chi_1} \frac{\sigma_*}{\sqrt{\sigma_*^2 - k_1^2}} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \frac{\chi_2}{1 + \chi_2} \frac{\sigma_*}{\sqrt{\sigma_*^2 - k_2^2}} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_2}, \quad D = \frac{1 + \chi_1}{\chi_1} \frac{\sqrt{\sigma_*^2 - k_1^2}}{\sigma_*},$$

$$k_n = \omega / v_n, \quad v_n = \sqrt{c_n (1 + \chi_n) / \rho_n}, \quad \chi_n = e_n^2 / \varepsilon_n c_n, \quad n = 1, 2.$$

Рассматривается обусловленная наличием полубесконечной трещины, дифракция сдвиговой электроупругой волны (1) в составном пространстве. Задача заключается в определении электроупругого волнового поля в полупространствах. Конструктивная неоднородность среды приводит к существенной перестройке дифрагированных волновых полей, и полубесконечная трещина является причиной возбуждения двух локализованных волн и проявления некоторых новых особенностей при дифракции волн сдвига. Для определения амплитудных функций пе-

ремещений $w_1(x, y), w_2(x, y)$ и электрических потенциалов $\Phi_1(x, y), \Phi_2(x, y)$ в полупространствах имеем следующие уравнения [1,2,3]:

$$\begin{aligned} \Delta w_1 + k_1^2 w_1 &= 0, & \varepsilon_1 \Delta \Phi_1 + e_1 k_1^2 w_1 &= 0, & y > 0, \\ \Delta w_2 + k_2^2 w_2 &= 0, & \varepsilon_2 \Delta \Phi_2 + e_2 k_2^2 w_2 &= 0, & y < 0, \end{aligned} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (2)$$

Решения уравнений (2) должны удовлетворять условиям безакустического контакта при $x < 0$ и условиям полного контакта при $x > 0$. Для характеристических функций электрического поля – амплитуд электрических потенциалов и составляющих векторов электрических индукций, имеют место условия непрерывности при $y = 0$.

Для амплитуд напряжений и перемещений условия на контактной плоскости представляются в виде

$$\sigma_{yz}^{(1)}(x, +0) = \sigma_{yz}^{(2)}(x, -0) = q_+(x), \quad w_1(x, +0) - w_2(x, -0) = \psi_-(x) \quad \text{при } y = 0,$$

где $q_+(x) = 0$ при $x < 0$, $\psi_-(x) = 0$ при $x > 0$. $q_+(x)$ – напряжение при $y = 0$, $\psi_-(x)$ представляет разницу перемещений на $y = \pm 0$.

Задача решается методом интегрального преобразования Фурье, используя методы факторизации и теории функций комплексного переменного, метод, разработанный в [4], и сводится к решению функционального уравнения типа Римана на действительной оси [2,3,5].

Рассматривая дифрагированное волновое поле в составном полупространстве $x < 0$, находим, что возбуждается поверхностная–локализованная у граничной поверхности $y = 0$ волна, распространяющаяся со скоростью падающей волны. В составном полупространстве $x > 0$, кроме дифрагированных объёмных электроупругих волн, распространяются, если только среда допускает такое распространение (получены условия), локализованные у контактной плоскости между пьезоэлектрическими полупространствами, сдвиговые поверхностные (интерфейсные) волны, обусловленные пьезоэффектом и дифракцией падающей электроупругой волны сдвига.

ЛИТЕРАТУРА

1. Балакирев М.К., Гишинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука, 1982. 242с.
2. Григорян Э.Х., Джилаван С.А. Дифракция плоской сдвиговой волны на полубесконечной трещине в пьезоэлектрическом пространстве.// Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т.58. №1. С. 38-50.
3. Джилаван С.А., Казарян А.А. Дифракция плоской сдвиговой волны в пьезоэлектрическом полупространстве при полубесконечном металлическом слое в диэлектрике. //Изв. НАН Армении. Механика. 2015. Т.68. № 1. С.45-57.
4. Григорян Э.Х. Передача нагрузки от кусочно-однородной бесконечной накладки к упругой полуплоскости. // Ученые записки ЕГУ. 1979. № 3. С.29-34.
5. Агаян К.Л., Григорян Э.Х. Дифракция сдвиговой плоской электроупругой волны на полубесконечном электроде в пьезоэлектрическом пространстве с щелью.// Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. № 1. С.50-69.

Сведения об авторах:

Джилаван Самвел Акопович – кандидат физ.-мат. наук, доцент, кафедра механики ЕГУ.

E-mail: samjilavyan@ysu.am. **Тел.:** (+374 91) 50-07-70.

Саргсян Арсен Сурикович – аспирант, кафедра механики ЕГУ.

E-mail: arsensargsyan777@gmail.com. **Тел.:** (+374 77) 12-43-10.

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ ПРОЧНОСТИ АЛЮМИНИЕВОГО СПЛАВА АД1 ПРИ РАСТЯЖЕНИИ

Евстифеев А.Д.

Аннотация. Применение материалов в условиях высокоскоростных динамических нагрузок требует всестороннего изучения их прочностных свойств. В настоящей работе представлена экспериментальная схема выполнения испытаний малых образцов на растяжение с использованием башенного копра. Анализ экспериментальных данных выполняется с использованием структурно временного подхода.

Исследование прочностных характеристик материала в условиях динамических нагрузок является актуальной задачей, поскольку поведение материала в экстремальных режимах существенно отличается от поведения при квазистатическом нагружении. С ростом скорости деформации, как правило, пороговые значения прочности при растяжении или сжатии увеличиваются нелинейно. То есть у материала появляется способность выдерживать кратковременные нагрузки, многократно превосходящие их статический предел прочности, данный эффект хорошо описывается критерием инкубационного времени [1,2].

В настоящее время широко применяемым методом экспериментального определения прочностных характеристик материалов в динамическом диапазоне нагружения является метод Кольского с использованием разрезного стержня Гопкинсона (РСГ) или его модификации. При этом, фиксация сигналов при разрушении и обработка экспериментальных данных является довольно сложным процессом. В настоящей работе исследования динамических характеристик материала проводились на башенном копре Instron CEAST 9350 при скорости деформации порядка 10^2 - 10^3 (с^{-1}). Главным достоинством используемого оборудования являются сертифицированные методики фиксации сигналов и автоматизированная процедура проведения испытаний, что позволяет снизить погрешность эксперимента.

Эксперименты проводились на алюминиевом сплаве АД1 для различных вариаций геометрических размеров образцов. Результаты представлены на рис.1. Первоочередной целью работы являлось определение возможности испытания на растяжение малых плоских образцов из наноструктурированного материала методами интенсивной пластической деформации (ИПД) [3]. Отчасти это связано со спецификой получаемых в настоящее время образцов небольшого размера методами ИПД деформации (например, при использовании метода интенсивной пластической деформации кручением, как правило, получаются диски до 20 мм в диаметре и до 1-2 мм по толщине).

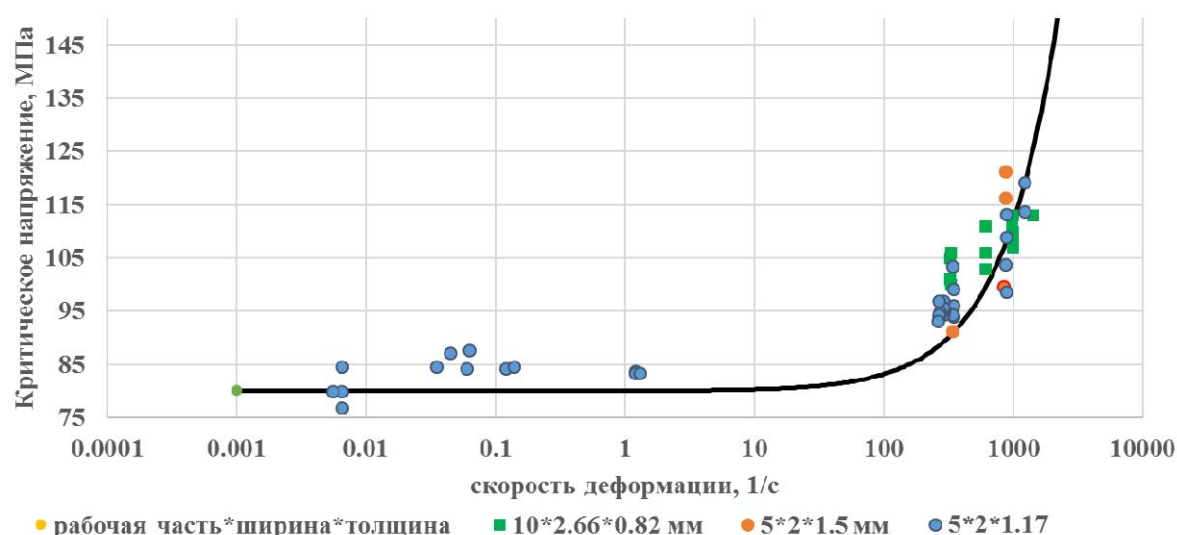


Рис.1. Зависимость критического напряжения от скорости деформации. Кривая построена по критерию (1) при $\sigma_c = 80$ МПа, $\tau_c = 0.8$ μs , точки – экспериментальные данные.

Анализ экспериментальных данных выполнялся с использованием структурно временного подхода. В качестве критерия разрушения материала при растяжении был выбран критерий инкубационного времени [1, 2]:

$$\frac{1}{\tau_c} \int_{t-\tau_c}^t \frac{\sigma(s)}{\sigma_c} ds \leq 1 \quad (1)$$

где t – время, $\sigma(t)$ – приложенное напряжение, σ_c – статический предел прочности, τ_c – инкубационное время разрушения.

Использование данного подхода позволило описать экспериментальные данные в статической и динамической областях на диаграмме критическое напряжение при растяжении – скорость деформации.

Полученные данные при испытании плоских образцов с размерами рабочей части 10 мм длина и 3 мм ширина (ISO 8256) продемонстрировали хорошую корреляцию с данными, полученными при испытании малых образцов с размерами рабочей части 5 мм длина и 2 мм ширина. Это позволяет перейти к исследованию свойств материала, полученного методами интенсивной пластической деформации, что является актуальной на настоящий момент времени задачей.

Также стоит отметить, что проведенная в данной работе серия статических и динамических испытаний, с последующей обработкой результатов с помощью критерий инкубационного времени, позволяет определить скоростную зависимость критических напряжений при неисследованных режимах по скорости деформации. Это существенно расширяет информацию о материале и даёт возможность выбора материала под заданные условия эксплуатации.

ЛИТЕРАТУРА

1. N.F. Morozov, Y.V. Petrov. Dynamics of Fracture. Springer, Berlin (2000). 99 p.
2. Y.V. Petrov, N.F. Morozov. ASME J. Appl. Mech. 61, 710, 1994.
3. R. Valiev. Nanostructuring of metals by severe plastic deformation for advanced properties // Nature Materials, 2004, 3, 511-515.

Сведения об авторах:

Евстифеев А.Д. – к.ф.-м.н., СПбГУ, математико-механический факультет, Санкт-Петербург, Россия, E-mail: ad.evstifeev@gmail.com.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПЛОСКИХ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН В МАТЕРИАЛАХ С ТОЧЕЧНЫМИ ДЕФЕКТАМИ

Ерофеев В.И., Леонтьева А.В., Мальханов А.О., Шекоян А.В.

Аннотация. В работе изучается влияние точных дефектов материала на распространение плоских продольных волн. Показано, что эволюционное уравнение объединяет в себе известные уравнения волновой динамики: Кортевега-де Вриза-Бюргерса и Клейна-Гордона. Получены точные аналитические решения уравнений методом усечённых разложений.

При воздействии на материал лазерного излучения или потока частиц (например, при ионной имплантации) в нём создаются точечные дефекты (вакансии, межузлия). Прохождение интенсивной продольной акустической волны способствует изменению в областях растяжения и сжатия энергии активации образования точечных дефектов, приводя к их пространственному перераспределению. Дефекты, мигрирующие по материалу, рекомбинируют на различного рода центрах. Роль таких центров могут играть дислокации, примеси внедрения и др. Волновые эффекты в ансамблях дислокаций изучались в работе [1].

В работах [2, 3] изучалось влияние дислокаций и точечных дефектов на пространственную локализацию нелинейных акустических волн, распространяющихся в материалах.

Самосогласованная математическая модель представляет собой систему трёх дифференциальных уравнений в частных производных. Система включает в себя динамическое уравнение теории упругости и кинетические уравнения для плотностей различных типов точечных дефектов. В уравнениях учтена объёмная взаимная рекомбинация разноименных дефектов. Для статической деформации система уравнений сводится к одному нелинейному дифференциальному уравнению, описывающему динамику точечных дефектов. Для упрощения задачи предполагаем, что скорости рекомбинации на стоках и скорости взаимной рекомбинации дефектов одного порядка.

Решение уравнения ищем в виде асимптотического разложения по малому параметру. При этом вводим новые переменные, поскольку возмущение, распространяясь со скоростью вдоль координаты, медленно эволюционирует в пространстве из-за нелинейности, дисперсии и диссипации. Первое приближение по малому параметру позволяет получить нелинейное эволюционное уравнение относительно объёмной концентрации одного из точечных дефектов. Уравнение в частных производных имеет четвёртый порядок и содержит квадратичные нелинейности. Анализ уравнения показывает, что наряду с нелинейными процессами в системе присутствуют также диссипативные и дисперсионные процессы.

Далее рассматриваются как частные случаи эволюционного уравнения, так и само общее уравнение. Показано, что если в рассматриваемой системе диффузия преобладает над рекомбинацией дефектов, то эволюционное уравнение преобразуется в уравнение Кортевега-де Вриза-Бюргерса. Если же, наоборот, в системе рекомбинация дефектов преобладает над диффузионными процессами, то эволюционное уравнение преобразуется в уравнение Клейна-Гордона с квадратичной нелинейностью. Найдены решения уравнений для стационарных волн.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 14-19-01637).

REFERENCE

1. Bagdoev Alexander G., Erofeyev Vladimir, Shekoyan Ashot V. Wave dynamics of generalized continua. Springer, 2016, 274 p.
2. Erofeev V.I., Leontieva A.V. and Malkhanov A.O. Spatial localization of nonlinear waves spreading in materials in the presence of dislocations and point defects // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, vol. 208, 2017.
3. Ерофеев В.И., Леонтьева А.В., Мальханов А.О. Влияние точечных дефектов на пространственную локализацию нелинейных волн, распространяющихся в материалах // Труды II Всероссийской акустической конференции, совмещённой с XXX сессией РАО (сборник текстов докладов), 2017.

Сведения об авторах:

Ерофеев Владимир Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, директор, Институт Проблем Машиностроения РАН – филиал ФГБНУ «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики РАН», +7 (910) 3843528

E-mail: erof.vi@yandex.ru

Леонтьева Анна Викторовна – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, Институт Проблем Машиностроения РАН – филиал ФГБНУ «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики РАН», +7 (910) 8726915

E-mail: aleonav@mail.ru

Мальханов Алексей Олегович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт Проблем Машиностроения РАН – филиал ФГБНУ «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики РАН», +7 (910) 3949363

E-mail: alexey.malkhanov@gmail.com

Шекоян Ашот Вазгенович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института механики НАН РА

E-mail: ashotshek@mechins.sci.am

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СТЕПЕННЫХ РЯДОВ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ПРИКЛАДНОЙ МОДЕЛИ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ТОНКИХ ПЛАСТИН СО СТЕСНЁННЫМ ВРАЩЕНИЕМ

Жамакочян К.А.

Аннотация. В работе построена модель микрополярной упругой тонкой пластинки при помощи метода степенных рядов. Эта модель сравнивается с аналогичной моделью, которая построена асимптотически обоснованным методом гипотез.

1. Постановка задачи. Рассмотрим изотропную пластинку постоянной толщины $2h$ как трёхмерное упругое микрополярное тело. Будем исходить из основных уравнений пространственной задачи микрополярной теории упругости со стеснённым вращением [1]. К этим уравнениям будем соединять граничные условия.

На лицевых плоскостях пластинки $x_3 = \pm h$ считаются заданными силовые и моментные напряжения

$$\sigma_{31} = \pm p_1^\pm, \sigma_{32} = \pm p_2^\pm, \sigma_{33} = \pm p_3^\pm, \mu_{31} = \pm m_1^\pm, \mu_{32} = \pm m_2^\pm, \text{ при } x_3 = \pm h. \quad (1.1)$$

Граничные условия на боковой поверхности пластинки могут записываться в силовых и моментных напряжениях, перемещениях и поворотах или в смешанном виде.

Общая задача разлагается на симметричных и антисимметричных задач по x_3 .

2. Метод степенных рядов. Для построения двумерной модели пластинки применим метод степенных рядов [2]. Аппроксимируем V_1, V_2, V_3 степенными полиномами относительно x_3 :

$$V_1 = \sum_{n=0}^N V_{1,n} x_3^n, \quad V_2 = \sum_{n=0}^N V_{2,n} x_3^n, \quad V_3 = \sum_{n=0}^N V_{3,n} x_3^n, \quad (2.1)$$

где $V_{1,n}, V_{2,n}, V_{3,n}$ – неизвестные коэффициенты зависящей от координат x_1, x_2 .

Плоское напряжённое состояние микрополярной тонкой пластинки в исходном приближении метода степенных рядов описывается следующей системой уравнений для функций $V_{1,0}, V_{2,0}$:

$$\begin{aligned} & \frac{2\mu\lambda}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{\partial^2 V_{1,0}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V_{2,0}}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 V_{1,0}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 V_{2,0}}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \frac{\gamma}{2} \left(\frac{\partial^4 V_{2,0}}{\partial x_1^3 \partial x_2} - \frac{\partial^4 V_{1,0}}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 V_{2,0}}{\partial x_1 \partial x_2^3} - \frac{\partial^4 V_{1,0}}{\partial x_2^4} \right) + \\ & + 2\mu \frac{\partial^2 V_{1,0}}{\partial x_1^2} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{p_3^+ - p_3^-}{2} = -\frac{p_1^+ + p_1^-}{2h} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{m_1^+ - m_1^-}{2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \frac{m_2^+ - m_2^-}{2}, \\ & \frac{2\mu\lambda}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{\partial^2 V_{2,0}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 V_{1,0}}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 V_{2,0}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V_{1,0}}{\partial x_1 \partial x_2} \right) - \frac{\gamma}{2} \left(\frac{\partial^4 V_{2,0}}{\partial x_1^4} - \frac{\partial^4 V_{1,0}}{\partial x_1^3 \partial x_2} + \frac{\partial^4 V_{2,0}}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} - \frac{\partial^4 V_{1,0}}{\partial x_1 \partial x_2^3} \right) + \\ & + 2\mu \frac{\partial^2 V_{2,0}}{\partial x_2^2} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{p_3^+ - p_3^-}{2} = -\frac{p_2^+ + p_2^-}{2h} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \frac{m_1^+ - m_1^-}{2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{m_2^+ - m_2^-}{2}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Система уравнений (2.2) представляет собой основные уравнения обобщённого плоского напряжённого состояния микрополярных упругих тонких пластин со стеснённым вращением, которая совпадает с системой уравнений работы [3], последняя получена на основе асимптотически обоснованного методом гипотез.

Математическую модель микрополярных упругих тонких пластин при изгибной деформации в исходном приближении метода степенных рядов описывается следующей системой уравнений для функций $V_{1,1}, V_{2,1}, V_{3,0}$:

$$\begin{aligned}
& 2h\mu(V_{11} + \frac{\partial V_{3,0}}{\partial x_1}) - h\gamma \left(\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^3 V_{3,0}}{\partial x_1 \partial x_2^2} \right) - \frac{h(\gamma + \varepsilon)}{2} \left(\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^3 V_{3,0}}{\partial x_1^3} \right) + \\
& + \frac{h(\gamma - \varepsilon)}{2} \left(\frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^3 V_{3,0}}{\partial x_1 \partial x_2^2} \right) - \frac{2h^3}{3} \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial x_1 \partial x_2} \right) - \frac{2\mu h^3}{3} \left(\frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_2^2} \right) - \\
& - \frac{h^3}{3} \gamma \left(\frac{\partial^4 V_{2,1}}{\partial x_1^3 \partial x_2} - \frac{\partial^4 V_{1,1}}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 V_{2,1}}{\partial x_1 \partial x_2^3} - \frac{\partial^4 V_{1,1}}{\partial x_2^4} \right) - \frac{2h^3}{3} \frac{\nu}{1 - \nu} \frac{p_3^+ + p_3^-}{2h} = \\
& = h(p_1^+ - p_1^-) + \frac{m_2^+ + m_2^-}{2} + \frac{h^2}{6} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{m_1^+ + m_1^-}{2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \frac{m_2^+ + m_2^-}{2} \right) \\
& 2h\mu(V_{21} + \frac{\partial V_{3,0}}{\partial x_2}) + h\gamma \left(\frac{\partial^3 V_{3,0}}{\partial x_1^2 \partial x_2} - \frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial x_1^2} \right) + \frac{h(\gamma + \varepsilon)}{2} \left(\frac{\partial^3 V_{3,0}}{\partial x_2^3} - \frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial x_2^2} \right) + \\
& + \frac{h(\gamma - \varepsilon)}{2} \left(\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^3 V_{3,0}}{\partial x_1^2 \partial x_2} \right) - \frac{2h^3}{3} \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_1 \partial x_2} \right) - \frac{2\mu h^3}{3} \left(\frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \\
& + \frac{h^3}{3} \gamma \left(\frac{\partial^4 V_{2,1}}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} - \frac{\partial^4 V_{1,1}}{\partial x_1 \partial x_2^3} + \frac{\partial^4 V_{2,1}}{\partial x_1^4} - \frac{\partial^4 V_{1,1}}{\partial x_1^3 \partial x_2} \right) + \frac{2h^3}{3} \frac{\nu}{1 - \nu} \frac{p_3^+ + p_3^-}{2h} = \\
& = h(p_2^+ - p_2^-) - \frac{m_1^+ + m_1^-}{2} + \frac{h^2}{6} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{m_2^+ + m_2^-}{2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \frac{m_1^+ + m_1^-}{2} \right), \\
& \frac{1}{2} h(\gamma + \varepsilon) \left(\frac{\partial^3 V_{1,1}}{\partial x_1^3} - \frac{\partial^4 V_{3,0}}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^3 V_{2,1}}{\partial x_2^3} - \frac{\partial^4 V_{3,0}}{\partial x_2^4} + \frac{\partial^3 V_{1,1}}{\partial x_1 \partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^4 V_{3,0}}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^3 V_{2,1}}{\partial x_1^2 \partial x_2} \right) \\
& 2\mu h \left(\frac{\partial V_{1,1}}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 V_{3,0}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial V_{2,1}}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 V_{3,0}}{\partial x_2^2} \right) = -(p_3^+ + p_3^-) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} (m_1^+ + m_1^-) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} (m_2^+ + m_2^-). \quad (2.3)
\end{aligned}$$

Полученная система уравнений кроме подчёркнутых членов (которые по сути дела, как показывают расчёты, малые величины), совпадает с системой работы [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта № SCS 15T-2C138.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 862с.
2. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. Итоги науки и техники. Механика деформируемых тел. М.: ВИНТИ. 1973. Т.5. 272 с.
3. Айрапетян Г.С., Саркисян С.О. Математические модели изгибной деформации микрополярных упругих ортотропных тонких пластин по теории со стеснённым вращением и теории, при которой силовая часть задачи отделяется от моментной части задачи // Учёные записки Ширакского гос. университета. Вып. А. №1. С. 7-41.

Сведения об авторе:

Жамакочян Кнарик – аспирант кафедры Высшей математики Ширакского государственного университета им. М. Налбандяна, (+374 93) 87 32 94.

E-mail: knarikzhamakochyan@mail.ru

РЕГУЛИРОВАНИЕ УПРУГОГО ОТКЛИКА МАТЕРИАЛА ПРОТЯЖЁННЫХ ПРЕССОВОК СФОРМИРОВАННЫХ ХОЛОДНЫМ ВЫДАВЛИВАНИЕМ ЧЕРЕЗ МУНДШТУК ПОЛИМЕРНОЙ ДИСПЕРСНОЙ КОМПОЗИЦИИ

Жилин С.Г., Комаров О.Н., Соснин А.А.

Аннотация. Одной из приоритетных производственных задач является получение литых заготовок высокой точности, поверхность которых не нуждается в дополнительной механической обработке. Методом, направленным на решение этой проблемы, является литье по выплавляемым моделям. При получении выплавляемых моделей холодным прессованием порошков полимерных композиций достигаются высокие размерно-геометрические параметры формованных изделий, отличающиеся отсутствием усадочных дефектов. Однако, недостатком такого способа формирования протяжённых участков выплавляемых моделей является упругий отклик уплотнённого полимерного материала. Сложность прогноза этого эффекта и его учёта при проектировании оснастки заключается в анизотропии получаемых прессовок. В работе представлены результаты серии экспериментов по регулированию величины упругого отклика полимерного материала в ходе моделирования процесса получения протяжённых прессовок, получаемых выдавливанием через мундштук. Изменяемым параметром в эксперименте была скорость выдавливания. Регистрируемыми параметрами были: нагрузка, создаваемая в цилиндрическом поршне, заполненном фракцией полимерного материала, температура выдавливаемого материала, плотность и величина его упругого отклика по длине получаемой прессовки. Изменением скорости формирования прессовок достигается снижение их анизотропии, что позволяет прогнозировать конечные размеры формируемого изделия, учёт которых важен при проектировании пресс-оснастки.

Для получения литых заготовок сложной конфигурации наиболее предпочтительным представляется метод литья по выплавляемым моделям [1]. Такой способ позволяет получать литые заготовки с толщиной стенки до 1 мм, шероховатостью поверхности до $Ra = 1,25$ мкм.

Такой процесс энергозатратен, длителен, включает большое количество операций и материалов. Суммарный брак, обусловленный деформационными и усадочными процессами достигает 30%. Расширение материала моделей, при их выплавлении из оболочковой формы, термообработка последних приводят к образованию сколов и трещин в результате температурных деформаций, связанных с неравномерностью прогрева и закипанием включений модельной массы, в порах оболочковой формы [2]. При получении выплавляемой модели заливкой жидкого полимерного материала в пресс-форму глубина усадочной раковины зависит от размеров теплового узла и, в ряде случаев, составляет 8 – 10 % от продольного размера изделия, выполненного из парафина и 3 – 5 % для изделия из ПС 50/50. Применением пористых выплавляемых моделей, получаемых холодным прессованием порошков полимерных композиций, возможно устранение усадочных дефектов. Такие модели имеют высокую размерно-геометрическую точность, определяемую параметрами пресс-формы.

Однако, применение такого приёма ограничивается реологическими характеристиками используемых полимерных материалов. Сложность заключается в отсутствии данных о значении величины упругого отклика материала. По завершении релаксации материала плотность может распределяться неравномерно и отличаться от расчётных значений [3, 4]. Суммарное влияние релаксации компонентов прессованной выплавляемой модели приводит к увеличению её размеров в продольном направлении на 0,7-1,2%, в поперечном на 0,4-0,5%. Устранение упругого отклика протяжённых тонкостенных участков прессованной модели затруднено и представляется малоизученным и определяет актуальность исследований.

Цель эксперимента – управления величиной упругого отклика протяжённого участка выплавляемой модели, полученной холодным выдавливанием порошка полимерного модельного материала через мундштук. Задачи: определить нагрузку, необходимую для создания условий, при которых порошок полимерной модельной композиции поступает в пластифицированном состоянии через мундштук; определить температуру выдавливаемого материала в зоне его подачи в мундштук при изменении скорости перемещения пресс-пуансона; определить скорость выдавливания полимерного материала через мундштук, при которой величина упругого отклика получаемой прессовки будет минимальной.

Реализация поставленных задач осуществлялась при помощи тестовой машины AG-X plus Shimadzu, на которую устанавливалась пресс-форма с цилиндрической внутренней поверхностью. В донной части пресс-форма снабжена диффузором в виде крышки с мундштуком. Отношение площадей сечений уплотняемого порошкового тела и пластифицированного составляет 25 к 1. В пресс-форму засыпали полимерный материал порошка фракции

0,63 мм и перемещали поршень до полного выдавливания материала из мундштука. Скорость перемещения поршня при холодном выдавливании порошка полимерного материала для каждого из серии экспериментов изменялась от 0,5 мм/с до 3 мм/с с шагом 0,25 мм/с. Во время каждого эксперимента скорость перемещения поршня оставалась постоянной. На выходе из мундштука измеряли диаметр длинномерной прессовки с шагом 50 мм. По отклонению полученных значений от внутреннего диаметра мундштука регистрировали упругий отклик или усадку материала. Достижение изотропии в такой прессовке возможно правильным выбором скорости выдавливания полимерного материала через мундштук.

В ходе эксперимента установлено, что средняя плотность получаемых прессовок не зависит от скорости выдавливания в случаях, когда температура пластифицируемого материала при установившемся режиме выдавливания значительно ниже температуры его расплавления. Таким образом, средняя плотность длинномерных прессовок характерна для плотности материала Т1, получаемой при свободной заливке и составляет 860 г/см³.

Установлено, что теплофизические условия формирования длинномерной прессовки холодным выдавливанием через мундштук определяются величиной нагрузки, создаваемой при передаче давления прессования порошковому телу. Экспериментально установлено, что с увеличением скорости перемещения пресс-пуансона напряжение возрастает на 30%. Наименьший упругий отклик достигается в интервале скоростей перемещения пресс-поршня 0,5-1,5 мм/с. С увеличением скорости уплотнения в прессовке после снятия нагрузки появляются отрицательные значения величины упругого отклика, характеризующие появление усадочных дефектов, связанных с локальным перегревом материала. Полученные в ходе эксперимента данные позволяют управлять величиной упругого отклика материала уплотняемого порошкового тела путем регулирования нагрузки при выдавливании.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта ДВО РАН (проект 15-1-4-018) «Расчётное и опытное совершенствование процессов профилирования и высокоточного литья на основе новых модельных представлений и специальной серии вычислительных экспериментов. (Раздел 4)».

ЛИТЕРАТУРА

1. Литье по выплавляемым моделям/ В.Н. Иванов, С.А. Казеннов, Б.С. Курчман и др.; под общ. ред. Я.И. Шкленника, В.А. Озерова. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1984. – 408 с., ил.
2. Sapchenko I.G., Potianikhin D.A., Komarov O.N. / Mesomechanics of Technological Properties of Powdered Polymer Compacts in Lost Wax Casting // AIP Conference Proceedings, 2014. Vol. 1623, P. 543-546
3. Жилин С.Г., Сапченко И.Г., Комаров О.Н. Формирование прессовок из порошков полимерных изотропных материалов // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2016. №2(28). С. 3-14
4. Жилин С.Г., Комаров О.Н., Потянихин Д.А., Соснин А.А. Определение параметров логарифмического уравнения прессования для описания процесса одноосного уплотнения порошкового тела из полимерного материала // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Машиностроение, материаловедение. 2016. Т.18, №4. С.48-59

Информация об авторах:

Жилин Сергей Геннадьевич – кандидат технических наук, доцент, РФ, Комсомольск-на-Амуре, ИМиМ ДВО РАН, (4217) 54 95 39, **E-mail:** sergeyzhilin1@rambler.ru

Комаров Олег Николаевич – кандидат технических наук, доцент, РФ, Комсомольск-на-Амуре, ИМиМ ДВО РАН, (4217) 54 95 39, **E-mail:** olegnikolaevitsch@rambler.ru

Соснин Александр Александрович – кандидат технических наук, РФ, Комсомольск-на-Амуре, ИМиМ ДВО РАН, (4217) 54 95 39, **E-mail:** alekshak@mail.ru

КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ОСНОВАНИЯ С ПОКРЫТИЕМ И СИСТЕМЫ КОЛЬЦЕВЫХ ШТАМПОВ СО СЛОЖНЫМИ ФОРМАМИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Казаков К.Е., Курдина С.П.

Аннотация. В работе рассматривается контактное взаимодействие системы кольцевых жёстких штампов и вязкоупругого двухслойного основания, верхний слой которого тонкий по сравнению с ширинами штампов. Задача рассматривается в случае, когда основания штампов описываются быстроизменяющимися функциями. Это приводит к необходимости использовать специальные подходы при построении решений, так как стандартные методы не позволяют получить эффективные аналитические решения.

Двухслойное основание, верхний слой которого изготовлен из вязкоупругого стареющего материала в момент времени τ_1 , а нижний – из другого вязкоупругого стареющего материала в момент времени τ_2 , лежит без трения на подстилающем недеформируемом основании. Считается, что верхний слой мягче нижнего, то есть величина модуля упругомгновенной деформации покрытия $E_2(t)$ не превышает величины модуля упругомгновенной деформации нижнего слоя $E_1(t)$, а между слоями осуществляется гладкий контакт.

В некоторый момент времени τ_0 в поверхность такого слоя начинает вдавливаться система n кольцевых жестких штампов силами $P_i(t)$, внутренний и внешний радиусы которых равны a_i и b_i , соответственно. Считается, что области контакта со временем не меняются, а ширины колец значительно больше толщины верхнего слоя. Формы оснований штампов описываются функциями $g_i(r)$.

В результате такого взаимодействия штампы погружаются в основание на величины $\delta_i(t)$.

Можно показать [1], что для описанного случая система интегральных уравнений и дополнительных условий, связывающие основные характеристики контактной задачи, принимают вид ($i = 1, 2, \dots, n, t \geq \tau_0$):

$$\begin{aligned} (1 - \nu_1^2)h \left[\frac{q_i(r, t)}{E_1(t - \tau_1)} - \int_{\tau_0}^t \frac{q_i(r, \tau)}{E_1(\tau - \tau_1)} K_1(t - \tau_1, \tau - \tau_1) d\tau \right] + \\ + \frac{2(1 - \nu_2^2)}{H} \sum_{j=1}^n \left[\int_{a_j}^{b_j} k_{ax} \left(\frac{r}{H}, \frac{\rho}{H} \right) \frac{q_j(\rho, t)}{E_2(t - \tau_2)} \rho d\rho - \right. \\ \left. - \int_{\tau_0}^t K_2(t - \tau_2, \tau - \tau_2) \int_{a_j}^{b_j} k \left(\frac{r}{H}, \frac{\rho}{H} \right) \frac{q_j(\rho, \tau)}{E_2(\tau - \tau_2)} \rho d\rho d\tau \right] = \delta_i(t) - g_i(r), \quad r \in [a_i, b_i], \\ 2\pi \int_{a_i}^{b_i} q_i(\rho, t) \rho d\rho = P_i(t), \quad K_k(t, \tau) = E_k(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E_k(\tau)} + C_k(t, \tau) \right]. \end{aligned}$$

Здесь введены следующие обозначения: $q_i(r, t)$ – контактные давления под штампом i -м штампом, ν_k , $K_k(t, \tau)$, $C_k(t, \tau)$ – коэффициенты Пуассона, ядра ползучести и меры ползучести покрытия ($k = 1$) и нижнего слоя ($k = 2$), $k_{ax}(r, \rho)$ – ядро осесимметричной контактной задачи, определяемое формулой

$$k_{ax}(r, \rho) = \int_0^{+\infty} L(u) J_0(ru) J_0(\rho u) du,$$

где $L(u) = [\text{ch}(2u) - 1] / [\text{sh}(2u) + 2u]$, $J_0(s)$ – функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Специальной заменой переменных такую систему уравнений можно привести к одному операторному уравнению с единственным векторным дополнительным условием:

$$c(t)(\mathbf{I} - \mathbf{V}_1)\mathbf{q}(r, t) + (\mathbf{I} - \mathbf{V}_2)\mathbf{G}\mathbf{q}(r, t) = \delta(t) - \mathbf{g}(r),$$

$$\int_0^1 \mathbf{q}(\rho, t) \rho d\rho = \mathbf{P}(t), \quad \rho \in [0, 1], \quad t \geq 1, \tag{1}$$

где введены обозначения:

$$\mathbf{q}(r, t) = q^i(r, t) \mathbf{i}^i, \quad \mathbf{P}(t) = P^i(t) \mathbf{i}^i, \quad \boldsymbol{\delta}(t) = \delta^i(t) \mathbf{i}^i, \quad \mathbf{g}(r) = g^i(r) \mathbf{i}^i,$$

$$\mathbf{k}(r, \rho) = k^{ij}(r, \rho) \mathbf{i}^i \mathbf{i}^j, \quad \mathbf{Gf}(x) = \int_0^1 \mathbf{k}(r, \rho) \cdot \mathbf{f}(\rho) \rho d\rho,$$

а функции, $q^i(r, t)$, $P^i(t)$, $\delta^i(t)$, $g^i(r)$, $k^{ij}(r, \rho)$ – безразмерные функции, связанные с контактными давлениями, действующими силами, осадками штампов, их формами и ядром интегрального уравнения. Нетрудно показать, что для осесимметричной задачи множественного контакта существует 3 возможных варианта постановки задачи. Подход к решению всех вариантов одинаков. Вектор-функция $\mathbf{q}(r, t)$ ищется в виде суммы двух слагаемых

$$\mathbf{q}(r, t) = \mathbf{Q}(r, t) - \mathbf{g}(r)(\mathbf{I} - \mathbf{V}_1)^{-1} \frac{1}{c(t)}$$

где $\mathbf{Q}(r, t)$ – новая неизвестная функция, подлежащая определению. Тогда операторное уравнение и дополнительное условие принимают вид

$$c(t)(\mathbf{I} - \mathbf{V}_1)\mathbf{Q}(r, t) + (\mathbf{I} - \mathbf{V}_2)\mathbf{GQ}(r, t) = \boldsymbol{\delta}(t) + \tilde{c}(t)\tilde{\mathbf{g}}(r), \quad \int_0^1 \mathbf{Q}(\rho, t) \rho d\rho = \tilde{\mathbf{P}}(t), \quad r \in [0, 1], \quad t \geq 1,$$

$$\tilde{c}(t) = (\mathbf{I} - \mathbf{V}_2)(\mathbf{I} - \mathbf{V}_1)^{-1} \frac{1}{c(t)}, \quad \tilde{\mathbf{g}}(r) = \int_0^1 k^{ij}(r, \rho) g^j(\rho) \rho d\rho \mathbf{i}^i, \quad \tilde{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{P}(t) + (\mathbf{I} - \mathbf{V}_1)^{-1} \int_0^1 \frac{\mathbf{g}(\rho) \rho d\rho}{c(t)}.$$

Аналитическое решение такого уравнения в любой из постановок строится при помощи развития обобщенного проекционного метода Манжирова [2]. Окончательное выражение для контактных давлений имеет вид:

$$\mathbf{q}(r, t) = z_0^i(t) \mathbf{p}_0^i(r) + \sum_{k=1}^{\infty} z_k(t) \sum_{m=1}^{\infty} \Psi_{km}^i \mathbf{p}_m^i(r) - \mathbf{g}(r)(\mathbf{I} - \mathbf{V}_1)^{-1} \frac{1}{c(t)},$$

то есть в решении в явном виде выделена функция $\mathbf{g}(r)$, которая связана с быстро изменяющимися формами оснований штампов. Это позволяет для достижения высокой точности приближения решения ограничиться небольшим числом членов его разложения даже в случае быстро изменяющейся $\mathbf{g}(r)$.

Авторы выражают благодарность А.В. Манжирову за постановку задачи, полезные обсуждения и ценные советы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Москвы (проекты №15-31-70002 мол_а_мос, 16-31-00320 мол_а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В. Контактные задачи теории ползучести. Ереван: Изд-во НАН РА, 1999. 320 с.
2. Манжиров А.В. Смешанное интегральное уравнение механики и обобщенный проекционный метод его решения // Докл. РАН. 2016. Т.470. № 4. С.401–405.

Сведения об авторах:

Казakov Кирилл Евгеньевич – научный сотрудник лаборатории моделирования в механике деформируемого твёрдого тела Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН; доцент кафедры прикладной математики Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана

E-mail: kazakov-ke@yandex.ru

Курдина Светлана Павловна – старший преподаватель кафедры прикладной математики Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана

E-mail: svetlana-ka@yandex.ru

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЛОКАЛИЗОВАННОЙ ЭЛЕКТРОУПРУГОЙ СДВИГОВОЙ ВОЛНЫ В СОСТАВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ С ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ТРЕЩИНОЙ

Казарян А.А.

Аннотация. Рассматривается дифракция локализованной (поверхностной) электроупругой волны сдвига на полубесконечной трещине между полупространствами, и задача сводится к решению задачи типа Римана в теории аналитических функций. Наличие трещины приводит к распространению, как объёмных дифрагированных сдвиговых волн, так и электроупругих поверхностных волн сдвига в пьезоэлектрическом полупространстве.

Электроупругая среда, отнесённая к декартовой системе координат $Oxyz$, состоит из двух диэлектрических полупространств, одно из которых $y > 0$ обладает свойством пьезоэффекта–пьезоэлектрик гексагональной симметрии класса $6mm$ с совпадающей с осью Oz главной осью кристалла. Диэлектрическое упругое полупространство $y < 0$ и пьезоэлектрическое полупространство скреплены по плоскости $y = 0, -\infty < z < \infty, x > 0$, т.е. считаем, что здесь между полупространствами осуществляется акустический контакт–полный электромеханический контакт. В плоскости контакта Oxz при $x < 0$ между диэлектрическими полупространствами имеет место только непрерывность электрических характеристик–потенциалов и составляющих векторов электрических индукций, т.е. в плоскости контакта имеется полубесконечная трещина при $x < 0$. Из бесконечности $x > 0$ распространяется обусловленная наличием пьезоэффекта, сдвиговая интерфейсная (локализованная у плоскости $y = 0$) электроупругая волна со скоростью ω/σ_3 , где ω –частота колебаний, а σ_3 –единственный положительный корень уравнения

$$c_{44}(1+\chi)\sqrt{\sigma^2 - k^2} - \frac{c_{44}\varepsilon_0\chi}{\varepsilon_0 + \varepsilon_{11}}|\sigma| + c_{44}^{(1)}\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} = 0,$$

где $k = \omega/c$, $c = \sqrt{c_{44}(1+\chi)/\rho}$ – скорость распространения сдвиговой электроупругой волны, $\chi = e_{15}^2/\varepsilon_{11}c_{44}$ – коэффициент электромеханической связи пьезоэлектрической среды, $c_{44}, e_{15}, \varepsilon_{11}, \rho$ –упругая, пьезоэлектрическая, диэлектрическая постоянные и плотность среды, занимающей полупространство $y > 0$. Характеристики диэлектрического полупространства $y < 0$ имеют вид $k_1 = \omega/c_1$, $c_1 = \sqrt{c_{44}^{(1)}/\rho_1}$, $c_{44}^{(1)}$ – упругая постоянная сдвига, ε_0 – диэлектрическая постоянная, ρ_1 –плотность.

Принимается, что

$$\sqrt{1 - \frac{k_1^2}{k^2}} < \frac{c_{44}}{c_{44}^{(1)}} \frac{\varepsilon_0\chi}{\varepsilon_0 + \varepsilon_{11}}, \quad \text{если } k > k_1, (\sigma_3 > k),$$

$$\sqrt{1 - \frac{k^2}{k_1^2}} < \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0 + \varepsilon_{11}} \frac{\chi}{1 + \chi}, \quad \text{если } k < k_1, (\sigma_3 > k_1).$$

Рассматривается задача дифракции распространяющейся локализованной сдвиговой волны, обусловленная наличием полубесконечной трещины в составной среде пьезоэлектрик–диэлектрик. Ставится задача определения составляющих электроупругого волнового поля, как для пьезоэлектрического полупространства, так и для упругого диэлектрического. Задача решается в антиплоской постановке.

Для определения функций амплитуд перемещения и электрического потенциала в полупространствах решаются следующие уравнения:

$$\begin{aligned}\Delta w + k^2 w &= 0, \\ \varepsilon_{11} \Delta \Phi + e_{15} k^2 w &= 0, \\ \Delta w_1 + k_1^2 w_1 &= 0, \\ \Delta \Phi_1 &= 0,\end{aligned}\quad \begin{aligned}y &> 0, \\ y &< 0.\end{aligned}$$

Поставленная задача определения дифрагированного электроупругого волнового поля в составном пространстве пьезоэлектрик–диэлектрик сведена к решению функционального уравнения типа Римана на действительной оси. Показано, что дифракция волны приводит к тому, что кроме дифрагированных объёмных волн, в составном полупространстве $x > 0$ возбуждается локализованная электроупругая волна, распространяющаяся по x к $+\infty$ со скоростью падающей волны ω/σ_3 , а в пьезоэлектрической среде $x < 0$, $y > 0$ распространяется поверхностная волна типа Гуляева–Блюстейна с волновым числом σ_1 , когда пьезоэлектрик без акустического контакта граничит с диэлектрической средой

$$\frac{k}{\sigma_1} = \sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon_0 \chi}{(\varepsilon_0 + \varepsilon_{11})(1 + \chi)} \right)^2}, \quad \sigma_1 > \sigma_3.$$

Скорость распространения этой волны меньше, чем скорость падающей.

Получены асимптотические представления перемещений в полупространствах. Различные физико-механические свойства контактирующих сред приводят к существенным изменениям волнового поля, выявлены особенности волнового процесса при дифракции локализованной электроупругой волны сдвига.

ЛИТЕРАТУРА

1. Балакирев М.К., Гишинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука, 1982. 242с.
2. Григорян Э.Х., Джилаван С.А., Казарян А.А. Дифракция сдвиговой плоской волны на полубесконечной трещине в пространстве пьезоэлектрик-диэлектрик.// Труды VII межд. конф., “Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред”. Ереван: 2011. С.137-143.
3. Григорян Э.Х., Джилаван С.А. Дифракция плоской сдвиговой волны на полубесконечной трещине в пьезоэлектрическом пространстве.// Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т.58. № 1. С. 38-50.
4. Джилаван С.А., Казарян А.А. Дифракция плоской сдвиговой волны в пьезоэлектрическом полупространстве при полубесконечном металлическом слое в диэлектрике. //Изв. НАН Армении. Механика. 2015. Т.68. № 1. С.45-57.
5. Григорян Э.Х., Агаян К.Л., Джилаван С.А., Казарян А.А. Дифракция поверхностной электроупругой волны сдвига на полубесконечной трещине в составном пространстве.// Труды IV межд. конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды». Ереван: 2015. С.157-1613.
6. Казарян А.А. Дифракция поверхностной волны сдвига в пространстве пьезоэлектрик–диэлектрик при полубесконечном металлическом слое в диэлектрике.// Труды VIII межд. конференции «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред». Ереван: 2014. С.232-236.

Сведения об авторе:

Казарян Айказ Арменович – кандидат физ.-мат.наук, научный сотр. Института механики НАН Армении.

E-mail: haykazghazaryan@gmail.com. **Тел.:** (+374 96) 00-96-06.

О ВОЗМОЖНОСТИ ПОЛУЧЕНИЯ ЦЕМЕНТОГРУНТНЫХ КОМПОЗИТОВ ПОВЫШЕННОЙ ПРОЧНОСТИ НА ОСНОВЕ БЕЛОЗЕМОВ КАРБОНАТНОГО СОСТАВА

Карапетян К.А., Айроян С.Г., Манукян Е.С.

Аннотация. Рассматривается вопрос получения цементогрунта на основе белозема карбонатного состава, пригодного для эксплуатации в сравнительно мало нагруженных частях строительных сооружений (например, фундаменты различных видов).

Экспериментально подтверждено, что получение на основе белоземов карбонатного состава цементогрунта, содержащегося 10% портландцемента марки 400 от массы сухой смеси, и обладающего прочностью более чем 10 МПа, реально.

Вводная часть. Под названием белозем понимается сильно карбонатизированные, часто загипсованные, суфозионно-неустойчивые, просадочные, легкие пылевато-песчаные суглинки и тяжелые пылевато-песчаные супеси [1]. Недоуплотненные белоземы, на территории распространения которых планируется осуществить строительные работы, требуют искусственного закрепления, т.е. повышения их физической, в том числе и суфозионной, устойчивости и механической прочности.

Целью настоящей работы является разработка составов цементогрунтных композитов повышенной прочности (не менее 10 МПа [2]) на основе белозема, не используя, при этом, каких либо пластификаторов.

Экспериментальная часть. В качестве исходных ингредиентов были использованы: белозем, взятый с участков, соседствующих территорий Института физики, находящегося в жилом районе Ачапняк г. Еревана; портландцемент марки 400, производимый Араратским цементным заводом (Республика Армения) и обычная трубопроводная вода.

Имея ввиду, что одним из основных этапов процесса разработки композитных материалов, в том числе и цементогрунтов, является проведение определенных анализов основных ингредиентов, нами были осуществлены химический и минерелографический анализы белозема, а также портландцемента.

В разработанных нами составах цементогрунтных композитов количество употребленного цемента составило 5; 6; 8 и 10% от массы сухой смеси. Опытные цилиндрические образцы с диаметром 5,0 см и высотой 20,0 см, полученные из цементогрунтных смесей способом прямого прессования, освобождались из форм через 14 сут. после изготовления. В дальнейшем, до момента проведения испытаний в возрасте 28 сут. и 60 сут., образцы находились в лабораторном помещении при средней температуре 23°C и относительной влажности 57%.

Обсуждение полученных результатов. Согласно данным проведенных анализов отметим, что компонент SiO_2 , содержащийся в белоземе, обладает свойством, способствующим процессу бетонообразованию в цементогрунте, а компонент CaO может способствовать бетонообразованию и нарастанию прочности цементогрунта за счет карбонизации.

В результате анализа соляного состава было выявлено, что содержание среднерастворимых слоев в белоземе отсутствует, а количество легкорастворимых и труднорастворимых солей (CaO_3) составляет соответственно 20,02% и 20,3% по массе.

На основе сравнительного анализа результатов проведенных исследований было выявлено следующие закономерности:

- значение средней плотности цементогрунта ($1680\text{--}1730\text{ кг/м}^3$), содержащегося в составе одного и того же количества портландцемента, мало зависит от возраста материала;
- прибавление количества портландцемента приводит к нарастанию, с существенно затухающей скоростью, прочности при сжатии опытных цилиндрических образцов;
- при одном и том же количестве употребленного в составе цементогрунта портландцемента значение отношения прочностей опытных образцов, испытанных в возрасте 60 сут. и 28 сут., одно и то же – примерно 1,2.
- в течение 3-х недель нахождения в водной среде у цементогрунтных пробных образцов с различным содержанием портландцемента каких либо признаков размокания не наблюдалось.

Заключение. Для получения цементогрунта с прочностью не менее 10 МПа и расходом цемента не более 12% от массы сухой смеси, пригодного для эксплуатации в сравнительно мало нагруженных частях строительных сооружений (например, фундаменты различных видов), в состав материала, обычно, вводят пластификаторы [2]. При этом установление класса прочности на сжатие цементогрунта допускается производить на образцах–цилиндрах с диаметром и высотой 5,0см, с переходом по отношению к стандартному кубику размерами 15,0х15,0х15,0см соответствующим переходным коэффициентом [2].

Изготовленные нами на основе белозема цементогрунтные образцы (содержание цемента в материале составляет 10% от массы сухой смеси или 160 кг в 1м³) с диаметром 5,0см и высотой 20,0см в возрасте 28 сут. приобретают прочность на сжатие 8,5МПа.

Учитывая отмеченную выше рекомендацию относительно размеров опытных цилиндрических образцов, применением которых устанавливается класс прочности на сжатие цементогрунтов, а также экспериментально установленную закономерность [3] изменения прочности на сжатие опытных бетонных образцов в зависимости от отношения их высоты к размерам поперечного сечения, можно утверждать:

получение на основе белоземов карбонатного состава цементогрунта, содержащегося 10% цемента от массы сухой смеси и, обладающего прочностью более чем 10МПа, без добавления в состав материала каких-либо пластификаторов, представляется реальным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бальян А.С., Айрапетян Т.А. О происхождении и палеографическом развитии белозема Армении// Уч.запис. ЕГУ. 1. 1979. С.103-112.
2. Рамзанов А.А., Бадаева А.Д., Ланин Е.Б., Алнашаш Т.А. Грунтобетон в закладке фундамента// Строительство уникальных зданий и сооружений. 2015. №3. С.111-128
3. Карапетян К.С. Влияние анизотропии на ползучесть бетона при сжатии в зависимости от высоты опытного образца // Докл. АН Арм.ССР. 1965. Т.XL. №5. С.279-283.

Сведения об авторе:

Карапетян Корьюн Ашотович, д.т.н. Зав. Лабораторией. Институт механики НАН РА

Тел.: (374 10) 52 48 52. (374 91) 181 097

E-mail: koryan@mechins.sci.am

Айроян Саргис Грачикович, д.г.н. Зав. кафедрой. ЕГУ

Тел.: (374 93) 226 210

E-mail: hairoyan@ysu.am

Манукян Егише Самвелович, н.с. Институт механики НАН РА

Тел.: (374 99) 500 755.

ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА БЕСКОНЕЧНОГО ПОЛОГО ЦИЛИНДРА ПРОИЗВОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ С ТУННЕЛЬНОЙ ТРЕЩИНОЙ

Кириллова О.И., Попов В.Г.

Аннотация. Предложен эффективный аналитико-численный метод определения динамических напряжений в полом цилиндрическом теле произвольного сечения со сквозной трещиной, которое находится в условиях антиплоской деформации. Метод позволяет решать отдельно интегральные уравнения на дефекте и отдельно удовлетворять условиям на границе тела, облегчая этим численную реализацию. Получены приближённые формулы для вычисления коэффициентов интенсивности напряжений в окрестности трещины и исследовано влияние на них геометрических параметров трещины и частоты колебаний, в частности, с установлением резонансных частот.

1. Рассматривается бесконечный полый цилиндр с образующими, параллельными оси Oz , сечением которого плоскостью xOy является двусвязная область, ограниченная произвольными замкнутыми гладкими кривыми. В полярной системе координат эти кривые определяются следующими уравнениями: $r_0 = r_0(\varphi)$ – внешняя и $r_1 = r_1(\varphi)$ – внутренняя границы сечения, $0 \leq \varphi < 2\pi$. В цилиндре содержится сквозная трещина длиной $2a$, не выходящая за границы сечения. Вследствие действия на внешнюю поверхность цилиндра осциллирующей нагрузки $P(\varphi)e^{-i\omega t}$, направленной вдоль оси Oz , в последнем происходят колебания продольного сдвига. Множитель $e^{-i\omega t}$ далее опущен и рассматриваются только амплитудные значения. При таких условиях цилиндр находится в состоянии антиплоской деформации, когда отличной от нуля будет только z -компонента вектора перемещения w . Она удовлетворяет уравнению Гельмгольца, которое в полярной системе координат имеет вид:

$$\Delta w + \kappa_2^2 w = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad (0.1)$$

где $\kappa_2^2 = \omega^2 c_2^{-2}$, $c_2^2 = G\rho^{-1}$; G, ρ – модуль сдвига и плотность материала цилиндра.

При условии действия нагрузки на внешнюю границу цилиндра на ней выполняется равенство:

$$\tau_{\bar{n}z}(r_0(\varphi), \varphi) = GP(\varphi), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad (0.2)$$

$\bar{n}$ – вектор нормали к поверхности.

Внутренняя граница цилиндра считается неподвижной:

$$w(r_1(\varphi), \varphi) = 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \quad (0.3)$$

Для формулирования условий на трещине с ней связывается локальная система координат $x_1 O_1 y_1$. Пусть $w_1^{(1)}(x_1, y_1)$ – z -компонента вектора перемещений при переходе от полярной к локальной декартовой системе координат. Поверхность трещины считается свободной от напряжений:

$$\tau_{zy_1}(x_1, 0) = 0, \quad |x_1| < a. \quad (0.4)$$

Также на поверхности трещины разрывно перемещение $w_1^{(1)}(x_1, y_1)$, скачок которого

$$w_1^{(1)}(x_1, +0) - w_1^{(1)}(x_1, -0) = \chi(x_1), \quad \chi(\pm a) = 0. \quad (0.5)$$

При таких условиях ставится задача определения КИН и исследования напряжённого состояния в полом цилиндре.

Для решения задачи предложен подход, позволяющий отдельно удовлетворить условия (1.4)-(1.5) на берегах трещины и на внешней и внутренней границах цилиндра. Он состоит в том, что неизвестное перемещение представлено в виде суммы разрывного решения уравнения

Гельмгольца (1.1), построенного для трещины, и некоторой неизвестной функции $w_0(r, \varphi)$, за счёт которой удовлетворяются условия (1.2), (1.3) на поверхностях цилиндра.

Эта новая неизвестная функция разыскивается в виде линейной комбинации частных решений уравнения Гельмгольца (1.1):

$$w_0(r, \varphi) = r_0 \sum_{k=1}^N (A_k g_k(r, \varphi) + B_k h_k(r, \varphi)), \quad (0.6)$$

$$g_{2m-1}(r, \varphi) = J_{m-1}(\kappa_2 r) \cos(m-1)\varphi, \quad g_{2m}(r, \varphi) = J_m(\kappa_2 r) \sin m\varphi,$$

$$h_{2m-1}(r, \varphi) = H_{m-1}(\kappa_2 r) \cos(m-1)\varphi, \quad h_{2m}(r, \varphi) = H_m(\kappa_2 r) \sin m\varphi,$$

$J_m, H_m^{(1)}$ – цилиндрические функции.

В результате, задача сводится к решению последовательности интегро-дифференциальных уравнений на трещине, которые отличаются только правыми частями. Их приближённое решение строится методом механических квадратур.

После этого удовлетворяются условия на границах цилиндра, из которых методом коллокации определяются неизвестные коэффициенты A_k, B_k , введённых в (1.6) функций.

Получены приближённые формулы для расчёта КИН, с помощью которых исследовано влияние на них значение частоты колебаний, геометрических размеров цилиндра и расположения трещины в нём. К примеру, установлено, что угол наклона трещины существенно влияет на значения КИН в дорезонансной зоне и на значение частоты достижения первого резонанса. Так, при значениях $\alpha = 0^0$ и $\alpha = 90^0$ частота достижения первого резонанса значительно превышает ту, в которой наблюдается резонанс при $0^0 < \alpha < 90^0$. Также установлено увеличение значений КИН при приближении трещины к границе цилиндра.

Information about authors:

Popov Vsevolod – doctor sciences, professor, National University «Odesa Maritime Academy», higher mathematics department (+38048) 733-23-12, (+38067) 480-65-57

E-mail: dr.vg.popov@gmail.com, vs_popov@muth.onma.edu.ua

Kyrylova Olga – National University «Odesa Maritime Academy», higher mathematics department (+38048) 733- 23-12, (+38098) 239-73-78

E-mail: olga.i.kyrylova@gmail.com

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЯЗКИХ ТЕЧЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ВИХРЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Коцур О.С.

Аннотация. Рассматривается метод вихревых элементов (МВЭ), предназначенный для моделирования течений несжимаемой жидкости с учётом вязкости. Приводятся две модели вязкости в МВЭ: метод обмена интенсивностями (PSE) и комбинированный с PSE метод диффузионных скоростей (DVM). Приводится пример расчёта модельной задачи диффузии прямолинейной вихревой трубки в вязкой жидкости по методике PSE, результаты сравниваются с известным аналитическим решением.

Метод вихревых элементов (МВЭ) представляет альтернативу сеточным вычислительным методам гидродинамики в классе задач в несжимаемой постановке. Особенностью МВЭ является представление поля завихренности течения в виде суперпозиции базисных функций – вихревых элементов (ВЭ). МВЭ для невязких задач не требует сетки и поэтому представляется более эффективным для решения задач с подвижными границами (Fluid-Structure Interaction, FSI), чем известные сеточные методы, такие как метод контрольного объёма.

МВЭ можно рассматривать как обобщение метода частиц на уравнения движения несжимаемой жидкости, записанные в терминах завихренности

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{V} = 0; \\ \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \nu \Delta \boldsymbol{\omega} \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$, $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{V}$ – поля скорости и завихренности, соответственно.

В невязкой постановке метод подробно исследован и успешно применяется в ряде задач с подвижными границами с большим числом Рейнольдса [1,2]. Наибольшую сложность представляет аппроксимация диффузионного члена $\nu \Delta \boldsymbol{\omega}$, отвечающего за вязкость.

Попытки учесть вязкость привели к возникновению ряда подходов, таких как алгоритм расщепления (splitting), метод случайных блужданий и др. [1]. В данной работе рассматривается два подхода: метод обмена интенсивностями (Particle Strength Exchange, PSE) и гибридный метод диффузионных скоростей (Diffusion Velocity Method, DVM) в комбинации с PSE (DVM-PSE).

PSE строится на основании аппроксимации диффузионного члена $\nu \Delta \boldsymbol{\omega}$ с помощью интегрального оператора следующего вида:

$$\mathcal{Q}^\varepsilon(\boldsymbol{\omega}) = \frac{\nu}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R}^3} \eta_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y}) (\boldsymbol{\omega}(\mathbf{y}, t) - \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{y},$$

где $\eta_\varepsilon(\mathbf{x})$ – сглаживающая функция, удовлетворяющая определённым моментным условиям [3], ε – сглаживающий параметр. Условия и порядок сходимости в зависимости от ε и вида функции $\eta_\varepsilon(\mathbf{x})$ также приведены в работе [3].

Интегральное представление члена $\nu \Delta \boldsymbol{\omega}$ оказывается удобным для дальнейшего применения МВЭ, в котором в качестве базисной функции рассматривается модель вортон-отрезка [4]

$$\boldsymbol{\omega}_k(\mathbf{x}, t) = \gamma_k(t) \int_{-1}^1 \delta(\mathbf{x} - (\mathbf{x}_k(t) + s \mathbf{h}_k(t))) ds$$

$\gamma_k(t)$ – векторный потенциал, определяющий ориентацию и интенсивность k -го ВЭ, $\mathbf{x}_k$ – маркер центра, $\mathbf{h}_k$ – вектор-отрезок ВЭ, который в процессе движения может менять свою длину и направление, $\delta(\mathbf{x})$ – дельта-функция, заданная в трёхмерном пространстве.

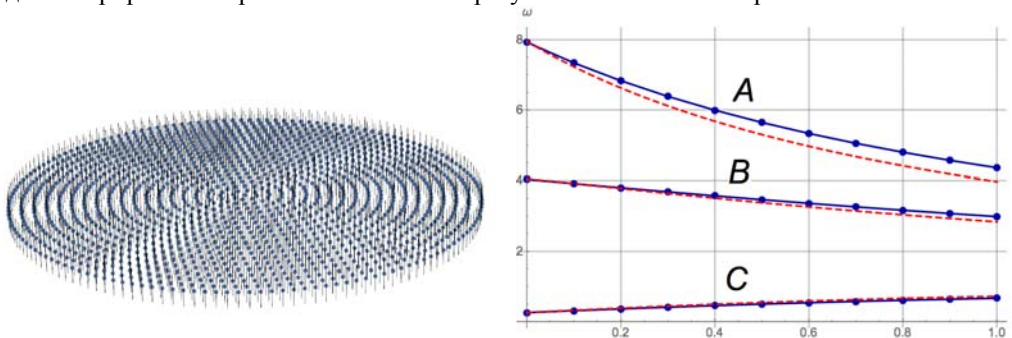
Замена $\nu \Delta \boldsymbol{\omega}$ в (1) на оператор $\mathcal{Q}^\varepsilon(\boldsymbol{\omega})$ и последующая постановка суперпозиции полей $\boldsymbol{\omega}_k(\mathbf{x}, t)$ позволяет перейти от непрерывных уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно параметров $\mathbf{x}_k$, $\mathbf{h}_k$ и γ_k для каждого ВЭ, более удобной для численного решения.

Методика DVM основана на представлении диффузионного оператора вида $\nabla \cdot (\nu \nabla \phi)$ в конвективной форме $\nabla \cdot (-\mathbf{V}_d \phi)$ с помощью т.н. диффузионной скорости (скорости Фридмана) $\mathbf{V}_d$ [5]. Считая, что жидкие частицы перемещаются по полю $\mathbf{V} + \mathbf{V}_d$ (вместо $\mathbf{V}$), можно показать, что переносимая ими физическая величина ϕ остаётся неизменной. Такой подход более предпочтителен с точки зрения численных расчётов, чем PSE.

Реализация подобной идеи в МВЭ возможна лишь в двумерной, либо в осесимметричной постановках, поскольку в трёхмерном случае представить тензор $\nu \Delta \boldsymbol{\omega}$ в конвективной форме невозможно. В работе [6] предлагается идея о представлении диффузионного оператора $\nu \Delta \boldsymbol{\omega}$ в виде суммы тензора $\nabla \cdot (-\mathbf{V}_d \phi)$, представимого в конвективной форме с некоторой диффузионной скоростью $\mathbf{V}_d$, и остатка вида $\nabla \cdot \hat{\mathbf{B}}$ так, что $\hat{\mathbf{B}} = \nu \nabla \boldsymbol{\omega} + \mathbf{V}_d \phi$.

В работе [6] получены виды обоих тензоров из расчёта выделения «доминирующей» DVM-части с использованием метода наименьших квадратов, и остатка $\nabla \cdot \hat{\mathbf{B}}$, который аппроксимируется с использованием PSE. Такая модель также позволяет перейти от уравнений (1) к системе ОДУ относительно параметров ВЭ, которую также можно решать численно.

В дальнейшем планируется верификация обеих методов с помощью серии тестовых расчётов динамики бесконечно длинной прямолинейной вихревой трубки и вихревых колец в вязкой жидкости. Для данных задач существует аналитическое решение, с которым возможно сравнение расчёта. В качестве примера для проверки правильности аппроксимации вязкого члена по методу PSE приводится задача о диффузии бесконечной прямолинейной вихревой трубки в вязкой жидкости. На рисунках показан один слой из 1521 ВЭ, моделирующих сечение трубки радиуса 0.8, а также представлен график затухания завихренности в месте расположения ВЭ A (центральный, $r_A = 0$), B ($r_B = 0.164$) и C ($r_C = 0.396$). Сплошная линия – численный расчёт, штриховая – аналитический расчёт. На данном этапе продемонстрировано хорошее согласование результатов численного расчёта с аналитическим.



ЛИТЕРАТУРА

1. Cottet G.H., Koumoutsakos P.D. Vortex methods: theory and practice. Cambr.: CUP, 2000. 326 p.
2. Ермаков А.В., Марчевский И.К., Щеглов Г.А. Численное моделирование вынужденных колебаний стержня в пространственном потоке // Вестник Пермского нац. иссл. политех. ун-та. Аэрокосмическая техника. 2014. № 4 (39). С. 50-63.
3. Degond P., Mas-Gallic S. The Weighted Particle Method for Convection-Diffusion Equations. Part 1: The Case of an Isotropic Viscosity // Mathematics of Computation. Oct. 1989. Vol. 53(188). P. 485-507.
4. Марчевский И.К., Щеглов Г.А. Модель симметричного вихревого кольца для численного моделирования пространственных течений идеальной несжимаемой среды // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. 2008. № 4. С. 62–71.
5. Lacombe G., Mas-Gallic S. Presentation and Analysis of a Diffusion-Velocity Method // ESAIM: Proc. 1999. Vol. 7. P. 225–233.
6. Mycek P., Pinon G., Germain G. Formulation and analysis of a diffusion-velocity particle model for transport-dispersion equations // Computational and Applied Mathematics. July 2016. Vol. 35(2). P. 447-473.

Сведения об авторах:

Коцур Олег Сергеевич – аспирант, Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана, +7(499)263-63-10, **E-mail:** oskotsur@gmail.com

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМАЦИИ И РАЗРУШЕНИЯ СЛОЖНЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ ПРИ УДАРНОЙ НАГРУЗКЕ

Краус Е.И., Шабалин И.И., Шабалин Т.И.

Аннотация. Приведены основные составляющие численного инструмента моделирования процессов деформирования и разрушения твёрдых тел на примере сложного технического объекта – реактора ядерной энергетической установки для космических аппаратов. Выполнены расчёты ударного нагружения модельных реакторов, как при низких, так и высоких скоростях. Показано, что удар реактора о поверхность Земли, даже при невысокой скорости столкновения, приводит к нарушению герметичности реактора и радиоактивному заражению места его падения.

Для анализа процессов деформирования и разрушения сложных технических объектов при ударе необходим численный инструмент, позволяющий моделировать в реальном времени возможные сценарии их развития.

Программный комплекс предназначен для решения нестационарных задач деформирования и разрушения материалов при нагружении сложных технических объектов. В комплексе реализован континуально-дискретный подход, сочетающий лагранжевы координаты для сплошного материала и дискретные частицы конечного размера, моделирующие фрагменты разрушенного. Поведение материалов описывается упругопластической моделью с малопараметрическим, термодинамически полным, уравнением состояния. Разностные соотношения положены на треугольную сетку, которая строится динамическим способом в сложных, многосвязных расчётных областях. Все это позволяет моделировать процессы ударного нагружения сложных технических объектов до «конца», т.е. до полного завершения процессов поглощения кинетической энергии налетающего тела и/или разделения объекта на отдельные фрагменты.

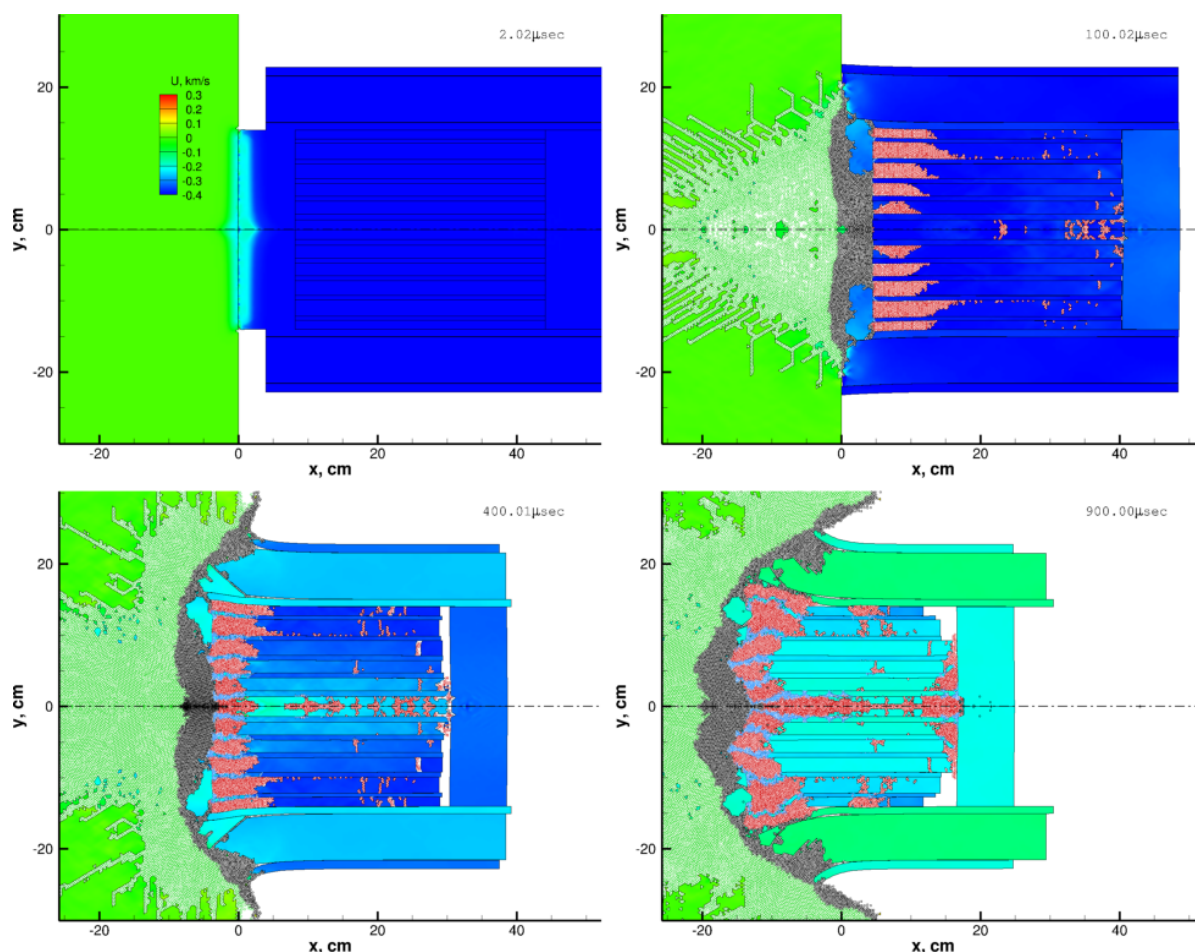


Рис.1. Кинограмма процесса столкновения 2D реактора с поверхностью из песчаника. Скорость взаимодействия 400 м/с.

В программном комплексе Reactor реализованы:

1. уравнения баланса массы, импульса и энергии [1];
2. задание начальных данных и постановка граничных условий [1, 6-9];
3. уравнения состояния и уравнения процесса [2-4];
4. критерии разрушения материалов, охватывающих различные механизмы разрушения [1, 6-9];
5. алгоритм замены ячеек, содержащих разрушенный материал, дискретными частицами конечного размера [1, 6-8];
6. автоматическое построение «правильной» разностной сетки внутри каждого объекта [5,6];
7. конечно-разностные соотношения, для уравнений баланса, на треугольной сетке [1];
8. симметричный алгоритм расчёта контактных границ [1, 7];
9. условия устойчивого счёта системы разностных уравнений [1,8];

Выводы:

1. Reactor 2D позволяет проводить моделирование процессов деформирования и разрушения сложных технических объектов в диапазоне скоростей от 50 м/с до 16 км/с.
2. Расчёты показывают, что высокоскоростной удар частиц космического мусора приводит к катастрофическому разрушению реактора.
3. Удар реактора о поверхность Земли при скоростях 400 м/с приводит к разгерметизации реактора (рис.1) и радиоактивному заражению места падения.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект №16-19-10300)

ЛИТЕРАТУРА

1. Фомин В.М., Гулидов А.И., Сапожников Г.А., Шабалин И.И. и др. Высокоскоростное взаимодействие тел. -Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. -600 с.
2. Fomin V.M., Kraus E.I., Shabalin I.I. An Equation of State for Condensed Matter behind Intense Shockwaves// Mater. Phys .Mech. 2004.–Vol.7.–No.1. –P. 23–28.
3. Kraus E. I., Shabalin I.I. A few-parameter equation of state of the condensed matter // Journal of Physics: Conference Series - 2016. -Vol.774. -P. 012009.
4. Kraus E.I., Shabalin I.I. Calculation of elastic modules behind strong shock wave // Journal of Physics: Conference Series, 2015-.Vol. 653 – 012085.
5. Краус Е.И., Фомин В.М., Шабалин И.И. Динамический метод построения треугольных сеток в многосвязных областях // Вычислительные технологии.–2009.–Т.14.–№5.–С. 40–48.
6. Механика — от дискретного к сплошному / Отв. ред. В.М. Фомин; Рос. акад. наук, Сиб. отд-ние, Ин-т теоретической и прикладной механики. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2008, 316 с.
7. Kraus E.I., Shabalin I.I. Impact loading of a space nuclear powerplant // Frattura ed Integrità Strutturale, 2013.– Vol.24.– P. 138-150.
8. Kraus E.I., Shabalin I.I. Reactor2D: A tool for simulation of shock deformation // AIP Conference Proceedings. -Vol.1770. 2016. -P. 030092.
9. Buzyurkin A.E., Gladky I.L., Kraus E.I. Determination and verification of Johnson-Cook model parameters at high-speed deformation of titanium alloys // Aerospace Science and Technology. – 2015. –Vol. 45. –P. 121-127.

Сведения об авторах:

Краус Евгений Иванович – зам. директора по науке, к.ф.-м.н., Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН (+7383) 3303880

E-mail: kraus@itam.nsc.ru

Шабалин Иван Иванович – старший научный сотрудник, к.ф.-м.н., Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН (+7383) 3303804

E-mail: shabalin@itam.nsc.ru

Шабалин Тимофей Иванович – младший научный сотрудник, Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН (+7383) 3303880

E-mail: shabalin.timofey@gmail.com

О ЗАЛЕЧИВАНИИ ПОВРЕЖДЁННОСТИ МЕТАЛЛА ИМПУЛЬСАМИ ТОКА ВЫСОКОЙ ПЛОТНОСТИ

Кукуджанов К.В., Левитин А.Л.

Аннотация. Исследуются процессы трансформации дефектов типа межзеренных микротрещин, протекающие в материале при обработке металлических образцов импульсным высокоэнергетическим электромагнитным полем. Исследование осуществляется численно на основе связанной модели воздействия полем на предварительно повреждённый термоупругопластический материал с дефектами. Моделирование показало, что под действием импульсов тока происходит сварка берегов трещины и залечивание микродефектов. Для макроскопического описания процессов залечивания вводятся параметры залеченности и повреждённости материала. Залечивание микротрещин приводит к увеличению залеченности материала и уменьшению его повреждённости. Расположение микротрещин друг относительно друга, расстояние между ними, их форма и ориентация практически не влияет на изменения залеченности и повреждённости материала во времени при воздействии на материал током. При одинаковой длине дефекта на эти изменения влияет лишь величина начальной повреждённости материала. Получены простые приближённые кусочно-линейные зависимости изменения повреждённости и залеченности от времени и начальной повреждённости.

При воздействии электромагнитным полем на проводник происходит концентрация поля на дефектах структуры материала. В частности, это инициирует протекание электрических, термических и механических процессов в окрестности микродефектов (пор, трещин, включений и т.п.).

Исследуются процессы трансформации и взаимодействия дефектов типа плоских межзеренных микротрещин с линейными размерами порядка 10 мкм, протекающие в материале при обработке металлических образцов импульсным высокоэнергетическим электромагнитным полем, вызывающим в материале короткий импульс электрического тока высокой плотности.

Исследование осуществляется численно на основе связанной модели воздействия интенсивным импульсным электромагнитным полем на предварительно повреждённый термоупругопластический материал с дефектами, которая учитывает плавление и испарение металла, а также зависимость всех его физико-механических свойств от температуры. Решение получающейся системы уравнений ищется методом конечных элементов на подвижных сетках с использованием смешанного эйлера-лагранжева метода.

Моделирование показало, что одновременное уменьшения длины, выброса расплавленного металла внутрь трещины и смыкание берегов приводит к тому, что берега трещины начинают контактировать со струей расплавленного материала, и в результате этих процессов струя оказывается полностью зажатой берегами трещины. Таким образом, под действием импульсов тока происходит сварка трещины и залечивание микродефектов. При этом объём микродефектов уменьшается во времени.

В настоящей работе для макроскопического описания процессов залечивания вводятся параметры залеченности и повреждённости материала. Параметр залеченности определяется как отношение изменения объёма микротрещины к начальному объёму микротрещины в конкретный момент времени при воздействия на материал электромагнитным полем. Под повреждёностью (пористостью) понимается отношение объёма микротрещины в конкретный момент времени к объёму представительного элемента. Залечивание микротрещин приводит к увеличению залеченности материала и уменьшению его повреждённости.

Исследуются процессы изменения залеченности и повреждённости материала от времени при воздействии на материал током. Рассматриваются вопросы о выборе предпочтительных областей интегрирования при моделировании рассматриваемых процессов. Изучается влияние расстояния между микротрещинами, их формы и взаимного расположения друг относительно друга на изменения залеченности и повреждённости материала во времени.

Моделирование рассматриваемых процессов во всем исследуемом диапазоне расстояний между дефектами (или, равносильно, при любой начальной повреждённости) показало, что зависимости залеченности и повреждённости от времени не будут различаться от того, вычисляем мы их в областях интегрирования, состоящих из одного или же нескольких представительных элементов.

Расположение микротрещин друг относительно друга, расстояние между ними, их форма и ориентация (в пределах углов $\pm 15^\circ$) практически не влияет на изменения залеченности и

повреждённости материала во времени при воздействии на материал током. При одинаковой длине дефекта на эти изменения влияет лишь величина начальной повреждённости материала.

На основе результатов моделирования получены приближённые кусочно-линейные зависимости изменения залеченности и повреждённости от времени и начальной повреждённости материала. Из данных зависимостей следует, что до определённого момента времени все микротрещины в материале (независимо от того, какой была начальная повреждённость материала) не залечиваются и повреждённость материала не меняется под действием тока. После этого момента времени стартует процесс залечиваться микротрещин. При этом под действием тока со временем повреждённость материала уменьшается во времени с постоянной скоростью (которая не зависит от начальной повреждённости), в то время как залеченность растёт со скоростью, которая обратно пропорциональна начальной повреждённости материала.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 15-08-08693).

ЛИТЕРАТУРА

1. Кукуджанов К.В. Моделирование воздействия высокоэнергетического импульсного электромагнитного поля на микротрещины в поликристаллическом металле // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2015. – № 4. – С. 138-158. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.4.09.
2. Кукуджанов К.В., Левитин А.Л. Процессы деформирования упругопластического материала с дефектами при электродинамическом нагружении // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2015. – № 1. – С. 106-120. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.1.07
3. Кукуджанов К.В. Левитин А.Л. О воздействии высокоэнергетического импульсного электромагнитного поля на микротрещины в упругопластическом проводящем материале // Проблемы прочности и пластичности. – 2015. – № 77. – С. 217-226.
4. Кукуджанов К.В., Левитин А.Л. Процессы трансформации и взаимодействия микротрещин в металле под воздействием высокоэнергетического импульсного электромагнитного поля // Вестник ПНИПУ. Механика. 2016. № 2. С. 89-110. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.2.07
5. Кукуджанов К.В. Процессы залечивания микротрещин в металле под действием импульсов тока высокой плотности // Проблемы прочности и пластичности. – 2016. – Т. 78. – № 3. – С. 300-310.
6. Kukudzhanov K.V., Levitin A.L. Modeling the Healing of Microcracks in Metal Stimulated by a Pulsed High-Energy Electromagnetic Field. Part I // Nanomechanics Science and Technology: An International Journal. 2015. Vol. 6. Issue 3. P. 233-249. DOI: 10.1615/NanomechanicsSciTechnolIntJ.v6.i3.60
7. Kukudzhanov K.V., Levitin A.L. Modeling the Healing of Microcracks in Metal Stimulated by a Pulsed High-Energy Electromagnetic Field. Part II // Nanomechanics Science and Technology: An International Journal. 2016. Vol. 7. Issue 2. P. 123-148. DOI: 10.1615/NanomechanicsSciTechnolIntJ.v7.i2.30

Информация об авторах:

Кукуджанов Константин Владимирович – к.ф.-м.н., старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, 119526, Москва, пр-т Вернадского д.101, корп.1., +7-495-434-14-67, +7-499-739-95-31

E-mail: kconstantin@mail.ru

Левитин Александр Леонидович – ведущий программист, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, 119526, Москва, пр-т Вернадского д.101, корп.1., +7-495-434-20-70

E-mail: alex_lev@ipmnet.ru

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТНОГО РОСТА

Манжиров А.В., Михин М.Н.

В работе исследуются двумерные задачи теории поверхностного роста деформируемых твёрдых тел и их приложения к анализу напряжённо-деформированного состояния изделий и конструкций аддитивного производства (additive manufacturing). Даются постановки задач, предлагается метод их решения, основанный на использовании подходов теории функций комплексного переменного.

Традиционные методы изготовления деталей сложной формы подразумевают разнообразные технологические процессы обработки, связанные со снятием материала – резка, фрезеровка, сверление и т.д. Альтернативный класс технологических процессов основан на синтезе деталей путём последовательного нанесения материала на подложку или поверхность произвольной формы. К таким технологиям относятся стереолитография, электролитическое осаждение, намотка, лазерная и термическая трёхмерные печати, производство трёхмерных электронных схем и ряд других.

В настоящее время технологии аддитивного изготовления изделий находятся в стадии интенсивного развития. Использование технологий аддитивного изготовления позволяет быстро и относительно дёшево создать пространственную деталь весьма сложной формы теоретически из любого материала. Однако, несмотря на возможность позиционирования элементов технологической установки с высокой точностью, отклонения геометрической формы изделия от проекта остаётся высокой, в первую очередь, в силу собственных деформаций изготавливаемого тела. С этими деформациями связаны остаточные напряжения, неминуемо возникающими в изделии при применении технологий аддитивного изготовления. Распределения остаточных напряжений и их величина могут вызывать и такие явления, как потеря устойчивости для тонкостенных изделий и разрушение для массивных тел, причём потеря устойчивости и разрушение могут произойти уже в процессе изготовления. Таким образом, разработка математических моделей и теоретических методов расчёта внутренних технологических напряжений и деформаций в современных сложных изделиях является актуальной научной проблемой как с точки зрения фундаментальных исследований, так и с точки зрения многочисленных приложений.

Фундаментальными вопросами поверхностного роста занимается механика растущих тел (см., напр., [1–3]).

В работе развита теория поверхностного роста для исследования двумерных задач аддитивного изготовления деформируемых тел в случае, когда скоростью деформирования поверхности тел за счёт нагрузок и натяга приращиваемых элементов можно пренебречь по сравнению со скоростью притока нового материала к этой поверхности.

Дана постановка возникающих классических и неклассических начально-краевых задач. Предложены методы решения таких задач, основанные на приведении неклассических задач наращивания вязкоупругих стареющих тел к задачам теории упругости с некоторым параметром, использовании теории аналитических функций для решения последних и восстановлении истинных характеристик напряжённо-деформированного состояния тел при помощи полученных формул расшифровки (см., напр., [4–8]).

Решение каждой конкретной задачи аддитивного изготовления деформируемых тел представляет собой самостоятельную и трудоёмкую проблему (см., напр., [9–12].) Однако, уже сейчас по виду полученных математических соотношений можно предсказать такие органические присущие растущим телам явления, как возникновение остаточных напряжений после снятия нагрузок, появление в аддитивно изготовленном теле поверхностей разрыва напряжений, зависимость напряжённо-деформированного состояния вязкоупругих тел от скорости и способа их аддитивного изготовления.

Установлено, что в двумерных задачах концентрации напряжений возле отверстий и кручения в готовом теле без учёта процесса аддитивного изготовления максимум интенсивности касательных напряжений достигается на границе тела. При аддитивном изготовлении максимум интенсивности касательных напряжений может достигаться на границе раздела основного тела и аддитивно изготовленной его части, на границе готового тела и в произвольной точке аддитивно изготовленной части тела.

Полученные результаты могут служить основой при решении прикладных задач расчета деталей и элементов конструкций, изготавливаемых при помощи технологий аддитивного производства.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-01-00712).

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н.Х., Манжиров А. В., Наумов В.Э. Контактные задачи механики растущих тел. М.: Наука, 1991. 176 с.
2. Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В. Контактные задачи теории ползучести. Ереван: Изд-во НАН РА, 1999. 320 с.
3. Manzhirrov A.V. The general non-inertial initial-boundary value problem for a viscoelastic ageing solid with piecewise-continuous accretion. //Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1995. Vol. 59. No. 5. PP. 805--816.
4. Manzhirrov A.V. Mechanics of growing solids: New track in mechanical engineering. /In ASME 2014 International Mechanical Engineering Congress and Exposition. Volume 9: Mechanics of Solids, Structures and Fluids. Montreal, Quebec, Canada, November 14--20, 2014. Paper No. IMECE2014-36712, pp. V009T12A039.
5. Manzhirrov A.V. Mechanical design of viscoelastic parts fabricated using additive manufacturing technologies. //Lecture Notes in Engineering and Computer Science: Proceedings of The World Congress on Engineering 2015, WCE 2015, 1–3 July, 2015, London, U.K. London: IAENG, 2015. PP. 710–714.
6. Manzhirrov A.V. A method for mechanical design of AM fabricated viscoelastic parts. In Transactions on Engineering Technologies, Singapore: Springer, 2016. PP. 223–235.
7. Арутюнян Н.Х., Абрамян Б.Л. Кручение упругих тел. М.: Физматгиз, 1963. 686 с.
8. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Изд-во АН СССР, 1954. 647 с.
9. Manzhirrov A.V., Lychev S.A. An approach to modeling of additive manufacturing technologies. In Transactions on Engineering Technologies: World Congress on Engineering 2014. Netherlands: Springer, 2015. PP. 99–115.
10. Manzhirrov A.V. Fundamentals of mechanical design and analysis for AM fabricated parts. //Procedia Manufacturing. 2016. Vol. 7. PP. 59-65.
11. Manzhirrov A.V. Advances in the theory of surface growth with applications to additive manufacturing technologies. //Procedia Engineering. 2017. Vol. 173. PP. 11–16.
12. Manzhirrov A.V. Mechanical analysis of an AM fabricated viscoelastic shaft under torsion by rigid disks. //Lecture Notes in Engineering and Computer Science: Proceedings of the World Congress on Engineering 2017, WCE 2017, 5–7 July 2017, London, U.K., Vol. II. London: IAENG, 2017. PP. 856--860.

Информация об авторах:

Манжиров Александр Владимирович – заместитель директора по научной работе Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, доктор физико-математических наук, профессор, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1, Москва, 119526, Россия; заведующий филиалом кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр.1, Москва, 105005, Россия; профессор Московского технологического университета, пр-т Вернадского, д. 78, Москва, 119454, Россия.

E-mail: manzh@ipmnet.ru

Михин Михаил Николаевич – доцент филиала Российского государственного гуманитарного университета, Каширское шоссе 4 корп. 2, Московская область, Домодедово, 142001, Россия. Ступинский филиал Московского авиационного института, ул. Пристанционная д.4, Московская область, Ступино, 142800, Россия

E-mail: mend@dom-rsuh.ru

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ О ЗАЛЕЧИВАНИИ ГЕОФИЗИЧЕСКОЙ ТРЕЩИНЫ В ТЕРМОУПРУГОЙ СРЕДЕ ПРИ НАЛИЧИИ ПОТОКА ФЛЮИДА

Мартирисян А.Н., Давтян А.В., Динунц А.С., Мартирисян Г.А.

Аннотация. Задача о наращивании слоя примесей, содержащихся в жидкости (флюиде), поступающей в трещину в бесконечной термоупругой плоскости для геофизической среды без учёта термоупругих напряжений решена в [1]. Там залечивание трещины за счёт примесей было рассчитано за счёт градиента температуры с учётом термодиффузии и теплопроводности. Плоская задача о залечивании трещины в термоупругой среде, где основное внимание уделяется эффектам термодиффузии и термоупругости в среде, без учёта трения рассмотрена в [2], где при некоторых упрощающих предположениях о характере влияния диффузии примесей на залечивание трещины удалось решить нестационарную задачу термоупругости при смешанных граничных условиях на границе трещины с учётом наращивания среды на границе за счёт осаждения примесей.

Рассматривается упрощённая модель задачи о наращивании слоя примесей, содержащихся в жидкости (флюиде), поступающей в трещину, которая в начальный момент времени представляет бесконечную полуполосу, ограниченную полуплоскостями $x_3 = \pm h_0$, $x_1 > 0$, т.е. является щелью твёрдой упругой среды постоянной ширины $2h_0$. Уравнение профиля трещины имеет вид $x_3 = \pm h(x_1, x_2, t)$, $x_1 > 0$. Флюид с примесями путём инъекции поступает в трещину и с постоянной скоростью V ($V < b$) движется по направлению оси x_1 . Вследствие охлаждения происходит осаждение растворённых компонентов, что приводит к изменению профиля трещины. Влияние процесса осаждения на залечивание трещины для геофизической среды без учёта термоупругих напряжений была рассмотрена в [1]. В настоящей статье рассматривается пространственная задача, аналогичная плоской задаче, решённой в [2], где основное внимание уделяется эффектам термодиффузии и термоупругости в среде.

В пространственной задаче уравнения термоупругости в перемещениях для изотропной среды, аналогично уравнениям, полученным для плоского случая [2], имеют вид

$$\left(\bar{a}^2 - b^2\right) \frac{\partial}{\partial x_i} \nabla + b^2 \Delta u_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad i=1,2,3, \quad \nabla = \operatorname{div} u, \quad \Delta = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad (1)$$

где u_i ($i=1,2,3$) – компоненты перемещения, a, b – скорости продольных и поперечных волн, $\bar{a}^2 = a^2 + \bar{\delta}$, $\bar{\delta} = (C_p/C_v - 1)K/\rho$, ρ – плотность упругой среды, $K = \lambda + 2\mu/3$ – объёмный модуль, λ, μ – упругие постоянные Ламе, t – время, C_p, C_v – теплоёмкости среды [5].

Начальные условия нулевые

$$u_i|_{t=0} = 0; \quad \partial u_i / \partial t|_{t=0} = 0; \quad i=1,2,3.$$

Граничные условия на трещине ($x_1 > 0$) и вне неё ($x_1 < 0$) с учётом наращивания трещины имеют вид ($|x_2| < \infty$)

$$\sigma_{x_1 x_3} \Big|_{x_3=0} = \rho b^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \Big|_{x_3=0} = 0 \quad \text{при } -\infty < x_1 < \infty; \quad (2)$$

$$\sigma_{x_2 x_3} \Big|_{x_3=0} = \rho b^2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \Big|_{x_3=0} = 0 \quad \text{при } -\infty < x_1 < \infty; \quad (3)$$

$$u_3 \Big|_{x_3=0} = 0 \quad \text{при } x_1 < 0; \quad (4)$$

$$\left(\frac{\partial u_3}{\partial t} + K_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + K_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \Big|_{x_3=0} = -\frac{i_0}{\rho_s} H(Vt - x_1) H(c - x_2) H(x_2) H(t) \quad \text{при } x_1 > 0; \quad (5)$$

$$\text{где } K_1 = \frac{K_3(\bar{a}^2 - 2b^2)\rho}{\rho_s} + \xi; \quad K_2 = \frac{K_3\bar{a}^2\rho}{\rho_s} + \xi; \quad \xi = \frac{C_p - C_v}{C_v l} \frac{Vb_0\gamma\rho}{\alpha\rho_s};$$

$u_{1,2,3} = o(R_1^{1/2})$; $R_1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \rightarrow 0$ (условие на ребре), $H(t)$ – единичная функция Хевисайда, $\gamma = \partial C / \partial T$, $\gamma = \text{const}$ [5], C – концентрация примесей в жидкости, K_3, l – экспериментальные постоянные, ρ_s – плотность выпавшего осадка в жидкости, α – температурный коэффициент расширения, а $-i_0$ есть диффузионный поток, который считается известным и приближённо равным значению во входном сечении трещины. В силу граничных условий можно задачу считать симметричной относительно плоскости Ox_1x_2 , причём, $u_{1,2}$ – чётные, а u_3 – нечётная функция от x_3 , и сформулировать задачу для полупространства $x_3 \geq 0$.

Решение поставленной задачи строится сочетанием [6,3] методов Винера-Хопфа [4], интегральных преобразований Лапласа по t и Фурье по x_1, x_2 , и аналитических методов теории функций комплексного переменного. После громоздких вычислений получено точное решение задачи в форме Смирнова-Соболева [3], и установлено, что при $x_3 = 0$, $x_1 \rightarrow +0$ особенностей не имеется.

ЛИТЕРАТУРА

1. Глико А.О. Влияние процесса осаждения твердой фазы из гидротермального раствора на залечивание системы плоско-параллельных трещин. //Труды VI межд. конф., Горис-Степ., 2008. С.170-177.
2. Багдоев А.Г., Мартirosян А.Н., Динунц А.С., Давтян А.В. Аналитическое и численное исследование задачи о залечивании трещины в термоупругой среде. //Докл. НАН РА. 2010. Т.110. №2. С.151-162.
3. Давтян А.В. Решение нестационарных смешанных граничных задач теории упругости при наличии трещин и штампов, движущихся с конечной скоростью: /дис. к. ф.-м. н.: 01.02.04; защищена 30.01.15; утв. 18.05.2015/ Давтян Ануш Володяевна. Ереван: 2014. 148 с.
4. Нобл Б. Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений с частными производными. М.: ИЛ, 1962. 278 с.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1954. 795 с.
6. Мартirosян А.Н. Математические исследования нестационарных линейных граничных задач для сплошных сред/ Ереван: Зангак-97, 2007, 244с. Библиогр.: с. 244 –500 экз–ISBN 978-99941-1-339-2.

Сведения об авторах:

Мартirosян А.Н. – доктор физ.-мат. наук, профессор, Горисский государственный университет, кафедра математики и информатики, (374 93) 19 24 65

E-mail: ashot.martirosyan.14@gmail.com

Давтян А.В. - кандидат физ.-мат. наук, Горисский государственный университет, кафедра математики и информатики.

E-mail: davtyananush@gmail.com

Динунц А.С. - кандидат физ.-мат. наук, доцент, Горисский государственный университет, кафедра математики и информатики.

E-mail: dinuntsas@gmail.com

Мартirosян Г.А. - кандидат физ.-мат. наук, доцент, Горисский государственный университет, кафедра математики и информатики.

E-mail: hayk.martirosyan.75@mail.ru

НЕОБРАТИМОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ МНОГОСЛОЙНОГО ТЕРМОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ШАРА

Мурашкин Е.В., Дац Е.П.

Аннотация. В представленной публикации рассматривается задача о центрально-симметричном деформировании многослойного термоупругопластического шара при последовательном присоединении к его внешней поверхности предварительно нагретых слоев. Получены аналитические решения задач о формировании остаточных напряжений в упругопластическом шаре с жестким включением и полостью в центре при различных механических граничных условиях на внутренней поверхности и заданных распределениях деформации теплового сжатия. Построены и проанализированы графики полей остаточных напряжений и деформаций.

Исследование напряженно-деформированного состояния многослойных (составных) конструкций обусловлено насущной потребностью в совершенствовании технологий изготовления изделий, обладающих заданными прочностными и функциональными характеристиками. Изучение в таких процессах влияния температурных эффектов естественным образом позволяет учесть особенности формирования остаточных напряжений и деформаций, существенным образом накладывающих определенные ограничения на функционирование и долговечность конструкций. Одним из примеров использования эффектов теплового расширения материала в составных телах, обладающих осевой симметрией являются задачи, посвященные расчету технологической операции горячей посадки [1-5]. Очевидно, что учет пластических свойств материала в данном случае позволяет более достоверно рассчитать уровень контактного давления, отвечающего за уровень прочности итогового изделия. Учет влияния начального теплового расширения имеет определяющее значение при формировании остаточных напряжений и деформаций, и, как следствие, прочностных характеристик изготавливаемого изделия [7-11].

Процесс присоединения новых частей материала может рассматриваться как процесс дискретного наращивания материала, используемый в технологии аддитивного изготовления изделий произвольной формы. В качестве теоретической основы для решения подобного рода задач должна выступать механика наращиваемых деформируемых тел [15-17]. В работах [18-20] решены краевые задачи о наращивании тяжелых вязкоупругих тел при учете гравитационных сил. В работе [21] исследовано тепловое состояние растущего вязкоупругого шара.

В представленной работе рассматриваются задачи определения остаточных напряжений и деформаций в слоистых изделиях в условиях сферической симметрии при учете термопластических свойств материала. Установившаяся температура в материале шара приводит к возникновению состояния нейтрального нагружения, когда в областях течения выполняется условие пластичности, при этом границы течения сохраняют свои положения. В качестве особенности напряженно-деформированного состояния слоев, выполненных из одинакового материала, укажем следующее: при выравнивании температурного поля происходит сохранение напряженного состояния материала в случае дальнейшего равномерного изменения температуры. Сформированные распределения напряжений не претерпевают изменений в том случае, если не возникает температурных градиентов, например, при постепенном остывании. Таким образом, напряжения, вызванные выравниванием температурного поля, могут рассматриваться в качестве остаточных.

Исследование выполнено за счет средств гранта Российского научного фонда (проект № 17-19-01257).

REFERENCES

1. H. Lippmann, The Effect of a Temperature Cycle on the Stress Distribution in a Shrink Fit // Int. J. of Plasticity. 1992. V. 8. P. 567-582.
2. W. Mack, Thermal Assembly of an Elastic-Plastic Hub and a Solid Shaft // Arch. of App. Mech. 1993. V. 63. P. 42-50.
3. A. Kovacs, Residual Stresses in Thermally Loaded Shrink Fits // Periodica Polytechnica: Mech. Eng. 1996. V. 40. P. 103-112.
4. Е.П. Дац, А.В. Ткачева, Р.В. Шпорт, Сборка конструкции «кольцо в кольцо» способом горячей посадки // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 4. С. 225–235.
5. Е.П. Дац, А.В. Ткачева, Технологические температурные напряжения в процессах горячей

- посадки цилиндрических тел при учете пластических течений // ПМТФ. 2016. Т. 57, № 3. С. 208–216.
6. Е.П. Дац, С.Н. Мокрин, Е.В. Мурашкин, Расчет накопленной остаточной деформации в процессе «нагрева-охлаждения» упругопластического шара // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния 2012. № 4. С. 123–132.
 7. А.А. Буренин, Е.П. Дац, С.Н. Мокрин, Е.В. Мурашкин, Пластическое течение и разгрузка полого цилиндра в процессе «нагрева-охлаждения» // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 2. С. 22–28.
 8. А.А. Буренин, Е.П. Дац, Е.В. Мурашкин, Формирование поля остаточных напряжений в условиях локального теплового воздействия // Изв. РАН. МТТ. 2014. Т. 49. №2. С. 124–131.
 9. Е.П. Дац, Е.В. Мурашкин, Р. Велмуруган, Вычисление необратимых деформаций в полом упругопластическом шаре в условиях нестационарного температурного воздействия // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 3. С. 168–175.
 10. E. Dats, S. Mokrin, E. Murashkin, Calculation of the Residual Stresses of Hollow Cylinder under Unsteady Thermal Action // Lecture notes in engineering and computer science. 2015. V. 2218. P. 1043–1046.
 11. E. Dats, E. Murashkin, On Unsteady Heat Effect in Center of the Elastic-Plastic Disk // Lecture notes in engineering and computer science. 2016. V. 2223. P. 69–72.
 12. E. Dats, S. Mokrin, E. Murashkin. Calculation of the Residual Stress Field of the Thin Circular Plate under Unsteady Thermal Action // KEM. 2016. V. 685. P. 37–41.
 13. E. Dats, E. Murashkin, N. Stadnik. On Heating of Thin Circular Elastic-plastic Plate with the Yield Stress Depending on Temperature // Procedia Engineering. 2017. V. 173. P. 891–896.
 14. E. Dats, E. Murashkin, N. Stadnik. On a Multi-Physics Modelling Framework for Thermo-elastic-plastic Materials Processing // Procedia Manufacturing. 2017. V. 7 P. 427–434.
 15. A.V. Manzhurov, Mechanical Design of Viscoelastic Parts Fabricated Using Additive Manufacturing Technologies // Lecture Notes in Engineering and Computer Science. 2015. V. 2218(1.1). P. 710–714.
 16. A.V. Manzhurov Advances in the Theory of Surface Growth with Applications to Additive Manufacturing Technologies // Procedia Engineering. 2017. V. 173. P. 11–16.
 17. A.V. Manzhurov Mechanical Design of AM Fabricated Prismatic Rods under Torsion // MATEC Web of Conferences. EDP Sciences. 2017. V. 95. P. 12002.
 18. А.В. Манжиров, Д.А. Паршин, Наращивание вязкоупругого шара в центрально-симметричном силовом поле // Изв. РАН. МТТ. 2006. N 1. С. 66–83.
 19. А.В. Манжиров, Д.А. Паршин, Возведение арочной конструкции с использованием аддитивной технологии под действием силы тяжести // Изв. РАН. МТТ. 2015. N 5. С. 94–107.
 20. А.В. Манжиров, Д.А. Паршин, Влияние режима возведения на напряженное состояние вязкоупругой арочной конструкции, возводимой с использованием аддитивной технологии под действием силы тяжести // Изв. РАН. МТТ. 2015. N 6. С. 69–91.
 21. С.И. Кузнецов, А.В. Манжиров, И. Федотов, Задача теплопроводности для растущего шара // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 6. С. 139–148.

Information about authors

Евгений Мурашкин – к.ф.-м.н., Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН; Национальный исследовательский ядерный университет, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва Россия

E-mail murashkin@ipmnet.ru

Евгений Дац – к.ф.-м.н., Владивостокский государственный университет экономики и сервиса, Владивосток, Россия

E-mail dats@dvo.ru

ДЕЙСТВИЕ СОБСТВЕННОГО ВЕСА НА НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА

Оганесян Э.К.

Рассматривается напряжённо-деформированное состояние полого цилиндра кусочно-постоянного радиуса, один торец которого зашкреплён. Цилиндр, ось которого перпендикулярно к силам тяжести, находится под действием собственного веса. Задача решается методом конечных элементов [1]. Используя результаты, полученные МКЭ, асимптотическими формулами изучено поведение напряжений вблизи угловой окружности. Приведены графики нормального и касательного напряжения в изучаемых поверхностях. Задача решается методом конечных элементов (МКЭ) [1]. Представляем перемещения, вызванные объёмной силой тяжести в виде первой гармоникн [2]

$$U_r(r, z, \varphi) = U(r, z) \cos \varphi$$

$$U_z(r, z, \varphi) = V(r, z) \cos \varphi \quad (1)$$

$$U_\varphi(r, z, \varphi) = W(r, z) \sin \varphi$$

В качестве элемента выбираем кольцевые элементы, поперечное сечение которых имеют треугольный вид с шестью узлами. Рассмотрим осевое сечение цилиндра при $\varphi = 0$. Искомые функции перемещения аппроксимируем полиномами второго порядка. Здесь φ – угол, отсчитываемый от вертикальной оси, с положительным значением в направлении против часовой стрелки. Перемещения точек элемента аппроксимируем полиномами второй степени

$$U_r = a_1 + a_2 r + a_3 z + a_4 r^2 + a_5 r z + a_6 z^2, \quad U_z = a_7 + a_8 r + a_9 z + a_{10} r^2 + a_{11} r z + a_{12} z^2$$

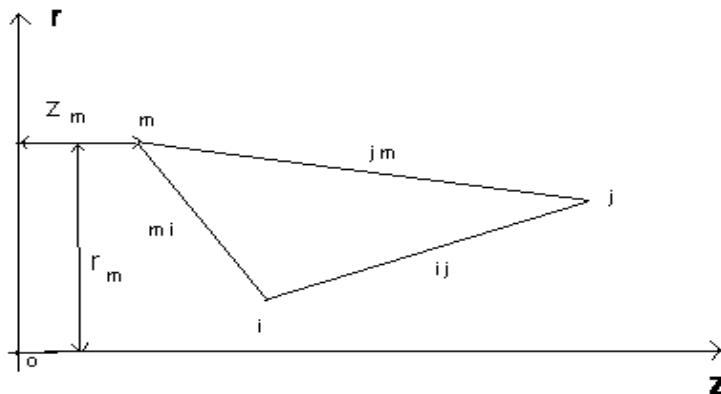


Рис. 1

Численное решение задачи

Для численного решения задачи рассмотрим цилиндр длины $12.8R$, у которого диаметр широкой части цилиндра равен $1.25R$, а узкой части – R . В качестве физико-механических параметров материала приняты $E=2.08 \cdot 10^6$, $\nu=0.28$, $\gamma=7.8 \cdot 10^{-3}$. Осевое сечение разбито на 124 треугольных элемента с 291 узловыми точками. График изменения амплитудных значений осевых, радиальных и окружных перемещений в сечении $z=3.2$ при $\varphi=0$ представлены на рис.2 Основными перемещениями у внешней границы цилиндра, как видно из рис.2, будут радиальные и осевые перемещения, которые значительно больше окружных перемещений, и наоборот, у внутренней границы полого цилиндра основным перемещением являются окружные перемещения.

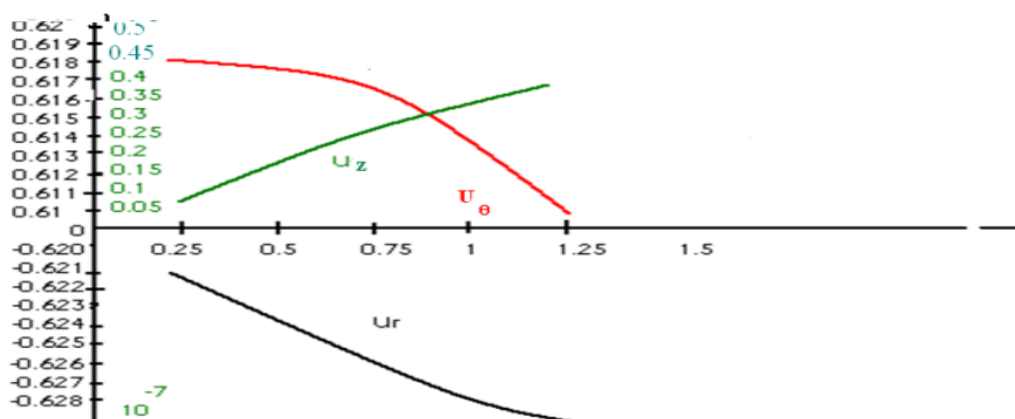


Рис. 2

На границе смены различных значений радиуса цилиндра использованы известные асимптотические формулы для перемещений [3].

$$r^{-\lambda} u_r = A \cos[(1+\lambda)\theta] + B \sin[(1+\lambda)\theta] + C \cos[(1-\lambda)\theta] + D \sin[(1-\lambda)\theta] \quad (1)$$

$$r^{-\lambda} u_\theta = B \cos[(1+\lambda)\theta] - A \sin[(1+\lambda)\theta] + v_2 D \cos[(1-\lambda)\theta] - v_2 C \sin[(1-\lambda)\theta]$$

$$\mu^{-1} r^{1-\lambda} \sigma_\theta = -2\lambda A \cos[(1+\lambda)\theta] - 2\lambda B \sin[(1+\lambda)\theta] - (1+\lambda)(1-v_2) C \cos[(1-\lambda)\theta] - (1+\lambda)(1-v_2) D \sin[(1-\lambda)\theta] \quad (2)$$

$$\mu^{-1} r^{1-\lambda} \tau_{r\theta} = -2\lambda A \sin[(1+\lambda)\theta] + 2\lambda B \cos[(1+\lambda)\theta] - (1-\lambda)(1-v_2) C \sin[(1-\lambda)\theta] + (1-\lambda)(1-v_2) D \cos[(1-\lambda)\theta]$$

Постоянные коэффициенты A, B, C, D определяются с помощью систем четырёх уравнений, полученных с помощью подстановки в выбранных двух узловых точках, близких к углу, значений перемещения (U_r, U_θ) в формулы (1). Выбор этих точек призован, но для увеличения точности необходимо выбрать их достаточно близко к изучаемой угловой точке. После определения постоянных A, B, C, D эти значения подставляются обратно в формулы (1), (2) и получаем искомые формулы для определения перемещения и напряжения в точках, близких к угловой точке. Как следовало ожидать асимптотические значения перемещения и напряжения сильно отличаются от значений в тех же точках от перемещений и напряжений, подсчитанных МКЭ без учёта особенностей. При вычислении использованы следующие значения: $r=0.001$, $R=100\text{см}$, $\nu=0.8$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зенкевич О.К. Метод конечных элементов в технике. М: Мир, 1975. 521с.
2. Вильсон Е.Ё. Расчёт на прочность осесимметричных тел. //Ракетная Техника и Космонавтика. 1965. Т.3. №12. С. 124-131.
3. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. М: Наука, 1981. 688с.
4. N. Karp, F.C.J. Karel. The elastic field behavior in the neighborhood of crack of arbitrary angles. // Comm. And Appl. Math., 1962, v.15, № 4.

Сведения об авторе:

Оганесян Эмин Казарович – к. ф.- м. н., научный сотр. Института механики НАН Армении, Ереван, 0019, Пр. Маршала Баграмяна 24/2.

E-mail: eogannisyn@mail.ru; **Тел.:** (010) 26-46-99

О ЛОКАЛИЗОВАННЫХ ПЛАНАРНЫХ КОЛЕБАНИЯХ В ОКРЕСТНОСТИ СВОБОДНОГО КРАЯ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОЙ ПОПЕРЕЧНО-ПОЛЯРИЗОВАННОЙ ПЛАСТИНКИ

Папян А.А., Саркисян С.В.

Аннотация. Работа посвящена исследованию локализованных планарных колебаний пьезокерамической поперечно-поляризованной пластинки по допущениям гипотезы Кирхгофа с учётом компонент, характеризующих электрическое поле. Рассматривается существование локализованных планарных колебаний в окрестности свободного края, исследовано влияние пьезоэффекта на частоту локализованных планарных колебаний.

Задачи колебаний пьезокерамических пластин по допущениям гипотезы Кирхгофа и на основе уточнённой теории с учётом компонент, характеризующих электрическое поле, исследованы в работах [1-6].

В настоящей работе рассматриваются локализованные планарные колебания пьезокерамической поперечно-поляризованной пластинки на основе допущений Кирхгофа, где учитываются также компоненты, характеризующие электрическое поле. Показано, что наличие пьезоэффекта не оказывает влияние на частоту локализованных планарных колебаний в окрестности свободного края пластинки.

Рассмотрим пьезокерамическую пластинку постоянной толщины $2h$ и поляризованной вдоль нормали срединной плоскости пластинки, которая в декартовой системе координат занимает область $\{0 \leq x \leq a, 0 \leq y < \infty, |z| \leq h\}$.

Примем для компонент вектора перемещения, какой-либо точки пластинки, допущения Кирхгофа, где учитываются члены, характеризующие электрическое поле:

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z, t) &= u(x, y, t) - zw_{,x} + d_{15} \int_0^z E_1(x, y, \zeta, t) d\zeta \\ u_2(x, y, z, t) &= v(x, y, t) - zw_{,y} + d_{15} \int_0^z E_2(x, y, \zeta, t) d\zeta, \quad u_3(x, y, z, t) = w(x, y, t) \end{aligned} \quad (1)$$

где, u, v, w – перемещения срединной плоскости пластинки, $E_1 = -\varphi_{,x}$, $E_2 = -\varphi_{,y}$ – компоненты вектора напряжённости электрического поля, $\varphi(x, y, z, t)$ – электрический потенциал, d_{15} – пьезоэлектрическая постоянная.

Уравнения планарных колебаний, когда лицевые поверхности пластинки ($z = \pm h$) свободны от механических напряжений и электрический потенциал равен нулю, имеют следующий вид [7]:

$$\begin{aligned} \Delta u + \theta_1 (u_{,x} + v_{,y})_{,x} - d_{15} h (1 - \nu)^{-1} \Delta (J + m)_{,x} &= c_2^{-2} u_{,tt} - \rho d_{15} (1 + \nu) (hE)^{-1} (J + m)_{,xtt} \\ \Delta v + \theta_1 (u_{,x} + v_{,y})_{,y} - d_{15} h (1 - \nu)^{-1} \Delta (J + m)_{,y} &= c_2^{-2} v_{,tt} - \rho d_{15} (1 + \nu) (hE)^{-1} (J + m)_{,ytt} \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $c_2^2 = G / \rho$ – скорость сдвиговых волн, $\theta_1 = (1 + \nu) / (1 - \nu)$, Δ – двумерный оператор

$$\text{Лапласа, } J = h \left(\int_0^h \varphi(x, y, z, t) dz + \int_0^{-h} \varphi(x, y, z, t) dz \right), \quad m = - \int_{-h}^h z \varphi(x, y, z, t) dz.$$

$$\text{Представляя перемещения } u \text{ и } v \text{ в виде } u = P_{,x} + Q_{,y}; \quad v = P_{,y} - Q_{,x}, \quad (3)$$

где $P = \psi - \chi_{15} (J + m)$, $\chi_{15} = d_{15} / 2h$, $c_1^2 = E / \rho (1 - \nu^2)$, $\psi(x, y, t)$, $Q(x, y, t)$ – динамические потенциалы [2, 3], из системы уравнений для планарных колебаний (2) придём к следующим автономным уравнениям:

$$\Delta P = c_1^{-2} P_{,tt}, \quad \Delta Q = c_2^{-2} Q_{,tt}. \quad (4)$$

К уравнениям (4) следует добавить уравнение электродинамики для поляризованной пьезокерамической пластинки, которое в случае, когда рассматриваются преимущественно планарные колебания, имеет вид:

$$\Delta\varphi + \gamma_0\varphi_{,zz} = 0, \quad \gamma_0 = (\epsilon_{33}(1-\nu) + 2d_{13}^2E) / (\epsilon_{11}(1-\nu) + d_{13}d_{15}E) \quad (5)$$

где ϵ_{11} , ϵ_{33} – компоненты диэлектрической проницаемости.

Пусть заданы следующие граничные условия. Кромка пластинки $y=0$ свободна от напряжений и электрический потенциал равен нулю [6]:

$$\sigma_{22} = 0, \sigma_{21} = 0, \sigma_{23} = 0, \varphi = 0 \text{ при } y = 0. \quad (6)$$

При $y \rightarrow \infty$ выполняются условия затухания. На краях пластинки $x=0, a$ заданы условия Навье, а электрический потенциал на этих краях равен нулю:

$$\sigma_{11} = 0, u_2 = 0, u_3 = 0 \quad (7)$$

Удовлетворяя решение уравнений (4) и (5) осредненным граничным условиям (7), условиям затухания и условиям на свободном краю $y=0$ (6), получено уравнение относительно безразмерной частоты планарных колебаний η [6]. Показано, что при данных граничных условиях наличие в гипотезе Кирхгофа электрического поля не оказывает влияние на локализованные планарные колебания пьезокерамической пластинки. Частота локализованных планарных колебаний зависит от коэффициента Пуассона. В частности, при $\nu = 0.25$, $\eta = 0.8299$. В случае, когда на свободном краю $y=0$ пьезокерамической пластинки нормальная компонента вектора электрической индукции D_2 равна нулю, для безразмерной частоты планарных колебаний пьезокерамической пластинки η будем иметь:

$$(2 - \eta)^2 - 4\sqrt{(1 - \theta\eta)(1 - \eta)} = 0, \quad \theta = 0.5(1 - \nu) \quad (8)$$

Таким образом, когда на свободном краю пластинки электрический потенциал или нормальная компонента вектора электрической индукции D_2 равны нулю, наличие в гипотезе Кирхгофа электрического поля не оказывает влияние на локализованные планарные колебания пьезокерамической пластинки, а уравнение (8) является уравнением Рэлея относительно безразмерной частоты планарных колебаний [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Партон В.З. Кудрявцев Б.А. Магнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, Физматлит, 1988. 472с.
2. Belubekyan M.V. Mkrtchyan L.R. Vibration of transversely thin piezoelectric plates/ SPIE vol. 2441, pages 233-242.
3. Mkrtchyan L.R. On some problems of bending vibration of thin piezoceramic plates. Functional gradient materials and surface layers prepared by fine particles technology. 2001. pp. 281-288.
4. Амбарцумян С.А. Белубекян М.В. Некоторые задачи электромагнитоупругости пластин. Ереван: Госуниверситет, 1991.143с.
5. Piliposyan G.T., Ghazaryan K.B. Localized bending vibrations of piezoelectric plates. Waves in Random and Complex Media. Vol. 21. №3. 2011. Pp. 418-433.
6. Белубекян М.В. Об уравнениях теории пластин, учитывающих поперечные сдвиги. // В сб.: «Проблемы механики тонких деформируемых тел». 2002. С.67-88.
7. Belubekyan M.V. «On the condition of planar localized vibrations appearance in the vicinity of the free edge of a thin rectangular plate» //Уч. записки ЕГУ, сер. Физика и Математика, 51:1 (2017), 42–45.

Сведения об авторах:

Папян Арарат Артурович - кандидат физ. мат. наук, научный сотрудник института механики НАН Армении, (374 93) 05 00 93, **E-mail:** papyanararat11@gmail.com.

Саркисян Самвел Владимирович – доктор физ. мат. наук, профессор, зав. кафедры механики, факультета математики и механики ЕГУ, (374 55) 73 13 13, **E-mail:** vas@ysu.am.

ЗАДАЧА О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВОЛН ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА С V-ПОДОБНЫМ ТУННЕЛЬНЫМ ДЕФЕКТОМ

Попов В.Г.

Аннотация. Решена задача определения напряжённого состояния в окрестности туннельного дефекта, имеющего V-подобное сечение. Дефект расположен в неограниченной упругой среде, в которой распространяются гармонические волны продольного сдвига. Исходная задача сводится к системе двух сингулярных интегральных или интегродифференциальных уравнений с неподвижными особенностями. Предложен численный метод решения этих систем, учитывающий действительную асимптотику неизвестных функций.

Рассматривается неограниченное изотропное упругое тело в условиях антиплоской деформации с туннельным дефектом (тонкое жёсткое включение или трещина), который в плоскости Oxy занимает два отрезка, выходящих из начала координат. Эти отрезки имеют длины $2d_k$ и образуют с осью Ox углы α_k , $k=1,2$. С дефектом взаимодействует плоская гармоническая волна продольного сдвига, фронт которой образует угол θ_0 с осью Ox и вызывает в среде следующие перемещения вдоль оси Oz :

$$W_o^{(i)}(x, y) = A_0 e^{i\kappa_0(x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0)}, \quad \kappa_2^2 = \frac{\rho \omega^2}{G},$$

где G, ρ – модуль сдвига и плотность упругой среды. Зависимость от времени определяется множителем $e^{-i\omega t}$, который здесь и всюду далее опущен. При таких условиях единственная отличная от 0 при антиплоской деформации компонента вектора перемещений, вызванных волнами, отражёнными от дефекта, удовлетворяет уравнению Гельмгольца:

$$\Delta W + \kappa_2^2 W = 0.$$

Для формулирования граничных условий на дефекте с каждым отрезком связывается система координат $O_k x_k y_k$, $k=1,2$, центр которой совпадает с его серединой. Пусть $W_k(x_k, y_k)$ – перемещения в системе координат, связанной с k -м отрезком. Если дефектом является включение, то граничные условия на его поверхности формулируются из условия полного сцепления с внешней средой:

$$W_k(x_k, 0) = c - W_k^{(i)}(x_k, 0); -d_k < x_k < d_k \quad k=1;2 \quad (1.1)$$

Также наличие включения приводит к разрывности напряжений на его поверхности, для скачков которых вводятся обозначения:

$$\tau_{zy_k}(x_k, +0) - \tau_{zy_k}(x_k, -0) = \chi_{1k}(x_k), \quad -d_k < x_k < d_k, \quad k=1;2 \quad (1.2)$$

В равенство (1.1) входит c – амплитуда неизвестного перемещения включения под действием падающей волны. Она определяется из уравнения движения включения как жёсткого тела. При гармонических колебаниях это уравнение имеет вид:

$$-(m_1 + m_2)\omega^2 c = \sum_{k=1}^2 \int_{-d_k}^{d_k} \chi_{1k}(\eta) d\eta, \quad m_k = 2\rho_0 d_k h,$$

где h – толщина, ρ_0 – плотность включения.

В случае трещины её поверхность предполагается незагруженной, что выражается равенством

$$\tau_{zy_k}(x_k, 0) = -\tau_{zy_k}^{(i)}(x_k, 0), \quad -d_k < x_k < d_k, \quad k=1;2 \quad (1.3)$$

Кроме того, на поверхности трещины разрывны перемещения, скачки которых обозначены

$$W_k(x_k, +0) - W_k(x_k, -0) = \chi_{2k}(x_k), \quad -d_k < x_k < d_k, \quad k=1;2 \quad (1.4)$$

Также из непрерывности перемещений по берегу трещины следует

$$W_1(d_1, +0) = W_2(-d_2, +0), W_1(d_1, -0) = W_2(-d_2, -0).$$

Решение сформулированных граничных задач начинается с построения в системах координат $O_k x_k y_k$, $k=1, 2$ разрывных решений уравнения Гельмгольца [1] со скачками (1.2) в случае включения и со скачками (1.4) в случае трещины. После этого для окончательного определения перемещений дифракционного поля остаётся определить неизвестные скачки из оставшихся граничных условий. Так, в случае включения реализация условий (1.1) приводит к следующей системе сингулярных интегральных уравнений с дополнительным условием:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \varphi_1(\tau) \left(\frac{1}{\tau - \xi} - R_{11}(\tau - \xi) \right) d\tau - \int_{-1}^1 \varphi_2(\tau) (q_{12}(\tau, \xi) - R_{12}(\tau, \xi)) d\tau &= 0 \\ \int_{-1}^1 \varphi_2(\tau) \left(\frac{1}{\tau - \xi} - R_{22}(\tau - \xi) \right) d\tau - \int_{-1}^1 \varphi_1(\tau) (q_{21}(\tau, \xi) - R_{21}(\tau, \xi)) d\tau &= 0 \\ \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^2 \gamma_l \int_{-1}^1 \varphi_l(\tau) (\ln|\tau| + D_l(\tau)) d\tau &= c_0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

В (1.5) обозначено:

$$q_{kl}(\tau, \xi) = \frac{\gamma_l (\gamma_l \tau_l \cos \alpha_{lk} + \gamma_k \xi_k)}{s_{kl}^2(\tau, \xi)}; s_{kl}^2(\tau, \xi) = \gamma_l^2 \tau_l^2 + 2\gamma_l \gamma_k \tau_l \xi_k \cos \alpha_{lk} + \gamma_k^2 \xi_k^2; k, l = 1, 2$$

$$\varphi_k(\tau) = \frac{\chi_{1k}(d_k \tau)}{G}, \quad \eta = d_k \tau, \quad x_k = d_k \xi, \quad \gamma_k = \frac{d_k}{d}, \quad \varepsilon_k = \frac{a_k}{d}, \quad \delta_k = \frac{b_k}{d},$$

$$d = \max(d_1; d_2), \quad k = 1, 2$$

В случае трещины реализация граничных условий приводит к системе двух интегро-дифференциальных уравнений [2] относительно скачков перемещений и их производных аналогичной структуры. Присутствие в сингулярных составляющих полученных систем уравнений неподвижных особенностей влияет на асимптотику решений в окрестностях точек ± 1 . Предложен численный метод решения этих систем, учитывающий асимптотику неизвестных функций и основанный на применении специальных квадратурных формул для сингулярных интегралов. Проведено численное исследование влияния на напряжённое состояние вблизи дефекта его геометрических параметров и частоты падающей волны. Показано наличие частот, при которых наблюдаются существенные локальные максимумы коэффициентов интенсивности напряжений. На значения этих частот существенно влияет конфигурация дефекта.

REFERENCE

1. Попов В.Г. Сравнение полей перемещений и напряжений при дифракции упругих волн сдвига на различных дефектах: трещина и тонкое жёсткое включение. Динамические системы. 1993, вып. 12. – С. 14–23.
2. Popov V.G. Stress state near two cracks emanating from one point during harmonic oscillation of the longitudinal shear Bulletin of Kiev Shevchenko nat. Univ. – Ser: Phys. – math. Sciences. - 2013. vol. 3. - P. 205-208.

Information about authors:

Popov Vsevolod – doctor sciences, professor, National University «Odesa Maritime Academy», higher mathematics department (+38048) 733-23-12, (+38067) 480-65-57

E-mail: dr.vg.popov@gmail.com, vs_popov@muth.onma.edu.ua

МЕТОД ГЕНЕРАЦИИ СЕТКИ, ОСНОВАННЫЙ НА СИСТЕМЕ ПРУЖИН.

Романов А.А.

Аннотация. В работе рассмотрен новый прямой метод генерации сетки для односвязной двумерной области. Для генерации сетки используется система пружин. Данный метод может быть использован совместно с другими методами для модификации сетки при решении задач механики растущих тел. Показаны достоинства и недостатки метода. Рассмотрены различные граничные условия. Представлены результаты работы программы для различных областей. Представлены некоторые возможные способы применения метода для задач с композитными материалами

В результате технического и технологического прогресса возрастает сложность и функциональность машин, конструкций и механизмов, равно как и требования к их прочности и долговечности. По этой причине необходимы точные методы расчета полей напряжений, деформаций и перемещений в деталях машин. Свойства машин так же зависят и от способа их изготовления. Одним из новых и перспективных способов изготовления является процесс аддитивного производства, поэтому необходимо создать точные модели, описывающие данный процесс [1-3]. Следовательно, нужны методы численного моделирования подобных процессов. Обычно для данных целей используется метод конечных элементов (МКЭ), состоящий в аппроксимации неизвестных перемещений определенным набором функций с параметрами, которые необходимо определить. Такая аппроксимация строится на сетке, созданной в исследуемом теле. Обычно сложно создать подходящую сетку в трехмерной или двумерной области, особенно если область имеет сложную геометрию. Существует достаточно много методов создания сеток, и они предоставляют достаточно хорошие сетки, но они не подходят для перестраивания сетки на каждом шаге по времени, из-за скорости их работы. Данный метод строит сетку быстрее большинства методов, что позволяет использовать его в задачах, где необходимо часто и быстро перестраивать сетку. Так же материал, из которого выращено тело может быть композитным [4], поэтому так же необходимо исследовать и композитные материалы.

Для демонстрации метода написана программа на языке C++, с использованием библиотеки QT. В программу вводятся количество точек сетки, размеры начального прямоугольника и граница моделируемой области. Все пружины системы полагаются одинаковыми с жесткостью k . Результаты работы программы представлены на рис. 1, 2.

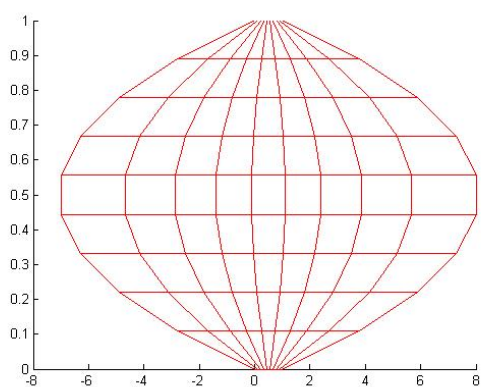


Рис. 1 Результат моделирования

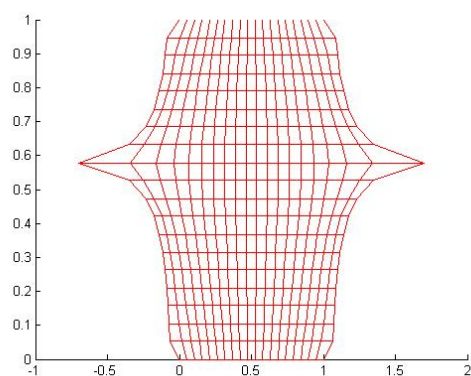


Рис. 2 Результат моделирования

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Проекты № 17-51-45054, № 17-01-00712)

Список литературы

- [1] Manzhirov A.V. A Method for Mechanical Design of AM Fabricated Viscoelastic Parts. Transactions on Engineering Technologies. Springer Singapore 2016; 223 – 235.
- [2] Manzhirov A.V. Mechanical Design of Viscoelastic Parts Fabricated Using Additive Manufacturing Technologies. Lecture Notes in Engineering and Computer Science: Proceedings of the World Congress on Engineering (London) 2015; 2:710 – 714.

- [3] Manzhirov A.V. Mechanics of Growing Solids: New Track in Mechanical Engineering. ASME 2014 International Mechanical Engineering Congress and Exposition (Montreal, Quebec) 2014;9: V009T12A039- V009T12A039.
- [4] Harris P.J. Carbon nanotube composites. International Materials Reviews 2004; 49(1):31-43.
- [5] Chen L., Xu J.C. Optimal delaunay triangulations. Journal of Computational Mathematics 2004; 299-308.
- [6] GVS P.R., Montas H.J., Samet H., Shirmohammadi A. Quadtree-Based Triangular Mesh Generation for Finite Element Analysis of Heterogeneous Spatial Data The 2001 ASAE Annual International Meeting (Sacramento, CA.) 2001; (Paper ID: 01-3072).
- [7] Shontz S.M., Vavasis S.A. A mesh warping algorithm based on weighted Laplacian smoothing. Proceedings of the 12th International Meshing Roundtable 2003; 147–158.
- [8] Shimada K., Gossard D. C. Bubble mesh: automated triangular meshing of non-manifold geometry by sphere packing Proceedings of the third ACM symposium on Solid modeling and applications. – ACM 1995; 409-419.
- [9] Blacker TD, Stephenson MB. Paving: A new approach to automated quadrilateral mesh generation. International Journal for Numerical Methods in Engineering 1991; 32:811–847.
- [10] Liang X., Ebeida M.S., Zhang Y. Guaranteed-quality all-quadrilateral mesh generation with feature preservation. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 2010; 199(29): 2072-2083.
- [11] Lee CK, Lo SH. A new scheme for the generation of a graded quadrilateral mesh. Computers and Structures 1994;52:847–857.
- [12] Borouchaki H., Frey P. Adaptive triangular–quadrilateral mesh generation. International Journal for Numerical Methods in Engineering 1998;45(5):915–934.
- [13] Owen S.J., Staten M.L., Canann S.A., Saigal S. Q-morph: An indirect approach to advancing front quad meshing. International Journal for Numerical Methods in Engineering 1999;9:1317–1340.
- [14] Manzhirov A.V. Fundamentals of Mechanical Design and Analysis for AM Fabricated Parts. Procedia Manufacturing 2016; 7: 59-65.
- [15] Manzhirov A.V. Advances in the Theory of Surface Growth with Applications to Additive Manufacturing Technologies. Procedia Engineering 2017; 173: 11-16.
- [16] Smith W., Volberg A. A conformal mapping example. Comptes Rendus Mathematique 2011; 349(9-10):511-514.
- [17] Hodge V.J., O’Keefe S., Austin J. Hadoop neural network for parallel and distributed feature selection. Neural Networks 2016; 78: 24-35.
- [18] Kim J., Kim J., Jang G.J., Lee M. Fast learning method for convolutional neural networks using extreme learning machine and its application to lane detection. Neural Networks 2017; 87: 109-121.
- [19] Remacle J.F., Lambrechts J., Seny B., Marchandise E., Johnen A., Geuzainet C. Blossom-Quad: A nonuniform quadrilateral mesh generator using a minimum-cost perfect-matching algorithm. International journal for numerical methods in engineering 2012; 89(9): 1102-1119.
- [20] Gabow H.N. Data structures for weighted matching and nearest common ancestors with linking. Proceedings of the 1st Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms 1990; 434-443.

Информация о авторах

Александр Романов – инженер, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва Россия
 E-mail malimo93@gmail.com

МЕТОД МЕХАНИЧЕСКИХ КВАДРАТУР ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ РАЗНОГО ТИПА

Саакян А.В., Амirdжаниян А.А.

Аннотация. В работе приводятся квадратурные формулы для интегралов разного типа, отличительной чертой которых является тот факт, что все они выражаются через значения в узлах одной и той же функции. Последнее позволяет использовать метод механических квадратур, основанный на указанных формулах, для широкого спектра типов интегральных уравнений. Основное внимание уделяется сингулярным интегральным уравнениям.

Введение. Квадратурные формулы для вычисления интегралов имеют давнюю историю, однако, применять их к решению интегральных, в частности, сингулярных уравнений начали лишь во второй половине прошлого века. Среди многих работ отметим работу [1], в которой в достаточно систематизированном виде представлен метод механических квадратур решения сингулярных интегральных уравнений первого рода. В работах [2,3] этот метод под названием метод дискретных особенностей применён к сингулярным интегральным уравнениям второго рода с вещественным или комплексным коэффициентом, уравнениям с обобщённым ядром Коши, а также к интегро-дифференциальным уравнениям. В настоящей работе представим квадратурные формулы для различных интегралов, в том числе содержащих слабую особенность типа логарифмической или ступенчатой сигма-функции, которые ранее были использованы в работе [4].

Квадратурные формулы. Ниже приводится ряд квадратурных формул типа Гаусса для вычисления интегралов различного типа, содержащих весовую функцию многочленов Якоби.

Пусть имеем функцию $\Phi(x)$, определённую на интервале $(-1, 1)$ и представимую в виде

$$\Phi(x) = \varphi(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta \quad (\operatorname{Re}(\alpha), \operatorname{Re}(\beta) > -1) \quad (1)$$

где $\varphi(x)$ – функция, удовлетворяющая условию Гельдера на отрезке $[-1, 1]$. Подробные разъяснения по применению квадратурных формул для комплексных показателей приведены в [3].

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \Phi(x) dx &\approx \sum_{j=1}^n w_j \varphi(\xi_j) \\ \int_{-1}^1 \frac{\Phi(x)}{x-z} dx &\approx \sum_{j=1}^n \frac{w_j \varphi(\xi_j)}{\xi_j - z} \left[1 - \frac{R_n^{(\alpha, \beta)}(z)}{R_n^{(\alpha, \beta)}(\xi_j)} \right] \\ \int_{-1}^1 \frac{\Phi'(x)}{x-z} dx &= \sum_{j=1}^n \frac{w_j \varphi(\xi_j)}{\xi_j - z} \left[2(n+1) \frac{R_{n+1}^{(\alpha-1, \beta-1)}(z)}{R_n^{(\alpha, \beta)}(\xi_j)} + \frac{R_n^{(\alpha, \beta)}(z) - R_n^{(\alpha, \beta)}(\xi_j)}{R_n^{(\alpha, \beta)}(\xi_j)(z - \xi_j)} \right] \\ \int_{-1}^y \Phi(x) dx &\approx \sum_{i=1}^n w_i \varphi(\xi_i) \left[\frac{B_{\frac{1+y}{2}}(\beta+1, \alpha+1)}{B(\beta+1, \alpha+1)} - \sum_{m=1}^{n-1} P_m^{(\alpha, \beta)}(\xi_i) S_m^{(\alpha, \beta)}(y) \right] \\ \int_{-1}^1 \operatorname{sign}(x-y) \Phi(x) dx &\approx \sum_{i=1}^n w_i \varphi(\xi_i) \left[1 - \frac{2B_{\frac{1+y}{2}}(\beta+1, \alpha+1)}{B(\beta+1, \alpha+1)} + 2 \sum_{m=1}^{n-1} P_m^{(\alpha, \beta)}(\xi_i) S_m^{(\alpha, \beta)}(y) \right] \\ \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x-y|} \Phi(x) dx &\approx \sum_{i=1}^n w_i \varphi(\xi_i) \left[L_0^{(\alpha, \beta)}(y) + \sum_{m=1}^{n-1} P_m^{(\alpha, \beta)}(\xi_i) L_m^{(\alpha, \beta)}(y) \right] \end{aligned}$$

Здесь узлы $\xi_i (i = \overline{1, n})$ являются корнями многочлена Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, весовые коэффициенты $w_i (i = \overline{1, n})$ определяются формулой

$$w_j = \frac{2^{\alpha+\beta+3}}{1-\xi_j^2} \frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)} \left[\frac{1}{(\alpha+\beta+n+1)P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(\xi_j)} \right]^2,$$

z может быть любой точкой комплексной плоскости, кроме точек ± 1 , y является точкой интервала $(-1, 1)$. Использованы также специальные функции и обозначения

$$R_n^{(\alpha,\beta)}(z) = -\left(\frac{2}{z-1}\right)^{n+1} 2^{\alpha+\beta} B(n+\alpha+1, n+\beta+1) F\left[n+1, n+\alpha+1; 2n+\alpha+\beta+2; \frac{2}{1-z}\right],$$

$$h_m^{(\alpha,\beta)} = \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(m+\alpha+1) \Gamma(m+\beta+1)}{(2m+\alpha+\beta+1) \Gamma(m+1) \Gamma(m+\alpha+\beta+1)},$$

$$S_m^{(\alpha,\beta)}(y) = (1-y)^{\alpha+1} (1+y)^{\beta+1} \frac{1}{2m h_m^{(\alpha,\beta)}} P_{m-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(y) \quad (m \geq 1),$$

$$L_0^{(\alpha,\beta)}(y) = -\frac{B_{(1-y)/2}(1+\alpha, 1+\beta)}{B(1+\beta, 1+\alpha)} \pi \operatorname{ctg} \pi \alpha - \ln 2 - \psi(\alpha+1) + \psi(\alpha+\beta+2) + \\ + \frac{(1-y)(1+\beta+\alpha)}{2\alpha} {}_3F_2\left(1, 1, -\alpha-\beta; 2, 1-\alpha; \frac{1-y}{2}\right)\Bigg\},$$

$$L_m^{(\alpha,\beta)}(z) = \left(\frac{2}{z-1}\right)^m \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{m} B(m+\alpha+1, m+\beta+1) F\left(m+\alpha+1, m; 2m+\alpha+\beta+2, \frac{2}{1-z}\right).$$

Отметим, что функции $R_n^{(\alpha,\beta)}(z)$ и $L_n^{(\alpha,\beta)}(z)$ однозначно определяются в комплексной плоскости, разрезанной соответственно по отрезку $[-1, 1]$ и по лучу $[-1, \infty]$, а для точек разреза берётся полусумма значений сверху $(y+i0)$ и снизу $(y-i0)$.

Заключение. Приведённые квадратурные формулы позволяют произвольное интегральное уравнение, содержащее любую комбинацию представленных интегралов и имеющее решение в виде (1), решить методом механических квадратур.

ЛИТЕРАТУРА

1. Erdogan F., Gupta G.D. and Cook T.S. Numerical solution of singular integral equations. Mechanics of Fracture. G.C.Sih ed. V.1, Noordhoff, Leyden, 1973, p. 368-425.
2. Sahakyan A.V., Method of discrete singularities for solution of singular integral and integro-differential equations. Proc. of A.Razmadze Math. Inst., Georgia, Vol. 156 (2011), pp.101-111.
3. Саакян А.В. Квадратурные формулы наивысшей алгебраической точности для интеграла типа Коши, когда показатели весовой функции Якоби комплексные. //Известия РАН, Механика твердого тела. 2012. №6. Сс.116-121.
4. Амирджанян А.А., Акопян Л.В. Равномерное движение абсолютно жёсткого штампа по внутренней поверхности бесконечного полого цилиндра.//В сб. труд. межд. конф.: «Актуальные проблемы механики сплошной среды», Ереван: Изд. ЕГУАС, 2010. Т.1. С.81-85.

Сведения об авторах:

Саакян Аветик Вараздатович – д.ф.м.н., зам.директора Института механики НАН Армении. Тел.: (37410) 568188, (37494)579348, **E-mail:** avsah@mechins.sci.am, avsahakyan@gmail.com

Амирджанян Арутюн Арменович – к.ф.м.н., науч. сотр. Института механики НАН Армении. **E-mail:** amirjanyan@mail.com.

ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ В НАРАЩИВАЕМОЙ ПЛАСТИНЕ С УЧЁТОМ НЕЛОКАЛЬНЫХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛА

Савельева И.Ю., Журавский А.В.

Аннотация. Аддитивные технологии, то есть технологии наращивания различных твёрдых тел, являются перспективным, постоянно развивающимся направлением в современной промышленности. Одной из аддитивных технологий является газозафазное осаждение. Оно представляет собой нанесение непрерывного слоя материала на охлаждаемую подложку.

В работе рассмотрена математическая модель, позволяющая определять профиль температуры при газозафазном осаждении материала из нагретых паров газа на охлаждаемую подложку. Учтены все особенности теплообмена газа с поверхностью пластины. Рассмотрен случай осаждения материала с нелокальными по пространству свойствами. Построен численный алгоритм расчёта температурного поля в пластине. Приведены результаты и анализ численного расчёта для различных материалов.

Материалы и изделия, создаваемые на основе аддитивных технологий [1-6], обладают уникальными свойствами, а физические свойства получаемых композиций качественно отличаются от свойств исходных массивных материалов [7-9].

Например, при больших флуктуациях физико-механических характеристик элементов материала, эти характеристики будут подвержены влиянию окружающих структур [9]. Для описания такой среды необходимо строить нелокальную модель.

Для тонкостенной пластины в криволинейной ортогональной системе координат, где ось Ox направлена по нормали к поверхности, справедливо уравнение теплопроводности [10]

$$c^{(k)} \rho^{(k)} \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial q^{(k)}}{\partial x} - 2\kappa q^{(k)}, \quad (1)$$

где $k=1,2$; $c^{(k)}$ – удельная массовая теплоёмкость материала пластины ($k=1$) или плёнки ($k=2$); $\rho^{(k)}$ – плотность; $T=T(x,t)$ – температура; t – время; x – координата; κ – средняя кривизна; $q^{(k)}$ – проекция вектора плотности теплового потока $\mathbf{q}^{(k)}$ на ось Ox .

Для пластины ($k=1$) проекция вектора плотности теплового потока $q^{(1)} = -\lambda^{(1)} \frac{\partial T(x)}{\partial x}$, где $\lambda^{(k)}$ – коэффициент теплопроводности. Для учёта нелокальных свойств наносимого покрытия ($i=2$) введём функцию влияния [10] $\phi(x)$, такую что $\phi(x)=0$ при $x \notin (-a, a)$; $\int_{-a}^{+a} \phi(x) dx = 1$.

Тогда, $q^{(2)} = -p_1 \lambda^{(2)} \frac{\partial T(x)}{\partial x} - p_2 \int_{x-a}^{x+a} \lambda^{(2)} \frac{\partial T(x')}{\partial x'} \phi(|x'-x|) dx'$, – проекция вектора плотности теплового потока для покрытия ($p_1 + p_2 = 1$).

Добавим к уравнению (1) граничные условия (с учётом конвективного теплообмена, излучения и тепло- и массопереноса)

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda^{(1)} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=-H} = \alpha_c (T(t, -H) - T_c); \\ \left(p_1 \lambda^{(2)} \frac{\partial T(x)}{\partial x} + p_2 \int_{x-a}^x \lambda^{(2)} \frac{\partial T(x')}{\partial x'} \phi(|x'-x|) dx \right) \Big|_{x=vt} = \alpha_r (T_r - T(t, vt)) - \\ - \varepsilon \sigma_0 T^4(t, vt) + A q_{\Gamma}^r + c^{(2)} \rho^{(2)} v (T_r - T(t, vt)) + \rho^{(2)} v L^{(2)}; \end{array} \right. \quad (2)$$

и условия контакта

$$\left\{ \begin{array}{l} T(t, 0-0) = T(t, 0+0); \\ \lambda^{(1)} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0-0} = \left(p_1 \lambda^{(2)} \frac{\partial T(x)}{\partial x} + p_2 \int_x^{x+a} \lambda^{(2)} \frac{\partial T(x')}{\partial x'} \phi(|x'-x|) dx \right) \Big|_{x=0+0} \end{array} \right. ; \quad (3)$$

где T_g , T_c – температуры газа и охлаждающей среды; ε – коэффициент излучения; A – коэффициент поглощения; $L^{(2)}$ – удельная теплота фазового; α_c, α_g – коэффициенты конвективного теплообмена; H – толщина пластины; v – скорость осаждения материала.

Уравнение (1) с начальными, граничными (2) и контактными (3) условиями позволяет моделировать температурное поле в наращиваемой криволинейной пластине.

Работа выполнена в рамках реализации государственных заданий Минобрнауки РФ (проекты 9.7784.2017/БЧ, 9.2422.2017/ПЧ).

ЛИТЕРАТУРА

1. Андриевский Р.А., Рагуля А.В. Наноструктурные материалы. М.: Издательский центр Академия, 2005.
2. Пул-мл. Ч., Оуэнс Ф. Нанотехнологии. М.: Техносфера, 2006.
3. Васильев В.Ю., Репинский С.М. Осаждение диэлектрических слоев из газовой фазы. //Успехи химии. 2005. Т.74. № 5. С. 452–483.
4. Комаров Ф.Ф., Пилько В.В., Климович И.М. Влияние условий нанесения наноструктурированных покрытий из Ti–Zr–Si–N на их состав, структуру и трибомеханические свойства. //Инженерно-физический журнал. 2015. Т.88. № 2. С.350–354.
5. Костановский А.В., Гусев М.К. Осаждение тонких пленок при вакуум-термическом испарении нитрида алюминия. //Теплофизика высоких температур. 1995. Т.33. № 1. С.163–166.
6. Лукомский Ю.Я., Прияткин Г.М., Мулина Т.В., Ополовников В.Р., Киселева В.Л., Кольчугин А.В., Носкова О.Л. Электролитическое осаждение металлов на алюминий и его сплавы. //Успехи химии. 1991. Т.60. № 5. С.1077–1103.
7. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Математическая модель нелокальной среды с внутренними параметрами состояния. //Инженерно-физический журнал. 2013. Т.86. № 4. С.768–773.
8. Peddieson J., Buchanan G.R., McNitt R.P. Application of nonlocal continuum models to nanotechnology. //Int. J.Eng. Sci. 2003. No. 41. Pp. 305–312.
9. Eringen A.C. Nonlocal continuum field theories. New York-Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2002. 393 pp.
10. Кувыркин Г.Н. Термомеханика деформируемого твердого тела при высокоинтенсивном нагружении. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1993.

Информация об авторах:

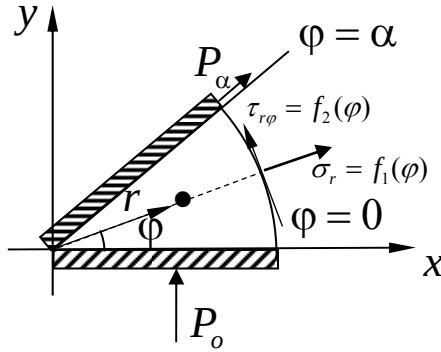
Савельева Инга Юрьевна (Москва) – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Прикладная математика». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: inga.savelyeva@gmail.com).

Журавский Александр Владимирович (Москва) – аспирант кафедры «Прикладная математика», МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: zhav16@mail.ru).

**ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ КРУГОВОГО СЕКТОРА,
ОДНА СТОРОНА КОТОРОГО СОПРИКАСАЕТСЯ С ЖЁСТКИМ ШТАМПОМ БЕЗ
ТРЕНИЯ, ДРУГАЯ СТОРОНА УСИЛЕНА СТРИНГЕРОМ**

Саргсян А.М.

Рассматривается упругое равновесие тонкого кругового сектора $\Omega = \{0 < r \leq 1, 0 < \alpha \leq 2\pi\}$ в случае, когда на дуговой части контура заданы внешние усилия. Упругое состояние кругового сектора определяется решением бигармонического уравнения для функции напряжений Эри при следующих граничных условиях [1,2]:



$$u_\varphi(r, 0) = \tau_{r\varphi}(r, 0) = 0, \quad (1)$$

$$\sigma_\varphi(r, \alpha) = u_r(r, \alpha) = 0, \quad (2)$$

$$\sigma_r(1, \varphi) = f_1(\varphi), \tau_{r\varphi}(1, \varphi) = f_2(\varphi). \quad (3)$$

Представляя функцию напряжения Эри в виде [3]

$$\Phi(r, \varphi) = r^{\lambda^+} (A \sin \lambda^+ \varphi + B \cos \lambda^+ \varphi + C \sin \lambda^- \varphi + D \cos \lambda^- \varphi),$$

где A, B, C, D – произвольные постоянные, λ – произвольный параметр, $\lambda^\pm = \lambda \pm 1$ и удовлетворяя граничным условиям (1), (2), получим однородную систему линейных алгебраических уравнений. Из условий существования нетривиального решения этой системы следует

$$A = C = 0$$

и тригонометрическое уравнение

$$\cos \lambda^+ \alpha \cdot \cos \lambda^- \alpha = 0,$$

корни которого действительны и просты

$$\lambda_k = \alpha_0 (2k + 1) + 1, \tilde{\lambda}_n = \alpha_0 (2n + 1) - 1, \alpha_0 = \pi/2\alpha, (k, n) = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4)$$

Требование конечности энергии упругой деформации в малой окрестности угловой точки сектора при конечной внешней нагрузке накладывает на корни (4) условия

$$\lambda_k > 0, \tilde{\lambda}_n > 0. \quad (5)$$

Условие (5) ограничивает область изменения параметров k и n :

1. При $0 < \alpha < 2\pi$ имеем $k = 0, 1, 2, \dots; n = 2, 3, 4, \dots$
2. При $0 < \alpha < \pi/2$ имеем $k = 0, 1, 2, \dots; n = 0, 1, 2, \dots$
3. При $\pi/2 < \alpha < 3\pi/2$ имеем $k = -1, 0, 1, \dots; n = 1, 2, 3, \dots$
4. При $3\pi/2 < \alpha < 2\pi$ имеем $k = -2, -1, 0, \dots; n = 2, 3, 4, \dots$

В данной работе рассматривается только первый случай, для которого функция напряжений Эри принимает вид

$$\Phi_1(r, \varphi) = D_0 r^{\lambda_0^+} \cos \lambda_0^- \varphi + D_1 r^{\lambda_1^+} \cos \lambda_1^- \varphi + \sum_{k=2}^{\infty} [D_k r^{\lambda_k^+} + B_k r^{\tilde{\lambda}_k^+}] \cos \alpha_0 k \varphi.$$

Определяемые с помощью функции Эри $\Phi_1(r, \varphi)$ перемещения и напряжения удовлетворяют условиям (1), (2).

Удовлетворяя граничным условиям (3) и учитывая ортогональность тригонометрических функций для B_k и D_k получим:

$$D_0 = 2\tilde{f}_{10}/\alpha(1+\alpha_0)(2-\alpha_0) = 2\tilde{f}_{20}/\alpha\alpha_0(1+\alpha_0),$$

$$D_1 = 2\tilde{f}_{11}/\alpha(1+3\alpha_0)(2-3\alpha_0) = 2\tilde{f}_{21}/3\alpha_0(1+3\alpha_0),$$

$$D_k\lambda_k = (\tilde{f}_{1k} + \tilde{f}_{2k})/\alpha, \quad B_k\tilde{\lambda}_k\tilde{\lambda}_k^+ = \left[(\tilde{f}_{1k} + \tilde{f}_{2k})(3-\lambda_k) - 2\tilde{f}_{1k} \right]/\alpha,$$

$$\tilde{f}_{1k} = \int_0^\alpha f_1(\varphi) \cos \alpha_0(2k+1)\varphi d\varphi, \quad \tilde{f}_{2k} = \int_0^\alpha f_2(\varphi) \sin \alpha_0(2k+1)\varphi d\varphi.$$

При этом, имеют место соотношения

$$\alpha_0\tilde{f}_{10} - (2-\alpha_0)\tilde{f}_{20} = 0, \quad 3\alpha_0\tilde{f}_{11} - (2-3\alpha_0)\tilde{f}_{21} = 0. \quad (6)$$

Исследуем поведение напряжений в окрестности вершины сектора

$$\sigma_\varphi = D_0\lambda_0\lambda_0^+r^{\lambda_0^-}\cos\lambda_0^-\varphi + D_1\lambda_1\lambda_1^+r^{\lambda_1^-}\cos\lambda_1^-\varphi + \sum_{k=2}^{\infty} \left[D_k\lambda_k\lambda_k^+r^{\lambda_k^-} + B_k\tilde{\lambda}_k\tilde{\lambda}_k^+r^{\tilde{\lambda}_k^-} \right] \cos\lambda_k^-\varphi, \quad (7)$$

$$\tau_{r\varphi} = D_0\lambda_0\lambda_0^-r^{\lambda_0^-}\sin\lambda_0^-\varphi + D_1\lambda_1\lambda_1^-r^{\lambda_1^-}\sin\lambda_1^-\varphi + \sum_{k=2}^{\infty} \left[D_k\lambda_k\lambda_k^-r^{\lambda_k^-} + B_k\tilde{\lambda}_k\tilde{\lambda}_k^+r^{\tilde{\lambda}_k^-} \right] \sin\lambda_k^-\varphi,$$

$$\sigma_r = D_0\lambda_0(2-\lambda_0^-)r^{\lambda_0^-}\cos\lambda_0^-\varphi + D_1\lambda_1(2-\lambda_1^-)r^{\lambda_1^-}\cos\lambda_1^-\varphi + \sum_{k=2}^{\infty} \left[D_k\lambda_k(3-\lambda_k^-)r^{\lambda_k^-} + B_k\tilde{\lambda}_k\tilde{\lambda}_k^+r^{\tilde{\lambda}_k^-} \right] \cos\lambda_k^-\varphi$$

Как следует из (7), при $k=2$ окрестность вершины сектора находится в малонапряжённом состоянии [4], т.е. напряжения стремятся к нулю, когда $\alpha < 5\pi/4$. Если $\alpha > 5\pi/4$, то напряжения стремятся к бесконечности при $r \rightarrow 0$.

Таким образом, $\alpha_2^* = 5\pi/4$ является предельным углом раствора сектора, меньше (больше) которого напряжения стремятся к нулю (к бесконечности) при $r \rightarrow 0$.

В научной литературе, по-видимому, отсутствует независимый от свойств материала такой предельный угол. Более того, при $k=3$ возникает второй, также неизвестный, предельный угол $\alpha_3^* = 7\pi/4$. Если функции $f_1(\varphi)$ и $f_2(\varphi)$ таковы, что коэффициент B_2 становится равным нулю, основной предельный угол будет α_3^* .

С учётом соотношений (6) уравнения статического равновесия кругового сектора удовлетворяются тождественно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Melan E. Ein Beitrag zur Theoretic geschweisster Verbindungen. // Ing. –Archiv. 1932. Bd.3. Heft 2. p.123.
2. Каландия А.И. Замечания об особенностях упругих решений вблизи углов. //ПИММ. 1969. Т.33. №1. С.132 – 135.
3. Williams M.L. Stress Singularities Resulting From Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates in Extension. //J.Appl. Mech. 1952. Vol. 19. №4. P.526 – 528.
4. Чобанян К.С. Напряжения в составных упругих телах. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1987. 338с.

Сведения об авторе:

Саргсян Азат Мкртычевич, канд.физ.-мат.наук, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении.

Адрес: Армения, 0018, Ереван, ул. Т.Меци 40, кв.47. **E-mail:** azat-sargsyan@mail.ru.

УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ ПО МИКРОПОЛЯРНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Саркисян А.А., Саркисян С.О.

Аннотация. В работе на основе системы уравнений геометрически нелинейной теории микрополярных упругих тонких пластин получена система линейных уравнений устойчивости плоского напряжённого состояния пластинки, сжатой в двух перпендикулярных направлениях усилиями p_1 и p_2 . Решена задача устойчивости прямоугольной пластинки, края которой шарнирно опёрты и сжата в одном направлении. На основе анализа численных результатов устанавливаются эффективные свойства микрополярного материала.

Рассмотрим изотропную микрополярную упругую прямоугольную пластинку толщины $2h$. Отнесём срединную плоскость пластинки к декартовой системе координат x_1, x_2 .

Пусть в микрополярной упругой тонкой пластинке осуществлён некоторое плоское напряжённо-деформированное состояние (НДС), которое будем называть основным докритическим и которое будет представлять собой решение следующей линейной системы уравнений [1]:

Уравнения равновесия

$$\frac{\partial T_{ii}^0}{\partial x_i} + \frac{\partial S_{ji}^0}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial L_{13}^0}{\partial x_1} + \frac{\partial L_{23}^0}{\partial x_2} + (S_{12}^0 - S_{21}^0) = 0 \quad i, j = 1, 2 \quad (1)$$

Физические соотношения

$$T_{ii}^0 = \frac{2Eh}{1-\nu^2} [\Gamma_{ii}^0 + \nu \Gamma_{jj}^0], \quad S_{ij}^0 = 2h[(\mu + \alpha) \Gamma_{ij}^0 + (\mu - \alpha) \Gamma_{ji}^0], \quad L_{i3}^0 = 2h \frac{4\gamma\epsilon}{\gamma + \epsilon} \kappa_{i3}^0 \quad (2)$$

Геометрические соотношения

$$\Gamma_{ii}^0 = \frac{\partial u_i^0}{\partial x_i}, \quad \Gamma_{ij}^0 = \frac{\partial u_j^0}{\partial x_i} - (-1)^j \Omega_3^0, \quad \kappa_{i3}^0 = \frac{\partial \Omega_3^0}{\partial x_i} \quad (3)$$

При граничных условиях

$$T_{ii}^0 = -p_i, \quad u_j^0 = 0, \quad L_{i3}^0 = 0, \quad \text{когда } x_i = 0; a, \quad \text{где } p_i = \text{const}. \quad (4)$$

Компоненты перемещений, деформаций, силовых и моментных напряжений, соответствующие этому НДС, отмечены нулевыми верхними индексами.

При потере устойчивости, докритическое НДС получит некоторые возмущения. Величины, характеризующие НДС, вызванное этими возмущениями, будем отмечать звездочкой сверху.

Возмущённое НДС в пластинке характеризуется величинами соответствующих сумм с индексами нуль и звёздочка.

Возмущения (т.е. величины с звёздочками сверху) представляются малыми и при преобразованиях их степенями выше первой будем пренебрегать.

Подставим отмеченные суммарные соотношения в систему уравнений геометрически нелинейной теории микрополярных пластин, которая выведена в работе [1]. В силу (1)-(4) уравнения возмущённого напряжённого состояния получим в виде:

Уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{ii}^*}{\partial x_i} + \frac{\partial M_{ji}^*}{\partial x_j} - N_{3i}^* = 0, \quad \frac{\partial L_{ii}^*}{\partial x_i} + \frac{\partial L_{ji}^*}{\partial x_j} + (-1)^j (N_{j3}^* - N_{3j}^*) = 0 \\ \frac{\partial N_{13}^*}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{23}^*}{\partial x_2} = P_1 \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1^2} + P_2 \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_2^2}, \quad L_{33}^* - \frac{\partial \Lambda_{13}^*}{\partial x_1} - \frac{\partial \Lambda_{23}^*}{\partial x_2} - (M_{12}^* - M_{21}^*) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Соотношения упругости

$$\begin{aligned} M_{ii}^* &= \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} [K_{ii}^* + \nu K_{jj}^*], \quad M_{ij}^* = \frac{2h^3}{3} [(\mu + \alpha) K_{ij}^* + (\mu - \alpha) K_{ji}^*] \\ N_{i3}^* &= 2h[(\mu + \alpha) \Gamma_{i3}^* + (\mu - \alpha) \Gamma_{3i}^*], \quad N_{3i}^* = 2h[(\mu + \alpha) \Gamma_{3i}^* + (\mu - \alpha) \Gamma_{i3}^*] \\ L_{ii}^* &= 2h[(\beta + 2\gamma) \kappa_{ii}^* + \beta(\kappa_{jj}^* + \iota)], \quad L_{33}^* = 2h[(\beta + 2\gamma) \iota + \beta(\kappa_{11}^* + \kappa_{22}^*)] \end{aligned}$$

$$L_{ij} = 2h[(\gamma + \varepsilon)\kappa_{ij} + (\gamma - \varepsilon)\kappa_{ji}], \quad \Lambda_{i3} = \frac{2h^3}{3} \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} l_{i3} \quad (6)$$

Геометрические соотношения

$$\Gamma_{i3} = \frac{\partial w}{\partial x_i} + (-1)^j \Omega_j, \quad \Gamma_{3i} = \psi_i - (-1)^j \Omega_j, \quad K_{ii} = \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i}, \quad K_{ij} = \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i} - (-1)^j \iota, \\ \kappa_{ii} = \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_i}, \quad \kappa_{33} = \iota, \quad \kappa_{ij} = \frac{\partial \Omega_j}{\partial x_i}, \quad l_{i3} = \frac{\partial \iota}{\partial x_i} \quad (7)$$

(в этих уравнениях звёздочку при величинах, характеризующих напряжённое состояние в пластинке, которое вызвано возмущениями, для удобства записи были опущены). К системе уравнений устойчивости микрополярной пластинки будем присоединить соответствующие граничные условия. При решении такой граничной задачи из условия нетривиальности решения получим значения критических величин внешнего воздействия.

Рассмотрим конкретную задачу, а именно: когда края пластинки шарнирно оперты:

$$M_{ii} = 0, \psi_j = 0, w = 0, L_{ij} = 0, \Omega_i = 0, \Lambda_{i3} = 0, \text{ когда } x_i = 0; a_i \quad (8)$$

и что внешние сжимающие усилия действуют только по направлению оси x_1 .

Легко заметить, что решением докритической граничной задачи (5)-(7) будет:

$$T_{11}^0 = -p_1, \quad T_{22}^0 = 0, \quad u_j^0 = 0, \quad L_{i3}^0 = 0, \text{ at } x_i = 0; a_i \quad (9)$$

Подставляя (9) в систему уравнений устойчивости пластинки (5)-(7), решение этой системы уравнений представим в виде:

$$w(x_1, x_2) = W \sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi x_2}{b}, \quad \iota(x_1, x_2) = I \cos \frac{m\pi x_1}{a} \cos \frac{n\pi x_2}{b} \\ \psi_i(x_1, x_2) = \Psi_i \cos \frac{m\pi x_i}{a} \sin \frac{m\pi x_j}{b}, \quad \Omega_i(x_1, x_2) = O_i \sin \frac{m\pi x_i}{a} \cos \frac{n\pi x_j}{b} \quad (10)$$

Решение (10) автоматически удовлетворяет граничным условиям (8). Подставляя (10) в систему уравнений (5)-(7), для определения $p_{1кр.}$ приходим к решению алгебраической однородной системы линейных уравнений. Критическое значение действующей сжимающей нагрузки получим от требования существования ненулевого решения полученной системы алгебраических уравнений:

Далее выполнен численный расчёт в случае, когда $m=n=1$, $a=b=0,07$ м, $h=a/40$, $\alpha = 1,6 \cdot 10^3$ Па, $\mu = 2$ МПа, $\lambda = 3$ МПа, $\gamma=\varepsilon = 150$ Н, $\beta=120$ Н. В результате, получено $p_{1кр.} = 206,596$. Та же задача решена по классической модели и получено: $p_{1кр.} = 164,493$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Саркисян А.А., Саркисян С.О. Математическая модель геометрически нелинейных микрополярных упругих тонких пластин. //XVII Международная конференция «Современные проблемы механики сплошной среды». Тр. конф. Ростов-на-Дону, 14-17 октября 2014 г. С. 80-184.

Информация об авторах:

Саркисян Арменуи Акоповна – к. ф.-м. н., доцент кафедры Высшая математика, Ширакский госуниверситет им. М. Налбандяна, (374 94) 42 21 03; **E-mail:** armenuhis@mail.ru

Саркисян Самвел Оганесович – чл.-корр. НАН РА, проф., д.ф.-м.н, зав.каф. Высшая математика, Ширакский госуниверситет им. М.Налбандяна, (374 93) 15 16 98,

E-mail: s_sargsyan@yahoo.com

КЛАССИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СТАТИКИ УПРУГИХ ТОНКИХ СТЕРЖНЕЙ С КРУГОВОЙ ОСЬЮ С УЧЁТОМ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ И МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Саркисян С.О., Хачатрян М.В.

Аннотация. В работе на основе метода гипотез, исходя из двумерных уравнений и граничных условий классической теории упругости построена прикладная модель (получены основные уравнения и установлен общий вариационный принцип) статики упругих тонких стержней с круговой осью с учётом поперечных сдвиговых деформаций. Для изучения конкретных граничных задач на основе применения законов перемещений и функционала полной потенциальной энергии системы, разработаны эффективные конечные элементы. Определяются жёсткостные характеристики конечного элемента и выполняется процедура формирования разрешающей системы алгебраических линейных уравнений. Рассматривается конкретная задача изгиба упругого стержня с круговой осью (четверть окружности), когда один из краёв стержня жёстко закреплён, а другой конец свободен, где приложена вертикальная сосредоточенная сила. Сначала ось стержня в целом принимается как один конечный элемент, далее рассматриваются два, четыре конечных элемента. Изучается практическая сходимости метода конечных элементов при помощи сравнения полученных результатов со значениями точного решения.

1. Постановка задачи. Основные гипотезы. Классическая модель статики упругих тонких стержней с круговой осью. Рассмотрим стержень с круговой осью ($r_1 \leq r \leq r_2$, $0 \leq \varphi \leq \varphi_1$) постоянного поперечного сечения (в виде прямоугольника: $2h \times b, b=1$; в дальнейшем радиус-вектор r произвольной точки рассматриваемой области представляется так: $r = r_0 + z$, где $-h \leq z \leq h$, $r_1 = r_0 - h$, $r_2 = r_0 + h$).

В срединной плоскости стержня имеют место основные уравнения статики плоской задачи классической теории упругости в полярных координатах [1].

Цель работы – построение уточнённой прикладной модели упругого тонкого стержня с круговой осью с учётом поперечных сдвиговых деформаций. Будем развивать метод гипотез работ [2] (для рассматриваемой задачи ограничиваясь классическим аналогом):

А) В качестве исходной кинематической примем гипотезу прямой линии (гипотезу Тимошенко). В соответствии с указанной гипотезой, первоначально перпендикулярный до деформации к средней линии срединной плоскости стержня, линейный элемент остаётся после деформации прямолинейным, но уже не перпендикулярным к деформированной средней линии, а поворачивается на некоторый угол, не изменяя при этом своей длины. Вследствие этого имеем линейный закон изменения перемещений по толщине срединной плоскости стержня:

$$V_1 = u(\varphi) + z\psi(\varphi), \quad V_2 = w(\varphi). \quad (1.1)$$

Здесь, $u(\varphi)$ и $w(\varphi)$ – перемещения точек средней линии в направлениях по её касательной и по нормали; $\psi(\varphi)$ – полный угол поворота первоначально нормального элемента;

Кинематическая гипотеза (1.1) дополняется статическими гипотезами:

Б) О малости нормального напряжения σ_{22} , относительно нормального напряжения σ_{11} в соответствующем уравнении закона Гука;

В) Относительно единицы будем пренебрегать всеми величинами порядка $\frac{h}{r_0}$;

Г) При определении деформаций и напряжений, сначала для касательного напряжения σ_{12} примем:

$$\sigma_{12} = \sigma_{12}^0(\varphi). \quad (1.2)$$

После определения указанных выше величин, формулу для σ_{12} будем уточнять следующим образом. Интегрируем по z соответствующее уравнение равновесия и при определении постоянного интегрирования (вернее, функции от φ), потребуем равенство нулю интеграла от $-h$ до h от полученного выражения. Полученное окончательное выражение после указанного интегрирования прибавим к формуле (1.2).

С целью приведения двумерной задачи теории упругости к одномерной, вводим статически эквивалентные напряжения усилия и моменты: N , Q , $M_{из}$.

В результате, приходим к следующим основным уравнениям прикладной модели стержня с

круговой осью, при которой учитываются поперечные сдвиговые деформации:

Уравнения равновесия

$$\frac{1}{r_0} N - \frac{1}{r_0} \frac{dQ}{d\varphi} = q_2^+ - q_2^-, \quad \frac{1}{r_0} Q - \frac{1}{r_0} \frac{dN}{d\varphi} = -(q_1^+ - q_1^-), \quad Q - \frac{1}{r_0} \frac{dM_{\text{из}}}{d\varphi} = h(q_1^+ + q_1^-); \quad (1.3)$$

Соотношения упругости

$$N = 2Eh\Gamma_{11}, \quad Q = 2\mu h\Gamma_{12}, \quad M_{\text{из}} = \frac{2Eh^3}{3} K_{11}; \quad (1.4)$$

Геометрические соотношения

$$\Gamma_{11} = \frac{1}{r_0} \frac{du}{d\varphi} + \frac{1}{r_0} w, \quad \Gamma_{12} = \frac{1}{r_0} \frac{dw}{d\varphi} - \frac{1}{r_0} u + \psi, \quad K_{11} = \frac{1}{r_0} \frac{d\psi}{d\varphi}. \quad (1.5)$$

Общий вид функционала потенциальной энергии деформации при изгибе упругого стержня с круговой осью выражается так:

$$U = \int_0^a W_0 dx_1, \quad W_0 = Eh\Gamma_{11}^2 + \frac{Eh^3}{3} K_{11}^2 + \mu h\Gamma_{12}^2, \quad (1.6)$$

W_0 – линейная плотность потенциальной энергии деформации. Основными кинематическими параметрами в задаче изгиба микрополярного упругого тонкого стержня с круговой осью являются: прогиб оси стержня - $w(s)$; осевое перемещение - $u(s)$; угол поворота нормального элемента - $\psi(s)$. Распределение принятых основных кинематических переменных вдоль длины оси стержня элемента будем аппроксимировать полиномами.

Для прогиба $w(s)$, осевого перемещения $u(s)$, угла поворота $\psi(s)$, примем:

$$w(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_7 s^7, \quad u(s) = a_8 + a_9 s + a_{10} s^2 + \dots + a_{15} s^7, \\ \psi(s) = a_{16} + a_{17} s + a_{18} s^2 + \dots + a_{24} s^7, \quad s = r_0 \varphi, \quad (1.7)$$

где a_i, b_i, c_i – коэффициенты, которые выражаются через узловые перемещения и повороты.

Как видим, данный конечный элемент имеет двадцать четыре степеней свободы.

Применяя процедуру метода конечного элемента, приходим к следующей системе алгебраических уравнений:

$$[K] \cdot \{\delta\} = [P]. \quad (1.8)$$

Здесь $[K]$ – матрица жёсткости элемента размером 24×24 , а $[P]$ – матрица усилий в узлах (матрица нагрузок).

Результат вычислений приведём для случая, когда физические постоянные и геометрические размеры балки имеют значения:

$$\mu = 7 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \quad E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}, \quad P = 1000 \text{ Н}, \quad a = 0.471 \text{ м}, \quad r_0 = 0.3 \text{ м}, \quad h = 3.75 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

В случае, когда балка, в целом, считается как один конечный элемент: $w = 0.003 \text{ м}$, $u = -0.019 \text{ м}$, $\psi = -0.012$. Точное решение задачи даёт: $w = 0.003 \text{ м}$, $u = -0.019 \text{ м}$, $\psi = -0.012$.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта № SCS 15T-2C138.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П. Курс теории упругости. Киев: Наукова-думка. 1972. 508с.
2. Sargsyan S. H. Effective Manifestations of Characteristics of Strength and Rigidity of Micropolar Elastic Thin Bars// Journal of Materials Science and Engineering. 2012. Vol.2. № 1. P.98-108.

Сведения об авторах:

Хачатрян Мелине Вардановна – аспирант кафедры Высшей математики Ширакского государственного университета им. М. Налбандяна, (+374 94) 61 82 13.

E-mail: khachatryanmeline@mail.ru

Саркисян Самвел Оганесович – член-корр. НАН Армении, доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. каф. Высшей математики Ширакского государственного университета им. М. Налбандяна, (+374 93) 15 16 98. **E-mail:** s_sargsyan@yahoo.com

ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ РОСТА КРОВЕНОСНЫХ СОСУДОВ

Стадник Н.Э., Романов А.А.

Аннотация. В представленной работе рассматриваются возможные подходы к моделированию процессов роста кровеносных сосудов человека. Решена краевая задача о поверхностном росте упругого тонкостенного цилиндра. Условие тонкостенности позволяет изучить конечные перемещения точек цилиндра в условиях малых деформаций. Обсуждаются особенности характеристик напряжённо-деформированного состояния, зависящие от механических параметров протекающих биологических процессов.

Заболевания, связанные с патологическим ростом стенок сосудов, являются основной причиной смертности населения. В основе патологического роста стенки сосуда чаще всего лежит атеросклероз, процессы роста при инфекционных и иммунных заболеваниях, артериоло- и артериосклероз, при гипертонической болезни, васкулиты.

В кровеносной системе человека выделяют три типа сосудов: артерии, вены и микроциркуляторное русло. К последнему типу, в свою очередь, относят гемокапилляры, артериолы, венулы, а также артериоло-венулярные анастомозы. Артерии и вены построены по единому плану, рис.1.

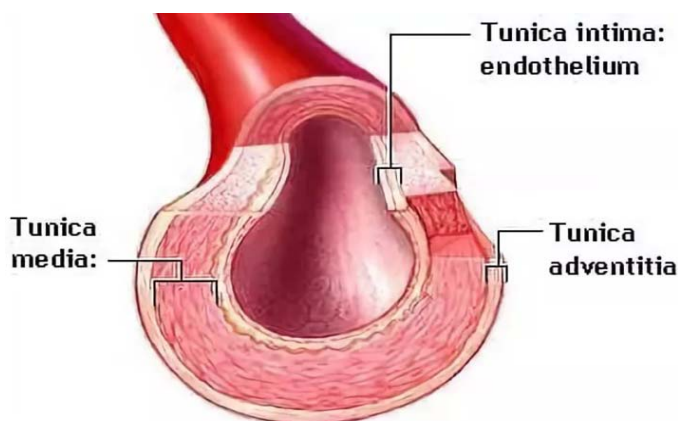


Рис. 1 – строение стенки сосуда (артерий и вен). Оболочки: Tunica intima - построена из эндотелия и находящимися над ним элементами соединительной ткани; Tunica media, состоит из мышечных клеток, эластических мембран и коллагена; Tunica adventitia, образована рыхлой соединительной тканью.

Под ростом сосудов будем понимать утолщение стенки нормального сосуда в следствии развития патологического процесса. В медицинском контексте, такой рост, как правило, представлен воспалительным процессом в стенке сосуда и процессом дистрофии (накопление определённых компонентов в строме сосуда). К росту стенки сосуда так же может привести процесс дистрофии без воспалительной реакции. Такие широко распространённые заболевания, как атеросклероз и васкулиты, инициируются воспалительной реакцией, которая приобретает хроническое течение и в дальнейшем сопровождается накоплением липидов и белков в стенке сосуда. Процессы ремоделирования сосуда, например, при артериальной гипертензии не всегда сопровождается воспалительная реакция, однако происходит утолщение стенки сосуда за счёт накопления компонентов межклеточного матрикса и активной пролиферации гладкомышечных клеток.

Атеросклероз характеризуется поражением артерий в виде отложений в интима липидов, белков и реактивного разрастания соединительной ткани с образованием бляшек.

При атеросклерозе в интима артерий появляются жиробелковый детрит (athero) и очаговое разрастание соединительной ткани (sklerosis), что приводит к формированию атеросклеротической бляшки, суживающей просвет сосуда. Поражаются артерии крупного и среднего калибра, реже в процесс вовлекаются мелкие артерии. Различают следующие стадии морфогенеза атеросклероза:

1. Долипидная стадия макроскопически не определяется.

2. Стадия липоидоза характеризуется очаговым пропитыванием интимы липидами (холестерином), липопротеидами, что ведёт к образованию жировых (липидных) пятен и полос. Макроскопически такие жировые пятна выглядят в виде участков жёлтого цвета, которые иногда могут сливаться и образовывать плоские удлинённые полосы, не возвышающиеся над поверхностью интимы.
3. В стадию липосклероза происходит размножение клеток фибробластов, рост которых стимулирует разрастание в интиме молодой соединительной ткани. Последующее созревание этой ткани сопровождается формированием фиброзной бляшки. Макроскопически фиброзные бляшки представляют собой плотные, круглой или овальной формы образования белого или желтовато-белого цвета, возвышающиеся над поверхностью интимы.
4. При атероматозе атероматозные массы отграничены от просвета сосуда слоем зрелой, гиалинизированной соединительной ткани, формируется покрышка бляшки.
5. Стадия изъязвления, сопровождающаяся образованием атероматозной язвы. Дефект интимы покрывается тромботическими наложениями.
6. Атерокальциноз характеризуется отложением в фиброзные бляшки солей кальция, т.е. их обызвествлением (петрификацией). Это завершающая стадия атеросклероза.

При гипертонической болезни в артериях крупного и среднего калибра выявляется эластоз и эластофиброз. Эластоз и эластофиброз – это последовательные стадии процесса и представляют собой гиперплазию и расщепление внутренней эластической мембраны, которая развивается компенсаторно в ответ на стойкое повышение артериального давления. В дальнейшем происходит гибель эластических волокон и замещение их коллагеновыми волокнами, т.е. склерозом. Стенка сосудов утолщается, просвет сужается. В мелких сосудах и артериолах клетки вырабатывают полупрозрачные массы, напоминающие гиалиновый хрящ. Со временем эти массы становятся более плотными, утолщают стенки и суживают просвет.

Процессы роста стенок сосудов можно описать при помощи математических моделей объёмного или поверхностного роста. Остановимся только на процессах поверхностного роста тонкостенных сосудов. Воспользуемся идеями механики растущих тел [1-5]. Основными переменными краевой задачи для растущего тела выберем тензор скоростей напряжений, тензор деформации скоростей и вектор скорости перемещения. На поверхности роста поставим специфическое краевое условие, зависящее от тензора кривизны поверхности роста и натяга приращиваемых элементов.

Рассматриваются некоторые модельные задачи для упругого тонкостенного поверхностно растущего цилиндра. Условие тонкостенности позволяет изучить конечные перемещения точек цилиндра при условии малых деформаций. Это, в частности, даёт возможность решить задачу с точными краевыми условиями на движущейся поверхности. Обсуждаются особенности поведения основных характеристик, зависящие от давления на внутреннюю поверхность цилиндра, натяга притекающих новых элементов и скорости притока этих элементов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ проекты № 17-51-45054, № 17-01-00712.

REFERENCES

1. Манжиров А.В., Черныш В.А. Контактная задача дискретного наращивания неоднородного вязкоупругого стареющего цилиндра системой жестких втулок // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 6. С. 1018–1025.
2. Манжиров А.В., Паршин Д.А. Моделирование процессов наращивания цилиндрических тел на вращающейся оправке с учетом действия центробежных сил // Изв. РАН. МТТ. 2006. № 6. С.149–166.
3. Manzhirrov A.V. “Fundamentals of mechanical design and analysis for AM fabricated parts.” *Procedia Manufacturing*. 2016. Vol.7. PP. 59-65.
4. Manzhirrov A.V. “Advances in the theory of surface growth with applications to additive manufacturing technologies.” *Procedia Engineering*. 2017. Vol. 173. PP. 11–16.
5. Manzhirrov A.V. “Mechanical analysis of an AM fabricated viscoelastic shaft under torsion by rigid disks.” *Lecture Notes in Engineering and Computer Science: Proceedings of the World Congress on Engineering 2017, WCE 2017, 5–7 July 2017, London, U.K., Vol. II. London: IAENG, 2017. PP. 856--860.*

Information about authors:

Никита Стадник – м.н.с., Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва Россия

E-mail: nik-122@mail.ru

Александр Романов – инженер, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва Россия

E-mail: malimo93@gmail.com

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ НУЖД СЕЙСМОЛОГИИ

Тагворян В.В.

Аннотация. Рассмотрены пространственные задачи теории упругости для слоистого пакета из ортотропных пластин, моделирующие поведение литосферных плит и блоков земной коры. Изучен случай, когда между некоторыми слоями пакета произошёл отрыв, а также случай, когда измерительные приборы типа наклономеров помещены между слоями с номерами $(k-1)$ и (k) . Найдены асимптотические решения пространственных задач теории упругости в обоих случаях, согласно данным измерительных приборов, которые позволяют проследить процесс накопления во времени критических деформаций, приводящий к землетрясению.

1. Тонкостенные слоистые структуры типа балок, пластин и оболочек являются составными элементами современных конструкций. Слоистые структуры являются естественными или искусственными. Одними из естественных слоистых структур являются литосферные плиты Земли и отдельные блоки земной коры.

В двадцатом столетии была установлена основная причина возникновения сильных землетрясений. Возникновение обуславливается тектоникой литосферных плит Земли ($\approx 95\%$ землетрясений) [1-3]. Большинство землетрясений сгруппировано в узких областях, сейсмическая и тектоническая активность в которых обусловлены взаимодействием примыкающих друг к другу литосферных плит («сейсмические зоны»). Процесс подготовки землетрясений охватывает два основных типа тектонических движений: медленные (вековые) и быстрые (скачкообразные). Вековые движения могут длиться десятки лет, поэтому являются квазистатическими, в результате, в литосферных плитах и в отдельных их участках накапливаются деформации, которые при достижении критического значения порядка 10^{-4} , а по данным известного японского сейсмолога Rikitake [1] – порядка $4.7 \cdot 10^{-5}$, приводят к глобальному разрушению (землетрясению) и основная часть накопленной с годами огромной потенциальной энергии выделяется в виде объёмных упругих продольных (первичных - primary) Р и сдвиговых (поперечных, вторичных - secondary) S-волн, а также поверхностных волн Релея и Лява. Всегда скорость V_P продольных волн больше скорости V_S сдвиговых волн. Это позволяет определить расстояние эпицентра землетрясения от заданной сеймостанции, а по данным трёх станций – место очага землетрясения.

В шестидесятые годы XX столетия было обнаружено изменение геометрии лицевой поверхности Земной коры до землетрясений. Тогда же возникла естественная задача – используя эти данные, определить напряжённо-деформированное состояние (НДС) литосферной плиты или соответствующего блока земной коры и провести мониторинг его изменения во времени, по данным новых измерений, с целью обнаружения критических деформационных состояний и мест их проявления. Однако, возникающая задача теории упругости оказалась неклассической и долгое время не было найдено удовлетворительное решение. Асимптотический метод решения сингулярно-возмущённых дифференциальных уравнений [4] позволил решить эту проблему.

Чтобы уменьшить влияние внешних аномальных (в основном, атмосферных) факторов на данные истинно происходящих процессов внутри пакета (литосферной плиты), в сейсмологии начали измерительные приборы (наклонометры и др.) помещать внутри пакета на некотором расстоянии от лицевой поверхности и по данным этих приборов составлять более объективное представление о НДС пакета.

В данной работе решены соответствующие квазистатические задачи теории упругости для слоистого пакета из N пластин, когда контакт между слоями с номерами $(k-1)$ и k неполный, т.е. произошёл отрыв, а также для случая, когда измерительные приборы помещены внутри

пакета на некотором расстоянии от лицевой поверхности. Для многослойного пластинчатого пакета найдены решения системы уравнений и соотношений трёхмерной задачи теории упругости с учётом объёмных сил (вес) и температурного поля по модели Дюгамеля-Неймана, моделирующие поведения литосферных плит и блоков земной коры, в двух случаях: когда между слоями с номерами $(k-1)$ и k есть отрыв и когда сейсмологические измерительные данные, позволяющие определить напряжённо-деформированные состояния слоёв пакета сняты с наклономеров и других измерительных средств, помещённых между слоями с номерами $(k-1)$ и k . Показано, что если входящие в граничные условия функции являются многочленами от тангенциальных координат, итерационный процесс обрывается и получается математически точное решение во внутренней задаче асимптотического подхода. В качестве иллюстрации приведены математически точные решения для пакета из четырёх ортотропных пластин. В первом случае считается, что между вторым и третьим слоями произошёл отрыв, во втором случае считается, что данные о перемещениях сняты с поверхности контакта между вторым и третьим слоями, а контакт между всеми слоями – полный. Мониторинг найденных решений во времени позволяет проследить процесс подготовки землетрясений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rikitake T. Earthquake prediction. – Amsterdam: Elsevier, 1976. 357 p.
2. Касахара К. Механика землетрясений. – М.: Мир, 1985. 264 с.
3. Ле Пишон К., Франшто Ж., Бонин Ж. Тектоника плит. – М.: Мир, 1977. 288 с.
4. Aghalovyan L.A. Asymptotic theory of anisotropic plates and shells. – Singapore-London: World Scientific Publishing, 2015. 376 p.

Сведения об авторах:

Тагворян Варужан Варданович – аспирант Института механики НАН РА,

(374 10) 47 10 17, (374 93) 80 55 40.

E-mail: varuzh1993@gmail.com

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБОЛОЧЕЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ ОДНОРОДНЫХ И КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ИНТЕНСИВНЫХ КРАТКОВРЕМЕННЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ ПРИ БОЛЬШИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ

Хайрнасов К.З.

Аннотация. В настоящей работе приведена математическая модель решения задачи поведения оболочечных конструкций при действии статических и динамических воздействий. Задача решается в геометрически нелинейной постановке применительно к методу конечных элементов. Рассматриваются композиционные структуры с учётом разнородности слоёв материала. Приведённые уравнения применялись при исследовании поведения оболочечных авиационных конструкций при действии динамических нагрузок. Результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными.

1. Введение. Исследованию конструкций при действии кратковременных динамических нагрузок уделялось значительное влияние в работах [1-4]. В то же время учесть многочисленные параметры динамического нагружения такие как скорость нагружения, характеристики динамического поведения материала и т.д. даже в нескольких работах не представляется возможным.

2. Постановка задачи. Построить математическую модель поведения конструкций из однородных и композиционных материалов при действии статических и динамических воздействий в геометрически нелинейной постановке.

3. Метод и построение решения. Для вывода математической модели исследования конструкций из однородных и композиционных материалов при интенсивных кратковременных воздействиях при больших перемещениях рассмотрим уравнениями Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial U}{\partial q_k} = Q_k \quad (1)$$

Здесь T – кинетическая энергия; U – потенциальная энергия системы; Q – внешние нагрузки, $\dot{q}$, q – обобщённые скорости и перемещения, k – степени свободы.

Воспользуемся соотношениями деформации-перемещения для умеренного прогиба:

$$\begin{aligned} \varepsilon_s &= e_s + \frac{(e_{13}^2 + e_{33}^2)}{2}; \quad \varepsilon_\theta = e_\theta + \frac{(e_{23}^2 + e_{33}^2)}{2}; \quad \varepsilon_{s\theta} = e_{s\theta} + \frac{e_{13}^2 e_{23}^2}{2}; \\ \chi_s &= \frac{\partial e_{13}}{\partial s}; \quad \chi_\theta = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial e_{23}}{\partial \theta} + e_{13} \sin \varphi \right); \quad \chi_{s\theta} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial e_{23}}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial e_{13}}{\partial \theta} - e_{23} \frac{\sin \varphi}{r} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} + \frac{\cos \varphi}{r} \right) e_{33} \right] \\ e_s &= \frac{\partial u}{\partial s} - w \frac{\partial \varphi}{\partial s}; \quad e_\theta = \frac{1}{r} \left(u \sin \varphi + \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \cos \varphi \right); \quad e_{s\theta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + r \frac{\partial v}{\partial s} - v \sin \varphi \right); \\ e_{13} &= \left(\frac{\partial w}{\partial s} + u \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right); \quad e_{23} = -\frac{1}{r} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v \sin \varphi \right); \quad e_{33} = -\frac{1}{2r} \left(r \frac{\partial v}{\partial s} + v \sin \varphi - \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \\ \varphi_s &= -(w_s + u \sin \varphi), \quad \varphi_\theta = -(w_\theta - v \cos \varphi)/r \end{aligned}$$

В уравнениях (2) обозначено: $\varepsilon_s, \varepsilon_\theta, \varepsilon_{s\theta}$ – деформации срединной поверхности оболочки по соответствующим координатам; $\chi_s, \chi_\theta, \chi_{s\theta}$ – деформации кривизны; e_{13}, e_{23} – углы поворота вокруг координатных линий; r – радиус оболочки; $\varphi_s, \varphi_\theta$ – углы наклона меридиана к оси оболочки и угол в окружном направлении; e_{33} – «кручение» срединной поверхности.

Задача решается методом конечных элементов. Перемещения для многослойных осесимметричных конечных элементов представляются в виде полиномов в направлении нормали, кольцевом и радиальном направлениях и рядов Фурье в кольцевом направлении [4]:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=0} \left[\left(1 - \frac{s}{l} \right) q_1 + \frac{s}{l} q_5 \right] \cos i\theta, \quad v = \sum_{i=0} \left[\left(1 - \frac{s}{l} \right) q_1 + \frac{s}{l} q_5 \right] \sin i\theta \\ w &= \sum_{i=0} \left[\left(1 + \frac{3s^2}{l^2} + \frac{2s^3}{l^3} \right) q_2 + \left(s - \frac{2s^2}{l} + \frac{s^3}{l^2} \right) q_3 + \left(\frac{3s^2}{l^2} + \frac{2s^3}{l^3} \right) q_6 + \left(-\frac{s^2}{l} + \frac{s^3}{l^2} \right) q_7 \right] \cos i\theta, \end{aligned} \quad (2)$$

где $q_1, q_2, \dots, q_8$ – обобщённые перемещения в узловых точках.

При нахождении U_H^3 и U_H^4 перемещение w принимаем в виде

$$w = \sum_{i=0} \left[\left(1 - \frac{s}{l} \right) q_2 + \frac{s}{l} q_6 \right] \cos i\theta \quad (3)$$

При таком представлении перемещений уравнение движения справедливо для любой гармоникой при наличии связи между гармониками, фигурирующими в последнем члене.

Уравнения равновесия, описывающие нелинейную динамическую реакцию, получаются из уравнений Лагранжа (1) и эти уравнения применимы как к линейным, так и нелинейным системам, при условии, что члены, характеризующие энергию деформации и работу, выражены через обобщённые координаты и их производные во времени и вариации.

Подставляя выражение энергии деформации, кинетическую энергию и вектор внешних сил в уравнение (1) и перенося в правую сторону величины, соответствующие нелинейным слагаемым, получаем уравнения движения, представляющие собой математическую модель для исследования конструкций из однородных и композиционных материалов при интенсивных кратковременных воздействиях при больших деформациях в виде

$$M\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{Q\} + \{\Delta Q\} - [K_G]\{q\} - \{Q^{нл}\}, \quad (4)$$

где $[M] = \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \iint (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2 + \dot{\phi}_s I_s + \dot{\phi}_\theta I_\theta) dA$ – матрица масс;

$[K] = \frac{\partial U^{(2)}}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q} \iint \sigma^L \varepsilon^L dA$ – матрица жёсткости;

$\{Q\} = \frac{\partial}{\partial q} \iint (P_u u + P_v v + P_w w) dA$ – вектор внешних сил;

$\{Q^{нл}\} = \frac{\partial U_n^3}{\partial q} + \frac{\partial U_n^4}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q} \iint (\varepsilon^L A \varepsilon^H + \varepsilon^H B \chi + \varepsilon^H A \varepsilon^H) dA$ – геометрически нелинейный член;

$K_G = \frac{\partial}{\partial q} \iint (\sigma_{нач}^L + \sigma_{нач}^H) \varepsilon^H dA$ – матрица начальных напряжений;

$\{\Delta Q\} = \frac{\partial W^{(2)}}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q} (\iint (-P_w w(e_s + e_\theta) + P_v v e_{23} + P_u u e_{13}) dA) / 2$ – изменение потенциала внешних сил для неконсервативных нагрузок;

В формулах (4) обозначено: «л» – линейная компонента, «н» – нелинейная компонента, «нач» – начальное напряжение (преднапряжение), точка над буквой означает дифференцирование по времени.

Точное решение нелинейных уравнений динамики для оболочек и конструкций, особенно это относится к сложным многослойным конструкциям, когда число уравнений зависит от числа слоёв, сталкивается с большими математическими трудностями. Поэтому, в основном, решение такого рода задач (дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами) проводится численно.

Суть метода заключается в том, что нелинейные члены помещаются в правые части уравнений равновесия и рассматриваются, как дополнительные обобщённые силы, вычисляемые по значениям обобщённых координат, полученным на предыдущем шаге нагружения [4]. Для улучшения сходимости результатов применяются итерационные методы и экстраполяция.

4. Анализ результатов. По разработанной программе с применением осесимметричных конечных элементов в геометрически нелинейной постановке было исследовано поведение тороидальной оболочки при действии быстро возрастающего и внезапного внешнего нормального давления [1]. Результаты расчётов показали, что форма поведения сечения тороидальной оболочки не зависит от формы начального прогиба, а определяется его симметричностью и кососимметричностью относительно горизонтальной оси сечения.

5. Заключение. Выведена математическая модель исследования оболочечных конструкций из однородных и композиционных материалов при статических и динамических нагрузках в геометрически нелинейной постановке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Образцов И.Ф., Вольмир А.С., Хайрнатов К.З. Тороидальные оболочки: запаздывающие катастрофы при динамическом нагружении. // Докл. АН СССР. 1982. Т.266. №6. С. 1343-1346.
2. Хайрнатов К.З. Моделирование поведения кольцевой пластинки при импульсном нагружении. / Горный информационно-аналитический бюллетень. 2009. № 7. С.52-63.
3. Хайрнатов К.З. Моделирование процесса штамповки деталей авиационной техники. // Вестник МАИ. 2013. №5. С.73-77.
4. Стриклин Д., Наваратна Д., Пиан Т. Усовершенствование расчета оболочек матричным методом перемещений. // Ракетная техника и космонавтика. 1986. Т.4. №6. С.253-254.

Сведения об авторе:

Хайрнатов Камил Зайнутдинович – к.т.н., доцент Московского авиационного института, 8 917 512 22 78, e-mail: kamilh@mail.ru

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ОБОЛОЧЕЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ БОЛЬШИХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Хайрнасов К.З.

Аннотация. В настоящей работе рассматривается математическая модель динамической устойчивости кольцевой пластины при больших упругопластических деформациях. Задачи такого рода встречаются при штамповке давлением, например, импульсным магнитным полем кольцевых пластин, опёртой по внутреннему контуру авиационных конструкций. Проведённые исследования показали хорошее согласование предложенной математической модели с представленными экспериментальными данными. Основным результатом настоящего исследования явилась возможность управления процессом потери устойчивости тонкостенных пластин и оболочек при больших упругопластических деформациях в условиях динамического нагружения.

1. Введение. Изготовление тонкостенных деталей, имеющих выпуклые борта, традиционными методами штамповки сопровождается потерей устойчивости и большим объёмом ручных доводочных работ и брака. Применение динамического нагружения и, в частности, штамповки давлением импульсным магнитным полем позволяет значительно «отодвинуть» потерю устойчивости заготовки, улучшить качество и снизить стоимость деталей. Проблемы динамической устойчивости при больших перемещениях пластин и оболочек изучены крайне недостаточно, не предложен физически обоснованный критерий потери устойчивости. Во многих операциях холодного деформирования потеря устойчивости происходит в момент формообразования конического полуфабриката из плоской кольцевой пластинки, чем и вызван выбор расчётной модели.

Исследованию конструкций при действии кратковременных динамических нагрузок уделялось значительное влияние в работах [1-4]. В то же время учесть многочисленные параметры динамического нагружения такие как скорость нагружения, характеристики динамического поведения материала и т.д. даже в нескольких работах не представляется возможным.

2. Постановка задачи. Исследовать поведение кольцевой пластинки, опёртой по внутреннему контуру при действии динамических нагрузок высокой интенсивности. При решении задачи предположить, что свойства материала описываются теорией пластического течения и удовлетворяют условию текучести Мизеса. Требуется построить математическую модель поведения кольцевой пластинки при действии интенсивного динамического воздействия в геометрически и физически нелинейной постановке.

3. Метод и построение решения. Задача решается методом конечных элементов. В качестве конечного элемента принимался тонкостенный осесимметричный конечный элемент с аппроксимацией перемещений в направлении нормали, кольцевом и радиальном направлении в виде полиномов от радиального расстояния и рядов Фурье в кольцевом направлении [5].

Математическую модель для исследования конструкций из однородных и композиционных материалов при интенсивных кратковременных воздействиях при больших деформациях представляется в виде

$$M\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{Q\} + \{\Delta Q\} - [K_G]\{q\} - \{Q^{nl}\} - \{Q^P\}, \quad (1)$$

где $[M] = \frac{\partial}{\partial q} \iint (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2 + \dot{\beta}_s I_s + \dot{\beta}_\theta I_\theta) dA$ – матрица масс;

$[K] = \frac{\partial U^{(2)}}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q} \iint \sigma^l \varepsilon^l dA$ – матрица жёсткости;

$\{Q\} = \frac{\partial}{\partial q} \iint (P_u u + P_v v + P_w w) dA$ – вектор внешних сил;

$\{Q^{nl}\} = \frac{\partial U_h^3}{\partial q} + \frac{\partial U_h^4}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q} \iint (\varepsilon^l A \varepsilon^h + \varepsilon^h B \chi + \varepsilon^h A \varepsilon^h) dA$ – геометрически нелинейный член;

$K_G = \frac{\partial}{\partial q} \iint (\sigma_{нач}^l + \sigma_{нач}^h) \varepsilon^h dA$ – матрица начальных напряжений;

$\{\Delta Q\} = \frac{\partial W^{(2)}}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q} (\iint (-P_w w(e_s + e_\theta) + P_v v e_{23} + P_u u e_{13}) dA) / 2$ – изменение потенциала внешних сил для неконсервативных нагрузок;

$\{Q^p\} = \frac{\partial}{\partial q} \iint (\sigma^L + \sigma^H) \varepsilon^L dA$ – вектор накопленной пластичности.

Матрица упруго-пластических деформаций находится из соотношения

$$\{\sigma\} = [E_{пл}]\{\varepsilon\}$$

$\{\sigma\} = \{\sigma_s, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{s\theta}, \tau_{\theta z}, \tau_{sz}\}$ – вектор-столбец напряжений; $\{\tau\} = \{\varepsilon_s, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z, \varepsilon_{s\theta}, \varepsilon_{\theta z}, \varepsilon_{sz}\}$ – вектор-столбец деформаций;

$$[E_{пл}] = \left[[E] - \frac{[E][A][A]^T[E]^T}{H + [A]^T[E][A]} \right] \text{ – упруго-пластический модуль;}$$

$$\{A\} = 6 \cdot \{\sigma_s - \sigma_o, \sigma_\theta - \sigma_o, \sigma_z - \sigma_o, 2\tau_{s\theta}, 2\tau_{\theta z}, 2\tau_{sz}\}, \sigma_o = \sigma_s + \sigma_\theta + \frac{\sigma_z}{3}, H = \frac{EE^T}{E - E^T}$$

Переход к зоне пластического течения осуществляется при выполнении условия пластического течения Мизеса:

$$\sqrt{0,5((\sigma_s - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_s - \sigma_z)^2) + 6(\tau_{s\theta}^2 + \tau_{\theta z}^2 + \tau_{sz}^2)} \gg \sigma_T$$

В формулах (7) обозначено: «л» – линейная компонента, «н» – нелинейная компонента, «нач» – начальное напряжение (преднапряжение), точка над буквой означает дифференцирование по времени.

В выражении энергии деформации удерживались нелинейные члены вплоть до четвёртого порядка включительно.

При решении уравнений (1) нелинейные члены помещаются в правые части уравнений равновесия и рассматриваются, как дополнительные обобщённые силы, вычисляемые по значениям обобщённых координат, полученным на предыдущем шаге нагружения [1-5]. Для улучшения сходимости результатов применяются итерационные методы и экстраполяция.

Решение задачи больших перемещений и деформаций распадается на несколько этапов. При достижении прогибов порядка половины толщины пластинки от исходного состояния, матрицы масс, жёсткости и вектор обобщённых внешних сил пересчитываются с учётом достигнутого уровня напряжённо-деформированного состояния и изменившейся геометрии пластины. Процесс вычисления продолжается до потери устойчивости пластины. За критерий потери устойчивости принимается нагрузка, при которой происходит резкое возбуждение гармоник, отличной от нулевой. Полученные решения были использованы при расчёте динамических процессов отбортовки, вытяжки без прижима и вытяжке в матрице с коническим заходом. Наблюдалось согласование теоретических и экспериментальных результатов, приведённых в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хайрнатов К.З., Юдаев В.Б., Фаворин В.Н. Динамика и устойчивость пластин при больших деформациях. //Труды II Всесоюзного симпозиума «Устойчивость в механике деформируемого твердого тела». – Калинин, 1986. – 10 с.
2. Хайрнатов К.З., Юдаев В.Б., Фаворин В.Н. Поведение импульсно нагруженных пластин при больших деформациях. //Труды Международной конференции по механике разрушения. Китай, Пекин, 1987, с. 9-15.
3. Хайрнатов К.З. Моделирование поведения кольцевой пластинки при импульсном нагружении. /Горный информационно-аналитический бюллетень. 2009, № 7, с. 52-63.
4. Хайрнатов К.З. Моделирование процесса штамповки деталей авиационной техники. //Вестник МАИ. 2013. №5. С.73-77.
5. Стриклин Д., Наваратна Д., Пиан Т. Усовершенствование расчета оболочек матричным методом перемещений. // Ракетная техника и космонавтика. 1986. Т.4. №6. С. 253 -254.

Сведения об авторе:

Хайрнатов Камил Зайнутдинович – к.т.н., доцент Московского авиационного института, 8 917 512 22 78;

E-mail: kamilh@mail.ru

ОБ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ АНИЗОТРОПНОЙ ДВУХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ НЕПОЛНОМ КОНТАКТЕ МЕЖДУ СЛОЯМИ

Хачатрян А.М., Баласанян Е.С.

Аннотация. Обсуждается вопрос определения напряжённо-деформированного состояния в трёхмерной задаче для анизотропной двухслойной пластинки, на лицевых плоскостях которой заданы смешанные краевые условия теории упругости, при неполном контакте между слоями. С применением асимптотического метода построены решения внутренней задачи. Рассмотрены конкретные примеры.

В работе [1] асимптотическим методом построена приближённая теория изгиба пластин из изотропных материалов. Классические статические краевые задачи анизотропных полос, пластин и оболочек асимптотическим методом решены в [2]. Асимптотический метод использован для решения второй и смешанных краевых задач в [2,3]. В [4] тем же методом определено напряжённо-деформированное состояние слоистой пластинки, слои которой обладают анизотропией общего вида. Было проведено сопоставление выведенных основных уравнений с соответствующими уравнениями классической теории слоистых пластин, когда имеется плоскость упругой симметрии.

В работах [5,6] рассмотрен вопрос определения напряжённо-деформированного состояния анизотропной однослойной и слоистой термоупругой пластинки, когда на одной из лицевых поверхностей заданы значения напряжений, а на другой – нормальная компонента вектора перемещения и тангенциальные напряжения. Смешанная краевая задача для анизотропной пластинки решена в [7].

Рассматривается смешанная краевая задача теории упругости для двухслойной анизотропной пластинки: $\Omega = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, -h_2 \leq z \leq h_1, h_1 + h_2 \ll l\}$, на лицевых плоскостях которой заданы смешанные краевые условия теории упругости. Величины, относящиеся к верхнему слою, отмечены индексом (1), а к нижнему слою – индексом (2). Толщины и коэффициенты упругости слоёв соответственно h_k и $a_{ij}^{(k)}$ ($k = 1, 2$), а $l = \max(a, b)$.

На лицевых плоскостях пластинки заданы граничные условия:

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}^{(2)} = \sigma_{xz}^{-(2)}(x, y), \quad \sigma_{yz}^{(2)} = \sigma_{yz}^{-(2)}(x, y), \quad w^{(2)} = \frac{l}{h} w^-(x, y) \quad \text{при } z = -h_2 \\ u^{(1)} = \frac{l}{h} u^+(x, y), \quad v^{(1)} = \frac{l}{h} v^+(x, y), \quad \sigma_z^{(1)} = \frac{l}{h} \sigma_z^+(x, y) \quad \text{при } z = h_1. \end{aligned} \quad (1)$$

Между слоями выполняется неполный контакт, то есть при $z = 0$

$$\sigma_{xz}^{(1)} = \sigma_{xz}^{(2)}, \quad \sigma_{yz}^{(1)} = \sigma_{yz}^{(2)}, \quad \sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{(2)}, \quad w^{(1)} = w^{(2)}, \quad u^{(2)} - u^{(1)} = f_1(x, y), \quad v^{(2)} - v^{(1)} = f_2(x, y) \quad (2)$$

Для решения поставленной задачи будем исходить из трёхмерных уравнений теории упругости [2]

В этих уравнениях, вводя безразмерную координатную систему $\xi = x/l$, $\eta = y/l$, $\zeta = z/h$ и безразмерные перемещения $U^{(k)} = u^{(k)}/l$, $V^{(k)} = v^{(k)}/l$, $W^{(k)} = w^{(k)}/l$, получим систему, которая содержит малый геометрический параметр $\varepsilon = h/l$. Также используются следующие обозначения $\zeta_1 = h_1/h$, $\zeta_2 = -h_2/h$, $h_1 + h_2 = 2h$. Решение полученной сингулярно-возмущённой системы состоит из решений внутренней задачи и пограничного слоя.

Для решения внутренней задачи используется асимптотический метод интегрирования и все напряжения и перемещения представляются в виде суммы [1-4]:

$$Q^{(k)} = \varepsilon^q \sum_{s=0}^S \varepsilon^s Q^{(s,k)} \quad (4)$$

где $Q^{(k)}$ – любое из напряжений или безразмерных перемещений.

Значения для q подбирается таким образом, чтобы получить непротиворечивую систему. Для рассматриваемой задачи эта цель достигается при [3, 5-6]:

$$q = -1 \text{ для } \sigma_x^{(k)}, \sigma_y^{(k)}, \sigma_{xy}^{(k)}, \sigma_z^{(k)}, U^{(k)}, V^{(k)}, W^{(k)}, \quad q = 0 \text{ для } \sigma_{xz}^{(k)}, \sigma_{yz}^{(k)} \quad (5)$$

Подставляя (1.4), с учётом (1.5), в преобразованные уравнения теории упругости и интегрируя полученную систему по ζ , получим:

$$\begin{aligned} \sigma_z^{(k,s)} &= \sigma_z^{*(k,s)} + \sigma_{z0}^{(k,s)}, \quad \sigma_x^{(k,s)} = \sigma_x^{*(k,s)} + \tau_{x0}^{(k,s)} + a_3 \sigma_{z0}^{(k,s)}, \quad (x, y; a, b), \\ U^{(k,s)} &= u^{*(k,s)} + u^{(k,s)}(U, V, W), \\ \sigma_{xy}^{(k,s)} &= \sigma_{xy}^{*(k,s)} + \tau_{xy0}^{(k,s)} + c_3^{(k)} \sigma_{z0}^{(k,s)}, \quad \sigma_{xz}^{(k,s)} = \sigma_{xz}^{*(k,s)} + \tau_{xz1}^{(k,s)} \zeta + \sigma_{xz0}^{(k,s)}, \quad (x, y) \end{aligned} \quad (6)$$

Значения напряжений $\tau_{x0}^{(k,s)}, \tau_{xy0}^{(k,s)}, \tau_{xz1}^{(k,s)}$ и величин со звездочками определяются, как в случае однослойной класинки, необходимо добавить верхний индекс k . $\sigma_{xz0}^{(k,s)}, \sigma_{yz0}^{(k,s)}, \sigma_{z0}^{(k,s)}, u_0^{(k,s)}, v_0^{(k,s)}, w_0^{(k,s)}$ – неизвестные функции интегрирования определяются с помощью условий (1) и (2).

Более подробно рассмотрена модель нежёсткого контакта. Тогда условия неполного контакта примут вид:

$$u^{(2)} - u^{(1)} = \chi_1 \frac{l}{h} \sigma_{xz}(z=0), \quad v^{(2)} - v^{(1)} = \chi_2 \frac{l}{h} \sigma_{yz}(z=0). \quad (7)$$

где постоянные χ_1, χ_2 имеют размерность m^3/H и для анизотропных материалов имеют, вообще говоря, разные количественные значения.

Для определения $\sigma_{xz0}^{(k,s)}$ и $\sigma_{yz0}^{(k,s)}$ выведена система дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \chi_1 L_{11} \left(C_{ij}^{(2)} \right) \sigma_{xz0}^{(2,s)} + \chi_2 L_{12} \left(C_{ij}^{(2)} \right) \sigma_{yz0}^{(2,s)} - \sigma_{xz0}^{(2,s)} &= p_1^{(s)} \\ \chi_1 L_{12} \left(C_{ij}^{(2)} \right) \sigma_{xz0}^{(2,s)} + \chi_2 L_{22} \left(C_{ij}^{(2)} \right) \sigma_{yz0}^{(2,s)} - \sigma_{yz0}^{(2,s)} &= p_2^{(s)}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $L_{ij} \left(C_{ij}^{(2)} \right)$ – известные дифференциальные операторы, а $p_1^{(s)}$ и $p_2^{(s)}$ – обобщённые нагрузки.

Имея решение системы (3) по формулам (6), получим окончательное решение внутренней задачи. В качестве иллюстрации рассмотрен частный пример, когда

$$\sigma_z^+ = 0, \quad u^+ = v^+ = 0, \quad w^- = 0, \quad \sigma_{xz}^- = \tau_1 \cos \frac{2\pi}{a} x \cos \frac{2\pi}{b} y, \quad \sigma_{yz}^- = \tau_2 \sin \frac{2\pi}{a} x \sin \frac{2\pi}{b} y. \quad (9)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // ПММ. 1962. Т.26. Вып. 4. С. 668-686.
2. Aghalovian L.A. Asymptotic Theory of Anisotropic Plates and Shells. Singapore-London: World Scientific Publ. 2015. 376p.
3. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: Изд. «Гитутюн» НАН РА. 2005. 468с
4. Агаловян Л.А., Багдасарян Ю.М., Хачатрян А.М. К определению напряженно-деформированного состояния слоистых пластин с анизотропией общего вида // Изв. НАН Армении. Механика. 1996. Т.49. №3. С. 10-22.
5. Агаловян Л.А., Товмасыан А.Б. Асимптотическое решение смешанной трехмерной внутренней задачи для анизотропной термоупругой пластинки // Изв. НАН Армении. Механика. 1993. Т.46. №3-4. С.3-11.
6. Петросян Г.А., Хачатрян А.М. Асимптотическое решение одной смешанной краевой задачи анизотропной пластинки. // Изв. НАН РА. Механика. 2009. Т.62. № 4. С. 65-72.

Сведения об авторах:

Хачатрян Александр Мовсесович – в. н. с. Института механики НАН РА, г.Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24/2. Тел.: (+37499) 211949, e-mail: alexkhach49@yandex.ru.

Баласанян Евгения Самвеловна – кафедра математики АрГУ, НКР, Степанакерт, ул. Мхитара Гоша, 5. Тел.: (+37497) 170620, E-mail: majvazjan@mail.ru

СОВМЕСТНАЯ РАБОТА ПОЛИМЕРКОМПОЗИТНОЙ АРМАТУРЫ С ЦЕМЕНТНЫМ БЕТОНОМ

Хозин В.Г., Гиздатуллин А.Р.

Аннотация. Приведены результаты экспериментальных исследований сцепления цементного бетона различного класса с полимеркомпозитной арматурой (ПКА) стекло - и бальтопластиковой, имеющей разный тип поверхностного рельефа стержней, образуемого навивкой на них тонкого жгута, пропитанного связующим или «опесчаниванием». Параллельно испытаны на вырыв из бетона образцы стальной арматуры периодического профиля А400. Установлена роль трения, адгезии и механического зацепления на сцепления ПКА и бетона. Оценено влияние прочности бетона и различных эксплуатационных факторов на прочность сцепления с бетоном.

В статье дана классификация полимеркомпозитной арматуры, её характеристики в соответствии с межгосударственным стандартом 31938-2012 «Арматура композитная полимерная для армирования бетонных конструкций. Общие технические условия».

Приведены результаты исследования прочности сцепления ПКА различного типа поверхностного профиля при вырыве из бетона разного класса, проведённые методом прямого вырыва образцов. Показаны характер и картина разрушения ПКА и бетона в контактной зоне, диаграммы «напряжение сцепления-деформация ПКА». Исследовано влияние внешних факторов, моделирующих различные условия производства и эксплуатации конструкций на сцепление ПКА с бетоном: температурно-влажностной обработки, повышенных и переменных температур, щелочной среды в сравнении со стальной арматурой. Выполнен расчётно-теоретический анализ физических моделей сцепления с бетоном четырёх исследуемых типов ПКА как суммы трёх факторов: адгезии бетона к полимерной поверхности, механического зацепления за выступающие элементы профиля и трения. На основе этого анализа построены кривые «нагрузка-проскальзывание» для всех типов ПКА с учётом вклада каждого из трёх факторов в изменение величины сцепления при вырыве.

По результатам испытаний установлено, что рост прочности бетона приводит к пропорциональному увеличению прочности сцепления с ним всех типов ПКА. При этом, наибольшие величины сцепления ПКА с бетоном лимитированы прочностью самого композитного материала, полимерного связующего на сдвиг и его адгезией к волокнистому наполнителю и к зернам песчаной «посыпки». Поэтому, после достижения максимальных значений (определённых для каждого типа ПКА), увеличение прочности бетона, практически не меняет его сцепление с композитной арматурой, в отличие от пропорционально растущего сцепления со стальной.

На основании проведённых исследований сформулированы рекомендации по корректировке значений коэффициентов, учитывающих тип поверхностного профиля, в методике действующего СП 63.13330.2012 по расчёту длины анкеровки и ширины раскрытия трещин бетонных конструкций с ПКА. Даны рекомендации по проектированию и изготовлению изгибаемых конструкций с ПКА.

REFERENCE

1. Кузеванов Д.В. Научно-технический отчет «Конструкции с композитной неметаллической арматурой. Обзор и анализ зарубежных и отечественных нормативных документов», 2012г. [Электронный ресурс] // НИИЖБ им. А.А. Гвоздева Лаборатория № 2 URL: <http://www.niizhb2.ru/Article/nka2012.pdf> (дата обращения 12.01.2016 г.)
2. Brahim Benmokrane , Ehab El - Salakawy, Zoubir Cherrak , Allan Wiseman. Fibre-reinforced polymer composite bars for the structural concrete slabs of a Public Works and Government Services Canada parking garage // Canadian journal of civil engineering.-2004.-№31.-p.732–748.
3. Фролов Н. П. Стеклопластиковая арматура и стеклопластбетонные конструкции / Н. П. Фролов. – М.: Стройиздат, 1980. – 104 с.
4. Мулин Н.М. Стержневая арматура железобетонных конструкций. М.: Стройиздат, 1975. 233 с.
5. Холмянский М.М. Контакт арматуры с бетоном.-М.:Стройиздат, 1981.-184 с.,ил.
6. Мадатян С.А. Арматура железобетонных конструкций. М.: Воентехлит. 2000, 256 с.
7. Marta Baena Munoz. Study of bond behaviour between FRP reinforcement and concrete. Technology doctorate program. – Girona. 2010.-308 p.
8. Baena M. Experimental study of bond behaviour between concrete and FRP bars using a pull-out test / Marta Baena, Lluís Torres, Albert Turon, Cristina Barris// An International Journal «Composites Part B: Engineering». – United Kingdom, 2009. – P. 784-797.
9. H. Mazaheripour, J.A.O. Barrosa, J.M. Sena-Cruza, M. Pepeb, E. Martinellib.- Experimental study on bond performance of GFRP bars in self-compacting steel fiber reinforced concrete.//Composite Structures.-2013. № 95.- P. 202–212.
10. Laura De Lorenzis, Karin Lundgren, Andrea Rizzo. Anchorage Length of Near-Surface Mounted Fiber- Reinforced Polymer Bars for Concrete Strengthening - Experimental Investigation and Numerical Modeling/ Laura De Lorenzis // ACI STRUCTURAL JOURNAL.-2004.-№ 101.- p. 269-278
11. De Lorenzis, and A. Nanni.-Bond Between Near Surface Mounted FRP Rods and Concrete in Structural Strengthening. //ACI Structures Journal. -2002. 99, No. 2, - P. 123-133.

Information about authors:

Хозин Вадим Григорьевич – профессор, доктор технических наук, Казанский Государственный архитектурно-строительный Университет, +7 (903) 3423295, +7(843)2383913

E-mail: khozin.vadim@yandex.ru

Гиздатуллин Антон Ринатович – аспирант, Казанский Государственный архитектурно-строительный Университет, +7 (917)2874466.

E-mail: antonchiks@mail.ru

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТЕЛ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ С УЧЁТОМ ИЗНОСА

Чебаков М.И., Данильченко С.А., Ляпин А.А.

Аннотация. Прогнозирование износа ответственных деталей различных трибосопряжений в машиностроении представляется одной из важнейших задач. Одним из путей прогноза является математическое моделирование контактного взаимодействия деталей узлов трения при наличии износа. В настоящее время в литературе описано достаточно много различных моделей износа. Их математические выражения варьируются от простых эмпирических соотношений до сложных уравнений, опирающихся на физические понятия и определения. Параметры и переменные, используемые в них, часто действительны только для конкретных случаев. В русскоязычной литературе широко известны работы Александрова В.М., Галина Л.А., Горячевой И.Г., Добычина М.Н., Коваленко Е.В., Колмогорцева В.Ф., Коровчинского М.В., Крагельского И.В., Манжирова А.В., Солдатенкова И.А., Торской Е.В. и др., в которых исследуются задачи о контактном взаимодействии при наличии износа в различных постановках (см. [1] и др.)

В представляемой работе в качестве примера рассматривается нестационарная контактная задача, моделирующая взаимодействие вращающегося тормозного диска и тормозной колодки при наличии износа их контактирующих поверхностей. Скорость износа рассчитывалась согласно модели Аркарда при различных значениях ее параметров.

1. Решение задачи. Для решения поставленной задачи был использован метод конечных элементов и специальный программный комплекс ANSYS. Для улучшения сходимости алгоритма расчёта задачи и сокращения времени вычислений решение осуществлялось в два этапа. На первом этапе решалась статическая контактная задача теории упругости о вдавливании колодок в упругий диск. На втором этапе – нестационарная задача о взаимодействии вращающегося диска и колодок с учётом трения и износа. Скорость износа $\bar{w}$ рассчитывалась согласно модели Аркарда (Archard) [2]:

$$\bar{w} = \frac{K}{H} V_{rel}^n p^m,$$

где K – коэффициент износа, H – твёрдость материала, V_{rel} – относительная скорость скольжения, p – контактное давление, m, n – положительные числа.

Конечно – элементная сетка строилась с использованием 20-узловых упругих элементов SOLID186. С помощью специальных макросов APDL ANSYS было обеспечено присвоение этим элементам различных постоянных значений модуля Юнга.

Для моделирования контактного взаимодействия между поверхностью диска и подошвой колодки создавалась контактная пара, определяемая элементами CONTA174 и TARGE170.

Для решения нестационарной задачи были установлены минимальное и максимальное количество подшагов, максимальное количество итераций для каждого подшага, а также установлены параметры, позволяющие пакету определять оптимальный шаг по времени при расчётах.

2. Результаты. Исследовалось влияние параметров модели Аркарда на величину износа диска и колодок, а также на их напряжённо-деформированное состояние. Форма колодки была выбрана в виде сектора диска с указанными далее радиусами. Ниже в частном случае приведены численные результаты при следующих значениях параметров: внутренний радиус диска $R_{disk}^{in} = 0.12 м$, внешний радиус диска $R_{disk}^{out} = 0.22 м$, толщина диска $h_{disk} = 0.02 м$, внутренний радиус колодки $R_{kolodka}^{in} = 0.14 м$, внешний радиус колодки $R_{kolodka}^{out} = 0.2 м$, толщина колодки $h_{kolodka} = 0.02 м$, угол между боковыми гранями колодки $\alpha = 60^\circ$, модуль упругости диска $E_{disk} = 200 ГПа$, плотность диска $\rho_{disk} = 7800 г / см^3$, коэффициент Пуассона $\nu_{disk} = 0.3$, модуль упругости диска $E_{kolodka} = 70 ГПа$, плотность диска $\rho_{kolodka} = 2699 г / см^3$, коэффициент Пуассона $\nu_{kolodka} = 0.36$. Скорость вращения диска $V = 30 об / мин$, величина вдавливающей силы $P = 0.1 МН$, коэффициент трения $k = 0.2$. Общее время движения $t = 50 с$. Соотношение K / H считалось постоянным: $K / H = 0.5 \cdot 10^{-13}$.

Ввиду различной линейной скорости движения точек диска, износ также неравномерен. Результаты приведены для максимального и минимального значений износа среди всех точек

системы. В табл.1 представлены результаты расчётов при различной величине конечного элемента при $m=1, n=1$. В табл.2 представлены результаты расчётов при различных значениях показателя $m, n=1$

Таблица 1. Значения износа и контактного давления при различной величине конечно-элементной сетки, $m=1, n=1$

Линейный размер элемента, м	Величина износа $\delta_{\min}$, м	Величина износа $\delta_{\max}$, м	Контактное давление $q_{\min}$, МПа	Контактное давление $q_{\max}$, МПа
0.013	$0.320 \cdot 10^{-6}$	$0.651 \cdot 10^{-6}$	0.074	0.120
0.02	$0.326 \cdot 10^{-6}$	$0.628 \cdot 10^{-6}$	0.073	0.123

Таблица 2. Значения износа и контактного давления при различной величине m

Значение показателя m	Величина износа $\delta_{\min}$, м	Величина износа $\delta_{\max}$, м	Контактное давление $q_{\min}$, МПа	Контактное давление $q_{\max}$, МПа
0.75	$0.116 \cdot 10^{-7}$	$0.348 \cdot 10^{-7}$	0.043	0.141
1	$0.326 \cdot 10^{-6}$	$0.628 \cdot 10^{-6}$	0.073	0.123
1.25	$0.614 \cdot 10^{-5}$	$0.117 \cdot 10^{-4}$	0.076	0.118

3. Выводы. Построена конечно-элементная модель, описывающая взаимодействие вращающегося тормозного диска и тормозной колодки при наличии трения и износа. Проведены расчёты при различной величине конечно-элементной сетки. Сравнение результатов показало, что уменьшение размера конечных элементов привело к незначительному изменению величин износа и контактного давления, что важно для уменьшения времени расчётов. Варьирование различных входных параметров приводило к вполне ожидаемым результатам, например, увеличение скорости, нагрузки, коэффициента трения приводило к увеличению износа.

Проведённые исследования дают возможность успешно моделировать процесс износа различных типов тормозных систем и других трибосопряжений в машиностроении.

Работа выполнена при поддержке Минобрнаука РФ (проект № 9.4726.2017/8.9) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 16-08-00852a)

ЛИТЕРАТУРА

1. Механика контактных взаимодействий. /Под редакцией Воровича И.И., Александрова В.М. М.: Физматлит. 2001. 672 с.
2. Archard J.F. Contact and rubbing of flat surfaces. //Journal of Applied Physics, vol. 24. №1, 1953, p.18-28.

Информация об авторах:

Чебаков М.И. – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией, Южный федеральный университет, +7 (863) 297-52-55. E-mail: chebakov@math.sfedu.ru

Данильченко С.А. – инженер - проектировщик, Южный федеральный университет, +7 (863) 297-52-55. E-mail: sergey.a.danilchenko@gmail.com

Ляпин А.А. – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Южный федеральный университет, +7 (863) 297-52-55. E-mail: lyapin@sfedu.ru

ТЕРМОУПРУГИЕ ВОЛНЫ В НЕРАВНОВЕСНОЙ СРЕДЕ С ТОЧЕЧНЫМИ ДЕФЕКТАМИ

Шекоян А.В.

Аннотация. Рассмотрены термоупругие волны в неравновесной среде с точечными дефектами. Выведено и исследовано эволюционное уравнение.

При образовании дефектов меняется температура среды, что также меняет свойство материалов. В данном докладе исследуются закономерности распространения интенсивностей упругой волны в вышеуказанной среде.

Предполагается, что имеется упругая, изотропная, диэлектрическая, бесконечная среда. Материал находится под дефектообразующим облучением, которое создаёт в среде многочисленные точечные дефекты и меняет температуру среды. В такой среде распространяется интенсивная акустическая волна.

Взаимосвязанная система уравнений, описывающая вышеуказанный процесс, имеет следующий вид:

$$\rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} + \mu \Delta_{\perp} u + d \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) - \gamma \frac{\partial \theta}{\partial x_3} - d_1 \frac{\partial n_1}{\partial x_3} - d_2 \frac{\partial n_2}{\partial x_3} + p \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} + q_3 n_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} + q_3 \frac{\partial n_1}{\partial x_3} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + 2q_4 n_1 \frac{\partial n_1}{\partial x_3} +$$

$$+ q_5 n_2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} + q_5 \frac{\partial n_2}{\partial x_3} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + 2q_0 n_2 \frac{\partial n_2}{\partial x_3},$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_{1,2}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 u_{1,2}}{\partial x_3^2} + d \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3 \partial x_{1,2}} - \gamma \frac{\partial \theta}{\partial x_3} - d_1 \frac{\partial n_1}{\partial x_1} - d_2 \frac{\partial n_2}{\partial x_3},$$

$$-2c_p \frac{\partial \theta}{\partial t} - \gamma T_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) - T_0 p_1 \frac{\partial n_1}{\partial t} - T_0 p_2 \frac{\partial n_2}{\partial t} = \chi \frac{\partial \zeta}{\partial x_3}$$

$$- \frac{\partial n_1}{\partial t} + q_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + D_1 \frac{\partial^2 n_1}{\partial x_3^2} - \beta_1 n_1 - \beta_{12} n_2 + \alpha_1 n_1^2 + \alpha_2 n_2^2 + \alpha_3 n_1 n_2 = 0,$$

$$- \frac{\partial n_2}{\partial t} + q_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + D_2 \frac{\partial^2 n_2}{\partial x_3^2} - \beta_2 n_2 - \beta_{21} n_1 + \alpha_1 n_1^2 + \alpha_2 n_2^2 + \alpha_3 n_1 n_2 = 0,$$

Из системы (1)–(5) выведено эволюционное уравнение, методом описанной в книге [1]. Это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial \tau \partial x_3} + Q_{\perp} \Delta_{\perp} u_3 + Q_1 \frac{\partial^2 u_3}{\partial \tau^2} + Q_2 \frac{\partial^3 u_3}{\partial \tau^3} + Q_3 \frac{\partial^4 u_3}{\partial \tau^4} + Q_4 \frac{\partial^2 u_3^2}{\partial \tau^2} + Q_5 u_3^2 + Q_6 \frac{\partial^5 u_3}{\partial \tau^5} + Q_7 \frac{\partial^3 u_3^2}{\partial \tau^3} + Q_8 \frac{\partial u_3^2}{\partial \tau} + p \frac{\partial u_3}{\partial \tau} \frac{\partial^2 u_3}{\partial \tau^2} = 0.$$

В уравнении (6) коэффициент $Q_{\perp}$ обусловлен дифракцией. Из $Q_{\perp}$ видно, что дефекты не влияют на дифракцию. Коэффициенты Q_1, Q_2 и Q_6 обусловлены диссипацией, Q_3 – дисперсией, Q_4, Q_5 и Q_7 обусловлены нелинейностями кинетических уравнений, Q_8 обусловлен только нелинейностью, связанными с дефектами, P обусловлена физической и геометрической нелинейностями.

Диффузия – медленный процесс, чем взаимодействие дефектов с акустической волной, поэтому можно диффузией пренебречь, т.е. принять $D_1 = D_2 = 0$. Тогда $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = Q_6 = Q_7 = 0$, $Q_5 \neq 0$, $Q_8 \neq 0$, $P \neq 0$. При малой интенсивности акустической

волны можно полагать $P = 0$. Если считать, что $\gamma = 0$, т.е. термический эффект мал, то $Q_5 = 0$. Тогда уравнение (6) примет вид $\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + Q_8 u_3^2 = 0$. Решение последнего имеет вид $u_3 = u_{03} (1 + Q_8 u_{03} x_3)^{-1}$, которое имеет разрыв в точке $x_3 = -(Q_8 u_{03})^{-1}$, где могут выявляться различные нелинейные явления.

Коэффициенты Q_i имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{v}{2a} \left(\mu - \frac{d^2}{mv^2} + \frac{\gamma T_0 d}{\chi m} \right) \\ Q_3 &= + \frac{T_0 \gamma (\beta_{21} P_2 - \beta_2 P_1) D_1 D_2 q_1}{2a \chi \beta_{21} v^3 (\beta_1 \beta_2 - \beta_{12} \beta_{21})} \\ Q_2 &= \frac{q_1 (D_2 \beta_1 - D_1 \beta_2) (d_1 \beta_2 - \beta_{21} d_2)}{2a \beta_{21} v^5 (\beta_1 \beta_2 - \beta_{12} \beta_{21})} + \frac{d_1 D_2 q_1}{\beta_{21} v^3} \\ Q_1 &= - \frac{v^2 \gamma T_0 q_1 (\beta_{21} P_2 - \beta_2 P_1) (D_2 \beta_1 - D_1 \beta_2)}{2a \chi \beta_{21} v^3 (\beta_1 \beta_2 - \beta_{12} \beta_{21})} + \frac{\gamma T_0 P_1 D_2 q_1}{2a \chi \beta_{21} v} \\ Q_4 &= \frac{T_0 \gamma (\beta_{21} P_2 - \beta_2 P_1) (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) D_1 q_1^2}{2a \chi \beta_{21} v^2 (\beta_1 \beta_2 - \beta_{12} \beta_{21})} \\ Q_5 &= \frac{v^2 T_0 \gamma (\beta_{21} P_2 - \beta_2 P_1) (\beta_1 - \beta_{21})}{2a \chi \beta_{21} (\beta_1 \beta_2 - \beta_{12} \beta_{21})} - \frac{\gamma T_0 P_1 (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) q_1^2}{2a \chi \beta_{21}} \\ Q_6 &= \frac{(d_1 \beta_2 - \beta_{21} d_1) D_1 D_2 q_1}{2a \beta_{21} v^5 (\beta_1 \beta_2 - \beta_{12} \beta_{21})} \\ Q_7 &= - \frac{(d_1 \beta_2 - \beta_{21} d_2) (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) D_1 q_1^2}{2a \beta_{21} v^4 (\beta_1 \beta_2 - \beta_{12} \beta_{21})} \\ Q_8 &= \frac{(d_1 \beta_2 - \beta_{21} d_2) (\beta_1 - \beta_{21})}{2a \beta_{21} (\beta_1 \beta_2 - \beta_{12} \beta_{21})} \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдоев А.Г., Ерофеев В.И., Шекоян А.В. Линейные и нелинейные волны в диспергирующих сплошных средах. М.: Физматлит, 2009. 318с.

Сведения об авторе:

Шекоян Ашот Вазгенович – к.ф.м.н., ст. н. с. Института механики
(374 10) 568569, (374 77) 569564
E-mail: ashotshek@mechins.sci.am

КОЛЕБАНИЕ ВЫСОКОСКОРОСТНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИН С РОТОРАМИ НА ПОДШИПНИКАХ КАЧЕНИЯ

Шекян Г.Г., Геворгян А.В.

Аннотация. Работа направлена на исследование виброактивности высокоскоростных электрических машин, вызванные кинематическим возмущением и нелинейной жёсткостью подшипников качения.

Введение. В расчётах виброактивности электрических машин пока ещё не учитываются различные факторы, такие как нелинейная жёсткость, кинематическое возбуждение подшипников качения, жёсткостные характеристики конструктивных элементов и.т.д. Поэтому расчётные и экспериментальные данные, порой, отличаются более чем на 50%. В работе сделана попытка учёта указанных факторов.

Постановка задачи. Рассмотрим стационарное вращение жесткого ротора на подшипниках качения в жестком–амортизированном корпусе (рис.1).

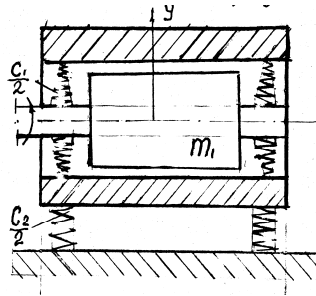


Рис.1. Жёсткий ротор в амортизированном корпусе

Движение системы описывается дифференциальными уравнениями [1,2]

$$\begin{cases} m_1 \ddot{y}_1 = P_1 + P_m - F_{y1} + P(t), \\ m_1 \ddot{y}_2 = P_2 + F_{y1} - F_{y2} - P_m, \end{cases} \quad (1)$$

где y_1, y_2 – перемещение ротора и статора, соответственно, F_{y1} – восстанавливающая сила жёсткости подшипников $F_{y1} = C_1 B (y_1 - y_2 + \lambda_{1ct} - \lambda_{2cm})^{3/2}$, P_m – сила одностороннего магнитного притяжения – $P_m = C_m (y_1 - y_2 + \lambda_{1cm} - \lambda_{2cm})$, C_m – условная жёсткость магнитного поля, F_{y2} – сила упругости амортизатора – $F_{y2} = C_2 (y_2 + \lambda_{2cm})$, P_1 – вес ротора – $P_1 = m_1 g$, P_2 – вес статора $P_2 = m_2 g$, C_1 – коэффициент Герца, C_2 – жёсткость амортизатора, B – функция времени $B = B_0 + B_1 \cos \omega_1 t$, $P(t)$ – функция возмущения – $P(t) = m_1 F \sin \omega t - m_1 \ddot{s}$, $F = \omega_1^2 e$, e – эксцентриситет ротора, s – функция кинематического возмущения. Постановка параметров в (1) и разложение F_{y1} в ряд Фурье даёт

$$\begin{cases} \ddot{\xi} + \ddot{y}_2 + (h^2 - q \cos \omega_1 t) \xi = v \cos \omega_1 t + P'(t), \\ \ddot{y}_2 + \omega_2^2 y_2 - d (h^2 - q \cos \omega_1 t) \xi = -dv \cos \omega_1 t, \end{cases} \quad (2)$$

где $\xi = y_1 - y_2$; $h^2 = 3C_1 B_0 (\lambda_{1cm} - \lambda_{2cm})^{1/2} / 2m_1 - C_m / m_1$;

$P'(t) = P(t) / m_1$, $q = 3(\lambda_{cm1} - \lambda_{cm2})^{1/2} \cdot C_1 B_1 / 12m_1$; $v = (y_1 - y_2)^{1/2} \cdot C_1 B_1 / m_1$,

$d = m_1 / m_2$; $\omega_2^2 = C_2 / m_2$.

Решение системы (2) показывает, что при определённых соотношениях жёсткостных характеристик элементов происходит резкое возрастание амплитуд ускорения отдельных составляющих спектра высших гармоник.

В этом случае следует изменить жёсткостные характеристики системы так, чтобы обеспечить условия

$$n^2 \cdot \omega_1^2 > \omega_2^2 + (d+1) \cdot h^2, \quad \left[(n-1)\omega_1 \pm \omega_{ki} \right]^2 > \omega_2^2 + (d+1)h^2, \quad (3)$$

полученные из решения системы (2) методом малого параметра [1]. В (3) – ω_{ki} – частота i -ой гармоники, у которого амплитуда ускорения наибольшая.

С целью оценки динамического состояния системы введём понятие коэффициента виброперегрузки в виде

$$K_g = P_y / G, \quad (4)$$

где P_y – центробежная сила инерции от прецессионного движения вращающегося ротора, G – вес ротора.

У высокоскоростного ротора, вращающегося на подшипниках качения, статическое положение равновесия неустойчиво, ротор при вращении прецессирует с угловой скоростью вращения по окружности с радиусом, равным деформации подшипника.

Тогда, при наличии эксцентриситета ротора, равного e , центробежная сила будет

$$P_y = m_i \omega_1^2 (e + y_1 - y_2). \quad (5)$$

С учётом (4), (5) она примет вид

$$P_y = m_i \omega_1^2 (e + y_1 - y_2) / g, \quad (6)$$

$$\text{где } y_1 - y_2 = (P_y / CB)^{3/2}. \quad (7)$$

При $e = 0$, подстановка (6) и (7) в (5) даст

$$P_y = m_1^3 \cdot \omega_1^6 / (C \cdot B); \quad K_g = m_1^2 \cdot \omega_1^6 / (C \cdot B)^{3/2}; \quad (8)$$

Как видим, из-за нелинейной податливости подшипников коэффициент динамичности существенно возрастает.

В качестве примера расчёта рассмотрен генератор С-75 с частотой вращения 8000 об/мин., с подшипниками качения №308. Результаты расчёта по предложенной методике, спектральных составляющих гармоник по смещению и по ускорению удовлетворительно совпали с результатами измерений.

Выводы. Максимальная амплитуда по ускорению на частоте 10 500Гц достигла до 115м/с², что соответствует динамической нагрузке в 8÷9 раз превышающей статически приложенной. Исходя из этого, оценка виброактивности высокоскоростных электрических машин следует произвести по ускорению высших гармоник, а выбор подшипников произвести из ряда с более гладкими характеристиками или в конструкцию ввести упругие элементы [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Шемян Г.Г. Динамика роторных машин. Ереван: Изд. «ГИТУТЮН» НАН РА, 2004. 330с.
2. Шемян Г.Г. К вопросу оптимизации жесткостей упругих опор эл. машин. Изв. АН Арм. ССР, сер. техн. наук, т.34, №4, Ереван, 1981, с.37–42.
3. Шемян Г.Г. Устойчивость высокоскоростных роторов, вращающихся на подшипниках качения. //Труды ВНИКЭ, том 9, Ереван 1980, с.136–147.

Сведения об авторах:

Шемян Гамлет Гургенович – д.т.н., профессор. Институт механики НАН РА

(+374 91), 49 38 40

Е-mail: hamlet@mechins.sci.am

Геворгян Арамаис Викторович – внештатный науч. сотр. Института механики НАН РА Армении (+374 94) 88 58 98

Е-mail: argev77@mail.ru

SOME BOUNDARY PROBLEMS FOR ANISOTROPIC QUARTER-PLANE

Arkhyenko K.M., Kryvyi O.F.

Abstract. To solve the mixed boundary value problems of anisotropic elasticity for anisotropic quarter-plane has developed the method, which based on using the space of generalized functions with slowly growth $\mathfrak{S}'(\mathbb{R}_+^2)$ properties. Using two-dimensional integral Fourier transform the system of fundamental solutions for anisotropic quarter-plane had constructed in the indicated space. By mean of last had received the system of eight boundary integral relations which has allowed the mixed boundary value problems for anisotropic quarter-plane to reduce directly to system of singular integral equations with fixed singularities. The exact solutions of these system had found by integral Mellin transform. For different boundary value had investigated the asymptotic behavior of solutions in the vertex of quarter-plane. By limiting process had considered the problems for isotropic quarter-plane as the special case.

To solve the mixed boundary value problems of elasticity for anisotropic quarter-plane had applied the method which had developed in works [1-4] to solve the mixed boundary value problems for inhomogeneous anisotropic media.

Let $\{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, u, v\} = \{v_p(x, y)\}_{p=\overline{1,5}} = \mathbf{v}$, $(x, y) \in L_+ \times L_+$, $L_+ = (0, +\infty)$. Has denoted boundary values for the components of vector $\mathbf{v}$ by

$$\chi_k(x) = v_{k+1}(x, +0), k = \overline{1,4}, \mu_1(y) = v_1(+0, y), \mu_k(y) = v_{k+1}(+0, y), k = \overline{2,4}. \quad (1)$$

For realization of method had received the system of fundamental solutions for anisotropic quarter-plane in the space of generalized functions with slowly growth $\mathfrak{S}'(\mathbb{R}_+^2)$. The last means the system of vectors $\mathbf{v}_j = \{v_{k,j}\}_{k=\overline{1,5}, j=\overline{1,8}}$, which components $v_{k,j} \in \mathfrak{S}'(\mathbb{R}_+^2)$, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ has satisfied (in means of generalized functions' theory) the followed systems of differential equations ($j = \overline{1,8}$):

$$\begin{cases} \partial_1 v_{1j} + \partial_2 v_{3j} = \delta_{2j} \delta(x - x_0, y) + \delta_{5j} \delta(x, y - y_0) \\ \partial_1 v_{3j} + \partial_2 v_{2j} = \delta_{1j} \delta(x - x_0, y) + \delta_{6j} \delta(x, y - y_0) \\ \partial_1 v_{4j} - a_{11} v_1 - a_{12} v_2 - a_{16} v_3 = \delta_{7j} \delta(x, y - y_0) \\ \partial_2 v_{5j} - a_{12} v_1 - a_{22} v_2 - a_{26} v_3 = \delta_{4j} \delta(x - x_0, y) \\ \partial_2 v_{4j} - \partial_1 v_{5j} - a_{16} v_1 - a_{26} v_2 - a_{66} v_3 = \delta_{3j} \delta(x - x_0, y) \end{cases} \quad (2)$$

where ∂_1, ∂_2 – differential operators in $\mathfrak{S}'(\mathbb{R}_+^2)$, δ_{kj} – Kronecker symbol, a_{ij} – elasticity constants.

The exact expression for the components of vectors $\mathbf{v}_j = \{v_{k,j}\}_{k=\overline{1,5}, j=\overline{1,8}}$ has given by

$$\begin{aligned} v_{pj}(x, y) &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left\{ \frac{M_{p1}^1 \delta_{1j} + M_{p2}^1 \delta_{2j}}{x - x_0 + z_k y} + \frac{M_{p3}^1 \delta_{3j} + M_{p4}^1 \delta_{4j}}{(x - x_0 + z_k y)^2} + \right. \\ &+ \frac{M_{p5}^2 \delta_{5j} + M_{p6}^2 \delta_{6j}}{x + z_k (y - y_0)} + \left. \frac{M_{p7}^2 \delta_{7j} + M_{p8}^2 \delta_{8j}}{(x + z_k (y - y_0))^2} \right\}, p = \overline{1,3} \\ v_{pj}(x, y) &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left\{ \frac{M_{p1}^1 \delta_{1j} + M_{p2}^1 \delta_{2j}}{(\ln(x - x_0 + z_k y) + \gamma - \frac{\pi i}{2})^{-1}} + \frac{M_{p3}^1 \delta_{3j} + M_{p4}^1 \delta_{4j}}{x - x_0 + z_k y} + \right. \\ &+ \frac{M_{p5}^2 \delta_{5j} + M_{p6}^2 \delta_{6j}}{(\ln(x + z_k (y - y_0)) + \gamma - \frac{\pi i}{2} \operatorname{sgn}(y - y_0))^{-1}} + \left. \frac{M_{p7}^2 \delta_{7j} + M_{p8}^2 \delta_{8j}}{x + z_k (y - y_0)} \right\}, p = \overline{4,5} \end{aligned} \quad (3)$$

where z_k – roots of the performance equation [5], M_{pj}^n – coefficients depending from the elasticity constants of the material. The representation (3) had allowed to express the stresses and displacements in the space $\mathfrak{I}(\mathbb{R}_+^2)$ through the boundary value (1) by the convolution product

$$v_k(x, y) = \sum_{j=1}^4 [\chi_j(x) * v_{k,j}(x, y) + \mu_j(y) * v_{k,4+j}(x, y)], \quad k = \overline{1, 5}. \quad (4)$$

The stating (4) has allowed the boundary value problems for the elastic anisotropic wedge reducing directly to the system of singular integral equations. In particular case had considered the mixed problem for quarter-plane, on the one bound of which has realized the full contact conditions and on the other bound the stresses has set:

$$\chi_k(x) = 0, \quad k = 3, 4; \quad \mu_k(y) = P_k(x), \quad k = 1, 2. \quad (5)$$

Realizing the conditions (5) by the representations (4) has allowed to the followed system of singular integral equations with the fixed singularities

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{j=1}^2 \left\{ A_{mj} \chi_j(x) + \frac{B_{m,j}}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\chi_j(x_0) dx_0}{x_0 - x} + \operatorname{Im} \sum_{k=1}^2 \frac{C_{m,2+j}}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\mu'_{2+j}(y_0) dy_0}{x - z_k y_0} \right\} &= F_m(x), m = 1, 2 \\ \sum_{j=1}^2 \left\{ A_{m,2+j} \mu'_{2+j}(y) + \frac{B_{m,2+j}}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\mu'_{2+j}(y_0) dy_0}{y_0 - y} + \operatorname{Im} \sum_{k=1}^2 \frac{C_{m,j}}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\chi_j(x_0) dx_0}{x_0 - z_k y} \right\} &= F_m(y), m = 3, 4. \end{aligned} \right. \quad (6)$$

where A_{mj} , B_{mj} , $C_{m,j}$ – coefficients depending from the elasticity constants of the material.

The exact solution of system (5) had received by Mellin transform. In the vertex of the quarter-plane had researched the behavior of solutions.

In the same way had received the solutions of another boundary value problems for the elasticity anisotropic quarter-plane. By limiting process had received the solutions of the corresponding problems for the isotropic quarter-plane, which are in accord with the well-known results.

REFERENCE

1. Кривой А.Ф. Произвольно ориентированные дефекты в составной анизотропной плоскости. Вісн. Одеськ. держ. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки.–2001.–6, Вип 3, 108-115.
2. Кривой А.Ф. Фундаментальное решение для четырехсоставной анизотропной плоскости. Вісн. Одеськ. держ. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки.–2003.–8, вип 2, 140-149.
3. Krivoi A. F., Popov G. Ya. Interface tunnel cracks in a composite anisotropic space. Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2008, Vol.72, Issue 4, p.499-507.
4. Kryvyi O. F. Mutual Influence of an Interface Tunnel Crack and An Interface Tunnel Inclusion in a Piecewise Homogeneous Anisotropic Space. Journal of Mathematical Sciences. 2015, Vol.208 Issue 4, p.409-416.
5. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415с.

Information about authors:

Arkhipenko K.M. – Ph.D., National University „Odessa Maritime Academy“, Odessa, Ukraine (38050) 3917336

E-mail: k_arkhipenko@ukr.net

Kryvyi O.F. – Dr. Sci., professor, National University «Odessa Maritime Academy», Odessa, Ukraine (38 067) 4840395

E-mail: krivoy-odessa@ukr.net

MODELING OF MULTIFERROIC COMPOSITES BY MEANS OF PHENOMENOLOGI- CALLY OR PHYSICALLY MOTIVATED CONSTITUTIVE MODELS

Avakian Artjom and Ricoeur Andreas

Abstract. In this paper, the constitutive modelling of nonlinear multifield behavior as well as the finite element implementation are presented. Nonlinear material models describing the magneto-ferroelectric or electro-ferromagnetic behaviors are presented. Both physically and phenomenologically motivated constitutive models have been developed for the numerical calculation of principally different nonlinear magnetostrictive behaviors. Further, the nonlinear ferroelectric behavior is based on a physically motivated constitutive model. On this basis, the polarization in the ferroelectric and magnetization in the ferromagnetic and magnetostrictive phases, respectively, are simulated and the resulting effects analyzed. Additionally, the ferroelectric model accounts for damage due to microcrack growth. Numerical simulations focus on the calculation of magnetoelectric coupling and on the prediction of local domain orientations as well as damage processes going along with the poling process, thus supplying information on favorable electric-magnetic loading sequences.

1. Theoretical Framework and Models

The magnetoelectric (ME) effect is only observed in a few crystal classes exhibiting a very weak coupling, mostly at low temperatures. Much larger coupling coefficients are obtained at room temperature in composite materials with ferroelectric and ferromagnetic constituents. The ME effect is then induced by the strain in both phases due to the piezoelectric and magnetostrictive effects [1].

The physically based nonlinear irreversible constitutive relations of a ferroelectric material with magnetic properties are based on a suitable thermodynamic potential Ψ^{Fe} with strain, electric and magnetic fields as independent variables [2]:

$$\Psi^{Fe}(\varepsilon_p, E_l, H_k) = \frac{1}{2}c_{qp}\varepsilon_q\varepsilon_p - e_{lp}\varepsilon_p E_l - \frac{1}{2}\kappa_{ln}E_l E_n - \frac{1}{2}\mu_{km}H_k H_m - c_{qp}\varepsilon_q \varepsilon_p^{irr} + e_{lp}\varepsilon_p^{irr} E_l - P_l^{irr} E_l. \quad (1)$$

Based on the same ideas as Eq. (1), the thermodynamical potential Ψ^{Fm} for the physically based nonlinear irreversible constitutive relations of a ferromagnetic and dielectric material is given by [3]

$$\Psi^{Fm}(\varepsilon_p, E_l, H_k) = \frac{1}{2}c_{qp}\varepsilon_q\varepsilon_p - \frac{1}{2}\kappa_{ln}E_l E_n - \frac{1}{2}\mu_{km}H_k H_m - c_{qp}\varepsilon_q \varepsilon_p^{irr} - M_k^{irr} H_k. \quad (2)$$

On the other hand, phenomenologically motivated nonlinear reversible constitutive relations of a ferromagnetic material with dielectric properties are based on a potential $\bar{\Psi}^{Fm}$ with stress, electric and magnetic fields as independent variables [3,4]:

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}^{Fm}(\sigma_p, E_l, H_k) = & -\frac{1}{2}s_{11}\sigma_1\sigma_1 - s_{12}\sigma_1\sigma_2 - \frac{1}{2}s_{22}\sigma_2\sigma_2 - s_{66}\sigma_6\sigma_6 - \frac{1}{2}\kappa_{11}E_1E_1 - \frac{1}{2}\kappa_{22}E_2E_2 \\ & - \frac{1}{2}\bar{\mu}_{11}^0 H_1 H_1 - \frac{\eta_1}{1 + \zeta_1 H_1^{-3}} \sigma_1 - \frac{\eta_2}{1 + \zeta_2 H_1^{-3}} \sigma_2 - \rho\{H_1 - \xi \ln(\xi + H_1)\}. \end{aligned} \quad (3)$$

The ferroelectric and ferromagnetic constitutive equations in compressed notation derived from Eqs. (1) and (2) are

$$\sigma_p = c_{pq}(\varepsilon_q - \varepsilon_q^{irr}) - e_{lp}E_l, \quad D_l = e_{lp}(\varepsilon_p - \varepsilon_p^{irr}) + \kappa_{ln}E_n + P_l^{irr}, \quad B_k = \mu_{km}H_m. \quad (4)$$

$$\sigma_p = c_{pq}(\varepsilon_q - \varepsilon_q^{irr}), \quad D_l = \kappa_{ln}E_n, \quad B_k = \mu_{km}H_m + M_k^{irr}, \quad (5)$$

and for the nonlinear reversible ferromagnetic material behavior derived from Eq. (3) in rate-dependent form they are

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_p(\dot{\sigma}_q, \dot{H}_k) = & s_{pq}\dot{\sigma}_q + \bar{q}_{kp}(H_k)\dot{H}_k, \quad \dot{D}_l(\dot{E}_n) = \kappa_{ln}\dot{E}_n, \quad \dot{B}_k(\dot{\sigma}_p, \dot{H}_m) \\ = & \bar{q}_{kp}(H_m)\dot{\sigma}_p + \bar{\mu}_{km}(\sigma_p, H_m)\dot{H}_m, \end{aligned} \quad (6)$$

with $s_{11}, s_{12}, s_{66}, \kappa_{11} = \text{const.}$

Two fundamental damage mechanisms are observed in a ME composite: cracking of the two constituents and delamination. The latter will not be considered at this point and cracking will only be allowed in the ferroelectric material. In Fig. 1 the micromechanical motivation of the model is depicted using the example of a particle composite with a ferroelectric matrix. The contribution of micro cracks to the averaged strain and electric field reads [5]

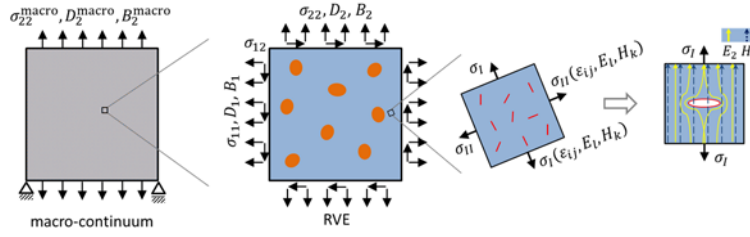


Fig. 1: Damaging of a ME particle composite: micro crack initiation perpendicular to the maximum principal stress σ_I , magnetic field penetrating the crack, electric field circumventing it

$$\varepsilon_{ij}^C = \frac{1}{2A} \int_{-a}^{+a} (\Delta u_i n_j + \Delta u_j n_i) dx_1^C, \quad E_i^C = -\frac{1}{A} \int_{-a}^{+a} (\Delta \phi n_i) dx_1^C \quad (7)$$

where Δu_i and $\Delta \phi$ are jumps of displacement and electric potential accross the crack faces and n_j is the unit normal. The area of the plane RVE is denoted as A and a is half the crack length.

2. Results

The three constitutive models have been implemented within the framework of the finite element method, starting from a weak formulation of the balance equations $\sigma_{ij,j} = 0$, $D_{i,l} = 0$ and $B_{k,k} = 0$ of electro-, magneto- and elastostatics.

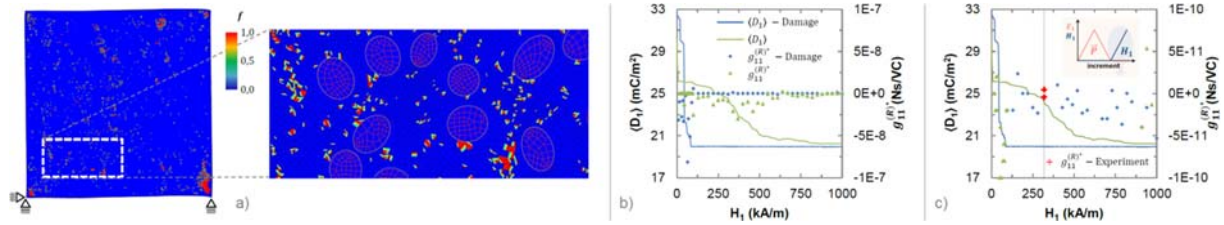


Fig. 2: a): Damage pattern of a ME particle composite (0.2CoFe₂O₄-0.8BaTiO₃, matrix: BaTiO₃) right after electric poling with $E_1 = 5E_c$ and magnetic loading with $H_1 = 1000$ kA/m. The local damage parameter $f = 1$ indicates full damage and thus macro crack formation, b) and c): average electric displacement and ME coupling coefficient from numerical simulation; experimental values from [7,8]

Based on the material models, in particular nonlinear simulations have been done in order to predict ME coupling coefficients [6]. The residual stresses induced during the poling process will lead to substantial cracking, thus further reducing the ME coupling, see Fig. 2b and c. A possible crack pattern in the matrix after the magnetoelectric poling is indicated in Fig. 2a by the red regions. The ME coupling coefficient in Fig. 2 is determined in the interval of magnetic loading and plotted vs. the magnetic field H_1 . The plot c) is an excerpt of the plot b), where the scaling of the ME coupling coefficient along the ordinate is different. The red crosses illustrate the scope of experimental values for coupling coefficients. They are within the range of those predicted from the model accounting for damage evolution. The coupling coefficients are calculated from the local derivatives of the $\langle D_1 \rangle(H_1)$ -function.

REFERENCE

1. M. Fiebig, J. Phys. D: Appl. Phys. 38, R123-R152, 2005.
2. A. Avakian, R. Gellmann and A. Ricoeur, Acta Mechanica 226 (8), 2789-2806, 2015.
3. A. Avakian and A. Ricoeur, J. Intel. Mat. Sys. Struct. 27 (18), 2536-2554, 2016.
4. A. Avakian and A. Ricoeur, J. Appl. Phys. 121, 053901, 2017.
5. A. Ricoeur and M. Kuna, J. Eur. Ceram. Soc. 23 (8), 1313-1328, 2003.
6. A. Avakian and A. Ricoeur, VIII ECCOMAS, SMART 2017.
7. MF Etier et al., Joint 21st IEEE ISAF/11th IEEE ECAPD/IEEE PFM, 1-4, 2012.
8. MF Etier et al., J. Am. Ceram. Soc., DOI: 10.1111/jace.14362, 2016.

Information about authors:

Artjom Avakian – Research assistant (Ph.D.), University of Kassel, Department of Mechanical Engineering, Institut of Mechanics, Phone: +49 561 804-2852, Fax: +49 561 804-2720, E-mail: artjom.avakian@uni-kassel.de

Andreas Ricoeur – Chair of Engineering Mechanics / Continuum Mechanics, University of Kassel, Department of Mechanical Engineering, Phone: +49 561 804-2820, E-mail: andreas.ricoeur@uni-kassel.de

CONTROL OF ELECTROMECHANICAL SYSTEM WITH ONE DEGREE OF FREEDOM UNDER JOINT CONSTRAINTS

Avetisyan V.V.

Abstract. A system is considered that simulates the dynamics of a single-arm electromechanical manipulator. The problem of constructing a controlling voltage and determining the domain of final states is solved. The arrival to the final states from the initial state of rest with help of the constructed control takes place in a finite time, with the prescribed constraints on voltage and current in the armature circuit of the motor.

1. Consider an electromechanical system consisting of a direct current motor with independent excitation, a reducer and an absolutely rigid body (inertial load) on its output shaft. Such a system can be treated as a model of the simplest manipulator with one degree of freedom. In this case, the inertial load is the arm of the manipulator together with the load fixed in its grasp. The motion of the described system in dimensionless units is determined by the following relations ([1]):

$$\ddot{\varphi} = k^{1/2} j, \quad Rj + k^{1/2} \dot{\varphi} = k^{-1/2} u, \quad |u| \leq 1, \quad |j| \leq j_0. \quad (1.1)$$

Here, φ is the angle of rotation of the arm; u and j are the input (control) voltage and current in the motor armature circuit respectively, which values are limited by the given constants; R is the winding impedance of motor's rotor; k is a parameter of the electric motor.

Let us consider the following problem. Find the change law of the controlling voltage $u(t)$, which ensures the transition of the manipulator from the initial state of rest

$$\varphi(0) = 0, \quad \dot{\varphi}(0) = 0 \quad (1.2)$$

to the prescribed final state

$$\varphi(T) = \varphi^1, \quad \dot{\varphi}(T) = \dot{\varphi}^1 \quad (1.3)$$

at some moment in time $t = T$ under the constraints (1.1) of the controlling voltage and current.

Eliminating the variable j from equations (1.1) and using new variables

$$v = u - k\dot{\varphi}, \quad x_1 = R\varphi, \quad x_2 = R\dot{\varphi}, \quad (1.4)$$

we write the system (1.1)-(1.3) in the following form:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = v \quad (1.5)$$

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_1(T) = x_1^1, \quad x_2(T) = x_2^1, \quad (1.6)$$

$$|v + kR^{-1}x_2| \leq 1, \quad |v| \leq \eta, \quad \eta = j_0 kR. \quad (1.7)$$

2. The change law of the controlling voltage $v(t)$ - which provides the transition of the system (1.5) from the initial state of rest to the final state (1.6) in the moment of time T without taking into account the constraints (1.7) - is constructed using the method described in [2] and has the following form:

$$v(t) = (-12T^{-3}t + 6T^{-2})x_1^1 + (6T^{-2}t - 2T^{-1})x_2^1. \quad (2.1)$$

Integrating equations (1.5) with initial conditions (1.6) under control (2.1), we find

$$x_2 = (-6T^{-3}t^2 + 6T^{-2}t)x_1^1 + (3T^{-2}t^2 - 2T^{-1}t)x_2^1. \quad (2.2)$$

Taking into account (2.1) and (2.2), the constraints (1.7) can be written in the form

$$|g_1(t, T)x_1^1 + g_2(t, T)x_2^1| \leq 1, \quad |f_1(t, T)x_1^1 + f_2(t, T)x_2^1| \leq \eta, \quad t \in [0, T], \quad (2.3)$$

where

$$g_1(t, T) = -6kR^{-1}T^{-3}t^2 + (6kR^{-1}T^{-2} - 12T^{-3})t + 6T^{-2}, \quad f_1(t, T) = -12T^{-3}t + 6T^{-2}, \quad (2.4)$$

$$g_2(t, T) = 3T^{-2}kR^{-1}t^2 + (6T^{-2} - 2T^{-1}kR^{-1})t - 2T^{-1}, \quad f_2(t, T) = 6T^{-2}t - 2T^{-1}.$$

Taking into account (2.4), we carry out estimates from above of the left-hand sides of the inequalities (2.3):

$$\begin{aligned} |g_1(t, T)x_1^1 + g_2(t, T)x_2^1| &\leq |g_1(t, T)||x_1^1| + |g_2(t, T)||x_2^1| \leq q_1(T)|x_1^1| + (kR^{-1} + 4T^{-1})|x_2^1| \leq 1, \\ |f_1(t, T)x_1^1 + f_2(t, T)x_2^1| &\leq |f_1(t, T)||x_1^1| + |f_2(t, T)||x_2^1| \leq 6T^{-2}|x_1^1| + 4T^{-1}|x_2^1| \leq \eta, \quad 0 < T < \infty, \end{aligned} \quad (2.5)$$

where

$$\begin{aligned} q_1(T) &= 6T^{-2}, \quad 0 < T \leq T', \quad T' = 2k^{-1}R, \\ q_1(T) &= [3(kR^{-1})^2T^2 + 12]T^{-3}k^{-1}R/2, \quad T' \leq T < \infty. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Inequalities (2.3) will be satisfied for all $t \in [0, T]$, if the end time of the control process T is chosen from conditions

$$Q_1(T, |x_1^1|, |x_2^1|) = 1, \quad Q_2(T, |x_1^1|, |x_2^1|) = \eta, \quad 0 < T < \infty, \quad (2.7)$$

where

$$\begin{aligned} Q_1(T, |x_1^1|, |x_2^1|) &= \begin{cases} 6T^{-2}|x_1^1| + 4T^{-1}|x_2^1| + kR^{-1}|x_2^1|, & 0 < T \leq T', \\ 6k^{-1}R|x_1^1|T^{-3} + (1.5kR^{-1}|x_1^1| + 4|x_2^1|)T^{-1} + kR^{-1}|x_2^1|, & T' \leq T < \infty, \end{cases} \\ Q_2(T, |x_1^1|, |x_2^1|) &= 6T^{-2}|x_1^1| + 4T^{-1}|x_2^1|, \quad 0 < T < \infty. \end{aligned}$$

The functions $Q_{1,2}(T, |x_1^1|, |x_2^1|)$ in (2.7) with respect to T are continuous and decrease monotonically from ∞ to 0 when T changes from 0 to ∞ . Hence, for any pair $(|x_1^1|, |x_2^1|) \in X$, where

$$X = \{(|x_1^1|, |x_2^1|) : |x_1^1| < \infty, |x_2^1| < k^{-1}R\}, \quad (2.8)$$

each of the equations (2.7) has a unique solution with respect to T . If we denote by T_1 and T_2 the solutions of the first and second equations (2.7) respectively, then both constraints (2.3) will not be violated for any $t \in [0, T^*]$, where $T^* = \max(T_1, T_2)$.

Thus, the desired control $v(t)$ - which satisfies the constraints (1.7) and transits the system (1.5) from the initial rest state to the given final state (1.6), (2.8) - can be constructed if we first determine the time T^* according to the scheme outlined above and substitute it in the formula (2.1). Then, by using (1.4) and coming back to the original dimensionless variables, we can calculate the control function.

REFERENCE

1. Avetisyan V.V. Movements of an electromechanical manipulator robot optimal with respect to energy expenditure // Journal of Computer and Systems Sciences International. 1996, vol. 35, № 4, pp. 679 -685.
2. Chernousko F.L., Ananievski I.M., Reshmin S.A. Control of Nonlinear Dynamical Systems. Methods and Applications. – Berlin, Heidelberg: Springer, 2008. 396 p.

Information about author:

Avetisyan Vahan Vardges – Doctor of Sciences, Professor, Yerevan State University, Faculty of Mathematics and Mechanics, (374 94) 44 95 60,

E-mail: vavetisyan@ysu.am

CONTROL OF VIBRATIONS OF A MOVING BEAM

Banichuk N.V., Ivanova S.Yu., Makeev E.V., Sinitsyn A.V.

Abstract. The translational motion of a thermoelastic beam under transverse vibrations caused by initial perturbations is considered. It is assumed that a beam moving at a constant translational speed is described by a model of a thermoelastic panel supported at the edges of the considered span. The problem of optimal suppression of vibrations is formulated when applying active transverse influences to the panel. To solve the optimization problem, modern methods developed in the theory of control of systems with distributed parameters described by partial differential equations are used.

The problem of suppressing vibrations of a deformable thermoelastic system moving in the longitudinal direction is of definite theoretical and practical interest. Previously arising problems in this direction were considered in [1 - 3]. The problems of elastic instability of vibrations, as well as the problem of finding the critical velocity parameters of longitudinal motion [4], material temperatures, structural parameters and other properties of the moving system, which determine its critical behavior including its static and dynamic forms of stability loss, were investigated.

A new formulation of the problem of optimal suppression of transverse vibrations of a continuous panel (elastic beam) moving in the longitudinal direction is described. Under the assumption of the presence of initial perturbations of the rectilinear movement of the beam and transverse velocities, an effective algorithm for suppressing perturbations is proposed. The above algorithm is based on obtaining and using the necessary optimality conditions and arising dynamic partial differential equations. These equations describe both the vibration processes of a moving beam (direct problems) and some processes for input conjugate variables (conjugate problems). It is shown that the solution of direct and conjugate problems is possible with the Galerkin method. An example is given that illustrates the main steps in the solution of the optimal damping problem.

The dependence of the minimized problem functional (quality criterion) characterizing the vibrations suppression on the problem parameter t_f (the final moment of the considered time interval) is presented in Fig. 1. The solid line corresponds to defined optimal control actions $g_{\text{opt}} = g_{\text{opt}}(x, t)$, the dotted line illustrate the case without control actions $g(x, t) = 0$, the dashed line characterizes the case with constant (non-optimal) actions $g(x, t) = 1$ applied to the moving beam.

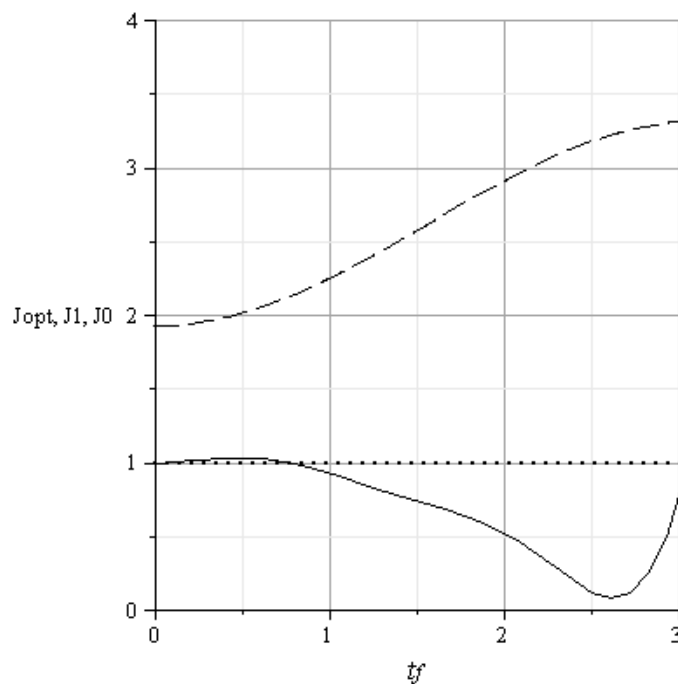


Fig. 1. The dependence of quality criterion on problem parameter t_f .

In addition to a one-dimensional model of a moving beam, we could consider two-dimensional plate models describing the longitudinal motions of wide bands in terms of tape systems. In this case [4] can be based on the use of necessary conditions for the extremum and the application of the Galerkin-Fourier methods too.

To suppress the arising vibrations, control actions in the form $g = g(x, t)$ with non-separating independent variables x and t are used in the work. However, with this approach, optimal control can be very complete, and its practical implementation is difficult. In this case, it is possible to use the representation of the control action in the form $g(x, t) = f(t)\chi(x)$ with separated functions of position and time, describing both the specific geometric realization of the location of the actions (actuators) set by $\chi(x)$, and the way of changing the time effects, denoted by $f(t)$. This approach will allow us to consider and compare the effectiveness of ways to apply the effects to different parts of the beam and applied at individual points of concentrated forces, and to compare such loadings in time as relay, harmonic, shock and other controls.

The work was carried out with the financial support of the RNF (project No. 17-19-01247).

REFERENCE

1. Баничук Н.В., Иванова С.Ю., Шпаранюк А.В. Динамика конструкций. Анализ и оптимизация. М.: Наука, 1989. 262с.
2. Баничук Н.В., Братусь А.С. Об оптимальном проектировании конструкций, оснащенных актюаторами. //Техническая кибернетика. 1993. № 1. С.24 – 31.
3. Banichuk N.V., Bratus A.S., Posviansky V.P. Optimum Positioning of Actuator for Structural Control. In: Fourth International Conference on Adaptive Structures (Eds. by Breitbach E.J., Woda B.K., Natori M.C.) Lancaster, Technomic Publ. Co., 1994, p.179 – 188.
4. Nikolay Banichuk, Juha Jeronen, Pekka Neittaanmaki, Tytti Saksa, Tero Tuovinen. Mechanics of Moving Materials. Springer International Publishing Switzerland. 2014. 253p.

Information about authors:

Banichuk N.V. – D.Sc., Professor, Head of Laboratory, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences (IPMech RAS), +7 495 434 8164

E-mail: banichuk@gmail.com

Ivanova S.Yu. – Ph.D. Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences (IPMech RAS), +7 495 434 1467

E-mail: syuiivanova@yandex.ru

Makeev E.V. – Ph.D. Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences (IPMech RAS), +7 495 434 1467

E-mail: makeevev@yandex.ru

Sinitsyn A.V. – Ph.D. Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences (IPMech RAS), +7 495 434 9316

E-mail: a@sinitsyn.com

EXPERIMENTAL VALIDATION OF THERMO-CHEMICAL ALGORITHM FOR A SIMULATION OF PULTRUSION PROCESSES

Barkanov E., Akishin P., Miazza N.L., Galvez S. and Pantelelis N.

Abstract. To provide better understanding of the pultrusion processes without or with temperature control and to support the pultrusion tooling design, an algorithm based on the mixed time integration scheme and nodal control volumes method has been developed. At present study its experimental validation is carried out by the developed cure sensors measuring the electrical resistivity and temperature on the profile surface. By this verification process the set of initial data used for a simulation of the pultrusion process with rod profile has been successfully corrected and finally defined.

Pultrusion is a continuous and cost-effective process for a production of composite structural components with a constant cross-sectional profile (Fig. 1). During pultrusion, the fibre reinforcements are saturated with the resin in a resin bath and then continuously pulled through a heated die by a puller. Inside the die, the resin gradually cures and solidifies to form a composite part with the same cross-section profile as in the die. At the final stage a travelling cut-off saw cuts the composite profile into desired lengths.

To investigate numerically the pultrusion process, the following thermo-chemical problem consisting of the energy equation for the tool, the energy equation for the composite moving in the pull direction and the species equation for the resin should be examined

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) - q_b = 0 \\ \bar{\rho} \bar{c}_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{k}_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{k}_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{k}_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) - q = 0 \\ \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} + u \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right) = R_r \end{array} \right. \quad (1)$$

where T is the temperature, ρ and c_p are the density and specific heat of the tooling materials, k_x , k_y , k_z are the thermal conductivities of the tooling materials in x , y , z directions, q_b is the rate of energy exchange at the boundary, u is the pull speed, $\bar{\rho}$ and $\bar{c}_p$ are the lumped density and specific heat for the composite material, $\bar{k}_x$, $\bar{k}_y$, $\bar{k}_z$ are the lumped thermal conductivities of the composite material in x , y , z directions, q is the generative term related to the internal heat generation due to the exothermic resin reaction, $\alpha = H(t)/H_r$ is the degree of cure and $H(t)$ is the amount of heat evolved during the curing up to time t .

To solve the system of coupled energy and species equations (1), the numerical algorithm using ANSYS Mechanical environment and based on the mixed time integration scheme and nodal control volumes method has been developed and modified for a simulation of pultrusion processes with a temperature control (Fig. 2). At present study its experimental validation is carried out by the developed cure sensors measuring the electrical resistivity and temperature on the profile surface. Since the set of initial data is not clearly defined, the parameters of technological process are precised comparing the temperatures on thermocouples and sensors with the numerically obtained.

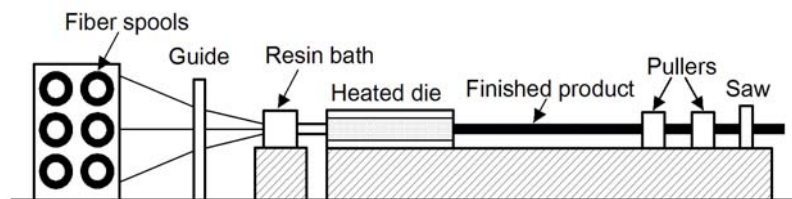


Figure 1. Pultrusion process.

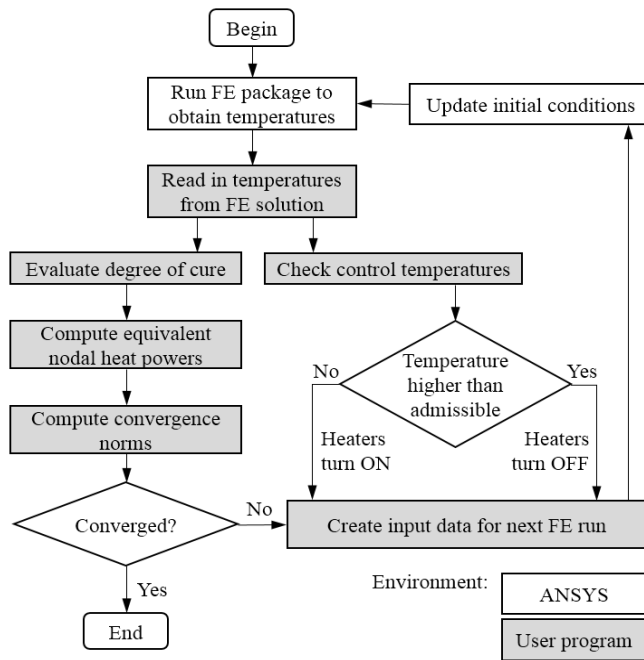
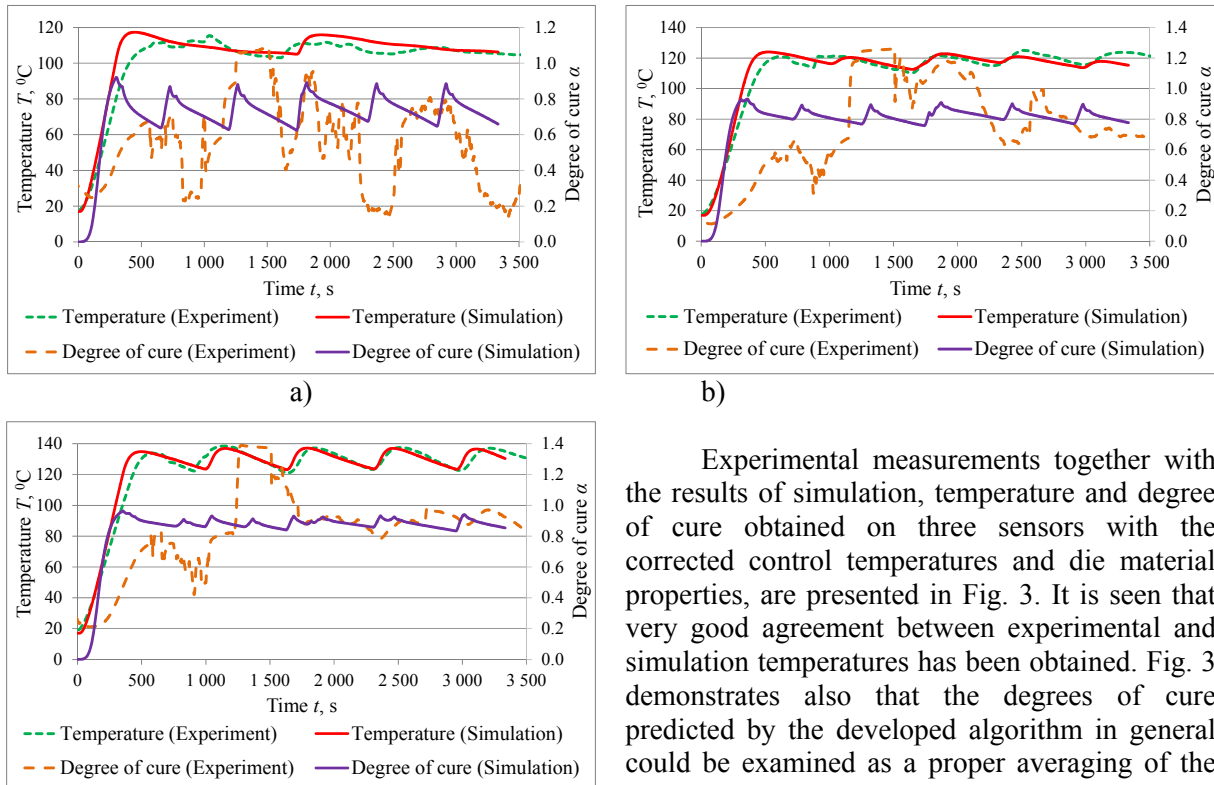


Figure 2. Thermo-chemical algorithm for a simulation of pultrusion.



c) Figure 3. Temperature and degree of cure on sensors: a) 1, b) 2, c) 3.

Experimental measurements together with the results of simulation, temperature and degree of cure obtained on three sensors with the corrected control temperatures and die material properties, are presented in Fig. 3. It is seen that very good agreement between experimental and simulation temperatures has been obtained. Fig. 3 demonstrates also that the degrees of cure predicted by the developed algorithm in general could be examined as a proper averaging of the values measured in real time by the developed sensors.

Information about authors:

Evgeny Barkanov - Professor, Riga Technical University, Institute of Materials and Structures,
Phone 0037167089264, **E-mail:** barkanov@latnet.lv

PHYSICAL NATURE OF STRAIN RATE SENSITIVITY OF METALS AND ALLOYS AT HIGH STRAIN RATES

Borodin E.N., Gruzdkov A.A., Mayer A.E., Selyutina N.S.

Abstract. The role of instabilities of plastic flow at plastic deformation of various materials is one of the important cross-disciplinary problems, it is equally important for physics, mechanics and material science. Strain rate sensitivity under quasi-static loading conditions and dynamic loading deformation conditions has a different physical nature. In quasi-statics, it is due to the inertia properties of the defect structures and can be expressed by a single parameter characterizing the properties of the mechanism of plasticity. In our approach, this is the magnitude of the characteristic relaxation time. In the dynamic conditions there are additional effects of "high-speed sensitivity" associated with the micro-localization of the plastic flow near the stress concentrators. The consideration of both these factors is fundamental for an adequate description of the problems of dynamic deformation of highly inhomogeneous metallic materials such as steels and alloys. Measurement of dispersion of particle velocities on the free surface of a shock-loaded material can be regarded as an experimental expression of the effect of micro-localization. It is also confirmed by our results of numerical simulation of the propagation of shock waves in a two-dimensional formulation and analytical estimations.

1. Introduction

Some of the researches [1,2] suppose, basing on a detail consideration of the microstructural processes, that instabilities, such as the shear bands after the shock wave front, have almost dominant contribution to the plastic dissipation of wave energy. It means that plastic flow instabilities have sufficient mechanical importance like strain rate sensitivity effect due to decreasing of the shock wave amplitude and, hence, increasing the dynamical strength of material. Many other researchers tend to think about the micro-localization phenomenon mostly as about the feature of the plastic flow that is interesting only for material science, but not for mechanics. Besides that, nature of strain rate sensitivity parameter at high strain rate is not clear and is a discussion question. Numerical simulations [3-5] with analytical consideration on the base of the integral form for plasticity criterion [5-7] (which is appropriate for the high strain rate conditions) can shed new light on this problem. This type of criteria includes two original parameters: one of them is a characteristic relaxation time τ which has a clear physical meaning [5], but the second one is an empirical parameter α , which nature is unclear and one can find by empirical way that $\alpha > 1$ only for some classes of alloys and steels. The parameter α gives an "addition" strain rate sensitivity for such materials, while the parameter τ always gives the main contribution to the dynamic effects. The value $\alpha = 1$ for pure metals such as aluminum or copper, which means that there is no any effect.

2. Numerical simulation of the shock wave propagation through the metal

On the basis of the model for dynamics and kinetics of dislocations [3], one can perform a numerical simulation of the plastic flow at shock wave deformation conditions. In the real experimental conditions, the shock wave propagates through with initial random perturbations of the microstructure parameters (dislocation density, impurities concentration). We have performed 2D numerical simulations by plasticity models [3-5]. The initial dislocation density distribution was randomly perturbed. Formation of the shear bands inclined at 45 degrees to the shock wave front was observed. Dispersion of the back surface velocity takes place, like in Yu.I. Meshcheryakov et al [1,2], but weaker. The standard parameter for the of plastic deformation intensity $w = \sqrt{4/3(w_{xx}^2 + w_{yy}^2 + w_{xy}^2 + w_{yx}^2)}$ was used, where $\Delta w = w_{\max} - w_{\min}$ and $\langle w \rangle$ is the average value of w . In simulations, the observed inhomogeneities in the plastic flow correspond to the dispersion of the plastic deformation intensity $W = \Delta w / \langle w \rangle$ lesser than 0.05, according to our consideration, it corresponds to the dispersion of the scalar dislocation density $k = \rho_D^{\max} / \rho_D^{\min} \sim 10$. Velocity dispersion on the shock wave front for this case (about 2 m/s) is an order of magnitude lower than the experimental findings for various aluminum alloys – of about 20 – 40 m/s [2]. In this way, instabilities caused by the inhomogeneities of the only initial dislocation density can not

themselves provide a mechanically significant level of the plastic flow instability. One can approximate the numerical simulation data in the form of dependency of the velocity dispersion on the localization level by a logarithmic function $W = \Delta w / \langle w \rangle = 0.07 \log[k]$. It is important that this relation does not sensitive to changing of the minimum initial density of dislocations in the range of orders of magnitude because of the intensive nucleation of dislocations during the deformation. The introduction of impurities in the material is able to create the plastic deformation intensity dispersion greater than the initial dislocation density perturbation solely – about 0.09 and, hence, $k > 40$, that gives the velocity dispersion after the shock wave front of about 10 – 20 m/s. It better corresponds to the experimental data for aluminum alloys.

3. Analytical consideration of the problem

It is interesting to compare these values of plastic deformation dispersion (obtained in the numerical simulation and the experimental measurements) with the empirically fitted values of the strain rate sensitivity parameter α from the integral criterion of plasticity [6,7]. One can show that it is possible if we replace the parameter α in the integral criterion by the dispersion of characteristic relaxation time parameter [5]. Our calculations showed a possible relation within approach $\alpha \sim 5 \log[k] \sim 70W$. Namely, the dispersion of the characteristic relaxation time and the dispersion of the dislocation density $k < 10$ corresponds to the values $\alpha < 5$. This is the case of numerical simulations with the dislocation plasticity model of pure material without impurities and the relative dispersion of the plastic deformation intensity of approximately 0.07. Our calculations showed [5] that the value $\alpha \sim 1$ takes place for pure metals without sufficient concentration of impurities. On the other hand, according to our calculation with weak stress concentrators such as impurities in aluminum alloys, one can achieve the plastic deformation dispersion up to 0.1 that corresponds to $k = 10 - 100$ with values $\alpha < 9$. Finally, the case with $k > 100$ corresponds to $\alpha > 10$, which is typically for materials with strong stress concentrators such as steels.

The study was supported by the grants from the President of the Russian Federation (Projects No. MK-4649.2016.1 and No. MD-7481.2016.1) and by the grant from the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (competitive part of State Task of NIR CSU No. 3.2510.2017/PP).

REFERENCE

1. Meshcheryakov Yu.I., Divakov A.K., Zhigacheva N.I., Makarevich I.P., Barakhtin B.K., Physical Review B, vol. 78, 2008.
2. Meshcheryakov Yu.I., Vasilkov V.B., Atroshenko S.A., Journal of the Mechanical Behavior of Materials, vol. 4, 1993.
3. Mayer A.E., Khishchenko K.V., Levashov P.R., Mayer P.N., J. of Applied Physics, vol.113, 2013.
4. Mayer A.E., Borodin E.N., Mayer P.N., International Journal of Plasticity, vol. 51, 2013.
5. Selyutina N., Borodin E.N., Petrov Y., Mayer A.E., Int. Journal of Plasticity, vol. 82, 2016.
6. Gruzdkov A., Petrov Yu.V., Smirnov V.I., Physics of the Solid State, vol. 44, 2002.
7. Gruzdkov A., Petrov Y., J. of Ningbo Univ. (NSSS) vol. 25, 78, 2012.

Information about authors:

Elijah Borodin – senior researcher, Ural Federal University, Chelyabinsk State University and IPME RAS, +7 (904) 552 57 17, **E-mail:** elbor7@gmail.com

Alexey Gruzdkov – head of the department of mathematics, professor, St. Petersburg State Technological Institute (Technical university), +7 (812) 494-92-32, **E-mail:** gruzdkov@mail.ru

Alexander Mayer – head of the department of physics, professor, Chelyabinsk State University, +7 (351) 799-7161, **E-mail:** mayer@csu.ru

Nina Selyutina – senior researcher, IPME RAS and Saint-Petersburg State University, +7 (911) 117 35 98, **E-mail:** nins_s@mail.ru

THE FABRICATION OF ALUMINUM OXIDE COMPACTS BY EXPLOSIVE CONSOLIDATION

Buzyurkin A.E., Kraus E.I., Lukyanov Ya.L.

Abstract. This paper presents experiments and numerical research on explosive compaction of aluminum oxide powder and modeling of the stress state behind the shock front at shock loading. The aim of this study was to obtain a durable low-porosity compact sample. The explosive compaction technology is used in this problem because the aluminum oxide is an extremely hard and refractory material. Therefore, its compaction by traditional methods requires special equipment and considerable expenses.

Ceramics are usually chemically inert, hard, refractory and have a relatively low density in comparison with metals. Therefore, they form an interesting group of materials for high-tech applications. Hardness and refractivity exclude the possibility of their processing by casting, forging and machining, as is usually the case for metals and many polymers.

Instead, the technical ceramics are usually synthesized in the form of powders and further processed by precompiling them in green form and then sintering at high temperature in the furnace for their final compaction and compaction. A high-temperature process is usually required, since sintering is a process controlled by diffusion. The growth of grain and the shift of the chemical composition to a more thermodynamically stable one are inevitable during this process.

Thus, materials consisting of metastable phases and very small particle sizes (nanocrystalline, high-alloy and amorphous powders) cannot be processed using sintering without some loss of their original, often unique properties. Also, materials that have a low self-diffusion coefficient or decompose at high temperatures cannot be processed in this way. For these materials, as well as for unintentionally reacting material mixtures, alternative methods of compaction should be used. One such method is shock or explosive compaction of powders, in which the compaction of the powder occurs in a shock wave.

The experiments employed aluminum oxide powder with a grain size of 30-100 μm and a bulk density of 2.5 g/cm^3 . We used two schemes of explosive loading: plane wave one and one of the powder compaction in an oblique shock wave [1].

For the numerical simulation of the propagation of shock waves, a complete system of equations of deformation of the porous elastic-plastic material was solved [2]. The methods of numerical modeling of explosive loading of porous materials are described in detail in [3,4]. In this paper, we used the few-parameter equation of state adequately describing the physics of collision at high pressures (up to 10 mbar) and temperatures (up to 10,000 K) [5,6], which made it possible to carry out calculations of shock-wave processes with a minimal number of physical parameters as the initial data. The geometrical dimensions and the values of the physical parameters correspond to the experimental data mentioned above.

Thus, using the technology of explosive compaction, compact samples of aluminum oxide are obtained. On the basis of experimental and numerical studies of shock waves propagation, the optimum parameters of dynamic compaction of aluminum oxide are determined in order to maximize the density and the conservation of the ready samples after loading.

REFERENCE

1. Buzyurkin A.E., Kraus E.I., Lukyanov Y.L. Dynamic compaction of boron carbide by a shock wave // AIP Conference Proceedings. 2016. Vol. 1770.
2. Fomin V.M., Kiselev S.P. Elastic-Plastic Waves in Porous Materials // High-Pressure Shock Compression of Solids IV: Response of Highly Porous Solids to Shock Loading / ed. Davison L., Horie Y., Shahinpoor M. New York, NY: Springer New York, 1997. P. 205–232.
3. Buzjurkin A.E., Kiselev S.P. On appearance of “cold” layer in explosive consolidation of powders // Shock Waves. 2000. Vol. 10, № 3.
4. Buzyurkin A.E., Kraus E.I., Lukyanov Y.L. Theoretical and experimental investigation of shock wave stressing of metal powders by an explosion // EPJ Web of Conferences. 2011. Vol. 10.
5. Fomin V., Kraus E., Shabalin I. A few-parameter equation of state of the condensed matter and its application to the impact problems // EPJ Web of Conferences. 2011. Vol. 10.
6. Kraus E.I., Fomin V.M., Shabalin I.I. A few-parameter equation of state and its application to the high-velocity interaction of solids // Proceedings - 2011 International Conference on Computational Science and Its Applications, ICCSA 2011. 2011.

Information about authors:

Buzyurkin Andrey, researcher, Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Institutskaya 4/1, Novosibirsk 630090, Russia, (383) 330-38-04,

E-mail:buzjura@itam.nsc.ru

Kraus Evgeny, deputy director, Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Institutskaya 4/1, Novosibirsk 630090, Russia, (383) 330-38-80,

E-mail:kraus@itam.nsc.ru

Lukyanov Yaroslav, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Lavrentyev Avenue 15, Novosibirsk 630090, Russia,

E-mail:lukyanov@hydro.nsc.ru

TWO-DIMENSIONAL AUXETIC DESIGN FOR BIODEGRADABLE STENT

Chentsov A.V., Lisovenko D.S.

Abstract. The mechanical behavior of two-dimensional construction with negative Poisson's ratio (auxetic construction) is experimentally studied. The concave hexagon with straight sides is often an element of structure in auxetic constructions. In this work the special design of a concave hexagon in which a part of straight elements is replaced with "sinusoidal" elements is suggested. The sample was made by the laser cutting method of a non-auxetic polyethylene terephthalate (PET-a amorphous) planes. The transverse size of elements of hexagons is equal to sample thickness. The sample was subjected to a monotonous uniaxial tension till the last moment when it still remained plane. As a result of experimental data processing the tensile force - displacement diagram is calculated. Variability of Poisson's ratio depending on engineering deformations is studied.

Introduction. In 1987 material with negative Poisson's ratio (auxetic) - polymeric foam [1] was obtained for the first time. From this point active theoretical and experimental studying of physical and mechanical properties of materials and constructions with negative Poisson's ratio began. In a study of auxetics it is possible to allocate the following main directions - creation of auxetic rod models and structures, production of composites with effective negative Poisson's ratio, and study of auxetic crystal materials [2-4]. For example, auxetic rod models and structures can be used as elements of a new class of composites.

The concave hexagon with "straight" elements is often used as a unit cell in a study of mechanical properties of cellular structures (see the book [2] and the review [3]). The design of the auxetic two-dimensional plane consisting of concave hexagons is suggested in the present work. Variability of Poisson's ratio is also investigated. Some sides of the reproducing hexagon of this plane have the "sinusoidal" form. The tubular form of such design would also be auxetic and would elongate when expanded by pressure from inner surface. This form is used in polymer biodegradable stents.

Methods. Samples were made of 0.7 mm thick PET-a planes by the femtosecond laser cutting method. Processing quality of this method exceeds any other existing laser systems (for example, widespread CO₂ lasers). Femtosecond laser processing yields almost no side effects related to material heating. Duration of a femtosecond laser impulse is so short that its thermal influence after its interaction with material does extend to adjacent sites. Material is exposed to ablation. The main advantage of this method is high precision and selectivity as transition to plasma happens only in the focus of a laser beam (spot size is from tens of microns to several hundred nanometers). Thus, mechanical properties of the material in the areas adjoining the place of processing do not change. Samples were made on the laser machine with a femtosecond laser. The laser machine carried out displacements of billet with micron accuracy. The average power of radiation was 3 W. Duration of impulses of radiation was 500 fs. Energy of an impulse was 120 μJ. Thus, radiation power in an impulse reached 240 MW. The 110×20×0.7 mm plate with the central part of 26.2×20×0.7 mm was cut out. The design of a sample was such that the transverse size of elements of concave construction was chosen equal to thickness of an initial plate.

The sample was subjected to a monotonous uniaxial tension on a universal uniaxial setup (MTS Synergie) up to a load of 50 N with a speed of 5 mm/min. Changes of sample geometry were registered as 12-Megapixel images obtained during the experiment. Force and displacements of cantilever-moving beam of upper grip were also registered by the built-in sensors of the setup. Displacements and deformations in the plane of the sample were calculated from still images using digital image correlation method in Ncorr [5] software after decoding of the video stream.

Results and discussion. On a diagram tensile force - displacement the dependence changes almost linearly up to 5 mm displacement, and from 5 mm to 10 mm the sample is elongated with no force increase. There is a nonlinear load increase at further tension. During the experiment the maximum reached displacement was 25.9 mm. Up to this value the sample remained plane. The maximum transverse displacement is equal to 11.9 mm. It should be noted that longitudinal displacement during the experiment appears several times higher than the transverse displacement.

The Poisson's ratio in elasticity theory of small deformations is determined by Eq. 1

$$\nu = -\varepsilon_x / \varepsilon_y \quad (1)$$

where ε_y - longitudinal deformation, ε_x - transverse deformation. Variability of Poisson's ratio was studied by analogy with this formula. In this case $\varepsilon_y = \Delta l_y / L_0$ - longitudinal deformation, $L_0 = 26.2$ mm – length of the central area, $\varepsilon_x = \Delta l_x / l_0$ - transverse deformation, $l_0 = 20$ mm – width of the central area. The analysis of experimental data showed that elastic deformation for this sample occurs up to 2% longitudinal deformation.

Dependence of Poisson's ratio on transverse deformations is calculated. As a result of tension of the two-dimensional plane the maximum longitudinal deformations reached 99%, and the maximum transverse deformations - 59%. The Poisson's ratio remains constant up to 11% longitudinal deformation and is close to -0.2. At further increase of longitudinal deformation the Poisson's ratio decreases to -0.6.

Conclusion. A special design of auxetic two-dimensional construction is suggested in the present paper. The concave hexagon is chosen as an element of this construction. Unlike a common hexagon with straight sides in this work a part of straight sides is replaced with "sinusoidal" sides. The sample with such auxetic design made of non-auxetic polyethylene terephthalate (PET-a amorphous) by femtosecond-laser cutting was subjected to a monotonous uniaxial tension. The analysis of experimental data showed that the Poisson's ratio of such auxetic construction changes in the range from -0.19 to -0.6. The considered auxetic design can be used in composite materials for production of materials with the predetermined mechanical properties, both planes and tubes, in particular, for polymer biodegradable stents.

The work was accomplished within the framework of the Project of RFBR and Moscow Government №15-31-70005 mol_a_mos.

REFERENCE

1. Lakes R. Foam Structures with a Negative Poisson's Ratio, Science, vol. 235, 1987, p. 1038-1040.
2. Lim T.-C. Auxetic Materials and Structures. Springer Singapore, 2015, 588 p.
3. Kolken H.M.A., Zadpoor A.A. Auxetic mechanical metamaterials, RSC Adv. vol. 7, 2017, p. 5111-5129.
4. Goldstein R.V., Gorodtsov V.A., Lisovenko D.S. Longitudinal elastic tension of two-layered plates from isotropic auxetics-nonauxetics and cubic crystals, Eur. Journal of Mechanics - A/Solids, vol. 63, 2017, p. 122-127.
5. Blaber J., Adair B., Antoniou A. Open-source 2D digital image correlation Matlab software, Exp. Mech., vol. 55, N. 6, 2015, p 1105-1122.

Information about authors

Chentsov Alexander Viktorovich – senior researcher, IPMech RAS, Laboratory of Mechanics of Strength and Fracture of Materials and Structures, +7 (495) 4343527.

E-mail: chentsov@ipmnet.ru

Lisovenko Dmitry Sergeevich – senior researcher, IPMech RAS, Laboratory of Mechanics of Strength and Fracture of Materials and Structures, +7 (495) 4343527.

E-mail: lisovenk@ipmnet.ru

FABRICATION AND ANALYSIS OF THE FLEXURAL PROPERTIES OF SYNTACTIC FOAM - GFRP SANDWICH COMPOSITES

Daniel Paul, Velmurugan R. ,Gupta N.K., Manzhinov A.V.

1. Introduction

The usage of particles to modify the properties of polymers has been prevalent for several decades. The addition of hollow particles, such as glass microballoons (GMB), to polymers to reduce their specific properties marked the advent of syntactic foams. One attractive use of these foams is as a core in sandwich structures. Such sandwich composites have been fabricated and tested in the past both experimentally [1] and numerically [2]. In this study, the sandwich composites are made with the skins and core being fabricated simultaneously. The modes of failure and properties are studied and compared with analytical results.

2. Experimental Analysis

2.1. Fabrication of the sandwich composite

The materials used in the fabrication of the sandwich composites were 3M Scotchlite K15 type hollow glass microballoons, unidirectional stitched glass fiber mats, and a DGEBA-based epoxy resin, Araldite LY556. A TETA-based hardener, Aradur HY951, was used as the curing agent. In previous studies, the skins were pre-fabricated and the foam core was then bounded to them separately. In this study, all the layers were fabricated simultaneously to ensure better bonding at the interfaces.

A predetermined quantity of GMB was mixed with epoxy using a mechanical stirrer. At the same time, the lower skin was fabricated by using a hand layup technique. The GMB-epoxy-hardener mixture was poured over the skin and allowed to gel into a semi-solid state. The top skin was then fabricated over the foam core. Both the upper and lower skins were comprised of three layers of glass fiber mats. The entire sandwich structure was allowed to cure for around 20 hours at room temperature.

2.2. Mechanical tests

Flexural tests were performed on a 5 kN Instron Universal Testing Machine (UTM) fitted with a three-point bending fixture. Rectangular samples were used for the tests.

2.3. Results and discussion

The stages of failure observed in one sandwich specimen prepared instantly as described in this study are shown in figure 1 (left). There were three easily distinguishable modes of failure in the sandwich structure: core failure (cracking), skin fiber breakage, and skin-core debonding. In the specimens prepared by the instantaneous method, the failure occurred in the order shown in the figure. The results of the flexural tests for various core volume fractions of the sandwich composites are shown in figure 1 (right). It can be seen that as the core volume fraction increases, the modulus and strength of the foam showed a slight decrease. Despite the decrease in properties, the foam core helps in reducing the density of the composite significantly. The density of the fiber reinforced epoxy alone was found to be 1.646 g/cc while a sandwich containing a core having a GMB volume fraction of 50% had a reduced density of 1.155 g/cc. This helps in reducing the weight of the overall structure being fabricated.

3. Analytical analysis

The analytical analysis was done using the higher order shear deformation theory proposed by Reddy. This was chosen since the sandwich composite being studied cannot be considered a thin beam and thus will have shear effects in addition to pure bending. This is visibly noticed during the experimental bending tests where the core and the skin shear off at higher loads. The results obtained for specific volume fractions are shown in figure 2. They were found to be following the same trend as the experimental results.

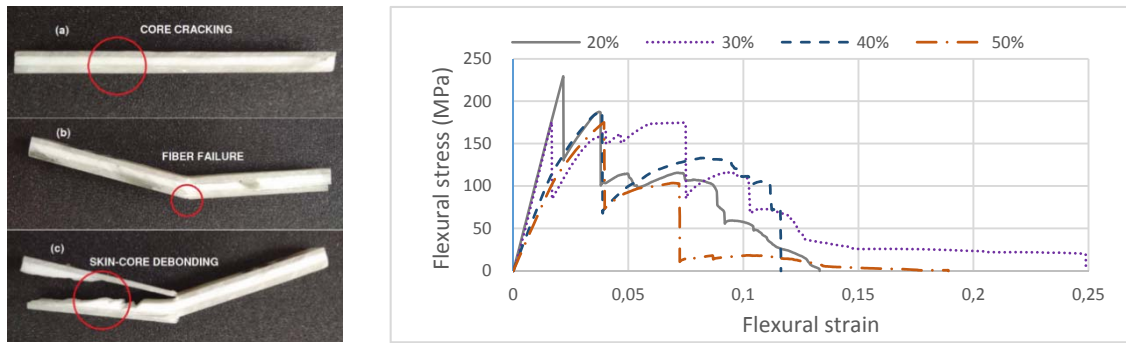


Figure 1: (Left) The stages involved in flexural failure of syntactic foam –GFRP sandwich composites. (Right) The flexural stress-strain curves of sandwich composites with varying foam volume fraction (core thickness = 3 mm)

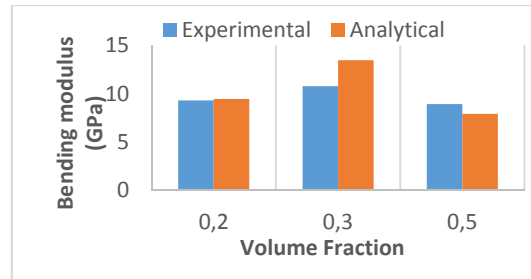


Figure 2: Comparison of analytical results with experimental values

Conclusion

The flexural properties of syntactic foam-GFRP sandwich were studied both experimentally and numerically. It was found that fabricating the entire sandwich simultaneously impacted the failure mechanism by delaying the debonding of the skin and core, which is the major and primary mode of failure in samples in which the layers are fabricated separately and then made as a sandwich. Since the sandwich is thick, a higher order bending theory was used to incorporate the effect of shear. The results showed similar trends as the experimental values. Further, the effect of core thickness on the overall properties and other properties like impact strength can also be studied.

REFERENCE

1. Gupta N, Woldesenbet E. Characterization of flexural properties of syntactic foam core sandwich composites and effect of density variation. *Journal of composite materials*, 39(24), 2197-2212, 2005
2. Corigliano A, Rizzi E, Papa E. Experimental characterization and numerical simulations of a syntactic-foam/glass-fibre composite sandwich. *Composites Science and Technology*, 60(11), 2169-2180, 2000

Information about authors:

Daniel Paul – Doctoral student, Department of Aerospace Engineering, Indian Institute of Technology Madras, India

R.Velmurugan – Professor, Department of Aerospace Engineering, Indian Institute of Technology-Madras, India

E-mail: ramanv@iitm.ac.in

N.K. Gupta – Professor, Department of Applied Mechanics, Indian Institute of Technology-Delhi, India

A.V. Manzhurov – Professor, Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academic of Sciences, Moscow, Russia

ON THE INFLUENCE OF THE ELASTIC BASE ON THE LINEAR LONG WEAK DISPERSIVE WATER WAVES CREATED BY THE LOCALIZED UNDERGROUND SOURCE

Dobrokhotoy S.Yu., Tolstova O.L., Vargas C.A.

Usually the gravity water waves are considered in the layer with the hard lower boundary. If the length of the wave much larger than the depth of layer (or the basin) and the wave amplitude is small then one can use the shallow water approximation and reduce the original problem to the linear wave equation or its dispersive generalization like the linearized Boussinesq equation. Such type of models are used for instance for the description of the propagation of the tsunami waves. It is well-known so-called piston model of the creation tsunami wave: the underground source organizes the shift of the basin's bottom which in turn generates the perturbation of the free elevation and surface gravity water waves. Pod'japolskii in 1978 suggested to consider the process of generation and propagation tsunami waves in the frame of the combined water-elastic model that considers the effect of elastic foundations on propagation of water waves. The mathematical aspects of this model were discussed in particular by Sabatier (1983), Fragela (1989), Zvolinskii, Nikinin, Sekerzh-Zenkovich (1991), Chudinovich, Dobrokhotoy, Tolstova (1993), Griniv, Dobrokhotoy, Shkalikov (2000), numerical aspects was studied by V.Gusjakov (1987) and others (see Bibliography in [1,2]). The basic equations has a nonstandard form from of view of theory of partial differential equations because the boundary conditions contain the time –derivatives. Our previous results show that the basic equations with time derivatives in boundary conditions could be presented in a standard form for Cauchy problems for evolutionary equations but in the configuration space having the form of the tensor product of the 3-D Euclidean half-space and 2-D Euclidean planes. The Fourier analysis of this equations shows that solution of the Cauchy problem for this model breaks in the 3-D internal elastic modes and two 2-D surface modes: the mode describing the Rayleigh wave and the mode describing the waves on the water surface. In our talk we focus on the water waves mode and consider the situation when the water waves are created by the localized underground source. Using recent results from [2] we construct the effective asymptotic formulas for the leading edge front waves for a wide range of sizes of underground source. This allows one to estimate the influence of the elastic base on the velocity of the leading edge front propagation and also on the dispersive properties of such type of the waves. We also show that the waves near leading edge front could be described by the linearized Boussinesq equation with corrected velocity and dispersion coefficient before the 4-th derivatives.

REFERENCE

1. Griniv R.O., Dobrokhotoy S.Yu., Shkalikov A.A. An Operator Model of the Problem of Oscillations of a Fluid on an Elastic Base. Math. Notes 68 (2000), № 1-2, 57–70
2. Dobrokhotoy S.Yu., Nazaikinskii V.E. Punctured Lagrangian Manifolds and Asymptotic Solutions of the Linear Water Wave Equations with Localized Initial Conditions, Mathematical Notes, 2017, Vol. 101, No. 6, pp. 1053–1060.

Information about authors:

Dobrokhotoy S.Yu. – Institute for Problem in Mechanics of Russian Academy of Sciences and Moscow Institute for Physics 7 916 235 09 44

E-mail: doxr@ipmnet.ru

Tolstova O.L. –Moscow State University of Civil Engineering ,

E-mail: olgall1@rambler.ru

Vargas C.A. – IIMAS, [National Autonomous University of Mexico](http://www.iimas.unam.mx)

E-mail: cav@mym.iimas.unam.mx

DETERMINATION OF THE MECHANICAL CHARACTERISTICS OF NANOMATERIALS UNDER TENSION AND COMPRESSION

Filippov A.A., Fomin V.M.

Abstract. In this paper, a method for determining the mechanical characteristics of nanoparticles in a heterogeneous mixture was proposed. Heterogeneous mixture consists of a thermosetting epoxy resin and silicon dioxide powder of different dispersity. The mechanical characteristics of such material at a constant concentration for nanopowders were experimentally determined. Using the existing formulas for obtaining effective characteristics, the Lamé coefficients for nanoparticles of various sizes were calculated. The dependence of the elastic characteristics on the particle size was obtained.

Introduction

As is known, the heterogeneous material consists of various components, such as a matrix and a filler, with significantly different mechanical properties. Application efficiency of this material depend on the correct selection of the original components and the technology of their combination. It is noted that with decreasing size up to nanometer, fillers can impart properties that are not characteristic of larger particles and significantly improve matrix properties. It is noted that with decreasing size up to nanometer, fillers can impart properties that are not characteristic of larger particles. At the same time, the evaluation of the elastic and strength characteristics of nanoparticles seems to be a very difficult task due to the small size, large specific surface area of the particles. The purpose of this paper is to determine the mechanical properties of filler particles as a function of size at different concentrations. Modern methods for obtaining the moduli of elasticity of nanoparticles are proposed in the works of A.V. Vakhrushev and others [1,2]. Such approaches cannot determine the mechanical characteristics of a particle as a nanobject, but allow one to estimate the contribution of the filler to the properties of the matrix and to predict the mechanical characteristics of such heterogeneous materials.

Using the generally accepted Voigt formulas (rule of mixtures) for determining the effective characteristics in the case of tension and compression, we have:

$$E = c_1 E_1 + c_2 E_2; L = c_1 L_1 + c_2 L_2, \quad (1)$$

$$\text{Where } E_i = \frac{\mu_i (2\mu_i + 3\lambda_i)}{\lambda_i + \mu_i}; L_i = \lambda_i + 2\mu_i; i = 1, 2 \quad (2)$$

E, L are moduli of elasticity under tension and compression, respectively, λ and μ are Lamé parameters, c_1, c_2 are the volumetric concentrations of the components. Designations without an index correspond to the mixture, 1 – filler, 2 – matrix. With the help of expressions (1) and (2) it is possible to determine and through mixtures:

$$\lambda_1 = \frac{4(L - c_2 L_2) - ((E - c_2 E_2) + 3(L - c_2 L_2)) \pm \sqrt{D}}{4};$$

$$\mu_1 = \frac{((E - c_2 E_2) + 3(L - c_2 L_2)) \pm \sqrt{D}}{8}; \quad (3)$$

$$D = (E - c_2 E_2)^2 - 10(E - c_2 E_2)(L - c_2 L_2) + 9(L - c_2 L_2)^2$$

Thus, by determining the coefficients for the matrix and the mixture, it is possible to determine the Lamé parameters for the filler.

In the experimental part of the work, according to the developed technology [3], tensile and compression specimens were prepared from epoxy resin DER-330 with the addition of silica nanopowder (0-2% by weight) Aerosil A-380.

Determination of the elastic moduli for tension and compression was performed on a Zwick/Roell Allround Z005 testing machine at a constant loading or moving speed to arrive at a uniaxial stress or strain state for stretching and compression, respectively. On the basis of formulas (3), the mechanical characteristics of the nanocomposite were calculated.

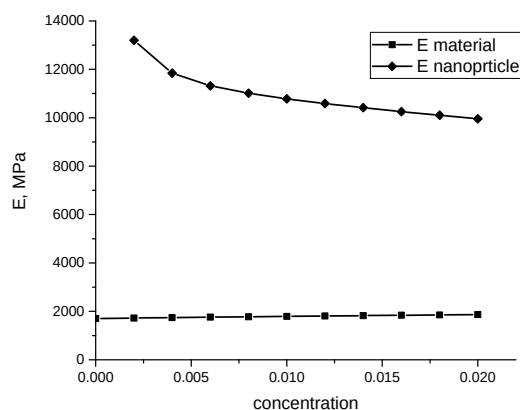


Figure 1. Determination of the modulus of elasticity of a nanoparticle for different concentrations of a heterogeneous material

The epoxy resin module was expertly determined at these curing parameters. With increasing powder concentration, Young's modulus of heterogeneous material increased by 9.5% at a volume concentration of 2%. At each concentration, the modulus of the particle was calculated from formulas (1). The calculated modulus of the particle decreases monotonically with increasing concentration.

Conclusion

The Voigt model is applicable for determining the mechanical properties of the components in the experimental region of the experimental data. The applicability of the Voigt model is limited by the condition $E_2 > E_{\text{exp}} > E_2 - c_1 E_2$.

References

1. Vakhrouchev A.V., Shushkov A.A et. al. Chem. Physics and Mesoscopics. 3(16), 381-387 (2014)
2. Vakhrouchev A.V., Shushkov A.A et. al. Chem. Physics and Mesoscopics. 2(17), 214-218 (2015)
3. T.Brusetseva, A.A. Filippov et. al. J. Mech. Of Composite Mat. 4(51), 747-756 (2015)

Information about authors:

Filippov Artem –junior researcher, Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS 8-913-064-18-36. E-mail: filippov@itam.nsc.ru

Fomin Vasiliy Michaylovich – academician, scientific adviser Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, 8-(383) 330-85-34. E-mail: fomin@itam.nsc.ru

MAGNETO-ELECTRIC TRANSITION IN NICKEL-GALLIUM ARSENIDE-NICKEL MULTIFERROIC STRUCTURE

Galichyan T.A., Filippov D.A., Laletin V.M., Firsova T.O., Poddubnaya N.N.

Abstract Experimental studies of the magnetoelectric effect are presented in structures manufactured by electrolytic deposition of nickel on a substrate of gallium arsenide. It is shown that the use of gold-germanium-nickel sublayer, when sprayed on a substrate, significantly improves the adhesion between electrolytically deposited nickel and substrate. Linear and nonlinear magnetoelectric effects on the alternating magnetic field are observed in these structures. Both effects have resonant character and the resonance frequency of the nonlinear effect is twice less than that of the linear effect. In weak fields, the value of the nonlinear magnetoelectric effect is in quadratic dependence on the alternating magnetic field and unlike the linear magnetoelectric effect, it does not depend on the bias field.

Layered magnetoelectric (ME) composites are structures consisting of interlaced, mechanically interacting magnetostrictive and piezoelectric plates. They have certain advantages over bulk composites: they are better polarized and metals having a high coefficient of magnetostriction can be used as magnetostrictive phase [1]. However, the biggest disadvantages of layered structures are the poor mechanical durability and the samples fibering on the phase boundaries. Most of the laminated structures are prepared using an interlayer polymer phase (glue), which impairs the parameters, leads to an undesirably high temperature dependence, and reduces the quality factor of the structure. The magnetoelectric effect in structure where the magnetostrictive phase was applied to the piezoelectric substrate by spraying method was studied [2]. This provides a good mechanical contact between the phases, but does not allow obtaining high values of the effect. The maximum effect is achieved under the condition $t^p \sqrt{Y^p} = t^m \sqrt{Y^m}$, where Y^m and Y^p are the Young's moduli of magnet and piezoelectric, t^m and t^p the thicknesses, respectively [3]. Young's moduli of piezoelectric and magnet materials generally differ less than two times, so the maximum effect is obtained at about the same thickness of the magnet and piezoelectric. Using of electrodeposition method allows getting magnetostrictive layers which have thickness comparable with the thickness of piezoelectric substrate. However, a problem of adhesion arises. Previously obtained samples with a thickness of magnetostrictive phase of 100 μm showed significant reduction in adhesion properties. Consequently, the value of the effect in such structures is considerably lower than that of the adhesive structures [4]. Enhanced converse ME effect has been experimentally observed in cylindrical PZT-Terfenol-D piezoelectric-magnetostrictive bilayered composites [5].

In this paper, sublayers are used to improve the adhesion between the phases, which are deposited on the substrate by electron-beam evaporation.

Structures with good adhesion between the layers and thickness of magnetostrictive layer 20–30 μm are allowed to be obtained using Au–Ge–Ni sublayers, deposited on GaAs substrate and followed by Ni electrolytic deposition. Linear ME effect on an alternating magnetic field and nonlinear ME effect is observed in the structure. In the obtained structures, the resonance value of the ME coefficient is almost 5 times greater than the value of the structures, obtained by Ni deposition on GaAs substrate and 4 times greater than of adhesive structure Ni-PZT-Ni.

REFERENCES

1. D.A. Filippov, V.M. Laletin, G. Srinivasan, Low-frequency and resonance magnetoelectric effects in nickel ferrite-PZT bulk composites, *Tech. Phys.* 57 (2012) 44-47.
2. V.M. Laletin, A.I. Stognii, N.N. Novitskii, N.N. Poddubnaya, The magnetoelectric effect in structures based on metallized gallium arsenide substrates, *Tech. Phys. Lett.* 40 (2014) 969-971.

3. D.A. Filippov, V.M. Laletin, T.A. Galichyan, Magnetolectric effect in a magnetostrictive-piezoelectric bilayer structure, *Phys. Solid State* 55 (2013) 1840-1845.
4. N.N. Poddubnaya, V.M. Laletin, A.I. Stognij, N.N. Novitskii, Dependence of magnetolectric effect in layered lead zirconate-titanate / nickel heterostructures on the interface type, *Funct. Mater.* 17 (2010) 329-334 (<http://functmaterials.org.ua/contents/17-3/fm173-10.pdf>).
5. G. Wu, R. Zhang, N. Zhang, Enhanced converse magnetolectric effect in cylindrical piezoelectric-magnetostrictive composites, *Eur. Phys. J. Appl. Phys.* (2016) (<http://dx.doi.org/10.1051/epjap/2016150607>).

Information about authors

Galichyan T.A., PhD, Researcher in Institute of Mechanics NAS of Armenia,

Affiliation: Institute of Mechanics, Armenian NAS

Address: 24B Baghramyan Avenue, 0019 Yerevan, Armenia

Tell: +374 77 77 62 91, **E-mail:** TigranGalichyan@yahoo.com

Filippov D.A., Dr. of Sciences, Professor, Head of Department of Mechanical Engineering (Novgorod State University),

Affiliation: Novgorod State University

Address: ul. B. St. Petersburgskaya, 41, Veliky Novgorod, Russia

Tell: +7(8162) 659901, **E-mail:** Dmitry.Filippov@novsu.ru

Laletin V.M., PhD, Senior Researcher, Institute of Technical Acoustics, National Academy of Sciences of Belarus,

Affiliation: National Academy of Sciences of Belarus,

Address: BY-210023, Lyudnikava Prasppekt 13, Vitebsk, Belarus, **E-mail:** laletin57@rambler.ru

Firsova T.O., PhD, Researcher in Novgorod State University,

Affiliation: Novgorod State University

Address: ul. B. St. Petersburgskaya, 41, Veliky Novgorod, Russia

Tell: +7 951 724 82 59, **E-mail:** firsovatati@mail.ru

Poddubnaya N.N., PhD, Senior Researcher, Institute of Technical Acoustics, National Academy of Sciences of Belarus,

Affiliation: National Academy of Sciences of Belarus,

Address: BY-210023, Lyudnikava Prasppekt 13, Vitebsk, Belarus, **E-mail:** poddubnaya.n@rambler.ru

MAGNETOELECTRIC EFFECT IN A SANDWICH STRUCTURE OF GALLIUM ARSENIDE-NICKEL-TIN-NICKEL

Galichyan T.A., Filippov D.A., Tihonov A.A., Laletin V.M., Firsova T.O., Manicheva I.N.

Abstract. Results of investigation of the magnetoelectric effect in a nickel-tin-nickel sandwich structure obtained by galvanic deposition on a substrate of gallium arsenide are presented. The technology of construction of structures is described and the experimental results of the frequency dependence of the effect are presented. It is shown that the use of tin as an intermediate layer reduces the mechanical stresses resulting from the incommensurability of the phases, which makes it possible to obtain qualitative structures with a nickel thickness of about 70 micron. The resulting structures have good adhesion between the layers and have a high quality factor.

Magnetoelectric (ME) effect, discovered more than half a century ago, recently attracts more attention of researchers, as evidenced by an increasing number of publications on this subject [1]. This is due to the fact that recently a fairly large number of materials have appeared, the magnitude of the effect in which is sufficient for practical application. It makes possible to create various devices of solid-state electronics, such as magnetic field sensors, memory cells on the basis of the ME effect. Composite materials consisting of magnetostrictive and piezoelectric phases were widely used to create such devices. These materials can be broken down into two classes - bulk and layered. Bulk composites are manufactured by the ceramic technology and represent mechanically coupled mixtures of powders of the magnetostrictive and piezoelectric phases [2,3]. Layered composites consist of mechanically coupled magnetostrictive and piezoelectric layers [4-6]. Both bulk and layered composites have their advantages and disadvantages. Bulk composite materials obtained by sintering the mixtures of ferrite and piezoelectric powders are easy to manufacture and have good mechanical properties, although they have smaller ME parameters compared to layered composites. The advantage of layered structures is a high degree of polarization of the piezoelectric phase, small leakage currents. However, great disadvantage of layered structures are poor mechanical strength, stratification of the samples along the phase boundaries and low quality factor. Most of the layered structures are obtained using an intermediate polymer layer (glue) which degrades the parameters, leads to undesirably high temperature dependence and a decrease in the quality factor of the structure. Young's moduli of a piezoelectric and a magnetic material, as a rule, differ by no more than two times, so the maximum value of the effect is obtained for roughly equal thicknesses of the magnet and piezoelectric. Use of the method of electrolytic deposition makes it possible to obtain magnetostrictive layers which thickness is commensurable with the thickness of the piezoelectric substrate. However, this raises the problem of adhesion. Better adhesion between the magnetostrictive and piezoelectric phases can be achieved by pre-sprayed sublayers. The use of Au-Ge-Ni sublayers deposited on a GaAs substrate with the subsequent electrolytic deposition of Ni allows obtaining structures having good adhesion between the layers.

In this paper, we propose a method for eliminating these stresses by creating a sandwich structure in which the electrolytically deposited layer of nickel alternates with an electrolytically deposited layer of tin. It is shown that the use of an intermediate tin layer in the electrolytic deposition of nickel on an arsenide-gallium substrate makes it possible to obtain structures with a nickel layer thickness of up to 70 μm . These structures have good adhesion between layers, have good mechanical strength, have high quality factor and are promising for creating devices based on the magnetoelectric effect.

REFERENCES

- [1] Pyatakov A.P. and Zvezdin A. K. Magnetoelectric and multiferroic media. *Physics-Uspekhi*. 2012. **55** 557–81
- [2] Laletin V.M. and Srinivasan G. Magnetoelectric effects in composites of nickel ferrite and barium lead zirconate titanate. *Ferroelectrics*. 2002. **280** 177-85.
- [3] Filippov D. A., Laletin V.M. and Srinivasan G. Low-frequency and resonance magnetoelectric

- effects in nickel ferrite-PZT bulk composites. //Tech. Phys. 2012. **57** 44-7
- [4] Ryu J., Carazo A. V., Uchino K. and Kim H. Magnetoelectric properties in piezoelectric and magnetostrictive laminate composites. //Jpn. J. Appl. Phys. 2001. **40** 4948–51
- [5] Srinivasan G., Rasmussen E.T., Gallegos J., Srinivasan R., Bokhan Yu. I. and Laletin V. M. Novel magnetoelectric bilayer and multilayer structures of magnetostrictive and piezoelectric oxides. // Physical Review B 2001. **64** 214408 (1-6).
- [6] Kalgin A.V., Gridnev S.A. and Gribbe Z.H. Specific features of the inverse magnetoelectric effect in two-layered $\text{Tb}_{0.12}\text{Dy}_{0.2}\text{Fe}_{0.68}\text{-PbZr}_{0.53}\text{Ti}_{0.47}\text{O}_3$ composites //Phys. Solid State. 2014. **56** 1327-33.

Information about authors:

Galichyan T.A., PhD, Researcher in Institute of Mechanics NAS of Armenia,

Affiliation: Institute of Mechanics, Armenian NAS

Address: 24B Baghramyan Avenue, 0019 Yerevan, Armenia

Tell: +374 77 77 62 91

E-mail: TigranGalichyan@yahoo.com

Filippov D.A., Dr. of Sciences, Professor, Head of Department of Mechanical Engineering (Novgorod State University),

Affiliation: Novgorod State University

Address: ul. B. St. Petersburgskaya, 41, Veliky Novgorod, Russia

Tell: +7(8162) 659901

E-mail: Dmitry.Filippov@novsu.ru

Tihonov A.A., PhD, assistant professor, Novgorod State University,

Affiliation: Novgorod State University

Address: ul. B. St. Petersburgskaya, 41, Veliky Novgorod, Russia

Tell: +7 906 205 29 89

E-mail: atnu1@yandex.ru

Laletin V.M., PhD, Senior Researcher, Institute of Technical Acoustics, National Academy of Sciences of Belarus,

Affiliation: National Academy of Sciences of Belarus,

Address: BY-210023, Lyudnikava Praspekt 13, Vitebsk, Belarus

E-mail: laletin57@rambler.ru

Firsova T.O., PhD, Researcher in Novgorod State University,

Affiliation: Novgorod State University

Address: ul. B. St. Petersburgskaya, 41, Veliky Novgorod, Russia

Tell: +7 951 724 82 59

E-mail: firsovatati@mail.ru

Manicheva I.N., PhD student, Junior Researcher in Novgorod State University,

Affiliation: Novgorod State University,

Address: ul. B. St. Petersburgskaya, 41, Veliky Novgorod, Russia,

Tell: +7 902 284 33 49

E-mail: Manicheva.i@mail.ru

ON BENDING VIBRATIONS OF ORTHOTROPIC STRIPS OR BEAMS OF VARIABLE THICKNESS WITH ACCOUNT OF TRANSVERSE EFFECTS UNDER THE CONDITIONS OF ELASTIC JOINTS

Gevorgyan G.Z.

Abstract. Vibration of variable thickness orthotropic strips with account of transverse shear with elastic joints at various boundary conditions is considered. The obtained set of equations solved numerically by collocation method in various laws of variation of thickness and elastic constants. The results of calculation in some cases compared with known exact solutions.

1. For relatively thick plates and shells, or if they have low shear rigidity, the theory based on Kirchhoff-Love hypotheses does not yield reliable results and it is necessary to apply refined theories. There are various refined theories based on hypotheses, asymptotic theories, iterative theories, etc. Here we consider the problem by the theory proposed by Kirakosyan [1]. The essence of this method is as follows. To construct the simplest theory, the principal stresses σ_x, σ_y must have a linear thickness distribution. To satisfy the elasticity theory equations of motion τ_{xy}, τ_{yz} must have a second order in z

$$\tau_{xz} = \varphi_1 + \varphi_2 z + \varphi_3 z^2, \quad \tau_{yz} = \psi_1 + \psi_2 z + \psi_3 z^2$$

Integrating the equations of motion along the thickness and multiplying by z and integrating the first two equations, we obtain the resolving system of equations, where high orders of relative thickness is neglected. With the help of surface conditions $\varphi_2, \varphi_3, \psi_2, \psi_3$ are excluded. The plane problem and the bending problem are separated. The resolving system of equations for a plane problem is of fourth order and contains two unknown functions, the tangential displacements of the middle plane of the plate. The system of bending equations is of sixth order and contains three unknown deflection functions and two functions characterizing the distribution of transverse tangential stresses of the middle plane of the plate. In the case of a plate-strip, there remain two differential equations with respect to the deflection w and, which together have a fourth order.

Here we consider an orthotropic plate-strip of variable thickness, infinite along the axis Oy and length a along the axis Ox . The coordinate plane xOy coincides with the middle plane of the plate. The coordinate axes are parallel to the main directions of anisotropy of the plate-strip material. Using the equations obtained in [1-2] the equations of bending vibrations in a dimensionless form can be represented in the form:

$$\begin{aligned} & H^2 s^3 \frac{d^2 H}{dx^2} \frac{d^2 f}{dx^2} - H \left[8 + s^2 ((\chi + k_3 A_1) \frac{d^2 H}{dx^2}) \right] \frac{d\varphi}{dx} - 16 \frac{dH}{dx} \varphi - sH\Omega^2 \times \\ & \times \left[12f + sH \frac{dH}{dx} \left(k_1 s \frac{df}{dx} - k_2 \chi \varphi \right) - \frac{k_3 s H^2}{2} \left(A_1 s \frac{d^2 f}{dx^2} - \bar{\Delta}_2 \frac{d\varphi}{dx} \right) \right] = 0 \\ & s^3 H^2 \frac{\partial^3 f}{\partial \bar{x}^3} + 2s^3 H \frac{dH}{d\bar{x}} \frac{d^2 f}{d\bar{x}^2} - H^2 s^2 \left[(\chi + k_3 A_1) \frac{d^2 \varphi}{d\bar{x}^2} \right] - \\ & - 2Hs^2 \left[(\chi + k_3 A_1) \frac{dH}{d\bar{x}} \right] \frac{d\varphi}{d\bar{x}} + 8\varphi + \Omega^2 H^2 s^2 \left(k_1 s \frac{df}{d\bar{x}} - k_2 \chi \varphi \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

where

$$A_1 = a_{13} B_{11} + a_{23} B_{12}, \quad \Delta_2 = a_{13} (a_{55} B_{11} + A_1) + a_{23} (a_{55} B_{12} + A_2) \quad (1.2)$$

$$x = a\bar{x}, \quad z = h_0 \bar{z}, \quad s = h_0 / a, \quad h = h_0 H, \quad B_{ij} = \alpha_{ij} B_{11}$$

$$\chi = a_{55} B_{11}, \quad \bar{\Delta}_2 = B_{11} \Delta_2, \quad \omega^2 = B_{11} \Omega^2 / \rho a^2$$

$$w = h_0 f \cos \omega t, \quad \varphi_1 = B_{11} \varphi \cos \omega t, \quad u_z = h_0 u \cos \omega t \quad (1.3)$$

a_{ij} and B_{ij} – the elastic constants of the material, φ_1 – the function characterizing the distribution of tangential stresses τ_{xz} , w – the deflection of the median plane of the plate, t – the time, ρ – the density of the material, ω – the circular oscillation frequency of the plate, k_1, k_2, k_3 – the coefficients determining the formulation of the problem and assuming the values 0 or 1. If $k_1 = 1$ taking into

account inertia of rotation, due to the classical bending, $k_2 = 1$ taking into account the inertia of rotation from the transverse shears, and $k_3 = 1$ taking into account the reduction and tension σ_z . If the coefficient is zero, then the corresponding factor is not taken into account. If instead of B_{11} putting E then obtained the problem for beam. When $\chi = 0$, the classical statement of the problem is obtained, $\chi = 3$ corresponds to the isotropic material c , and for orthotropic material can χ take values up to 40. The remaining notations are generally accepted.

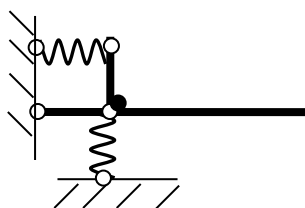
Usually, the boundary conditions of embedding, hinged support or free end are used. Closer to real conditions are the elastic joint conditions [3], which can be represented as:

1. The angle of rotation of the middle line or the end cross-section of the plate is proportional to the bending moment, which in dimensionless form we write in the form

$$l_1 \frac{df}{dx} \pm (1 - l_1) M_x = 0 \quad \text{or} \quad l_1 \frac{du}{dz} \pm (1 - l_1) M_x = 0 \quad \text{if } \chi = 0 \text{ they coincide.} \quad (1.4)$$

2. The shearing force is proportional to the displacement f (fig. 1).

$$l_2 f + (1 - l_2) \bar{N} = 0 \quad (1.5)$$



From these conditions for different l_1, l_2 we can obtain the boundary conditions of embedding, hinged support, free end and symmetry conditions.

2. In the case of a constant thickness, without taking into account the transverse effects and the classical boundary conditions, equations (1.1) can be reduced to one equation and the solution can be obtained analytically. In the general case it is necessary to solve numerically. To solve by the modified collocation method, we take the functions f and φ in the form

$$f = \sum_{i=0}^{n+1} a_i x^i, \quad \varphi = \sum_{i=0}^{n+1} b_i x^i \quad (2.1)$$

Satisfying the equations (1) at the points of collocations, and at the end points to the boundary conditions, we obtain a homogeneous system of equations $2n + 4$ order with respect to a_i, b_i .

Equating the determinants of these systems to zero, we obtain the values of the dimensionless vibration frequencies. After determining these values, we can define the form of the functions corresponding to these values.

Plates of variable thickness for which the dimensionless thickness changes in various laws was considered.

REFERENCE

1. Kirakosyan R.M. Basic equations of orthotropic plates of variable thickness with allowance for transverse shear and compression.// Proc. NAS RA. Mechanics. 2002. V.55. №4. Pp. 12-20.
2. Ambartsumian S.A. Theory of anisotropic plates : strength, stability, and vibrations Technomic Publishing Co., Inc. 1970. - 255 pp.
3. Strength, Stability, Vibrations. Reference book under. Birger I.A. and Panovko Ya.G, V.3 1964. 564p.

Information about authors:

Gevorgyan Gnnun Z. – leading researcher, Institute of Mechanics NAS RA, Yerevan (374 10) 397023, (374 91) 807989

E-mail: gnungev@gmail.com

RESPONSE OF CRACKED BEAM USING DYNAMIC GREEN FUNCTION

Ghannadiasl A.

Abstract

The dynamic response of cracked beam using Dynamic Green Function presents in this paper. An exact and direct modeling technique is introduced for modeling the cracked beam with arbitrary boundary conditions. The applied method is based on the Dynamic Green Function. The effect of the translational and rotational support flexibilities, depth and location of crack and other parameters is assessed.

Introduction

Beams are fundamental models for the structural elements of many engineering applications and have been studied extensively. The dynamic behavior of the cracked beam is considerably important in many structural designs. Christides and Barr introduced the one dimensional cracked beam theory at same level of approximation as Bernoulli-Euler beam theory [1]. A review on the topic of vibration of cracked structures is presented by Dimaragonas [2]. His review contains vibration of cracked rotors, bars, beams, plates, pipes, blades and shells. Zheng and Kessissoglou determined the natural frequencies and mode shapes of a cracked beam are obtained using the finite element method [3]. The influence of two open cracks on the dynamic behavior of the double cracked simply supported beam both is investigated by Yoon et al. [4]. Shifrin presented a new technique is proposed for calculating natural frequencies of a vibrating beam with an arbitrary finite number of transverse open cracks [5]. In previous studies on dynamic analysis of the cracked beam, only the Euler–Bernoulli beam has been analyzed. On the other hand, previous researchers' solution cannot be generalized to general boundary conditions for beam. Therefore, the object of this paper is:

- To present a very simple and practical analytical–numerical technique for determining the dynamic response of cracked Timoshenko beams, with various boundary conditions.
- To state exact solutions in closed forms using the dynamic Green function

Modeling of Timoshenko beams under moving mass

In this study, it is assumed a Timoshenko beam of length L which is partially restrained against translation and rotation at its ends. The translational restraint is defined by the spring constant K_{TL} , at left end and K_{TR} at the right end and the rotational restraint by the spring constants K_{RL} at left end and K_{RR} at the right end, as shown in Fig. 1. The forced vibration equations for the linear elastic, isotropic, homogeneous, uniform Timoshenko beam can be obtained in a form dependent only on the functions of the displacement:

$$EIw_{,xxxx} - \rho I \left(1 + \frac{E}{\kappa G} \right) w_{,xxtt} + \frac{\rho^2 I}{\kappa G} w_{,tttt} + \rho A w_{,tt} = F \delta(x - x_F) \quad (1)$$

where $w(x,t)$ is the transverse deflection of the mid-surface of the beam and F is the reaction force exerted by the moving mass on the beam. In addition, I , A , E , G , κ and ρ are, the second moment of area, the cross-sectional area of the beam, the Young's modulus of elasticity, the shear modulus, the sectional shear coefficient, and the beam material density, respectively.

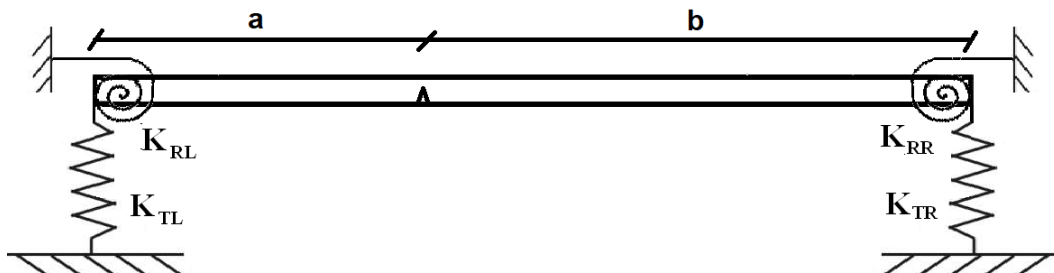


Fig. 1: Timoshenko beam with general boundary conditions

Dynamic Green function

The dynamic Green function is utilized to find the solution for Eq. (1). Therefore, if $G(x,u)$ was the dynamic Green function for the submitted problem, the solution of Eq. (1) can be presented the form

$$w(x) = F G(x,u) \quad (2)$$

$G(x,u)$ is the solution of the differential equation:

$$G_{,xxxx} + \phi^2 (r^2 + \alpha^2) G_{,xx} - \phi^2 (1 - \phi^2 r^2 \alpha^2) G = \delta(x - x_F) \quad (3)$$

where ϕ is the parameter proportional to the natural frequency ($\phi^2 = \frac{\omega^2 \rho A}{EI}$), r , the radius of gyration of the beam cross section ($r^2 = \frac{I}{A}$), α , the parameter proportional to the rigidity of the beam ($\alpha^2 = \frac{EI}{\kappa A G}$). The general solution of equation (3) can be stated as:

$$G(x,u) = \begin{cases} C_1 \sin(\phi \lambda_1 x) + C_2 \cos(\phi \lambda_1 x) + C_3 \sinh(\phi \lambda_2 x) + C_4 \cosh(\phi \lambda_2 x) & 0 \leq x \leq u \\ C_5 \sin(\phi \lambda_1 x) + C_6 \cos(\phi \lambda_1 x) + C_7 \sinh(\phi \lambda_2 x) + C_8 \cosh(\phi \lambda_2 x) & u \leq x \leq L \end{cases} \quad (4)$$

where $x \in [0, L]$ and λ_1 and λ_2 are calculated as:

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{r^2 + \alpha^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{r^2 + \alpha^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{\phi^2}}} \quad (5)$$

$$\lambda_2 = -\sqrt{\frac{r^2 + \alpha^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{r^2 + \alpha^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{\phi^2}}} \quad (6)$$

REFERENCE

1. Christides S. and Barr A.D.S. One- dimensional theory of cracked Bernoulli-Euler beam. Journal of Mechanical Science, vol. 26, 1984.
2. Dimarogonas Andrew D. Vibration of cracked structures: Astate of the art review. Engineering Fracture Mechanics, vol. 55, 1996.
3. Zheng D.Y. and Kessissoglou N.J. Free vibration analysis of a cracked beam by finite element method. Journal of Sound and Vibration, vol. 273, 2004.
4. Yoon H.I., Son I.S., and Ahn S.J. Free vibration analysis of Euler-Bernoulli beam with double cracks. Journal of Mechanical Science and Technology, vol. 21, 2007.
5. Shifrin E.I. Natural frequencies of a beam with an arbitrary number of cracks. Journal of Sound and Vibration, vol. 222, 1999.

Information about authors

Amin Ghannadiasl – Assistant Professor, Faculty of Engineering, University of Mohaghegh Ardabili, Ardabil, Iran, (98 914) 451 18 13

E-mail: aghannadiasl@uma.ac.ir

SHEAR WAVES IN A TWO-PHASE OPPOSITELY POLARIZED VISCOELASTIC PIEZOELECTRIC WAVEGUIDE

Ghazaryan K.B., Mozharovsky V.V., Ohanyan S. K.

Abstract Coupled electro-elastic SH waves propagating in a piezoelectric waveguide are considered in the framework of the full system of Maxwell's electrodynamic equations. Homogeneous conditions for electrical and the magnetic fields are taken along waveguide traction free walls. The dispersion equations are obtained and numerical analysis is carried out. The results demonstrate the significant effects of piezoelectricity and viscosity on acoustic frequencies.

Waves in piezoelectric waveguides are studied by many researchers and in the most cases the quasistatic approximation is adopted for governing equations. In some situations, however the dynamic setting of Maxwell's equations is necessary to consider when investigating the coupling effects of elastic and electromagnetic waves [1-5]. Waves in piezoelectric viscoelastic media are considered in [4,5].

The purpose of this study is to investigate in dynamic setting of Maxwell's equations shear waves in a waveguide consisting of two oppositely polarised piezoelectric materials with viscosity properties.

Let consider in Cartesian system $(-\infty < x < \infty, -b < y < a, -\infty < z < \infty)$ a two-phase waveguide made from two oppositely polarized (having oppositely directed crystallographic polling axes) perfectly bonded viscoelastic piezoelectric sub-layers of identical crystals of 6mm hexagonal group symmetry. The interconnected elastic and electro-magnetic correlations and equations for an anti-plane problem in the framework of full system of Maxwell equations in a viscoelastic piezoelectric materials are [1,3]

$$\begin{aligned}\sigma_{xz}^{(s)} &= \left(G + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial u_z^{(s)}}{\partial x} - (-1)^{(s)} e_{15} E_x^{(s)}, \quad \sigma_{yz}^{(s)} = \left(G + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial u_z^{(s)}}{\partial y} - (-1)^{(s)} e_{15} E_y^{(s)} \\ D_x &= (-1)^{(s)} e_{15} \frac{\partial u_z^{(s)}}{\partial x} + \varepsilon_{11} E_x^{(s)}, \quad D_y = (-1)^{(s)} e_{15} \frac{\partial u_z^{(s)}}{\partial y} + \varepsilon_{11} E_y^{(s)}; \quad \frac{\partial \sigma_{xz}^{(s)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{(s)}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u_z^{(s)}}{\partial t^2} \quad (1) \\ \frac{\partial E_y^{(s)}}{\partial x} - \frac{\partial E_x^{(s)}}{\partial y} &= -\mu_{33} \frac{\partial H_{zy}^{(s)}}{\partial t}, \quad -\frac{\partial H_z^{(s)}}{\partial x} = \frac{\partial D_y^{(s)}}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_z^{(s)}}{\partial y} = \frac{\partial D_x^{(s)}}{\partial t}\end{aligned}$$

where u_z is the displacement, σ_{xz}, σ_{yz} are the shear stresses, D_x, D_y and E_x, E_y the electric displacements and electric field intensities, and H_z the magnetic field intensity, $\rho, c_{44}, e_{15}, \varepsilon_{11}, \mu_{33}$ and η are the mass density, the elastic, piezoelectric, dielectric magnetic constants and viscosity coefficient, respectively. The indexes $s=1, s=2$ stand for two oppositely polarised sub-layers A ($0 < y < a$) and B ($-b < y < 0$).

Assuming solutions in (1, 2) in the form of the plane time-harmonic wave

$$\{u_z, \sigma_{xz}, H_z, E_y\} = \{u(x), \sigma(x), H(x), E(x)\} \exp[i(\omega t - ky)]$$

where ω is the wave angular frequency, k is the wave number, we come to the following matrix differential equation with regard to column vector function

$$\bar{U}_s(x) = (u(x), \sigma(x), H(x), E(x))^T, \quad s=1; s=2$$

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{U}_s}{dx} &= T_s \bar{U}_s \\ T_s &= \begin{pmatrix} 0 & 1/G_0 & (-1)^s ek/\varepsilon\omega G_0 & 0 \\ Gk^2 - \rho\omega^2 & 0 & 0 & i(-1)^s ek \\ (-1)^s ek\omega & 0 & 0 & -i\varepsilon\omega \\ 0 & i(-1)^{s-1}(\varepsilon G_0)^{-1} ek & i((\varepsilon\omega G_0)^{-1} Gk^2 - \mu\omega) & 0 \end{pmatrix} \quad (2)\end{aligned}$$

Here $G = c_{44} + i\omega\eta$, $G_0 = G + \varepsilon^{-1}e^2$, $\varepsilon = \varepsilon_{11}$, $\mu = \mu_{33}$, $e = e_{15}$.

Eigenvalues of matrixes T_s are the same and equal to $\pm ip, \pm iq$, where $p = \sqrt{\omega^2/c_t^2 - k^2}$, $q = \sqrt{\omega^2/c^2 - k^2}$, $c_t = \sqrt{G_0/\rho}$ is the velocity of shear elastic wave, $c = \sqrt{1/\varepsilon\mu}$ is the velocity of the

electromagnetic wave of piezoelectric materials. Eigen functions of Eq.(1) corresponding to these eigenvalues can be cast in matrix form as

$$U_s(x) = P_s(x)C_s, \quad C_s = (C_1^{(s)}, C_2^{(s)}, C_3^{(s)}, C_4^{(s)})^T \quad (3)$$

where column vectors $C^{(s)}$ are constants of integration ,

$$P^{(s)}(x) = \begin{pmatrix} \exp(ipx) & \exp(-ipx) & 0 & 0 \\ iG_0 p \exp(ipx) & -iG_0 p \exp(-ipx) & (-1)^{s-1} (\varepsilon\omega)^{-1} ek \exp(ikx) & (-1)^{s-1} (\varepsilon\omega)^{-1} ek \exp(ikx) \\ 0 & 0 & \exp(ikx) & \exp(-ikx) \\ i(-1)^{s-1} ek \varepsilon^{-1} \exp(ipx) & i(-1)^{s-1} ek \varepsilon^{-1} \exp(-ipx) & -q \exp(ikx) (-1)^s (\varepsilon\omega)^{-1} ek \exp(ikx) & q (\varepsilon\omega)^{-1} \exp(-ipx) \end{pmatrix}$$

Eliminating vectors C_s in Eq.(3) the relations linking $U^{(s)}(x)$ vector field values within each oppositely directed sub-layers can be found as

$$U_1(0) = P_1(0)[P_1(a)]^{-1} U_1(a); \quad U_2(0) = P_2(0)[P_2(-b)]^{-1} U_2(-b)$$

Using the continuity conditions of field vectors $\bar{U}^{(s)}(x)$ at interface $x=0$, $\bar{U}^{(1)}(0) = \bar{U}^{(2)}(0)$ we come to the following relation which links the field vectors at the waveguide walls $x=a$, $x=-b$

$$U_2(-b) = MU_1(a); \quad M = \left\{ P_2(0)[P_2(-b)]^{-1} \right\}^{-1} P_1(0)[P_1(a)]^{-1}$$

By means of the matrix M is it easy to obtain the dispersion equations for different boundary conditions imposed on waveguide walls. Two types of electrical boundary conditions (open and closed) on the waveguide surfaces are considered and corresponding dispersions are obtained. For traction free and electrically closed conditions at $x=a$, $x=-b$ we get the following dispersion equation $(a=b=d/2, \beta=pq/k^2, R=e^2/\varepsilon G_0)$

$$\beta^3 \sin(dp) \sin(dq) - \beta^2 R (3 - 8 \cos(dp/2) \cos(dq/2) + \cos(dq) + \cos(dp) (1 + 3 \cos(dq))) - \\ - \beta R^2 (8 \sin(dp/2) \sin(dq/2) - 3 \sin(dp) \sin(dq)) - 4 R^3 (\sin(dp/2) \sin(dq/2))^2 = 0$$

The detailed numerical analysis of dispersion equations is carried out. Effects of piezo and viscosity properties on dynamic process in two-phase waveguide are studied and compared with results of one-phase waveguide $a=0$ or $b=0$. In the long and short wave limits the branches of dispersion equations are obtained in explicit ways and are examined analytically.

The research was supported by the State Committee of Science of Armenia and BRFFR grants No AB16-47, No T17ARM-034.

REFERENCES

1. Belubekyan, M.V. Screen surface shear wave in a piezo-active semi-space of hexagonal symmetry. In: Proc. 6th Int. Conf., Problems of Dynamics of Interaction of Deformable Media, Yerevan, (2008)
2. Yang, J.. "Piezoelectromagnetic waves in a ceramic plate. IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, 51,8 (2004)
3. Piliposyan, D., Ghazaryan K., and Piliposian G. Shear Bloch waves and coupled phonon–polariton in periodic piezoelectric waveguides. Ultrasonics, 54,2 (2014)
4. Huang C.P, Zhu Y.Y., Piezoelectric-induced polariton coupling in a superlattice. Physical Review Letters. 94,11(2005)
5. Piliposyan D., Ghazaryan K., Piliposian G., Magneto-electro-elastic polariton coupling in a periodic structure. Journal of Physics D: Applied Physics, 48, (2015).

Information about authors

Ghazaryan K.B. - Doctor of science, professor, principal science researcher, Institute of Mechanics NAS of Armenia, E-mail: ghkarren@gmail.com

Mozharovsky V.V. - Doctor of science, professor, principal science researcher, Gomel State University, Belarus, E-mail: val-mozh@yandex.ru

Ohanyan S. K. - PhD student, Institute of Mechanics NAS of Armenia, E-mail: sergohanyan@mail.ru

THE MODELS OF FRICTION OF VISCOELASTIC BODIES UNDER VARIOUS INTERFACE CONDITIONS

Goryacheva I.G.

Abstract. Some models of a sliding contact of the surfaces with periodic microgeometry over a viscoelastic base are presented. The contact problems are considered in steady state formulation. The mechanical properties of the viscoelastic base are described by the Kelvin model. The various interface conditions such as dry surfaces, boundary lubrication, existence of the incompressible fluid in the gap between the surfaces, as well as hydrodynamic lubrication are considered. Based on the models, the dependences of the friction force on the mechanical properties of contacting bodies, microgeometry parameters, and sliding velocity are analyzed for various interface conditions.

1. Introduction. One of the main causes of energy dissipation in sliding contact of viscoelastic bodies is hysteretic losses in subsurface layers of contacting bodies. Its influence on friction force depends on the mechanical properties of the contacting bodies and their surface layers, surface microgeometry, operation conditions, such as applied load, sliding velocity, temperature, and environment conditions. Besides, interface conditions in the gap between surfaces have the significant effect on friction force. In contact of dry surfaces, the adhesive interaction of the contacting surfaces increases the friction force. In lubricated contact the friction force depends essentially on the characteristics and volume of fluid in the gap between the contacting surfaces. In this study the models are presented to study the effect of the interface conditions on the friction force in sliding contact of the rigid body with periodic microgeometry and the viscoelastic base.

2. Sliding contact under boundary lubrication regime. The contact problems in 2-D and 3-D formulations for the punch with periodic relief sliding over the viscoelastic layer are considered. It is assumed that there is no shear stress at the contact regions, and there are no adhesive forces between the surfaces. The viscoelastic layer properties are described by the Kelvin model

$$\sigma_i + \frac{\lambda_i}{1 + \alpha_i} \frac{d\sigma_i}{dt} = \frac{E_{li}}{1 + \alpha_i} \left(\varepsilon + \lambda_i \frac{d\varepsilon}{dt} \right) \quad (2.1)$$

$$p = \sum_{i=1}^n \sigma_i$$

Here $\frac{\lambda_i}{1 + \alpha_i} = T_{\sigma i}$ are the relaxation times, and $\lambda_i = T_{\varepsilon i}$ are the retardation times.

The shape of the punch is described by the function

$$f(x, y) = h - \frac{h}{4} \left(\cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right) + 1 \right) \left(\cos\left(\frac{2\pi y}{l}\right) + 1 \right) \quad (2.2)$$

Here h and l are the height of asperities and the distance between them, respectively, $h \ll l$.

The strip method is used for solving the contact problem. Calculations for various microgeometry parameters have been made and used to analyze the influence of the surface relief, viscoelastic layer properties and the sliding velocity on contact pressure distribution and on the mechanical component of friction force [1]. The results indicate that the contact region increases as the nominal pressure increases, and the contact spots approach to each other first at the direction of the y-axis, which is perpendicular to the sliding direction.

3. Modeling of adhesion effect in sliding contact of dry surfaces.

The similar 3-D periodic contact problem is formulated taking into account the molecular attraction in the gap between the bodies. The Maugis-Dugdale model is used to describe the dependence of the negative adhesive stress p acting in the gap between the surfaces on the distance δ between them, i.e. $p_a(\delta)$. The 3D contact problem is reduced to a 2D contact problem (strip method). The boundary conditions for the contact pressures and displacements in each strip are formulated with taking into account various regimes of the gap filling: saturated contact, discrete contact with saturated adhesive interaction, and discrete contact with zones of adhesive interaction and zones of free boundary.

The results indicate that due to adhesion a significant increase in the real contact area takes place, the contact saturation occurs at lower loads, and a contact between surfaces exists even for negative (tensile) loads. The results also show that the transition from discrete to saturated contact in the presence of adhesion occurs at lower loads than without adhesion.

Adhesion leads to the increase in the value of the mechanical component of friction force; this increase is larger for higher value of adhesive stress. The effect of adhesion is especially significant in contact of the bodies under small or negative loads.

4. Effect of an incompressible fluid in the gap between the surfaces. The contact problem for a rigid indenter with 3D wavy surface sliding with the constant velocity v along the x -axis on the boundary of a viscoelastic layer is considered taking into account the incompressible fluid of the given volume v inside the valleys. The shape of the wavy surface is described by the periodic function (2.2). The layer viscoelastic properties are described by Eq.(2.1). It is assumed that the viscoelastic layer is bonded to a rigid base.

The analytical method was used to solve the contact problem [3]. The problem was reduced to the system of non-linear equations to determine the contact pressure and the fluid pressure in the gap between the surfaces. It was shown that the fluid pressure depends on the velocity and on the volume of fluid in the gap.

The solution of this problem makes it possible to indicate the range of parameters in which the fluid supports the load. The results of calculation indicate that the real contact area and the friction force decrease due to existence of the incompressible fluid inside the valleys.

5. Modeling of hydrodynamic lubrication for bodies coated by viscoelastic layer. The model of VEHD lubrication of rough cylinder in contact with viscoelastic layer bonded to a rigid base is developed. The viscoelastic properties of the surface layer are described by Eq.(2.1) with one relaxation time. The Reynolds equation is used to describe the flow of lubricant in the gap between the surfaces. The surface roughness is described by the periodic function. The problem is reduced to the system of equations which is solved using the Newton method and iteration. Based on the numerical calculations, the specific features of the lubricated contact of bodies covered by viscoelastic layers are determined and discussed. The influence of a surface microgeometry on pressure and film thickness distributions is also analyzed. The comparison of the results with the case of elastic layer (EHD) is provided.

Acknowledgement. The research was carried out under financial support of Russian Scientific Foundation (grant No 14-29-00198)

REFERENCES

1. Sheptunov B.V. Nozdrin M.A., Goryacheva I.G. Sliding Contact of a Stamp with Regular Relief and a Viscoelastic Foundation. //Journal of Friction and Wear. V. 33. № 3. 2013.
2. Goryacheva I.G., Makhovskaya Yu.Yu. Modeling of Friction at Various Microscales. //Izvestiya RAS, Mechanics of Solids, №3. 2010.
3. Goryacheva I.G., Shpenev A.G. 3-D Model of the Periodic Structure Punch Sliding Upon the Viscoelastic Base with Incompressible Fluid in the Contact Gap. Key Engineering Materials, Vol. 528, 2013.
4. Goryacheva I.G., Usov P.P. Numerical analysis of contact of viscoelastic bodies with rough surfaces in the presence of viscous lubricant in the gap. //Applied Math. And Mech. (PMM), V.76, № 5, 2012.

Information about author:

Goryacheva Irina – professor, Academician of RAS, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics +7-495-4343692. E-mail: goryache@ipmnet.ru

ON A CONTACT INTERACTION OF TWO IDENTICAL STRINGERS WITH ELASTIC SEMI-INFINITE CONTINUOUS OR VERTICAL CRACKED PLATE

Grigoryan M.S.

Abstract. On a interaction of two identical stringers with a continuous or vertical cracked elastic semi-infinite plate and the vertical crack can comes the plate boundary.

This paper considers two related to each other contact problems. In the first problem, an elastic half-infinite continuous plate, that in the right-handed rectangular coordinate system occupies the lower half-plane, is reinforced on its boundary by two identical stringers, located symmetrically about the origin of the coordinate system. At the far ends of the stringers, horizontal tensional concentrated forces equal in magnitude but opposite in direction, are applied. In addition, on the upper faces of stringers along their middle lines tensional distributed tangential forces of a given intensities act. The plate itself is exposed to the action of uniformly distributed horizontal forces tensioning in the horizontal direction at infinity. This problem is mathematical formulated as Prandtl's integro-differential equation for stringers in the well-known Melan physical model. The solution of the latter by the method of Chebyshev polynomial [1] is reduced to a regular infinite system of linear algebraic equations (SLAE). Here the solution of the Prandtl governing equation is constructed by the method which is simpler from the point of view of computational mathematics. Namely, the solution is represented in the form of a product of a weight function that takes into account the characteristic singularities of the contact stresses under the stringers and some regular function of the Hölder class. Further, as in [2], the regular function is approximated by the Lagrange interpolation polynomial at Chebyshev nodes and then the original Prandtl equation reduces to a finite SLAE by the known method. In a particular case, if stringers are not loaded or are under the influence of a self-balanced system of external forces, we will use also the Multopp method [2].

Further, using the Kolosov-Muskhelishvili complex potentials [3] or the solution of the auxiliary boundary-value problem for a quarter-plane (a wedge with a right angle), which is easily obtained by the Mellin integral transformation, the normal breaking stresses are determined on the vertical axis of the plate at the origin of the coordinate system. Analysis of the formula for these stresses shows that when the near ends of the stringers tend to zero, i.e. when they infinitely approach each other, these stresses increase infinitely, taking on the value of the brittle fracture limit for a given material. As a result, there is a vertical cracking of the elastic plate.

Proceeding from this fact, the second problem is considered, which closely connected with the first problem. Here we have a configuration as in the first problem, but on the vertical axis there is a crack of finite length, the crack edges of which can be loaded with vertical forces. Two cases of the location of a crack are discussed:

- a) when it is located inside the plate at some distance from its boundary;
- b) when a crack tip vertically reaches the boundary of the plate.

In both cases the discussed problem is described by a system of two singular integral equations (SIE).

In the case a), the dislocation densities on the crack edges is unbounded at its tips and they have ordinary root singularities. In the case b), the dislocation densities are unbounded at the lower internal crack tip and, in general, are bounded at the upper tip. The solution of the governing system of the SIE is constructed by a known numerical-analytical method [4-6].

REFERENCES

1. Alexandrov V.M., Mkhitarian S.M. The contact problems for solids with thin coatings and layers. – M.: Nauka, 1983. – 488 p. (in Russian).
2. Mkhitarian S.M., Mkrtchyan M.S., Kanetsyan E.G. On a method for solving Prandtl's integro-differential equation to the problem of continuum mechanics using polynomial approximations. V.97, №6, 2017, pp. 639-654.
3. Muskhelishvili N.I. Some Basic Problems of Mathematical Elasticity Theory, Nauka, Moscow, 1966, 708 p. (in Russian).
4. Erdogan F., Gupta G.D., Cook T.S. The Numerical Solutions of Singular Integral Equations. Methods of Analysis a Solution of Crack Problems, Noordhoff Intern. Publ., Leyden, 1973, pp. 368-425.
5. Theocaris P.S., Iakimidis N.I. Numerical Integration Methods for the Solution of singular Integral Equations. Quart. Appl Math., vol xxxv, No1, 1977, pp. 173-185.
6. Panasyuk V.V., Savruk M.P., Datsyshin A.P. Stress distribution around cracks in plates and shells. Kyiv: Naukova dumka, 1976, 440 p.

Information about author:

Grigoryan Marine Samvel– PhD. of Phys. Math. Sc., researcher, Institute of Mechanics of NAS RA (374 91) 63 97 58

E-mail: gmarinchka@mail.ru

THE CONTACT INTERACTION OF THIN-WALLED ELEMENTS WITH AN ELASTIC LAYER AND AN INFINITE CIRCULAR CYLINDER UNDER TORSION

Kanetsyan E.G., Mkrtchyan M.S., Mkhitaryan S.M.

Abstract. Problem on interaction of an elastic circular washer and an elastic layer and the problem of the thin cylindrical shells and continuous elastic cylinder interaction are discussed.

We consider a class of contact torsion problems on the interaction of thin-walled elements in the form of elastic circular thin washer – a flat circular plate of low height – with an elastic layer, in particular, with a half-space and on the interaction of the thin cylindrical shells with a continuous elastic cylinder, infinite in both directions. The theoretical and applied significance of such problems lies in the fact that they, on the one hand, are a generalization and development of the classical contact problems of the theory of elasticity. On the other hand, they are directly related to the important practical engineering issues on the transfer of loads from thin-walled elements to massive deformable bodies, often encountered in construction, machine building, especially in aircraft building, in the mechanics of growing bodies, in measurement technology, in composites mechanics, and in other fields of applied mechanics.

The mechanical behavior of a thin circular elastic washer and a thin cylindrical shell under torsion is described by physical models that are completely analogous to the well-known model of Melan for a rectilinear stringer [1,2]. The deformation of an elastic layer and an elastic infinite continuous cylinder is described by differential equations of the axisymmetric torsion of the theory of elasticity.

In problems for the layer, the corresponding equation of deformation of a thin circular washer is first derived from the exact differential equation of axisymmetric torsion. For this purpose, we consider the boundary value problem for an elastic layer, when the torsional tangential distributed forces are given on its face surfaces. The solution of this problem is constructed using the integral Hankel transformation. As a result, we obtain a relationship containing Hankel transformants of elastic circumferential displacements and torsional tangential forces acting on the face surfaces of the layer. The coefficients of these transformants are elementary entire functions of the Hankel spectral parameter, by which they are further expanded, as in [3], into power series. By retaining the terms up to the second order, the inverse Hankel transform is applied to the resulting relationship. As a result, we get an ordinary differential equation, describing the deformation of a thin circular washer. The equation is an analog of the Melan model. The applied method of Hankel transform is equivalent to the Lur'e symbolic method [4].

Next, the contact problem of torsion is considered, when the elastic layer, whose shear modulus varies exponentially with depth, is rigidly clamped along its lower face, and on its upper face a thin elastic circular washer is fastened. On the upper face of the washer, as well as on its lateral surface the torsional tangential forces act. It is required to determine the tangential contact stresses under the washer, as well as other deformation characteristics of the washer. From the condition of contact between the washer and the layer, the governing integral equation (GIE) of the problem is obtained. The kernel of this equation is the sum of its principal part in the form of the Weber-Sonin integral and the regular part in the form of a fairly rapidly convergent integral of the product of Bessel functions of the first kind. The GIE of the problem is solved by the method of spectral relationships containing the associated Legendre polynomials, or by the method of collocations using Gaussian quadrature formulas. The particular cases are discussed.

In problems for an infinite cylinder, we first consider the boundary value problem for an infinite hollow cylinder, whose inner and outer surfaces are loaded with torsional tangential forces. Using the integral Fourier transform, we construct an exact solution of this problem, containing modified Bessel functions, and then, taking into account that the cylinder is thin, we derive an ordinary differential equation, as above, describing the deformation of a thin cylindrical shell. Further, within the framework of the obtained physical model, the problem of contact of a thin cylindrical shell of finite length with a continuous infinite circular cylinder under torsion is considered. Eventually, the solution of this contact problem is reduced to the solution of the singular integral equation (SIE) with a kernel represented by the sum of the Cauchy kernel and the regular kernel. A well-known numerical-analytical method is used to solve the governing SIE [5].

RERERENCES

1. Melan E. Ein Beitrag zur Theorie geschweißter Verbindungen, Ing. – Arch., 3(2), 123-129, 1932.
2. Bufler H. Zur Krafteinleitung in Scheiben über geschweißte oder geklebte Verbindungen, Österr. Ing. – Arch., 18(3-4), 284-292, 1964.
3. Alexandrov V.M. and Mkhitaryan S.M., Contact Problems for Bodies with Thin Coatings and Interlayers, M.: Nauka, 1983. 488 p.
4. Lur'e A.I. Theory of elasticity, M.: Nauka, 1970. 940 p.
5. Erdogan F., Gupta G.D., and Cook T.S. The numerical solutions of singular integral equations, in: Methods of Analysis and Solution of Crack Problems Noordhoff Intern. Publ., Leyden, 1973.

Information about authors:

Kanetsyan E.G. – PhD. of Phys. Math. Sc., senior scientific researcher, researcher, Institute of Mechanics of NAS RA (+374 10) 58-46-16, (374 93) 46 15 88;

E-mail: ekanetsyan@gmail.com

Mkrtchyan M.S. – PhD. of Phys. Math. Sc., senior researcher, Institute of Mechanics of NAS RA, (+374 10) 52-48-90, (374 98) 80 19 56

E-mail: muscheg-mkrtchyan@rambler.ru

Mkhitaryan S.M. – Corresponding Member of NAS RA, Dr., Prof., Head of Department, Institute of Mechanics of NAS RA, (+374 10) 52-48-90, (374 93) 93 61 17

E-mail: smkhitaryan39@rambler.ru

MODELING OF MECHANICAL AND FILTRATION PROCESSES NEAR THE WELL ACCOUNTING ANISOTROPY

Karev V.I., Klimov D.M., Kovalenko Yu.F., Ustinov K.B.

Annotation. The geomechanical approach to modeling deformation and seepage is presented. Three stages of modeling are described: choosing the appropriate mechanical model and its adapting to the case in question, experimental determination of the parameters of the model, simulation of processes of seepage for particular configurations of the well. The used model allows describing the main peculiarities of the mechanical behavior of the collector: influence of pore pressure on deformation; influence of not only shear but also comprehensive stress and pore pressure on transition to inelastic behavior; appearance of inelastic volumetric deformation and its non-trivial dependence on the stress state; anisotropy of elastic, strength and seepage properties; non-obvious dependence of permeability on stress-strain state. The model unites the essential features of Hill's plastic flow theory for anisotropic materials and Drucker-Prager theory for inelastic deformation of soils. The results of experimental determination of the involved parameters for the the reservoir of Filanovskii oil and gas condensate field obtained using true triaxial loading system are presented.

Process of seepage of hydrocarbon fluids into producing wells is affected by many factors, one and not least of those being the changes in pore structure, and hence in permeability, due to deformation processes in the reservoir caused by the stresses. The situation is aggravated due to the back influence of seepage on stress-strain state, which leads to necessity of solving connected elastic-plastic and filtration problem.

The approach of modeling used throughout the current research consists in there key stages:

- choosing and if necessary developing the appropriate model of deformation and filtration;
- experimental determination of the parameters involved;
- solving the connected mechanical (determining stress-strain state) and seepage (determining fluid flow and debit) problem on the base of the chosen model and experimentally obtained parameters.

The results of the research on these three stages are presented for a particular case of Filanovckogo field conditions.

The first stage of the research consists in choosing and developing the proper mechanical model of deformation and seepage, to describe the key peculiarities, among which we emphasize the following:

- influence of pore pressure on deformation;
- nonlinear stress-strain behavior, dependence of yield stress on both shear and comprehensive stresses and pore pressure;
- possible inelastic volumetric deformation and its non-trivial dependence on the stress state;
- possible anisotropy of elastic, strength and seepage properties;
- non-obvious dependence of permeability on stress-strain state.

These peculiarities have been well described by a number of models that form the base for solving geomechanical problems; many models have already been implemented to commercial codes. Meanwhile, describing some features of mechanical behavior each of these models does not describe the others, which sometimes does not allow their direct application. Therefore it is important to adopt and develop these models so that to be able accounting for all the complex of the mentioned peculiarities.

The system of equations forming the suggested combined model consists of the following equations:

- Darcy's law.
- Experimentally determined rock permeability dependence on the stress state.
- The set of equations of poro-elasto-plasticity, in which elastic part is described by Bio's classical equations [1]. Inelastic behavior is described by means of a variant of plastic flow for anisotropic media of the type of [2, 3] with accounting for influence of compressive stress similar to [4] and non-associative flow rule [5, 6].

Experimental part of the study consisted in determining parameters of the model. Experiments were carried out using the unique experimental unit IPMech RAS Triaxial Independent Loading Test System (TILTS) created at IPMech RAS [7]. The tests were conducted on cubic specimens ($40 \times 40 \times 40$ mm) cut from rock of Filanovskii field reservoir. Two types of the loading programs were used: uniaxial loading with lateral pressure, and the generalized shear [8].

According to the loading program of the first type the specimens were subjected to comprehensive pressure up to a certain value (2, 10 and 20 MPa), and then were loaded along one of the axes up to the

level of elastic/plastic transition in the displacement control mode.

During loading according to the second program the specimens were being subjected to volumetric compression up to the level corresponding to in situ stress state, then loading was being continued along one of the axes accompanied with unloading along another axis, the stress along the third axis was being remained constant. The average stress was being conserved during this stage. The stress state constructed in this program corresponds to the state near the well. The permeability was being measured along the direction of the minimal stress during the experiment. The tests were carried out for two orientations of the minimal stress: along the bedding and normal to the bedding, which corresponds to the lateral and upper points on the contour of the horizontal well. As a result, the dependences of permeability on stresses and on yield strength for reservoir conditions were obtained.

Numerical simulation was carried out as follows. Two variants of the bottomhole design were considered: uncased well and perforation hole of uncased well. For both cases the pressure in the well was assumed to be vanishing. Initial reservoir stress state was supposed to be hydrostatic compression with the magnitude corresponding to the weight of the overlying rocks; initial pore pressure was supposed to be hydrostatic.

The calculations were performed in 3-D, using the meshes with 22 356 elements and 44 001 nodes corresponding (due to symmetry) to a quarter of the area around the well. Flow rates related to flow rate in a “perfect” well (permeability near the well is constant and equal to the initial reservoir permeability) have been calculated.

Acknowledgement. The work was done under financial support of Russian Science Foundation, project N 16-11-10325.

REFERENCES

1. Biot M A 1935 Le problème de la consolidation des matières argileuses sous une charge Ann. Soc. Sc. de Brux Ser. B **55** 110–3.
2. Hill R 1948 A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals Proc. Roy. Soc. London A **193** 281–97.
3. Caddell R M, Raghava E S, Atkins A G 1973 A yield criterion for anisotropic and pressure dependent solids such as oriented polymers *J of Materials science* **8** 1641–6.
4. Drucker D C, Prager W 1952 Soil mechanics and plastic analysis for limit design Quart. of Appl. Math. **10** 2 157–65.
5. Nikolaevskii V N 1996 Geomehanika i flyuidodinamika Moskva, Nedra 448.
6. Ustinov K B 2016 On application of models of plastic flow to description of inelastic behavior of anisotropic rocks Processes in geomechanics **3**(7) 278–87.
7. Karev V I, Kovalenko Yu F 2013 Triaxial loading system as a tool for solving geotechnical problems of oil and gas production True Triaxial Testing of ROCKS. Leiden: CRC Press. *Balkema* 301–10.
8. Karev V I, Klimov D M, Kovalenko Yu F, Ustinov K B 2016 Fracture model of anisotropic rocks under complex loading Physical mesomechanics **19** 6 34–40.

Information about authors:

Karev Vladimir Iosifovich – ScD, deputy director of the IPMech RAS, Laboratory of geomechanics, +(7495) 434 35 56

E-mail: wikarev@ipmnet.ru

Klimov Dmitry Mikhailovich – academician, IPMech RAS, +(7495) 434 46 10

E-mail: klimov@ipmnet.ru

Kovalenko Yury Fedorovich – ScD, head of the Laboratory of geomechanics in the IPMech RAS, +(7495) 434 34 47

E-mail: perfolinkgeo@yandex.ru

Ustinov Konstantin Borisovich – professor, ScD, leading scientific researcher of the Laboratory of geomechanics in the IPMech RAS, +(7495) 434 34 47

E-mail: ustinov@ipmnet.ru

LOADS TRANSFER FROM FINITE NUMBER FINITE STRINGERS TO AN INFINITE SHEET THROUGH ADHESIVE SHEAR LAYERS

Kerobyan A.V., Sahakyan K.P.

Abstract. In this article the problem for an elastic infinite sheet which is strengthened by finite number finite stringers with different modulus of elasticity and small constant thickness is considered. The contact interaction between sheet and stringers through adhesive layers having different physical-mechanical properties and geometric configurations was realized.

Let an infinite sheet which defined in generalized plane stress state with small constant thickness d , the Young's modulus E and the Poisson's ratio ν , on its surface along at $y = 0$ (xOy is its average plane) line on the $[a_j, b_j]$ ($b_j > a_j, j = \overline{1, n}; b_j < a_{j+1}, j = \overline{1, n-1}$) finite intervals is strengthened by arbitrary finite number of finite stringers. It is supposed that the stringers having rectangular cross-sections with areas $F_j, j = \overline{1, n}$ with small different thickness h_j ($h_j \ll b_j - a_j; j = \overline{1, n}$), and constant width b^* ($b^* \ll b_j - a_j (j = \overline{1, n})$) with different modulus of elasticity $E_j (j = \overline{1, n})$, where $x \in [a_j, b_j], j = \overline{1, n}$. The interaction between infinite sheet and stringers was realized through thin, uniform, elastic adhesive layers with Young's modulus E_k , the Poisson's ratio ν_k and small constant thickness h_k . The problem is to specify the law of distribution of unknown shear stresses which are acting between sheet and stringers when concentrated forces $P_j (j = \overline{1, n})$ are applied at one end points of stringers $x = b_j, j = \overline{1, n}$, and directed along the Ox axis.

It is supposed that for the stringers the model of uniaxial strain state in combination with the model of contact along the line is realized, and for the adhesive layers it is the pure shear conditions (see [1]), that is the interaction between infinite sheet and stringers as a line loading of the sheet is idealized.

Taking into account above assumptions in [1], the determination problem of unknown shear stresses is reduced to the solution of the following system of Fredholm's integral equations of the second kind with respect to unknown functions $\psi_j(x) (j = \overline{1, n})$, which specified in different finite intervals:

$$\psi_j(x) + \tilde{\delta}^2 \sum_{i=1}^n \int_{\alpha_i}^{\beta_i} K_j(x, t) \psi_i(t) dt = f_0^{(j)}(x), \quad \alpha_j \leq x \leq \beta_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (1.1)$$

where

$$\psi_j(x) = ap_j(ax) \quad (j = \overline{1, n}), \quad p_j(x) = b^* \tau_j(x), \quad \tilde{\gamma}_j^2 = b^* G_k / h_k E_j F_j, \quad j = \overline{1, n},$$

$$\tilde{\delta}^2 = ab^* (1 + \nu)(3 - \nu) G_k / 4\pi E d h_k, \quad G_k = E_k / 2(1 + \nu_k), \quad \alpha_j = a_j / a, \quad \beta_j = b_j / a,$$

$$K_j(x, t) = \ln \frac{1}{|x - t|} - a \tilde{\gamma}_j^2 \int_{\alpha_j}^{\beta_j} G_j(ax, as) \ln \frac{1}{|s - t|} ds, \quad j = \overline{1, n},$$

$$f_0^{(j)}(x) = \frac{P_j b^* a \tilde{\gamma}_j \operatorname{ch}[a \tilde{\gamma}_j (x - \alpha_j)]}{\operatorname{sh}[a \tilde{\gamma}_j (\beta_j - \alpha_j)]}, \quad j = \overline{1, n},$$

$$G_j(x, s) = \frac{1}{\tilde{\gamma}_j \operatorname{sh}[\tilde{\gamma}_j (b_j - a_j)]} \begin{cases} \operatorname{ch} \tilde{\gamma}_j (x - b_j) \operatorname{ch} \tilde{\gamma}_j (s - a_j), & x > s, \\ \operatorname{ch} \tilde{\gamma}_j (x - a_j) \operatorname{ch} \tilde{\gamma}_j (s - b_j), & x < s, \end{cases} \quad j = \overline{1, n},$$

$G_j(x, s) = G_j(s, x), j = \overline{1, n}$, are Green's functions which satisfying the following equalities:

$$\int_{a_j}^{b_j} G_j(x, s) \cos \left[\frac{m\pi(s - a_j)}{b_j - a_j} \right] ds = \frac{(b_j - a_j)^2}{(b_j - a_j)^2 \tilde{\gamma}_j^2 + m^2 \pi^2} \cos \left[\frac{m\pi(x - a_j)}{b_j - a_j} \right], m = 0, 1, 2, \dots, j = \overline{1, n},$$

where the functions $\cos \left[\frac{m\pi(x - a_j)}{b_j - a_j} \right] (m = 0, 1, 2, \dots) (j = \overline{1, n})$ form full orthogonal systems in spaces $L_2(a_j, b_j), j = \overline{1, n}$, the kernels $K_j(x, t), j = \overline{1, n}$ of the system of integral equations (1.1) are square integrable functions by two variables and $\tau_j(x), j = \overline{1, n}$, are unknown shear stresses which are acting between sheet and stringers.

It is shown that in the certain domain of the change of characteristic parameter of the problem this system of integral equations (1.1) in Banach space may be solved by the method of successive approximations. The particular cases are observed and the character and behaviour of unknown shear stresses are investigated. The numerical results for the solutions of (1.1) for two cases ($n = 1$ and 2) are presented.

REFERENCE

1. Lubkin J.L. and Lewis L.C. Adhesive Shear Flow for an Axially Loaded, Finite Stringer Bonded to an Infinite Sheet. Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, vol. 23, 1970.

Information about authors

Kerobyan Aghasi – Associate Professor, Yerevan State University, Department of Mathematics and Mechanics (374 91) 81 96 00

E-mail: agas50@ysu.am

Sahakyan Karen – Associate Professor, Yerevan State University, Department of Mathematics and Mechanics (374 93) 24 38 62

E-mail: karen_sahakyan@ysu.am

ON THE EIGENFREQUENCIES OF ELASTIC SHEAR WAVES PROPAGATING IN AN INHOMOGENEOUS LAYER

Khachatryan V.M.

Abstract. In this work the problem on the eigen-frequencies of elastic shear waves propagating in a layer, the Young's modulus and the density of which are functions of the longitudinal coordinate is considered. Taking into account the inhomogeneity of the material complicates the problem of the eigen-frequencies of the waves propagating in the layer. In this paper the problem of pure shear is considered. For solving the problem, an integral formula is used, which allows to represent the general solution of the original equation with variable coefficients through the general solution of the accompanying equation with constant coefficients.

Suppose the elastic layer occupies the area $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $|z| < \infty$, for which the equation of motion of an elastic inhomogeneous medium for pure shear (antiplane problem) has the form [1,2]:

$$\left(G(x) \frac{\partial W}{\partial x}\right) + G(x) \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = \rho(x) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}, \quad (1)$$

where $G(x)$ is the shear modulus, $\rho(x)$ is the density of the medium material, which are variables and $W = W(x, y, t)$ is the elastic displacement.

At $y = 0; b$ the ends are clamped.

The solution of (1) which satisfies the boundary conditions will be represented in the form:

$$W(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x, t) \sin(\lambda_n y), \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{b} \quad (2)$$

Substituting (2) into (1) and equalizing the corresponding coefficients of the series, we obtain:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(G(x) \frac{\partial F_n(x, t)}{\partial x} \right) - \lambda_n^2 G(x) F_n(x, t) = \rho(x) \frac{\partial^2 F_n(x, t)}{\partial t^2} \quad (3)$$

Three cases of boundary conditions at $x = 0; a$ are considered: clamped ends, clamped ($x = 0$) and free ($x = a$) end and free ends.

Consider the case of steady-state harmonic oscillations:

$$F_n(x, t) = f_n(x) e^{i\omega_n t} \quad (4)$$

After substituting (4) into (3) let's perform averaging [3] of the boundary-value problem. By averaging we mean the expression for the solution of the original problem in terms of the solution of the accompanying problem. The coefficients of the equation of the accompanying problem can be any positive constants, but for expediency they must be related to the characteristics of the original problem [3]. The integral formula that helps to find the solution of the original equation in terms of the solution of the accompanying equation is written in the form:

$$f_n(x) = A \left(e^{\beta_n(\omega)x} + \beta_n(\omega) \int_0^a \frac{\partial K_n(s, x)}{\partial s} \tilde{G}(s) e^{\beta_n(\omega)s} ds - \int_0^a \left(\omega_n^2 \tilde{\rho}(s) - \lambda_n^2 \tilde{G}(s) \right) e^{\beta_n(\omega)s} K_n(s, x) ds \right) + B \left(e^{-\beta_n(\omega)x} - \beta_n(\omega) \int_0^a \frac{\partial K_n(s, x)}{\partial s} \tilde{G}(s) e^{-\beta_n(\omega)s} ds - \int_0^a \left(\omega_n^2 \tilde{\rho}(s) - \lambda_n^2 \tilde{G}(s) \right) e^{-\beta_n(\omega)s} K_n(s, x) ds \right), \quad (5)$$

where $\tilde{G}(s) = G_0 - G(s)$, $\tilde{\rho}(s) = \rho_0 - \rho(s)$, $G_0 = \frac{1}{\langle 1/G(x) \rangle}$, $\rho_0 = \langle \rho(x) \rangle$, $\beta_n(\omega) = i\lambda_n \sqrt{\eta_n^2(\omega) - 1}$,

$\eta_n = \frac{V_{\Phi n}}{c}$, $V_{\Phi n} = \frac{\omega_n}{\lambda_n}$, $c = \sqrt{\frac{G_0}{\rho_0}}$ and $K_n(s, x)$ satisfies the following equation:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(G(x) \frac{\partial K_n(x, s)}{\partial x} \right) + (\omega_n^2 \rho(x) - \lambda_n^2 G(x)) K_n(x, s) = -\delta(x - s), \quad (6)$$

where $x, s \in [0, a]$. η_n is a dimensionless characteristic, $V_{\Phi n}$ are the phase velocities of the corresponding modes and c is the velocity of propagation of the elastic shear wave.

To find the Green's function, satisfying equation (6) we use the method of successive approximations.

For the zero approximation, we get:

$$K_{n0}(x, s) = - \int_0^x \frac{h(z-s)}{G(z)} dz = \begin{cases} 0, & x < s \\ - \int_s^x \frac{dz}{G(z)}, & x \geq s \end{cases} \quad (7)$$

For the next approximations, we obtain:

$$K_{nm}(x, s) = - \int_0^x \frac{dx_1}{G(x_1)} \int_0^{x_1} (\omega_n^2 \rho(x_2) - \lambda_n^2 G(x_2)) K_{nm-1}(x_2, s) dx_2 - \int_0^x \frac{h(x_1-s)}{G(x_1)} dx_1, \quad m \geq 1 \quad (8)$$

Hence, if $\lim_{m \rightarrow \infty} K_{nm}(x, s)$ converges then:

$$K_n(x, s) = \lim_{m \rightarrow \infty} K_{nm}(x, s) \quad (9)$$

Substituting (9) into (5) and satisfying the boundary conditions we will obtain the corresponding equations for the eigen-frequencies ω_n .

Considering only the zero approximation for Green's function we obtain:

$$K_n(x, s) \approx - \int_s^x \frac{dz}{G(z)}, \quad x \geq s \quad (10)$$

Satisfying the boundary conditions we obtain the following approximate frequency equations: for clamped ends:

$$(1 + \beta_n(\omega) \int_0^a Q(s) e^{\beta_n(\omega)s} ds) (e^{-\alpha\beta_n(\omega)} - \beta_n(\omega) \int_0^a Q(s) e^{-\beta_n(\omega)s} ds + \int_0^a R_n(s) e^{-\beta_n(\omega)s} L(s) ds) - (1 - \beta_n(\omega) \int_0^a Q(s) e^{-\beta_n(\omega)s} ds) (e^{\alpha\beta_n(\omega)} + \beta_n(\omega) \int_0^a Q(s) e^{\beta_n(\omega)s} ds + \int_0^a R_n(s) e^{\beta_n(\omega)s} L(s) ds) = 0, \quad (11)$$

for clamped end $x = 0$ and free end $x = a$:

$$(1 + \beta_n(\omega) \int_0^a Q(s) e^{\beta_n(\omega)s} ds) \left(\beta_n(\omega) e^{-\alpha\beta_n(\omega)} - \frac{1}{G(a)} \int_0^a R_n(s) e^{-\beta_n(\omega)s} ds \right) + (1 - \beta_n(\omega) \int_0^a Q(s) e^{-\beta_n(\omega)s} ds) \left(\beta_n(\omega) e^{\alpha\beta_n(\omega)} + \frac{1}{G(a)} \int_0^a R_n(s) e^{\beta_n(\omega)s} ds \right) = 0 \quad (12)$$

and for free ends:

$$\left(\beta_n(\omega) + \frac{1}{G(0)} \int_0^a R_n(s) e^{\beta_n(\omega)s} ds \right) \left(\beta_n(\omega) e^{-\alpha\beta_n(\omega)} - \frac{1}{G(a)} \int_0^a R_n(s) e^{-\beta_n(\omega)s} ds \right) - \left(\beta_n(\omega) - \frac{1}{G(0)} \int_0^a R_n(s) e^{-\beta_n(\omega)s} ds \right) \left(\beta_n(\omega) e^{\alpha\beta_n(\omega)} + \frac{1}{G(a)} \int_0^a R_n(s) e^{\beta_n(\omega)s} ds \right) = 0, \quad (13)$$

where

$$Q(s) = \frac{G_0}{G(s)} - 1, \quad R_n(s) = \omega_n^2 (\rho_0 - \rho(s)) - \lambda_n^2 (G_0 - G(s)), \quad L(s) = \int_s^a \frac{dz}{G(z)} \quad (14)$$

In the future, we will consider specific examples of inhomogeneities.

REFERENCES

- [1] Brekhovskikh L. M. «Waves in layered media». M.: Science, 1973. (in Russian)
- [2] Maugin G. A. «Continuum Mechanics of electromagnetic Solids». North Holland, Amsterdam, 1988.
- [3] Gorbachev V. I., «Averaging of linear problems in the mechanics of composites for non-periodic inhomogeneity», Solid mechanics, Proceedings of the Academy of Sciences, RAS, 2001, № 1, p. 31-37 (in Russian).

Information about authors:

Khachatryan V. M., PhD, Researcher in Institute of Mechanics NAS of Armenia,

Affiliation: Institute of Mechanics, Armenian NAS

Address: 24B Baghramyan Avenue, 0019 Yerevan, Armenia

Tell: +374 91 71 78 55

E-mail: khachatryan-vazgen@inbox.ru

A NON-LINEAR CONSTITUTIVE RELATION FOR RHEOLOGICAL PROCESSES IN AGEING MATERIALS WITH MEMORY

Khokhlov Andrew V.

Abstract. A non-linear strain-stress relation for ageing rheonomous materials is formulated and analysed. It contains two integral operators depending on a strain history, a real material function of a real variable and nine real parameters. The constitutive relation is intended to describe such rheological phenomena (at a constant temperature) as non-linear viscoelasticity, creep, long-term strength, positive rate sensitivity, memory fading, tension-compression asymmetry. Equations of strain-stress curves at constant strain rates, creep and relaxation curves produced by the relation are derived under minimal primary restrictions on its material function and parameters. General properties of the theoretic curves families are studied analytically and compared to typical properties of test curves. The analysis proved that the relation is applicable for adequate modelling of mechanical behaviour of such materials as various polymers, composites, sand-asphalt concrete, solid propellants and biomedical (bioresorbable, osteoconductive) materials.

Let us consider a uniaxial strain-stress state assuming that strain $\varepsilon(t)$ is a non-decreasing positive function (of non-dimensional time-parameter $t > 0$) with piecewise continuous derivative. The stress output $\sigma(t)$ may be written in the following form:

$$\sigma(t) = F(\gamma(t)), \quad \gamma = \mathbf{R}\varepsilon, \quad \mathbf{R}\varepsilon = \varepsilon(t) |\varepsilon(t)|^{\alpha-1} t^\beta \mathbf{S}_{q,s,\omega_1}[\varepsilon, \dot{\varepsilon}]^\xi \mathbf{L}_{p,\omega_0}[\varepsilon]^{-\eta} \quad (1)$$

Herein $F(x)$ is a piecewise differentiable increasing function satisfying condition $F(0) = 0$, $\alpha, p, q > 0$, $\xi, \eta, \beta \geq 0$, $s, \omega_0, \omega_1 \geq 0$ are the material constants (which depend on a temperature value) and $\mathbf{L}_{p,\omega_0}$ and $\mathbf{S}_{q,s,\omega_1}$ denote the integral operators mapping $\varepsilon(t)$ into the functions

$$\mathbf{L}_{p,\omega_0}[\varepsilon] = \left(\int_0^t |\varepsilon(\tau) \tau^{\omega_0}|^p d\tau \right)^{1/p}, \quad \mathbf{S}_{q,s,\omega_1}[\varepsilon, \dot{\varepsilon}] = \left(\int_0^t \tau^{(\omega_1-1)q} (s |\varepsilon(\tau)|^q + |\tau \dot{\varepsilon}(\tau)|^q) d\tau \right)^{1/q}$$

of variable $t > 0$ (hence, the operator $\mathbf{R}$ maps $\gamma(t)$ into $\gamma(t)$). One can see the operators $\mathbf{L}_{p,\omega_0}$ and $\mathbf{S}_{q,s,\omega_1}$ are related to the Lebesgue and Sobolev norms modified by introducing the special weighting functions τ^{ω_0} , τ и τ^{ω_1} and the weighting factor $s \geq 0$. The last one regulates the proportion between contributions of strain $\varepsilon(\tau)$ and strain rate $\dot{\varepsilon}(\tau)$ into the integral $\mathbf{S}_{q,s,\omega_1}[\varepsilon, \dot{\varepsilon}]$. The reasons for introducing the weighting functions are analysed in the papers [1-3]. Saying briefly, parameters ω_i and β greatly influence the mathematical and "physical" properties of the constitutive equation (1). In particular, they enable to control the asymptotic behaviour of $\gamma(t)$ at $t \rightarrow +0$ and $t \rightarrow +\infty$ and give opportunity to model the fading memory phenomenon observed in testing various materials. We say that a material (or a model) possesses fading memory property (in a weak form) if the asymptotic behaviour of its (theoretic) creep and relaxation curves at $t \rightarrow +\infty$ doesn't depend on duration and any other characteristic of the initial stage of loading or deforming correspondingly, i.e. it doesn't depend on the stage of stress (or strain) growing from zero to a given constant value [1,2].

The constitutive equation (1) is an essential generalisation of the relation with permanent memory proposed in [4]. The last one arises from (1) in the case when $\xi = s = \omega_0 = \omega_1 = 0$, $p \geq 1$ and $\beta = 0$ or $\beta = 1$. It depends on only four material constants, it doesn't contain operator $\mathbf{S}_{q,s,\omega_1}$ and so it doesn't depend on $\dot{\varepsilon}(\tau)$. The relation studied in [4] is a modification of the relation that has been proposed earlier by Fitzgerald and Vakili for sand-asphalt concrete [5]. The relation (1) with nine material parameters is more flexible and gives additional opportunities to simulate wide scope of mechanical effects and to fit experimental data more precisely. It enables to eliminate a number of drawbacks of the preceding relations [1,2] and to extend the model application field.

Although the relation (1) seems to be too complicated, it allows deep theoretic (non-numerical) investigation. In particular, the relation (1) is convertible if $\xi = 0$ and $\alpha > \eta$ [1]. The inverse operator $\mathbf{R}^{-1}$ (on the set of piece-wise differentiable functions $\gamma(t)$) can be written in the form

$$\varepsilon(t) = \Omega t^{-\beta A} \gamma(t)^A \left(\int_0^t \tau^{\omega p} \gamma(\tau)^{Ap} d\tau \right)^{\mu/p},$$

wherein $A = \alpha^{-1}$, $\mu = \eta(\alpha - \eta)^{-1}$, $\Omega = (1 - \eta A)^{\mu/p}$, $\omega = \omega_0 - \beta A$.

It is easy to see that $\mathbf{R}$ is a homogeneous operator of degree $d := \alpha + \xi - \eta$ which map power functions $\varepsilon(t) = at^n$, $t > 0$, $a > 0$, $n \in \mathbb{R}$, $n > n_*$, into power functions $\gamma(t) = Q_n a^d t^m$, where

$$n_* = \max\{n_0, n_1\}, \quad n_0 = -\omega_0 - p^{-1}, \quad n_1 = 1 - \omega_1 - q^{-1}, \quad m = dn + m_0, \\ m_0 = \beta + \xi(\omega_1 - 1) - \eta\omega_0 + \xi q^{-1} - \eta p^{-1}, \quad Q_n = (s + |n|^q)^{\xi/q} (p(n - n_0))^{\eta/p} (q(n - n_1))^{-\xi/q}.$$

This simple property has proved to be very useful for analytic study of the relation (1).

Equations of the theoretic strain-stress curves at constant strain rates, creep and relaxation curves produced by the relation (1) are derived assuming material function and parameters values are arbitrary [1,2]. General properties of the theoretic curves families are studied analytically, their dependences on material function and parameters are thoroughly analyzed. The analysis revealed necessary additional restrictions that should be imposed on material parameters of the relation (1) to provide an adequate description of basic rheological phenomena (proper qualitative behaviour of the theoretic curves that is similar to typical behaviour experimental ones). The restrictions can be written as the set of inequalities

$$m_0 \leq 0, \quad d + m_0 > 0, \quad n_1 < 0, \quad (2)$$

Herein d , m_0 and n_1 are the main governing parameters of the model (1). They appear almost everywhere, for instance, in the equations of the theoretic strain-stress curves, creep and relaxation curves [1,2]. It is notable that each one of restrictions (2) arises in analysis of different aspects of mechanical behaviour of the model. It proves the model to be consistent fairly well. In particular, the first and the third inequalities provide that relaxation curve decrease and its asymptotic behaviour doesn't depend on the initial stage of loading up to a given constant value (fading memory effect).

The technique to determine the material function $F(\gamma)$ and the values of the material parameters of relation (1) through fitting it to experimental data is developed on the base of the analytic results mentioned above [1,2]. The system of basic tests includes relaxation test, creep test and constant-strain-rate tests. The relation (1) arsenal of capabilities and its applicability scope is compared to capabilities of the Rabotnov nonlinear constitutive relation for rheonomous materials [6].

REFERENCES

1. Khokhlov A.V. Constitutive relation for rheological processes: Properties of theoretic creep curves and simulation of memory decay. *Mechanics of Solids*. 2007. Vol. 42, No.2. P. 291–306.
2. Khokhlov A.V. Constitutive relation for rheological processes with known loading history. creep and long-term strength curves. *Mechanics of Solids*. 2008. Vol. 43, No.2. P. 283–299.
3. Khokhlov A.V. Fracture criteria under creep with strain history taken into account, and long-term strength modeling. *Mechanics of Solids*. 2009. Vol. 44, No.4. P. 596–607.
4. Yu.G. Basalov, V.N. Kuznetsov and S.A. Shesterikov. Constitutive Relations for a Rheonomous Material. *Izv. Akad. Nauk. Mekh. Tverd. Tela*, No.6, 69–81 (2000) (in Russian).
5. J. E. Fitzgerald and J. Vakili. Nonlinear Characterization of Sand-asphalt Concrete by Means of Permanent-memory Norms, *Proc. SESA* 30 (2), 504–510 (1960).
6. Khokhlov A.V. Analysis of general properties of creep curves generated by the Rabotnov nonlinear hereditary relation under multi-step loadings. *Vestnik MGTU im. Bauman. Ser. Estestvennye nauki*, No.3. S.93–123 (in Russian).

Information about authors:

A.V. Khokhlov – senior researcher in Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University

E-mail: andrey-khokhlov@ya.ru

GENERAL PROPERTIES OF STRESS-STRAIN CURVES PRODUCED BY THE NONLINEAR MAXWELL-TYPE VISCOELASTOPLASTIC MODEL

Khokhlov Andrew V.

Abstract. A nonlinear Maxwell-type constitutive relation with two arbitrary material functions is formulated for viscoelastoplastic materials and studied analytically in uni-axial case to reveal capabilities of the model, its applicability scope and techniques of identification and tuning. Under minimal primary restrictions on material functions, the general equation of theoretic stress-strain curves produced by the model at constant stress rates is derived and analyzed. The main properties of the stress-strain curves and their dependence on stress rate and material functions are examined.

The systematic analysis of the nonlinear stress-strain relation

$$\varepsilon(t) = E^{-1}F(\sigma(t)) + \eta^{-1} \int_0^t V(\sigma(\tau)) d\tau, \quad t > 0, \quad (1)$$

for structurally stable rheonomous materials (in uni-axial isothermal case) was started in the papers [1-4]. Herein $F(x)$, $V(x)$, $x \in (\omega_-, \omega_+)$, are material functions, $E > 0$ and $\eta > 0$ are material constants (influenced by temperature) and strain $\varepsilon(t)$ is assumed to be the sum of elastic and viscoplastic components depending on stress $\sigma(t)$ and its history:

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_v, \quad \varepsilon_e = F(\sigma) / E, \quad \dot{\varepsilon}_v = V(\sigma) / \eta.$$

Function $F(x)/E$ defines elastic strain dependence on stress and should satisfy conditions $F(0) = 0$ and $F'(x) > 0$ (hence, the inverse function $f = F^{-1}$ exists). Function $V(x)/\eta$ governs viscosity, rates of dissipation, relaxation, creep and ratcheting, it regulates hereditary properties, strain rate sensitivity and long-term strength of a material simulated [1-5]. It should satisfy conditions $V(0) = 0$ and $V'(x) \geq 0$. In particular, this minimal primary restrictions on F and V provide that dissipation rate is non-negative and work of stress is positive in any deformation process governed by the relation (1), i.e. provide thermodynamic consistency of the relation (1). Formulation of the stress-strain relation in 3-D case is proposed in [5]. Reviews of related models applied in creep theory, superplasticity and polymer mechanics is given in [2-5].

Equations of the relaxation curves, creep curves under multi-step loadings, quasi-static stress-strain curves at constant stress rates and under cyclic loadings and long-term strength curves produced by the relation (1) are derived assuming minimal primary restrictions on two material functions [1-5]. General properties of the theoretic curves families are studied analytically, their dependences on material function and loading programs parameters are thoroughly analyzed.

In particular, the equation of the stress-strain curves family under loadings $\sigma(t) = bt$ with constant stress rates can be written as

$$\varepsilon(\sigma, b) = E^{-1}F(\sigma) + (b\eta)^{-1}Y(\sigma), \quad Y(\sigma) := \int_0^\sigma V(x) dx, \quad b\sigma > 0. \quad (2)$$

We examine the main properties of the stress-strain curves in the implicit form (2) and in the common (inverse) form $\sigma(\varepsilon, b)$ and their dependence on stress rate and material functions. We consider intervals of monotonicity and convexity of stress-strain curves $\sigma(\varepsilon, b)$ with respect to ε and b , conditions for inflection points existence, qualitative behaviour of tangent modulus $\partial\sigma/\partial\varepsilon = E[F'(\sigma) + (\tau_r b)^{-1}V(\sigma)]^{-1}$, the stress-strain curves family convergence to limit curve as $b \rightarrow 0$ or $b \rightarrow \infty$, the shapes of the equilibrium and the instantaneous stress-strain curve [4] and so on. In particular, the following assertions are proved for any increasing material functions F and V satisfying conditions $F(0) = 0$ and $V(0) = 0$:

- 1) the function $\sigma(\varepsilon, b)$ is an increasing function of its arguments;
- 2) the instantaneous modulus $\partial\sigma/\partial\varepsilon|_{\varepsilon=\pm 0} = E/F'(\pm 0) = E f'(\pm 0)$ doesn't depend on stress rate;
- 3) the family $\sigma(\varepsilon, b)$ converges (uniformly on any segment) to the function $\sigma = f(E\varepsilon)$, as $b \rightarrow \infty$;

- 4) the family $\sigma(\varepsilon, b)$ converges to the zero function $\sigma \equiv 0$ for all $\varepsilon \geq 0$ as $b \rightarrow 0$;
- 5) if $F''(x) \geq 0$, then every stress-strain curve $\sigma(\varepsilon, b)$ for any $b > 0$, is convex up in interval $\varepsilon > 0$.

The qualitative features of stress-strain curves family (2) generated by the relation (1) are compared to typical test stress-strain curves of viscoelastoplastic materials at constant stress rate in order to examine the model abilities to provide an adequate description of basic rheological phenomena, to find necessary phenomenological restrictions which should be imposed on material functions and to indicate the field of applicability or non-applicability of the model.

General properties of the cyclic stress-strain curves produced by the relation (1) under periodic loading programs with an arbitrary cycle shape and frequency and plastic strain accumulation were analyzed in [5]. To describe the influence of temperature on material mechanical behavior (under isothermal conditions), two scalar material parameters of the model (viscosity coefficient and “modulus of elasticity”) are considered as a functions $E = E(T)$ and $\eta = \eta(T)$ of temperature level. The general restrictions on their properties which are necessary and sufficient for an adequate qualitative description of the basic thermomechanical phenomena related to typical temperature influence on creep and relaxation curves, creep recovery curves, creep curves under step-wise loading and quasi-static stress-strain curves of viscoelastoplastic materials are obtained. It is proved that $E = E(T)$, $\eta = \eta(T)$ and $\eta(T)/E(T)$ (i.e. relaxation time of the associated linear Maxwell model) should be decreasing functions of temperature [3]. This requirements provide an adequate qualitative simulation of a dozen basic phenomena expressing an increase of material compliance (a decrease of tangent modulus and yield stress, in particular), strengthening of strain rate sensitivity and acceleration of dissipation, relaxation, creep and plastic strain accumulation with temperature growth.

The analysis proved the constitutive equation (1) to be suitable for adequate modeling of the rheological phenomena set which is typical for rheonomous materials exhibiting non-linear hereditary properties, positive strain rate sensitivity, secondary creep, yielding at constant stress, ratcheting, tension compression asymmetry and an increase of material compliance and strain rate sensitivity with temperature growth [1-5]. The model is applicable for simulation of mechanical behaviour of various polymers, their solutions and melts, solid propellants, sand-asphalt concretes, ices, composite materials, titanium and aluminum alloys, ceramics at high temperature and so on.

REFERENCES

1. Khokhlov A.V. Properties of a Nonlinear Viscoelastoplastic Model of Maxwell Type with Two Material Functions, Moscow University Mechanics Bulletin, 2016. Vol. 71, no. 6, pp. 132–136.
2. Khokhlov A.V. Long-term strength curves generated by the nonlinear Maxwell-type model for viscoelastoplastic materials and the linear damage rule under step loading, Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math.Sci.], 2016, vol. 20, no. 3, pp. 1–20. (In Russian)
3. Khokhlov A.V. The nonlinear Maxwell-type model for viscoelastoplastic materials: simulation of temperature influence on creep, relaxation and strain-stress curves, Vestn. Samar. Gos.Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 1, pp. 1–20. (In Russian)
4. Khokhlov A.V. Properties of stress-strain curves generated by the nonlinear Maxwell-type viscoelastoplastic model at constant stress rates, Mashinostroenie i inzhenernoe obrazovanie, 2017, no. 1, pp. 51–71 (In Russian).
5. Khokhlov A.V. The nonlinear Maxwell-type viscoelastoplastic model: rate of plastic strain accumulation under cyclic loadings, Deformation and Damage of Materials, 2017, no. 7, pp. 7–19 (In Russian) [Хохлов А.В. Нелинейная модель вязкоупругопластичности типа Максвелла: скорость накопления пластической деформации при циклических нагружениях // Деформация и разрушение материалов. 2017. № 7. С. 7–19.]

Information about authors:

A.V. Khokhlov – senior researcher in Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University

E-mail: andrey-khokhlov@ya.ru

FORMATION OF SURFACE NANOSTRUCTURES ON TRIBOCONTACT FOR CREATING ANTI-FRICTION LAYER WITH PREDETERMINED TRIBO-PHYSICAL CHARACTERISTICS

Kolesnikov V.I., Ivanochkin P.G., Kolesnikov I.V.

Abstract. There were conducted studies to find out regularities of the effect of functional additives on the structural state at the nanoscale of surface layers and tribo-physical characteristics of metal-polymer tribosystems.

The paper presents the research results of the influence of the type and the percentage of a range of nanofillers to polymer composites on their physical, mechanical and tribological characteristics. The carried out cycle of researches confirm authors' scientific idea about the realization of the adaptability effect of the friction surfaces, at the nanoscale as well, due to the formation of peculiar secondary structures specified with the frictional action of nanodimensional additives.

Thermoplastic polymers like polycapraamide (PA-6), aliphatic polyimide (PI-6), and phenylone C-2 were selected as polymer binders for anti-friction composite materials. Fluoroplastic of F4MB mark in an amount of 5-10%, arimid fiber Arimid-T, ground to 4-5 mm size, in an amount of 10-20%, nanodimensional additives in an amount of 1.5-3% were chosen as fillers.

Nanodimensional additives of spinels (iron, manganese, magnesium, and chromium), serpentinites, fullerene soot, modified graphite (40-100 μm) with a concentration not exceeding 1.5-3 wt. % were introduced into the composite in order to improve its characteristics.

What is more, increasing of filler dispersion can minimize the filling degree of the polymer matrix in which its strength and durability increases without increasing the elastic modulus, hardness, and friction coefficient.

Physical and mechanical properties of nanocomposites of different composition were researched by nanoindentation method. Microhardness is one of the main characteristics of greatest interest during nanoindentation. According to the test results microhardness of sample materials was less than of the «pure» phenylone. Alongside with the microhardness the obtained data helped to calculate three other characteristics, like elasticity modulus, the relation of material hardness to its elasticity modulus, which is called the plasticity index material, and the ratio H^3/E^2 which is a comparative qualitative characteristic of the plastic deformation resistance.

Tribological tests were carried out at a fixed speed of sliding and a stepped loading on the friction machine AI-5018 by a «finger-roller» scheme and on the end type friction machine «finger-flat disk» constructed in the laboratory. The results of the change in the friction coefficient are obtained. The surface state of the metal counterbody after friction was studied in order to analyze the effect of different nanodimensional additives to composites on the friction surface microrelief. The obtained values of the counterbody hardness after friction allowed making a comparative evaluation of the wear resistance of the tested samples.

The study of anti-friction tribopolymer film on the disc surface (after tribomating on the end friction machine) was conducted by infrared Fourier of MFTIR spectroscopy method on spectrophotometer Nicolet 380.

The frictionally transferred film on the tribocontact surface largely determines the degree of metal protection during the friction. It is the result of transformations in a thin surface layer and the formation of specific secondary structures, which constitution is caused by the friction action of nanodimensional additives.

When polymers interact with metals there are certain changes in the crystal structure of the polymers, like orientation effects, cross linking, destruction, structuring, and some other processes. They lead to the emergence of the "third body" with properties different from those of the original polymer on the interface.

The study of the tribounit surface with X-ray photoelectron spectroscopy showed that due to frictional interaction there is a very thin protective layer on the surface of the metal counterbody, which is a frictionally transferred film. At the same time a component with a binding energy of 685 eV is detected in the X-ray electron spectrum of fluorine. The latter testifies to the formation of a bond between fluorine and metal. The research results indicate the connection of fragments of the filler molecules and the binder with the metal of the substrate through the fluorine atoms.

The findings of the regularities of the functional additives effect on the structural state at the surface layers nanoscale and the tribo-physical characteristics of tribosystems allowed formulating the principles for the creation of polymer nanocomposite materials of tribotechnical purpose. The possibilities of regulating the tribocontact surface wear by the selection of specific complex nanodimensional additives in composite materials were studied.

This work is supported by the Russian Science Foundation under grant 14-29-00116

Information about authors:

Kolesnikov Vladimir – the President of Rostov State Transport University, Academician of Russian Academy of Sciences, PhD in Technical Sciences, Professor (8632)2454929,

E-mail: kvi@rgups.ru

Ivanochkin Pavel – PhD in Technical Sciences, Professor, Chair of Theoretical Mechanics, Rostov State Transport University (8632)2726497

Kolesnikov Igor – PhD in Technical Sciences, Assistant professor, Head of Nanotechnologies and New Materials Laboratory, Rostov State Transport University (8632) 2553445

AN ELLIPTICAL HEAT-PERMEABLE INTERFACIAL CRACK IN A PIECEWISE-HOMOGENEOUS TRANSVERSALLY ISOTROPIC SPACE UNDER THE ACTION OF A THERMO-MECHANICAL LOAD

Kryvyi O.F., Morozov Yu.O.

Abstract. The problems of an elliptical heat-permeable interphase crack in a piecewise homogeneous transversally isotropic space under the action of a force and thermal load are considered. An approach based on the constructed discontinuous solutions of the corresponding stationary thermoelasticity problem in the space of slow growth generalized functions $\mathfrak{S}'(\mathbb{R}^3)$. With the help of the latter, two-dimensional singular integral relations are obtained which allow possible to reduce the problem of interphase defects in an inhomogeneous transversely isotropic space directly to systems of two-dimensional singular integral equations (SIE).

A method for solving these systems of singular integral equations are proposed. As a result, expressions were obtained for the temperature coefficients of stress intensity at the crack boundary. Numerical analysis of their behavior from thermo-mechanical characteristics of transversely isotropic materials and geometric parameters of the defect is carried out.

Let the piecewise-homogeneous transversely isotropic space be under the influence of the specified at infinity the heat flux of intensity $q_0(x, y, z)$. In the plane of connection $z = 0$ of two transversely isotropic half-spaces, contains a heat-permeable crack occupying the region Ω , which leads to the following boundary conditions:

$$w_k(x, y, \pm 0) = f_k^\pm(x, y), \quad k = \overline{1, 3}; \quad (x, y) \in \Omega; \quad (1)$$

$$w_k(x, y, +0) = w_k(x, y, -0), \quad k = \overline{1, 3}; \quad (x, y) \notin \Omega$$

$$w_8^+(x, y, +0) = w_8^-(x, y, -0),$$

$$w_9^+(x, y, +0) + w_9^-(x, y, -0) - h[w_7^+(x, y, +0) - w_7^-(x, y, -0)] = 0, \quad (x, y) \in \Omega; \quad (2)$$

$$\lambda_3^+ \partial_3 w_7^+(x, y, +0) = \lambda_3^- \partial_3 w_7^-(x, y, -0), \quad w_7^+(x, y, +0) = w_7^+(x, y, -0), \quad (x, y) \notin \Omega$$

Here designations are entered $\mathbf{w} = \{w_k(x, y, z)\}_{k=\overline{1,6}} = \{\sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, u, v, w, T, q_3\}$, where T – temperature, q_3 – heat flux along the axis z , $\lambda_3^\pm$ – Coefficient of thermal conductivity for the upper $z > 0$ and lower $z < 0$ half-space, respectively, $f_k^\pm(x, y)$ – given functions.

To the decision of the stated problem of stationary heat conductivity the approach stated in works is applied [1-5]. For its implementation, in the space of generalized functions $\mathfrak{S}'(\mathbb{R}^3)$ constructed discontinuous solution, and obtained the two-dimensional integral relations that connect, in the plane of connection of various transversely isotropic half-spaces, the jumps and sums $\chi_k^\pm = \langle \chi_k(x, y) \rangle^\pm = w_k(x, y, +0) \pm w_k(x, y, -0)$, of the components of the vector $\mathbf{w}$. This made it possible, using the results of [6], concerning unknown jumps of displacements and temperature: $\chi_k^-(x, y)$ ($k = \overline{4, 7}$), $((x, y) \in \Omega)$ obtain the following system of two-dimensional singular integral equations (SIE)

$$\begin{aligned} q_{13} \sum_{k=4}^5 \partial_{k-3} \chi_k^- + q_{15} \chi_7^- - \frac{q_{14}}{2\pi} \iint_{\Omega} \chi_6^-(t, \tau) \frac{1}{r_0^3} dt d\tau &= g_1(x, y) \\ q_{24} \partial_j \chi_6^- + \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \{ \chi_{3+j}^- [\frac{q_{23}}{r_0^3} - q_{23}^+ \partial_2^2 \frac{1}{r_0}] + q_{23}^+ \chi_{6-j}^- \partial_{12}^2 \frac{1}{r_0} + q_{25} \chi_7^- \partial_1 \frac{1}{r_0} \} dt d\tau &= g_{4-j}(x, y), \quad j = 1, 2 \\ \frac{q_{65}}{2\pi} \iint_{\Omega} \chi_7^-(t, \tau) \frac{1}{r_0^3} dt d\tau - h \chi_7^-(x, y) &= 2q_0(x, y). \end{aligned} \quad (3)$$

where $r_0 = \sqrt{(x-t)^2 + (y-\tau)^2}$, $\partial_1 \equiv \partial/\partial x$, $\partial_2 \equiv \partial/\partial y$, $\partial_3 \equiv \partial/\partial z$, $g_j(x, y)$ – given functions, q_{kj} – constants that depend on the elastic properties of materials, h – thermal permeability of a crack in the transverse direction,

As an example the elliptic crack is considered $\Omega: \{x^2/a^2 + y^2/b^2 < 1\}$. According to the results of the work [4,6], The solution of the system SIE (3) was given in the form

$$\begin{aligned}\chi_k^-(t, \tau) &= \sum_{n=1}^3 \sum_{l=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} \mu_n(t, \tau) \psi_{l,j}^{(n,k)} t^l \tau^j, \quad k = 4, 5, 6, \\ \chi_7^-(t, \tau) &= \sum_{l=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} \mu_1(t, \tau) \psi_{l,j}^{(1,7)} t^l \tau^j, \quad \mu_k(t, \tau) = a^{2\mu_k} (1 - (\xi/a)^2 - (\eta/b)^2)^{\mu_k}, \\ \mu_1 &= 1/2, \mu_{2,3} = 1/2 \pm i\alpha_0, \quad \xi = t \cos \alpha + \tau \sin \alpha, \eta = \tau \cos \alpha - t \sin \alpha,\end{aligned}\tag{4}$$

where α – the angle of rotation of the elliptic defect in plane XOY.

For definition of constants $\psi_{l,j}^{(n,k)}$ the collocation method using quadrature formulas were obtained the system of algebraic equations. The convergence of the method is proved. As a result, expressions were obtained for the temperature coefficients of stress intensity at the crack boundary. Numerical analysis of their behavior from thermo-mechanical characteristics of transversely isotropic materials and geometrics parameters of the defect is carried out.

REFERENCE

1. Kryvyy O. The discontinuous solution for the piece-homogeneous transversal isotropic medium. Operator Theory: Advances and Applications. – 2009. – 191. – P. 395–406.
2. Kryvyy O.F. Singular integral relations and equations for a piecewise homogeneous transversally isotropic space with interphase defects. //Journal of Mathematical Sciences. 2011. Volume 176. Issue 4, pp 515- 531.
3. Kryvyy O. F. Interface circular inclusion under mixed conditions of interaction with a piecewise homogeneous transversally isotropic space. //J. of Mathemat. Sciences. 2012. Volume 184. № 1. Pp. 101–119.
4. Kryvyy O.F. Interface crack in the inhomogeneous transversely isotropic space. //Materials Science - 2012. Volume 47, Issue 6, pp. 726-736.
5. Kryvyy O.F. Delaminated Interface Inclusion in a Piecewise Homogeneous Transversely Isotropic Space. // Materials Science. 2014. Volume 50. Issue 2, pp. 245-253.
6. Кривой А.Ф. Решение задачи теплопроводности для кусочно-однородного ортотропного пространства с межфазными дефектами/ А.Ф Кривой, Ю.А. Морозов //Вісник Одеськ. нац.ун-ту. Математ. і мех. –2012. –Т.17, вип. 3(15). – С. 107-119.

Information about authors:

Kryvyy O. F. – Dr. Sci., Professor. National University "Odessa Maritime Academy": Odessa, Ukraine +380674840395
E-mail: krivoy-odessa@ukr.net

Morozov Yu. O. – Associate professor, Odessa National Polytechnic University, Institute of mechanical engineering: Odessa, Ukraine +380677475439
E-mail: morozovyu@gmail.com

POLYMER FLOODING AS ENHANCED OIL RECOVERY METHOD

Logvinov O.A., Melkumyan L.A.

Abstract. The efficiency of Polymer Flooding as enhanced oil recovery method is confirmed numerically. The optimal viscosity profile of an interlayer has been determined for different Peclet numbers.

1. Introduction. Polymer Flooding is one of the enhanced oil recovery methods, well prepared and tested in the field [1]. In general, oil reservoir is flooded at first with an additional highly viscous agent – water with polymeric compounds. Pure water is used then as a displacing fluid. Reduction of viscosity contrast at the interface between polymer solution and oil leads to significant damping of instability of displacement and, as a result, oil recovery is enhanced.

In our work, a Hele-Shaw cell – two parallel plates separated by a small gap – has been used as a simple model of porous media. A fluid of variable viscosity – as polymer solution (thin layer between water and oil). Simultaneous displacement of the three fluids from a Hele-Shaw cell has been investigated (**Fig. 1**). Interface-capturing method is used for numerical modeling. Chemical interactions are not considered.



Fig. 1. Polymer Flooding.

2. Governing equations. System for numerical modeling consists of continuity equation (1.1), Darcy's law (1.2), advection-diffusion equations for concentrations of solution and oil (1.3), power dependence of viscosity on concentrations (1.4) and expression for water concentration (1.5):

$$\nabla \cdot \mathbf{W} = 0, \quad (1.1)$$

$$\nabla p = - \frac{\mu(c_w, c_s, c_o)}{K} \mathbf{W} \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} + \mathbf{W} \cdot \nabla c_i = D_i \Delta c_i, \quad i = s, o \quad (1.3)$$

$$\mu^{1/3}(c_w, c_s, c_o) = \mu_w^{1/3} c_w + \mu_s^{1/3} c_s + \mu_o^{1/3} c_o, \quad (1.4)$$

$$c_w = 1 - c_s - c_o, \quad (1.5)$$

where $\mathbf{W}$ and p are averaged two-dimensional velocity vector and averaged pressure, $K = \delta^2 / 12$ is absolute permeability of a Hele-Shaw cell, δ is the gap between its plates, μ_w, c_w – viscosity and volume concentration of water, μ_s, c_s – viscosity and volume concentration of solution, μ_o, c_o – viscosity and volume concentration of oil, D_s, D_o – self-diffusion coefficients of solution and oil.

The main dimensionless governing parameters are: Peclet number $Pe = U l / D_o$ (U is the rate of displacement, l is the width of a cell) and viscosity contrast $M = \mu_o / \mu_w$ between oil and water.

3. Results of simulations. The results of four simulations with different initial viscosity profiles of solution and different Peclet numbers are presented on **Figs. 2—5**. Light-turquoise color corresponds to water, purple – to oil. Polysolution is not show. Time moment is $t = 10$ s seconds and viscosity contrast is $M = 100$ for all simulations. The dimensions of the Hele-Shaw cell are: length $L = 200$ mm, wide $l = 100$ mm, gap $\delta = 1.2$ mm.

For quantitative comparison between the simulations displacement efficiency Q is used. Parameter Q is time-dependent and is defined as the amount of displaced oil. It is calculated at the time when water reaches the end of a Hele-Shaw cell.

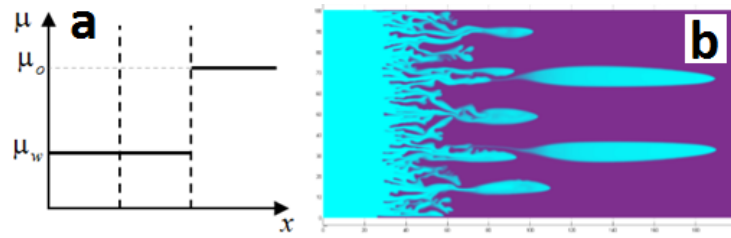


Fig. 2. Simulation I. Two-phase displacement of immiscible fluids without interlayer. $Pe = \infty$, $Q = 24\%$.

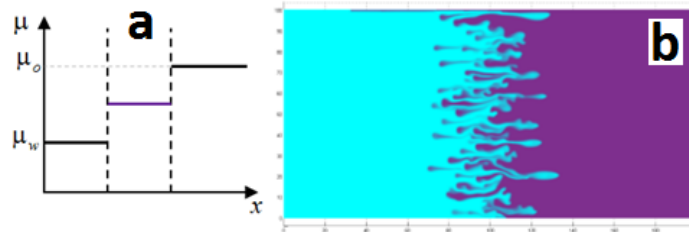


Fig. 3. Simulation II. Interlayer with constant viscosity profile. $Pe = 10^5$, $Q = 35\%$.

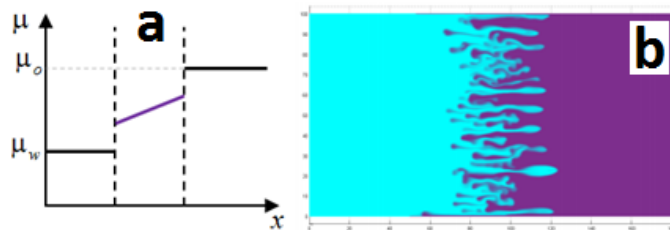


Fig. 4. Simulation III. Interlayer with linear viscosity profile (gentle slot). $Pe = 10^3$, $Q = 74\%$.

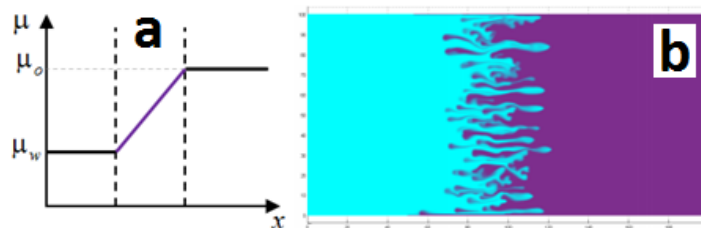


Fig. 5. Simulation IV. Interlayer with linear viscosity profile (steep slot). $Pe = 10^2$, $Q = 75\%$.

4. Conclusions. It can be seen that for simulations with polysolution (II, III, IV) the displacement efficiency is increased. The optimal viscosity profile of interlayer (in the sense of the highest efficiency) is dependent on Peclet number: for large Peclet, constant viscosity is preferable. The smaller Peclet number is, the steeper the optimal viscous profile is. These results coincide with recent theoretical works [2].

REFERENCES

1. Littman W. Polymer Flooding: Developments in petroleum science, Elsevier, Amsterdam, 1998.
2. Daripa P., Gin C. Studies on dispersive stabilization of porous media flows. Phys. Fluids, vol. 28, 082105, 2016.

Information about authors

Logvinov Oleg (Anatolievich) – senior research fellow, Gas and Wave Dynamics department of Lomonosov State University (MSU). **Mobile:** 8(916)5036050
E-mail: ologvinov@gmail.com

Melkumyan Lusine (Akopovna) – post graduate student, Gas and Wave Dynamics department of Lomonosov State University (MSU). **Mobile:** 8(916)1651549
E-mail: lucymelkumyan@gmail.com

DELAYED FRACTURE OF PLATES UNDER CREEP CONDITION IN UNSTEADY COMPLEX STRESS STATE IN THE PRESENCE OF AMBIENT MEDIUM

Lokoshchenko A.M., Fomin L.V.

Abstract. Delayed fracture of bended rectangular plate is researched under creep condition in unsteady complex stress state with consideration for the effect of an ambient medium. Using Rabotnov's kinetic theory, time to fracture of such plate was determined during sequential bending in different planes. Piecewise constant dependences of bending moments levels on time are considered. The time to fracture of the plate is determined using a fractional linear creep model. The effect of the ambient medium on the creep and the creep rupture of the plate is attributed to diffusive penetration of ambient medium elements into the material of the plate. Ambient medium effect is taken into consideration by introducing a function of cumulative average concentration into constitutive and kinetic fractional linear equations. The times to fracture while using scalar and vector damage parameters are compared.

1. Introduction

Forecasting durability of materials and structural elements under long-lasting high temperature loading in the presence of an aggressive ambient medium is an extremely important problem to ensure reliability during the entire operational life. This study is based on Rabotnov's kinetic theory of creep and creep rupture. Under research, there is delayed fracture of a rectangular plate of thickness H that is exposed to bending moments M_1 and M_2 distributed along its edges. A diagram of the loaded plate is given in Figure 1.

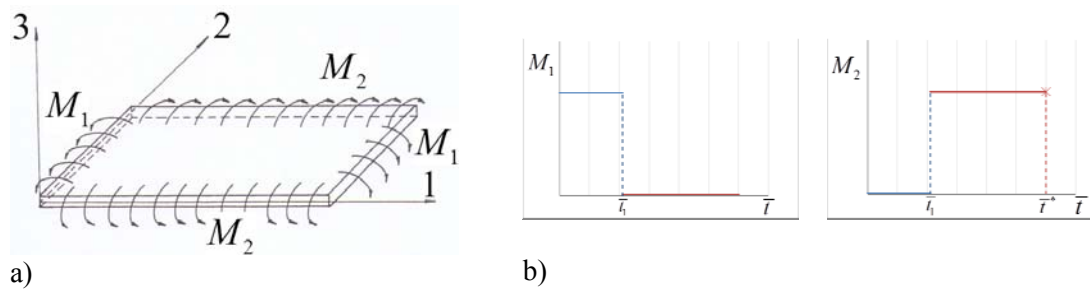


Figure 1. (a) Loaded plate and (b) plate loading program.

2. Approximate method to solve the diffusion equation

The effect of the ambient medium on the creep and the creep rupture of the plate is attributed to diffusive penetration of ambient medium elements into the material of the plate. A linear diffusion process along axis 3 (thickness) symmetric with respect to the middle plane of the plate is considered. An approximate method to solve the diffusion equation based on the introduction of a diffusion front is used [2]. The dependence of concentration c of the aggressive medium in the material of the plate on time is approximated as a polynomial from the coordinate along the axis 3 with coefficients depending on time, whereas the boundary conditions and the initial conditions are met precisely, and the diffusion equation is satisfied integrally across the entire cross-section of the plate.

3. Fractional linear creep model

The aggressive medium effect is taken into consideration by introducing into fractional linear [3] constitutive equation of the function of cumulative average concentration of the aggressive medium $f(\bar{c}_m(\bar{t}))$ in the material of the plate

$$\dot{p}_u = A(\sigma_u / (\sigma_b - \sigma_u)) \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})),$$

where $\dot{p}_u$ – creep strain rate intensity, σ_u – stress intensity, σ_b – short-time strength limit at given research temperature, $f(\bar{c}_m(\bar{t}))$ – function of cumulative average level of concentration $\bar{c}_m(\bar{t})$ of the ambient medium elements in the plate [4], A – material constant.

The function $f(\bar{c}_m(\bar{t}))$ is introduced into the kinetic equations. The kinetic equation given a scalar damage parameter is assumed to have the following form

$$\dot{\omega} = d\omega/d\bar{t} = C(\sigma_u/(\sigma_b - \sigma_u)) \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})), \quad \omega(\bar{t}=0)=0, \quad \omega^* = \omega(\bar{t}=\bar{t}^*)=1.$$

Kinetic equation for vector damage parameter Ω [5, 6] are as follows

$$\dot{\Omega}_i = d\Omega_i/d\bar{t} = \begin{cases} C \cdot (\sigma_i/(\sigma_b - \sigma_i)) \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})) & \text{if } \sigma_i > 0 \\ 0 & \text{if } \sigma_i \leq 0 \end{cases} \quad i = 1, 2,$$

where Ω_i – damage vector projection on i – th axis of the coordinate system,

$$\Omega = \sqrt{(\Omega_1)^2 + (\Omega_2)^2}, \quad \Omega(\bar{t}=0)=0, \quad \Omega^* = \Omega(\bar{t}=\bar{t}^*)=1 \text{ – fracture criterion.}$$

4. Results of calculations and conclusions

As a result of the obtained formulas and the numerical calculation the time to fracture when a scalar damage parameter is used is less than when a vector damage parameter is used for different values $\zeta = M_2/M_1$.

Sequential decrease (increase) of the stress leads to an increase (decrease) of the time to failure and increase (decrease) the sum of the partial times which reflect the principle of linear summation of damage.

Acknowledgements

The authors would like to acknowledge the financial support of the Russian Fund for Fundamental Research, grant No. 17-08-00210a.

REFERENCE

1. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
2. Локощенко А.М. Ползучесть и длительная прочность металлов. М.: Физматлит, 2016. 504 с.
3. Шестериков С.А., Юмашева М.А. Конкретизация уравнения состояния в теории ползучести // Известия АН СССР, Механика твердого тела. 1984. №1. С.86-92.
4. Фомин Л.В. Описание длительной прочности растягиваемых стержней прямоугольного и круглого поперечных сечений в высокотемпературной воздушной среде // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, №3(32). 2013. С. 87-97.
5. Качанов Л.М. Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974. 312 с.
6. Наместникова И.В., Шестериков С.А. Векторное представление параметра поврежденности. // Деформирование и разрушение твердых тел. Отчёт Института механики. Под редакцией Н.И. Малинина, С.А. Шестерикова. Издательство Московского университета. 1985. С.43-52.

Information about authors:

Lokoshchenko Alexander – Professor, Doctor of Physics and Maths, Head of the laboratory of creep and creep rupture, Research Institute of Mechanics Lomonosov Moscow State University
+7(495)9395308

E-mail: loko@imec.msu.ru

Fomin Leonid – Candidate of Physics and Maths, Researcher of the laboratory of creep and creep rupture, Research Institute of Mechanics Lomonosov Moscow State University
+7(495)9392428

E-mail: fleonid1975@mail.ru

SURFACE GROWTH THEORY AND ITS APPLICATIONS

Manzhurov Alexander V.

Abstract. The fundamentals of the mathematical theory of surface growth are under consideration. We focus on the surface growth when deposition of a new material occurs at the boundary of a growing solid. The constitutive equations and boundary conditions for growing solids are presented. Non-classical boundary value problems are formulated. Methods for solving these problems are proposed. They are illustrated by solutions of several model problems that demonstrate the unique mechanical behavior of growing solids.

A great number of objects around us arise from some growth processes. Many natural phenomena such as growth of biological tissues, glaciers, blocks of sedimentary and volcanic rocks, and space objects may serve as examples. Similar processes determine specific features of many industrial processes which include crystal growth, laser deposition, melt solidification, electrolytic formation, pyrolytic deposition, polymerization and concreting technologies. There are two main ways of continuous growth in technology and nature known to researchers. They are volumetric and surface growth processes. Let us consider the latter case [1, 2].

GENERAL CONCEPTS

Recent research has shown that solids formed by growth processes differ in their properties essentially from solids in the traditional view. Moreover, the classical approaches of solid mechanics to modeling the growing solids behavior fail. They should be replaced by new ideas and methods of modern mechanics, mathematics, physics, and engineering sciences.

An approach proposed deals with the construction of adequate model of surface growth processes of solids (see also [3-6]). This approach is based on the following statements:

- ❖ We simulate the surface growth of a solid by moving of its boundary due to the influx of new material to the surface of this solid.
- ❖ We obtain specific boundary conditions on the moving boundary (growth surface) as the result of an additional contact interaction problem between 3D solid and 2D surface which depends on particular features of the growing process.
- ❖ We state the compatibility of the rate of deformation tensor (or rate of stretching tensor) for a growing solid while its strain tensor is incompatible as a rule.

The last statement leads to the case in which it is absolutely natural to choose the rate of stress tensor, the rate of deformation tensor, and the vector of velocity as the basic variables of the governing system of equations for description of the surface growth process.

In general, boundary value problem for a growing solid contains three dependent controlled groups of values: the surface and bulk loadings, the tension of new adhering surfaces, and the velocity of influx of adhering surfaces.

SURFACE GROWTH OF A SOLID

If the velocity of the boundary particles of a growing solid is substantially small as compared with the velocity of influx of new particles and the surface of growth is closed then the boundary value problem can be written in the form

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^*], \quad \mathbf{S} = G[2\mathbf{D} + (K - 1)I_1(\mathbf{D})\mathbf{I}],$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}|_{\partial\Omega_1} = \mathbf{g}, \quad \mathbf{v}|_{\partial\Omega_2} = \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{S}|_{\partial\Omega(t)} = p \mathbf{n},$$

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t}, \quad \mathbf{g} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}, \quad \mathbf{v}_0 = \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial t}, \quad p = -s_n(\mathcal{T}_s : \mathcal{Q}_s), \quad s_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n},$$

where $\mathbf{T}$ is the stress tensor, $\mathbf{D}$ is the rate of deformation tensor, $\mathbf{u}$ is the displacement, G and K are the elastic moduli, I_1 is the first invariant of a tensor, $\mathbf{I}$ is the unit tensor, $\mathbf{n}$ is the unit vector normal to the surface of the solid, $\mathbf{f}$ is the surface force, $\partial\Omega_1$ and $\partial\Omega_2$ are the fixed domains of the solid surface, $\partial\Omega(t)$ is the growth surface, $\mathcal{T}_s$ is the 2D tensor of tension of adhered surface, $\mathcal{Q}_s$ is the 2D tensor of adhered surface curvature, surface force on the growth surface as well as bulk force supposed to be zeros.

One can easily see that the boundary value problem obtained have the same form as the classical boundary value problem of elasticity and we can use all known analytical and numerical methods for the solution of this problem.

In order to obtain the values of stresses and displacement one should use the formulas as follows (we denote by τ^* the time of adhesion of the surface to the growing solid and assume that growth surface is always free of surface load)

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(\tau^*) + \int_{\tau^*}^t \mathbf{S} d\tau, \quad \mathbf{T}(\tau^*) = \mathcal{T}_s + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{0}) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}(\tau^*) + \int_{\tau^*}^t \mathbf{v} d\tau.$$

In the equations above we chose the case of small deformations only for definiteness. In the case of finite deformation one should simply change the linear Hook's law by nonlinear constitutive relations.

This approach can be developed for the case of viscoelastic and aging materials using methods of [7–18]. The solution of the problem of the accretion of a viscoelastic ageing solid can be obtained by the solution of the mathematically identical problems with a parameter, which have the same form as the boundary value problem of the classical theory of elasticity. Then the true stresses and displacements in the growing solid can be reconstructed using derived formulas.

Conclusion Thus, using the presented approach for mechanical research of growing solids from elastic and viscoelastic materials one can determine the strength and the shape of final solids and products. Moreover, on the basis of this mechanical analysis one can work out effective recommendations for improving the growth processes observed in nature and technology.

Acknowledgements This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No 17-01-00712).

REFERENCES

1. Aruyunyan N.Kh., Manzhirov A.V., Naumov V.E. Moscow: Nauka, 1991. 172 p.
2. Manzhirov A.V. Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1995. Vol. 59. No. 5. PP. 805–816.
3. Manzhirov A.V. Key Engineering Materials. 2013, Vol. 535-536. PP. 89-93.
4. Manzhirov A.V., Lychev S.A. Doklady Physics. 2012. Vol. 57. No. 4. PP. 160-163.
5. Manzhirov A.V. In ASME 2014 International Mechanical Engineering Congress and Exposition. Volume 9: Mechanics of Solids, Structures and Fluids. Montreal, Quebec, Canada, November 14–20, 2014. Paper No. IMECE2014-36712, pp. V009T12A039.
6. Manzhirov A.V., Lychev S.A. Lecture Notes in Engineering and Computer Science: World Congress on Engineering 2014, WCE 2014, 2–4 July, 2014, London, U.K. London: IAENG, 2014. PP. 1404–1409.
7. Manzhirov A.V., Lychev S.A. In Transactions on Engineering Technologies: World Congress on Engineering 2014. Netherlands: Springer, 2015. PP. 99–115.
8. Manzhirov A.V. Lecture Notes in Engineering and Computer Science: Proceedings of The World Congress engineering 2015, WCE 2015, 1–3 July, 2015, London, U.K. London: IAENG, 2015. PP. 710–714.
9. Manzhirov A.V. Parshin D.A. Mechanics of Solids. 2015. Vol. 50. No. 5. PP. 94-107.
10. Manzhirov A.V. Parshin D.A. Mechanics of Solids. 2015. Vol. 50, No. 6. PP. 69-91.
11. Manzhirov A.V., Parshin D.A. Mechanics of Solids. 2016. Vol. 51 No. 6. PP. 93-104.
12. Manzhirov A.V., Parshin D.A. Lecture Notes in Engineering and Computer Science: Proceedings of The World Congress on Engineering 2016, WCE 2016, 29 June - 1 July, 2016, London, U.K., pp. 1131–1135.
13. Manzhirov A.V. "In Transactions on Engineering Technologies, Singapore: Springer, 2016. PP. 223–235.
14. Manzhirov A.V. Procedia Manufacturing. 2016. Vol. 7. PP. 59-65.
15. Manzhirov A.V. MATEC Web of Conferences. 2017. Vol. 95. Pp.12002. <https://doi.org/10.1051/mateconf/20179512002>
16. Manzhirov A.V. Procedia Engineering. 2017. Vol. 173. PP. 11–16.
17. Manzhirov A.V. Lecture Notes in Engineering and Computer Science: Proceedings of The World Congress engineering 2017, WCE 2017, 5–7 July, 2017, London, U.K., Vol. II. London: IAENG, 2017. PP. 856–860.
18. Manzhirov A.V., Parshin D.A. Lecture Notes in Engineering and Computer Science: Proceedings of The World Congress on Engineering 2017, WCE 2017, 5 - 7 July, 2017, London, U.K. IAENG, 2017. PP. 934–939.

Information about the author:

Alexander V. Manzhirov – Foreign Member of the National Academy of Sciences of the Republic of Armenia, Full Member of the International Engineering Academy, Professor, D.Sc., Ph.D., M.Sc., Department for Modeling in Solid Mechanics, Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; Department of Applied Mathematics, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia; Department of Higher Mathematics, National Research Nuclear University MEPhI, Moscow, Russia; Department of Higher Mathematics, Moscow Technological University, Moscow, Russia.

E-mail: manzh@inbox.ru

ON A CLASS OF PROBLEMS ON INTERACTION OF VARIOUS TYPE STRESS CONCENTRATORS WITH AN ELASTIC SEMI-INFINITE PLATE

Mkhitarian S.M.

Abstract. A fairly-wide class of mixed boundary value problems in the theory of elasticity on the interaction of stress concentrators such as cracks, absolutely rigid thin inclusions, stringers and punches with a deformable solid body in the form of an elastic semi-infinite plate is considered.

In many contact and mixed boundary value problems of the deformable solid mechanics, deformable foundations are often modeled in the form of a classical foundation of the half-plane type; for example – an elastic half-plane. Here, we also assume such foundation. Specifically, we consider the following problems.

1. The problem of the stress-strain state of an elastic semi-infinite plate, which occupies the lower half-plane in the right-handed rectangular coordinate system, when there is an arbitrary finite number of cracks on the vertical axis. It is assumed that the crack edges and the plate on their boundary are loaded with arbitrary asymmetric, non-self-balancing, normal and tangential distributed forces. Therefore, the formulation of the problem here is somewhat wider than in [1-3]. Based on the solution of the first boundary value problem for the quarter plane (a right-angled wedge), constructed with the help of the Mellin integral transform, the solution of the problem reduces to the solution of the singular integral equation (SIE) for the complex combination of dislocation densities on the crack edges. The governing SIE is solved by a known numerical-analytical method [4]. Thereafter, the main characteristics of the problem – density of dislocations on crack edges, opening of cracks, breaking stresses outside the system of cracks on their lines of location, stress intensity factors (SIF) – are determined.

We discuss the following important special cases of the posed problem:

a) The case when the plate on the vertical axis contains only one internal crack located at some distance from its boundary. In this case, the effective solution of the problem governing SIE is constructed using the Lagrange interpolation polynomial at Chebyshev nodes or the Multopp method. It was revealed that when the upper tip of the crack approaches the plate boundary, the SIF at this end increases infinitely, in the course of its change taking also the value of the brittle fracture limit for the given material.

b) As a result of item a), the need to consider another important particular case, when the crack vertically comes out to the boundary of the plate, arises. In this case, the dislocation density at this upper crack tip is a finite quantity. A simple relationship is established between this quantity and the value of the load normal to the crack edges at the same point. Eventually, the governing SIE is solved in the class of functions, which are unbounded at the internal crack tip and bounded at the crack upper boundary tip.

c) The problem when the plate is reinforced at its boundary by an absolutely rigid broken infinite stringer, and the crack vertically comes out to the plate boundary at the point of stringer discontinuity. In this case, it is shown that the dislocation density at the upper boundary point of the crack has a logarithmic singularity, if the forces, normal to the crack edges, are nonzero at the same point.

d) The problem b) when the crack edges are reinforced in the vicinity of crack internal tip with a thin inclusion, simulated by continuously distributed linearly elastic springs [5]. The presence of such inclusion reduces the SIF and, therefore, prevents the spread of the crack.

2. The problem 1, when the system of cracks is replaced by a system of absolutely rigid thin inclusions. Particular cases are discussed, including the case of a single inclusion coming out on the plate boundary (the problem of reinforcement).

3. The symmetric problem on the stress state of an elastic infinite plate or half-space at plane deformation, when a system of an arbitrary finite number of punches is indented on its boundary, and a plate contains a system of cracks on the vertical axis.

4. The previous problem, when the system of cracks is replaced by a system of absolutely rigid thin inclusions.

The results of the study of the last two problems can be used in the calculations of foundations. They are generalizations of the classical contact problems of the theory of elasticity.

All the problems are mathematically formulated in the form of governing SIE and are solved exactly or by the above-mentioned numerical-analytical method.

REFERENCES

1. Panasyuk V.V., Savruk M.P., Datsyshin A.P. Stress distribution around cracks in plates and shells, Kyiv: Naukova dumka, 1976, 440p.
2. Wigglesworth L.A. Stress distribution in a notched plate. *Mathematika*, v. 4, №7, pp. 76-96, 1957.
3. Stallybrass M.P. A crack perpendicular to on elastic half-plane. *Int. J. Eng. Sci.*, v. 8, №5, pp. 351-362, 1970.
4. Erdogan F., Gupta G.D., Cook T.S. The numerical Solutions of singular integral equations. *Methods of analysis a solution of crack problems*. Noordhoff Intern. Publ., Leyden, 1973, pp. 368-425.
5. Rose L.R.F. Crack reinforcement by distributed springs, *J. Mech. Phys. Solids*, v. 35, №4, pp. 363-405, 1987.

Information about author:

Mkhitaryan S.M. – Corresponding Member of NAS RA, Dr., Prof., Head of Department, Institute of Mechanics of NAS RA, (374 10) 52-48-90, (374 93) 93 61 17

E-mail: smkhitaryan39@rambler.ru

FULL THERMOMECHANICAL COUPLING IN MODELLING OF MICROPOLAR THERMOELASTICITY

Murashkin E.V., Radayev Y.N.

Abstract. The present paper is devoted to an analysis of plane harmonic coupled thermoelastic waves of displacements, microrotations and temperature propagating in continua. The analysis is carried out in the framework of linear conventional thermoelastic micropolar (CTEM) continuum. Additional microrotations and moment stresses are taken into consideration. The constitutive constants providing coupling of equations of motion and heat conduction are considered. Wavenumbers of a plane harmonic coupled thermoelastic waves are obtained. In order to determine the wavenumbers a bicubic and a biquadratic algebraic equations are derived for waves of displacements, microrotations, and temperature. Those equations are then analyzed by the computer algebra system Mathematica. Algebraic forms expressed by complex multivalued square and cubic radicals are obtained for wavenumbers of transverse and longitudinal waves.

Problems of micropolar continua take its origin from the classical E. and F. Cosserat's paper [1]. Micropolar (MP) continuum theories include not only translational displacements but also additional degrees of freedom. These degrees of freedom are coupled with changes in reper (three directors) associated with microvolume. Such changes may be described by a rotation vector when reper associated with microvolume are rigid rotated. In contrary to conventional elasticity a continuum with microstructure is described by the asymmetric strain and stress tensors known from many previous discussions. Thus the asymmetric elastic theory is characterized by a comparatively large number of constitutive elastic constants need to be determined from the experimental observations. There are several phenomena (for example, the anomalous piezoelectric effect in quartz, the dispersion of elastic waves, as well as a number of other experimentally observed elastic properties of the pure crystals) being beyond the scope of the conventional thermoelasticity (CTE) and piezoelectroelasticity. That is why a development of complex theories seems to be actual.

The conventional thermoelastic micropolar (CTEM) continuum may be described in terms of field formalism, for example, from positions of the Green--Naghdi thermoelasticity. Now such mathematical frameworks of the thermoelastic behavior of solids are rapidly refined [2,3]. They are based on different modifications of the classical Fourier law of heat conduction. The refinements aim at derivations of hyperbolic partial differential equations of coupled thermoelasticity. Those are to simultaneously fulfill the following conditions:

- Finiteness of the heat signal propagation velocity;
- The ability of the spatial propagation of the thermoelastic waves without attenuation;
- Existence of distortionless wave forms akin to the classical d'Alembert type waves.

CTEM theory is based on the classical Fourier law of heat conduction with an infinite velocity of propagation of an exponentially decaying heat signal. Hyperbolic thermoelasticity theory is characterised by the energy conservation and the finite propagation velocity of thermal waves known as second sound waves.

In [4,5] a non-linear mathematical model of thermoelastic micropolar continuum has been presented in terms of 4-covariant field theoretical formalism. In-depth study of weak and strong discontinuities in macropolar thermoelastic continua is given in [6]. In [7] problems concerning plane harmonic wavenumbers of coupled type-III thermoelastic waves are discussed. In [8] the linear symmetrical thermoelasticity is employed. A non-linear mathematical model of thermoelastic micropolar continuum is developed.

The system of coupled partial differential equations of motion and heat conduction for a linear isotropic type-I micropolar thermoelastic continuum in the absence of mass forces, moments, and heat sources can be written as

$$\begin{cases} (\lambda + \mu - \eta) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + (\mu + \eta) \nabla \cdot \nabla \mathbf{u} + 2\eta \nabla \times \boldsymbol{\phi} - \alpha \nabla \theta - \rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \\ (\beta + \gamma - \varepsilon) \nabla \nabla \cdot \boldsymbol{\phi} + (\gamma + \varepsilon) \nabla \cdot \nabla \boldsymbol{\phi} - 4\eta \boldsymbol{\phi} + 2\eta \nabla \times \mathbf{u} - \zeta \nabla \mathbf{u} - \mathfrak{I} \ddot{\boldsymbol{\phi}} = \mathbf{0}, \\ \nabla^2 \theta - \zeta \Lambda_*^{-1} \dot{\theta} - \zeta \Lambda_*^{-1} \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} - \zeta \Lambda_*^{-1} \nabla \cdot \dot{\boldsymbol{\phi}} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Hereafter $\mathbf{u}$ is the translational displacements; $\boldsymbol{\phi}$ – the microrotations; θ – the temperature increment over the referential temperature; ρ – the mass density; $\mathfrak{I}$ – the microinertia; ∇ – the three-dimensional Hamiltonian operator (the nabla symbol); dot over a symbol denotes partial

differentiation with respect to time at fixed spatial coordinates; $\lambda, \mu, \eta, \beta, \gamma, \varepsilon$ are isothermal constitutive constants of CTM continuum; α, ς are constitutive constants providing coupling of equations of motion and heat conduction; κ is the heat capacity (per unit volume) at constant (zero) strains; Λ_* is the thermal conductivity. Constants α, ς depend not only on the mechanical properties of the continuum, but also depend on the thermal properties.

System of partial differential equations (1) includes partial derivative of the order not higher than the second. Let a wave surface Σ of weak discontinuities translational displacements $\mathbf{u}$, microrotations $\boldsymbol{\varphi}$ and temperature θ be propagating with normal velocity G in three-dimensional space. $\mathbf{A}$ and $\mathbf{S}$ are the polarization vectors of translational displacements and microrotations respectively. The equalities $B = 0$, $\mathbf{A} = \mathbf{0}$, $\mathbf{S} = \mathbf{0}$ cannot be satisfied simultaneously at any point of the surface, if the surface Σ in fact is the surface of weak discontinuities.

The vectors $\mathbf{A}$, $\mathbf{S}$ can be decomposed into sums of projections onto the tangent plane and on the normal direction to the wave surface:

$$\mathbf{A} = A_{\perp} \boldsymbol{\tau} + A_{\parallel} \mathbf{n}, \quad \mathbf{S} = S_{\perp} \boldsymbol{\tau} + S_{\parallel} \mathbf{n}, \quad (2)$$

$$A_{\perp} = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad A_{\parallel} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}, \quad S_{\perp} = \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad S_{\parallel} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{n},$$

where $\boldsymbol{\tau}$ is the tangential unit vector and $\mathbf{n}$ is the normal unit one respectively. Taking account of equations (2) the system (1) after rearrangements is transformed into

$$\begin{cases} (\rho G^2 - (\mu + \eta)) A_{\perp} = 0, & (\rho G^2 - (\gamma + \varepsilon)) S_{\perp} = 0, \\ (\rho G^2 - (\lambda + 2\mu)) A_{\parallel} = 0, & (\rho G^2 - (\beta + 2\gamma)) S_{\parallel} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Thus one can conclude that mathematical models of modern metamaterials and their multiphysics behavior (including finite deformations and heat conduction) are formulated in the unified framework provided by thermomechanical field theory.

REFERENCES

1. Cosserat E. et F. Theorie des corps deformables. Paris: Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909.
2. Green A.E., Naghdi P.M. On undamped heat waves in an elastic solid. J. Therm. Stress. Vol. 15. 1992.
3. Green A.E., Naghdi P.M. Thermoelasticity without energy dissipation. J. Elasticity. Vol. 31. 1993.
4. Kovalev V.A., Murashkin E.V., Radayev Yu.N. On a Physical Field Theory of Micropolar Thermoelasticity. Journal of Physics: Conference Series. Vol. 788. No. 1. 2017.
5. Murashkin E. V., Radaev Yu. N. On Thermodynamics of Wave Processes of Heat Transport, In: Mechanics for Materials and Technologies. Volume 46 of the series Advanced Structured Materials. Cham, Springer, 2017.
6. Murashkin E.V., Radayev Y.N. On a classification of weak discontinuities in micropolar thermoelasticity. Materials Physics and Mechanics. Vol. 23. 2015.
7. Kovalev V.A., Radayev Yu.N. On wavenumbers of plane harmonic type III thermoelastic waves. Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform. Vol. 10 Iss. 3. 2010.
8. Kovalev V.A., Radayev Yu.N. Wave Problems of the Field Theory and Thermomechanics. Saratov, Saratov University Press, 2010. (In Russian)

Information about authors:

Evgenii V. Murashkin – Ph.D., Institute for Problems in Mechanics of RAS; National Research Nuclear University “MEPhI”; Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

E-mail: murashkin@ipmnet.ru

Yuri N. Radayev – Prof., D.Sc., Department for Modeling in Solid Mechanics, Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

E-mail: radayev@ipmnet.ru

NEAR-BOUNDARY ASYMPTOTICS IN THE PROBLEM ON THE RUN-UP OF LONG WAVES ON A SHALLOW BEACH

Nazaikinskii V.E.

Abstract. The near-boundary asymptotics is obtained for the solution of the Cauchy problem for a degenerate wave equation with localized initial data describing the run-up of tsunami waves on a shallow beach in the linear approximation.

We consider the following Cauchy problem with localized initial data for a two-dimensional wave equation with variable velocity in a domain D with boundary ∂D :

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(c(x) \frac{\partial \eta}{\partial x_j} \right) = 0, \quad \eta|_{t=0} = V \left(\frac{x - x_0}{\mu} \right), \quad \eta_t|_{t=0} = 0.$$

The velocity is assumed to degenerate on the boundary as the square root of the distance from the boundary, $c(x) \simeq \sqrt{\text{dist}(x, \partial D)}$. This problem describes the run-up of tsunami waves on a shallow beach in the linear approximation [1, 2]. The problem has the natural small parameter μ (the source-to-basin typical dimension ratio), which enables one to study it by asymptotic methods. The papers [3, 4] (see also references therein) provide a method for constructing asymptotic solutions based on a modified Maslov canonical operator associated with characteristics (trajectories of the Hamiltonian system) unbounded in the momentum variables and nonstandard from the viewpoint of the theory of partial differential equations. In a neighborhood of the velocity degeneration line ∂D , which can be viewed as a caustic of special form, the canonical operator is defined via the Hankel transform, which arises by application of Fock's quantization procedure [5] to the canonical transformation regularizing these nonstandard characteristics.

We show that the asymptotics of the solution in a neighborhood of the boundary can be expressed via the standard canonical operator [6] on a Lagrangian submanifold of the cotangent bundle of the boundary with the use of the efficient formulas in [7], which dramatically simplifies the asymptotic formulas for the solution near the boundary. Further, the solution near the boundary can be expressed via simple algebraic functions provided that the source has the special form as in [8]. This, in turn, permits one to obtain approximate formulas relating the uprush length to the source parameters. The talk is based on joint work with S.Yu. Dobrokhotov and A.A. Tolchennikov [9–10].

The research was supported by the Russian Science Foundation (project 16-11-10282).

REFERENCES

1. Stoker J.J. Water Waves. The Mathematical Theory with Applications, John Wiley and Sons, New York, 1958.
2. Pelinovsky E.N. Hydrodynamics of tsunami waves, Nizhny Novgorod, IPF RAS, 1996.

3. Dobrokhotov S.Yu., Nazaikinskii V.E., Tirozzi B. Two-dimensional wave equation with degeneration on the curvilinear boundary of the domain and asymptotic solutions with localized initial data. *Russ. J. Math. Phys.* **20**:4, 389–401 (2013).
4. Nazaikinskii V.E. The Maslov canonical operator on Lagrangian manifolds in the phase space corresponding to a wave equation degenerating on the boundary. *Math Notes* **96**:1–2, 248–260 (2014).
5. Fock V.A. On the canonical transformation in classical and quantum mechanics. *Vestnik Leningr. Gos. Univ.* **16**, 67–70 (1959).
6. Maslov V.P. *Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques*. Izd. Moskov. Univ., Moscow, 1965; Dunod, Paris, 1972.
7. Dobrokhotov S.Yu., Makrakis G.N., Nazaikinskii V.E., Tudorovskii T.Ya. New formulas for Maslov's canonical operator in a neighborhood of focal points and caustics in two-dimensional semiclassical asymptotics. *Theoret. and Math. Phys.* **177**:3, 1579–1605 (2013).
8. Sekerzh-Zenkovich S.Ya. Simple asymptotic solution of the Cauchy–Poisson problem for head waves. *Russ. J. Math. Phys.* **16**:2, 315–322 (2009).
9. Dobrokhotov S.Yu., Nazaikinskii V.E. Characteristics with singularities and the boundary values of the asymptotic solution of the Cauchy problem for a degenerate wave equation. *Math. Notes* **100**:5–6, 695–713 (2016).
10. Dobrokhotov S.Yu., Nazaikinskii V.E., Tolchennikov A.A. Uniform asymptotics of the boundary values of the solution in a linear problem on the run-up of waves on a shallow beach. *Math. Notes* **101**:5–6, 802–814 (2017).

Information about authors:

Nazaikinskii Vladimir, leading researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Moscow, Russia (7-495) 433-75-44

E-mail: nazaikinskii@googlemail.com

ELLIPTIC DIFFERENTIAL DIFFERENCE EQUATIONS IN THE THEORY OF SANDWICH SHELLS

Onanov G.G., Skubachevskii A.L.
RUDN-University, Moscow, Russia

Modern aircraft technology makes use of sandwich shells and plates. Often wings of a plane contain panels with goffered filler. A cooling system of rocket engine has the form of a sandwich shell. In this lecture we consider such three-layer cylindrical shell with goffered filler as an elastic system consisting of two coaxial cylindrical shells connected by two regular systems of radial and slanting ribs. It is natural to reduce this discrete-continuous model to a continuous model, “spreading out” both the radial ribs (the 0-connections) and the slanting ribs (the α -connections) in the space between the shells. As a result, we arrive at a three-layer shell with a “two-phase” model of the filler combining simultaneously the medium of 0-braces and α -braces.

We introduce a cylindrical system of coordinates x, θ, ρ such that the axis Ox is directed along the axis of the cylinder. Under some natural assumptions, the field of elastic displacements of the three-layer shell with a two-phase filler is determined by 12 functions of two independent variables x and θ . Three functions describe elastic displacements of external shell, three functions describe elastic displacements of internal shell, three functions describe displacements of the medium of α -connections, and three functions describe displacements of the medium of 0-connections. The proposed continuous model can be described on the basis of variational problem for a quadratic functional of potential energy, which depends on the above mentioned 12 functions. The elastic displacements of shells and mediums of α -braces and 0-braces are connected by eight relations. These relations have nonlocal form, since they contain functions with shifts of argument θ . Using the above relations, we can exclude 8 functions in the functional of potential energy. As a result, we obtain a quadratic functional depending on 4 functions and their derivatives including terms with shifts of argument.

A vector-valued function gives a minimum to this nonlocal functional if and only if it is a generalized solution of a boundary value problem for a strongly elliptic system of four differential difference equations in the domain $(0, a) \times (0, 2\pi)$ with the Dirichlet boundary conditions for $x=0$ and $x=a$ and periodic conditions for $\theta=0$ and $\theta=2\pi$. It is proved that this boundary value problem has a unique generalized solution. A convergence of the Ritz method is stated.

This work was financially supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (the Agreement number 02.A03.21.0008) and by the Russian Foundation for Basic Research, project 16-01-00450.

REFERENCES

1. Onanov G.G., Skubachevskii A.L. Differential equations with displaced arguments in stationary problems in the mechanics of a deformed body. *Prikladnaya Mekhanika*, 15 (1979), 39--47; English transl. in *Soviet Applied Mech.* 15 (1979).
2. Skubachevskii A.L. *Elliptic Functional Differential Equations and Its Applications*. Birkhäuser, Basel--Boston--Berlin, 1997.

Information about authors:

Skubachevskii Alexander Leonodovich – Professor, Doctor of Sciences, Head of Department of Applied Mathematics, RUDN-University, Faculty of Physical, Mathematical, and Natural Sciences, +7 (495) 955 07 10. **E-mail:** skub@lector.ru

Onanov German Georgievich – Associate Professor, State Prize Winner of the USSR, Moscow Aviation Institute, died in 2015.

ONE POSSIBLE NUMERICAL SOLUTION FOR SOME CONTACT PRESSURE OPTIMIZATION PROBLEMS

Páczelt István, Baksa Attila

For designer, it is always important to avoid singularities within the contact regions in order to keep stresses at a low level. This requirement leads to optimal design of contact surface shape and proper material selection, thus generating a class of contact optimization problems. The design parameters in structural optimization are usually defined as material moduli, structure size and shape, characteristic dimensions, supports, loads, inner links, reinforcement and topology, cf. books by Banichuk and Neittaanmaki [1] and Banichuk [2].

The paper [3] has a survey of literature according to different contact optimization problems: The contact pressure optimization was analysed for an elastic punch on a rigid substrate assuming the linear elasticity relations. A nearly constant contact pressure distribution was achieved by appropriate shape optimization for axially symmetric bodies. Contact optimization problems were analysed with account for frictional contact, for multiple load cases and for incomplete external loading data, for kinematical constraints etc.

Our works [4-6] provide a new type of solution for 2D and 3D problems, in which the contact pressure distribution is partially controlled by minimizing the maximal contact pressure. In [7] several classes of optimization problems have been considered with account of wear process.

In our analysis, it is assumed that the bodies are in contact on the whole subdomain Ω_c of the contact zone $S_c = \Omega$. The subdomain Ω_c is given by us. Introduce the surface coordinates s, t and assume that the following pressure distribution is reached due to shape optimization [4] on the Ω_c

$$p_n(\mathbf{x}) = c(\mathbf{x}) p_{n,\max} \quad (1)$$

where the assumed control function $c(\mathbf{x})$ must satisfy the condition $0 \leq c(\mathbf{x}) \leq 1$, and

$$p_{n,\max} = \max p_n(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = [s, t] \quad (2)$$

In the subdomain $\Omega_{nc} (\Omega = \Omega_c \cup \Omega_{nc})$ the contact pressure is not controlled and does not exceed the values specified by (1), so that

$$\chi(\mathbf{x}) = c(\mathbf{x}) p_{\max} - p_n(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega_{nc} \quad (3)$$

Usually control function $c(\mathbf{x})$ depends on some geometrical parameters. Some of the parameters are fixed while the others are determined in the optimization process.

The lecture gives some examples for controlled contact pressure optimization for different beam structures and cylindrical bodies. It is assumed that strains are small and the materials of the contacting bodies are linearly elastic. An effective method is given in numerical calculation for determination of the optimal distribution of the contact load.

For some problems the Green influence functions for Signorini contact conditions [8,9] can be applied

$$d = (u_n^{(2)}(p_n) + u_{n,load}^{(2)}) - (u_n^{(1)}(p_n) + u_{n,load}^{(1)} + \lambda) + g^{(0)} \geq 0, \quad p_n \geq 0, \quad p_n d = 0 \quad (4)$$

where $u_n^{(i)}(p_n) = \int_{S_c} (H_{n,n}^{(i)}(x, s) + \mu H_{n,t}^{(i)}) p_n(s) ds$ normal displacement, $H_{n,n}^{(i)}(x, s), H_{n,t}^{(i)}(x, s)$ are the

Green functions for normal and tangential tractions, $u_{n,load}^{(i)}$ is the normal displacement from given

load, $g^{(0)}$ is the initial gap, λ is the rigid body displacement for the first body, that is $d = d(p_n, \lambda)$. The contact problem is solved by principle of modified complementary energy or by displacement formulation using minimum principle of the total potential energy in the penalty form. In the last case, we use h or p -version finite element method for discretization [10].

By the prescribed distribution of contact pressure the optimization problem is solved in the discretized form. In these contact optimization problems, the initial gap (shape form of the contact surface) is the unknown function. The calculation of the gap can be made with special iteration [3,4]. The discretized equation for determination of the discretized gap is

$$\mathbf{d} = \mathbf{H}^{(2)} \mathbf{p} + \mathbf{u}_{n,load}^{(2)} - {}^{(iter)}\mathbf{u}_n^{(1)}(\mathbf{p}) - \mathbf{u}_{n,load}^{(1)} - \mathbf{e}^{(iter)}\lambda + {}^{(iter)}\mathbf{g}^{(0)} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{H}^{(2)} \mathbf{p} + \mathbf{u}_{n,load}^{(2)} - {}^{(iter)}\mathbf{u}_n^{(1)}(\mathbf{p}) - \mathbf{u}_{n,load}^{(1)} = \mathbf{e}^{(iter)}\lambda - {}^{(iter)}\mathbf{g}^{(0)} = - {}^{(iter)}\mathbf{g}^{(0)*} \quad (5)$$

$${}^{(iter)}\mathbf{g}_{min}^* = \min {}^{(iter)}\mathbf{g}^{(0)*}, \mathbf{g}^{(0)} = {}^{(iter)}\mathbf{g}^{(0)*} - \mathbf{g}_{min}^*$$

Usually after some iterations the solution is converged. Also, must be said, that the distribution of the contact pressure is very sensitive to the form of contact surface shape.

The numerical examples demonstrate the efficiency of the solution algorithms.

Acknowledgements. The present research was partially supported by the Hungarian Academy of Sciences, by grant of National Research, and Development and Innovation Office - NKFIH, K115701.

REFERENCE

1. Banichuk, N.V. and Neittaanmaki, P.J.: Structural optimization with uncertainties. Solid Mechanics and Its Applications, 162. Springer Verlag, Berlin (2010).
2. Banichuk, N.V.: Introduction to Optimization of Structures, Springer Verlag, London (2011).
3. Páczelt, I., Baksa, A. and Mróz, Z.: Contact optimization problems for stationary and sliding conditions, Springer International Publishing Switzerland 2016, P. Neittaanmaki et al. (eds.), Mathematical Modelling and Optimization of Complex Structures, Computational Methods in Applied Sciences 40, 281-312, DOI 10.1007/978-3-319-23564-6_16.
4. Páczelt, I.: Iterative methods for solution of contact optimization problems, Arch. Mech., 52, 4-5, 685-711 (2000).
5. Páczelt, I. and Baksa, A.: Examination of contact optimization and wearing problems, Journal of Computational and Applied Mechanics, 3(1), 61-84 (2002).
6. Páczelt, I., Baksa, A. and Szabó, T.: Product design using a contact-optimization technique, technique, Strojnicki Vestnik-Journal of Mechanical Engineering, 53(7-8), 442-461 (2007).
7. Páczelt, I., Mróz, Z. and Baksa A.: Analysis of steady wear processes for periodic sliding, Computational and Applied Mechanics, 10(2), 231-268 (2015).
8. Wriggers, P.: Computational Contact Mechanics, Wiley, New York (2002).
9. Goryacheva, I.G.: Contact Mechanics in Tribology, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1998).
10. Szabó, B. and Babuska, I.: Finite element analysis, Wiley-Interscience, New York (1991).

Information about authors

Author 1: **István Páczelt** professor emeritus; Author 2: **Attila Baksa** associate professor, Institute of Mechanics, University of Miskolc, Hungary

E-mail: paczelt@freemail.hu , Attila.Baksa@uni-miskolc.hu

Piliposyan D.

Abstract. Coupled electro-elastic SH waves propagating in a periodic piezoelectric finite-length superlattice with identical piezoelectric materials in a unit cell are considered in the framework of the full system of Maxwell's electrodynamic equations. In the long wavelength region coupling between electro-magnetic and elastic waves creates frequency band gaps. It is shown that for piezoelectric superlattice at acoustic frequencies, acousto-optic coupling gives rise to polariton behavior at wavelengths much larger than the length of the unit cell. The results of the paper may be useful in the design of narrow band filters or multi-channel piezoelectric filters

1. The interaction of waves with periodic structures, especially artificial superlattices, has recently attracted much attention. A periodic modulation of the dielectric or elastic material properties leads to absolute stop bands and ultimate control of the propagation of waves in the structure. A piezoelectric or piezomagnetic superlattice made of a periodically domain- inverted dielectric crystal with periodically modulated piezoelectric or piezomagnetic coefficients but a homogeneous refractive index can be considered as a one dimensional diatom ionic crystal with positive and negative ions arranged periodically [1]. Coupling between transverse lattice vibrations and electro-magnetic waves in an ionic crystal can lead to phonon polariton coupling with possible stop bands in the infrared region [2]. Analogously, piezoelectric and piezomagnetic periodic structures with the periodicity of the lattice expanded from an atomic scale to microns can exhibit similar coupling and resonant band gap structure in the microwave region [3-5]. This coupling between the electromagnetic wave and the superlattice vibration takes place in the long wavelength region where the superlattice can be considered as a deep subwavelength artificial material. Using the long wavelength approximation it has been shown that the piezoelectric superlattice exhibits a new type of polariton, in which the resonance frequency is determined by the period of the superlattice, and negative effective permittivity occurs near the high frequency side of the resonance [6- 9]. Theoretical and experimental work has suggested that a different type of polariton is also possible in a piezoelectric superlattice that is coupling of electro-magnetic waves with longitudinal superlattice vibrations [10]. While the long-wave approximation only reveals the phonon-photon polariton at high acoustic frequencies in the middle of the Brillouin zone the analytical solution shows that coupling of photons and phonons is possible also at optical frequencies in the whole Brillouin zone [11]. It also reveals a phonon-polariton gap in a piezoelectric phononic crystal with a unit cell made of different constituent materials. The similarities and differences between artificial superlattices and real lattices suggest rich physics in artificial microstructures and give a possibility to control and manipulate both photons and phonons simultaneously [10, 11]. The problem is more interesting in a periodic superlattice with full contact interfaces. The system in this case is described by two coupled electro-acoustic waves and exhibits a very interesting acousto-optic resonance (phonon-polariton) at high acoustic frequencies which cannot be observed in the previous problem. The dynamic setting for Maxwells equation, where both the optical effect and the effect from the rotational part of the electric field are taken into account, makes it possible to investigate this problem as well.

We obtain an analytical expression for the dispersion equation for electro-magneto-elastic coupled SH waves propagating along a finite-length periodic superlattice . The unit cell has length β and occupies a region $-\infty < x < \infty, -\infty < z < \infty$. Each cell is made of two different hexagonal piezoelectric materials: (1) of length a_1 and (2) of length a_2 ($\beta = a_1 + a_2$) with crystallographic axes directed along the Oz direction (Fig.1).

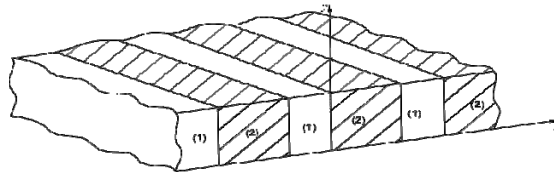


Fig. 1 Periodic Waveguide with a Unit Cell Made of Two Piezoelectric Media.

The interconnected elastic and electro-magnetic excitations are described by the following equations and constitutive relations [8]

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} s_{kl} - e_{kij} E_k, \quad D_i = e_{ijk} s_{jk} + \epsilon_{ij} E_j,$$

where σ_{ik} is the stress tensor, ρ the mass density, u_i the displacement vector field, D_i and E_i are components of the electric displacement and electric field intensity, $\mathbf{B}$ and $\mathbf{H}$ the magnetic field induction and intensity vectors. In constitutive relations (3) c_{ijkl} is the stiffness tensor, e_{ijk} and s_{kl} the piezoelectric and strain tensors and ε_{ij} the dielectric permittivity matrix.

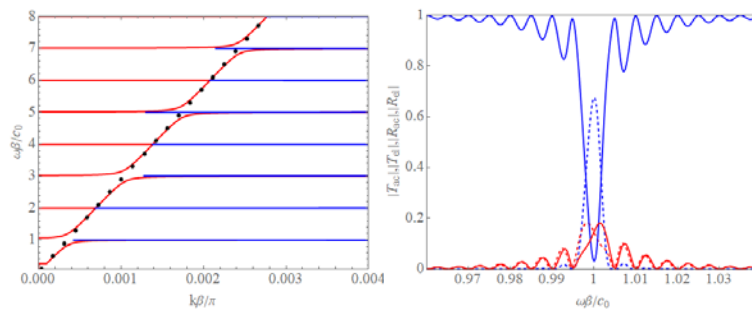


Fig. 2. First panel) Dispersion diagram of an infinite superlattice at acoustic frequencies near the centre of the Brillouin zone. The horizontal lines correspond to the phase velocity of the acoustic wave enhanced by piezoelectricity. The linear oblique dotted line corresponds to the phase velocity of a pure electromagnetic wave. (Second panel) Transmitted acoustic (blue line), electromagnetic (red line), reflected acoustic (blue dashed line) and reflected electromagnetic (red dashed line) energy diagrams, $N=200$

Due to the electromechanical coupling the piezoelectric superlattice exhibits unique reflection/transmission properties even when the unit cell is made of identical piezoelectric materials. When the interfaces in the superlattice are perfectly bonded the two identical elements in the unit cell can be oppositely polarised to make the structure behave as a phononic crystal. This however occurs only at acoustic frequencies since the piezoelectric effect does not affect the band structure at optic frequencies where in this case the structure will act as a homogeneous material. The piezoelectric superlattice structure demonstrates an interesting coupling effect between the electro-magnetic wave and the superlattice vibration. The dispersion equation contains information about this coupling which in the long wavelength region results in phonon-polariton gaps, in which the resonance frequency is determined by the period of the superlattice.

REFERENCE

1. A.K. Vashishth, V. Gupta, V., "Wave propagation in transversely isotropic porous piezoelectric materials", // Int. J. Solids Struct. 46, 2009, pp. 3620–3632.
2. Y.Z. Wang, F.M. Li, K. Kishimoto, Y.S. Wang, and W.H. Huang, "Wave band gaps in three-dimensional periodic piezoelectric structures", Mech. Research Comm. 36, 2009, pp. 461–468.
3. X.Y. Zou, Q. Chen, B. Liang, and J.C. Cheng, "Control of the elastic wave band gaps in two-dimensional piezoelectric periodic structures", Sm. Mat. Struct. 17, 2008, p. 015008.
4. Y. Achaoui, A. Khelif, S. Benchabane, and V. Laude, "Polarisation state and level repulsion in two-dimensional phononic crystals and waveguides in the presence of material anisotropy", //J. of Phys. D: Appl. Phys. 43, 2010, p. 185401.
5. K.B. Ghazaryan, D.G. Piliposyan, "Interfacial effects for shear waves in one dimensional periodic piezoelectric structure", // J. Sound Vib., 330(26), 2012, pp. 6456–6466.
6. A.N. Darinskii, A.L. Shuvalov, O. Poncelet, A.A. Kutsenko, "Bulk longitudinal wave reflection/transmission in periodic piezoelectric structures with metallized interfaces", Ultrasonics, Volume 63, 2015, pp. 118–125.
7. V.I. Alshits, A.L. Shuvalov, "Resonance reflection and transmission of shear elastic waves in multilayered piezoelectric structures", //J. Appl. Phys. 77 (6), 1995, pp. 2659–2665.
8. V.I. Alshits, A.S. Gorkunova, and A.L. Shuvalov, "Phase resonance in the reflection of acoustic waves by a system of piezocrystalline layers separated by cladding layers with screening properties", Zh. Eksp. Teor. Fiz. 110, 1996, pp. 924–937.
9. A.L. Chen, Y.S. Wang, "Study on band gaps of elastic waves propagating in one dimensional disordered phononic crystals", Physica B 392, 2006, pp. 369–378.
10. J. Postnova, R.V. Craster, R.V., "Trapped modes in topographically varying elastic waveguides", Wave Motion 44, 2007, pp. 205–221.
11. D.G. Piliposyan, K.B. Ghazaryan, and G.T. Piliposian, "Shear Bloch waves and coupled phonon-polariton in periodic piezoelectric waveguides", Ultrasonics 54(2), 2014, pp. 644–654.

Information about author:

Davit Piliposyan – researcher, Institute of Mechanics of National Academy of Sciences of Armenia, Tel.: (374 91) 24 11 11. E-mail: piliposyan@mechins.sci.am

HARMONIC WAVES IN A MICROPOLAR CIRCULAR CYLINDER

Radayev Y.N. , Kovalev V.A.

Abstract. The present paper deals with the propagation problem for coupled harmonic waves of translational displacements and microrotations along the axis of a long cylindrical waveguide. Microrotations modeling is carried out within the linear micropolar elasticity frameworks. The coupled system of vector differential equations of micropolar elasticity is presented. The translational displacements and microrotations in the coupled wave are decomposed into potential and vortex parts. The coupled differential equations are then reduced to uncoupled ones. The wave equations solutions for the translational and microrotational waves potentials are obtained for a high-frequency waves in the cylindrical domain.

Modelling thermoelastic behaviour of solids is an actual problem of continuum mechanics [1-5]. Consider the coupled vector differential equations determining the coupled wavefields in a micropolar elastic continuum [6]

$$\begin{cases} (\lambda + 2\mu)\nabla\nabla \cdot u - (\mu + \eta)\nabla \times (\nabla \times u) + 2\eta\nabla \times \phi = \rho u, \\ (\beta + 2\gamma)\nabla\nabla \cdot \phi - (\gamma + \varepsilon)\nabla \times (\nabla \times \phi) + 2\eta\nabla \times u - 4\eta\phi = \mathfrak{I}\ddot{\phi}, \end{cases} \quad (1)$$

where $\lambda, \mu, \gamma, \beta, \varepsilon, \eta$ denote the constitutive constants of micropolar elastic continuum; ∇ is the 3d Hamilton operator (Hamilton nabla); u is the translational displacement vector; ϕ is the microrotation vector; ρ is the mass density; $\mathfrak{I}$ denotes the microelement inertia; dot denotes partial differentiation with respect to time.

Throughout the study we employ notations used in [6] while replacing $\eta \rightarrow \alpha$.

The constitute equations for the force stress tensor σ and the moment stress tensor μ can be presented as follows

$$\sigma = (\mu + \eta)\gamma + (\mu - \eta)\gamma^T + \lambda \text{Itr}\gamma, \quad \mu = (\gamma + \varepsilon)\kappa + (\gamma - \varepsilon)\kappa^T + \beta \text{Itr}\kappa. \quad (2)$$

The equations for the strain tensor γ and the bending-torsion tensor κ are read by

$$\kappa = \nabla \otimes \phi, \quad \gamma = \nabla \otimes u - \phi \cdot \varepsilon, \quad (3)$$

wherein I denotes the 3d unit tensor, ε is the 3d skew-symmetric tensor.

The system (1) is coupled and can be uncoupled as follows. First, introduce the dynamic potentials of translational displacements and microrotations

$$u = \nabla\Phi + \nabla \times \Psi, \quad \phi = \nabla\Sigma + \nabla \times H, \quad (4)$$

where Φ and Σ are the scalar potentials, and Ψ and H are the vector potentials of translational displacements and microrotations respectively.

Second, after substituting (4) in (1) it is seen that the system (1) is satisfied if the scalar and the vector potentials fulfill the calibration conditions

$$\nabla \cdot \Psi = 0, \quad \nabla \cdot H = 0, \quad (5)$$

and are solutions of coupled equations

$$\begin{aligned} \Delta\Phi - \frac{1}{c_P^2}\ddot{\Phi} = 0, \quad \Delta\Sigma - \frac{1}{\mu c_P^2}\ddot{\Sigma} - \frac{\Omega^2}{\mu c_P^2}\Sigma = 0, \\ \Delta\Psi - \frac{1}{c_\perp^2}\ddot{\Psi} + 2d_\perp^2\nabla \times H = 0, \quad \Delta H - \frac{1}{\mu c_\perp^2}\ddot{H} - \frac{\Omega^2}{\mu c_\perp^2}H + \frac{\Omega^2}{2\mu c_\perp^2}\nabla \times \Psi = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

where the following notations are used

$$\begin{aligned} \Omega^2 = 4\eta\mathfrak{I}^{-1}, \quad \rho c_P^2 = \lambda + 2\mu, \quad \mathfrak{I}\mu c_P^2 = \beta + 2\gamma, \quad \mathfrak{I}\mu c_\perp^2 = \mu + \eta, \\ \rho c_\perp^2 = \mu + \eta, \quad \rho c_\perp^2 = \eta, \quad c_\perp^2 d_\perp^2 = c_\perp^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Third, in present study only coupled high-frequency waves of thranslational displacements and microrotaions are considered ($\omega > \Omega$). In this case the following differential equations for the potentials can be obtained

$$(\Delta + \alpha_P^2)\Phi = 0, \quad (\Delta + \beta_P^2)\Sigma = 0, (\Delta + \alpha_\perp^2)\Psi + 2d_\perp^2\nabla \times H = 0, \quad (\Delta + \beta_\perp^2)H + \frac{\Omega^2}{2\mu c_\perp^2}\nabla \times \Psi = 0. \quad (8)$$

wherein the following notations have been introduced

$$\alpha_P^2 = \omega^2/c_P^2, \quad \beta_P^2 = (\omega^2 - \Omega^2)/\mu c_P^2, \quad \alpha_\perp^2 = \omega^2/c_\perp^2, \quad \beta_\perp^2 = (\omega^2 - \Omega^2)/\mu c_\perp^2. \quad (9)$$

The equations (8) for vortex potentials Ψ and H are still coupled. Uncoupled equations for vector potentials can be derived by the increasing differentiation order.

At last, for potentials Ψ and H the separate equations can be furnished by

$$(\Delta + K_1^2)(\Delta + K_2^2)\Psi = 0, \quad (\Delta + K_1^2)(\Delta + K_2^2)H = 0, \quad \sigma_\perp^2 = d_\perp^2 \Omega^2 / \mu c_\perp^2. \quad (10)$$

$$K_{1,2}^2 = -\Delta_{1,2}, \quad 2\Delta_{1,2} = -(\alpha_\perp^2 + \beta_\perp^2 + \sigma_\perp^2) \pm \sqrt{(\alpha_\perp^2 - \beta_\perp^2 + \sigma_\perp^2)^2 + 4\beta_\perp^2 \sigma_\perp^2},$$

The coupled wavefields in a cylindrical domain are found in the cylindrical coordinates r, φ, z by separation of variables (see in details [1]). Thus, for the scalar potentials one can obtain

$$\Phi = C_1 I_n(p_1 r) \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \quad \Sigma = -C_2 I_n(p_2 r) \begin{Bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \quad (11)$$

wherein k denotes the wave number; C_1 and C_2 are arbitrary constants; $I_n(\cdot)$ is the Bessel function of the first kind of an imaginary argument; $p_1^2 = k^2 - \alpha_p^2$, $p_2^2 = k^2 - \beta_p^2$.

The vortex potentials of translational displacements and microrotations are given by the following formulas

$$\begin{cases} \Psi_r = [C'_3 I_{n-1}(q_1 r) + C'_4 I_{n+1}(q_1 r) + C'_3 I_{n-1}(q_2 r) + C'_4 I_{n+1}(q_2 r)] \begin{Bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \\ \Psi_\varphi = [C'_3 I_{n-1}(q_1 r) - C'_4 I_{n+1}(q_1 r) + C'_3 I_{n-1}(q_2 r) - C'_4 I_{n+1}(q_2 r)] \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \\ \Psi_z = [C'_5 I_n(q_1 r) + C'_5 I_n(q_2 r)] \begin{Bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}; \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} H_r = [L'_3 I_{n-1}(q_1 r) + L'_4 I_{n+1}(q_1 r) + L'_3 I_{n-1}(q_2 r) + L'_4 I_{n+1}(q_2 r)] \begin{Bmatrix} -\cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \\ H_\varphi = [L'_3 I_{n-1}(q_1 r) - L'_4 I_{n+1}(q_1 r) + L'_3 I_{n-1}(q_2 r) - L'_4 I_{n+1}(q_2 r)] \begin{Bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \\ H_z = [L'_5 I_n(q_1 r) + L'_5 I_n(q_2 r)] \begin{Bmatrix} -\cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \end{cases} \quad (13)$$

wherein $C'_3 - C'_5$, $C''_3 - C''_5$, $L'_3 - L'_5$ and $L''_3 - L''_5$ are arbitrary constants and $q_1^2 = k^2 - K_1^2$, $q_2^2 = k^2 - K_2^2$.

REFERENCES

1. Kovalev V.A., Radayev Yu.N. Wave Problems of the Field Theory and Thermomechanics. Saratov, Saratov University Press, (2010) (In Russian)
2. Murashkin E.V., Radayev Y.N. On a classification of weak discontinuities in micropolar thermoelasticity // Materials Physics and Mechanics. Vol. 23. 2015.
3. Murashkin E.V., Radaev Yu.N. Metamaterial models of continuum multiphysics, In: Mechanics 2016. Proceedings of International School-Conference of Young Scientist. Erevan, National University of Architecture and Construction of Armenia, 2016.
4. Kovalev V.A., Murashkin E.V., Radayev Yu.N. On a Physical Field Theory of Micropolar Thermoelasticity, Journal of Physics: Conference Series, Vol.788, No. 1. 2017.
5. Murashkin E.V., Radaev Yu.N. On Thermodynamics of Wave Processes of Heat Transport, In: Mechanics for Materials and Technologies. Volume 46 of the series Advanced Structured Materials. Cham, Springer, 2017.
6. Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Pergamon Press, Oxford. (1986)

Information about authors

Yuri N. Radayev – Prof., D.Sc., Department for Modeling in Solid Mechanics, Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

E-mail radayev@ipmnet.ru

Vladimir A. Kovalev – Prof., D.Sc., Moscow City Government University of Management, Moscow, Russia

E-mail vlad_koval@mail.ru

OPTIMAL STABILIZATION OF ROTATIONAL MOTION OF A RIGID BODY AROUND ITS CENTER OF GRAVITY

Rezaei Masoud

The present work considers the optimal stabilization problem in rotational motion of a rigid body around its center of gravity. The case of the Euler rotational motion of a rigid body around a fixed point is considered. The optimal stabilization problem of the considered motion is assumed and solved. Input controls are introduced in the direction of the generalized coordinates, full controllability of linear approximation of the system is checked. Besides the optimal stabilization problem of the system on classical sense is solved, optimal Lyapunov function, optimal controls and optimal value of functional are obtained. Finally, the graphs of optimal perturbed motion have been plotted.

Consider a rigid body moving around its center of gravity, the center of gravity makes a free movement in the space $oxyz$. Differential equations of body motion will be [1]

$$\begin{cases} \ddot{x}_c = 0, \quad \ddot{y}_c = 0, \quad \ddot{z}_c = 0, \quad A \frac{dp}{dt} + (C - B)qr = 0, \quad B \frac{dq}{dt} + (A - C)pr = 0, \\ C \frac{dr}{dt} + (B - A)qp = 0, \quad \frac{d\gamma_1}{dt} = r\gamma_2 - q\gamma_3, \quad \frac{d\gamma_2}{dt} = p\gamma_3 - r\gamma_1, \quad \frac{d\gamma_3}{dt} = q\gamma_1 - p\gamma_2. \end{cases} \quad (1)$$

Where x_c, y_c, z_c – the coordinates of the center of gravity, A, B, C – the principal moments of inertia, p, q, r – the angular velocity about x, y, z axes, respectively, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ – the direction cosines. So, the case of the Euler rotational motion of a rigid body around a fixed point is considered [1]. It is assumed that the main vector of forces passes through a fixed point, which in this case is the center of mass of the body.

Consider the body motion as follows:

$$p = q = 0, \quad r = \omega, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 1, \quad x = y = z = 0, \quad \dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0. \quad (2)$$

For simplicity, assume that $A > B > C$.

We form the differential equations of the perturbed motion (1) to a first approximation:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = 0, \quad \dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = 0, \quad \dot{x}_5 = x_6, \quad \dot{x}_6 = 0, \quad \dot{x}_7 = \frac{B-C}{A}\omega x_8, \\ \dot{x}_8 = \frac{C-A}{B}\omega x_7, \quad \dot{x}_9 = 0, \quad \dot{x}_{10} = -x_8 + \omega x_{11}, \quad \dot{x}_{11} = x_7 - \omega x_{10}, \quad \dot{x}_{12} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Here

$$\begin{cases} x_1 = x_c, \quad x_2 = \dot{x}_c, \quad x_3 = y_c, \quad x_4 = \dot{y}_c, \quad x_5 = z_c, \quad x_6 = \dot{z}_c, \\ p = x_7, \quad q = x_8, \quad r = x_9, \quad \gamma_1 = x_{10}, \quad \gamma_2 = x_{11}, \quad \gamma_3 = x_{12}. \end{cases} \quad (4)$$

Let's consider the input controls $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4, \bar{u}_5, \bar{u}_6$ and $\bar{u}_7$ in the $x_2, x_4, x_6, x_7, x_9, x_{10}$ and x_{12} generalized coordinate directions, respectively

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = \bar{u}_1, \quad \dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = \bar{u}_2, \quad \dot{x}_5 = x_6, \quad \dot{x}_6 = \bar{u}_3, \quad \dot{x}_7 = \frac{B-C}{A}\omega x_8 + \bar{u}_4, \\ \dot{x}_8 = \frac{C-A}{B}\omega x_7, \quad \dot{x}_9 = \bar{u}_5, \quad \dot{x}_{10} = -x_8 + \omega x_{11} + \bar{u}_6, \quad \dot{x}_{11} = x_7 - \omega x_{10}, \quad \dot{x}_{12} = \bar{u}_7. \end{cases} \quad (5)$$

Let's have the following notations:

$$\begin{cases} y_1 = \frac{\omega^2}{g} x_1, \quad y_2 = \frac{\omega}{g} x_2, \quad y_3 = \frac{\omega^2}{g} x_3, \quad y_4 = \frac{\omega}{g} x_4, \quad y_5 = \frac{\omega^2}{g} x_5, \quad y_6 = \frac{\omega}{g} x_6, \\ y_7 = \frac{1}{\omega} x_7, \quad y_8 = \frac{1}{\omega} x_8, \quad y_9 = \frac{1}{\omega} x_9, \quad y_{10} = x_{10}, \quad y_{11} = x_{11}, \quad y_{12} = x_{12}, \quad t' = \omega t. \end{cases} \quad (6)$$

We can write the system of differential equations (5) in the dimensionless form

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, & \dot{y}_2 = u_1, & \dot{y}_3 = y_4, & \dot{y}_4 = u_2, & \dot{y}_5 = y_6, & \dot{y}_6 = u_3, & \dot{y}_7 = \frac{B-C}{A} y_8 + u_4, \\ \dot{y}_8 = \frac{C-A}{B} y_7, & \dot{y}_9 = u_5, & \dot{y}_{10} = -y_8 + y_{11} + u_6, & \dot{y}_{11} = y_7 - y_{10}, & \dot{y}_{12} = u_7. \end{cases} \quad (7)$$

Here

$$\dot{y}_i = \frac{dy_i}{dt}; \quad i=1,\dots,12, \quad u_1 = \frac{\bar{u}_1}{g}, \quad u_2 = \frac{\bar{u}_2}{g}, \quad u_3 = \frac{\bar{u}_3}{g}, \quad u_4 = \frac{\bar{u}_4}{\omega^2}, \quad u_5 = \frac{\bar{u}_5}{\omega^2}, \quad u_6 = \frac{\bar{u}_6}{\omega}, \quad u_7 = \frac{\bar{u}_7}{\omega}.$$

It is shown that the system of differential equations (7) is full controllable [2].

Lets solve the problem of optimal stabilization of the system (7) for minimizing the performance index

$$J[u] = \int_0^\infty \left(\sum_{i=1}^{12} y_i^2 + \sum_{k=1}^7 u_k^2 \right) dt. \quad (8)$$

For solving the problem of optimal stabilization of the system (7) we use the Lyapunov-Bellman-Krasovski method [3, 4]. For Lyapunov function will be searched in the form of $V = \sum_{i,j=1}^{12} V_{ij}$, where

c_{ij} – constants.

For optimal controls we obtain

$$\begin{aligned} u_1^0 &= -\frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial y_2}; & u_2^0 &= -\frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial y_4}; & u_3^0 &= -\frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial y_6}; & u_4^0 &= -\frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial y_7}; \\ u_5^0 &= -\frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial y_9}; & u_6^0 &= -\frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial y_{10}}; & u_7^0 &= -\frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial y_{12}}. \end{aligned}$$

Since $A > B > C$ we can denote $B = k.A$; $C = f.k.A$, where $f, k \in (0,1)$.

In order to obtain the solutions for constants c_{ij} we solve the system of algebraic equations for various values of A, B, C and compose a table (for example $f, k = 0.05, 0.10, 0.15, 0.20, \dots, 0.95$) then we plot the graphs of mentioned constants vs. $f \left(f = \frac{C}{k.A} \right)$, for any values of k .

Finally the optimal Lyapunov function, optimal controls and optimal value of functional are obtained, the graphs of optimal perturbed motion have been plotted. It is obvious that, all functions $y_i(t)$ ($i=1,\dots,12$) tend to zero when t tends to infinity.

REFERENCES

1. **Bukhgolts N.N.** Basic Course of Theoretical Mechanics, M.: Nauka, Part 2, 1972. p.332.
2. **Kalman R.E.** On the general theory of control systems, Proceedings of the 1st Congress of the IFAC, Moscow: Publishing House of the USSR Academy of Sciences, Volume 2, 1961, p. 521-546.
3. **Krasovsky N.N.** Stabilization Problems of Controlled Motions, In the I.G. Malkin's book Theory Motion Stability, Add. 4. M.: Nauka, 1966, pp. 475-517.
4. **Al'brecht E.G.** Shelementiev G.S., Lectures on Stabilization Theory, Sverdlovsk, 1972, p. 274.

Information about authors

Rezaei Masoud – post graduate student, Yerevan State University, Faculty of Mathematics and Mechanics

E-mail masoud.rezaei@hepcor.com

THE FRACTIONAL DERIVATIVE MODEL OF VISCOELASTICITY CONSIDERING BULK RELAXATION

Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V.

Abstract. In the given paper, we present a fractional derivative model of viscoelasticity with time-dependent Poisson's operator and bulk relaxation operator.

In the state-of-the-art papers [1,2] it has been emphasized that in the majority of articles utilizing the fractional calculus models the second, or bulk, viscosity is not taken into account, in spite the fact that there are numerous evidence of its existence in scientific literature [3-5]. It is more important for modern composite materials [4].

One of the first papers in the field was published by Meshkov and Pachevskaya [3], wherein the attempt for considering the influence of the bulk relaxation on the internal friction phenomenon was carried out on the example of longitudinal harmonic vibrations of a three-dimensional hereditary elastic rod under the conditions of homogeneous deformation. A fractional exponential function has been used as a hereditary kernel. Investigation of the frequency dependence of the tangent of the phase shift between the stress and deformation, i.e., mechanical loss tangent, has revealed two peaks, namely, shear and bulk, in so doing the peak due to the shear deformation is five times larger than that resulting from the bulk deformation.

In order to construct a fractional derivative model considering bulk relaxation, assume that shear $\tilde{\mu}$ and bulk $\tilde{K}$ operators are given in the form

$$\tilde{\mu} = \mu_{\infty} \left[1 - \nu_{\varepsilon 1} \mathfrak{D}_{\gamma}^* \left(\tau_{\varepsilon 1}^{\gamma} \right) \right], \quad (1)$$

$$\tilde{K} = K_{\infty} \left[1 - \nu_{\varepsilon 2} \mathfrak{D}_{\gamma}^* \left(\tau_{\varepsilon 2}^{\gamma} \right) \right], \quad (2)$$

where $\nu_{\varepsilon 1} = 1 - \mu_0 \mu_{\infty}^{-1} = 1 - \tau_{\varepsilon 1}^{\gamma} \tau_{\sigma 1}^{-\gamma}$, $\nu_{\varepsilon 2} = 1 - K_0 K_{\infty}^{-1} = 1 - \tau_{\varepsilon 2}^{\gamma} \tau_{\sigma 2}^{-\gamma}$, μ_0 and μ_{∞} , K_0 and K_{∞} are relaxed and nonrelaxed shear and bulk moduli, respectively, $\tau_{\varepsilon 1}$ and $\tau_{\sigma 1}$, $\tau_{\varepsilon 2}$ and $\tau_{\sigma 2}$ are relaxation and retardation times, the subscript 1 relates to shear relaxation and the subscript 2 to bulk relaxation.

In formulas (1) and (2) $\mathfrak{D}_{\gamma}^* \left(\tau_{\varepsilon i}^{\gamma} \right)$ ($i=1,2$) is the dimensionless Rabotnov fractional operator [2,5]

$$\mathfrak{D}_{\gamma}^* \left(\tau_{\varepsilon i}^{\gamma} \right) = \frac{1}{1 + \tau_{\varepsilon i}^{\gamma} D^{\gamma}}, \quad (3)$$

where D^{γ} is the Riemann-Liouville fractional derivative

$$D^{\gamma} x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{x(s) ds}{(t-s)^{\gamma}} \quad (4)$$

and $\Gamma(1-\gamma)$ is the gamma-function, $x(t)$ is an arbitrary function.

Now we could define the time-dependent Poisson's operator as

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{2} \frac{3\tilde{K} - 2\tilde{\mu}}{3\tilde{K} + \tilde{\mu}}. \quad (5)$$

To calculate the operator $\tilde{\nu}$, we will proceed from the operator

$$3\tilde{K} + \tilde{\mu} = (3K_{\infty} + \mu_{\infty}) \left[1 - m_1 \mathfrak{D}_{\gamma}^* \left(\tau_{\varepsilon 1}^{\gamma} \right) - m_2 \mathfrak{D}_{\gamma}^* \left(\tau_{\varepsilon 2}^{\gamma} \right) \right], \quad (6)$$

where $m_1 = \frac{1}{3}(1 - 2\nu_{\infty})\nu_{\varepsilon 1}$, and $m_2 = \frac{2}{3}(1 + \nu_{\infty})\nu_{\varepsilon 2}$.

The operator inverse to operator (6) has the form

$$(3\tilde{K} + \tilde{\mu})^{-1} = \frac{1}{3K_{\infty} + \mu_{\infty}} \left[1 + n_1 \mathfrak{D}_{\gamma}^* (t_{\sigma 1}^{\gamma}) + n_2 \mathfrak{D}_{\gamma}^* (t_{\sigma 2}^{\gamma}) \right], \quad (7)$$

where the values $t_{\sigma 1}^{\gamma}$ and $t_{\sigma 2}^{\gamma}$ are defined from the quadratic equation

$$(1 - m_1 - m_2)x^2 - \left[\tau_{\varepsilon 1}^{\gamma}(1 - m_2) + \tau_{\varepsilon 2}^{\gamma}(1 - m_1) \right]x + \tau_{\varepsilon 1}^{\gamma}\tau_{\varepsilon 2}^{\gamma} = 0, \quad (8)$$

while the values n_1 and n_2 are determined from the set of two equations with due account for the magnitudes of $t_{\sigma 1}^{\gamma}$ and $t_{\sigma 2}^{\gamma}$ found from Eq. (8)

$$\begin{cases} \frac{\tau_{\varepsilon 1}^{\gamma}}{\tau_{\varepsilon 1}^{\gamma} - t_{\sigma 1}^{\gamma}} n_1 + \frac{\tau_{\varepsilon 1}^{\gamma}}{\tau_{\varepsilon 1}^{\gamma} - t_{\sigma 2}^{\gamma}} n_2 = -1, \\ \frac{\tau_{\varepsilon 2}^{\gamma}}{\tau_{\varepsilon 2}^{\gamma} - t_{\sigma 1}^{\gamma}} n_1 + \frac{\tau_{\varepsilon 2}^{\gamma}}{\tau_{\varepsilon 2}^{\gamma} - t_{\sigma 2}^{\gamma}} n_2 = -1. \end{cases} \quad (9)$$

Then utilizing the algebra of dimensionless Rabotnov fractional operators [2,5], from (5) we find

$$\tilde{\nu} = \nu_{\infty} \left[1 - s_1 \mathfrak{D}_{\gamma}^* (\tau_{\varepsilon 1}^{\gamma}) + s_2 \mathfrak{D}_{\gamma}^* (\tau_{\varepsilon 2}^{\gamma}) \right] \left[1 + n_1 \mathfrak{D}_{\gamma}^* (t_{\sigma 1}^{\gamma}) + n_2 \mathfrak{D}_{\gamma}^* (t_{\sigma 2}^{\gamma}) \right], \quad (10)$$

where

$$s_1 = \frac{3K_{\infty}\nu_{\varepsilon 2}}{3K_{\infty} - 2\mu_{\infty}}, \quad s_2 = \frac{2\mu_{\infty}\nu_{\varepsilon 1}}{3K_{\infty} - 2\mu_{\infty}}.$$

Acknowledgements. This research has been supported by the Russian Foundation for Basic Research Project No. 17-01-00490.

REFERENCE

1. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. Application of fractional calculus for dynamic problems of solid mechanics: Novel trends and recent results. Applied Mechanics Reviews, vol. 63(1), Paper ID 010801, 2010.
2. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. Two approaches for studying the impact response of viscoelastic engineering systems: An overview. Computes and Mathematics with Applications, vol. 66, pp. 755-773, 2013.
3. Meshkov S.I., Pachevskaja G.N. Allowance for bulk relaxation by the method of internal friction. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, vol. 8(2), pp. 47-48, 1967.
4. Selivanov M.F. Effective properties of a linear viscoelastic composite. International Applied Mechanics, vol. 45, pp. 1084-1091, 2009.
5. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. Features of fractional operators involving fractional derivatives and their applications to the problems of mechanics of solids, In: Fractional Calculus, Applications (R.A. Zeid Daou and X. Moreau, Eds), N.Y.: Nova Publishes, 2015. pp. 165-226.

Information about authors

Rossikhin Yu.A. – Distinguished Researcher of the Russian Federation, Voronezh State Technical University, Research Center on Dynamics of Solids and Structures +7-4732-714220,
E-mail yar@vgasu.vrn.ru

Shitikova M.V. – Professor, Voronezh State Technical University, Research Center on Dynamics of Solids and Structures +7-4732-714220,
E-mail mvs@vgasu.vrn.ru

**MIXED BOUNDARY PROBLEM FOR ORTHOTROPIC STRIP-RECTANGLE WITH
VARIABLE COEFFICIENTS OF ELASTICITY
Sargsyan M.Z., Poghosyan H.M.**

Annotation. The solution of the dynamic problem for strip-rectangle having a variable coefficients of elasticity is obtained by the asymptotic method. It is considered that the strip is orthotropic, elasticity coefficients are exponential functions from (y) and the mixed boundary conditions are given. The inner problem solution is found with Bessel functions.

1. Main equations and problem definition.

In case of orthotropic strip-rectangle, it is required to find the solution of plane problems of elasticity in the area $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \ell, -h \leq y \leq h, h \ll \ell\}$ [1] under the conditions:

$$u_x(y = -h) = 0, \quad u_y(y = -h) = 0 \quad (1.1)$$

and

$$\sigma_{yy}(y = h) = P(\xi) \exp(i\Omega t), \quad \xi = x/l, \quad (1.2)$$

$$\sigma_{xy}(y = h) = 0,$$

$P(\xi)$ is given function, Ω is the frequency of the forcing effect.

It is required to find solutions of dynamic equations of elasticity theory of an orthotropic body:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (1.3)$$

and correlations of elasticity

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a_{11}(y) \sigma_{xx} + a_{12}(y) \sigma_{yy}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = a_{12}(y) \sigma_{xx} + a_{22}(y) \sigma_{yy}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = a_{66}(y) \sigma_{xy} \quad (1.4)$$

where [2]

$$a_{11}(y) = \frac{1}{E_x}, \quad a_{12}(y) = -\frac{v_{xy}}{E_y}, \quad a_{22}(y) = \frac{1}{E_y}, \quad a_{66}(y) = \frac{1}{G e^{-my}}, \quad E_x = E_y = E e^{-my}, \quad v_{xy} = v_{yx} \approx v, \\ a_{11} = a_{22} = \frac{1}{E}, \quad a_{12} = -\frac{v}{E}, \quad a_{66} = \frac{1}{G}$$

2. Solution of problem. Final equations to determine the functions $U^{(s)}, V^{(s)}, W^{(s)}$ [1,3] are

$$\frac{\partial^2 U^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{66} e^{n\zeta} \Omega_*^2 U^{(s)} = R_u^{(s)}, \quad R_u^{(s)} = -\left(a_{66} e^{n\zeta} \frac{\partial \sigma_{11}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 V^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} \right), \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial^2 V^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \frac{\Delta}{a_{11}} e^{n\zeta} \Omega_*^2 V^{(s)} = R_v^{(s)}, \quad R_v^{(s)} = \frac{a_{12}}{a_{11}} \frac{\partial^2 U^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} - \frac{e^{n\zeta} \Delta}{a_{11}} \frac{\partial \sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial \xi}, \quad n = mh$$

The general solution of the system (2.1) is

$$U^{(s)} = J_0(g(\zeta)) C_1(\xi) + 2Y_0(g(\zeta)) C_2(\xi) + U_*^{(s)}, \\ V^{(s)} = J_0(f(\zeta)) C_3(\xi) + 2Y_0(f(\zeta)) C_4(\xi) + V_*^{(s)} \quad (2.2)$$

Satisfying the boundary conditions (1.1), (1.2) we get the coefficients C_1, C_2, C_3, C_4 and the final solution when $P(\xi) = P = \text{const}$ (iteration process breaks off at $s = 0$) is

$$u = 0, \quad \sigma_{xy} = 0,$$

$$\begin{aligned}
v &= \frac{lPf(1)(J_0(f(\zeta))Y_0(f(-1)) - J_0(f(-1))Y_0(f(\zeta)))}{2\Omega_*^2(J_1(f(1))Y_0(f(-1)) + J_0(f(-1))Y_1(f(1)))} \exp(i\Omega t), \\
\sigma_{xx} &= P \frac{la_{12}f(1)(J_1(f(\zeta))Y_0(f(-1)) - J_0(f(-1))Y_1(f(\zeta)))}{ha_{11}nf(\zeta)(J_1(f(1))Y_0(f(-1)) + J_0(f(-1))Y_1(f(1)))} \exp(i\Omega t), \\
\sigma_{yy} &= P \frac{l f(1)(J_1(f(\zeta))Y_0(f(-1)) - J_0(f(-1))Y_1(f(\zeta)))}{h n f(\zeta)(J_1(f(1))Y_0(f(-1)) + J_0(f(-1))Y_1(f(1)))} \exp(i\Omega t)
\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\text{where } f(\zeta) = \frac{2\Omega_*}{n} \sqrt{\frac{\Delta}{a_{11}}} e^{n\zeta}, \quad g(\zeta) = \frac{2\Omega_*}{n} \sqrt{a_{66}} e^{n\zeta}$$

REFERENCE

1. Aghalovyan L.A. Asymptotic Theory of Anisotropic Plates and Shells. Singapore-London. World Scientific Publishing. 2015. 375p.
2. Aghalovyan L.A. On the structure of solution of one class of plane problems of elasticity theory of anisotropic body// Mechanics: Interuniversity transactions: Yerevan University Publishing House. 1982. edit.2. pp 7-12.
3. Aghalovyan L.A., Aghalovyan M.L. On Asymptotic Theory of Beams, Plates and Shells. // Journal of Curved Layered Structures, Vol. 3, Issue 1 (Jan. 2016), pp.74-81.

Information about authors:

Sargsyan Mesrop – researcher, Institute of Mechanics NAS RA (374 55) 049950

E-mail: messarg@gmail.com

Poghosyan Hayk – researcher, Institute of Mechanics NAS RA (374 91) 290209

E-mail: haikp@mail.ru

THE BOUNDARY VALUE CONTACT PROBLEM OF ELECTROELASTICITY FOR PIECEWISE-HOMOGENEOUS PIEZO-ELECTRIC PLATE WITH ELASTIC INCLUSION AND CUT

Shavlakadze Nugzar

Abstract. A contact problem of the theory of electroelasticity for piecewise-homogeneous plate of piezo-electric material with infinite cut and elastic infinite or finite inclusion is considered. By using methods of the theory of analytic function, the problem is reduced to the system of singular integro-differential equation with fixed singularity. Using an integral transformation a Karleman type problem or a Riemann problem is obtained, the solution of which is presented in explicit form.

We will consider a piecewise-homogeneous plate of piezo-electric material, weakened with infinite crack and reinforced with a infinite inclusion (beam) as an electrode by a normal force of intensity $p_0(x)$. The normal stresses $q_0(x)$ and the electric potential are given at the edges of the crack.

The problem consists of determining the expansion of cut $f(x)$ and the jump $p(x)$ of normal contact stresses along the contact line, of establishing their behavior in the neighborhood of singular points.

In conditions of plane deformation, in infinity, on plate acts the homogeneous fields of mechanical and electrical stresses: $\sigma_{11}^\infty, \sigma_{33}^\infty, \tau_{13}^\infty, E_1^\infty = E_3^\infty = 0$, on boundary of inclusion electrical field's potential $\varphi_1^+ = \varphi_1^- = 0$ and on the boundary of crack are given $\sigma_y^{(2)+}(x) = \sigma_y^{(2)-}(x) = q_0(x)$, $\tau_{xy}^{(2)+}(x) = \tau_{xy}^{(2)-}(x) = 0$, $\varphi_2^+ = \varphi_2^- = \varphi_2(x)$.

According to the equilibrium equation of inclusions elements we have

$$\frac{d^2}{dx^2} D(x) \frac{d^2 v^{(1)}(x)}{dx^2} = p_0(x) - p(x), \quad x > 0 \quad (1)$$

and the equilibrium equation of the inclusion has the form

$$\int_0^\infty [p(t) - p_0(t)] dt = 0, \quad \int_0^\infty t [p(t) - p_0(t)] dt = 0, \quad (2)$$

where $v^{(1)}(x)$ is the vertical displacement of inclusion points; $p(x)$ is the jumps of normal contact stresses, subjects to determination. $D(x)$ is bending rigidity of the inclusions material.

On the boundary of crack we have

$$\sigma_y^{(2)+}(x) + \sigma_y^{(2)-}(x) = 2q_0(x), \quad x < 0 \quad (3)$$

On the interface of two material the following conditions are valid

$$\sigma_x^{(1)} = \sigma_x^{(2)}, \quad \tau_{xy}^{(1)} = \tau_{xy}^{(2)}, \quad u^{(1)} = u^{(2)}, \quad v^{(1)} = v^{(2)}, \quad E_y^{(1)} = E_y^{(2)}, \quad D_x^{(1)} = D_x^{(2)} \quad (4)$$

where $\sigma_x^{(j)}, \tau_{xy}^{(j)}$ stress components, $u^{(j)}, v^{(j)}$ displacements components, $E_y^{(j)}, D_x^{(j)}$ components of vectors of electrical stress and of electrical inductive ($j = 1, 2$).

General solutions of corresponding differential equations [1] for stress function $\varphi_1^{(j)}$ and electrical field's potential $\varphi_2^{(j)}$, stress components, displacements, vectors of electrical stress and of electrical inductive are represented using three analytical functions $\Phi_k^{(j)}(z_k^{(j)})$, $k = 1, 2, 3$; $j = 1, 2$.

From the boundary value conditions on the boundary of inclusion and crack for this functions we obtain the problems of linear conjugation, which solutions are represented in the form [2]

$$\begin{aligned} \Phi_k^{(1)}(z_k^{(1)}) &= \frac{\Delta_{2k}^{(1)}}{4\pi i \Delta_0^{(1)}} \int_0^1 \frac{p(t) dt}{t - z_k^{(1)}} + W_k^{(1)}(z_k^{(1)}) \equiv \Psi_k^{(1)}(z_k^{(1)}) + W_k^{(1)}(z_k^{(1)}), \quad z_k^{(1)} \in S_k^{(1)} \\ \Phi_k^{(2)}(z_k^{(2)}) &= \frac{\Delta_{3k}^{(2)}}{2\pi \Delta_0^{(2)}} \int_{-\infty}^0 \frac{f(t) dt}{t - z_k^{(2)}} + W_k^{(2)}(z_k^{(2)}) \equiv \Psi_k^{(2)}(z_k^{(2)}) + W_k^{(2)}(z_k^{(2)}), \quad z_k^{(2)} \in S_k^{(2)} \end{aligned} \quad (5)$$

where $W_k^{(j)}(z_k^{(j)})$ are analytic functions in the half-plates $S_k^{(j)}$, ($k = 1, 2, 3$; $j = 1, 2$), which are determined from the boundary condition (4) on the interface of two materials.

On the bases of the conditions (1-3) and formulas (5), introducing the notation $\psi(t) = f(-t)$, we have the system of integral equations

$$\frac{d}{dx} \left(\int_0^\infty \left[\frac{\lambda_1}{t-x} + R_1(t, x) \right] p(t) dt + \int_0^\infty R_2(-t, x) \psi(t) dt \right) = \frac{1}{D(x)} \int_0^x dt \int_0^t [p_0(\tau) - p(\tau)] d\tau, \quad x > 0 \quad (6)$$

$$\int_0^\infty \left[-\frac{\lambda_3}{t-x} + R_4(-t, -x) \right] \psi(t) dt + \int_0^\infty R_3(t, -x) p(t) dt = q_0(-x), \quad x > 0 \quad (7)$$

where

$$R_1(t, x) = \frac{\lambda_2}{t+x} + \sum_{m \neq n=1}^3 \frac{\omega_{mn}}{\beta_m^{(1)} t + \beta_n^{(1)} x}, \quad R_2(t, x) = \sum_{m \neq n=1}^3 \frac{\alpha_{mn}}{\beta_m^{(1)} t - \beta_n^{(2)} x}$$

$$R_3(t, x) = \sum_{m \neq n=1}^3 \frac{r_{mn}}{\beta_m^{(2)} t - \beta_n^{(1)} x}, \quad R_4(t, x) = \frac{\lambda_4}{t+x} + \sum_{m \neq n=1}^3 \frac{q_{mn}}{\beta_m^{(2)} t + \beta_n^{(2)} x}$$

For solving of system (6)–(7), when $D(x) = D = \text{const}$, $x > 0$, making the substituting

$t = e^\zeta$, $x = e^\xi$ and notation $\varphi(x) = \int_0^x dt \int_0^t [p_0(\tau) - p(\tau)] d\tau$, using generalized Fourier transform [3]

for the function $F(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \varphi(e^\zeta) e^{i\zeta s} d\zeta$, is received the boundary condition of Karleman type

problem for strip

$$G(s)F(s+3i) - F(s) = P(s), \quad -\infty < s < \infty \quad (8)$$

and for the function $\Phi(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \psi(e^\zeta) e^{i\zeta s} d\zeta$, we have the relation

$$\Phi(s+i) = [P_2(z) - G_3(z)F(z+3i)]/G_4(z),$$

where $G(z), G_3(z), G_4(z), P(z), P_3(z)$ are the given functions.

Therefore, we consider the problem: find function $F(z)$, which is holomorphic in strip $0 < \text{Im } z < 3$, vanishing in infinity, continuously extendable on the border of the strip and satisfying condition (8).

Using the method of factorization the solution of this problem is represented in an explicit form [4].

The function $F(z)$ is holomorphic in strip $0 < \text{Im } z < 3$, except one point $z = 3i/2$, in which it has a pole of first order. Applying the inverse integral transformation for normal contact stresses is obtained the following estimate: $p_0(x) - p(x) = \varphi''(x) = O(x^{-1/2})$, $x \rightarrow 0+$

The crack opening behavior has the form $f(x) = O(x^{-1/2+\omega})$, $x \rightarrow 0-$, $0 < \omega < 1/2$.

REFERENCE

1. Parton V.Z., Kudriavtsev B.A. Electromagneto-elasticity of piezo-electric and electro-conductive bodies. Moscow: Nauka, 1988, p.470.
2. Muskhelishvili N. Singular integral equations. Moscow: Nauka, 1966, p.591.
3. Gakhov F.D., Cherskii Yu.I. Convolution Type Equation. Moscow: Nauka, 1978, p.296.
4. Bantsuri R. The boundary problems of the theory of analytic functions.// Soobsh. Acad. Nauk. GSSR. 1974. 73(3), p.549-552.

Information about author:

Shavlakadze Nugzar – Iv. Javakhishvili Tbilisi State University A.Razmadze Mathematical Institute, Head of Department of Mathematical Theory of Elasticity, Professor, Tamarashvili str. 6, 0177, Tbilisi, Georgia. **E-mail:** nusha@rmi.ge

MECHANICS OF BIOMATERIALS

Silberschmidt V.V.

INTRODUCTION

Our understanding of mechanics of biological tissues, their properties and performance as well as their interaction with biomedical equipment still remains limited. This is a result of multiple factors, most important being a hierarchical and heterogeneous nature of biological tissues, non-trivial loading and environmental conditions to which they are exposed as well as multi-disciplinary nature of the systems involved.

This paper presents an overview of the latest research activities and achievements in the area of mechanics of biomaterials at Loughborough University, UK. It covers various types of biological materials and tissues – both hard (bones) and soft (muscles, etc.) – that have been studied in previous studies [1, 4] at various spatial and temporal domains. These studies laid a foundation for development and implementation of advanced computational modelling of mechanics of these biological tissues at different stages (healthy, diseased and traumatic conditions) and for several areas of biomedical applications (injury prevention, wound care and rehabilitation). Performed numerical simulations, on the one hand, elucidate processes of deformation of biological tissues and, on the other hand, provide solutions for design and optimization of medical and rehabilitation procedures and devices.

HARD TISSUE

Research on mechanical behaviour of a naturally occurring composite material, cortical bone tissue, has attracted increasing attention over the past few decades, not only because bone plays an important role in structural integrity of a musculoskeletal system, but also due to our growing knowledge of its intrinsic hierarchical structure and heterogeneous mechanical properties. This mineralized biological tissue provides main load-bearing component. Being a living tissue, cortical bone also has the ability to adapt (both its shape and internal structure) to mechanical environment through processes called *remodelling*.

Macroscopically, the deformation mechanisms of bones differ from those of metals, polymers and composites since bones consist of a living tissue with a continuously evolving hierarchical microstructure. Mechanical properties of cortical bone vary not only from bone to bone; they demonstrate a spatial variability even within the same bone due to changes of the underlying microstructure [1, 2]. Considering the wide spectrum of material properties of cortical bone and its intricate deformation processes associated with various loading modes and orientations, a further investigation is needed to elucidate the effect of variations in material properties in relation to the local regions and underpinning microstructural constituents.

Microscopically, the intrinsic micro-architecture of cortical bone has a significant effect on its macroscopic mechanical and fracture properties. Anisotropic deformation and fracture behaviours observed at macroscopic level are largely attributed to the preferential alignments of micro-constituents at subsequent length-scales, such as osteons and Haversian canals at micro-scale, or collagen fibrils and mineral crystals at nano-scale. From a fracture-toughness perspective, intricate structural hierarchy and material heterogeneity observed in cortical bone tissue can often lead to an improved fracture resistance owing to various fracture toughening mechanisms.

A process of deterioration of human cortical bone due to age and/or disease (e.g. osteoporosis) could increase a risk of bone fracture. Hence, the methods to predict such development and to protect patients are becoming an increasingly attractive research topic. A traditional evaluation method was to measure bone mineral density, but this single factor is insufficient to predict bone fracture because of heterogeneous properties and hierarchy structure of human cortical bone. So, a stress intensity factor, K_{IC} , related to extrinsic toughening mechanism, is also used to quantify the fracture resistance of human cortical bone. However, the understanding of the effect of micro-morphology of osteonal structure on fracture toughness of human cortical bone is still not fully established. The experiment

analysis is not suitable for this investigation because of the difficulty of recording a crack path at micro-level and quantifying this effect without accounting for mechanical properties of cortical bone and its constituents. Therefore, a novel computational method is suggested and adopted to simulate crack propagation process in domains with a direct account for bone's micro-morphology.

SOFT TISSUES

One of the main challenges related to mechanics of soft tissues is model development for wound healing. During the initial rehabilitation stage, routine wound-healing techniques are usually incapable of achieving complete wound closure. Therefore, advanced wound-care methods are applied. In an ideal scenario, residual extremity is covered with well-vascularized muscles, fascia and skin. However, in the case of traumatic amputation, the remaining skin structure is not always sufficient to fully cover the operation area, and it is therefore difficult to dress the wounded area. To overcome this problem, a negative-pressure wound therapy (NPWT) is applied to protect the open-wound area from infection instead of using conventional dressing and promote the healing process.

NPWT involves a controlled application of sub-atmospheric pressure to a wound bed through a wound filler, placed in the wound. Hence, the developed model [5] contains three main domains: a rigid bone structure, a soft tissue with a wounded area located at the distal region of the residual limb and wound filler modelled as polyurethane foam. The soft tissue including muscles, fat and skin was modelled as a single bulk elastic material.

The main goal of the developed mode was to advance our understanding of the mechanical effects of NPWT on healing and investigate a soft-tissue response to these effects propagating thorough the wounded tissue during the therapeutic application. The obtained results indicated that an increasing magnitude of negative pressure in the therapy increased levels of stresses and deformations inside the muscle tissue. Maximum stresses were localised at the interface between the filler and the foam. Unsurprisingly, increasing the level of negative pressure had an increasing effect on the interface between the bottom part of the amputee's bone and the soft tissue. Maximum deformation occurred around the interface between the filler and the tissue and increasing negative-pressure levels caused higher deformation around the tissue-filler interface.

REFERENCES

1. Abdel-Wahab A.A., Alam K., Silberschmidt V.V. Analysis of anisotropic viscoelastoplastic properties of cortical bone tissues. *J. Mech. Behav. Biomed. Mater.*, vol. 4, 2011.
2. Li S., Demirci E., Silberschmidt V.V. Variability and anisotropy of mechanical behavior of cortical bone in tension and compression. *J. Mech. Behav. Biomed. Mater.* 21, 2013.
3. Li S., Abdel-Wahab A.A., Silberschmidt V.V. Analysis of fracture processes in cortical bone tissue. *Eng. Frac. Mech.*, vol. 110, 2012.
4. Li S., Abdel-Wahab A.A., Demirci E., Silberschmidt V.V. Penetration of cutting tool into cortical bone: Experimental and numerical investigation of anisotropic mechanical behaviour. *J. Biomech.*, vol. 47, 2014.
5. Zeybek B., Li S., Fernandez J.W., Stapley S., Silberschmidt V.V., Liu Y., Computational modelling of wounded tissue subject to negative pressure wound therapy following trans-femoral amputation, *Biomech. Model. Mechanobiol.*, 2017. DOI 10.1007/s10237-017-0921-7.

Information about authors

Silberschmidt V.V. – Professor of Mechanics of Materials, Head, Mechanics of Advanced Materials Research Group, Wolfson School of Mechanical, Electrical and Manufacturing Engineering, Loughborough University, UK +44/(0)1509/227504

E-mail: V.Silberschmidt@lboro.ac.uk

Biomechanics of Stem Cells

Spector A.A., Yuan D., Somers S., Grayson W.L.

Stem cells are used for the treatment of various diseases, and the mechanical factors play an important role in their differentiation. Here, we discuss two problems of stem cell biomechanics associated with stem cell myogenesis (conversion into skeletal muscle cells). First, we propose a kinetic model of stem cell myogenesis under the action of external strains, and second, we present a poroelastic model of fibrous-porous scaffolds directing stem cell myogenesis.

A Kinetic Model of Stem Cell Differentiation. Effect of the Applied Strains

The stem cell conversion into a target cell is commonly characterized by the expression of specific proteins (factors), and such factors associated with myogenesis are called Desmin, MyoD, myogenin, and MHC. To simulate the experiment and the process of skeletal muscle regeneration with natural stem cells (called Satellite Cells), we propose a model [1, 2] presenting the kinetics of myogenesis as the progression through several stages defined by the expression of particular combinations of factors. The transition to each next stage is characterized by the expression of a new factor, while the factors expressed in the previous stages remain expressed. The description of the kinetics of myogenesis reduces to a system of nonlinear ODEs in terms of cell numbers in particular stages. We also include the effect of externally applied strains since they have been shown to significantly improve stem cell myogenesis. We optimize the parameters of our model by fitting the experiment and make a number of predictions about the time course of stem cell myogenesis. **Fig. 1** below presents the computed numbers of cells expressing particular factors against the corresponding experimental data obtained on days 7, 14, and 21 of stem cell differentiation.

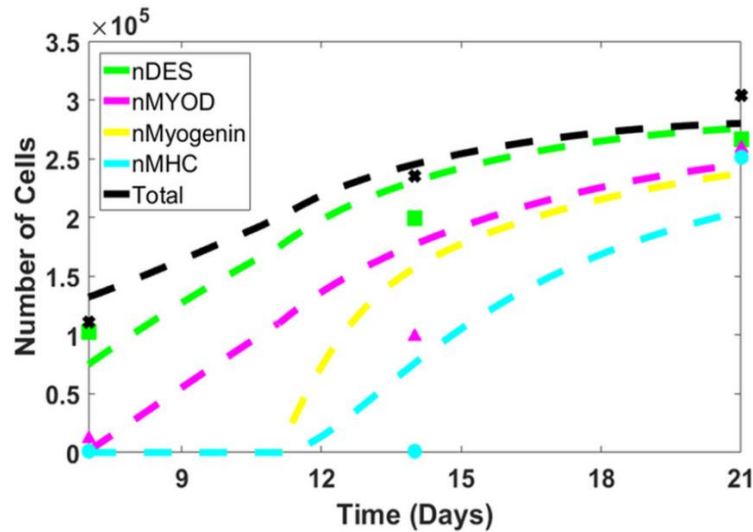


Figure 1 Numbers of cells expressing each particular factor and the total number of cells. Optimization of the model (dashed lines) parameters by fitting the experiment (crosses, squares, triangles, and circles) with the stem cell differentiation under the action a harmonic strain of 10% magnitude.

Mechanics of Fibrous-Porous Scaffold for Stem Cell Differentiation

An advanced method of the application of external strains to stem cells is the use of 3-D scaffolds (extracellular matrices) with the structure and mechanical properties mimicking those in the skeletal muscle. In this regard, a fibrous-porous scaffold for stem cell myogenesis has been recently proposed [3]. A stress relaxation experiment (**Fig. 2**) is used for the estimation of the mechanical properties of the scaffold. In addition, the stress relaxation time of the scaffold has been shown to make an effect on stem cell differentiation. To estimate the mechanical properties of the scaffold and simulate the stress relaxation experiment, we use a poroelastic model and consider the scaffold specimen as a long transversely isotropic cylinder under the extension. In the case of ramp displacement applied, an analytical solution for the time course of the applied load $P(t)$ can be obtained. This solution is used

for the parameter optimization (including two Young's moduli, two Poisson's ratios, and gel diffusion time characterizing the filtration of the fluid component of the scaffold through its fibrous solid component) by fitting experiment (**Fig. 3**).

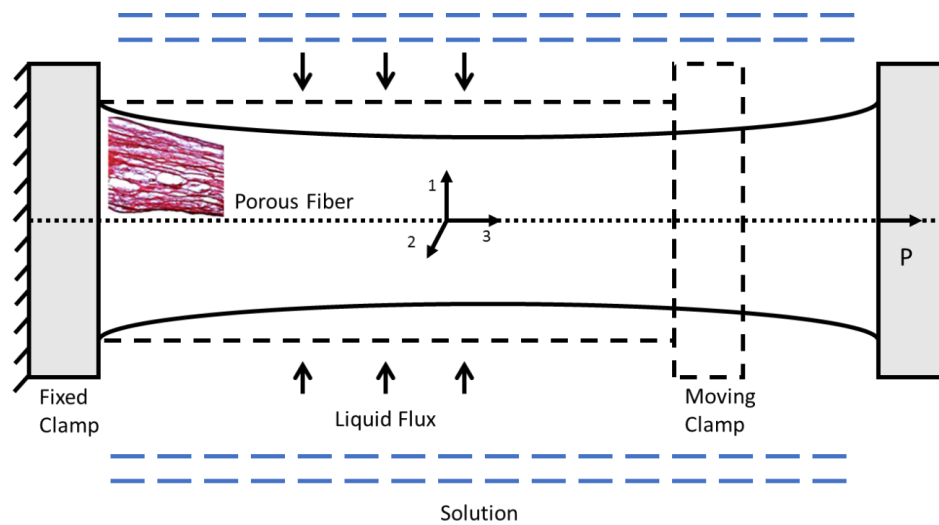


Figure 2 Sketch of the relaxation experiment with a cylindrical specimen of the fibrous-porous scaffold (insert) for stem cell differentiation

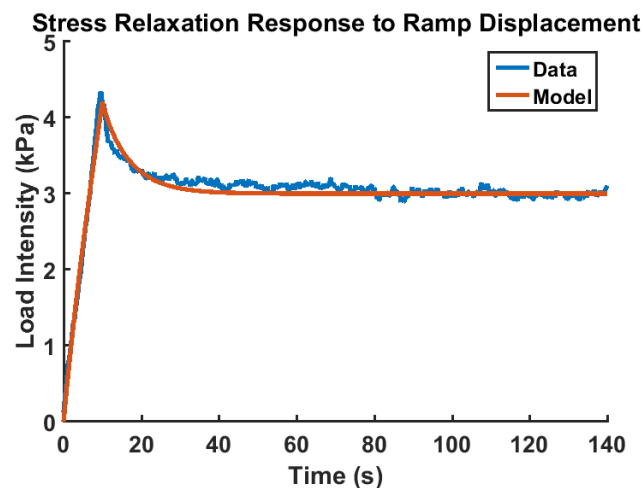


Figure 3 Optimization of the poroelastic model parameters by fitting the data of the force relaxation experiment for ramp displacement loading

REFERENCES

1. Deshpande R. S., Grayson W. L. and Spector A.A. 2015 A modeling insight into adipose-derived stem cell myogenesis PLoS ONE vol. 10, 2015.
2. Deshpande R. S. and Spector A.A. 2017 Modeling stem cell myogenic differentiation Scientific Reports vol. 7, 2017.
3. Cook C. A., Huri P. Y., Ginn B. P., Gilbert-Honick J., Somers S. M., Temple J. P., Mao H. Q. and Grayson W. L Characterization of a novel bioreactor system for 3D cellular mechanobiology studies Biotechnol. Bioeng. Vol. 113, 2016.

Information about authors

Spector Alexander A.-Research Professor, Johns Hopkins University, Department of Biomedical Engineering, 1-410-502-6955
E-mail aspector@jhu.edu

CONTACT PROBLEM FOR A SOLID INDENTER AND A VISCOELASTIC HALF-SPACE DESCRIBED BY SPECTRUM OF RELAXATION AND RETARDATION TIMES.

Stepanov F.I.

Mechanical properties of material which is modelled by exponential creep kernel characterized by a spectrum of relaxation and retardation times are studied. The research is carried out considering a contact problem for a solid indenter sliding over a viscoelastic half-space. Contact pressure, indentation depth of indenter and the deformation component of the friction coefficient is analyzed with respect to the case of half-space material modeled by single relaxation and retardation times.

1. A solid indenter sliding over a viscoelastic half-space with constant velocity is considered. Material model of the half-space is given by the Volterra integral operator that defines the relationship between strains $\gamma(t)$ and stresses $\tau(t)$:

$$\gamma(t) = \frac{1}{G}\tau(t) + \frac{1}{G} \int_{-\infty}^t \tau(\tau) K(t-\tau) d\tau, \quad (1.1)$$

$$K(t') = \sum_i k_i \exp\left(-\frac{t'}{\lambda_i}\right).$$

Here G is the shear modulus. The creep kernel $K(t')$ is characterized by spectrum of relaxation $1/k_i$ and retardation λ_i times. Poisson ration is considered constant.

Contact conditions:

$$z=0: \quad \tau_{xz}=0, \quad \tau_{yz}=0, \quad w(x,y)=f(x,y)+D, \quad (x,y) \in \Omega$$

$$\sigma_z=0, \quad \tau_{xz}=0, \quad \tau_{yz}=0, \quad (x,y) \notin \Omega \quad (1.2)$$

$$-\infty < x < +\infty, \quad -\infty < y < +\infty$$

Contact problem is solved with the boundary element method [1, 2, 3] using the relationship between contact pressure p distributed within an arbitrary surface region Ω and surface displacement w [4]:

$$w(x,y,0) = -\frac{1-\nu}{2\pi G} \iint_{\Omega} p(\xi,\eta) \left[\frac{1}{R} + \frac{1}{V} \sum_{i=1}^n k_i I_1 \left(\frac{\xi-x}{\lambda_i V}, \frac{\eta-y}{\lambda_i V} \right) \right] d\xi d\eta, \quad (1.3)$$

$$R = \sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2}, \quad I_1(\alpha,\beta) = e^{\alpha} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{e^{-u} du}{\sqrt{u^2 + \beta^2}}.$$

Calculations were made for material characterized by three different relaxation times and also for the spectrum of relaxation times combined of the three.

Fig.1 shows surface deformation due to impact of a moving load distributed within the square element which center is located in $(0,0)$. Area of the square element is $S'=1/900$, the pressure within the element is constant ($p'=1.0$). Lines 1-3 correspond to the single relaxation time material. Line 4 corresponds to the spectrum of relaxation times. Lines represent surface displacement considering $y'=0$.

2. Mechanical properties of viscoelastic half-space that is modelled by different relaxation times and a spectrum of relaxation times have been studied. Calculations were made for the surface displacement that occurs due to impact of a distributed load moving over a viscoelastic half-space and also for a solid indenter sliding with constant velocity over the viscoelastic half-space. The analysis allowed making the following conclusions:

- considering relation of instant and longitudinal shear modulus being constant the maximum of mechanical component of the friction coefficient is the same for different relaxation times, it occurs at different sliding velocities (the smaller relaxation time, the bigger the velocity);
- in case when the spectrum of relaxation times considered, the maximum value of mechanical component of the friction coefficient is bigger than for the single relaxation times cases;

- mechanical component of the friction coefficient decreases more rapidly with velocity when the value of relaxation time is bigger;
- the indentation depth is bigger in case of a smaller value of relaxation time and the biggest in case of relaxation times spectrum;
- the indentation depth decreases more rapidly with velocity in case of bigger relaxation time;

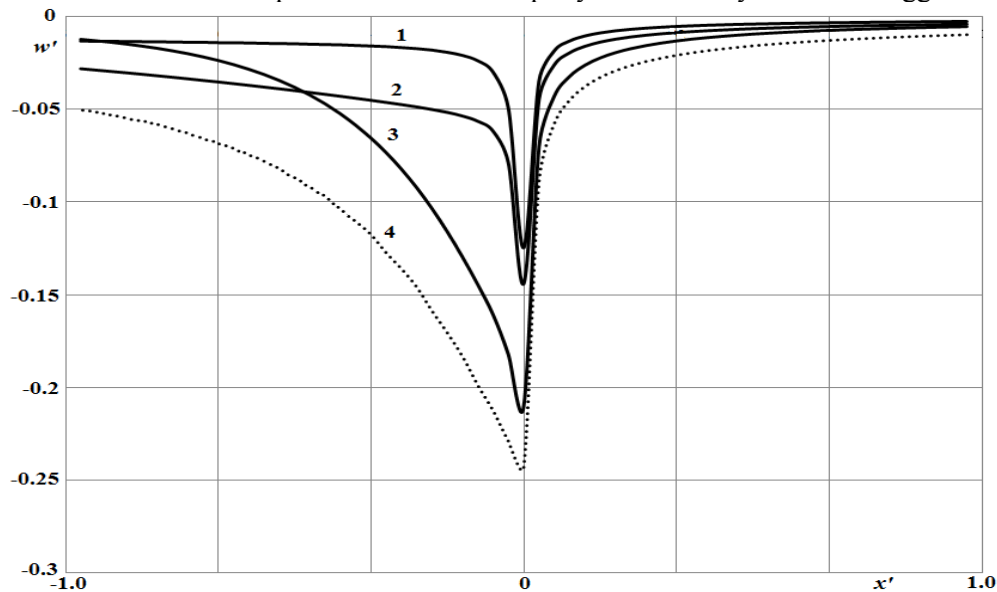


Fig.1 $c = 5$, $P' = 1.0$, $\nu = 0.3$, $V' = 3$ line 1: ($\lambda = 0.005$, $k = 1000$), line 2: ($\lambda = 0.001$, $k = 5000$), line 3: ($\lambda = 0.0002$, $k = 25000$), line 4: ($\lambda_{1,2,3} = 0.0002; 0.001; 0.005$, $k_{1,2,3} = 25000; 5000; 1000$);

This work is financially supported by Russian Scientific Foundation (grant 14-29-00198).

REFERENCE

1. Stepanov F.I., Torskaya E.V., Study of stress state of viscoelastic half-space in sliding contact with smooth indenter // Journal of Friction and Wear, 2016, V.37, №2, P.101-106.
2. Goryacheva I.G., Stepanov F.I., Torskaya E.V., Sliding of a smooth indenter over a viscoelastic half-space when there is friction // Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 2015, V.79 №6, P.596-603
3. Goryacheva I.G., Stepanov F.I., Torskaya E.V., Effect of Friction in Sliding Contact of a Sphere Over a Viscoelastic Half-Space // Mathematical Modeling and Optimization of Complex Structures, Springer. 2016, V.40, P.93-103
4. V.M. Aleksandrov, I.G. Goryacheva, Mixed problems of mechanics of deformable solid, in Proceedings of V Russian Conference with International Participation, Izd. Sarat. University in Russian, Saratov, 2005, pp. 23–25

Information about author:

Stepanov F.I. – junior researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS
E-mail: stepanov_ipm@mail.ru

RESEARCH OF THE TIME OF DEFORMATIONS LOCALIZATION (NECKING FORMATIONS) AT STRETCHING OF SAMPLES IN THE CONDITIONS OF CREEP

Teraud W.V.

At long uniform axial tension of metal samples in some instant of time uniform deformation cease to be uniform, in spite of the fact that the conditions of axial tension are preserved. Such moment of transition it is accepted to name the moment of deformations localisation or necking formations.

The moment of localisation cardinally changes tensely-deformed condition of material, and for correct calculation bearing ability of metal extremely should know, in what moment of life cycle of the element of the design it takes place. In [1] is informed that as early as XIX century power criterion of the necking occurrence was offered: effort in spreaded sample on examination of dropping diagram begins to be lowered. Far more accomplished criterion accounting a series of features observable in experiments, is offered in [2]. Series of the authors [3-4] offered deformation approach, according to which the necking emerges at the value of deformation of 12% sample [3]. Development of this approach was offered by the author [4], receiving that uniform deformation is described $\varepsilon_{od} < n$ ($n < 1$), i.e. is entirely defined by the exponent n in exponential law ($\sigma = \chi \varepsilon^n$).

In [5-6] plenty of experiments is described at 400°C from aluminium alloy D16T, on the basis of which a series of the criteria for definition of the moment of the neck formation is offered. In these experiments the samples of round cross section with initial values 4 and 5 mm and rectangular cross section from size of working part 44x9x1.3 mm were used. Further analysis of results of tests of samples with different values of axial voltage is presented.

As the first criterion difference of maximum and minimum sample cross-section sizes in working part is considered, and when distinction reaches some critical size k_i , is accepted that in this instant of time τ_1 journal emerged. The second criterion is characterised that in each instant of time on current sample profile arithmetic-mean value is calculated and from this value peak deviation is defined. Excess of the value of deviation to some size k_2 is considered occurrence of the journal at the time of τ_2 . Complexity of given conditions consists that it is necessary to establish values k_i , which it is necessary to consider critical. As research showed, in each experiment these values one's and a universal size it is impossible to pick up.

The third offered criterion is connected with introduction to consideration of uniformly losing shape sample, i.e. "imaginary" sample which is deformed on its law of change $l(t)$, but preserves a uniform deformation of all working area.

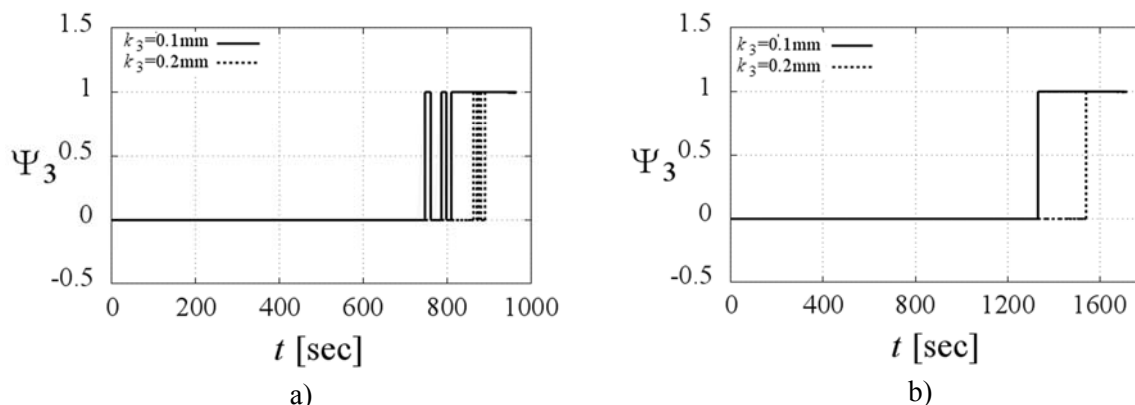


Fig. 1. The moment of formation of the neck on criterion $\Psi_3(t)$ at $k_3 = 0.1$ mm (continuous) and $k_3 = 0.2$ mm (dotted) for cylindrical samples for two various experiments (a) and (b).

We will consider geometrical method of definition of the moment of formation of the neck for cylindrical and flat samples using "imaginary" sample (H is function of Khe'visajda):

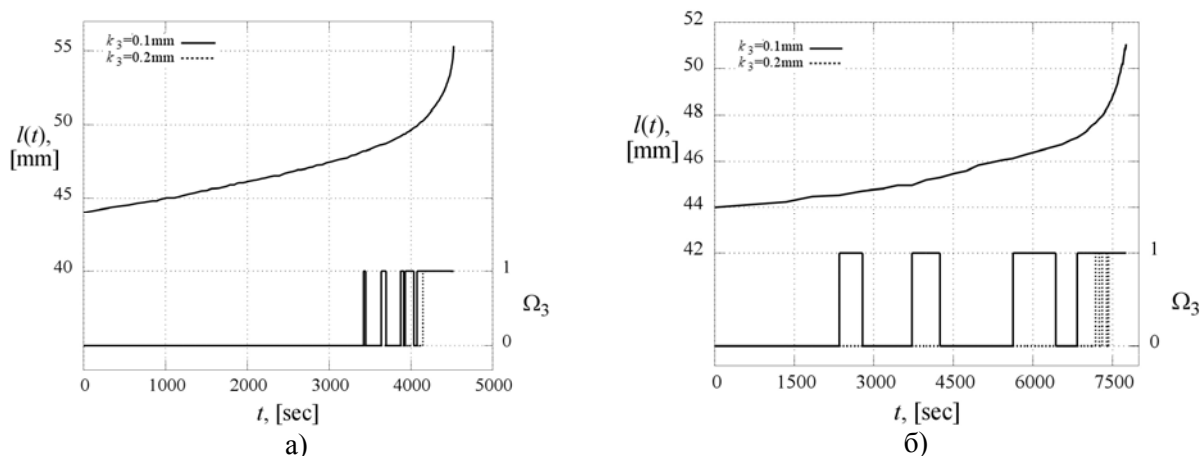


Fig. 2. The moment of formation of the neck on criterion $\Omega_3(t)$ at $k_3 = 0.1$ mm (continuous) and $k_3 = 0.2$ mm (dotted) for flat samples, experiments (a) and (b).

$$\Psi_3(t) = H \left[d^0(t) - \min_y (d(t, y)) - k_3 \right], \quad \Omega_3 = H \left[w^0(t) - \min_y (w(t, y)) - k_3 \right]$$

On the fig. 1 [7] and 2 are presented the schedule of the values $\Psi_3(t)$ and $\Omega_3(t)$. The times of localisation for cylindrical samples №3 and №9 accounted for 750 and 850 sec, 1250 and 1500 sec for k_3 similarly 0.1 mm and 0.2 mm. For flat samples №7 and №16 accounted for 3930 and 4144 sec, 5622 and 7305 sec for values k_3 equal 0.1 mm and 0.2 mm respectively. Comparing the moments of the necking occurrence only on cross-section value of width for cylindrical sample (1) (criterion Ψ_3) and similary (criterion Ω_3) for flat sample (2), it is possible to conclude that flat sample is deformed evenly lot of the time that, most likely, is connected with absence of the account of formation of the neck on thickness.

REFERENCE

1. Altmeyer G. Modélisation théoretique et numérique des critères d'instabilité plastique. Application la prédiction des phénomènes de striction et de localisation lors d'opération demise en forme par emboutissage. PhD thesis, L'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers. 2012.
2. Michel B., Patrice C. Predictions of necking with analytical criteria and comparisons with experimental. Materials Processing And Design. Modeling, Simulation and Applications. NUMIFORM'07. Vol. 908. 2007. P. 81-89.
3. Nirmal K. Constant-load tertiary creep in nickel-base single crystal superalloys. Materials Science and Engineering. Vol. 432. 2006. P 129-141.
4. Malygin G. Influence of the grain size on the resistance of micro and nanocrystalline metals against the neck like localization of plastic deformation. Physics of the Solid State. 2011. Vol. 53. No. 2. P. 363-368.
5. Lokoshchenko A.M., Teraud W.V. Investigation of the localization of deformation in cylindrical samples by the method of photographic registration for high-temperature creep // Russian metallurgy (Metally). 2013. № 11. (№ 289/2013). P. 43-46.
6. Teraud W.V., Valisovskiy N.E. Experimental research of particularities of strain localization in the plane tensile specimens at high temperature creep // Engineering and Engineering Education. 2015. No 2. P. 40-47 (In Russian)
7. Teraud W.V. 2017 Time formation of localization deformations for circular cross section specimens under creep based on geometric criteria // Problems of strength and plasticity. 2017. Vol.79. №1. P. 114-123. (In Russian)

Information about authors

Walentin Teraud – Ph.D of science, Lomonosov Moscow State University, Institute Mechanics, laboratory of Creep and creep rapture. +7(495) 939-52-78, **E-mail:** ldrnww@gmail.com

INVESTIGATION OF THE INFLUENCE OF AGEING ON THE MECHANICAL PROPERTIES OF POLYMER COMPOSITES DURING UNIDIRECTIONAL TENSILE LOADING

Valesyan Sona

Abstract. From the obtained data follows that the change of durability of the getinacks at the stretching depends on pressing pressure value both in the age of 1 year and in the age of 4 years essentially.

According to data, in case of samples of the first series ageing practically has not affected durability of getinacks at stretching. In case of samples of the other series the increase of age from 1 year to 4 years results in increase of durability of getinacks, particularly, for the third series the increase is about 9 %.

Comparing the values of failure tensile stress brought in the handbook of electrotechnics materials [1] and obtained by the experimental investigation of aged glass textolite (GFRP composite-laminate) with the orientation of the woven fiber 0^0 and 90^0 are increased approximately on 25 % and 35%, correspondingly.

Approximations of the test results are defined and compared with the experimental data. Based on these data, the corresponding figures are plotted.

The mechanical properties of the aged polymer composites such as getinacks and glass textolite (Glass Fibre Reinforced Polymer (GFRP composite-laminate) subjected to the tensile load are studied.

Results of testing are given in the tables 1, 2.

From the data given in the table 1, it follows that change of durability of the getinacks at the stretching depends on pressing pressure value both in the age of 1 year and in the age of 4 years essentially. So, for $\tau=1$ year durability of samples of the second series is 16 % more than durability of samples of the first series. Durability of samples of the third series is about 20 % greater than durability of samples of the first series (see the table 1).

For $\tau=4$ years durability of samples of the second and third series is about 22 and 29 % greater than the durability of samples of the first series, accordingly.

Table 1

NN series	Pressure of pressing, MPa	Age of samples τ at the time of experiment, year	Durability of samples during the stretching, MPa
I	1,9	1	117,3 $\pm$ 1.322
		4	118,4 $\pm$ 1.334
II	2,4	1	136,1 $\pm$ 14.997
		4	144,3 $\pm$ 15.903
III	5,1	1	140,4 $\pm$ 5.64
		4	152,8 $\pm$ 5.176

According to the data of this table 1, in case of samples of the first series ageing practically has not affected durability of getinacks at stretching. In case of samples of the other series the increase of age from 1 year to 4 years results in increase of durability of getinacks, particularly, for the third series the increase is about 9 %.

The short-term force influences ageing results in increase of deformability of getinacks. The more level of pressing pressure of material is, the less deformability of getinacks is.

In view of the above-mentioned consideration of getinacks' experimental data, the comparison of mechanical properties of the aged glass-textolite subjected to tensile load [2] with them is done.

Comparing the values of failure tensile stress brought in the handbook of electrotechnics materials [1] and obtained by the experimental investigation of aged glass textolite (GFRP composite-laminate) with the orientation of the woven fiber 0^0 and 90^0 are increased approximately on 25 % and 35%, correspondingly (Table 2).

Table 2

	failure tensile stress, MPa	
	orientation of the woven fiber 0^0	orientation of the woven fiber 90^0
GFRP handbook values [1]	300	200
GFRP aged values	402	307

For glass textolite (GFRP composite-laminate) with the angle of orientation of the woven fiber 0^0 and 90^0 , the experimental and theoretical curves' data are coincided on 97% (the error is 3%) and 95.55% (the error is 4.45%), correspondingly.

REFERENCE

1. U.V. Korickij, V.V. Pasinkov, B.M. Tareev, Electrotechnics Materials – Handbook. Energoizdat, Moscow, 1986.
2. Valesyan S.Sh. An Experimental Investigation of the Mechanical Properties of the Aged Glass-Textolite Subjected to Tensile Load. // Proceedings of IV International Conference on Topical Problems of Continuum Mechanics, Armenia, Tzaghkadzor, 2015, p.499-503.

Information about author:

Valesyan Sona – PhD, scientific researcher, Institute of Mechanics of National Academy of Sciences of Republic of Armenia; 24/2 Baghramyan Ave, Yerevan, 0019, Armenia
e-mail: svalesyan@yahoo.com

VIBRATION OF MAGNETOELASTIC CYLINDRICAL SHELLS FOR VARIOUS BOUNDARY CONDITIONS

Vardanyan Sedrak

Abstract—The investigation of the vibrational character of magnetic cylindrical shells placed in an axial magnetic field has important practical applications. In this work, we study the vibrational behaviour of such a cylindrical shell by making use of the so-called exact space treatment, which does not assume any hypothesis. We discuss the effects of several practically important boundary conditions on the vibrations of the described setup. We find that for some cases of boundary conditions, e.g. clamped, simply supported or peripherally earthed, as well as for some values of the wave numbers, the vibrational frequencies of the shell are approximately zero. The theoretical and numerical exploration of this fact confirms that the vibrations are absent or attenuate very rapidly. For all the considered cases the imaginary part of the frequencies are negative which implies stability for the vibrational process.

The Boundary Conditions

We will consider four types of boundary conditions:

Type 1: The internal surface of the shell is clamped, peripherally earthed, while the external surface is free from stresses. Additionally there is a continuity condition for the magnetic field vector on the external surface.

More precisely, on the internal surface $r = R - h$ we impose the conditions: $u_r = 0, u_z = 0, \varphi = 0$.

while on the external surface $r = R + h$ we impose: $\sigma_{rr} = 0, \sigma_{rz} = 0, h_r = \bar{h}_r, h_z = \bar{h}_z$.

Type 2: The internal surface of the shell is simply supported, peripherally earthed and, additionally, the external surface is free from stresses. As before there is a continuity condition for the magnetic field.

On the internal surface $r = R - h$ we have: $\sigma_{rr} = 0, u_z = 0, \varphi = 0$.

On the external surface $r = R + h$ we have: $\sigma_{rr} = 0, \sigma_{rz} = 0, h_r = \bar{h}_r, h_z = \bar{h}_z$.

Type 3: internal surface of the shell is clamped, the external surface is free from stresses, and, additionally, we impose continuity condition on the magnetic field vector not only on the external surface, but also on the internal one.

On the Internal surface $r = R - h$ we have: $u_r = 0, u_z = 0, h_r = \bar{h}_r, h_z = \bar{h}_z$.

On the external surface $r = R + h$ we have: $\sigma_{rr} = 0, \sigma_{rz} = 0, h_r = \bar{h}_r, h_z = \bar{h}_z$.

Type 4: internal surface of the shell is simply supported, the external surface is free from stresses, and magnetic field vector continuity condition exists on the internal and external surfaces.

On the internal surface $r = R - h$ we have: $\sigma_{rr} = 0, u_z = 0, h_r = \bar{h}_r, h_z = \bar{h}_z$.

On the external surface $r = R + h$ we have: $\sigma_{rr} = 0, \sigma_{rz} = 0, h_r = \bar{h}_r, h_z = \bar{h}_z$.

Numerical Results and Conclusions

We now solve the determinant equation (33) numerically for four types of boundary conditions. As a shell's material we take aluminum with the following parameters: Young's modulus $E = 0.69 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, Poisson's ratio $\nu = 0.32$, density $\rho = 2712 \text{ kg/m}^3$, longitudinal wave speed

$$a = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 1595.06 \text{ m/s}, \text{ transversal wave speed } b = \sqrt{\frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho}} = 1908.06 \text{ m/s}, \text{ electrical}$$

conductivity $\sigma = 35 \cdot 10^6 \text{ sim/m}$, magnetic viscosity $\nu_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma} = 2 \cdot 10^7 \text{ m}^3/\text{s}^2 \text{ sim}$, Alfven's wave

speed $a_1 = \sqrt{\frac{H_0^2}{4\pi\rho}}$, the geometrical sizes of the shell are taken to be: $h = 0.001 \text{ m}$, $R = 0.05 \text{ m}$.

We perform the calculations for various magnetic field values $H_0 = 10^5, \dots, 10^4 \text{ T}$.

For these parameters we present the numerically obtained bending frequencies for four types of boundary conditions (see tables 1-8). It should be noted that the transcendental equations being solved here have infinitely many roots, but for us the interesting ones are those the absolute values of which are the closest to zero. We present precisely these solutions.

Table 1: type 1 (Re ω)					
$H_0 \backslash k$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$5 \cdot 10^5$	0.00006	0.0012	-0.0021	0.0028	-0.0034
$6 \cdot 10^5$	0.0011	-0.0024	-0.0033	-0.0280	0.0047
$7 \cdot 10^5$	0.002	-0.0034	0.0044	-0.0051	0.0058
Table 2: type 1 (Im ω)					
$3 \cdot 10^5$	-0.103584	-0.103583	-0.103583	-0.103583	-0.103582
$4 \cdot 10^5$	-0.103584	0.181235	0.181235	-0.103583	0.000146
$5 \cdot 10^5$	0.127234	0.127297	0.127321	0.127327	0.127323
Table 3: type 2 (Re ω)					
$3 \cdot 10^5$	10^{-8}	10^{-8}	222.471	112.421	72.4278
$4 \cdot 10^5$	10^{-8}	0.57689	154.704	83.9517	54.4747
$5 \cdot 10^5$	10^{-8}	10^{-8}	120.978	67.2693	43.8222
Table 4: type 2 (Im ω)					
$3 \cdot 10^5$	-0.103583	-0.103583	-28.9107	-15.3821	-10.2147
$4 \cdot 10^5$	-0.103584	-167.732	-20.4537	-11.5805	-7.7571
$5 \cdot 10^5$	-0.103584	-0.145199	-16.1300	-9.3294	-6.2893
Table 5: type 3 (Re ω)					
$3 \cdot 10^5$	2629.957	2144.676	1898.753	1748.752	1655.295
$4 \cdot 10^5$	2325.042	1893.226	1677.223	1549.672	1476.028
$5 \cdot 10^5$	2112.610	1718.585	1524.035	1413.004	1354.462
Table 6: type 3 (Im ω)					
$3 \cdot 10^5$	-644.448	-511.537	-446.484	-401.164	-363.308
$4 \cdot 10^5$	-564.715	-450.130	-392.008	-350.114	-313.472
$5 \cdot 10^5$	-510.541	-407.642	-354.072	-314.232	-277.944
Table 7: type 4 (Re ω)					
$3 \cdot 10^5$	10^{-8}	10^{-8}	10^{-10}	10^{-8}	70.4725
$4 \cdot 10^5$	10^{-8}	10^{-8}	151.389	81.4067	52.4569
$5 \cdot 10^5$	10^{-8}	10^{-8}	117.603	64.6237	41.7228
Table 8: type 4 (Im ω)					
$3 \cdot 10^5$	-0.103584	-0.103583	-0.103583	-0.103583	-10.0897
$4 \cdot 10^5$	-0.145199	-0.103583	-20.5366	-11.4840	-7.6217
$5 \cdot 10^5$	-0.145199	-0.145199	-16.1761	-9.2180	-6.1435

These numerical checks confirm that the real parts of the free bending frequencies are approximately zero for some values of the wave numbers. These results, particularly the negativity of the imaginary part of the bending vibrational frequencies confirm that the peripherally earthed, clamped or simply supported boundary conditions have an impact on magnetic vibrations as attenuation conditions. In the case when the internal and external surfaces of the shell are free from stresses, the boundary conditions can be viewed as stimulators for vibrations, while for the scenarios studied in this paper the effect is opposite.

References

- [1] Bagdasaryan G.E. , Belubekyan M.V. (1967) Axialsymmetric vibrations of cylindrical shell in magnetic field. Izv. AN Arm SSR, Mekhanika, 20 21-27. (In Russian).
- [2] Bagdov A.G., Vardanyan A.V., Vardanyan S.V. (2006) Linear bending vibrations frequencies determination in magnetoelastic cylindrical shells // Reports of Armenian National Academy of Sciences Vol.106, № 3, Yerevan, P. 227-237. (In Russian).

Information about author: Vardanyan Sedrak, Director of Yerevan branch PRUE, Doctorate student of M. Lomonosov Moscow State University, Tel +374 99220959, +374 10 380345, E-mail: vardanyan.sv@rea.ru.

THE INVESTIGATION OF STRESS CONCENTRATION IN CORNER POINTS FOR ORTHOTROPIC PLATE BENDING PROBLEM

Vasilyan N.G.

Abstract. In this article is investigated bending problem of the orthotropic semi-infinite plate strip, when three edges of the plate are hinged, and the fourth edge goes to infinity. The plate is loaded with distributed load with intensity $q(y)$. Is applied the approach Nadai A.[5], which says, that go away from the edge, the solution must seek solution of the cylindrical bending. There are investigated generalized cutting forces on fixed edge.

We explore in the Cartesian coordinate system of a semi-infinite plate strip of constant thickness $2h$, occupying the area $0 \leq x < \infty$, $0 \leq y \leq b$, $-h \leq z \leq h$. On the plate acts distributed load of intensity $q(y)$.

1. We assume that the material of the plate, in relation with their elastic properties, has three planes of symmetry – plate is orthotropic. If these planes are taken as coordinate axes, the relationships between the components of stress and strain can be expressed by the following equations:

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(y) \quad (1.1)$$

where $H_1 = D_1 + 2D_{xy}$, and D_x , D_y , D_1 , D_{xy} are coefficients, which characterizing the mechanical properties of material.

2. Satisfaction of the boundary conditions.

It is assumed that the edges of the plate $y=0, b$ hinged, that allows the solution of equation (1.1) to present as follows:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \sin \lambda_n y, \quad q = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin \lambda_n y, \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{b}. \quad (2.1)$$

The characteristic equation of (1.1) will be $D_x r^4 - 2H_1 r^2 + D_y = 0$, $r^2 = \left(H_1 \pm \sqrt{H_1^2 - D_x D_y} \right) / D_x$.

We will get four roots and applying the approach Nadai - in case go afar from the edge $x=0$, the solution must strive to solution of the cylindrical bending, obtained the general solution of the problem of an orthotropic semi-infinite plate-strip:

$$f_n(x) = A_n e^{-r_1 \lambda_n x} + B_n e^{-r_2 \lambda_n x} + \frac{q_n}{D \lambda_n^4} \quad (2.2)$$

Unknown coefficients A_n, B_n will determined by applying the boundary conditions on $x=0$. First of all, will examined the expression $H_1^2 - D_x D_y$.

a. $H_1^2 - D_x D_y > 0$. Suppose, the edge $x=0$ is hinged joined, and will obtain for flexure of plate

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{D_y \lambda_n^4} \left[\frac{H_1 - \sqrt{H_1^2 - D_x D_y}}{2\sqrt{H_1^2 - D_x D_y}} e^{-\sqrt{\frac{H_1 + \sqrt{H_1^2 - D_x D_y}}{D_x}} \lambda_n x} - \frac{H_1 + \sqrt{H_1^2 - D_x D_y}}{2\sqrt{H_1^2 - D_x D_y}} e^{-\sqrt{\frac{H_1 - \sqrt{H_1^2 - D_x D_y}}{D_x}} \lambda_n x} + 1 \right] \sin \lambda_n y \quad (2.3)$$

Therefore, for generalized cutting forces we obtain

$$\begin{aligned} V_x(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{2B \lambda_n} \frac{1}{D_y \sqrt{D_x}} \left[\sqrt{H_1 + B} (D_x D_y - H_2 (H_1 - B)) e^{-\sqrt{\frac{H_1 + B}{D_x}} \lambda_n x} + \sqrt{H_1 - B} (D_x D_y - H_2 (H_1 + B)) e^{-\sqrt{\frac{H_1 - B}{D_x}} \lambda_n x} \right] \sin \lambda_n y \\ V_y(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{2B \lambda_n} \left[2B - (B + 2D_{xy}) e^{-\sqrt{\frac{H_1 + B}{D_x}} \lambda_n x} - (2H_1 + B + 2D_{xy}) e^{-\sqrt{\frac{H_1 - B}{D_x}} \lambda_n x} \right] \cos \lambda_n y, \end{aligned} \quad (2.4)$$

where we have introduced the following notation: $B = \sqrt{H_1^2 - D_x D_y}$, $H_2 = H_1 + 2D_{xy} = D_1 + 4D_{xy}$

b. $H_1^2 - D_x D_y = 0$. This is coinciding with case, when material is isotropic [4]. We will search $f_n(x)$ in the form of $f_n(x) = A_n e^{-\lambda_n x}$. If the plate on $x=0$ edge is hinged joined, will obtain

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{D \lambda_n^4} \left[1 - e^{-\lambda_n x} - \frac{\lambda_n x}{2} e^{-\lambda_n x} \right] \sin \lambda_n y. \quad (2.5)$$

And for generalized cutting forces will obtain

$$V_x(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{2\lambda_n} \left[(3-v)e^{-\lambda_n x} + (1-v)\lambda_n x e^{-\lambda_n x} \right] \sin \lambda_n y, V_y(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{2\lambda_n} \left[2(1-e^{-\lambda_n x}) + (1-v)\lambda_n x e^{-\lambda_n x} \right] \cos \lambda_n y. \quad (2.6)$$

$$c. H_1^2 - D_x D_y < 0 \quad w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{D_y \lambda_n^4} \left[1 - \left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha\beta} \sin \beta \lambda_n x + \cos \beta \lambda_n x \right) e^{-\alpha \lambda_n x} \right] \sin \lambda_n y.$$

For generalized cutting forces will obtain the following expression:

$$V_x(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{\lambda_n} \frac{H_2}{D_y} \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2\alpha\beta} \left[\left(1 + \frac{D_x}{H_2} (\alpha^2 + \beta^2) \right) \beta \cos \beta \lambda_n x + \left(1 - \frac{D_x}{H_2} (\alpha^2 + \beta^2) \right) \alpha \sin \beta \lambda_n x \right] e^{-\alpha \lambda_n x} \sin \lambda_n y,$$

$$V_y(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{\lambda_n} \frac{1}{D_y} \frac{1}{2\alpha\beta} \left[\alpha \beta D_y - 2\alpha \beta D_y e^{-\alpha \lambda_n x} \cos \beta \lambda_n x + \left(H_2 (\alpha^2 + \beta^2)^2 - D_y (\alpha^2 - \beta^2) \right) e^{-\alpha \lambda_n x} \sin \beta \lambda_n x \right] \cos \lambda_n y.$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{D_x D_y} + H_1}{2D_x}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{\sqrt{D_x D_y} - H_1}{2D_x}} \quad (2.7)$$

3. Investigation of the generalized cutting forces

From the calculations for different materials it turned out, that in all cases will get $H_1^2 - D_x D_y < 0$, the third case. For generalized cutting forces in the middle of fixed edge will be

$$V_x(0, \frac{b}{2}) = \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{\lambda_n} \sin \frac{\pi n}{2} \quad \text{where } \gamma \text{ equal to: } \gamma = \frac{H_2}{D_y} \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2\alpha} \left(\frac{D_2}{H_2} (\alpha^2 + \beta^2) + 1 \right) \quad (3.1)$$

The solution for cutting forces depends from the γ coefficient (which depends only from characterizing coefficients of mechanical properties of the material) in the middle of the fixed edge.

Table 1. The values of γ for investigating materials

	Kevlar49	FiberglassAG-4c	Fiberglass anisotropic materials	Tornel 40	Plywood, 3 plyand 5
γ	1.87	1.22	1.26	0.59	2.33

4. Conclusion

In this article is obtained the values of generalized cutting forces for orthotropic semi-infinite plate-strip. In corners of fixed edge $V_x = 0$ and in middle points it's take a value different from zero. Thus, for the bending problem of an orthotropic semi-infinite plate-strip, when the three edges are hinged, we obtain the concentration of the generalized cutting forces on the fixed edge. For an isotropic semi-infinite plate strip ($b=10a$) the equation of static equilibrium are met. Therefore, in this case, in comparison with the work of V. V. Vasiliev [5], who researches a simply supported plate, the transformation of Kirchhoff and Thomson – Theta, is fair.

REFERENCE

- [1] Hambartsumyan S.A. Theory of anisotropic plates. M.: Nauka, 1987. 360p.
- [2] Belubekyan M.V. On the equations of plate theory taking into account transverse shear stresses // Problems of mechanics of thin deformable bodies (Dedicated to Prof. The 80th anniversary of S.A. Ambartsumian). Yerevan: Gitutyun, 2002. Pp. 67-88.
- [3] Vasilyev V.V. The transformation of Kirchhoff and Thomson-Theta in the classical theory of plates. Solid Mechanics. 2012. № 5. pp. 98-107.
- [4] Lehnitsky S.G.. Anisotropic plates. Moscow.-Leningrad: 1947. 355p.
- [5] Nadai A.. Elastische Platten. Berlin: 1925. 72p.

Information about authors:

Narine Vasilyan, researcher, Institute of Mechanics NAS RA,; (374 10) 62 48 02, (374 91) 707939
E-mail: narine@mechins.sci.am

INELASTIC DEFORMATION, STRAIN-SOFTENING, LOCALIZED FAILURE AND DILATATION IN SANDSTONE MEDIA UNDER TRIAXIAL QUASISTATIC LOADING

Zaitsev A. V., Karev V. I., Kovalenko Yu. F., Sidorin Yu. V., Sokolkin Yu. V., Ustinov K. B.

The developed two-level structural-phenomenological model of brittle rocks media made it possible to describe a collective multi-particle interaction in a defect ensemble, scale levels of damage accumulation process, major failure mechanisms, and their changes in various modes of triaxial proportional macrodeformation. In the framework of the model description of damage accumulation process in brittle rocks the nonlocal conditions for transition to a localized failure and/or to strain-softening are formulated independent on the stress-strain state and quasistatic proportional and nonproportional loading modes.

The investigation of inelastic deformation and failure of brittle rocks is associated with the necessity to develop mechanical models for the correct description of the behaviour of damaged heterogeneous rock media. Materials of this class include, specifically, sandstones. Besides, there is a need to improve the procedures of strength analysis in order to take into account actual loading conditions and the evolution and character of the collective interaction in a system of defects which determines the instant of macrofailure, when the damage accumulation becomes unstable. Without understanding the regularities and mechanisms of damage accumulation, without evaluating its stability and determining the conditions of localization beginning, the macrofracture of sandstones will remain latent and poorly predictable phenomenon of internal structure evolution of the heterogeneous rock media.

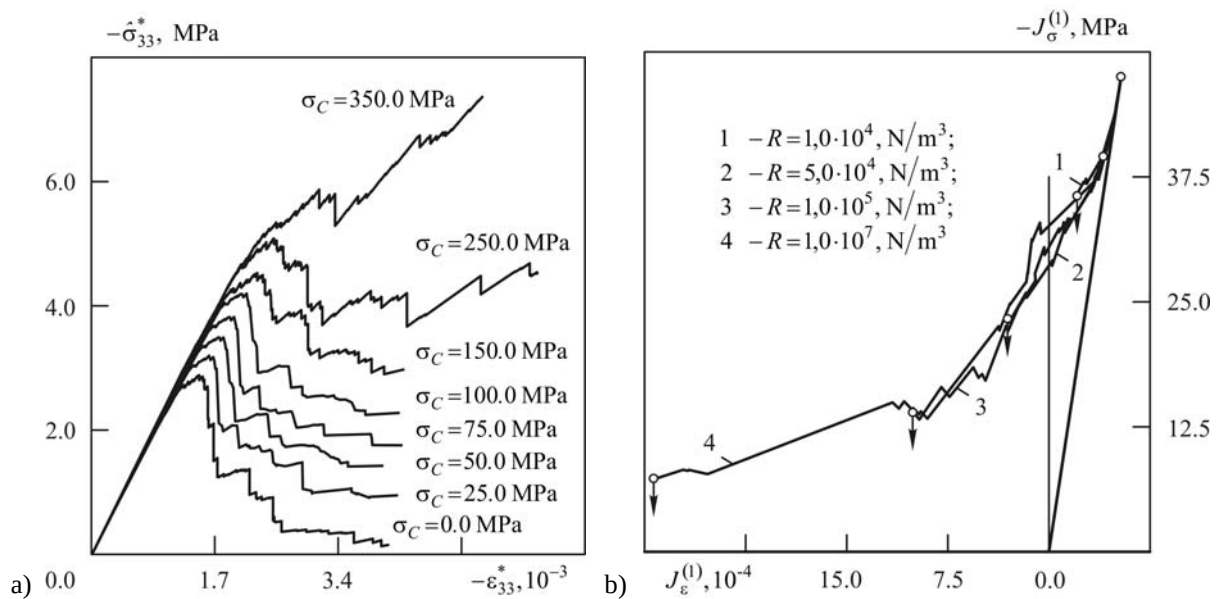


Fig. 1. Uniaxial compression stress-strain diagrams (a) under different lateral pressure σ_C (von Karman scheme). Dilatation under uniaxial compression with different stiffness of the loading system R (b). Stable stress-strain states corresponding to the instant of macrofailure are marked by arrows

The two-level-phenomenological structural model for brittle sandstone was developed with the aim to study the character of collective multi-particle interaction in the defect ensemble, the general laws and the change in failure mechanisms and scale levels of damage evolution under combined triaxial quasistatic loading [1, 2]. A partial or complete loss of load-carrying capacity by structure elements is connected with violation of strength conditions and, as consequence, with jump-like changes of deformational characteristics. The model allowed us to describe the inelastic deformation accompanied by inclination and coarsening of defects as a multistage process of damage accumulation and to determine the instant of rocks media macrofailure as a result of loss of stability of this process. In the course of computational simulations, we found and analyzed such regularities of mechanical

behaviour of brittle sandstone as the strains corresponding to the instant of macrofailure and the character of damage evolution in relation to the stiffness of the loading system, the effect of lateral pressure on strain-softening (Fig. 1, a), the dilatation under uniaxial compression (Fig. 1, b), the unequal resistance of heterogeneous bodies, and the self-supported accumulation of defects.

If the macrofailure is considered to be the critical state, where structural transition under loading results in a loss of continuity in the damaged solids or in reaching of connectivity in the defect ensemble, we can determine parameters widely used in the physics of critical phenomena which characterize collective multi-particle interactions and the mutual arrangement of failed grains. A nonlocal critical dimensional lengths constant for damaged solids is found to exist, which does not depend on the type of stress-strain state and quasistatic proportional and nonproportional loading modes [3, 4]. The constant determines the instant of transition from the stage of accumulation of disperse damage to a localized failure and to the strain-softening. The new nonlocal criterion allow one to determine a unique quantitative relation between the connection of damaged domains and the regularities in the behaviour of isotropic and anisotropic brittle rocks.

The authors acknowledge the support of the Russian Foundation for Basic Research (Grant RFBR–Urals No 17–41–590148).

REFERENCE

1. Vil'deman V.E., Sokolkin Yu.V., Zaitsev A.V. Damage structure evolution of heterogeneous media at supercritical deformation stage. *Mechanics of Composite Materials*, vol. 33, 1997.
2. Sokolkin Yu.V., Wildeman V.E., Zaitsev A.V., Rochev, I.N. Structural damage accumulation and stable post-critical deformation of composite materials. *Mechanics of Composite Materials*, vol. 34, 1998.
3. Zaitsev A.V. regularities of damage accumulation processes and conditions of transition to localized failure of grain composites under quasistatic loading. *Physical Mesomechanics* vol. 7, 2004.
4. Zaitsev A.V. Nonlocal conditions for the transition from damage to a localized failure in granular composites under quasistatic loading. *J. Phys.: Conf. Series*, vol. 181, 2009.

Information about authors

Alexei V. Zaitsev – vice dean in student science, Aerospace Faculty, Perm National Research Polytechnic University, +7 (342) 2391294

E-mail zav@pstu.ru

Vladimir I. Karev – Deputy director for research, Institute for Problems in Mechanics RAS, +7 (495) 4343556

E-mail wikarev@ipmnet.ru

Yuri F. Kovalenko – Head of laboratory, Laboratory of Geomechanics, Institute for Problems in Mechanics RAS, +7 (495) 4343447

E-mail perfolinkgeo@yandex.ru

Yurii V. Sokolkin – professor, Mechanics of Composite Materials and Structures Department, Perm National Research Polytechnic University, +7 (342) 2391294

E-mail zav@pstu.ru

Yurii V. Sidorin – Senior researcher, Laboratory of Geomechanics, Institute for Problems in Mechanics RAS, +7 495 434 3149

E-mail sidorin@ipmnet.ru

Konstantin B. Ustinov – Senior researcher, Laboratory of Geomechanics, Institute for Problems in Mechanics RAS, +7 (495) 4343447

E-mail ustino127@mail.ru

EXACT ANALYTICAL SOLUTIONS TO PROBLEMS ON EQUILIBRIUM STATE OF ELASTIC ANISOTROPIC HEAVY CENTRAL- AND AXIAL-SYMMETRIC BODIES AND THEIR APPLICATIONS TO GEOMECHANICAL PROBLEMS

Zaitsev A. V., Sokolkin Yu. V., Fukalov A. A.

Abstract. Using the decomposition of hoop and radial components of displacement vector to the trigonometrical and generalized power series, the new exact analytical solutions to problems on the equilibrium state of thick-walled heavy anisotropic central- and axial-symmetric bodies are obtained. The estimation of an initial strength of cylindrical and spherical solid-cast mine working supports is carried out on the basis of a multicriteria approach taking into account damage mechanisms of anisotropic axial- and central-symmetric bodies.

Cylindrical and spherical structures and facilities produced of anisotropic materials, and namely solid-cast mine working supports, coal slurry pipelines, and tunnel coating, are widely applied in different industrial spheres. That is why there is a real necessity in obtaining exact analytical solutions on the equilibrium state of thick-walled heavy anisotropic elastic central- and axial-symmetric bodies which are subject to the action of uniform internal lateral pressure; these solutions will be considered for working out engineering methods of initial strength analysis.

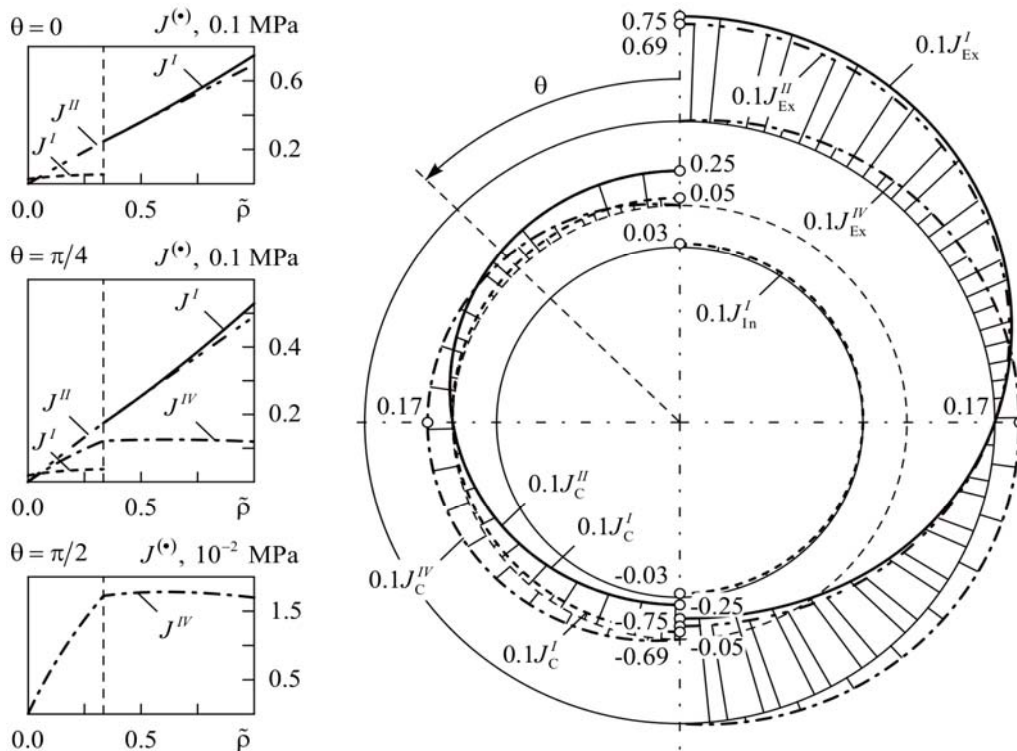


Fig. 1. Distribution of the independent invariant of stress tensor (MPa) on the fixed external ($J_{Ex}^{\bullet}$), free from pressures internal ($J_{In}^{\bullet}$) and contact ($J_C^{\bullet}$) surfaces, with radii $\rho_{In} = 2,5$ m, $\rho_C = 3,1$ m,

$$\text{and } \rho_{Ex} = 4,3 \text{ m; } J^I \equiv \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta}, J^{II} \equiv \sigma_{\rho\rho}, \text{ and } J^{IV} \equiv \sqrt{\sigma_{\varphi\rho}^2 + \sigma_{\theta\rho}^2}$$

New exact analytical solutions to problems on equilibrium state of thick-walled heavy transversally-isotropic spheres [1, 2] and orthotropic cylinders [3], which are fixed on the interior or exterior surfaces and are subject to the action of uniform and/or nonuniform external or internal lateral pressure, are obtained. When integrated heterogeneous system of Lamé differential equations in cylindrical and spherical orthogonal coordinates, the variable separation method led us to reduce the dimension of the problem, and the usage of generalized power series enabled us to write a general solution. The reinforced concrete monolithic roof supports of spherical mining and the surrounding array of sedimentary rocks are considered as a single mechanical system [2]. The influence of geometries and material properties on the distribution of the independent invariants of stress tensor for spherically transversally-isotropic bodies in cross-sections is analyzed in the directions of meridian θ and dimensionless radial $\tilde{\rho}$ coordinates (Fig. 1). The estimation of an initial strength is carried out on

the basis of a multicriteria approach taking into account various damage mechanisms and domains where the failure may be initiated and defined.

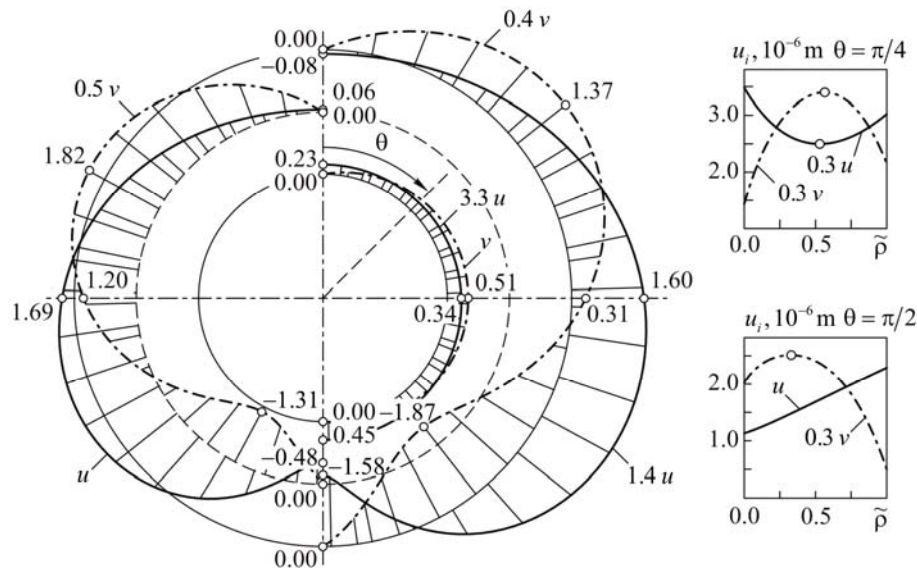


Fig. 2. Distribution of radial ($u, 10^{-6} \text{ m}$) and hoop ($v, 10^{-6} \text{ m}$) displacement in reinforced concrete cylinder on external, internal and median surfaces, with radiuses $\rho_{In} = 3,0 \text{ m}$, $\rho_{Ex} = 5,5 \text{ m}$

The problem on equilibrium state of heavy reinforced concrete cylinder located on foundation soil is considered. Contact surface area was assumed to be known and unchanged. The reaction of soil is given in the form of a quadratic function which meets the condition that its integral sum equals weight of the constructions. The assumption allows us to write the boundary conditions for the determination of the integration constants of partial solution. On the basis of this the distribution of displacements (Fig. 2) and stresses in transversal cross-sections of horizontal monolithic reinforced concrete cylinders are shown, the lower half of which are dug into the soil.

The authors acknowledge the support of the Russian Foundation for Basic Research (Grant RFBR–Urals No 17–41–590148).

REFERENCE

1. Zaitsev A. V., Fukalov A. A. Elastic equilibrium state of thick-walled heavy transversally-isotropic spheres fixed on the interior surface, Samara State Techn. Univ. Mech. Bulletin, No 5(21), 2010 (in Russian)
2. Zaitsev A. V., Sokolkin Yu. V., Fukalov A. A. Initial damage mechanisms of reinforced concrete monolithic supports for spherical mine workings located in sedimentary rock mass, PNRPU Mechanics Bulletin, No 4, 2013 (in Russian)
3. Fukalov A. A., Kutergin A. V. Exact analytical solutions to problems of the equilibrium state of elastic anisotropic heavy central and axial-symmetric bodies and their applications, Vestnik of Lobachevsky State Univ. of N. Novgorod, No4, Is. 3, 2011. (in Russian)

Information about authors

Alexei V. Zaitsev – vice dean in student science, Aerospace Faculty, Perm National Research Polytechnic University, +7 (342) 2391294
E-mail zav@pstu.ru

Yurii V. Sokolkin – professor, Mechanics of Composite Materials and Structures Department, Perm National Research Polytechnic University, +7 (342) 2391294
E-mail zav@pstu.ru

Anton A. Fukalov – Post-graduate student, Mechanics of Composite Materials and Structures Department, Perm National Research Polytechnic University, +7 (342) 2391294
E-mail mr_aa@mail.ru

INFLUENCE OF SINGLE-WALLED CARBON NANOTUBES CHIRALITY ON ITS THERMAL CONDUCTIVITY COEFFICIENT

Zarubin V.S., Sergeeva E.S.

Abstract. The composites – are multiphase materials, which consist of main medium and reinforcing elements. In nowadays such materials are commonly used as a structural for different technical constructions, especially, for parts, which work at high-intensity mechanical and thermal loadings. Composites reinforcing by structure-sensitive includes, such single-walled carbon nanotubes, provides significant improvement of materials thermomechanical characteristics. Composite materials reinforced by nanosized includes are called nanocomposites. The single-walled carbon nanotubes equivalent thermal conductivity coefficients dependences of its chirality are presented in this work. These dependences were obtained by using the heattransfer mathematical model in transverse isotropic medium. Such coefficients allow providing the conditional replacement of the single-walled carbon nanotubes as continuous anisotropic fiber. This fact leads to ability of applying the well-known fiber composites models for thermomechanical properties estimates of this composites type. The presented results are useful for analysis of nanocomposites thermomechanical behavior.

In recent years nanosized objects with high thermoelastic characteristics, plates of graphene, fibers, single- and multi-walled carbon nanotubes being good candidates, as reinforcing elements are considered. It is well known that even a low nanosized graphene inclusions concentration leads to a significant thermoelastic properties improvement of composites, reinforced by these objects [1–4]. During a structure creation from the composite, which must work in high-intensity mechanical and thermal fields it is necessary to know on the one hand an elastic properties estimates of such material and on the other hand – thermomechanical characteristics estimates are also needed. These characteristics are determined by respective properties of reinforcing inclusions, which, in turn, are determined by inclusions geometry. There are significant number of articles, devoted to composites reinforcing elements elastic properties dependences from its geometry characteristics investigation in recent literature. However, the thermophysical properties dependences of such elements from its reference sizes is less investigated. As an object of research in this work was chosen single-walled carbon nanotube. This article is devoted to researching of single-walled carbon nanotubes longitudinal and radial thermal conductivity coefficients dependences from its diameter and configuration, defined by chirality indexes.

Single-walled carbon nanotube – is the cylindrical structure with a diameter up to several tens nanometers, consisting of one graphene plane, curtailed seamlessly into a tube, that is the surface which is laid out by the exact hexagons in which tops carbon atoms are located. Result of these operation depends from an orientation angle of the graphene plane concerning a nanotube axis. Orientation angle, in turn, sets nanotubes chirality, which determines its characteristics. Nanotubes chirality is designated by symbols, specifying coordinates of a hexagon, which as a result of turning of the plane has to coincide with the hexagon, which is in an origin of coordinates. Single-walled carbon nanotubes chirality indexes determine by the unique image its diameter [5].

For mathematical modeling, describing thermophysical properties of single-walled carbon nanotubes reinforced composite materials, nanotube can be approximated as an anisotropic circular cylinder with length considerably surpassing radius.

For obtaining single-walled carbon nanotube efficient thermal conductivity coefficients dependences from its diameter and type mathematical model of thermal energy transfer by heat conductivity was used [6]. Single-walled carbon nanotubes diameters values for various combinations of the chirality indexes were obtained. Also single-walled carbon nanotube efficient thermal conductivity coefficients values were obtained and such coefficients dependences from nanotubes diameter and chirality were received.

The ratios, which are presented in this work, can be applicable to assessment of the equivalent thermal conductivity coefficients of single-walled carbon nanotubes, which are actively considered by scientists as reinforcing inclusions of perspective materials of the constructions working at intensive loadings of various nature. By means of these coefficients and representation of a nanotube an anisotropic circular, materials thermal properties forecast with application of the mathematical models, developed for fibers composites is coming possible.

REFERENCE

1. Kac E.A. Fullereny, uglerodnye nanotrubki i nanoklastery. Rodoslovnaja form i idej. M.: Izd-vo LKI, 2008. 296 p.
2. Zarubin V.S., Sergeeva E.S., Shishkina S.I. Ocenki uprugih svojstv matricy kompozita, uprochnennoj uglerodnymi nanotrubkami // Nauka i obrazovanie. MGTU im. N.Je. Baumana. Jelektron. zhurn. 2016. no. 9. pp. 155–170. DOI: 10.7463/0916.0844318. Rezhim dostupa: <http://technomag.neicon.ru/doc/844318.html> (data obrashhenija 30.01.2017).
3. Sergeeva E.S. Issledovanie uprugih harakteristik kompozitov s jellipsoidal'nymi vkljuchenijami. Molodezhnyj nauchno-tehnicheskij vestnik MGTU im. N.Je Baumana. Jelektron. zhurn. 2016. no. 5. Rezhim dostupa: <http://sntbul.bmstu.ru/doc/839933.html> (data obrashhenija 30.01.2017).
4. Sergeeva E.S. Issledovanie uprugih harakteristik nanokompozitov. Molodezhnyj nauchno-tehnicheskij vestnik MGTU im. N.Je Baumana. Jelektron. zhurn. 2016. no. 8. Rezhim dostupa: <http://sntbul.bmstu.ru/doc/846958.html> (data obrashhenija 30.01.2017).
5. Eleckij A.V. Uglerodnye nanotrubki i ih jemissionnye svojstva. Uspehi fizicheskikh nauk. 2002. vol. 172. no 9. pp. 403–438.
6. Zarubin V.S. Ocenki jekvivalentnyh koeficientov teploprovodnosti fullerena i odnoslojnoj uglerodnoj nanotrubki. Inzhenernyj zhurnal: nauka i innovacii. 2013. vol. 4. URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/hidden/669/html/>.

Information about authors

Zarubin V.S. – Dr. Sci. (Eng.), professor of «Applied Mathematics» department of the Bauman Moscow State Technical University. +7-499-263-63-26

E-mail: zarubin@bmstu.ru

Sergeeva E.S. – engineer of JSC «Kompozit»; post graduate student, Bauman Moscow State Technical University, «Applied Mathematics» department. +7-965-323-0-46

E-mail: sergeeva.e.s@outlook.com

ESTIMATION OF SECOND-ORDER ELASTIC MODULI FOR CUBIC SINGLE CRYSTALS

Zubko I.Yu.

Abstract. The exact expressions for both first and second order elastic moduli computations within the discrete atomistic modelling approach are found for the introduced interatomic interaction potential of the embedding type. For the cubic lattices the first order elastic moduli tensor is found to be symmetric and the second-order elastic tensor is nonsymmetric at any temperature.

For many applications the second-order elastic properties of a material are needed. But experimental methods do not allow their obtaining. So the aim of the study is to demonstrate that the atomistic approach can give an estimation of the second-order elastic moduli. Metals with a cubic structure (FCC and BCC as examples) are considered using the atomistic statics. Some aspects of heating imitation in the lattice statics approach and changing the elastic moduli under heating are considered. The elastic energy density u in the case of small deformations is accepted in the following form

$$u = \frac{1}{2}(\mathbf{F} - \mathbf{I} - \mathbf{w}_{\#}) : \mathbf{C} : (\mathbf{F} - \mathbf{I} - \mathbf{w}_{\#}) + \frac{1}{2} \mathbf{\Gamma} : \mathbf{D} : \mathbf{\Gamma} \quad (1)$$

where $\mathbf{I}$ is the unit second rank tensor, $\mathbf{w}_{\#}$ is the tensor of a small lattice rotation, $\mathbf{\Gamma}^T = \nabla \mathbf{w}_{\#}$, $\mathbf{w}_{\#}$ is the axial vector for the tensor $\mathbf{w}_{\#}$, $\mathbf{C}$ and $\mathbf{D}$ are the generally nonsymmetric fourth rank tensors of the first- and the second-order elastic moduli correspondently. Tensor $\mathbf{\Gamma}$ explains the lattice curvature; and it is considered further as an independent degree of freedom for the lattice. Such form is obtained from a general representation of the elastic energy density of Cosserat continuum, introduced for the case of the finite-strain deformation [1]. In order to compute the elastic moduli using the lattice statics, the specimen potential energy in the actual configuration is divided by its volume in the initial equilibrium state and equated with the elastic energy density u . All the moduli are found as the second derivatives of the potential energy density u over the components of the corresponding deformation measures.

For the aim of the crystal temperature control the computational-statistical approach to studying thermo-mechanical properties of the finite sized crystals is presented. The heat oscillations of the atoms are imitated by applying random perturbations with the fixed amplitude A on the system of atoms under the uniform distribution of directions for the atoms' shifts in 3D space.

A set of the interatomic potentials including the embedded atom method in Finnis-Sinclair [2], Abell-Daw-Baskes [3] and other formulations was considered. The modified empiric embedded atom potential which is partially based on the Mie's family potentials was suggested in the next form

$$\Phi = \frac{\beta}{m-n} \sum_{i=1}^{M-1} \left[n \sum_{j=i+1}^M \frac{\alpha^m}{r_{(ij)}^m} - m \sum_{j=i+1}^M (1-c_{ij}) \frac{\alpha^n}{r_{(ij)}^n} \right] - \frac{\beta}{m-n} \sum_{i=1}^M m \left[\frac{1}{2} \sum_{j=1, j \neq i}^M c_{ij} \frac{\alpha^{np}}{r_{(ij)}^{np}} \right]^{1/p} \quad (2)$$

where $r_{(ij)}$ is the distance between i -th and j -th atoms, M is the total number of the sample atoms, m and n are power exponents according to the Mie's potential form, p is the embedding exponent, the set of the c_{ij} parameters satisfies the conditions: $c_{ij} = 1$ for all j -th atoms, which form the local electron density in the neighbourhood of i -th atom and $c_{ij} = 0$ for all other atoms; α is the equilibrium distance between the isolated pair of atoms, β is the energy of their interaction.

Let the vectors $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ be the right orthonormal triple. When investigating the elastic properties of the sample, a pure stretching along the axis $\mathbf{l}$ is given by the deformation gradient $\mathbf{F} = \mathbf{I} + (\lambda - 1)\mathbf{l}\mathbf{l}$, λ — the stretch ratio, as well as a simple shear in the plane with the normal $\mathbf{n}$ directed to $\mathbf{b}$, $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \gamma \mathbf{b}\mathbf{n}$, where γ is the shear intensity. The motion law which results in getting the lines of the constant curvature with a value k (which are placed in the plane orthogonal to the vector $\mathbf{n}$) from the straight material lines directed along the $\mathbf{l}$ vector (while the lines directed along the vector $\mathbf{m}$ remain straight) has the form

$$\mathbf{r}^{(\text{curving})} = \mathbf{R} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{l}\mathbf{l}) + k^{-1} \sin(k \mathbf{l} \cdot \mathbf{R}) \mathbf{l} - k^{-1} (1 - \cos(k \mathbf{l} \cdot \mathbf{R})) \mathbf{m} \quad (3)$$

The transformation of the straight material lines (initially parallel to $\mathbf{m}$) into the helical lines with the $\mathbf{m}$ -axis gives the material volume conservation as well as (3) leads and is written as

$$\mathbf{r}^{(\text{torsion})} = (1 - \cos(a \mathbf{m} \cdot \mathbf{R})) \mathbf{m} \mathbf{m} \cdot \mathbf{R} + \cos(a \mathbf{m} \cdot \mathbf{R}) \mathbf{R} + \sin(a \mathbf{m} \cdot \mathbf{R}) \mathbf{m} \times \mathbf{R}, \quad (4)$$

where the step of helical line is $2\pi a$, its torsion is $\kappa = a / (a^2 + b^2)$, its curvature is $k = b / (a^2 + b^2)$, $b^2 = \mathbf{R} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{mm}) \cdot \mathbf{R}$. The use of (3-4) shows that Γ^{ii} components are expressed through the torsion of the material lines around $\mathbf{e}_i$ axes, Γ^{ij} components are equal to the half-values of the material lines' curvature around $\mathbf{e}_i$ axes in the $\mathbf{e}_j$ -direction. In the case of small distortions Γ measure is additive. In order to find D_{1111} , D_{1122} moduli in the crystallographic basis $\mathbf{e}_i = \mathbf{e}^i$, a simultaneous torsion around two axes is considered, which results into $\Gamma = -\frac{1}{2}\alpha_1(\mathbf{I} + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1) - \frac{1}{2}\alpha_3(\mathbf{I} + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3)$ expression according to (4). To determine D_{1212} and D_{1221} moduli, a simultaneous curving (3) of the material lines is applied in the orthogonal planes with $\Gamma = \frac{1}{2}k_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}k_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3$ tensor.

The above potential (2) contains interatomic distances. Affinor $\mathbf{F}$ which determines the specimen deformation is homogeneous while computing the first order moduli, so the interatomic distance in the actual state is found using the right Cauchy-Green strain $\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$, $|\mathbf{r}_{i,j}| = \sqrt{(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j) \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j)}$. Estimation of the second order elastic moduli requires applying the uniform curvatures; they are defined by the inhomogeneous tensor $\mathbf{F}(\mathbf{R})$, i.e. the interatomic distance in the actual configuration is found in a more complicated way $|\mathbf{r}_{i,j}| = \sqrt{\{\mathbf{R}_i \cdot \mathbf{F}^T(\mathbf{R}_i) - \mathbf{R}_j \cdot \mathbf{F}^T(\mathbf{R}_j)\} \cdot \{\mathbf{F}(\mathbf{R}_i) \cdot \mathbf{R}_i - \mathbf{F}(\mathbf{R}_j) \cdot \mathbf{R}_j\}}$. The exact expressions for both first and second order elastic moduli computation are found for the above interatomic potential. They are written using the atoms placements from the initial equilibrium state.

SUMMARY

The first-order elastic moduli of BCC- and FCC- lattices are found to be symmetric and depending on the specimen size. These dependencies have horizontal asymptotes enabling the identification of the interatomic potential parameters by the known macroscopic properties. The introduced potential allows getting different values of the Poisson's ratio (from 0.1 up to 0.5) under the varying power exponents m and n . After identifying the potential parameters using the lattice spacing, the Poisson's ratios and one of the Young moduli, this potential allows obtaining very precise values for all other (three for the case of cubic symmetry) anisotropic elastic first-order moduli. The potential parameters which have been found are used to give the theoretical estimation of the second-order elastic properties. All the characteristics are found to be also dependent on the temperature. The obtained elastic moduli tensor $\mathbf{C}$ is symmetric and tensor $\mathbf{D}$ of the second-order elastic properties is nonsymmetric at any temperature.

ACKNOWLEDGEMENTS

The work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (grant No. 17-41-590377).

REFERENCE

1. Pietraszkiewicz W., Eremeyev V.A. On natural strain measures of the nonlinear micropolar continuum. International Journal of Solids and Structures, 2009. V. 46. Pp. 774–787.
2. Finnis M.W., Sinclair J.E. A simple empirical N-body potential for transition metals. Philosophical Magazine A, 1984. V. 50:1. Pp. 45-55.
3. Daw M.S., Baskes M.I. Embedded-atom method: derivation and application to impurities, surfaces, and other defects in metals. Physical Review B, 1984. V. 29, N 12. Pp.6443-6453.

Information about authors

Zubko Ivan Yurievich – Associate Professor, Perm National Research Polytechnic University, Department of Mathematical Modelling of Systems and Processes (+7 342) 239 12 97
E-mail: zoubko@list.ru

ОГЛАВЛЕНИЕ

Dedication to Professor Alexander Vladimirovich Manzhirov	5
Аветисян А.С. ЭЛЕКТРОАКУСТИЧЕСКИЙ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЬ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ УПРУГИХ ВОЛН.....	13
Агабекян П.В., Ароян Э.П. КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОЙ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛОСКОСТИ С КОНЕЧНЫМИ И ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМИ СТРИНГЕРАМИ	15
Агаловян Л.А., Гулгазарян Л.Г. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ДВУХСЛОЙНОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ НАЛИЧИИ ВЯЗКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ	17
Агаян К.Л., Закарян В.Г., Мусаелян А.А. ПРОДОЛЬНЫЙ СДВИГ СОСТАВНОГО УПРУГОГО ПРОСТРАНСТВА С КОНЦЕНТРАТОРАМИ НАПРЯЖЕНИЙ ТИПА ТРЕЩИН И ЖЁСТКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ	19
Айроян Г.С., Айроян С.Г., Карапетян К.А. ОСОБЕННОСТИ СОПРОТИВЛЕНИЯ СДВИГУ ГЛИНИСТЫХ ГРУНТОВ В УСЛОВИЯХ ДИНАМИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ С МЕНЯЮЩЕЙСЯ В ШИРОКИХ ПРЕДЕЛАХ КОНСИСТЕНЦИЕЙ. (С ЦЕЛЬЮ ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ СКЛОНОВ).....	21
Акопян В.Н., Акопян Л.В. НАПРЯЖЁННОЕ СОСТОЯНИЕ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО РАВНОМЕРНО СЛОИСТОГО ПРОСТРАНСТВА С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВНУТРЕННИХ ТРЕЩИН	23
Акопян В.Н., Даштоян Л.Л. НАПРЯЖЁННОЕ СОСТОЯНИЕ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ РАВНОМЕРНО СЛОИСТОЙ ПЛОСКОСТИ С ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ ВНУТРЕННИХ ТРЕЩИН.....	25
Амирбекян А.Н., Мкртчян М.М., Шемян Л.А. ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ИЗГИБА БАЛОКНА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ.....	27
Арутюнян А.Р., Арутюнян Р.А. УСЛОВИЕ ПЕРЕХОДА В НЕСТАБИЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ (ШЕЙКООБРАЗОВАНИЕ) МЕТАЛЛИЧЕСКОГО ОБРАЗЦА ПРИ РАСТЯЖЕНИИ	29
Арутюнян Л.А., Едоян В.А. ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ВНЕШНОСТИ КРУГОВОЙ ЛУНОЧКИ	31
Атоян Л.А., Терзян С.А. ОТРАЖЕНИЕ УПРУГОЙ СДВИГОВОЙ ВОЛНЫ ОТ ПОВЕРХНОСТИ ФЕРРОМАГНИТНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА	33
Багдасарян Г.Е., Даноян Э.А., Микилян М.А. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ МАГНИТОСТРИКЦИОННОЙ ПЛАСТИНКИ	35
Багдасарян Г.Е., Микилян М.А., Варданян И.А. ТЕРМОУПРУГАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ЗАМКНУТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ГАЗА	37
Барсегян В.Р., Барсегян Т.В. ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НАГРУЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ	39
Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О ДИВЕРГЕНЦИИ СЖАТОЙ ПАНЕЛИ ПРИ НАБЕГАНИИ СВЕРХЗВУКОВОГО ПОТОКА ГАЗА НА ЕЁ СВОБОДНЫЙ КРАЙ	41
Белубекян М.В., Саноян Ю.Г. КОЛЕБАНИЯ, ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ В ОКРЕСТНОСТИ ШАРНИРНОГО СОЕДИНЕНИЯ СОСТАВНОЙ ПЛАСТИНЫ	43
Белубекян Э.В., Даниелян С.В., Аветисян Г.Р. ОПТИМИЗАЦИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ КУСОЧНО-ПОСТОЯННОЙ ТОЛЩИНЫ, ИЗГОТОВЛЕННОЙ ИЗ	

КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА, ПРИ ИЗГИБЕ С УЧЁТОМ ВЛИЯНИЯ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ	45
Берберян А.Х., Гараков В.Г. ОТРАЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ ОТ ГРАНИЦЫ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА КУБИЧЕСКОЙ СИММЕТРИИ	47
Бычков П.С., Козинцев В.М., Попов А.Л., Ченцов А.В. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ДЕТАЛЯХ ПРИ ИХ ПРОИЗВОДСТВЕ МЕТОДОМ ПОСЛОЙНОЙ ФОТОПОЛИМЕРИЗАЦИИ.	49
Варданян И.А., Сагоян Р.О. ИССЛЕДОВАНИЕ АМПЛИТУДА-ЧАСТОТНОЙ ЗАВИСИМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ТЕРМОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ УДЛИНЕННОЙ ПЛАСТИНКИ В КРИТИЧЕСКИХ СКОРОСТЯХ ОБТЕКАЮЩЕГО ПОТОКА СВЕРХЗВУКОВОГО ГАЗА	51
Ватульян А.О., Недин Р.Д., Дударев В.В. К МОДЕЛИРОВАНИЮ И ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ОСТАТОЧНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В ЭЛЕКТРОУПРУГИХ ТЕЛАХ.....	53
Виндокуров И.В., Виндокуров Д.В., Владыкин А.В., Келлер И.Э., Ощепкова Ю.Д., Трофимов В.Н. НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ КАЛИБРОВОЧНОЙ ПЛАСТИНЫ, ПОДВЕРГНУТОЙ ДРОБЕСТРУЙНОЙ ОБРАБОТКЕ	55
Гаспарян А.В., Давтян З.А., Мирзоян С.Е. ЗАДАЧА ЛАМЕ ДЛЯ МНОГОСЛОЙНОГО ВЯЗКОУПРУГОГО ПОЛОГО ШАРА С УЧЁТОМ НЕОДНОРОДНОГО СТАРЕНИЯ.....	57
Геворгян Г.З., Саакян А.А. О ДИНАМИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ С ОДНИМ СВОБОДНЫМ КРАЕМ	59
Геворкян Г.А. ОБ ОДНОЙ РАЗНОВИДНОСТИ ДИНАМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА МАНИПУЛЯТОРОВ ПОСРЕДСТВОМ ОБРАЩЕНИЯ ИХ МАТРИЦЫ МАСС	61
Геворкян Р.С. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ И СМЕШАННОЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ОРТОТРОПНЫХ ТОНКИХ ПОЛОС КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ	63
Григорьев Ю.М. РЕГУЛЯРИЗИРОВАННОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАМЕ	65
Григорян А.Ж. КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОЙ СОСТАВНОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С МЕЖФАЗНОЙ ТРЕЩИНОЙ.....	67
Григорян Э.Х., Агаян К.Л., Багдасарян Р.А. РАСПРОСТРАНЕНИЕ УПРУГИХ ВОЛН В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ С УСИЛИВАЮЩИМ ТОНКИМ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМ УПРУГИМ СЛОЕМ	69
Гришин В.И., Коваленко Н.А., Гусева Н.В. ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛИ ПРОГРЕССИРУЮЩЕГО ПОВРЕЖДЕНИЯ К ОЦЕНКЕ ПРОЧНОСТИ КОМПОЗИТНЫХ СОЕДИНЕНИЙ	71
Гукасян А.А., Матевосян А.Г. ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ ТОЧКИ ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ.....	73
Гукасян А.А., Ордян А.А. ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА ОБСЛУЖИВАНИЯ МАНИПУЛЯТОРОМ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО УЧАСТКА	75
Гулгазарян Г.Р. О СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ТОНКОЙ УПРУГОЙ ОРТОТРОПНОЙ НЕЗАМКНУТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ СО СВОБОДНЫМИ КРАЯМИ...77	

Джилаван С.А., Саргсян А.С. ДИФРАКЦИЯ ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ СДВИГА НА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ТРЕЩИНЕ В СОСТАВНОМ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ	79
Евстифеев А.Д. ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ ПРОЧНОСТИ АЛЮМИНИЕВОГО СПЛАВА АД1 ПРИ РАСТЯЖЕНИИ	81
Ерофеев В.И., Леонтьева А.В., Мальханов А.О., Шекоян А.В. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПЛОСКИХ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН В МАТЕРИАЛАХ С ТОЧЕЧНЫМИ ДЕФЕКТАМИ.	83
Жамакочян К.А. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СТЕПЕННЫХ РЯДОВ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ПРИКЛАДНОЙ МОДЕЛИ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ТОНКИХ ПЛАСТИН СО СТЕСНЁННЫМ ВРАЩЕНИЕМ	85
Жилин С.Г., Комаров О.Н., Соснин А.А. РЕГУЛИРОВАНИЕ УПРУГОГО ОТКЛИКА МАТЕРИАЛА ПРОТЯЖЁННЫХ ПРЕССОВОК СФОРМИРОВАННЫХ ХОЛОДНЫМ ВЫДАВЛИВАНИЕМ ЧЕРЕЗ МУНДШТУК ПОЛИМЕРНОЙ ДИСПЕРСНОЙ КОМПОЗИЦИИ	87
Казаков К.Е., Курдина С.П. КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ОСНОВАНИЯ С ПОКРЫТИЕМ И СИСТЕМЫ КОЛЬЦЕВЫХ ШТАМПОВ СО СЛОЖНЫМИ ФОРМАМИ ПОВЕРХНОСТЕЙ	89
Казарян А.А. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЛОКАЛИЗОВАННОЙ ЭЛЕКТРОУПРУГОЙ СДВИГОВОЙ ВОЛНЫ В СОСТАВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ С ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ТРЕЩИНОЙ	91
Карапетян К.А., Айроян С.Г., Манукян Е.С. О ВОЗМОЖНОСТИ ПОЛУЧЕНИЯ ЦЕМЕНТОГРУНТНЫХ КОМПОЗИТОВ ПОВЫШЕННОЙ ПРОЧНОСТИ НА ОСНОВЕ БЕЛОЗЕМОВ КАРБОНАТНОГО СОСТАВА.....	93
Кириллова О.И., Попов В.Г. ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА БЕСКОНЕЧНОГО ПОЛОГО ЦИЛИНДРА ПРОИЗВОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ С ТУННЕЛЬНОЙ ТРЕЩИНОЙ	95
Коцур О.С. МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЯЗКИХ ТЕЧЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ВИХРЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ	97
Краус Е.И., Шабалин И.И., Шабалин Т.И. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМАЦИИ И РАЗРУШЕНИЯ СЛОЖНЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ ПРИ УДАРНОЙ НАГРУЗКЕ.....	99
Кукуджанов К.В., Левитин А.Л. О ЗАЛЕЧИВАНИИ ПОВРЕЖДЁННОСТИ МЕТАЛЛА ИМПУЛЬСАМИ ТОКА ВЫСОКОЙ ПЛОТНОСТИ.....	101
Манжиров А.В., Михин М.Н. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТНОГО РОСТА	103
Мартirosян А.Н., Давтян А.В., Динунц А.С., Мартirosян Г.А. РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ О ЗАЛЕЧИВАНИИ ГЕОФИЗИЧЕСКОЙ ТРЕЩИНЫ В ТЕРМОУПРУГОЙ СРЕДЕ ПРИ НАЛИЧИИ ПОТОКА ФЛЮИДА.....	105
Мурашкин Е.В., Дац Е.П. НЕОБРАТИМОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ МНОГОСЛОЙНОГО ТЕРМОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ШАРА	107
Оганесян Э.К. ДЕЙСТВИЕ СОБСТВЕННОГО ВЕСА НА НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА.....	109
Папян А.А., Саркисян С.В. О ЛОКАЛИЗОВАННЫХ ПЛАНАРНЫХ КОЛЕБАНИЯХ В ОКРЕСТНОСТИ СВОБОДНОГО КРАЯ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОЙ ПОПЕРЕЧНО-ПОЛЯРИЗОВАННОЙ ПЛАСТИНКИ	111

Попов В.Г. ЗАДАЧА О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВОЛН ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА С V-ПОДОБНЫМ ТУННЕЛЬНЫМ ДЕФЕКТОМ	113
Романов А.А. МЕТОД ГЕНЕРАЦИИ СЕТКИ, ОСНОВАННЫЙ НА СИСТЕМЕ ПРУЖИН.	115
Саакян А.В., Амирджанян А.А. МЕТОД МЕХАНИЧЕСКИХ КВАДРАТУР ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ РАЗНОГО ТИПА	117
Савельева И.Ю., Журавский А.В. ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ В НАРАЩИВАЕМОЙ ПЛАСТИНЕ С УЧЁТОМ НЕЛОКАЛЬНЫХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛА	119
Саргсян А.М. ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ КРУГОВОГО СЕКТОРА, ОДНА СТОРОНА КОТОРОГО СОПРИКАСАЕТСЯ С ЖЁСТКИМ ШТАМПОМ БЕЗ ТРЕНИЯ, ДРУГАЯ СТОРОНА УСИЛЕНА СТРИНГЕРОМ	121
Саркисян А.А., Саркисян С.О. УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ ПО МИКРОПОЛЯРНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ	123
Саркисян С.О., Хачатрян М.В. КЛАССИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СТАТИКИ УПРУГИХ ТОНКИХ СТЕРЖНЕЙ С КРУГОВОЙ ОСЬЮ С УЧЁТОМ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ И МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ	125
Стадник Н.Э., Романов А.А. ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ РОСТА КРОВЕНОСНЫХ СОСУДОВ	127
Тагворян В.В. О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ НУЖД СЕЙСМОЛОГИИ.....	129
Хайрнасов К.З. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБОЛОЧЕЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ ОДНОРОДНЫХ И КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ИНТЕНСИВНЫХ КРАТКОВРЕМЕННЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ ПРИ БОЛЬШИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ.....	131
Хайрнасов К.З. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ОБОЛОЧЕЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ БОЛЬШИХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЯХ	133
Хачатрян А.М., Баласанян Е.С. ОБ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ АНИЗОТРОПНОЙ ДВУХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ НЕПОЛНОМ КОНТАКТЕ МЕЖДУ СЛОЯМИ	135
Хозин В.Г., Гиздатуллин А.Р. СОВМЕСТНАЯ РАБОТА ПОЛИМЕРКОМПОЗИТНОЙ АРМАТУРЫ С ЦЕМЕНТНЫМ БЕТОНОМ	137
Чебаков М.И., Данильченко С.А., Ляпин А.А. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТЕЛ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ С УЧЁТОМ ИЗНОСА.....	139
Шекоян А.В. ТЕРМОУПРУГИЕ ВОЛНЫ В НЕРАВНОВЕСНОЙ СРЕДЕ С ТОЧЕЧНЫМИ ДЕФЕКТАМИ.....	141
Шекян Г.Г., Геворгян А.В. КОЛЕБАНИЕ ВЫСОКОСКОРОСТНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИН С РОТОРАМИ НА ПОДШИПНИКАХ КАЧЕНИЯ.....	143
Arkhyphenko K.M., Kryvyi O.F. SOME BOUNDARY PROBLEMS FOR ANISOTROPIC QUARTER-PLANE	145
Avakian Artjom, Ricoeur Andreas MODELING OF MULTIFERROIC COMPOSITES BY MEANS OF PHENOMENOLOGICALLY OR PHYSICALLY MOTIVATED CONSTITUTIVE MODELS	147

Avetisyan V.V. CONTROL OF ELECTROMECHANICAL SYSTEM WITH ONE DEGREE OF FREEDOM UNDER JOINT CONSTRAINTS.....	149
Banichuk N.V., Ivanova S.Yu., Makeev E.V., Sinitsyn A.V. CONTROL OF VIBRATIONS OF A MOVING BEAM.....	151
Barkanov E., Akishin P., Miazza N.L., Galvez S. and Pantelelis N. EXPERIMENTAL VALIDATION OF THERMO-CHEMICAL ALGORITHM FOR A SIMULATION OF PULTRUSION PROCESSES	153
Borodin E.N., Gruzdkov A.A., Mayer A.E., Selyutina N.S. PHYSICAL NATURE OF STRAIN RATE SENSITIVITY OF METALS AND ALLOYS AT HIGH STRAIN RATES	155
Buzyurkin A.E., Kraus E.I., Lukyanov Ya.L. THE FABRICATION OF ALUMINUM OXIDE COMPACTS BY EXPLOSIVE CONSOLIDATION	157
Chentsov A.V., Lisovenko D.S.TWO-DIMENSIONAL AUXETIC DESIGN FOR BIODEGRADABLE STENT	159
Daniel Paul, R. Velmurugan, N.K. Gupta, A.V. Manzhurov. FABRICATION AND ANALYSIS OF THE FLEXURAL PROPERTIES OF SYNTACTIC FOAM - GFRP SANDWICH COMPOSITES	161
Dobrokhotov S.Yu., Tolstova O.L, Vargas C.A. ON THE INFLUENCE OF THE ELASTIC BASE ON THE LINEAR LONG WEAK DISPERSIVE WATER WAVES CREATED BY THE LOCALIZED UNDERGROUND SOURCE	163
Filippov A.A., Fomin V.M. DETERMINATION OF THE MECHANICAL CHARACTERISTICS OF NANOMATERIALS UNDER TENSION AND COMPRESSION.....	164
Galichyan T.A., Filippov D.A., Laletin V.M., Firsova T.O., Poddubnaya N.N. MAGNETO-ELECTRIC TRANSITION IN NICKEL-GALLIUM ARSENIDE-NICKEL MULTIFERROIC STRUCTURE	166
Galichyan T.A., Filippov D.A., Tihonov A.A., Laletin V.M., Firsova T.O., Manicheva I.N. MAGNETOELECTRIC EFFECT IN A SANDWICH STRUCTURE OF GALLIUM ARSENIDE-NICKEL-TIN-NICKEL.....	168
Gevorgyan G.Z. ON BENDING VIBRATIONS OF ORTHOTROPIC STRIPS OR BEAMS OF VARIABLE THICKNESS WITH ACCOUNT OF TRANSVERSE EFFECTS UNDER THE CONDITIONS OF ELASTIC JOINTS.....	170
Ghannadisl A. RESPONSE OF CRACKED BEAM USING DYNAMIC GREEN FUNCTION.....	172
Ghazaryan K.B., Mozharovsky V.V., Ohanyan S. K. SHEAR WAVES IN A TWO-PHASE OPPOSITELY POLARIZED VISCOELASTIC PIEZOELECTRIC WAVEGUIDE.....	174
Goryacheva I.G. THE MODELS OF FRICTION OF VISCOELASTIC BODIES UNDER VARIOUS INTERFACE CONDITIONS	176
Grigoryan M.S. ON A CONTACT INTERACTION OF TWO IDENTICAL STRINGERS WITH ELASTIC SEMI-INFINITE CONTINUOUS OR VERTICAL CRACKED PLATE.....	178
Kanetsyan E.G., Mkrtchyan M.S., Mkhitarian S.M. THE CONTACT INTERACTION OF THIN-WALLED ELEMENTS WITH AN ELASTIC LAYER AND AN INFINITE CIRCULAR CYLINDER UNDER TORSION	180
Karev V.I., Klimov D.M., Kovalenko Yu.F., Ustinov K.B. MODELING OF MECHANICAL AND FILTRATION PROCESSES NEAR THE WELL ACCOUNTING ANISOTROPY	182
Kerobyan A.V., Sahakyan K.P. LOADS TRANSFER FROM FINITE NUMBER FINITE STRINGERS TO AN INFINITE SHEET THROUGH ADHESIVE SHEAR LAYERS	184

Khachatryan V.M. ON THE EIGENFREQUENCIES OF ELASTIC SHEAR WAVES PROPAGATING IN AN INHOMOGENEOUS LAYER.....	186
Khokhlov Andrew V. GENERAL PROPERTIES OF STRESS-STRAIN CURVES PRODUCED BY THE NONLINEAR MAXWELL-TYPE VISCOELASTOPLASTIC MODEL	188
Khokhlov Andrew V. A NON-LINEAR CONSTITUTIVE RELATION FOR RHEOLOGICAL PROCESSES IN AGEING MATERIALS WITH MEMORY.....	190
Kolesnikov V.I., Ivanochkin P.G., Kolesnikov I.V. FORMATION OF SURFACE NANOSTRUCTURES ON TRIBOCONTACT FOR CREATING ANTI-FRICTION LAYER WITH PREDETERMINED TRIBO-PHYSICAL CHARACTERISTICS	192
Kryvyi O.F., Morozov Yu.O. AN ELLIPTICAL HEAT-PERMEABLE INTERFACIAL CRACK IN A PIECEWISE-HOMOGENEOUS TRANSVERSALLY ISOTROPIC SPACE UNDER THE ACTION OF A THERMO-MECHANICAL LOAD.....	194
Logvinov O.A., Melkumyan L.A. POLYMER FLOODING AS ENHANCED OIL RECOVERY METHOD.....	196
Lokoshchenko A.M., Fomin L.V. DELAYED FRACTURE OF PLATES UNDER CREEP CONDITION IN UNSTEADY COMPLEX STRESS STATE IN THE PRESENCE OF AMBIENT MEDIUM	198
Manzhairov Alexander V. SURFACE GROWTH THEORY AND ITS APPLICATIONS	200
Mkhitaryan S.M. ON A CLASS OF PROBLEMS ON INTERACTION OF VARIOUS TYPE STRESS CONCENTRATORS WITH AN ELASTIC SEMI-INFINITE PLATE.....	202
Murashkin E.V., Radayev Y.N. FULL THERMOMECHANICAL COUPLING IN MODELLING OF MICROPOLAR THERMOELASTICITY	204
Nazaikinskii V.E. NEAR-BOUNDARY ASYMPTOTICS IN THE PROBLEM ON THE RUN-UP OF LONG WAVES ON A SHALLOW BEACH	206
Onanov G.G., Skubachevskii A.L. ELLIPTIC DIFFERENTIAL DIFFERENCE EQUATIONS IN THE THEORY OF SANDWICH SHELLS	208
Páczelt István, Baksa Attila ONE POSSIBLE NUMERICAL SOLUTION FOR SOME CONTACT PRESSURE OPTIMIZATION PROBLEMS	209
Piliposyan D. POLARITON RESONANCES IN MULTILAYERED PIEZOELECTRIC SUPPERLATTICES	211
Radayev Y.N., Kovalev V.A. HARMONIC WAVES IN A MICROPOLAR CIRCULAR CYLINDER.....	213
Rezaei Masoud OPTIMAL STABILIZATION OF ROTATIONAL MOTION OF A RIGID BODY AROUND ITS CENTER OF GRAVITY	215
Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. THE FRACTIONAL DERIVATIVE MODEL OF VISCOELASTICITY CONSIDERING BULK RELAXATION.....	217
Sargsyan M.Z., Poghosyan H.M. MIXED BOUNDRY PROBLEM FOR ORTHOTROPIC STRIP-RECTANGLE WITH VARIABLE COEFFICIENTS OF ELASTICITY	219
Shavlakadze Nugzar THE BOUNDARY VALUE CONTACT PROBLEM OF ELECTROELASTICITY FOR PIECEWISE-HOMOGENEOUS PIEZO-ELECTRIC PLATE WITH ELASTIC INCLUSION AND CUT	221
Spector A.A., Yuan D., Somers S., Grayson W.L. BIOMECHANICS OF STEM CELLS.....	223
Silberschmidt V.V. MECHANICS OF BIOMATERIALS	225

Stepanov F.I. CONTACT PROBLEM FOR A SOLID INDENTER AND A VISCOELASTIC HALF-SPACE DESCRIBED BY SPECTRUM OF RELAXATION AND RETARDATION TIMES.....	227
Teraud W.V. RESEARCH OF THE TIME OF DEFORMATIONS LOCALIZATION (NECKING FORMATIONS) AT STRETCHING OF SAMPLES IN THE CONDITIONS OF CREEP	229
Valesyan Sona INVESTIGATION OF THE INFLUENCE OF AGEING ON THE MECHANICAL PROPERTIES OF POLYMER COMPOSITES DURING UNIDIRECTIONAL TENSILE LOADING	231
Vardanyan Sedrak. VIBRATION OF MAGNETOELASTIC CYLIDRICAL SHELLS FOR VARIOUS BOUNDARY CONDITIONS.....	233
Vasilyan N.G. THE INVESTIGATION OF STRESS CONCENTRATION IN CORNER POINTS FOR ORTHOTROPIC PLATE BENDING PROBLEM	235
Zaitsev A.V., Karev V.I., Kovalenko Yu.F., Sidorin Yu.V., Sokolkin Yu.V., Ustinov K.B. INELASTIC DEFORMATION, STRAIN-SOFTENING, LOCALIZED FAILURE AND DILATATION IN SANDSTONE MEDIAUNDER TRIAXIAL QUASISTATIC LOADING...237	
Zaitsev A.V., Sokolkin Yu.V., Fukalov A.A. EXACT ANALYTICAL SOLUTIONS TO PROBLEMS ON EQUILIBRIUM STATE OF ELASTIC ANISOTROPIC HEAVY CENTRAL- AND AXIAL-SYMMETRIC BODIES AND THEIR APPLICATIONS TO GEOMECHANICAL PROBLEMS	239
Zarubin V.S., Sergeeva E.S. INFLUENCE OF SINGLE-WALLED CARBON NANOTUBES CHIRALITY ON ITS THERMAL CONDUCTIVITY COEFFICIENT	241
Zubko I.Yu. ESTIMATION OF SECOND-ORDER ELASTIC MODULI FOR CUBIC SINGLE CRYSTALS.....	243