ПРОБЛЕМЫ ДИНАМИКИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СРЕД

Труды IX международной конференции

01-06 октября

Горис, 2018

THE PROBLEMS OF DYNAMICS OF INTERACTION OF DEFORMABLE MEDIA

Proceedings of IX International Conference

01-06 October

Goris, 2018

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ

ПРОБЛЕМЫ ДИНАМИКИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СРЕД

Труды IX международной конференции
01-06 октября 2018, Горис, Армения

При финансовой поддержке Государственного
комитета по науке МОН РА

ЕРЕВАН – 2018

УДК 539.3:06
ББК 22.251
П 781

Институт механики НАН РА
Институт проблем механики им. А.Ю.Ишлинского РАН
Национальный комитет по теоретической и прикладной механике Армении
Российский национальный комитет по теоретической и прикладной механике
Национальный университет архитектуры и строительства Армении
Национальный политехнический университет Армении
Горисский Государственный университет
Арцахский Государственный университет

П781 Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред: Труды IX международной конференции 01-06 октября 2018, Горис, Армения. – Ер.: НУАСА, 2018.- 402 с.

В сборник включены доклады, представленные на IX-ую международную конференцию «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред», посвященную 75-летию Национальной Академии Наук РА.

УДК 539.3:06
ББК 22.251

ISBN 978-9939-63-305-3

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

¸ º ü à ð Ø ² ò ì à Ô Ø Æ æ ² ì ² Ú ð º ð Æ
ö à Ê ² ¼ ¸ º ò à ô Â Ú ² Ü
¸ Æ Ü ² Ø Æ Î ² Ú Æ ä ð à ´ È º Ø Ü º ð À

IX միջազգային գիտաժողովի նյութեր

01-06 հոկտեմբերի 2018թ., Գորիս, Հայաստան

ԵՐԵՎԱՆ – 2018

NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
INSTITUTE OF MECHANICS

THE PROBLEMS OF DYNAMICS OF INTERACTION OF DEFORMABLE MEDIA

Proceedings of IX International Conference
01-06 October 2018, Goris, Armenia

YEREVAN – 2018

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ

Аветисян В.В.

Рассматривается задача синтеза оптимального управления электромеханической системой с одной степенью свободы. В качестве критерия оптимальности рассматривается комбинированный функционал, учитывающий как импульс вращающего момента, создаваемый двигателем, так и время движения. Методом принципа максимума построен режим оптимального управления в форме синтеза, позволяющий перевести рассматриваемую систему из произвольного начального состояния в заданное конечное состояние покоя и доставляющий минимум функционалу качества. На фазовой плоскости системы построены области начальных состояний, из которых оптимальное перемещение системы в начало координат осуществляется посредством режима управления как без переключений, так и с одним и двумя переключениями.

1. Рассматривается электромеханическая система, состоящая из электродвигателя постоянного тока с независимым возбуждением, редуктора и абсолютно твёрдого тела (инерционной нагрузки) на его выходном валу. Такую систему можно трактовать как модель простейшего манипулятора с одной степенью свободы. В этом случае инерционная нагрузка есть рука манипулятора вместе с грузом, закреплённым в его схвате. Пренебрежение явлением самоиндукции при описании динамики манипулятора возможно, если электромагнитная постоянная времени намного меньше времени рабочей операции манипулятора. Так как на практике это условие в большинстве случаев выполняется, то движение описанной электромеханической системы приближённо, в безразмерных единицах, определяется следующими соотношениями [1]:

$$\ddot{\varphi} = v, \qquad Rv + k\dot{\varphi} = u, \tag{1.1}$$

$$|u| \le 1. \tag{1.2}$$

Здесь φ –угол поворота руки; v – момент электромагнитных сил, создаваемый двигателем и приложенных к его ротору; R – электрическое сопротивление обмотки якоря; k – постоянный параметр; u – входное (управляющее) напряжение двигателя.

Так как момент электромагнитных сил v при помощи редуктора электропривода создаёт выходной момент сил, под действием которого ведомая шестерня, а значит и жёстко связанная с ним рука манипулятора вращается относительно неподвижной оси, то величина (в безразмерных единицах)

$$M = \int_0^T |v(t)|\, dt \tag{1.3}$$

определяет импульс вращающего момента за время T.

Рассмотрим задачу оптимального управления системой (1.1), (1.2) с функционалом, учитывающим (1.3).

З а д а ч а. Найти закон изменения ограниченного управляющего напряжения $u(\varphi, \dot{\varphi})$ (1.2) в виде функции угла поворота руки и её угловой скорости, который обеспечивает приведение системы (1.1) из произвольного начального состояния

$$\varphi(0) = \varphi^0, \quad \dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}^0 \tag{1.4}$$

в конечное состояние покоя

$$\varphi(T) = 0, \ \dot{\varphi}(T) = 0 \tag{1.5}$$

и минимизирует функционал

$$J = \int_0^T |v(t)|\, dt + T. \tag{1.6}$$

Функционал (1.6) учитывает как импульс вращающего момента (интегральный член), создаваемый управляющим напряжением, так и время движения системы (терминальный член).

Сформулированная задача относится к задачам минимизации расхода ресурсов, рассмотренных, в частности, в [2 — 4]. Однако, в отличие от [2 — 4], здесь подынтегральное выражение (1.6) в соответствии с (1.1), зависит также от фазовой скорости системы.

Введём обозначения:

$$x_1 = \varphi, \quad x_2 = \dot{\varphi}, \quad v = (u - kx_2)R^{-1} \tag{1.7}$$

и запишем задачу (1.1), (1.2), (1.4)-(1.6) в следующем виде:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = v, \tag{1.8}$$

$$v^- \le v \le v^+, \; v^- = -R^{-1} - kR^{-1}x_2, \quad v^+ = R^{-1} - kR^{-1}x_2, \tag{1.9}$$

$$x_1(0) = x_1^0, \; x_2(0) = x_2^0; \quad x_1(T) = 0, \; x_2(T) = 0, \tag{1.10}$$

$$J = \int_0^T |v(t)|\,dt + T \to \min. \tag{1.11}$$

2. Для решения задачи (1.8)–(1.11) будем использовать принцип максимума [5]. Гамильтониан системы (1.8)–(1.11) имеет вид:

$$H = -1 - |v| + p_1 x_2 + p_2 v, \tag{2.1}$$

где p_1, p_2 – сопряжённые переменные, определяемые из сопряжённых уравнений

$$\dot{p}_1 = -H'_{x_1} = 0, \; \dot{p}_2 = -H'_{x_2} = -p_1, \; 0 \le t \le T, \tag{2.2}$$

$$p_1(t) = c_1, \; p_2(t) = -c_1 t + c_2, \; c_{1,2} = \text{const}, \; 0 \le t \le T. \tag{2.3}$$

Максимизация функции H по управлению v при ограничении (1.9) приводит к решению следующей экстремальной задачи:

$$-|v| + p_2 v \to \max_{v^- \le v \le v^+}, \; v^- = -R^{-1} - kR^{-1}x_2, \quad v^+ = R^{-1} - kR^{-1}x_2. \tag{2.4}$$

Максимум в (2.4) достигается, когда

$$v^* = \begin{cases} v^+ = R^{-1} - kR^{-1}x_2, & p_2(t) > 1, \; t \in [0,T], \\ 0, & |p_2(t)| \le 1, \; t \in [0,T], \\ v^- = -R^{-1} - kR^{-1}x_2, & p_2(t) < -1, \; t \in [0,T] \end{cases} \tag{2.5}$$

и при этом, согласно принципу максимума [5], в конечный момент $t = T$ должно выполняться условие трансверсальности Гамильтониана:

$$H(T) = -1 - |v^*(T)| + p_1(T)x_2(T) + p_2(T)v^*(T) = 0. \tag{2.6}$$

Отсюда, учитывая конечное условие (1.10), следует, что случай $v^*(T) = 0$ невозможен, т.е. $v^*(T) = v^+ = R^{-1}$ или $v^*(T) = v^- = -R^{-1}$. В первом случае из (2.6) получаем $p_2(T) = 1 + R$, а втором – $p_2(T) = -1 - R$. В соответствии с этим и в зависимости от всевозможных значений параметров c_1, c_2 в выражении для линейной функции $p_2(t)$ (2.3) следует, что оптимальное управление v^*, приводящее систему (1.8) из заданного начального состояния (x_1^0, x_2^0) в конечное состояние покоя (1.10), может иметь только один из следующих видов:

$$\begin{aligned} &(1)\;\; v^*(t) = \{v^+, \, t \in [0,T]\}, \quad (2)\;\; v^*(t) = \{v^-, \, t \in [0,T]\}, \\ &(3)\;\; v^*(t) = \{0, \, t \in [0,t_1); \quad v^+, \, t \in [t_1,T]\}, \quad (4)\;\; v^*(t) = \{0, \, t \in [0,t_1); \quad v^-, \, t \in [t_1,T]\}, \\ &(5)\;\; v^*(t) = \{v^+, \, t \in [0,t_1); \quad 0, \, t \in [t_1,t_2); \quad v^-, \, t \in [t_2,T]\}, \\ &(6)\;\; v^*(t) = \{v^-, \, t \in [0,t_1); \quad 0, \, t \in [t_1,t_2); \quad v^+, \, t \in [t_2,T]\}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

В (2.7) режимы (1),(2) – управления без переключения, режимы (3),(4) – управления с одним, а (5),(6) – с двумя переключениями.

Для определения искомого режима управления в зависимости от начального состояния (x_1^0, x_2^0), найдём траектории фазовых траекторий соответствующих значениям $v^* = v^+, v^-, 0$.

Введём обозначение $v^*(\theta) = \theta R^{-1} - kR^{-1}x_2$, где $\theta = \pm 1$. Тогда $v^*(\theta) = v^+ = R^{-1} - kR^{-1}x_2$,

при $\theta = +1$ и $v^*(\theta) = v^- = -R^{-1} - kR^{-1}x_2$ при $\theta = -1$.

Проинтегрируем систему (1.8) с начальным условием (1.10) при управлении $v^*(\theta)$:

$$x_1 = \theta k^{-1}t + Rk^{-1}(\theta k^{-1} - x_2^0)[\exp(-kR^{-1}t) - 1] + x_1^0, \quad x_2 = \theta k^{-1} - (\theta k^{-1} - x_2^0)\exp(-kR^{-1}t) \tag{2.8}$$

и исключая время t из выражений (2.8), получим уравнение фазовых траекторий:

$$x_1 = x_1^0 - \bar{\ } Rk^{-2}\ln\left[(\bar{\ } - kx_2)(\bar{\ } - kx_2^0)^{-1}\right] + Rk^{-1}(x_2^0 - x_2). \tag{2.9}$$

Уравнение (2.9) инвариантно относительно следующих замен фазовых переменных и параметров: $\theta \to -\theta$, $x_{1,2}^0 \to -x_{1,2}^0$, $x_{1,2} \to -x_{1,2}$. Отсюда вытекает, что семейства фазовых траекторий, отвечающих значениям $\theta = +1$ и $\theta = -1$, или что то же, управлениям $v^* = v^+$ и $v^* = v^-$, симметричны относительно начала координат. Поэтому достаточно указать свойства кривой $x_1(x_2)$ (2.9) при $v^* = v^+$: 1) когда x_2 растёт от $-\infty$ до 0, то x_1 убывает от ∞ до 0 и достигает нулевого минимума при $x_2 = 0$; 2) в интервале $x_2 \in \left(0, k^{-1}\right)$ величина x_1 растёт от 0 до ∞, а в интервале $x_2 \in \left(k^{-1}, \infty\right)$ величина x_1 убывает от ∞ до $-\infty$. Таким образом, кривая $x_1(x_2)$ состоит из двух ветвей, приближающихся к асимптоте $x_2 = k^{-1}$. Эта асимптота согласно (2.8) сама также является фазовой траекторией уравнения (1.8) при $v^* = v^+$ и $x_2^0 = k^{-1}$, отвечающей движению системы с постоянной скоростью.

Интегрируя (1.8) с начальным условием (1.10) при управлении $v^* = 0$, получим

$$x_1(t) = x_2^0 t + x_1^0, \quad x_2(t) = x_2^0, \tag{2.10}$$

откуда получим уравнение фазовой траектории в виде

$$x_2 = x_2^0. \tag{2.11}$$

3. На фазовой плоскости найдём геометрическое место начальных состояний (x_1^0, x_2^0), из которых в начало координат система (1.8) приводится с помощью режимов управления (2.7), (1)–(6). Рассмотрим режим управления (2.7), (5): $\left\{v^+,\ 0,\ v^-\right\}$.

Интегрирование системы (1.8) с начальным условием (1.10) при управлении $v^* = v^+ = R^{-1} - kR^{-1}x_2$ на интервале $0 \le t \le t_1$ даётся формулой (2.8), в которой следует положить $\theta = 1$:

$$x_1 = k^{-1}t + Rk^{-1}(k^{-1} - x_2^0)[\exp(-kR^{-1}t) - 1] + x_1^0, \quad x_2 = k^{-1} - (k^{-1} - x_2^0)\exp(-kR^{-1}t). \tag{3.1}$$

При $t = t_1$ из (3.1) получим конечное состояние $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)})$ на первом участке управления (2.7), (5):

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= x_1(t_1) = k^{-1}t_1 + Rk^{-1}(k^{-1} - x_2^0)[\exp(-kR^{-1}t_1) - 1] + x_1^0, \\ x_2^{(1)} &= x_2(t_1) = k^{-1} - (k^{-1} - x_2^0)\exp(-kR^{-1}t_1), \end{aligned} \tag{3.2}$$

которое служит начальным состоянием для второго участка. При $v^* = 0$, на интервале $t_1 \le t \le t_2$ имеем:

$$x_1(t) = x_2^{(1)}(t - t_1) + x_1^{(1)}, \quad x_2(t) = x_2^{(1)}. \tag{3.3}$$

В момент $t = t_2$ получим конечное состояние $(x_1^{(2)}, x_2^{(2)})$ системы на втором участке управления (2.7), (5):

$$x_1(t_2) = x_1^{(2)} = x_2^{(1)}(t_2 - t_1) + x_1^{(1)}, \quad x_2(t_2) = x_2^{(2)} = x_2^{(1)}, \tag{3.4}$$

которое служит начальным состоянием для третьего участка. При управлении $v^* = v^- = -R^{-1} - kR^{-1}x_2$ на $t_2 \le t \le T$ получим:

$$x_1 = -k^{-1}(t-t_2) - Rk^{-1}(k^{-1}+x_2^{(2)})[\exp(-kR^{-1}(t-t_2))-1] + x_1^{(2)},$$
$$x_2 = -k^{-1} + (k^{-1}+x_2^{(2)})\exp(-kR^{-1}(t-t_2)). \tag{3.5}$$

Учитывая, что конечное состояние (1.10) известно, имеем:

$$x_1(T) = -k^{-1}(T-t_2) - Rk^{-1}(k^{-1}+x_2^{(2)})[\exp(-kR^{-1}(T-t_2))-1] + x_1^{(2)} = 0,$$
$$x_2(T) = -k^{-1} + (k^{-1}+x_2^{(2)})\exp(-kR^{-1}(T-t_2)) = 0. \tag{3.6}$$

Исключив время $T-t_2$ из последних двух уравнений, получим:

$$x_1^{(2)} = k^{-2}R\ln\left[1+kx_2^{(2)}\right] - k^{-1}Rx_2^{(2)}. \tag{3.7}$$

Таким образом, можно сделать вывод о том, что второе переключение управления (2.7),(5) происходит, если точка $(x_1^{(2)}, x_2^{(2)})$ принадлежит кривой $\Psi_2^-(x_1,x_2)$, задаваемой на плоскости фазовой плоскости Ox_1x_2 следующим образом:

$$\Psi_2^-(x_1,x_2) = \left\{(x_1,x_2):\ x_1 = k^{-2}R\ln\left[1+kx_2\right] - k^{-1}Rx_2,\quad x_2 \ge 0\right\}. \tag{3.8}$$

При режиме управления (2.7), (5), линейная функция $p_2(t) = -c_1t + c_2$ (2.3) принимает значение 1 при $t = t_1$ и -1 при $t = t_2$. Следовательно, она имеет вид

$$p_2(t) = (t_2+t_1-2t)(t_2-t_1)^{-1}. \tag{3.9}$$

В конечный момент $t = T$, учитывая, что $v^*(T) = v^-$ (2.7)(5) и $x_2(T) = 0$, из условия трансверсальности (2.6) имеем $-1-R^{-1}-R^{-1}p_2(T) = 0$. Из этого соотношения и (3.9) получим равенство $p_2(T) = (t_2+t_1-2T)(t_2-t_1)^{-1} = -1-R$, откуда найдём

$$T = t_2(1+R/2) - t_1R/2. \tag{3.10}$$

Выразим теперь $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}$ через $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}$. Из (3.4), (3.7) исключим $x_1^{(2)}$ и $x_2^{(2)}$:

$$x_2^{(1)}(t_2-t_1) + x_1^{(1)} = k^{-2}R\ln\left[1+kx_2^{(1)}\right] - k^{-1}Rx_2^{(1)}. \tag{3.11}$$

Далее, из (3.2), (3.6), (3.10) определим t_1, t_2, T

$$t_1 = k^{-1}R\ln\left[(1-kx_2^0)(1-kx_2^{(1)})^{-1}\right],\ t_2 = k^{-1}R\ln\left[(1-kx_2^0)(1-kx_2^{(1)})^{-1}\right] + 2k^{-1}\ln\left(1+kx_2^{(1)}\right),$$
$$T = k^{-1}R\ln\left[(1-kx_2^0)(1-kx_2^{(1)})^{-1}\right] + (2+R)k^{-1}\ln\left(1+kx_2^{(1)}\right), \tag{3.12}$$

а из (3.11), используя (3.12), найдём зависимость $x_1^{(1)}$ от $x_2^{(1)}$

$$x_1^{(1)} = k^{-1}(k^{-1}R - 2x_2^{(1)})\ln\left(1+kx_2^{(1)}\right) - k^{-1}Rx_2^{(1)}. \tag{3.13}$$

Если зададим кривую $\Psi_1^-(x_1,x_2)$ с помощью уравнения (3.13)

$$\Psi_1^- = \left\{(x_1,x_2):\ x_1 = k^{-1}(k^{-1}R - 2x_2)\ln\left(1+kx_2\right) - k^{-1}Rx_2,\ x_2 \ge 0\right\}, \tag{3.14}$$

то состояние $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) \in \Psi_1^-$.

Пусть состояние (x_1^0, x_2^0) переводится в начало координат в режиме $v = \left\{v^-, 0, v^+\right\}$. Тогда геометрическое место точек, соответствующих моменту переключения t_1, будет задаваться кривой

$$\Psi_1^+ = \left\{(x_1,x_2):\ x_1 = -k^{-1}(k^{-1}R + 2x_2)\ln(1-kx_2) - k^{-1}Rx_2,\quad x_2 \le 0\right\}, \tag{3.15}$$

а геометрическое место точек, соответствующих моменту переключения t_2 – кривой

$$\Psi_2^+ = \left\{(x_1,x_2):\ x_1 = -k^{-2}R\ln\left[1-kx_2\right] - k^{-1}Rx_2,\quad x_2 \le 0\right\}. \tag{3.16}$$

Тогда, кривая переключения $\Psi_2 = \Psi_2^+ \cup \Psi_2^-$ управления v^*, на которой происходит переключение управления с значения $v^* = 0$ на значение $v^* = v^+$ или $v^* = v^-$, будет определяться соотношением

$$\Psi_2 = \left\{(x_1, x_2):\ x_1 = k^{-2} R\,\mathrm{sign}(x_2) \ln\left[1 + k\left|x_2\right|\right] - k^{-1} R x_2\right\}. \tag{3.17}$$

Аналогично, кривая переключения $\Psi_1 = \Psi_1^+ \cup \Psi_1^-$ управления v^*, на которой происходит переключение управления с значения $v^* = v^+$ или $v^* = v^-$ на значение $v^* = 0$, будет определяться соотношением:

$$\Psi_1 = \left\{(x_1, x_2):\ x_1 = k^{-1}[k^{-1} R sign(x_2) - 2x_2] \ln(1 + k\left|x_2\right|) - k^{-1} R x_2\right\}. \tag{3.18}$$

Кривая Ψ_1, определяемая уравнением из (3.18) обладает следующими свойствами: она определена для $x_2 \in (-\infty, \infty)$; при этом, когда x_2 растет от $-\infty$ до ∞, то x_1 убывает от ∞ до $-\infty$; кривая Ψ_1 нигде, кроме начала координат, не пересекается с кривой Ψ_2.

В фазовой плоскости кривые (3.17) и (3.18) образуют центрально-симметричные области X^+ и X^-, а также X_0 и X^0:

$$X^+ = \left\{(x_1, x_2): \Psi_1^-(x_1, x_2) < 0, \Psi_2^+(x_1, x_2) < 0\right\},\ X^- = \left\{(x_1, x_2): \Psi_1^+(x_1, x_2) > 0, \Psi_2^-(x_1, x_2) > 0\right\},$$

$$X^0 = \left\{(x_1, x_2): \Psi_1^-(x_1, x_2) \ge 0,\ \Psi_2^-(x_1, x_2) < 0\right\},\ X_0 = \left\{(x_1, x_2): \Psi_1^+(x_1, x_2) \le 0, \Psi_2^+(x_1, x_2) > 0\right\},$$

с помощью которых оптимальное управление как функция текущих координат состояния системы (1.8) в форме синтеза определяется так:

$$v^*(x_1, x_2) = \begin{cases} v^+ = R^{-1} - kR^{-1}x_2, & (x_1, x_2) \in X^+ \cup \Psi_2^+, \\ 0, & (x_1, x_2) \in X_0 \cup X^0, \\ v^- = -R^{-1} - kR^{-1}x_2, & (x_1, x_2) \in X^- \cup \Psi_2^-. \end{cases} \tag{3.19}$$

Согласно (3.19), если, например, $(x_1^0, x_2^0) \in X^+$, то движение происходит по кривой (2.9) ($\theta = 1$) при управлении $v^*(\theta)\big|_{\theta=1} = v^+ = R^{-1} - kR^{-1}x_2$ до пересечения с кривой Ψ_1^-. В момент попадания изображающей точки системы (1.8) на кривую Ψ_1^-, управление переключается с значения $v^* = v^+$ на значение $v^* = 0$ и движение происходит по горизонтальной прямой (2.11) в сторону кривой Ψ_2^-. С попаданием на кривую Ψ_2^-, управление переключается с значения $v^* = 0$ на значение $v^* = v^-$ и дальнейшее движение происходить по кривой (3.8) до прихода изображающей точки в начало координат.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аветисян В.В., Акуленко Л.Д., Болотник Н.Н. Оптимальное управление электроприводами промышленных роботов. – М.: ИПМ АН СССР, 1986. 71с.
2. Singh T. Fuel/Time Optimal Control of the Benchmark Problem // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 1995. Vol.18. № 6, pp. 1225–1231.
3. Hartmann, R., Singh T. Fuel/Time Optimal Control of Flexible Structures: A Frequency Domain Approach // Journal of Vibration and Control. 1999. Vol. 5. № 5, pp. 795- 817.
4. Naidu D.S. Optimal control systems. – CRC Press, Inc. Boca Raton, FL, USA. 2003. 464p.
5. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. - М.: Наука, 1983. 393с.

Сведения об авторе::

Аветисян Ваган Вардгесович – д.ф.-м.н., профессор, ЕГУ, факультет математики и механики, **Tel.:** (+374 94) 44 95 60; **E–mail:** vavetisyan@ysu.am

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ УСИЛЕННОЙ ТРЕМЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМИ СТРИНГЕРАМИ

Агабекян П.В.

Рассматривается контактная задача для полубесконечной пластины, усиленной двумя полубесконечными стрингерами, находясь на границе пластины, и одного полубесконечного стрингера перпендикулярно к границе пластины. Полубесконечная пластина деформируется под действием сил, приложенных на концах стрингеров. Задача заключается в определении контактных тангенциальных напряжений, действующих под стрингерами.

Пусть полубесконечная пластина с тремя полубесконечными стрингерами деформируется под действием сил P и Q, приложенных на концах стрингеров.

Причём, два полубесконечных стрингера находятся на границе полубесконечной пластины, а третий стрингер – перпендикулярно к границе пластины. Модули упругости горизонтальных полубесконечных стрингеров равны – E_1, а вертикального стрингера – E_2. Относительно стрингеров принимается во внимание модель контакта по линии, то есть предполагается, что тангенциальные контактные усилия сосредоточены вдоль средней линии контактного участка, и считается, что стрингеры не сопротивляются изгибу [1,2,5].

Относительно упругой полубесконечной пластины принимается, что она находится в условиях обобщённого плоского напряжённого состояния.

Задача заключается в определении распределения контактных напряжений, возникающих под стрингерами.

Уравнения равновесия стрингеров в силу вышесказанного запишутся в виде [3,4]:

$$\frac{dU_1(x)}{dx} = \frac{d^2u_1}{dx^2} = -\frac{\tau_1(x)}{E_1F_1}, \quad |x| > a \tag{1}$$

$$\frac{d\mathrm{V}_1(y)}{dy} = \frac{d^2\mathrm{v}_1}{dy^2} = -\frac{\tau_2(y)}{E_2F_2}, \quad 0 < y < \infty, \tag{2}$$

при следующих граничных условиях:

$$\left.\frac{du_1}{dx}\right|_{x=-a} = \frac{P}{E_1F_1}; \quad \left.\frac{du_1}{dx}\right|_{x=a} = -\frac{P}{E_1F_1} \tag{3}$$

$$\left.\frac{d\mathrm{v}_1}{dy}\right|_{y=0} = -\frac{Q}{E_2F_2} \tag{4}$$

где u_1 – перемещения точек горизонтальных полубесконечных стрингеров, v_1 – перемещения точек вертикального стрингера, $\tau_1(x)$ – интенсивность тангенциальных контактных сил, действующих под стрингерами, находясь на линии границы пластины, $\mathrm{v}_2(y)$ – интенсивность тангенциальных сил, действующих под перпендикулярного стрингера, F_1 и F_2 – площади поперечных сечений стрингеров.

Уравнения равновесия (1) при условии (3), с помощью обобщённых функций, можно записать в следующем виде:

$$\frac{dU_1(x)}{dx} = \frac{\tau_1^*(x)}{E_1F_1} - \frac{P}{E_1F_1}\left[\delta(x-a) + \delta(x+a)\right]; \quad -\infty < x < \infty \tag{5}$$

где

$$\tau_1^*(x)=\left[\theta(x-a)+\theta(-x-a)\right]\ \tau_1(x);\quad -\infty<x<\infty$$

$$U_1(x)=\left[\theta(x-a)+\theta(-x-a)\right]\ \frac{du_1}{dx};\quad -\infty<x<\infty$$

$\delta(x)$ – функция Дирака, $\theta(x)$ – функция Хевисайда.

С другой стороны, при деформациях граничных точек и точек на линии перпендикулярной к границе полубесконечной пластины, когда на них действуют тангенциальные контактные усилия с интенсивностями $\tau_1(x)$ и $\tau_2(y)$, соответственно имеем [3,4]:

$$U_2(x)=\frac{du_2(x,0)}{dx}=U_2^{(1)}(x)+g(x)=\frac{1}{\pi H\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau_1(s)}{x-s}ds-$$
$$-\frac{1}{\pi H}\left[\int_0^{\infty}d_2\frac{\eta^3+\eta x^2}{\left(\eta^2+x^2\right)^2}+d_3\frac{\eta}{\eta^2+x^2}\right]\tau_2(\eta)d\eta,\quad -\infty<x<\infty \tag{6}$$

$$\mathrm{V}_2(y)=\frac{d\mathrm{v}_2(0,y)}{dy}=-\frac{1}{\pi H}\int_0^{\infty}\left[\frac{d_4}{\eta+y}-\frac{d_5}{\eta-y}-\frac{d_6\left(\eta^2-\eta y\right)}{(\eta+y)^3}\right]\tau_2(\eta)d\eta-$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[d_3\frac{s}{s^2+y^2}+d_2\frac{s^3-sy^2}{\left(s^2+y^2\right)^2}\right]\tau_1(s)ds,\quad 0<y<\infty \tag{7}$$

где

$$U_2^{(1)}(x)=\left[\theta(x-a)+\theta(-x-a)\right]\frac{du_2}{dx},$$

$$g(x)=\left[\theta(x+a)-\theta(x-a)\right]\frac{du_2}{dx},$$

$$\varepsilon=\frac{1}{d_1}=\frac{2\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu},\quad d_2=\frac{1}{2\mu},\quad d_3=\frac{1}{2(\lambda+\mu)},$$

$$d_4=\frac{\mu^2+(\lambda+2\mu)^2}{4\mu(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)},\quad d_5=\frac{\lambda+3\mu}{4\mu(\lambda+2\mu)},\quad d_6=\frac{\lambda+\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)},$$

H – толщина пластины, λ,μ – коэффициенты Ляме, u_2,v_2 – соответственно, горизонтальные и вертикальные перемещения точек полубесконечной пластины.

Условия контакта между пластиной и стрингерами будут:

$$U_1(x)=U_2^{(1)}(x),\quad -\infty<x<\infty \tag{8}$$

$$\mathrm{V}_1(y)=\mathrm{V}_2(y),\quad 0<y<\infty \tag{9}$$

Теперь применив к (5), (6) и (8) преобразование Фурье, после некоторых преобразований из условия контакта, для трансформатов Фурье тангенциальных контактных напряжений и деформаций промежуточного интервала между полубесконечными стрингерами, получим следующее функциональное уравнение:

$$\tau_1^*(\sigma)=H\varepsilon i\sigma\bar{K}(\sigma)\bar{g}(\sigma)+2P\lambda_1\bar{K}(\sigma)\cos(\sigma a)+$$
$$+i\sigma^2\varepsilon d_2\bar{K}(\sigma)\int_0^{\infty}\eta e^{-\sigma\eta}\tau_2(\eta)d\eta \tag{10}$$

где

$$\lambda_1 = \frac{H\varepsilon}{E_1 F_1}; \quad \bar{K}(\sigma) = \frac{1}{\lambda_1 + |\sigma|}.$$

Применив к (10) обратное преобразование Фурье, получим:

$$\tau_1^*(x) = H\varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} K'(x-s)\, g(s) ds + P\lambda_1 \left[K(x+a) + K(x-a) \right] -$$
$$- \frac{i\varepsilon d_2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K''(x-s) ds \int_0^{\infty} \eta e^{-\sigma\eta} \tau_2(\eta) d\eta, \quad -\infty < x < \infty \tag{11}$$

при условии $\int_{-\infty}^{\infty} \tau_1(s) ds = 0$,

где $K(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\sigma x}}{\lambda_1 + |\sigma|} d\sigma, \quad K'(x) = \frac{d}{dx} K(x).$

Далее, имея в виду, что $\tau_1^*(x) = 0$ при $|x| < a$, из уравнения (11) для деформации $g(x)$ промежуточного интервала между стрингерами получим следующее интегральное уравнение:

$$\int_{-a}^{a} K'(x-s)\, g(s) ds = -\frac{P\lambda_1}{\varepsilon H} \left[K(x+a) + K(x-a) \right] +$$
$$+ \frac{i d_2}{2\pi H} \int_{-a}^{a} K''(x-s) ds \int_0^{\infty} \eta e^{-\sigma\eta} \tau_2(\eta) d\eta, \quad -\infty < x < \infty \tag{12}$$

Решение приводится аналогично [4,6,7], из представления ядер $K(x)$ следует, что с помощью полиномов Чебышева интегральное уравнение (12) можно свести к решению квазивполне регулярных бесконечных систем алгебраических уравнений [5,6].

Теперь удовлетворим условие контакта для перпендикулярного стрингера.

После замены переменных $y = e^{\mathrm{v}}$, $\eta = e^u$ в уравнениях (2) и (7), применив к ним преобразование Фурье и имея в виду условия контакта (9), при условии $\int_0^{\infty} \tau_2(\eta) d\eta = Q$ получим:

$$\bar{R}(\sigma)\bar{\tau}_2(\sigma) + \lambda_2 \bar{\tau}_2(\sigma - i) = -i\sigma d_5^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{A}(s,\sigma) \tau_1(s) ds, \tag{13}$$

где

$$\bar{R}(\sigma) = \sigma \frac{\mathrm{ch}\pi\sigma - d_4 d_5^{-1} (\sigma + i)^2 - d_6 d_5^{-1}}{\mathrm{sh}\pi\sigma}, \quad \lambda_2 = \frac{H d_5^{-1}}{E_2 F_2};$$

$$A(s, \mathrm{v}) = d_3 \frac{s}{s^2 + e^{2\mathrm{v}}} + d_2 \frac{s^3 - s e^{2\mathrm{v}}}{\left(s^2 + e^{2\mathrm{v}}\right)^2},$$

$$\bar{\tau}_2(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \tau_2(e^u) e^{i\sigma u} du, \quad \bar{\tau}_2(\sigma - i) = \int_{-0}^{\infty} \tau_2(e^u) e^{\mathrm{v}} e^{i\sigma u} du.$$

Решение уравнения (13) строится с помощью метода, изложенного в [7,8].

Таким образом, решение поставленной задачи привелось к решению системы уравнений (12) и (13). После решения системы значения $\tau_1(x)$ при $|x| > a$ определятся из уравнения (11).

ЛИТЕРАТУРА

1. Муки Р., Стренберг Э. Передача нагрузки от растягиваемого поперечного стержня к полубесконечной упругой пластинке. // ПМ. Тр. Амер. общ. инж. механиков. 1968. сер.Е. №4. С.124-135.
2. Арутюнян Н.Х. Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением. // ПММ. 1968. Т.32. №4. С.632-646.
3. Григорян Э.Х. Об одном эффектном методе решения одного класса смешанных задач теории упругости. // Ученые записки ЕГУ, естеств. науки. 1979. №2. С.62-71.
4. Григорян Э.Х., Агаян К.Л. Полубесконечная пластина, усиленная внутренним полубесконечным стрингером, параллельным границе пластины. // Ереван: Изд. «Гитутюн» НАН Армении. 2006. С.138-143.
5. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи с тонкими покрытиями и прослойками. // М.: Наука, 1983. 467с.
6. Агабекян П.В., Гулян К.Г. Контактная задача полубесконечной пластины, усиленной двумя полубесконечными накладками. // Изв. НАН Армении. Механика. 2009. Т .62. №4. С.7-15.
7. Григорян Э.Х. Решение задачи упругого конечного включения, выходящего на границу полуплоскости. // Уч. зап. ЕГУ, естеств. науки. 1981. №3.
8. Агабекян П.В. Контактная задача для полубесконечной пластины с конечной и полубесконечной накладками. Ереван: Механика деформируемого твердого тела. Институт механики. НАН Армении, 1990. С.17-23.

Сведения об авторе:
Агабекян Пайкар Вараздатович – к.ф.м.н., н.с. Института механики НАН РА (374 99) 248547
E-mail: aghabekyan.payqar@gmail.com

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ДВУХСЛОЙНОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ НАЛИЧИИ ВЯЗКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ В ОБОИХ СЛОЯХ

Агаловян Л.А., Гулгазарян Л.Г.

Рассмотрены вынужденные колебания двухслойной ортотропной оболочки в случае вязкого сопротивления в обоих слоях оболочки. На верхней лицевой поверхности оболочки заданы два варианта пространственных граничных условий, а на нижней – задан вектор перемещения. Асимптотическим методом получено решение соответствующих динамических уравнений и соотношений трёхмерной задачи теории упругости. Определены амплитуды вынужденных колебаний.

Среди различных причин затухания колебаний механических систем одна из важнейших – рассеяние энергии внутри самой колебательной системы, в частности, вязкое трение, которое обычно принимается пропорциональным скорости перемещения точек [1]. В современном строительстве, приборостроении, авиастроении все чаще используются такие тонкостенные элементы, как многослойные пластины и оболочки. Надёжность этих элементов, в частности, зависит от учёта свойств применяемого материала, что позволяет избежать резонансных состояний. В работе получены асимптотические решения неклассических краевых задач о вынужденных колебаниях двухслойных ортотропных оболочек при наличии вязкого внутреннего сопротивления в обоих слоях при разных граничных условиях на лицевых поверхностях.

1. Основные уравнения и постановка динамической задачи. Рассматриваются вынужденные колебания двухслойной ортотропной оболочки $D=\{\alpha,\beta,\gamma;\alpha,\beta\in\Omega_0,\ \ -h_2\le\gamma\le h_1\}$ при наличии вязкого сопротивления в обоих слоях. D_0 – поверхность контакта слоёв, α,β – линии кривизны поверхности контакта слоёв, γ – прямолинейная ось, направленная перпендикулярно к поверхности контакта слоёв. Требуется найти ненулевые решения динамических уравнений теории упругости в выбранной триортогональной системе координат, удовлетворяющие на лицевых поверхностях оболочки граничным условиям второй или смешанной краевых задач теории упругости. Для упрощения выкладок используются компоненты несимметричного тензора напряжений τ_{ij} [2,3] и вводятся обозначения $\tilde{\gamma}_i=1+\gamma/R_i\ \ (i=1,2)$, где R_1 и R_2 – главные радиусы кривизны поверхности контакта слоёв.

Имеем:

уравнения движения

$$\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(B\tau_{\alpha\alpha}^{\blacklozenge(j)}\right)-k_\beta\tau_{\beta\beta}^{(j)}+\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(A\tau_{\beta\alpha}^{(j)}\right)+k_\alpha\tau_{\alpha\beta}^{(j)}+\tilde{\gamma}_1\frac{\partial\tau_{\alpha\gamma}^{(j)}}{\partial\gamma}+\frac{2\tau_{\alpha\gamma}^{(j)}}{R_1}-k_j\tilde{\gamma}_1\tilde{\gamma}_2\frac{\partial U^{(j)}}{\partial t}=\rho^j\tilde{\gamma}_1\tilde{\gamma}_2\frac{\partial^2U^{(j)}}{\partial t^2} \tag{1.1}$$

$(A,B;\alpha,\beta;R_1,R_2;U,V),\quad j=I,II$,

$$\frac{\partial\tau_{\gamma\gamma}^{(j)}}{\partial\gamma}-\left(\frac{\tau_{\alpha\alpha}^{(j)}}{R_1}+\frac{\tau_{\beta\beta}^{(j)}}{R_2}\right)+\frac{1}{A}\frac{\partial\tau_{\alpha\gamma}^{(j)}}{\partial\alpha}+\frac{1}{B}\frac{\partial\tau_{\beta\gamma}^{(j)}}{\partial\beta}+k_\beta\tau_{\alpha\gamma}^{(j)}+k_\alpha\tau_{\beta\gamma}^{(j)}-k_j\tilde{\gamma}_1\tilde{\gamma}_2\frac{\partial W^{(j)}}{\partial t}=\rho^j\tilde{\gamma}_1\tilde{\gamma}_2\frac{\partial^2W^{(j)}}{\partial t^2}$$

$\tilde{\gamma}_1\tau_{\alpha\beta}^{(j)}=\tilde{\gamma}_2\tau_{\beta\alpha}^{(j)}$ (условие симметрии);

уравнения состояния (соотношения упругости)

$$\tilde{\gamma}_2\left(\frac{1}{A}\frac{\partial U^{(j)}}{\partial\alpha}+k_\alpha V^{(j)}+\frac{W^{(j)}}{R_1}\right)=\tilde{\gamma}_1a_{11}^{(j)}\tau_{\alpha\alpha}^{(j)}+\tilde{\gamma}_2a_{12}^{(j)}\tau_{\beta\beta}^{(j)}+a_{13}^{(j)}\tau_{\gamma\gamma}^{(j)},\qquad j=I,II$$

$(A,B;\quad \alpha\leftrightarrow\beta;\quad R_1\leftrightarrow R_2;\quad U\leftrightarrow V;\quad a_{11}^{(j)},a_{22}^{(j)};\quad a_{13}^{(j)},a_{23}^{(j)})$

$$\tilde{\gamma}_1\tilde{\gamma}_2\frac{\partial W^{(j)}}{\partial\gamma}=\tilde{\gamma}_1a_{13}^{(j)}\tau_{\alpha\alpha}^{(j)}+\tilde{\gamma}_2a_{23}^{(j)}\tau_{\beta\beta}^{(j)}+a_{33}^{(j)}\tau_{\gamma\gamma}^{(j)},$$

$$\tilde{\gamma}_1\left(\frac{1}{B}\frac{\partial U^{(j)}}{\partial\beta}-k_\beta V^{(j)}\right)+\tilde{\gamma}_2\left(\frac{1}{A}\frac{\partial V^{(j)}}{\partial\alpha}-k_\alpha U^{(j)}\right)=\tilde{\gamma}_1a_{66}^{(j)}\tau_{\alpha\beta}^{(j)}, \tag{1.2}$$

$$\tilde{\gamma}_1\tilde{\gamma}_2\frac{\partial U^{(j)}}{\partial\gamma}-\tilde{\gamma}_2\frac{U^{(j)}}{R_1}+\frac{1}{A}\tilde{\gamma}_2\frac{\partial W^{(j)}}{\partial\alpha}=\tilde{\gamma}_1a_{55}^{(j)}\tau_{\alpha\gamma}^{(j)}$$

$(A,B;\quad \alpha,\beta;\quad R_1\leftrightarrow R_2;\quad U,V;\quad a_{55}^{(j)},a_{44}^{(j)}),$

где k_α, k_β – геодезические кривизны, A, B – коэффициенты первой квадратичной формы, $\rho^{(j)}$ – плотности слоёв, $a_{ik}^{(j)}$ – постоянные упругости, k_j – коэффициенты вязкого сопротивления слоёв, j – номер слоя.

На лицевой поверхности $\gamma = h_1$ заданы граничные условия:

$$\tau_{\alpha\gamma}^{I}(h_1)=0, \quad \tau_{\beta\gamma}^{I}(h_1)=0, \quad \tau_{\gamma\gamma}^{I}(h_1)=0 \tag{1.3}$$

или

$$U^I(h_1)=0, \quad V^I(h_1)=0, \quad W^I(h_1)=0, \tag{1.4}$$

а на поверхности $\gamma = -h_2$ условия

$$U^{II}(-h_2)=u^-(\alpha,\beta)\sin(\Omega t), \quad V^{II}(-h_2)=v^-(\alpha,\beta)\sin(\Omega t), \quad W^{II}(-h_2)=w^-(\alpha,\beta)\sin(\Omega t) \tag{1.5}$$

На поверхности контакта слоёв должны выполняться условия полного контакта

$$\tau_{\alpha\gamma}^{I}(\gamma=0)=\tau_{\alpha\gamma}^{II}(\gamma=0), \ \tau_{\beta\gamma}^{I}(\gamma=0)=\tau_{\beta\gamma}^{II}(\gamma=0), \ \tau_{\gamma\gamma}^{I}(\gamma=0)=\tau_{\gamma\gamma}^{II}(\gamma=0) \tag{1.6}$$

$$U^I(\gamma=0)=U^{II}(\gamma=0), \quad V^I(\gamma=0)=V^{II}(\gamma=0), \quad W^I(\gamma=0)=W^{II}(\gamma=0) \tag{1.7}$$

Условия на боковой поверхности не конкретизируются, в задачах данного класса ими обусловлено появление пограничного слоя [2,3].

2. Решение внешней задачи. Для решения сформулированных краевых задач, в динамических уравнениях теории упругости совершается переход к безразмерным координатам и перемещениям по формулам $\alpha = R\xi, \ \beta = R\eta, \ \gamma = \varepsilon R\zeta = h\zeta, \ U = Ru, \ V = Rv, \ W = Rw,$ $h = \max\{h_1, h_2\}$, где R – характерный размер оболочки (наименьший из радиусов кривизны и линейных размеров поверхности контакта слоёв), $\varepsilon = h/R$ – малый параметр. Решение преобразованных уравнений отыскивается в виде

$$Q_{\alpha\beta}^{(j)}(x,y,z,t)=Q_1^{(j)}(\xi,\eta,\zeta)\sin(\Omega t)+Q_2^{(j)}(\xi,\eta,\zeta)\cos(\Omega t) \quad (\alpha,\beta,\gamma); \qquad j=I,II \tag{2.1}$$

где $Q_{\alpha\beta}^{(j)}$ – любая из величин напряжений и перемещений, Ω – частота вынуждающего внешнего воздействия.

В результате получается сингулярно возмущенная малым параметром ε система уравнений относительно $Q_1^{(j)}, Q_2^{(j)}$, решение которой есть сумма решений внешней (outerior) задачи и пограничных (boundary) слоёв: $I = Q^{out} + R_b$ [2-4].

Решение внешней задачи отыскивается в виде асимптотического представления [3,4]

$$\tau_{mk,i}^{out(j)}(\xi,\eta,\zeta)=\varepsilon^{-1+s}\tau_{mk,i}^{(j,s)}(\xi,\eta,\zeta), \quad m,k=1,2,3; \quad s=\overline{0,N}; \quad j=I,II; \ i=1,2 \tag{2.2}$$

$$\left(u_i^{out(j)}(\xi,\eta,\zeta), v_i^{out(j)}(\xi,\eta,\zeta), w_i^{out(j)}(\xi,\eta,\zeta)\right)=\varepsilon^s\left(u_i^{(j,s)}(\xi,\eta,\zeta), v_i^{(j,s)}(\xi,\eta,\zeta), w_i^{(j,s)}(\xi,\eta,\zeta)\right)$$

Решение задачи должно удовлетворять условиям (1.3)–(1.5). Зная вышеуказанную структуру общего решения, для определения величин $\tau_{mk,i}^{(j,s)}, u_i^{(j,s)}, (u,v,w)$ внешней задачи из условий (1.3)–(1.5), соответственно, будут следовать следующие граничные условия при $\zeta = \zeta_1 \ (\zeta_1 = h_1/h)$:

$$\tau_{13,i}^{(I,s)}(\zeta_1)=-\tau_{13,ib}^{(I,s)}(\zeta=\zeta_1), \quad (13,23,33), \quad i=1,2 \tag{2.3}$$

или

$$u_i^{(I,s)}(\zeta_1)=\bar{u}_{ib}^{(I,s)}(\zeta=\zeta_1) \qquad (u,v,w), \qquad i=1,2 \tag{2.4}$$

и условия при $\zeta = -\zeta_2 \ (\zeta_2 = h_2/h)$

$$u_i^{(II,s)}=u_i^{-(II,s)}(\xi,\eta) \qquad (u,v,w), \tag{2.5}$$

где

$$\begin{gathered} u_1^{-(II,0)}=u^-/R, \ u_2^{-(II,0)}=0, \ \bar{\tau}_{m3,ib}^{(I,0)}=0, \ \bar{u}_{ib}^{(I,0)}=0 \\ u_i^{-(II,s)}=-\bar{u}_{ib}^{(II,s)}(\zeta=-\zeta_2), \quad s\neq 0; \quad (u,v,w); \quad m=1,2,3; \ i=1,2 \end{gathered} \tag{2.6}$$

Величины $\tau_{13,ib}^{(I,s)}$, $\bar{u}_{ib}^{(I,s)}, \bar{u}_{ib}^{(II,s)}$, (u,v,w) определяются после построения решения пограничного слоя.

После подстановки выражений (2.2) в полученную сингулярно возмущённую систему уравнений, компоненты тензора напряжений выражаются через $u_i^{(j,s)}$, $\mathrm{v}_i^{(j,s)}$, $w_i^{(j,s)}$:

$$\tau_{13,i}^{(j,s)} = \frac{1}{a_{55}^{(j)}}\left[\frac{\partial u_i^{(j,s)}}{\partial\zeta} - P_{ui}^{(j,s-1)}\right], \quad \tau_{23,i}^{(j,s)} = \frac{1}{a_{44}^{(j)}}\left[\frac{\partial v_i^{(j,s)}}{\partial\zeta} - P_{vi}^{(j,s-1)}\right], \quad j = I, II;\ i = 1,2 \tag{2.7}$$

$$\tau_{12,i}^{(j,s)} = P_{1\tau i}^{(j,s-1)}, \quad \tau_{21,i}^{(j,s)} = P_{1\tau i}^{(j,s-1)} - r_2\zeta\tau_{21,i}^{(j,s-1)} + r_1\zeta\tau_{12,i}^{(j,s-1)}$$

$$\tau_{11,i}^{(j,s)} = \frac{1}{\Delta^{(j)}}\left[\Delta_2^{(j)}\frac{\partial w_i^{(j,s)}}{\partial\zeta} + \Delta_{23}^{(j)}P_{2\tau i}^{(j,s-1)} + \Delta_1^{(j)}P_{3\tau i}^{(j,s-1)} - \Delta_2^{(j)}P_{wi}^{(j,s-1)}\right]$$

$(11, 22, 33;\quad \Delta_2, \Delta_3, \Delta_{12};\quad \Delta_{23}, \Delta_1, \Delta_2;\quad \Delta_1, \Delta_{13}, \Delta_3)$,

где

$$\Delta_1^{(j)} = a_{13}^{(j)}a_{23}^{(j)} - a_{33}^{(j)}a_{12}^{(j)},\ \Delta_2^{(j)} = a_{12}^{(j)}a_{23}^{(j)} - a_{22}^{(j)}a_{13}^{(j)},\ \Delta_3^{(j)} = a_{13}^{(j)}a_{12}^{(j)} - a_{11}^{(j)}a_{23}^{(j)}$$

$$\Delta^{(j)} = a_{11}^{(j)}\Delta_{23}^{(j)} + a_{13}^{(j)}\Delta_2^{(j)} + a_{12}^{(j)}\Delta_1^{(j)},\ \Delta_{nk}^{(j)} = a_{nn}^{(j)}a_{kk}^{(j)} - (a_{nk}^{(j)})^2, \quad n,k = 1,2,3;$$

а для определения компонент вектора перемещения получаются уравнения:

$$\frac{\partial^2 u_1^{(j,s)}}{\partial\zeta^2} + a_{55}^{(j)}(\rho^{(j)}\Omega_*^2 u_1^{(j,s)} + 2K_j\Omega_* u_2^{(j,s)}) = a_{55}^{(j)}P_{6\tau 1}^{(j,s-1)} + \frac{\partial P_{u1}^{(j,s-1)}}{\partial\zeta}, (u,v;\ \ a_{55}, a_{44};\ \ 6\tau, 5\tau)$$

$$\frac{\partial^2 u_2^{(j,s)}}{\partial\zeta^2} + a_{55}^{(j)}(\rho^{(j)}\Omega_*^2 u_2^{(j,s)} - 2K_j\Omega_* u_1^{(j,s)}) = a_{55}^{(j)}P_{6\tau 2}^{(j,s-1)} + \frac{\partial P_{u2}^{(j,s-1)}}{\partial\zeta}, (u,v;\ \ a_{55}, a_{44};\ \ 6\tau, 5\tau)$$

$$\frac{\partial^2 w_1^{(j,s)}}{\partial\zeta^2} + \frac{\Delta^{(j)}}{\Delta_{12}^{(j)}}(\rho^{(j)}\Omega_*^2 w_1^{(j,s)} + 2K_j\Omega_* w_2^{(j,s)}) = F_{w1}^{(j,s-1)}$$

$$\frac{\partial^2 w_2^{(j,s)}}{\partial\zeta^2} + \frac{\Delta^{(j)}}{\Delta_{12}^{(j)}}(\rho^{(j)}\Omega_*^2 w_2^{(j,s)} - 2K_j\Omega_* w_1^{(j,s)}) = F_{w2}^{(j,s-1)} \tag{2.8}$$

$$F_{wi}^{(II,s-1)} = \frac{1}{\Delta_{12}^{(II)}}\left[\Delta^{(II)}P_{4\tau i}^{(II,s-1)} - \Delta_2^{(II)}\frac{\partial P_{2\tau i}^{(II,s-1)}}{\partial\zeta} - \Delta_3^{(II)}\frac{\partial P_{3\tau i}^{(II,s-1)}}{\partial\zeta} + \Delta_{12}^{(II)}\frac{\partial P_{wi}^{(II,s-1)}}{\partial\zeta}\right], \quad i = 1,2$$

$$\Omega_*^2 = h^2\Omega^2,\ 2K_j = k_j h.$$

Из (2.8) следуют:

$$u_2^{(j,s)} = \frac{1}{2K_j\Omega_* a_{55}^{(j)}}\left[a_{55}^{(j)}P_{6\tau 1}^{(j,s-1)} + \frac{\partial P_{u1}^{(j,s-1)}}{\partial\zeta} - \frac{\partial^2 u_1^{(j,s)}}{\partial\zeta^2} - a_{55}^{(j)}\rho^{(j)}\Omega_*^2 u_1^{(j,s)}\right], (u,v;\ \ a_{55}, a_{44};\ \ 6\tau 1, 5\tau 1)$$

$$w_2^{(j,s)} = \frac{\Delta_{12}^{(j)}}{2\Delta^{(j)}K_j\Omega_*}\left[F_{w1}^{(j,s-1)} - \frac{\partial^2 w_1^{(j,s)}}{\partial\zeta^2} - \frac{\Delta^{(j)}}{\Delta_{12}^{(j)}}\rho^{(j)}\Omega_*^2 w_1^{(j,s)}\right] \tag{2.9}$$

и уравнения

$$\frac{\partial^4 u_1^{(j,s)}}{\partial\zeta^4} + 2a_{55}^{(j)}\rho^{(j)}\Omega_*^2\frac{\partial^2 u_1^{(j,s)}}{\partial\zeta^2} + a_{55}^{(j)\,2}\Omega_*^2(\rho^{(j)\,2}\Omega_*^2 + 4K_j^2)u_1^{(j,s)} = Q_{u1}^{(j,s-1)}, \tag{2.10}$$

$(u,v,w;\ a_{55}, a_{44}, \Delta/\Delta_{12})$

$$Q_{u1}^{(j,s-1)} = \Omega_* a_{55}^{(j)}(-a_{55}^{(j)}2K_jP_{6\tau 2}^{(j,s-1)} - 2K_j\frac{\partial P_{u2}^{(j,s-1)}}{\partial\zeta} + \frac{1}{\Omega_*}\frac{\partial^2 P_{6\tau 1}^{(j,s-1)}}{\partial\zeta^2} +$$

$$+\frac{1}{\Omega_* a_{55}^{(j)}}\frac{\partial^3 P_{u1}^{(j,s-1)}}{\partial\zeta^3} + \rho^{(j)}\Omega_* a_{55}^{(j)}P_{6\tau 1}^{(j,s-1)} + \Omega_*\rho^{(j)}\frac{\partial P_{u1}^{(j,s-1)}}{\partial\zeta}), \quad (u, \mathrm{v};\ a_{55}, a_{44};\ 6\tau, 5\tau)$$

$$Q_{w1}^{(j,s-1)} = \frac{\Delta^{(j)}\Omega_*}{\Delta_{12}^{(j)}}\left[\frac{\Delta_{12}^{(j)}}{\Delta^{(j)}\Omega_*}\frac{\partial^2 F_{w1}^{(j,s-1)}}{\partial\zeta^2} + \Omega_*\rho^{(j)}F_{w1}^{(j,s-1)} - 2K_jF_{w2}^{(j,s-1)}\right]$$

Решениями уравнений (2.10) являются:

$$u_1^{(j,s)} = u_{10}^{(j,s)}(\xi,\eta,\zeta) + u_{1ч}^{(j,s)}(\xi,\eta,\zeta), \quad (u,v,w), \tag{2.11}$$

где величина с индексом “0” является общим решением соответствующего однородного уравнения, а с индексом “ч” – частное решение неоднородного уравнения.

Решениями соответствующих однородных уравнений являются:

$$u_{10}^{(j,s)}(\xi,\eta,\zeta)=C_1^{(u,j,s)}(\xi,\eta)\phi_{1u}^j(\zeta)+C_2^{(u,j,s)}(\xi,\eta)\phi_{2u}^j(\zeta)+ \\ +C_3^{(u,j,s)}(\xi,\eta)\phi_{3u}^j(\zeta)+C_4^{(u,j,s)}(\xi,\eta)\phi_{4u}^j(\zeta)\ \ (u,v,w), \tag{2.12}$$

где

$$\varphi_{1u}^j(\zeta)=\operatorname{ch}\gamma_u^j\zeta\cos\delta_u^j\zeta,\qquad \varphi_{2u}^j(\zeta)=\operatorname{sh}\gamma_u^j\zeta\sin\delta_u^j\zeta$$

$$\varphi_{3u}^j(\zeta)=\operatorname{ch}\gamma_u^j\zeta\sin\delta_u^j\zeta,\qquad \varphi_{4u}^j(\zeta)=\operatorname{sh}\gamma_u^j\zeta\cos\delta_u^j\zeta$$

$$\gamma_u^j=\sqrt{\frac{a_{55}^{(j)}\Omega_*}{2}(\sqrt{\rho^{(j)\,2}\Omega_*^2+4K_j^2}-\rho^{(j)}\Omega_*)}$$

$$\delta_u^j=\sqrt{\frac{a_{55}^{(j)}\Omega_*}{2}(\sqrt{\rho^{(j)2}\Omega_*^2+4K_j^2}+\rho^{(j)}\Omega_*)}$$

$$(u,v,w;\ a_{55}a_{44},\Delta/\Delta_{12})$$

Для перемещений с нижним индексом *2* имеем:

$$u_2^{(j,s)}=u_{20}^{(j,s)}(\xi,\eta,\zeta)+u_{2ч}^{(j,s)}(\xi,\eta,\zeta),\qquad (u,v,w) \tag{2.13}$$

$$u_{20}^{(j,s)}(\xi,\eta,\zeta)=-C_1^{(u,j,s)}(\xi,\eta)\varphi_{2u}^j+C_2^{(u,j,s)}(\xi,\eta)\varphi_{1u}^j+ \\ +C_3^{(u,j,s)}(\xi,\eta)\varphi_{4u}^j-C_4^{(u,j,s)}(\xi,\eta)\varphi_{3u}^j\ \ (u,\mathrm{v},w)$$

$$u_{2ч}^{(j,s)}(\xi,\eta,\zeta)=\frac{1}{a_{55}^{(j)}2K_j\Omega_*}\left[a_{55}^{(j)}P_{6\tau1}^{(j,s-1)}+\frac{\partial P_{u1}^{(j,s-1)}}{\partial\zeta}-\frac{\partial^2u_{1ч}^{(j,s)}}{\partial\zeta^2}-a_{55}^{(j)}\rho^{(j)}\Omega_*^2u_{1ч}^{(j,s)}\right]$$

Удовлетворив граничным условиям (2.3), (2.5), (1.6), (1.7) и (2.4), (2.5), (1.6), (1.7), получим соответственно, по три алгебраических систем уравнений относительно $C_m^{(u,j,s)}$ $(m=\overline{1,4};\ j=I,II;\ u,v,w)$. Для того, чтобы полученные системы имели ненулевое решение, определители этих систем должны быть отличны от нуля. Таким образом, должны удовлетворяться следующие условия, соответствующие граничным условиям (2.3), (2.5), (1.6), (1.7):

$$\Delta_{u\tau}=\frac{\delta_u^{I\,2}+\gamma_u^{I\,2}}{4a_{55}^{II\,2}a_{55}^{I\,2}}(F^+(\operatorname{ch}2\gamma_u^I\zeta_1\operatorname{ch}2\gamma_u^{II}\zeta_2+\cos2\delta_u^I\zeta_1\cos2\delta_u^{II}\zeta_2)- \\ -F^-(\operatorname{ch}2\gamma_u^I\zeta_1\cos2\delta_u^{II}\zeta_2+\cos2\delta_u^I\zeta_1\operatorname{ch}2\gamma_u^{II}\zeta_2)+ \\ +2a_{55}^{II}a_{55}^I(E^+(\operatorname{sh}2\gamma_u^I\zeta_1\operatorname{sh}2\gamma_u^{II}\zeta_2-\sin2\delta_u^I\zeta_1\sin2\delta_u^{II}\zeta_2)+ \\ +E^-(\operatorname{sh}2\gamma_u^I\zeta_1\sin2\delta_u^{II}\zeta_2+\sin2\delta_u^I\zeta_1\operatorname{sh}2\gamma_u^{II}\zeta_2))\neq0,\qquad (u,v,w) \tag{2.14}$$

$$F^\pm=a_{55}^{II\,2}(\delta_u^{I\,2}+\gamma_u^{I\,2})\pm a_{55}^{I\,2}(\delta_u^{II\,2}+\gamma_u^{II\,2})$$

$$E^+=\delta_u^I\delta_u^{II}+\gamma_u^I\gamma_u^{II},\ \ E^-=\delta_u^{II}\gamma_u^I-\delta_u^I\gamma_u^{II}$$

а соответствующие граничным условиям (2.4), (2.5), (1.6), (1.7):

$$\Delta_{uu}=\frac{1}{4a_{55}^{II\,2}a_{55}^{I\,2}}(F^+(\operatorname{ch}2\gamma_u^I\zeta_1\operatorname{ch}2\gamma_u^{II}\zeta_2-\cos2\delta_u^I\zeta_1\cos2\delta_u^{II}\zeta_2)- \\ -F^-(\operatorname{ch}2\gamma_u^I\zeta_1\cos2\delta_u^{II}\zeta_2-\cos2\delta_u^I\zeta_1\operatorname{ch}2\gamma_u^{II}\zeta_2)+ \\ +2a_{55}^{II}a_{55}^I(E^+(\operatorname{sh}2\gamma_u^I\zeta_1\operatorname{sh}2\gamma_u^{II}\zeta_2+\sin2\delta_u^I\zeta_1\sin2\delta_u^{II}\zeta_2)+ \\ +E^-(\operatorname{sh}2\gamma_u^I\zeta_1\sin2\delta_u^{II}\zeta_2-\sin2\delta_u^I\zeta_1\operatorname{sh}2\gamma_u^{II}\zeta_2))\neq0,\qquad (u,v,w) \tag{2.15}$$

В случае однослойной оболочки [4] без вязкого сопротивления всегда есть резонанс (амплитуда бесконечна). В двухслойной оболочке при отсутствии вязкого сопротивления в слоях [5] и в случае наличия вязкого сопротивления только в нижнем слое оболочки возникает резонанс с неограниченной амплитудой вынужденных колебаний [6]. При данной конфигурации оболочки, при наличии вязкого сопротивления в обоих слоях оболочки, численные результаты показывают, что как и в случае однослойной оболочки с наличием вязкого сопротивления [7] при резонансе в двухслойной оболочке амплитуда вынужденных колебаний конечна, так как уравнения $\Delta_{u^2}=0,\ \Delta_{uu}=0\ \ (u,v,w)$ не имеют действительных корней.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пановко Я.Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. М.: Физматгиз, 1960. 193с.
2. Aghalovyan L.A. Asymptotic Theory of Anisotropic Plates and Shells. Singapore-London. World Scientific Publishing. 2015. 375p.
3. Aghalovyan L.A., Ghulghazaryan L.G. Asymptotic solutions of non-classical boundary-value problems of the natural vibrations of orthotropic shells. ELSEVIER. Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 70. 2006.
4. Aghalovyan L.A., Ghulghazaryan L.G. Non-classical boundary-value problems of the forced vibrations of orthotropic shells. International sciences journal of Applied Mechanics. SPRINGER. T.45. №8. 2009.
5. Гулгазарян Л.Г., Барсегян М.А. Вынужденные колебания двухслойной ортотропной оболочки при полном контакте между слоями. /Сб. научн. трудов межд. конф.: «Актуальные проблемы механики сплошной среды». Ереван: 2015. С.177-181.
6. Aghalovyan L.A., Ghulghazaryan L.G. Forced vibrations of a two-layered shell in the case of viscous resistance. 2018. Journal of Physics: Conf. Ser. 991 012002. https://doi.org/10.1088/1742-6596/991/1/012002.
7. Ghulghazaryan L.G. Forced vibrations of orthotropic shells when there is viscous resistance. //Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2015. № 79.

Сведения об авторах:

Агаловян Ленсер Абгарович – академик НАН Армении, доктор физ.-мат. наук, профессор. Институт механики НАН Армении, **Адрес:** пр. Маршала Баграмяна 24/2, 0019, Ереван, Армения. (374 10) 529630, (374 93) 200570
E-mail: lagal@sci.am, aghal@mechins.sci.am

Гулгазарян Лусине Гургеновна – ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении, доктор физ.-мат. наук, профессор, кафедра математики и методики её преподавания АГПУ им. Х. Абовяна. **Адрес:** Институт механики НАН Армении, пр. Маршала Баграмяна 24/2, 0019, Ереван, Армения. (374 10) 618155, (374 91) 302554.
E-mail: lusina@mail.ru

ПЛОСКАЯ СДВИГОВАЯ ВОЛНА В СЛОЕ С НЕОДНОРОДНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Агаян К.Л.

Исследуется задача о направленном распространении плоских сдвиговых упругих волн в волноводе (слое) со смещёнными граничными условиями. Рассматриваются случаи, когда оба полубесконечных участка краёв слоя свободны или жёстко защемлены, соответственно, с направлением подающей волны. Решение задачи при помощи действительного преобразования Фурье сведено к функциональным уравнениям (краевая задача типа Римана) на действительной оси, замкнутые решения которых построены методом Винера–Хопфа. Получены явные выражения волновых функций, представляющие поле упругих перемещений в соответствующих областях, а также число и волновые характеристики отражённых и проходящих распространяющихся волн.

Введение. Задачи о направленном (волноводном) распространении гармонических волн в упругих, электроупругих и магнитоупругих протяжённых телах различных конфигураций составляют предмет теоретических и экспериментальных исследований ведущихся многочисленными исследователями. Укажем лишь на известные книги [1-4], обзорные статьи [5,6], работы [7-12], в которых обсуждаются вопросы об определении волновых полей в различных волноводах с определёнными граничными условиями. Решаемая задача, в какой-то мере, является частным случаем задачи, рассмотренной в [7], в которой исследуется динамическая контактная задача об излучении плоской сдвиговой волны, распространяющейся внутри свободной части упругого слоя, вложенной в упругое пространство и соединённое с ним частично. Здесь, как и в [7], решение задачи построено методом Винера – Хопфа, однако, непосредственным предельным переходом не удаётся получить решение этой задачи, так как при решении [7] появляются точки ветвления.

Постановка задачи. Определяющие уравнения и её решение.

Упругий слой толщины $2h$ в декартовой системе координат занимает область: $\{|x|<\infty,\ |y|\le h,\ |z|<\infty\}$ и находится в условиях антиплоской деформации. Рассматриваются два случая граничных условий на граничных плоскостях слоя, которые в базовой плоскости xOy (для полосы) запишутся в виде:

I случай:

$$\tau_{yz}(x\pm h)=\mu_0\left.\frac{\partial w_0^{(1)}(x,y)}{\partial y}\right|_{y=\pm h}=0,\qquad x<0;\qquad w_0^{(1)}(x,y)\big|_{y=\pm h}=0,\quad x>0\,, \tag{1}$$

II случай:

$$w_0^{(2)}(x,y)\big|_{y=\pm h}=0,\quad x<0;\qquad \tau_{yz}(x\pm h)=\mu_0\left.\frac{\partial w_0^{(2)}(x,y)}{\partial y}\right|_{y=\pm h}=0,\quad x>0 \tag{2}$$

$w_0^{(j)}(x,y)$ – амплитуда единственного отличного от нуля компонент упругого перемещения $u_z(x,y,t)=w_0^{(j)}(x,y)e^{-i\omega t}$, где ω – частота колебания падающей волны, t – время. В (1), (2) в дальнейшем гармонический множитель $e^{-i\omega t}$ опускается, т.е. задача решается в амплитудах.

В левом части слоя $(x<0)$ из бесконечности по направлению оси Ox, набегает гармоническая распространяющаяся плоская сдвиговая волна с амплитудами

$$w_{ON}^{(1)}(x,y)=A_N e^{i\gamma_N x}\cos\frac{\pi N}{2h}(y-h),\qquad N=0,1,2,... \tag{3}$$

$$w_{ON}^{(2)}(x,y)=B_N e^{i\gamma_N x}\sin\frac{\pi N}{2h}(y-h),\qquad N=1,2,3,... \tag{4}$$

$$\gamma_N=\sqrt{k_0^2-(\pi N/2h)^2},\quad k_0>\pi N/2h \tag{5}$$

Соответственно, случаям I и II.

Здесь A_N, B_N – постоянные, $k_0 = \omega/c_0$ – волновое число, $c_0 = \sqrt{\mu_0/p_0}$ – скорость распространения сдвиговой волны в слое, ω – частота колебаний. Считается, что других волн, бегущих к открытому концу волновода, нет. Число N может быть одно из чисел 0,1,2,…, таким, что $N < 2hk_0/\pi$. Предполагая, что слой находится в условиях антиплоской деформации, требуется определить излученное волновое поле слоя в целом, а также определить число отражённых и проходящих волн и их волновые характеристики в зависимости от параметров падающей волны. Для решения поставленных задач, очевидно, будем исходить из скалярного волнового уравнения Гермгольца

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + k_0^2 w(x,y) = 0, \qquad (-\infty < x < \infty,\ -h < y < h) \tag{6}$$

при граничных условиях (1) и (2), соответственно, случаям I и II.

Положим, как обычно, при случае I

$$W_0^{(1)}(x,y) = w_0^{(1)}(x,y) - w_{ON}^{(1)}(x,y). \tag{7}$$

Подставляя (7) в (6), после преобразования Фурье, её решение представим в виде

$$\begin{aligned} \bar{W}_0^{(1)}(\sigma,y) &= \bar{w}_0^{(1)}(\sigma,y) - 2\pi A_N \delta(\sigma+\gamma_N)\cdot\cos\frac{\pi N}{2h}(y-h) = \\ &= C_0(\sigma)\operatorname{ch}(\gamma_0 y) + D_0(\sigma)\operatorname{sh}(\gamma_0 y), \quad |y| \le h, \end{aligned} \tag{8}$$

где $C_0(\sigma)$ и $D_0(\sigma)$ – неизвестные функции, $\delta(\sigma)$ – известная функция Дирака, а $\gamma_0(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - k_0^2}$. При этом, считается, что $\gamma_0(\sigma) \to |\sigma|$ при $|\sigma| \to \infty$ и $\sqrt{\sigma^2 - k_0^2} = -i\sqrt{k^2 - \sigma^2}$ для $|\sigma| < k_0$, что позволяет обеспечить выполнение условия уходящей волны. Для выбора такой ветви двузначной функции $\sqrt{\alpha^2 - k_0^2}$, как известно [1,2], следует провести в комплексной плоскости $\alpha = \sigma + i\tau$ разрезы до бесконечности от точки $\sigma = k_0$ в верхней полуплоскости и $\sigma = -k_0$ – в нижней полуплоскости.

Применив преобразование Фурье к граничным условиям (2) и удовлетворяя им при помощи (8), приходим к следующим функциональным уравнениям типа Винера–Хопфа на действительной оси

$$\bar{S}^-(\sigma) = \left(h\gamma_0^2\right)^{-1} \bar{K}_0(\sigma)\bar{D}'^+(\sigma) = \pi A_N (1+\cos\pi N)\delta(\sigma+\gamma_N) \tag{9}$$

$$\bar{D}^-(\sigma) = h\left[\bar{K}_0(\sigma)\right]^{-1} \bar{S}'^+(\sigma) = \pi A_N (1-\cos\pi N)\delta(\sigma+\gamma_N) \tag{10}$$

Здесь

$$\bar{K}_0(\sigma) = h\gamma_0 \operatorname{cth}(h\gamma_0) \qquad \bar{f}(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\sigma x} dx, \qquad f^{\pm}(x) = \theta(\pm x) f(x) \tag{11}$$

где $\theta(x)$ – функция Хевисайда.

Неизвестные функции из $C_0(\sigma)$ и $D_0(\sigma)$ определяются при помощи решений функциональных уравнений следующим образом:

$$C_0(\sigma) = \bar{D}'^+(\sigma)/4\gamma_0 \operatorname{sh}(\gamma_0 h), \quad D_0(\sigma) = \bar{S}'^+(\sigma)/4\gamma_0 \operatorname{ch}(\gamma_0 h). \tag{12}$$

Очевидно, что (9) представляет решение задачи для чётных N, а (10) – при нечётных N.

Таким образом, решение задачи свелось к решению функциональных уравнений (9) и (10), к которым можно применить метод Винера–Хопфа [1,2].

Факторизация $\bar{K}_0(\sigma)$ из (9), (10) представляется в виде [1]

$$\bar{K}_0(\sigma) = \bar{K}_0^-(\sigma)\bar{K}_0^+(\sigma)$$

$$\bar{K}_0^{\pm}(\sigma)=\sqrt{\frac{k_0 h\cos(k_0 h)}{\sin(k_0 h)}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1\pm i\sigma h_0\left(\left(n-1/2\right)^2-\left(k_0 h_0\right)^2\right)^{-1/2}}{1\pm i\sigma h_0\left(n^2-\left(k_0 h_0\right)^2\right)^{-1/2}}\right),\qquad h_0=\frac{h}{\pi} \tag{13}$$

где знаки берутся одновременно или верхние или нижние.

Отметим, что имеет место асимптотическое представление $\bar{K}_0^{+}(\sigma)\sim\alpha^{1/2}$, при $\alpha\to\infty$ в верхней полуплоскости,

$$\bar{K}_0^{+}(k_0)=1-2ik_0 h_0\ln 2+O\left(k_0^2\right),\quad \text{при}\quad k_0\to 0 \tag{14}$$

Подставляя (13) в (9) и (10) и имея в виду разложение [12]

$$\delta(\sigma+\gamma_N)=\frac{1}{2\sigma i}\left[\frac{1}{\sigma+\gamma_N-i0}-\frac{1}{\sigma+\gamma_N+i0}\right], \tag{15}$$

где первое слагаемое регулярно при $\operatorname{Im}(\alpha)<0$, а второе – при $\operatorname{Im}(\alpha)>0$ по известной процедуре [1], решение функциональных уравнений (9) и (10) получим в виде:

$$\bar{D}'^{+}(\sigma)=iA_N\frac{k_0+\gamma_N}{\bar{K}_0^{-}(-\gamma_N)}\frac{h(\sigma+k_0)}{(\sigma+\gamma_N+i0)}\frac{(1+\cos\pi n)}{\bar{K}_0^{+}(\sigma)},\quad \bar{S}'^{+}(\sigma)=\frac{iA_N\bar{K}_0^{+}(\sigma)(1-\cos\pi n)}{\left(\bar{K}_0^{-}(-\gamma_N)\right)^{-1}h(\sigma+\gamma_N+i0)} \tag{16}$$

Подставляя (16) в (8) с учётом (14), после обратного преобразования Фурье получим решение задачи $w_0^{(1)}(x,y)$ в случае I в виде

$$\begin{gathered}w_0^{(1)}(x,y)=w_{0N}^{(1)}(x,y)-\frac{A_N^{+}}{2\pi i}\frac{(k_0+\gamma_N)}{\bar{K}_0^{+}(-\gamma_N)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h(\sigma+k_0)}{(\sigma+\gamma_N+i0)}\frac{\operatorname{ch}\gamma_0 h}{\gamma_0\operatorname{sh}\gamma_0 h}\frac{e^{-i\sigma x}}{\bar{K}_0^{+}(\sigma)}d\sigma-\\ -\frac{A_N^{-}}{2\pi i}\bar{K}_0^{-}(-\gamma_N)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\sigma+k_0)\operatorname{sh}\gamma_0 y}{(\sigma+\gamma_N+i0)h\gamma_0\operatorname{ch}\gamma_0 h}e^{-i\sigma x}d\sigma,\qquad -h\le y\le h\\ A_N^{\pm}=A_N\left(1\pm\cos\pi N\right)/2,\quad N=0,1,2,...\end{gathered} \tag{17}$$

Аналогичным путём для II случая получили

$$\begin{gathered}w_0^{(2)}(x,y)=w_{0N}^{(2)}(x,y)+\frac{B_N^{+}}{4\pi i}\frac{\pi N}{\bar{K}_0^{-}(-\gamma_N)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\gamma_0 y}{\operatorname{sh}\gamma_0 h}\frac{e^{-i\sigma x}}{\bar{K}_0^{+}(\sigma)}\frac{d\sigma}{(\sigma+\gamma_N+i0)}+\\ -\frac{B_N^{-}}{8\pi i}\frac{\pi N\bar{K}_0^{-}(-\gamma_N)}{h(\gamma_N+k_0)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{ch}\gamma_0 y}{\operatorname{ch}\gamma_0 h}\frac{\bar{K}_0^{+}(\sigma)}{h(\sigma+k_0)}\frac{e^{-i\sigma x}}{(\sigma+\gamma_N+i0)}d\sigma,\qquad -h\le y\le h\end{gathered}$$

Для детального исследования распределения волнового поля упругих перемещений в слое следует вычислить интегральные составляющие, входящие в (17). Для этого, как обычно, переходим в комплексную плоскость $\alpha=\sigma+i\tau$. Волновое поле для области $x<0,\ |y|\le h$ определяется при помощи (17), замыкая контур интегрирования в верхней полуплоскости. Подынтегральные выражения, как это следует из (17), внутри контура интегрирования не имеют ветвления, а имеют только простые полюса в точках

$$\alpha_0=k_0,\quad \alpha_m=\sqrt{k_0^2-\left(\pi m/h\right)^2}\qquad \beta_m=\sqrt{k_0^2-\left(\left(2m-n\pi\right)/2h\right)^2},\quad m=1,2,... \tag{18}$$

В итоге, для $w_0^{(1)}(x,y)$ при $x<0$ из (17) получается следующее представление:

$$\begin{gathered}w_0^{(1)}(x,y)=w_{0N}^{(1)}(x,y)-A_N^{+}\left[\bar{K}_0^{-}(-\gamma_N)\bar{K}_0+(k_0)\right]^{-1}e^{-ik_0 x}-A_N^{+}\frac{(k_0+\gamma_N)}{k_0(-\gamma_N)}\times\\ \times\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{(k_0+\alpha_m)\cos\frac{\pi m}{h}y}{\alpha_m(\alpha_m+\gamma_N)\bar{K}_0^{-}(\alpha_m)}e^{-i\alpha_m x}-A_N^{-}i\bar{K}_0^{-}(-\gamma_N)\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{\bar{K}^{+}(\beta_m)\sin\frac{\pi(2m-1)}{2h}}{h\beta_m h(\beta_m+\gamma_N)}e^{-i\beta_m x}\end{gathered} \tag{19}$$

а для $x>0$

$$w_0^{(1)}(x,y)=A_N^+\frac{\pi(k_0+\gamma_N)}{2\bar{K}_0^-(-\gamma_N)}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{(2m-1)\bar{K}_0^-(-\beta_m)\cos\frac{\pi(2m-1)}{2h}}{h^2\beta_m(k_0+\beta_m)(\gamma_N-\beta_m)}e^{i\beta_m x}+$$
$$+A_N^-\pi\bar{K}_0^-(-\gamma_N)\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{m\sin\left(\frac{\pi m}{h}y\right)}{\bar{K}_0^-(-\alpha_m)h^2\alpha_m(\gamma_N-\alpha_m)}e^{i\alpha_m x}; \tag{20}$$

Аналогично, для распределения перемещений во II случае получается:

$$w_0^{(2)}(x,y)=B_N e^{i\gamma_N x}\sin\frac{\pi n}{2h}(y-h)-B_N^+\frac{\pi^2 N}{\bar{K}_0^-(-\gamma_N)}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{m\sin y}{h\alpha_m h(\alpha_m+\gamma_N)\bar{K}_0^+(\alpha_m)}e^{-i\alpha_m x}-$$
$$+B_N^-\frac{\pi^2 N}{4h(k_0+\gamma_N)}(-\gamma_N)\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{(2m-1)\cos\left(\frac{\pi(2m-1)}{2h}y\right)\bar{K}_0^+(\beta_m)}{h^3\beta_m(\beta_m+k_0)(\beta_m+\gamma_N)}e^{-i\beta_m x} \tag{21}$$

где α_m и β_m $(m=1,2,...)$ даются формулами (18).

Тогда, при $x>0$ будем иметь:

$$w_0^{(2)}(x,y)=B_N^-\frac{\pi N\bar{K}_0^-(-\gamma_n)}{h(\gamma_N-k_0)\bar{K}_0^-(-k_0)}e^{ik_0 x}$$
$$-B_N^+\frac{\pi N}{2\bar{K}_0^-(\gamma_N)}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{\bar{K}_0^-(-\beta_m)\sin\left(\frac{2m-1}{2h}\pi y\right)}{h^2\beta_m(\gamma_N-\beta_m)}e^{i\beta_m x}+$$
$$+B_N^-\frac{\pi^3 N\bar{K}_0^2(-\gamma_N)}{4h(\gamma_N+k_0)(\gamma_N)}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{m^2\cos\left(\frac{\pi m}{h}y\right)}{h^3\alpha_m(k_0-\alpha_m)(\gamma_N-\alpha_m)\bar{K}_0^-(-\alpha_m)}e^{i\alpha_m x} \tag{22}$$
$$B_N^{\pm}=B_N(1\pm\cos\sigma n)/2;$$

Имея в виду оценки (14), а также выражения α_m,β_m из (18), нетрудно убедиться, что по этим формулам можно определить напряжённо-деформированное состояние слоя, в целом, более того, используя асимптотические формулы [2,4]

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^p\begin{Bmatrix}\sin nx\\ \cos nx\end{Bmatrix}\sim x^{-(p+1)}\Gamma(p+1)\begin{Bmatrix}\cos(\pi p/2)\\ \sin(-\pi p/2)\end{Bmatrix}\quad \text{при } x\to 0,\quad 0<p<1$$

получим, что $\tau_{yz}(x,\pm h)\sim|x|^{-1/2}$ при $x\to\pm 0$ в случаях I и II.

Выводы. Переходя к характерным особенностям волнового поля опять-таки из (19)–(22), при заданном интервале изменения волнового числа k_0, в обоих рассмотренных случаях можно определить число отражённых и проходящих волн и их волновые параметры в зависимости от параметров падающей волны.

Так, из (19) следует, при чётном $N=2k$ $(k=0,1,2,...)$ независимо от волнового числа падающей волны γ_{2k} от защемленного сечения в области $x<0$ распространяется отражённая волна с волновым числом k_0 и с амплитудой $A_N^+\left[2\bar{K}_0^-(-\gamma_N)\bar{K}_0^+(k_0)\right]^{-1}$. А из (22) следует, что при нечётном $N=2k+1$ $(k=1,2,...)$ независимо от γ_{2k+1} падающей волны в свободной области $x>0$ распространяется проходящая волна с волновым числом k_0 с амплитудой $\pi B_N^-\bar{K}_0^-(-\gamma_N)\left[h(\gamma_N-k_0)\bar{K}_0^-(k_0)\right]^{-1}$.

Из (19) и (22) следует также, что волновые числа в зоне отражённых волн $(x<0)$, соответствующие чётным и нечётным N, в зоне проходящих $(x>0)$ волн меняются местами.

Число, волновые числа и амплитуды остальных отражённых и проходящих волн зависят от k_0, N, A_N, B_N и в каждом конкретном случае нетрудно их определить. Если, например, $\pi < k_0 h < 1.5\pi$, то число распространяющихся волн N может принимать значения $N = 0,1,2$ в I случае и $N = 1,2$ – во II случае. При этом, из волновых чисел α_m и β_m положительными будут только α_1 и β_1. Следовательно, имея в виду вышесказанное для отраженных и проходящих волн, получим

I случай

N	отраженный	проходящий
0	k_0, α_1	β_1
1	k_0, β_1	α_1
2	k_0, α_1	β_1

II случай

N	отраженный	проходящий
1	k_0, β_1	α_1
2	α_1	β_1

ЛИТЕРАТУРА

1. Нобл Б. Метод Винера–Хопфа. М.: Мир, 1962. 297с.
2. Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теорий волноводов. М.: Мир, 1974. 327с.
3. Гриченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981. 284с.
4. Сумбатян М.А., Скалия А. Основы теории дифракции с приложениями в механике и акустике. М.: Физматлит, 2013. 328с.
5. Мелешко В.В., Бондаренко А.А. и др. Упругие волноводы: История и современность I, II. Математические методы и физико-механические поля. 2008. Т.51. №2. С.86-104.
6. Мелешко В.В., Бондаренко А.А. и др. Упругие волноводы: История и современность I, II. Математические методы и физико-механические поля. 2008. Т.51. №4. С.163-180.
7. Григорян Э.Х., Агаян К.Л. Излучение плоской сдвиговой волны из упругого волновода в составное упругое пространство // Изв. НАН Армении. Механика. 2007. Т.60. №3. С.23-38.
8. Григорян Э.Х., Агаян К.Л., Джилавян С.А. Дифракция сдвиговой плоской волны в упругих и электроупругих средах, допускающих распространение поверхностных волн. //Труды межд. конф. «Актуальные проблемы механики сплошной среды», посвящ. 100-летию академика НАН Армении Н.Х. Арутюняна, Ереван: 2012. С.186-190.
9. Piliposyan D.G., Ghazaryan R.A., Ghazaryan K.B. Shear waves in periodic waveguide with alternating boundary conditions. //Proc. of NAS Armenia. Mechanics, 2014. T.67. №3. C.40-48.
10. Белубекян В.М., Белубекян М.В. Трёхмерняя задача упругого волновода с прямоугольным поперечным сечением. //Изв. НАН Армении. Механика. 2015. Т.68. №4. С.3-8.
11. Avetisyan A.S., Hunanyan A.A. Ampliyude-phase distortion of the normal high–frequency shear waves in homogeneous elastic waveguide with weakly rough surfaces. //Proc. of NAS Armenia. Mechanics. 2017. Vol.70. №2. P.28-42.
12. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй спецкурс. М.: Наука, 1965. 275с.

Сведения об авторе:

Агаян Каро Леренцович – д.ф.м.н., ведущий науч. сотр. Института механики НАН РА.

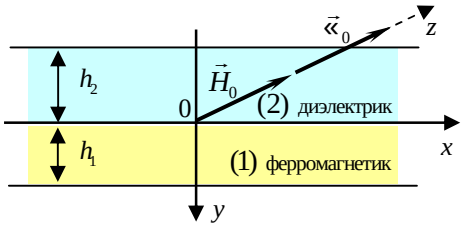
(+374 49) 48 55 66, **E-mail:** karo.aghayan@gmail.com

УПРУГО-СПИНОВЫЕ ВОЛНЫ В ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КОНСТРУКЦИИ ТИПА МАГНИТ-НЕМАГНИТ

Агаян К.Л., Атоян Л.А., Саакян С.Л.

Данная работа посвящена вопросам существования и распространения упруго-спиновых волн в периодической среде магнит-немагнит. Работа является дополнением и уточнением предыдущей работы авторов [9], где была допущена неточность. Найдены волновые поля и соответствующее дисперсионное уравнение. Выявлены и найдены зоны пропускания и зоны умолчания в спектре частот искомых волн, приведены некоторые численные результаты в виде дисперсионных кривых.

1. Введение. В последние годы большое внимание привлекают вопросы распространения упруго-спиновых волн в периодических средах [5-8]. Данная работа посвящена вопросам распространения упруго-спиновых волн в слоистой, периодической структуре: ферромагнит-диэлектрик. Задача решается с использованием уравнений, учитывающих взаимосвязь спиновых (магнитных) и упругих возмущений [1-3, 5], это уравнение механического движения среды, уравнение Ландау-Лифшица, характеризующее движение плотности магнитного момента, а также квазистатическое уравнение Максвелла для магнитного поля.



Фиг. 1.

2. Постановка задачи. Пусть задана периодическая, слоистая структура, состоящая из бесконечно чередующихся ферромагнитных и диэлектрических слоёв разных толщин (h_1 и h_2). Структура отнесена к прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$, как показано на фиг.1. Предполагается, что оси анизотропии лёгкого намагничивания ферромагнитных слоёв параллельны друг другу и совпадают с направлением оси Oz.

Далее полагаем, что рассматриваемая структура находится во внешнем постоянном магнитном поле $\vec{H}_0$ и во всех ферромагнитных слоях плотность намагниченности единицы объёма $\vec{M}_0 = \rho_1 \vec{\mu}_0$ ($\vec{\mu}_0$ – плотность намагниченности на единицу массы, ρ_1 – массовая плотность ферромагнетика) одинакова и параллельна магнитному полю $\vec{H}_0$ и оба вектора направлены по оси лёгкого намагничивания, т.е. по оси Oz. Рассмотрим случай, когда возмущения в структуре не зависят от координаты z и характеризуются векторами упругого перемещения $\vec{u}_1 = \left(0, 0, u_1(x, y, t)\right)$, магнитного момента $\vec{\mu} = \left(\mu(x, y, t), \nu(x, y, t), 0\right)$ и магнитостатическим потенциалом $\varphi_1(x, y, t)$ в ферромагнитном слое, вектором упругого перемещения $\vec{u}_2 = \left(0, 0, u_2(x, y, t)\right)$ и магнитостатическим потенциалом $\varphi_2(x, y, t)$ в диэлектрическом слое, причём

$$\vec{H}_1 = -\mathrm{grad}\varphi_1, \ \vec{H}_2 = -\mathrm{grad}\varphi_2,$$

где $\vec{H}_1$ и $\vec{H}_2$ – возмущения напряжённости магнитного поля в ферромагните и диэлектрике, соответственно.

Уравнение движения среды, уравнение движения плотности магнитного момента Ландау-Лифшица (обменные эффекты не учтены) и квазистатическое уравнение Максвелла для магнитного поля в ферромагнитном слое имеют вид [1-3, 5]:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = S_1^2 \Delta u_1 + M_0 f \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial \nu}{\partial y} \right) \\
&\frac{\partial \mu}{\partial t} = \omega_M \left(\rho_1^{-1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \hat{b}\nu + \bar{b}\mu_0 \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \\
&\frac{\partial \nu}{\partial t} = -\omega_M \left(\rho_1^{-1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \hat{b}\mu + \bar{b}\mu_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \\
&\Delta \varphi_1 = \rho_1 \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial \nu}{\partial y} \right)
\end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

$S_1^2 = G_1 / \rho_1$ – квадрат скорости упругих волн в ферромагнитном слое, G_1 – модуль сдвига, ρ_1 – плотность материала ферромагнетика, $\omega_M = \gamma M_0$, γ – гиромагнитное отношение, f – коэффициент пьезомагнетизма, обусловленный магнитострикцией, $\hat{b} = b + H_0 / M_0$, $\bar{b} = b + f$, b – постоянная магнитной анизотропии, Δ – двумерный оператор Лапласа.

Уравнение движения и уравнение магнитостатики в диэлектрическом слое:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = S_2^2 \Delta u_2 \\
&\Delta \varphi_2 = 0
\end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

$S_2^2 = G_2 / \rho_2$ – квадрат скорости упругих волн в диэлектрическом слое, G_2 – модуль сдвига, ρ_2 – плотность диэлектрика.

Контактные (при $y = 0$) и граничные условия Флоке на границах ячейки периодичности структуры ($y = h_1$, $y = -h_2$):

$$\begin{aligned}
&\phi_1(0) = \phi_2(0); \quad \frac{\partial \phi_1(0)}{\partial y} - \rho_1 \nu(0) = \frac{\partial \phi_2(0)}{\partial y} \\
&u_1(0) = u_2(0); \quad \rho_1 S_1^2 \frac{\partial u_1(0)}{\partial y} + \mu_0 \bar{b} \rho_1 \nu(0) = \rho_2 S_2^2 \frac{\partial u_2(0)}{\partial y}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}
&\phi_1(h_1) = \lambda \phi_2(-h_2); \quad \frac{\partial \phi_1(h_1)}{\partial y} - \rho_1 \nu(h_1) = \lambda \frac{\partial \phi_2(-h_2)}{\partial y} \\
&u_1(h_1) = \lambda u_2(-h_2); \quad \rho_1 S_1^2 \frac{\partial u_1(h_1)}{\partial y} + \mu_0 \bar{b} \rho_1 \nu(h_1) = \lambda \rho_2 S_2^2 \frac{\partial u_2(-h_2)}{\partial y}
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Здесь λ – параметр Флоке: $\lambda = e^{iqd}$, $d = h_1 + h_2$, q – компонента волнового вектора, перпендикулярного к поверхностям слоёв конструкции, называемая волновым числом Флоке [6-8]. Таким образом, задача свелась к решению краевой задачи (2.1)-(2.4).

3. Решение задачи в виде плоских волн. Решение системы уравнений (2.1) в ферромагнитном слое будем искать в виде плоских волн:

$(\mu,\ \nu,\ \varphi_1,\ u_1) = (M,\ N,\ \tilde{\Phi}_1, \tilde{u}_1) e^{ry} e^{i(px - \omega t)}$,

$M, N, \tilde{\Phi}_1, \tilde{u}_1, r$ – постоянные, p и ω заданы и положительны. В диэлектрическом слое решения (2.2) также ищем в виде плоских волн:

$(\varphi_2,\ u_2) = (\tilde{\Phi}_2, \tilde{u}_2) e^{sy} e^{i(px - \omega t)}$,

$\tilde{\Phi}_2, \tilde{u}_2, s$ – постоянные. После несложных стандартных вычислений мы получим решения системы уравнений (2.1) и (2.2):

$$u_1 = \left[e^{\beta_1 y} \tilde{u}_1^+ + e^{-\beta_1 y} \tilde{u}_1^- \right] e^{i(\omega t - px)}; \tag{3.1}$$

$$\varphi_1 = \left[e^{py}\tilde{\Phi}_1^+ + e^{-py}\tilde{\Phi}_1^- - RM_0\bar{b}e^{\beta_1 y}\tilde{u}_1^+ - RM_0\bar{b}e^{-\beta_1 y}\tilde{u}_1^- \right] e^{i(\omega t - px)}; \tag{3.2}$$

$$\mu = i\rho_1^{-1}\left[Ppe^{py}\tilde{\Phi}_1^+ + Qpe^{-py}\tilde{\Phi}_1^- + M_0\bar{b}\left(Rp + T\beta_1\right)e^{\beta_1 y}\tilde{u}_1^+ + M_0\bar{b}\left(Rp - T\beta_1\right)e^{-\beta_1 y}\tilde{u}_1^- \right] e^{i(\omega t - px)}; \tag{3.3}$$

$$\nu = \rho_1^{-1}\left[Ppe^{py}\tilde{\Phi}_1^+ - Qpe^{-py}\tilde{\Phi}_1^- - M_0\bar{b}\left(Tp + R\beta_1\right)e^{\beta_1 y}\tilde{u}_1^+ - M_0\bar{b}\left(Tp - R\beta_1\right)e^{-\beta_1 y}\tilde{u}_1^- \right] e^{i(\omega t - px)}; \tag{3.4}$$

$$u_2 = \left[e^{\beta_2 y}\tilde{u}_2^+ + e^{-\beta_2 y}\tilde{u}_2^- \right] e^{i(\omega t - px)}; \tag{3.5}$$

$$\varphi_2 = \left[e^{py}\tilde{\Phi}_2^+ + e^{-py}\tilde{\Phi}_2^- \right] e^{i(\omega t - px)}. \tag{3.6}$$

Здесь введены обозначения:

$$P = \frac{\hat{b} - \Omega}{\hat{b}^2 - \Omega^2},\ Q = \frac{\hat{b} + \Omega}{\hat{b}^2 - \Omega^2},\ R = \frac{\hat{b}}{\Omega_{SV}^2 - \Omega^2},\ T = \frac{\Omega}{\Omega_{SV}^2 - \Omega^2}, \tag{3.7}$$

$$\beta_1 = \sqrt{p^2 - \frac{\Omega_{SV}^2 - \Omega^2}{\bar{\Omega}_{SV}^2 - \Omega^2}\frac{\Omega^2}{\lambda_t^2}},\ \beta_2 = \sqrt{p^2 - \chi\frac{\Omega^2}{\lambda_t^2}}, \tag{3.8}$$

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_M},\ \Omega_{SV}^2 = \hat{b}(\hat{b}+1),\ \bar{\Omega}_{SV}^2 = \Omega_{SV}^2 - \hat{b}\varepsilon_p,\ \varepsilon_p = \frac{M_0^2\bar{b}f}{G_1},\ \lambda_t^2 = \frac{G_1}{\omega_M^2},\ \chi = \frac{S_1^2}{S_2^2};$$

$\tilde{u}_1^+, \tilde{u}_1^-\ \tilde{u}_2^+, \tilde{u}_2^-, \tilde{\Phi}_1^+, \tilde{\Phi}_1^-\ \tilde{\Phi}_2^+, \tilde{\Phi}_2^-$ – постоянные, $\Omega_{SV} = \sqrt{\hat{b}(\hat{b}+1)}$ – частота, характеризующая объёмную спиновую волну, распространяющуюся перпендикулярно к $\vec{H}_0$, ε_p – коэффициент магнитоупругого взаимодействия.

Подставляя общие решения (3.1)-(3.6) в контактные и граничные условия (2.3) и (2.4), получим систему однородных алгебраических уравнений относительно амплитуд $\tilde{\Phi}_1^+$, $\tilde{\Phi}_1^-$, $\tilde{u}_1^+$, $\tilde{u}_1^-$, $\tilde{\Phi}_2^+$, $\tilde{\Phi}_2^-$, $\tilde{u}_2^+$, $\tilde{u}_2^-$. Из условия нетривиальности решений этой системы следует дисперсионное уравнение задачи:

$$l^4 + a(p,\Omega)l^3 + 2b(p,\Omega)l^2 + a(p,\Omega)l + 1 = 0, \tag{3.9}$$

которое распадается на два уравнения:

$$\cos qd = \frac{-a(p,\Omega) + \sqrt{a^2(p,\Omega) - 8\left(b(p,\Omega) - 1\right)}}{4}$$
$$\cos qd = \frac{-a(p,\Omega) - \sqrt{a^2(p,\Omega) - 8\left(b(p,\Omega) - 1\right)}}{4}. \tag{3.10}$$

Здесь введены обозначения:

$$b(p,\Omega) = 1 + 2\mathrm{ch}(h_1 p)\mathrm{ch}(h_2 p)\mathrm{ch}(h_1 p\beta_1)\mathrm{ch}(h_2 p\beta_2) - \frac{A\mathrm{ch}(h_1 p\beta_1)\mathrm{ch}(h_2 p\beta_2)\mathrm{sh}(h_1 p)\mathrm{sh}(h_2 p)}{\Omega^2 - \Omega_{SV}^2}$$
$$- \frac{\bar{\Delta}^2\mathrm{sh}(h_1 p)\mathrm{sh}(h_1 p\beta_1)}{\beta_1(\Omega^2 - \tilde{\Omega}_{SV}^2)}\left[1 - \mathrm{ch}(h_2 p)\mathrm{ch}(h_2 p\beta_2)\right] + \frac{\bar{\Delta}^2\mathrm{ch}(h_1 p\beta_1)\mathrm{ch}(h_2 p)\mathrm{sh}(h_1 p)\mathrm{sh}(h_2 p\beta_2)}{\beta_2\kappa(\Omega^2 - \Omega_{SV}^2)}$$
$$- \frac{\bar{\Delta}^2(\hat{b}^2 - \Omega^2)\mathrm{ch}(h_1 p)\mathrm{ch}(h_2 p\beta_2)\mathrm{sh}(h_1 p\beta_1)\mathrm{sh}(h_2 p)}{\beta_1(\Omega^2 - \Omega_{SV}^2)(\Omega^2 - \tilde{\Omega}_{SV}^2)}$$
$$+ \frac{\bar{\Delta}^2(\hat{b}^2 - \Omega^2)\mathrm{sh}(h_2 p)\mathrm{sh}(h_2 p\beta_2)}{\beta_2\kappa(\Omega^2 - \Omega_{SV}^2)^2}\left[1 - \mathrm{ch}(h_1 p)\mathrm{ch}(h_1 p\beta_1)\right]$$

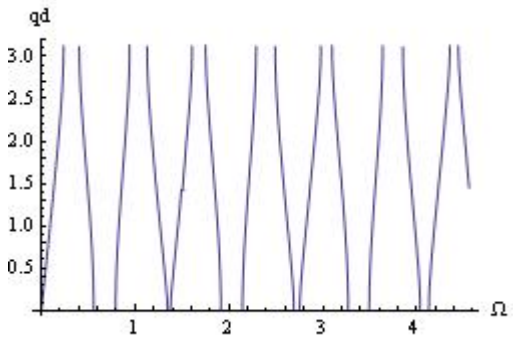
$$+\frac{\left(B-\overline{\Delta}^4\Omega^2\right)\mathrm{ch}(h_1 p)\mathrm{ch}(h_2 p)\mathrm{sh}(h_1 p\beta_1)\mathrm{sh}(h_2 p\beta_2)}{\beta_1\beta_2\kappa(\Omega^2-\Omega_{SV}^2)(\Omega^2-\tilde{\Omega}_{SV}^2)}$$

$$+\frac{\mathrm{sh}(h_1 p)\mathrm{sh}(h_1 p\beta_1)\mathrm{sh}(h_2 p)\mathrm{sh}(h_2 p\beta_2)}{2\beta_1\beta_2\kappa(\Omega^2-\Omega_{SV}^2)^2(\Omega^2-\tilde{\Omega}_{SV}^2)}\left[\overline{\Delta}^4(-2\Omega^4-\hat{b}^2+2\Omega^2\Omega_{SV}^2)-AB\right]$$

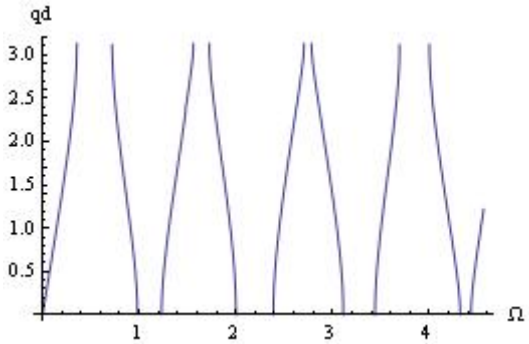
$$a(p,\Omega)=-2\left[\mathrm{ch}(h_1 p)\mathrm{ch}(h_2 p)+\mathrm{ch}(h_1 p\beta_1)\mathrm{ch}(h_2 p\beta_2)\right]+\frac{A\mathrm{sh}(h_1 p)\mathrm{sh}(h_2 p)}{\Omega^2-\Omega_{SV}^2}$$

$$+\frac{\overline{\Delta}^2(\hat{b}^2-\Omega^2)\mathrm{sh}(h_1 p\beta_1)\mathrm{sh}(h_2 p)}{\beta_1(\Omega^2-\Omega_{SV}^2)(\Omega^2-\tilde{\Omega}_{SV}^2)}-\frac{\overline{\Delta}^2\mathrm{sh}(h_1 p)\mathrm{sh}(h_2 p\beta_2)}{\beta_2\kappa(\Omega^2-\Omega_{SV}^2)}$$

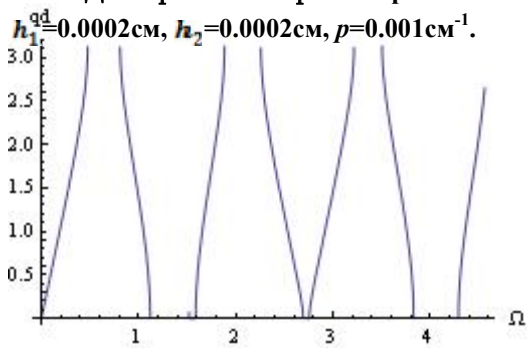
$$-\frac{\mathrm{sh}(h_1 p\beta_1)\mathrm{sh}(h_2 p\beta_2)}{\beta_1\beta_2\kappa(\Omega^2-\Omega_{SV}^2)(\Omega^2-\tilde{\Omega}_{SV}^2)}\left[B-\overline{\Delta}^4\Omega^2\right];$$



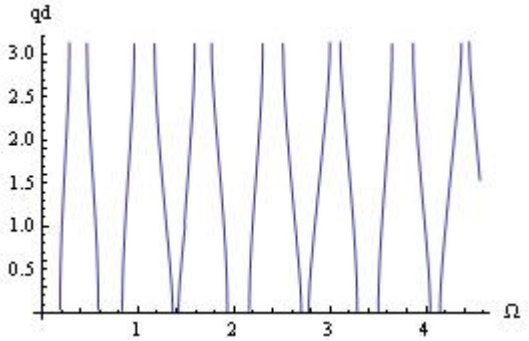
Фиг.2 Дисперсионные кривые при h_1=0.0002см, h_2=0.0002см, p=0.001см$^{-1}$.



Фиг.3 Дисперсионные кривые при



Фиг.4 Дисперсионные кривые при h_1=0.0001см, h_2=0.0001см, p=0.001см$^{-1}$.



Фиг.5 Дисперсионные кривые при h_1=0.0002см, h_2=0.0002см, p=5000см$^{-1}$.

$\tilde{\Omega}_{SV}^2=\Omega_{SV}^2-\hat{b}\overline{\Delta}^2$, $A=1-2\Omega^2+2\Omega_{SV}^2$, $B=\beta_1^2(\Omega^2-\tilde{\Omega}_{SV}^2)^2+\beta_2^2\kappa^2(\Omega^2-\Omega_{SV}^2)^2$.

Как обычно, области пропускания и запрета волн определяются абсолютным значением правой части дисперсионных уравнений (3.10): если оно меньше или равно единице, то волны существуют, в обратном случае их нет.

На фиг.2-5 показаны результаты численного эксперимента для частного случая, когда ферромагнитный слой (ЖИГ) имеет параметры: $S_1=3.85\cdot10^5$см/с, $\rho_1=5.17$г/см^3, $M_0=1750$гс, $f=4.08$, $b=0$, $\varepsilon_p\approx0.67\cdot10^{-4}$, $\hat{b}=1.1$, а параметры диэлектрика следующие: $S_2=1.22\cdot10^6$см/с, $\rho_2=1.56$г/см^3.

На фиг. 2-4 представлена динамика дисперсионных кривых для различных толщин слоёв, а на фиг.5 – изменение волнового поля при возрастании p.

Анализ показывает, что уменьшение толщины любого слоя в ячейке периодичности, а также толщин обоих слоёв одновременно ведёт к уменьшению количества ветвей дисперсионных кривых и к расширению зон умолчания и пропускания волн.

Из фиг.5 видно, что с возрастанием значения p происходит смещение первой ветви дисперсионных кривых по оси Ω вправо.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахиезер А.И., Барьяхтар В.Г., Пелетминский С.В. Спиновые волны. М.: Наука, 1967. 368с.
2. Kittel C. Interactions of spin waves and ultrasonic waves in ferromagnetic crystals, Phys. Rev., 110, 1958, p. 836-841.
3. Можен Ж. Механика электромагнитных сплошных сред. М.: Мир, 1991. 560с.
4. Гуревич А.Г. Магнитный резонанс в ферритах и ферромагнетиках. М.: Наука, 1973. 591с.
5. Danoyan Z.N., Piliposian G.T., Hasanyan D.J. Reflection of spin and spin-elastic waves at the interface of a ferromagnetic half space. Waves in Random and Complex Media. Vol.19, № 4, November 2009, p. 567-584.
6. E.H. Lee, H. Yang. On waves in composite materials with periodic structure. //J. Appl. Math. Vol.25. №3. Nov.1973, pp. 492-499.
7. S.A. Nikitov, Ph.Tailhades, C.S. Tsai. Spin waves in Periodic Magnetic Structures – Magnonic cristals. //J.Magnet.Mater.,v. 23, №3, 2001, pp. 320-331.
8. Даноян З.Н., Казарян К.Б., Атоян Л.А., Даноян Н.З. Квазипериодические спиновые волны типа Блоха-Флоке в периодической слоистой структуре из ферромагнитных и диэлектрических слоёв. //Изв. НАН Армении. Механика. 2013. Т.66. №4. С.29-37.
9. Даноян З.Н., Агаян К.Л., Атоян Л.А., Саакян С.Л. Упруго-спиновые волны типа Флоке в периодической структуре. Proceed. of 4-th Intern.Conference ‘Topical Problems of Continuum Mechanics, 2015, Tsakhkadzor, Armenia, sept., pp. 185-189.

Сведения об авторах:

Агаян Каро Леренцович – Д.ф.-м.н., ведущий науч.сотр. Института механики НАН РА.
Адрес: РА,0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2.
E-mail: karoagayan@mail.ru

Атоян Левон Арутюнович – К.ф.-м.н., ст.науч. сотр. Института механики НАН РА.
Адрес: РА,0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24/2.
E-mail: levous@mail.ru

Саакян Саак Левонович – доцент кафедры „Численный анализ и матем. моделирование” Ереванского Гос. Университета. Тел.: (+37477) 002-408; **E-mail:** ssahakyan@ysu.am

ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ НАПРЯЖЁННОЕ СОСТОЯНИЕ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО, СЛОИСТОГО ПРОСТРАНСТВА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ВНУТРЕННИМИ ДИСКООБРАЗНЫМИ ТРЕЩИНАМИ

Акопян В.Н., Даштоян Л.Л., Мурашкин Е.В.

В работе методом интегрального преобразования Ханкеля построена система определяющих интегральных уравнений задачи, описывающая осесимметричное напряжённое состояние кусочно-однородного, равномерно слоистого пространства, полученного при помощи поочерёдного соединения двух разнородных слоёв одинаковой толщины, которое на срединных плоскостях полос содержит периодическую систему круговых дискообразных параллельных трещин. При помощи операторов вращения определяющая система уравнений сведена к системе интегральных уравнений второго рода типа Фредгольма, решение которой построено методом механических квадратур.

1. Постановка задачи и вывод разрывных решений

Рассмотрим осесимметричное напряжённое состояние кусочно-однородного упругого пространства, полученного при помощи соединения двух разнородных слоёв толщины $2h$ с коэффициентами Ламэ λ_1, μ_1 и λ_2, μ_2 соответственно, отнесённого к цилиндрической системе координат $Or\varphi z$, на срединных плоскостях разнородных слоёв $z=(2n+1)h\ (n\in Z)$ которого имеются периодические системы круговых дискообразных параллельных трещин с радиусами $a_j\ (j=1,2)$, соответственно. Будем считать, что пространство деформируется под воздействием одинаковых осесимметричных нормальных нагрузок $P_j(r)\ (j=1,2)$, действующих соответственно на берегах трещин в разнородных слоях.

Требуется определить закономерности изменения раскрытия трещин и коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений на окружностях $r=a_j$ в зависимости от физико-механических и геометрических характеристик разнородных слоёв.

Очевидно, что при такой постановке задачи все средние плоскости $z=(2n+1)h\ (n\in Z)$ разнородных слоёв являются плоскостями симметрии, что позволяет отделить базовую ячейку в виде двухкомпонентного слоя, занимающего в пространстве область $\Omega\{|z|\le h; 0\le r<\infty; 0\le\varphi\le 2\pi\}$ и поставленную задачу сформулировать как граничную задачу этого слоя. На рис.1 изображено осевое сечение базовой ячейки.

Снабдив индексами 1 и 2 все величины, описывающие напряжённо-деформированное состояние разнородных слоёв базовой ячейки соответственно, поставленную задачу запишем в виде следующей граничной задачи:

$$\begin{cases} \tau_{rz}^{(j)}(r,(-1)^{j+1}h)=0 & (0\le r<\infty) \\ u_z^{(j)}\left(r,(-1)^{j+1}h\right)=0 & (a_j\le r<\infty) \quad (j=1,2) \\ \sigma_z^{(j)}(r,h)=-P_j(r) & (0\le r<a_j) \end{cases} \tag{1.1a}$$

$$\begin{cases} u_r^{(1)}(r,0)=u_r^{(2)}(r,0) & (0\le r<\infty) \\ u_z^{(1)}(r,0)=u_z^{(2)}(r,0) & (0\le r<\infty) \\ \sigma_z^{(1)}(r,0)=\sigma_z^{(2)}(r,0) & (0\le r<\infty) \\ \tau_{rz}^{(1)}(r,0)=\tau_{rz}^{(2)}(r,0) & (0\le r<\infty) \end{cases} \tag{1.1b}$$

где $u_r^{(j)}(r,z)$ и $u_z^{(j)}(r,z)\ (j=1,2)$ – соответственно, радиальные и вертикальные смещения точек слоёв, а $\sigma_z^{(j)}(r,z)$ и $\tau_{rz}^{(j)}(r,z)$ – нормальные и радиальные напряжения, действующие в соответствующих слоях.

Чтобы построить решение граничной задачи (1.1), представим решения уравнений Ламэ в виде интегралов Ханкеля [1]:

$$u_r^{(j)}(r,z)=\int_0^\infty\left[\left(A_j(s)+zB_j^*(s)\right)\mathrm{ch}(zs)+\left(B_j(s)+zA_j^*(s)\right)\mathrm{sh}(zs)\right]sJ_1(rs)\,ds;$$
$$u_z^{(j)}(r,z)=\int_0^\infty\left[\left(C_j(s)-zA_j^*(s)\right)\mathrm{ch}(zs)+\left(D_j(s)-zB_j^*(s)\right)\mathrm{sh}(zs)\right]sJ_0(rs)\,ds; \tag{1.2}$$

где

$$A_j^*(s)=\frac{s}{æ_j}\left(A_j(s)+D_j(s)\right);\ B_j^*(s)=\frac{s}{æ_j}\left(B_j(s)+C_j(s)\right)\ \ (j=1,2),$$

$J_j(x)$ $(j=0,1)$ – функции Бесселя действительного аргумента, $A_j(s)$, $B_j(s), C_j(s), D_j(s)$ – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению, а $æ_j$ $(j=1,2)$ – известные постоянные Мусхелишвили.

Чтобы решить граничную задачу (1.1), введём в рассмотрение неизвестные функции смещений берегов трещин

$$u_z\left(r,(-1)^{j+1}h\right)=\frac{(-1)^j}{2}w_j(r)\ \ \left(0<r<a_j;\ \ j=1,2\right) \tag{1.3}$$

и решим вспомогательную граничную задачу (1.1), в которой последние условия (1.1а) заменены условиями (1.3).

Далее, при помощи закона Гука и представлений (1.2) определим компоненты напряжений, удовлетворим условиям вспомогательной граничной задачи и определим неизвестные коэффициенты $A_j(s)$, $B_j(s), C_j(s), D_j(s)$ через трансформанты Ханкеля функций смещений берегов трещин. Далее, при помощи полученных значений коэффициентов определим нормальные напряжения, действующие на берега трещин через неизвестные функции смещений берегов трещин $w_j(r)$ $(j=1,2)$. Получим:

$$\sigma_z^{(j)}\left(r,(-1)^{j+1}h\right)=-\vartheta_j L_{0,0}^{(2)}\left[w_j\right]-L_{0,0}^{(2,\mathrm{j},1)}\left[w_1\right]+L_{0,0}^{(2,\mathrm{j},2)}\left[w_2\right]\ \ \ (j=1,2), \tag{1.4}$$

здесь введены обозначения:

$$L_{\mathrm{m},n}^{(k)}\left[\varphi_j\right]=\int_0^{a_j}W_{m,n}^{(k)}(r,\xi)\xi\varphi_j(\xi)d\xi;\quad W_{m,n}^{(k)}(r,\xi)=\int_0^\infty t^k J_m(tr)J_n(t\xi)dt\ \ ;$$

$$L_{m,n}^{(k,i,j)}\left[\varphi_j\right]=\int_0^{a_j}W_{m,n}^{(k,i,j)}(r,\xi)\xi\varphi_j(\xi)d\xi;\quad W_{m,n}^{(k,i,j)}(r,\xi)=\int_0^\infty K_{i,j}(t)t^k J_m(tr)J_n(t\xi)dt\ ;$$

$$\vartheta_j=\frac{\mu_j}{2\left(1-\nu_j\right)},$$

а $K_{i,j}(t)$ $(i,j=1,2)$ – регулярные функции, экспоненциально стремящиеся на бесконечности к нулю, значения которых здесь не приводятся.

Теперь удовлетворим последним двум условиям (1.1а). В итоге, для определения смещений точек берегов трещин получим следующую определяющую систему интегральных уравнений:

$$-\vartheta_j L_{0,0}^{(2)}\left[w_j\right]-L_{0,0}^{(2,\mathrm{j},1)}\left[w_1\right]+L_{0,0}^{(2,\mathrm{j},2)}\left[w_2\right]=-P_j(r)\ \ \left(0<r<a_j,\ \ \ j=1,2\right), \tag{1.5}$$

которую нужно рассматривать при условиях непрерывности смещений на окружностях $r=a_j$

$$w_j\left(a_j\right)=0\ \ (j=1,2). \tag{1.6}$$

2. Решение определяющей системы интегральных уравнений

Чтобы решить систему интегральных уравнений (1.5), при помощи оператора вращения

$$I\left[\varphi(r)\right]=\int_0^x \frac{r\varphi(r)\,dr}{\sqrt{x^2-r^2}}$$

сведем её к системе интегральных уравнений второго рода типа Фредгольма. Для этого, как и в [2] , введём функции

$$V_j(t)=\frac{2}{\pi}\int_t^a \frac{\xi w_j(\xi)\,d\xi}{\sqrt{\xi^2-t^2}} \quad (j=1,2), \tag{2.1}$$

продолжим их на интервал $(-a_j,0)$ чётным образом и систему (1.6) запишем в виде:

$$\vartheta_j\int_0^{a_j} R(t,r)V_j'(t)\,dt+\sum_{i=i}^{2}\int_0^{a_j} R_{j,i}(t,r)V_j'(t)\,dt=-P_j(r)\ \left(0<r<a_j,\quad j=1,2\right), \tag{2.2}$$

где

$$R(r,t)=\int_0^\infty sJ_0(sr)\sin st\,ds;\quad R_{j,i}(r,t)=(-1)^{j+1}\int_0^\infty K_{j,i}(s)sJ_0(sr)\sin st\,ds.$$

Из представления (2.1) явствует, что $V_j(a)=0$. При этом, условия (1.6) удовлетворяются автоматически, так как при помощи формул обращения операторов вращения [1-3] функции $w_j(x)$ $(j=1,2)$ можно записать в следующем виде:

$$w_j(r)=-\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\int_r^a \frac{sV_j(s)}{\sqrt{s^2-r^2}}\,ds=-\int_r^a \frac{V_j'(s)}{\sqrt{s^2-r^2}}\,ds \quad (j=1,2). \tag{2.3}$$

Далее, применим к обеим частям уравнений (2.2) оператор I, после некоторых выкладок, используя значения известных интегралов

$$\int_0^x \frac{J_0(rt)\,rdr}{\sqrt{x^2-r^2}}=\frac{\sin(xt)}{t};\quad \int_0^\infty \sin(st)\sin(sx)\,ds=\frac{\pi}{2}\left[\delta(t-x)-\delta(t+x)\right],$$

где $\delta(x)$– известная функция Дирака, придём к следующей системе интегральных уравнений второго рода типа Фредгольма:

$$V_j'(x)+\sum_{i=1}^{2}\int_{-a_j}^{a_j} R_{j,i}^*(t,x)V_i'(t)\,dt=f_j(x) \quad (j=1,2), \tag{2.4}$$

где

$$f_j(x)=-\frac{2(-1)^j}{\pi\vartheta_j}I\left[P_j(r)\right];\quad R_{j,i}^*(t,x)=\frac{(-1)^{j+1}}{\pi\vartheta_1}\int_0^\infty K_{j,i}(s)\sin(ts)\sin(rs)\,ds \quad (i,j=1,2)$$

При помощи замены переменных $t=a_j\xi,\ x=a_j\eta$ $(j=1,2)$ сформулируем полученные уравнения на интервале (-1,1) и обозначив $\varphi_j(\eta)=V_j'(a_j\eta)/a_j$, придём к системе

$$\varphi_j(\eta)+\sum_{i=1}^{2}\int_{-1}^{1} R_{j,i}^*(\xi,\eta)\varphi_i(\xi)\,d\xi=f_j^*(\eta) \quad (-1<\eta<1,\ j=1,2), \tag{2.5}$$

решения которой должны удовлетворять условиям

$$\int_{-1}^{1}\varphi_j(s)\,ds=0 \quad (j=1,2). \tag{2.6}$$

Здесь

$$R_{1,1}^{*}(\xi,\eta)=\frac{x_1}{\pi\vartheta_1}R_{1,1}(x_1\xi,x_1\eta);\;\; R_{1,2}^{*}(\xi,\eta)=\frac{x_2^2}{\pi x_1\vartheta_1}R_{1,2}(x_1\xi,x_2\eta);$$

$$R_{2,1}^{*}(\xi,\eta)=\frac{x_1^2}{\pi x_2\vartheta_2}R_{2,1}(x_1\xi,x_2\eta);\;\; R_{2,2}^{*}(\xi,\eta)=\frac{x_2}{\pi\vartheta_1}R_{2,2}(x_2\xi,x_2\eta)$$

$$f_j^{*}(\eta)=-\frac{2(-1)^j}{\pi\vartheta_j}\int_0^{\eta}\frac{\xi P_j(a_j\xi)d\xi}{\sqrt{\eta^2-\xi^2}};\quad (x_j=a_j/h).$$

Таким образом, решение поставленной задачи свелось к решению системы интегральных уравнений второго рода типа Фредгольма (2.4), решение которой можно построить методом последовательных приближений. Очевидно, что решения этой системы функции $\varphi_j(x)$ $(j=1,2)$, ограниченные на окружностях $r=a_j$, соответственно.

Напишем также формулы, при помощи которых после определения функции $\varphi_j(\eta)$ можно определить раскрытия трещин и коэффициенты интенсивности разрушающих напряжений на окружностях $r=a_j$. Для определения раскрытия трещин используем формулы (2.2), откуда для безразмерных раскрытий трещин получим формулы:

$$w_j^{*}(\eta)=\frac{w_j(a\eta)}{a}=-\int_x^1\frac{\varphi_j(\xi)}{\sqrt{\xi^2-\eta^2}}d\xi. \tag{2.7}$$

Для определения же коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений на окружностях $r=a_j$ формулы (1.7) при $(r>a)$ представим в виде:

$$\sigma_z^{(j)}\left(r,(-1)^{j+1}h\right)=\frac{\vartheta_j}{r}\frac{d}{dr}\int_0^a\frac{tV_j'(t)dt}{\sqrt{r^2-t^2}}+\sum_{i=1}^{2}(-1)^{j+1}L_{0,0}^{(2,j,i)}[w_i]=-\frac{\vartheta_jV_j'(a)}{\sqrt{r^2-a^2}}+F_j(r), \tag{2.8}$$

где

$$F_j(r)=\sum_{i=1}^{2}(-1)^{j+1}L_{0,0}^{(2,j,i)}[w_i]+\frac{\vartheta_j}{r}\frac{d}{dr}\int_0^a\frac{t\left[V_j'(t)-V_j'(a)\right]dt}{\sqrt{r^2-t^2}}+\vartheta_jV_j'(a),$$

– ограниченные функции соответственно на окружностях $r=a_j$ $(j=1,2)$.

Отметим, что при получении этих формул были использованы известные формулы [4]

$$sJ_0(rs)=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(rJ_1(rs)\right);\qquad \int_0^{\infty}J_1(sr)\sin tsds=\begin{cases}0 & t>r\\ \dfrac{t}{r}\dfrac{1}{\sqrt{r^2-t^2}} & t<r\end{cases}$$

Из (2.8) найдём

$$K_I^{(j)}(a)=\lim_{r\to a+0}\sqrt{2(r-a)}\,\sigma_z^{(j)}\left(r,(-1)^{j+1}h\right)=-\frac{\vartheta_jV_j'(a)}{\sqrt{a}}=-\sqrt{a}\,\vartheta_j\,\varphi_j(1)\;\;(j=1,2).$$

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА и РФФИ в рамках совместного научного проекта SCS 18RF061 и RFBR 18-51-05012 соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акопян В.Н. Осесимметричное напряжённое состояние кусочно-однородного, слоистого пространства с параллельными монетообразными трещинами // Труды XVIII межд. конференции «Современные проблемы механики сплошной среды», Ростов-на-Дону, том 1, 2016, с. 35-39.

2. Попов Г.Я. О концентрации упругих напряжений возле тонкого отслоившегося включения. // В сб.: «Современные проблемы механики и авиации», посвящённом И.Ф. Образцову. 1980, с.156-162.
3. Акопян В.Н., Мирзоян С.Е., Даштоян Л.Л. Осесимметричная смешанная задача для составного пространства с монетообразной трещиной // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2015. №3. С.31-46.
4. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.-1110с.

Сведения об авторах:

Акопян Ваграм Наслетникович – доктор физ.-мат. наук, директор Института механики НАН РА, **тел.:** (37410) 52-48-90, **e-mail:** vhakobyan@sci.am

Даштоян Лилит Левоновна – кандидат физ.-мат. наук, учёный секретарь Института механики НАН Армении, **тел.:** (37410) 56-81-89, **e-mail:** Lilit_Dashtoyan@mechins.sci.am

Мурашкин Евгений Валерьевич – к.ф-м.н., старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, murashkin@ipmnet.ru

НАПРЯЖЁННОЕ СОСТОЯНИЕ СОСТАВНОЙ ПЛОСКОСТИ С ПРОДОЛЖАЮЩИМИ ДРУГ ДРУГА МЕЖФАЗНЫМИ АБСОЛЮТНО ЖЁСТКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ И ТРЕЩИНОЙ

Акопян В.Н., Амирджанян А.А., Саакян А.В.

Рассмотрена плоская задача теории упругости для составной упругой плоскости, содержащей на линии стыка двух разнородных полуплоскостей конечную трещину и абсолютно жёсткое тонкое включение, которые имеют общий конец. При помощи разрывных решений уравнений Лямэ выведена определяющая система сингулярных интегральных уравнений поставленной задачи относительно функции скачка напряжений, действующих по лицевым сторонам включения, и дислокации смещений точек берегов трещины. Выяснено, что в точке соединения трещины и включения искомые функции имеют две равноуровневые особенности в концевых точках концентраторов напряжений. В связи с этим предложен новый подход к методу механических квадратур, при помощи которого построено решение задачи.

Введение. Исследованию напряжённо-деформированного состояния однородных и составных массивных тел с различными дефектами типа трещин и абсолютно жёстких включений, а также изучению взаимовлияния этих дефектов, посвящено много работ, в частности, [1-3]. В работе [4] получено точное решение задачи для ортотропной плоскости с трещиной и коллинеарным с ней абсолютно жёстким включением с одним общим концом. Здесь же рассмотрен случай, когда межфазные трещина и включение имеют один общий конец, что приводит к тому, что искомые функции на общем конце трещины и включения имеют два разных показателя особенности. Это обстоятельство математически усложняет решение задачи и требует усовершенствования метода механических квадратур для решения подобных задач.

Постановка задачи и вывод определяющих уравнений. Пусть упругая плоскость, состоящая из двух разнородных полуплоскостей с модулями сдвига μ_j и коэффициентами Пуассона ν_j $(j=1,2)$, на отрезках $(-b,0)$ и $(0,a)$ линии стыка полуплоскостей, содержит трещину и тонкое абсолютно жёсткое включение. Будем считать, что составная плоскость деформируется при помощи распределённых нормальных $q_j(x)$ и тангенциальных $\tau_j(x)$ нагрузок, приложенных к берегам трещины, а также сосредоточенной силы P_0, приложенной к включению в точке $x=x_0$ под углом α к оси Ox (рис.1). Нагрузки $\tau_j(x)$ на рисунке не представлены.

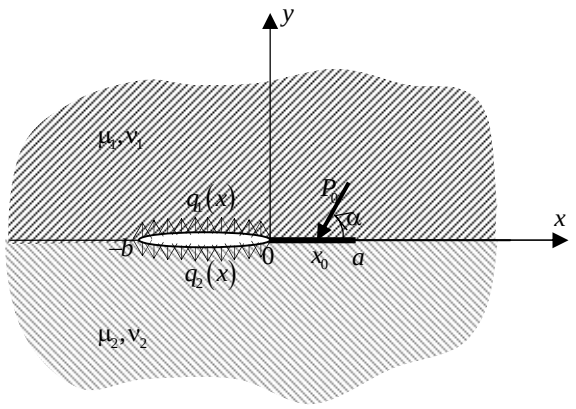


Рис.1. Схематическое представление задачи

Поставленную задачу математически сформулируем в виде следующей граничной задачи: уравнения Ламе для каждой полуплоскости и граничные условия на линии их стыка:

$$\begin{cases} \sigma_y^{(j)}(x,0)=-q_j(x) & (-b<x<0) \\ \tau_{xy}^{(j)}(x,0)=\tau_j(x) & (-b<x<0) \\ V_1(x,0)=V_2(x,0)=\delta_1 & (0<x<a) \\ U_1(x,0)=U_2(x,0)=\delta_2 & (0<x<a) \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_y^{(1)}(x,0)=\sigma_y^{(2)}(x,0) \\ \tau_{xy}^{(1)}(x,0)=\tau_{xy}^{(2)}(x,0) \\ U_1(x,0)=U_2(x,0) \\ V_1(x,0)=V_2(x,0) \end{cases} \quad \begin{pmatrix} -\infty<x<-b; \\ x>a \end{pmatrix} \tag{1}$$

Здесь $\sigma_y^{(j)}(x,y)$, $\tau_{xy}^{(j)}(x,y)$ – нормальные и касательные компоненты напряжений, $U_j(x,y)$ и $V_j(x,y)$ – горизонтальные и вертикальные смещения точек соответствующей полуплоскости, а δ_1 и δ_2 – неопределённые постоянные, выражающие жёсткое смещение не только включения, а всей системы, в целом.

Чтобы записать определяющую систему уравнений поставленной задачи, используем разрывные решения уравнений плоской теории упругости для составной плоскости с межфазными дефектами, полученные в [3]. Применительно к рассматриваемому случаю они имеют вид:

$$U_2'(x,0)=\frac{d_0}{\Delta_*\mu_2}\sigma(x)-\frac{\mu l_0}{\Delta_*}U'(x)-\frac{d_1}{\pi\Delta_*\mu_2}\int_{-b}^{a}\frac{\tau(\xi)d\xi}{\xi-x}+\frac{\mu l_2}{\pi\Delta_*}\int_{-b}^{a}\frac{V'(\xi)d\xi}{\xi-x};$$

$$V_2'(x,0)=-\frac{d_0}{\Delta_*\mu_2}\tau(x)-\frac{\mu l_0}{\Delta_*}V'(x)-\frac{d_1}{\pi\Delta_*\mu_2}\int_{-b}^{a}\frac{\sigma(\xi)d\xi}{\xi-x}-\frac{\mu l_2}{\pi\Delta_*}\int_{-b}^{a}\frac{U'(\xi)d\xi}{\xi-x};$$

$$\sigma_y^{(1)}(x,0)=\frac{\mu l_0}{\Delta_*}\sigma(x)+\frac{\mu l_1}{\Delta_*}\mu_2U'(x)+\frac{\mu l_2}{\pi\Delta_*}\int_{-b}^{a}\frac{\tau(s)ds}{s-x}-\mu_2\frac{\mu l_3}{\pi\Delta_*}\int_{-b}^{a}\frac{V'(s)ds}{s-x}; \tag{2}$$

$$\tau_{xy}^{(1)}(x,0)=\frac{\mu l_0}{\Delta_*}\tau(x)-\frac{\mu l_1}{\Delta_*}\mu_2V'(x)-\frac{\mu l_2}{\pi\Delta_*}\int_{-b}^{a}\frac{\sigma(s)ds}{s-x}-\mu_2\frac{\mu l_3}{\pi\Delta_*}\int_{-b}^{a}\frac{U'(s)ds}{s-x},$$

$$U_1'(x,0)=U_2'(x,0)+U'(x);\quad V_1'(x,0)=V'(x)+V_2'(x,0);$$

$$\sigma_y^{(2)}(x,0)=-\sigma(x)+\sigma_y^{(1)}(x,0);\quad \tau_{xy}^{(2)}(x,0)=-\tau(x)+\tau_{xy}^{(1)}(x,0),$$

Здесь использованы разностные функции:

$$U(x)=\begin{cases}U_1(x,0)-U_2(x,0) & (-b\le x\le 0)\\ 0 & (0\le x\le a)\end{cases};\qquad V(x)=\begin{cases}V_1(x,0)-V_2(x,0) & (-b\le x\le 0)\\ 0 & (0\le x\le a)\end{cases}$$

$$\sigma(x)=\begin{cases}\sigma_y^{(1)}(x,0)-\sigma_y^{(2)}(x,0)\\ \sigma_0(x)=-q_1(x)+q_2(x)\end{cases};\qquad \tau(x)=\begin{cases}\tau_{xy}^{(1)}(x,0)-\tau_{xy}^{(2)}(x,0) & (0\le x\le a)\\ \tau_0(x)=\tau_1(x)-\tau_2(x) & (-b\le x\le 0)\end{cases} \tag{3}$$

которые отличны от нуля лишь на интервале $(-b,a)$, а также следующие обозначения:

$$l_0=\vartheta_2^{(1)}(\mu\vartheta_2^{(1)}+\vartheta_2^{(2)})-\vartheta_1^{(1)}(\mu\vartheta_1^{(1)}-\vartheta_1^{(2)});\quad l_2=\vartheta_1^{(1)}\vartheta_2^{(2)}+\vartheta_2^{(1)}\vartheta_1^{(2)};\quad l_1=2(\vartheta_1^{(2)}l_0^*-\vartheta_2^{(2)}l_2^*);$$

$$l_3=2(\vartheta_1^{(2)}l_2^*-\vartheta_2^{(2)}l_0^*);\quad d_0=\left(\mu\vartheta_1^{(1)}-\vartheta_1^{(2)}\right)/2;\quad d_1=\left(\mu\vartheta_2^{(1)}+\vartheta_2^{(2)}\right)/2;$$

$$\Delta_*=(\mu\vartheta_2^{(1)}+\vartheta_2^{(2)})^2-(\mu\vartheta_1^{(1)}-\vartheta_1^{(2)})^2;\quad \vartheta_1^{(j)}=\frac{1-2\nu_j}{3-4\nu_j};\quad \vartheta_2^{(j)}=\frac{2(1-\nu_j)}{3-4\nu_j};\quad \mu=\frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

В качестве искомых функций выберем комплексные комбинации скачков напряжений и перемещений на соответствующих интервалах:

$$\begin{aligned}&\chi(x)=\left[\sigma_y^{(1)}(x,0)-\sigma_y^{(2)}(x,0)\right]-i\left[\tau_{xy}^{(1)}(x,0)-\tau_{xy}^{(2)}(x,0)\right]\quad (0<x<a)\\ &W(x)=\left[U_1(x,0)-U_2(x,0)\right]+i\left[V_1(x,0)-V_2(x,0)\right]\qquad (-b<x<0)\end{aligned} \tag{4}$$

Учитывая, что в представлениях (3) разности граничных условий (1) уже использованы, выпишем сумму этих условий в виде комплексных комбинаций:

$$\begin{cases}\left[\sigma_y^{(1)}(x,0)+\sigma_y^{(2)}(x,0)\right]-i\left[\tau_{xy}^{(1)}(x,0)+\tau_{xy}^{(2)}(x,0)\right]=P_+(x)-iT_+(x)\ \ (-b<x<0)\\ \left[U_1'(x,0)+U_2'(x,0)\right]+i\left[V_1'(x,0)+V_2'(x,0)\right]=0\qquad (0<x<a)\end{cases} \tag{5}$$

$$P_+(x)=-q_1(x)-q_2(x);\qquad T_+(x)=\tau_1(x)+\tau_2(x)$$

Подставляя в (5) представления (2) и учитывая (3), для определения искомых функций (4) получим систему определяющих уравнений, которая в безразмерных величинах имеет вид:

$$\begin{cases}d_0\psi(t)-\dfrac{id_1}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\psi(s)}{s-t}ds-\frac{il_2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(s)}{s-1-\frac{a}{b}(1+t)}ds=g_1(t)\\[2ex] l_1\varphi(t)+\dfrac{il_3}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(s)}{s-t}ds+\frac{il_2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\psi(s)}{s+1+\frac{b}{a}(1-t)}ds=g_2(t)\end{cases} \tag{6}$$

$$\int_{-1}^{1}\varphi(s)\,ds=0;\qquad \int_{-1}^{1}\psi(s)\,ds=2P_0^*\left(\sin\alpha-i\cos\alpha\right)=-2iP_0^*e^{i\alpha}. \tag{7}$$

Здесь величины со звездочками являются безразмерными аналогами соответствующих величин,

$$\varphi(t)=W'\left(-\frac{b}{2}(1-t)\right);\qquad \psi(t)=\frac{1}{\mu_2}X\left(\frac{a}{2}(1+t)\right);\qquad g_1(t)=\frac{d_1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\tau_0^*(\xi)+i\sigma_0^*(\xi)}{\xi-t}d\xi$$

$$g_2(t)=-l_0\left(\sigma_0^*(t)-i\tau_0^*(t)\right)-\frac{l_2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\tau_0^*(\xi)+i\sigma_0^*(\xi)}{\xi-t}d\xi+\frac{\Delta_*}{2\mu}\left(P_+^*(t)-iT_+^*(t)\right);\qquad P_0^*=\frac{P_0}{a\mu_2}.$$

Решение полученной системы построим при помощи метода механических квадратур (ММК) [5]. Искомые функции будем искать в виде:

$$\begin{aligned}\varphi(t)&=\varphi_*(t)(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}\\ \psi(t)&=\psi_*(t)(1-t)^{\gamma}(1+t)^{\delta}\end{aligned}\qquad -1<\mathrm{Re}\left[\alpha,\beta,\gamma,\delta\right]<1. \tag{8}$$

Согласно стандартной процедуре ММК, предусматривающей исследование поведения уравнений системы в окрестности концов интервала интегрирования с использованием известных результатов Н.И.Мусхелишвили [6], для определения показателей в представлениях (8) получим систему тригонометрических уравнений, откуда показатели β и γ определяются однозначно, а для $\alpha=\delta$ получаем два различных значения:

$$\beta=-\frac{1}{2}-i\theta\ ;\qquad \gamma=-\frac{1}{2}+i\left(\theta+\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right);\qquad \theta=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1+\mu\kappa_2}{\mu+\kappa_1};$$

$$\alpha_1=-\frac{1}{2}-\frac{i}{2\pi}\ln\kappa_1;\qquad \alpha_2=-\frac{1}{2}+\frac{i}{2\pi}\ln\kappa_2;\qquad \kappa_j=3-4\nu_j. \tag{9}$$

Исходя из последнего, решение определяющей системы (6) будем искать в виде:

$$\begin{aligned}\varphi(t)&=\frac{1-2\nu_1}{2\mu\cos\pi\alpha_1}\Phi(t)(1-t)^{\alpha_1}(1+t)^{\beta}+\Psi(t)(1-t)^{\alpha_2}(1+t)^{\beta}\\ \psi(t)&=\Phi(t)(1-t)^{\gamma}(1+t)^{\alpha_1}+\frac{2\cos\pi\alpha_2}{1-2\nu_2}\Psi(t)(1-t)^{\gamma}(1+t)^{\alpha_2}\end{aligned} \tag{10}$$

и искомыми функциями станут функции $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$, удовлетворяющие условию Гельдера на отрезке $[-1,1]$. Продолжая процедуру ММК, новые искомые функции представим в виде интерполяционных многочленов по корням многочлена Якоби, соответствующего весовой функции:

$$\Phi(t)=\begin{cases}\dfrac{2}{n+\alpha_1+\beta+1}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\dfrac{X_j^{(\varphi)}P_n^{(\alpha_1,\beta)}(t)}{\left(t-\xi_j^{(\alpha_1,\beta)}\right)P_{n-1}^{(\alpha_1+1,\beta+1)}\left(\xi_j^{(\alpha_1,\beta)}\right)} & \text{в выражении для } \varphi(t)\\[2ex] \dfrac{2}{n+\gamma+\alpha_1+1}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\dfrac{X_j^{(\psi)}P_n^{(\gamma,\alpha_1)}(t)}{\left(t-\xi_j^{(\gamma,\alpha_1)}\right)P_{n-1}^{(\gamma+1,\alpha_1+1)}\left(\xi_j^{(\gamma,\alpha_1)}\right)} & \text{в выражении для } \psi(t)\end{cases}$$

$$\Psi(t)=\begin{cases}\dfrac{2}{n+\alpha_2+\beta+1}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\dfrac{Y_j^{(\varphi)}P_n^{(\alpha_2,\beta)}(t)}{\left(t-\xi_j^{(\alpha_2,\beta)}\right)P_{n-1}^{(\alpha_2+1,\beta+1)}\left(\xi_j^{(\alpha_2,\beta)}\right)} & \text{в выражении для } \varphi(t)\\[2ex] \dfrac{2}{n+\alpha_2+\gamma+1}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\dfrac{Y_j^{(\psi)}P_n^{(\gamma,\alpha_2)}(t)}{\left(t-\xi_j^{(\gamma,\alpha_2)}\right)P_{n-1}^{(\gamma+1,\alpha_2+1)}\left(\xi_j^{(\gamma,\alpha_2)}\right)} & \text{в выражении для } \psi(t)\end{cases} \tag{11}$$

Здесь $\xi_j^{(\alpha,\beta)}$ – корни многочлена Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(t)$, коэффициенты $X_j^{(\varphi)}, X_j^{(\psi)}, Y_j^{(\varphi)}, Y_j^{(\psi)}$ $\left(j=\overline{1,n}\right)$ подлежат определению.

Подставим (11) в уравнения системы (6) и, согласно ММК, заменим интегралы конечными суммами. В качестве точек коллокации для каждого из уравнений системы выберем корни многочлена Чебышева $U_{n-1}(t)$. Добавляя к полученным $2(n-1)$ уравнениям два условия (7) и $2n$ уравнений приравнивания различных представлений одних и тех же функций в (11) в корнях многочлена Чебышева $T_n(t)$, получим замкнутую систему линейных алгебраических уравнений относительно $4n$ неизвестных коэффициентов.

После определения неизвестных коэффициентов, производные скачка перемещений берегов трещины и скачок напряжений на сторонах включения можно представить в виде интерполяционных многочленов и, через них, определить все величины, связанные с напряжённо-деформированным состоянием в окрестности концентраторов напряжений. Например, из условия равенства нулю главного момента сил, действующих на включение, найдём точку приложения сосредоточенной силы $x_0^* = x_0/a$, когда исключается поворот включения:

$$x_0^* = \frac{1}{2} - \frac{M_0}{4P_0^* \sin \pi\alpha}, \tag{12}$$

где M_0 – главный момент контактных напряжений в случае, когда сила приложена в центре включения, определяемый формулой:

$$M_0 = \int_{-1}^{1} s \operatorname{Re}\left[\psi(s)\right] ds = \operatorname{Re}\left[\sum_{i=1}^{n}\left\{ w_i^{(\gamma,\alpha_1)} \xi_i^{(\gamma,\alpha_1)} X_i^{(\psi)} + \frac{2\cos\pi\alpha_2}{1-2\nu_2} w_i^{(\gamma,\alpha_2)} \xi_i^{(\gamma,\alpha_2)} Y_i^{(\psi)} \right\}\right]; \tag{13}$$

$$w_j^{(\alpha,\beta)} = \frac{2^{\alpha+\beta+3}}{1-\left(\xi_j^{(\alpha,\beta)}\right)^2} \frac{B(\alpha,\beta+n+1)}{B(\alpha,n+1)} \left[\frac{1}{(\alpha+\beta+n+1) P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}\left(\xi_j^{(\alpha,\beta)}\right)}\right]^2.$$

В несвязанной с включением вершине трещины определим такую, характерную для трещин, величину, как безразмерный J-интеграл Черепанова-Райса [7]

$$J_* = \frac{1}{\mu_2} J(-1) = \frac{\mu+1}{4\mu} K(-1)\bar{K}(-1), \tag{14}$$

где $K(-1)$ – обезразмеренный комплексный коэффициент концентрации напряжений в вершине трещины, определяемый формулой

$$K(-1) = i\frac{4\sqrt{2\pi}}{\sin\pi\beta} \frac{1-\nu_1+\mu(1-\nu_2)}{(\mu+\kappa_1)(1+\mu\kappa_2)} \left\{ \frac{1-2\nu_1}{2\cos\pi\alpha_1} \Phi(-1) 2^{\alpha_1} + \mu\Psi(-1) 2^{\alpha_2} \right\}.$$

Численный анализ. Первоначально, при определённых значениях параметров задачи, выясним сходимость вычислительного процесса, просчитав некоторые величины при различных порядках аппроксимации n. В табл.1 приведены значения M_0 и J_*, рассчитанные по формулам (13) и (14), а также модули среднеквадратичных отклонений Δ_1 и Δ_2 левых частей уравнений (6), вычисленных по встроенным программам интегрирования, от их правых частей, рассчитанные на равномерной сетке из 20-ти точек.

Таблица 1.

n	M_0	J_*	$\lvert\Delta_1\rvert$	$\lvert\Delta_2\rvert$
6	-0.0666	0.01356	3.9×10^{-3}	3.1×10^{-2}
10	-0.0670	0.01418	1.4×10^{-3}	6.7×10^{-3}
14	-0.0670	0.01473	8.8×10^{-4}	8.7×10^{-3}
20	-0.0670	0.01543	4.2×10^{-4}	1.9×10^{-3}

Судя по данным таблицы, которые не очень сильно изменяются при увеличении порядка аппроксимации n от 6-ти до 20-ти, можно сделать вывод, что, по-видимому, полученная точность является предельной для примененного подхода. Однако, и такая точность достаточна для построения соответствующих графиков и проведения анализа зависимости указанных выше характерных величин от механических характеристик полуплоскостей и отношения длин концентраторов напряжений. Расчёты проводились при $n = 10$.

В частности, на рис.2 приведены кривые зависимости J_* от отношения μ при различных значениях коэффициентов Пуассона.

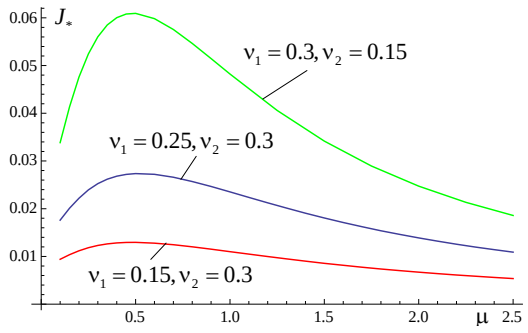


Рис. 2 Зависимость J - интеграла от отношения μ при различных ν_1 и ν_2

Кривые указывают на то, что при любых значениях коэффициентов Пуассона J-интеграл принимает максимальное значение при значениях μ, близких к 0.5. Это означает, что при этих значениях μ вероятность распространения трещины существенно выше.

Заключение. В отличие от аналогичной задачи для однородной плоскости, допускающей построение замкнутого решения, разнородность полуплоскостей существенно усложняет решение поставленной задачи, поскольку не допускает точного или аналитического решения известными методами контактных и смешанных задач теории упругости. Предложен алгоритм численно-аналитического решения поставленной плоской задачи теории упругости для кусочно-однородной плоскости методом механических квадратур. Использованы новые представления для искомых функций, учитывающие наличие в точке соединения трещины и включения особенностей различного порядка. Проведён численный анализ зависимости контактных напряжений на сторонах включения, раскрытия трещины, J-интеграла в концевой точке трещины и точки приложения силы x_0 от упругих и геометрических параметров задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова думка, 1976. 443с.
2. Бережницкий Л.Т., Панасюк В.В., Стащук Н.Г. Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле. Киев: Наукова думка, 1983. 288с.
3. Акопян В.Н. Смешанные граничные задачи о взаимодействии сплошных деформируемых тел с концентраторами напряжений различных типов. Ереван: «Гитутюн», 2014. 322с.
4. Акопян В.Н., Симонян А.Р. О плоско-деформированном состоянии ортотропной плоскости с разрезами. // Известия НАН Армении. Механика. 2011. Т.64. № 2. С.4-14.
5. Sahakyan A.V. and Amirjanyan H.A. Method of mechanical quadratures for solving singular integral equations of various types. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 991 (2018) 012070 doi :10.1088/1742-6596/991/1/012070.
6. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
7. Stress Intensity Factors Handbook. Volume 1. Editor-in-Chief Y. Murakami. The Society of Materials Science, Japan. Pergamon Press, Oxford (1987).

Сведения об авторах:

Акопян Ваграм Наслетникович – доктор физ.-мат. наук, профессор, директор Института механики НАН Армении, **Тел.:** (37410) 52-48-90, **E-mail:** vhakobyan@sci.am

Саакян Аветик Вараздатович – д.ф.м.н., зам.директора Института механики НАН Армении. **Тел.:** (37410) 568188, **E-mail:** avsah@mechins.sci.am, avsahakyan@gmail.com

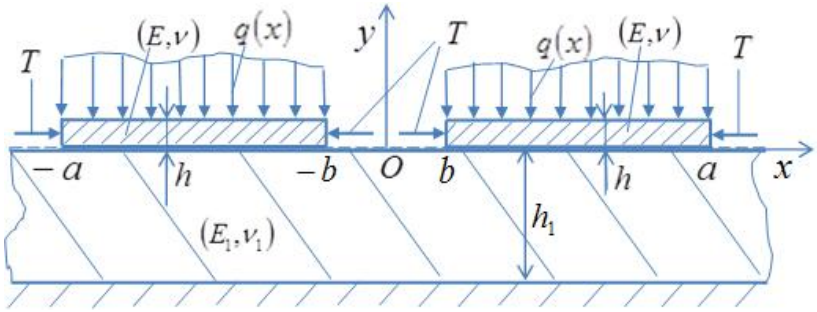
Амирджанян Арутюн Арменович – к.ф.м.н., науч. сотр. Института механики НАН Армении. **E-mail:** amirjanyan@gmail.com.

ИЗГИБ ДВУХ ОДИНАКОВЫХ БАЛОК НА УПРУГОЙ ШЕРОХОВАТОЙ ПОЛОСЕ С УЧЁТОМ СЖИМАЮЩИХ ИЛИ РАСТЯГИВАЮЩИХ ОСЕВЫХ СИЛ

Амирбекян А.Н., Мкртчян М.М., Шекян Л.А.

В рамках теории С.П.Тимошенко [1] обобщенной модели изгиба балок, когда на прогибы балок влияют как поперечные, так и действующие на её срединной линии продольные сжимающие или растягивающие силы, рассматривается плоская контактная задача об изгибе симметрично нагружённых двух одинаковых упругих горизонтальных балок конечной длины, лежащих на упругом шероховатом основании в виде полосы, нижняя грань которой защемлена. Задача сведена к решению нелинейного интегрального уравнения типа Гаммерштейна [2] при дополнительных условиях. Эффективное решение задачи получено по разработанной в [3] методике, основанной на теории нелинейного интегрального уравнения Гаммерштейна [2] и принципа сжимающих отображений [4]. Приведено приближённое аналитическое решение задачи.

1. Пусть две одинаковые упругие балки с толщиной h, модулем упругости E и коэффициентом Пуассона ¬ под действиям распределённых вертикальных сил интенсивности $q(x)$ $\left(q(-x)=q(x), x\in[-a,-b]\cup[b,a]\right)$ и осевых горизонтальных сжимающих сил T, изгибаясь, вдавливается в упругую бесконечную полосу толщиной h_1, с модулем упругости E_1 и коэффициентом Пуассона $¬_1$, нижняя грань которой $y=-h_1$ жёстко защемлена (фиг.1).



Фиг. 1

Требуется определить закон распределения контактных давлений $p(x)$ $\left(x\in[-a,-b]\cup[b,a]\right)$, действующих между полосой и балками, вертикальные перемещения $\mathrm{v}(x)$ всех точек изогнутой оси балок, а также изгибающих моментов $M(x)$ и перерезывающих сил $Q(x)$ во всех поперечных сечениях x $\left(x\in[-a,-b]\cup[b,a]\right)$ балок.

Предполагаетя, что полоса и балки находятся в условиях плоской деформации с базовой плоскостью Oxy.

Дифференциальное уравнение изгиба балок поперечными нарузками $q(x)$ и $p(x)$, учитывая при этом влияние действующих вдоль срединной линии балок сжимающих сил T, по теории С.П. Тимошенко ([1], стр.422, формула (217), $T=-N_x$, $w=\mathrm{v}$, $N_y=N_{xy}=0$) имеет вид

$$D\frac{d^4\mathrm{v}}{dx^4}+T\frac{d^2\mathrm{v}}{dx^2}=p(x)-q(x),\quad \left(x\in(-a,-b)\cup(b,a)\right), \tag{1}$$

где $D=Eh^3/12\left(1-¬^2\right)$ – жёсткость балок на изгиб. При этом функции $\mathrm{v}(x)$, $M(x)$ и $Q(x)$ связаны между собой соотношениями:

$$M(x)=D\frac{d^2\mathrm{v}}{dx^2},\quad Q(x)=D\frac{d^3\mathrm{v}}{dx^3}\quad \left(x\in(-a,-b)\cup(b,a)\right). \tag{2}$$

Уравнение (1) рассматривается при граничных условиях $M(\pm a)=M(\pm b)=0$ или

$$\left(d^2\mathrm{v}/dx^2\right)\Big|_{x=\pm a}=\left(d^2\mathrm{v}/dx^2\right)\Big|_{x=\pm b}=0, \tag{3}$$

указывающих на то, что в концевых точках балок $x=\pm a$ и $x=\pm b$ изгибающие моменты отсутствуют. При этом, условия равновесия правой балки имеют вид

$$\int_b^a p(x)dx = \int_b^a q(x)dx = P, \quad \int_b^a xp(x)dx = \int_b^a xq(x)dx = M\ , \tag{4}$$

где P и M – соответственно, величины главного вектора и относительно центра O главного момента нагрузок $q(x)$ и $p(x)$, действующих на единицу ширины соответственно верхней или нижней поверхности правой балки.

Положив

$$k = \sqrt{T/D}\ ,\ g(x) = \left[p(x) - q(x)\right]/D\ ,\ z(x) = d^2\mathrm{v}/dx^2\ , \tag{5}$$

уравнение (1) для правой балки перейдет в следующее:

$$\frac{d^2z}{dx^2} + k^2 z = g(x)\ ,\ (b < x < a)\ . \tag{6}$$

Общее решение дифференциального уравнения (6) имеет вид [5]

$$z(x) = C_1\cos kx + C_2\sin kx + \frac{1}{2k}\int_b^a \sin\left(k\left|x-s\right|\right)g(s)ds\ ,\ (b \le x \le a)\ , \tag{7}$$

где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования. Для определения этих постоянных используем граничные условия (3) для правой балки, которые согласно последнему обозначению (5) принимают вид $z(a) = z(b) = 0$. В итоге получим относительно C_1 и C_2 систему двух линейных алгебраических уравнений с главным определителем $\Delta = \sin k(a-b)$. Предположим, что $0 < k(a-b) < \pi$ и согласно (5) $0 < T < \pi^2 D/(a-b)^2$. Тогда, $\Delta \ne 0$ и указанная система уравнений имеет единственное решение:

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{1}{2k\sin[k(a-b)]}\int_b^a \{\sin ka\sin[k(s-b)] - \sin kb\sin[k(a-s)]\}g(s)ds, \\ C_2 &= -\frac{1}{2k\sin[k(a-b)]}\int_b^a \{\cos kb\sin[k(a-s)] - \cos ka\sin[k(s-b)]\}g(s)ds. \end{aligned} \tag{8}$$

Следует отметить, что $T^* = ®^2 D/(a-b)^2$ является критическим значением осевых сжимающих сил T, при котором балки потеряют устойчивость [6].

Теперь, подставляя выражения C_1 и C_2 из (8) в (7), далее, полученное соотношение дважды интегрируя по x, с учётом обозначения (5) получим:

$$\mathrm{v}(x) = \frac{1}{D}\int_b^a H(x,s)[p(s) - q(s)]ds + k_0\cdot(x-c) + \mathrm{v}_*\ ,\ \ (b \le x \le a)\ , \tag{9}$$

где

$$H(x,s) = \int_c^x (x-t)\left[\frac{\cos^2 k(a-b)\sin kt\sin ks - \sin^2 k(a-b)\cos kt\cos ks}{k\sin 2k(a-b)} + \frac{\sin\left(k\left|t-s\right|\right)}{2k}\right]dt\ , \tag{10}$$

$c = (a+b)/2$, а v_* и k_0 – постоянные интегрирования, характеризующие, соответственно, вертикальное перемещение центральной точки $x = c$ изогнутой оси правой балки и угловой коэффициент касательной, проведённой к изогнутой оси правой балки в этой же точке.

В случае осевых растягивающих сил T, в уравнении (1) следует T заменить на $-T$. При этом, во всех предыдущих формулах следует параметр k формально заменить на ik, где i – мнимая единица, и везде от тригонометрических функций перейти к соответствующим гиперболическим функциям.

2. Теперь рассмотрим упругое равновесие шероховатой полосы (фиг.1), когда на точках участков $-a \le x \le -b$ и $b \le x \le a$ её верхней горизонтальной границы $y = 0$ приложено нормальное контактное давление $p(x)$, а остальные точки этой границы полосы свободны от напряжений. Грань $y = -h_1$ полосы жёстко защемлена.

Вертикальное перемещение $\mathrm{v}_1(x)$, которое получает произвольная точка x $\left(x \in [-a,-b] \cup [b,a]\right)$ границы $y=0$ упругой полосы, согласно [3], представим в виде суммы двух вертикальных перемещений

$$\mathrm{v}_1(x) = \mathrm{v}_\mathrm{r}(x) + \mathrm{v}_\mathrm{e}(x), \quad \left(x \in [-a,-b] \cup [b,a]\right). \tag{11}$$

Перемещение $\mathrm{v}_\mathrm{r}(x)$ обусловлено деформациями верхнего тонкого граничного шероховатого слоя полосы. Следуя [3], считаем, что в каждой точке x из области $[-a,-b] \cup [b,a]$ перемещение $\mathrm{v}_\mathrm{r}(x)$ пропорционально некоторой степени давления $p(x)$ данной точки

$$\mathrm{v}_\mathrm{r}(x) = A \cdot [p(x)] \quad \left(x \in [-a,-b] \cup [b,a]\right). \tag{12}$$

Здесь A и β – положительные постоянные, притом $0{,}3 < \beta \le 1$.

Вертикальное перемещение $\mathrm{v}_\mathrm{e}(x)$ обусловлено глобальной деформацией полосы. Оно определяется решением соответствующей плоской граничной задачи линейной теории упругости для упругой однородной изотропной полосы толщины h_1, с модулем упругости E_1 и коэффициентом Пуассона $\neg_1$, когда в точках $x \in [-a,-b] \cup [b,a]$ её верхней границы $y=0$ приложено нормальное давление $p(x)$, а нижняя граница $y=-h_1$ жёстко защемлена. Это перемещение выражается формулой [7]

$$\mathrm{v}_\mathrm{e}(x) = \frac{2\left(1-\nu_1^2\right)}{\pi E_1}\left(\int_{-a}^{-b} + \int_b^a\right) U\left(\frac{s-x}{h_1}\right) p(s)\,ds, \quad \left(x \in [-a,-b] \cup [b,a]\right), \tag{13}$$

где ядерная функция $U(z)$ определяется следующим интегралом:

$$U(z) = \int_0^\infty \frac{\left(2\varepsilon \operatorname{sh} 2t - 4t\right)\cos zt}{\varepsilon\left(2\varepsilon \operatorname{ch} 2t + 1 + \varepsilon^2 + 4t^2\right)}\,dt, \quad \left(\varepsilon = 3 - 4\nu_1\right). \tag{14}$$

Далее запишем условие контакта правой балки и упругой полосы

$$\mathrm{v}(x) = \mathrm{v}_1(x), \quad \left(x \in [b,a]\right). \tag{15}$$

Так как $U(-z) = U(z)$ и $p(-x) = p(x)$, то учитывая (9)-(13), условие (15) принимает вид

$$\begin{gathered}\frac{1}{D}\int_b^a H(x,s)\left[p(s)-q(s)\right]ds + k_0 \cdot (x-c) + \mathrm{v}_* = A \cdot \left[p(x)\right]^\beta + \\ + \frac{2\left(1-\nu_1^2\right)}{\pi E_1}\int_b^a \left[U\left(\frac{s-x}{h_1}\right) + U\left(\frac{s+x}{h_1}\right)\right] p(s)\,ds, \quad (b \le x \le a).\end{gathered} \tag{16}$$

Соотношение (16) можно трактовать как относительно неизвестного контактного давления $p(x)$ нелинейное интегральное уравнение. Заметим, что в уравнение (16), помимо неизвестной функции $p(x)$, входят также неизвестные постоянные v_* и k_0. Для определения этих трёх неизвестных, к уравнению (16) присоединяем условия равновесия правой балки (4).

3. Введём безразмерные величины

$$\xi = \frac{x}{a}, \ \eta = \frac{s}{a}, \ h_0 = \frac{h_1}{a}, \ m = \frac{1}{\beta}, \ \mathrm{v}_0 = \frac{\mathrm{v}_*}{\mathrm{a}}, \ P_0 = \frac{\mathrm{A}^m}{a^{m+1}} P, \ M_0 = \frac{\mathrm{A}^m}{a^{m+2}} M, \tag{17}$$

$$\delta = \frac{b}{a}, \ \mathrm{H}_0(\xi,\eta) = \left(\frac{a}{A}\right)^m \cdot \frac{\mathrm{H}(x,s)}{D}, \ U_0(z) = \frac{2\left(1-\nu_1\right)^2}{\pi E_1}\left(\frac{a}{A}\right)^m U\left(\frac{z}{h_0}\right), \tag{18}$$

$$p_0(\xi) = \frac{A}{a}\left[p(x)\right]^\beta, \ q_0(\xi) = D^{-1}\int_\delta^1 H(a\xi, a\eta)\, q(a\eta)\, d\eta, \tag{19}$$

и уравнение (16) представим в виде нелинейного интегрального уравнения типа Гаммерштейна [2] относительно неизвестной функции $p_0(\xi)$

$$p_0(\xi) = \int_\delta^1 \left[H_0(\xi,\eta) - U_0(\xi-\eta) - U_0(\xi+\eta)\right] \cdot \left[p_0(\eta)\right]^m d\eta + q_0(\xi) + k_0\xi + \mathrm{v}_0, \quad (\delta \le \xi \le 1). \tag{20}$$

При этом, условия равновесия (4) в безразмерных величинах имеют вид

$$\int_{\delta}^{1}\left[p_0(\xi)\right]^m d\xi = P_0, \qquad \int_{\delta}^{1}\left[p_0(\xi)\right]^m \xi d\xi = M_0 . \tag{21}$$

Таким образом, решение поставленной плоской контактной задачи сводится к определению $p_0(\xi)$, v_0 и k_0 – из системы нелинейных уравнений (20)-(21). Коль скоро эти величины будут определены, соотношениями (2) и (9) можем определить также $\mathrm{v}(x)$, $M(x)$ и $Q(x)$.

4. Решение системы нелинейных уравнений (20)-(21) получим методом последовательных приближений, а эффективное доказательство сходимости полученных приближений проводим в случае линейного закона распределения заданной нагрузки $q(x)$:

$$q(x) = q_c + \sim \cdot (x - c), \ (b \le x \le a), \tag{22}$$

где q_c и α – известные числа. На основании (4) и (22), эти числа выразим через P и M

$$q_c = P/(a-b), \ \ \alpha = \left[12M - 6(a+b)P\right]/(a-b)^3 . \tag{23}$$

Тогда, учитывая (22), (23), а также, принимая во внимание обозначения (17) и (19), получим:

$$q_0(\xi) = P_0 f_1(\xi) + M_0 f_2(\xi) \quad (\delta \le \xi \le 1),$$

где $f_1(\xi)$ и $f_2(\xi)$ – известные функции. В итоге, уравнение (20) принимает вид:

$$\begin{aligned} p_0(\xi) = &\int_{\delta}^{1}\left[H_0(\xi,\eta) - U_0(\xi-\eta) - U_0(\xi+\eta)\right]\cdot\left[p_0(\eta)\right]^m d\eta + \\ &+ P_0 f_1(\xi) + M_0 f_2(\xi) + k_0\xi + \mathrm{v}_0, \qquad (\delta \le \xi \le 1). \end{aligned} \tag{24}$$

Для определения $p_0(\xi)$, v_0 и k_0 из нелинейных уравнений (21) и (24) применяем методом последовательных приближений, а доказательство сходимости полученных приближений проводим согласно разработанной в [3] методике, основанной на теории нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна [2] и принципа сжимающих отображений [4]. При определении $p_0(\xi)$, v_0 и k_0, исходя из структуры нелинейных уравнений (21), (24), временно считаем, что значения v_0 и k_0 заданы и фиксированы, а взамен этого, предположим, что значения P_0 и M_0, как и функция $p_0(\xi)$, неизвестные. При таком предположении, уравнения (21) и (24) имеют наиболее удобный вид для определения этих неизвестных методом последовательных приближений. Полученные таким образом зависимости $p_0(\xi)$, P_0 и M_0 от v_0 и k_0 можно трактовать как искомое решение задачи.

Теперь, следуя [3], введём вектор $\bar{x} = \{p_0(\xi), P_0, M_0\}$ и систему уравнений (21), (24) представим в операторном виде $\bar{x} = G(\bar{x})$. Тогда решение задачи сводится к определению неподвижной точки $\bar{x}^*$ нелинейного оператора G, т.е. $\bar{x}^* = G(\bar{x}^*)$.

Пусть в множестве X, каждый элемент которого является совокупностью непрерывной в $\xi \in [\delta;1]$ функций $p_0(\xi)$ и двух произвольных чисел P_0 и M_0, введена метрика формулой

$$\rho(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \max_{\delta \le \xi \le 1}\left|p_{01}(\xi) - p_{02}(\xi)\right| + \left|P_{01} - P_{02}\right| + \left|M_{01} - M_{02}\right|, \tag{25}$$

где $\bar{x}_i = \{p_{0,i}(\xi), P_{0,i}, M_{0,i}\}$ $(i = 1,2)$ – два произвольных элемента из X. Тогда множество X становится полным метрическим пространством [4]. Пусть далее, $S(\bar{O}, r)$ – замкнутый шар в пространстве X с центром $\bar{O} = \{0,0,0\}$ и с радиусом r. Способом, предложенным в [3], можно доказать, что существует область изменения характерных параметров задачи, где оператор $\bar{y} = G(\bar{x})$ отображает шар $S(\bar{O}, r)$ в себе и в нём является сжимающим оператором. Тогда, для любого начального элемента $\bar{x}_0 \in S(\bar{O}, r)$, формулами $\bar{x}_{i+1} = G(\bar{x}_i)$, $(i = 0,1,2,...)$ или в развернутом виде

$$p_{0,i+1}(\xi)=\int_{\delta}^{1}\left[H_0(\xi,\eta)-U_0(\xi-\eta)-U_0(\xi+\eta)\right]\cdot\left[p_{0,i}(\eta)\right]^m d\eta+$$
$$+P_{0,i}f_1(\xi)+M_{0,i}f_2(\xi)+k_0\xi+\mathrm{v}_0,\qquad(\delta\le\xi\le1),\quad(i=0,1,2,...),\tag{26}$$

$$P_{0,i+1}=\int_{\delta}^{1}\left[p_{0,i}(\xi)\right]^m d\xi,\quad M_{0,i+1}=\int_{\delta}^{1}\left[p_{0,i}(\xi)\right]^m \xi d\xi,\qquad(i=0,1,2,...),\tag{27}$$

получается последовательность приближенных решений $\{\overline{x}_i\}_{i=0}^{\infty}$ операторного уравнения $\overline{x}=G(\overline{x})$, которая по метрике (25) стремится к некоторому пределу $\overline{x}^*=\{p_0^*(\xi),P_0^*,M_0^*\}$, соответствующий точному решению этого операторного уравнения.

Принимая $\overline{x}_0=\overline{O}$ в качестве нулевого приближения, из формул (26)-(27) получим приближённые решения системы уравнений (21), (24). В первом приближении имеем:

$$p_{0,1}(\xi)=k_0\xi+\mathrm{v}_0,\quad(\delta\le\xi\le1),\qquad P_{0,1}=0,\qquad M_{0,1}=0.\tag{28}$$

Решение системы (21), (24) во втором приближении, согласно (26)-(28), будет

$$p_{0,2}(\xi)=\int_{\delta}^{1}\left[H_0(\xi,\eta)-U_0(\xi-\eta)-U_0(\xi+\eta)\right]\cdot\left[k_0\eta+\mathrm{v}_0\right]^m d\eta+k_0\xi+\mathrm{v}_0,\quad(\delta\le\xi\le1),\tag{29}$$

$$P_{0,2}=\int_{\delta}^{1}\left[k_0\xi+\mathrm{v}_0\right]^m d\xi,\qquad M_{0,2}=\int_{\delta}^{1}\left[k_0\xi+\mathrm{v}_0\right]^m \xi d\xi.\tag{30}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.
2. Трикоми Ф. Интегральные уравнения. М.: ИЛ, 1960. 300 с.
3. Мхитарян С.М., Шекян Л.А. Плоская контактная задача для двух шероховатых твердых тел, изготовленых из степенно упрочняющихся материалов // Изв. АН АрмССР. Механика. 1977. Т.30. №3. С.15 – 32.
4. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 360с.
5. Амирбекян А.Н., Мкртчян М.С., Мхитарян С.М., Шекян Л.А. О контактной задаче изгиба балки конечной длины на упругой полуплоскости с учётом сдвигающих сил в её срединной линии. //Изв. НАН Армении. Механика. 2014. Т.67. №1. С.6-21.
6. Амирбекян А.Н., Мктрчян М.М., Шекян Л.А. Об одном классе контактных задач изгиба балок на упругом основании // Сборник научных трудов межд. конф. «Актуальные проблемы механики сплошной среды». 02-07 октября 2017, Цахкадзор, Армения. С.27-28.
7. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.

Сведения об авторах:

Амирбекян Аревик Норайровна – внештатный науч. сотр. Института механики НАН РА. **Тел.:** (+374 94) 15 85 90. **E-mail:** a.amirbekyan@mail.ru

Мкртчян Мгер Мушегович – мл. науч. сотрудник, Институт механики НАН РА.
Тел.: (+374 93) 46 28 50, **E-mail:** mmkrtchyan66@gmail.com

Шекян Лаврентий Арамович - докт. физ.-мат. наук, проф., ведущий научный сотрудник, Институт механики НАН РА. **Тел.:** (+37499)283440. **E-mail:** lshekyan@mail.ru

АНТИПЛОСКАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СОСТАВНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С МЕЖФАЗНОЙ ТРЕЩИНОЙ

Амирджанян А.А., Акопян Л.В.

Рассмотрено антиплоское напряжённое состояние составного полупространства, полученного при помощи соединения однородного слоя и полупространства с межфазной туннельной трещиной и деформируемого абсолютно жёстким штампом с плоским основанием, находящегося под воздействием периодически изменяющихся во времени нагрузок. Получена определяющая система СИУ относительно амплитуд контактных напряжений и дислокации точек берегов трещины, решение которой построено методом механических квадратур.

1. Постановка задачи и вывод определяющих уравнений

Пусть составное упругое полупространство, отнесённое к декартовой системе координат $Oxyz$ и составленное из слоя толщины h и полупространства, изготовленных из разнородных материалов с модулями сдвигов μ_1 и μ_2 соответственно, заполняющих соответственно области $0 \le y \le h$ и $y \le 0$, на плоскости их стыка $y = 0$, ослаблено магистральной межфазной трещиной, занимающей область $\{y = 0;\ |x| < a;\ -\infty < z < \infty\}$. Будем полагать, что составное полупространство деформируется абсолютно жёсткого полосового штампом с плоским основанием, приложенного к свободной поверхности слоя в области $\{\ b \le x \le c;\ -\infty < z < \infty\}$ и находящегося под воздействием периодически изменяющихся касательных напряжений интенсивности $\tau_0(x)e^{i\omega t}$, а также касательных напряжений интенсивности $\tau_j(x)e^{i\omega t}$ $(j = 1,2)$, приложенных соответственно к верхнему и нижнему берегам межфазной трещины (Рис. 1).

Ставится задача: определить закономерности изменения контактных напряжений, действующих под штампом, раскрытия трещины и коэффициента интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещины в зависимости от физико-механических и геометрических характеристик задачи, а также частоты вынужденных колебаний.

Снабдив характерные величины слоя и полупространств соответственно индексами 1 и 2, поставленную задачу в базовой плоскости Oxy можно сформулировать в виде следующей граничной задачи:

$$
\begin{aligned}
&W_1(x,0,t) = W_2(x,0,t)) && (|x| > a)\\
&\tau_{yz}^{(1)}(x,0,t) = \tau_{yz}^{(2)}(x,0,t) && (|x| > a)\\
&\tau_{yz}^{(1)}(x,h,t) = 0 && (x < b; x > c)\\
&\tau_{yz}^{(j)}(x,0,t) = \tau_j(x)\,e^{i\omega t} && (|x| < a)\\
&W_1(x,h,t) = \mathrm{const}\,e^{i\omega t} && (b < x < c)
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Здесь $W_j(x,y,t)(j = 1,2)$ – соответственно, смещения точек слоя и полупространств по направлению оси Oz, удовлетворяющие, каждое в области своего определения, уравнению

$$\frac{\partial^2 W_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_j}{\partial y^2} = \frac{1}{(c_2^{(j)})^2}\frac{\partial^2 W_j}{\partial t^2} \tag{1.2}$$

где $c_2^{(j)}$ $(j = 1,2)$ – скорости распространения сдвиговых волн соответственно в слое и полупространстве, а $\tau_{yz}^{(j)}(x,y,t)$ $(j = 1,2)$– касательные напряжения действующие в слое и полупространстве, связанные со смещениями известными формулами:

$$\tau_{yz}^{(j)}(x,y,t) = \mu_j \frac{\partial W_j(x,y)}{\partial y} \quad (j = 1,2) \tag{1.3}$$

Как и в работе [1], представим искомые функции в виде $f(x,y,t)=f(x,y)\,e^{i\omega t}$. Тогда, амплитуды функций смещений будут удовлетворять уравнениям:

$$\frac{\partial^2 W_j}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W_j}{\partial y^2}=\left(\frac{\omega}{c_2^{(j)}}\right)^2 W_j(x,y) \quad \left(j=1,2\right). \tag{1.4}$$

Решения уравнений (1.4) представим в виде интегралов Фурье:

$$\begin{aligned} W_1(x,y)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[A_1(s)e^{-\chi_1(s)y}+B_1(\lambda)e^{\chi_1(s)y}\right]e^{-isx}ds;\\ W_2(x,y)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}A_2(\lambda)e^{\chi_2(s)y}e^{-isx}ds \end{aligned} \tag{1.5}$$

где $\chi_j(s)=\sqrt{s^2-k_j^2}$ $\left(k_j=\omega/c_2^j,\ j=1,2\right)$, а $A_j\left(s\right)$ $\left(j=1,2\right)$ и $B_1\left(s\right)$ – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению. При этом, выбраны те ветви функций $\chi_j\left(s\right)$ $\left(j=1,2\right)$ [2], которые обеспечивают затухание колебаний на бесконечности. Амплитуды напряжений будут выражаться формулами:

$$\tau_{yz}^{(j)}(x,y)=\frac{(-1)^j\mu_j}{2\pi}\int_{\infty}^{\infty}\chi_j(\lambda)A_j(\lambda)e^{(-1)^j\chi_j(\lambda)y}e^{-i\lambda x}d\lambda \tag{1.6}$$

Введём функции амплитуд контактных напряжений, разности амплитуд смещений и разности амплитуд напряжений, действующих на берега трещины, по формулам:

$$\begin{aligned} &\tau_{yz}^{(1)}\left(x,h\right)=\tau\left(x\right)\quad\left(b<x<c\right);\quad W_1\left(x,0\right)-W_2\left(x,0\right)=W\left(x\right)\ \left(-a<x<a\right);\\ &\tau_{yz}^{(1)}\left(x,0\right)-\tau_{yz}^{(2)}\left(x,0\right)=T\left(x\right), \end{aligned} \tag{1.7}$$

Решим вспомогательную граничную задачу, состоящую из первых трёх условий задачи (1.1) и условий (1.7). Используя соотношения (1.5) – (1.6), удовлетворим условиям вспомогательной граничной задачи и выразим коэффициенты $A_j\left(s\right)$ $\left(j=1,2\right)$ и $B_1\left(s\right)$ через трансформанты Фурье $\overline{W}(s)$, $\overline{\tau}(s)$ и $\overline{T}(s)$ функций $W(x)$, $\tau(x)$ и $T(x)$. Получим:

$$A_1(s)=\frac{\mu\chi_2(s)e^{\chi_1(s)h}\overline{W}(\lambda)}{\Delta\left(s\right)}+\frac{\left[\chi_1(s)-\mu\chi_2(s)\right]\overline{\tau}(s)}{\mu_1\Delta\left(s\right)}-\frac{e^{\chi_1(s)h}\overline{T}(s)}{\mu_1\Delta\left(s\right)};$$

$$B_1(s)=\frac{\mu\chi_2(s)e^{-\chi_1(s)h}\overline{W}(\lambda)}{\Delta\left(s\right)}+\frac{\left[\chi_1(s)+\mu\chi_2(s)\right]\overline{\tau}(s)}{\mu_1\Delta\left(s\right)}-\frac{e^{-\chi_1(s)h}\overline{T}(s)}{\mu_1\Delta\left(s\right)};$$

$$A_2(s)=\frac{2\mu\chi_1(s)\mathrm{sh}\left(\chi_1(s)h\right)\overline{W}(\lambda)}{\Delta\left(s\right)}+\frac{2\overline{\tau}(s)}{\mu_1\Delta\left(s\right)}-\frac{2\mathrm{ch}\left(\chi_1(s)h\right)\overline{T}(s)}{\mu_1\Delta\left(s\right)},$$

где

$$\Delta\left(s\right)=2\left[\chi_1(s)\mathrm{sh}\left(\chi_1 h\right)+\mu\chi_2(s)\mathrm{ch}\left(\chi_2 h\right)\right];\quad \mu=\mu_2/\mu_1 .$$

При помощи полученных значений коэффициентов $A_j\left(s\right)$ $\left(j=1,2\right)$ и $B_1\left(s\right)$ вычислим значения функций $W_1'\left(x,h\right)$ и $\tau_{yz}^{(j)}\left(x,0\right)$ $\left(j=1,2\right)$. В случае, когда на берега трещины действуют равные по величине и противоположно направленные касательные напряжения интенсивности $q\left(x\right)$, т.е. когда $\tau_{yz}^{(1)}\left(x,0\right)=\tau_{yz}^{(2)}\left(x,0\right)=q\left(x\right)$ и $T\left(x\right)=0$, будем иметь:

$$W_1'\left(x,h\right)=\frac{1}{\pi\mu_1}\int_b^c\frac{\tau\left(s\right)ds}{s-x}+\int_b^c K_{1,1}\left(s-x\right)\tau\left(s\right)ds+\int_{-a}^{a}K_{1,2}\left(s-x\right)W'\left(s\right)ds; \tag{1.8}$$

$$\tau_{yz}^{(1)}(x,0)=\tau_{yz}^{(2)}(x,0)=$$

$$=\frac{\mu_2}{\pi(1+\mu)}\int_{-a}^{a}\frac{W'(s)ds}{s-x}+\int_{b}^{c}K_{2,1}(s-x)\tau(s)ds+\int_{-a}^{a}K_{2,2}(s-x)W'(s)ds. \qquad (1.9)$$

Здесь

$$K_{11}(t)=\frac{1}{\mu_1\pi}\int_0^\infty\left[\frac{2s(\chi_1\operatorname{ch}(\chi_1 h)+\mu\chi_2\operatorname{sh}(\chi_1 h))}{\chi_1(s)\Delta(s)}-1\right]\sin(st)ds;$$

$$K_{12}(t)=\frac{2\mu}{\pi}\int_0^\infty\frac{\chi_2(s)}{\Delta(s)}\cos(st)ds;\quad K_{21}(t)=\frac{2\mu}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\chi_2(s)}{\Delta(s)}\cos(st)ds;$$

$$K_{2,2}(t)=\frac{\mu_2}{(1+\mu)\pi}\int_0^\infty\left[\frac{2(1+\mu)\chi_1(s)\chi_2(s)\operatorname{sh}(\chi_1 h)}{\chi_1(s)\Delta(s)}-1\right]\sin(st)ds.$$

Теперь, используя представления (1.8) - (1.9), удовлетворим последним двум условиям (1.1). В итоге, для определения неизвестных контактных напряжений $\tau(x)$ и функции дислокации точек берегов трещины $W'(x)$ придём к следующей определяющей системе сингулярных интегральных уравнений первого рода:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\mu_1}\displaystyle\int_b^c\frac{\tau(s)ds}{s-x}+\int_b^c K_{1,1}(s-x)\tau(s)ds+\int_{-a}^{a}K_{1,2}(s-x)W'(s)ds=0 & (b<x<c)\\ \dfrac{\mu_2}{\pi(1+\mu)}\displaystyle\int_{-a}^{a}\frac{W'(s)ds}{s-x}+\int_b^c K_{2,1}(s-x)\tau(s)ds+\int_{-a}^{a}K_{2,2}(s-x)W'(s)ds=q(x) & (|x|<a)\end{cases} \qquad (1.10)$$

которую нужно рассматривать при условиях равновесия штампа и непрерывности смещений в концевых точках трещины:

$$\int_b^c\tau(x)dx=\int_b^c\tau_0(x)dx=T_0;\quad \int_{-a}^{a}W'(x)dx=0. \qquad (1.11)$$

2. Решение определяющей системы уравнений

Систему определяющих сингулярных интегральных уравнений (1.10) при условиях (1.11) будем решать численно-аналитическим методом механических квадратур. Для этого при помощи замены переменных $s=p\xi+k$, $x=pt+k$ $\left(p=(c+b)/2,\ k=(c-b)/2\right)$ в первом уравнении (1.10) и $s=a\xi,\ x=at$ во втором уравнении (1.10) перейдём на интервал $(-1,1)$ и введя обозначения

$$\varphi_1(t)=p\tau(pt+k)/T_0;\quad \varphi_2(t)=W'(at);\ \mathrm{R}_{11}(\xi,t)=p\mu_1K_{11}((\xi-t)p);$$

$$R_{2,1}(s,t)=T_0(1+\mu)K_{2,1}(sp+k-at)/\mu_2;\ R_{2,2}(s,t)=(1+\mu)K_{2,2}(a(s-t))/\mu_2;$$

$$q^*(t)=(1+\mu)q(at)/\mu_2,$$

запишем в виде:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_1(\xi)d\xi}{\xi-t}+\int_{-1}^{1}R_{1,1}(\xi,\mathrm{t})\varphi_1(\xi)d\xi+\int_{-1}^{1}R_{1,2}(\xi,\mathrm{t})\varphi_2(\xi)ds=0\\ \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_2(\xi)d\xi}{\xi-t}+\int_b^c R_{2,1}(\xi,\mathrm{t})\varphi_1(\xi)d\xi+\int_{-1}^{1}R_{2,2}(\xi,\mathrm{t})\varphi_2(\xi)ds=q^*(t)\end{cases}\quad (-1<t<1) \qquad (2.1)$$

При этом, условия (1.11) примут вид:

$$\int_{-1}^{1}\varphi_1(\xi)\,d\xi=1;\qquad \int_{-1}^{1}\varphi_2(\xi)\,d\xi=0. \tag{2.2}$$

Очевидно, что как функция $\varphi_1(t)$, так и функция $\varphi_2(t)$ в концевых точках интервала интегрирования ±1 имеют корневую особенность и их можно представить в виде:

$$\varphi_j(t)=\frac{\varphi_j^*(t)}{\sqrt{1-t^2}}\ \ (j=1,2), \tag{2.3}$$

где $\varphi_j^*(x)$ – непрерывные функции, ограниченные вплоть до концов интервала $[-1,1]$.

Подставляя значения функций $\varphi_j(x)$ $(j=1,2)$ в (2.1)-(2.2) и используя соотношения, приведённые в [3], по стандартной процедуре придём к системе из $2n$ алгебраических уравнений относительно значений $\varphi_j^*(\xi_i)$ и $\overline{\varphi}_j^*(\xi_i)$ $\left(j=1,2;\ i=\overline{1,n}\right)$. После определения функций $\varphi_j^*(\xi_i)$ нетрудно при помощи интерполяционного многочлена Лагранжа восстановить функции $\varphi_j(x)$ $(j=1,2)$ и определить все необходимые величины, характеризующие напряжённо-деформированное состояние в слое и полупространстве.

Приведём формулу для определения коэффициента интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещины. С этой целью используем соотношение (1.9), когда $(|x|>a)$. Далее, сформулируем это соотношение на интервале $(-1,1)$ и представим в виде:

$$\tau_{yz}^{(j)}(at,0)=\frac{\mu_2}{\pi(1+\mu)}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_2(\xi)\,d\xi}{\xi-t}+F(t)\quad (|t|>1), \tag{2.4}$$

где

$$F(t)=T_0\int_{-1}^{1}K_{2,1}(p\xi+k-at)\varphi_1(\xi)\,d\xi+a\int_{-1}^{1}K_{2,2}\left(a(\xi-t)\right)\varphi_2(\xi)\,d\xi$$

– ограниченная функция в обоих концах трещины.

Подставляя в (2.4) значение функции $\varphi_2(t)$ из (2.3) и учитывая соотношение [4]

$$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{ds}{\sqrt{a^2-s^2}\,(s-x)}=-\frac{\operatorname{sign}(x)}{\sqrt{x^2-a^2}}\quad (x<a;x>b)$$

для определения амплитуд безразмерных коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещины получим выражения:

$$K_{III}^*(\pm a)=\frac{K_{III}^{(1)}(\pm a)+iK_{III}^{(2)}(\pm a)}{\mu_2}=\sqrt{2\pi}\lim_{\eta\to\pm1\pm0}\sqrt{|t\mp1|}\,\tau_{yz}^{(j)}(at,0)/\mu_2=\mp\frac{\sqrt{\pi}\varphi_2^*(\pm1)}{(1+\mu)}.$$

Тогда,

$$K_{III}(\pm a,t)=K_{III}^*(\pm a)e^{i\omega t}=\left|K_{III}^*(\pm a)\right|e^{i(\omega t-\delta)}\ \left(\delta=-\operatorname{arctg}\left(K_{III}^{(2)}/K_{III}^{(1)}\right)\right).$$

Для определения же амплитуды безразмерного раскрытия трещины используем формулу:

$$w_*(t)=w(at)/a=\int_{-1}^{t}\varphi_2(\xi)\,d\xi.$$

Проведён численный расчёт и выявлены закономерности изменения коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений и раскрытия трещины в зависимости от места расположения штампа и частоты вынужденных колебаний в случае, когда берега трещины свободны от напряжений.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта 18T-2C290.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акопян В.Н., Саргсян А.О. Об одной динамической смешанной задаче для составного пространства с трещиной при антиплоской деформации. //В сб. статей: «Избранные вопросы теории упругости, пластичности и ползучести», посв. 75-летию академика М.А. Задояна. Ереван: «Гитутюн», 2006, с.50-56.
2. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. М: Мир, 1962. 279с.
3. Саакян А.В. Метод дискретных особенностей в применении к решению сингулярных интегральных уравнений с неподвижной особенностью. //Известия НАН Армении. Механика. 2000. Т.53. №3. С.12-19.
4. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Москва.: Наука, 1981. 738с.

Сведения об авторах:

Амирджанян Арутюн Арменович – кандидат физ.-мат. наук., научный сотрудник Института механики НАН РА, **тел.:** (37410) 52-48-90, **e-mail:** amirjanyan@gmail.com

Акопян Лусине Ваграмовна – кандидат физ.-мат. наук., научный сотрудник Института механики НАН РА, **тел.:** (37410) 52-48-90

УСТАЛОСТЬ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Арутюнян А.Р., Арутюнян Р.А.

Согласно результатам многочисленных опытов, композиционные материалы при циклических нагружениях деформируются и разрушаются вследствие накопления многочисленных дефектов различной природы. С учётом этих результатов на основе концепции рассеянного повреждения и разрушения сформулирован критерий усталостной прочности. Конкретизированы коэффициенты критерия усталости и построены кривые накопления повреждений в зависимости от числа циклов нагружения и уровня напряжений. Дано сравнение с результатами опытов по усталости стеклопластиков и углепластиков.

Первые исследования по усталости композиционных материалов были выполнены в 1964г. Боллером [1]. В этой работе представлены результаты циклического растяжения пластмасс, армированных стекловолокном. С этого времени началось интенсивное исследование усталости композитов, которое продолжается и в настоящее время. Накоплен значительный объём экспериментальных данных для различных типов композиционных материалов [2-9]. Согласно этим исследованиям, основные процессы усталостного разрушения вызваны накоплением повреждённости. При этом, мера повреждения определяется различными процессами деградации материала: разрушение волокон, расслоение, разрушение матрицы, совместное разрушение матрицы и волокон, отрывы на поверхности раздела, повторные включения. До того, как произойдёт полное разрушение материала, последовательность указанных повреждений может быть самой разнообразной. В отличие от металлов, для которых образование и развитие трещин являются основными механизмами, определяющими долговечность материала, для полимеров эти механизмы определяются кинетикой развития повреждённого состояния вплоть до окончательного разрушения. При этом, как показывают опыты [2], кривая накопления суммарной величины повреждений является возрастающей функцией времени (числа циклов нагружения) до момента макроразрушения. В данной работе обращается внимание на возможности описания этих процессов и формулировки критерия усталостной прочности методами механики материалов на основе концепции повреждённости [10-17].

В общей постановке кинетическое уравнение для параметра повреждённости рассматривалось в работах [10-11]. Согласно этим, работам повреждённость системы, в соответствии с представлениями статистической физики, протекает со скоростью, зависящей от некоторых внешних факторов (механических, физических, химических и др.), а также от величины накопленной повреждённости. При рассмотрении этой концепции исходят из следующих положений. Так как реальные материалы имеют случайную структуру, параметр сплошности ψ или повреждёности $\omega = 1 - \psi$ является статистическим показателем, который может быть задан с помощью некоторого кинетического уравнения, базирующегося на двух гипотезах. Согласно первой гипотезе, хрупкое разрушение протекает со скоростью, зависящей только от напряжения

$$\frac{d\psi}{dt} = -f\left[\sigma(t)\right] \tag{1}$$

Согласно второй гипотезе, и в соответствии с представлениями статистической физики, скорость хрупкого разрушения зависит от напряжения и величины накопленной повреждённости

$$\frac{d\psi}{dt} = -f\left[\sigma(t), \psi\right] \tag{2}$$

В уравнениях (1)-(2) $\sigma(t)$ – напряжение, зависящее от времени t.

Эта концепция была использована в работах Качанова-Работнова [12, 13] и на её основе сформулирован критерий хрупкого разрушения в условиях высокотемпературной ползучести. Согласно этим работам, вводится параметр сплошности ψ или повреждённости ω ($\psi = 1 - \omega$, $d\psi = -d\omega$), зависящие от времени t. Причём, при $t = 0$, $\omega = 0$, т.е. в начальном состоянии система не повреждена. Система разрушается при условии $\omega = 1$. Таким образом, параметр ω меняется от $0 \le \omega \le 1$, соответственно, параметр сплошности ψ меняется от $1 \le \psi \le 0$. Используется кинетическое уравнение (2), правая часть которого задаётся в виде степенной зависимости от величины эффективного напряжения и для этого простого случая

формулируется критерий длительной прочности. Далее воспользуемся этим подходом при формулировке критерия усталостной прочности композиционных материалов.

Введём следующие два обобщённых понятия: эффективное время [14] $z = tf^{-\alpha}$ (α – постоянная, $f = N/t$ – частота нагружения, N – число циклов нагружения) и эффективное напряжение $\sigma_a/(1-\omega)$ (σ_a – амплитуда напряжения цикла).

Кинетическое уравнение для параметра повреждённости зададим в виде

$$\frac{d\omega}{dz} = A\left(\frac{\sigma_a}{1-\omega}\right)^n, \tag{3}$$

где A, n – постоянные.

Учитывая принятые обозначения, уравнение (3) можно записать через число циклов нагружения

$$\frac{d\omega}{dN} = Af^{-(1+\alpha)}\left(\frac{\sigma_a}{1-\omega}\right)^n, \tag{4}$$

Решение уравнения (4) при начальном условии $N = 0$, $\omega = 0$ имеет вид:

$$\omega = 1 - \left[1 - (n+1)Af^{-(1+\alpha)}\sigma_a^n N\right]^{\frac{1}{n+1}}, \tag{5}$$

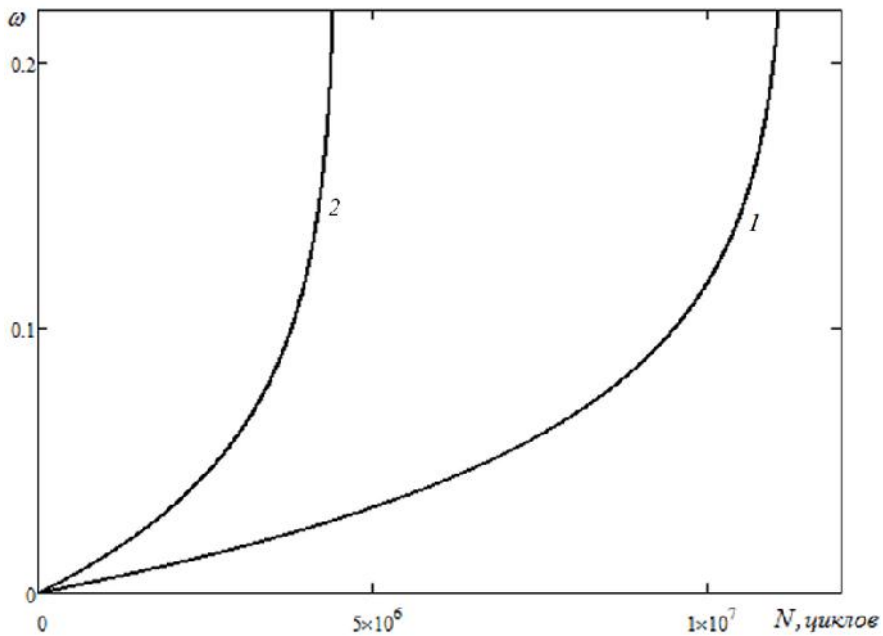


Рис. 1. Кривые поврежденности согласно формуле (5) для стеклопластика для различных значений σ_a: кривая 1 – $\sigma_a = 54$ *МПа*, кривая 2 – $\sigma_a = 57$ *МПа*.

Кривые повреждённости, согласно формуле (5), для стеклопластика с матами из рубленой пряжи и полиэфирной смолой без добавления пластификатора для различных значений σ_a представлены на рис.1 (кривая 1 – $\sigma_a = 54$ *МПа*, кривая 2 – $\sigma_a = 57$ *МПа*). При расчётах приняты следующие значения коэффициентов: $n = 17$, $\alpha = 0$, $f = 1{,}667$ *Гц*, $A = 2{,}93 \cdot 10^{-38}$ [*Гц*][*МПа*]$^{-17}$.

Принимая условие разрушения $N = N_f$, $\omega = 1$ из (5) получим следующий критерий усталости:

$$\sigma_a^n N_f = \frac{f^{(1+\alpha)}}{(n+1)A} \qquad (6)$$

В реальных условиях в момент разрушения величина параметра повреждённости не достигает нулевого значения. Разрушение наступает при некоторой критической величине $\omega = \omega_*$. Принимая в (5) условие разрушения в виде: $N = N_f$, $\omega = \omega_*$ ($\omega_* \neq 0$), получим следующий критерий усталости:

$$\sigma_a^n N_f = \frac{\left[1-(1-\omega_*)^{n+1}\right] f^{(1+\alpha)}}{(n+1)A} \qquad (7)$$

В двойных логарифмических координатах $\lg\sigma_a - \lg N_f$ критерии (6) и (7) выражаются в виде прямой линии (рис. 2, 3), что согласуется с результатами многочисленных опытов на усталость, например, образцов из углепластика и стеклопластика [6, 7].

Кривая усталости для однонаправленного углепластика с необработанными высокомодульными волокнами и изофталевой полиэфирной смолой (объёмное содержание волокон 60%) представлена на рис.2. При расчётах приняты следующие значения коэффициентов: $n = 23$, $A = 3{,}57 \cdot 10^{-74}$ $[Гц][МПа]^{-23}$, $\alpha = 0$, $f = 116{,}67 Гц$, $\omega_* = 0{,}8$.

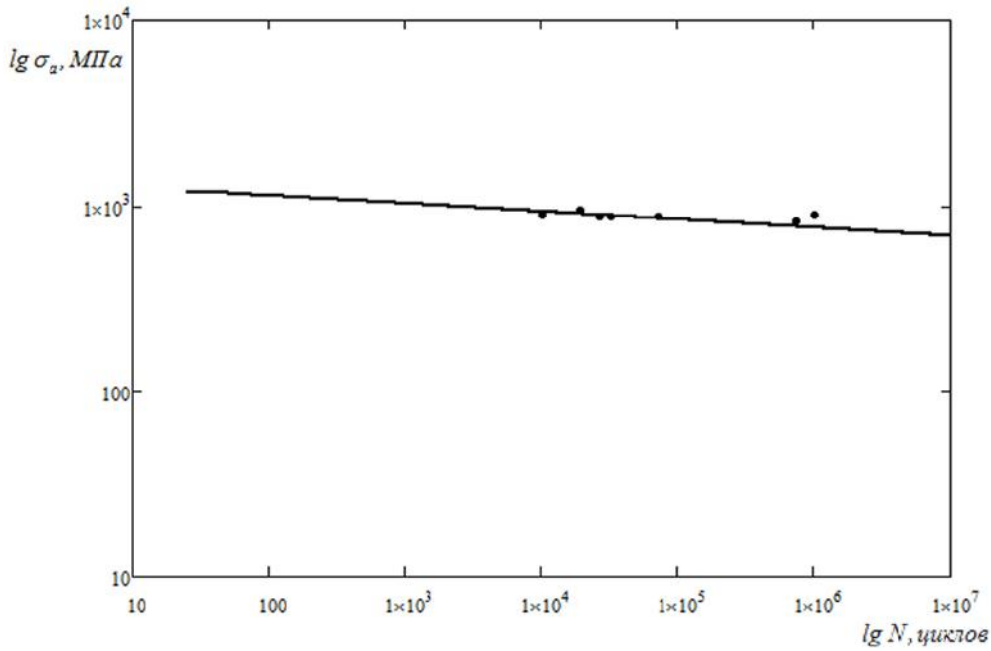


Рис. 2. Кривая усталости согласно критерию (7) и экспериментальные точки для однонаправленного углепластика с необработанными высокомодульными волокнами и изофталевой полиэфирной смолой (объёмное содержание волокон 60%) при осевом пульсирующем растяжении.

Кривая усталости для стеклопластика с матами из рубленой пряжи и полиэфирной смолой без добавления пластификатора представлена на рис.3. При расчётах приняты следующие значения коэффициентов: $n = 17$, $A = 2{,}93 \cdot 10^{-38}$ $[Гц][МПа]^{-17}$, $\alpha = 0$, $f = 1{,}667 Гц$, $\omega_* = 0{,}8$.

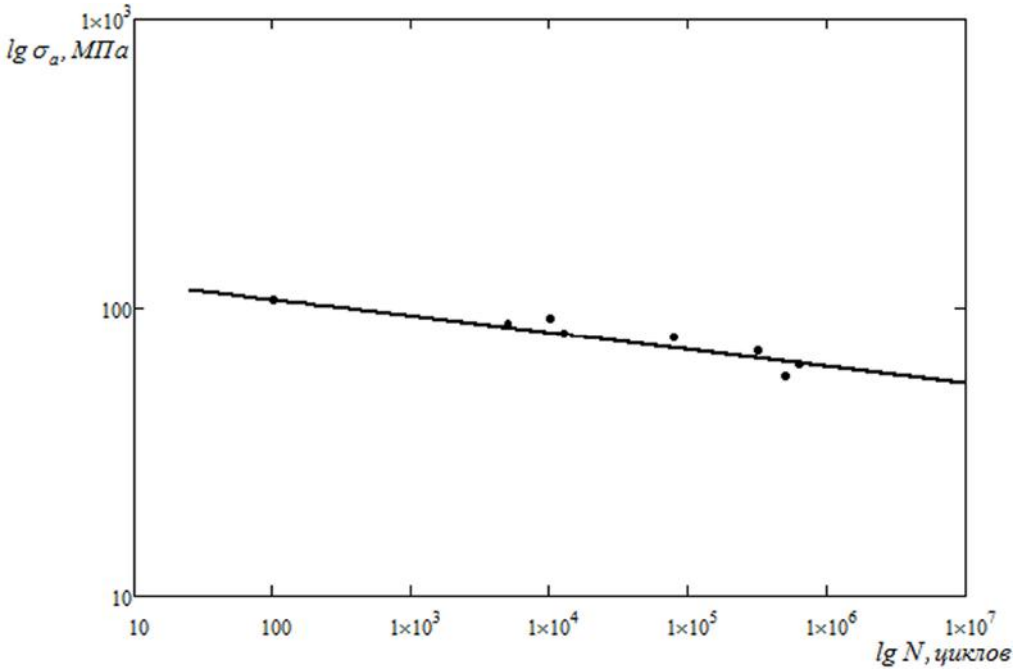


Рис. 3. Кривая усталости согласно критерию (7) и экспериментальные точки для стеклопластика с матами из рубленой пряжи и полиэфирной смолой без добавления пластификатора при осевом пульсирующем растяжении.

Заключение

Результаты обзорных исследований усталости композиционных материалов показывают, что в процессе длительного циклического нагружения композиционных материалов, в частности, стеклопластиков и углепластиков основным механизмом деформирования и разрушения можно считать различного рода повреждений, которые описываются с помощью параметра повреждённости, кинетическое уравнение для которого разработаны методами механики рассеянного повреждения и разрушения.

В качестве условия разрушения рассматривается критическая величина повреждений и на этой основе сформулирован критерий усталостной прочности. Конкретизированы коэффициенты критерия и дано сравнение с результатами опытов по усталости стеклопластиков и углепластиков. Построены кривые накопления повреждений в зависимости от числа циклов нагружения и уровня напряжений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 18-01-00146).

ЛИТЕРАТУРА

1. Boller K.H. Composite Materials: Testing and Design. ASTM STR 460. 1969. 217p.
2. Salkind M.J. Fatigue of composites. Composite Materials: Testing and Design. ASTM STR 497. 1972. P.143-169.
3. Dew-Hughes D., Way J.L. Fatigue of fibre-reinforced plastics: a review. Composites. 1973. V.4. N 4. P.167-173.
4. Фудзии Т., Дзако М. Механика разрушения композиционных материалов. М.: Мир, 1982. 232с.
5. Нарисава И. Прочность полимерных материалов. М.: Химия, 1987. 398с.
6. Оуен М.Дж. Усталостное повреждение стеклопластиков. Глава 7. В кн.: Композиционные материалы. Том 5. Разрушение и усталость. (Под редакцией Л. Браутмана и Р. Крока). М.: Мир, 1978. С.333-362.
7. Оуен М. Дж. Усталость углепластиков. Глава 8. В кн.: Композиционные материалы. Т.5. Разрушение и усталость. (Под ред. Л. Браутмана и Р. Крока). М.: Мир, 1978. С.363-393.

8. Theodore P. Philippidis, Anastasios P. Vassilopoulos Fatigue design allowables for GRP laminates based on stiffness degradation measurements // Composites Science and Technology. 2000. V.60. P.2819-2828.
9. Theodore P. Philippidis, Anastasios P. Vassilopoulos Complex stress state effect on fatigue life of GRP laminates. Part I, experimental // International Journal of Fatigue. 2002. V.24. P.813–823.
10. Haward R.N. The extension and rupture of cellulose acetate and celluloid // Trans. Farad. Soc. 1942. V.38. P.394-400.
11. Бокшицкий М.Н. Длительная прочность полимеров. М.: Химия, 1978. 310с.
12. Alexander R. Arutyunyan, Robert A. Arutyunyan. The frequency dependence of the fatigue fracture criterion // Proceedings of XXXIII Summer School-Conference “Advanced problems in mechanics”. June 28 - July 5, 2005. St.-Petersburg (Repino). St.-Petersburg: IPME RAS. 2005. P. 7-8.
13. Качанов Л.М. О времени разрушения в условиях ползучести // Изв. АН СССР. ОТН. 1958. N 8. С.26-31.
14. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций М.: Наука, 1966. 752с.
15. Арутюнян Р.А. Накопление повреждений и разрушение высокоэластичного тонкого слоя при циклическом обжатии // Вестник С.-Петерб. ун-та. 2012. Сер. 1. Вып. 4. С. 53-61.
16. Arutyunyan R.A. High-temperature embrittlement and long-term strength of metallic materials // Mechanics of solids. 2015. V.50. I. 2. P.191-197.
17. Арутюнян Р.А. Проблема деформационного старения и длительного разрушения в механике материалов. СПб.: Изд-во СПбГУ. 2004. 252с.

Сведения об авторах:

Арутюнян Александр Робертович – кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, математико-механический факультет, Санкт-Петербургский государственный университет, **тел.:** + 7 (812) 4284245, **E-mail:** a.arutyunyan@spbu.ru

Арутюнян Роберт Ашотович – профессор, доктор физ.-мат. наук, математико-механический факультет, Санкт-Петербургский государственный университет, **тел.:** + 7 (812) 5266591;
E-mail: r.arutyunyan@spbu.ru

О ВЗАИМОСВЯЗИ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ И ПОВРЕЖДЁННОСТИ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

Арутюнян А.Р., Арутюнян Р.А. Саитова Р.Р.

Сформулированы взаимосвязанные уравнения для деформации ползучести и параметра повреждённости для сжимаемой среды. Получены приближённые и точные решения этих уравнений. Сформулированы соответствующие критерии длительной прочности. Показано, что теория Качанова-Работнова даёт завышенные значения времени до разрушения.

Концепция повреждённости, введённая в механику материалов для описания длительной прочности в условиях высокотемпературной ползучести, разработанная в фундаментальных работах Л.М. Качанова [1] и Ю.Н. Работнова [2], не рассматривала взаимосвязь между процессами ползучести и повреждённости. В этих работах для описания участка хрупкого разрушения экспериментальной кривой длительной прочности введено понятие повреждённости, предложено наиболее простое кинетическое уравнение для параметра повреждённости и сформулирован критерий длительной прочности. При этом, вопрос о взаимосвязи деформации ползучести и повреждённости в этих работах не обсуждался. Рассматривалась проблема тепловой хрупкости, когда под воздействием относительно малых напряжений и высоких температур металлические материалы охрупчиваются и разрушаются при малой величине остаточной деформации. В дальнейшем Работнов [3] предложил взаимосвязанные уравнения для деформации ползучести и параметра повреждённости. В научной литературе по этой проблеме выделяются следующие возможные варианты взаимосвязи ползучести и повреждённости. Процессы ползучести и повреждённости развиваются по времени параллельно и в первом приближении не связаны друг с другом. Повреждаемость является результатом деформации, которая создаёт очаги разрушения, приводит к возникновению мест с высокой концентрацией напряжений и является поставщиком точечных дефектов, необходимых для развития медленного разрушения. Ползучесть является следствием процессов микроразрушения в объёме материала. Тот факт, что межзеренному разрушению при ползучести способствуют низкие скорости деформации и высокие температуры, позволяет предполагать, что процесс повреждённости и разрушения может протекать независимо от пластической деформации. Об этом также свидетельствуют многочисленные случаи медленного разрушения с очень малым значением остаточной деформации. Исследования Ратклифа и Гринвуда [4], Бетехтина [5] по изменению плотности в условиях ползучести показали, что залечивание пор однократным и многократным наложением гидростатического давления приводит к резкому торможению деформации ползучести и значительному увеличению времени до разрушения. При этом скорость ползучести практически не меняется, а процессы повреждённости по изменению плотности полностью затормаживают развитие разрушения, что свидетельствует о независимости скорости ползучести от повреждённости. По-видимому, справедливыми являются все три возможных варианта взаимосвязи ползучести и разрушения.

Следующий этап по проблеме ползучести и повреждённости относится к работам Работнова [3], который ввёл систему из двух взаимосвязанных уравнений для деформации ползучести ε и параметра повреждённости ω

$$\dot{\varepsilon} = b\sigma^m (1-\omega)^{-q} \tag{1}$$

$$\dot{\omega} = c\sigma^n (1-\omega)^{-r} \tag{2}$$

где b, c, m, n, q, r – постоянные, σ – истинное напряжение.

Работнов рассмотрел два случая решения системы уравнений (1)-(2). В первом случае при хрупком разрушении можно пренебречь изменением поперечного сечения образца $\sigma = \sigma_0 = c\text{const}$ (σ_0 – номинальное напряжение), тогда из решения системы уравнений (1) и (2) следуют критерии чисто вязкого и хрупкого разрушений и соотношение для деформации ползучести. С помощью этого соотношения описывается третий участок кривой ползучести. Таким образом, впервые было показано, что третий участок кривой ползучести является следствием кинетических процессов повреждённости. В мировой научной литературе этот результат рассматривается как наиболее важный в теории Работнова. Далее рассматривается

случай больших деформаций и вводится условие несжимаемости, тогда напряжение выражается следующей формулой: $\sigma = \sigma_0 \exp(\varepsilon)$, а система уравнений (1) и (2) принимает вид

$$\dot{\varepsilon} = b\sigma_0^m (1-\omega)^{-q} \exp(m\varepsilon) \tag{3}$$

$$\dot{\omega} = c\sigma_0^n (1-\omega)^{-r} \exp(n\varepsilon) \tag{4}$$

Таким образом, уравнения (3)-(4) описывают поведение несжимаемой среды, поэтому введение понятия повреждённости для такой среды нельзя считать обоснованным.

При формулировке взаимосвязанных уравнений ползучести и повреждённости следует придать параметру повреждённости физическое содержание. В частности, в качестве параметра повреждённости рассматривалось необратимое изменение объёма (разрыхление) [6] или плотности [7]. Этот параметр является наиболее представительной характеристикой повреждённости и определяется соотношением $\omega = 1 - \rho/\rho_0 = 1 - \psi$ (ψ – параметр сплошности), где ρ_0 – начальная, ρ – текущая плотность, $\psi = 1 - \omega = \rho/\rho_0$. В начальном состоянии $\rho = \rho_0$, $\omega = 0$, $\psi = 1$ в момент разрушения $\rho = 0$ $\omega = 1$, $\psi = 0$. Учитывая закон сохранения массы $\rho_0 l_0 F_0 = \rho l F$ и истинное напряжение $\sigma = \sigma_0 F_0 / F = \sigma_0 (l/l_0)(\rho/\rho_0) = \sigma_0 (\rho/\rho_0) e^{\varepsilon} = \sigma_0 \psi e^{\varepsilon}$ в уравнениях (3)-(4), в работе [8] рассматривалась система уравнений для скорости ползучести и повреждённости, записанная через параметр сплошности ψ

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = B\sigma_0^m \psi^{m-\beta} e^{m\varepsilon} \tag{5}$$

$$\frac{d\psi}{dt} = -A\sigma_0^n \psi^{n-\alpha} e^{n\varepsilon}, \tag{6}$$

где B, A, m, n, α, β – постоянные.

Аналитическое решение системы уравнений (5)-(6) в общем виде не представляется возможным. Далее рассмотрим некоторые приближённые решения. Если ограничиться случаем малых деформаций, то можно считать $e^{n£} \approx 1$, $e^{m£} \approx 1$, и из решения уравнения (5)-(6) при начальных условиях, соответственно, $t = 0$, $\varepsilon = 0$ и $t = 0$, $\psi = 1$, следуют соотношения для деформации ползучести и параметра повреждённости

$$\varepsilon = \frac{B\sigma_0^{m-n}}{A\gamma}\left\{1 - \left[1 - (\alpha - n + 1)A\sigma_0^n t\right]^{\frac{m-\beta+\alpha-n+1}{\alpha-n+1}}\right\}, \tag{7}$$

$$\psi = \left[1 - (\alpha - n + 1)A\sigma_0^n t\right]^{\frac{1}{\alpha-n+1}} \tag{8}$$

На рис.1 представлены теоретические кривые ползучести согласно соотношению (7) для различных значений коэффициента α ($\alpha = 8$ – кривая 1, $\alpha = 6$ – кривая 2 и $\alpha = 4$ – кривая 3). Как видно из этого рисунка, предложенная система уравнений способна описать третий участок кривых ползучести. Более того, деформация ползучести по теории Работнова (кривая 3 на рис. 1) накапливается более интенсивно по сравнению с величиной деформации полученной из решения уравнений (5)-(6) (кривые 1, 2 на рис. 1). При расчётах по формуле (7) были приняты следующие значения коэффициентов: $n = 2$, $m = 4$, $A = 10^{-9}$ $[МПа]^{-2}$, $\sigma_0 = 100$ $МПа$, $B = 5 \cdot 10^{-17}$ $[МПа]^{-4}$, $\beta = 1$.

На рис.2 представлены кривые изменения параметра сплошности согласно формуле (8) при различных значениях коэффициента α ($\alpha = 6$ – кривая 1 и $\alpha = 4$ – кривая 2). При расчётах были приняты следующие значения коэффициентов: $n = 2$, $A = 10^{-9}$ $[МПа]^{-2}$, $\sigma_0 = 100$ $МПа$.

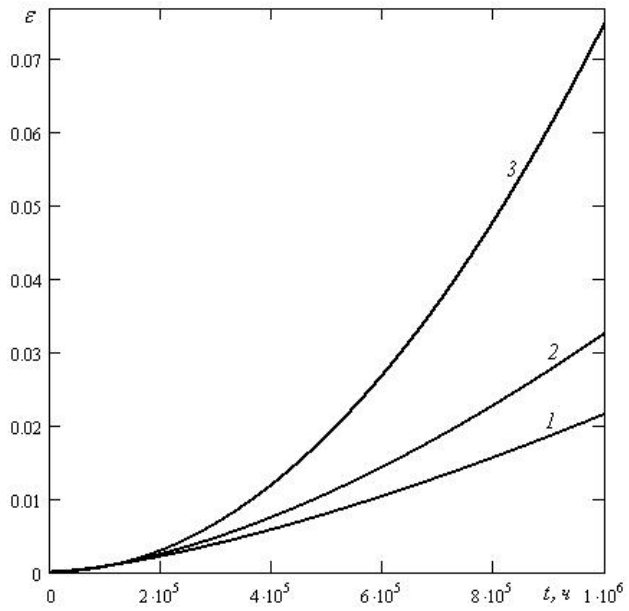


Рис. 1. Кривые ползучести согласно формуле (7): $\alpha = 8$ – кривая 1, $\alpha = 6$ – кривая 2 и $\alpha = 4$ – кривая 3.

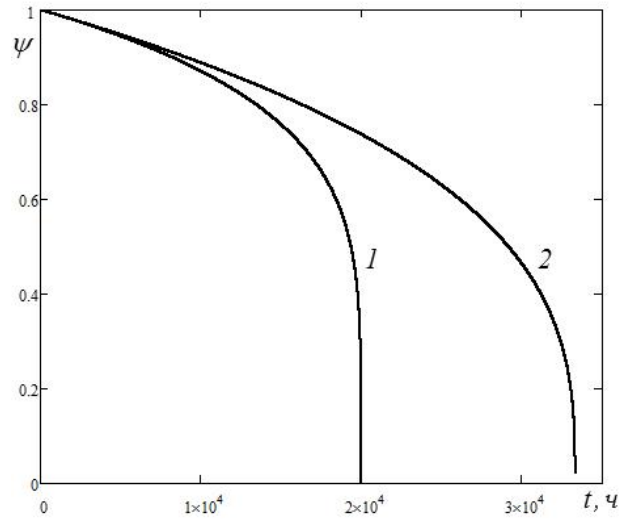


Рис. 2. Кривые изменения параметра сплошности ψ согласно формуле (8): $\alpha = 6$ – кривая 1 и $\alpha = 4$ – кривая 2.

Принимая условие разрушения $t = t_f$, $\psi = 0$, из (8) получим критерий длительной прочности

$$t_f^b = \frac{1}{(\alpha - n + 1) \cdot A\sigma_0^n}, \tag{9}$$

При $\alpha = 2n$ критерий (9) совпадает с критерием Качанова-Работнова [1, 2].

На рис.3 в двойных логарифмических координатах построены кривые длительной прочности согласно формуле (9) для разных значений коэффициента α: $\alpha = 6$ – кривая 1, $\alpha = 4$ – кривая 2 и $\alpha = 2$ – кривая 3.

Согласно рис.3, теория Качанова-Работнова даёт завышенные значения времени до разрушения.

В случае малых деформаций при $e^{n£} \approx 1$, $e^{m£} \approx 1$ из системы уравнений (5)-(6) следует

$$\frac{d \cdot}{d£} = -\frac{A}{B} \pm_{0}^{n-m} . \quad {}^{n-\sim -m+} \tag{10}$$

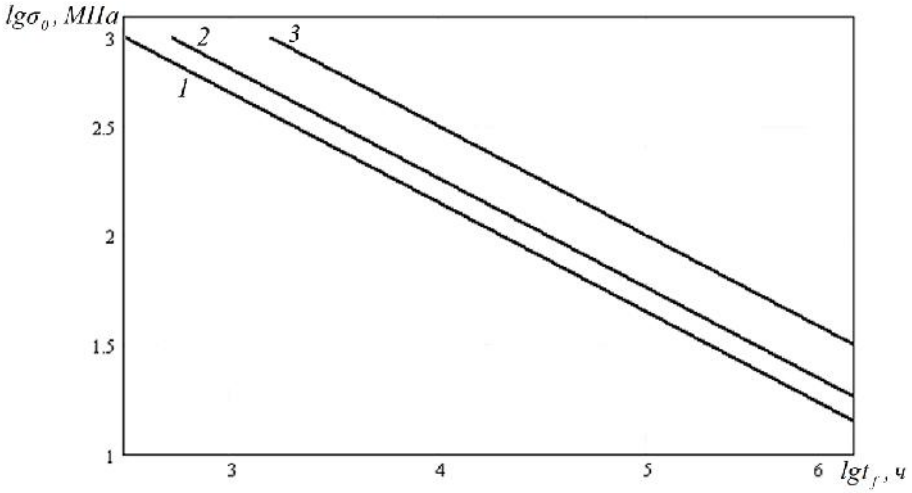


Рис. 3. Кривые длительной прочности согласно критерию (9): $\alpha = 6$ – кривая 1, $\alpha = 4$ – кривая 2 и $\alpha = 2$ – кривая 3.

Решение уравнения (10) при начальных условиях $\psi = 1$, $\varepsilon = 0$ запишется в виде

$$\psi = \left[1 - \frac{A\sigma_0^{n-m}(1-n+\alpha+m-\beta)}{B}\varepsilon\right]^{\frac{1}{1-n+\alpha+m-\beta}} \tag{11}$$

В общем случае из системы уравнений (5)-(6) можно получить точное решение для функции повреждённости $\psi(\varepsilon)$. С этой целью разделив уравнение (6) на (5), получим

$$\frac{d\psi}{d\varepsilon} = -\frac{A}{B}\sigma_0^{n-m}\psi^{n-\alpha-m+\beta}e^{(n-m)\varepsilon} \tag{12}$$

Решение уравнения (12) при начальных условиях $\psi = 1$, $\varepsilon = 0$ имеет вид

$$\psi = \left[1 - \frac{A\sigma_0^{n-m}(1-n+\alpha+m-\beta)}{B(m-n)}(1-e^{-(m-n)\varepsilon})\right]^{\frac{1}{1-n+\alpha+m-\beta}} \tag{13}$$

По теории Работнова, согласно системе (3)-(4), функция повреждённости в зависимости от деформации в принятых нами обозначениях имеет вид

$$\psi = \left[1 - \frac{A\sigma_0^{n-m}(\alpha-\beta+1)}{B(m-n)}(1-e^{-(m-n)\varepsilon})\right]^{\frac{1}{\alpha-\beta+1}} \tag{14}$$

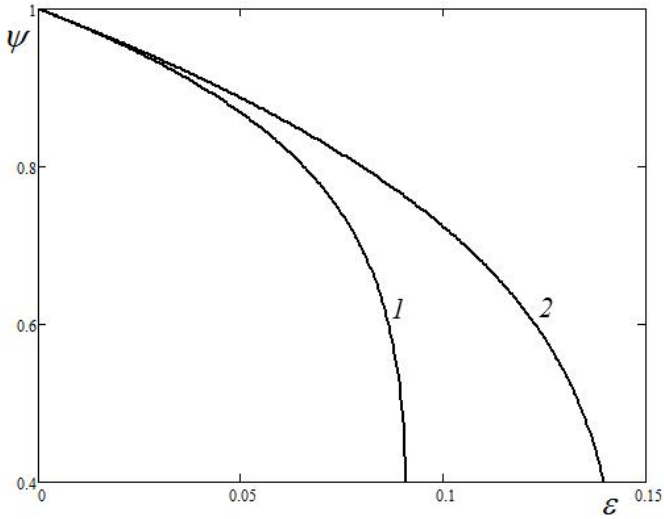


Рис.4. Кривые поврежденности согласно формулам (13) (кривая 1) и (14) (кривая 2) при $\alpha = 4$.

На рис. 4 показаны кривые $\psi(\varepsilon)$ согласно соотношениям (13) (кривая 1) и (14) (кривая 2) для параметра $\alpha = 4$ и коэффициентов: $A = 10^{-12}\left[МПа\right]^{-12}$, $B = 5 \cdot 10^{-17}\left[МПа\right]^{-4}$, $\sigma_0 = 100\ МПа$, $n = 2$, $m = 4$, $\beta = 1$.

Как видно из этого рисунка, в случае решения Работнова в процессе деформации повреждённость накаливпаются менее интенсивно, чем для случая предложенного нами закона (4).

Заключение. Относительное изменение плотности в процессе высокотемпературной ползучести рассматривается в качестве параметра сплошности и с учётом этого параметра сформулированы взаимосвязанные уравнения для деформации ползучести и параметра сплошности. Получены приближённые и точные решения этих уравнений и формулирован критерий длительной прочности. Построены соответствующие теоретические кривые для деформации ползучести и критерия длительной прочности. Согласно этим решениям, деформация ползучести по теории Работнова накапливается более интенсивно по сравнению с величиной деформации, полученной из решения предложенных авторами уравнений. Согласно кривым длительной прочности, теория Качанова-Работнова предсказывает завышенные значения времени до разрушения по сравнению с критерием длительной прочности для сжимаемого материала.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант N 18-01-00146).

ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Л.М. О времени разрушения в условиях ползучести // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. 1958. №8. С. 26-31.
2. Работнов Ю.Н. О механизме длительного разрушения // Вопросы прочности материалов и конструкций. М.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 5-7.
3. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752с.
4. Ratcliffe R.T., Greenwood G.W. Mechanism of cavitation in magnesium during creep // Phil. Mag. 1965. V.12. P.59-69.
5. Betekhtin V.I. Porosity of solids // Trans. St.-Petersburg Acad. Sci. for strength problems. 1997. V.1. P.202-210.
6. Новожилов В.В. О пластическом разрыхлении // Прикладная математика и механика. 1965. №4. С. 681-689.
7. Арутюнян Р.А. Проблема деформационного старения и длительного разрушения в механике материалов. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2004. 252с.
8. Арутюнян Р.А. Проблема высокотемпературной ползучести и длительной прочности в механике материалов // Доклады РАН. 2017. Т.475. №4. С.386-388.

Сведения об авторах:

Арутюнян Александр Робертович – кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, математико-механический факультет, Санкт-Петербургский государственный университет (СПбГУ), **тел.:** + 7 (812) 4284245, **E-mail:** a.arutyunyan@spbu.ru

Арутюнян Роберт Ашотович – профессор, доктор физ.-мат. наук, математико-механический факультет, СПбГУ, **тел.:** + 7 (812) 5266591**, E-mail:** r.arutyunyan@spbu.ru

Саитова Регина Ринатовна – аспирант, математико-механический факультет, СПбГУ, тел.: + 7 (812) 4284164, **E-mail:** rigastr@yandex.ru

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА СОСТАВНОЙ ПЛОСКОСТИ СОДЕРЖАЩЕЙ ОТВЕРСТИЕ

Арутюнян Л.А., Едоян В.А.

В работе рассматривается плоская задача теории упругости для составной плоскости, состоящей из двух полуплоскостей с различными упругими характеристиками и с имеющимся между ними криволинейным отверстием, контур которого ограничен дугами пересекающихся окружностей.

Задачу для этой области удобно решать в несколько видоизмененной системе биполярных координат. Связь прямоугольных координат (x, y) с биполярными (α, β) определяется формулами [1]:

$$gx = \sin\beta,\ \ gy = \mathrm{sh}\alpha,\ \ ag = \mathrm{ch}\alpha - \cos\beta, \quad \text{где } a - \text{параметр} \tag{1}$$

В биполярной координатной системе материал с упругими характеристиками μ_1, ν_1 занимает область $0 < \beta < \beta_1$, а область $\beta_2 < \beta < 0$ имеет упругие характеристики μ_2, ν_2, причём внутри рассматриваемой области $-\infty < \alpha < \infty$. На границе $\beta = \beta_m$ $(m = 1, 2)$ заданы нормальные и касательные напряжения, а на линии контакта $\beta = 0$ предполагается полный контакт материалов.

Задача решается при помощи функции напряжений $\phi_m(\alpha, \beta)$ $(m = 1, 2)$, которые удовлетворяют бигармоническому уравнению [1]:

$$\left[\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial\beta^4} - 2\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} + 1\right]\left(g\phi_m(\alpha, \beta)\right) = 0 \tag{2}$$

Напряжения и перемещения в биполярных координатах через функции напряжений $\phi_m(\alpha, \beta)$ задаётся по формулам [1]:

$$a\sigma_\alpha^{(m)}(\alpha, \beta) = \left[(\mathrm{ch}\,\alpha - \cos\beta)\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} - \mathrm{sh}\,\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha} - \sin\beta\frac{\partial}{\partial\beta} + \mathrm{ch}\,\alpha\right]\left(g\phi_m(\alpha, \beta)\right)$$

$$a\sigma_\beta^{(m)}(\alpha, \beta) = \left[(\mathrm{ch}\,\alpha - \cos\beta)\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - \mathrm{sh}\,\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha} - \sin\beta\frac{\partial}{\partial\beta} + \cos\beta\right]\left(g\phi_m(\alpha, \beta)\right)$$

$$a\tau_{\alpha\beta}^{(m)}(\alpha, \beta) = -(\mathrm{ch}\,\alpha - \cos\beta)\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}\left(g\phi_m(\alpha, \beta)\right) \tag{3}$$

$$u_m(\alpha, \beta) = \frac{g}{2\mu_m}\left[(1 - 2\nu_m)\frac{\partial\phi_m(\alpha, \beta)}{\partial\alpha} - \frac{\partial\psi_m(\alpha, \beta)}{\partial\beta}\right]$$

$$\mathrm{v}_m(\alpha, \beta) = \frac{g}{2\mu_m}\left[(1 - 2\nu_m)\frac{\partial\phi_m(\alpha, \beta)}{\partial\beta} + \frac{\partial\psi_m(\alpha, \beta)}{\partial\alpha}\right] \quad (m = 1, 2)$$

где

$$\frac{\partial^2\left(g\phi_m(\alpha, \beta)\right)}{\partial\alpha\partial\beta} = (1 - \nu_m)\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial\beta^2} - 1\right)\left(g\phi_m(\alpha, \beta)\right) \tag{4}$$

Граничные условия для напряжений равносильны следующим условиям для функции напряжений [1]:

$$g\phi_m(\alpha, \beta)\Big|_{\beta=\beta_m} = \sigma_m(\alpha); \qquad \frac{\partial\left(g\phi_m(\alpha, \beta)\right)}{\partial\beta}\Bigg|_{\beta=\beta_m} = \tau_m(\alpha) \tag{5}$$

Предполагается, что $\sigma_m(\alpha)$ и $\tau_m(\alpha)$ $(m = 1, 2)$ удовлетворяют условиям разложимости в интеграле Фурье.

На линии контакта имеем следующие условия:

$$g\phi_1(\alpha,\beta)\big|_{\beta=0} = g\phi_2(\alpha,\beta)\big|_{\beta=0}; \qquad \left.\frac{\partial\left(g\phi_1(\alpha,\beta)\right)}{\partial\beta}\right|_{\beta=0} = \left.\frac{\partial\left(g\phi_2(\alpha,\beta)\right)}{\partial\beta}\right|_{\beta=0} \tag{6}$$

$$u_1(\alpha,0) = u_2(\alpha,0); \quad \mathrm{v}_1(\alpha,0) = \mathrm{v}_2(\alpha,0) \tag{7}$$

Бигармоническую функцию $\phi_m(\alpha,\beta)$ ищем в виде интеграла Фурье:

$$g\phi_m(\alpha,\beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f_m(\alpha,\beta)e^{-it\alpha}dt, \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned} f_m(t,\beta) &= A_m(t)\operatorname{ch}t(\beta_m-\beta)\cos\beta + B_m(t)\operatorname{ch}t\beta\cos(\beta_m-\beta) + \\ &+ C_m(t)\operatorname{sh}t(\beta_m-\beta)\sin\beta + D_m(t)\operatorname{sh}t\beta\sin(\beta_m-\beta) \end{aligned} \tag{9}$$

Подставляя (8) в (5) и (6) учитывая (3,4,9), получаем следующие значения для неизвестных величин интегрирования $A_m(t), B_m(t), C_m(t)$ и $D_m(t)$ через неизвестных $X(t)$ и $Y(t)$:

$$A_m(t) = \frac{\Delta_m^{(1)}(t)}{\Delta(t)}; \quad B_m(t) = \frac{\Delta_m^{(2)}(t)}{\Delta_m(t)}; \quad C_m(t) = \frac{\Delta_m^{*(1)}(t)}{\Delta_m^*(t)}; \quad D_m(t) = \frac{\Delta_m^{*(2)}(t)}{\Delta_m^*(t)} \tag{10}$$

где

$$\begin{aligned} &\Delta_m(t) = \operatorname{sh}^2 t\beta_m + \sin^2\beta_m \qquad \Delta_m^{(1)} = X(t)\operatorname{ch}t\beta_m - \overline{\sigma}_m(t)\cos\beta_m \\ &\Delta_m^*(t) = \operatorname{sh}^2 t\beta_m - t^2\sin^2\beta_m \qquad \Delta_m^{(2)} = \overline{\sigma}_m(t)\operatorname{ch}t\beta_m - X(t)\cos\beta_m \\ &\Delta_m^{*(1)}(t) = X(t)a_m(t) + Y(t)\operatorname{sh}t\beta_m - \overline{\sigma}_m(t)b_m(t) + \overline{\tau}_m(t)t\sin\beta_m \\ &\Delta_m^{*(2)}(t) = -X(t)b_m(t) - Y(t)t\sin\beta_m + \overline{\sigma}_m(t)a_m(t) - \overline{\tau}_m(t)\operatorname{sh}t\sin\beta_m \\ &a_m(t) = t\operatorname{ch}t\beta_m + \frac{t^2+1}{2\Delta_m}\operatorname{sh}t\beta_m\sin 2\beta_m, \quad b_m(t) = t\cos\beta_m + \frac{t^2+1}{2\Delta_m}\operatorname{sh}2t\beta_m\sin\beta_m \\ &\overline{\sigma}_m(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma_m(\alpha)e^{it\alpha}d\alpha, \qquad \overline{\tau}_m(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tau_m(\alpha)e^{it\alpha}d\alpha \end{aligned} \tag{11}$$

Удовлетворяя условию (7), получаем характеристическую систему сингулярных интегральных уравнений для определения неизвестных $X(t)$, $Y(t)$:

$$\begin{aligned} &a_{22}(t)\varphi_1(t) - a_{12}(t)\varphi_2(t) = \frac{c(t)}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\theta'(\tau)\varphi_1(\tau)}{\theta(\tau)-\theta(t)}d\tau + T_1(t) \\ &a_{21}(t)\varphi_1(t) + \left[\frac{\Delta(t)}{\lambda_1} - a_{11}(t)\right]\varphi_2(t) = \frac{c(t)}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\theta'(\tau)\varphi_2(t)}{\theta(\tau)-\theta(t)}d\tau + T_2(t) \end{aligned}, \tag{12}$$

где

$$\begin{aligned} &a_{11}(t) = \frac{\mu-1}{2} + (1-\nu_1)\frac{\Delta_1(t)}{\Delta_1^*(t)} - \mu(1-\nu_2)\frac{\Delta_2(t)}{\Delta_2^*(t)} \\ &a_{12}(t) = \frac{1-\nu_1}{2\Delta_1^*(t)}(\operatorname{sh}2t\beta_1 - t\sin 2\beta_1) - \frac{\mu(1-\nu_2)}{2\Delta_2^*(t)}(\operatorname{sh}2t\beta_2 - t\sin 2\beta_2) \\ &a_{21}(t) = \frac{1-\nu_1}{2\Delta_1^*(t)}(\operatorname{sh}2t\beta_1 + t\sin 2\beta_1) - \frac{\mu(1-\nu_2)}{2\Delta_2^*(t)}(\operatorname{sh}2t\beta_2 + t\sin 2\beta_2) \\ &a_{22}(t) = \frac{\mu-1}{2} + (1-\nu_1)\frac{\operatorname{sh}^2 t\beta_1}{\Delta_1^*(t)} - \mu(1-\nu_2)\frac{\operatorname{sh}^2 t\beta_2}{\Delta_2^*(t)} \end{aligned} \tag{13}$$

$$\varphi_1(t)=e^{-t\pi}\left[ta_{11}(t)X(t)+a_{12}(t)Y(t)-Q_1(t)\right],$$
$$\varphi_2(t)=e^{-t\pi}\left[ta_{21}(t)X(t)+a_{22}(t)Y(t)-Q_2(t)\right]$$
$$T_1(t)=e^{-t\pi}\left[a_{12}(t)Q_2(t)-a_{22}(t)Q_1(t)\right],\quad T_2(t)=e^{-t\pi}\left[a_{11}(t)Q_2(t)-a_{21}(t)Q_1(t)\right]$$
$$Q_1(t)=\frac{(1-\nu_1)}{\Delta_1^*(t)}\left[\frac{\overline{\sigma}_1(t)}{\Delta_1^*(t)}\left(t^2+1\right)\operatorname{sh}t\beta_1\sin\beta_1-\frac{\overline{\tau}_1(t)}{\Delta_1^*(t)}\left(t\operatorname{ch}t\beta_1\sin\beta_1-\operatorname{sh}t\beta_1\cos\beta_1\right)\right]-$$
$$-\frac{\mu(1-\nu_2)}{\Delta_2^*(t)}\left[\overline{\sigma}_2(t)\left(t^2+1\right)\operatorname{sh}t\beta_2\sin\beta_2-\overline{\tau}_2(t)\left(t\operatorname{ch}t\beta_2\sin\beta_2-\operatorname{sh}t\beta_2\cos\beta_2\right)\right]$$
$$Q_2(t)=\frac{t(1-\nu_1)}{\Delta_1^*(t)}\left[\overline{\sigma}_1(t)\left(t\operatorname{ch}t\beta_1\sin\beta_1+\operatorname{sh}t\beta_1\cos\beta_1\right)-\overline{\tau}_1(t)\operatorname{sh}t\beta_1\sin\beta_1\right]-$$
$$-\frac{\mu(1-\nu_2)t}{\Delta_2^*(t)}\left[\overline{\sigma}_2(t)\left(t\operatorname{ch}t\beta_2\sin\beta_2+\operatorname{sh}t\beta_2\cos\beta_2\right)-\overline{\tau}_2(t)\operatorname{sh}t\beta_2\sin\beta_2\right]$$
$$c(t)=-\frac{it\Delta(t)}{\lambda_1};\ \theta(t)=e^{2t\pi},\ 2\lambda_1=1-2\nu_1-\mu(1-2\nu_2);\ \mu=\frac{\mu_1}{\mu_2}$$
$$\Delta(t)=a_{11}(t)a_{22}(t)-a_{12}(t)a_{21}(t)$$

Решение системы сингулярных интегральных уравнений (12) производится путём регуляризации, т.е. приведением к интегральному уравнению Фредгольма второго рода [2-5]. После некоторых преобразований и упрощений получаем следующую регулярную систему интегральных уравнений Фредгольма второго рода:

$$P_1(t)=\frac{t-i}{2i(t+i)}\int_{-\infty}^{\infty}\left[K_{11}^*(t,\tau)P_1(\tau)+K_{12}^*(t,\tau)P_2(\tau)+T_{11}^*(t,\tau)e^{\tau\pi}d_1(\tau)+T_{12}^*(t,\tau)e^{\tau\pi}d_2(\tau)\right]\times$$
$$\times\frac{d\tau}{\Delta_8(\tau)\operatorname{sh}(\tau-t)\pi}+\frac{(t-i)e^{t\pi}}{2(t+i)}\left[T_{13}^*(t)d_1(t)+T_{14}^*(t)d_2(t)\right]$$
$$P_2(t)=\frac{t-i}{2i(t+i)}\int_{-\infty}^{\infty}\left[K_{21}^*(t,\tau)P_1(\tau)+K_{22}^*(t,\tau)P_2(\tau)+T_{21}^*(t,\tau)e^{\tau\pi}d_1(\tau)+T_{22}^*(t,\tau)e^{\tau\pi}d_2(\tau)\right]\times \tag{14}$$
$$\times\frac{d\tau}{\Delta_8(\tau)\operatorname{sh}(\tau-t)\pi}+\frac{(t-i)e^{t\pi}}{2(t+i)}\left[T_{23}^*(t)d_1(t)+T_{24}^*(t)d_2(t)\right]$$

где

$$K_{11}^*(t,\tau)=\left(b_{11}(t)-1\right)K_{11}(t,\tau)+b_{12}(t)K_{21}(t,\tau);\quad K_{12}^*(t,\tau)=\left(b_{11}(t)-1\right)K_{12}(t,\tau)+b_{12}(t)K_{22}(t,\tau)$$
$$K_{21}^*(t,\tau)=b_{21}(t)K_{11}(t,\tau)-\left(b_{22}(t)-1\right)K_{21}(t,\tau);\quad K_{22}^*(t,\tau)=b_{21}(t)K_{12}(t,\tau)+\left(b_{22}(t)-1\right)K_{21}(t,\tau)$$
$$T_{11}^*(t,\tau)=-\left(b_{11}(t)-1\right)K_{11}(t,\tau)-b_{12}(t)K_{21}(t,\tau)+\left(b_{11}(t)-1\right)b_{22}(t)\Delta_8(t)-b_{12}(t)b_{21}(t)\Delta_8(\tau)$$
$$T_{12}^*(t,\tau)=-\left(b_{11}(t)-1\right)K_{12}(t,\tau)+b_{12}(t)\Delta_8(\tau);\quad T_{13}^*(t)=\Delta_7(t)+b_{22}(t);\ T_{14}^*(t)=-b_{12}(t)$$
$$T_{21}^*(t,\tau)=-b_{21}(t)K_{11}(t,\tau)-\left(b_{22}(t)-1\right)K_{21}(t,\tau)+b_{21}(t)\Delta_8(\tau) \tag{15}$$
$$T_{22}^*(t,\tau)=-b_{21}(t)K_{12}(t,\tau)-b_{21}(t)b_{12}(t)\Delta_8(\tau)-\left(b_{22}(t)-1\right)K_{22}(t,\tau)+\left(b_{22}(t)-1\right)b_{11}(t)\Delta_8(\tau)$$
$$T_{23}^*(t)=-b_{21}(t);\ T_{24}^*(t)=\Delta_7+b_{11}(t)$$
$$K_{11}(t,{}^2)=-\Delta_7(t)b_{22}({}^2)+\Delta_7(t)+\Delta_7({}^2)b_{22}(t)-b_{11}({}^2)b_{22}(t)+b_{12}(t)b_{21}({}^2)$$
$$K_{12}(t,{}^2)=\Delta_7(t)b_{12}({}^2)-\Delta_7({}^2)b_{12}(t)-b_{22}(t)b_{12}({}^2)+b_{12}(t)b_{22}({}^2)$$

$$K_{21}(t,\tau)=\Delta_7(t)b_{21}(\tau)-\Delta_7(\tau)b_{21}(t)-b_{11}(t)b_{21}(\tau)+b_{21}(t)b_{11}(\tau)$$

$$K_{22}(t,\tau)=-\Delta_7(t)b_{11}(\tau)+\Delta_7(t)+\Delta_7(\tau)b_{11}(t)-b_{22}(\tau)b_{11}(t)+b_{21}(t)b_{12}(\tau)$$

$$d_1(t)=\frac{1}{\Delta_3(t)}\left[-\frac{it\Delta(t)}{\lambda_1}T_1(t)+a_{12}(t)T_2(t)\right];$$

$$d_2(t)=\frac{1}{\Delta_3(t)}\left[\left(\frac{it\Delta(t)}{\lambda_1}+a_{22}(t)\right)T_2(t)-a_{21}(t)T_1(t)\right]$$

$$b_{11}(t)=1+\frac{2i}{(t-i)\Delta_6(t)}\left[(t+i)\Delta(t)-\lambda_1(t)a_{11}(t)\right];\quad b_{12}(t)=\frac{2i\lambda_1 a_{12}(t)}{(t-i)\Delta_6(t)}$$

$$b_{21}(t)=-\frac{2i\lambda_1 a_{21}(t)}{(t-i)\Delta_6(t)};\qquad b_{22}(t)=1+\frac{2i}{\lambda_1(t-i)\Delta_6(t)}\left[it\Delta(t)+\lambda_1 a_{22}(t)\right]$$

$$\Delta_3(t)=\frac{(t-i)t\Delta(t)\Delta_6(t)}{\lambda_1^2};\quad \Delta_6(t)=\lambda_1\left(a_{22}(t)-a_{11}(t)\right)+\Delta(t)$$

$$\Delta_7(t)=b_{11}(t)b_{22}(t)-b_{12}(t)b_{21}(t)=\frac{t+i}{t-i},\quad \Delta_8(t)=\left(b_{11}(t)-1\right)\left(b_{22}(t)-1\right)-b_{12}(t)b_{21}(t)$$

Учитывая найденные значения для контактных напряжений, имеем:

$$a\sigma_\beta^{(m)}\Big|_{\beta=0}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[-t^2(\mathrm{ch}\alpha-1)+it\mathrm{sh}\alpha+1\right]\left[a_{22}(t)\left(P_1(t)+Q_1(t)\right)-a_{12}(t)\left(P_2(t)+Q_2(t)\right)\right]\times$$

$$\times\frac{e^{-it\alpha}}{t\Delta(t)}dt$$

$$a\sigma_{\alpha\beta}^{(m)}\Big|_{\beta=0}=\frac{i(\mathrm{ch}\alpha-1)}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[a_{11}(t)\left(\mathrm{P}_2(t)+\mathrm{Q}_2(t)\right)-a_{21}(t)\left(P_1(t)+Q_1(t)\right)\right]\frac{te^{-it\alpha}}{\Delta(t)}dt \qquad (16)$$

Характер напряжённого состояния около края $y=\pm a\ (\alpha=\pm\infty)$ определяется величиной мнимой части первого простого корня $t_1=\xi_1\pm i\eta_1$ уравнения $\Delta(t)=0$. При $|\eta_1|>1$ имеем нулевое напряженное состояние; при $|\eta_1|<1$ имеет место явление сильной концентрации напряжений. В случае же $|\eta_1|=1$ напряжения на краях поверхности контакта конечны, а в общем случае отличны от нуля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1968. 402с.
2. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511с.
3. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1963. 640с.
4. Чибрикова Л.И. О краевой задаче Римана для автоморфных функций. //Учёные Записки Казанск. Ун-та, т.116, кн.4, 1956, с.59-110.
5. Арутюнян Л.А. Плоская задача теории упругости для составной области, образованной из двух луночек. //Изв. АН Арм.ССР, Механика. 1976. Т.29. №1. С.51-66.

Сведения об авторах:

Арутюнян Левон Арсенович – к.ф.-м.н., Институт механики НАН Армении. 099 675747, **E-mail:** mechins@sci.am

Едоян Вардгес Айкович – к.ф.-м.н., ЕГУАС, 093 984040, **E-mail:** edoyan@nuaca.am

НЕЛИНЕЙНЫЙ ФЛАТТЕР ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ, ОБТЕКАЕМОЙ СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ГАЗА

Багдасарян Г.Е., Микилян М.А., Варданян И.А.

В настоящей работе в нелинейной постановке рассмотрена задача устойчивости пологой цилиндрической оболочки под действием обтекающего оболочку сверхзвукого потока газа. Показано, что учёт аэродинамической нелинейности (особенно её несимметричной квадратичной части) приводит к появлению новых типов зависимостей «амплитуда-скорость» как в докритической стадии, так и послекритических скоростях.

1. Постановка задачи

Рассмотрим тонкую изотропную прямоугольную в плане цилиндрическую панель постоянной толщины h. Оболочка отнесена к ортогональным криволинейным координатам x, y, z, где координатные линии x и y совпадают с линиями кривизны срединной поверхности. Третья координатная линия z – прямолинейная и представляет расстояние по нормали срединной поверхности от точки $(x, y, 0)$ до точки (x, y, z) оболочки.

Пусть оболочка обтекается с одной стороны сверхзвуковым потоком газа с постоянной невозмущённой скоростью $\vec{u}$, направленной вдоль оси $0x$. Исследуются вопросы устойчивости рассматриваемой аэроупругой системы.

На основе исследований принимаются следующие предположения:

1) гипотеза Кирхгофа-Лява, согласно которой [1]

$$u_1 = u(x, y, t) - z\frac{\partial w}{\partial x}, \quad u_2 = \mathrm{v}(x, y, t) - z\frac{\partial w}{\partial y}, \quad u_3 = w(x, y, t), \tag{1}$$

где u_i – компоненты перемещения точек оболочки $(i = 1, 2, 3)$;

2) давление газа учитывается по приближённой формуле «поршневой теории» [2];

3) основные положения теории весьма пологих гибких оболочек с большим показателем изменяемости, считая, что прогибы $w(x, y, t)$ сравнимы с толщиной оболочки [3].

В силу принятых предположений получаются следующие уравнения устойчивости [4]:

$$\begin{gathered} D\Delta^2 w + \frac{1}{R}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \left(\rho h\varepsilon + \frac{æ p_\infty}{a_\infty}\right)\frac{\partial w}{\partial t} + æ p_\infty M\frac{\partial w}{\partial x} = \\ = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) - æ p_\infty\frac{æ+1}{4}M^2\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \frac{M}{3}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^3\right] \end{gathered} \tag{2}$$

$$\frac{1}{Eh}\Delta^2 F = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \tag{3}$$

где $F(x, y, t)$ – функция напряжений $\left(T_{11} = \partial^2 F/\partial y^2, T_{22} = \partial^2 F/\partial x^2, T_{12} = \partial^2 F/\partial x\partial y\right)$, T_{ik} – внутренние усилия, ε – коэффициент линейного затухания, $M = U/a_\infty$ – число Маха, p_∞ – давление невозмущённого потока газа, a_∞ – величина скорости звука для невозмущённого газа, æ – показатель политропы, t – время, R – радиус оболочки, $D = Eh^3/12\left(1-\mu^2\right)$, E – моуль упругости, μ – коэффициент Пуассона, ρ_0 – плотность материала оболочки.

При иследовании вопросов устойчивости к уравнениям (3) присоединяются также условия на контуре оболочки.

2. Сведение к задаче устойчивости, описываемой системой обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим прямоугольную в плане $(0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b)$ изотропную пологую цилиндрическую оболочку, шарнирно опёртую по всему контуру. Предположим, что края оболочки свободно смещаются в плане. Тогда, граничные условия запишутся следующим образом:

при $x=0,\ \ x=a$

$$w=0,\ \ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0 \tag{4а}$$

$$T_{11}=0,\quad T_{12}=0, \tag{4б}$$

при $y=0,\ \ y=b$

$$w=0,\ \ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \tag{4в}$$

$$T_{22}=0,\quad T_{21}=0. \tag{4г}$$

Решение нелинейной системы (2)-(3) будем искать приближённо методом Бубнова-Галеркина, принимая

$$w(x,y,t)=\left(f_1(t)\sin\lambda_1 x+f_2(t)\sin\lambda_2 x\right)\sin\mu_1 y;\quad \lambda_k=k\pi/a,\ \ \mu_1=\pi/b, \tag{4}$$

где $f_i(t)\ \ (i=1,2)$ – подлежащие определению функции времени t. Легко заметить, что граничные условия (4а) и (4в) удовлетворяются. Подставляя (4) в (3), получим линейное уравнение относительно F. Найденно решение этого уравнения, удовлетворяющего условиям (4б) и (4г), оно громоздко и здесь не приводится.

Подставляя (4) и найденное выражение для F в первое уравнение системы (3) и решая его методом Галеркина, относительно безразмерных функций $x_1=f_1h^{-1},\ x_2=f_2h^{-1}$ получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений [4,5]:

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2x_1}{d\tau^2}+\chi\frac{dx_1}{d\tau}+x_1-\frac{2}{3}k\nu x_2+k\nu^2\left[\alpha_{11}x_1^2+\alpha_{12}x_2^2+\nu x_2\left(\beta_{11}x_1^2+\beta_{12}x_2^2\right)\right]+\\
&+Qx_1\left(\gamma_{11}x_1^2+\gamma_{12}x_2^2\right)+L\left(\delta_{11}x_1^2+\delta_{12}x_2^2\right)=0\\
&\frac{d^2x_2}{d\tau^2}+\chi\frac{dx_2}{d\tau}+\gamma^2x_2+\frac{2}{3}k\nu x_2+k\nu^2\left[\alpha_{21}x_1x_2+\nu x_1\left(\beta_{21}x_1^2+\beta_{22}x_2^2\right)\right]+\\
&+Qx_2\left(\gamma_{21}x_1^2+\gamma_{22}x_2^2\right)+L\delta_{21}x_1x_2=0.
\end{aligned} \tag{5}$$

Здесь, наряду с безразмерным временем $\tau=\omega_1 t$ введены обозначения:

$$\begin{aligned}
&k=\frac{4жp_\infty}{\rho_0\omega_1^2h^2},\quad Q=\frac{4}{16\rho_0\omega_1^2},\quad L=\frac{1}{\rho_0h\omega_1^2},\\
&\nu=M\frac{h}{a},\quad \gamma=\frac{\omega_2}{\omega_1},\quad \chi=\frac{1}{\omega_1}(\varepsilon+\varepsilon_a),
\end{aligned} \tag{6}$$

а также коэффициенты α_{ik} и β_{ik}, учитывающие аэродинамическую нелинейность:

$$\begin{aligned}
&\alpha_{11}=\frac{2}{9}(ж+1),\quad \alpha_{12}=\frac{56}{45}(ж+1),\quad \alpha_{21}=\frac{16}{45}(ж+1),\\
&\beta_{11}=\beta_{21}=\frac{\pi^2}{40}(ж+1),\quad \beta_{22}=\frac{11\pi^2}{70}(ж+1),\quad \beta_{12}=-\frac{9\pi^2}{70}(ж+1),
\end{aligned} \tag{7}$$

и коэффициенты γ_{ik} и δ_{ik}, учитывающие геометрическую нелинейность:

$$\begin{aligned}
&\gamma_{11}=Eh\left(\lambda_1^4+\mu_1^4\right),\ \gamma_{12}=\gamma_{21}=4\gamma_{11}+\frac{81\lambda_1^4\mu_1^4}{\Delta_{12}}+\frac{\lambda_1^4\mu_1^4}{\Delta_{22}},\ \gamma_{22}=Eh\left(\lambda_2^4+\mu_1^4\right),\\
&\delta_{11}=-\frac{8\lambda_1^2\mu_1^4}{3\pi^2}\frac{h}{R}\left(\frac{Eh}{\lambda_2^2}+\frac{4\lambda_1^2}{\Delta_{11}}\right),\ \delta_{12}=-\frac{32\lambda_1^2\mu_1^4}{15\pi^2}\frac{h}{R}\left(\frac{Eh}{\lambda_4^2}+\frac{12\lambda_1^2}{\Delta_{21}}\right),
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\delta_{21} = -\frac{8\lambda_1^2\mu_1^4}{3\pi^2}\frac{h}{R}\left(\frac{8Eh}{15\lambda_2^2} + \frac{16\lambda_1^2}{5\Delta_{11}} + \frac{\lambda_1^2}{\Delta_{12}} + \frac{16\lambda_2^2}{5\Delta_{21}} + \frac{\lambda_3^2}{15\Delta_{32}}\right), \quad \Delta_{ik} = \frac{1}{Eh}\left(\lambda_i^2 + \mu_k^2\right)^2.$$

В (5) ν – приведённый параметр скорости, χ – приведённый параметр демпфирования, ω_1 и ω_2 – частоты малых собственных колебаний оболочки, определяемые формулами:

$$\omega_i^2 = \frac{1}{\rho h}\left[D\left(\lambda_i^2 + \mu_1^2\right)^2 + \frac{\lambda_i^4}{R^2\Delta_{i1}}\right]. \tag{9}$$

Таким образом, задача устойчивости рассматриваемой гидроупругой системы в первом приближении сведена к исследованию поведения решений системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (5) в зависимости от величины скорости обтекающего потока газа (от величины параметра ν).

3. Определение характеристик флаттера (критическая скорость и амплитуда установившихся колебаний)

Решению нелинейной задачи, как правило, предшествует анализ соответствующей линейной задачи. Подставляя решение соответствующей (5) линейной системы в виде $x_i(\tau) = y_i e^{\lambda\tau}$, получено характеристическое уравнение относительно λ. Невозмущённая форма оболочки будет устойчивой, если действительные части корней характеристического уравнения будут отрицательными. Следовательно, применяя теорему Гурвица, получим следующую формулу для определения верхней критической скорости флаттера и критической частоты колебаний в случае выбранной формы потери устойчивости оболочки [4,5]:

$$\nu_{cr} = \frac{3}{4}\frac{\gamma^2 - 1}{k}\sqrt{1 + \frac{2\chi^2\left(\gamma^2 + 1\right)}{\left(\gamma^2 - 1\right)^2}}, \quad \theta_{cr}^2 = \frac{\gamma^2 + 1}{2}.$$

Переходим к исследованию нелинейной задачи, описываемой нелинейной системой (5). Приближённое периодическое решение системы (5) будем искать в виде [4,5]

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1\cos\theta\tau + B_1\sin\theta\tau + C_1 + \ldots, \\ x_2 &= A_2\cos\theta\tau + B_2\sin\theta\tau + C_2 + \ldots \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь A_i, B_i, C_i и θ $(i = 1,2)$ – неизвестные постоянные, точками обозначены члены, содержащие гармоники.

Для получения приближённого решения системы (5) предполагается [5], что: а) затухание достаточно мало $\left(|A_i| >> |B_i|\right)$ и б) рассматриваемая аэроупругая система совершает установившееся колебание с конечной амплитудой вокруг состояния бесконечно мало отличающегося от невозмущённого $\left(|A_i| >> |C_j|;\ j = 1,2\right)$. Тогда, подставляя (11) в систему (5) и пренебрегая степенями выше первой и произведения величин B_1, B_2, C_1 и C_2, получим следующую нелинейную систему, определяющую характеристики A_1 и A_2 амплитуды колебаний рассматриваемой аэроупругой системы в зависимости от параметров θ и ν:

$$\begin{aligned} &A_1(1-\theta^2) - \frac{2}{3}K\nu A_2 + 2\left(L\delta_{11} + K\nu^2\alpha_{11}\right)A_1C_1 + 2\left(L\delta_{12} + K\nu^2\alpha_{12}\right)A_2C_2 + \\ &+\frac{3}{4}K\nu^3 A_2\left(\beta_{11}A_1^2 + \beta_{12}A_2^2\right) + \frac{3}{4}QA_1(\gamma_{11}A_1^2 + \gamma_{12}A_2^2) = 0, \\ &A_2(\gamma^2 - \theta^2) + \frac{2}{3}K\nu A_1 + \left(L\delta_{21} + K\nu^2\alpha_{21}\right)\left(A_1C_2 + A_2C_1\right) + \\ &+\frac{3}{4}K\nu^3 A_1(\beta_{21}A_1^2 + \beta_{22}A_2^2) + \frac{3}{4}QA_2(\gamma_{21}A_1^2 + \gamma_{22}A_2^2) = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь

$$C_1 = -K\nu^2\left[\left(L\delta_{11}A_1^2 + L\delta_{12}A_2^2 + \alpha_{11}A_1^2 + \alpha_{12}A_2^2\right)\Delta_2 - \left(L\delta_{21}A_1A_2 + \alpha_{21}A_1A_2\right)\Delta_4\right]\Big/2\Delta$$
$$C_2 = -K\nu^2\left[\left(L\delta_{21}A_1A_2 + \alpha_{21}A_1A_2\right)\Delta_1 - \left(L\delta_{11}A_1^2 + L\delta_{12}A_2^2 + \alpha_{11}A_1^2 + \alpha_{12}A_2^2\right)\Delta_3\right]\Big/2\Delta \qquad (13)$$

где

$$\Delta_1 = 1 + \frac{3}{2}Q\gamma_{11}A_1^2 + \frac{1}{2}Q\gamma_{12}A_2^2 + K\nu^3\beta_{11}A_1A_2, \quad \Delta_2 = \gamma^2 + K\nu^3\beta_{22}A_1A_2 + \frac{3}{2}Q\gamma_{22}A_2^2 + \frac{1}{2}Q\gamma_{21}A_1^2,$$

$$\Delta_3 = \frac{2}{3}K\nu + \frac{3}{2}K\nu^3\beta_{21}A_1^2 + \frac{1}{2}K\nu^3\beta_{22}A_2^2 + Q\gamma_{21}A_1A_2,$$

$$\Delta_4 = -\frac{2}{3}K\nu + \frac{3}{2}K\nu^3\beta_{12}A_2^2 + \frac{1}{2}K\nu^3\beta_{11}A_1^2 + Q\gamma_{12}A_1A_2, \ \Delta = \Delta_1\Delta_2 - \Delta_3\Delta_4 .$$

Полученная система (12) решена численно при следующих исходных данных: $E = 7.3\cdot10^{10}$ Н/м^2; $\mu = 0.33$; ρ_0=2.79 $\cdot10^3$кг/м^3 (дюрал.), æ=1.4; $\rho_\infty = 1.29$ *кг / м*^{3}; $a_\infty = 340.29$ *м / с* (воздух). На основе этого при $\theta = \theta_{cr}$ исследована зависимость амплитуды (в точке $\left(a/2, b/2, 0\right)$ пологой оболочки) установившихся флаттерных колебаний A (в рассматриваемом случае $A = A_1$) от параметра ν для разных значений R/a, h/a и a/b.

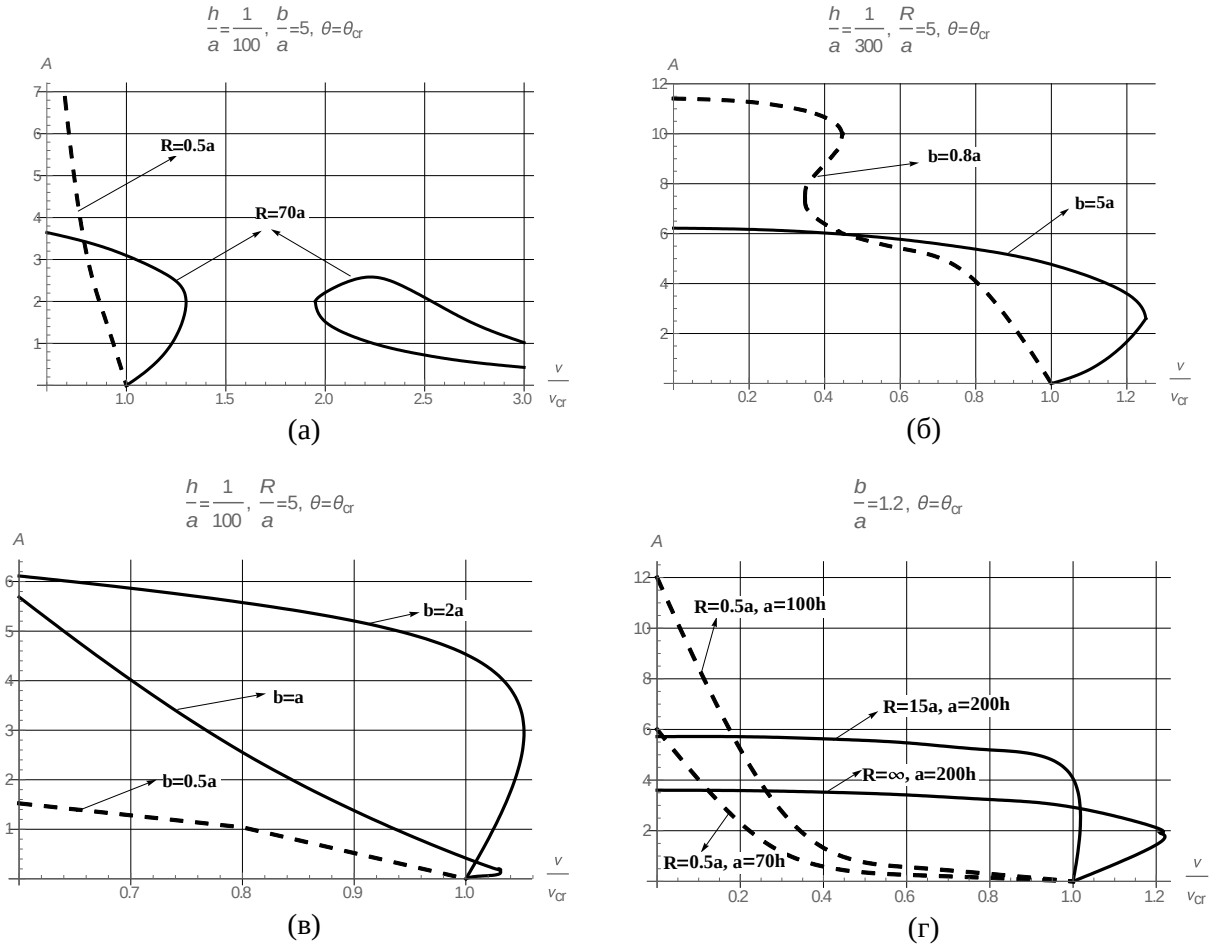


Рис.1

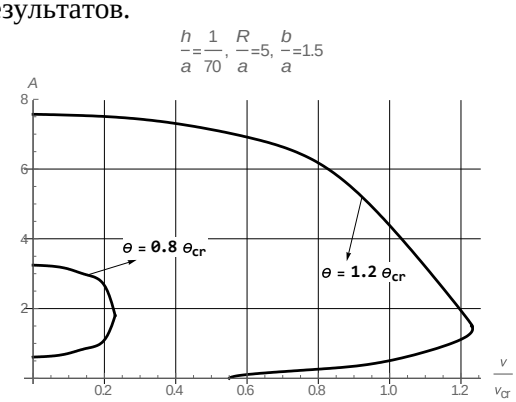
Приведённые графики показывают, что:

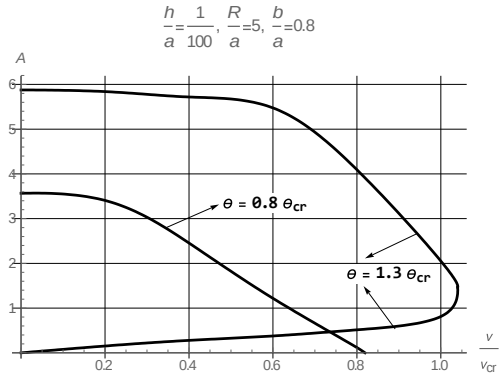
- Если одновременно $R/a < 1$ и $R/b < 1$ или $R/a > 1$ и $R/b > 1$, то зависимость амплитуды от скорости обтекающего потока, в основном, носит «жесткий» характер, т.е. при $\nu \le \nu_{cr}$ функция $A(\nu)$ является монотонно убывающей, а при $\nu > \nu_{cr}$ невозможно

возбудить установившиеся флаттерные колебания (рис.1, пунктирные кривые). Если же нарушаются указанные условия, то существует значение ν^* такое, что при $\nu \le \nu^*$ функция $A(\nu)$ является монотонно убывающей, при $\nu > \nu^*$ невозможно возбудить нелинейные флаттерные колебания, а в интервале $\left[\nu_{cr}, \nu^*\right]$ функция $A(\nu)$ является двузначной (рис.1, сплошные кривые).

- Существуют такие определённые значения ν^* и ν^{**} параметра ν, что если $\nu^* \le \nu \le \nu^{**}$, невозможно возбудить нелинейные флаттерные колебания, т.е. существует зона молчания. Причём, $A(\nu_{cr}) = 0$ (рис.1.а).

Случаи $\theta \ne \theta_{cr}$ и других комбинаций геометригеских параметров оболочки являются темой отдельного исследования. Мы надеемся здесь получить более интересные результаты, особенно в случае толстых пологих оболочек. Приводим здесь только частные примеры таких результатов.





Отметим, что переход из одного типа зависимости к другому можно регулировать сответствующим образом, выбирая как геометрические и физические параметры, так и параметр частоты рассматриваемой аэроупругой системы.

Отметим также, что указанные явления связаны с присутствием обтекающего потока при нелинейных колебаниях (в особенности, учёта квадратичной аэродинамической нелинейности).

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В.З. Общая теория оболочек и её приложения в технике. М.: Гостехтеориздат, 1949.
2. Ashley H., Zartarian C. Piston theory – a new aerodynamic tool for the aeroelastician. J. Aeronaut. Sci. 23. №6. 1956.
3. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972.
4. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339с.
5. Багдасарян Г.Е. Об устойчивости ортотропных пологих оболочек, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа. //Изв.АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1963. №1.

Сведения об авторах:

Багдасарян Геворк Ервандович – Академик НАН РА, Профессор, Ведущий научный сотрудник Института механики НАН РА; **E-mail:** gevorgb@rau.am

Микилян Марине Александровна – к.ф-м.н., Доцент, Старший научный сотрудник Института механики НАН РА; **E-mail**: mikilyan@rau.am

Варданян Ирэн Арменовна – Внештатн. сотр. Института механики НАН РА; **E-mail:** irena_123@bk.ru

ФЛАТТЕР ЗАМКНУТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В ПРИСУТСТВИИ НЕОДНОРОДНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ

Багдасарян Г.Е., Микилян М.А., Варданян И.А.

В настоящей работе в линейной постановке рассмоена задача устойчивости замкнутой цилиндрической оболочки под действием неоднородного температурного поля и обтекающего оболочку сверхзвукого потока газа. Получены условия устойчивости невозмущённого состояния рассматриваемой аэротермоупругой системы. Показано, что совместным действием температурного поля и обтекающего потока можно регулировать процесс устойчивости и при помощи температурного поля существенно изменить величину критической скорости флаттера.

1. Постановка задачи и основные предположения

Рассмотрим тонкую изотропную замкнутую круговую цилиндрическую оболочку постоянной толщины h и радиуса R, находящуюся в постоянном температурном поле T. Оболочка отнесена к цилиндрическим координатам x, φ, r, координатные линии x и φ совпадают с линиями кривизны срединной поверхности оболочки (x – вдоль образующей, φ – по дуге поперечного сечения). Пусть с внешней стороны оболочка обтекается сверхзвуковым потоком газа с невозмущённой скоростью U, направленной вдоль оси $0x$. Исследуются вопросы устойчивости рассматриваемой аэротермоупругой системы. В основу исследования принимаются следующие известные предположения:

а) гипотеза Кирхгофа-Лява о недеформируемых нормалях [1];

б) «закон плоских сечений» при определении аэродинамического давления [2,3] ;

в) линейный закон изменения температуры $T(x,\theta,r)$ по толщине оболочки [4]: $T = T_0(x,\varphi) + (R-r)\Theta(x,\varphi)$;

г) гипотеза Неймана об отсутствии сдвигов от изменения температуры [5].

Для простоты и наглядности принимается, что из лицевых поверхностей $\left(r = R \pm h/2\right)$ оболочки происходит теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона-Рихмана (на поверхностях сохраняется постоянная температура со значениями T^+ и T^- соответственно), а боковые поверхности ($x = 0$ и $x = a$) теплоизолированы.

Под действием неоднородного по толщине стационарного температурного поля $\left(\Theta \neq 0\right)$ происходит выпучивание оболочки (с прогибом $w_T(x)$ и продольным перемещением $u_T(x)$) и вследствие этого появляется аэроупругое давление. Указанное выпученное состояние принимается как невозмущённое [6] и исследуется его устойчивость под действием температурного поля и давления обтекающего потока газа.

2. Характеристики невозмущённого состояния

2.1. Определение температурного поля. На основе принятых предположений задача определения стационарного температурного поля сводится к решению уравнения теплопроводности $\Delta T = 0$ в области, занимаемой оболочкой, при следующих поверхностных условиях:

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = k\left(T - T^{\pm}\right) \quad \text{при} \quad r = R \pm \frac{h}{2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \ \text{и} \ x = a$$

Сформулированная задача теплопроводности, согласно предположению о линейной зависимости температуры по толщине оболочки, имеет следующее решение:

$$T = T_0 + (r-R)\Theta, \qquad T_0 = \frac{T^+ + T^-}{2}, \ \ \Theta = \frac{k\left(T^+ - T^-\right)}{kh - 2\lambda}. \tag{1}$$

Здесь λ – коэффициент теплопроводности, k – коэффициент теплоотдачи.

2.2. Определение термоупругих напряжений и перемещений. На основе принятых предположений, из основных уравнений, соотношений и граничных условий теории термоупругости тонких оболочек имеем:

следующие соотношения:

$$u_0^{(r)} = w_T\left(x\right), \quad u_0^{(x)} = u_T\left(x\right) - (r-R)\frac{dw_T}{dx} \tag{2}$$

согласно гипотезам Кирхгоффа-Лява;
следующие уравнения относительно u_T и w_T:

$$\frac{d^2u_T}{dx^2} + \frac{\mu}{R}\frac{dw_T}{dx} = 0 \tag{3}$$

$$D\frac{d^4w_T}{dx^4} + \frac{12}{Rh^2}\left(\mu\frac{du_T}{dx} + \frac{w_T}{R}\right) + æp_\infty M\frac{dw_T}{dx} = 0, \tag{4}$$

согласно теории тонких оболочек;
следующее выражение для внутренних усилий невозмущённого состояния:

$$\begin{aligned} T_{11}^0 &= \int_{R-h/2}^{R+h/2}\sigma_{11}^0 dr = \frac{Eh}{1-\mu^2}\left[\frac{du_T}{dx} + \mu\frac{w_T}{R} - \alpha\left(1+\mu\right)T_0\right], \\ T_{22}^0 &= \int_{R-h/2}^{R+h/2}\sigma_{22}^0 dr = \frac{Eh}{1-\mu^2}\left[\mu\frac{\partial u_T}{\partial x} + \frac{w_T}{R} - \alpha(1+\mu)T_0\right] \end{aligned} \tag{5}$$

согласно обобщённому закону Гука.

Здесь $M = Ua_\infty^{-1}$ – число Маха для невозмущённого потока, $a_\infty = æp_\infty\rho_\infty^{-1}$ – скорость звука для невозмущённого газа, p_∞ и ρ_∞ – давление и плотность газа в невозмущённом состоянии, $æ$ – показатель политропы, $D = Eh^3/12(1-\mu^2)$, E – модуль упругости, μ – коэффициент Пуассона, α – коэффициент линейного теплового расширения материала оболочки.

Решения уравнений (3) и (4) должны удовлетворить условиям закрепления краёв оболочки $x = 0$ и $x = a$. Будут рассмотрены краевые условия следующих двух типов:

края шарнирно опёрты и свободно перемещаются вдоль оси $0x$***:***

$$w_T = 0, \quad \frac{d^2w_T}{dx^2} + \alpha\left(1+\mu\right)\Theta = 0 \text{ при } x = 0, x = a \tag{6}$$

$$\frac{du_T}{dx} - \alpha\left(1+\mu\right)T_0 = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, x = a; \tag{7}$$

края шарнирно опёрты и неподвижны:

$$w_T = 0, \quad \frac{d^2w_T}{dx^2} + \alpha\left(1+\mu\right)\Theta = 0 \text{ при } x = 0, x = a \tag{8}$$

$$u_T = 0 \text{ при } x = 0, x = a. \tag{9}$$

Решение u_T уравнения (3), удовлетворяющее условиям (7) и (9), имеет следующий вид (при этом использовано также условие $w_T = 0$ на торцах оболочки):

$$u_T = -\frac{\mu}{R}\int_0^x w_T(\xi)d\xi + \delta\frac{\mu x}{Ra}\int_0^a w_T(x)dx + (1-\delta)\alpha\left(1+\mu\right)T_0 x, \tag{10}$$

где $\delta = \begin{cases} 0, & \text{когда края оболочки свободно смещаются,} \\ 1, & \text{когда края оболочки неподвижны.} \end{cases}$.

В силу (10) из (5) имеем:

$$\begin{aligned} T_{11}^0 &= \delta\left[\frac{E\mu}{1-\mu^2}\frac{h}{a}\int_0^a \frac{w_T(x)}{R}dx - \frac{Eh\alpha}{1-\mu}T_0\right], \\ T_{22}^0 &= Eh\left[\frac{w_T}{R} - (1-\delta)\alpha T_0 + \delta\left(\frac{\mu^2}{1-\mu^2}\frac{1}{Ra}\int_0^a w_T(x)dx - \frac{\alpha T_0}{1-\mu}\right)\right]. \end{aligned} \tag{11}$$

Задача определения w_T в силу (4) и (10) сводится к решению уравнения

$$D\frac{d^4 w_T}{dx^4}+\frac{12}{Rh^2}\left(\frac{1-\mu^2}{R}w_T+\frac{\delta\mu^2}{Ra}\int_0^a w_T(x)dx+(1-\delta)\alpha\mu(1+\mu)T_0\right)+æp_\infty M\frac{dw_T}{dx}=0 \qquad (12)$$

при граничных условиях (6) или (8). Получено решение уравнения (12), удовлетворяющее указанным условиям. Его здесь не приводим ввиду громоздкости.

3. Характеристики возмущенного состояния

Для получения уравнений возмущённого состояния учитывается, что:

а) величины, характеризующие невозмущённое состояние, удовлетворяют уравнениям и соотношениям, полученным в пункте 2;

б) величины невозмущённого состояния определены на основе линейной теории термоупругости (подлежащие определению величины входили в соответствующие уравнения и краевые условия линейно);

в) в окончательных уравнениях и соотношениях величины, характеризующие невозмущённое состояние, будут присутствовать только в первых степенях.

На основе теории термоупругости изотропных тел, гипотезы Кирхгофа-Лява и принятых предположений, аналогично [6] получена следующая система линейных дифференциальных уравнений устойчивости рассматриваемой термогазоупругой системы:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial\varphi}+\frac{\mu}{R}\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{(1-\mu^2)T_{22}^0}{ERh}\frac{\partial w}{\partial x}=0\\
\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial\varphi}+\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial\varphi}-\frac{h^2}{12R}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\Delta w+\frac{w}{R^2}\right)=0\\
D\left[\Delta^2 w+\frac{\mu}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}+\frac{12}{Rh^2}\left(\frac{\partial v}{\partial\varphi}+\mu\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{w}{R}\right)\right]+\rho_0 h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-T_{11}^0\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\\
-T_{22}^0\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}+\frac{w}{R^2}\right)+\left(\rho_0 h\varepsilon+\frac{æp_\infty}{a_\infty}\right)\frac{\partial w}{\partial t}++æp_\infty M\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{æ(æ+1)}{2}p_\infty M^2\frac{dw_T}{dx}\frac{\partial w}{\partial x}=0
\end{gathered} \qquad (13)$$

где $u(x,\varphi,t)$, $v(x,\varphi,t)$ и $w(x,\varphi,t)$ – возмущения перемещений точек срединной поверхности оболочки, ρ_0 – плотность материала оболочки, ε – коэффициент линейного затухания.

При решении конкретных задач устойчивости к системе (13) присоединяются граничные условия относительно возмущений, вытекающие из условий закрепления краёв оболочки. Например, если края оболочки шарнирно опёрты и неподвижны, то граничные условия представляются в виде:

$$u=0, v=0, w=0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \text{ при } x=0 \text{ и } x=a \qquad (14)$$

4. Влияния температурного поля на величину критической скорости

На основе сформулированной в пункте три граничной задачи исследуется устойчивость осесимметричного состояния рассматриваемой термоупругой системы. Предполагается, что края оболочки шарнирно опёрты и неподвижны. Тогда, в силу (13) и (14), задача сводится к решению уравнения:

$$\begin{gathered}
D\left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{\mu}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{12}{Rh^2}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{w}{R}\right)\right]-T_{11}^0\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-T_{22}^0\frac{w}{R^2}+\rho_0 h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\\
+\left(\rho_0 h\varepsilon+\frac{æp_\infty}{a_\infty}\right)\frac{\partial w}{\partial t}++æp_\infty M\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{æ(æ+1)}{2}p_\infty M^2\frac{dw_T}{dx}\frac{\partial w}{\partial x}=0
\end{gathered} \qquad (15)$$

при следующих граничных условиях:

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, x = a. \tag{16}$$

Решение уравнения (15), удовлетворяющее условиям (16), представим в виде

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(t) \sin \lambda_i x, \qquad \left(\lambda_i = \frac{i\pi}{a}\right), \tag{17}$$

где $f_i(t)$ – подлежащие определению функции времени t.

Ограничимся случаем двучленной аппроксимации:

$$w = f_1(t) \sin \lambda_1 x + f_2(t) \sin \lambda_2 x. \tag{18}$$

Подставляя (18) в уравнение (15) и используя процесс ортогонализации, получим однородную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами относительно $f_i(t)$ $(i = 1, 2)$. Представляя решение указанной системы в виде $f_i(t) = c_i e^{pt}$ (c_i – постоянные), получим однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно c_i. Из условия существования нетривиального решения приходим к характеристическому уравнению относительно p. С помощью теоремы Гурвица получены условия устойчивости рассматриваемой аэротермоупругой системы.

Область устойчивости при постоянном температурном поле $(\Theta = 0,\ T_0 \neq 0)$

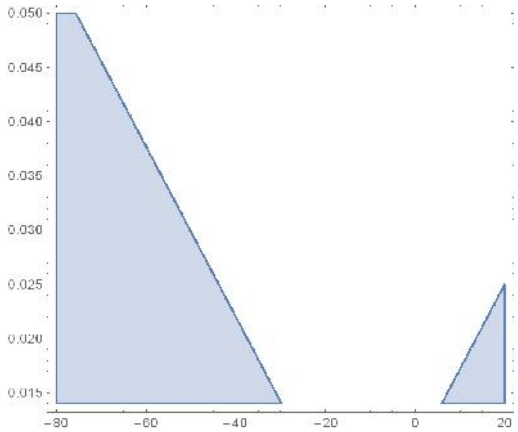


Рис. 1.а. Когда $R = 2a$

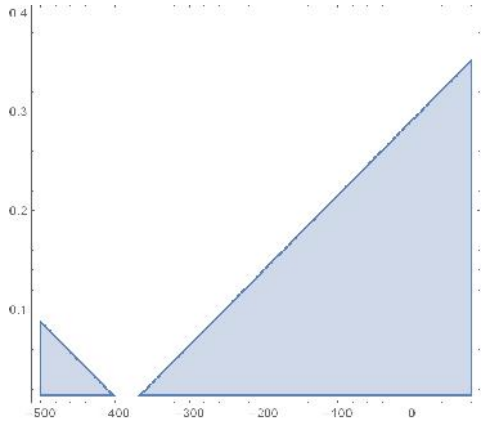


Рис. 1.б. Когда $R = a/2$

Область устойчивости при $\Theta \neq 0,\ T_0 = 0$

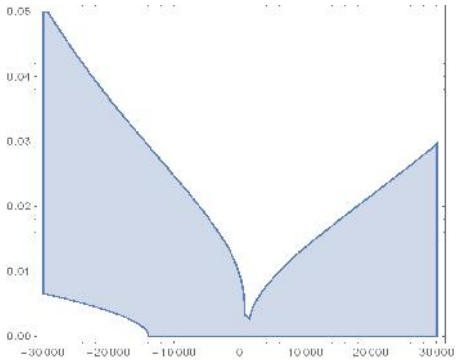


Рис. 2.а. Когда $R = 2a$

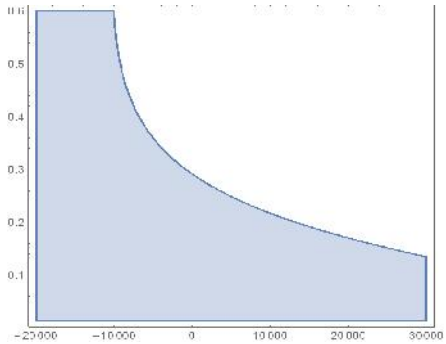


Рис. 2.б. Когда $a = 50h$

Условия устойчивости исследованы численно при следующих исходных данных: $a = 1$м, $a = 100h$ $\lambda = 210$ Вт/(м·град), $\mu = 0.34$, ρ_0=2.79·10^{3}кг/м^3, æ=1.4, α=23.8·10^{-6}град$^{-1}$, $\rho_\infty = 1.28$кг/м^3, $E = 7.4 \cdot 10^3$Н/м$^{-2}$. В результате построены области устойчивости, приведённые на рис. 1.а и 1.б при $\Theta = 0$ и рис. 2.а и 2.б при $T_0 = 0$, найдены значения критической скорости ν_{cr} в зависимости от Θ и T_0. Для наглядност, в таблице 1 приведены

значения критической скорости ν_{cr} при $T_0 = 0$ при различных значениях Θ и, а в таблице 2 – значения ν_{cr} при $\Theta = 0$ при различных T_0.

Таблица 1

Θ \ h/a	1/50	1/100
-5000	0.242	0.006
-1000	0.272	0.005
-500	0.274	0.007
0	0.277	0.008
1000	0.282	0.01
5000	0.301	0.018

Таблица 2

T_0 \ h/a	1/50	1/100
-100	0.859	0.102
-50	0.568	0.055
-30	0.452	0.037
0	0.277	неуст.
5	0.248	неуст.
10	0.219	неуст.
40	0.044	неуст.

Численные расчёты показывают, что учёт влияния термоупругих напряжений невозмущённого состояния на области устойчивости является существенным. В зависимости от геометрии оболочки области устойчивости при $\Theta = 0$, в основном, имеют виды, приведённые на рис. 1.а и 1.б, а при $T_0 = 0$ имеют вид, представленный на рис. 2.а и 2.б. При этом, на геометрию расположения областей устойчивости при меньших значениях скорости обтекания определяющую роль имеют усилия T_{11}^0, а при достаточно больших скоростях – усилия T_{22}^0. Расчёты показывают, что влияние неоднородности температурного поля $(\Theta \neq 0)$ на устойчивость невозмущённого состояния имеет следующий характер: при $R/a < 1$ увеличение параметра Θ приводит к уменьшению значения критической скорости, а при $R/a > 1$ функция $\nu_*(\Theta)$ имеет минимум (см. приведённые таблицы).

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В.З. Общая теория оболочек и её приложения в технике. М.: Гостехтеориздат, 1949.
2. Ashley H., Zartarian C. Piston theory – a new aerodynamic tool for the aeroelastician. J. Aeronaut. Sci. 23. №6. 1956.
3. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339с.
4. Новацкий В. Вопросы термоупругости. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 364 с.
5. Багдасарян Г.Е., Микилян М.А., Сагоян Р.О. Термоупругая устойчивость удлинённой прямоугольной пластинки в сверхзвуковом потоке газа. //Изв. НАН Армении. Механика. 2011. Т.64. №4. С.51-67.
6. Багдасарян Г.Е. Колебания и устойивость магнитоупругих систем. Ереван: ЕГУ, 1999. 440с.

Сведения об авторах:

Багдасарян Геворк Ервандович – Академик НАН РА, профессор, Ведущий научный сотрудник Института механики НАН РА; **E-mail:** gevorgb@rau.am

Микилян Марине Александровна – к.ф-м.н., доцент, Старший научный сотрудник Института механики НАН РА**; E-mail:** mikilyan@rau.am

Варданян Ирэн Арменовна – Внештатн. сотр. Института механики НАН РА; **E-mail:** irena_123@bk.ru

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ПОЭТАПНО МЕНЯЮЩИХСЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ НАГРУЖЁННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕРАЗДЕЛЁННЫМИ МНОГОТОЧЕЧНЫМИ ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Барсегян В.Р.

Рассмотрена задача управления поэтапно меняющихся линейных нагружённых дифференциальных уравнений с заданными начальными, конечными и неразделёнными (нелокальными) многоточечными промежуточными условиями. Сформулированы необходимое и достаточное условие вполне уравляемости, условия существования программного управления и движения. Построен явный вид управляющего воздействия.

Введение. Многие процессы управления из различных областей науки и техники предъявляют все новые требования к математическим моделям систем управления и сводятся к динамическим системам переменной структуры, таким как поэтапно меняющиеся системы [1-7]. Изучение многих прикладных задач управления движением механических систем, в частности, задач, возникающих в баллистике, систем управления роботов-манипуляторов, технологических процессов, теории многослойных конструкций и т.д. приводит к необходимости решения задач управления, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями с многоточечными промежуточными условиями. Характерной чертой многоточечных задач управления является наличие неразделённых условий в нескольких промежуточных точках интервала исследования. Внимание исследователей привлекли интересные краевые задачи управления, в которых наряду с классическими краевыми (начальное и конечное) условиями заданы также неразделённые (нелокальные) многоточечные промежуточные условия [8-13]. Изучение разнообразных подобных процессов позволяет заключить, что будущее течение многих процессов управления оказывается зависящим не только от настоящего, но и существенно определяется предысторией процесса. Математическое описание указанных динамических процессов может быть осуществлено при помощи обыкновенных дифференциальных уравнений с памятью различных видов, называемых также уравнениями с последействием или нагружёнными дифференциальными уравнениями. Нагружёнными дифференциальными уравнениями в литературе [4, 5, 14-16] принято называть уравнения, содержащие в коэффициентах или в правой части какие-либо функционалы (функции) от решения, в частности, значения решения, в которых фазовое состояние процесса в какой-либо точке и в какой-либо момент времени может оказывать влияние на динамику процесса, в целом.

Наличие в динамике системы нагружённого слагаемого не всегда позволяет непосредственно применять известные методы исследований, развитые при исследованиях обычных (ненагружённых) динамических систем. Поэтому возникает необходимость исследования задач управления для нагружённых дифференциальных уравнений, которые могут приводить к построению модифицированных или новых методов решения.

Нагружённые обыкновенные дифференциальные уравнения и краевые задачи для таких уравнений рассмотрены в [14-16] и установлены условия их разрешимости различными методами. Значительный вклад в развитие теории нагружённых уравнений внесла работа [14] (и другие работы этого же автора), где даны определения нагружённых дифференциальных, нагружённых интегро-дифференциальных, нагружённых функциональных уравнений и их многочисленные приложения. В монографии [15] нагружённые дифференциальные уравнения интерпретируются как возмущения дифференциальных уравнений. В работе [16] на основе метода параметризации исследуется линейная многоточечная краевая задача для системы нагруженных дифференциальных уравнений и предложен алгоритм нахождения решения.

В последние годы проводится интенсивное исследование нагружённых дифференциальных уравнений, связанное с различными прикладными задачами механики, биологии, экологии и химии, моделированных с нагружёнными уравнениями. Интерес исследователей к задачам управления нагружённых динамических систем связан также с возможностями современной вычислительной и измерительной техники, которые позволяют использовать наиболее адекватные математические модели рассматриваемых процессов.

Данная работа примыкает к [4, 5]. В работе рассматривается задача управления поэтапно меняющихся линейных систем нагружённых дифференциальных уравнений с заданными

начальными, конечными и неразделенными (нелокальными) многоточечными промежуточными условиями.

Об основных результатах. Рассмотрим управляемый процесс, динамика которого описывается поэтапно мен

$$\dot{x} = \begin{cases} A_0(t)x + B(t)u, & при\ t \in [t_0, t_1) \\ A_0(t)x + A_1(t)x(t_1) + B(t)u, & при\ t \in [t_1, t_2) \\ \vdots & \\ A_0(t)x + A_m(t)x(t_m) + B(t)u, & при\ t \in [t_m, T] \end{cases}, \qquad (1)$$

где x–фазовый вектор системы, $A_k(t)$ $(k = 0,1,\ldots, m)$ и $B(t)$ матрицы параметров системы (непрерывные на $[t_0, T]$), $u(t)$ управляющее воздействие, соответственно с размерностями $A_k(t) - (n \times n)$, $B(t) - (n \times r)$, $u(t) - (r \times 1)$.

Пусть заданы начальное

$$x(t_0) = x_0 \qquad (2)$$

и конечное

$$x(T) = x_T \qquad (3)$$

состояния системы (1).

Предполагается, что заданы моменты времени точек нагружения и $0 \le t_0 < t_1 < \ldots < t_m < t_{m+1} = T$. Функция состояния $x(t)$ непрерывна на интервалах $[t_{k-1}, t_k)$ $(k = 1,\ldots, m+1)$ и в точках нагружения t_k $(k = 1,\ldots, m)$ имеет конечные левосторонние пределы $\lim\limits_{t \to t_k - 0} x(t) = x(t_k)$.

Пусть заданы также неразделённые (нелокальные) многоточечные промежуточные условия

$$\sum_{k=1}^{m} F_k x(t_k) = \sim, \qquad (4)$$

где $\sim - q$-мерный ($q \le n$) вектор-столбец, $F_k - (q \times n)$-мерные матрицы $(k = 1,\ldots,m)$, элементы которых являются вещественными числами.

Вообще, для ряда прикладных задач можно предполагать, что в промежуточные моменты времени t_k $(k = 1,\ldots,m)$ условию (4) удовлетворяют не все значения координат фазового вектора $x(t_k)$, а лишь некоторые значения координат фазового вектора. В таких случаях будем считать, что соответствующие элементы матрицы F_k будут нулями.

Требуется найти условия, при которых существует программное управляющее воздействие $u = u(t)$, $t \in [t_0, T]$ и программное движение, предвидящие движение системы (1) из начального состояния (2), обеспечивая удовлетворение неразделённых многоточечных промежуточных условиий (4) в конечное состояние (3), а также построить их.

Для решения поставленной задачи построено аналитическое выражение движения поэтапно меняющейся системы (1) на интервале $[t_0, T]$ в таком виде, что имея начальное состояние $x(t_0)$ системы (1) и задавая управляющее воздействие $u(t)$, с помощью этого выражения определяется фазовое состояние $x(t)$ системы (1) для произвольного момента времени t из любого промежутка $[t_{k-1}, t_k)$ $(k = 2,\ldots,m+1)$.

В работе предложен конструктивный подход исследования задач управления для поэтапно меняющихся линейных нагружённых дифференциальных уравнений с заданными начальными, конечными и неразделёнными многоточечными промежуточными условиями. Сформулированы необходимое и достаточное условие вполне уравляемости, условия существования программного управления и движения. Построено решение задачи управления поэтапно меняющихся линейных нагружённых дифференциальных уравнений с заданными начальными, конечными и неразделёнными многоточечными промежуточными условиями. Управляющее воздействие, решающее поставленую задачу, является кусочно непрерывной функцией. Построено програм-

мное движение системы (1) на промежутке времени $[t_0, T]$ и удовлетворяющее условиям (2)-(4).

ЛИТЕРАТУРА

1. Теория систем с переменной структурой. Под ред. С.В. Емельянова. М.: Наука, 1970. 592 с.
2. Барсегян В.Р. Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями. М.: Наука, 2016. 230 с.
3. Barseghyan V.R. Control of stage by stage changing linear dynamic systems. Yugoslav Journal of Operations Resarch. 2012. Vol. 22. № 1, pp. 31-39.
4. Барсегян В.Р. Задача управления для поэтапно меняющихся линейных систем нагруженных дифференциальных уравнений. //Автоматика и телемеханика, 2018. № 4. С.19–30; Automation and Remote Control. 2018. Volume 79, Issue 4, pp. 594–603.
5. Барсегян В.Р. Задача управления для одной системы линейных нагруженных дифференциальных уравнений с неразделенными многоточечными промежуточными условиями. //Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика. 2017. Т. 21. С. 19-32.
6. Hong Shi and Guangming Xie. Controllability and Observability Criteria for Linear Piecewise Constant Impulsive Systems. Journal of Applied Mathematics. 2012. Article ID 182040, 24 p.
7. Xie G., Wang L. Necessary and sufficient conditions for controllability and observability of switched impulsive control systems. IEEE Trans. Autom. Control. 2004. 49, pp. 960-966.
8. Ащепков Л.Т. Оптимальное управление системой с промежуточными условиями. //ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 2. С. 215-222.
9. Барсегян В.Р., Барсегян Т.В. Об одном подходе к решению задач управления динамических систем с неразделенными многоточечными промежуточными условиями. Автоматика и телемеханика. 2015. № 4. С. 3-15. Automation and Remote Control. 2015. Volume 76, Issue 4, pp. 549–559.
10. Джумабаев Д.С., Иманчиев А.Е. Корректная разрешимость линейной многоточечной краевой задачи. //Математический журнал. Алматы. 2005. Т.5. № 1 (15). С.30-38.
11. Дыхта В.А., Самсонюк О.Н. Принцип максимума для гладких задач оптимального импульсного управления с многоточечными фазоограничениями. //Журнал вычислительной математики и математической физики. 2009. Т 49. № 6. С.981-997.
12. Коняев Ю.А. Конструктивные методы исследования многоточечных краевых задач. //Изв. ВУЗов. Матем.. 1992. № 2. С.57–61.
13. Миронов В.И., Миронов Ю.В. Энергетически оптимальное управление в линейных многоточечных задачах о встрече движений. //Труды СПИИРАН. Вып 5. СПб.: Наука. 2007. С.322–328.
14. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применение. М.: Наука, 2012. 232 с.
15. Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И. Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений. Алматы: 2010. 334 с.
16. Бакирова Э.А., Кадирбаева Ж.М. О разрешимости линейной многоточечной краевой задачи для нагруженных дифференциальных уравнений. //Изв. НАН РК. Сер.физ.-мат.. 2016. № 5. С.168–175.

Сведения об авторе:

Барсегян Ваня Рафаелович – доктор физ.-мат. наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении, профессор факультета математики и механики ЕГУ
Тел.: (37410) 52 36 40; **E-mail**: barseghyan@sci.am

ЛОКАЛИЗАЦИЯ УПРУГИХ СДВИГОВЫХ ВОЛН В ОКРЕСТНОСТИ СТЫКА ПЛОСКИХ ВОЛНОВОДОВ

Белубекян В.М., Белубекян М.В., Берберян А.Х.

Начало исследованию чисто сдвиговых волн в плоском слое было положено работой Лява 1911 года [1]. В дальнейшем были решены многочисленные задачи для упругих волноводов с различными граничными условиями и в динамической постановке (задачи с начальными условиями). Обзор этих работ приводится в монографии [2] и в статье [3]. В статье [4] рассматриваются локализованные сдвиговые волны в окрестности края полубесконечного волновода. Статья [5] посвящена случаю, когда плоская граница полубесконечной части волновода переходит в периодически изменяющуюся границу. В [6] исследованы резонансные колебания в плоском конечном составном волноводе.
В настоящей статье рассматриваются волноводы, когда граничные условия на плоскостях, ограничивающих волновод, изменяются. В частности, полубесконечная часть волновода со свободными сторонами переходит (стыкуется) в полубесконечную часть с закреплёнными сторонами. Устанавливается, что при этом возможна локализация сдвиговых волн в окрестости перехода (стыка) волноводов.

1. Плоский волновод состоит из двух частей. В прямоугольной декартовой системе координат первая часть с индексом (1) занимает область $-a_1 \le x < 0,\ \ 0 \le y < b,\ -\infty < z < \infty$; вторая часть с индексом (2) занимает область $0 < x \le a_2,\ 0 \le y < b, -\infty < z < \infty$ (фиг. 1).

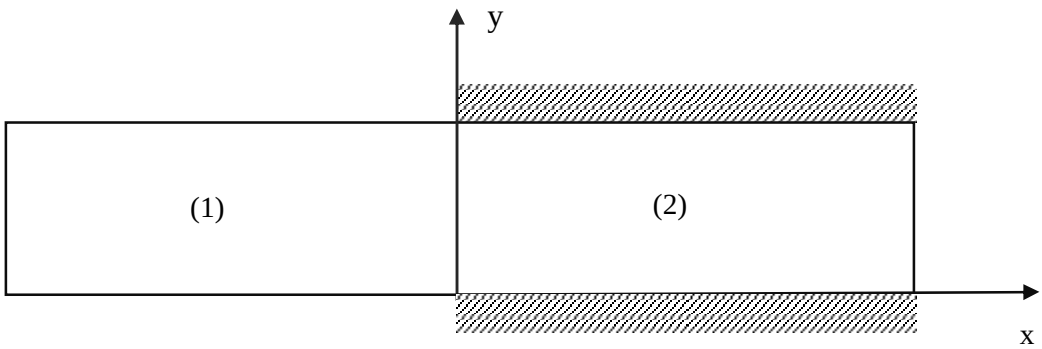


Рис. 1

Рассматриваются чисто сдвиговые упругие колебания (антиплоская деформация)

$$u = 0, v = 0, w = w(x, y, t) \tag{1.1}$$

Уравнения распространения волн для частей волновода имеют вид [2]:

$$C_t^2 \Delta w_i = \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2},\ C_t^2 \Delta w_i = \frac{\mu}{\rho};\ i = 1, 2, \tag{1.2}$$

где Δ – двумерный оператор Лапласа, μ – модуль сдвига, ρ – плотность материала волновода, C_t– скорость обьемной сдвигивой волны. Предполагается, что поверхности волновода при x<0, свободны ($\sigma_{yz}^{(1)} = 0$), а при x>0 закреплены, т.е.

$$\frac{\partial w_1}{\partial y} = 0,\ w_2 = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, b \tag{1.3}$$

Решения уравнений (1.2) для частей волновода, удовлетворяющие граничным условиям (1.3), представляются следующим образом:

$$w_1 = e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \cos\lambda_n y, \qquad \lambda_n = n\pi / b \tag{1.4}$$

$$w_2 = e^{i\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} g_m(x) \sin\lambda_m y, \qquad \lambda_m = m\pi / b \tag{1.5}$$

Подстановка (1.4), (1.5) в уравнения (1.2) приводит к последовательности обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $f_n(x), g_m(x)$. Общие решения этих уравнений получаются в виде:

$$f_n(x) = a_n \sin\lambda_n p_n x + b_n \cos\lambda_n p_n x \tag{1.6}$$

$$g_m(x) = c_n \sin\lambda_m p_m x + d_m \cos\lambda_m p_m x$$

Здесь a_n, b_n, c_m, d_m – произвольные постоянные,

$$p_n = \sqrt{\eta_n^2 - 1}, \quad \eta_n^2 = \frac{\omega^2}{\lambda_n^2 C_t^2} \tag{1.7}$$

$p_m = \sqrt{\eta_m^2 - 1}, \quad \eta_m^2 = \frac{\omega^2}{\lambda_m^2 c_t^2}$

2. Пусть край волновода $x = -a_1$ свободен, а край $x = a_2$ закреплён:

$$\frac{\partial w_1}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = -a_1 \tag{2.1}$$
$$w_2 = 0 \quad \text{при} \quad x = a_2$$

В этом случае решения (1.6) приводятся к виду:

$$f_n(x) = F_n \cos\lambda_n p_n (a_1 + x) \tag{2.2}$$
$$g_m(x) = G_m \sin\lambda_m p_m (a_2 + x)\ ,$$

где F_n, G_m – новые произвольные постоянные.

На стыке волноводов (на месте сочленения) должны быть удовлетворены условия непрерывности перемещений и касательных напряжений σ_{xz}:

$$w_1 = w_2\ , \quad \frac{\partial w_1}{\partial x} = \frac{\partial w_2}{\partial x} \quad \text{при} \quad x = 0. \tag{2.3}$$

Подстановка (1.4), (1.5) в (2.3), с учётом (2.2) и разложения в ряд Фурье

$$\sin\lambda_m y = \sum_{n=0}^{\infty} b_{mn} \cos\lambda_n y \tag{2.4}$$

приводит к системе бесконечных уравнений, откуда следует:

$$F_n \cos(\lambda_n p_n a_1) = \sum_{m=1}^{\infty} b_{mn}\, G_m \sin(\lambda_m p_m a_2) \tag{2.5}$$
$$\lambda_n p_n F_n \sin(\lambda_n p_n a_1) = \sum_{m=1}^{\infty} b_{mn}\, \lambda_m p_m G_m \cos(\lambda_m p_m a_2).$$

Вместо бесконечной системы (2.5) будет рассматриваться усечённая система при n=0,1,2, m=*1,2,3*, с учетом значений коэффициентов из разложения (2.4)

$$F_0 cos \frac{\omega}{C_t} a_1 - \frac{2}{\pi} G_1 \sin(\lambda_1 p_1 a_2) - \frac{2}{3\pi} G_3 \sin(\lambda_3 p_3 a_2) = 0$$
$$\frac{\omega}{C_t} F_0 sin \frac{\omega}{C_t} a_1 - \frac{2}{\pi} \lambda_1 p_1 G_1 \cos(\lambda_1 p_1 a_2) - \frac{2}{3\pi} \lambda_3 p_3 G_3 \cos(\lambda_3 p_3 a_2) = 0$$
$$F_1 \cos(\lambda_1 p_1 a_1) - \frac{4}{3\pi} G_2 \sin(\lambda_2 p_2 a_2) = 0 \tag{2.6}$$
$$\lambda_1 p_1 F_1 \sin(\lambda_1 p_1 a_1) - \frac{4}{3\pi} \lambda_2 p_2 G_2 \cos(\lambda_2 p_2 a_2) = 0$$
$$F_2 \cos(\lambda_2 p_2 a_1) + \frac{4}{3\pi} G_1 \sin(\lambda_1 p_1 a_2) - \frac{12}{5\pi} G_3\, \lambda_1 p_1 \sin(\lambda_3 p_3 a_2) = 0$$
$$\lambda_2 p_2 F_2 \sin(\lambda_2 p_2 a_1) + \frac{4}{3\pi} \lambda_1 p_1 G_1 \sin(\lambda_1 p_1 a_2) - \frac{12}{5\pi} \lambda_3 p_3 G_3 \cos(\lambda_3 p_3 a_2) = 0.$$

Согласно (2.6), в нулевом приближении (*n=0, m=1*) равенство нулю детерминанта системы относительно произвольных постоянных F_0, G_1 приводит к следующему дисперсионному уравнению:

$$\frac{\omega}{C_t} tg \frac{\omega}{C_t} a_1 \mathrm{tg}(\lambda_1 p_1 a_2) = \lambda_1 p_1. \tag{2.7}$$

В длинноволновом (низкочастотном) приближении

$$\left(\frac{\omega}{C_t} a_1\right)^2 \ll 1\ ,\ (\lambda_1 p_1 a_2)^2 \ll 1 \tag{2.8}$$

из (2.7) получаются две частоты:

$$\frac{\omega^2}{C_t^2} = \frac{\pi^2}{b^2}\ , \quad \frac{\omega^2}{C_t^2} = \frac{1}{a_1 a_2}\ . \tag{2.9}$$

Отсюда следует, что при условии

$$b^2 = \pi^2 a_1 a_2 \tag{2.10}$$

эти частоты будут совпадать. Т.е. возможно появление внутреннего резонанса [4, 6].

Уравнение (2.7) может иметь решение, удовлетворяющее условию

$$0 < \frac{\omega^2}{\lambda_1 C_t^2} < 1. \tag{2.11}$$

Действительно, при условии (2.11), уравнение (2.7) записывается в виде

$$\frac{\omega}{C_t} \mathrm{tg} \frac{\omega}{C_t} a_1 \mathrm{th}\left(\sqrt{1 - \eta_1} \lambda_1 a_2\right) = \lambda_1 \sqrt{1 - \eta_1}. \tag{2.12}$$

Из (2.12) в коротковолновом приближении следует

$$\mathrm{th}\left(\sqrt{1 - \eta_1} \lambda_1 a_2\right) \approx 1 \tag{2.13}$$

получается уравнение типа Лява для системы слой-полупространство [1,7]. При этом амплитуда колебаний затухает во второй части волновода от границы x=0 по координате x>0. В конечной части волновода $-a_1 < x < 0$ колебания имеют периодический характер (локализованные

колебания в первой части). Можно получить условие перехода периодических по x колебаний пластины в части (2) на гиперболический характер изменения амплитуды колебаний по x. Разделим уравнение (2.12) на $\sqrt{1-\eta_1}$ и предельным переходом $\eta_1 \to 1$, следуя [8], получим:

$$\lambda_1 a_2 \mathrm{tg}\lambda_1 a_1 = 1. \tag{2.14}$$

Например, для частот колебаний, удовлетворяющих условию $\lambda_1^2 a_1^2 \ll 1$, переход к гиперболическим функциям будет при

$$a_2 > b^2 \pi^{-2} a_1^{-1} \tag{2.15}$$

3. Система уравнений (2.5) разделяется на две автономные бесконечные системы уравнений с нечётными индексами (n+m) и чётными. Усечённая система для уравнений с нечётными индексами с n=0,1,2; m=1,2,3 состоит из первого, второго, пятого и шестого уравнений (2.6) относительно четырёх произвольных постоянных F_0, F_2, G_1, G_3. Условие равенства нулю детерминанта этой системы, после некоторых преобразований приводится к виду:

$$\begin{gathered}\frac{3}{5}\lambda_1\lambda_2 p_1 p_2 \mathrm{tg}(\lambda_2 p_2 a_1)\mathrm{tg}(\lambda_3 p_3 a_2) + \frac{1}{9}\lambda_2\lambda_3 p_2 p_3 \mathrm{tg}(\lambda_2 p_2 a_1)\mathrm{tg}(\lambda_1 p_1 a_2) - \frac{32}{45}\lambda_1\lambda_2 p_1 p_2 - \\ -\frac{\omega}{C_t}\mathrm{tg}\frac{\omega}{C_t}a_1 \times \\ \times\left[\frac{32}{45}\lambda_2 p_2 \mathrm{tg}(\lambda_2 p_2 a_1)\mathrm{tg}(\lambda_1 p_1 a_2)\mathrm{tg}(\lambda_3 p_3 a_2) - \frac{1}{9}\lambda_1 p_1 \mathrm{tg}(\lambda_3 p_3 a_2) - \frac{3}{5}\lambda_2 p_2 \mathrm{tg}(\lambda_1 p_1 a_2)\right] = 0\end{gathered} \tag{3.1}$$

В длинноволновом проближении, применяя применяя вместе с (2.8) также

$$(\lambda_2 p_2 a_1)^2 \ll 1 \quad (\lambda_3 p_3 a_3)^2 \ll 1, \tag{3.2}$$

из (3.1) следует

$$p_1 p_3 \left(1 - \frac{\omega^2}{C_t^2}a_1 a_2\right)(\lambda_2^2 p_2^2 a_1 a_2 - 1) = 0. \tag{3.3}$$

Уравнение (3.3) устанавливает наличие четырёх частот для соответствующих мод колебаний

$$\frac{\omega b}{C_t} = \pi, 3\pi, \frac{b}{\sqrt{a_1 a_2}}, \sqrt{4\pi^2 + \frac{b^2}{a_1 a_2}}\,. \tag{3.4}$$

Здесь $\omega b C_t^{-1}$ – безразмерная характеристика частоты; первые две частоты не зависят от размеров частей волновода a_1, a_2, третья частота не зависит от ширины волновода b. Из (3.4) следует, что при определённых геометрических характеристиках волновода возможно совпадение величин частот. Совпадение частот будет при условиях:

$$b = \sqrt{a_1 a_2} \text{ или } b = 3\pi\sqrt{a_1 a_2}\,, \tag{3.5}$$

что приводит к появлению внутреннего резонанса.

Для исследования существования решения уравнения (3.1), удовлетворяющего условию (2.11) в уравнении (3.1), тригонометрические функции, как и в случае нулевого приближения (2.12), заменяются гиперболическими функциями. После этого используется приближение:

$$\begin{gathered}\left(\frac{\omega}{C_t}a_1\right)^2 \ll 1\,, \quad (\lambda_2 p_2 a_1)^2 \ll 1 \\ \mathrm{th}\left(\sqrt{1-\eta_1}\lambda_1 a_2\right) \approx 1\,, \quad \mathrm{th}\left(\sqrt{1-\eta_3}\lambda_3 a_2\right) \approx 1.\end{gathered} \tag{3.6}$$

В результате получается уравнение типа уравнения Лява для случая тонкого слоя [9]

$$\begin{gathered}L\left(\frac{\omega^2}{C_t^2}, \lambda_n^2\right) \equiv a_1\sqrt{\lambda_1^2 - \frac{\omega^2}{C_t^2}}\left(\frac{\omega^2}{C_t^2} - \frac{27}{32}\lambda_2^2\right) + a_1\sqrt{\lambda_3^2 - \frac{\omega^2}{C_t^2}}\left(\frac{\omega^2}{C_t^2} - \frac{5}{32}\lambda_2^2\right) - \\ -\sqrt{\lambda_1^2 - \frac{\omega^2}{C_t^2}}\sqrt{\lambda_3^2 - \frac{\omega^2}{C_t^2}} - a_1^2\frac{\omega^2}{C_t^2}\left(\frac{\omega^2}{C_t^2} - \lambda_2^2\right) = 0.\end{gathered} \tag{3.7}$$

Из (2.7) следует неравенство

$$L(0, \lambda_n^2) < 0, \tag{3.8}$$

поэтому, чтобы уравнение (3.7) имело решение, удовлетворяющее условию (2.11), достаточно, чтобы имело место неравенство

$$L(\lambda_1^2, \lambda_n^2) > 0. \tag{3.9}$$

Согласно уравнению (3.7) неравенство (3.9) выполняется, если

$$\lambda_1 a_1 > \frac{1}{2\sqrt{2}}\,. \tag{3.10}$$

Выражение (3.10) является условием существования колебаний локализованных в области

$-a_1 < x < 0$ и затухающих в области $x>0$ при удаленнии от границы $x=0$, аналогично поверхностным волнам Лява.

ЛИТЕРАТУРА

1. Love A.E.H. Some Problems of Geodynamics. Cambridge University Press. 1911, p.165-178.
2. Miklowitz J. The Theory of Elastic Waves and Waveguides. North-Holland. 1984. 618p.
3. Мелешко В.В., Бондаренко А.А., Довчий С.А., Трофимчук А.Н., ван Хейст Г.Я. Упругие волноводы: исторрия и современность. Математическе методы и физико-механические поля. Львов, НАН Украины, 2008, т.51, №2, с. 86-104.
4. Белубекян В.М., Белубекян М.В. Резонансные и локализованные сдвиговые колебания в слое с прямоугольным поперечным сечением. //Докл. НАН Армении, 2015, т. 115, №1, с. 40-43.
5. Назаров С.А. Рассеяние волн в сочленении прямого и периодического волноводов. //ПММ, 2017, т.81, в.2, с.188-216.
6. Казарян К.Б., Папян А.А. Резонансные и локализованные сдвигивые колебания в упругом составном резонаторе. //Изв. НАН Армении, Механика. 2017, т.70, №2, с. 52-67.
7. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975, 256 с.
8. Belubekyan M.V. On the condition of planar localized vibration appearance in the vicinity of the free edge of a thin rectangular plate. //Proc. Of the YSU, Physical and Mathematical Sciences 2017, v. 51, №1, pp. 42-45.
9. Белубекян М.В. Об условиях существования волн Лява с неоднородным слоем. //Изв. НАН Армении, Механика. 1991, т. 44, №3, с. 7-10.

Сведения об авторах:

Белубекян Вагаршак Мелсович – Научный сотрудник Института механики НАН Армении (37491) 20 95 18, **E-mail:** vbelub@gmail.com

Белубекян Мелс Вагаршакович – Главный н научный сотрудник Института механики НАН Армении (37493) 58 00 96, **E-mail:** mbelubekyan@yahoo.com

Берберян Армен Хачатурович – научный сотрудник Института механики НАН Армении. **Тел.:** (+374 10) 462096, **E-mail:** slavia555@yahoo.com

ОТРАЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ И УПРУГИХ ВОЛН ОТ ГРАНИЦЫ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА, ГРАНИЧАЩЕГО С ВАКУУМОМ

Белубекян М.В., Гараков В.Г.

В упругой пьезоактивной среде гексагональной симметрии класса 6mm возможно распространение двух типов волн – упругой волны с сопутствующим электрическим полем и электромагнитной волной с сопутствующим полем упругих напряжений. Для полупространства из пьезоэлектрического материала класса 6mm рассматривается задача падения упругой и электромагнитной волн на границу раздела с вакуумом. Определяются амплитуды отражённых электроупругих волн.

1. Влияние электромагнитного поля на характер отражения и преломления сдвиговых упругих волн в квазистатической постановке исследовались в работах [1-5]. Рассматривались пьезоэлектрические материалы кубической и гексагональной симметрии. Частные задачи отражения сдвиговых электроупругих волн без квазистатического приближения решены в [6-9].

В прямоугольной декартовой системе координат (x, y, z) полупространство из упругого пьезоактивного материала класса 6mm занимает область $-\infty < x < 0,\ -\infty < y < \infty,$ $-\infty < z < \infty$. Свойства полупространства, занимающего область $0 < x < \infty,\ -\infty < y < \infty,$ $-\infty < z < \infty$ отождествляются со свойствами вакуума.

Уравнения электроупругости для пьезоэлектрической среды $(-\infty < x < 0)$, без квазистатического приближения следующие [7,8]:

$$\Delta w = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \Delta H_3 = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 H_3}{\partial t^2} \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial E_1}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_1}\frac{\partial H_3}{\partial y} - \frac{e_{15}}{\varepsilon_1}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}, \quad \frac{\partial E_2}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon_1}\frac{\partial H_3}{\partial x} - \frac{e_{15}}{\varepsilon_1}\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t}\ . \tag{1.2}$$

Здесь

$$c_l^2 = \frac{c_{44}}{\rho}(1+\chi), \quad c^2 = \frac{1}{\varepsilon_1 \mu}, \quad \chi = \frac{e_{15}^2}{c_{44}\varepsilon_1} \tag{1.3}$$

$\overline{\omega}$ –упругое перемещение, перпендикулярное к плоскости распространения волны (x, y), c_{44} – модуль сдвига, ρ –плотность материала среды, e_{15} – пьезомодуль, ε_1 и μ –диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, χ – коэффициент электромеханической связи.

В полупространстве $(-\infty < y < \infty)$, уравнения электродинамики для вакуума приводятся в виде

$$\Delta H_3^{(1)} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 H_3^{(1)}}{\partial t^2}, \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial E_1^{(1)}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial H_3^{(1)}}{\partial y}, \quad \frac{\partial E_2^{(1)}}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial H_3^{(1)}}{\partial x}. \tag{1.5}$$

На границе раздела сред $x = 0$ возможны различные варианты граничных условий. В частности, для свободной границы эти условия следующие:

$$\sigma_{x,z} = 0, \quad E_2 = E_2^{(1)}, \quad H_3 = H_3^{(1)} \text{ при } x = 0 \tag{1.6}$$

2. Вначале рассматривается задача падения упругой волны на границу раздела сред. Согласно уравнениям (1.1), падающая упругая волна имеет решение:

$$w = A \exp i\left(\overline{\omega} t - kx - k_2 y\right), \quad k = \sqrt{\frac{\overline{\omega}^2}{c_1^2} - k_2^2}, \quad H_3 = 0 \tag{2.1}$$

Из (1.2) следует, что упругой волне будет сопутствовать электрическое поле

$$E_{1c} = i\frac{ke_{15}}{\varepsilon_1}A\exp i\left(\overline{\omega}t - kx - k_2 y\right),$$
$$E_{2c} = i\frac{k_2 e_{15}}{\varepsilon_1}A\exp i\left(\overline{\omega}t - kx - k_2 y\right). \tag{2.2}$$

От границы раздела сред, в общем случае, будут отражаться как упругая волна

$$w_0 = B\exp i\left(\overline{\omega}t + kx - k_2 y\right), \tag{2.3}$$

так и электромагнитная волна

$$H_{30} = F\exp i\left(\overline{\omega}t + px - k_2 y\right), \quad p = \sqrt{\frac{\overline{\omega}_2}{c^2} - k_2^2}, \quad c^2 = \frac{1}{\varepsilon_1\mu}. \tag{2.4}$$

Компоненты отражённого электрического поля определяются из уравнений (1.2) с учётом (2.3) и (2.4):

$$E_{10} = -\frac{k_2}{\varepsilon_1\overline{\omega}}F\exp i\left(\overline{\omega}t + px - k_2 y\right) - i\frac{ke_{15}}{\varepsilon_1}B\exp i\left(\overline{\omega}t + kx - k_2 y\right),$$
$$E_{20} = -\frac{p}{\varepsilon_1\overline{\omega}}F\exp i\left(\overline{\omega}t + px - k_2 y\right) - i\frac{k_2 e_{15}}{\varepsilon_1}B\exp i\left(\overline{\omega}t + kx - k_2 y\right) \tag{2.5}$$

Согласно уравнениям (1.4), (1.5), решения для преломлённой электромагнитной волны примут вид:

$$H_3^{(1)} = F_1\exp i\left(\overline{\omega}t - p_1 x - k_2 y\right), \quad p_1 = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - k_2^2}$$
$$E_1^{(1)} = -\frac{k_2}{\varepsilon_0\overline{\omega}}F_1\exp i\left(\overline{\omega}t - p_1 x - k_2 y\right) \tag{2.6}$$
$$E_2^{(2)} = \frac{p_1}{\varepsilon_0\overline{\omega}}F_1\exp i\left(\overline{\omega}t - p_1 x - k_2 y\right)$$

Амплитуды отражённых и преломлённых волн B, F, F_1 определяются после удовлетворения условиям на границе раздела. Подстановка решений (2.1)–(2.6) в граничные условия (1.6) с учётом

$$\sigma_{xz} = c_{44}\frac{\partial w}{\partial x} - e_{15}E_1, \quad E_{2c} + E_{20} = E_2^{(1)} \tag{2.7}$$

приводит к системе уравнений

$$-ikc_{44}\left(1+\chi\right)\left(A - B\right) + \frac{k_2 e_{15}}{\varepsilon_1\overline{\omega}}F = 0$$
$$i\frac{k_2 e_{15}}{\varepsilon_1}\left(A + B\right) - \frac{1}{\overline{\omega}}\left(\frac{p}{\varepsilon_1} + \frac{p_1}{\varepsilon_0}\right)F = 0, \quad F = F_1 \tag{2.8}$$

Из системы (2.8) получается

$$B = -\frac{1}{q}\left[k_2^2\chi - \varepsilon_1 k\left(\frac{p}{\varepsilon_1} + \frac{p_1}{\varepsilon_0}\right)\right]A,$$
$$F = F_1 = \frac{i}{q}2e_{15}kk_2\overline{\omega}A, \quad q = k_2^2\chi + \varepsilon_1 k\left(\frac{p}{\varepsilon_1} + \frac{p_1}{\varepsilon_0}\right). \tag{2.9}$$

Отсюда следует, что при нормальном падении упругой волны $\left(k_2 = 0\right)$ электромагнитная волна не отражается. Знаменатели выражений для амплитуд $\left(q\right)$ могут равняться нулю при условии

$$\frac{\overline{\omega}^2}{c_1^2} < k_2^2 \tag{2.10}$$

При условии (2.10) равенство $q = 0$ приводит к уравнению

$$\left(\sqrt{1-\theta\eta} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\sqrt{1-\theta_0\eta}\right)\sqrt{1-\eta} = \chi, \tag{2.11}$$

где

$$\theta = \frac{c_1^2}{c^2}, \quad \theta_0 = \frac{c_1^2}{c_0^2}, \quad \eta^2 = \frac{\overline{\omega}^2}{k_2^2 c_1^2}. \tag{2.12}$$

В приближении $\theta \ll 1,\ \theta_0 \ll 1$ (квазистатическое приближение) из (2.12) получается известная формула для скорости волны Гуляева–Блюстейна [4].

3. Пусть на границе раздела падает электромагнитная волна

$$H_{3n} = F_0 \exp i\left(\overline{\omega}t - px - k_2 y\right), \quad \overline{\omega} = 0,$$

$$E_{1n} = -\frac{k_2}{\varepsilon_1\overline{\omega}} F_n \exp i\left(\overline{\omega}t - px - k_2 y\right), \tag{3.1}$$

$$E_{2n} = -\frac{p_2}{\varepsilon_1\overline{\omega}} F_n \exp i\left(\overline{\omega}t - px - k_2 y\right).$$

Из материальных уравнений следует, что в этом случае электромагнитному полю (2.1) будет сопутствовать поле напряжений

$$\sigma_{xz}^{(n)} = -e_{15}E_{1n}, \quad \sigma_{yz}^{(n)} = -e_{15}E_{2n}. \tag{3.2}$$

Граничные условия (1.6) можно записать в виде

$$-e_{15}E_{1n} + c_{44}\frac{\partial w}{\partial x} - e_{15}E_{10} = 0, \quad E_{2n} + E_{20} = E_2^{(1)}, \quad H_{3n} + H_{30} = H_3^{(1)}. \tag{3.3}$$

Требование, чтобы (2.3)–(2.6), (3.1),(3.2) удовлетворяли граничным условиям (3.3) приводит к следующей системе алгебраических уравнений относительно амплитуд отражённых и преломлённых волн $B_1,\ F,\ F_1$:

$$ikc_{44}\left(1+\chi\right)B - \frac{k_2 e_{15}}{\varepsilon_1\overline{\omega}}F = -\frac{k_2 e_{15}}{\varepsilon_1\overline{\omega}}F_n,$$

$$\frac{p}{\varepsilon_1\overline{\omega}}\left(F_n - F\right) + i\frac{k_2 e_{15}}{\varepsilon_1}B = \frac{p_1}{\varepsilon_0\overline{\omega}}F_1, \tag{3.4}$$

$$F_n + F = F_1.$$

Можно исследовать задачи для других вариантов граничных условий. В случае замены граничных условий $\sigma_{xz} = 0$ на $w = 0$, электромагнитная волна не отражается при падении упругой и упругая волна не отражается при падении электромагнитной. Более простые, но содержательные результаты получаются в случаях:

$$\sigma_{xz} = 0, \quad E_2 = 0 \text{ при } x = 0 \tag{3.5}$$

$$\sigma_{xz} = 0, \quad H_3 = 0 \text{ при } x = 0 \tag{3.6}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров К.С. Отражение сдвиговых упругих волн от границы раздела двух анизотропных сред. // Кристаллография. 1971. Т.7. №5. С.735-741.
2. Кессених Г.Г., Санников Д.Г., Шувалов Л.А. Отражение и преломление поперечной звуковой волны на доменных стенках в сегнетоэлектриках. // Кристаллография. 1970. Т.15. №5. С.1022-1027.

3. Любимов В.Н. Особенности отражения упругих волн в гексагональных и тетрагональных пьезоэлектриках. // Кристаллография. 1971. Т.16. №3. С.563-567.
4. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука, 1982. 240с.
5. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н. Электромагнитоуругие волны. Ереван: Изд. ЕГУ, 2006. 492с.
6. BaghdasaryanA., Belubekyan M. On the Problem of Reflection of Shear wave from a Boundary of Piezoelectric media of class 6mm. In proc. Of the 8th Intern. Congress of Thermal Stresses (TS), 2009, Univer. of Illinois, USA, v.1, pp.183-186.
7. Белубекян М.В., Гараков В.Г. Отражение нормально падающей сдвиговой электроупругой волны от плоской границы раздела двух пьезоактивных сред. //Докл. НАН Армении. 2013. Т.113. №4. С.364-368.
8. Белубекян М.В. Экранированная поверхностная сдвиговая волна в пьезоактивном полупространстве гексагональной симметрии. //В сб.: «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред» (Тр. VI-ой межд. конф. Горис–Степанакерт). Ереван: Институт механики НАН Армении, 2008. С.125-130.
9. Белубекян М.В., Гараков В.Г. Отражение электромагнитной волны от границы упругой среды из пьезоактивного материала. /Международная научно-практическая конференция «Инфоком–2018».

Сведения об авторах:

Белубекян Мелс Вагаршакович – к.ф.-м.н., проф., главн. научн. сотр. Института механики НАН Армении. 093 580096.
E-mail: mbelubekyan@yahoo.com

Гараков Владимир Герасимович – к.ф.-м.н., с.н.с Института механики НАН Армении. 093 338166.
E-mail: garakov@yandex.com

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АЛГОРИТМА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ПРИ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РАСЧЁТА НДС МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

Бобылев Д.Е.

В статье обоснованы причины плохой обусловленности системы линейных уравнений метода граничных элементов, а также прикладной подход к решению таких систем на основе метода регуляризации А. Тихоновой. Дано описание алгоритма регуляризации, основанного на выборе параметра регуляризации.

Введение. При решении однородных задач на внешней границе обычно задаются только вектор усилия и уравнение системы

$$u_i^{[n]}(Q) = \int_{\partial\Omega^{[n]}} I_{i;k}^{[n]}(Q, q_0) f_k^{[n]}(q_0) dl \qquad (1)$$

не используется. Однако, при рассмотрении кусочно-однородных тел на внутренних контактах приходится иметь дело с данным уравнением, которое является интегральным уравнением первого рода. Это обстоятельство, а также достаточно высокий порядок системы

$$b_{xi} = \sum_{j=1}^{N} A_{ij}^{'} f_{xj} + \sum_{j=1}^{N} B_{ij}^{'} f_{yj}; \quad b_{yi} = \sum_{j=1}^{N} C_{ij}^{'} f_{xj} + \sum_{j=1}^{N} D_{ij}^{'} f_{yj} \;\; i = 1, \ldots, N \qquad (2)$$

и отсутствие диагонального преобладания приводит к плохой обусловленности. Уравнения, полученные в (2) для близко расположенных друг к другу граничных элементов, слабо различимы. Данный факт приводит к невозможности получения корректного численного решения при непосредственном применении к системе (2) известных методов решения линейных уравнений. Итерационные методы демонстрировали расхождение невязки уже с первых итераций. Прямые давали решение, не соответствующее физической природе рассматриваемых задач.

Данные результаты послужили причиной разработки методики регуляризации численного решения СЛАУ, основанной на методе А.Н. Тихонова [1, 3, 5].

Метод регуляризации. При численном решении система интегральных уравнений метода граничных элементов с использованием квадратурной формулы прямоугольников приводится к системе линейных алгебраических уравнений (2). Представим данную систему в виде:

$$Ax = b. \qquad (3)$$

Вследствие неустойчивости системы существует множество решений системы, которые с заданной степенью точности удовлетворяют (3). Тогда её решение неоднозначно и пусть Q – совокупность всех возможных решений. В этих условиях ставится задача нахождения нормального решения x^* относительно некоторого вектора x_0. Это решение определяется условием

$$\|x^* - x_0\| = \inf_{x \in Q} \|x - x_0\|. \qquad (4)$$

Доказано [2, 5], что для замкнутого и выпуклого множества Q элемент x^* определён однозначно и в случае регулярных задач совпадает с единственным решением системы. Таким образом, понятие нормального решения обобщает понятие решения как «плохих», так и хороших систем.

Следовательно, необходимо из этого множества выбрать решение, отвечающее определённым требованиям. Поставим задачу отбора решения, которое обеспечивает минимум функционала

$$\Omega[x] = \|x - x_0\|^2, \qquad (5)$$

где Ω – сильно выпуклый функционал, определённый в гильбертовом пространстве X элементов x, и такой, что множество $\overline{X} = \{x : \Omega[x] \le C, C > 0\}$ – есть компакт в X. Естественно, что решение задачи при точных исходных данных является элементом множества $\overline{X}$. Согласно определению (4), отобранное таким образом решение естественно назвать приближённым решением.

Поскольку функционал (5) регуляризующий, а также квазимонотонный [5], то задача минимизации (5) на множестве элементов X эквивалентна задаче минимизации сглаживающего параметрического функционала А.Н. Тихонова [5] на множестве элементов x

$$f(x) = \|Ax - b\|^2 + \alpha \|x\|^2, \quad (6)$$

где $\alpha = \alpha > 0$ – параметр регуляризации, A – матрица СЛАУ из (3), b – вектор граничных условий.

Доказано [5], что решение задачи (6) является регуляризующим, поскольку отвечает основным принципам регуляризации: решение существует, единственно и устойчиво.

Алгоритм минимизации регуляризующего функционала. Изложим практически легко реализуемый и применяемый в данной работе алгоритм решения задачи (6) [4], который состоит из многократных формирований и решений систем линейных уравнений конечными методами. Алгоритм содержит внешний и внутренний циклы, которые обеспечивают выполнение условия, свидетельствующего о получении регуляризованного решения системы (3).

Внешний цикл. Формирует сходящуюся к нулю последовательность $\{\alpha_p\}$, на элементах которой производится минимизация функционала (6). В качестве такой последовательности может быть взята геометрическая прогрессия $\{\alpha_{p+1} = \mu\alpha_p\}$ $p = 0,1,2,...$, $\mu < 1$. После выбора очередного $\alpha = \alpha_p$ следует переход на внутренний цикл.

Внутренний цикл. Обеспечивает поиск минимума функционала (6) при закреплённой величине $\alpha = \alpha_p$. Минимум данного функционала при $\alpha = \alpha_p$ обеспечивает корень уравнения:

$$f'(x) = 0. \quad (7)$$

Представим уравнение (11) в развёрнутом виде, для чего найдём производную функционала (10) при $\alpha = \alpha_p$ и приравняем её к нулю:

$$f'(x) = A^*(Ax - b) + \sim_p (x - x_0) = 0. \quad (8)$$

Отсюда окончательно получим:

$$\left(A^* A + \alpha_p E\right) x = A^* b + \alpha_p x_0, \quad (9)$$

где A^* – транспонированная матрица A, E – единичная матрица. Решение системы (9) обеспечивает минимум функционала (6) при $\alpha = \alpha_p$. После этого следует переход на внешний цикл и т.д.

В качестве вектора x_0 при $\alpha = \alpha_p$ используется вектор граничных условий, а на каждой последующей итерации – регуляризованное приближение x, полученное на предыдущей.

Количество внутренних циклов и критерий остановки могут зависеть от конкретной задачи. Одним из наиболее надёжных является критерий невязки, использующий регуляризованное приближение, получаемое на каждой итерации внутреннего цикла.

Тестирования алгоритма регуляризации. Для тестирования используется задача о напряжённом состоянии основы и покрытия внутренней поверхности цилиндрического отверстия, находящегося под действием давления p.

Рассматриваемая область состоит из кольца $a \le r \le b$ с упругими постоянными v_1 и G_1 (покрытие) внутри круглого отверстия радиуса $r = b$ в большой пластинке (основа) с упругими постоянными v_2 и G_2. Внутренняя поверхность кольца находится под действием нормальных напряжений $\sigma_{rr} = -p$, а пластинка свободна от напряжений на бесконечности. Здесь и далее будем предполагать, что величины a и b являются безразмерными и $a = 1$. Решение этой задачи определяется через радиальные и тангенциальные напряжения [6].

При тестировании решение находится только в точках, лежащих на горизонтальной прямой, пересекающей обе области и совпадающей с положительным направлением оси абсцисс. Определитель оценивается в виде величины O, равной значению x степени числа $1x10^{-x}$. При измельчении сетки граничных элементов в СЛАУ появляются дополнительные уравнения, которые усиливают вклад в величину определителя. Поэтому большее значение имеет величина O_r, равная отношению O к общему числу уравнений в линейной системе.

Численное решение тестовой задачи получено при следующих значениях параметров: $a = 1$, $b = 1{,}05$, $v_1 = 0{,}25$, $E_1 = 44000$, $v_2 = 0{,}21$, $E_1 = 64000$ и $|p| = 8$. Круговые границы $r = a$ и $r = b$ были

разделены на 628 и 690 элементов, соответственно. Общее количество граничных элементов равно 2008, размерность линейной системы – 4016 уравнений.

Для данной задачи порядок определителя O оценивается равным 21276, а O_r = 3,177. Это говорит о серьёзном ухудшении вычислительных качеств задачи. Задача решалась с его помощью метода сопряжённых градиентов как без использования внешнего цикла по подбору α, так и с ним. Рассмотрим каждый случай в отдельности.

Таблица 1

Величины невязки метода регуляризации и метода сопряжённых градиентов при ν = 0,5 с применением алгоритма подбора параметра α

Номер итерации внешнего цикла	Невязка метода регуляризации	Число итераций метода сопряжённых градиентов
1	-	19
2	6.112785	16
3	1.779053	11
4	0.822087	12
5	0.296947	19
6	0.07937	1
7	0.000127	1
8	0.000066	1
9	0.000115	1
10	0.000064	1

Как видно из таблицы, происходит монотонное снижение невязки и к 6-7 итерации решение полностью стабилизируется. Характерным для данной методики является и распределение числа итераций метода сопряжённых градиентов по каждой итерации внешнего цикла. При стабилизации решения метод даёт сходимость до уровня $1x10^{-x}$ за одну итерацию. Само поведение невязки метода сопряжённых градиентов также является монотонным, без сколько-нибудь существенных скачков.

Выводы. Проведено тестирование алгоритма и программы расчёта двумерных задач определения напряжённого состояния кусочно-однородных изотропных линейно-упругих тел на основе непрямого метода граничного элемента. Показана корректность математических алгоритмов и их программной реализации.

Построен алгоритм регуляризации решения плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений, появляющихся после дискретизации системы интегральных уравнений, описывающих задачу расчёта напряжённого состояния кусочно-однородных тел.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. Некорректные задачи. Численные методы и приложения. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. 200 с.
2. Морозов В.А. О регуляризации некоторых классов экспериментальных задач. Вычислительные методы и программирование. Т.12. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1969. С.24 – 37.
3. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. М.: Наука, 1983. 200 с.
4. Старостенко В.И. Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии. Киев: Наук. думка, 1978. 228 с.
5. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 288 с.
6. Crouch S.L., Starfield A.M. Boundary element method in solid mechanics. Boston: George Allen & Unwin, 1983. 328 p.

Сведения об авторе:

Бобылев Дмитрий Евгеньевич – PhD, старший преподаватель кафедры математики и методики её преподавания, Криворожский государственный педагогический университет, физико-математический факультет, +38(096) 404-83-39.

E-mail: dmytrobobyliev@gmail.com

КРЕСТЫ, ИЗВИЛИНЫ И ПЕТЛИ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ И КРИВЫХ & СИНГУЛЯРНЫЙ АНЗАЦ, ДИСПЕРСИЯ ОБРАТНЫХ ВОЛН И ZGV-ПРОБЛЕМА, “НУЛЕЙ ГРУППОВОЙ СКОРОСТИ”

Бырдин В.М.

Анализируются дисперсионные кривые, уравнения и функции, трансцендентные, алгебраические (высокого порядка) или табличные и графические (численные или эмпирические) – произвольные и сколь угодно сложные. Метод анализа – на базе теории неявных функциях и положений комплексного анализа. Типичная дисперсия обратной воны описывается извилиной или квази-гиперболой, с двумя-тремя асимптотиками; точность аппроксимации довольно высока. Основными элементами выступают двукратные ветви, точки перегиба и пересечения (бидвукратные кресты), полупетля групповой скорости, а также, хотя и много реже, сингулярности высоких порядков. Трансцендентные кривые – слабо развитая область геометрии и теории функций, по сравнению с алгебраистикой. Наш анзац включает также так называемую (броско и в заголовках) проблему нуля и двух нулей групповой скорости («double and zero-group-velocity»), весьма актуальную в последние годы. А обратные волны – это общее направление междисциплинарной теории волн в механике и электродинамике, возродившееся с 1990/2000-ых гг. и богатое десятками ярких эффектов и перспективами приложений.

1. Вводные аспекты. Волновые явления – наиболее широкая сфера динамических процессов в природе и в технике и важнейшая креативная область многопрофильной науки [2]. Проблема ZGV, а также DZGV, от англ. “double and (one) zero-group-velocity” – это новые *недавние* задачи теории волн и технологий о точках нуля или двух нулей дисперсионной кривой групповой скорости от частоты. Эта проблематика стала довольно актуальной в последние несколько лет в связи с прошедшим в 1990/2000-ых гг., значительным подъёмом работ и бумом публикаций в науке и в СМИ о метаматериалах, отрицательном преломлении света и звука, суперлинзе и смежной проблематики. Однако, все эти новомодно нашумевшие направления по сути объединены одной междисциплинарной областью – теорией и практикой обратных волн, которой вот уже более ста лет (вспомним лампы – ЛОВ, обратной волны). Её основоположниками были английский механик Горак Лэмб (Horace Lamb, 1849–1934 гг. жизни) и советский физик Л. И. Мандельштам (1879–1944), см. [3–6] и др. А ренессанс пришёлся как раз на недавние, указанные два 10-летия на рубеже веков.

Замечание 1. Вернее бы сказать не “double”, не двойной, а “two”, и не DZGV, а TZGV: два нуля групповой скорости – хотя они же и двукратны, см. п. 3.

Обратная волна возникает в условиях наиболее сильной, отрицательной дисперсии. Это когда дисперсионная кривая волнового числа $k(\omega)$ имеет отрицательный наклон, а, следовательно, отрицательна и групповая скорость. Вернее, групповая скорость противоположна фазовой: $U=\partial\omega/\partial k$, $V=\omega/k$ – а в общем случае их вектора а- или анти-директивны [5], составляют тупой угол. В точках перемены знака наклона регулярной, гладкой [7] кривой как раз и лежат два нуля групповой скорости, и что на Западе окрестили акронимом и хлёстким выражением «ZGV и zero-group-velocity». См. рис. 1, ниже. Кроме того, имеется ещё и третий ноль – в начале кривой $k(\omega)$ на оси частот. В изолированных волноводах в механике и в электродинамике вообще все бегущие моды на критической частоте, как правило, имеют ноль и групповой скорости, и волнового числа. И, очевидно в этом смысле, работы по нулям-ZGV были известны с 1980-ых.

Свойство *адирекции*, противоположности скоростей U и V (*открытие* Лэмба, 1904г, термин автора, 2000-ые гг., [3, 5 и др.]), оказалось весьма важным, фундаментальным атрибутом волнового процесса, определяющим собой целый спектр обратноволновой *феноменологии*, принципиально новых, необычных и *удивительных* явлений, эффектов и свойств. Из них наиболее известны отрицательное преломление и фокусировка в искусственных средах, фотонных, спинтронных, радиоэлектронных и фононных метаматериалах или кристаллах. А далее и сверхразрешение на базе суперлинзы из таких кристаллов. Отсюда возникли чрезвычайно популярные идеи «плаща- и шапки-невидимки», проекты и технологии радиостелс, подводной бесшумности и т.д. Всё это элементы трёхмерной, 3Д-тематики. А параллельно ей растёт и волноводная проблематика, идущая ещё от Лэмба [3 (1904)]. В сложных бесконечных спектрах волноводов и структур различной природы существуют, как правило, множества частотно ограниченных, но тоже бесконечных спектров (счётных множеств) обратноволновых, **ОВ**-мод. В плоских и планарных системах реализуется и вся объёмная, хотя 2-, а не 3Д-феноменология. Т.о. волноводная ОВ-тематика – ещё одна, 2-ая и, очевидно, не менее богатая область общей теории и техники обратных волн (**ОВ**). Зарубежные

ZGV-публикации посвящены изучению собственно дисперсии, резонансам, детерминации материальных параметров p_K, ${}_1\{p\}^M$, волноводной системы через $U(\omega;p)$ и другим теоретическим и прикладным задачам (см. [8, 9] и мн. др.). В данном докладе на базе предыдущих публикаций автора даётся общий анализ дисперсии, сингулярные асимптотики (в особых точках, вкл. и нули), элементы кинематики и физики обратноволновых процессов. Мы предложили метод полного асимптотического описания, анзаца, и аппроксимации дисперсионных кривых простыми функциями, весьма просто и эффективно. Для крестов, петель, извилин и спиралей кривых и функций групповой скорости $U(\omega)$ и волнового числа $k(\omega)$ применены наши асимптоты извилистой кривой, её точек кратного ветвления и перегиба. (*Анзац*, от нем. ansatz, – «аналитическая структура решения» [10, с. 35, и др.], удачное понятие; возможно обобщение: в широком смысле, это аналитика исследования, в отл. от эксперимента и общей теории.)

Следует подчеркнуть приоритет советской науки по ряду достижений и в целом по обратноволновой тематике, это Л. И. Мандельштам, В. Е. Пафомов, В. Г. Веселаго и другие учёные. Пионерами применения теории (двух теорем) неявных функций к проблеме дисперсии были В. И. Кейлис-Борок (в механике, 1952 г., ИФЗ РАН), П. Е. Краснушкин и Е. Н. Фёдоров (в электродинамике, 1972, МИАН) и автор, В. М. Бырдин (1974, в акустике) [см. в 11]. Развитие метода на базе комплексного анализа, аппроксимация дисперсии и обратноволновая специфика – наши результаты, начиная с 1970-ых.

Вообще говоря, мы изучаем трансцендентные и произвольные, сколь угодно сложные кривые и функции, в т.ч. и таблично-графические (виртуальные [11]), и неявно заданные. В современных условиях стремительного усложнения научно-технических задач развиваемый автором тренд весьма актуален. В общем математическом случае функций-кривых используем переменные: $u=\sigma+i\alpha$, $u=u(z)$, $z=v+i\delta$, $\sigma(v,\delta)$, $\alpha(v,\delta)$. Связь с бегущей волной $\exp i(\pm kr-\omega t)$ через пропорции: $\sigma\sim k$, $v\sim\omega$; $\alpha\sim$ коэффициенту затухания волны, δ – диссипативному поглощению в системе.

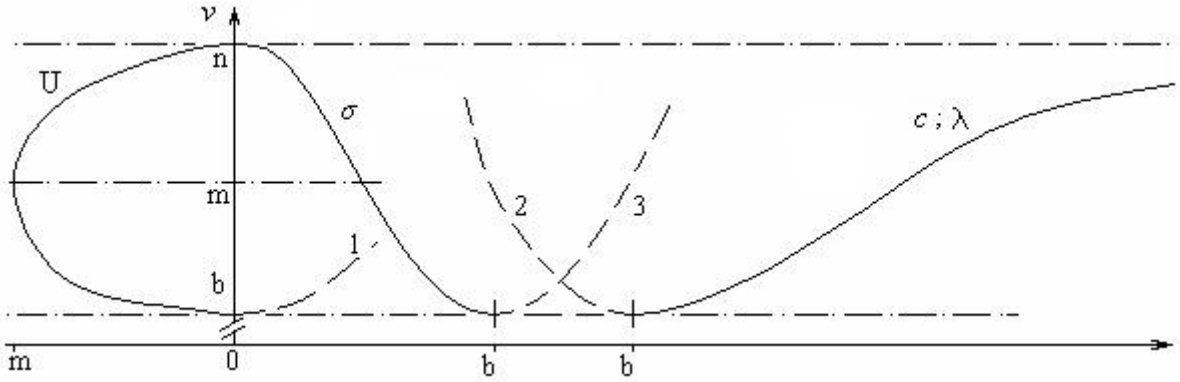


Рис. 1. Типичные кривые дисперсии и кинематики обратных волн: волнового числа $\sigma(v)$, групповой скорости U и фазовой V (длина волны ª аналогична V). Штриховые кривые для смежной прямой волны: *1 – U, 2 – V* и ª, *3 – σ*. Сингулярные точки *b* и *m* – двукратного ветвления *(σ, V* и ª*)* и перегиба *σ* и максимума *U;* и *n* – нулевая сингулярность.

Трансцендентные кривые – классическая область дифференциальной, а также, в асимптотике, и аналитической геометрии, ещё с Леонарда Эйлера [1] и других классиков. (Причём в этом труде корифея математики и учёного-энциклопедиста [1] большинство глав, с 1-ой по 22-ую из 28-ми, по анализу кривых, вкл. трансцендентные, гл. 21, и пересечение, гл. 19). Однако, далеко не все вопросы по трансцендентным функциям и кривым удаётся найти в известных математических руководствах, учебниках и статьях. Преобладают анализ алгебраических многообразий (*алгебраистика*) и вычислительная геометрия, см. например, [12, 13]. Впрочем, обзор современной математической литературы не входит в компетенцию физической работы или по механике, более близкой математике (автору пришлось «немало» поработать, тем не менее, остаётся «насколько нам известно»…). В частности, мы исследовали спирали *самопересекающиеся*, т.е. содержащие петли, но в литературе не нашлось и собственно этого, адекватного термина, хотя пересекающие сами себя спирали встречаются уже среди классических кривых, например, в [7, 14]. Правда есть *точка самоприкосновения*, см. [15]. В монографической статье [16, с. 7] весьма удачен термин *Кресты;* (однако, прямой *угол* пересечения креста – лишь исключение, типичен *острый)*. В физической теории волн, исследуя кресты в спектрах волновых чисел, обычно говорят о пересечении кривых. Крестам

соответствуют особые физические явления, резонансы, квазирезонансы, биволна ([11, 17] и др.).

2. Петли, кресты и глубокие извилины дисперсии и трансцендентных функций и кривых. Квазисинусоида, как элемент дисперсионной кривой, встречается уже в простых моделях периодических структур, например, в [18, с. 102, фиг. 59], а синусоида – простейшая трансцендентная извилистая кривая. В качестве примера довольно сложной, *глубоко извилистой* дисперсии приводим петлю групповой скорости «приподнятой» дисперсионной кривой обратной волны. В обзоре Н. А. Шульга [19, с. 33] одна из кривых пьезокерамического волновода имеет петлю групповой скорости для ОВ- и прямой (обычной) мод – рис. 2б. Согласно нашему анализу такого рода петле *U(v)* соответствует двойная извилина кривой волнового числа *σ(v)* и три точки двукратных ветвлений: одна в нулевой точке, $(0, v_1)$, и две в ненулевых, $_H$ и $_B$ (рис. 2*а)*. Так что здесь имеем две прямые моды, кривые *1* и *3*, и одну ОВ – кривая *2*. Такие полу-петли и петли, как элементы спиралей, мы и анализируем в нашей работе.

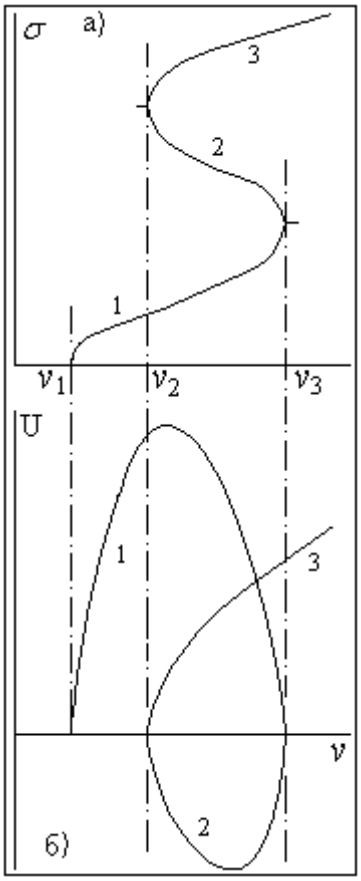


Рис. 2. Петля дисперсии *U(v)* (рис. *б*, по Н. А. Шульга) и порождающая её двойная извилина *σ(v)* (рис. *а*, по автору).

В целом, обобщая многочисленные статьи по теории диспергирующих и обратных волн и на базе нашего анализа, формулируем следующие положения.

Определение 1. Наиболее типична *извилина*, *извилистая* зигзаговидная кривая волнового числа *σ(v)* обратной волны (рис. 1). На довольно узком частотном диапазоне существования имеется *три особые точки:* перегиба и две двукратного ветвления. На перегибе два экстремума, строго *максимум групповой U(v)* и окрестность *минимума затухания α(v)* [5], здесь же известная фаза Эйри. Асимптотики в трёх особых точках вполне описывают весь диапазон (– ниже теорема 1). Так что и в целом этот анализ назовём *сингулярным*. Также и обратноволновую физику мы определяем как *сингулярную*, в смысле «особенную» по уникальности обратных волн и с сингулярным анализом.

Определение 2. Всякая волновая система *фундаментально*, «по определению», должна быть весьма *добротной*, *слабо поглощающей*. То есть для бегущих мод как *α/σ*, так и *δ/v<<1*.
В противном случае система «заперта» как поглотитель или экран.

Определение 3. *Второй* типичной дисперсионной кривой ОВ является *парабола* или гипербола, *квазигипербола:* без точки перегиба и с двумя сингулярностями. С ветвлением в точке критической частоты, $(\sigma,v)=(0,v_{KP})$, где лежит нулевая ZGV, [20], и *крестом* или *точкой пересечения*, бидвукратностью на нуле частот $(\sigma;v)=(\sigma_0;0)$, $\sigma_0>0$. (См. [11, рис. 3]). Обе эти сингулярности (или, кратко, *сингулы* – наша девиация термина) возникают в силу чётности дисперсионных уравнений или функций (см. след. определ. 4).

Определение 4. Все дисперсионные кривые, как правило, симметричны по обеим осям, *σ* и *v*. Дисперсионные уравнения – это чётные функции частоты, волнового числа и др. параметров системы. Иногда встречаются нечётные соотношения (например, [21, с. 341] и др.) или *несводимой* чётности: $D(\sigma,v)\neq\pm D(-\sigma,v)$; $D(\sigma,v)\neq\pm D(\sigma,-v)$.

Определение 5 *(Кресты бидвукратные). Бидвукратной* назовём особую точку, двукратную по двум, *взаимообратным* переменным, $u(z)$ и $z(u)$. Бидвукратные функции и кривые в окрестностях этих сингулярных точек (бидвукратных сингулярностей или, кратко, *бисингул)* образуют *кресты*, пересечение двух кривых и соотв. функций. Их асимптотика:

$$\pm(v)\cong\pm_0+a_1(v-v_0)\pm b_2(v-v_0)\sqrt{1+b_3(v-v_0)+0^{2)}}+0^{2)};\ 0^{2)}\leftrightarrow(v-v_0)^2,\ v\to v_0.$$

3. Анзац, аппроксимация и асимптотика дисперсии и кинематики обратных волн

Теорема 1. (о трёх асимптотиках и аппроксимации). *Пусть дана табулированная зависимость или, неявная, через дисперсионное уравнение, или явная аналитическая функция волнового числа*

±(ν) обратной волны и соответствующая дисперсионная кривая, являющиеся регулярными всюду, за исключением критических частот, как точек ветвления ν_{Kp} (кр = n, p). Тогда функция ±(ν) удачно описывается тремя локальными, аналитическими функциями ±(ν)ù$\pm_J(\nu)$, j=p,m,n, с простыми асимптотиками. $\pm_P(\nu) \cong \pm_p - a_p\sqrt{\nu - \nu_p}$ *+0(ν–ν_p) – в плюс-полуокрестности нижней критической частоты ν_P.* $\pm_M(\nu) \cong \pm_m - z_m(\nu - \nu_m)$ *+0(ν–ν_m)^3 – в окрестности точки перегиба ν_m. И, третье* $\pm_N(\nu) \cong a_n\sqrt{\nu_n - \nu}$ *+0(ν_n–ν)$^{3/2}$ – в минус-полуокрестности верхней критической частоты ν_n.*

Доказательство – на базе теорем о неявных функциях [20, 22]. Здесь положительные числа $\pm_j$, *j=p,m,* рассчитываются численно, а значения $a_K>0$, *к=p,n,* и $z_m>0$ определяются через дифференциалы а± и а*ν* (знак а – приращение) или производные неявной функции дисперсионного уравнения. *Задержка* z_m обратна групповой скорости, $z_m=1/U_m$. Высокоточность асимптотик достигается дополнительными степенями разложений.

4. Примеры обратных мод Лэмба и периодических структур. Волны Лэмба весьма распространены в быту и в технике и, несмотря на вековую историю, всё ещё исследуются во всём мире. В частности, *симметричная волна 1-го порядка* S_1^0 является основной ОВ в спектре всевозможных волновых движений упругого слоя [см. в 23]. Волны Лэмба – по имени Горака Лэмба, вышеназванного основоположника теории обратных волн. Однако самому Лэмбу не довелось открыть своих же обратных продольных волн в пластине, они были открыты полвека спустя, лишь в 1950-ые гг. [5, с. 1416]. Кривые дисперсии обратноволновых мод Лэмба подобны рисунку 1 и для них действительны три асимптоты (п. 3). Рассмотрим здесь анализ 1-го приближения, не требующий значительных компьютерных расчётов, но иллюстрирующий метод. Расчёт чисел a_n проведён нами и другими авторами. Для стальной пластины, с коэффициентом Пуассона *0,292*, получено $a_n=0{,}752\ldots$ и $\nu_n=2{,}89$. Нормировка волнового числа *±=kh*, частоты $\nu=\omega h/C_T$ и групповой скорости – на C_T, где *2h* – толщина пластины, C_T – скорость сдвиговых волн. Сравнение этих данных для *±(ν)* с расчётами на ПК (см. [23]) даёт хороший результат на половине частотного диапазона существования S_1^0. А это интервал длиной *0,18, νČ(2,71;2,89)*. Наши расчёты для групповой скорости дали приемлемый результат на 1/4-ой диапазона: при *ν=2,84* имеем точное численное *U=0,262* и асимптотическое *0,258*. Т.е. погрешность менее *2%* и убывает до нуля при *ν↓2,89.*

Простая электрическая *би-LC*-цепочка, сегодня подзабытая, известная около ста лет [18, 20 и др.], востребована и методически, и актуальна как простая модель целого ряда волновых структур в механике и электродинамике. Данная *бицепочка* представляет собой последовательное соединение элементарных *LC*-фильтров, индуктивностей, L_1 и L_2, и шунтирующих ёмкостей, C_1 и C_2. Нами найдено 8 таких периодических систем для моделирования [20, 23]. Это механическая би-*mK*-цепочка с продольными колебаниями (m_j – точечные массы, *j = 1,2,* K_j – жёсткости пружин). Она же как акустическая модель бикомпозита, что весьма востребовано сегодня в материаловедении, а *би-LC*-цепочка – простейшая электродинамическая модель такого композита. Далее, вращательная механическая цепочка; упрощённая упругая модель двухатомного кристалла [18]; бигофрированный акустический волновод – акустический фильтр; и, наконец, аналогичный акустическому, бигофрированный *радио-волновод;* [см. в 20]. Т.о., получаем *бицепочку, как уникум-модель 1-го приближения для восьми (!) волноводных систем с единым законом дисперсии (типа рис. 1 и 4) и обратной волной.*

5. Заключение. Законы дисперсии обратных и, в целом, диспергирующих волн могут быть аппроксимированы весьма просто и эффективно, с наперёд заданной, высокой точностью радикалами и полиномами типа $(\mu - \mu_O)^{K/2}$, *к=1,2,....* Встречаются также и четырёхкратные и более высокие сингулярности [11, 23]. В теоретических задачах анзац включает вывод дисперсионного (характеристического) уравнения, коэффициентов асимптотических разложений, анализ результатов и численный расчёт. При численных методах – анзац может дополнять. Ввиду узости или ограниченности частотных диапазонов обратных волн, достижима высокоточная аппроксимация всего частотного распределения дисперсии двумя-

тремя асимптотиками, или одной, высокого приближения (для 2-го типа дисперсии – определ. 3). Проведённые расчёты демонстрируют точность и эффективность предложенного метода.
В заключении подчеркнём важность всестороннего исследования обратных волн. И в разных отраслях механики и электродинамики и в других смежных областях науки и техники, вкл. и машиноведение. Обратным волнам, хотя и косвенно, посвящают сессии, спецвыпуски журналов, множество сайтов Интернета, пронобелевские представления и броские сюжеты на ТВ и в СМИ. И, очевидно, обратноволновая отрасль может стать базисной в физической науке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Эйлер Л. Введение в анализ бесконечных. Т. 2 (1748 г).– М.: ФМЛ, 1961. 391 с.
2. Неймарк Ю. И. Динамическая система как основная модель современной науки. Автоматика и телемех. № 3. С. 196–201. 1999.
3. Lamb H. On group velocity. Proc. L. Math. Soc., Ser. 2. V. 1. № 849. P. 473–479. 1904.
4. Мандельштам Л. И. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механики./ Под ред. С.М. Рытова.– М.: Наука, 1972. 440 с.
5. Бырдин В. М. Обратные волны: столетие первой работы, истоки и развитие ОВ-механики и электродинамики (обзор)// Радиотехника и электр. Т. 50. № 12. С. 1413–1438. 2005.
6. Маймистов А.И., Ляшко Е.И. Взаимодействие прямой и обратной волн в керровской среде. Оптика и спектроскопия. Т. 118. № 5. С. 837-842. 2015.
7. А) Математическая энц./ В 5 тт. Гл. ред. И. М. Виноградов. М.: СЭ, 1977–85. 27 см. (См. перевод [6Б]). Б)Encyclopedia of Mathematics/ In 13 vols. (тт. 1–10 – перевод [6Б]; изм. и доп. с 2011)/ Европ. матем. об-во, Хазевинкель Мих. и др.– Kl. Acad. Publ., Springer, 1987–2002/ encyclopediaofmath.org. /07.2017.
8. Hanyin Cui, Weijun Lin, Hailan Zhang, Xiuming Wang and Jon Trevelyan. Backward waves with double zero-group-velocity points in a liquid-filled pipe// JASA. V. 139. Is. 3 P. 1179. 2016.
9. Istvan A. Veres, Clemens Grunsteidl, David M. Stobbe and Todd W. Murray. Broad-angle negative reflection and focusing of elastic waves from a plate edge// Phys. rev. B93. 174304-8. 2016.
10. Бабич В. М., Киселёв А. П. Упругие волны. ВЧ теория.– СПб.: БХВ-Петер., 2014. 320 с.
11. Бырдин В. М. Извилины, петли и спирали трансцендентных функций и виртуальных кривых: сингулярный анализ, простые асимптотики, волновое приложение// Математика, её прилож. и матем. образование. Улан-Удэ, С. 121–126. 2017.
12. Иванов А. О., Тужилин А. А., Шафаревич А. И. Геометрия/ Энц. ст.; Каф. Диффер. геом. и прилож. МГУ. 12 с./ http://dfgm.math.msu.su/files/encycl_geometry.pdf -07.17г.
13. Discrete and Computational Geometry and Graphs: 18th Japan Conference, JCDCGG 2015, Kyoto, Japan, September 14-16, 2015, Revised Selected Papers by Jin Akiyama, Hiro Ito, Toshinori Sakai, Yushi Uno./ https://avxhm.se/ebooks/Discrete-and-Computational-Geometry-and-Graphs.html -08.18г.
14. Савелов А. А. Плоские кривые: Систематика, свойства, применение/ 3 изд. М.: Либроком, 2010. 296 с. (По существу 1960 г. изд.)
15. Бюшгенс С. С. Дифференциальная геометрия/ 2 изд. Уч. для ун. М.: КомКнига, 2006. 304 с.
16. Виро О. Я. Плоские вещественные алгебраические кривые: построения с контролируемой топологией// Алгебра и анализ. Т. 1. № 5. С. 1–73. 1989.
17. Meleshko V. V., Bondarenko A. A., Dovgiy S. A., Trofimchuk A. N., van Heijst G. J. F. Elastic waveguides: history and the state of the art. I // J. of Mathematic Sciences. N 1. P. 99–120. 2009.
18. Бриллюэн Л., Пароди М. Распространение волн в периодических структурах. М.: ИЛ, 1959.
19. Шульга Н. А. (Распространение гармонических волн в пьезокерамических, однородных или сложных, цилиндрических волноводах)// Прикл. мех. Т. 38: № 8. С. 46; № 12. С. 33. 2002.
20. Бырдин В. М. Дисперсия, аппроксимация и асимптотика обратных, нормальных и диспергирующих волн// Проблемы машиностр. и автоматизации. № 1. С.102–109. 2007.
21. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: ФМЛ, 2001. (Т. 6 Теорфизики)
22. Бырдин В. М. О затухании нормальных и поверхностных волн и зависимости их фазовых и групповых скоростей от потерь в средах// ДАН. 1978. Т.238. №3. С.552–554.
23. Бырдин В. М. Мамонова М. Г. Обратноволновые моды колебаний пластин, стержней и оболочек// Проблемы машиностр. и автоматизации. 2011. №1. С.81–91.

Информация об авторе

Бырдин Василий Михайлович. к.ф.-м.н., с.н.с. Институт Машиноведения им. А. А. Благонравова РАН, Лаб. Волновой механики машин. Тел.: +7499-135-04-30 (85-30); +7926-490-03-43.
E-mail: V_M_Byrdin@mail.ru

ОБ ОБРАТНОВОЛНОВОЙ ДИФРАКЦИИ ГАУССОВА ПУЧКА & РАСХОЖДЕНИЕ ЛУЧЕЙ И ДИАГРАММА НАПРАВЛЕННОСТИ; РАЗНОИМЁННАЯ АНТИДИФРАКЦИЯ, БИИНВЕРСИЯ И ФОКУСИРОВКА

Бырдин В. М., Косарев О. И., Мамонова М. Г., Пузакина А. К.

Рассмотрены краевые задачи и явления дифракции обратноволнового гауссова пучка, вполне соответствующие классической дифракции и нашей концепции антидифракции в разноимённых обратноволновых (ОВ-) системах; контрпримеры невозможны. Дифракция ОВ-пучка в «отрицательной среде» полностью адекватна расхождению классического гауссова пучка. В задаче о прохождении пучка через разнородный стык обычной, «положительной» и отрицательной сред описаны явления фокусировки прошедшего пучка и его биинверсии, двойного разворота по 180°, преломленного поля в целом и характеристики направленности пучка. Биинверсия влечёт трёхкратное обострение диаграммы направленности, хотя и местное, в зоне второго разворота. Обсуждается актуальность обратноволновых исследований в механике и электродинамике, возродившихся с 1990/2000-ых гг. и значительно возросших до многоплановой теории и технологий, вплоть до нобелевских и российских номинаций. В целом фундаментальная обратноволновая феноменология уже насчитывает несколько десятков эффектов.

1. Введение. Дифракция обратных волн – новое направление в теории волн и новый класс дифракционных задач, идущие от Л. И. Мандельштама, 1940, и В. Г. Веселаго, 1967, и продолженные Джоном Пэндри (Pendry J., 2000), Дэвидом Смитом (Smith D., 2001), В. В. Шевченко, 2003, и другими. Дифракционная феноменология включает, в широком смысле, и коротко-вол-новое приближение отражения и преломления, лучевой анзац [5] геометрической оптики и акустики. Ведь в основе дифракции лежат интерференция и диффузия (переизлучение [4]) отражённых, преломленных и ограниченных фронтов. В частности, любой реальный пучок лучей всегда расходится – даже лазерный луч, а волновой фронт всегда неоднороден, не строго плоский или сферический – и даже «звезды мерцают». (Ср. с дифракцией в широком смысле по Г. С. Горелику и другим авторам, см. [6, 7] и др.). Причём, в противовес глубокой дифференциации наук, единство радиофизики, акустики и оптики, механики и электродинамики проходит через общую теорию колебаний и волн и дифракцию, отмеченное ещё Да Винчи Л. в 15 веке и ставшее «идеологией общности» в 19/20-ом веке ([3, с. 320; 6–8; 9, т. 5, с. 311] и мн. др.) Особенно унифицирован волновой формализм математической физики [10; 11, с. 5; …].

В прикладной математике и теоретической физике со времён Зоммерфельда и Кирхгофа хорошо известна трансцендентность, математическая «неприступность» дифракционных задач. Поэтому для первых представлений и оценок вполне приемлемы и первые гипотезы, и лучевой подход (*диоптрика* [2], геометрическая оптика и акустика). В докладе представлены две краевые задачи: для безграничной «отрицательной, метасреды» (т.е. содержащей обратную волну) и для стыка *разноимённых* сред, обычной среды с метаструктурой (см. ниже определ. 1). Дано квазиоптическое, коротковолновое решение для параболического уравнения с оценкой точности по $a \ll 1$. Параболическое уравнение приближённое, занимает среднее положение между ещё более грубым, лучевым методом $a \downarrow 0$ и точным уравнения Гельмгольца. Кроме того, в других наших статьях решёно несколько дифракционных и *обратноволновых* (*ОВ*-) задач точными методами [12, 13 и др.].

В радиофизике широко известна модель отрицательной среды с простой формальной заменой знака показателя преломления на *–1*, *n=–1*, или $n_{1/2} = \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 / \varepsilon_2 \mu_2} = -1$ для стыка вполне согласованных сред (в общепринятых символах). А в акустике [14–16] ещё не предложено эффективных обратноволновых 3D-моделей. Здесь удачным типом, эталоном обратных, но волноводных мод являются ОВ–моды Лэмба в пластине, причём это довольно удобная модель как для теоретических расчётов, вкл. и дифракцию, и 2D-проблематику, так и экспериментальных исследований, см., например, [13, 17, 18] и мн. др. работы. Так что обобщение результатов на плоские и планарные системы вполне возможно: уже опубликован целый ряд работ, а контрпримеры неизвестны и невозможны. Кроме наличия обратных волн принципиальным условием антидифракции выступает разноимённость волновых систем [11, с. 10; 19].

Определение 1 (Разно- и одноимённые системы). *Волновые преобразования* (трансформации) – это переизлучение волн от исходных волн, падающих на границу сред или структур, при их дифракции, отражении, преломлении и рассеянии или при интерференции, нелинейной

генерации и др. *Одноимённые (или однородные) преобразования* – это трансформации прямая–прямая волна или обратная–обратная. *Разноимённые (или разнородные)*– это прямая–обратная и напротив, обратная–прямая. Понятия *разно-* и *одноимённого* естественно обобщаются и на др. объекты, связанные с такого рода преобразованиями и взаимодействиями в многомодовых системах. Например, нелинейное излучение гармоник при мощной фокусировке, при дифракции света на ультразвуке и т.п. А разделение разноимённых структур возникает не только при механической состыковке волноводов, но и иного рода, например, магнитным полем в спинтронике. (Синонимы «волновому преобразованию»: конверсия, обмен [5, с. 67]). Отметим также аналогию с разно- и одноимёнными зарядами в электрофизике.

Утверждение 1 (Разноимённая ОВ–антидифракция). *Аномальные и специфические, обратноволновые явления антидифракции проявляются в обратноволновых 3D-структурах или плоских и планарных волноводах только при разноимённых преобразованиях.*

Определение 2 (ОВ–антидифракция). *Обратноволновая антидифракция – это явления дифракции обратных волн в разноимённых структурах, аномальные или противоположные явлениям классической дифракции обычных, прямых волн. В основе антидифракционных эффектов лежат элементы обратноволнового антизеркального отражения и отрицательного преломления волновых фронтов на границах раздела разноимённых структур.* [11, 19].

Примеры антидифракции. Не расхождение, а сужение пучка; отскок, а не огибание препятствий; разного рода, противоположные излучения и др.

2. Гауссов ОВ-пучок: квазиоптический анзац, классическое расхождение

2.1. Общее коротковолновое приближение. В квазиоптическом (коротковолновом – *КВ*, высокочастотном – *ВЧ*) приближении, $ka >> 1$, также как и для *прямоволнового (ПВ-)* пучка [20, с. 462; 21, с. 400; и др.], реальный обратноволновой пучок хорошо описывается параболическим уравнением. Пусть осесимметричный излучатель («перевязка» пучка лучей) задан в точке $x = -x_J < 0$: $E = u\exp i(-kx - \mu t)$; $u(-x_J, r) = \exp(-r^2/2a^2)$, $a\sqrt{2}$ – квазирадиус источника. Тогда точное решение обратноволнового параболического уравнения, отличающееся знаком k ($k < 0$, как и при заменах $\exp(\pm i\mu t)$) будет:

$$u(x,r) = f(x)\exp(-ikr^2/2¡^2); \quad ¡^2 = x + x_J + ika^2; \quad f(x) = ika^2/¡^2. \tag{2.1}$$

Заметим, что (2.1) является также приближённым, асимптотическим при $ka >> 1$ и $ka \uparrow \infty$, решением исходного уравнения Гельмгольца. Т.е. на КВ это решение задачи достаточно точно описывает пучок (ср. также [21, с. 400]). В случае псевдоцилиндрического пучка решение аналогично – см. п. 3, [9; 20]. Полученное решение представляет и самостоятельный интерес, описан ОВ–пучок, установлена

Теорема 1 (об ОВ-пучке). *Дифракционное расхождение обратноволнового гауссова пучка, в точности совпадает с классическим, обычным расширением прямоволнового пучка. Амплитудное распределение тоже, противоположен лишь тривиальный знак амплитудной фазы.*

Действительно, в нормированных переменных:

$$u(s,p) = f(s)\exp(-p^2 f/2); \quad s = (x + x_J)/ka^2 > 0; \quad p = r/a; \quad f(s) = 1/(1 - is). \tag{2.2}$$

В учебнике [20, с. 465] дано в точности такое выражение, но для прямой волны. Параметр $x_Д = ka^2$ там назван *дифракционной длиной пучка*, а $x_Д/x$ – известным *числом Френеля F*, имеющим, однако, иное, хотя и близкое значение в теории оптических приборов [22], но лучше подходящее к сравнению квазидиаметра источника с диаметром 1-ой зоны Френеля. Так что наше *s*, на больших $x >> x_J$, обратно числу *F*. Модуль и фаза амплитуды пучка равны:

$$/u/ = (1 + s^2)^{-1/2}\exp(-p^2/2(1 + s^2)); \quad \cdot(s,p) = arctg\, s - sp^2/2(1 + s^2). \tag{2.3}$$

2.2. Диаграмма направленности и поверхности равных амплитуд. Цилиндрические эквиповерхности амплитуды, по e^{-m}, $m = const$, кроме множителя сферичности, $\cong s^{-1}$, описываются гиперболами $p^2/2m - s^2 = 1$, рис. 1б. Изофазы $\cdot_{CONST} = \cdot(s_{MAX};0) = arctg\, s_{MAX}$ на рис. 1а.

Расчёт *характеристики направленности, ХН:* $tg\gamma = r/(x + x_J) = p/\pm s$, $\pm = ka$, $\gamma << 1$, $s >> 1$,

$$F(\gamma) = \exp(-\pm^2 tg^2\gamma/2) \cong \exp(-\pm^2\gamma^2/2)(1 + \pm^2\gamma^4/3 + 0_\gamma^{6)}), \quad 0_\gamma^{6)} \sim \gamma^6. \tag{2.4}$$

Это однолепестковая, нечётко выраженная ХН с формальным раскрывом 180°. Но практически угол лепестка на уровне, например, 0.707 ($1/\sqrt{2}$), $\gamma_{07} = arctg(\pm^{-1}\sqrt{\ln 2})$ и $2\gamma_{07} = 9.52°$ при том же

$\pm = 10$. Рисунок *диаграммы направленности (ДН)* дан в [11, с. 29, рис. 24]. Полученные результаты верны и для пучка прямой волны, так как (2.3а) чётно по k (и по s).

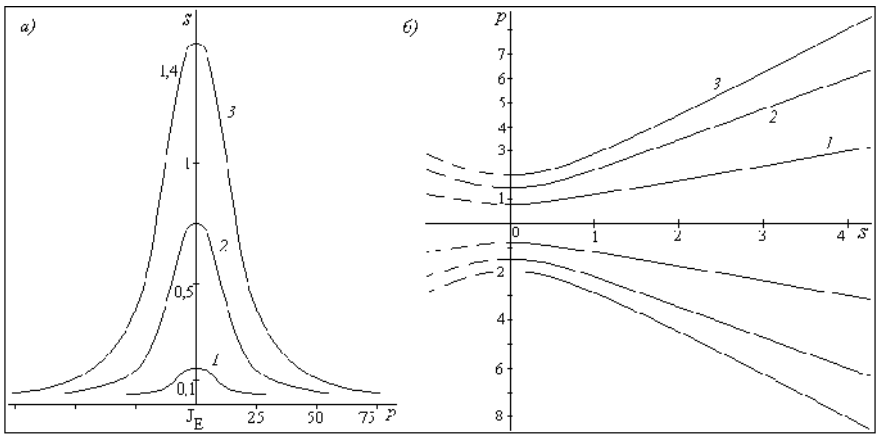


Рис. 1. а) Изофазы гауссова пучка, обратно- или прямо-волнового, в ближней зоне. Кривые *1, 2* и *3* соотв. значениям $s_{MAX} = 0.15, 0.75, 1.5$. *б)* Эквиповерхности равных амплитуд (кроме сферического убывания). Кривые *1, 2* и *3* соотв. $m = 0.25, 1, 2$.

3. Антидифракция пучка на границе разноимённых согласованных сред

3.1. Постановка задачи о преломлении. Пусть обратноволновой гауссов пучок нормально падает из отрицательной среды на границу раздела с обычной средой (индексы *1* и *2*, соотв., см. рис. 2, ниже). Рассмотрим электродинамическую задачу, т.к. столь же простых моделей отрицательных сред в механике и акустике ещё не созданы, а расчёты на волнах Лэмба в пластине довольно громоздки и сложны (см., например, [13]). Пусть среды вполне согласованы, строго *адекватны* между собой, т.е.: $£_1/£_2 = «_1/«_2 = -1$; $n_{1/2} = £_1«_1/£_1«_1 = -1$; $£_K$ и $«_K$ – электрическая и магнитная проницаемости. Рассмотрим двумерный псевдоцилиндрический пучок. Тогда для падающего ОВ-пучка получим решение, аналогичное (2): $E_{1Y}(x,z) = u_1 \exp i(-kx - \mu t)$;

$$u_1(s,p) = f_1(s)\exp(-p^2 f_1^2/2);\ p = z/a;\ f_1 = (1-is)^{-1/2};\ s = (x+x_J)/\pm a;\ -x_J < x < 0;\ \pm = ka\ . \qquad (3.1)$$

Отличие от сферических пучков лишь степенями в f_1 и, в частности, на бесконечности – $s^{-1/2}$.

3.2. Автофокусировка разноимённо преломленного пучка как элемент антидифракции: задача с компле́ксным диаметром пучка. Граничное условие для среды *2* $(x \ge 0)$ с прямоволновым пучком $E_{2Y}(x,z) = u_2 \exp i(kx - \mu t)$:

$$u_2(0,p) = u_1(0,p);\quad u_1(0,p) = f_0 \exp(-p^2 f_0^2/2);\qquad f_0 = f_1(s_0);\quad s_0 = x_J/\pm a > 0;\quad p = z/a.$$

Для решения задачи введём комплексный размер пучка при $x = 0$: $a_2 = a/f_0 = a(1-is_0)^{1/2}$. Очевидно, что решение поставленной задачи инвариантно к переходу от вещественного радиуса гауссова пучка к комплексному. Т.о.

$$u_2(S,P) = f_0 f_2 \exp(-P^2 f_2^2/2);\quad f_2 = (1+iS)^{-1/2};\quad S = x/\pm_2 a_2;\quad \pm_2 = ka_2;\quad P = z/a_2. \qquad (3.2)$$

Проанализируем (3.2). Переменные S, P, $\pm_2$ комплексны; $k > 0$. Выделив мнимость $Pf_2^2/2 = ¥ = ¥_R + i¥_J$, $¥_R = p^2/2(1+X^2)$, $¥_J = -X¥_R$, $p = z/a$, $X = (x - x_J)/\pm a$, для модуля и фазы амплитуды получим анзац в элементарных функциях. Так что в плоскости x_J имеем фокус, симметричный полю излучения из точки $-x_J$ и в полном соответствии с общими положениями об обратноволновой разноимённой авто- и сверх-фокусировке [6, с.648; 19; …]. Действительно, в фокусе образовалась «перетяжка» пучка с равномерной, нулевой фазой и с первоначальным размером поперечника $a\sqrt{2}$. (Ср. с расширением на границе раздела *(x=0):* $\sim_Э = a_{ЭКВ}/a2^{1/2} = (1+s_0^2)^{1/4} > 1$; так при $x_J/a = N\pm$, $N = 1, 2, ...,$ $\sim_Э = (1+N^2)^{1/4}$). Эквиповерхности амплитуд, по модулю (e^{-m}, $m \in const$), кроме фактора *псевдоцилиндрической концентрации* (с множителем $\cong x^{-1/2}$), описываются теми же гиперболами $p^2/2m - X^2 = 1$, что и падающего пучка в п. 2.2.

Факторы концентрации, сферический или цилиндрический, явно демонстрируют явление автофокусировки. Например, в (3.2) $f_2(x) = f_{2m}(x)\exp(-i\arg f_2)$; $f_{2m}(x) = 1/(1+X^2)^{1/4}\,|f_0|$. И поскольку в фокусе $X=0$, то имеем и цилиндрическую концентрацию пучка. Итак,

Теорема 2 (об ОВ-фокусировке и антидифракции). *Разноимённо преломленный пучок фокусируется симметрично падающему гауссову пучку, как по распределению амплитуд (эквиповерхностей), так и по фактору концентрации псевдо-сферического или -цилиндрического фронта.*

3.3. Антидифракция и биинверсия преломленного пучка. Фаза в (3.2) (*arg(f₀ f₂)=0.5arcrtgs₀–* $0.5arctg((s_0+X)/(1-s_0X)) = -0.5arctgX$; $\cdot_2(x,z) = -0.5arctgX + Xp^2/2(1+X^2)$) идентична фазе падающего пучка $\cdot_1(s,p)$ (см. в (3.1) и ср. (2.3б)) и тождественна ей при $x=0$, конечно, в силу граничных условий. Полная фаза волны, с учётом набега ($-\pm^2 s_0 = -kx_J$) на границе сред равна

$$\cdot_2(x,z) = -0.5arctgX + X(\pm^2 + p^2/2(1+X^2)) \qquad (3.3)$$

Очевидно, что *фазовые распределения гауссова ОВ- или ПВ-пучка относительно инвариантны фактору концентрации, типу волны, псевдо-цилиндрическому или -сферическому*.

Действительно, аргументы функций $u_1(x,z)$ и $u_2(x,z)$, и в целом сферического и цилиндрического полей отличаются только пренебрежимой разницей фаз фактора расхождения: 0.5 или 1 при *arctg* (например, в (3.3)).Теперь из (3.3) получаем уравнение фронтальных, изофазных поверхностей ($\cdot_{2C} = const$; $x, |z| < \infty$): $p^2=2(1+X^2)(-\pm^2+(0.5arctgX+\ddot{}_{2C})/X)$; $\ddot{}_{2C}=-0.5arctgX_m+\ +\pm^2X_m \cong \pm^2 X_m$, $\pm >> 1$, $X_m \sim \pm^{-1}$. Это уравнение и соотв. кривые *p(x)* практически совпадают с уравнением и изофазными кривыми сферического пучка (п. 2.3). Отличие лишь в $\mathrm{arctg}X \ll l$, или $<®/2$. Т.о., получена биинверсия изофаз–рис. 2.

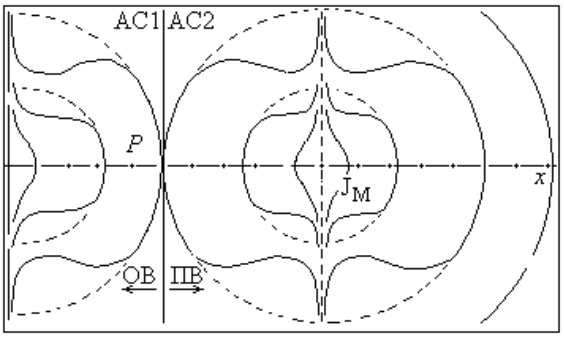


Рис. 2. Эволюция и биинверсия изофаз гауссова пучка, разноимённо преломленного на границе раздела ОВ-адекватных *(A)* сред, *AC-1* и *–2*. J_M – мнимый источник и суперфокус ($z=0$, $x=x_{J/M}$); *ОВ-ПВ* (или *ПВ-ОВ*, $\rightarrow\leftarrow$) – фазовые движения; *P* – падающий пучок.

Аналогично амплитудные эквиповерхности, представленные гиперболами (ср. с рис. 1б), демонстрируют абсолютную биинверсию поля относительно границы раздела сред $x=0$ (или $X=-X_J$) и фокальной плоскости $x=x_J$ ($X=0$), что изучено в п. 3.2. Также строго доказывается и биинверсия диаграммы ДН. Таким образом, доказывается

Теорема 3 (о биинверсии и инвариантности пучка). *Диаграмма и характеристика направленности гауссова коротковолнового пучка: 1) не зависят от типа излучения, цилиндрического или сферического, и 2) при преломлении на границе вполне ОВ-адекватных сред, испытывают двойной разворот по 180° относительно этой границы и фокальной плоскости.*

4. Заключение. Представлены модели обратноволновой дифракции, адекватные как классической дифракции, так и нашей концепции антидифракции в разноимённых системах [19 и др.]. Концепция обратноволновой (ОВ-) антидифракции составляет основную часть современной обратноволновой физики, механики и электродинамики. Другими её частями служат *ещё три класса фундаментальных явлений, это кинематические, динамические (нестационарные и радиационные) и нелинейные* (см., например, [11, 23]). В целом ОВ–физика насчитывает уже до полусотни ярких эффектов, явлений и свойств. Это многопрофильная, быстро растущая, в последние два 10-летия, отрасль с тысячами публикаций (включая СМИ и ЦТВ), стелс-проекты и «шапки-невидимки», [13–19, 23 и мн. др.]. Однако большинство указанных эффектов всё ещё недоработаны и мало востребованы. На сегодня наиболее развиты ОВ–электроника (лампы–ЛОВ ещё с 1950-ых гг. и др.), отрицательное преломления света и звука (от Л. И. Мандельштама, 1940) и сверхфокусировка (от В. Г. Веселаго, 1967). И в этом современный бум по метаматериалам, кристаллам и суперлинзе, «волшебным», «непревзойдённым», «магическим» (ссылки опускаем…). Однако, будем полагать, что неуклонный прогресс и

взвешенный анализ доведёт эти новшества и всю ОВ-феноменологию до высоких технологий и совершенной теории.

ЛИТЕРАТУРА

1. Εὐκλείδης. Κατοπτρικά. (Евклид, *Катоптрика/* Теория зеркал)/ В обработке Теона Александрийского. Александрия: Музейон/ обитель Муз, ок. 3 в. до н. э.
2. Descartes René. Dioptrika, 1637. (Декарт Р., *Диоптрика/* Геометрич. оптика) // Рассуждения о методе. М.: АН СССР, 1953. С. 69–190./ http://padaread.com/?book=38033&pg=2. 04.18г.
3. Столетов А. Г. Введение в акустику и оптику (МГУ, 1881/82), Соч. Т. 3. М.: ОГИЗ, 1947.
4. Малюжинец Г. Д. Развитие представлений о явлениях дифракции (к 130-летию со дня смерти Томаса Юнга). Успехи физич. наук. Т. 69. № 2. С. 321–334. 1959.
5. Бабич В. М., Киселёв А. П. Упругие волны. ВЧ теория. СПб.: БХВ-Петерб., 2014. 320 с.
6. Горелик Г. С. Колебания и волны. Введение в акустику, радиофизику и оптику. М.: ФМЛ, 2007. 656 с. Допол. Веселаго В. Г. (Об обратных волнах и метаматериалах). С. 647–648.
7. Тимофеев А.В. Геометрическая оптика и дифракция. УФН. Т. 175. № 6. С. 637–641. 2005.
8. Jilavyan S.H., Ghazaryan H.A. Diffraction of Plane Shear Wave in Piezoelectric Semi-Space at a Semi-Infinite Metallic Layer in the Dielectric Medium, Mechanics - Proceedings of NAS of Armenia. V. 68. N 1. P. 45–56. 2015.
9. Физическая энц-ия. В 5 тт./ Под ред. А. М. Прохорова. М.: БСЭ, 1988-94, -98.
10. Бабич В. М. Дифракции математическая теория. Математич. энц. Т. 2. М.: СЭ, 1979. (То же в «Encyclopedia of Mathematics», 2000-ые гг.)
11. Бырдин В. М. Проблемы дисперсии, сингулярной кинематики и общей теории нормальных волн и обратноволновых явлений/ Автореф. дисс. д.ф.-м.н. (снято 04.13г.), М.: ИРЭ РАН, 2012. 36 с.// http://www.dslib.net/radiofizika/ 07.18г.
12. Косарев О. И., Остапишин Н. М., Пузакина А. К. Звуковое давление в дальнем поле конечной цилиндрической оболочки. Проблемы машиностр. и автомат. № 4. С. 98-102. 2017.
13. Бырдин В. М. О дифракции нормальных волн в слоистых структурах: модель уровнемера, метод факторизации, волноводные квазирезонансы. Изв. РАН. МТТ. № 3. С. 83-99. 2017.
14. Ахманов С. А., Никитин С. Ю. Физическая оптика, Учеб. 2 изд. М.: МГУ–ФМЛ, 2004. 656с.
15. Бобровницкий Ю. И. Модели и общие волновые свойства двумерных акустических метаматериалов и сред. Акустич. ж-л. Т. 61. № 3. С. 283-294. 2015.
16. Грекова Е. Ф. Об одном классе единожды отрицательных акустических метаматериалов. Докл. АН. Т. 462. № 3. С. 295-298. 2015.
17. Norris A. N. and Shuvalov A. L. Elastic cloaking theory. arXiv:1103.6045 [cond-mat.mtrl-sci] April 1, 2011.
18. Katsuo Negishi, Hyo Ung Li. Strobo-Photo-elastic Visualization of Lamb Waves with Negative Group Velocity (…) on a Glass Plate. Jpn. J. Applied Phys. V. 35. P. 1. N 5B. P. 3175. 1996.
19. Mezil S., Bruno F., Raetz S., Laurent J., Royer D., and Prada C. Investigation of interfacial stiffnesses of a trilayer using zero-group-velocity Lamb modes. JASA. V. 138. P. 3202. 2015.
20. Бырдин В. М. Концепция обратноволновой антидифракции в общей теории волн: явления разноимённой антидифракции и афракции в многомодовых системах. XI Всерос. съезд по теор. и прикл. механики. 08.2015г./ Сб. д-дов (эл. изд.). Казань: КФУ. С. 656–657. 2015.
21. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны, 2 изд. М.: Радио и связь, 1988. 440 с.
22. Фотоника: Словарь терминов / Под ред. В. Н. Овсюка. Н-сиб.: СО РАН, 2004. 343 с., 29 см.
23. О работах В. В. Шевченко по теории обратных волн и смежные вопросы (К 70-летию со дня рождения)/ Ред. С.А.Никитов. Бырдин В.М.: А) Семинар. М., ИРЭ РАН, 10.2007; Б) Препринт-рукопись. М.: ИРЭ РАН, 2007. 28 с., ил.

Информация об авторах

Бырдин Василий Михайлович. к.ф.-м.н., с.н.с. Институт Машиноведения (ИМАШ) им. А. А. Благонравова РАН , Москва, Россия. E-m.: V_M_Byrdin@mail.ru

Косарев Олег Иванович. д.т.н., г.н.с., зав. отделом и зав. лаб. ИМАШ РАН. oikosarev@yandex.ru

Мамонова Марина Георгиевна. с.н.с. ИМАШ РАН. ocapy-mar@mail.ru

Пузакина Алла Константиновна. н.с. ИМАШ РАН. alla-puzakina@yandex.ru

ИЗГИБ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ С РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ ПО КРОМКЕ МОМЕНТАМИ

Василян Н.Г.

В статье рассматривается задача изгиба изотропной пластины $\left(0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b\right)$ с граничными условиями: две противоположные стороны шарнирно закреплены ($y = 0, b$), третья сторона загружена моментами $\left(x = a\right)$, а на четвёртой стороне исследуются разные граничные условия. Пластина свободна от распределённых нагрузок на лицевой поверхности. Решение этой задачи основано на классической теории пластин и на преобразованиях Кирхгофа и Томсона-Тэта [7]. Исследованы обобщённые перерезывающие силы на закреплённом краю пластины. Условие равновесия исследованы для каждого случая.

Традиционное решение задачи изгиба пластин, основанное на классической теории пластин и преобразованях Кирхгофа и Томсона-Тэта, исследуется с целью выявить интересные результаты и задачи, в которых применение этого преобразования не будет влиять на условие равновесия пластины.

1. Изгиб изотропной пластины .

Исследована прямоугольная пластина с параметрами a и b (Рис.1). Пластина свободна от поперечных нагрузок. $y = 0, b$ стороны шарнирно закреплены, а $x = a$ сторона пластины загружена моментами M.

Рис.1. Изотропная пластина

На стороне $x = 0$ исследуются разные граничные условия [3]. Уравнение изгиба для изотропной пластины по теории Кирхгофа имеет вид:

$$\Delta^2 w = 0 \tag{1.1}$$

с граничными условиями:

$$y = 0, b \qquad w = 0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \tag{1.2}$$

$$x = a \qquad w = 0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{M}{D}. \tag{1.3}$$

Чтобы удовлетворять граничным условиям на сторонах $y = 0, b$, решение задачи представляется в виде:

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \sin \lambda_n y,\ \ M = M(y) = M_0 \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \lambda_n y, \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{b},$$

В статье исследована задача для частного случая.

$$w(x, y) = f(x) \sin \lambda y,\ M = M_0 \sin \lambda y, \qquad \lambda = \pi / b. \tag{1.4}$$

Подставляя (1.4) в (1.1), для $f(x)$ получается:

$$f(x) = Ae^{\mathrm{a}x} + Bxe^{\mathrm{a}x} + Ce^{-\mathrm{a}x} + D' xe^{-\mathrm{a}x}. \tag{1.5}$$

На стороне $x = a$ имеются граничные условия (1.3) , удовлетворяя которым, количество неизвестных постоянных уменьшается.

$$B = De^{-2\lambda a} - \frac{M_0}{2D\lambda} e^{-\lambda a}, \qquad C = \frac{M_0 a}{2D\lambda} e^{\lambda a} - Ae^{2\lambda a} - 2D' a. \tag{1.6}$$

Неизвестные коэффициенты A и D найдутся из условий на стороне $x = 0$.

В статье исследованы перерезывающие силы и обобщённые перерезывающие силы:

$$Q_x(x,y) = -D\frac{\partial}{\partial x}\Delta w, \qquad Q_y(x,y) = -D\frac{\partial}{\partial y}\Delta w.$$

$$V_x(x,y) = -D\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right], \qquad V_y(x,y) = -D\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]. \tag{1.7}$$

2. Шарнирное закрепление.

Исследована задача (1.1)-(1.2)-(1.3) с граничным условием на стороне $x=0$ шарнирного закрепления[2]:

$$x=0 \qquad f=0, \quad f''=0. \tag{2.1}$$

Удовлетворяя граничным условиям (1.3) и (2.1), когда пластина на лицевой поверхности свободна от нагрузок, а сторона $x=a$ нагружена моментами M (другие три стороны шарнирно закреплены) для прогиба изотропной пластины получается

$$w(x,y) = \frac{M_0 a}{2D\lambda}\frac{1}{\mathrm{sh}^2\lambda a}\left[\mathrm{ch}\lambda a\,\mathrm{sh}\lambda x - \frac{x}{a}\mathrm{sh}\lambda a\,\mathrm{ch}\lambda x\right]\sin\lambda y\ . \tag{2.3}$$

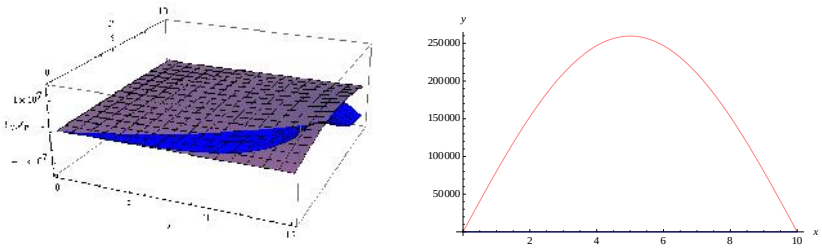
Перерезывающие силы и обобщённые перерезывающие силы примут вид:

$$Q_x(x,y) = \frac{M_0\lambda}{\mathrm{sh}\lambda a}\mathrm{ch}\lambda x\sin\lambda y, \quad Q_y(x,y) = \frac{M_0\lambda}{sh\lambda a}\mathrm{sh}\lambda x\cos\lambda y \tag{2.4}$$

$$V_x(x,y) = \frac{M_0\lambda}{2}\frac{1}{\mathrm{sh}^2\lambda a}\left[\left((1-\nu)\lambda a\,\mathrm{ch}\lambda a + (1+\nu)\mathrm{sh}\lambda a\right)\mathrm{ch}\lambda x - (1-\nu)\lambda x\,\mathrm{sh}\lambda a\,\mathrm{sh}\lambda x\right]\sin\lambda y$$

$$V_y(x,y) = \frac{M_0\lambda}{2}\frac{1}{\mathrm{sh}^2\lambda a}\left[\left(-(1-\nu)\lambda a\,\mathrm{ch}\lambda a + 2(2-\nu)\mathrm{sh}\lambda a\right)\mathrm{sh}\lambda x + (1-\nu)\lambda x\,\mathrm{sh}\lambda a\,\mathrm{ch}\lambda x\right]\cos\lambda y \tag{2.5}$$

Графики обобщённых перерезывающих сил отоброжены на Рис.2.



(а) Рис.2 (б)

(а)Обобщённые перерезывающие силы V_x, V_y при шарнирном закреплении.

(б) Обобщённые перерезывающие силы на $x=0$ закреплённом краю для конкретного материала и загружения пластины.

Условием равновесия для перерезывающих сил будет: $R_1 - R_2 + R_3 - R_4 = 0$, где R_i – интегралы перерезывающих сил по контуру пластины. То есть, условие равновесия имеет место при исследовании перерезывающих сил, что не выполняется при исследовании обобщённых перерезывающих сил (U_i интегралы обобщённых перерезывающих сил по контуру пластины):

$$U_1 - U_2 + U_3 - U_4 = \frac{2M_0(1-\nu)}{\mathrm{sh}^2\lambda a}(\lambda a + \mathrm{sh}\lambda a)(\mathrm{ch}\lambda a - 1). \tag{2.6}$$

Получается, что условие равновесия выполняется для обобщённых перерезывающих сил, когда исследуется изгиб пластины шарнирно закреплённым по всему контуру и загружённым моментами по одной стороне, при исследовании квадратной пластины. Таким образом, ограниченность классической теории пластин применима к рассматреваемой задаче об изгибе изотропных квадратных пластин. В угловых точках значение обобщённых сил $-V_x = V_y = 0$.

3. Жёсткое закрепление.

Исследуется случай жёсткого закрепления на стороне $x=0$:

$$x=0 \qquad w=0, \quad \partial w/\partial x = 0. \tag{3.1}$$

Следовательно,

$$f(x)=0, \quad f'(x)=0. \tag{3.2}$$

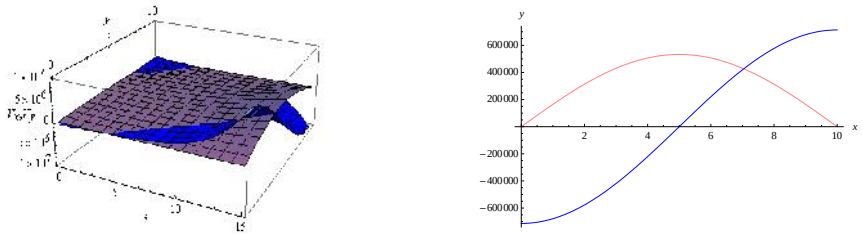
Из условия на стороне $x=a$ получено (1.6). Удовлетворяя условиям (3.2) для прогиба изотропной пластины, которая свободна от нагрузок на лицевой поверхности, а сторона $x=a$ загружена моментами M (на $x=0$ стороне пластина жёстко закреплена, а другие стороны шарнирно закреплены), будет:

$$w(x,y)=\frac{M_0}{D\lambda}\frac{1}{\operatorname{sh}2\lambda a-2\lambda a}\left[(a-x)\operatorname{sh}\lambda a\operatorname{sh}\lambda x-\lambda ax\operatorname{sh}\lambda(a-x)\right]\sin\lambda y. \tag{3.3}$$

Используя выражение для перерезывающих и обобщённых перерезывающих сил (1.7), для случая жёсткого закрепления получается:

$$\begin{aligned}
Q_x(x,y)&=\frac{2M_0\lambda}{\operatorname{sh}2\lambda a-2\lambda a}\left(\operatorname{sh}\lambda a\operatorname{ch}\lambda x+\lambda a\operatorname{sh}\lambda(a-x)\right)\sin\lambda y,\\
Q_y(x,y)&=\frac{2M_0\lambda}{\operatorname{sh}2\lambda a-2\lambda a}\left(\operatorname{sh}\lambda a\operatorname{ch}\lambda x-\lambda a\operatorname{ch}\lambda(a-x)\right)\cos\lambda y,
\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
V_x(x,y)=\ &\frac{M_0\lambda}{\operatorname{sh}2\lambda a-2\lambda a}\left[(1+\nu)\operatorname{sh}\lambda a\operatorname{sh}\lambda x+(1-\nu)\lambda(a-x)\operatorname{sh}\lambda a\operatorname{ch}\lambda x+\right.\\
&\left.+(1-\nu)\lambda^2 a\,x\operatorname{ch}\lambda(a-x)+(1+\nu)\lambda a\operatorname{sh}\lambda(a-x)\right]\sin\lambda y\\
V_y(x,y)=\ &\frac{M_0\lambda}{\operatorname{sh}2\lambda a-2\lambda a}\left[-(1-\nu)\lambda(a-x)\operatorname{sh}\lambda a\operatorname{sh}\lambda x+2(2-\nu)\operatorname{sh}\lambda a\operatorname{ch}\lambda x+\right.\\
&\left.+(1-\nu)\lambda^2 a\,x\operatorname{sh}\lambda(a-x)-2(2-\nu)\lambda a\operatorname{ch}\lambda(a-x)\right]\cos\lambda y
\end{aligned} \tag{3.5}$$



(а) Рис.3. (б)

(а)Обобщённые перерезывающие силы для пластин при жёстком закреплении.

(б) Обобщённые перерезывающие силы на $x=0$ закреплённом краю для конкретного материала и загружения пластины.

На Рис.3 отоброжены графики обобщённых перерезывающих сил. Условие равновесия для перерезывающих сил выполняется: $R_1-R_2+R_3-R_4=0$, а для обобщённых перерезывающих сил получается:

$$U_1-U_2+U_3-U_4=\frac{4M_0(1-\nu)}{\operatorname{sh}2\lambda a-2\lambda a}\left(\operatorname{sh}^2\lambda a-\lambda^2a^2\right). \tag{3.6}$$

Получается, что в случае жёсткого закрепления в угловых точках, обобщённые перерезывающие силы V_x, V_y принимают разные значения. На основании полученного можно заключить, что для этой задачи необходимо привлекать уточнённую теорию пластин [1], в которой отсутствуют преоброзование Кирхгофа и Томсона-Тэта.

4. Скользящий контакт.

Исследован случай закрепления на стороне $x=0$ скользящий контакт, а на других сторонах те же граничные условия;

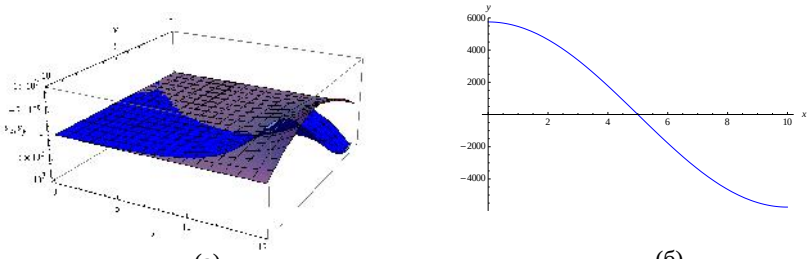
$$x=0\qquad \frac{\partial w}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}=0 \tag{4.1}$$

Удовлетворяя граничным условиям (4.1) и имея в виду (1.6), прогиб пластины, которая загружена моментами по одной стороне и скользящим контактом закреплена по противоположной стороне (две другие стороны шарнирно закреплены) имеет вид:

$$w(x,y)=\frac{M_0a}{2D\lambda}\frac{1}{\operatorname{ch}^2\lambda a}\left[\operatorname{sh}\lambda a\operatorname{ch}\lambda x-\frac{x}{a}\operatorname{ch}\lambda a\operatorname{sh}\lambda x\right]\sin\lambda y. \tag{4.2}$$

Рассчитаны перерезывающие силы и обобщённые перерезывающие силы по формулам (1.7) для случая закрепления (на стороне $x=0$ скользящий контакт). Условие равновесия для перерезывающих сил выполняется, а для обобщённых перерезывающих сил примет вид:

$$U_1 - U_2 + U_3 - U_4 = \frac{M_0}{\mathrm{ch}^2 \lambda a}\left(2\lambda a(1-\nu) + (3-2\nu)\mathrm{sh}2\lambda a\right). \qquad (4.3)$$



(а) (б)

Рис.4

(а)Обобщённые перерезывающие силы при граничном условии скользящий контакт.

(б) Обобщённые перерезывающие силы на $x=0$ закреплённом краю для конкретного материала и загружения пластины.

На рис.4 отображено распределение обобщённых перерезывающих сил по всему контуру и на закреплённой стороне пластинки. Как и в задачах, исследованных В.В.Васильевым [4], в этой задаче тоже в угловых точках закрепленного края изотропной пластины получается, что обобщённые перерезывающие силы принимают разные значения.

5. Свободный край.

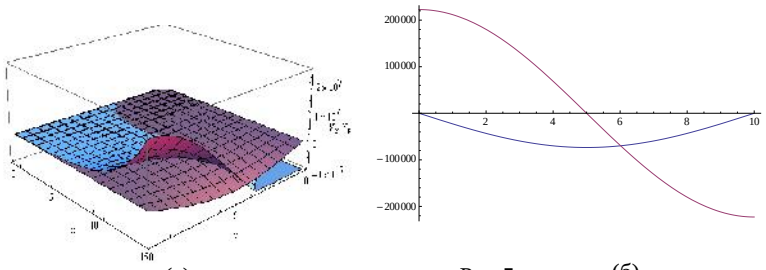
Рассматривается задача изгиба изотропной прямоугольной пластинки, когда $x=a$ сторона загружена моментами M, противоположная сторона пластинки свободна, а две другие стороны шарнирно закреплены.

$$x=0 \quad M_x = 0, \quad V_x = 0, \qquad (5.1)$$

Прогиб пластины, при загружении моментами по одной стороне (противоположенная сторона свободна, а две другие стороны шарнирно закреплены) имеет вид:

$w(x,y) = f(x)\sin \mathrm{a}\, y = \left(Ae^{\mathrm{a}x} + Bxe^{\mathrm{a}x} + Ce^{-\mathrm{a}x} + D'xe^{-\mathrm{a}x}\right)\sin \mathrm{a}\, y$, где постоянные коэффициенты A, B, C, D' найдены из граничных условий (5.1) и (1.3).

Для этого случая тоже рассчитаны перерезывающие силы и обобщёные перерезывающие силы по формулам (1.7) (Рис.5). Расчёты сделаны по программе Wolfram Mathematica и полученно, что условие равновесия пластины для перерезывающих сил выполняется, а для обобщённых преререзывающих сил: $U_1 - U_2 + U_3 - U_4 \neq 0$.



(а) Рис.5. (б)

(а)Обобщённые перерезывающие силы для пластин, при граничном условии свободная сторона.

(б) Обобщённые перерезывающие силы на $x=0$ закреплённом краю для конкретного материала и загружения пластины.

Получается интересный результат: для граничных условий используется преобразование Кирхгофа и Томсона-Тэта, чтобы решить задачу с граничным условием–свободная сторона, но условие равновесия пластины для обобщённых перерезывающих сил не выполняется. Условие выполяется $U_1 - U_2 + U_3 - U_4 = 0$, если $a << b$.

Таким образом, получается, что преобразования Кирхгофа и Томсона-Тэта обеспечивают статически эквивалентную замену поперечной силы и крутящего момента, действующих на краю пластины обобщённой поперечной силой Кирхгофа и парой угловых сил, что выражает суть этого преобразования [6]. Такая замена не влияет на прогиб пластины с малой относительной толщиной и оказывает влияние на распределение поперечной силы и крутящих моментов вблизи нагружённого края пластины. В угловых точках обобщённые перерезывающие силы дают разные значения, имеем концентрацию в угловых точках пластины и для равновесия пластины преобразуются сосредоточные силы в угловых точках пластины [5,8].

ЛИТЕРАТУРА

1. АмбарцумянС.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360с.
2. Антонян С.С., Василян Н.Г. Исследование напряжённо-деформированного состояния изгибаемой пластинки в окрестности шарнирно закреплённого края. «Young Scientists School-Conference» MECHANICS-2013. 1–4 октября 2013, Цахкадзор, Армения. С.69-73.
3. Белубекян М.В. Об уравнениях теории пластин, учитывающих поперечные сдвиги // В сб.: Проблемы механики тонких деформируемых тел (Посв. 80-летию С.А. Амбарцумяна). Ереван: Гитутюн, 2002. С. 67– 88
4. Васильев В.В. О преобразованиях Кирхгофа и Томсона-Тэта в калссической теории пластин. //Механика Твёрдого Тела. 2012. №5. С.98-107.
5. Васильев В.В. Кручение квадратной пластины угловыми силами и распределенными моментами. //Механика Твёрдого Тела. 2017. №2. С.20-31.
6. Мелешко В.В. Бигармоническая задача для прямоугольника: история и современимость. //Мат. Методы и физ-мех. поля, 2004. Т.47. №03
7. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Физматлит, 1963. 636с.
8. Vasilyan N.G. The investigation of stress concentration in corner points for orthotropic plate bending problem. TPCM, V international conference, 02-07 oct.,2017. Tsakhhadzor, Armenia. p.235.

Сведения об авторе:

Василян Нарине Гургеновна – к .-ф.-м.-н., научн. сотр. Института механики НАН Армении,

Тел.: (+374 91)707939, (+374 10)624802;

Адрес: Даниела Варужана 9, кв.29. Ереван, Армения, 0060.

E-mail: narine@mechins.sci.am

КОЛЕБАНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАСТИНЫ С ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫМ ПОКРЫТИЕМ В УСЛОВИЯХ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ

Ватульян А.О., Недин Р.Д.

Современные материалы, такие как композиционные и функционально градиентные материалы, используются в различных областях науки и техники. Во многих инженерных приложениях для адекватной диагностики процессов деформирования и механических свойств объектов необходимо более тщательно подойти к вопросам моделирования и разработать методы решения соответствующих новых обратных задач. В настоящей работе описана общая линеаризованная теория колебаний упругого предварительно напряжённого неоднородного тела. На основе этой модели рассмотрена частная задача о колебаниях прямоугольной пластины с неоднородным фунционально-градиентным покрытием в условиях начального напряжённо-деформированного состояния. Построено численное решение задачи с помощью метода конечных элементов на основе слабой постановки исходной задачи.

1. Линеаризованная постановка задачи о колебаниях предварительно напряжённого упругого тела. В литературе распространена модель предварительно напряжённого тела, в которой начальное деформированное состояние можно определить геометрически линейной теорией. Это допущение соответствует тому, что градиентами начальных перемещений можно пренебречь по сравнению с единицей. Будем считать, что тело в текущей конфигурации имеет объём V, ограниченный поверхностью $S = S_u \cup S_\pm$; тело жёстко защемлено на части границы S_u и нагружено периодически меняющейся нагрузкой на части границы $S_\pm$. Линеаризованная постановка задачи для малых добавочных величин без явного учёта начальной деформации имеет вид [1]:

$$(\sigma_{ij} + u_{i,m}\sigma^0_{mj})_{,j} + \rho\omega^2 u_i = 0, \tag{1}$$

$$u_i\,|_{S_u} = 0, \quad (\sigma_{ij} + u_{i,m}\sigma^0_{mj})n_j\Big|_{S_\sigma} = P_i, \tag{2}$$

Здесь σ_{ij} представляют собой компоненты линеаризованной части тензора напряжений, u_i – компоненты малого добавочного вектора перемещений, σ^0_{mj} – компоненты тензора предварительных напряжений, ρ – плотность тела, ω – круговая частота колебаний. При этом, компоненты добавочных тензоров напряжений и упругой деформации определяются согласно

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right). \tag{3}$$

2. Слабая постановка задачи для предварительно напряжённой неоднородной упругой пластины. Рассмотрим установившиеся колебания упругой изотропной тонкой пластины объёма $V = S \times \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right]$, жёстко закреплённой на части границы $l_u \times \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right]$, вызываемые периодически меняющейся равномерно распределённой нагрузкой величины $P = Pe^{i\mu t}$, приложенной к части границы $l_\sigma \times \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right]$. Будем считать, что все характеристики пластины заданы в виде неоднородных зависимостей:

$$\rho = \rho(x_k), h = h(x_3), \lambda = \lambda(x_k), \mu = \mu(x_k), i, j, k = 1, 2, 3.$$

Здесь $\lambda = \dfrac{2\lambda^*\mu}{\lambda + 2\mu}$ – параметр Ламе для плоского напряжённого состояния, λ^* – классический параметр Ламе, μ – модуль сдвига. Пусть в пластине содержится неоднородное объёмное распределение ПН $\sigma^0_{ij} = \sigma^0_{ij}(x_k)$, $i, j, k = 1, 2, 3$. Будем рассматривать связанные планарные и изгибные колебания. Согласно теории пластин в рамках модели Тимошенко, соответствующие гипотезы будут иметь вид:

$$u_1 = \theta_1 x_3 + \zeta_1, u_2 = \theta_2 x_3 + \zeta_2, u_3 = w, \tag{4}$$

где $\theta_\alpha = \theta_\alpha(x_\beta)$ – углы поворота нормали вдоль осей x_α, $\zeta_\alpha = \zeta_\alpha(x_\beta)$ – перемещения в плоскости пластины, $w = w(x_\beta)$ – прогиб пластины, $\alpha, \beta = 1, 2$. Обозначим заглавными буквами Θ_α, Z_α, W пробные функции, удовлетворяющие тем же главным условиям, что и функции θ_α, ζ_α, w, соответственно:

$$\Theta_\alpha\big|_{S_u} = 0, Z_\alpha\big|_{S_u} = 0, W\big|_{S_u} = 0. \tag{5}$$

Тогда, на основании гипотез (4) и граничных условий (5), слабая постановка сформулированной задачи примет вид [2]:

$$\int_S \Big\{ Q_{\alpha\beta}\Theta_{\alpha,\beta} + R_{\alpha\beta}Z_{\alpha,\beta} + S_\alpha\Theta_\alpha + T_\alpha W,_\alpha -$$

$$-\omega^2\left[P_2\theta_\alpha\Theta_\alpha + P_1(\theta_\alpha Z_\alpha + \zeta_\alpha\Theta_\alpha) + P_0(\zeta_\alpha Z_\alpha + wW)\right]\Big\} dS + \int_{l_\sigma} PWdl = 0, \tag{6}$$

где обозначено

$$Q_{\alpha\beta} = \Psi^2_{\alpha\beta},\ R_{\alpha\beta} = \Psi^1_{\alpha\beta},$$

$$\Psi^\gamma_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}(\Lambda_\gamma\theta_{m,m} + \Lambda_{\gamma-1}\zeta_{m,m}) + M_\gamma(\theta_{\alpha,\beta} + \theta_{\beta,\alpha}) + M_{\gamma-1}(\zeta_{\alpha,\beta} + \zeta_{\beta,\alpha}) + \Sigma^\gamma_{m\beta}\theta_{\alpha,m} + \Sigma^{\gamma-1}_{m\beta}\zeta_{\alpha,m} + \Sigma^{\gamma-1}_{\beta3}\theta_\alpha$$

$$S_\alpha = M_0(w,_\alpha + \theta_\alpha) + \Sigma^1_{m3}\theta_{\alpha,m} + \Sigma^0_{m3}\zeta_{\alpha,m} + \Sigma^0_{33}\theta_\alpha, \quad T_\alpha = M_0(w,_\alpha + \theta_\alpha) + \Sigma^0_{\alpha m}w,_m,$$

$$\Lambda_p = \int_{-h/2}^{h/2} \lambda x_3^p dx_3,\ M_p = \int_{-h/2}^{h/2} \mu x_3^p dx_3,\ P_p = \int_{-h/2}^{h/2} \rho x_3^p dx_3,\ \Sigma^p_{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma^0_{\alpha\beta} x_3^p dx_3,$$

$$\alpha, \beta, \gamma, m = 1, 2,\ p = 0, 1, 2.$$

Введённые функции $\Lambda_p, M_p, P_p, \Sigma^p_{\alpha\beta}$ представляют собой осреднённые характеристики соответствующих функций, зависящие от координат x_1, x_2.

3. Решение задачи о колебаниях для однородной пластины с предварительно напряжённым функционально-градиентным покрытием. Рассмотрим частную постановку задачи для однородной пластины с функционально-градиентным покрытием толщины δ, находящимся в однородном предварительном напряжённом состоянии (рис.1).

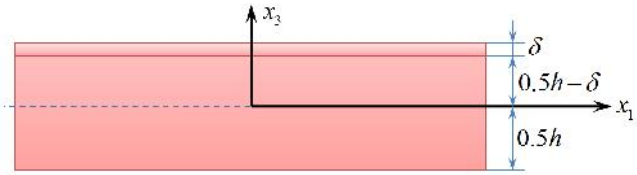


Рис.1. Поперечное сечение пластины с покрытием толщины δ.

Будем считать, что единственная отличная от нуля компонента тензора предварительных напряжений $\sigma^0_{11} = \sigma^0 = \text{const}$. Таким образом, на отрезке $x_3 \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right]$ предварительное напряжённое состояние описывается следующей кусочно-постоянной функцией (рис.3):

$$\sigma^0_{11}(x_3) = \begin{cases} 0 & \text{при } x_3 \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2} - \delta\right]; \\ \sigma^0 & \text{при } x_3 \in \left[\frac{h}{2} - \delta, \frac{h}{2}\right]. \end{cases} \tag{7}$$

Материал пластины описывается постоянными коэффициентами Ламе λ_p, μ_p и плотностью ρ_p (p – plate), в то время как материал покрытия описывается градиентными

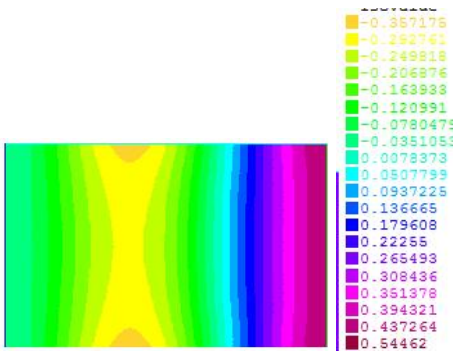
линейными законами; на отрезке $x_3 \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right]$ имеем следующие кусочно-непрерывные функции:

$$F(x_3) = \begin{cases} F_p & \text{при } x_3 \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2} - \delta\right]; \\ F_p + \frac{F_c - F_p}{\delta}\left(x_3 - \frac{h}{2} + \delta\right) & \text{при } x_3 \in \left[\frac{h}{2} - \delta, \frac{h}{2}\right], \end{cases} \tag{8}$$

где в качестве F_p условно обозначен любой из материальных параметров λ_c, μ_c, ρ_c (c – coating) на поверхности покрытия при $x_3 = h/2$.

Задача для прямоугольной пластины с размерами l (размер вдоль оси x_1), b (размер вдоль x_2), h была решена с помощью метода конечных элементов на основе полученной слабой постановки (6), преобразованной для рассмотренного частного случая. На рис. 2 приведены поля прогиба, углов поворота нормали и планарных перемещений для случая параметров задачи $l = 0.92$ м (размер пластины вдоль оси x_1), $b = 0.58$ м (размер пластины вдоль оси x_2), $h = 0.1$ м, $\delta = 0.1h$, $p = -157$ кг/см^2 (перевести в СИ!), $f = \omega / 2\pi = 10$ Гц (частота колебаний между вторым и третьим резонансом), $\sigma_0 = E_p \cdot 10^{-4}$, $\nu = 0.29$, $E_p = 2 \cdot 10^6$, $\rho_p = 7700$ кг/м^3, $E_c = 2E_p$, $\rho_c = 2\rho_p$ кг/м^3. Переход от модуля Юнга и коэффициента Пуассона к коэффициентам Ламе осуществлялся по стандартным формулам.

Можно проверить, что в частном случае, для однородной пластины, находящейся в условиях однородного предварительного напряжённого состояния, при выполнении соответствующих условий деформирования Кирхгофа, выведенная постановка задачи разделяется на две классические задачи об изгибных и планарных колебаниях пластины. Отметим также, что в работе [4] Е. Бринеллем получена постановка аналогичной задачи в том случае, когда в трансверсально-изотропной пластине с постоянными характеристиками имеется однородное плоское начальное напряжённое состояние, характеризующееся тремя постоянными компонентами и действующее в срединной поверхности, а также учитывается начальный прогиб. По сравнению с ней постановка (6) обладает рядом преимуществ: в ней учтена полная неоднородность упругих характеристик материала и предварительных напряжений, включена планарная составляющая колебаний, а также отсутствует явная зависимость от начального прогиба, что представляет удобство при решении целого класса обратных задач об идентификации предварительного напряжённого состояния.



А.

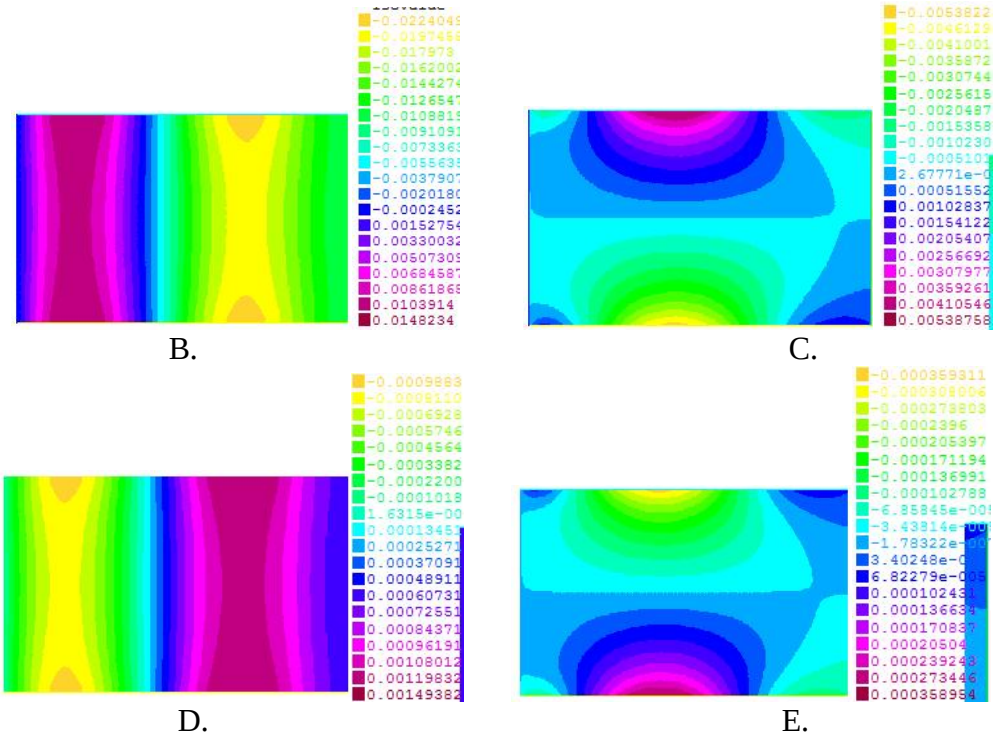


Рис. 2. Результаты конечноэлементного расчёта: A) поле прогиба w, см; B-C) поля безразмерных углов поворотов нормали θ_1, θ_2; D-E) поля планарных перемещений ζ_1, ζ_2 см.

Настоящее исследование было поддержано Российским Научным Фондом (проект № 18-11-00069).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ватульян А.О., Дударев В.В., Недин Р.Д. Предварительные напряжения: моделирование и идентификация. Монография. Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ. 2015. 206 с.
2. R.D. Nedin, A.O. Vatulyan, I.V. Bogachev. Direct and inverse problems for prestressed functionally graded plates in the framework of the Timoshenko model. Mathematical Methods in the Applied Sciences. V. 41. No. 4. 2018. P. 1600–1618
3. R.D. Nedin, V.V. Dudarev, A.O. Vatulyan. Some aspects of modeling and identification of inhomogeneous residual stress. Engineering Structures. – V. 151. – 2017. – P. 391-405
4. Brunelle E. J. Buckling of transverelsy isotropic Mindlin plates. AIAA Journal. 1971. Vol. 9, No. 6. P. 1018-1022.

Information about authors:

Vatulyan Alexander Ovanesovich – Head of the Dept. of Elasticity Theory, Southern Federal University, Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences named after I.I. Vorovich, +7 (863) 2975 111; Head of the Dept. of Differential Equations, Vladikavkaz Scientific Center of Russian Academy of Sciences, Southern Mathematical Institute, +7 8672 53‑98-61

Nedin Rostislav Dmitrievich – Senior Lecturer, Southern Federal University, Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences named after I.I. Vorovich, +7 (863) 2975 111; Senior Researcher, Vladikavkaz Scientific Center of Russian Academy of Sciences, Southern Mathematical Institute, +7 8672 53‑98-61
E-mail: rdn90@bk.ru

ИНДЕНТИРОВАНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ ПОКРЫТИЙ

Ватульян А.О., Плотников Д.К.

В работе представлена модель деформирования функционально-градиентного покрытия. В основе приближённой модели лежат гипотезы о характере компонент поля перемещений, позволяющие учитывать произвольные законы упругих характеристик полосы по толщине, в том числе, разрывные. Исследована задача о равновесии неоднородной упругой полосы под действием жёсткого штампа с основанием гладкой формы. Построены основные зависимости, характерные для эксперимента индентирования. Проведено сравнение полученных результатов с решением, построенным на основе метода конечных элементов. Произведена оценка погрешности модели, обсуждены области её применимости.

Для придания различным элементам инженерных конструкций заданных свойств применяется нанесение покрытий. В последние годы широкое развитие получили функционально-градиентные покрытия. Неоднородность их свойств по толщине позволяет добиться лучших результатов по сравнению с однородными покрытиями при изготовлении объектов, обладающих повышенной прочностью, износостойкостью и другими необходимыми характеристиками. В настоящее время существует большое количество технологий изготовления градиентных покрытий, таких как осаждение из паровой фазы, электрофоретическое осаждение, импульсное лазерное напыление и др. [1]. В процессе нанесения покрытия на подложку, получаемая система имеет сложную неоднородную структуру, поэтому важным этапом в разработке и оптимизации функционально-градиентных покрытий является первоначальное определение их характеристик. Отметим, что одним из наиболее распространённых способов идентификации приповерхностных свойств различных материалов, в том числе, и покрытий, является метод индентирования [2,3].

В [4] построен ряд приближённых моделей контактного взаимодействия для тел с тонкими покрытиями и прослойками. Представленные модели основаны на асимптотическом анализе решения задачи о равновесии упругой однородной полосы в предположении о малой толщине полосы. Решение задач о контактном взаимодействии приводит к исследованию некоторых операторных уравнений, схожих с уравнением для модели Рейсснера [4].

Исследование контактных задач для неоднородных структур обычно осуществляется на основе решения интегрального уравнения с главной логарифмической частью в ядре, а символ ядра находится численно [5].

В [6] представлена приближённая модель деформирования неоднородной упругой полосы, позволяющая получать аналитические решения контактной задачи. В основе формирования моделей лежат гипотезы о линейном изменении перемещений по толщине. Подобные гипотезы позволяют строить приближённое решение контактной задачи для непрерывных законов неоднородности, однако, если свойства полосы изменяются разрывным образом, такие гипотезы не позволяют корректно учесть разрывы в компонентах тензора напряжений.

В настоящей работе представлена новая модель деформирования функционально-градиентной полосы, основанная на гипотезах, позволяющих учесть произвольные законы неоднородности покрытия, в том числе, имеющие разрывы.

1. Контактная задача для неоднородной полосы

Рассмотрим задачу о контактном взаимодействии жёсткого индентора гладкой формы с неоднородной упругой полосой, жёстко сцеплённой с недеформируемым основанием. Трение между контактными поверхностями не учитывается. С полосой связана прямоугольная система координат $\left(x_1, x_3\right)$ с началом в основании полосы, ось x_3 направлена вверх. Параметры Ляме полосы представляют собой произвольные положительные функции координаты x_3 и могут иметь разрывы или сильную градиентность. Основание штампа описывается уравнением $x_3 = f\left(x_1\right)$.

В основе приближённой модели лежит предположение о характере изменения компонент поля перемещения по толщине. Примем следующие гипотезы:

$$u_1 = \psi_1(x_3)u(x_1), \quad u_3 = \psi_3(x_3)w(x_1),$$
$$\psi_1 = g_1(x_3)/g_1(h), \quad \psi_3 = g_3(x_3)/g_3(h), \tag{1.1}$$
$$g_1 = \int_0^{x_3} \frac{1}{\mu} dx_3, \quad g_3 = \int_0^{x_3} \frac{1}{\lambda + 2\mu} dx_3$$

где h – толщина полосы, а функции $u(x_1)$ и $w(x_1)$ представляют собой перемещения верхней границы полосы. Отметим, что принятые гипотезы содержат параметры Ляме и, таким образом, характер изменения перемещений по толщине зависит от законов неоднородности полосы, что позволяет учитывать произвольные законы неоднородности, в том числе, содержащие разрывы. Так, например, для однородной полосы компоненты вектора перемещений представляют собой линейные по x_3 функции [6], в случае, когда полоса состоит из нескольких однородных слоёв, перемещения являются кусочно-линейными по толщине.

Рассмотрим вспомогательную задачу о действии нормальной нагрузки $q(x_1)$, локализованной на участке $|x_1| \le a$ верхней границы полосы. Для решения краевой задачи используем приближённый подход, основанный на вариационном принципе Лагранжа. Запишем функционал потенциальной энергии, который с учётом (1.1) упрощается и принимает вид

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} (A_{11}u'^2 + 2(A_{12}u'w + A_{21}uw') + A_{20}w^2 + A_{10}u^2 + A_{22}w'^2)dx_1 - \int_{-a}^{a} qwdx_1 \tag{1.2}$$

коэффициенты A_{ij} определяются формулами:

$$A_{10} = \int_0^h \mu\psi_1'^2 dx_3, \quad A_{11} = \int_0^h (\lambda + 2\mu)\psi_1^2 dx_3, \quad A_{12} = \int_0^h \lambda\psi_1\psi_3' dx_3,$$
$$A_{20} = \int_0^h (\lambda + 2\mu)\psi_3'^2 dx_3, \quad A_{21} = \int_0^h \mu\psi_1'\psi_3 dx_3, \quad A_{22} = \int_0^h \mu\psi_3^2 dx_3$$

Из условия стационарности функционала (1.2) получим уравнения Эйлера в виде системы дифференциальных уравнений второго порядка

$$-A_{11}u'' - (A_{12} - A_{21})w' + A_{10}u = 0,$$
$$-A_{22}w'' + (A_{12} - A_{21})u' + A_{20}w = q_* \tag{1.3}$$

где $q_* = q(x_1)$ $|x_1| \le a$, $q_* = 0$ $|x_1| > a$. Применяя в системе (1.3) преобразование Фурье, установим связь между трансформантами вертикального смещения и нормального напряжения в виде

$$W = K(\alpha)Q, \quad K(\alpha) = \frac{a_1\alpha^2 + a_0}{b_2\alpha^4 + b_1\alpha^2 + b_0} \tag{1.4}$$

где коэффициенты a_i, b_i задаются выражениями

$$a_0 = A_{10}, \quad a_1 = A_{11}, \quad b_0 = A_{10}A_{20}, \; b_1 = A_{10}A_{22} + A_{11}A_{20} - (A_{12} - A_{21})^2, \quad b_2 = A_{11}A_{22}$$

Осуществляя обращение в преобразовании Фурье, получим интегральное уравнение контактной задачи в виде:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} k(\xi - x_1)q(\xi)d\xi = -\delta + f(x_1), \quad |x_1| \le a \tag{1.5}$$

где $k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\alpha)e^{i\alpha t}d\alpha$, $t = \xi - x_1$, δ – глубина внедрения штампа.

Переходя в (1.4) к исходным функциям, получим операторное уравнение, связывающее вертикальное смещение на верхней границе полосы с нормальной нагрузкой

$$b_2 w^{IV} - b_1 w'' + b_0 w = -a_1 q_*'' + a_0 q_* \qquad (1.6)$$

с условиями $w(x_1) \to 0 \quad (x_1 \to \infty), \quad w = -\delta + f\left(x_1\right) \quad (\left|x_1\right| \le a)$. Из стыковых условий в точках границы контактной области определяется связь размера площадки контакта с величиной внедрения штампа. Характерная для испытания на индентирование зависимость «сила-внедрение» строится из условия равновесия штампа. Окончательно получим эти соотношения в аналитическом виде для штампа параболической формы $f\left(x_1\right) = 0.5R^{-1}x_1^2$.

$$\delta = R^{-1}\left(f_1\left(a\right) + \frac{1}{2}a^2 \right), \quad P = R^{-1}\left(f_2\left(a\right) + p_1 a^3 + p_0 a \right) \qquad (1.7)$$

где $f_1\left(a\right) = \dfrac{a s_2 \mathrm{cth} ka + a s_1 + s_0}{c_1 \mathrm{cth} ka + c_2}$, $f_2\left(a\right) = -2\dfrac{a^2 A_{20} s_2 \mathrm{cth} ka + a^2 A_{20} s_0 + a s_3 + s_4}{c_1 \mathrm{cth} ka + c_2}$, $k^2 = A_{10}/A_{11}$,

$p_0 = \dfrac{2}{A_{10}}\left(\left(A_{12} - A_{21}\right)^2 - A_{10}A_{22}\right)$, $p_1 = -\dfrac{2}{3}A_{20}$, , коэффициенты s_i, c_i зависят от A_{ij}.

2. Результаты вычислительных экспериментов

Проведём сравнение решения контактной задачи по модели (1.1) с решением на основе метода конечных элементов. В рассматриваемых далее примерах коэффициент Пуассона считается постоянным, а модуль Юнга изменяется по толщине и представлен в виде закона $G\left(x\right) = E\left(x\right)/E_0$, где E_0 – характерное значение модуля упругости в основании полосы, $x = x_3/h$.

На Рис.1а представлена зависимость силы от величины внедрения в безразмерном виде, $P_* = P/E_0 h$, $\delta_* = \delta/h$ для возрастающего закона $G = 1 + 2x^2$. В рамках конечно-элементной модели функционально-градиентное покрытие реализовано в виде многослойной полосы с изменяющимися значениями упругих характеристик от слоя к слою. Сплошная кривая соответствует решениям по формуле (1.7), точками представлено решение, построенное на основе линейных по толщине гипотез [6], пунктирная кривая соответствует решению МКЭ. Отношение радиуса кривизны штампа к толщине полосы в данном примере составляет $R/h = 10$. При одинаковом внедрении приближённые модели дают завышенные значения силы и максимального нормального напряжения под индентором. Погрешность решения по формуле (1.7) по сравнению с МКЭ для значений отношения $a/h \ge 0.92$ не превосходит 5%. На Рис. 1б изображено безразмерное вертикальное смещение верхней границы полосы $w_* = w/h$ вблизи области контакта от безразмерной координаты $\xi = x_1/h$.

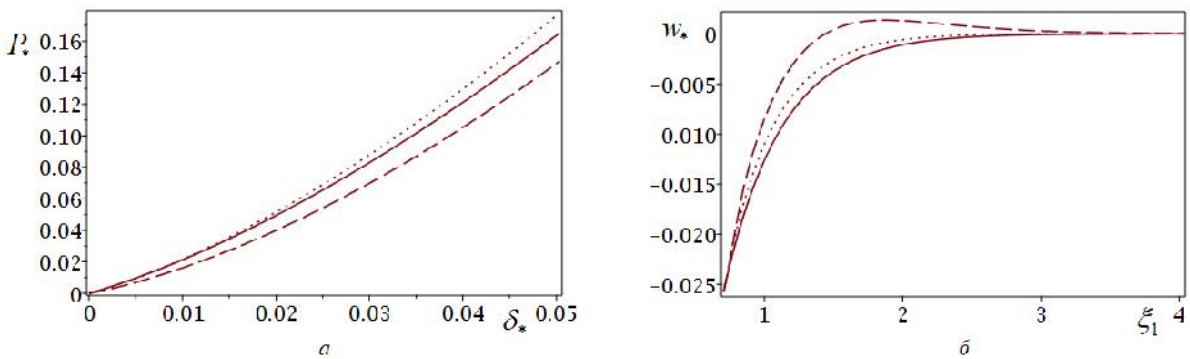


Рис. 1

Построено решение для полосы, состоящей из двух слоёв: относительно жёсткого покрытия и подложки. Для отношения модулей Юнга покрытия и подложки равного 10, разница в решениях по формулам (1.7) и МКЭ не превышает 5% для величин $a/h \ge 1.72$; при $a/h \sim 0.1$ разница не превосходит 20%.

Исследуем влияние законов неоднородности на основные характеристики индентирования. В качестве примеров выбраны возрастающий $G_1(x)$, убывающий $G_2(x)$ и немонотонный $G_3(x)$ законы, средние значения которых на отрезке $[0,1]$ равны (см. Рис. 2а)

$$\int_0^1 G_i(x)\,dx = G_0, \quad i = 1,2,3$$

$$G_1 = \frac{4+\pi}{2\pi} + x, \quad G_2 = \frac{2}{3}\frac{3+2\pi}{\pi} - x^2, \quad G_3 = 1 + \sin \pi x$$

Анализ результатов показал, что для выбранных законов неоднородности различия в зависимостях «сила-внедрение» незначительно. На Рис. 2б представлена зависимость безразмерной величины области контакта $a_* = a/h$ от безразмерного внедрения. Сплошной кривой, пунктирной кривой и точками изображены зависимости для возрастающего, убывающего, немонотонного законов изменения модуля Юнга, соответственно.

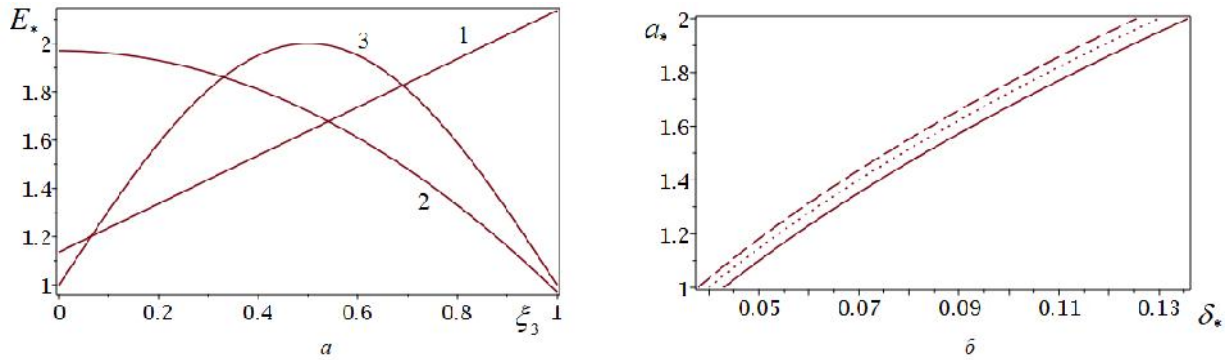


Рис. 2

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект №18-11-00069).

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Naebe, K. Shirvanimoghaddam. Functionally graded materials: A review of fabrication and properties // Applied Materials Today. Vol.5. 2016. 223–245.
2. Головин Ю.И. Наноиндентирование и механические свойства твёрдых тел в субмикрообъёмах, тонких поверхностных слоях и пленках // Физика твердого тела. 2008. Т.50. Вып.12. С.2113–2142.
3. Oliver W.C., Pharr G.M. Measurement of hardness and elastic modulus by instrumented indentation: Advances in understanding and refinements to methodology // J. Mater. Res. 2004. Vol.19. No.1. 3–20.
4. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488 с.
5. Айзикович С.М., Александров В.М., Белоконь А.В., Кренев Л.И., Трубчик И.С. Контактные задачи теории упругости для неоднородных сред. М.: Физматлит, 2006. 240 с.
6. Ватульян А.О., Плотников Д.К. Об индентировании неоднородной полосы // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2017. №3. С. 22–29.

Информация об авторах:

Ватульян Александр Ованесович–доктор физико-математических наук, профессор, зав. каф. теории упругости Южного федерального университета, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича 8(863)2975114, **E-mail:** vatulyan@math.rsu.ru

Плотников Дмитрий Константинович – аспирант каф. теории упругости Южного федерального университета, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича 8(909)4124807, **E-mail:** dplotnikov@sfedu.ru

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ШВАРЦА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТЕЛ В ТЕПЛОВЫДЕЛЯЮЩЕМ ЭЛЕМЕНТЕ В ТЕРМОУПРУГОЙ ПОСТАНОВКЕ

Галанин М.П., Лукин В.В., Родин А.С.

Работа посвящена разработке и применению алгоритма численного решения поликонтактной задачи термомеханического взаимодействия системы многих тел с помощью метода Шварца. Суть метода состоит в чередовании кинематических и силовых условий, задаваемых на контактных поверхностях тел. Итерационный процесс выполняется до достижения сходимости, когда и кинематические, и силовые условия на контакте выполнены с заданной точностью. С помощью метода Шварца проведено численное моделирование напряжённо-деформированного состояния участка тепловыделяющего элемента с учётом контакта топливных таблеток друг с другом и с оболочкой. Задача решена в осесимметричной постановке. Представлены результаты расчётов, в которых количество таблеток варьировалось от единиц до сотни.

1.Введение и постановка задачи

Исследование механики контактного взаимодействия является важным этапом анализа характера деформирования и прочности инженерных конструкций в рамках предположений механики сплошных сред. Аналитические решения контактных задач получены для весьма ограниченного набора видов контактного взаимодействия. В подавляющем большинстве практически важных ситуаций необходимо применять численные методы.

Рассмотрим задачу, которая позволяет моделировать некоторые термомеханические эффекты, происходящие в тепловыделяющем элементе (твэле). Твэл представляет собой трубу (оболочку), имеющую следующие характерные размеры: длина – 3-4 м, диаметр – 1 см, толщина – 1 мм. В трубу помещён столб из топливных таблеток (количество таблеток обычно достигает нескольких сотен). В процессе функционирования твэла происходит нагрев топливных таблеток до температуры порядка 1500^0С. Контактное взаимодействие топливных таблеток друг с другом и с оболочкой оказывает существенное влияние на формировании напряжённо-деформированного состояния (НДС) твэла.

В работе выполнено моделирование в осесимметричном приближении выхода участка твэла на номинальную мощность. Таблетки и оболочки считаются термоупругими телами, поэтому эффекты, связанные с пластичностью, ползучестью и разрушением не учитываются.

2. Математическая модель

Рассмотрим в трёхмерном пространстве R^3 с декартовой системой координат $Ox_1x_2x_3$ группу тел, занимающих область $G = \bigcup G_{\sim}$, ограниченную кусочно-гладкой границей $\partial G = \bigcup \partial G_{\sim}$. Предполагаем, что эффектом связанности (зависимостью температуры от деформации тела) можно пренебречь, поэтому задачу теплопроводности можно решать отдельно, а полученное температурное поле использовать при решении квазистационарной задачи равновесия тел, которая включает в себя следующие соотношения (для каждого из тел) [1]:

уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} = 0, \ \mathbf{x} \in G_{\sim}, \tag{2.1}$$

граничные условия (кинематические и силовые)

$$u_i\big|_{S_1^{\sim}} = u_i^0(\mathbf{x},t), \ \mathbf{x} \in S_1^{\sim} \subset \partial G_{\sim}, \ \sigma_{ji} n_j\big|_{S_2^{\alpha}} = p_i(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{x} \in S_2^{\sim} \subset \partial G_{\sim}, \tag{2.2}$$

соотношения для компонент тензора полной и температурной деформаций

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \ \varepsilon_{ij}^{th} = \alpha_{th}(T - T_0)\delta_{ij} \tag{2.3}$$

и определяющие уравнения (закон Гука) для компонент тензора напряжений

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\left(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{th}\right). \tag{2.4}$$

Здесь t – время, T – температура, $u_i(\boldsymbol{x},t)$ – компоненты вектора перемещения точки, определяемой радиус-вектором, $\boldsymbol{x} = x_i \boldsymbol{e}_i$, $u_i^0(\boldsymbol{x},t)$ – компоненты вектора перемещения точки, расположенной на поверхности $S_1^{\sim}$, для которой заданы кинематические условия, $p_i(\boldsymbol{x},t)$ – компоненты вектора внешней нагрузки, действующей на поверхности $S_2^{\sim}$, для которой заданы силовые условия,

C_{ijkl} – компоненты тензора коэффициентов упругости, α_{th} – коэффициент линейного теплового расширения.

Кроме граничных условий (2.2) на границе контакта S_k любых двух тел A и B должны быть выполнены условия сопряжения по перемещениям (кинематическое условие) и по напряжениям (силовое условие) [2]

$$u_n^A(\boldsymbol{x},t) = u_n^B(\boldsymbol{x},t), \quad \sigma_n^A(\boldsymbol{x},t) = \sigma_n^B(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{x} \in S_k. \tag{2.5}$$

Здесь u_n^A, u_n^B – проекции векторов перемещений граничных точек на направление внешней нормали $\boldsymbol{n}_A$ к границе тела А, σ_n^A, σ_n^B – проекции векторов напряжений $\pm^A$ и $\pm^B$ на направления внешних нормалей $\boldsymbol{n}_A$ и $\boldsymbol{n}_B$ соответственно, $S_1^\alpha \cup S_2^\alpha \cup S_k^\alpha = \partial G_\alpha$.

3. Численная модель

Для численной дискретизации задачи (2.1)-(2.5) использован метод конечных элементов (МКЭ) [1] с конечными элементами первого порядка на четырёхугольной сетке. Для учёта контактного взаимодействия чаще всего применяют метод штрафных функций, метод множителей Лагранжа или их комбинации [1], но в работе использован альтернирующий метод Шварца (один из вариантов метода декомпозиции) [2-4]. Стандартный алгоритм данного метода состоит из нескольких шагов. На нулевой итерации на контактирующих поверхностях задаётся начальное приближение для перемещений, при этом выполнено кинематическое условие (2.5), но не выполнено силовое. Затем делается корректировка контактных давлений (подробно описана в [4]) и по итогам первой итерации выполнено силовое условие (2.5), но не выполнено кинематическое. На второй итерации делается корректировка перемещений в узлах на контактной поверхности [3-4]. Чередование кинематических и силовых условий, задаваемых на поверхности контакта тел, выполняется до достижения сходимости, когда оба условия (2.5) на контакте выполнены с заданной точностью. Одним из главных преимуществ метода Шварца является сведение решения общей задачи контактного взаимодействия нескольких тел к последовательности решений стандартных задач механики для каждого тела по отдельности. Конкурентоспособность метода Шварца по отношению к другим методам во многом определяется скоростью сходимости итерационного процесса.

4. Результаты расчётов

В расчётах рассмотрены топливные таблетки, имеющие внутреннее отверстие и фаски по краям (см. рис.1.а). Использованы следующие допущения: в начальный момент времени внешний радиус таблеток совпадает с внутренним радиусом оболочки (начальный зазор отсутствует), мощность тепловыделения в таблетках линейно меняется по времени от нуля до предельного значения q_L^{max} = 45 кВт/м, температура оболочки остаётся постоянной T_{cl} = 623 К, температура таблеток в начальный момент времени равна 300 К. Для нахождения распределения температуры в таблетках для каждого момента времени решается динамическая температурная задача с заданными объёмными источниками тепла, при этом, между внешними поверхностями таблеток и внутренней поверхностью оболочки поставлено условие неидеального теплового контакта, на других поверхностях таблеток задано условие теплоизоляции. Полученное температурное поле использовано при решении квазистационарного уравнения равновесия (отдельно для каждого тела). Выбраны следующие граничные условия: нижние торцы первой таблетки и оболочки закреплены в направлении оси Oz, на верхнем торце верхней таблетки задано постоянное давление p_z = 10 МПа. В качестве условий на поверхности контактирующих тел поставлено условие скольжения без трения. Для выхода на заданную мощность тепловыделения сделано 10 шагов по времени, на каждом шаге выполнено 20 итераций (для любого реализованного количества таблеток).

При реализации метода Шварца использован следующий алгоритм постановки граничных условий: на нулевой и на чётных итерациях на боковых поверхностях таблеток и на внутренней поверхности оболочки ставились силовые условия, а на нечётных итерациях – кинематические условия. Для улучшения сходимости на внешней поверхности оболочки на чётных итерациях ставилось кинематическое условие (значение перемещения с предыдущей итерации). Для топливного столба последовательно решались задачи для каждой таблетки, начиная с первой. При этом, для первых пяти итераций на нижнем торце таблетки всегда ставилось кинематическое условие (перемещения брались равными перемещениям соответствующих точек на верхнем торце предыдущей таблетки), а на верхнем торце – силовое условие. После пяти итераций граничные условия на обоих торцах чередовались стандартным образом.

В первой серии расчётов рассмотрен участок твэла, соответствующий четырём таблеткам, в которых задана линейная мощность тепловыделения, не меняющаяся вдоль оси. В таблетках построена сетка с шагом 0.22, а в оболочке – с шагом 0.12. На рис. 1.б показана расчётная сетка вблизи контакта второй и третьей таблеток (на момент окончания расчета).

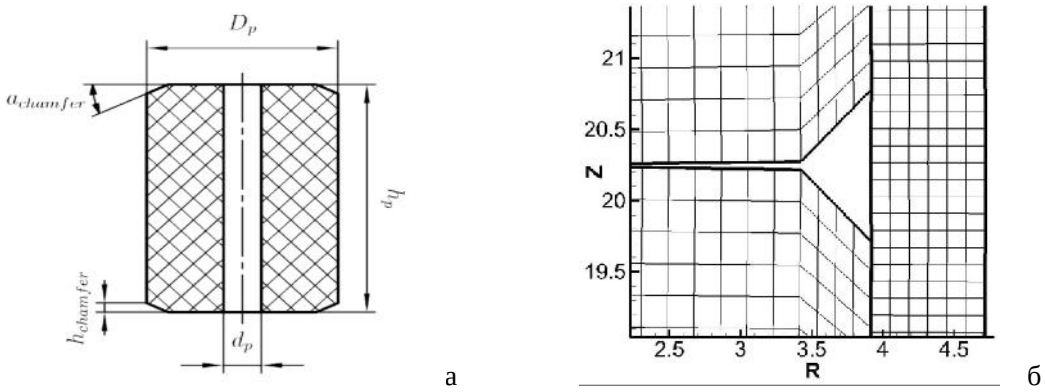


Рис. 1: а – сечение топливной таблетки; б – расчётная сетка на участке области

На рис. 2 показаны графики, демонстрирующие распределения радиальных перемещений и напряжений в конце расчёта вдоль сечения, соответствующего внутренней поверхности оболочки (на участке напротив второй и третьей таблеток).

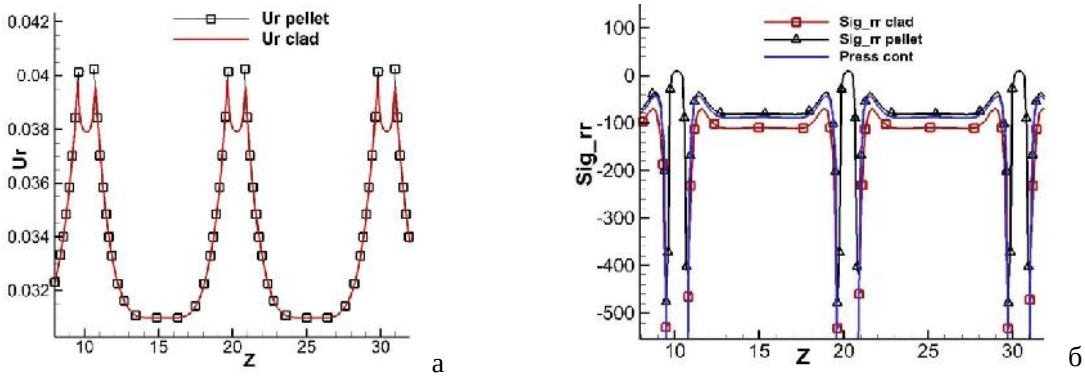
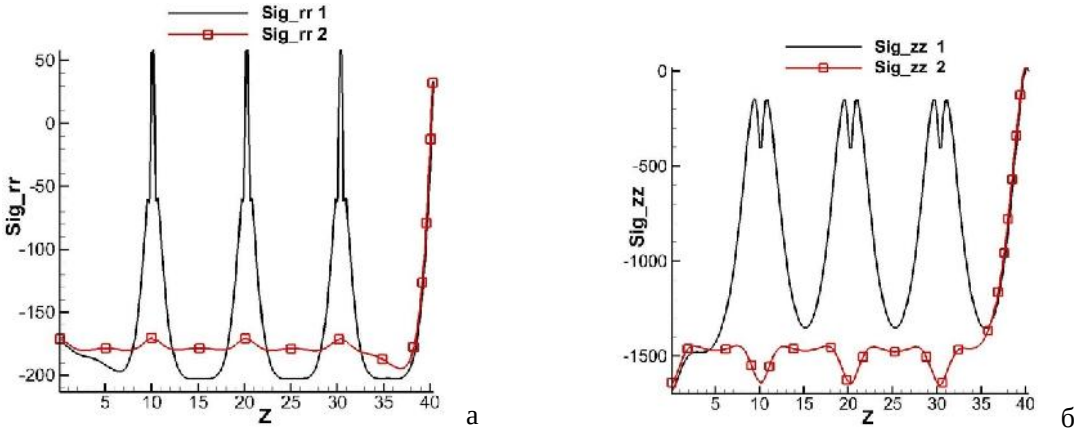


Рис. 2: а – радиальные перемещения; б – радиальные напряжения

На рис.2.а приведены распределения радиального перемещения для оболочки (график без маркера) и для таблеток (график с маркером), на рис.2.б приведены три графика: контактное давление в узлах на боковых поверхностях таблеток (график без маркера, график для давления в узлах на поверхности оболочки визуально неотличим), радиальное напряжение в центрах ячеек, примыкающих к поверхностям таблеток (график с квадратными маркерами) и радиальное напряжение в центрах ячеек, примыкающих к внутренней поверхности оболочки (график с треугольными маркерами). Из приведённых графиков видно, что контактное давление вдоль большей части боковой поверхности каждой таблетки является почти постоянным (около 90 МПа), но вблизи углов фасок находятся концентраторы напряжений (значение давлений в этих зонах увеличивается при измельчении сетки, но интегральная контактная сила, действующая на поверхность таблетки, остаётся на одном уровне). На графиках отчётливо видны участки оболочки, расположенные вне контакта с таблетками: на этих участках возникают небольшие растягивающие радиальные напряжения, а на графиках перемещений образуются характерные изломы.

В процессе нагрева на поверхностях контакта таблеток друг с другом возникали растягивающие осевые напряжения, данный факт использовался в качестве критерия выхода соответствующего поверхностного узла из контакта. В конце расчёта на каждой торцевой поверхности таблетки в контакте оставались только два узла, расположенные ближе всего к внутреннему отверстию, а остальные узлы (на торце) выходили из контакта (это хорошо заметно на рис.1.б). Для оценки влияния данного эффекта на НДС тел проведён расчёт, в котором узлы оставались в контакте, даже в случае возникновения растягивающих нормальных напряжений. На рис. 3 показаны распределения радиальных (3.а) и осевых (3.б) напряжений вдоль сечения, соответствующего внутренним

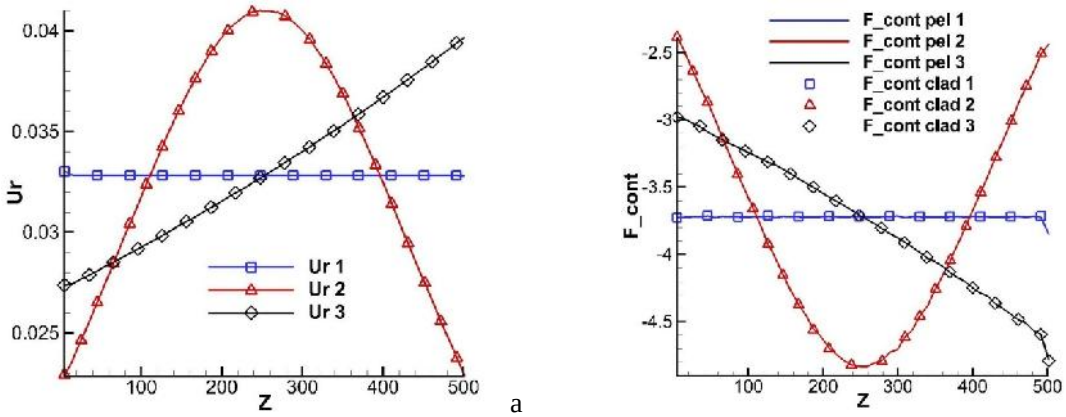
поверхностям таблеток: графики без маркеров относятся к результатам, полученным в расчёте с выходом узлов из контакта, а графики с маркерами – расчёту без выхода узлов из контакта. Приведённые результаты свидетельствуют о важности учёта расхождения торцов таблеток в результате нагрева.



а б

Рис. 3: а – радиальные напряжения; б – осевые напряжения

Во второй серии расчётов рассмотрен участок твэла, соответствующий 50 таблеткам (размеры сеток такие же, как в первой серии). Использованы три зависимости мощности тепловыделения: постоянная, меняющаяся вдоль оси по синусоидальному закону и меняющаяся по линейному закону. Демонстрация распределения локальных величин перемещений и напряжений (аналогично рис. 2) визуально не воспринимается из-за большого количества тел, поэтому на рис.4 показаны интегральные характеристики контакта таблеток с оболочкой. Для боковой поверхности каждой таблетки вычислялись среднее значение радиального перемещения и интегральная контактная сила. На рис. 4.а приведены три графика распределения средних перемещений для трёх расчётов с различными законами тепловыделения (каждый график построен по 50 точкам). На рис. 4.б показаны аналогичные графики интегральных контактных сил, маркерами обозначены три графика, соответствующие значениям интегральных контактных сил на участках оболочки напротив каждой из таблеток. Для заключительного момента времени после 20 итераций (на контакте таблеток и оболочек выполнено кинематическое условие) характерное относительное расхождение между интегральными силами в таблетках и на участках оболочки во всех расчётах составляло 10^{-3}. Следует отметить, что осевое перемещение верхней таблетки достигало 5 мм (половина высоты таблетки), поэтому верхние таблетки смещались вдоль оболочки на десятки ячеек сетки относительно начального положения.

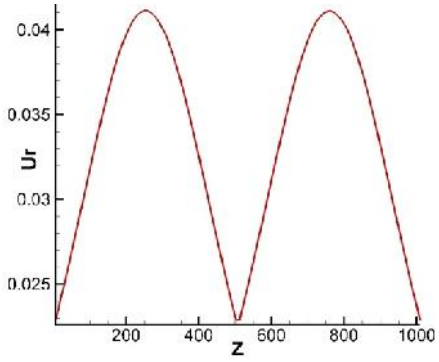


а б

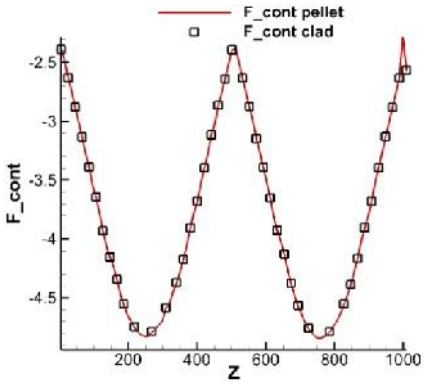
Рис. 4: а – средние радиальные перемещения; б – интегральные контактные силы

В третьей серии выполнен расчёт участка твэла, соответствующего 100 таблеткам. В таблетках построена сетка с шагом 0.3, а в оболочке – с шагом 0.16. Мощность тепловыделения менялась вдоль оси по синусоидальному закону. На рис. 5 показаны графики средних радиальных перемеще-

ний (5.а) и интегральных контактных сил (5.б) в таблетках (графики без маркеров) и на противолежащих участках оболочки (график с маркером). Каждый график построен по 100 точкам.



а



б

Рис. 5: а – средние радиальные перемещения; б – интегральные контактные силы

Проведённые расчёты показали, что предложенный алгоритм решения задачи контактного взаимодействия тел в твэле является достаточно эффективным и позволяет моделировать участки с сотнями топливных таблеток.

Авторы выражают глубокую благодарность Игорю Васильевичу Станкевичу за оказанную помощь и полезные советы.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00252).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бате К.-Ю. Методы конечных элементов. М.: Физматлит, 2010. 1024 с.
2. Цвик Л.Б. Принцип поочередности в задачах о сопряжении и контакте твердых деформируемых тел // Прикладная механика. 1980. Т.16. № 1. С.13-18.
3. Галанин М.П., Крупкин А.В., Кузнецов В.И., Лукин В.В., Новиков В.В., Родин А.С., Станкевич И.В. Математическое моделирование контактного взаимодействия системы термоупругих тел методом Шварца для многомерного случая // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2016. № 12(681). С. 9 - 20.
4. Родин А.С. Решение задачи контакта двух упругих тел методом Шварца при использовании сеток с существенно отличающимися шагами // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2017. № 120. 28 с.

Сведения об авторах:

Галанин Михаил Павлович – доктор физ.-мат. наук, главный научный сотрудник, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН; профессор, Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э Баумана, кафедра ФН-2 «Прикладная математика»
E-mail: galan@keldysh.ru

Лукин Владимир Владимирович – кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН; доцент, Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э Баумана, кафедра ФН-2 «Прикладная математика»
E-mail: vvlukin@gmail.com

Родин Александр Сергеевич – кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН; доцент, Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э Баумана, кафедра ФН-2 «Прикладная математика»
E-mail: rals@bk.ru

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СВЯЗАННЫХ МАГНИТОУПРУГОЙ И ЭЛЕКТРОУПРУГОЙ ВОЛН АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ В КОМПОЗИТНОМ ПЕРИОДИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОМ ВОЛНОВОДЕ

Галичян Т.А., Унанян А.А.

Исследуется процесс распространения волнового сигнала антиплоской деформации в периодически продольно неоднородном слое из пьезоэлектрических и идеально проводящих прослоек, находящихся в поперечном постоянном магнитном поле. При распространении волнового сигнала антиплоской деформации в пьезоэлектрических прослойках возникают формы электроупругой волны сдвига $\{0;\ 0;\ \mathrm{w}_1(x,y,t);\ \ddot{}_1(x,y,t)\}$, а в электропроводящих прослойках возникают формы упругого сдвига $\{0;\ 0;\ \mathrm{w}_2(x,y,t);\ 0\}$, ужесточённой в одном направлении материала. Исследуются особенности образующихся волновых форм в зависимости от граничных условий на механически свободных поверхностях слоя. Методом Ляпунова-Флоке выведено уравнение фильтрации частот. Для образующихся конкретных форм волны определены зоны запретных и допустимых частот.

Введение. Композитные, периодически неоднородные волноводы из пьезоэлектрических, электропроводящих или диэлектрических материалов широко применяются в современных высокоточных технологиях в качестве преобразователей, фильтров или резонаторов электро-магнито-акустического волнового сигнала. В исследованиях о распространении упругих волн в упругих периодических волноводах удачно применяется теория Флоке-Ляпунова. Обзор перспектив – нынешнее состояние и будущие направления развития исследований волновых процессов в периодических структурах приведён в **[1].** В работах **[2,3]** и др. получены и исследованы дисперсионные соотношения SH-волн, при их распространении в периодических пьезоэлектрических или просто диэлектрических композитных слоистых структурах. В работе **[4]** представлена теория распространения упругой волны для феррито-пьезоэлектрических двухслойных структур. Выведено выражение для дисперсионного соотношения продольных плановых колебаний. Показано, что в ограниченных случаях это выражение приходит к дисперсионному соотношению для феррита и пьезоэлектрика, соответственно.

В перечисленных работах волновое поле однородное и при распространении в периодически неоднородном волноводе характер первоначальной нормальной волны не меняется. Однако, известно, что в зависимости от физико-механической природы или анизотропии материала, в зависимости от наложенных поверхностных условий на волновод, можно возбуждать характерно разные волновые поля, или хотя бы получить соответствующее формообразование по толщине составного волновода **[5]**. Здесь также показана возможность совместного распространения разнородных по физико-механическим характеристикам электроупругих волн в композитном волноводе из соответствующих пьезокристаллов.

В работе **[6]** рассматривается вопрос распространения поверхностных волн типа Лява в упругой среде, состоящей из пьезоэлектрического и идеально проводящего полупространств и находящейся во внешнем постоянном магнитном поле, параллельном поверхности раздела полупространств.

Настоящим предлагается простая схема волновода, допускающая многократное взаимное преобразование и совместное распространение локализованных электроактивных волн сдвига в пьезоэлектрических прослойках и не локализуюхщихся упругих волн сдвига в электропроводящей прослойке при наличии внешнего магнитного поля.

1. Постановка задачи. Волновой сигнал антиплоской деформации распространяется в периодически продольно неоднородном слое, который отнесён к ортогональной системе координат $0xyz$ (рис.1). Волновод конструирован из чередующих друг друга неограниченных оси $0z$ полос с прямоугольными сечениями пьезоэлектрического кристалла класса ***6mm*** гексагональной симметрии и электропроводящего изотропного материала

$$\Omega_1(x,y,z) \triangleq \{x\in[0;a_1];\ y\in[-h;h];\ |z|<\infty\};\quad \Omega_2(x,y,z) \triangleq \{x\in[-a_2;0];\ y\in[-h;h];\ |z|<\infty\} \qquad (1.1)$$

Материал полос $\Omega_1(x,y,z)$ пренадлежит кристаллографическому классу ***6mm*** гексагональной симметрии, и ось симметрии пьезокристалла параллельна кординатной оси $\vec{p} \parallel 0\vec{z}$.

При распространении волнового сигнала упругого сдвига $\{0;\ 0;\ \mathrm{w}(x,y,t);\ 0\}$ в пьезоэлектрике индуцируется антиплоское электроупругое поле $\{0;\ 0;\ \mathrm{w}_1(x,y,t);\ \ddot{}_1(x,y,t)\}$. Тогда, в плоскости $x0y$ квазистатические уравнения электроактивной антиплоской деформации $\{0;\ 0;\ \mathrm{w}_1(x,y,t);\ \ddot{}_1(x,y,t)\}$ запишутся в виде:

$$\mathrm{w}_{1,xx}(x;y)+\mathrm{w}_{1,yy}(x;y)=-\mu^2 C_{1t}^{-2}\cdot \mathrm{w}_1(x;y)\,,$$

$$\ddot{}_{1,xx}(x;y)+\ddot{}_{1,yy}(x;y)=\left(e_{15}^{(1)}/£_{11}^{(1)}\right)\cdot\left[\mathrm{w}_{1,xx}(x;y)+\mathrm{w}_{1,yy}(x;y)\right], \tag{1.2}$$

где $C_{1t}=\sqrt{\tilde{c}_{44}^{(1)}/°_1}$, $\tilde{c}_{44}^{(1)}=c_{44}^{(1)}\left(1+\mathrm{i}_1^2\right)$, $c_{44}^{(1)}$, $\mathrm{i}_1^2=e_{15}^{(1)}/\left(c_{44}^{(1)}£_{11}^{(1)}\right)$, $e_{15}^{(1)}$, $£_{11}^{(1)}$ и $°_1$ – известные физические параметры пьезокристаллического материала.

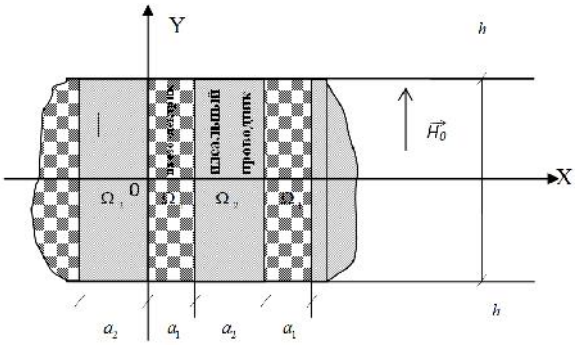


Рис.1. *Периодически продольно-неоднородный композитный волновод, без акустического контакта пьезоэлектрических прослоек.*

Условия механически свободных поверхностей на $y=\pm h$ прямоугольных сечений полос $\Omega_{10}(x,y)$ запишутся в виде:

$$\left[c_{44}^{(1)}\mathrm{w}_{1,y}(x;y;t)+e_{15}^{(1)}\ddot{}_{1,y}(x;y;t)\right]_{y=\pm h}=0\,. \tag{1.3}$$

Условия сопряжённости электрического поля с внешним полем на поверхностях $y=\pm h$ прямоугольных сечений полос $\Omega_{10}(x,y)$ запишутся в виде:

$$\left[e_{15}^{(1)}\mathrm{w}_{1,y}(x;y;t)-£_{11}^{(1)}\ddot{}_{1,y}(x;y;t)+£_0\ddot{}_{,y}^{(e)}(x;y;t)\right]_{y=\pm h}=0\ ;\quad \left[\ddot{}_1(x;y;t)-\ddot{}^{(e)}(x;y;t)\right]_{y=\pm h}=0 \tag{1.4}$$

Для учёта особенностей локализации высокочастотных волн при разных граничных условиях электрического поля рассматривается случай: электрически открытой на $y=h$ и электрически закрытой на $y=-h$ поверхностях пьезоэлектрического слоя. Тогда, условия прозрачности и экранирования электрического поля преобретают вид:

$$\left[e_{15}^{(1)}\mathrm{w}_{1,y}(x;y;t)-£_{11}^{(1)}\ddot{}_{1,y}(x;y;t)\right]_{y=h}=0\ ;\quad \ddot{}_1(x;y;t)\big|_{y=-h}=0\,. \tag{1.5}$$

При распространении индуцированного в пьезоэлектрике антиплоское электроупругое поле $\{0;\ 0;\ \mathrm{w}_1(x,y,t);\ \ddot{}_1(x,y,t)\}$ просачивается в электропроводящую прослойку $\Omega_{20}(x,y)$, возбуждая в нём волну чисто упругого сдвига $\{0;\ 0;\ \mathrm{w}_2(x,y,t);\ 0\}$. Сопутствующие электрические колебания в электропроводнике отсутствуют $\ddot{}_2(x,y,t)\equiv 0$.

В прослойке $\Omega_2(x;y;z)$, находящийся во внешнем магнитном поле $\{0;H_0;0\}$, уравнение для идеально проводящей среды запишется в виде [5]

$$C_{2t}^2 \mathrm{w}_{2,xx}(x;y) + \left(C_{2t}^2 + V_2^2\right)\mathrm{w}_{2,yy}(x;y) = -\mu^2 \mathrm{w}_2(x;y) \qquad (1.6)$$

В уравнении (1.6) $C_{2t}^2 = G_2 / \circ_2$ – скорость объёмной чисто упругой волны сдвига, $V_2^2 = H_0^2 / \left(4® \circ_2\right)$ – скорость Альфвена в проводящей среде.

Условия механически свободных поверхностей $y = \pm h$ прямоугольных сечений полос $\Omega_{20}(x,y)$ запишутся в виде

$$\mathrm{w}_{2,y}(x;y)\Big|_{y=\pm h} = 0\,. \qquad (1.7)$$

В случае полного механического контакта на внутренних торцах $x_{-1n} = -a_2 \pm n(a_1 + a_2)$, $x_{0n} = \pm n(a_1 + a_2)$ и $x_{1n} = a_1 \pm n(a_1 + a_2)$ прослоек $\Omega_{1n}(x,y)$ и $\Omega_{2n}(x,y)$, удовлетворяются условия сопряжённости механических составляющих волновых полей.

На внутренней лицевой поверхности $x = 0$ условия механически свободных поверхностей запишутся в виде:

$$\left[G_1 \mathrm{w}_{1,x}(x;y) + e_1 \ddot{}_{1,x}(x;y) - G_2 \mathrm{w}_{2,x}(x;y)\right]_{x=0} = 0 \qquad (1.8)$$

$$\left[\mathrm{w}_1(x;y;t) - \mathrm{w}_2(x;y;t)\right]_{x=0} = 0 \qquad (1.9)$$

$$\ddot{}_1(x;y;t)\Big|_{x=0} = 0\,. \qquad (1.10)$$

По теории Флоке-Ляпунова, периодичность продольной неоднородности композитного волновода, позволяет записать условия сопряжённости электроупругих полей на лицевых поверхностях $x = -a_2$ и $x = a_1$ в виде

$$\left[G_1 \mathrm{w}_{1,x}(x;y) + e_1 \ddot{}_{1,x}(x;y)\right]_{x=a_1} = « \cdot G_2\, \mathrm{w}_{2,x}(x;y)\Big|_{x=-a_2} \qquad (1.11)$$

$$\mathrm{w}_1(x;y;t)\Big|_{x=a_1} = «^{-1} \cdot \mathrm{w}_2(x;y;t)\Big|_{x=-a_2} \qquad (1.12)$$

$$\ddot{}_1(x;y;t)\Big|_{x=a_1} = 0\,.$$

(1.13)

В граничных условиях (1.11) и (1.12) $« = \exp(Lk)$ – множитель Флоке (коэффициент периодичности) и $L = a_1 + a_2$ – линейный параметр периодичности. $k(\mu) = 2® / ª(\mu)$ – волновое число образованной волны (волновое число Флоке).

2.1. Формообразование по толщине композитного слоя. Представим распространяющиеся по бесконечному, периодически неоднородному волноводу нормальные волны в виде функций $f(x,y,t) = F_j(y) \cdot \exp i(k_j x - \mu t)$. Тогда, индуцированные в прослойках $\Omega_{1n}(x,y)$ нормальные электроупругие сдвиговые волны как решения формулированной математической смешанной краевой задачи (1.2), (1.3) и (1.5) запишутся в виде:

$$\mathrm{w}_1(x,y,t) = \left[A_1 \exp(k_1 \sim_{1t} y) + B_1 \exp(-k_1 \sim_{1t} y)\right] \cdot \exp[i(k_1 x - \mu t)]$$

$$\ddot{}_1(x,y,t) = \left\{\begin{matrix} C_1 \exp(k_1 y) + D_1 \exp(-k_1 y) + \\ +(e_{15}^{(1)} / £_{11}^{(1)})\left[A_1 \exp(k_1 \sim_{1t} y) + B_1 \exp(-k_1 \sim_{1t} y)\right] \end{matrix}\right\} \cdot \exp[i(k_1 x - \mu t)] \qquad (2.1)$$

В полученных решениях (2.1) фигурирует $\sim_{1t} = \sqrt{1 - \left(\mu^2 / k_1^2(\mu)\right) C_{1t}^{-2}}$ – волновой коэффициент волн антиплоской деформации.

В случае высокочастотного электроупругого волнового сигнала (короткие волны, когда $ª(\mu) \ll h$ или $k(\mu) \cdot h \gg 1$), у поверхностей $y = -h$ пьезоэлектрических прямоугольников $\Omega_{1n}(x,y)$ образуются электроупругие поверхностные волны Гуляева-Блюстейна. У поверхностей $y = h$ пьезоэлектрических прямоугольников $\Omega_{1n}(x,y)$ локализация электроупругих волн

типа Гуляева-Блюстейна не происходит. Каждой из образованных форм соответствует своя фазовая зависимость $k_1^-(\mu) = k_{GB}(\mu)$, или $k_1^+(\mu) = k_{0*}(\mu)$ со своей фазовой скоростью $V_{GB}^{\pm}(\mu) = \mu / k_{GB}^{\pm}(\mu)$. Из (2.1) очевидно, что затухающими могут быть короткие волны длины $a_1(\mu) < 2®C_{1t}/\mu$.

Волновое число $k_1(\mu)$ в прослойке $\Omega_{1n}(x, y)$ определяется из уравнения формообразования

$$\sim_{1t}\left[\sim_{1t} th(2\sim_{1t} k_1 h) - ¡_1^2 th(2k_1 h)\right] = 0. \qquad (2.2)$$

Из уравнения (2.2) следует, что в слое ограниченной толщины волны типа Гуляева-Блюстейна становятся сильно дисперсионными.

Вследствие сопряжения деформаций на лицевых поверхностях сопредельных прослоек $\Omega_{1n}(x, y)$ и $\Omega_{2n}(x, y)$, в прослойке $\Omega_{2n}(x, y)$ генерируется упругий сдвиг [5]

$$w_2(x, y, t) = \left[A_2 \sin(k_2 \ \ _{2t} y) + B_2 \cos(k_2 \ \ _{2t} y)\right] \cdot \exp[i(k_2 x - \mu t)], \qquad (2.3)$$

где $\ \ _2 = i\sim_2 = \sqrt{\left(\mu^2 / k_2^2 - V_2^2\right) / C_{2t}^2 - 1} -$ показатели собственных форм колебаний.

В отличие от пьезоэлектрической прослойки, у механически свободных поверхностей электропроводящей прослойки, затухающие вглубь слоя формы не возникают. Следовательно, образованные формы соответствуют волновым числам $k_2(\mu) \le \mu / \sqrt{G_2 / °_2 + H_0^2 / (4®°_2)}$.

Подставляя решение (2.3) в граничные условия (1.7), получим уравнение формообразования в прослойках $\Omega_{2n}(x, y)$ в виде:

$$_{2t} \sin(2k_2 h \ \ _{2t}) = 0. \qquad (2.4)$$

Отсюда определяется волновое число $k_2(\mu)$ в прослойках $\Omega_{2n}(x, y)$

$$k_{2m}(\mu) = \sqrt{\left[\mu^2 - \left(m^2 ®^2 C_{2t}^2\right) / 4h^2\right] / \left(G_2 / °_2 + H_0^2 / (4®°_2)\right)} \qquad (2.5)$$

и решение (2.3) преобразуется к виду:

$$w_2(x, y, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \left\{\left[A_{2m} \sin(k_{2m} \ \ _{2t} y) + B_2 \cos(k_{2m} \ \ _{2t} y)\right] \cdot \exp(ik_{2m} x)\right\} \cdot \exp(-i\mu t) \qquad (2.6)$$

Естественно, при разных электромеханических условиях на внешних поверхностях $y = \pm h$, локализация волновой энергии происходит в разных режимах. Области определения фазовых скоростей медленных поверхностных волн в прослойках разные. Для допустимых частот, разные также длины (волновые числа) распространяющихся волн в этих прослойках. Фактически, в чередующихся прослойках составного волновода образуются несущие заданную волновую информацию разные волновые поля.

2.2. Распространение образованных форм в периодически продольно-неоднородном композитном слое. Учитывая периодичность моделированного продольно-неоднородного волновода, для определения закономерностей распространения образованных форм электроупругих волн, воспользуемся теорией Флоке-Ляпунова для периодических структур.

Формально представляя решения (2.1) и (2.6) в виде нормальных волн

$$f_{nm}(x, y, t) = F_{nm}(y) \cdot \left[C_{nm} \sin[k_m(\mu) x] + D_{nm} \cos[k_m(\mu) x]\right] \cdot \exp(-i\mu t) \qquad (2.7)$$

и подставляя в граничные условия сопряжённости электромеханического поля на внутренних торцах $x_{-1n} = -a_2 \pm n(a_1 + a_2)$, $x_{0n} = \pm n(a_1 + a_2)$ и $x_{1n} = a_1 \pm n(a_1 + a_2)$ прослоек $\Omega_{1n}(x, y)$ и $\Omega_{2n}(x, y)$ (1.8)÷(1.1), получаем дисперсионное уравнение распространения (дисперсионное уравнение частотной фильтрации) электроупругих волн в известном виде:

$$\cos\left(Lk_m\right)=\left\{\begin{array}{l}\cos[k_1(\mu)a]\cdot\cos[k_{2m}(\mu)b]-\\ -\dfrac{G_1^2k_1^2(\mu)+\left(G_2+H_0^2/\left(4®\right)\right)^2k_{2m}^2(\mu)}{2G_1\left(G_2+H_0^2/\left(4®\right)\right)k_1(\mu)k_{2m}(\mu)}\sin[k_1(\mu)a]\cdot\sin[k_{2m}(\mu)b]\end{array}\right\} \qquad (2.8)$$

Из уравнения фильтрации (2.8) определяются зоны допустимых частот для пары образованных локализованных форм (2.1) электроупругих волн и нелокализованных форм упругого сдвига $\mathrm{w}_{2m}(x,y,t)=A_{2m}\sin(k_{2m\ \ 2t}y)+B_2\cos(k_{2m\ \ 2t}y)$ из (2.8). Следовательно, при разных сочетаниях выбранных пар материалов, а также при изменении величины внешнего постоянного магнитного поля по композитному волноводу, пропукаются разные формы сдвиговых волн с разными зонами допустимых частот.

Надлежащим выбором материалов и линейных размеров прослоек можно достичь оптимального переноса волновой энергии из одной прослойки в другую или, наоборот. На этом можно создать своеобразный электромеханический резонатор.

Уравнение фильтрации даёт также зоны запретных частот, при которых композитный волновод из определённых пьезоэлектриков и линейных размеров не допускает распространение локализованных электроупругих волн, или волн, вообще. Это позволит каждый раз заглушать ненужную частоту в устройстве с композитным волноводом.

ЛИТЕРАТУРА

1. M.I.Hussein, M.J. Leamy, M. Ruzzene, Dynamics of phononic materials and structures: historical origins, recent progress, and future outlook. Applied Mechanics Reviews, 2014, v.66, p.040802/1-38.
2. Qian Z.H., Jin F., Wang Z.K., Kishimoto K., Dispersion relations for SH-wave propagation in periodic piezoelectric composite layered structures, Int. J. Eng. Sci., vol. 42 (2004), pp.673-689.
3. Piliposyan D.G., Ghazaryan K.B., Piliposyan G.T, Avetisyan A.S., Wave propagation in periodic piezoelectric elastic waveguides, Proc. of the ASME 2012, Conference on Smart Materials, Adaptive Structures and Intelligent Systems SMASIS2012 September 19-21, 2012, Stone Mountain, Georgia, USA, DOI: 10.1115/SMASIS2012-7911
4. T.A. Galichyan and T.O. Firsova, Propagation of elastic waves in bilayer ferrite-piezoelectric structure, // Journal of Physics: Conference Series, 461, 2013, 012016.
5. Avetisyan A.S., Khachatryan V.M. The formulation and propagation of elastic ***(SH)*** shear waves in a cellular composite waveguide. //Procc. of NAS of Armenia, Mechanics, (2018), vol.71, №3, pp.13-40.
6. Геворкян А.В., Аветисян А.С. О поверхностных волнах на границе раздела полупространств из пьезоэлектрического и электропроводящего материалов. //Материалы II всесоюзной научно-техн. конф. «Прочность, жёсткость и технологичность изделий из композиционных материалов» , Т.1, Изд. ЕГУ, 1984, с.27-29.

About authors:

Galichyan T.A. - Department of Dynamics of Deformable Systems, Institute of Mechanics of NAS of Armenia, Baghramyan ave. 24/2, 0019, Yerevan Armenia;
E -mail: galichyantigran@gmail.com

Hunanyan A.A. – Department of Dynamics of Deformable Systems, Institute of Mechanics of NAS of Armenia, Baghramyan ave. 24/2, 0019, Yerevan Armenia;
Phone: (+37491) 77-55-33, **E-mail**: hunanyan.areg21@gmail.com

ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИЕ ПОЛЯ В ФЕРРИТОВЫХ ТЕЛАХ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ КВАЗИУСТАНОВИВШИХСЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

Гачкевич А.Р., Ивасько Р.А., Кушнир Р.М., Казарян К.Б.

Предложена методика исследования термонапряжённого состояния тел из широко используемых в технике при производстве магнитных устройств нестрикционных поликристаллических изотропных ферритовых материалов, подвергнутых влиянию слабых квазиустановившихся электромагнитных полей высокой несущей частоты, позволяющая свести к минимуму параметры, характеризующие процесс тепловой обработки и воздействие на окружающую среду.

Введение

Специфика технологии производства ферритовых изделий различного технического применения приводит к необходимости использования термической обработки [1]. В достаточно широком диапазоне температур (вплоть до температур Кюри) термообработка таких изделий может быть осуществлена с использованием электромагнитных полей (т. н. «низкотемпературная обработка», при которой требуется достичь температуры в теле, не ниже 150°С). При этом наличие электромагнитного поля (ЭМП) наряду с эффективным технологическим фактором является одним из вредных и опасных экологичеких факторов современного производства [2]. Биологические последствия влияния электромагнитного излучения на здоровье человека (как работающего с устройствами, содержащими излучающие элементы, так и в среде, подвергающейся воздействию такого электромагнитного излучения) зависят от длины волны (частоты), уровня излучения, времени воздействия и других т. н. «экологических параметров»).

В данной работе изложена методика исследования термонапряжённого состояния ферритовых элементов, изготовленных из широко применяемых в технике (при создании магнитных устройств) нестрикционных поликристаллических изотропных материалов, обусловленного воздействием слабых внешних квазиустановившихся ЭМП высокой несущей частоты. Такая методика является основой для рационального проектирования и разработки электромагнитных устройств с ферритовыми элементами, а также режимов их эксплуатации при обеспечении функциональной способности как этих элементов, так и устройств в целом, при минимальных значениях характеристик ЭМП («экологических параметров»), влияющих на здоровье человека. Она может являться также теоретической основой для разработки режимов целевой обработки ферритовых элементов с применением ЭМП.

Постановка и расчётная схема задачи

В экспериментальных работах по определению электрических и магнитных характеристик ферритовых материалов рассматривают электромагнитное воздействие (при характерных параметрах $H_{\text{m}} < 10^4$ А/м, $\omega_{\text{m}} < 10^{10}$ рад$\cdot$с$^{-1}$, где H_{m} – максимальное значение напряжённости магнитного поля в ферритовом теле, ω_{m} – максимальная несущая круговая частота ЭМП), при котором сохраняется несущая способность тела и можно пренебречь влиянием подвижности среды на характеристики ЭМП [3]. Как правило, нагрев считают низкотемпературным, при котором электромагнитные, теплофизические и физико-механические характеристики материала принимают независимыми от температуры (средними на промежутке нагрева). Среду рассматривают как изотропную, в которой векторы намагниченности и поляризации параллельны соответственно векторам напряжённостей магнитного и электрического полей. При определённых выше условиях влияние квазиустановившегося ЭМП на процессы теплопроводности и деформирования в ферритовом теле (как и в известных моделях для ферромагнитных и диэлектрических тел [4]) учитывают посредством обусловленных этим полем джоулевых и гистерезисных (связанных с перемагничиванием и переполяризацией) тепловыделений и пондеромоторных сил [5]. Пондеромоторные моменты за счёт параллельности векторов индукций и напряжённостей магнитного и электрического полей равны нулю [6]. В таком приближении и при постоянных характеристиках материала исходные соотношения для количественного описания параметров тепловых, механических и электромагнитных процессов в ферритовых телах при воздействии квазиустановившегося ЭМП формулируют в два этапа. На первом этапе на основании уравнений Максвелла (рассматриваемых в приближении неподвижных электропроводных

намагничивающихся и поляризующихся сред [6]) записывают задачи для определения параметров ЭМП и выражения (как функций электромагнитных параметров) для тепловыделений и пондеромоторных сил (при их статистическом описании [7, 8]). На втором этапе, базируясь на соотношениях квазистатической или динамической задачи термоупругости [9] (в которых источниками тепла и объёмными силами являются тепловыделения и пондеромоторные силы, найденные на первом этапе), получают зависимости, описывающие тепловые и механические параметры при заданных начальных и граничных условиях на температуру T и компоненты тензора напряжений $\hat{\sigma}$ [10].

В связи с тем, что ферриты могут одновременно намагничиваться и поляризоваться в отдельных частотных диапазонах, задачи первого этапа существенно усложняются – их уже нельзя сформулировать относительно напряжённостей электрического или магнитного полей. Однако, для широкого класса ферритовых материалов – нестрикционных поликристаллических – при воздействии умеренных ЭМП известны (измеряемые экспериментально) электромагнитные характеристики – комплексные диэлектрические и магнитные проницаемости и соответствующие тангенсы углов потерь. Это позволяет на первом этапе использовать расчётную схему определения параметров ЭМП, основанную на формализме комплексных амплитуд [11].

Численные исследования

Для построения рациональных режимов упомянутого во введении технологического нагрева (в частности, для технологической тренировки ферритовых изделий, низкотемпературного отжига с целью снятия конструкционных, монтажных или других остаточных напряжений и т.п.) с использованием ЭМП при достижении минимальных значений «экологических параметров» исследованы, определяющие функциональные тепловые и прочностные технологические характеристики, квазистатические составляющие температуры и напряжений в ферритовом слое из никель-цинкового феррита 1000НН. Слой, толщиной $h = 0.03\,\text{м}$, находится под воздействием ЭМП, созданного заданной во внешней среде системой квазиустановившихся электрических токов с модуляцией амплитуды. Верхнее основание слоя свободно от механических нагрузок. На нём имеет место конвективный теплообмен с внешней средой (температура которой постоянна и равна начальной температуре слоя $T_0 = 293\,\text{K}$) при критерии Био $\text{Bi} = 0.2$, а нижнее основание – теплоизолированно. Учтены соответствующие зависимости диэлектрической и магнитной проницаемостей, а также тангенсов углов гистерезисных потерь от частоты поля [12]. Получено, что в окрестности значений частот, определяемых условием $\lambda_k = \dfrac{2h}{2k-1}$, $k = 1, 2, \ldots$ [4] (при которых длина электромагнитной волны λ в ферритовой среде является кратной двойному характерному размеру тела в направлении её распространения) напряжённости электрического и магнитного полей достигают максимальных величин (резонанс формы [13]).

Когда частота термической обработки лежит в окрестности частоты ЭМП $\omega = 9.64 \cdot 10^9\ \text{рад} \cdot \text{с}^{-1}$ (определяемой условием возникновения резонанса формы ($\lambda_1 = 2h$)), для достижения необходимой температуры T_* порядка 150°С можно использовать меньшую величину плотности электрического тока в индукторе ($j_0 = 10.64\ \text{А/м}$ – при однородном распределении тока), чем для частот, лежащих вне окрестности резонанса. При этом, напряжённость магнитного поля на поверхности изделия составляет около $7.90\ \text{А/м}$. Кроме того, минимальное время, необходимое для достижения температуры T_*, для частот ЭМП, принадлежащих окрестности резонанса формы, в рамках точности вычислений является наименьшим из числа частот, находящихся вне окрестности резонанса. Поэтому по израсходованию энергии индуктора на нагрев слоя (пропорциональной плотности тока и времени достижения телом необходимой температуры T_*) наиболее «экологическим» из возможных является режим обработки на частотах, принадлежащих окрестности резонанса формы. Однако, максимальные значения напряжений, вызванных воздействием такого ЭМП на ферритовое изделие, в зависимости от имеющихся тепловых граничных условий могут достигать значительной величины (

$259\,\text{МПа}$ – при приведённом выше значении j_0) и превышать допустимые (значение предела прочности на сжатие ферритов рассматриваемой марки равно $\sigma_c = 235\,\text{МПа}$).

Рис. 1 иллюстрирует распределения по толщине слоя приращения температуры (квазистатической составляющей) и вызванных ею значений максимальных напряжений (при $j_0 = 10.64\ \text{А/м}$, $\omega = 9.64 \cdot 10^9\ \text{с}^{-1}$, $T_0 = 20\ ^\circ\text{C}$, $\text{Bi} = 0.2$; символом σ_c показано значение предела прочности на сжатие для данного материала). При этом удовлетворяется необходимое условие термообработки – достижение температуры $T(z,t)$, не меньшей, чем $T_* = 150\ ^\circ\text{C}$ (ниже, чем температура Кюри, при превышении которой утрачиваются электромагнитные (функциональные) свойства материала) во всех точках слоя.

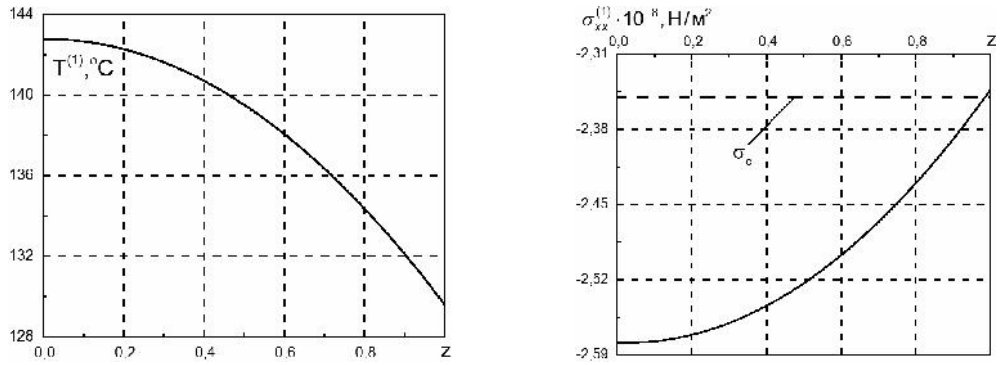


Рис.1. Распределения температуры и максимальных напряжений при условии $T(z,t) \le T_*$

Граничных значений напряжений можно достичь уже при напряжённости магнитного поля $H_0 = 7.52\ \text{А/м}$ (при использовании электрического тока плотностью $j_0 = 10.13\ \text{А/м}$). При этом получаем температуру поверхности 138°C. На рис. 2 показаны при упомянутом значении H_0 распределения по толщине слоя приращения температуры и вызванных ею значений максимальных напряжений (достигающих предельных).

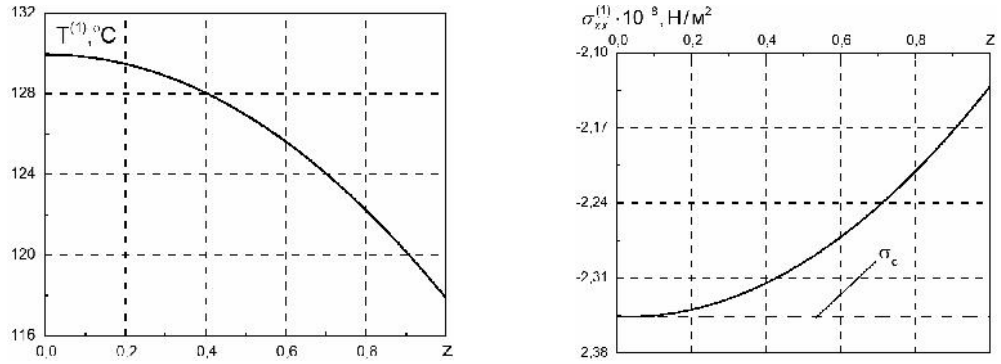


Рис. 2. Распределения температуры и максимальных напряжений при предельной величине H_0

В рассматриваемом случае температура на поверхности слоя является немного меньшей, чем необходимая для термообработки. Необходимая температура (при напряжениях, находящихся в пределах допустимых) достигается регулировкой тепловых граничных условий (например, заменой конвективного теплообмена на теплоизоляцию).

Выводы

Предложена методика исследования тепловых и механических свойств широко применяемых в технике элементов из нестрикционных поликристаллических изотропных ферритовых материалов при умеренных внешних квазиустановившихся ЭМП высокой несущей частоты. Получено, что при режимах нагрева на частотах ЭМП, находящихся в окрестности частот параметрического резонанса (резонанса формы) для рассматриваемого ферритового элемента, сокращается время нагрева и уменьшаются значения внешних токов (уменьшаются величины «экологических параметров») при обеспечении необходимых условий термообработки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Быков Ю.А. Высокотемпературное деформирование и термическая обработка ферритов. М.: Металлургия, 1988. 216 с.
2. Гаек М., Иванова Н., Мулицка И., Рябов С., Шварцбург Л. Аспекты социальной политики в области безопасности производственной среды. Москва-Ополе: Янус-К, 2005. 192 с.
3. Moon F.C. Problems in magneto-solid-mechanics, Mechanics Today, vol. 4, 1978.
4. Gaczkiewicz A., Kasperski Z. Modele i metody matematyczne w zagadnieniach brzegowych termomechaniki ciał przewodzących, Opole: OWPO, 1999. 368 s.
5. Hutter K., Ven A.A.F. van de and Ursescu A. Electromagnetic field-matter interactions in thermoelastic solids and viscous fluids, Lect. Notes Phys., vol. 710, 2006.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Физматлит, 2005. 652 с.
7. Можен Ж. Механика электромагнитных сплошных сред. М.: Мир, 1991. 560 с.
8. Гачкевич О.Р., Солодяк М.Т., Івасько Р.О., Бойчук В.Я. Моделювання дії електромагнетного поля на термомеханічну поведінку деформівних твердих тіл, Фізико-хімічна механіка матеріалів, т. 45, № 1, 2009.
9. Коваленко А.Д. Избранные труды. Киев: Наук. думка, 1976. 764 с.
10. Гачкевич О.Р., Івасько Р.О. Термомеханіка феритових тіл в квазіусталеному електромагнітному полі. Мат. методи та фіз.-мех. поля, т. 43, № 1, 2000.
11. Боженко Б., Гачкевич А., Ивасько Р., Чорный Б. Математическое моделирование параметров квазиустановившегося электромагнитного поля в области вещественных чисел при использовании для их определения подхода комплексных амплитуд. In: Manufacturing processes. Actual problems – 2017. Vol. II. Modelling and optimization of manufacturing processes. SIM. Z. 473. Pod red. nauk.: O. Hachkevych, A. Stanik-Besler, T. Wołczański. Vol. 2, 2017.
12. Хиппель А.Р. Диэлектрики и волны. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 438 с.
13. Ситидзе Ю., Сато Х. Ферриты. М.: Мир, 1964. 408 с.

Информация об авторах:

Гачкевич А.Р. – д.ф.-м.н., проф., Ин-т прикладных проблем механики и математики им. Я.С. Подстригача НАН Украины, зав. отделом теории физико-механических полей; Политехника Опольская (Польша)
Phone (+380 32) 263 71 11; **e-mail:** dept13@iapmm.lviv.ua
Ивасько Р.А. – к.ф.-м.н., Ин-т прикладных проблем механики и математики им. Я.С. Подстригача НАН Украины, старший научный сотрудник отдела теории физико-механических полей
Phone (+380 32) 258 51 47; **e-mail:** dept13@iapmm.lviv.ua
Кушнир Р.М. – д.ф.-м.н., проф., акад. НАН Украины, Ин-т прикладных проблем механики и математики им. Я.С. Подстригача НАН Украины, директор
Phone (+380 32) 263 83 77; **e-mail:** dyrector@iapmm.lviv.ua
Казарян К.Б. – д.ф.-м.н., проф, Институт механики НАН Армении, главный научный сотрудник отдела динамики деформируемых систем и связанных полей,
(**Phone** +374 99227395); **e-mail:** ghkarren@gmail.com

АНАЛИЗ ОСОБЕННОСТЕЙ ВБЛИЗИ ЦЕНТРА РАЗНОРОДНОЙ СОТОВОЙ ЯЧЕЙКИ ПРИ АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ В СВЕТЕ МКЭ

Геворкян Г.А.

Разрешению проблематики выявления особенностей вблизи вершин однородных и разнородных входящих и выступающих углов в научной литературе посвящено немало публикаций, среди которых значительная роль отводится теоретическим исследованиям. Здесь предлагаются результаты численных исследований некоторых конкретных задач обсуждаемого класса, полученные на основе использования новой аналогии между задачей кручения брусьев и превосходно себя зарекомендовавшей на примерах решения тонких жёстких пластин и оболочек плоско-пространственной модификации метода конечных элементов.

1. Введение. Точное решение задачи определения напряжений вблизи вершины однородного угла путём решения местного дифференциального уравнения, описывающего скручивание однородного призматического бруса, показало, что при приближении к вершинам выступающих углов напряжения стремятся к нулю, а когда этот угол входящий – к бесконечности [1, 3]. Как указывается в работе [1], эта закономерность была известна ранее из точных решений отдельных конкретных задач [2]. В то же время в источнике [1] отмечается, что это укоренившееся в теории упругости и технической практике мнение, справедливое для однородных тел, может оказаться ошибочным для составных тел.

Из мембранной аналогии, установленной в 1903 г. Прандтлем [4], хорошо известно, что дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют функция напряжений закручиваемого бруса и функция прогибов мембраны, натянутой по контуру того же бруса, совпадают. Разработанная в последние годы и опубликованная в 2014 г. плоско-пространственная задача МКЭ [5] позволила на основе антиплоского сдвига или деформации определять прогибы тонких жёстких пластин и оболочек (в том числе, и мембран) без использования гипотезы Кирхгофа [7, 8]. Нетрудно показать, что касательные напряжения, возникающие при кручении призматического бруса, которые находятся классическим способом через функцию напряжений, оказываются пропорциональными касательным (или, точнее, псевдокасательным) напряжениям в пластине, рассчитанным в силу плоско-пространственной модификации МКЭ.

Настоящая работа призвана внести свою лепту в проблематику наличия или отсутствия концентраций напряжений в центре разнородной сотовой ячейки в свете новой модификации метода конечных элементов – плоско-пространственной задачи МКЭ [5].

2. Аналогия между задачами кручения бруса и антиплоской деформации пластины. В публикации [5] приводится формулировка плоско-пространственной задачи МКЭ, а в работе [6] показано, что плоско-пространственная задача МКЭ выражает дискретную модель дифференциального уравнения антиплоского сдвига, т.е.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=-\frac{f}{G}, \tag{1}$$

где w – функция прогибов, f – объёмная сила и G – модуль сдвига.

Из плоской задачи теории упругости известно, что для мембранной аналогии свойственно следующее соотношение между функциями напряжений Φ и прогибов w [2]:

$$\Phi(x_1, x_2)=\kappa w(x_1, x_2), \tag{2}$$

где κ – коэффициент подобия, равный

$$\kappa = 2G\vartheta q / p, \tag{3}$$

причём, p – давление на единицу площади мембраны, q – растягивающее усилие, приходящееся в каждом сечении мембраны на единицу его длины, а ϑ – относительный угол закручивания

бруса. С другой стороны, выражения, связывающие касательные напряжения и функцию напряжений, записываются следующим образом [2]:

$$\begin{cases} \tau_{yz} = \partial\Phi / \partial x_2 , \\ \tau_{xz} = \partial\Phi / \partial x_1 . \end{cases} \tag{4}$$

Интерполяционная линейная функция прогибов плоско-пространственной задачи задаётся выражением [5]

$$w(x, y) = \alpha + \beta x + \gamma y , \tag{5}$$

откуда для однородного и изотропного линейно-упругого тела на основании [5] вытекают выражения для касательных (точнее, псевдокасательных) напряжений:

$$\begin{cases} \tau_{yz} = G\gamma_{yz} = G\gamma, \\ \tau_{xz} = G\gamma_{xz} = G\beta. \end{cases} \tag{6}$$

Сравнивая системы выражений (4) и (6) с учётом зависимости (2), приходим к аналогии между задачами о кручении однородного и изотропного призматического бруса и антиплоской деформации однородной и изотропной прямоугольной пластинки, предполагаемой наперёд тонкой и жёсткой. Таким образом, будем иметь:

$$\begin{bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \tilde{\tau}_{yz} \\ \tilde{\tau}_{xz} \end{bmatrix}, \tag{7}$$

где λ – новый коэффициент подобия, равный

$$\lambda = \kappa / G = 2\vartheta q / p. \tag{8}$$

3. Задача определения особенностей вблизи вершин однородных входящих и выступающих прямых углов. Ознакомившись выше с аналогией (7) – (8), установленной между задачами кручения брусьев и антиплоского сдвига тонких жёстких пластинок, переходим к выявлению особенностей вблизи вершин однородных входящих и выступающих углов. Для простоты анализа внешний контур исследуемой сотовой ячейки – генератор входящих и выступающих углов, эквивалентный свободно опёртой по краям тонкой жёсткой пластинки, будем отождествлять с квадратом.

Обращая внимание на коэффициент подобия (8), удостоверяемся в том, что он – суть конечная величина; более того, этот коэффициент в широком диапазане изменения входящих в него постоянных величин может принимать близкие или немногим отличающиеся от единицы значения. Вследствие этого представляется возможным выявление особенностей вблизи вершин рассматриваемых углов проводить не в контексте решения задачи кручения призматических брусьев, а в связи с решением плоско-пространственной задачи антиплоского сдвига для квадратной тонкой жёсткой пластинки.

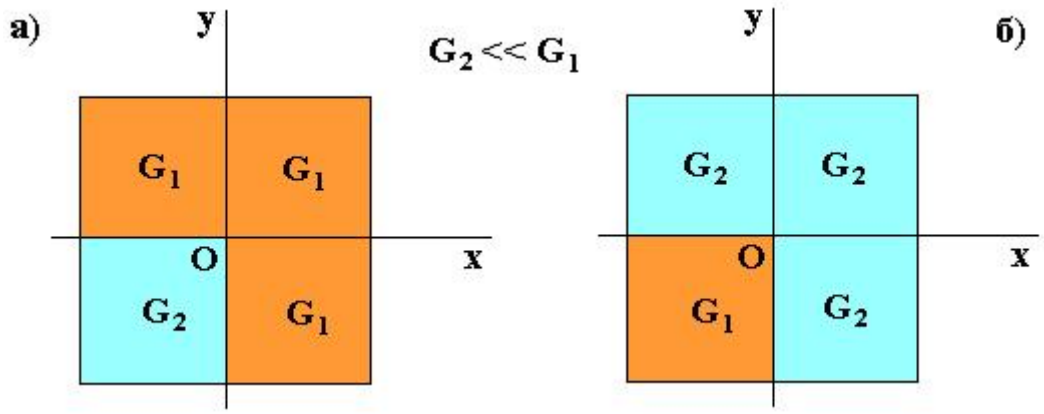


Рис. 1. Порождающие входящий а) и выступающий б) углы – сотовые ячейки

На рис.1 (а и б) представлены две сотовые ячейки – модели входящих и выступающих однородных углов, соответственно. Как видно из схем на рис. 1, при неограниченном уменьшении значения модуля сдвига второго материала, т.е. при $G_2 \to 0$, изображённые сотовые ячейки обращаются во входящий (рис.1,а) и выступающий (рис.1,б) однородные прямые углы с неизменным модулем сдвига первого материала G_1.

4. Выявление особенностей вблизи углов путём численного решения плоско-пространственной задачи МКЭ для тонкой жёсткой пластинки. Приступаем к численной реализации плоско-пространственной задачи МКЭ применительно к анализу особенностей вблизи центра О квадратной тонкой жёсткой неоднородной пластинки для двух разновидностей, показанных на рис.1 (а и б).

В процессе исследований квадратная область пластинки разбивается на $Tr = 392$ одинаковых треугольных конечных элемента и на $N = 225$ узловых точек; полагается, что свободно опёртая по краям пластинка с размерами $L \times B = 120мм \times 120мм$ и толщиной $h = 1мм$ находится под действием равномерно распределённого давления $p = 0.05МПа$; основной материал пластинки имеет следующие физико-механические характеристики: модуль Юнга $E = 200ГПа$ и коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$.

Далее будет предполагаться, что окрестность центра О для обеих рассматриваемых разновидностей неоднородной сотовой ячейки (рис.1, а и б) подвергается дискретизации на конечные элементы так, как это иллюстрируется на рис. 2.

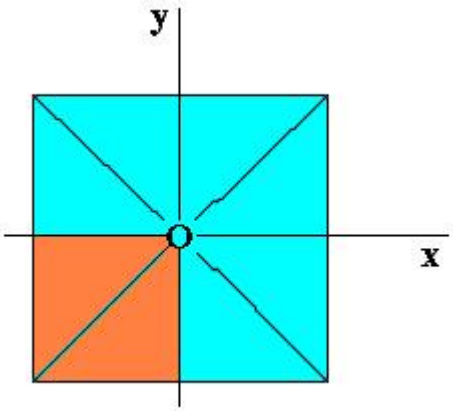


Рис. 2. Окрестность центра сотовой ячейки

В приведённой ниже таблице приводятся значения максимальных псевдокасательных напряжений $\tilde{\tau}_{max}$ для входящего и выступающего углов при некоторых отношениях модулей сдвигов G_1 / G_2, составляющих сотовую ячейку материалов.

Таблица

Разновидность угла:	$\mathbf{G_1/G_2 = 1}$	$\mathbf{G_1/G_2 = 2}$	$\mathbf{G_1/G_2 = 10}$	$\mathbf{G_1/G_2 = 10^5}$
входящий угол	$\tilde{\tau}_{max} = 0.65МПа$	$\tilde{\tau}_{max} = 1.9МПа$	$\tilde{\tau}_{max} = 23.8МПа$	$\tilde{\tau}_{max} \to \infty$
выступающий угол	$\tilde{\tau}_{max} = 0.65МПа$	$\tilde{\tau}_{max} = 3.2МПа$	$\tilde{\tau}_{max} = 13.8МПа$	$\tilde{\tau}_{max} = 22.7МПа$

Картина напряжений вблизи центров входящего и выступающего однородного углов

Таким образом, достигнуто подтверждение указанного во введении хрестоматийного правила, согласно которому вблизи вершины входящего угла напряжения стремятся к бесконечности. Что же касается наибольших напряжений вблизи центра выступающего угла, то последние принимают далеко не нулевые и даже не минимальные, хотя и, безусловно, конечные значения.

5. Заключение. В представленном материале сформулирована новая в теории упругости аналогия, позволяющая свести ряд часто встречающихся на практике задач определения особенностей к численному решению плоско-пространственной модификации МКЭ на примере поперечного изгиба тонкой жёсткой пластины. Речь идет, в первую очередь, о задаче исследования характера напряжённого состояния около угловых точек контура поперечного сечения скручиваемого призматического бруса, подчиняющегося при этом дифференциальному уравнению Пуассона. Следует обратить внимание на то обстоятельство, что, в отличие от мембранной, предложенная аналогия обеспечивает большую простоту и доступность при решении конкретных задач.

Численное исследование напряжённого состояния вблизи центров входящего и выступающего однородных углов, проведённое на основе плоско-пространственной аналогии, создаёт хорошие предпосылки для продолжения начатых исследований в целях выявления особенностей вблизи центров неоднородных углов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Чобанян К.С.** Напряжения в составных упругих телах. Ереван: Изд. АН Арм. ССР, 1987. 338 с.
2. **Тимошенко С.П.** Теория упругости. М.: Гостехтеоретиздат, 1937. 452 с.
3. **Цян Вэй-чан, Линь Хун-синь, Ху Хай-чан, Е Кай-юань,** Теория кручения цилиндрических тел. – Пекин: 1956.
4. **Геворкян Г.А.** Плоско-пространственная задача метода конечных элементов // Механика машин, механизмов и материалов. 2014. № 1 (26). С.49 – 52.
5. **Геворкян Г.А.** Трактовка геометрического смысла конечных разностей и производной функции на основе использования аппарата МКЭ // Механика машин, механизмов и материалов. 2016. № 2 (35). С.95 – 98.
6. **Геворкян Г.А.** Расчёт упругих прогибов тонких жёстких пластин на основе МКЭ без использования гипотезы Кирхгофа // Механика машин, механизмов и материалов. 2017. № 1 (38). С.39 – 44.
7. **Геворкян Г.А.** Расчёт упругих прогибов тонких жёстких оболочек на основе МКЭ без использования гипотезы Кирхгофа // Механика машин, механизмов и материалов. 2018. № 2 (43). С.83 – 89.

Сведения об авторе:

Геворкян Грант Араратович – к.т.н, научный сотрудник Института механики НАН РА,
Ереван, 0019, пр. Маршала Баграмяна 24/2, Институт механики НАН Армении
Тел.: (374 10) 530 364 (дом.), (374 96) 390 315 (моб.),
E - mail: hrgevorkian@mail.ru

ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ КОНТАКТНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ ПРИ РАЗРАБОТКЕ ЗАЖИМНЫХ МЕДИЦИНСКИХ ИНСТРУМЕНТОВ

Горячева И. Г., Яковенко А. А.

Рассматривается контакт захватывающего инструмента, имеющего заданный рельеф поверхности, с биологической тканью, для описания свойств которой используется две механические модели: линейно упругий и вязкоупругий материалы. При моделировании ткани упругим полупространством учитывается взаимное влияние выступов инструмента друг на друга. Также в рассмотрение берутся две формы выступов: равномерно расположенные на поверхности зажима полусферы и выступы в виде вытянутых узких параллелепипедов, края которых закруглены. Построенное аналитическое решение позволяет исследовать влияние формы рельефа контактирующей поверхности зажимного инструмента на зависимость прикладываемой к нему нагрузки от глубины его внедрения в мягкую ткань, а также на напряжённое состояние ткани вблизи области контактного взаимодействия.

Введение

Использование роботов при проведении различных видов медицинских процедур имеет большие преимущества. Их применение не только минимизирует ошибки хирурга, но и уменьшает срок выздоровления и риски осложнений, так как при лапароскопических операциях все действия осуществляются через небольшие отверстия. Именно поэтому роботизированная хирургия становится всё более популярной по всему миру. Основной проблемой при разработке медицинских роботов является реализация тактильной обратной связи. Для этого необходимо иметь информацию о напряжённом состоянии биологической ткани при контакте с рабочим элементом робота.

В области лапароскопической хирургии рабочим элементом робота являются захватывающие инструменты. Зажимы применяются в медицине для временного сдавливания и удержания биологических тканей и органов во время хирургических операций. При этом, важным является не нанести серьёзные повреждения, которые могут возникнуть при сильной или длительной нагрузке. Так как зажимы имеют различные размеры и форму рельефа контактирующей поверхности, то и влияние инструментов на ткани будет разным. Кроме этого, на напряженно-деформированное состояние биологических тканей оказывают влияние и механические свойства самой ткани. Поэтому для того, чтобы контролировать напряжения, возникающие в мягких тканях при контакте с инструментом, необходимо дать оценку влияния упомянутых факторов на контактные характеристики. Для исследования контакта захватывающего инструмента с биологической тканью в данном исследовании рассматриваются контактные задачи о взаимодействии жёсткого зажима (штампа) с заданной формой контактирующей поверхности с упругим и вязкоупругим полупространством.

1. Моделирование контактного взаимодействия с однородной биологической тканью зажима, имеющего выступы в форме полусфер

Рассматривается контактная задача о внедрении жёсткого инструмента в упругое тело. Инструмент имеет на своей поверхности ограниченную систему выступов полусферической формы. Внедрение происходит под действием приложенной по нормали к инструменту силы P. Приложенная сила считается заданной и постоянной. Количество выступов равно N, а форма $f(r)$ контактирующей поверхности каждого зависит только от радиуса и при малых областях контакта может быть аппроксимирована выражением $f(r)=r^2/2R$, где R – радиус сферы. Все выступы имеют одинаковую форму и размеры.

Так как выступы расположены на близком расстоянии друг к другу, то взаимодействие каждого выступа с основанием рассматривается с учётом их взаимного влияния друг на друга. Данное влияние будет уменьшаться с увеличением расстояния l между выступами, которое постоянно. Предполагается, что внедрения выступов малы по сравнению с толщиной упругого тела, поэтому при моделировании оно заменяется упругим полупространством. Выступы могут иметь различное пространственное, а также высотное расположение. Разные вариации положения выступов в пространстве позволяют определить такую форму контактирующей

поверхности инструмента, которая обеспечит минимальные напряжения в тканях при той же глубине внедрения.

Для исследования влияния расположения выступов на контактные характеристики используется решение, представленное в [1,2], где, на основании принципа суперпозиции, смещение границы упругого полупространства под $i^{ым}$ штампом представляется как сумма смещений $u_z^{i(1)}$ и $u_z^{i(2)}$, где $u_z^{i(1)}$ – смещение, обусловленное приложенным внутри рассматриваемого пятна контакта давлением p_i, а $u_z^{i(2)}$ – смещение, обусловленное влиянием других выступов. Условие контакта при этом имеет вид:

$$u_z^{i(1)}\left(x,y\right)+u_z^{i(2)}\left(x,y\right)=\delta_i+f_i\left(x,y\right),$$

где δ_i – внедрение в ткань $i^{ого}$ выступа. Таким образом, для системы сферических выступов система уравнений, позволяющая найти распределение нагрузок на выступы, записывается следующим образом:

$$\delta_i=\delta-h_i=\frac{a_i^{\,2}}{R}+\frac{1-\nu^2}{\pi E}\sum_{j=1,\,j\neq i}^{N}\frac{P_j}{\sqrt{l_{ij}^{\,2}-a_i^{\,2}}}$$

$$P_i=\frac{4Ea_i^{\,3}}{3R\left(1-\nu^2\right)}+\frac{2}{\pi}\sum_{j=1,\,j\neq i}^{N}P_j\left(\frac{a_i}{\sqrt{l_{ij}^{\,2}-a_i^{\,2}}}-\arcsin\frac{a_i}{l_{ij}}\right), \tag{1.1}$$

$$P=\sum_{i=1}^{N}P_i$$

где a_i – радиус области контакта $i^{ого}$ выступа, h_i – высотное распределение выступов, l_{ij} – расстояние между $i^{ым}$ и $j^{ым}$ выступами, а ¬ и E – коэффициент Пуассона и модуль Юнга основания, соответственно.

При плоскопараллельном движении инструмента с равновысокими выступами $h_i=0$ и $\delta_i=\delta$. Расчёты, проведённые для системы четырёх равновысоких выступов, расположенных по линии, в углах прямоугольника со сторонами l и $2l$ и в углах квадрата со стороной l, показали, что чем плотнее расположены выступы, тем меньше значение нагрузки, необходимой для достижения заданной величины внедрения. В случае расположения выступов в вершинах квадрата суммарная сила, обеспечивающая заданную величину внедрения, минимальна. Самое же большое значение нагрузок имеет место в случае расположения выступов в линию.

Для исследования зависимости максимальных контактных давлений от расстояния между выступами можно использовать оценку по Герцу с учётом максимальных усилий на выступы при разных их расположениях. Максимальное давление будет наблюдаться на крайних выступах, где сосредоточены максимальные нагрузки. В этом случае максимальное контактное давление определяется по следующей формуле:

$$p_{\max}=\left(6E^2\max_{1\le i\le N}P_i\,/\left(\pi^3R^2(1-\nu^2)^2\right)\right)^{1/3}. \tag{1.2}$$

2. Моделирование контактного взаимодействия с однородной биологической тканью зажима, имеющего выступы в форме вытянутых параллелепипедов

Рассматривается внедрение в упругое полупространство жёсткого штампа, имеющего на поверхности систему выступов в виде вытянутых вдоль оси Ox параллелепипедов с плоским основанием и закруглёнными краями, где $2a$ – длина выступа, $2b$ – его ширина. На инструмент также действует изгибающий момент M, и поверхность инструмента располагается под некоторым углом α к основанию. Для определения упругих смещений, вызванных приложенными давлениями, для единичного выступа используется решение Галина

[3] для узкой вытянутой балки, внедряемой в упругое полупространство. Согласно данному решению формула для вертикальных смещений имеет вид:

$$u(x,0)=p(x)/k,\quad k=\frac{\pi E}{2\left(1-\nu^2\right)\lg\left(a/b\right)}. \tag{2.1}$$

В силу предположения об узости выступов, действие соседних выступов заменяется силами, распределёнными по линии, проходящей через центры выступов, то есть погонными силами. Таким образом, получена следующая система уравнений [4], которая вместе с условием равновесия позволяет найти распределение нагрузок между выступами:

$$\delta-(i-1)l\mathrm{tg}\alpha=\frac{2\left(1-\nu^2\right)\lg\left(a/b\right)P_i}{a\pi E}+\frac{1-\nu^2}{a\pi E}\sum_{j=1,\,j\neq i}^{N}P_j\left(\ln\frac{\sqrt{l_{ij}^{\,2}+4a^2}+2a}{\sqrt{l_{ij}^{\,2}+4a^2}-2a}-\frac{1}{a}\left(\sqrt{l_{ij}^{\,2}+4a^2}-l_{ij}\right)\right). \tag{2.2}$$

Для плоскопараллельного движения инструмента, то есть когда отсутствует изгибающий момент, распределение нагрузок между выступами является симметричным относительно оси симметрии внедряемого штампа. Расчёты показывают, что при малых расстояниях между выступами нагрузки на крайние выступы значительно превосходят нагрузку, действующую на средние выступы, а при больших, как и следовало ожидать, эти величины стремятся к одинаковому значению. Анализ влияния расстояния между выступами на зависимость прилагаемой к инструменту силы от величины его внедрения показал, что при заданном внедрении уменьшение расстояния между выступами ведёт к уменьшению суммарной нагрузки.

3. Моделирование внедрения зажима в биологическую ткань с учётом её релаксационных характеристик

При внедрении инструмента в мягкую ткань с заданной скоростью необходимо учитывать влияние релаксационных свойств ткани на возникающее в ней напряжённое состояние. С этой целью рассмотрена задача о внедрении с постоянной скоростью V $\left(\delta=Vt\right)$ штампа, на контактирующей поверхности которого расположена система сферических выступов, в вязкоупругое полупространство. При этом считается, что выступы расположены на таком расстоянии друг от друга, что их взаимное влияние можно не учитывать.

При исследовании контакта с основанием единичного выступа используется известное решение Герца для внедрения сферы в упругое полупространство и принцип Вольтерра [5], применимость которого обусловлена монотонным возрастанием области контактного взаимодействия [6]. В предположении, что коэффициент Пуассона среды постоянен $\left(\nu=\mathrm{const}\right)$ и радиус области контакта при внедрении много меньше радиуса самого индентора, то есть $a\left(t\right)\ll R$ $\left(t\ll R/V\right)$, выражения для контактного давления $p(r,t)$ и прикладываемой нагрузки $P(t)$ имеют следующий вид:

$$\begin{gathered}p(r,t)=\frac{2E\sqrt{V}}{\left(1-\nu^2\right)\pi\sqrt{R}}\left(\sqrt{t-\frac{r^2}{VR}}-\int_0^t G\left(t-\tau\right)\sqrt{\tau-\frac{r^2}{VR}}d\tau\right),r\le a\left(t\right),\\ P\left(t\right)=\frac{4E\sqrt{R}V^{3/2}}{3\left(1-\nu^2\right)}\left(t^{3/2}-\int_0^t G\left(t-\tau\right)\tau^{3/2}d\tau\right).\end{gathered} \tag{3.1}$$

Здесь $G\left(t\right)$ – ядро релаксации вязкоупругого полупространства.

Рассмотрим два вида ядер релаксации: экспоненциальный и степенной. Экспоненциальное ядро релаксации имеет вид $G\left(t\right)=\lambda\exp\left(-\beta t\right)$, где λ,β – некоторые постоянные, характери-

зующие вязкоупругий материал [7]. Подставляя в (3.1) экспоненциальное ядро и интегрируя по времени, окончательно получим:

$$p(r,t)=\frac{2E}{\left(1-\nu^2\right)\pi R}\left(\sqrt{RVt-r^2}\left(1-\frac{\lambda}{\beta}\right)+\frac{\lambda\sqrt{\pi RV}e^{-\beta t+\frac{\beta r^2}{Rv}}}{2\beta^{3/2}}erfi\left(\sqrt{\frac{\beta}{RV}\left(RVt-r^2\right)}\right)\right),$$

$$P\left(t\right)=\frac{4E\sqrt{R}V^{3/2}}{3\left(1-\nu^2\right)}\left(t^{3/2}\left(1-\frac{\lambda}{\beta}\right)+\frac{3\lambda\sqrt{t}}{2\beta^2}-\frac{3\sqrt{\pi}\lambda e^{-\beta t}}{4\beta^{5/2}}erfi\left(\sqrt{\beta t}\right)\right). \quad (3.2)$$

При исследовании зависимостей (3.2) установлено, что значения нагрузок и давлений, необходимых для получения заданной величины внедрения, практически не изменяются при варьировании скорости нагружения. Зависимость от скорости наблюдается лишь на малых временах (или внедрениях). Также проанализировано влияние на контактные характеристики коэффициента $\tilde{\lambda}=\lambda/\beta$, который отвечает за релаксационные свойства ткани. При одном и том же внедрении инструмента в основание нагрузка и контактное давление возрастают с уменьшением коэффициента $\tilde{\lambda}$ (случай $\tilde{\lambda}=0$ соответствует упругому полупространству).

Для функции релаксации степенного вида использовано выражение $\Psi\left(t\right)=\frac{\kappa}{\Gamma\left(1-\alpha\right)\left(t+t_0\right)^{\alpha}}$, где гамма-функция определяется как $\Gamma(z)=\int\limits_0^{+\infty}x^{z-1}e^{-x}dx$, а α,κ,t_0 – некоторые постоянные (в работе берётся $\alpha=1/2$) [8]. Заметим, что функция релаксации и ядро релаксации связаны соотношением $\Psi\left(t\right)=E\left(1-\int\limits_0^t G\left(\tau\right)d\tau\right)$. В этом случае выражения для контактных характеристик имеют следующий вид:

$$p(r,t)=\frac{2\kappa\sqrt{V}}{\left(1-\nu^2\right)\pi^{3/2}\sqrt{R}}\arccos\left(\frac{2t_0}{t+t_0-r^2/VR}-1\right),$$

$$P\left(t\right)=\frac{4\kappa\sqrt{R}V^{3/2}}{\left(1-\nu^2\right)\sqrt{\pi}}\left(\left(t+t_0\right)\arccos\sqrt{\frac{t_0}{t+t_0}}-\sqrt{t_0 t}\right). \quad (3.3)$$

Анализ зависимостей (3.3), что на начальном участке времени нагрузка возрастает по степенному закону, а в дальнейшем выходит на линейную зависимость, при этом максимальные значения контактного давления на больших временах стремятся к постоянной величине, зависящей от постоянных материала и скорости внедрения инструмента в ткань. В отличие от случая экспоненциального ядра, значения нагрузки и контактного давления, необходимые для достижения заданной величины внедрения, возрастают с увеличением скорости нагружения.

Полученные результаты использованы для анализа внедрения в вязкоупругое полупространство системы выступов, наклоненных под углом α к его поверхности. Высота каждого выступа определяется как $h_i=\left(i-1\right)l\mathrm{tg}\alpha.$, при этом, $i^{ый}$ выступ вступает в контакт с основанием, спустя время $t_i=\left(i-1\right)l\mathrm{tg}\alpha/V$. Зависимость суммарной нагрузки от времени имеет вид:

$$P(t)=\sum_{i=0}^{N}\theta(t-t_i)P_i(t-t_i),$$

где $\theta(t)$ – функция Хевисайда.

Для расчёта контактных давлений и нагрузок P_i в случае экспоненциального и степенного ядер релаксации используются формулы (3.2) и (3.3), соответственно. Анализ зависимостей

суммарной нагрузки от времени показал, что при внедрении инструмента под наклоном для достижения заданной величины максимального внедрения необходимы меньшие значения нагрузок. Вывод справедлив как для экспоненциального ядра релаксации, так и для степенного. Однако, на малых значениях величины внедрения (или на малых временах) этот эффект проявляется значительнее для степенного ядра.

4. Выводы

С целью исследования влияния формы и характера расположения выступов на поверхности медицинского инструмента (зажима) на контактные характеристики и напряжённое состояние мягких биологических тканей разработаны модели взаимодействия поверхности инструмента с биологической тканью, которая моделируется упругим или вязкоупругим полупространством.

Получены аналитические зависимости нагрузки, прикладываемой к зажиму, распределения усилий между выступами в форме полусфер и вытянутых параллелепипедов, максимальных контактных давлений от величины внедрения зажима в мягкую ткань, моделируемую упругим полупространством. Установлено, что распределение нагрузок на выступы является неравномерным, при этом, существенное влияние на исследуемые зависимости оказывают расстояния между выступами и расположение их на поверхности инструмента. Показано, что существует определённое расположение выступов по высоте, которое обеспечивает их равномерную нагружённость.

При использовании модели, учитывающей релаксационные свойства биологической ткани, появляется возможность оценить влияние скорости внедрения инструмента на рассматриваемые контактные характеристики. Установлено, что зависимости приложенной силы и максимального контактного давления от скорости для выбранных видов ядер релаксации (экспоненциальное и степенное) описываются степенными функциями со степенями 3/2 и 1/2, соответственно.

Разработанные модели позволяют исследовать напряжённо-деформированное состояние при различных особенностях взаимодействия зажима с тканью (скорость погружения, форма и наклон зажимного инструмента и т.д.).

Полученные аналитические зависимости позволяют подобрать расположение выступов на поверхности инструмента и их геометрические размеры, обеспечивающие уменьшение нагрузки и травмирования ткани при обеспечении необходимых захватывающих функций.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 16-58-52033.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горячева И.Г. Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.
2. Goryacheva I.G. Mechanics of discrete contact. //Tribology International, vol. 39, №5, 2006. P. 381-386.
3. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 304 с.
4. Яковенко А.А. Моделирование контактного взаимодействия захватывающего инструмента с биологической тканью. //Российский журнал биомеханики, том 21, №4, 2017. С. 418–428.
5. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
6. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия, М.: Мир, 1989. 510 с.
7. Адамов А.А., Матвеенко В.П., Труфанов Н.А., Шардаков И.Н. Методы прикладной вязкоупругости, Екатеринбург: УрО РАН, 2003. 411 с.
8. Бленд Д.Р. Теория линейной вязкоупругости. М.: Мир, 1965. 200 с.

Сведения об авторах:

Горячева Ирина Георгиевна – академик РАН, зав. лабораторией трибологии, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, 8 (495) 434 36 92
E-mail: goryache@ipmnet.ru

Яковенко Анастасия Александровна – аспирант, Московский физико-технический институт (государственный университет), факультет аэрофизики и космических исследований (ФАКИ),

кафедра механики и процессов управления, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, 8 980 749 81 24
E-mail: anastasiya.yakovenko@phystech.edu

ВЫБОР МОДЕЛИ ДИФФУЗИИ И ЕГО ВЛИЯНИЕ НА КИНЕТИКУ ХИМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ

Григорьева П. М., Вильчевская Е. Н.

Рассмотрено упругое тело, в котором протекает химическая реакция с газовой компонентой, локализованная на фронте реакции и поддерживаемая диффузией газообразной компоненты через слой образующегося материала. Учёт механических напряжений производится несколькими способами: учётом зависимости от напряжений нормальной составляющей тензора химического сродства, который является комбинацией химических потенциалов участвующих в реакции компонент, и через зависимость диффузии от напряжений. В этой работе изучаются и сопоставляются результаты обеих моделей. В качестве конкретного примера будет рассмотрен процесс окисления кремния. Помимо рассмотрения общепринятого эмпирического уравнения диффузии, в работе делается попытка вывести логически влияние напряжений на объёмную диффузию, что приводит к тензорному выражению коэффициента диффузии. Для изучения влияния различных вовлечённых параметров выполняется расчёт такого рода задач в центрально-симметричных телах.

1. Введение

В этой статье рассматривается влияние механических напряжений на кинетику химической реакции между твёрдой и газообразной компонентами, а именно:

$$n_- B_- + n_* B_* \to n_+ B_+, \tag{1}$$

где B_- и B_+ – твёрдые компоненты, B_* – газовая компонента, n_-, n_+, n_* – стехиометрические коэффициенты. Полагаем, что реакция локализована на фронте реакции *Г*, которая разделяет области, занятые исходными и трансформированными материалами. Реакция поддерживается диффузией газовой компоненты B_* извне к поверхности химической реакции сквозь образовавшийся материал. Диффузия и сама химическая реакция могут зависеть от механических напряжений. Существует множество моделей, которые учитывают эту зависимость. Например, Као в [1] постулировал связь между скоростью реакции и компонентами напряжения. Через год Сутарья и Олдхэм [2] представили более конкретную модель: они эмпирически связали давление с коэффициентом диффузии *D*. Необходимо отметить, что данные зависимости параметров от напряжений были введены эвристически.

Иной подход для учёта влияния напряжённо-деформированного состояния на скорость распространения фронта был представлен недавно в [3-5] в рамках теории рациональной механики сплошных сред.

В данной работе исследуется сравнительное влияние напряжений на кинетику фронта химической реакции посредством учёта вклада напряжений в тензор химического сродства и коэффициент диффузии.

1. Химическое сродство и кинетика химической реакции

В случае твёрдых реагирующих компонент в результате изучения фазового равновесия, было показано [5], что тензор химического потенциала для твёрдой компоненты определяется тензором энергии-импульса Эшелби. В работе [4] выражение для тензора химического сродства было получено как результат анализа уравнений рациональной механики. Там же было показано, что скорость реакции на ориентированной площадке с нормалью $\boldsymbol{n}$ сопряжена с нормальной компонентой $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{nn}} = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}$ тензора $\boldsymbol{A}$, который и приняли за тензор химического сродства.

Из аналогии со скалярным химическим сродством можем заметить, что фронт химической реакции продвигается только, если $A_{nn} > 0$. В случае, когда $A_{nn} = 0$, фронт химической реакции неподвижен, что соответствует случаю химического равновесия. Таким образом, используя выражение из [5] для линейно-упругих твёрдых компонент и идеального газа, можно определить равновесную концентрацию газовой компоненты компоненты B_*, c_{eq} на фронте реакции:

$$\frac{n_- M_-}{\rho_-}\left(\gamma(T) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_- : \boldsymbol{\varepsilon}_- - \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_+ : (\boldsymbol{\varepsilon}_+ - \boldsymbol{\varepsilon}_{ch}) + \boldsymbol{\sigma}_+ : (\boldsymbol{\varepsilon}_+ - \boldsymbol{\varepsilon}_-)\right) + n_* RT \ln\frac{c_{eq}}{c_*} = 0, \tag{2}$$

где M_- и ρ_- – молярная масса и плотность твёрдой компоненты B_-; $\boldsymbol{\sigma}_- = \mathbf{C}_- : \boldsymbol{\varepsilon}_-$ и $\boldsymbol{\sigma}_+ = \mathbf{C}_+ : (\boldsymbol{\varepsilon}_+ - \boldsymbol{\varepsilon}_{ch})$ – тензоры напряжений Коши, $\boldsymbol{C}_\pm$ – тензоры упругих модулей твёрдых компонент, $\boldsymbol{\varepsilon}_\pm$ – тензоры деформации, $c(\mathrm{d})$ – концентрация газовой компоненты на фронте химической реакции. c_* – +растворимость газовой компоненты в сформировавшемся материале B_+. $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{ch}}$ – тензор деформации химических превращений. Параметр $\gamma(T)$ соответствует отсчётному уровню химических энергий при нулевых напряжениях и заданной температуре. Ввод равновесной концентрации позволяет переписать формулу для скорости фронта химической реакции вблизи равновесия в следующем виде:

$$V = \frac{n_- M_-}{\rho_-} k_* c(\Gamma)\left(1 - \left(\frac{c_{eq}}{c(\Gamma)}\right)^{n_*}\right). \tag{3}$$

Таким образом, процедура определения кинетики фронта химической реакции сводится к следующему: концентрация газовой компоненты на фронте реакции $c(\mathrm{d})$ и равновесная концентрация c_{eq} определяются из решения диффузионной задачи и уравнения (2) соответственно, после чего, найденные значения подставляются в формулу для нахождения скорости фронта химической реакции (3). Окончательно, интегрируя выражение для скорости фронта химической реакции по времени, находим зависимость положения фронта химической реакции от времени.

2. Задача диффузии

Концентрация газа на фронте реакции и внутри трансформированного материала будет определяться согласно уравнению диффузии. Предполагаем, что диффузионный процесс является стационарным, потому что он протекает намного быстрее, чем процесс распространения фронта химической реакции. Тогда, уравнение закона Фика примет вид:

$$\nabla \cdot (D \nabla c) = 0, \tag{4}$$

где D – коэффициент диффузии. Граничными условиями являются:

$$D\frac{\partial c}{\partial n} + \alpha(c_* - c) = 0 \quad \text{на } \Omega, \quad D\frac{\partial c}{\partial n} + n_* k_* c\left(1 - \left(\frac{c_{eq}}{c}\right)^{n_*}\right) = 0 \quad \text{на } \Gamma. \tag{5}$$

Первое условие следует из непрерывности потока массы на внешней поверхности тела Ω. Здесь n – внешняя нормаль по отношению к области B_+, α – поверхностная скорость переноса массы в B_+. Второе условие следует из баланса массы на фронте реакции *Г*.

В дальнейшем будут рассмотрены три различные модели диффузии: постоянный коэффициент, широко используемая зависимость коэффициента диффузии от давления (напр., [2]):

$$D = D_0 \exp\left(-\frac{pV_d}{kT}\right), \qquad p = -\frac{1}{3}\left(\sigma_{11}^+ + \sigma_{22}^+ + \sigma_{33}^+\right). \tag{6}$$

Как уже было упомянуто выше, это выражение носит феноменологический характер и основано на интуитивной оценке экспериментальных данных.

Третью модель мы оценим из соображений рациональной механики. Рассмотрим стационарную одномерную диффузию в двухкомпонентной системе, где твёрдое тело является изотропным линейным упругим материалом, а газ – идеальным. Из решения систем уравнений для баланса массы для газовой компоненты и баланса количества движения для газообразной и твёрдой компонент, которые взаимодействуют путём вязкого трения $f_{sg} = \rho_g a\left(V_s - V_g\right)$, a – параметр вязкого трения, получаем, что диффузионный поток пропорционален градиенту концентрации, что приводит к закону Фика, в котором коэффициент диффузии зависит от *a*. Таким образом, в рамках рассмотренной модели, напряжённо-деформированное состояние твёрдой компоненты может влиять на диффузию только через параметр *a*. Он определяет, как легко молекулы газа могут диффундировать, и, следовательно, зависит от пространства между узлами решётки. Мы

считаем, что деформации вдоль направления диффузионного потока не влияют на диффузию. Тогда коэффициент диффузии в направлении x_1 выглядит следующим образом:

$$D = D_0\left(1+\beta(\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})\right), \tag{7}$$

где β – постоянный параметр. Следовательно, в трёхмерном случае мы приходим к модели тензорной диффузии, в которой коэффициент диффузии имеет различное значение в разных направлениях.

Для того, чтобы сравнить кинетику фронта химической реакции с коэффициентами диффузии, заданными по формулам (6) и (7), нужно оценить параметр β. Разложив в ряд коэффициент диффузии (6), переписав его через деформации, пользуясь законом Гука и, сравнив результат с коэффициентом диффузии (7), мы увидим, что эти два подхода согласуются, если параметр β равен $\beta_* = \dfrac{V_d E_+}{(1-2\nu_+)Tk}$.

3. Аналитическое решение краевой задачи

Рассмотрим тело со сферической симметрией: $r \in \left[0, r_{\text{o}}\right]$, в котором химическая реакция распространяется с поверхности тела противоположно направлению оси r и локализована на сферической поверхности с координатами $r = r_{\text{i}}$. Тензор химических превращений – изотропный $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{ch}} = \varepsilon_{\text{ch}}\mathbf{E}$, где $\mathbf{E}$ - единичный тензор. Будем рассматривать два типа граничных условий: на внешней поверхности тела заданы радиальные перемещения u_0 или давление p_0. Из соображений симметрии примем, что концентрация газовой компоненты B_* не зависит от координат ϑ и φ, то есть является функцией только радиальной координаты, $c = c(r)$.

Перемещения в теле могут быть найдены из решения Ламе для тел со сферической симметрией,

где константы определяются из условий непрерывности радиальных компонент перемещений и напряжений на фронте химической реакции и ограниченностью перемещений в центре шара при $r = 0$. Следовательно, с учётом этих условий, уравнение для определения равновесной концентрации будет выглядеть следующим образом:

$$A_{nn} = \frac{n_- M_-}{\rho_-}\left[\gamma(T) + \frac{1}{2\left(\lambda_+ + 2\mu_+\right)}\left(12\left(k_- - k_+\right)\mu_+ A_-^2 + 3k_+\left(3k_- + 8\mu_+\right)A_-\varepsilon_{ch}\right.\right.$$
$$\left.\left.-12\mu_+ k_+ \varepsilon_{ch}^2\right)\right] + n_* RT\ln\left(\frac{c(\xi)}{c_*}\right) = 0 \tag{8}$$

Здесь $k_\pm$ – модули всестороннего сжатия, ª$_\pm$ – параметры Ламе, «$_\pm$ – модули сдвига компонент B_- и B_+, соответственно. A_- зависит от типа граничных условий. Здесь и далее используется безразмерный параметр $\xi = \dfrac{r_{\text{i}}}{r_{\text{o}}}$. Как уже упоминалось, реакция может протекать только при $A_{nn} > 0$. Таким образом, при отсутствии внешних нагрузок и нулевой толщине превращённого слоя, реакция может начаться только в том случае, когда величина энергетического параметра больше некоторого критического значения, γ_*, зависящего от свойств материала:

$$¥ > ¥_* = \frac{E_+}{1-¬_+}£_{\text{ch}}^2. \tag{9}$$

Заметим, что в данной краевой задаче след тензора напряжений не зависит от положения фронта химической реакции. Таким образом, в случае постоянного коэффициента диффузии и коэффициента диффузии, определённого соотношением (6), концентрация газа на фронте реакции определяется уравнением:

$$\frac{\mathrm{d}^2 c}{\mathrm{d}\zeta^2} + \frac{2}{\zeta}\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}\zeta} = 0. \tag{10}$$

Подставив найденную равновесную концентрацию и концентрацию газа на фронте реакции в (3) и введя безразмерные параметры:

$$t_* = \frac{n\_k_* n_* M\_c_*}{r_o\,°\_}t,\ ©_1 = \frac{n_*^2 k_* r_o}{D_0},\ ©_2 = \frac{n_*^2 k_*}{\sim}, \tag{11}$$

получим следующее уравнение, описывающее скорость распространения фронта химической реакции:

$$\frac{d¶}{dt_*} = \frac{1 - c_{eq}/c_*}{1 + ©_1¶ - ©_1¶^2 + ©_2¶^2} \tag{12}$$

Рассмотрим теперь коэффициент диффузии (7), зависящий от деформаций скелета. В случае сферического тела этот коэффициент будет равен $D = D_0(1+\ (£^{+}_{\cdot\cdot} + £^{+}_{—}))$. Уравнение диффузии может быть записано как:

$$(1 + 2\ \ (A_+ + \frac{B¶^3}{¸^3}))\frac{\mathrm{d}^2 c}{\mathrm{d}¸^2} + \frac{2(¸^3(1+2A_+\ \ ) - B\ \ ¶^3)}{¸^4}\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}¸} = 0. \tag{13}$$

Окончательно, выражение для скорости фронта химической реакции:

$$\frac{d¶}{dt_*} = \frac{(1+2A_-\ \ )(1 - c_{eq}/c_*)}{(1+2A_-\ \ )(1+©_2¶^2) + ©_1¶ - ©_1¶^2}. \tag{14}$$

Замена $\tilde{¶} = 1 - ¶$ даст нам зависимость скорости роста относительной толщины превращённого слоя от времени.

4. Результаты и обсуждение

Дальнейшие вычисления будут проводиться с параметрами, приведёнными в работе [12]. Подробное исследование кинетики фронта химической реакции с постоянным коэффициентом диффузии приведено в работе [11]. В данной работе мы будем сравнивать как влияет учёт зависимости коэффициента диффузии от напряжений на скорость распространения химического фронта. В случае заданных напряжений на границах тела для шара, разница между скоростями роста превращённого слоя для различных коэффициентов диффузии достаточно мала. В случае заданных деформаций разница существенна. Это происходит потому, что в результате химической реакции возникает дополнительная деформация химического превращения, и при заданных (то есть фиксированных) перемещениях на границе тело не может расшириться ни в одном из направлений, и внутри превращённого материала создаются внутренние деформации, которые влияют на диффузию газовой компоненты сквозь него к фронту химической реакции.

Предложенная модель тензодиффузии оказывает меньшее влияние на скорость распространения фронта химической реакции, чем учёт эмпирически заданной зависимости коэффициента диффузии от напряжений. В эмпирически задаваемом коэффициенте учитывается компонента напряжений, действующей по направлению диффузионного потока. Она не влияет на скорость распространения диффузионного потока, так как не деформирует каркас твёрдого тела в достаточной мере для того, чтобы менять расстояние между ячейками материала и, соответственно, менять проницаемость материла. При учёте же рационально взятого коэффициента диффузии, в котором отсутствует компонента деформаций, направленная по оси распространения диффузионного потока, разница между кинетиками оказывается достаточно малой, чтобы ею пренебречь, поскольку использование постоянного коэффициента диффузии уменьшает количество необходимых параметров модели и соответственно, количество экспериментов и расчётов, необходимых для нахождения этих параметров..

Исследование выполнено в рамках гранта Российского научного фонда

(проект № 18-19-00160) «Разработка фундаментальных основ для расчётно-экспериментальной водородной диагностики деградации свойств конструкционных материалов в агрессивных коррозионных средах».

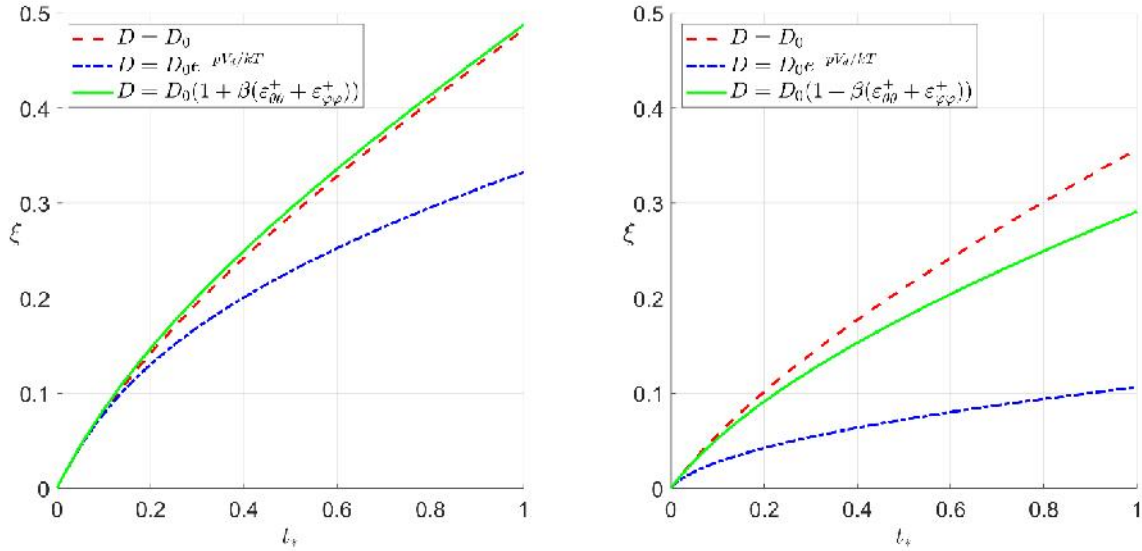


Рис. 1. Зависимость относительной толщины ¶ от времени t_* для сферического тела, = $_*$, ¥ = 5¥$_*$, заданные перемещения на растяжение (левый график) и сжатие (правый график).

ЛИТЕРАТУРА

1. Kao D. B. et al. Two-dimensional silicon oxidation experiments and theory //Electron Devices Meeting, 1985 International. – IEEE, 1985. – С. 388-391.
2. Sutardja P., Oldham W. G. Modeling of stress effects in silicon oxidation //IEEE Transactions on Electron Devices. – 1989. – Т. 36. – №. 11. – С. 2415-2421.
3. Freidin A. B. Chemical affinity tensor and stress-assist chemical reactions front propagation in solids //ASME 2013 international mechanical engineering congress and exposition. – American Society of Mechanical Engineers, 2013. – С. V009T10A102-V009T10A102.
4. Freidin A. B. et al. Chemical affinity tensor and chemical reaction front propagation: theory and FE-simulations //International Journal of Fracture. – 2016. – Т. 202. – №. 2. – С. 245-259.
5. Freidin A. B., Vilchevskaya E. N., Korolev I. K. Stress-assist chemical reactions front propagation in deformable solids //International Journal of Engineering Science. – 2014. – Т. 83. – С. 57-75.
6. Freidin A. et al. Chemical reactions in spherically symmetric problems of mechanochemistry //Acta Mechanica. – 2016. – Т. 227. – №. 1. – С. 43-56.
7. Grigoreva P., Vilchevskaya E. N., Müller W. H. Modeling Stress-Affected Chemical Reactions in Solids–A Rational Mechanics Approach //Advances in Mechanics of Microstructured Media and Structures. – Springer, Cham, 2018. – С. 157-183.

Сведения об авторах:

Григорьева Полина Михайловна – стажёр-исследователь, Федеральное Государственное Бюджетное Учреждение Науки Институт Проблем Машиноведения Российской Академии Наук (ИПМаш РАН), Васильевский остров, Большой проспект, 61, Санкт-Петербург, Россия, 199178
E-mail: polina.grigoreva239@gmail.com

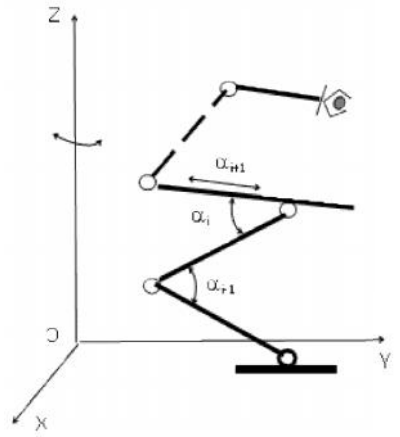
Вильчевская Елена Никитична – старший научный сотрудник лаборатории прикладных исследований, Федеральное Государственное Бюджетное Учреждение Науки Институт Проблем Машиноведения Российской Академии Наук (ИПМаш РАН), Васильевский остров, Большой проспект, 61, Санкт-Петербург, Россия, 199178

НЕКОТОРЫЕ МОДЕЛИ МНОГОЗВЕННЫХ МАНИПУЛЯТОРОВ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ УПРАВЛЯЕМЫХ ДВИЖЕНИЙ

Гукасян А.А.

Приводятся результаты математического моделирования многозвенных манипуляторов, как с абсолютно твёрдыми звеньями, соединёнными идеальными шарнирами, так и манипулятора, звенья которых моделируются как упругие тела. Соединительные узлы между звеньями содержат упругие элементы большой жёсткости. Исследуется кинематика движения манипуляторов как в декартовых, так и в криволинейной системе координат. Разработаны специальные режимы управления манипуляторов, учитывающие влияние упругих свойств. В задачах управления при неполной информации применяются различные методы для гарантированного оптимального управления.

Введение. Представленная работа имеет обзорный характер и обобщает результаты исследования, опубликованных в [1-9]. В первой части приводятся результаты математического моделирования многозвенных манипуляторов, как с абсолютно твёрдыми звенями, соединёнными идеальными шарнирами, так и манипулятора, звенья которых (или часть из них) моделируются как упругие тела или одномерные упругие стержни. Предполагается, что соединительные узлы между звеньями содержат упругие элементы большой жёсткости. Определены пространственные положения манипулятора и компоненты деформации упругого звена [1]. Во второй части, в рамках линейной теории упругости, исследуется кинематика пространственного движения манипуляторов как в декартовых, так и в криволинейной системе координат. Кинематические выражения представлены в виде суммы трёх слагаемых, которые характетизуют кинематику манипулятора как с абсолютно жёсткими звеньями и идеальными соединительными узлами, так и с упругими узлами и упругими звеньми [2-4]. Третья часть доклада посвящена разработке специальных режимов управления манипуляторов, учитывающих влияние упругих свойств в процессе движения. Методом обратной задач динамики исследуется устойчивость программого движения схвата манипулятора по заданному фазовому многообразию. Управление при таких задачах осуществлияется по принципу обратной связи [5,6]. В задачах управления манипуляторам при неполной информации и в условиях неопределённости, где начальное состояние системы задано, а конечная точка известна неточно, и её положение уточняется в процессе движения с помощью измерительных устройств, применяются различные методы для исследования задач гарантированного оптимального управления [7]. В случае, когда изменение массы переносимого манитулятором груза существенна и её необходимо учитывать при моделировании движений, исследованы задачи синтеза оптимального управления движением материальной точки с нефиксированной и переменной массы [8]. Разработанные алгоритмы применяются при управлении вращательного движения летательного аппарата с гашением упругих колебаний и при моделировании технологического процесса, обслуживаемого манипуляторами [9]. Ниже приводится краткое содержание доклада.



Фиг. 1.1

1. Математические модели многозвенных манипуляторов. 1.1. **Идеальная модель многозвенного манипулятора**. Звенья манипулятора считаются абсолютно твёрдыми телами, соединёнными идеальными цилиндрическими шарнирами фиг.1.1. $\alpha_i\left(i=1,2,...,n\right)$– обобщённые координаты, определяющие конфигурацию манипулятора, которые как обычно, представляют собой совокупность углов относительных поворотов и линейных относительных смещений звеньев, $q_j\left(j=1,2,...,m\right)$– координаты центра масс звеньев и груза, а также углы Эйлера, задающие ориентацию схвата. Кинематику движения можно определить соотношением

$$\mathbf{q}=\mathbf{f}\left(\boldsymbol{\alpha}\right),\ \text{где}\ \boldsymbol{\alpha}=\left(\sim_1,\sim_2,...,\sim_n\right)^T,\ \mathbf{q}=\left(q_1,q_2,...,q_m\right)^T \tag{1.1}$$

Если задан $\boldsymbol{\alpha}$ – вектор обобщённых координат, то вектор $\mathbf{q}$ – однозначен. Решение обратной задачи является неоднозначным, поскольку каждому состоянию захватного устройства отвечает некоторое множество конфигураций $G=\{\boldsymbol{\alpha}\}, \alpha_i \in Q_i$. Единственность решения обратной задачи может быть достигнута путём дополнительного требования к построению программного движения, например, определения оптимальной и устойчивой траекторий исполнительного устройства манипулятора. Из (1.1) следует, что обобщённые скорость и ускорение движений инерционных элементов определяются соотношениями:

$$\dot{\mathbf{q}}=\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})\dot{\boldsymbol{\alpha}},\ \ddot{\mathbf{q}}=\frac{\mathbf{dF}(\boldsymbol{\alpha})}{\mathbf{dt}}\dot{\boldsymbol{\alpha}}+\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})\ddot{\boldsymbol{\alpha}},\ \text{где}\ \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial f_1(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial f_m(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial f_m(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_n} \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

$$\frac{d\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})}{dt}=\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f_1(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_i}\dot{\alpha}_i & \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f_1(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_i}\dot{\alpha}_i & \dots & \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f_1(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_n \partial \alpha_i}\dot{\alpha}_i \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f_m(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_i}\dot{\alpha}_i & \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f_m(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_i}\dot{\alpha}_i & \dots & \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f_m(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_n \partial \alpha_i}\dot{\alpha}_i \end{pmatrix}$$

Предположим, что матрица $\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})$ имеет максимальный ранг $r=\min(n,m)$.

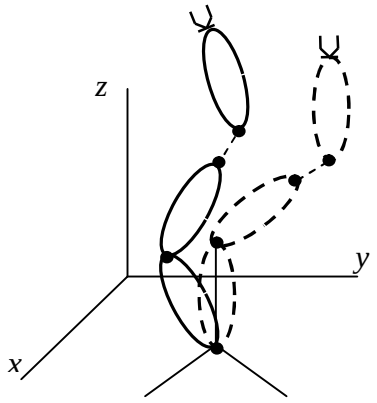
1.2 Упругая модель многозвенного манипулятора. Предполагается, что звенья манипулятора (или часть из них) моделируются как упругие тела или одномерные упругие стержни, а часть соединительных узлов между звеньями содержат упругие элементы большой жёсткости, которые в пределе превращаются в идеальные связи фиг.1.2. Обобщённые координаты, определяющие конфигурацию манипулятора с абсолютно жёсткими звеньями и с идеальными соединительными узлами, обозначены через компоненты вектора $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)^T$ (1.1). Через компоненты вектора

$$\boldsymbol{\beta}=(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_m)^T,\quad (m\le n) \tag{1.3}$$

обозначим дополнительные обобщённые координаты исходной системы, обусловленные упругими элементами в соединительных узлах фиг.1.3. Обобщённые координаты, описывающие деформацию упругих звеньев манипулятора, являются компоненты вектора

$$\mathbf{w}(t,\xi)=\left(w_1(t,\xi),w_2(t,\xi),\dots,w_k(t,\xi)\right)^T \tag{1.4}$$

где ξ – произвольная точка упругого звена.



Фиг.1.2.

Положение инерционных элементов манипулятора в пространстве характеризуем N координатами

$$\mathbf{q}=(q_1,q_2,\dots,q_N)^T \tag{1.5}$$

По аналогии с (1.1), кинематику упругого манипулятора в общем случае можно исследовать на основе соотношения

$$\mathbf{q}=\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\mathbf{w}), \tag{1.6}$$

где $\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\mathbf{w})$ – заданная N -мерная вектор-функция от вектор-аргументов, структура которой зависит от выбора обобщённых координат жёсткой и упругой моделей манипулятора, а также от геометрии манипулятора.

Для дальнейшего исследования предполагаем, что обобщённые координаты β_i малы, а жёсткость c_i соединительных узлов велика, то есть

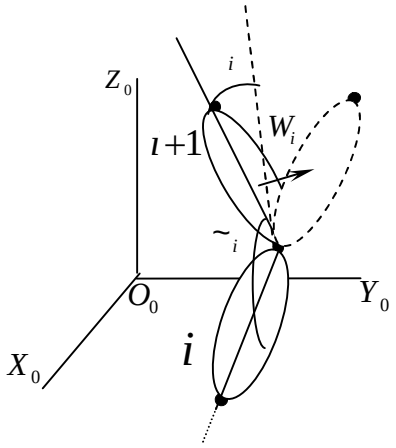
$$\beta_i \sim \varepsilon\,,\, c_i \sim \varepsilon^{-1}\ (i=1,2,\ldots,m), \tag{1.7}$$

где $\varepsilon << 1$ – малый параметр, а координаты вектора $\mathbf{w}(t,\xi)$ в рамках линейной теории упругости малы по сравнению с линейными размерами упругих звеньев и удовлетворяют соотношениям

$$w_i(t,\xi) \sim \varepsilon\,,\, w_i'(t,\xi) \sim \varepsilon\,,\, \dot{w}_i(t,\xi) \sim \varepsilon \tag{1.8}$$

(частные производные по ξ обозначаем штрихом, а по t – точкой).

Заметим, что в пределе при $\varepsilon \to 0$ соединительные узлы становятся идеальными, а упругие звенья – абсолютно твёрдыми телами.



Фиг. 1.3.

2. Кинематика пространственного движения многозвенного манипулятора. В рамках линейной теории упругости приводятся результаты исследования кинематики упругих манипуляторов с применением различных систем координат.

2.1 Метод декартовых координат. В рамках предположений (1.7), (1.8) для исследования кинематики упругого манипулятора применим асимптотические методы малого параметра.

Формула Тейлора для функции (1.6) относительно $\boldsymbol{\beta}$ и $\mathbf{w}$ с точностью ε, будет:

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha},0,0) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial \beta_i}\beta_i + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial w_j} w_j + O(\varepsilon^2) \tag{2.1}$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{f}^{1*}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) + \mathbf{f}^{2*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w}),$$

где $\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha},0,0)$, $\mathbf{f}^{1*}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial \beta_i}\beta_i$, $\quad \mathbf{f}^{2*}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w}) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha},0,0)}{\partial w_j} w_j$,

и имеет место $\quad \mathbf{f}^{1*}(\boldsymbol{\alpha},0) \equiv 0$, $\quad \mathbf{f}^{2*}(\boldsymbol{\alpha},0) \equiv 0$.

Вычисляя производные по времени от функции (2.1), получим вектор скорости характерных точек манипулятора в виде:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^1(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}}) + \mathbf{v}^2(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\boldsymbol{\beta},\dot{\boldsymbol{\beta}}) + \mathbf{v}^3(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{w},\dot{\mathbf{w}}) \tag{2.2}$$

где $\mathbf{v}^1(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}}) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})\dot{\boldsymbol{\alpha}}$, $\mathbf{v}^2(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\boldsymbol{\beta},\dot{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\dot{\boldsymbol{\beta}}$

$\mathbf{v}^3(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{w},\dot{\mathbf{w}}) = \mathbf{F}_3(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}_4(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w})\dot{\mathbf{w}}$, $\left(\mathbf{v}^2(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},0,0) \equiv 0, \quad \mathbf{v}^3(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},0,0) \equiv 0\right)$

$\mathbf{v}^1(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}})$ определяет скорость движения манипулятора с абсолютно жёсткими звеньями и идеальными соединительными узлами, $\mathbf{v}^2(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\boldsymbol{\beta},\dot{\boldsymbol{\beta}})$ – дополнительный вектор скорости, обусловленный упругостью соединительных узлов, а $\mathbf{v}^3(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{w},\dot{\mathbf{w}})$ зависит от упругих свойств звеньев манипулятора ($\mathbf{v}^2(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\boldsymbol{\beta},\dot{\boldsymbol{\beta}})$ и $\mathbf{v}^3(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{w},\dot{\mathbf{w}})$ имеют порядок ε).

Ускорение движения характерных точек манипулятора будет:

$$\mathbf{w}^* = \mathbf{w}^{*1}(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}}) + \mathbf{w}^{*2}(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}},\boldsymbol{\beta},\dot{\boldsymbol{\beta}},\ddot{\boldsymbol{\beta}}) + \mathbf{w}^{*3}(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{w},\dot{\mathbf{w}},\ddot{\mathbf{w}}) \tag{2.3}$$

$$\mathbf{w}^{*1}(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}}) = \frac{d}{dt}\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})\ddot{\boldsymbol{\alpha}}\,,$$

$$\mathbf{w}^{*2}(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}},\boldsymbol{\beta},\dot{\boldsymbol{\beta}},\ddot{\boldsymbol{\beta}}) = \frac{d}{dt}\mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\ddot{\boldsymbol{\alpha}} + \frac{d}{dt}\mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\dot{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\ddot{\boldsymbol{\beta}} \tag{2.4}$$

$$\mathbf{w}^{*3}\left(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{w},\dot{\mathbf{w}},\ddot{\mathbf{w}}\right)=\frac{d}{dt}\mathbf{F}_3\left(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w}\right)\dot{\boldsymbol{\alpha}}+\mathbf{F}_3\left(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w}\right)\ddot{\boldsymbol{\alpha}}+\frac{d}{dt}\mathbf{F}_4\left(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w}\right)\dot{\mathbf{w}}+\mathbf{F}_4\left(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w}\right)\ddot{\mathbf{w}}$$

$$(\mathbf{w}^{*2}\left(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}},0,0,0\right)\equiv 0\,,\ \mathbf{w}^{*3}\left(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}},0,0,0\right)\equiv 0\,)$$

Для определения компонентов векторов скорости (2.2) и ускорения (2.3) необходимо вычислить элементы матриц $\mathbf{F}\left(\boldsymbol{\alpha}\right)$, $\mathbf{F}_1\left(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\right)$, $\mathbf{F}_2\left(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\right)$, $\mathbf{F}_3\left(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w}\right)$, $\mathbf{F}_4\left(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{w}\right)$.

2.2 Метод криволинейных координат. Криволинейными координатами $s_p=s_p\left(q_1,q_2,q_3\right)$, $\left(p=1,2,3\right)$ характерных точек манипулятора, с учётом (1.6), являются

$$s_p=s_p\left[f_1\left(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\mathbf{w}\right),f_2\left(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\mathbf{w}\right),f_3\left(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\mathbf{w}\right)\right]=s_p^*\left(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\mathbf{w}\right),\quad \left(p=1,2,3\right) \tag{2.5}$$

Вектор скорости движения в криволинейной системе координат имеет вид:

$$\mathbf{v}=\sum_{p=1}^{3}H_p\left(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\mathbf{w}\right)\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial s_p^*\left(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\mathbf{w}\right)}{\partial\alpha_i}\dot{\alpha}_i+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial s_p^*\left(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\mathbf{w}\right)}{\partial\beta_j}\dot{\beta}_j+\sum_{l=1}^{k}\frac{\partial s_p^*\left(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\mathbf{w}\right)}{\partial w_l}\dot{w}_l\right]s_p^0, \tag{2.6}$$

где s_p^0 – орт оси криволинейных координат, а $H_p\left(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\mathbf{w}\right)\left(p=1,2,3\right)$ – коэффициенты Ляме.

В рамках принятой модели манипулятора, пользуясь разложением функций $s_p=s_p^*\left(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\mathbf{w}\right)$ и $H_p\left(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\mathbf{w}\right)\left(p=1,2,3\right)$ по формуле Тейлора относительно упругих величин $_j\left(j=1,2,\ldots,m\right)$ и $w_l\left(t,¶\right)\left(l=1,2,\ldots,k\right)$ с точностью £ , получим:

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}_1\left(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}}\right)+\mathbf{v}_2\left(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\boldsymbol{\beta},\dot{\boldsymbol{\beta}}\right)+\mathbf{v}_3\left(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{w},\dot{\mathbf{w}}\right) \tag{2.7}$$

где $\mathbf{v}_1=\mathbf{H}_1^*\left(\boldsymbol{\alpha},0,0\right)\dot{\boldsymbol{\alpha}}$, $\mathbf{v}_2=\mathbf{H}_2^*\left(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},0\right)\dot{\boldsymbol{\alpha}}+\mathbf{H}_4^*\left(\boldsymbol{\alpha},0,0\right)\dot{\boldsymbol{\beta}}$, $\mathbf{v}_3=\mathbf{H}_3^*\left(\boldsymbol{\alpha},0,\mathbf{w}\right)\dot{\boldsymbol{\alpha}}+\mathbf{H}_5^*\left(\boldsymbol{\alpha},0,0\right)\dot{\mathbf{w}}$.

$\mathbf{H}_1^*\left(\boldsymbol{\alpha},0,0\right)$, $\mathbf{H}_2^*\left(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},0\right)$, $\mathbf{H}_3^*\left(\boldsymbol{\alpha},0,\mathbf{w}\right)$, $\mathbf{H}_4^*\left(\boldsymbol{\alpha},0,0\right)$, $\mathbf{H}_5^*\left(\boldsymbol{\alpha},0,0\right)$ – обобщённые матрицы Ляме, элементы которых зависят от коэффициентов Лямэ $H_p\left(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\mathbf{w}\right)$ и от геометрической структуры манипулятора.

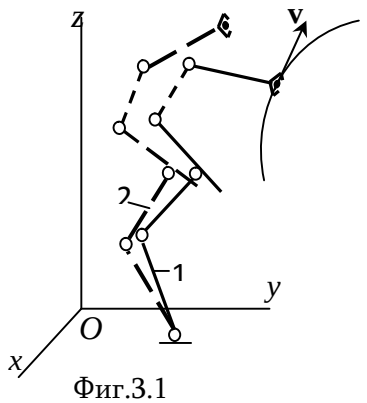
Здесь, так же, как в (2.2), скорость движения удаётся представить в виде суммы трёх слагаемых. Вектор ускорения $\mathbf{a}$ в криволинейной системе координат представим в виде

$$\mathbf{a}=\sum_{p=1}^{3}a_p s_p^0\text{, где } a_p=\frac{1}{H_p}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{s}_p}\frac{v^2}{2}\right)-\frac{\partial}{\partial s_p}\frac{v^2}{2}\right\}\left(p=1,2,3\right). \tag{2.8}$$

(2.8) также позволяет представить вектор ускорения в виде следующих трёх слагаемых:

$$\mathbf{a}=\mathbf{a}^1\left(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}}\right)+\mathbf{a}^2\left(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}},\boldsymbol{\beta},\dot{\boldsymbol{\beta}},\ddot{\boldsymbol{\beta}}\right)+\mathbf{a}^3\left(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{w},\dot{\mathbf{w}},\ddot{\mathbf{w}}\right).$$

3.Управления движением схвата манипулятора по заданной программе. Пусть в пространстве задана траектория движения схвата как пересечение двух нестационарых гладких поверхностей фиг.3.1



Фиг.3.1

$$\begin{aligned}&g_1\left(q_1,q_2,q_3,t\right)=0\\&g_2\left(q_1,q_2,q_3,t\right)=0,\end{aligned}\quad\text{где } \mathbf{q}=\mathbf{f}\left(\boldsymbol{\alpha}\right)+\mathbf{f}^*\left(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\right) \tag{3.1}$$

и при $t=t_0$ координаты схвата $q_i\left(\alpha\left(t_0\right),\beta\left(t_0\right)\right)\left(i=1,2,3\right)$ удовлетворяют уравнениям линии (3.1).

Требуется найти такие управляющие функции $u_i=\dot{\alpha}_i\left(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\dot{\boldsymbol{\beta}}\right)\left(i=1,2,\ldots,n\right)$, которые по принципу обратной связи обеспечивают движение схвата упругого манипулятора по заданной программе (3.1) со скоростью **v**(t), с минимизацией функционала

$$J=\Phi\left[u_1,u_2,\ldots,u_n\right]\to\min_u\left(\max\right) \tag{3.2}$$

Исследования задачи оптимального управления (3.1), (3.2) сводятся к задаче условного экстремума расширенного функционала методом неопределённых множителей Лагранжа. Управляющие функции манипулятора имеют вид:

$$u_i^0 = -\frac{1}{2}\sum_{\vartheta=1}^{3}\frac{\Delta_\vartheta}{\Delta}\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left[f_\vartheta(\boldsymbol{\alpha}) + f_\vartheta^*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\right], \quad (i = 1,2,\ldots,n).$$

ЛИТЕРАТУРА

1.Гукасян А.А. О пространственном положении и деформации упругих звеньев манипулятора. // Изв. НАН Армении. Механика. 2014. Т.67. №4. С.53-64.

2.Гукасян А.А. О кинематике многозвенного манипулятора с упругими соединительными узлами и с упругими звеньями. // Изв. НАН Армении. Механика. 2014. Т.67. №3. С.68-83.

3.Гукасян А.А. Кинематика упругого манипулятора в криволинейой системе координат. //Доклады НАН Армении. 2014. Т.114. №3. С.222-229.

4.Гукасян А.А. О двух подходах к исследованию кинематики упругих манипулятотов. // Изв. НАН Армении. Механика. 2015. Т.68. №2. С.53-67.

5.Гукасян А.А. Кинематическое управление движением схвата двухзвенного упругого манипулятора. //Доклады НАН Армении. 2014. Т.114. № 4. С.316-324 .

6. Гукасян А.А. Кинематика многозвенного манипулятора с упругим последним звеном. // Изв. НАН Армении. Механика. 2002. Т.55. №3. С.79-87.

7.Айрапетян В.В., Гукасян А.А., Манукян А.А. Об одной задаче оптимального гарантированного управления манипулятором при неполной информации. // Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т.58. №1. С.67-77.

8.Гукасян А.А., Матевосян А.Г. Об управляемом движении материальной точки с нефиксированной массой. // Изв. НАН Армении. Механика. 2002. Т.55. №1. С.75-81.

9.Гукасян А.А. Об одной задаче оптимального моделирования технологического процесса, обслуживаемого манипуляционным роботом. //Известия АН Арм. ССР, Механика. 1986. Т.39. №6. С.39-49.

<u>Сведения об авторе:</u>

Гукасян Артуш Апресович - доктор физ.-мат. наук, профессор, ректор Горисского Государственного университета, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении.

E-mail: ghukasyan10@yandex.ru

ОБ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОЦЕССА ОБСЛУЖИВАНИЯ МАНИПУЛЯТОРОМ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО УЧАСТКА

Гукасян А.А., Ордян А.Я.

Приводится описание математической модели процесса обслуживания манипулятором технологического участка, который состоит из подвижных или неподвижных объектов (целей) и управляемого многозвенного манипулятора. Предполагается, что динамические характеристики манипулятора могут изменяться в зависимости от массы переносимого груза или инструмента. Сформулирована задача оптимального управления и условия преемственности в задачах обслуживания. В случае, когда движение манипулятора на каждом интервале обслуживания описывается линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, а движения объектов заданы, исследуются вопросы управляемости. Показано, что процесс обслуживания является вполне управляемым, если он управляем на каждом интервале обслуживания. Получены матрицы управляемости.

1. Математическая модель процесса обслуживания и постановка задачи управления. Рассматривается технологический участок, который состоит из k объектов (целей) и управляемого многозвенного манипулятора. Задача манипулятора состоит в том, что он должен обслуживать непрерывную работу объектов [1-3]. В общем случае движение i-го объекта в процессе обслуживания в обобщённых координатах зададим уравнением

$$\ddot{\mathbf{y}}^i = \mathbf{g}^i\left(\mathbf{y}^i, \dot{\mathbf{y}}^i\right)\left(i = 1, 2, \cdots, k\right) \text{ с условиями } \left(\mathbf{y}^i\left(t_{i-1}\right), \dot{\mathbf{y}}^i\left(t_{i-1}\right)\right) \in \mathbf{G}_y^i\left(i = 1, 2, \cdots, k\right), \tag{1.1}$$

где $\mathbf{y}^i = \left(y_1^i, y_2^i, \cdots y_m^i\right)\left(i = 1, 2, \cdots, k\right)$ – вектор обобщённых координат i-ой цели, $\mathbf{G}_y^i$ – $2m$-мерная область начальных условий движения объектов.

Уравнение движение манипулятора на i-ом этапе обслуживания, представим в виде

$$\ddot{\boldsymbol{\alpha}}^i = f^i\left(\boldsymbol{\alpha}^i, \dot{\boldsymbol{\alpha}}^i, \mathbf{u}^i, \boldsymbol{\omega}^i\right), \boldsymbol{\alpha}^i \in \mathbf{S}^i, \mathbf{u}^i \in \left\{\mathbf{U}^i\right\}, \tag{1.2}$$

$$\boldsymbol{\omega}^i \in \left\{\boldsymbol{\Omega}\right\}\left(i = 1, 2, \cdots, k\right)\left(\boldsymbol{\alpha}^i\left(t_{i-1}\right), \dot{\boldsymbol{\alpha}}^i\left(t_{i-1}\right)\right) \in \mathbf{G}_{\sim}^i,\ \left(i = 1, 2, \cdots, k\right),$$

где $\mathbf{G}_{\sim}^i$ – $2l$-мерная область начальных состояний манипулятора, $\boldsymbol{\alpha}^i = \left(\alpha_1^i, \alpha_2^i, \cdots, \alpha_l^i\right)$ – вектор обобщённых координат манипулятора, $\mathbf{u}^i$ – вектор управления манипулятором, $\mathbf{S}^i$ – та часть технологического пространства, где возможно свободное передвижение манипулятора, $\left\{\mathbf{U}^i\right\}$ – выпуклая область, характеризующая возможность управления, $\boldsymbol{\omega}^i$ – вектор, определяющий параметры, входящие в систему уравнений манипулятора, который может изменяться после каждой встречи с объектами, $\left\{\boldsymbol{\Omega}^i\right\}$ – область допустимых значений параметра $\boldsymbol{\omega}^i$. В практических задачах обслуживания в качестве параметра $\boldsymbol{\omega}^i$ может являться масса переносимого манипулятором груза или инструмента [4,5].

Для обеспечения встреч с целями необходимо также задать обобщённые координаты схвата манипулятора. Их обозначим через вектор $\mathbf{q}^i = \left(q_1^i, q_2^i \cdots, q_N^i\right)$, где $\mathbf{q}^i = \tilde{\mathbf{f}}^i\left(\boldsymbol{\alpha}^i\right)$. Вектор $\boldsymbol{\alpha}^i$, на i-ом этапе движения, определяется решением уравнения (1.2).

Движение манипулятора с целью обслуживания объектов (1.1) начинается в момент времени t_0 и заканчивается в момент T (T может быть заданным или определяться из дополнительных условий). Начиная с t_0 до T, манипулятор должен осуществлять встречи с объектами (1.1) в моменты времени $t_1, t_2, \cdots, t_k$, где t_i – момент встречи манипулятора с i-ой целью ($i = 1, 2, \cdots, k$). Эти условия для переменных $\mathbf{q}^i, \dot{\mathbf{q}}^i$ и $\mathbf{y}^i, \dot{\mathbf{y}}^i$, а также на управляющие силы и моменты, развиваемые приводами, формально в общем случае, можно представить следующим образом:

$$\left(\mathbf{q}^i\left(t_i\right),\dot{\mathbf{q}}^i\left(t_i\right),\mathbf{y}^i\left(t_i\right),\dot{\mathbf{y}}^i\left(t_i\right),\mathbf{u}^i\right)\in\mathbf{G}^i_{\mathrm{q},y,u}\left(i=1,2,\cdots,k\right) \tag{1.3}$$

или для переменных $\boldsymbol{\alpha}^i$, $\dot{\boldsymbol{\alpha}}^i$ и $\mathbf{y}^i,\dot{\mathbf{y}}^i$ в виде

$$\left(\boldsymbol{\alpha}^i\left(t_i\right),\dot{\boldsymbol{\alpha}}^i\left(t_i\right),\mathbf{y}^i\left(t_i\right),\dot{\mathbf{y}}^i\left(t_i\right),\mathbf{u}^i\right)\in\mathbf{G}^i_{\alpha,y,u}\left(i=1,2,\cdots,k\right). \tag{1.4}$$

Предполагается, что время нахождения манипулятора около каждого объекта не учитывается, то есть считается, что в момент времени t_i манипулятор обслуживает объект под номером i и мгновенно направляется к другому объекту (предположение имеет место, поскольку $\tau/(T-t_0)\ll 1$, где τ – время нахождения манипулятора около объекта, а $\left(T-t_0\right)$ – время процесса обслуживания). Отметим, что если последовательность обслуживания манипулятором объектов фиксирована, то задача на каждом этапе движения $[t_{i-1},t_i]$ сводится к обычной задаче управления или оптимального уравления с фиксированными или свободными краевыми условиямии [6,7].

Минимизирующий функционал на каждом этапе движения в общем случае можно представить в виде

$$I_i=I\left[t_i,t_{i+1},\boldsymbol{\alpha}^i,\dot{\boldsymbol{\alpha}}^i,\mathbf{u}^i,\boldsymbol{\omega}^i\right]\to\min_{\mathbf{u}^i\in\{\mathbf{U}\}}\quad\left(i=0,1,2,\cdots,k-1\right). \tag{1.5}$$

В случае, когда последовательность обслуживания и моменты встреч с объектами не фиксированы, то первоначальную задачу управления можно сформулировать как задачу нахождения последовательностей объектов обслуживания и моментов встреч, в процессе которых минимизирующий функционал будет зависеть также от последовательности встреч. Решение такой задачи существует, поскольку число возможных последовательностей встреч с объектами конечно. С точки зрения технологического процесса немаловажным критерием качества является также рациональное использование технологического участка $(\mathbf{S}\to\min)$. Этот критерий является геометрическим и налагает на кинематику движения манипулятора дополнительное ограничение [2].

Из (1.1)- (1.5) следует, что сформулированный процесс обслуживания можно рассматривать как результат целенаправленных управляемых движений составных динамических систем (1.1), (1.2) на интервалах времени $[t_{i-1},t_i]$ $\left(i=1,2,\cdots,k\right)$ со следующими условиями преемственности между ними [6]

$$\left(\boldsymbol{\alpha}^i\left(\mathbf{t}_i\right),\dot{\boldsymbol{\alpha}}^i\left(\mathbf{t}_i\right),\mathbf{y}^i\left(\mathbf{t}_i\right),\dot{\mathbf{y}}^i\left(\mathbf{t}_i\right),\boldsymbol{\alpha}^{i+1}\left(\mathbf{t}_i\right),\dot{\boldsymbol{\alpha}}^{i+1}\left(\mathbf{t}_i\right)\right)\in\boldsymbol{\Phi}^i_\alpha,\left(i=1,2,\cdots,k\right) \tag{1.6}$$

Условие (1.6) означает, что в момент времени t_i конечное состояние i-ой динамической системы (1.1), (1.2) и начальное состояние $\left(i+1\right)$-ой системы (1.2) принадлежат некоторой $2\left(m+l\right)$-мерной области $\boldsymbol{\Phi}^i_\alpha$. С математической точки зрения (1.6) даёт возможность рассматривать обслуживание манипулятором технологического процесса как управление движением манипулятора с переменной динамикой и с промежуточными состояниями [1,4-7]. Важным вопросом для дальнейшего исследования процесса обслуживания являются вопросы управляемости, как на отдельных этапах обслуживания, так и управляемость всей системы в целом, то есть на всём интервале времени [7].

2. **Описание линейной модели обслуживания и управляемость**. Уравнение, описывающее движение манипулятора на каждом интервале обслуживания, в общем случае представим в виде линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами различных размеров [3].

$$\left[\begin{array}{l}\dot{\mathbf{x}}^1=\mathbf{A}_1\mathbf{x}^1+\mathbf{b}^1u, \quad \text{при} \quad t_0\le t\le t_1\\ \dot{\mathbf{x}}^2=\mathbf{A}_2\mathbf{x}^2+\mathbf{b}^2u, \quad \text{при} \quad t_1\le t\le t_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \dot{\mathbf{x}}^{k-1}=\mathbf{A}_{k-1}\mathbf{x}^{k-1}+\mathbf{b}^{k-1}u, \quad \text{при} \quad t_{(k-2)}\le t\le t_{(k-1)}\\ \dot{\mathbf{x}}^k=\mathbf{A}_k\mathbf{x}^k+\mathbf{b}^ku, \quad \text{при} \quad t_{(k-1)}\le t\le t_k=T\end{array}\right. \tag{2.1}$$

$$\left(t_0<t_1<t_2<\ldots<t_{k-1}<t_k=T\right), \quad t\in\left[t_{i-1},t_i\right]\left(i=1,2,\cdots,k\right)$$

где $\kappa-$количество этапов обслуживания, которым соответствуют интервалы времени $\left[t_{i-1},t_i\right]$ $\left(i=1,2,\cdots,k\right)$, $\mathbf{x}^i$ – n_i-мерный фазовый вектор состояния манипулятора на интервале времени $t\in\left[t_{i-1},t_i\right]$, $\mathbf{A}_i=\mathbf{A}\left(\boldsymbol{\omega}^i\right)-\left(n_i\times n_i\right)$-мерная матрица с постоянными элементами на интервале $\left[t_{i-1},t_i\right]$, в зависимости от параметра $\boldsymbol{\omega}^i$, $\mathbf{b}^i-n_i$-мерный постоянный вектор, $u\left(t\right)-$скалярная функция управления, $t\in\left[t_o,T\right]$ (t_0-начальный, $t_k=T-$конечный момент времени, соответственно). Промежуточные моменты времени $t_i\left(i=1,2,\cdots,k\right)$ могут быть фиксированными или определяться из дополнительных условий.

Пусть в пространстве состояния заданы произвольные начальное (при $t=t_0, i=1$) и конечное (при $t=T, i=k$) положения для (2.1) в виде

$$\mathbf{x}^1\left(t_0\right)=\mathbf{x}^1_{t_0}, \mathbf{x}^k\left(t_k\right)=\mathbf{x}^k\left(T\right)=\mathbf{x}^k_T, \tag{2.2}$$

где фазовый вектор $\mathbf{x}^1_{t_0}$ имеет размерность n_1, а $\mathbf{x}^k_T-$размерность n_k.

В общем случае предполагается, что $n_1\ne n_k$ и в промежуточные моменты времени t_i $\left(i=1,2,\ldots,k-1\right)$, когда происходит переход из одного этапа обслуживания в другое, фазовые векторы составных систем (2.1) должны удовлетворять условиям:

$$\mathbf{x}^i\left(t_i\right)=\mathbf{z}^i\left(t_i\right)=\mathbf{x}^{i+1}\left(t_i\right), \left(i=1,2,\ldots,k-1\right) \tag{2.3}$$

где $\mathbf{z}^i\left(t_i\right)$–заданное фазовое состояние объектов в моменты времени t_i $\left(i=1,2,\ldots,k-1\right)$, а условия (2.3) обеспечивают преемственности (1.6) процесса.

Не нарушая общности, предполагаем что $n_{i+1}>n_i$ $\left(i=1,2,\cdots,k-1\right)$. Для согласования размерности фазовых векторов на разные этапы движения, формально считаем, что движение на i-ом этапе происходит на n_{i+1}-мерном пространстве $R^{n_{i+1}}$, где последние $\left(n_{i+1}-n_i\right)$ компоненты фазового вектора $\mathbf{x}^i\left(t\right)$ тождественно равны нулю, то есть

$$\begin{aligned}&\mathbf{x}^i\left(t\right)=\left(x_1^i,x_2^i,\cdots,x_{n_i}^i,0_{n_i+1},0_{n_i+2},\cdots,0_{n_{i+1}}\right)^T,\\ &\mathbf{x}^{i+1}\left(t\right)=\left(x_1^{i+1},x_2^{i+1},\cdots,x_{n_i}^{i+1},x_{n_i+1}^{i+1},x_{n_i+2}^{i+1},\cdots,x_{n_{i+1}}^{i+1}\right)^T\end{aligned} \tag{2.4}$$

Аналогичным образом можно формально увеличить размерность пространства состояний на $i+1$ этапе движений на величину $\left(n_i - n_{i+1}\right)$, когда $n_{i+1} < n_i \left(i = 1, 2, \cdots, k-1\right)$.

Поскольку на каждом интервале времени $\left[t_{i-1}, t_i\right] \left(i = 1, 2, \ldots, k\right)$ движение манипулятора описывается системой линейных дифференциальных уравнений из (2.1), то при надлежащем выборе управляющей функции, траектория $\mathbf{x}\left(t\right) = \left\{\mathbf{x}^i\left(t\right)\right\} \left(i = 1, 2, \ldots, k\right)$ движения, объединяющие траектории на интервалах $\left(i = 1, 2, \ldots, k\right)$, является непрерывным и кусочно-дифференцируемым. Поскольку совокупность (2.1) описывает весь процесс обслуживания манипулятором технологического участка, и каждая подсистема является уравнением управляемого движения на интервале времени $t \in \left[t_i, t_{i+1}\right] \left(i = 1, 2, \ldots, k-1\right)$, то управляемость технологического процесса в целом зависит от управляемости на каждом интервале. Методом математической индукции нетрудно показать, что процесс обслуживания является вполне управляемым, если он вполне управляем на каждом этапе, и не управляемым, если хотя бы одна из подсистем (2.1) не вполне управляема на своём интервале определения.

На всем интервале времени $\left[t_0, T\right]$ определитель матрицы управляемости $\mathbf{M}^k$ объединения систем (2.1), с учётом (2.2)- (2.4), имеет следующую структуру [8]:

$$\mathbf{M}^k = \left\{\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \cdots, \mathbf{M}_{k-1}, \mathbf{M}_k\right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & 0_{12} & 0_{13} & \cdots & 0_{1k-1} & 0_{1k} \\ 0_{21} & \mathbf{M}_{22} & 0_{23} & \cdots & 0_{2k-1} & 0_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0_{k-11} & 0_{k-12} & 0_{k-13} & \ldots & \mathbf{M}_{k-1k-1} & 0_{k-1k} \\ 0_{k1} & 0_{k2} & 0_{k3} & \cdots & 0_{kk-1} & \mathbf{M}_{kk} \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

Матрица $\mathbf{M}^k$ имеет размерность $\left[\left(\sum_{j=1}^{k} n_j\right) \times \left(\sum_{j=1}^{k} n_j\right)\right]$. Определитель матрицы управляемости является $\det \mathbf{M}^k = \det \mathbf{M}_{11} \times \det \mathbf{M}_{22} \times \cdots \times \det \mathbf{M}_{kk}$, где $\mathbf{M}_{jj}$ $\left(j = 1, 2, \ldots, k\right)$ – матрицей управляемости системы под номером $j\left(j = 1, 2, \cdots, k\right)$ на интервале времени движения $\left\lfloor t_{j-1}, t_j \right\rfloor$. Следовательно, из (2.5) следует, что процесс обслуживания манипулятором на всем интервале времени $\left[t_0, T\right]$ вполне управляем, если каждый этап обслуживания вполне управляем $\left(\mathrm{rang}\mathbf{M}^k = \left(n_1 + n_2 + \cdots + n_k\right)\right)$ и неуправляем, если хотя бы на одном интервале обслуживания процесс неуправляемый. В задачах синтеза при фиксированных промежуточных условиях, оптимальное время обслуживания является $T = \sum_{j=1}^{k} \min T_j$, где $\min T_j$ – минимальное время обслуживания на интервале $\left\lfloor t_{j-1}, t_j \right\rfloor$. Управление u является объединением u_j $\left(j = 1, 2, \ldots, k\right)$ на интервалах $\left\lfloor t_{j-1}, t_j \right\rfloor$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черноусько Ф.Л., Градецкий В.Г., Болотник Н.Н. Манипуляционные роботы. М.: Наука, 1989. 363 с.
2. Гукасян А.А. Об одной задаче оптимального моделирования технологического процесса, обслуживаемого манипуляционным роботом. //Известия АН Арм. ССР, Механика. 1986. Т.39. №6. С.39-49.
3. Гукасян А.А. О математическом моделировании процесса обслуживания и условия её управляемости. // Известия НАН РА. Мехахиника. 2017. Т.70. №3. С.26-38.
4. Гукасян А.А., Матевосян А.Г. Об управляемом движении материальной точки с нефиксированной массой. //Известия НАН РА. Механика. 2002. Т.55. №1. С.75-81.
5. Гукасян А.А., Матевосян А.Г. Задача оптимального управления движением точки переменной массы. //В сб.: научных трудов «Математический анализ и его приложения» АГПУ им. Х.Абовяна, Ереван –2003, вып.3, с.29-40.
6. Величенко В.В. Условия оптимальности в задачах управления с промежуточными условиями. //ДАН СССР. 1967. Т.174. №5. С.1011-1013.
7. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475с.
8. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Физматлит, 2004. 560 с.

Сведения об авторах:

Гукасян А.А. – Институт механики НАН Армении, Горисский Государственный Университет **.**
E-mail: ghukasyan10@yandex.ru.

Ордян А.Я. – кафедра математики и информатики, Горисский Государственный Университет **.**
E-mail: oarpine@rambler.ru

О ДИСПЕРСИОННЫХ УРАВНЕНИЯХ ОРТОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ СО СВОБОДНЫМИ КРАЯМИ

Гулгазарян Г.Р., Гулгазарян Л.Г.

В работе, используя систему уравнений, соответствующую классической теории ортотропных цилиндрических оболочек, исследуются свободные колебания тонкой упругой ортотропной цилиндрической панели со свободными краями. Для вычисления собственных частот и определения соответствующих мод используется обобщенный метод сведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям Канторовича-Власова. Выведены дисперсионные уравнения для нахождения собственных частот возможных типов колебаний. Установлена асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемой задачи и аналогичной задачи для прямоугольной пластины со свободными сторонами. Установлена также асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемой задачи и задачи на собственные значения полубесконечной ортотропной цилиндрической оболочки открытого профиля с тремя свободными краями.

Введение. Известно, что у свободного края ортотропной пластинки, независимо друг от друга существуют планарные и изгибные колебания [1-3]. При искривлении пластинки два указанных типа колебания оказываются связанными, давая начало двум новым типам локализованных у свободного края (преимущественно, планарных и преимущественно изгибных типов) колебаниям. У свободного края упругой цилиндрической оболочки происходит трансформация одного типа колебания в другой. При этой трансформации колебаний, с учётом геометрических и механических параметров оболочки, возникает сложная картина распределения частот собственных колебаний конечных и бесконечных цилиндрических оболочек со свободным краем [3]. С увеличением числа свободных краёв цилиндрической панели картина распределения частот собственных колебаний становится более сложной. Поэтому, исследования краевого резонанса пластин и цилиндрических панелей со свободными краями являются наиболее трудными задачами в теории колебаний пластин и оболочек [2]. Эти трудности преодолеваются с помощью комбинирования аналитической и асимптотической теорий, а также численными методами. В настоящей работе исследуются свободные колебания ортотропной цилиндрической панели со свободными краями. Задача не допускает разделения переменных. Дифференциальный оператор, соответствующий задаче, самосопряженный и неотрицательно определённый. Поэтому, для нахождения собственных частот и соответствующих собственных форм можно применять обобщённый метод сведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям Канторовича-Власова [4], [5]. В качестве базисных функций используются собственные функции задачи:

$$w^{VIII} = \theta^8 w, \quad w\big|_{\beta=0,s} = w'\big|_{\beta=0,s} = w''\big|_{\beta=0,s} = w'''\big|_{\beta=0,s} = 0, \ 0 \le \beta \le s, \tag{1}$$

Задача (1) – самосопряжённая и положительно определённая. Собственным значениям $\bar{\theta}_m^8, m = \overline{1,\infty}$ задачи (1) соответствуют собственные функции:

$$w_m(\theta_m,\beta) = \frac{\Delta_1}{\Delta} x_1(\theta_m,\beta) + \frac{\Delta_2}{\Delta} x_2(\theta_m,\beta) + \frac{\Delta_3}{\Delta} x_3(\theta_m,\beta) + x_4(\theta_m,\beta), \ 0 \le \beta \le s, m = \overline{1,+\infty}, \tag{2}$$

$$\begin{gathered} x_1(\theta_m,\beta) = \operatorname{ch}\theta_m\beta - \operatorname{ch}\frac{\theta_m}{\sqrt{2}}\beta\cos\frac{\theta_m}{\sqrt{2}}\beta - \operatorname{sh}\frac{\theta_m}{\sqrt{2}}\beta\sin\frac{\theta_m}{\sqrt{2}}\beta, \\ x_2(\theta_m,\beta) = \operatorname{sh}\theta_m\beta - \sqrt{2}\operatorname{ch}\frac{\theta_m}{\sqrt{2}}\beta\sin\frac{\theta_m}{\sqrt{2}}\beta, \quad x_3(\theta_m,\beta) = \sin\theta_m\beta - \sqrt{2}\operatorname{sh}\frac{\theta_m}{\sqrt{2}}\beta\cos\frac{\theta_m}{\sqrt{2}}\beta, \\ x_4(\theta_m,\beta) = \cos\theta_m\beta - \operatorname{ch}\frac{\theta_m}{\sqrt{2}}\beta\cos\frac{\theta_m}{\sqrt{2}}\beta + \operatorname{sh}\frac{\theta_m}{\sqrt{2}}\beta\sin\frac{\theta_m}{\sqrt{2}}\beta, \end{gathered} \tag{3}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1(\theta_m,s) & x_2(\theta_m,s) & x_3(\theta_m,s) \\ x_1'(\theta_m,s) & x_2'(\theta_m,s) & x_3'(\theta_m,s) \\ x_1''(\theta_m,s) & x_2''(\theta_m,s) & x_3''(\theta_m,s) \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = -\begin{vmatrix} x_4(\theta_m,s) & x_2(\theta_m,s) & x_3(\theta_m,s) \\ x_4'(\theta_m,s) & x_2'(\theta_m,s) & x_3'(\theta_m,s) \\ x_4''(\theta_m,s) & x_2''(\theta_m,s) & x_3''(\theta_m,s) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = -\begin{vmatrix} x_1(\theta_m,s) & x_4(\theta_m,s) & x_3(\theta_m,s) \\ x_1'(\theta_m,s) & x_4'(\theta_m,s) & x_3'(\theta_m,s) \\ x_1''(\theta_m,s) & x_4''(\theta_m,s) & x_3''(\theta_m,s) \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = -\begin{vmatrix} x_1(\theta_m,s) & x_2(\theta_m,s) & x_4(\theta_m,s) \\ x_1'(\theta_m,s) & x_2'(\theta_m,s) & x_4'(\theta_m,s) \\ x_1''(\theta_m,s) & x_2''(\theta_m,s) & x_4''(\theta_m,s) \end{vmatrix},$$

где $\bar{\ }_m, m=\overline{1,+\infty}$ – положительные нули определителя Вронского функции (3) в точке $\beta = s$. Обозначим

$$\beta'_m = \int_0^s \left(w'_m(\theta_m,\beta)\right)^2 d\beta \Big/ \int_0^s \left(w_m(\theta_m,\beta)\right)^2 d\beta,\ \beta''_m = \int_0^s \left(w''_m(\theta_m,\beta)\right)^2 d\beta \Big/ \int_0^s \left(w'_m(\theta_m,\beta)\right)^2 d\beta. \tag{4}$$

Заметим, что $\beta'_m \to 1$ и $\beta''_m \to 1$ при $m \to +\infty$.

1. Постановка задачи. На срединной поверхности панели вводятся криволинейные координаты (α,β), где $\alpha(0 \le \alpha \le l)$ и $\beta(0 \le \beta \le s)$ являются соответственно длиной образующей и длиной направляющей окружности, l – длина панели, а s – длина направляющей окружности. В качестве исходных уравнений, описывающих колебания оболочек, используются уравнения, которые соответствуют классической теории ортотропных цилиндрических оболочек, записанных в выбранных криволинейных координатах α,β

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{h^2}{12} n_{ij} u_j + l_{ij} u_j = \lambda u_i, \quad i = 1,2,3 \tag{5}$$

Граничные условия свободных краёв при $\alpha = 0, l$ и $\beta = 0, s$ имеют вид [6]:

$$T_1\big|_{\alpha=0,l} = S_{12} + \frac{H}{R}\bigg|_{\alpha=0,l} = N_1 + \frac{\partial H}{\partial \beta}\bigg|_{\alpha=0,l} = M_1\big|_{\alpha=0,l} = 0 \tag{6}$$

$$T_2\big|_{\beta=0,s} = S_{21} + \frac{H}{R}\bigg|_{\beta=0,s} = N_2 + \frac{\partial H}{\partial \alpha}\bigg|_{\beta=0,s} = M_2\big|_{\beta=0,s} = 0 \tag{7}$$

Здесь u_1, u_2, u_3 – проекции вектора перемещения, соответственно в направлениях α,β и нормали к срединной поверхности оболочки, $l_{ij}, n_{ij}, i, j = 1,2,3$; $T_k, S_{k,n}, M_k, H, k, n = 1,2$ – дифференциальные операторы, явный вид которых можно найти в [6]. R – радиус направляющей окружности срединной поверхности, $\mu^4 = h^2/12$ (h –толщина оболочки). $\lambda = \omega^2\rho$, где ω–угловая частота собственных колебаний, ρ –плотность материала. Задача (4)-(7) – самосопряженная и неотрицательно определённая.

2. Вывод и анализ характеристических уравнений. В первом, втором и третьем уравнениях системы (5), спектральный параметр λ формально заменим на $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, соответственно. Решение системы (5) ищем в виде

$$(u_1, u_2, u_3) = \{u_m w_m(\theta_m,\beta),\ v_m w'_m(\theta_m,\beta),\ w_m(\theta_m,\beta)\}\exp(k\chi\alpha), \quad m = \overline{1,+\infty}. \tag{8}$$

Здесь $w_m(\theta_m\beta), m = \overline{1,\infty}$ определяются по формуле (2), u_m, v_m, χ – неопределённые постоянные.

При этом, условия (7) выполняются автоматически. Подставим (8) в (5). Полученные уравнения скалярным образом умножаем на вектор функции $\left(w_m(\theta_m,\beta), w'_m(\theta_m,\beta), w_m(\theta_m,\beta)\right)$ и интегрируем в пределах от 0 до s. Из первых двух полученных уравнений имеем:

$$(c_m + \varepsilon_m^2 a^2 g_m d_m) u_m = \varepsilon_m \chi \left\{ a_m - a^2 \frac{B_{22}(B_{12}+B_{66})}{B_{11}B_{66}} \beta'_m l_m + \varepsilon_m^2 a^2 \frac{B_{22}B_{12}}{B_{11}B_{66}} d_m \right\}, \tag{9}$$

$$(c_m + \varepsilon_m^2 a^2 g_m d_m) v_{cm} = \varepsilon_m \left\{ b_m - a^2 g_m l_m \right\}, \tag{10}$$

а из третьего уравнения, учитывая соотношения (9) и (10), получим характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned} &R_{mm} c_m + \varepsilon_m^2 \left\{ c_m + b_m \beta'_m - (B_{12}/B_{22})\chi^2 a_m + a^2[R_{mm} g_m d_m - 2 l_m b_m \beta'_m] + \right. \\ &\left. + \varepsilon_m^2 a^2 d_m (b_m + (B_{12}/B_{11})\chi^2) + a^4 g_m l_m^2 \beta'_m \right\} = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} &a_m = (B_{12}/B_{11})\chi^2 + (B_{22}/B_{11})\beta'_m + (B_{12}/B_{11})\eta_{2m}^2 + (\beta'_m - \beta''_m) B_{12}B_{22}/(B_{11}B_{66}); \\ &b_m = B_1\chi^2 - (B_{22}/B_{11})\left(\beta'_m - \eta_{1m}^2\right); \\ &c_m = \chi^4 - B_2\chi^2 + \left((B_{66}/B_{11})\eta_{1m}^2 + \eta_{2m}^2\right)\chi^2 + (\beta'_m - \eta_{1m}^2)\left((B_{22}/B_{11})\beta''_m - (B_{66}/B_{11})\eta_2^2\right); \end{aligned} \tag{12}$$

$$B_1 = \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}};\ B_2 = \frac{B_{11}B_{22}\beta''_m - B_{12}^2\beta'_m - 2B_{12}B_{66}\beta'_m}{B_{11}B_{66}},\ d_m = \frac{4B_{66}}{B_{11}}\chi^2 - \beta''_m;$$

$$g_m = \frac{B_{22}}{B_{66}}\chi^2 - \frac{B_{22}}{B_{11}}\beta'_m + \frac{B_{22}}{B_{11}}\eta_{1m}^2,\ l_m = \frac{B_{12}+4B_{66}}{B_{22}}\chi^2 - \beta''_m,\ \ \eta_{im}^2 = \frac{\lambda_i}{B_{66}\theta_m^2},\ i=\overline{1,3},$$

$$R_{mm} = a^2\left(\frac{B_{11}}{B_{22}}\chi^4 - \frac{2(B_{12}+2B_{66})}{B_{22}}\beta'_m\chi^2 + \beta'_m\beta''_m\right) - \frac{B_{66}}{B_{22}}\eta_{3m}^2,\ a^2 = \frac{h^2}{12}\theta_m^2, \varepsilon_m = \frac{1}{R\theta_m}.$$

Пусть χ_j, $j=\overline{1,4}$ – попарно различные корни уравнения (11) с неположительными действительными частями и $\chi_{4+j} = -\chi_j$, $j=\overline{1,4}$. Пусть $(u_1^{(j)}, u_2^{(j)}, u_3^{(j)})$, $j=\overline{1,8}$ – нетривиальные решения вида (8) системы (5) при $\chi = \chi_j$, $j=\overline{1,8}$, соответственно. Решение задачи (5)-(7) ищем в виде

$$u_i = \sum_{j=1}^{8} u_i^{(j)} w_j,\ i=\overline{1,3}. \tag{13}$$

Подставим (13) в граничные условия (6). Каждое полученное уравнение умножаем на $w(\theta_m, \beta)$ и интегрируем в пределах от 0 до s. В итоге получим систему уравнений:

$$\left\{\sum_{j=1}^{8}\frac{M_{ij}^{(m)} w_j}{c_m^{(j)} + \varepsilon_m^2 a^2 g_m^{(j)} d_m^{(j)}} = 0,\quad i=\overline{1,8}\ ; \right. \tag{14}$$

$$M_{1j}^{(m)} = \chi_j^2 a_m^{(j)} - (B_{12}/B_{11}) b_m^{(j)}\beta'_m - (B_{12}/B_{11}) c_m^{(j)} + \varepsilon_m^2 a^2 (B_{12}B_{22}/B_{11}^2) d_m^{(j)}(\beta'_m - \eta_{1m}^2) -$$
$$- a^2 (B_{22}/B_{11}) l_m^{(j)}\beta'_m\left(\chi_j^2 + (B_{12}/B_{11})\beta'_m - (B_{12}/B_{11})\eta_{1m}^2\right),$$

$$M_{2j}^{(m)} = \beta'_m\chi_j\left\{a_m^{(j)} + b_m^{(j)} + a^2\left[4c_m^{(j)} - l_m^{(j)}\left(\frac{B_{22}}{B_{66}}\chi_j^2 + \frac{B_{12}B_{22}}{B_{11}B_{66}}\beta'_m + \frac{B_{22}}{B_{11}}\eta_{1m}^2\right)\right] + \right.$$
$$\left. + a^2\varepsilon_m^2\left(4b_m^{(j)} + \frac{B_{12}B_{22}}{B_{11}B_{66}} d_m^{(j)} - 4a^2 g_m^{(j)}\frac{B_{12}}{B_{22}}\chi_j^2\right)\right\}, \tag{15}$$

$$M_{3j}^{(m)} = \left(\chi_j^2 - \frac{B_{12}}{B_{11}}\beta'_m\right)c_m^{(j)} + \varepsilon_m^2\left[a^2 g_m^{(j)}\left(\frac{4B_{66}}{B_{22}}\chi_j^4 - \frac{B_{11}B_{22}\beta''_m - B_{12}^2\beta'_m}{B_{11}B_{22}}\chi_j^2\right) - \frac{B_{12}}{B_{11}} b_m^{(j)}\beta'_m\right],$$

$$M_{4j}^{(m)} = \chi_j\left\{\left(\chi_j^2 - \frac{B_{12}+4B_{66}}{B_{11}}\beta'_m\right)c_m^{(j)} + \varepsilon_m^2\left[a^2 g_m^{(j)}\left(\frac{4B_{66}}{B_{22}}\chi_j^4 - \frac{B_{11}B_{22}\beta''_m - B_{12}^2\beta'_m - 4B_{12}B_{66}\beta'_m}{B_{11}B_{22}}\chi_j^2\right)\right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{B_{12}+4B_{66}}{B_{11}} b_m^{(j)}\beta'_m\right]\right\}, z_j = \theta_m\chi_j l,\ \ j=\overline{1,8}.$$

$$M_{5j}^{(m)} = M_{1j}^{(m)}\exp(z_j),\ M_{6j}^{(m)} = M_{2j}^{m}\exp(z_j),\ M_{7j}^{(m)} = M_{3j}^{m}\exp(z_j),\ M_{8j}^{(m)} = M_{4j}^{m}\exp(z_j).$$

Верхний индекс (j) означает, что соответствующая функция взята при $\chi = \chi_j$. Чтобы система (14) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы

$$\mathrm{Det}\left\|M_{ij}^{(m)}\right\|_{i,j=1}^{8} = K^2\exp(-z_1 - z_2 - z_3 - z_4)\,\mathrm{Det}\left\|m_{ij}\right\|_{i,j=1}^{8} = 0\ , \tag{16}$$

$$K = (\chi_1 - \chi_2)(\chi_1 - \chi_3)(\chi_1 - \chi_4)(\chi_2 - \chi_3)(\chi_2 - \chi_4)(\chi_3 - \chi_4). \tag{17}$$

Выражения для m_{ij} не приводятся. Уравнение (16) эквивалентно уравнению

$$\mathrm{Det}\left\|m_{ij}\right\|_{i,j=1}^{8} = 0. \tag{18}$$

Учитывая возможные соотношения между λ_1, λ_2 и λ_3, заключаем, что уравнение (18) определяет частоты соответствующих типов колебаний.

При $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ уравнение (11) – характеристическое уравнение системы (5), а уравнение (18) – дисперсионное уравнение задачи (5)-(7).

3. Асимптотики дисперсионного уравнения (18) при $\varepsilon_m \to 0$. Используя предыдущие формулы, предположим, что $\eta_{1m} = \eta_{2m} = \eta_{3m} = \eta_m$. Тогда, при $\varepsilon_m \to 0$ уравнение (11) преобразуется в совокупность уравнений

$$c_m = y^4 - B_2 y^2 + \left(B_{11} + B_{66}\right)/B_{11}\,\eta_m^2 y^2 + (\beta'_m - \eta_m^2)\left(B_{22}/B_{11}\,\beta''_m - B_{66}/B_{11}\,\eta_m^2\right) = 0, \tag{19}$$

$$R_{mm} = a^2\left(B_{11}/B_{22}\,y^4 - 2(B_{12}+2B_{66})/B_{22}\,\beta'_m y^2 + \beta'_m\beta''_m\right) - B_{66}/B_{22}\,\eta_m^2 = 0. \tag{20}$$

Уравнения (19), (20) являются характеристическими уравнениями для уравнений планарных и изгибных колебаний ортотропных пластин соответственно, когда все стороны свободны. Корни уравнений (19) и (20) с неположительными действительными частями обозначим через y_1, y_2 и y_3, y_4, соответственно. Доказывается, что при $\varepsilon_m \to 0$ имеет место

$$\mathrm{Det}\left\|m_{ij}\right\|_{i,j=1}^{8} = \left(B_{66}/B_{11}\right)^2 N^2(\eta_m^2) K_{3m}^2(\eta_m^2)\mathrm{Det}\left|l_{ij}\right|_{i,j=1}^{4}\mathrm{Det}\left|b_{ij}\right|_{i,j=1}^{4} + O(\varepsilon_m^2) = 0, \tag{21}$$

$$N(\eta_m^2) = (y_3+y_1)(y_3+y_2)(y_4+y_1)(y_4+y_2),$$

$$K_{3m}(\eta_m^2) = (\beta_m' - \eta_m^2)\left(\frac{B_{22}}{B_{11}}\beta_m'' - \frac{B_{66}}{B_{11}}\eta_m^2\right)\left(\frac{B_{12}}{B_{12}+B_{66}} - a^2\frac{\left(B_{12}+4B_{66}\right)}{B_{66}}\beta_m'\right)^2 + \left(B_2 - \frac{B_{11}+B_{66}}{B_{11}}\eta_m^2\right)\times$$

$$\left(\frac{B_{12}}{B_{12}+B_{66}} - a^2\frac{\left(B_{12}+4B_{66}\right)}{B_{66}}\beta_m'\right)\left(\frac{B_{22}\beta_m' + B_{12}\eta_m^2}{B_{12}+B_{66}} + (\beta_m'-\beta_m'')\frac{B_{12}B_{22}}{B_{66}(B_{12}+B_{66})} + a^2\frac{B_{22}}{B_{66}}\beta_m'\beta_m''\right) +$$

$$+\left(\frac{B_{22}\beta_m' + B_{12}\eta_m^2}{B_{12}+B_{66}} + (\beta_m'-\beta_m'')\frac{B_{12}B_{22}}{B_{66}(B_{12}+B_{66})} + a^2\frac{B_{22}}{B_{66}}\beta_m'\beta_m''\right)^2,$$

$$\mathrm{Det}\left|l_{ij}\right|_{i,j=1}^{4} = \left((B_{12}+B_{66})/B_{11}\right)^2 K_{2m}^2(\eta_m^2)(1+\exp(2(z_1+z_2))) - (l_{11}l_{22}+l_{21}l_{12})^2(\exp(2z_1)+\exp(2z_2))$$

$$+8l_{12}\,l_{11}\,l_{22}\,l_{21}\exp(z_1+z_2) + 4l_{11}l_{21}\left(l_{11}l_{22}+l_{21}l_{12}\right)(\exp(z_2)-\exp(z_1))[z_1z_2] - 4l_{11}^2l_{21}^2[z_1z_2]^2,$$

$$\mathrm{Det}\left|b_{ij}\right|_{i,j=1}^{4} = K_{1m}^2(\eta_m)\,(1+\exp(\ 2\,(z_3+z_4))) - (b_{11}b_{22}+b_{21}b_{12})^2(\exp(2z_3)+\exp(2z_4))$$

$$+8b_{12}\,b_{11}\,b_{22}\,b_{21}\exp(z_3+z_4) - 4b_{11}b_{21}\left(b_{11}b_{22}+b_{21}b_{12}\right)(\exp(z_4)-\exp(z_3))[z_3z_4] - 4b_{11}^2b_{21}^2[z_3z_4]^2,$$

$$K_{1m}\left(\eta_m^2\right) = y_3^2y_4^2 + 4(B_{66}/B_{11})\beta_m'y_3y_4 - \left(B_{12}/B_{11}\right)^2\beta_m'^2,$$

$$K_{2m}\left(\eta_m^{(2)}\right) = (\beta_m'-\eta_m^2)\left((B_{11}B_{22}\beta_m'' - B_{12}^2\beta_m')/(B_{11}B_{66}) - \eta_m^2\right) - \eta_m^2y_1y_2, \tag{22}$$

$$l_{11} = y_j^2 + (B_{12}/B_{11})(\beta_m''-\eta_m^2),\ l_{12} = y_1+y_2,\ l_{21} = y_j\left(y_j^2 + (B_{12}/B_{11})\beta_m' + (B_{66}/B_{11})\eta_m^2\right),\ l_{22} = y_1y_2$$

$$+(B_{11}B_{22}\beta_m'' - B_{12}^2\beta_m' - B_{12}B_{66}\beta_m')/(B_{11}B_{66}) - \eta_m^2;\ b_{11} = y_3^2 - (B_{12}/B_{11})\beta_m',$$

$$b_{12} = y_3+y_4,\ b_{21} = y_3^3 - ((B_{12}+4B_{66})/B_{11})\beta_m'y_3,\ b_{22} = y_3y_4 + \beta_m'(B_{12}/B_{11})\ ;$$

$$[z_jz_{j+1}] = \theta_m l(\exp(z_{j+1})-\exp(z_j))/(z_{j+1}-z_j),\ z_j = \theta_m y_j l,\ j = 1,3.$$

Из (21) следует, что при $\varepsilon_m \to 0$ уравнение (18) распадается на уравнения

$$\mathrm{Det}\left|l_{ij}\right|_{i,j=1}^{4} = 0,\ \ \mathrm{Det}\left|b_{ij}\right|_{i,j=1}^{4} = 0,\ \ K_{3м}(\eta_m^2) = 0. \tag{23}$$

Первое и второе уравнения являются дисперсионными уравнениями планарных и изгибных колебаний аналогичной задачи для ортотропной прямоугольной пластинки, соответственно. Корням третьего уравнения соответствуют планарные колебания цилиндрической оболочки. Третье уравнение появляется в результате использования уравнения соответствующей классической теории ортотропных цилиндрических оболочек.

Если y_1, y_2 и y_3, y_4 – корни уравнения (19) и (20) с отрицательными действительными частями соответственно, то при $\theta_m l \to \infty$ уравнение (18) преобразуется в уравнение

$$\mathrm{Det}\left\|m_{ij}\right\|_{i,j=1}^{8} = \left(B_{66}/B_{11}\right)^2 N^2(\eta_m^2)K_{1m}^2(\eta_m^2)K_{2m}^2(\eta_m^2)K_{3m}^2(\eta_m^2) + O(\varepsilon_m^2) + \sum_{j=1}^{4}O(\exp(z_j)) = 0. \tag{24}$$

Из (24) следует, что при $\varepsilon_m \to 0$ и $\theta_m l \to \infty$ корни дисперсионного уравнения (18) аппроксимируются корнями уравнений

$$K_{1m}(\eta_m^2) = 0,\ \ K_{2m}(\eta_m^2) = 0,\ \ K_{3m}(\eta_m^2) = 0\,. \tag{25}$$

Первые два уравнения из (25) являются дисперсионными уравнениями изгибных и планарных колебаний ортотропной прямоугольной пластинки со свободными сторонами. Следовательно, при малых ε_m и больших $\theta_m l$ приближённые значения корней уравнения (18) являются корнями уравнений (25).

4. Асимптотика дисперсионного уравнения (18) при $\theta_m l \to \infty$. При использовании предыдущих формул положим, что χ_1, χ_2, χ_3 и χ_4 (корни уравнения (11)) имеют отрицательные действительные части. Тогда уравнение (18) можно привести к виду

$$\mathrm{Det}\left\|m_{ij}\right\|_{i,j=1}^{8}=\left(\mathrm{Det}\left\|m_{ij}\right\|_{i,j=1}^{4}\right)^{2}+\sum_{j=1}^{4}O(\exp(\theta_m\chi_j l))=0\,, \tag{26}$$

откуда следует, что при $\theta_m l\to\infty$ корни уравнения (18) аппроксимируются корнями уравнения

$$\mathrm{Det}\left\|m_{ij}\right\|_{i,j=1}^{4}=0. \tag{27}$$

Уравнение (27) при $m\in N$ определяет всевозможные локализованные собственные колебания у свободных торцов ортотропной (полубесконечной) круговой цилиндрической оболочки открытого профиля со свободными краями. При $\varepsilon_m\to 0$ имеем:

$$\mathrm{Det}\left\|m_{ij}\right\|_{i,j=1}^{4}=\left(B_{66}/B_{11}\right)N(\eta_m^2)K_{1m}(\eta_m^2)K_{2m}(\eta_m^2)K_{3m}(\eta_m^2)+O(\varepsilon_m^2)\,. \tag{28}$$

Следовательно, учитывая формулы (26) и (28), заключаем, что дисперсионное уравнение (18) принимает вид (24).

Численные результаты показывают, что асимптотические формулы (21) и (24) дисперсионного уравнения (18) являются хорошим ориентиром для нахождения собственных частот задачи (5)-(7), первые частоты собственных колебаний зависят от выбранных базисных функций, удовлетворяющих тем же граничным условиям, а также, при $\theta_m l\to\infty$ частоты колебаний у свободных торцов становятся независимыми от базисных функций [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Grinchenko, V.T. Wave motion localization effects in elastic waveguides/ Int.Appl. Mech.-2005.-41, №9.- P. 988-994.
2. Вильде М.В., Каплунов. Ю.Д., Кассович Л.Ю. Краевые и интерфейсные резонансные явления в упругих телах. М.: Физматлит, 2010. 279с.
3. Gulgazaryan G.R., Gulgazaryan R.G. and Khachanyan A.A. Vibrations of an orthotropic cylindrical panel with various boundary conditions //Int. Appl. Mech. 49. №5. 2013. P. 534-554.
4. Беспалова Е.И. К решению стационарных задач теории пологих оболочек обобщенным методом Канторовича–Власова // Прикл. Механика. 2008. Т.44. №11. С. 99 - 111.
5. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 510с.
6. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446с
7. Гулгазарян Г.Р. О свободных колебаниях тонкой упругой ортотропной незамкнутой цилиндрической оболочки со свободными краями. /Актуальные проблемы механики сплошной среды. Ереван–2017.

Сведения об авторах:

Гулгазарян Гурген Рубенович – профессор, д.ф.-м.н. АГПУ им. Х. Абовяна. Проф. кафедры математики и методики её преподавания. **Адрес:** Тигран Мец, 17, 0010, Ереван, Армения. **Тел.:** (+37491) 706700. **E-mail:** ghulgr@yahoo.com

Гулгазарян Лусине Гургеновна – профессор, д.ф.-м.н., Проф. кафедры математики и методики её преподавания АГПУ им. Х. Абовяна. Ведущий научн. сотр. Института механики НАН Армении. **Адрес:** пр. Маршала Баграмяна, 24/2, 0019, Ереван, Армения. **Тел.:** (+37491) 302554. **E-mail:** lusina@mail.ru

О НАПРЯЖЁННОМ СОСТОЯНИИ МНОГОСЛОЙНОГО ВЯЗКОУПРУГОГО КОМПОЗИТА ПРИ АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Давтян З.А., Мирзоян С.Е., Гаспарян А.В.

Рассматривается задача о напряжённом состоянии композита, представляющего собой кусочно-однородное вязкоупругое тело в виде пакета из произвольного конечного числа слоёв, обладающих свойствами ползучести, изготовленных из разновозрастных неоднородно-наследственно-стареющих материалов. При этом, на граничных плоскостях действуют силы, вызывающие антиплоскую деформацию.

Задачи о напряжённом состоянии кусочно-однородных тел в виде пакета, состоящего из произвольного конечного числа слоёв, представляют теоретический и практический интерес. В этом направлении укажем на работы [1-3].

В настоящей работе в постановке теории ползучести неоднородно стареющих сред [4, 5] рассматривается задача об определении напряжённо-деформированного состояния вязкоупругого разновозрастного кусочно-однородного тела в виде пакета из произвольного конечного числа слоёв. Принимается, что контактирующие элементы изготовлены из разных материалов в разные моменты времени, вследствие чего имеют разные возрасты. При этом, к нижней и верхней плоскостям композита приложены касательные силы, обеспечивающие состояние антиплоской деформации.

При помощи интегрального преобразования Фурье задача сводится к решению конечно-разностных уравнений второго порядка, содержащих операторы по временным и по пространственным координатам. При помощи полученных формул можно определить требуемые контактные напряжения и другие механические характеристики задачи, связанные с разновозрастностью контактирующих слоёв. Отметим, что соответствующая упругая задача рассмотрена в работе [2].

1. Пусть композит, отнесённый к правой прямоугольной системе координат $OXYZ$, представляет собой пакет из произвольного конечного числа n упругих слоёв

$$\Omega_k = \{-\infty < x < \infty, \qquad h_{k-1} \le y \le h_k\} \qquad (k = \overline{1,n})$$

с мгновенными модулями сдвига $\mathrm{G_k}(t)$. Пусть далее в момент времени τ_0 к нижней и верхней плоскостям $y = h_0$ и $y = h_n$ приложены касательные силы интенсивностей $\mathrm{q}_0(x,t)$ и $\mathrm{q_n}(x,t)$, соответственно, т.е.

$$\tau_{yz}(x,y,t)\Big|_{y=h_0} = \mathrm{q}_0(x,t), \quad \tau_{yz}(x,y,t)\Big|_{y=h_n} = \mathrm{q_n}(x,t) \qquad (-\infty < x < \infty),$$

обеспечивающие состояние антиплоской деформации с базовой плоскостью OXY. Здесь $\tau_{yz}(x,y,t)$ – компонента касательных напряжений.

Для вывода определяющих уравнений поставленной задачи рассмотрим k-ый элемент пакета. Для этого слоя имеем следующую упруго-мгновенную граничную задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \mathrm{w_k}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \mathrm{w_k}}{\partial y^2} = 0 \quad (-\infty < x < \infty, \ \ h_{k-1} < y < h_k) \\ \mathrm{G_k} \dfrac{\partial \mathrm{w_k}}{\partial y}\Bigg|_{y=h_{k-1}} = \mathrm{q}_{k-1}(x,t), \quad \mathrm{G_k} \dfrac{\partial \mathrm{w_k}}{\partial y}\Bigg|_{y=h_k} = \mathrm{q}_k(x,t) \ \ (-\infty < x < \infty, \ \ k = \overline{1,n}), \end{cases} \tag{1.1}$$

где $\mathrm{w}_k = \mathrm{w_k}(x,y,t)$ $(k = \overline{1,n})$ – единственная отличная от нуля компонента смещений в направлении оси Oz, а $\mathrm{q}_{k-1}(x,t)$ и $\mathrm{q}_k(x,t)$ – пока неизвестные касательные контактные напряжения на гранях $y = h_{k-1}$ и $y = h_k$ $(k = \overline{1,n})$ слоя Ω_k, соответственно.

Для решения граничной задачи (1.1) введём в рассмотрение трансформанты Фурье:

$$\left\{\overline{\mathrm{q_k}}(\lambda,t); \overline{\mathrm{w_k}}(\lambda,y,t)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{\mathrm{q_k}(x,t); \mathrm{w_k}(x,y,t)\right\} e^{i\lambda x} dx,$$

где λ – спектральный параметр Фурье.

В трансформантах Фурье граничная задача (1.1) примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\overline{\mathrm{w}_k}}{dy^2} - \lambda^2\overline{\mathrm{w}_k} = 0 \quad (h_{k-1} < y < h_k,\ k = \overline{1,n}) \\ \mathrm{G_k}(t)\dfrac{d\overline{\mathrm{w}_k}}{dy}\Big|_{y=h_{k-1}} = \overline{\mathrm{q_{k-1}}}(\lambda,t), \quad \mathrm{G_k}(t)\dfrac{d\overline{\mathrm{w}_k}}{dy}\Big|_{y=h_k} = \overline{\mathrm{q_k}}(\lambda,t), \end{cases} \tag{1.2}$$

где $\overline{\mathrm{w_k}} = \overline{\mathrm{w_k}}(\lambda, y, t)$.

Решение краевой задачи (1.2) имеет вид:

$$\overline{\mathrm{w_k}} = \mathrm{A_k}(t)\,\mathrm{ch}(\lambda y) + \mathrm{B_k}(t)\,\mathrm{sh}(\lambda y) \qquad (h_{k-1} \le y \le h_k), \tag{1.3}$$

где коэффициенты $\mathrm{A_k}(t)$ и $\mathrm{B_k}(t)$ определяются из граничных условий (1.2) и имеют вид:

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_k(t) &= \frac{\overline{\mathrm{q}}_{\mathrm{k}}(t)\,\mathrm{ch}(\lambda h_{k-1}) - \overline{\mathrm{q}}_{\mathrm{k-1}}(t)\,\mathrm{ch}(\lambda h_k)}{\lambda\,\mathrm{G_k}(t)\,\mathrm{sh}(\lambda d_k)}, \\ \mathrm{B_k}(t) &= \frac{\overline{\mathrm{q}}_{\mathrm{k-1}}(t)\,\mathrm{sh}(\lambda h_k) - \overline{q}_{\mathrm{k-1}}(t)\,\mathrm{sh}(\lambda h_{k-1})}{\lambda\,\mathrm{G_k}(t)\,\mathrm{sh}(\lambda d_k)}, \quad (k = \overline{1,n}) \end{aligned} \tag{1.4}$$

где $d_k = l_k - l_{k-1}$ – высота k-ого слоя.

Теперь условия непрерывности смещений на линии контакта $(y = h_k)$ двух слоёв, на основании [4] можем записать

$$(I - L_k)\overline{\mathrm{w_k}} = (I - L_{k-1})\overline{\mathrm{w_{k+1}}}, \qquad (k = \overline{1, n-1}), \tag{1.5}$$

где I – единичный оператор, а временные операторы L_k действуют следующим образом:

$$L_i[\mathrm{y}(t)] = \int_{\tau_0}^{t} \mathrm{G_i}(u)\,\mathrm{K_i}\left(t + \rho_i, u + \rho_i\right)\mathrm{y}(u)du$$

$$\mathrm{K_i}\left(t,u\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{\mathrm{G_i}(u)} + \omega(t,u)\right] \quad i = (\overline{1,n-1}) \quad \rho_i = \tau_i - \tau_0,$$

где $\omega(t,u)$ – мера ползучести при сдвиге, τ_i – возраст i-ого слоя, а смысл остальных параметров, хорошо известных в теории ползучести, пояснены в [4].

Далее, принимая во внимание соотношения (1.3) и (1.4), условия контакта (1.5) запишутся в форме

$$(I - L_k)\frac{\overline{\mathrm{q_k}}(\lambda,t)\,\mathrm{ch}(\lambda d_k) - \overline{\mathrm{q_{k-1}}}(\lambda,t)}{\mathrm{G_k}(t)\,\mathrm{sh}(\lambda d_k)} = (I - L_{k+1})\frac{\overline{\mathrm{q_{k+1}}}(\lambda,t) - \overline{\mathrm{q_k}}(\lambda,t)\,\mathrm{ch}(\lambda d_{k+1})}{\mathrm{G_{k+1}}(t)\,\mathrm{sh}(\lambda d_{k+1})}, \quad (k = \overline{1,n-1}). \tag{1.6}$$

Теперь, вводя обозначения

$$\mathrm{a_k}(t) = \frac{1}{\mathrm{G_k}(\mathrm{t})\,\mathrm{sh}(\lambda d_k)}, \quad \mathrm{b_k}(t) = \frac{\mathrm{cth}(\lambda d_k)}{\mathrm{G_k}(t)}, \quad k = (\overline{1,n}),$$

уравнения (1.6) можно свести к конечно-разностным уравнениям второго порядка [6]

$$(I - L_k)(\mathrm{a_k}(t)\overline{\mathrm{q_{k-1}}}(\lambda,t) - \mathrm{b_k}(t)\overline{\mathrm{q_k}}(\lambda,t)) = f_k(t) \tag{1.7}$$

$$(I - L_{k+1})(\mathrm{a_{k+1}}(t)\overline{\mathrm{q_{k+1}}}(\lambda,t) - \mathrm{b_{k+1}}(t)\overline{\mathrm{q_k}}(\lambda,t)) = \mathrm{g_{k+1}}(t) \qquad (k = \overline{1, n-1}) \tag{1.8}$$

При условиях

$$\mathrm{f_k}(t) + \mathrm{g_{k+1}}(t) = 0, \qquad k = (\overline{1, n-1}) \tag{1.9}$$

уравнения (1.7) и (1.8) можно представить в виде

$$\mathrm{a_k}(t)\overline{\mathrm{q_{k-1}}}(\lambda,t) - \mathrm{b_k}(t)\overline{\mathrm{q_k}}(\lambda,t) = (I + \mathrm{R_k})\,\mathrm{f_k}(t) \tag{1.10}$$

$$\mathrm{a_{k+1}}(t)\overline{\mathrm{q_{k+1}}}(\lambda,t) - \mathrm{b_{k+1}}(t)\overline{\mathrm{q_k}}(\lambda,t) = (I + R_{k+1})\,\mathrm{g_{k+1}}(t) \quad (k = \overline{1, n-1}). \tag{1.11}$$

Здесь $\mathrm{R_s}(t,u)$ – резольвента ядра $\mathrm{K_s}(t,u)$ $(s = \overline{1, n-1})$, удовлетворяющая любому из уравнений [4]

$$\mathrm{R}(t,u)=\mathrm{K}(t,u)+\int_u^t \mathrm{K}(t,\tau)\,\mathrm{R}(\tau,u)d\tau$$
$$\mathrm{R}(t,u)=\mathrm{K}(t,u)+\int_u^t \mathrm{R}(t,\tau)\,\mathrm{K}(\tau,u)d\tau \qquad (1.12)$$

Таким образом, решение поставленной здесь задачи сводится к решению конечно-разностных уравнений первого порядка (1.10) и (1.11). После того, как построены решения этих уравнений, при помощи обратного преобразования Фурье определяются контактные напряжения в композите.

2. Решение конечноразностных уравнений первого порядка (1.10) и (1.11) построим известным методом [2,6].

Уравнения (1.10) представим в виде

$$\overline{\mathrm{q}_{\text{к}}}(\lambda,t)=[1-P(k,t)]\overline{\mathrm{q}_{\text{к-1}}}(\lambda,t)+\mathrm{Q}(k,t)\ . \qquad (2.1)$$

Здесь

$$\mathrm{P}(k,t)=\frac{\mathrm{b_k}(t)-\mathrm{a_k}(t)}{\mathrm{b_k}(t)},\qquad \mathrm{Q}(k,t)=-\frac{(I+R_k)\,\mathrm{f_k}(t)}{\mathrm{b_k}(t)}\qquad k=(\overline{1,n-1})\,.$$

Поступая аналогичным образом, как в работе [6], находим общее решение (2.1)

$$\overline{\mathrm{q}_{\text{к}}}(\lambda,t)=-\prod_{j=1}^{k}[1-\mathrm{P}(j,t)]\left\{\sum_{i=1}^{k}\frac{(I+R_i)\,\mathrm{f}_i(t)}{\mathrm{b_i}(t)\prod\limits_{r=1}^{i}[1-\mathrm{P}(r,t)]}-\overline{\mathrm{q}_0}(\lambda,t)\right\}\qquad k=(\overline{1,n-1}) \qquad (2.2)$$

Совершенно аналогичным образом решение уравнения (1.11) представим в виде

$$\overline{\mathrm{q}_{\text{к}}}(\lambda,t)=-\prod_{j=k}^{n-1}\frac{1}{1-\tilde{\mathrm{P}}(j,t)}\left\{\sum_{i=k}^{n-1}\frac{(I+R_{i+1})\,\mathrm{g_{i+1}}(t)}{\mathrm{a_{i+1}}(t)\prod\limits_{r=i+1}^{n-1}\frac{1}{[1-\tilde{\mathrm{P}}(r,t)]}}-\overline{\mathrm{q_n}}(\lambda,t)\right\}. \qquad (2.3)$$

Здесь

$$\tilde{\mathrm{P}}(k,t)=\frac{(\mathrm{a_{k+1}}(t)-\mathrm{b_{k+1}}(t))}{\mathrm{a_{k+1}}(t)}\qquad k=(\overline{1,n-1}).$$

Теперь, приравнивая выражения (2.2) и (2.3) и учитывая (1.9), относительно неизвестных $\mathrm{f_i}(t),\ i=(\overline{1,n-1})$ получим систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода:

$$\omega_{\mathrm{k}}(t)(I+R_k)\,\mathrm{f_k}(t)+\sum_{i=1}^{k-1}\omega_i(t)\frac{C_i}{C_k}(I+R_i)\,\mathrm{f_i}(t)+$$
$$+\sum_{i=k}^{n-1}\mathrm{B_i}(t)\frac{D_{i+1}}{D_k}(I+R_{i+1})\,\mathrm{f_i}(t)=\frac{\overline{\mathrm{q}_0}(\lambda,t)}{C_k}-\frac{\overline{\mathrm{q_n}}(\lambda,t)}{D_k},\qquad (k=\overline{1,n-1}) \qquad (2.4)$$

Здесь введены обозначения:

$$\omega_i(t)=\mathrm{G_i}(t)\,\mathrm{th}(\lambda d_i),\qquad (i=\overline{1,k}),\qquad \mathrm{B_i}(t)=\mathrm{G_{i+1}}(t)\mathrm{sh}(\lambda d_{i+1}),\qquad (i=\overline{k,n-1})$$

$$C_i=\prod_{r=1}^{i}\mathrm{ch}(\lambda d_r),\quad (i=\overline{1,k}),\qquad D_i=\prod_{r=i}^{n-1}\mathrm{ch}(\lambda d_{r+1}),\qquad (i=\overline{k,n-1})$$

После решения определяющей системы интегральных уравнений (2.4), из уравнений (1.10) и (1.11) определяются функции $\overline{\mathrm{q}_{\text{к}}}(\lambda,t)$, а затем при помощи обратного преобразования Фурье определяются контактные касательные напряжения $\mathrm{q_k}(x,t)$ и другие характеристики напряжённого состояния композита.

3. Частный случай. Рассмотрим частный случай двухслойного композита, т.е. $n=2$. В данном случае для определения контактных напряжений согласно (1.6) получим следующие интегральные уравнения Вольтерра второго рода:

$$l(\lambda,t)\overline{\mathrm{q}_1}(\lambda,t)-\int_{\tau_0}^{t}\left\{l_1(\lambda,\tau)\mathrm{K}_1(t,\tau)+l_2(\lambda,\tau)\mathrm{K}_2(t,\tau)\right\}\overline{\mathrm{q}_1}(\lambda,t)d\tau=\Phi(\lambda,t)\,, \tag{3.1}$$

где

$$l_1(\lambda,t)=\mathrm{G}_2(t)\,\mathrm{sh}\,\lambda d_2\,\mathrm{ch}\,\lambda d_1 \qquad l_2(\lambda,t)=\mathrm{G}_1(t)\,\mathrm{sh}\,\lambda d_1\,\mathrm{ch}\,\lambda d_2 \qquad l(\lambda,t)=l_1(\lambda,t)+l_2(\lambda,t)$$

$$\Phi(\lambda,t)=\left(\frac{l_1(\lambda,t)}{\mathrm{ch}\,\lambda d_1}\overline{\mathrm{q}_0}(\lambda,t)+\frac{l_2(\lambda,t)}{\mathrm{ch}\,\lambda d_2}\overline{\mathrm{q}_2}(\lambda,t)\right)-$$

$$-\int_{\tau_0}^{t}\left\{\frac{l_1(\lambda,\tau)}{\mathrm{ch}\,\lambda d_1}\overline{\mathrm{q}_0}(\lambda,\tau)\mathrm{K}_1(t,\tau)+\frac{l_2(\lambda,\tau)}{\mathrm{ch}\,\lambda d_2}\overline{\mathrm{q}_2}(\lambda,\tau)\mathrm{K}_2(t,\tau)\right\}d\tau.$$

Для решения основного интегрального уравнения (3.1) меры ползучести контактирующих слоёв примем в форме [4]

$$\mathrm{C}_i(t,\tau)=\varphi_i(\tau)\left[1-e^{-\gamma(t-\tau)}\right] \quad (i=1,2)\,, \tag{3.2}$$

где $\varphi_1(\tau)$, $\varphi_2(\tau)$ – функции старения материалов. В дальнейшем примем также, что

$$G_i(t)=G_i=\mathrm{const} \qquad i=(1,2)\,.$$

Известно, что интегральное уравнение (3.1), с учётом представления (3.2), можно свести к дифференциальному уравнению с переменными коэффициентами.

Рассмотрим частный случай нагруженя двухслойного композита. Предположим, что в момент времени $t=\tau_0$ к нижней и верхней плоскостям композита прилагается сосредоточенная касательная сила величины Q, которая затем остаётся постоянной во времени, т.е.

$$\mathrm{q}_0(x,t)=\mathrm{q}_2(x,t)=Q\delta(x)\,\mathrm{H}(t-\tau_0)\,.$$

Здесь $\delta(r)$ – дельта-функция Дирака, $\mathrm{H}(t)$ – единичная функция Хевисайда.

При указанной нагрузке получим:

$$\overline{\mathrm{q}_1}(\lambda,t)=\frac{Q\Delta(\lambda)}{l(\lambda)}\left\{1+\gamma\,\mathrm{g}(\lambda)(\mathrm{ch}\,\lambda d_1-\mathrm{ch}\,\lambda d_2)\left(\mathrm{G}_1\,\varphi_1(\tau_0)-\mathrm{G}_2\,\varphi_2(\tau_2)\right)\int_{\tau_0}^{t}e^{-\eta(\lambda,\tau)}d\tau\right\}.$$

Здесь введены обозначения:

$$\Delta(\lambda)=\frac{l_1(\lambda)\,\mathrm{ch}\,\lambda d_2+l_2(\lambda)\,\mathrm{ch}\,\lambda d_1}{\mathrm{ch}\,\lambda d_1\,\mathrm{ch}\,\lambda d_2} \qquad g(\lambda)=\frac{G_1G_2\,\mathrm{sh}\,\lambda d_1\,\mathrm{sh}\,\lambda d_2}{\Delta(\lambda)}$$

$$\eta(\lambda,t)=\int_{\tau_0}^{t}\mathrm{A}(\lambda,\tau)d\tau\,, \qquad \mathrm{A}(\lambda,u)=\gamma-\frac{\mathrm{K}^*(\lambda,u)}{l(\lambda)} \qquad . \tag{3.3}$$

$$\mathrm{K}^*(\lambda,u)=\gamma(l_1(\lambda)\varphi_1(u)+l_2(\lambda)\varphi_2(u))$$

Теперь при помощи обратного преобразования Фурье можно определить контактные напряжения

$$\mathrm{q}_1(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{\tau_0}^{t}\overline{\mathrm{q}_1}(\lambda,t)e^{-i\lambda x}d\lambda=\frac{\mathrm{Q}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Delta(\lambda)}{l(a\lambda)}\{1+\gamma\,\mathrm{g}(\lambda)\left(\mathrm{ch}\,\lambda d_1-\mathrm{ch}\,\lambda d_2\right)\times$$

$$\times(\mathrm{G}_1\,\varphi_1(\tau_0)-\mathrm{G}_2\,\varphi_2(\tau_2))\int_{\tau_0}^{t}e^{-\eta(\lambda,\tau)}d\tau\}e^{-i\lambda x}d\lambda \tag{3.4}$$

Из формулы (3.4) видно, что если деформации ползучести двух контактирующих слоёв пропорциональны их упругим деформациям, т.е. $G_1\varphi_1(\tau_0) = G_2\varphi_2(\tau_2)$, то решение поставленной задачи совпадает с соответствующими упруго-мгновенными напряжениями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В.З. Метод начальных функций в задачах теории упругости. //Изв. АН СССР. ОТН, №7, 1955.
2. Гаспарян А.В., Мхитарян С.М. О напряженном состоянии композита в виде пакета из произвольного конечного числа упругих слоёв при антиплоской деформации. //Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. №2. С.10-20.
3. Гаспарян А.В., Давтян З.А. О напряженном состоянии композита в виде пакета из произвольного конечного числа упругих круговых цилиндров при антиплоской деформации. / В сб.: научн. тр. международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды», 4-8 октября 2009, Дилижан, Армения, т.1.
4. Арутюнян Н.Х., Колионовский В.Б. Теория ползучести неоднородных сред. М.: Наука, 1983. 336 с.
5. Арутюнян Н.Х, Манжиров А.В. Контактные задачи теории ползучести. Изв. АН Арм. ССР, Ереван. 1990.
6. Гельфонд Н.О. Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967. 375 с.

Сведения об авторах:

Давтян Завен Азибекович – к.ф-м.н., старший научный сотрудник, Институт механики НАН Армении, (374 10) 52-48-90

Мирзоян Саак Езникович – к.ф-м.н., старший научный сотрудник, Институт механики НАН Армении, (374 10) 52-48-90

Гаспарян Ануш Вараздатовна – к.ф-м.н., старший научный сотрудник, Институт механики НАН Армении, (374 10) 52-48-90

E-mail: anush@mechins.sci.am

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА КРУЧЕНИЯ ДЛЯ КОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА С ВНЕШНЕЙ КОЛЬЦЕВОЙ ТРЕЩИНОЙ

Демидов А.В., Попов В.Г.

Решена осесимметричная динамическая задача кручения об определении напряжённого состояния в конечном цилиндре с внешней кольцевой трещиной. В отличие от традиционных методов решения, основанных на применении интегрального преобразования Лапласа, предложенный метод заключается в разностном приближении только производной по времени. В результате исходная задача заменяется последовательностью однородных краевых задач, которые сводятся к интегральному уравнению Фредгольма второго рода.

1. Вступление. Анализ литературы показывает, что равновесие бесконечных и конечных цилиндров с кольцевыми трещинами изучены достаточно хорошо, а работ по исследованию напряжённого состояния в условиях динамического нагружения значительно меньше. Обычно рассматривались цилиндры неограниченной длины [1–3].

Сложность теоретических исследований динамических задач связана с необходимостью применения интегрального преобразования Лапласа по времени с дальнейшим его численным обращением. А это не только математически сложная, но и некорректная задача.

Избежать эти сложности позволяют смешанные численно-экспериментальные методы. В работе [4] рассмотрено динамическое растяжение, а в [5] – динамическое кручение цилиндрических образцов с кольцевыми трещинами. Однако, существенным недостатком этих методов является необходимость в сложной регистрационной аппаратуре для проведения экспериментов с каждым образцом, что усложняет изучение влияния геометрии цилиндров и трещин на значение КИН.

В последнее время появились работы, в которых применяется модифицированный метод конечных разностей по времени [6]. С помощью этого метода, в данной работе решена задача по определению КИН в окрестности кольцевой трещины в конечном цилиндре при условии действия крутящего момента. До этого, такая задача рассматривалась лишь в стационарной постановке [7] или для гармонического момента [8,9].

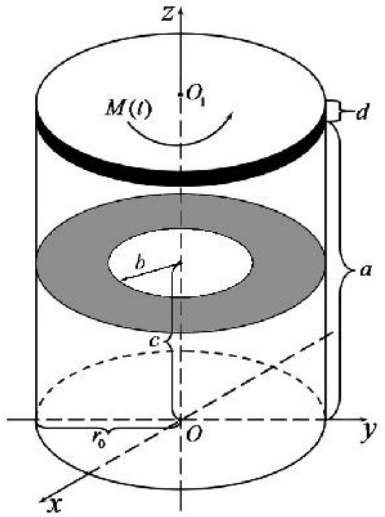


Рис. 1. Цилиндр с внешней кольцевой трещиной

2. Постановка задачи и её конечно-разностная формулировка. Рассматривается конечный упругий цилиндр из изотропного материала с высотой a и радиусом r_0. С ним связана цилиндрическая система координат, центр которой совпадает с центром нижнего основания, а ось Oz – с осью цилиндра (Рис. 1).

С верхним основанием сцеплена абсолютно жёсткая накладка, толщиной d и радиусом r_0, которая находится под действием крутящего момента $M(t)$. На высоте $z = c$ параллельно торцам цилиндра расположена кольцевая трещина с центром на оси цилиндра и занимающая область $b \le r \le r_0$, $0 \le \varphi < 2\pi$. Боковую поверхность цилиндра и поверхность трещины полагают свободными от напряжений. При этих условиях цилиндр находится в состоянии осесимметричной деформации кручения и отличным от 0 будет только угловое перемещение $\widetilde{w}(r,z,t)$.

Далее, для формулировки начально-краевой задачи, целесообразно будет перейти к безразмерным величинам по формулам:

$$\widetilde{w}(r,z,t) = r_0 \cdot w(\eta,\zeta,\tau),\ \gamma = a/r_0,\ l = c/a,\ \beta = b/r_0$$

$$r = r_0\eta,\ \ 0 \le \eta \le 1,\ \ z = a\zeta,\ \ 0 \le \zeta \le 1,\ \ t = r_0\tau/c_2,\ \tau \in (0,+\infty),\ c_2^2 = G\cdot\rho^{-1},$$

где ρ, G – плотность и модуль сдвига материала.

Тогда, безразмерное перемещение удовлетворит уравнению:

$$D_{\eta\zeta}w=\frac{\partial^2 w}{\partial\tau^2},\quad D_{\eta\zeta}=\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+\frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}-\frac{1}{\eta^2}+\frac{1}{\gamma^2}\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}. \tag{1}$$

Уравнение (1) рассматривается с нулевыми начальными условиями.

Граничные условия в безразмерных величинах перепишутся следующим образом:

$$w\big|_{\zeta=0}=0,\quad w\big|_{\zeta=1}=\alpha(\tau)\eta,\ 0\le\eta\le1,\ \tau\in[0,+\infty). \tag{2}$$

На боковой поверхности цилиндра должно выполняться равенство:

$$\tau_{\varphi r}(1,\zeta,\tau)=0,\ 0\le\zeta\le1,\ \tau\in[0,+\infty).$$

Для условий на трещине имеем:

$$\tau_{\varphi z}(\eta,l,\tau)=\chi(\eta,\tau),\ \tau\in(0,+\infty),\ \chi(\eta,\tau)=\tilde{\chi}(r_0\eta,r_0\tau/c_2),$$

где $\chi(\eta)\equiv0,\ \beta\le\eta\le1$, а $\tilde{\chi}(r,t)$– неизвестные напряжения, действующие в плоскости трещины.

В (2) $\alpha(\tau)$ – неизвестный угол поворота накладки, определяемый из уравнения движения

$$\frac{\pi\gamma m_0}{2}\ddot{\alpha}(\tau)=M_0(\tau)-M_R(\tau),\ \alpha(0)=0,\ \dot{\alpha}(0)=0, \tag{3}$$

где m_0 – отношение масс накладки и цилиндра, M_0, M_R – безразмерные моменты.

Для решения сформулированной начально-краевой задачи (1) - (3) применим метод, который основывается на разностной аппроксимации производных по времени, изложенный в [6]. С этой целью образовываем временную сетку:

$$\tau_k=\sum_{\nu=1}^{k}h_\nu,\ h_\nu=\tau_k-\tau_{k-1},\ (\tau_0=0),\ k=1,\ 2,\ 3,\ldots\quad h_i\ne h_j$$

Введём обозначение $w(\eta,\zeta,\tau_k)=w_k(\eta,\zeta)$. Воспользуемся левосторонними разностями для аппроксимации производных по времени.

Тогда, из уравнения (1) с учётом нулевых начальных условий найдём

$$w_0=0,\quad D_{\eta\zeta}w_1=\frac{w_1}{h_1^2},\quad D_{\eta\zeta}w_k-\frac{w_k}{h_k^2}=\frac{w_{k-2}}{h_kh_{k-1}}-\frac{w_{k-1}}{h_k}\left(\frac{1}{h_k}+\frac{1}{h_{k-1}}\right),\ k=2,\ 3,\ldots,$$

Далее, согласно [6], запишем угловое перемещение, угол поворота накладки и напряжения в цилиндре в виде линейной комбинации новых неизвестных:

$$w_k=\sum_{\nu=1}^{k}C_{k\nu}U_\nu,\ \alpha_k=\sum_{\nu=1}^{k}C_{k\nu}A_\nu,\quad \tau_{\varphi rk}=\sum_{\nu=1}^{k}C_{k\nu}\tau_{\varphi r\nu},\quad \tau_{\varphi zk}=\sum_{\nu=1}^{k}C_{k\nu}\tau_{\varphi z\nu}. \tag{4}$$

В работе [6] показано, если коэффициенты в формуле (4) взять согласно формулам

$$C_{kk}=1,\ k=1,2,3,\ldots,\qquad C_{k,k-1}=\frac{h_{k-1}}{h_{k-1}-h_k},\ k=2,3,\ldots$$

$$C_{k,\nu}=\frac{h_\nu^2}{h_k^2-h_\nu^2}\cdot\left(\frac{h_k}{h_{k-1}}C_{k-2,\nu}-\left(1+\frac{h_k}{h_{k-1}}\right)C_{k-1,\nu}\right),\ k=3,4,\ldots;\ \nu=1,2,\ldots,k-2, \tag{5}$$

то функции U_ν удовлетворяют однородному уравнению (6).

$$\Delta_{\eta\zeta}U_\nu-\varkappa_\nu^2U_\nu=0,\ \nu=1,\ 2,\ 3,\ldots,\ \varkappa_\nu=h_\nu^{-1} \tag{6}$$

В результате, граничные условия на поверхностях цилиндра запишутся в виде:

$$U_\nu\big|_{\zeta=0}=0,\quad U_\nu\big|_{\zeta=1}=A_\nu\eta,\ \tau_{\varphi r\nu}\big|_{\eta=1}=0. \tag{7}$$

Условия на трещине приобретут следующий вид:

$$\tau_{\varphi z\nu}\big|_{\zeta=l}=\chi_\nu(\eta),\ 0\le\eta\le1,\ \chi_\nu(\eta)\equiv0,\ \beta\le\eta\le1,\quad \chi_k=\sum_{\nu=1}^{k}C_{k\nu}\chi_\nu. \tag{8}$$

Если коэффициенты $C_{k\nu}$ избрать согласно формулам (5), то из уравнения (3) находим:

$$\pi\gamma m_0 \varkappa_\nu^2 A_\nu = 2\left(\mu_{0\nu} - \mu_{R\nu}\right),\ \mu_{R\nu}\left(\tau\right) = 2\pi\int_0^1 \eta^2\, \tau_{\varphi z\nu}\Big|_{\zeta=1} d\eta\,, \tag{9}$$

где $\mu_{0\nu}$ могут быть найдены из рекуррентного соотношения.

3. Приведение задачи к интегральному уравнению и его решение. Решение полученной краевой задачи (4), (7) - (9) ищем в виде суммы:

$$U_\nu(\eta,\zeta) = U_\nu^0(\eta,\zeta) + U_\nu^1(\eta,\zeta)\,. \tag{10}$$

Первое слагаемое является решением задачи при отсутствии трещины и удовлетворяет условиям на торцах и боковой поверхности и равно:

$$U_\nu^0(\eta,\zeta) = A_\nu \eta \frac{\operatorname{sh}\left(\gamma\zeta\varkappa_\nu\right)}{\operatorname{sh}\left(\gamma\varkappa_\nu\right)}\,.$$

Второе слагаемое является решением, которое удовлетворяет нулевым условиям на торцах и боковой поверхности, а на поверхности трещины удовлетворяет условию:

$$\tau_{\varphi z\nu}^1(\eta,l) = \chi_\nu\left(\eta\right) - \tau_{\varphi z\nu}^0(\eta,l),\ 0 \le \eta \le 1\,. \tag{11}$$

Функцию $U_\nu^1\left(\eta,\zeta\right)$ будем искать отдельно для двух частей цилиндра, разделённых плоскостью размещения трещины:

$$U_\nu^1\left(\eta,\zeta\right) = U_\nu^-\left(\eta,\zeta\right),\ \zeta \in \left[0,l\right),\quad U_\nu^1\left(\eta,\zeta\right) = U_\nu^+\left(\eta,\zeta\right),\ \zeta \in \left(l,1\right]. \tag{12}$$

Чтобы найти $U_\nu^\pm\left(\eta,\zeta\right)$, необходимо решить уравнения (6), которые удовлетворяют краевым условиям:

$$U_\nu^-\Big|_{\zeta=0} = 0,\quad U_\nu^+\Big|_{\zeta=1} = 0, \tag{13}$$

$$\tau_{\varphi z\nu}^\pm(\eta,l) = \chi_\nu\left(\eta\right) - \tau_{\varphi z\nu}^0(\eta,l),\ 0 \le \eta \le \beta,\ \tau_{\varphi r\nu}^-(1,\zeta) = 0,\ 0 \le \zeta \le l,\ \ \tau_{\varphi r\nu}^+(1,\zeta) = 0, = 0,\ l \le \zeta \le 1. \tag{14}$$

Решение этих краевых задач построено методом интегральных преобразований, аналогично работе [8]:

$$\begin{aligned} U_\nu^-(\eta,\zeta) &= \int_0^1 \xi\chi_\nu\left(\xi\right) F^-\left(\xi,\eta,\zeta\right) d\xi - U_\nu^0(\eta,\zeta), \\ U_\nu^+(\eta,\zeta) &= \int_0^1 \xi\chi_\nu\left(\xi\right) F^+\left(\xi,\eta,\zeta\right) d\xi + A_\nu \eta \frac{\operatorname{ch}\left(\gamma l\varkappa_\nu\right)}{\operatorname{sh}\left(\gamma\varkappa_\nu\right)} \frac{\operatorname{sh}\left(\gamma\varkappa_\nu\left(1-\zeta\right)\right)}{\operatorname{ch}\gamma\varkappa_\nu\left(1-l\right)}, \end{aligned} \tag{15}$$

где

$$F^-\left(\xi,\eta,\zeta\right) = \frac{2}{l\gamma}\sum_{j=1}^\infty B_{j\nu}^- \cdot \sin\lambda_j^- l \cdot \sin\lambda_j^- \zeta\,,\ \ F^+\left(\xi,\eta,\zeta\right) = -\frac{2}{\gamma\left(1-l\right)}\sum_{j=1}^\infty B_{j\nu}^+ \cdot \cos\lambda_j^+\left(\zeta - l\right),$$

$$B_{j\nu}^\pm = g_{j\nu}^\pm\left(\xi,\eta\right) + \frac{K_2\left(q_{j\nu}^\pm\right)}{I_2\left(q_{j\nu}^\pm\right)} I_1\left(q_{j\nu}^\pm\xi\right) I_1\left(q_{j\nu}^\pm\eta\right),\ q_{j\nu}^\pm = \sqrt{\left(\lambda_j^\pm\right)^2\gamma^{-2} + \varkappa_\nu^2}\,,\ \lambda_j^- = \frac{\pi\left(2j-1\right)}{2l},\ \lambda_j^+ = \frac{\pi\left(2j-1\right)}{2\left(1-l\right)},$$

$$g_{j\nu}^\pm\left(\xi,\eta\right) = -\int_0^\infty \frac{t}{t^2 + \left(q_{j\nu}^\pm\right)^2} J_1\left(\eta t\right) J_1\left(\xi t\right) dt = \begin{cases} I_1\left(q_{j\nu}^\pm\xi\right) K_1\left(q_{j\nu}^\pm\eta\right),\ 0 \le \xi < \eta \\ I_1\left(q_{j\nu}^\pm\eta\right) K_1\left(q_{j\nu}^\pm\xi\right),\ \eta < \xi \le 1 \end{cases}.$$

Решение, построенное по формулам (10), (12), (15), определяет угловое перемещение в цилиндре и обеспечивает непрерывность напряжений в плоскости расположения трещины. Но в этой плоскости в области вне трещины должны быть непрерывны и перемещения:

$$U_\nu^-(\eta,l) = U_\nu^+(\eta,l),\ \eta \in \left[0,\beta\right]. \tag{16}$$

Из этого равенства получим интегральное уравнение для определения неизвестного напряжения в плоскости трещины:

$$\int_0^\beta \xi\chi_\nu\left(\xi\right)\left\{F_0^-\left(\xi,\eta\right) + F_0^+\left(\xi,\eta\right)\right\} d\xi = \frac{A_\nu\eta}{\operatorname{ch}\left(\gamma\varkappa_\nu\left(1-l\right)\right)}\,, \tag{17}$$

где $F_0^{\pm}(\xi,\eta)=F^{\pm}(\xi,\eta,l)$.

Для решения уравнения, приводим его к уравнению Фредгольма второго рода по известной методике [8,10]. Для этого вводим новую неизвестную функцию

$$\varphi_\nu(\tau)=\int_\tau^\beta \frac{\tau\cdot\chi_\nu(\xi)}{\sqrt{\xi^2-\tau^2}}d\xi,\ \chi_\nu(\xi)=-\frac{2}{\pi}\frac{d}{d\xi}\int_\xi^\beta \frac{\varphi_\nu(\tau)}{\sqrt{\tau^2-\xi^2}}d\tau,\ \varphi(\tau)\equiv 0,\ \tau>\beta \tag{18}$$

и применим к уравнению (17) оператор

$$D_1[f]=\frac{d^2}{dx^2}\int_0^x \frac{ydy}{\sqrt{x^2-y^2}}\int_0^y f(\eta)d\eta.$$

В результате этих преобразований, введения обозначений (19)

$$\lambda=u\varkappa_\nu,\ \sqrt{u^2+1}=p,\ \tau=\beta y,\ \varphi_\nu(\tau)=\varphi_\nu(\beta y)=\beta g_\nu(y),\ y\in[0,1],\ x=\beta s,\ s\in[0,1] \tag{19}$$

и нечётного продолжения функции $g_\nu(y)$ на $[-1,1]$, уравнение (17) сводим к следующему интегральному уравнению Фредгольма II-го рода

$$g_\nu(s)+\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} g_\nu(y)\{A(y-s)+Q(y-s)\}dy=\frac{A_\nu s}{\mathrm{ch}(\gamma\varkappa_\nu(1-l))}, \tag{20}$$

где $A(Y)$ и $Q(Y)$ представлены равномерно сходящимися интегралами и рядами

Оно содержит неизвестную A_ν, для ее нахождения следует воспользоваться уравнением (9).

Приближенное решение уравнения (20), как и в [8,10], будем искать в виде интерполяционного полинома. Для получения решения уравнения (20), интегралы в нём приближаем по квадратурной формуле Гаусса-Лежандра и получим систему линейных алгебраических уравнений относительно значений неизвестной функции в узлах интерполяции. После решения системы, неизвестная функция аппроксимируется интерполяционным полиномом.

Для описания полей напряжений в линейной механике разрушения используют коэффициент интенсивности напряжений (КИН). В данном случае он определяется равенством:

$$\tilde{K}_k=\lim_{r_0\eta\to b-0}\sqrt{b-r_0\eta}\cdot\tilde{\tau}_{\varphi zk}(r,c)=\lim_{\eta\to\beta-0}\sqrt{\beta-\eta}\cdot G\sqrt{r_0}\chi_k(\eta)$$

и вычисляется по формуле:

$$K(\tau_k)=\frac{\tilde{K}(t_k)}{G\sqrt{b}},\quad K(\tau_k)=\sum_{\nu=1}^{k}C_{k\nu}K_\nu,\quad K_\nu=\frac{\sqrt{2}}{\pi}g_\nu(1). \tag{21}$$

5. Результаты численных исследований. С помощью формулы (21) было проведено численное исследование зависимости КИН от безразмерного времени $\tau=c_2t/r_0$. Узлы часовой сетки были сгущены у точки $\tau=0$. При расчётах принимали, что относительная толщина накладки $\delta=d/a=0.1$, а трещина расположена в серединной плоскости цилиндра $l=c/a=0.5$ и имеет относительный внутренний радиус $\beta=b/r_0=0.5$.

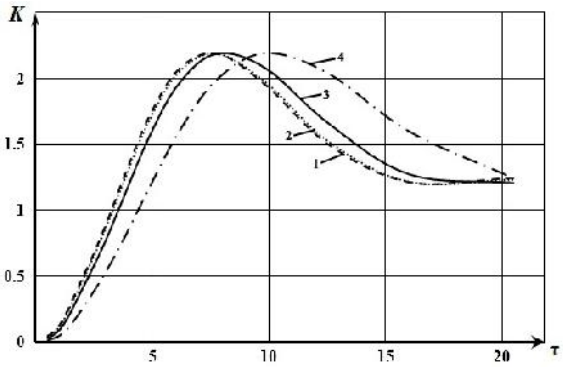


Рис. 2. Временные зависимости относительных КИН при $M_0(\tau)=H(\tau)$

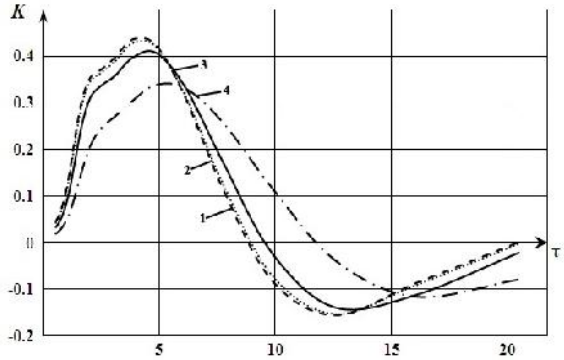


Рис. 3. Временные зависимости относительных КИН при $M_0(\tau)=H(\tau)-H(\tau-1)$

Исследовалось влияние вида нагрузки и массы накладки на временную зависимость КИН. Результаты расчётов приведены на рис. 2 и 3 в виде графиков временных зависимостей относительных КИН. При этих расчётах относительная высота цилиндра принималась равной $\gamma = a/r_0 = 2$. Графики на рис.2 построены для случая действия постоянного крутящего момента $M_0(\tau) = H(\tau)$, $H(\tau)$ – функция Хевисайда, а на рис.3 кривые описывают случай, когда момент задан единичным импульсом $M_0(\tau) = H(\tau) - H(\tau - 1)$. На рис. 2 и 3 разным значениям относительной плотности $\bar{\rho} = \rho_n / \rho_c$:0.1; 0.25; 1; 4, соответствуют кривые 1 – 4.

6. Выводы. Графики на рис. 2 и 3 демонстрируют тот факт, что максимум значения КИН наблюдается во время переходного процесса и этот максимум превышает значение КИН в установившемся режиме. А значит, процесс разрушения будет иметь место именно во время переходного процесса.

Кроме того, из анализа графиков на рис. 2 и 3 можно сделать вывод, что увеличение массы накладки приводит к увеличению времени до достижения КИН максимального значения. Однако, практически не влияет на саму величину максимума, в случае приложения постояннодействующего момента (рис. 2). В случае же действия нагрузки, заданной единичным импульсом (рис. 3), наблюдается уменьшение величины максимума КИН. Это можно объяснить тем, что за время действия крутящего момента, КИН не успевает достигнуть своего максимума.

ЛИТЕРАТУРА

1. Shindo Y., Li W. Torsional impact response of a thick-walled cylinder with a circumferential edge crack // J. Press. Vessel Technol. 1990. Vol. 112, № 4. P. 367–373.
2. Bai H. et al. Scattering of guided waves by circumferential cracks in composite cylinders // Int. J. Solids Struct. 2002. Vol. 39, № 17. P. 4583–4603.
3. Dimarogonas A., Massouros G. Torsional vibration of a shaft with a circumferential crack // Eng. Fract. Mech. 1981. Vol. 15, № 3–4. P. 439–444.
4. Andreikiv O.E. et al. Dynamic tension of a cylindrical specimen with circumferential crack // Mater. Sci. 2000. Vol. 36, № 3. P. 382–391.
5. Ivanyts'kyi Y.L. et al. Stressed state of a cylinder with external circular crack under dynamic torsion // Mater. Sci. Springer US, 2007. Vol. 43, № 2. P. 203–214.
6. Savruk M.P. New method for the solution of dynamic problems of the theory of elasticity and fracture mechanics // Mater. Sci. Kluwer Academic Publishers-Plenum Publishers, 2003. Vol. 39, № 4. P. 465–471.
7. Попов П.В. Задача про кручення скінченного циліндра з кільцевою тріщиною // Машинознавство. 2005. № 9. P. 15–18.
8. Popov V.H. Torsional oscillations of a finite elastic cylinder containing an outer circular crack // Mater. Sci. 2012. Vol. 47, № 6. P. 746–756.
9. Вайсфельд Н.Д. Нестационарная динамическая задача кручения полого упругого цилиндра // Вісник Одеського державного університету. Фізикоматематичні науки. 2001. Vol. 6, № 3. P. 95–99.
10. Демидов О.В., Попов В.Г. Нестационарний закрут скінченного циліндру з круговою тріщиною // Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. 2017. № 1. P. 131–142.

Сведения об авторах:

Демидов Александр Владимирович – ассистент кафедры высшей математики Национального университета «Одесская морская академия». **Тел.:** +38(048) 733 23 12
E-mail: alexandr.v.demidov@gmail.com

Попов Всеволод Геннадиевич – д. ф.-м. н., заведующий кафедрой высшей математики Национального университета «Одесская морская академия». **Тел.:** +38(048) 733 23 12

E-mail: dr.vg.popov@gmail.com

РАСЧЁТ РАСКРЫТИЯ ТРАНСФОРМИРУЕМОЙ КОСМИЧЕСКОЙ КОНСТРУКЦИИ

Джан Ц., Зимин В.Н., Крылов А.В., Чурилин С.А.

Создание трансформируемых крупногабаритных космических конструкций связано с решением ряда технических и механических проблем. Трансформируемые конструкции доставляются на космические орбиты в транспортном плотноупакованном состоянии, и приведение их в рабочее положение связано с реализацией процесса раскрытия. Проведение полномасштабной экспериментальной отработки раскрытия таких конструкций в наземных условиях является чрезвычайно сложным и дорогостоящим делом. Поэтому математическое моделирование динамики раскрытия трансформируемых космических конструкций позволяет подтвердить их работоспособность в реальных условиях эксплуатации. Моделирование позволяет провести анализ различных схем укладки в транспортное состояние и раскрытия в рабочее положение на орбите.

В работе представлена математическая модель, позволяющая проводить как расчёт раскрытия крупногабаритной трансформируемой космической конструкции, так и определение напряжённо-деформированного состояния её элементов при развёртывании.

В результате расчёта раскрытия получены кинематические параметры и значения эквивалентных напряжений, возникающих в узлах конструкции в выбранные моменты времени.

В настоящее время в России и за рубежом активно ведутся исследования по созданию в космосе крупногабаритных конструкций [1]. Одним из важных и бурно развивающихся направлений в области создания крупногабаритных космических конструкций является разработка трансформируемых конструкций. Несмотря на достигнутые значительные успехи в области создания таких конструкций, важной остаётся задача обеспечения плавного и надёжного их раскрытия на орбите при гарантированном обеспечении их последующего функционирования. Особое место среди создаваемых трансформируемых космических систем занимают многозвенные конструкции, состоящие из десятков, сотен и даже тысяч взаимосвязанных между собой элементов.

Процесс раскрытия трансформируемых конструкций индивидуален для каждого изделия, тем не менее, можно определить общий подход к построению моделей их раскрытия. Для расчетов принимается простая, достаточно хорошо учитывающая особенности конструкций, расчётная схема в виде системы абсолютно твёрдых тел, связанных между собой шарнирными узлами. Массы и моменты инерции твёрдых тел принимаются равными массам и моментам инерции реальных звеньев конструкции. При определенном относительном положении смежных звеньев во время раскрытия на них накладываются связи, ограничивающие их взаимное угловое перемещение. Технические связи выполняются в виде различного рода упоров, которые моделируются безмассовыми упругими и демпфирующими элементами с соответствующими характеристиками.

Напряжённо-деформированное состояние (НДС) элементов трансформируемой конструкции при раскрытии определяется ударными нагрузками при установке её смежных звеньев на упоры. Ударные нагрузки определяются из анализа кинематики раскрытия конструкции. Элементы конструкции встают на упоры в разные моменты времени. В качестве расчётной схемы для определения НДС её элементов при раскрытии принимаются её формы в определённые моменты времени процесса раскрытия, когда относительные скорости соседних звеньев максимальны. Тогда конструкция представляет собой кинематически неизменяемую систему, что необходимо для проведения расчёта на прочность. Такой подход идет в запас прочности, так как некоторая подвижность отдельных её звеньев относительно друг друга в рассматриваемые моменты времени приводит к снижению значений напряжений, что обусловлено потерями кинетической энергии в шарнирных соединениях [2]. Таким образом, оценка работоспособности трансформируемой космической конструкции проводится на основе комбинации метода расчёта поля скоростей её элементов в определённые моменты времени процесса раскрытия, когда относительные скорости смежных элементов максимальны, и метода конечных элементов для расчёта НДС упругой конструкции в эти же моменты времени при заданных начальных условиях.

В результате расчёта процесса раскрытия в программном комплексе Adams получены координаты, скорости и ускорения центров масс элементов конструкции, а также их угловые скорости и ускорения. На рис.1 представлены расчётные формы конструкции в процессе её

раскрытия из транспортного положения в рабочее состояние, а на рис.2 – экспериментально полученные формы.

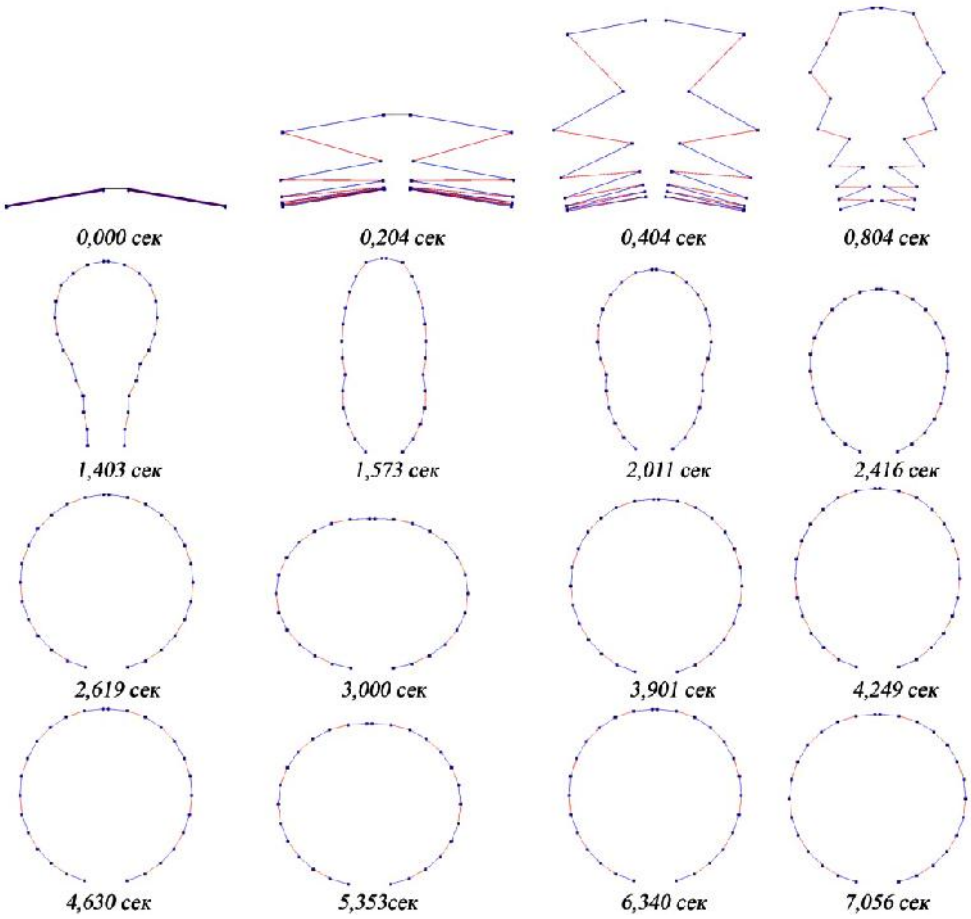


Рис. 1

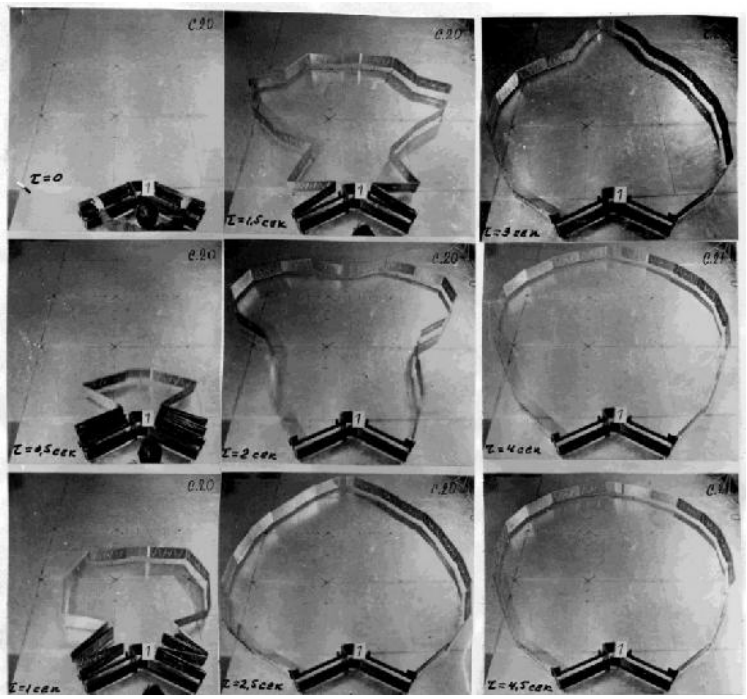


Рис. 2

Вычисленные значения скоростей в заданных точках расчётной модели конструкции принимаются в качестве начальных условий для расчёта переходного процесса в программном комплексе MSC.Nastran. На рис. 3 представлены максимальные эквивалентные напряжения в узлах конечно-элементной модели конструкции при $t = 1{,}8$ с: $\sigma = 163$ МПа (рис. 3 а) и $t = 2{,}6$ с:
$\sigma = 50$ МПа (рис. 3 б).

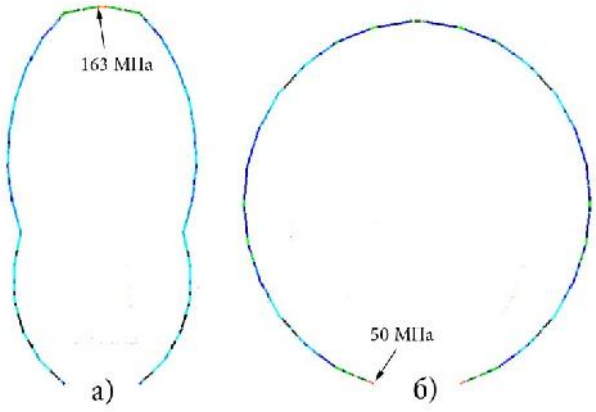


Рис. 3

ЛИТЕРАТУРА

1. Баничук Н.В., Карпов И.И., Климов Д.М. и др. Механика больших космических конструкций. М.: Изд-во «Факториал», 1997. 302 с.
2. Крылов А.В., Чурилин С.В. Методика определения напряжённо-деформированного состояния элементов трансформируемых многозвенных конструкций // Изв. ВУЗов. Сер. Физика, 2013. Т.56. № 7/3. С.170-172.

Сведения об авторах:

Джан Цыкунь— аспирантка кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители» МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д.5, стр. 1, **e-mail:** mes51@bmstu.ru).

Зимин Владимир Николаевич (Москва) — доктор технических наук, первый проректор – проректор по научной работе, МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2 -я Бауманская ул., д.5, стр. 1, **e-mail:** mes51@bmstu.ru).

Крылов Алексей Владимирович (Москва) — кандидат технических наук, доцент кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители», МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, **e-mail:** mes51@bmstu.ru).

Чурилин Сергей Александрович — инженер НИИСМ МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, Госпитальный пер., д. 10, **e-mail:** mes51@bmstu.ru).

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ УПРУГОЙ ВОЛНЫ СДВИГА В СОСТАВНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ СО СМЕШАННЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

Джилавян С.А., Наапетян С.Т.

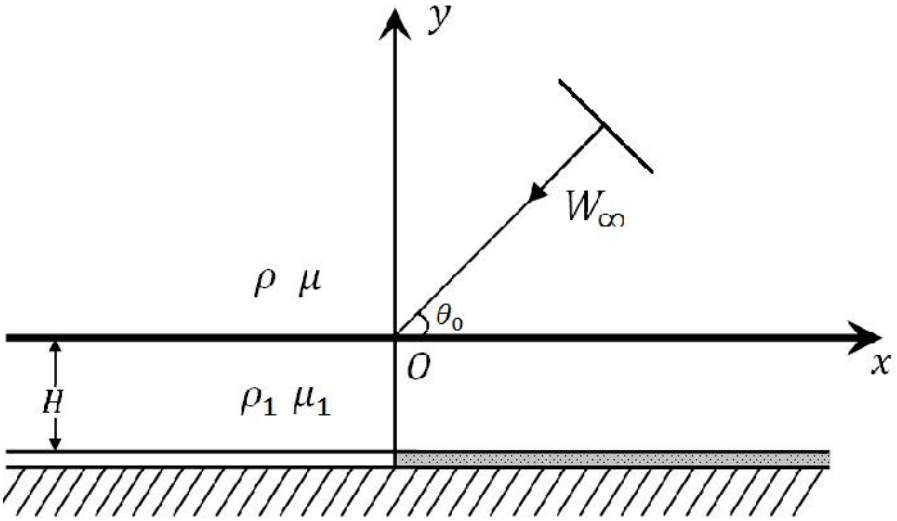
Рассматривается задача дифракции сдвиговой плоской волны в составном упругом полупространстве. Дифракция обусловлена смешанным граничным условием. В результате дифракции в неоднородном полупространстве, кроме известных волн отражения, распространяются локализованные (поверхностные) и объёмные волны. Используя интегральное преобразование Фурье, краевая задача дифракции упругих волн сводится к задаче типа Римана теории аналитических функций, для решения которой использован метод факторизации. Получено решение функционального уравнения, контурное интегрирование позволило получить распределение волнового поля в каждой подобласти упругого составного полупространства.

Рассмотрим упругое составное полупространство, отнесённое к декартовой системе координат $Oxyz$, содержащее упругое полупространство $y > 0$, контактирующее по плоскости $y = 0$ с упругим слоем толщиной H. Считаем, что полупространство $y > 0$ и упругий слой защемлены между собой (полный контакт) в плоскости Oxz. На краю $y = -H$ слоя – смешанные граничные условия. При $x < 0$ поверхность слоя свободна от напряжений, при $x > 0$ упругий слой склеен с абсолютно жёсткой средой (упругое закрепление).

Пусть из бесконечности, под некоторым углом θ_0 распространяется сдвиговая волна (гармонический множитель $e^{-i\omega t}$ здесь и в дальнейшем опускается, т.е. задача решается в амплитудах, t – параметр времени) с амплитудой

$$w_\infty(x, y) = e^{-ikx\cos\theta_0 - iky\sin\theta_0},$$

где $k = \omega / c$ – волновое число, $c = \sqrt{\mu / \rho}$ – скорость распространения сдвиговой волны, μ, ρ и μ_1, ρ_1 – модули сдвига и плотности полупространства и слоя, соответственно, ω – частота колебаний, $0 < \theta_0 < \pi/2$.



Рассматриваемая среда находится в условиях антиплоской деформации. Задача заключается в определении волнового поля в составном полупространстве. Для определения амплитуд перемещения имеем следующие уравнения [1]:

$$\Delta w + k^2 w = 0, \qquad y > 0$$

$$\Delta w_1 + k_1^2 w_1 = 0, \quad -H < y < 0 \tag{1}$$

$w(x, y)$ и $w_1(x, y)$ – функции амплитуд полупространства $y > 0$ и слоя, соответственно, $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$

Граничные и контактные условия запишутся в виде:

$$y=-H \qquad w_1(x,-H)=\psi_-(x)+\eta q_+(x), \qquad \mu_1\frac{\partial w_1}{\partial y}=q_+(x)$$

$$y=0 \qquad w=w_1, \quad \mu\frac{\partial w}{\partial y}=\mu_1\frac{\partial w_1}{\partial y}, \tag{2}$$

где $q_+(x)=\sigma^1_{yz}(x,-H)\theta(x)$, $\psi_-(x)=w_0\theta(-x)$; $q_+(x)$ – функция напряжения при $y=-H$, $\psi_-(x)$ представляет перемещение при $y=-H$, η характеризует свойства клея и $\eta=0$ соответствует случаю жёсткого защемления границы, а $\eta\to\infty$ – свободному краю, $\theta(x)$ – известная функция Хэвисайда, $w_0=w_1(x,-H)$ при $x<0$.

Решение краевой задачи должно удовлетворять также условию уходящей волны.

Для решения поставленной задачи применяем действительное преобразование Фурье по координате x. Относительно трансформантов Фурье получим уравнения:

$$\frac{d^2\overline{u}}{dx^2}-\left(\sigma^2-k^2\right)\overline{u}=0, \qquad y>0 \tag{3}$$

$$\frac{d^2\overline{w}_1}{dy^2}-\left(\sigma^2-k_1^2\right)\overline{w}_1=0, \quad -H<y<0, \tag{4}$$

где функция $\overline{u}=\overline{w}-\overline{w}_\infty$ представляет уходящую волну.

Ограниченные решения уравнений имеют вид:

$$\overline{u}=A(\sigma)e^{-\sqrt{\sigma^2-k^2}y}, \quad y>0 \tag{5}$$

$$\overline{w}_1=B(\sigma)e^{-\sqrt{\sigma^2-k_1^2}y}+C(\sigma)e^{\sqrt{\sigma^2-k_1^2}y}, \quad -H<y<0. \tag{6}$$

Следовательно, для искомых преобразований Фурье получим:

$$\overline{w}=A(\sigma)e^{-\sqrt{\sigma^2-k^2}y}+2\pi e^{-iky\sin\theta_0}\delta(\sigma-k\cos\theta_0) \tag{7}$$

$$\overline{w}_1=B(\sigma)e^{-\sqrt{\sigma^2-k_1^2}y}+C(\sigma)e^{\sqrt{\sigma^2-k_1^2}y}, \tag{8}$$

где $\delta(x)$ – функция Дирака.

Принимается, что $\sqrt{\sigma^2-k^2}\to|\sigma|$, $\sqrt{\sigma^2-k_1^2}\to|\sigma|$ при $|\sigma|\to\infty$, $\sqrt{\sigma^2-k^2}=-i\sqrt{k^2-\sigma^2}$, $\sqrt{\sigma^2-k_1^2}=-i\sqrt{k_1^2-\sigma^2}$, т.е. действительная ось комплексной плоскости $\alpha=\sigma+i\tau$ обходит $\sigma=-k_1, \sigma=-k$ – точки ветвления сверху, а $\sigma=k$, $\sigma=k_1$ – точки снизу и удовлетворяется условие уходящей волны [3, 4].

Из граничных условий для функций $A(\sigma), B(\sigma), C(\sigma)$ в (7) и (8) получим:

$$A(\sigma)=\frac{\eta\overline{q}_+(\sigma)}{\mu_1\sqrt{\sigma^2-k_1^2}}\left(\frac{1}{\eta}\operatorname{sh}\sqrt{\sigma^2-k_1^2}H+\mu_1\sqrt{\sigma^2-k_1^2}\operatorname{ch}\sqrt{\sigma^2-k_1^2}H\right)+$$
$$+\overline{\psi}_-(\sigma)\operatorname{ch}\sqrt{\sigma^2-k_1^2}H-2\pi\delta(\sigma-k\cos\theta_0) \tag{9}$$

$$B(\sigma)=-\frac{\overline{q}_+(\sigma)(1-\eta\mu_1\sqrt{\sigma^2-k_1^2})-\mu_1\sqrt{\sigma^2-k_1^2}\overline{\psi}_-(\sigma)}{2\mu_1\sqrt{\sigma^2-k_1^2}e^{\sqrt{\sigma^2-k_1^2}H}} \tag{10}$$

$$C(\sigma)=\frac{\overline{q}_+(\sigma)(1+\eta\mu_1\sqrt{\sigma^2-k_1^2})+\mu_1\sqrt{\sigma^2-k_1^2}\,\overline{\psi}_-(\sigma)}{2\mu_1\sqrt{\sigma^2-k_1^2}\,e^{-\sqrt{\sigma^2-k_1^2}H}} \tag{11}$$

где $\overline{q}_+(\sigma)$ и $\overline{\psi}_-(\sigma)$ – преобразования Фурье функций $q_+(x)$ и $\psi_-(x)$.

Относительно $\overline{q}_+(\sigma)$ и $\overline{\psi}_-(\sigma)$ получим следующее функциональное уравнение, которое можно рассматривать как краевую задачу типа Римана на действительной оси [3, 4]:

$$\mathrm{K}(\sigma)\overline{\psi}_-(\sigma)+\overline{q}_+(\sigma)=-\frac{4\pi i\mu k\sin\theta_0\delta(\sigma-k\cos\theta_0)}{Q(k\cos\theta_0)}, \tag{12}$$

где

$$K(\sigma)=\frac{\Lambda(\sigma)}{Q(\sigma)},$$

$$\Lambda(\sigma)=\left(\mu+\mu_1\right)\sqrt{\sigma^2-k^2}\,\mathrm{ch}\left(\sqrt{\sigma^2-k_1^2}H\right)\Lambda_*(\sigma),$$

$$\Lambda_*(\sigma)=\frac{1}{\mu+\mu_1}\left(\mu+\mu_1\frac{\sqrt{\sigma^2-k_1^2}}{\sqrt{\sigma^2-k^2}}\frac{\mathrm{sh}\left(\sqrt{\sigma^2-k_1^2}H\right)}{\mathrm{ch}\left(\sqrt{\sigma^2-k_1^2}H\right)}\right),$$

$$Q(\sigma)=\frac{\eta}{\mu_1\sqrt{\sigma^2-k_1^2}}\left(\left(\frac{1}{\eta}\mu\sqrt{\sigma^2-k^2}+\mu_1^2\left(\sigma^2-k_1^2\right)\right)\mathrm{sh}\sqrt{\sigma^2-k_1^2}H+\right.$$

$$\left.+\mu_1\sqrt{\sigma^2-k_1^2}\left(\frac{1}{\eta}+\mu\sqrt{\sigma^2-k^2}\right)\mathrm{ch}\sqrt{\sigma^2-k_1^2}H\right).$$

Здесь $\Lambda(\sigma)$ – характеристическая функция известной задачи Лява, а $Q(\sigma)$ – характеристическая функция задачи типа Лява, когда край слоя закреплён упруго (склеен с абсолютно жёсткой средой).

Как известно, $k<\sigma_\Lambda<k_1$ – положительное решение уравнения $\Lambda(\sigma)=0$, а $k<\sigma_\mathrm{T}<k_1$ – решение уравнения $Q(\sigma)=0$, если только $\mathrm{ctg}\sqrt{k_1^2-k^2}H<\eta\mu_1\sqrt{k_1^2-k^2}$ $\left(k<k_1\right)$, т.е. $\Lambda(\pm\sigma_\Lambda)=0$, $Q(\pm\sigma_T)=0$.

Факторизируя функцию $\mathrm{K}(\sigma)$, представим её в виде $\mathrm{K}(\sigma)=\mathrm{K}^+(\sigma)\mathrm{K}^-(\sigma)$, $\mathrm{K}(\sigma)\to 1$ при $|\sigma|\to\infty$.

Из (12) получим:

$$\mathrm{K}^-(\sigma)\overline{\psi}_-(\sigma)+\frac{\overline{q}_+(\sigma)}{\mathrm{K}^+(\sigma)}=-2\pi i f\,\delta(\sigma-k\cos\theta_0), \tag{13}$$

где

$$f=\frac{2k\mu\sin\theta_0K^+(k\cos\theta_0)}{Q(k\cos\theta_0)}=\mathrm{const},\qquad Q(x)\delta(x)=Q(0)\delta(x).$$

Имея в виду известное представление функции $\delta(x)$ [3]

$$2\pi i\delta(\sigma-k\cos\theta_0)=\frac{1}{\sigma-k\cos\theta_0-i0}-\frac{1}{\sigma-k\cos\theta_0+i0}, \tag{14}$$

получим:

$$K^-(\sigma)\overline{\psi}_-(\sigma)+\frac{f}{\sigma-k\cos\theta_0-i0}=\frac{f}{\sigma-k\cos\theta_0+i0}-\frac{\overline{q}_+(\sigma)}{\mathrm{K}^+(\sigma)}. \tag{15}$$

Следовательно, [3, 4]

$$\overline{\psi}_-(\sigma)=-\frac{f}{\mathrm{K}^-(\sigma)\left(\sigma-k\cos\theta_0-i0\right)} \tag{16}$$

$$\overline{q}_+(\sigma)=\frac{f\,\mathrm{K}^+(\sigma)}{\sigma-k\cos\theta_0+i0} \tag{17}$$

Принимается, что в данной задаче типа Римана действительная ось обходит не только точки ветвления $\pm k, \pm k_1$ функций $\sqrt{\alpha^2-k^2}$, $\sqrt{\alpha^2-k_1^2}$, но и точки $\sigma=-\sigma_\Lambda$, $\sigma=-\sigma_T$ сверху, а точки $\sigma=\sigma_\Lambda$, $\sigma=\sigma_T$ – снизу, тем самым, обеспечивая условие уходящей волны.

Функции $\dfrac{1}{\sigma-k\cos\theta_0\pm i0}$ регулярны в верхней и нижней полуплоскостях комплексной плоскости, соответственно.

$\mathrm{K}^\pm(\alpha)$ регулярны и не имеют нулей при $\operatorname{Im}\alpha>0$ и $\operatorname{Im}\alpha<0$, соответственно, $\mathrm{K}^\pm(\sigma)$ – краевые значения этих функций, к тому же, $\mathrm{K}^\pm(\alpha)\to 1$ при $|\alpha|\to\infty$ в своих областях регулярности. $\mathrm{K}^\pm(\alpha)$ строятся по известным методам факторизации [2, 3, 4]:

$$\mathrm{K}^+(\alpha)=\exp\left(F^+(\alpha)\right),\quad \mathrm{K}^-(\alpha)=\exp\left(F^-(\alpha)\right)$$

$$F^+(\sigma)=\int_0^\infty F(x)e^{ix(\sigma+i0)}dx,\qquad F^-(\sigma)=F^+(-\sigma)$$

$$F(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln K(\sigma)e^{-i\alpha x}d\sigma,\qquad K^-(-\sigma)=K^+(\sigma)$$

После обратного преобразования Фурье получим:

$$w(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}A(\sigma)e^{-\sqrt{\sigma^2-k^2}\,y}e^{-i\sigma x}d\sigma+e^{-iky\sin\theta_0-ikx\cos\theta_0} \tag{18}$$

при $x<0, y>0$:

$$w(x,y)=e^{-iky\sin\theta_0-ikx\cos\theta_0}+A_0e^{iky\sin\theta_0-ikx\cos\theta_0}+A_\Lambda e^{-\sqrt{\sigma_\Lambda^2-k_1^2}\,y-i\sigma_\Lambda x}+\frac{1}{2\pi}\int_l f_0(\alpha,y)e^{-i\sigma x}d\alpha, \tag{19}$$

где

$$A_0=-\left(\frac{fiK^+(k\cos\theta_0)\cos\sqrt{k_1^2-k^2\cos^2\theta_0}\,H}{K(k\cos\theta_0)}+1\right)$$

$$A_\Lambda=-\frac{fiK^+(\sigma_\Lambda)Q(\sigma_\Lambda)\operatorname{ch}\sqrt{\sigma_\Lambda^2-k_1^2}\,H}{\Lambda'(\sigma_\Lambda)(\sigma_\Lambda-k\cos\theta_0)}$$

$$f_0(\alpha,y)=\frac{\eta fK^+(\sigma)}{\mu_1\sqrt{\sigma^2-k_1^2}\,(\sigma-k\cos\theta_0+i0)}\left(\frac{1}{\eta}\operatorname{sh}\sqrt{\sigma^2-k_1^2}\,H+\right.$$

$$\left.+\mu_1\sqrt{\sigma^2-k_1^2}\operatorname{ch}\sqrt{\sigma^2-k_1^2}\,H\right)e^{-\sqrt{\sigma^2-k^2}\,y}$$

т.е. волновое поле состоит из падающей, отражённой, поверхностной волны Лява и дифрагированной объёмной волны. ω/σ_Λ – скорость распространения волны Лява.

При $x>0,\ y>0$ получим:

$$w(x,y)=e^{-iky\sin\theta_0-ikx\cos\theta_0}+A_1e^{iky\sin\theta_0-ikx\cos\theta_0}+A_Te^{-\sqrt{\sigma_T^2-k^2}y-i\sigma_Tx}+\frac{1}{2\pi}\int_l f_1(\alpha,y)e^{-i\sigma x}d\alpha\,, \qquad (20)$$

где

$$A_1=-\left[\frac{i\eta fK(k\cos\theta_0)}{\mu_1\sqrt{k_1^2-k^2\cos^2\theta_0}K^-(k\cos\theta_0)}\left(\frac{1}{\eta}\sin\sqrt{k_1^2-k^2\cos^2\theta_0}H+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\mu_1\sqrt{k_1^2-k^2\cos^2\theta_0}\cos\sqrt{k_1^2-k^2\cos^2\theta_0}H\right)+1\right]$$

$$A_T=\frac{if\Lambda(\sigma_T)\left(sh\sqrt{\sigma_T^2-k_1^2}H+\eta\mu_1\sqrt{\sigma_T^2-k_1^2}ch\sqrt{\sigma_T^2-k_1^2}H\right)}{\mu_1(\sigma_T-k\cos\theta_0)}\times$$

$$\times\frac{1}{\left(\frac{\sigma_T}{\sqrt{\sigma_T^2-k_1^2}}Q(\sigma_T)+\sqrt{\sigma_T^2-k_1^2}Q'(\sigma_T)\right)K^-(\sigma_T)+\sqrt{\sigma_T^2-k_1^2}Q(\sigma_T)\left(K^-\right)'(\sigma_T)}$$

$$f_1(\alpha,y)=-\frac{f\mathrm{ch}\sqrt{\sigma^2-k_1^2}H}{K^-(\sigma)(\sigma-k\cos\theta_0-i0)}e^{-\sqrt{\sigma^2-k^2}y},$$

т.е. волновое поле состоит из падающей, отражённой, локализованной (поверхностной) волны задачи типа Лява, когда край слоя закреплён упруго (упругий слой склеен с абсолютно жёсткой средой) и дифрагированной объёмной волны. ω/σ_T – скорость распространения волны типа Лява.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
2. Миттра Р., Ли С. Аналатические методы теории волноводов. М.: МИР, 1974, 323 с.
3. Агаян К.Л., Григорян Э.Х., Джилавян С.А. Дифракция сдвиговой плоской волны в упругом пространстве с полубесконечным упругим включением // Изв. НАН Армении. Механика. 2003. Т.56. №4. С. 3–17.
4. Григорян Э.Х., Агаян К.Л., Джилавян С.А. Дифракция локализованной сдвиговой волны на крае полубесконечной трещины в составном упругом пространстве // Изв. НАН Армении. Механика. 2014. Т.67. №4. С.10–20.

Сведения об авторах:

Джилавян Самвел Акопович – кандидат физ.-мат. наук, доцент, кафедра механики ЕГУ.
Тел.: (374 94) 50 07 70; **E-mail:** samjilavyan@ysu.am

Наапетян Севак Татосович – аспирант, кафедра механики ЕГУ.
Тел.: (374 98) 10 56 26; **E-mail:** sevaknahapetyan@gmail.com

ИДЕНТИФИКАЦИЯ УРОВНЯ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО НАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ В ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ ТЕЛАХ

Дударев В.В., Мнухин Р.М., Недин Р.Д.

На основе общей постановки задачи о движении неоднородного электроупругого тела, находящегося в условиях предварительного напряжённо-деформированного состояния, сформулированы задачи об установившихся колебаниях тонкого диска и стержня с переменными свойствами. Решение прямых задач об определении поля перемещения реализовано численно на основе метода пристрелки. Проведён анализ изменения основных акустических характеристик объектов для различных законов изменения свойств материала и уровней предварительных напряжений. Рассмотрены новые коэффициентные обратные задачи об определении уровня преднапряжений по данным об изменении собственных частот колебаний. На примере задачи для стержня получено искомое соотношение для её решения. Проведены численные эксперименты для оценки точности построенных решений. Даны практические рекомендации для реализации предложенных теоретических подходов диагностики.

В настоящее время развитие технологий позволяет создавать объекты со сложной структурой. Функционально-градиентные пьезоматериалы обладают свойствами, которые непрерывно изменяются по пространственным координатам. Производство таких материалов является сложной процедурой, включающей различные технологические операции (дробление, спекание, прессование и т.п.), в результате которых могут возникать остаточные (предварительные) напряжения. Такие напряжения также могут появляться в результате действия скрытых нагрузок в процессе эксплуатации объекта.

1. В работе [1] на основе общих нелинейных соотношений построена линеаризованная модель, описывающая движение предварительного напряжённо-деформированного неоднородного электроупругого тела, находящегося в режиме установившихся колебаний с частотой ω:

$$\begin{cases} T_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i = 0, D_{i,i} = 0, \\ T_{ij} = \sigma_{ij} + u^0_{i,m}\sigma_{mj} + u_{i,m}\sigma^0_{mj}, \\ \sigma_{ij} = \hat{C}_{ijkl}u_{k,l} + e_{mij}\varphi_{,m}, \\ D_k = e^*_{kij}u_{i,j} - \epsilon_{mn}\varphi_{,m}, \\ \hat{C}_{ijkl} = C_{ijkl} + C_{ijml}u^0_{k,m}, \\ e^*_{mij} = e_{mij} + e_{mnj}u^0_{i,n}, \\ T_{ij}n_j\big|_{S_\sigma} = P_i, u_i\big|_{S_u} = 0, \\ D_i n_i\big|_{S_D} = 0, \varphi\big|_{S_\pm} = \pm\varphi^*, \end{cases} \tag{1.1}$$

где T_{ij} – компоненты несимметричного добавочного тензора напряжений Пиолы, ρ – плотность тела, u_i – компоненты добавочного вектора малых перемещений, σ_{ij} – компоненты добавочного тензора объективных напряжений, σ^0_{mj} – компоненты тензора предварительных напряжений, u^0_i – вектор предварительных (остаточных) перемещений, $\hat{C}_{ijkl}$ – компоненты несимметричного тензора эффективных упругих модулей, C_{ijkl} – компоненты тензора упругих модулей, e_{mij} – компоненты тензора пьезоэлектрических постоянных, φ – электрический потенциал, n_i – компоненты единичного вектора внешней нормали поверхности тела, P_i – компоненты вектора активной внешней нагрузки, заданной на поверхности $S_\pm$, D_i – компоненты вектора электрической индукции, ϵ_{mn} – компоненты тензора диэлектрических проницаемостей, $\pm\varphi^*$ – значения потенциала на электродированных частях поверхности тела $S_\pm$. Следует отметить, что в рамках этой модели не учитываются массовые силы и плотность свободных

электрических зарядов в текущей конфигурации, а также нелинейные и электрострикционные коэффициенты в определяющих соотношениях.

2. Используя классические гипотезы, из (1.1), получены следующие задачи об установившихся продольных колебаниях электроупругого преднапряжённого стержня длины l, различающиеся граничными условиями:

$$\begin{cases} T' + \rho\omega^2 u = 0, \\ T = \left(E^* + \dfrac{d^{*2}}{\epsilon} \right) u', \\ E^* = E\left(1 + 2u^{0\prime}\right) + \sigma^0, \\ d^{*2} = d^2\left(1 + 2u^{0\prime}\right), \\ u(0) = 0, \\ T(l) = P; \end{cases} \tag{2.1}$$

$$\begin{cases} T' + \rho\omega^2 u = 0, \\ T = E^* u' + d\varphi', \\ E^* = E + \sigma^0, \\ D' = 0, \\ D = du' - \epsilon\varphi', \\ u(0) = 0, T(l) = 0, \\ \varphi(0) = 0, \varphi(l) = V_0. \end{cases} \tag{2.2}$$

В задаче (2.1) колебания вызываются периодической нагрузкой, приложенной на правом конце стержня, левый конец стержня закреплён. Торцы стержня электродированы и закорочены. В такой постановке задача упрощается и приобретает вид классической механической задачи для стержня с эффективными характеристиками, в состав которых входят электрические параметры (пьезомодуль и диэлектрическая проницаемость). В задаче (2.2) учтено влияние только поля остаточных напряжений. Колебания вызываются путём периодической подачи потенциала на правом конце стержня. В обеих задачах модуль Юнга принят переменным по продольной координате, предварительное напряжённое состояние считалось одноосным. Решения задач после проведения процедуры обезразмеривания и перехода к системам дифференциальных уравнений первого порядка реализовано численно с помощью метода пристрелки.

На основе построенных численных решений проведена серия расчётов по оценке влияния изменения переменного модуля Юнга и уровня предварительного напряжённого состояния на функцию продольного смещения, амплитудно-частотные характеристики и значения резонансных частот. Анализ полученных результатов показал, что изменение модуля Юнга более существенно влияет на исследуемые характеристики, чем изменение уровня преднапряжённого состояния [1]. Поэтому при исследовании продольных колебаний преднапряжённого неоднородного электроупругого стержня важно знать точные законы изменения его физических свойств.

3. В качестве другой задачи на основе (1.1), аналогично [2], сформулирована и рассмотрена постановка об установившихся радиальных колебаниях преднапряжённого неоднородного электроупругого диска малой толщины h в цилиндрической системе координат. Торцевые поверхности диска $z = \pm h/2$ электродированы. Колебания вызываются путём периодической подачи разности потенциалов $\pm V_0$. Диск изготовлен из пьезокерамики PZT-4 с гексагональной симметрией 6 mm. Физические свойства приняты переменными по радиальной координате. Предварительное напряжённое состояние определяется только радиальной и тангенциальной

компонентами тензора $\boldsymbol{\sigma}^0$, зависящими только от радиальной координаты. Следуя теории обобщённого напряжённого состояния, проведена операция осреднения по толщине диска по правилу $\langle Q \rangle = 1/h \int\limits_{-h/2}^{-h/2} Q dz$. Уравнение движения для осреднённых компонент тензора $\mathbf{T}$ принимает вид:

$$\langle T_{rr,r} \rangle + \frac{1}{r}\left(\langle T_{rr} \rangle - \langle T_{\phi\phi} \rangle\right) + \rho\omega^2 u_r = 0, \tag{3.1}$$

где

$$\langle T_{rr} \rangle = u_{r,r}(r)\left(\sigma_{rr}^0(r) + P_2(r)\right) + P_3(r)\frac{u_r(r)}{r} + \frac{2V_0}{h}P_1(r),$$

$$\langle T_{\phi\phi} \rangle = u_{r,r}(r)P_3(r) + \left(\sigma_{\phi\phi}^0(r) + P_2(r)\right)\frac{u_r(r)}{r} + \frac{2V_0}{h}P_1(r),$$

$$P_1(r) = e_{31}(r)\left(1 - \frac{c_{13}(r)e_{33}(r)}{e_{31}(r)c_{33}(r)}\right),\ P_2(r) = c_{11}(r)\left(1 - \frac{c_{13}^2(r)}{c_{11}(r)c_{33}(r)}\right),\ P_3(r) = c_{12}(r)\left(1 - \frac{c_{13}^2(r)}{c_{12}(r)c_{33}(r)}\right).$$

Здесь учтено граничное условие для потенциала $\varphi\big|_{z=\pm h/2} = \pm V_0$. Поскольку функции u_z и φ нечётны по координате z, то уравнение движения для компоненты u_z после осреднения выполнится тождественно. Уравнение (3.1) замыкается граничными условиями, описывающими отсутствие нормальной механической нагрузки на боковых поверхностях диска:

$$\left[u_{r,r}(r)\left(\sigma_{rr}^0(r) + P_2(r)\right) + P_3(r)\frac{u_r(r)}{r} + \frac{2V_0}{h}P_1(r)\right](r = r_1) = 0 \tag{3.2}$$

$$\left[u_{r,r}(r)\left(\sigma_{rr}^0(r) + P_2(r)\right) + P_3(r)\frac{u_r(r)}{r} + \frac{2V_0}{h}P_1(r)\right](r = r_2) = 0 \tag{3.3}$$

Решение задачи (3.1)-(3.3) в силу переменности коэффициентов в дифференциальном уравнении в общем случае может быть получено только численно, например, с помощью метода пристрелки. Для этого задача сведена к системе дифференциальных уравнений первого порядка относительно функции напряжения $\langle T_{rr} \rangle$ и функции радиального смещения.

Проведённые аналогичные задачам (2.1), (2.2) расчёты показали, что изменение неоднородных физических свойств также оказывает более существенное влияние на основные акустические характеристики диска, чем изменение уровня предварительного напряжённого состояния.

4. Сформулируем обратную коэффициентную задачу об определении уровня предварительного напряжённого состояния в функционально-градиентных электроупругих телах по дополнительной информации о значениях их собственных частот колебаний.

В качестве конкретного примера рассмотрим задачу для стержня из (2.1). В этом случае свободные колебания при наличии и отсутствии предварительного напряжённо-деформированного состояния, соответствующего одноосному растяжению в начальной конфигурации ($\sigma^0 = \text{const}$), могут быть записаны в безразмерном виде:

$$\begin{cases} \left(\left(\varphi(\xi) + c + 3\tau\right)v'(\xi)\right)' + \kappa^2 v(\xi) = 0, \\ v(0) = 0, \\ \left(\varphi(1) + c + 3\tau\right)v'(1) = 0, \end{cases} \tag{4.1}$$

$$\begin{cases} \left(\left(\varphi(\xi) + c\right)w'(\xi)\right)' + \kappa_0^2 w(\xi) = 0, \\ w(0) = 0, \\ \left(\varphi(1) + c\right)w'(1) = 0, \end{cases} \tag{4.2}$$

где $\xi = x / l \in [0,1]$, $E(x) = \tilde{E} \cdot \varphi(\xi)$, $\tilde{E}$ – характерное значение переменного модуля Юнга, $c = d^2 / (\tilde{E}\epsilon)$, $\tau = \sigma^0 / \tilde{E}$ – параметр, характеризующий уровень предварительного напряжённо-деформированного состояния, $\kappa^2 = \rho\omega^2 l^2 / \tilde{E}$ – параметр, пропорциональный частоте колебаний, $u(x) = lv(\xi)$. Умножив уравнения колебаний (4.1) и (4.2) на $w(\xi)$ и $v(\xi)$ – соответственно, проинтегрировав и вычтя одно из другого, после упрощений получим:

$$-3\tau\int_0^1 v'(\xi)\, w'(\xi)\, d\xi + \left(\kappa^2 - \kappa_0^2\right)\int_0^1 v(\xi)\, w(\xi)\, d\xi = 0. \qquad (4.3)$$

В силу малости влияния предварительного напряжённо-деформированного состояния на функцию смещения положим $v(\xi) \approx w(\xi)$, тогда из (4.3) можно получить формулу:

$$\tau = \frac{\kappa^2 - \kappa_0^2}{3} \frac{\int_0^1 w^2(\xi)\, d\xi}{\int_0^1 \left(w'(\xi)\right)^2 d\xi} \qquad (4.4)$$

Используя (4.4), проведена серия вычислительных экспериментов по восстановлению параметра τ. Анализ полученных результатов показал, что чем меньше значение параметра τ, тем меньше относительная погрешность восстановления (при $\tau = 10^{-4}$ и $\varphi(\xi) = 1 + \xi^2$ погрешность $\delta_\tau < 0.00002\%$). При этом повышается требование к точности задания параметров κ и κ_0.

Используя аналогичную технику, также получена формула для решения обратной задачи для стержня из (2.2). Примеры решений для задачи о тонком электроупругом однородном диске представлены в работе [2]. Таким образом, по данным об изменении значений собственных частот колебаний электроупругих тел можно исследовать обратную задачу о восстановлении уровня предварительного напряжённого состояния.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации (проект МК-3179.2017.1), РФФИ (проект 16-01-00354 А).

ЛИТЕРАТУРА

1. R.D. Nedin, V.V. Dudarev, A.O. Vatulyan. Vibrations of inhomogeneous piezoelectric bodies in conditions of residual stress–strain state // Applied Mathematical Modelling. V. 63. 2018. P. 219-242.
2. A.O. Vatulyan, V.V. Dudarev, R.M. Mnukhin. Determination of the inhomogeneous preliminary stress–strain state in a piezoelectric disk // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2018. Vol. 59, No. 3. P. 542–550.

Сведения об авторах:

Дударев Владимир Владимирович – к.ф.-м.н., доцент кафедры теории упругости, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича; старший научный сотрудник, Южный математический институт +7 (863) 297−51−14 (доб. 110)
E-mail: dudarev_vv@mail.ru

Мнухин Роман Михайлович – аспирант, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича +7 (863) 297–51–14 (доб. 110)
E-mail: romamnuhin@yandex.ru

Недин Ростислав Дмитриевич – к.ф.-м.н., старший преподаватель кафедры теории упругости, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича; старший научный сотрудник, Южный математический институт +7 (863) 297−51−14 (доб. 110)
E-mail: rdn90@bk.ru

ИЗУЧЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ИЗГИБНОЙ ДЕФОРМАЦИИ МИКРОПОЛЯРНОЙ УПРУГОЙ ТОНКОЙ БАЛКИ. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Жамакочян К.А.

На основе разработанной модели изгибной деформации микрополярных упругих тонких балок с независимыми полями перемещений-вращений [1] и со стеснённым вращением [2], в данной работе изучается задача изгиба балки, когда один конец жёстко защемлён, а другой конец – свободный. На балке действует равномерно распределённая нормальная нагрузка.

В обеих постановках (с независимыми полями перемещений-вращений и со стеснённым вращением) задача решается теоретическим путём, в результате, определяются функции прогиба балки. Далее для рассмотренных задач развивается метод конечных элементов. Приводятся численные результаты.

1. Микрополярная упругая балка с независимыми полями перемещений и вращений: Основная система прикладной теории изгиба микрополярной балки с независимыми полями перемещений и вращении выражается так [1]:

уравнения равновесия

$$\frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} = -2q,\ \ N_{21} - \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} = 0,\ \ \frac{\partial L_{13}}{\partial x_1} + N_{12} - N_{21} = 0; \tag{1.1}$$

соотношения упругости

$$N_{12} = 2h[(\mu+\alpha)\Gamma_{12} + (\mu-\alpha)\Gamma_{21}],\quad N_{21} = 2h[(\mu-\alpha)\Gamma_{12} + (\mu+\alpha)\Gamma_{21}],$$
$$M_{11} = \frac{2Eh^3}{3}K_{11},\quad L_{13} = 2Bhk_{13}; \tag{1.2}$$

геометрические соотношения

$$\Gamma_{12} = \frac{\partial w}{\partial x_1} - \Omega_3,\ \ \Gamma_{21} = \psi + \Omega_3,\ \ K_{11} = \frac{\partial \psi}{\partial x_1},\quad k_{13} = \frac{\partial \Omega_3}{\partial x_1}; \tag{1.3}$$

Здесь E и μ – классические модули упругости и сдвига, а α и B – новые упругие константы микрополярного материала балки; об остальных обозначениях см. [1].

Граничные условия на концах балки ($x_1 = 0$ или $x_1 = a$) имеют вид:

$$w = 0,\ \ \psi = 0,\ \ \Omega_3 = 0 \quad \text{при } x_1 = 0;$$
$$N_{12} = 0,\ \ M_{11} = 0,\ \ L_{13} = 0 \quad \text{при } x_1 = a. \tag{1.4}$$

Общий вид функционала потенциальной энергии деформации микрополярно-упругих тонких балок с независимыми полями перемещений и вращений выражается так:

$$U = \int_0^a (W - 2q_1 h\psi - 2qw - 2m_2\Omega_3)dx_1 -$$
$$-\left((M_{11}\psi + N_{12}w + L_{13}\Omega_3)\big|_{x_1=a} - (M_{11}\psi + N_{12}w + L_{13}\Omega_3)\big|_{x_1=0}\right), \tag{1.5}$$

где

$$W = E\frac{h^3}{3}K_{11}^2 + h(\mu+\alpha)(\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{21}^2) + 2h(\mu-\alpha)\Gamma_{12}\Gamma_{21} + Bhk_{13}^2, \tag{1.6}$$

W – линейная плотность потенциальной энергии деформации микрополярной балки при изгибе.

Решение систем уравнений (1.1)-(1.3) возможно привести к решению дифференциального уравнения относительно прогиба $w = w(x_1)$ следующим образом [3]:

из первого уравнения равновесия (1.1) получим:

$$N_{12} = -2qx_1 + C_1. \tag{1.7}$$

Подставляя (1.7) в формуле $(1.2)_1$ с учётом $(1.3)_1$, $(1.3)_2$, после некоторых преобразований приходим к следующему уравнению:

$$-2qx_1 + C_1 = 2h[(\mu+\alpha)\frac{dw}{dx_1} + (\mu-\alpha)\psi - 2\alpha\Omega_3]. \tag{1.8}$$

Суммируя первые две формулы из (1.2), получим:

$$N_{12}+N_{21}=4h\mu\left(\Gamma_{12}+\Gamma_{21}\right). \tag{1.9}$$

Имея в виду (1.7), для N_{21} будем иметь:

$$N_{21}=4h\mu\left(\frac{dw}{dx_1}+\psi\right)+2qx_1-C_1. \tag{1.10}$$

Рассмотрим второе уравнение равновесия из (1.1), подставляя в это уравнение (1.10) и формулу для M_{11} из (1.2), получим следующее уравнение:

$$4h\mu\left(\frac{dw}{dx_1}+\psi\right)+2qx_1-C_1-\frac{2}{3}h^3E\frac{d^2\psi}{dx_1^2}=0. \tag{1.11}$$

Формулы $(1.2)_4$, (1.7), (1.10), подставляя в третье уравнение равновесия из (1.1), приходим к следующему уравнению:

$$2hB\frac{d^2\Omega_3}{dx_1^2}-4qx_1+2C_1-4h\mu\left(\frac{dw}{dx_1}+\psi\right)=0\,. \tag{1.12}$$

Рассмотрим систему уравнений (1.11) и (1.12), исключим из этих двух уравнений выражение $4h\mu\left(\frac{dw}{dx_1}+\psi\right)$, в результате, после интегрирования по x_1 получим следующее равенство:

$$\Omega_3=\frac{1}{2hB}\left[\frac{2h^3E}{3}\psi+\frac{qx_1^3}{3}-C_1\frac{x_1^2}{2}+C_2x_1+C_3\right]. \tag{1.13}$$

Здесь C_1, C_2, C_3 – постоянные интегрирования.

Подставим (1.13) в равенство (1.8), выразим ψ через $\frac{dw}{dx_1}$, в итоге будем иметь:

$$\psi=\frac{1}{\mu-\alpha-\frac{2\alpha h^2E}{3B}}\left[-\left(\mu+\alpha\right)\frac{dw}{dx_1}+\frac{q\alpha}{3hB}x_1^3-\frac{C_1\alpha}{2hB}x_1^2+\left(\frac{C_2\alpha}{hB}-\frac{q}{h}\right)x_1+\frac{C_3\alpha}{hB}+\frac{C_1}{2h}\right. . \tag{1.14}$$

Теперь формулу для ψ (1.14) подставим в уравнение (1.11), тогда для w приходим к следующему обыкновенному линейному неоднородному дифференциальному уравнению третьего порядка:

$$A\frac{d^3w}{dx_1^3}+D\frac{dw}{dx_1}=K_1x_1^3+K_2x_1^2+K_3x_1+K_4, \tag{1.15}$$

где

$$A=\frac{2h^3E\left(\mu+\alpha\right)}{3\left(\mu-\alpha-\frac{2\alpha h^2E}{3B}\right)},\quad D=4h\mu\left(1-\frac{\left(\mu+\alpha\right)}{\mu-\alpha-\frac{2\alpha h^2E}{3B}}\right),\quad K_1=-\frac{4\mu q\alpha}{3B\left(\mu-\alpha-\frac{2\alpha h^2E}{3B}\right)},$$

$$K_2=\frac{2\mu C_1\alpha}{B\left(\mu-\alpha-\frac{2\alpha h^2E}{3B}\right)},\ K_3=-\frac{4\mu}{\left(\mu-\alpha-\frac{2\alpha h^2E}{3B}\right)}\left(\frac{C_2\alpha}{B}-q\right)-2q+\frac{4h^2Eq\alpha}{3B\left(\mu-\alpha-\frac{2\alpha h^2E}{3B}\right)}, \tag{1.16}$$

$$K_4=-\frac{4\mu}{\left(\mu-\alpha-\frac{2\alpha h^2E}{3B}\right)}\left(\frac{C_3\alpha}{B}+\frac{C_1}{2}\right)+C_1-\frac{2h^2EC_1\alpha}{3B\left(\mu-\alpha-\frac{2\alpha h^2E}{3B}\right)}.$$

Общее решение дифференциального уравнения (1.15) имеет вид:

$$w=C_4+C_5\mathrm{sh}\lambda x_1+C_6\mathrm{ch}\lambda x_1+\frac{K_1}{4D}x_1^4+\frac{K_2}{3D}x_1^3+\left(\frac{K_3}{2D}-\frac{3AK_1}{D^2}\right)x_1^2+\left(\frac{K_4}{D}-\frac{2AK_2}{D^2}\right)x_1, \tag{1.17}$$

где $\lambda = \sqrt{-\frac{D}{A}}$ (для большинства материалов $\frac{D}{A} < 0$). Здесь C_4, C_5, C_6 – новые постоянные интегрирования.

Подставляя (1.17) в (1.14) и (1.13), получим окончательные выражения для ψ и Ω_3.

Для определения постоянных интегрирования $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$, удовлетворим граничным условиям (1.4), в результате получим шесть линейных алгебраических уравнений относительно искомых постоянных интегрирования. Решая полученную алгебраическую систему уравнений, определяя значения $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ и подставляя их в выражения для w, ψ и Ω_3, получим решение поставленной граничной задачи (1.1)-(1.4).

2. Микрополярная упругая балка со стеснённым вращением. Рассмотрим ту же задачу изгиба микрополярной балки, но теперь, на основе модели со стеснённым вращением[2]:

уравнения равновесия

$$\frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} = -2q, \; N_{21} - \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} = 0, \; \frac{\partial L_{13}}{\partial x_1} + N_{12} - N_{21} = 0; \tag{2.1}$$

соотношения упругости

$$N_{12} + N_{21} = 4h\mu\Gamma_{12},$$
$$M_{11} = \frac{2Eh^3}{3} K_{11}, \quad L_{13} = 2Bhk_{13}; \tag{2.2}$$

геометрические соотношения

$$\Gamma_{12} = \frac{\partial w}{\partial x_1} + \psi, \quad K_{11} = \frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \quad k_{13} = \frac{\partial \Omega_3}{\partial x_1}; \; \Omega_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx_1} - \psi\right). \tag{2.3}$$

Граничные условия – те же самые (1.4).

Линейная плотность потенциальной энергии деформации микрополярной балки со стеснённым вращением при её изгибе имеет вид [2]:

$$W = E\frac{h^3}{3} K_{11}^2 + h\mu\Gamma_{12}^2 + Bhk_{13}^2. \tag{2.4}$$

Из системы уравнений равновесия (2.1) легко получить:

$$N_{12} = -2qx_1 + C_1, \quad \frac{d}{dx_1}\left(L_{13} - M_{11}\right) = 2qx_1 - C_1. \tag{2.5}$$

После интегрирования $(2.5)_2$ по x_1 будем иметь:

$$L_{13} - M_{11} = qx_1^2 - C_1x_1 + C_2. \tag{2.6}$$

Подставив в (2.6) значения L_{13} и M_{11} из (2.2), и имея в виду (2.3), получим:

$$Bh\frac{d^2w}{dx_1^2} - \left(Bh + \frac{2}{3}Eh^3\right)\frac{d\psi}{dx_1} = qx_1^2 - C_1x_1 + C_2.$$

После интегрирования этого уравнения по x_1 приходим к следующему равенству:

$$\psi = \frac{1}{Bh + \frac{2}{3}Eh^3}\left(Bh\frac{dw}{dx_1} - \frac{qx_1^3}{3} + \frac{C_1x_1^2}{2} - C_2x_1 + C_3\right). \tag{2.7}$$

Из уравнений $(2.2)_1$ и $(2.1)_3$, определив усилие N_{21}, с учётом $(2.5)_1$ будем иметь:

$$N_{21} = 4h\mu\left(\frac{dw}{dx_1} + \psi\right) + 2qx_1 - C_1, \tag{2.8}$$

$$N_{21} = \frac{dL_{13}}{dx_1} - 2qx_1 + C_1. \tag{2.9}$$

Приравнивая выражения (2.8) и (2.9) и в полученном равенстве подставляя $(2.2)_3$, (2.3), с учётом (2.7) относительно w, приходим к решению дифференциального уравнения (1.17), где

$$A = Bh - \frac{(Bh)^2}{\left(Bh + \frac{2h^3E}{3}\right)}, \quad D = -4h\mu\left(1 + \frac{Bh}{Bh + \frac{2h^3E}{3}}\right),$$

$$K_1 = -\frac{4h\mu q}{3Bh + 2h^3E}, \qquad K_2 = \frac{6h\mu C_1}{3Bh + 2h^3E}, \tag{2.10}$$

$$K_3 = 4q - \frac{12h\mu C_2 + 6Bhq}{3Bh + 2h^3E}, \quad K_4 = \frac{12h\mu C_3 + 3C_1Bh}{3Bh + 2h^3E} - 2C_1.$$

Общее решение уравнения (1.15) имеет вид (1.17). Используя (1.17) и (2.7), получим выражение для ψ, которое,подставляя в $(2.3)_4$, будем иметь выражение для Ω_3.

Удовлетворяя граничным условиям (1.4), приходим к системе линейных алгебраических уравнений для определения постоянных $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$.

После решения алгебраической системы уравнений получим все значения постоянных интегрирования и окончательно получим выражения для искомых основных функций w, ψ и Ω_3.

3. Метод конечных элементов решения поставленных задач. Для решения конкретной задачи об определении напряжённо-деформированного состояния изгибной деформации микрополярной упругой тонкой балки будем развивать метод конечных элементов. В работе [4] построена матрица жёсткости конечного элемента в случае модели балки с независимыми полями перемещений-вращений, а в работе [5] – в случае модели балки со стеснённым вращением.

С учётом граничных условий (1.4) общий вид функционала потенциальной энергии деформации (1.5) примет вид (при $q_1 = m_2 = 0$):

$$U = \int_0^a (W - 2qw)dx_1, \tag{3.1}$$

где для модели с независимыми полями перемещений и вращений W имеет выражение (1.6), а для модели со стеснённым вращением – (2.4). После построения матрицы жёсткости K и вектора эквивалентных узловых сил и моментов P с учётом граничных условий (1.4) составим систему линейных алгебраических уравнений:

$$[K]\cdot\{\delta\} = \{P\}. \tag{3.2}$$

Здесь матрица жёсткости $[K]$ есть матрица размером 12×12 в случае модели с независимыми полями перемещений и вращений [4], и размером 8×8 – в случае модели со стеснённым вращением [5]; $\{\delta\}^T = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5, \delta_6, \delta_7, \delta_8, \delta_9, \delta_{10}, \delta_{11}, \delta_{12}\}$ – вектор узловых перемещений и поворотов в модели с независимыми полями перемещений-вращений и, $\{\delta\}^T = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5, \delta_6, \delta_7, \delta_8\}$ – вектор узловых перемещений и поворотов в модели со стеснённым вращением; $\{P\}^T$ – сосредоточенные узловые силы и моменты.

В результате, решение системы (3.2) с учётом граничных условий (1.4) даст величины узловых обобщённых перемещений. Для повышения точности решений, понятно, что необходимо разбивать балку на несколько конечных элементов. Результат вычислений (максимальный прогиб) приведём для случая, когда физические постоянные имеют значения [4] в случае модели с независимыми полями перемещений-вращений: $\alpha = 1.6\cdot10^3\,Па, \mu = 2\cdot10^6\,Па,$ $E = 5{,}2\cdot10^6\,Па, B = 60H$, а в случае модели со стеснённым вращением примем: $\mu = 2\cdot10^6\,Па, E = 5{,}2\cdot10^6\,Па, B = 60H$. Для обеих задач: $q = 50Па$, а геометрические размеры балки такие: $a = 8\,мм, h = 0{,}2\,мм$. Приведём также результат по классической теории упругой тонкой балки при её изгибе:

Таблица 1. Максимальные прогибы микрополярной и классической балок по модели с независимыми полями перемещений и вращений.

Микрополярная балка $w_{\max} \times 10^4$ (м)			Классическая балка $w_{\max} \times 10^4$ (м)	
Точное значение	Один конечный элемент	Два конеч-ных элемента	Точное значение	Один конечный элемент
5,89	5,59	5,88	18,5	18,5

Таблица 2. Максимальные прогибы микрополярной и классической балки по модели со стеснённым вращением.

Микрополярная балка $w_{\max} \times 10^6$ (м)			Классическая балка $w_{\max} \times 10^4$ (м)	
Точное значение	Один конечный элемент	Два конеч-ных элемента	Точное значение	Один конечный элемент
3,11	2,87	3,06	18,5	18,5

Как видно из приведённых таблиц, при учёте микрополярных свойств материала, повышается жёсткость балки как при модели с независимыми полями перемещений и вращений, так и при модели со стеснённым вращением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sargsyan S.H. Effective Manifestations of Characteristics of Strength and Rigidity of Micropolar Elastic Thin Bars// Journal of Materials Science and Engineering. 2012. V.2. №1. P.98-108.
2. Саркисян С.О. Математические модели микрополярных упругих тонких стержней// Доклады НАН Армении. 2011. Т.111. № 2. С.121-128.
3. Aslanyan N.S., Sargsyan S. H. Thermoelasticity of micropolar thin beams // Journal of Thermal Stresses. 2018. Vol.41. Issue 6. P.687-705.
4. Sargsyan S.H., Zhamakochyan K.A. Finite Element Method for Solving Boundary Value Problems of Bending of Micropolar Elastic Thin Bars//Proceedings of the XLII Summer School-Conference Advanced Problems in Mechanics. St.-Petersburg, Russia. June 30-July 5, 2014. P. 427-434.
5. Sargsyan S.H., Zhamakochyan K.A. Mathematical Model of Micropolar Elastic Thin Beams with Constrained Rotations and The Finite Element Method//Proceedings of the XLVI Summer School-Conference Advanced Problems in Mechanics. St.-Petersburg, Russia. June 25- June 30, 2018. (in print)

Сведение об авторе:

Жамакочян Кнарик – аспирант, Ширакский государственный университет.
(374 93) 87 32 94, (374 55) 87 32 94
E-mail: knarikzhamakochyan@mail.ru

ПРОЦЕСС НАНОСТРУКТУРИРОВАНИЯ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ МАТРИЦЫ ДИСПЕРСНОЙ ФАЗОЙ (TiC) ДЛЯ НАПРАВЛЕННОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ

Земцова Е.Г., Морозов П.Е., Арбенин А.Ю., Семёнов Б.Н., Морозов Н.Ф., Смирнов В.М.

В работе показаны теоретические и экспериментальные основы синтеза нового класса наноструктурированных композиционных материалов на основе металлической матрицы (железо, алюминий) нанонитями TiC в качестве дисперсной фазы. Рассмотрен комбинированный метод получения композиционных материалов на основе металла, включающий процессы порошковой металлургии и поверхностного наноструктурирования дисперсной фазы.

Одной из важных задач современного материаловедения является разработка новых композиционных материалов с улучшенными функциональными свойствами [1]. Повышение прочности металлических материалов традиционными методами (увеличением содержания легирующих элементов, улучшением технологий термомеханического упрочнения и т.д.) к настоящему времени исчерпало свои возможности. Значительное увеличение количества легирующих элементов в сплавах (высокоэнтропийные сплавы) приводит к зональной и объёмной ликвации в слитках и, как следствие, к анизотропии свойств полуфабрикатов и деталей из них. Развиваемый в работе подход позволяет избежать данного недостатка (наличие резкой анизотропии физических свойств), т.к. он отсутствует в композитах с объёмным армированием.

Следует отметить, что в настоящее время проблема создания новых материалов (в том числе металлических) должна решаться на основе изучения и конструирования структурной организации вещества. Фактически, при решении задачи создания новых высокоорганизованных твёрдых соединений приходится решать проблему выбора и реализации определённого типа структурной организации, а не просто проблему метода синтеза [2,3].

В работе обоснованы теоретические и экспериментальные основы синтеза нового класса наноструктурированных композиционных наноматериалов на основе металлической матрицы (железо, алюминий) нанонитями TiC и углеродными нанотрубками в качестве дисперсной фазы. Рассмотрен новый комбинированный метод получения композиционных материалов на основе металла, включающий процессы порошковой металлургии и поверхностного наноструктурирования дисперсной фазы. Исследованы следующие этапы синтеза материала: подготовка пористой металлической матрицы; поверхностное структурирование пористой металлической матрицы нанонитями TiC и углеродными нанотрубками; прессование и спекание для получения твёрдых металлических композитных наноструктурированных материалов на основе железа или алюминия с дисперсными наполнителями размером 1-100 нм.

Данный материал может быть представлен в виде материала типа «каркас в каркасе», представляющего металлический каркас, пронизанный каркасом из дисперсной фазы. Исследование функциональных свойств материала показало, что механические свойства композиционных материалов на основе железа или алюминия с дисперсной фазы на основе TiC и углерода, несмотря на наличие остаточной пористости, сопоставимы со свойствами лучших марок стали, содержащих дорогостоящие легирующие вещества и получаемых методом формования.

Создание металломатричного композита с одновременным использованием разнородных наполнителей, т.е. гибридных материалов, позволит получить уникальный конструкционный материал, комбинирующий увеличение эксплуатационных характеристик (прочность на разрыв, вязкость, КТР), присущее нанотрубкам и вискерсам со вкладом наноразмерных частиц в улучшение твёрдости, устойчивости к абразивному износу и ударной вязкости [4]. Это позволит решить проблему создания нового поколения наноструктурированных металлических композиционных материалов с улучшенными механическими свойствами для различных областей техники.

Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта СПбГУ Мероприятие 3 (id: 26520317).

ЛИТЕРАТУРА

1. Matthews, F. and Rowlings, R., Composite Materials. Engineering and Science, Moscow: Tekhnosfera, 2004., 408.
2. Ville Miikkulainen, Markku Leskela, Mikko Ritala and Riikka L. Puurunen, Journal of applied physics 113, (2013), 021301.
3. Zemtsova, E.G., Monin, A.V., Smirnov, V.M., Semenov, B.N., Morozov, N.F. , Synthesis of ceramic composites using three-dimensional nanostructuring (reinforcement) of alumina matrix with TiN and SiC nanostructures and study of their mechanical properties, Physical Mesomechanics, (2017) Vol. 20, Issue 4, Pages 438-446.
4. J.J. Rino, D. Chandramohan, K.S. Sucitharan, V.D. Jebin An overview on development of aluminium metal matrix composites with hybrid reinforcement IJSR India Online ISSN (2012), pp. 2319-7064.

Сведения об авторах:
Земцова Елена Георгиевна – доцент Института химии СПбГУ, к.х.н.,
e-mail: ezimtsova@yandex.ru
Морозов Павел Евгеньевич – зав. учебной лаборатории СПбГУ, к.х.н.,
Арбенин Андрей Юрьевич – старший научный сотрудник СПбГУ, к.х.н.
Семёнов Борис Николаевич – доцент СПбГУ, к.ф.-м.н., доцент,
Морозов Никита Фёдорович – профессор СПбГУ, д.ф.-м.н., академик,
Владимир Михайлович Смирнов – профессор Института химии СПбГУ д.х.н., профессор.
Россия, г. Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский государственный университет (СПбГУ),
e-mail: ezimtsova@yandex.ru

О КОНТАКТЕ РЕГУЛЯРНОЙ СИСТЕМЫ ШТАМПОВ И ОСНОВАНИЯ С МНОГОСЛОЙНЫМ НЕОДНОРОДНЫМ ПОКРЫТИЕМ

Казаков К.Е., Курдина С.П., Саакян А.В.

В работе представлено исследование плоских контактных задач для регулярной системы штампов и вязкоупругих оснований с упругими покрытиями, свойства которых зависят от продольной координаты, что может быть обусловлено, в том числе, процессом их изготовления. Очевидно, что такие неоднородности могут описываться как быстро изменяющимися, так и разрывными функциями. Представлены различные варианты возможной постановки задачи. Получена система разрешающих интегральных уравнений и дополнительных условий, приведённая в дальнейшем к одному операторному уравнению с тензорным ядром и двум дополнительным условиям. Аналитическое решение задач получено на основании обобщённого проекционного метода, причём, в выражениях для контактных напряжений функция, связанная с неоднородностью слоёв выделена в явном виде, что позволяет проводить расчёты для покрытий, неоднородности слоёв которых описываются сложными функциями. Также получены выражения для остальных характеристик.

В предыдущих работах рассматривались задачи множественного контакта для тел с однослойными покрытиями [1–4]. Настоящая работа, посвящённая построению решения для оснований с многослойными тонкими покрытиями, является развитием этих работ.

Однородный вязкоупругий стареющий слой толщины H с многослойным упругим покрытием лежит на подстилающем недеформируемом основании. Все слои покрытия имеют различную толщину h_k ($k = 1, 2, ..., N$, где N – количество слоёв покрытия) и обладают продольной неоднородностью, то есть их упругие характеристики меняются от точки к точке поверхности, но постоянны по глубине. Рассматривается случай, когда неоднородности описываются функциями, период которых равен Δa.

В некоторый момент времени τ_0 в поверхность такого слоя начинает вдавливаться регулярная система одинаковых плоских жёстких штампов шириной $\bar{a}$ силами $P_i(t)$ с эксцентриситетами приложения $e_i(t)$ ($i = 1,2,...,n$, где n – количество штампов). Расстояние между осями соседних штампов равно Δa. Области контакта $\bar{a} = b_i - a_i$ со временем не меняются и они значительно больше суммарной толщины покрытия. Здесь a_i – левая координата i-го штампа, b_i – его правая координата. Предполагается также, что жёсткости слоёв покрытия меньше жёсткости нижнего слоя, или же они одного порядка. Рассматривается случай плоской деформации.

Заменив штампы некоторыми нормальными распределёнными нагрузками $q_i(x,t)$, действующими на тех же участках, где и штампы, и приравняв вертикальные перемещения [5], вызванные этими нагрузками, перемещениям штампов, получим ($i = 1,2,...,n$, $x \in [a_i,b_i]$)

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{q_i(x,t)h_k}{R_k(x)} + \frac{2(1-\nu_1^2)}{\pi} \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{I}-\mathbf{V})\mathbf{F}_j \frac{q_j(x,t)}{E_2(t-\tau_2)} = \delta_i(t) + \alpha_i(t)x - g_i(x), \qquad (1)$$

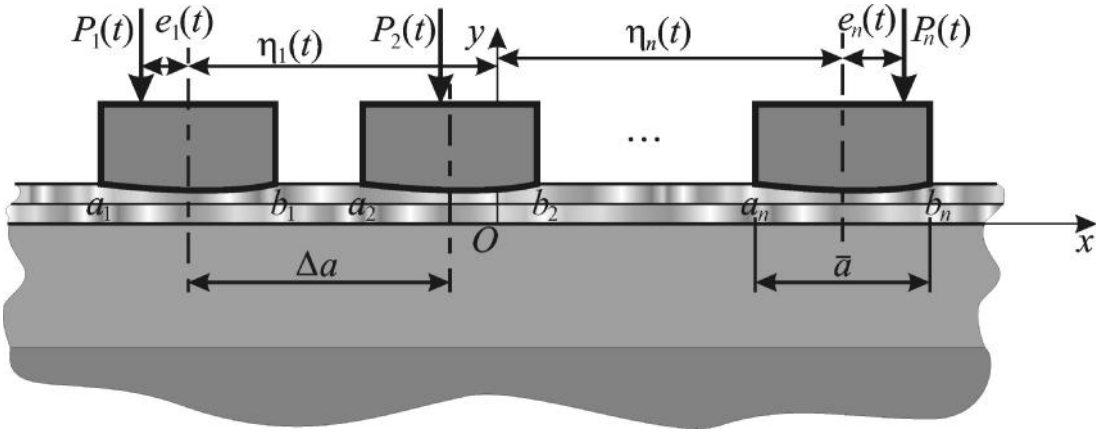
где $R_k(x)$ – функция, зависящая от упругих характеристик k-го слоя покрытия и условий соединения слоёв, которую иногда называют контактной жёсткостью, причём, в случае идеального контакта между k-м и $(k-1)$-м слоями (либо между первым слоем покрытия и нижним толстым слоем при $k = 1$)

$$R_k(x) = \frac{E_k(x)[1-\nu_k(x)]}{[1+\nu_k(x)][1-2\nu_k(x)]},$$

а в случае гладкого

$$R_k(x) = \frac{E_k(x)}{1-\nu_k^2(x)},$$

$\nu_k(x)$, $E_k(x)$ – коэффициент Пуассона и модуль Юнга k-го слоя покрытия, ν_1, $E_1(t-\tau_1)$ – коэффициент Пуассона и модуль упругомгновенной деформации нижнего слоя (τ_1 – момент изготовления нижнего слоя); $\delta_i(t)$ – осадка i-го штампа, $\alpha_i(t)$ – угол его поворота, $g_i(x)$ – его форма; $\mathbf{I}$ – тождественный оператор, $\mathbf{V}$ – интегральный оператор Вольтерра с ядром ползучести при растяжении $K(t,\tau)$, $\mathbf{F}_i$ – интегральные операторы Фредгольма с ядром плоской контактной



задачи $k_{\text{pl}}(s)$ [6], зависящие от условий соединения нижнего слоя и недеформируемого основания, $\eta_i = (a_i + b_i)/2$ — срединная точка i-го штампа.

Условия равновесия штампов на основании описываются уравнениями

$$\int_{a_i}^{b_i} q_i(\xi,t)d\xi = P_i(t), \quad \int_{a_i}^{b_i} q_i(\xi,t)(\xi-\eta_i)d\xi = P_i(t)e_i(t), \quad i = 1,2,\ldots,n. \tag{2}$$

Сделав в (1) и (2) замену переменных по формулам

$$x^* = \frac{2(x-\eta_i)}{\bar{a}}, \quad \xi^* = \frac{2(\xi-\eta_j)}{\bar{a}}, \quad t^* = \frac{t}{\tau_0}, \quad \tau^*_{\text{lower}} = \frac{\tau_{\text{lower}}}{\tau_0}, \quad \lambda = \frac{2H}{\bar{a}}, \quad \delta^{i*}(t^*) = \frac{2\delta_i(t)}{\bar{a}},$$

$$\alpha^{i*}(t^*) = \alpha_i(t), \quad g^{*i}(x^*) \equiv g^*(x) = \frac{2g_i(x)}{\bar{a}}, \quad c^*(t^*) = \frac{E_1(t-\tau_1)}{E_0},$$

$$m^*(x^*) = \frac{E_0}{(1-\nu_2^2)\bar{a}}\sum_{k=1}^{N}\frac{h_k}{R_k(x)}, \quad q^{i*}(x^*,t^*) = \frac{2(1-\nu_2^2)q_i(x,t)}{E_1(t-\tau_1)},$$

$$P^{i*}(t^*) = \frac{4P_i(t)(1-\nu_1^2)}{E_1(t-\tau_1)\bar{a}}, \quad M^{i*}(t^*) = \frac{8e_i(t)P_i(t)(1-\nu_1^2)}{E_1(t-\tau_1)\bar{a}^2},$$

$$\mathbf{F}^{ij*}f(x^*) = \int_{-1}^{1} k^{ij}(x^*,\xi^*)f(\xi^*)d\xi^*, \quad k^{ij}(x^*,\xi^*) = \frac{1}{\pi}k_{\text{pl}}\left(\frac{x-\xi}{H}\right),$$

$$\mathbf{V}^*f(t^*) = \int_1^{t^*} K^*(t^*,\tau^*)f(\tau^*)d\tau^*, K^*(t^*,\tau^*) = K(t-\tau_1,\tau-\tau_1)\tau_0,$$

и опустив в окончательных формулах звездочки, получим систему интегральных уравнений ($x\in[-1,1]$)

$$\begin{gathered} c(t)m(x)\mathbf{q}(x,t) + (\mathbf{I}-\mathbf{V})\mathbf{G}\mathbf{q}(x,t) = \boldsymbol{\delta}(t) + \boldsymbol{\alpha}(t)x - \mathbf{g}(x), \\ \int_{-1}^{1}\mathbf{q}(\xi,t)\,d\xi = \mathbf{P}(t), \quad \int_{-1}^{1}\xi\mathbf{q}(\xi,t)\,d\xi = \mathbf{M}(t), \quad x\in[-1,1], \quad t\ge 1, \end{gathered} \tag{3}$$

где вектор-функции и матричные функции определяются из соотношений $\mathbf{q}(x,t) = q^i(x,t)\mathbf{i}^i$, $\mathbf{P}(t) = P^i(t)\mathbf{i}^i$, $\mathbf{M}(t) = M^i(t)\mathbf{i}^i$, $\boldsymbol{\delta}(t) = \delta^i(t)\mathbf{i}^i$, $\boldsymbol{\alpha}(t) = \alpha^i(t)\mathbf{i}^i$, $\mathbf{g}(x) = g^i(x)\mathbf{i}^i$

$$\mathbf{k}(x,\xi) = k^{ij}(x,\xi)\mathbf{i}^i\mathbf{i}^j, \quad \mathbf{G}\mathbf{f}(x) = \int_{-1}^{1}\mathbf{k}(x,\xi)\cdot\mathbf{f}(\xi)d\xi.$$

Легко видеть, что на каждом штампе можно задать один из четырёх типов условий: осадку и угол поворота, вдавливающую силу и эксцентриситет её приложения, осадку и момент приложения нагрузки, вдавливающую силу и угол поворота штампа. Разумеется, на каждом штампе возможен свой набор условий. Очевидно, что тогда существует всего 15 возможных вариантов постановки задачи. В данной работе рассмотрим лишь решение для случая, когда на всех штампах заданы силы и эксцентриситеты их приложения (квазистатические условия). Решения для остальных вариантов строятся аналогично.

Можно заметить, что задача о действии системы регулярных штампов на основании с поверхностно неоднородным покрытием приводится к абсолютно таким же уравнениям [4]. Следовательно, и решения этих двух задач будут иметь одинаковый вид. Например, для случая, когда заданы все силы и моменты, а осадки и углы поворота штампов неизвестны, решение, построенное в [4] при помощи обобщённого проекционного метода [7], имеет следующий вид:

$$\mathbf{q}(x,t) = \frac{1}{m(x)}\left[z_0^i(t)\mathbf{p}_0^{i*}(x) + z_1^i(t)\mathbf{p}_1^{i*}(x) + \sum_{k=2}^{\infty} z_k(t)\mathbf{\Phi}_k(x) \right],$$

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \sqrt{\frac{J_0}{J_0 J_2 - J_1^2}}\left\{ g_1^i + c(t)z_1^i(t) + (\mathbf{I}-\mathbf{V})\left[K_{10}^{ij} z_0^j(t) + K_{11}^{ij} z_1^j(t) + \sum_{k=2}^{\infty} K_{1k}^i z_k(t) \right]\right\}\mathbf{i}^i, \qquad (4)$$

$$\boldsymbol{\delta}(t) = \sqrt{\frac{1}{J_0}}\left\{ g_0^i + c(t)z_0^i(t) + (\mathbf{I}-\mathbf{V})\left[K_{00}^{ij} z_0^j(t) + K_{01}^{ij} z_1^j(t) + \sum_{k=2}^{\infty} K_{0k}^i z_k(t) \right]\right\}\mathbf{i}^i - \frac{J_1}{J_0}\boldsymbol{\alpha}(t),$$

где (i = 1,2,...,n, k = 2,3,4,..., l = 0,1)

$$z_0^i(t) = \frac{P^i(t)}{\sqrt{J_0}}, \quad z_1^i(t) = \frac{J_0 M^i(t) - J_1 P^i(t)}{\sqrt{J_0(J_0 J_2 - J_1^2)}}, \quad \mathbf{\Phi}_k(x) = \sum_{m=2}^{\infty} \psi_{km}^i \mathbf{p}_m^{i*}(x),$$

$$z_k(t) = -(\mathbf{I}+\mathbf{W}_k)\frac{(\mathbf{I}-\mathbf{V})[K_{0k}^i z_0^i(t) + K_{1k}^i z_1^i(t)] - g_k}{c(t)+\gamma_k}, \quad \mathbf{W}_k f(t) = \int_1^t R_k(t,\tau) f(\tau) d\tau,$$

$$g_l^i = \int_{-1}^{1} \frac{\mathbf{g}(\xi)\cdot\mathbf{p}_l^{i*}(\xi)d\xi}{m(\xi)}, \quad g_k = \int_{-1}^{1} \frac{\mathbf{g}(\xi)\cdot\mathbf{\Phi}_k(\xi)d\xi}{m(\xi)}, \quad K_{lk}^i = \sum_{m=2}^{\infty} K_{lm}^{ij}\psi_{km}^j,$$

многочлены $\mathbf{p}_m^{i*}(x) = p_m^*(x)\mathbf{i}^i$ (m = 2,3,4,..., i = 1,2,...,n) и значения постоянных J_0, J_1, J_2 определяются соотношениями

$$J_k = \int_{-1}^{1} \frac{\xi^k d\xi}{m(\xi)}, \quad d_{-1} = 1, \quad d_m = \begin{vmatrix} J_0 & \cdots & J_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ J_m & \cdots & J_{2m} \end{vmatrix}, \quad p_m^*(x) = \frac{1}{\sqrt{d_{m-1}d_m}} \begin{vmatrix} J_0 & J_1 & \cdots & J_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{m-1} & J_m & \cdots & J_{2m-1} \\ 1 & x & \cdots & x^m \end{vmatrix},$$

коэффициенты ψ_{km}^i и γ_k (k,m = 2,3,4,..., i = 1,2,...,n) находятся из решения системы уравнений

$$\sum_{l=2}^{\infty} K_{ml}^{ij}\psi_{kl}^j = \gamma_k \psi_{km}^i,$$

коэффициенты K_{ml}^{ij} (k,m = 2,3,4,..., i,j = 1,2,...,n) определяются из выражения

$$K_{ml}^{ij} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\mathbf{p}_m^{i*}(\xi)\cdot\mathbf{k}(x,\xi)\mathbf{p}_l^{j*}(\xi)}{m(x)m(\xi)} dx d\xi = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{p_m^*(\xi)k^{ij}(x,\xi)p_l^*(\xi)}{m(x)m(\xi)} dx d\xi,$$

а ядра $R_k(t,\tau)$ (k = 2,3,4,...) являются резольвентами ядер $\gamma_k K(t,\tau)/[c(t) + \gamma_k]$.

Следует отметить, что в выражении для контактных давлений отдельным сомножителем выделена функция $m(x)$, что позволяет производить вычисления в случаях, когда неоднородности слоёв покрытия описываются быстро изменяющимися и даже разрывными функциями.

Таким образом, поставлена и решена плоская задача о контакте между вязкоупругим стареющим основанием с поверхностно неоднородным многослойным упругим покрытием и конечной системой одинаковых жёстких плоских штампов, расположенных на одном и том же расстоянии друг от друга (одно из обобщений периодической задачи). Решение задач получено в аналитическом виде, причём, в выражениях для контактных напряжений функция, связанная с неоднородностями слоёв покрытия, выделена в явном виде. Это позволяет проводить расчёты для покрытий, неоднородности которых описываются быстро изменяющимися функциями.

Исследование выполнено в рамках государственного задания (номер госрегистрации АААА-А17-117021310381-8) при частичной поддержке РФФИ (проект № 18-51-05012-Арм_а) и ГКН МОН РА (проект №18RF061).

ЛИТЕРАТУРА

1. Kazakov K.E., Kurdina S.P. Indentation of the regular system of punches into the foundation with routh coating // Mechanics for Materials and Technologies / Ed. by H. Altenbach, R.V. Goldstein, E. Murashkin. Advanced Structured Materials. Vol. 46. Springer. 2017. P. 297–308.
2. Казаков К.Е. О вдавливании системы жёстких штампов со сложной формой в основание с покрытием // Изв. РАН. Механика твёрдого тела. 2017. №5. С. 5–11. = Kazakov K.E. On indentation of a system of irregularly shaped rigid punches into a coated foundation // Mechanics of Solids. Vol. 52. No. 5. P.473–478.
3. Kazakov K.E., Kurdina S.P. Contact interaction between a layered foundation and a system of annular punches with complex base shapes // Journal of Physics: Conference Series. 2018. Vol. 991. 012040.
4. Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В. Контактные задачи теории ползучести. Ереван: Изд-во НАН РА, 1999. 320 с.
5. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488 с.
6. Kazakov K.E., Kurdina S.P., Manzhirov A.V. Contact interaction between surface inhomogeneous foundations and systems of rigid punches // Procedia IUTAM. 2017. V. 23. P. 201–209.
7. Манжиров А.В. Смешанное интегральное уравнение механики и обобщённый проекционный метод его решения // Доклады РАН. 2016. Т.470. № 4. С. 401–405. = Manzhirov A.V. A mixed integral equation of mechanics and a generalized projection method of its solution // Doklady Physics. 2016. V.61. No.10. P.489–493.

Информация об авторах:

Казаков Кирилл Евгеньевич – кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник лаборатории моделирования в механике деформируемого твердого тела Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН.
E-mail: kazakov-ke@yandex.ru

Курдина Светлана Павловна – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры прикладной математики Московского государственного технического университета имени Н.Э. Баумана.
E-mail: svetlana-ka@yandex.ru

Саакян Аветик Вараздатович – доктор физико-математических наук, заместитель директора Института механики НАН РА.
E-mail: avsah@mechins.sci.am

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГОЙ ПОЛОСЫ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ УПРУГИХ КОНЕЧНЫХ НАКЛАДОК ПОСРЕДСТВОМ ЛИПКИХ СДВИГОВЫХ СЛОЁВ

Керопян А.В.

Рассматривается задача для упругой бесконечной полосы, которая на конечных отрезках вдоль своей свободной границы усилена произвольным конечным числом накладок (стрингеров) конечной длины с различными модулями упругости и малыми постоянными толщинами. Контактное взаимодействие между полосой и накладками во всех участках их скрепления осуществляются посредством одинаковых, тонких липких слоёв с другими физико-механическими и геометрическими характеристиками. В работе задача определения закона распределения неизвестных напряжений, действующих между полосой и накладок, сведена к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода с конечным числом неизвестных функций, определённых на различных конечных интервалах, которая в определённой области изменения характерного параметра задачи в банаховом пространстве B можно решать методом последовательных приближений. Рассмотрены некоторые частные случаи и выяснен характер и поведение неизвестных касательных напряжений, действующих между полосой и накладками.

Контактная задача для упругой полуплоскости с конечным числом накладок конечных длин посредством липких слоёв рассмотрена в работе [1]. В настоящей работе рассматривается задача для упругой полосы, которая на конечных отрезках вдоль своей свободной границы усилена произвольным конечным числом упругих конечных накладок с различными модулями упругости и малыми постоянными толщинами. Контактное взаимодействие между полосой и накладками осуществляются посредством одинаковых, тонких липких слоёв с другими физико-механическими и геометрическими характеристиками.

Пусть упругая бесконечная полоса (плоская деформация, модуль упругости E, коэффициент Пуассона ν и толщина H) жёстко соединена с недеформируемым основанием гранью $y=-H$ и на конечных отрезках $\left[a_j,b_j\right]$ $\left(b_j>a_j,\ j=\overline{1,n};\ b_j<a_{j+1},\ j=\overline{1,n-1}\right)$ своей границы $y=0$ (xOy – плоскость деформации) усилена конечным числом конечных накладок (стрингеров) малых толщин $h_j\left(h_j<<b_j-a_j;\ j=\overline{1,n}\right)$, модуль упругости которых при $x\in\left[a_j,b_j\right]$ $\left(j=\overline{1,n}\right)$ равен E_j $\left(j=\overline{1,n}\right)$, соответственно. Контактное взаимодействие между полосой и накладками во всех участках их скрепления осуществляется посредством одинаковых, тонких липких слоёв с модулем упругости E_k, коэффициентом Пуассона $\neg_k$ и малой толщиной h_k. Задача заключается в определении закона распределения неизвестных напряжений, действующих между полосой и накладками, когда вдоль оси накладок в точках $x=b_j$, $j=\overline{1,n}$ приложены сосредоточенные силы $P_j\left(j=\overline{1,n}\right)$, которые направлены вдоль оси Ox в одну сторону.

Для накладок (стрингеров) принимается модель одномерного упругого континуума [3], а для липких слоёв – условия чистого сдвига [4]. При таких предположениях полагается, что между полосой и накладками действуют только касательные напряжения [1,2,4].

Имея в виду вышесказанное, запишем горизонтальные перемещения $u\left(x,0\right)$ граничных точек упругой бесконечной полосы, когда на конечных отрезках $\left[a_j,b_j\right]\left(j=\overline{1,n}\right)$ её свободной границы $y=0$ действуют касательные силы интенсивности $\tau_j\left(x\right)\left(j=\overline{1,n}\right)$, соответственно, в виде [2]:

$$u\left(x,0\right)=\sum_{i=1}^{n}\int_{a_i}^{b_i}K\left(\left|x-s\right|\right)\tau_i\left(s\right)ds, \tag{1}$$

где

$$K\left(\left|x\right|\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}K_n\left(\sigma\right)e^{-i\sigma x}d\sigma, \tag{2}$$

$$K_n(\sigma)=\frac{(2\chi+1)\left[(\chi+1)\operatorname{sh}2H|\sigma|+2\chi H|\sigma|\right]}{2\mu|\sigma|\left[2\chi(\chi+1)\operatorname{ch}2H\sigma+\chi^2\left(4H^2\sigma^2+1\right)+(\chi+1)^2\right]},\ \chi=\frac{\lambda+\mu}{2\mu},$$

λ,μ – упругие постоянные Ламе материала полосы.

Теперь полагая, что каждый дифференциальный элемент липкого слоя находится в условиях чистого сдвига [1,2,4], будем иметь следующие условия:

$$u^{(j)}(x)-u(x,0)=k^2{}_j(x),\qquad a_j\le x\le b_j,\quad j=\overline{1,n},\tag{3}$$

поскольку

$$u^{(j)}(x)-u(x,0)=h_k\gamma_k^{(j)}(x),\ \ \tau_j(x)=G_k\gamma_k^{(j)}(x),\qquad a_j\le x\le b_j,\quad j=\overline{1,n},$$

где $k=h_k/G_k$, $G_k=E_k/2(1+\nu_k)$, G_k- модуль сдвига материала липких слоёв, $u^{(j)}(x)-$ горизонтальные перемещения точек накладок на участках $\left[a_j,b_j\right]$ $\left(j=\overline{1,n}\right)$, соответственно, $\tau_j(x)-$касательные напряжения в липких слоях, а $\gamma_k^{(j)}(x)-$деформация сдвига в липких слоях на участках $\left[a_j,b_j\right]$ $\left(j=\overline{1,n}\right)$, соответственно.

Далее, согласно вышесказанному и предположениям [1-4], запишем дифференциальные уравнения равновесия накладок, находящихся на отрезках $\left[a_j,b_j\right]$ $\left(j=\overline{1,n}\right)$, в виде:

$$\frac{d^2u^{(j)}}{dx^2}=\frac{\tau_j(x)}{E_jh_j},\qquad a_j\le x\le b_j,\quad j=\overline{1,n},\tag{4}$$

которые с учётом (3) представим в виде:

$$\frac{d^2u^{(j)}}{dx^2}-\gamma_j^2u^{(j)}(x)=-\gamma_j^2u(x,0),\qquad a_j\le x\le b_j,\quad j=\overline{1,n},\tag{5}$$

где имеют место и граничные условия:

$$\left.\frac{du^{(j)}}{dx}\right|_{x=a_j}=0,\qquad \left.\frac{du^{(j)}}{dx}\right|_{x=b_j}=\frac{P_j}{E_jh_j},\qquad j=\overline{1,n}.\tag{6}$$

Здесь $\gamma_j^2=1/kE_jh_j$, $j=\overline{1,n}$.

Далее, не останавливаясь на подробностях, отметим, что в силу (3), после решения граничных задач (5),(6), получим следующие уравнения:

$$k\tau_j(x)+u(x,0)=\gamma_j^2\int_{a_j}^{b_j}G_j(x,s)u(s,0)ds+u_0^{(j)}(x),\ \ a_j\le x\le b_j,\ \ j=\overline{1,n},\tag{7}$$

которые на основании (1) можно представить в виде:

$$\begin{aligned}&\tau_j(x)+\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}\int_{a_i}^{b_i}K(|x-s|)\tau_i(s)ds=\\&=\frac{\gamma_j^2}{k}\sum_{i=1}^{n}\int_{a_j}^{b_j}G_j(x,s)\left[\int_{a_i}^{b_i}K(|s-t|)\tau_i(t)dt\right]ds+\frac{u_0^{(j)}(x)}{k},\ \ a_j\le x\le b_j,\ j=\overline{1,n},\end{aligned}\tag{8}$$

где $u_0^{(j)}(x)=\dfrac{P_j\operatorname{ch}\left[\gamma_j(x-a_j)\right]}{\gamma_jE_jh_j\operatorname{sh}\left[\gamma_j(b_j-a_j)\right]}$, $j=\overline{1,n}$, $G_j(x,s)=G_j(s,x)$ $\left(j=\overline{1,n}\right)-$ функции Грина [5] и определяются в виде:

$$G_j(x,s)=\frac{1}{\gamma_j\operatorname{sh}\left[\gamma_j(b_j-a_j)\right]}\begin{cases}\operatorname{ch}\gamma_j(x-b_j)\operatorname{ch}\gamma_j(s-a_j), & x>s,\\ \operatorname{ch}\gamma_j(x-a_j)\operatorname{ch}\gamma_j(s-b_j), & x<s,\quad j=\overline{1,n}.\end{cases}$$

Не останавливаясь на подробностях, для дальнейшего отметим, что имеют место равенства:

$$\int_{a_j}^{b_j} G_j(x,s)\cos\left[\frac{m\pi(s-a_j)}{b_j-a_j}\right]ds=\frac{(b_j-a_j)^2}{(b_j-a_j)^2\gamma_j^2+m^2\pi^2}\cos\left[\frac{m\pi(x-a_j)}{b_j-a_j}\right],\ m=0,1,2,...,j=\overline{1,n}, \tag{9}$$

где функции $\cos\left[\frac{m\pi(x-a_j)}{b_j-a_j}\right]$ $(m=0,1,2,...)$ $\left(j=\overline{1,n}\right)$ образуют полную ортогональную систему в пространствах $L_2(a_j,b_j)$ $\left(j=\overline{1,n}\right)$, соответственно.

Далее, согласно (2) $K(|x|)$, можно представить и так:

$$K(|x|)=\frac{A_1}{\pi}\left(\ln\frac{1}{|A_1x|}-C\right)+\frac{A_1}{\pi}R(x), \tag{10}$$

где $R(x)-$регулярная часть ядра $K(|x|)$ и имеет вид:

$$R(x)=\pi\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{(A_1x)^{2n}}{\pi(2n)!}\left(\ln\frac{1}{|A_1x|}+1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2n}-C\right)-\frac{|A_1x|^{2n-1}}{2(2n-1)!}\right]+$$

$$+\frac{1}{2A_1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left[(A_1+|\sigma|)K_n(\sigma)-A_1\right]e^{-i\sigma x}d\sigma}{A_1+|\sigma|},$$

поскольку

$$\frac{1}{A_1}K_n(\sigma)=O\left(|\sigma|^{-1}\right),\quad |\sigma|\to\infty,\quad A_1=\frac{2\chi+1}{4\chi\mu}=\frac{2(1-\nu^2)}{E}\ , \tag{11}$$

$C-$ постоянная Эйлера.

Теперь, имея в виду (10), систему (8) будем иметь в виде:

$$\tau_j(x)+\frac{A_1}{\pi k}\sum_{i=1}^{n}\int_{a_i}^{b_i}\left(\ln\frac{1}{A_1|x-s|}-C\right)\tau_i(s)ds+\frac{A_1}{\pi k}\sum_{i=1}^{n}\int_{a_i}^{b_i}R(x-s)\tau_i(s)ds=$$

$$=\frac{\gamma_j^2A_1}{\pi k}\sum_{i=1}^{n}\int_{a_j}^{b_j}G_j(x,s)\left[\int_{a_i}^{b_i}\left(\ln\frac{1}{A_1|s-t|}-C\right)\tau_i(t)dt\right]ds+ \tag{12}$$

$$+\frac{\gamma_j^2A_1}{\pi k}\sum_{i=1}^{n}\int_{a_j}^{b_j}G_j(x,s)\left[\int_{a_i}^{b_i}R(s-t)\tau_i(t)dt\right]ds+\frac{u_0^{(j)}(x)}{k},\quad a_j\le x\le b_j,\ j=\overline{1,n}.$$

Далее, после замены переменных x на ax, s на as, t на at, где $a>0-$ координата одной из крайних точек накладок, систему интегральных уравнений (12) окончательно можно представить в виде:

$$\psi_j(x)+\delta\sum_{i=1}^{n}\int_{\alpha_i}^{\beta_i}L_j(x,t)\psi_i(t)dt=f_0^{(j)}(x),\quad \alpha_j\le x\le\beta_j,\ j=\overline{1,n}. \tag{13}$$

где

$$L_j(x,t)=\ln\frac{1}{|x-t|}+R_*(x-t)-a\gamma_j^2\int_{\alpha_j}^{\beta_j}G_j(ax,as)\left[\ln\frac{1}{|s-t|}+R_*(s-t)\right]ds,\quad j=\overline{1,n},$$

$$f_0^{(j)}(x)=\frac{au_0^{(j)}(ax)}{k}=\frac{P_ja\gamma_j\,ch\left[a\gamma_j(x-\alpha_j)\right]}{\mathrm{sh}\left[a\gamma_j(\beta_j-\alpha_j)\right]},\quad j=\overline{1,n}. \tag{14}$$

$\delta = aA_1 / \pi k,\ \alpha_j = a_j / a,\ \beta_j = b_j / a,\ \psi_j(x) = a\tau_j(ax)\ \left(j = \overline{1,n}\right),\ R_*(x) = R(ax).$

$R_*(x)$ – суммируемая с квадратом функция на отрезках $\left[\alpha_j, \beta_j\right]\ \left(j = \overline{1,n}\right)$.

Отметим, что при получении системы (13) был изменён порядок интегрирования, достоверность которого следует из теоремы Фубини [5], а также согласно (9) равенства:

$$\int_{\alpha_j}^{\beta_j} G_j(ax, as)\,ds = \frac{1}{a\gamma_j^2}, \quad j = \overline{1,n}. \tag{15}$$

Далее, рассматриваются некоторые частные случаи, которые непосредственно можно получить из системы (13).

Таким образом, решение задачи сведено к решению системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода (13), ядра которых квадратично интегрируемы по двум переменным и с правыми частями которых являются решения задачи в случае жёсткого основания. Из системы (13) легко заметить, что в концевых точках накладок $x = \alpha_j$, $x = \beta_j$ $\left(j = \overline{1,n}\right)$, неизвестные касательные напряжения $\psi_j(x)$ $\left(j = \overline{1,n}\right)$ принимают конечные значения.

Далее, систему интегральных уравнений (13) запишем в виде:

$$\varphi + T\varphi = g_0, \tag{16}$$

где φ и g_0 – столбцы, соответственно, с элементами ψ_j и $f_0^{(j)}$, $j = \overline{1,n}$, а T – матрица с элементами δk_{ji}, при этом,

$$k_{ji}\,\psi_i = \int_{\alpha_i}^{\beta_i} L_j(x,t)\,\psi_i(t)\,dt \quad \left(j; i = \overline{1,n}\right). \tag{17}$$

Теперь рассмотрим операторное уравнение (16) в банаховом пространстве B вектор-функций $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$, где $X_j \in L_2\left(\alpha_j, \beta_j\right)$ $\left(j = \overline{1,n}\right)$ с нормой $\|X\| = \max\left\{\|X_1\|_{L_2(\alpha_1,\beta_1)}, \|X_2\|_{L_2(\alpha_2,\beta_2)}, ..., \|X_n\|_{L_2(\alpha_n,\beta_n)}\right\}$. Здесь $L_2\left(\alpha_j, \beta_j\right)$ – пространство квадратично суммируемых функций, определённых на интервале $\left(\alpha_j, \beta_j\right)$.

Очевидно, что оператор T действует в пространстве B и является фредгольмовым. Тогда, операторное уравнение (16) в пространстве B можно решать методом последовательных приближений, если $\|T\| < 1$, причём,

$$\|T\| = \max\left\{\delta\left(\|k_{11}\| + ... + \|k_{1n}\|\right),\ \delta\left(\|k_{21}\| + ... + \|k_{2n}\|\right), ..., \delta\left(\|k_{n1}\| + ... + \|k_{nn}\|\right)\right\}.$$

Следовательно, условие $\|T\| < 1$ будет выполняться, если

$$\delta\left(\|k_{11}\| + ... + \|k_{1n}\|\right) < 1,\ \delta\left(\|k_{21}\| + ... + \|k_{2n}\|\right) < 1, ..., \delta\left(\|k_{n1}\| + ... + \|k_{nn}\|\right) < 1. \tag{18}$$

Далее, определяются те значения параметра δ, при которых будут удовлетворяться условия (18). Не останавливаясь на подробностях, отметим, что имеют место следующие оценки:

$$\left\|k_{ji}\right\| \le e_{ji},\ e_{ji} = \left(\int_{\alpha_i}^{\beta_i} \int_{\alpha_j}^{\beta_j} L_j^2\left(x,t\right) dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \quad \left(j; i = \overline{1,n}\right),$$

$$e_{ji} < \frac{l_j}{2} \left(\int_{\alpha_j}^{\beta_j} \int_{\alpha_j}^{\beta_j} \ln^2 \left|x-t\right| dx\, dt \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{l_j}{2} \left(\int_{\alpha_j}^{\beta_j} \int_{\alpha_j}^{\beta_j} R_*^2\left(x-t\right) dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \quad \left(j,i = \overline{1,n}\right), \quad l_j = \beta_j - \alpha_j .$$

Тогда, условия (18) будут выполняться, если:

$$\delta < \left(\sum_{i=1}^{n} e_{ji} \right)^{-1} = e_j, \quad j = \overline{1,n}. \tag{19}$$

Следовательно, условия выполнения (18) получим в виде: $\delta < \min\left(e_1, e_2, ..., e_n\right)$,

где $e_\kappa \left(\kappa = \overline{1,n}\right) -$ положительные числа, меньшие единицы.

Значения касательных напряжений $\psi_j\left(x\right)$ $\left(j = \overline{1,n}\right)$ в концевых точках накладок $x = \alpha_j$, $x = \beta_j$ $\left(j = \overline{1,n}\right)$ получим из системы (13).

ЛИТЕРАТУРА

1. Керопян А.В., Саакян К.П. Передача нагрузок от конечного числа конечных стрингеров к упругой полуплоскости посредством липких сдвиговых слоёв. //Изв. НАН Армении. Механика. 2017. №3. С.39-56.
2. Керопян А.В. Контактная задача для упругой полосы и бесконечной пластины с двумя конечными упругими накладками при наличии сдвиговых прослоек. //Изв. НАН Армении. Механика. 2014. №1. С.22-34.
3. Melan E. Ein Beitrag zur Theorie geschweisster Verbindungen.-Ingeniuer-Archiv, Bd.3, Heft 2, 1932, s.123-129.
4. Lubkin J.L. and Lewis L.C. Adhesive Shear Flow for an Axially Loaded, Finite Stringer Bonded to an Infinite Sheet. -Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, Vol. XXIII, 1970, p. 521-533.
5. Шилов Г.Е. Математический анализ. Специальный курс. М.: Гос. изд. физ. мат. лит., 1961. 442с.

Сведения об авторе:

Керопян Агаси Вачаганович- к.ф.-м.н., доцент, ЕГУ

Адрес: Ереван, А. Манукяна, 1. **Тел.:** (37498) 033 611,

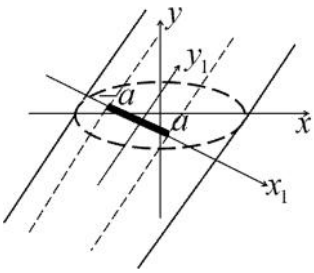
E-mail: agas50@ysu.am

ПЛОСКАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА С ТОНКИМ ЖЁСТКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Кириллова О.И.

Решена задача по определению напряжённого состояния вблизи тонкого жёсткого туннельного включения в бесконечном эллиптическом цилиндре при колебаниях в условиях плоской деформации. Предложен подход, при котором отдельно удовлетворяются условия на включении и на границе цилиндра. Получены приближённые формулы для вычисления коэффициентов интенсивности напряжений и исследовано влияние на их значения частоты колебаний, расположения дефекта, а также установлены резонансные частоты.

Исследование напряжённого состояния в ограниченных телах с включениями является актуальным как для определения условий разрушения тел через оценку коэффициентов интенсивности динамических напряжений возле включения, так и диагностики таких дефектов, исходя из информации об их влиянии на резонансные частоты [1]. Предыдущие результаты в этом направлении относились к неограниченным и полуограниченным телам с дефектами [2-5]. Ситуации, где тела занимают ограниченную область, приводят к усложнению численной реализации, поскольку наиболее часто применяемый метод граничных интегральных уравнений приводит исходную задачу к связанным системам интегральных уравнений и на поверхности дефекта, и на границе тела [6-8]. Далее предложен подход, при котором отдельно удовлетворяются условия на включении и на границе цилиндра.



1. Постановка задачи. Рассматривается бесконечный цилиндр эллиптического сечения с образующими, параллельными оси Oz (Рис.1), находящийся в условиях плоской деформации. В цилиндре содержится тонкое абсолютно жёсткое включение длины $2a$, полностью сцеплённое с цилиндром и не выходящее за границы сечения. Цилиндрическое тело находится под воздействием самоуравновешивающейся нормальной к его поверхности гармонической нагруз Рис.1. . Множитель $e^{-i\omega t}$ далее опущен и рассматриваются только амплитудные значения. При таких условиях цилиндр находится в состоянии плоской деформации, когда определить необходимо радиальное и угловое перемещения u_r, u_φ, удовлетворяющие уравнениям Ламе:

$$\begin{aligned}
&\mu\left(\Delta u_r-\frac{u_r}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\right)+(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\right)+\rho\omega^2u_r=0;\\
&\mu\left(\Delta u_\varphi-\frac{u_\varphi}{r^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}\right)+(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\right)+\rho\omega^2u_\varphi=0.
\end{aligned}\tag{1.1}$$

где λ, μ – коэффициенты Ламе материала цилиндра, ρ – плотность материала.

При действии указанной нагрузки на внешнюю границу цилиндра на ней выполняется равенство:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{xx}\cos(\bar{n},x)+\sigma_{xy}\cos(\bar{n},y)=\mu P(\varphi)\cos(\bar{n},x),\\
&\sigma_{xy}\cos(\bar{n},x)+\sigma_{yy}\cos(\bar{n},y)=\mu P(\varphi)\cos(\bar{n},y),
\end{aligned}\tag{1.2}$$

$\bar{n}$ – вектор нормали к поверхности.

Условия на включении формулируются в связанной с ним локальной системой координат $x_1O_1y_1$, как показано на рис.1. Поскольку включение считается абсолютно жёстким, полностью сцеплённым с цилиндром, то условия имеют вид:

$$u_1(x_1,0)=d_2;\;\; v_1(x_1,0)=d_1+\tilde{\gamma}x_1;\quad d_1,d_2,\tilde{\gamma}=\text{const};x\in[-a,a].\tag{1.3}$$

Также на поверхности включения разрывны касательные напряжения со скачками

$$\sigma_{y_1y_1}(x_1,+0)-\sigma_{y_1y_1}(x_1,-0)=\chi_1(x_1);\quad \sigma_{x_1y_1}(x_1,+0)-\sigma_{x_1y_1}(x_1,-0)=\chi_2(x_1). \tag{1.4}$$

В равенстве (1.3) d_1, d_2 – неизвестные амплитуды перемещений включения вдоль осей Oy, Ox, а $\tilde{\gamma}$ – амплитуда угла вращения вокруг оси Oz. Все они определяются из уравнения движения включения как абсолютно жёсткого тела:

$$-\omega^2 m d_i=\int_{-a}^{a}\chi_i(\eta)\,d\eta;\quad -\frac{4}{3}ma^2\omega^2\tilde{\gamma}=\int_{-a}^{a}\eta\chi_1(\eta)\,d\eta. \tag{1.5}$$

Таким образом, анализ напряжённого состояния рассматриваемого тела с включением сводится к решению дифференциальных уравнений (1.1) с краевыми условиями (1.2)-(1.5).

2. Решение задачи. Вначале в локальной системе координат строится разрывное решение [2] уравнений Ламе со скачками (1.4) на поверхности включения:

$$\begin{aligned} u_1^d(x_1,y_1)&=\int_{-a}^{a}\chi_1(\eta)G_{41}(\eta-x_1,y_1)\,d\eta+\int_{-a}^{a}\chi_2(\eta)G_{42}(\eta-x_1,y_1)\,d\eta,\\ v_1^d(x_1,y_1)&=\int_{-a}^{a}\chi_1(\eta)G_{31}(\eta-x_1,y_1)\,d\eta+\int_{-a}^{a}\chi_2(\eta)G_{32}(\eta-x_1,y_1)\,d\eta, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где

$$G_{31}(\eta-x_1,y_1)=\frac{1}{\mu\kappa_2^2}\left[\left(\kappa_1^2+\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right)r_1-\frac{\partial^2 r_2}{\partial x_1^2}\right];\quad G_{32}(\eta-x_1,y_1)=G_{41}=-\frac{1}{\mu\kappa_2^2}\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial y_1}(r_2-r_1);$$

$$G_{42}(\eta-x_1,y_1)=\frac{1}{\mu\kappa_2^2}\left[-\frac{\partial^2 r_1}{\partial x_1^2}+\left(\kappa_2^2+\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right)r_2\right],\ r_i=r_i(\eta-x,y)=-\frac{i}{4}H_0^{(i)}\left(\kappa_i\sqrt{(\eta-x)^2+y^2}\right).$$

Далее в полярной системе координат перемещения представляются в виде суперпозиции:

$$u_r(r,\varphi)=u_r^d(r,\varphi)+u_r^0(r,\varphi),\quad u_\varphi(r,\varphi)=u_\varphi^d(r,\varphi)+u_\varphi^0(r,\varphi), \tag{2.2}$$

где $u_r^d(r,\varphi)$, $u_\varphi^d(r,\varphi)$ – разрывные решения (2.1) после перехода к полярным координатам, а $u_r^0(r,\varphi)$, $u_\varphi^0(r,\varphi)$ – такие решения уравнений Ламе (1.1), для которых впоследствии выполняются граничные условия (1.2). Эти неизвестные функции представляем через волновые потенциалы

$$u_r^0=\frac{\partial\psi_1}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_2}{\partial\varphi},\quad u_\varphi^0=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_1}{\partial\varphi}-\frac{\partial\psi_2}{\partial r}, \tag{2.3}$$

удовлетворяющие уравнениям Гельмгольца. Они, в свою очередь, разыскиваются в виде линейной комбинации N частных решений уравнения Гельмгольца:

$$\psi_1=r_0^2\sum_{k=1}^{N}A_k g_k^{(1)}(r,\varphi);\quad \psi_2=r_0^2\sum_{k=1}^{N}B_k g_k^{(2)}(r,\varphi) \tag{2.4}$$

$$g_{2m-1}^{(i)}(r,\varphi)=J_{m-1}(\kappa_i r)\cos(m-1)\varphi,\quad g_{2m}^{(i)}(r,\varphi)=J_m(\kappa_i r)\sin m\varphi.$$

Эти частные решения в области сечения образуют полную замкнутую систему функций и являются линейно независимыми [9]. В формулах (2.4) A_k – неизвестные коэффициенты, J_m – цилиндрические функции.

С целью реализации граничных условий на включении (1.3) в представлении (2.2) осуществлён переход в локальную систему координат, связанную с ним:

$$u_1(x_1,y_1)=u_1^d(x_1,y_1)+u_1^0(x_1,y_1),\quad v_1(x_1,y_1)=v_1^d(x_1,y_1)+v_1^0(x_1,y_1). \tag{2.5}$$

Далее подстановка соотношений (2.5) в краевое условие (1.3) приводит к интегральному уравнению относительно скачков напряжений на включении χ_i, $i=1,2$, которое после выделения сингулярной составляющей и введения обозначений

$\varphi_i(\tau)=\chi_i(a\tau)\mu^{-1};\ \eta=a\tau,\ x_1=a\varsigma,\ \kappa_0=\kappa_2 r_0,\ a/r_0=\gamma$
принимает вид:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\varphi_1(\tau)\left[\gamma\frac{1+\xi^2}{2}\ln|\tau-\varsigma|+\gamma F_{31}(\tau-\varsigma)+\frac{\pi}{\bar\rho\bar h\gamma\kappa_0^2}+\frac{3\pi\varsigma\tau}{4\bar\rho\bar h\gamma\kappa_0^2}\right]d\tau=-\left(\sum_{k=1}^{N}A_k d_k+\sum_{k=1}^{N}B_k e_k\right);\\&\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\varphi_2(\tau)\left[\gamma\frac{1+\xi^2}{2}\ln|\tau-\varsigma|+\gamma F_{42}(\tau-\varsigma)+\frac{\pi}{\bar\rho\bar h\gamma\kappa_0^2}\right]d\tau=-\left(\sum_{k=1}^{N}A_k b_k+\sum_{k=1}^{N}B_k c_k\right),\end{aligned}\tag{2.6}$$

где ассимптотика регулярных составляющих
$F_{31}(z)=O\left(z^2\ln z\right),F_{42}(z)=O\left(z^2\ln z\right),z\to 0\,,Q(z)=O(1),z\to 0,$
а функции b_k,c_k,d_k,e_k выражены через производные $g_k^{(i)}(x_1,y_1)$.
Также в (2.6) использованы соотношения, следующие из (1.5):

$$\frac{d_i}{r_0}=-\frac{1}{2\bar\rho\bar h\gamma\kappa_0^2}\int_{-1}^{1}\varphi_i(\tau)d\tau;\quad \tilde\gamma=-\frac{3}{8\bar\rho\bar h\gamma^2\kappa_0^2}\int_{-1}^{1}\tau\varphi_1(\tau)d\tau\,.$$

Вследствие линейности интегральных уравнений (2.6) их решения можно представить через новые неизвестные функции:

$$\varphi_i(\tau)=\sum_{k=1}^{N}A_k\varphi_k^{i1}(\tau)+\sum_{k=1}^{N}B_k\varphi_k^{i2}(\tau);\quad i=1,2,\tag{2.7}$$

после чего (2.6) трансформируется в последовательность $2N$ уравнений относительно функций φ_k^i, $i=1,2$, которые отличаются только правыми частями:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\varphi_k^1(\tau)\left[\gamma\frac{1+\xi^2}{2}\ln|\tau-\varsigma|+\gamma F_{31}(\tau-\varsigma)+\frac{\pi}{\bar\rho\bar h\gamma\kappa_0^2}+\frac{3\pi\varsigma\tau}{4\bar\rho\bar h\gamma\kappa_0^2}\right]d\tau=h_k(\varsigma),\\&\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\varphi_k^2(\tau)\left[\gamma\frac{1+\xi^2}{2}\ln|\tau-\varsigma|+\gamma F_{42}(\tau-\varsigma)+\frac{\pi}{\bar\rho\bar h\gamma\kappa_0^2}\right]d\tau=f_k(\varsigma),\quad k=\overline{1,N},\end{aligned}\tag{2.8}$$

где
$\varphi_k^i=\begin{pmatrix}\varphi_k^{i1}\\ \varphi_k^{i2}\end{pmatrix};\ f_k(\varsigma)=-\begin{pmatrix}b_k(\varsigma)\\ c_k(\varsigma)\end{pmatrix};h_k(\varsigma)=-\begin{pmatrix}d_k(\varsigma)\\ e_k(\varsigma)\end{pmatrix}.$
Решение полученных уравнений (2.8) может быть представлено в виде

$$\varphi_k^i(\tau)=\Psi_k^i(\tau)\left(1-\tau^2\right)^{-1/2},\tag{2.9}$$

где $\Psi_k^i(\tau)-$функция, удовлетворяющая условию Гельдера на $[-1;1]$.
После чего, согласно методу механических квадратур с использованием в качестве точек коллокации корней многочлена Чебышева $U_{n-1}(\varsigma)$, $\varsigma_j=\cos(\pi j/n)$, $j=1,2,...,n$, из интегральных уравнений (2.8) получены системы линейных алгебраических уравнений относительно значений Ψ_{km}^i функций $\Psi_k^i(\tau)$ в узлах интерполяции. Далее эти функции приближаются интерполяционным многочленом:

$$\psi_k^i(\tau)\approx\sum_{m=1}^{n}\psi_{km}^i T_n(\tau)\Big/\Big((\tau-\tau_m)T_n'(\tau_m)\Big),\tag{2.10}$$

где $\psi_{km}=\psi_k(\tau_m)$, $\tau_m=\cos\pi(2m-1)/2n, m=1,...,n-$ корни многочлена Чебышева 1-го рода.
Относительно значений неизвестных функций в узлах интерполяции методом механических квадратур получена система линейных алгебраических уравнений. При этом, для вычисления интеграла с логарифмической особенностью использована квадратурная формула [10].

Неизвестные коэффициенты A_k и B_k из (2.4) определяются путём удовлетворения краевым условиям на границе цилиндра (1.2), реализация которых приведёт к следующим равенствам:

$$\sum_{k=1}^{N} A_k \left(\int_{-1}^{1} \left(\varphi_{1k}^1(\tau) G^1(\tau,\varphi) + \varphi_{2k}^1(\tau) G^2(\tau,\varphi) \right) d\tau + U_k(\varphi) \right) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{N} B_k \left(\int_{-1}^{1} \left(\varphi_{1k}^2(\tau) G^1(\tau,\varphi) + \varphi_{2k}^2(\tau) G^2(\tau,\varphi) \right) d\tau + V_k(\varphi) \right) = lP(\varphi), \qquad (2.11)$$
$$G^1(\tau,\varphi) = \begin{pmatrix} G_1^1(\tau,\varphi) \\ G_2^1(\tau,\varphi) \end{pmatrix}; G^2(\tau,\varphi) = \begin{pmatrix} G_1^2(\tau,\varphi) \\ G_2^2(\tau,\varphi) \end{pmatrix}; U_k(\varphi) = \begin{pmatrix} U_k^1(\varphi) \\ U_k^2(\varphi) \end{pmatrix}; V_k(\varphi) = \begin{pmatrix} V_k^1(\varphi) \\ V_k^2(\varphi) \end{pmatrix}; l = \begin{pmatrix} \cos(\bar{n},x) \\ \cos(\bar{n},y) \end{pmatrix}.$$

Функции $G^i(\tau,\varphi)$, $E^i(\tau,\varphi)$ представляются через значения функции $r_i(\eta - x_1, y_1)$ с (2.1) и её производных на границе сечения, а $V_k(\varphi), U_k(\varphi)$ – через значения на границе производных функций $g_k^{(i)}(r,\varphi)$ из соотношений (2.4). Громоздкость этих выражений не позволяет привести их полностью.

Вычисление интегралов с помощью квадратурных формул Гаусса-Чебышева и использование коллокационного метода в узлах $\sigma_l = 2\pi l/N$, $l = 1,..,N$ позволяют получить из (2.11) систему линейных уравнений относительно неизвестных A_k и B_k.

Как известно, концентрация напряжения в теле около тонких жёстких включений характеризуется коэффициентами интенсивности нормальных и касательных напряжений [11]. После решения систем приближённые значения КИН рассчитываются по формулам:

$$k_i^- = \frac{(-1)^n}{n} \frac{1}{16(1-\nu)} \left(\sum_{k=1}^{N} A_k \Gamma_k^{i1} + \sum_{k=1}^{N} B_k \Gamma_k^{i2} \right), \quad k_i^+ = \frac{1}{n} \frac{1}{16(1-\nu)} \left(\sum_{k=1}^{N} A_k \mathrm{E}_k^{i1} + \sum_{k=1}^{N} B_k \mathrm{E}_k^{i2} \right),$$
$$\Gamma_k^{ij} = \sum_{m=1}^{n} (-1)^m \Psi_{km}^{ij} \operatorname{tg} \frac{\beta_m}{2}, \quad E_k^{ij} = \sum_{m=1}^{n} (-1)^m \Psi_{km}^{ij} \operatorname{ctg} \frac{m}{2}, \; j = 1,2, \quad \gamma_m = \pi(2m-1)/2n.$$

3. Численный анализ и выводы. Рассматривался эллиптический цилиндр с эксцентриситетом $\varepsilon = 0,5$, находящийся под воздействием самоуравновешивающейся нагрузки $P(\varphi) = 1$. Включение располагалось под углом 45° так, что один его конец совпадал с началом координат, а другой приближался к границе сечения с изменением относительной длины включения. Это достигалось изменением параметра $\gamma = a/r_0$ от 0,2 до 0,4628, когда включение выходит на границу. Кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям $\gamma = 0,2;\ 0,4;\ 0,462$. На рис.2 и рис.3 приведены графики зависимости нормальных и касательных КИН от безразмерного волнового числа $©_0$ для конца включения, приближающегося к границе.

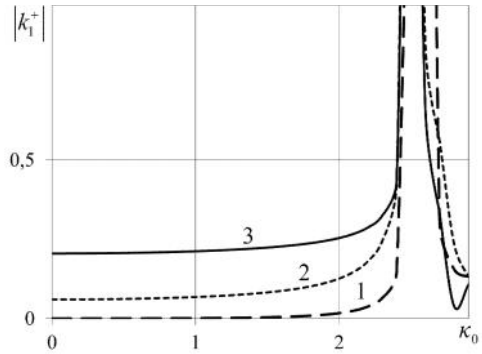


Рис.2

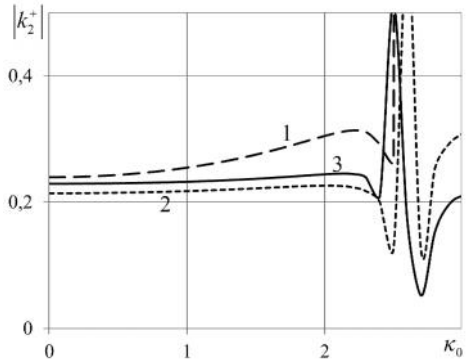


Рис.3

Для нормальных КИН (рис.2) до достижения резонанса с увеличением безразмерной частоты при росте γ можно наблюдать возрастание КИН, причём, при приближении включения к границе значения КИН увеличиваются. Частотное поведение касательных КИН (рис.3) более

сложное. Можно наблюдать, что изменение относительной длины включения и его приближение к границе существенно не влияют на частоту достижения первого резонанса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Nazarchuk Z.T., Skalskyi V.R. Akustiko-emisijne diagnostuvannja elementiv konstruktsij u 3 t.- Kyiv, Naukova dumka, 2009.
2. Попов В.Г., Улановский А.Э. Сравнительный анализ дифракционных полей при прохождении упругих волн через дефекты различной природы //Известия РАН. Механика твердого тела. 1995. № 4. С. 99-109.
3. Ang D.D., Knopoff L. Diffraction of scalar elastic waves by a finite strip // Proc. Math. Sci. USA.- 1964.-V.51, № 4.-P.593-598.
4. Mykhas'kiv V., Zhbadynskyi I., Zhang Ch. Elastodynamic analysis of multiple crack problem in 3-D bi-materials by a BEM // Int. J. Num. Meth. Biomed. Eng. – 2010. – Vol. 26, No. 12. – P. 1934-1946.
5. Попов В.Г. Взаимодействие плоских упругих волн с системами радиальных дефектов// Изв. РАН. Механика твердого тела. 1999. № 4. С.118-129.
6. Chirino F., Domingues J. Dynamic analysis of cracks using boundary element method //Engineering Fracture Mechanics. 1989. V.34. No.5-6. P.1051-1061.
7. Бобылев А.А., Доброва Ю.А. Применение метода граничных элементов к расчёту вынужденных колебаний упругих тел конечных размеров с трещинами // Вестник Харк. нац. университета. 2003. № 590. Сер. "Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления", вып.1. С.49-54.
8. Zhang Ch. A 2D hypersingular time-domain traction BEM for transient elastodynamic crack analysis // Wave Motion. -2002. V.35, No.1. P. 17-40.
9. Векуа И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. М.: ОГИЗ, 1948. 296с.
10. Назарчук З.Т. Численное исследование дифракции волн на цилиндрических структурах. Киев: Наукова думка, 1989. 256с.
11. Сулим Г.Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. Львів: 2007. 716 с.

Сведения об авторе:

Кириллова Ольга – доцент, Национальный университет «Одесская морская академия», кафедра высшей математики (+38)0982397378
E-mail: olga.i.kyrylova@gmail.com

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ В СТЕРЖНЕ С ПОКРЫТИЕМ ИЗ СТРУКТУРНО–ЧУВСТВИТЕЛЬНОГО МАТЕРИАЛА

Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю., Кувшинникова Д.А.

Улучшение свойств конструкционных и функциональных материалов в наше время связано с синтезированием материалов из структур, имеющих предельные значения свойств (например, предельно прочных, тугоплавких, термостабильных и т.п.). Такие материалы за счёт неоднородности своей структуры получили название – «структурно-чувствительные». Неоднородность структуры таких материалов, обоснована технологическими особенностями их создания. Структурно-чувствительные материалы могут быть получены путём компактирования нанопорошков, осаждения на подложку, кристаллизации аморфных сплавов и при помощи интенсивной пластической деформации [1].

В работе рассмотрена математическая модель распространения теплоты в составном стержне, где на одном из торцов используется защитное покрытие из структурно-чувствительного материала. При помощи метода конечных элементов найдены численные решения для задачи с условиями идеального теплового контакта частей стержня. Приведены результаты и анализ численного расчёта для различных материалов.

Материалы, создаваемые на основе нанотехнологий, обладают уникальными теплофизическими и физико-механическими свойствами [2–3]. Однако, образовался существенный разрыв между технологиями получения таких материалов и областью математического моделирования. Известно, что в силу особенностей структуры, к таким материалам не применима методология континуума. Общая математическая модель для таких материалов описана в работе [4 – 5].

Большой интерес представляет случай, когда одна часть стержня выполнена из однородного материала, без структурной особенности, а другая – из материала, полученного путём современных нанотехнологий. В таком случае модель может быть применима для моделирования стержня с защитным покрытием из структурно-чувствительного материала.

Пусть стержень состоит из двух частей с разными плотностями ρ_1 и ρ_2, коэффициентами теплоемкости c_1 и c_2, и теплопроводности λ_1 и λ_2, причём левая часть стержня состоит из структурно-чувствительного материала.

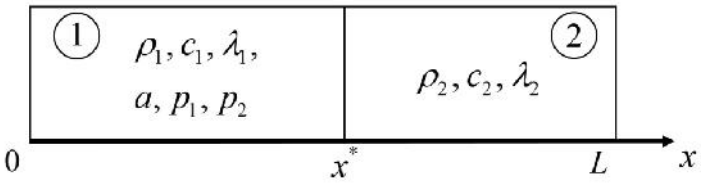


Рис.1. Упрощённая модель составного стержня

Запишем уравнения теплопроводности для левой и правой частей стержня, соответственно:

$$\rho_1 c_1 \frac{\partial T_1(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial q^{(nl)}(x,t)}{\partial x}, \quad x \in (0, x^*), \quad t > 0, \tag{1}$$

$$\rho_2 c_2 \frac{\partial T_2(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial q^{(l)}(x,t)}{\partial x}, \quad x \in (x^*, L), \quad t > 0. \tag{2}$$

где ρ_1, ρ_2 – плотности материалов [$кг / м^3$]; c_1, c_2 – теплоёмкости материалов [$Кг / Дж * K$]; $T_1(x,t)$, $T_2(x,t)$ – температура [K]; x – пространственная координата [$м$]; t – время [с], $q^{(l)}(x,t)$ – тепловой поток [$Вт / м^2$], определяемый законом теплопроводности Фурье для изотропного однородного тела:

$$q^{(l)}(x,t) = -\lambda_2 \frac{\partial T_2(x,t)}{\partial x}, \tag{3}$$

где λ_2 – коэффициент теплопроводности [Вт/(м ·К)].

Эффект нелокальности среды состоит в том, что физические характеристики элементов структурно-чувствительного материала подвержены влиянию прочих окружающих элементов

структуры. В связи с этим, выражение для теплового потока может быть записано в виде [4–5]:

$$q^{(nl)}(x,t) = -p_1\lambda_1 \frac{\partial T_1(x,t)}{\partial x} - p_2\lambda_1 \int_V \varphi(|x'-x|) \frac{\partial T_1(x',t)}{\partial x'} dx', \tag{4}$$

где p_1, p_2 – параметры нелокальности; $\varphi(|x'-x|)$ – функция влияния нелокальности, причем:

$$\int_V \varphi(|x'-x|) dx' = 1. \tag{5}$$

Функцию влияния нелокальности в данной работе примем в виде [4]:

$$\varphi(|x'-x|) = \frac{1}{2a} e^{-\frac{|x'-x|}{a}}, \quad |x'-x| < a, \tag{6}$$

где a – радиус зоны влияния нелокальности (рис. 2).

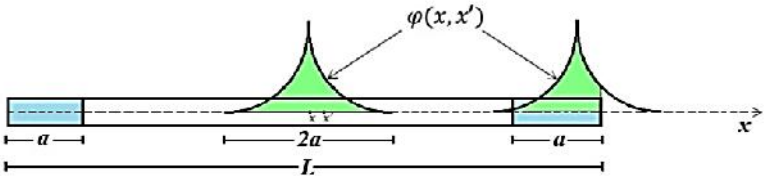


Рис.2. Схематичное представление функции влияния нелокальности среды

Параметры p_1 и p_2 отвечают за вклад локальной и нелокальной составляющей в выражении для теплового потока, причём $p_1 + p_2 = 1$.

Подобные соотношения используют в механике деформируемого твёрдого тела для нахождении распределения напряжений с учётом эффекта нелокальности среды [6].

Начальные условия для стержня имеею вид:

$$T_1(x,0) = T_0 = \text{const}, \quad T_2(x,0) = T_0 = \text{const}, \tag{7}$$

где T_0 – начальная температура стержня.

Граничные условия 2-го рода:

$$-\lambda_1 p_1 \frac{\partial T_1(0,t)}{\partial x} - \lambda_1 p_2 \int_V \varphi(|x'|) \frac{\partial T_1(x',t)}{\partial x'} dx = q_1(t), \tag{8}$$

$$\lambda_2 \frac{\partial T_2(L,t)}{\partial x} = q_2(t), \tag{9}$$

где $q_1(x)$, $q_2(x)$ – тепловые потоки на левом и правом концах стержня, соответственно.

В точке соединения x^* двух частей стержня имеет место идеальный тепловой контакт:

$$T_1(x^*,t) = T_2(x^*,t), \tag{10}$$

$$p_1\lambda_1 \frac{\partial T_1(x^*,t)}{\partial x} + p_1\lambda_1 \int_{x^*-a}^{x^*} \varphi(|x'-x^*|) \frac{\partial T_1(x',t)}{\partial x'} dx' = \lambda_2 \frac{\partial T_2(x^*,t)}{\partial x}. \tag{11}$$

Численное решение задачи было реализовано методом конечных элементов [7]. В результате были найдены распределения температуры в стержне.

Рассмотрим модель, в которой левая часть стержня выполнена из нитрида титана, а основная часть – из стали.

Характеристики материалов [8]:

$$TiN(\textit{нитрид титана}):\ \rho_1 = 5400\ \textit{кг}/\textit{м}^3,\ c_1 = 600\,\textit{Дж}/(\textit{кг}*K),\ \lambda_1 = 41.8\,\textit{Вт}/(\textit{м}*K);$$

$$\textit{Сталь}:\ \rho_2 = 7800\ \textit{кг}/\textit{м}^3,\ c_2 = 460\,\textit{Дж}/(\textit{кг}*K),\ \lambda_2 = 22.4\,\textit{Вт}/(\textit{м}*K).$$

Зададим на левой границе $q_1 = 10^5\,\textit{Вт}/\textit{м}^2$, а на правой – нулевой тепловой поток. Начальная температура $T_0 = 400K$. На рис. 3 – 4 представлены распределения температуры на моменты времени $t = 10^3\,c$ и $t = 10^4\,c$, соответственно. Видим, что при увеличении параметра

вклада локальной составляющей p_1 значение температуры на границе убывает. Радиус нелокальности a в данной модели имеет зависимость от шага по пространству h (при численном моделировании $h = 10^{-7}\,м$). Следует заметить, что при увеличении радиуса нелокальности a температура на границе возрастает, что свидетельствует о необходимости учёта нелокальных эффектов при построении модели. Также стоит отметить, что с течением времени граница температурного раздела частей стержня становится более значимой и можно проследить влияние покрытия из структурно-чувствительного материала на распределение температуры.

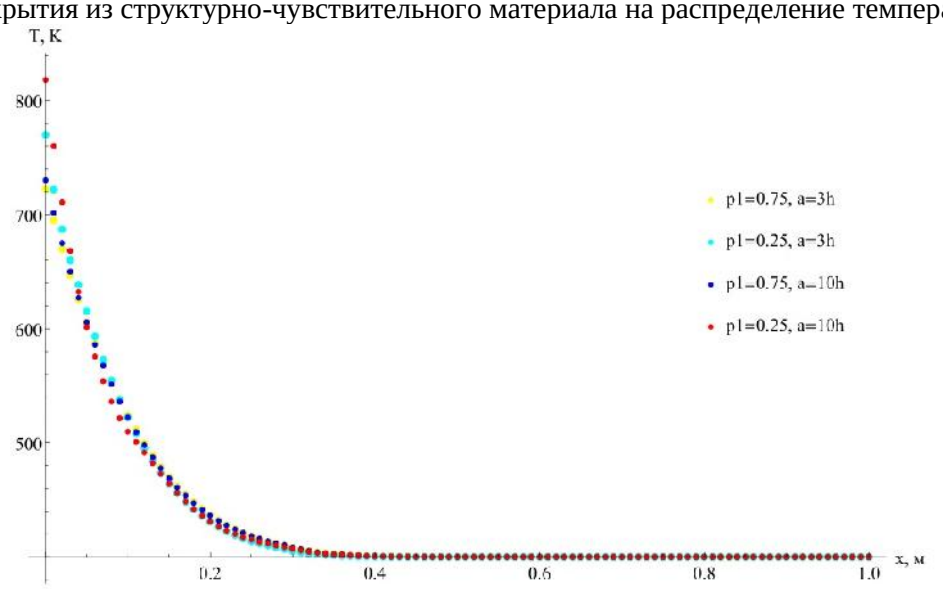


Рис.3. Распределение температуры в составном стержне из нитрида титана и стали на момент времени $t = 10^3 c$.

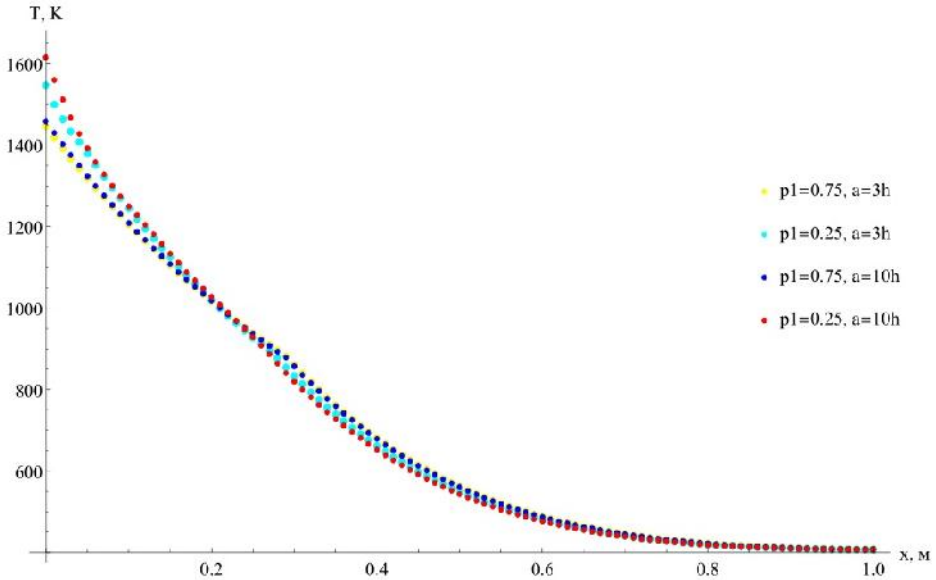


Рис.4. Распределение температуры в составном стержне из нитрида титана и стали на момент времени $t = 10^4 c$.

Далее рассмотрим модель, в которой левая часть стержня выполнена из нитрида титана, а основная часть – из меди.

Характеристики материалов [9 – 10]:

$TiN(нитрид\ титана)$: $\rho_1 = 5400\ кг/м^3$, $c_1 = 600\,Дж/(кг*K)$, $\lambda_1 = 41.8\,Вт/(м*K)$;

$Медь$: $\rho_2 = 8940\ кг/м^3$, $c_2 = 485\,Дж/(кг*K)$, $\lambda_2 = 401\,Вт/(м*K)$.

На рис. 5 – 6 представлены распределения температуры на моменты времени $t = 10^3 c$ и $t = 10^4 c$, соответственно. Граничные и начальное условия выбраны аналогично случаю стержня из нитрида титана и стали.

Исследования, как в случаях, представленных на рис. 3 – 4 представленны в зависимости от параметра вклада локальной составляющей p_1 и диаметра нелокальности a. Из результатов, представленных на рис. 5 – 6, видно, что при использовании покрытия из структурно-чувствительного материала, возможно защитить основной материал от излишнего нагрева, так как благодаря свойствам такого материала, температура основной части стержня значительно уменьшается.

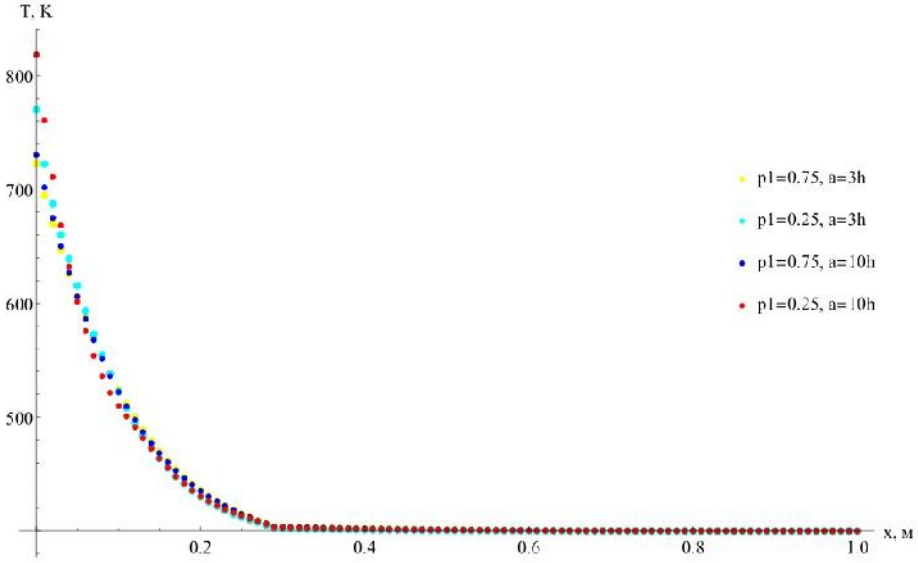


Рис.5. Распределение температуры в составном стержне из нитрида титана и меди на момент времени $t = 10^3 c$.

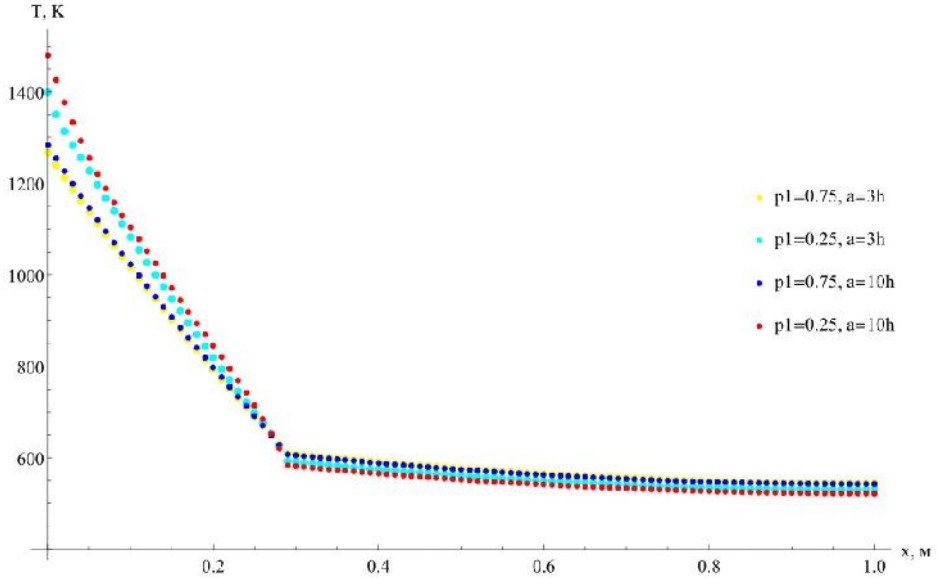


Рис.6. Распределение температуры в составном стержне из нитрида титана и меди на момент времени $t = 10^4 c$.

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ (проект 9.2422.2017/ПЧ) и гранта МК-1069.2018.8 программы Президента РФ государственной поддержки молодых кандидатов наук.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андриевский Р.А., Рагуля А.В. Наноструктурные материалы. Москва: Издательский центр Академия, 2005.
2. Гусев А.И. Наноматериалы, наноструктуры, нанотехнологии. М.: Физматлит, 2005. 416 с.

3. Пул-мл. Ч., Оуэнс Ф. Нанотехнологии. М.: Техносфера, 2006.
4. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Математическая модель нелокальной среды с внутренними параметрами состояния. //Инженерно-физический журнал. 2013. Т. 86, № 4. С. 768–773.
5. Kuvyrkin G.N., Savelyeva I.Y., Kuvshynnikova D.A. Mathematical model of the heat transfer process taking into account the consequences of nonlocality in structurally sensitive materials. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. 2018. Vol. 991(1). DOI: 10.1088/1742-6596/991/1/012050
6. Eringen A.C. Nonlocal continuum field teories. New York-Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2002. 393 pp.
7. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. М: Мир, 1979. 393 с.
8. Кувыркин Г.Н., Журавский А.В., Савельева И.Ю. Математическое моделирование газо-фазного осаждения материала на криволинейную поверхность. //Инженерно-физический журнал. 2016. Т. 89, № 6. С.1392-1397.
9. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Радиационно-кондуктивный теплоперенос в шаровой полости, Теплофизика высоких температур, 2015.
10. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Математическая модель термостатирующего покрытия с термоэлектрическими модулями. //Инженерно-физический журнал. 2015. Т. 88, № 6. С.1328-1335.

Сведения об авторах:

Кувыркин Георгий Николаевич (Москва) — доктор технических наук, профессор, заведующий кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. (105005, Москва, Российская Федерация, 2 -я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, **e-mail:** fn2@bmstu.ru).

Савельева Инга Юрьевна (Москва) — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Прикладная математика». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2 -я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, **e-mail:** inga.savelyeva@gmail.com).

Кувшинникова Дарья Алексеевна (Москва) — студент кафедры «Прикладная математика». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, М.: Российская Федерация, 2 -я Бауманская ул., д.5, стр.1, **e-mail:** kuvshinnikovadasha@gmail.com).

ДЛИТЕЛЬНОЕ РАЗРУШЕНИЕ РАСТЯГИВАЕМОГО СТЕРЖНЯ В УСЛОВИИ ПОЛЗУЧЕСТИ С УЧЁТОМ ДИФФУЗИИ И ХИМИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ С АГРЕССИВНОЙ СРЕДОЙ

Локощенко А.М., Фомин Л.В., Басалов Ю.Г.

Вопрос обеспечения безопасной эксплуатации материалов и элементов ответственных конструкций под воздействием агрессивных сред рассмотрен на базе постановки задачи о длительном разрушении растягиваемого стержня, находящегося в условии диффузионного и химического взаимодействия с агрессивной средой. Для решения задачи разработана механико-математическая модель, включающая модифицированное уравнение диффузии, кинетическое уравнение накопления повреждений и соотношение для параметра химического взаимодействия. Параметры указанной модели определены на базе экспериментальной зависимости толщины коррозионной пленки от времени. Рассматривается многостадийность процесса разрушения, связанная с последовательным разрушением коррозионных слоёв и соответствующим увеличением эффективного напряжения. Время до разрушения стержня рассчитывается на основе критериального или кинетического подходов, которые определяются в зависимости от конкуренции процесса роста эффективного напряжения и процесса накопления повреждений.

Обеспечение безопасной эксплуатации материалов и элементов конструкций, подверженных влиянию коррозионно-активной среды, является важной и актуальной задачей для обеспечения безопасности и надёжности ответственных конструкций на протяжении всего срока эксплуатации. Это влияние обусловлено как диффузионным проникновением, так и химическим взаимодействием агрессивной среды с материалом. Особое значение приобретает изучение таких процессов при высокотемпературном длительном деформировании металлов в условии ползучести [1-5].

Когда диффузия сопровождается химическими реакциями, обычное уравнение одномерной диффузии может быть модифицировано для учёта этого, и становится [6]:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C}{\partial z^2} - \frac{\partial S}{\partial t}\ , \quad D = \text{const}\,, \tag{1}$$

где $C = C(z,t)$ – концентрация вещества, проникшего в материал посредством физической диффузии, $S = S(z,\,t)$ – концентрация вещества, связанного химической реакцией, t – время, z – координата, D – коэффициент диффузии.

Концентрация S связана с концентрацией C с помощью параметра химического взаимодействия R, причём, $S = RC$. В общем случае указанные характеристики являются функциями пространственных координат и времени, в случае рассматриваемого одномерного процесса $C = C(z,t)$, $R = R(z,\,t)$, $S = S(z,\,t)$. Подставляя S в (1), получим:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{D}{(1+R)}\frac{\partial^2 C}{\partial z^2}\,, \quad C = C(z,\,t)\,. \tag{2}$$

Если R мало, то физическая диффузия является преобладающим процессом. И обратно, если R велико, то химическое взаимодействие является преобладающим процессом. Для определения параметра химического взаимодействия R, проанализируем зависимость толщины δ коррозионной плёнки от времени.

Примем гипотезу о том, что скорость изменения толщины коррозионной пленки пропорциональна скорости изменения концентрации вещества, связанного посредством химической реакции:

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = \gamma\frac{\partial S}{\partial t}, \quad S = RC\,, \tag{3}$$

где $\gamma = \text{const}$ – характерная константа процесса.

Таким образом, зная зависимость $\delta(t)$, можно определить соотношение для R.

В качестве примера рассмотрим зависимость толщины коррозионной плёнки от времени, полученную в эксперименте сотрудниками ЦНИИ КМ «Прометей» (г. Санкт-Петербург) и опубликованную в [7]. На рис. 1 показана зависимость толщины оксидной плёнки от длительности испытаний стали 10Х15Н9С3Б в среде жидкометаллического теплоносителя на основе свинца. Точками показаны экспериментальные данные, а штриховыми линиями – результат

аппроксимации экспериментальных данных с помощью зависимости $\delta = A - B\exp(-\lambda t)$, где константы имеют значения $A = 78.00$ *мм*, $B = 77.27$ *мм*, $\lambda = 1.5 \cdot 10^{-4}$ *час*$^{-1}$

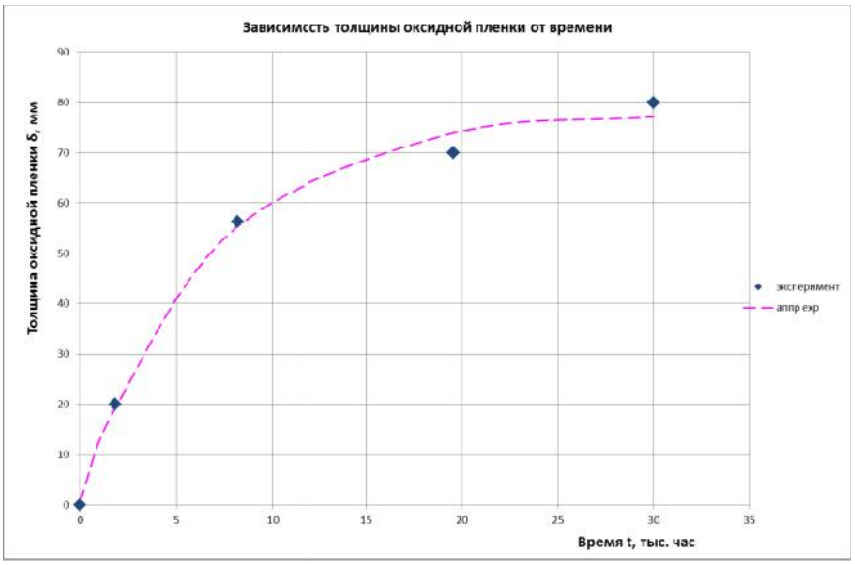


Рис. 1. Зависимость толщины оксидной пленки от длительности испытаний стали 10Х15Н9С3Б

Примечание. В общем случае коррозионный слой может иметь место в начальный момент времени ($\delta(t_0 = 0) \neq 0$).

С учётом принятой аппроксимации для δ и гипотезы (3) выражение для параметра химического взаимодействия имеет следующий вид:

$$R = \lambda B \exp(-\lambda t)\left[\gamma \frac{\partial C}{\partial t}\right]^{-1} . \qquad (4)$$

Далее в статье рассматривается постановка задачи о длительном разрушении растягиваемого стержня в условии ползучести с учётом диффузии и химического взаимодействия с агрессивной средой. Длинный стержень прямоугольного поперечного сечения толщиной H_0 и шириной b (причём, $H_0 \ll b$) находится в коррозионно-активной среде, влияние которой характеризуется диффузионным проникновением её элементов и коррозионным взаимодействием. Примем, что эти процессы описываются соотношением (1). Диффузия среды в материал рассматриваемого стержня характеризуется коэффициентом диффузии D, а образование коррозионного слоя происходит в соответствии с процессом, который описывается соотношениями (3) и (4). Поскольку $H_0 \ll b$ и характеристики среды одинаковы с обеих сторон стрежня, рассматривается симметричный одномерный диффузионно-коррозионный процесс вдоль толщины стержня. Стержень находится под действием растягивающего напряжения в условии ползучести, в процессе которой накапливаются повреждения.

Предполагается многостадийный процесс разрушения, а именно, последовательное разрушение коррозионных слоёв на поверхности, причём, накопление повреждений происходит под действием увеличенного эффективного напряжения на рассматриваемой стадии процесса разрушения. Критерием разрушения коррозионного слоя на каждой стадии является достижение параметром ω значения, равного единице под действием эффективного напряжения.

Таким образом, на первой стадии:

$$0 < t \le t_1^* \quad \rightarrow \quad \sigma = \sigma_{эфф\_1} = \sigma_0 \quad \rightarrow \quad \omega_1^* = \omega\left(t_1^*, \delta_{k1}\right) = 1 .$$

На второй стадии:

$$t_1^* < t \le t_2^* \quad \rightarrow \quad \sigma = \sigma_{эфф\_2} = \frac{\sigma_{эфф\_1}}{\left(1 - 2\delta_{k1}/H_0\right)} \quad \rightarrow \quad \omega_2^* = \omega\left(t_2^*, \delta_{k2}\right) = 1 .$$

Здесь t_1^* и t_2^* – времена окончания первой и второй стадии процесса коррозионного разрушения соответственно, а ¢$_{k1}$ и ¢$_{k2}$ – соответствующие величины коррозионных слоёв и т.д. до полного разрушения стержня.

Полное время до разрушения стержня t^{**} определяется на основе какого-либо из двух нижеперечисленных критериев.

1) Эффективное напряжение настолько сильно возрастет, что весь стержень полностью разрушится от кратковременной увеличенной нагрузки. Фактически это означает достижение эффективным напряжением предела кратковременной прочности $\sigma = \sigma_b\big|_{T=T_{исп.}}$ при рассматриваемой высокой температуре испытания $T = T_{исп.}$. При этом, коррозионные процессы не успевают оказать влияние на разрушение на заключительной стадии. Таким образом, полное время до разрушения в этом случае t^{**} определяется критериальным подходом.
2) Накопление повреждений внутри всего стержня оказывает значительное влияние, и образец разрушится при достижении уровня повреждённости предельного значения $\omega^{**} = \omega\left(t^{**}\right) = 1$. Таким образом, полное время до разрушения t^{**} в этом случае определяется кинетическим подходом.

Для решения поставленной задачи разработана система определяющего и кинетического соотношений для моделирования влияния агрессивной коррозионно-активной среды на ползучесть и длительную прочность материалов и элементов конструкций [1 – 5]. Эта система уравнений включает в себя модифицированное уравнение диффузии [6], кинетическое уравнение накопления повреждений в процессе ползучести, учитывающее влияние агрессивной среды, и соотношение для параметра химического взаимодействия. Необходимо отметить, что выбранный закон накопления повреждений (второе уравнение системы (5)) учитывает влияние как диффузионного процесса, так и процесса коррозии на накопление повреждений. Однако, не исключено, что в дальнейшем анализе вид закона накопления повреждений может быть уточнён или модифицирован.

Система уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C}{\partial t} = \dfrac{D}{(1+R)} \dfrac{\partial^2 C}{\partial z^2}, \\ \dfrac{\partial \omega}{\partial t} = \dfrac{B_1 (\sigma)^n}{(1-\omega)^n} \left(1 + aC(1+R)\right), \\ R = \lambda B \exp(-\lambda t) \left[\gamma \dfrac{\partial C}{\partial t}\right]^{-1}, \end{cases} \tag{5}$$

где σ – напряжение, $\omega = \omega(z, t)$ – повреждённость, B_1, n – константы установившейся ползучести, a – материальная константа, определяемая из экспериментов по длительной прочности [3].

Введём безразмерные переменные.

$$\bar{z} = \frac{2z}{H_0}, \quad \bar{C} = \frac{C}{C_0}, \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_b}, \quad \bar{t} = t \cdot \frac{4D_0}{H_0^{\,2}}, \quad \bar{D} = \frac{D}{D_0}, \quad \bar{B}_1 = \frac{H_0^{\,2} B_1 \sigma_b^{\,n}}{4D_0},$$

$$\bar{a} = aC_0, \quad \bar{\lambda} = \lambda \frac{H_0^{\,2}}{4D_0}, \quad \gamma_1 = \gamma \frac{4D_0 C_0}{H_0^{\,2}}, \tag{6}$$

где C_0 – равновесная концентрация на поверхности, σ_b – предел кратковременной прочности, D_0 – коэффициент диффузии при комнатной температуре.

С учётом переменных (6) система уравнений (5) принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{C}}{\partial \bar{t}} = \dfrac{\bar{D}}{(1+R)} \dfrac{\partial^2 \bar{C}}{\partial \bar{z}^2}, \\ \dfrac{\partial \omega}{\partial \bar{t}} = \bar{B}_1 \dfrac{(\bar{\sigma})^n}{(1-\omega)^n} \left(1 + \bar{a}\bar{C}(1+R)\right), \\ R = \lambda B \exp\left(-\bar{\lambda}\bar{t}\right) \left[\gamma_1 \dfrac{\partial \bar{C}}{\partial \bar{t}}\right]^{-1}. \end{cases} \tag{7}$$

Выберем систему координат следующим образом: $\bar{z} = 0$ – центр симметрии поперечного сечения стержня, $\bar{z} = 1$ – внешняя граница поперечного сечения стержня. Начальные и граничные условия имеют вид, зависящий от стадии процесса коррозионного разрушения.

1) На первой стадии $0 < \bar{t} \le \bar{t}_1^*$:

$\bar{C}(\bar{z}, 0) = 0$ – начальное условие,

$\bar{C}(1, \bar{t}) = 1$ – граничное условие на внешней боковой поверхности стержня.

Из условий симметрии диффузионного процесса относительно середины поперечного сечения стержня:

$\dfrac{\partial \bar{C}}{\partial \bar{z}}(0, \bar{t}) = 0.$

Нулевое распределение повреждённости в начальный момент времени

$\omega(\bar{z}, 0) = 0.$

Условие разрушения коррозионного слоя $\bar{\delta}_{k1}$ в момент времени окончания $\bar{t}_1^*$ первой стадии:

$\omega_1^* = \omega\left(\bar{z} = 1 - \bar{\delta}_{k1},\ \bar{t} = \bar{t}_1^*\right) = 1.$

Граница коррозионного слоя $\bar{\delta}_{k1}$ определяется уравнением $\bar{S} = R\bar{C}$, характеризующим долю вещества, вступившего в химическое взаимодействие. Со стороны металла, не подверженного коррозии, концентрация вещества, связанного химической реакцией $\bar{S}\left(1 - \bar{\delta}_{k1}, \bar{t}\right) = 0$.

2) На второй стадии $\bar{t}_1^* < \bar{t} \le \bar{t}_2^*$:

$\bar{C}\left(\bar{z}, \bar{t}_1^*\right) = \bar{C}_1$ – распределение концентрации по координате $\bar{z}$, полученное в момент окончания первой стадии,

$\bar{C}\left(1 - \bar{\delta}_{k1}, \bar{t}\right) = 1, \quad \bar{t} > \bar{t}_1^*$ – значение концентрации на новой внешней границе стрежня, образованной в результате разрушения коррозионного слоя на первой стадии,

$\dfrac{\partial \bar{C}}{\partial \bar{z}}(0, \bar{t}) = 0$ – граничное условие в середине поперечного сечения стержня (из условия симметрии диффузионно-коррозионного процесса),

$\omega\left(\bar{z}, \bar{t}_1^*\right) = \omega_1$ – распределение повреждённости по координате $\bar{z}$, полученное в момент времени $\bar{t}_1^*$ окончания первой стадии коррозионного разрушения,

$\omega_2^* = \omega\left(\bar{z} = 1 - \bar{\delta}_{k1} - \bar{\delta}_{k2},\ \bar{t} = \bar{t}_2^*\right) = 1$ – разрушение коррозионного слоя $\bar{\delta}_{k2}$ в момент времени $\bar{t}_2^*$ окончания второй стадии,

$\bar{S}\left(1 - \bar{\delta}_{k1} - \bar{\delta}_{k2}, \bar{t}\right) = R\left(1 - \bar{\delta}_{k1} - \bar{\delta}_{k2}, \bar{t}\right)\bar{C}\left(1 - \bar{\delta}_{k1} - \bar{\delta}_{k2}, \bar{t}\right) = 0$ – условие определения границы коррозионного слоя со стороны металла, не подверженного коррозии.

На первом этапе численного расчёта первой стадии коррозионного процесса получены распределения концентраций $\bar{C}(\bar{z}, \bar{t})$ и $S(\bar{z}, \bar{t})$ по поперечной координате $\bar{z}$ стержня в характерные моменты времени $\bar{t}$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-08-00210).

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
2. Локощенко А.М. Ползучесть и длительная прочность металлов. М.: Физматлит, 2016. 504 с. (Перевод: Lokoshchenko A.M. Creep and Creep Rupture of Metals. CISP. CRC Press. Taylor & Francis Group. Boca. Raton. London. New York. 2018. 546 p.)
3. Фомин Л.В. Описание длительной прочности растягиваемых стержней прямоугольного и круглого поперечных сечений в высокотемпературной воздушной среде // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, №3(32). 2013. С. 87-97.
4. Fomin L.V. Steady-state creep of a composite rod in tension in the presence of an aggressive environment, Mechanics of Composite Materials. 2017. Vol. 52(6). P. 741– 750.
5. Lokoshchenko A.M., Fomin L.V. Delayed fracture of plates under creep condition in unsteady complex stress state in the presence of aggressive medium. Applied Mathematical Modelling. 2018. Vol. 60. P. 478 – 489. https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.03.031
6. Crank J. The Mathematics of Diffusion. Clarendon Press, second ed., Oxford, 1975. 414 p.
7. Кудрявцев А.С., Марков В.Г., Лаврухин В.С. Длительная прочность стали в жидкометаллическом теплоносителе на основе свинца // Вопросы материаловедения. 2006. №4(48). С.89-94.

Information about authors

Lokoshchenko Alexander – Professor, Doctor of Physics and Maths, Head of the laboratory of creep and creep rupture, Research Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University/
+7(495)9395308
E-mail: loko@imec.msu.ru

Fomin Leonid – Candidate Doctor of Physics and Maths, Researcher of the laboratory of creep and creep rupture, Research Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University.
+7(495)9392428
E-mail: fleonid1975@mail.ru

Basalov Yurii – Lead Engineer of the laboratory of creep and creep rupture, Research Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University.
E-mail: basalov@yandex.ru

О КОНТАКТЕ КОЛЬЦЕВОГО ШЕРОХОВАТОГО ШТАМПА И ОСНОВАНИЯ С ПОКРЫТИЕМ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Манжиров А.В., Казаков К.Е.

В работе рассматривается осесимметричная контактная задача для основания с покрытием и кольцевого жёсткого штампа в предположении, что как форма тонкого верхнего слоя (покрытия), так и форма основания штампа описываются различными быстро изменяющимися функциями. Для поставленной задачи получены основное интегральное уравнение задачи и дополнительное условие. Аналитическое решение в рядах, построенное при помощи авторского обобщённого проекционного метода, позволяет проводить расчёты в случае, когда формы контактирующих поверхностей описываются быстро изменяющимися функциями, чего невозможно достичь другими известными методами.

Предположим, что вязкоупругий слой произвольной толщины H с тонким покрытием толщины $h(r)$, сделанным из вязкоупругого материала с другими свойствами, лежит на жёстком основании. Переменная толщина покрытия может быть обусловлена как особенностями изготовления основания, в том числе аддитивного, когда верхний поверхностный слой имеет отличные от основного слоя механические характеристики, так и обработкой поверхностных слоёв уже готового основания. Переменную толщину покрытия можно использовать и с целью минимизации уровней, действующих в основании технологических напряжений и формирования выгодных распределений контактных напряжений в зонах опирания конструкций, возводимых на основании. Моменты изготовления верхнего и нижнего слоёв обозначим через $^2_1$ и $^2_2$, соответственно. Рассматривается случай, когда жёсткость покрытия не превышает жёсткости нижнего слоя. Между слоями, а также между нижним слоем и подстилающим основанием осуществляется либо идеальный, либо гладкий контакт.

В некоторый момент времени $^2_0$ осевая сила $P(t)$ начинает вдавливать жёсткий кольцевой штамп, внутренний радиус которого равен a, а внешний b – в описанное основание. При этом, ось штампа совпадает с центром осевой симметрии основания. Функция $g(r)$, описывающая расстояние между контактными поверхностями в недеформированном состоянии, называется функцией зазора. Если функция $f(r)$ описывает форму основания штампа, то

$$g(r) = f(r) - h(r) + h_0, \quad h_0 = -\min_{r\in[a,b]}[f(r) - h(r)].$$

В случае, если контакт согласованный, $g(r) \equiv 0$. Область контакта постоянна и совпадает с кольцом шириной $(b - a)$. Толщина покрытия должна быть мала по сравнению с шириной кольца, то есть $h(r) \ll b - a$.

Интегральное уравнение поставленной задачи имеет вид ($a \le r \le b$) [1, 2]

$$(\mathbf{I} - \mathbf{V}_1)\frac{\theta q(r,t)h(r)}{E_1(t-\tau_1)} + (\mathbf{I} - \mathbf{V}_2)\frac{2(1-\nu_2^2)}{\pi E_2(t-\tau_2)}\int_a^b k_{\text{ax}}\left(\frac{r}{H},\frac{\rho}{H}\right)q(\rho,t)\rho d\rho = \delta(t) - g(r),$$

$$\mathbf{V}_k f(t) = \int_{\tau_0}^{t} K^{(k)}(t-\tau_k,\tau-\tau_k)f(\tau)d\tau, \quad K^{(k)}(t,\tau) = E_k(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{E_k(\tau)} + C^{(k)}(t,\tau)\right], \quad k = 1,2,$$

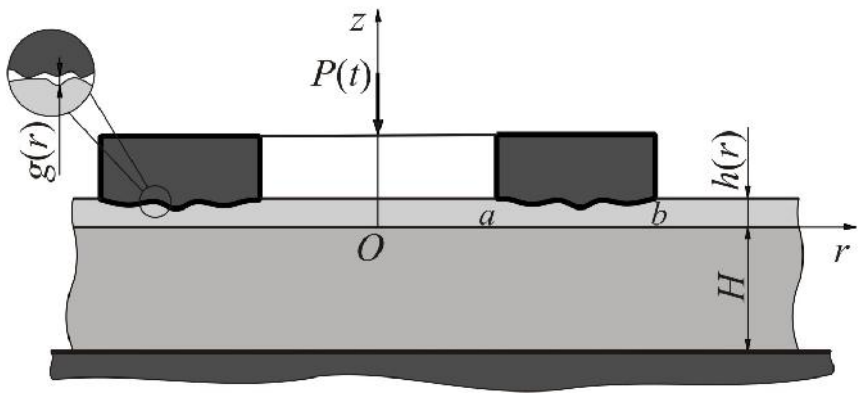
где ¢(t) – осадка штампа, $E_k(t)$ – модуль Юнга покрытия (при k = 1) и нижнего слоя (при k = 2), ¬$_2$ – коэффициент Пуассона нижнего слоя, **I** – тождественный оператор, $\mathbf{V}_k$ –интегральный оператор Вольтерра с ядром $K^{(k)}(t,^2)$ (k = 1,2), $C^{(k)}(t,^2)$ – мера ползучести, ¯ – безразмерный коэффициент, зависящий от условий слоёв:

$$\theta = 1 - \nu_1^2$$

при гладком контакте,

$$\theta = \frac{1 - \nu_1 - 2\nu_1^2}{1 - \nu_1}$$

при идеальном контакте; ¬$_1$ – коэффициент Пуассона покрытия, $k_{\text{ax}}(r/H,°/H)$ — известное ядро осесимметричной контактной задачи, имеющее вид



$$k_{\text{ax}}(r,\rho)=\int_0^\infty L(u)J_0(ru)J_0(\rho u)du\,,$$

в котором функция $L(u)$ зависит от условий между подстилающим недеформируемым основанием и нижним слоем [2,3]:

$$L(u)=\frac{2\kappa\,\mathrm{sh}\,2u-4u}{2\kappa\,\mathrm{ch}\,2u+4u^2+1+\kappa^2},\quad \kappa=3-4\nu_2$$

при идеальном контакте,

$$L(u)=\frac{\mathrm{ch}\,2u-1}{\mathrm{sh}\,2u+2u}$$

при гладком контакте. Интегральное уравнение следует дополнить условием равновесия штампа на слое:

$$2\pi\int_a^b q(\rho,t)\rho d\rho=P(t)\,.$$

Смешанное интегральное уравнение и дополнительное условие могут быть приведены к безразмерному виду ($0\le r\le 1$)

$$c(t)m(r)(\mathbf{I}-\mathbf{V}_1)q(r,t)+(\mathbf{I}-\mathbf{V}_2)\int_0^1 k_{\text{ax}}(r,\rho)q(\rho,t)\rho d\rho=\delta(t)-g(r),$$

$$\int_0^1 q(\rho,t)\rho d\rho=P(t).$$

Существует всего 2 варианта постановки осесимметричной задачи: 1) осадка штампа задана (интегральное уравнение с известной правой частью) и требуется определить контактные давления под штампом и вдавливающую силу; 2) вдавливающая сила известна и требуется найти контактные давления и осадку штампа.

Приведём решение задачи при известной вдавливающей силе.

Введём функцию и интегральный оператор по формулам:

$$Q(r,t)=\sqrt{m(r)}\left[q(r,t)+(\mathbf{I}-\mathbf{V}_1)^{-1}\frac{g(r)}{c(t)m(r)}\right],$$

$$\mathbf{A}f(r)=\int_0^1 k(r,\rho)f(\rho)\rho d\rho,\quad k(r,\rho)=\frac{k_{\text{ax}}(r,\rho)}{\sqrt{m(r)m(\rho)}}.$$

Тогда интегральное уравнение и дополнительное условие можно преобразовать к следующему интегральному уравнению с симметричным ядром Гильберта-Шмидта [4, 5]

$$c(t)(\mathbf{I}-\mathbf{V}_1)Q(r,t)+(\mathbf{I}-\mathbf{V}_2)\mathbf{A}Q(r,t)=\frac{\delta(t)}{\sqrt{m(r)}}-\frac{\tilde{c}(t)\tilde{g}(r)}{\sqrt{m(r)}},$$

$$\int_0^1 \frac{Q(\rho,t)}{\sqrt{m(\rho)}}\rho d\rho=\tilde{P}(t),$$

$$\tilde{g}(r)=\int_0^1 \frac{k_{\text{ax}}(r,\rho)g(\rho)}{m(\rho)}\rho d\rho,\quad \tilde{c}(t)=(\mathbf{I}-\mathbf{V}_2)(\mathbf{I}-\mathbf{V}_1)^{-1}\frac{1}{c(t)},$$

$$\tilde{P}(t)=P(t)(\mathbf{I}-\mathbf{V}_1)^{-1}\frac{1}{c(t)}\int_0^1 \frac{g(\rho)}{m(\rho)}\rho d\rho.$$

Решение полученного интегрального уравнения следует искать в классе функций, непрерывных по времени t в гильбертовом пространстве $L_2(0,1)$. Для этого, в первую очередь, необходимо построить ортонормированный базис $\{p_0(r),\ p_1(r),\ p_2(r),\ \ldots\}$ пространства $L_2(0,1)$, который получается после ортонормирования системы линейно независимых функций $\{1/\sqrt{m(r)}, r/\sqrt{m(r)}, r^2/\sqrt{m(r)},\ldots\}$.

Затем, для решения интегрального уравнения следует применить обобщённый проекционный метод [6, 7]. Ход решения аналогичен тому, как это проделано в [8–10]. Окончательное решение имеет следующую структуру:

$$q(r,t)=\frac{1}{m(r)}[z_0(t)P_0(r)+\ldots]-(\mathbf{I}-\mathbf{V}_1)^{-1}\frac{1}{c(t)}\frac{g(r)}{m(r)},$$

в которой функция, стоящая в квадратных скобках, является суммой многочленов, а функции, связанные с толщиной покрытия и зазором, выделены отдельными сомножителями и слагаемыми. Полученная формула позволяет производить эффективные вычисления для случаев, когда формы контактирующих поверхностей описываются сложными и быстро изменяющимися функциями.

Также можно получить аналитическую формулу для вычисления функции осадки штампа.

Таким образом, поставлена и решена осесимметричная задача о контакте вязкоупругого стареющего основания с шероховатым покрытием и жёсткого штампа в случае, когда контактирующие поверхности описываются быстро изменяющимися функциями. Решение построено в аналитическом виде, причём, в выражениях для контактных давлений функции форм покрытий выделены отдельными слагаемыми и сомножителями, что позволяет производить эффективные вычисления, когда контактирующие поверхности несогласованы и имеют сложную форму.

Исследование выполнено в рамках государственного задания (номер госрегистрации АААА-А17-117021310381-8) при частичной поддержке РФФИ (проект № 18-51-05012-Арм_а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Манжиров А.В. Осесимметричные контактные задачи для неоднородно-стареющих вязкоупругих слоистых оснований // ПММ. 1983. Т.47. Вып.4. С.684–693. = Manzhirov A.V. Axisymmetric contact problems for non-uniformly aging layered viscoelastic foundations // J. Appl. Math. Mech. 1983. Vol.47. No.4. P.558–566.
2. Манжиров А.В. Об одном методе решения двумерных интегральных уравнений осесимметричных контактных задач для тел со сложной реологией // ПММ. 1985. Т.49. Вып.6. С.1019–1025. = Manzhirov A.V. On a method of solving two-dimensional integral equations of axisymmetric contact problems for bodies with complex rheology // J. Appl. Math. Mech. 1985. Vol. 49. No. 6. P. 777–782.
3. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488 с.
4. Lyubich Yu.I. Functional Analysis I: Linear Functional Analysis (Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol 19). Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag, 1992.

5. Kolmogorov A.N, Fomin S.V. Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis. New York: Dover Publications, 1999.
6. Манжиров А.В. Смешанное интегральное уравнение механики и обобщенный проекционный метод его решения // Докл. РАН. 2016. Т.470. №4. С.401–405. = Manzhirov A.V. A mixed integral equation of mechanics and a generalized projection method of its solution // Dokl. Phys. 2016. Vol. 61. No.10. P.489–493.
7. Manzhirov A.V. Integral equations with several different operators and their application to mechanics // Lecture Notes in Engineering and Computer Science. 2016. Vol.2224. No. 1. P.10–15.
8. Манжиров А.В., Казаков К.Е. О конформном контакте слоистых оснований и штампов // Изв РАН. МТТ. 2008. No.3. С.227–240. = Kazakov K.E., Manzhirov A.V. Conformal contact between layered foundations and punches // Mech. Solids. 2008. Vol. 43. No. 3. P.512–524.
9. Manzhirov A.V., Kazakov K.E. Contact problem for a foundation with a rough coating // Notes in Engineering and Computer Science. 2016. Vol. 2224. No. 1. P. 877–882.
10. Казаков К.Е., Манжиров А.В. Осесимметричный контакт кольцевого шероховатого штампа и поверхностно неоднородного основания // Изв. РАН. МТТ. 2017. №4. С.112–120. = Kazakov K.E., Manzhirov A.V. Axisymmetric contact between an annular rough punch and a surface nonuniform foundation // Mech. Solids. 2017. Vol. 54. No. 4. P. 444–451.
11. Манжиров А.В., Казаков К.Е. Моделирование контактного взаимодействия неоднородного основания с шероховатым штампом // Мат. моделирование. 2017. Т.29. №10. С.95–104. = Manzhirov A.V., Kazakov K.E. Modeling the contact interaction between a nonuniform foundation and a rough punch // Mathematical Models and Computer Simulations. 2018. Vol. 10. No.3. P.314–321.

Сведения об авторах:

Манжиров Александр Владимирович – иностранный член НАН РА, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией моделирования в механике деформируемого твердого тела Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН.
E-mail: manzh@inbox.ru

Казаков Кирилл Евгеньевич – кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник лаборатории моделирования в механике деформируемого твердого тела Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН.
E-mail: kazakov-ke@yandex.ru

ВЛИЯНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА БЕРЕГАХ ТРЕЩИНЫ НА ПРОЦЕСС ФАКТОРИЗАЦИИ

Мартиросян А.Н., Динунц А.С.

В статье рассматривается нестационарная смешанная пространственная задача для трещины, где проводится гораздо более громоздкая процедура факторизации матрицы шестого порядка, и решена система шести интегральных уравнений, а в заключение для напряжения на трещине, в том числе, и вблизи вершины, получаются и вычисляются тройные интегралы. Эти задачи особенно важны для изучения влияния граничных условий на берегах трещины на процесс факторизации.

Уравнения движения в перемещениях для изотропной среды в пространственном случае имеют вид:

$$\left(a_{1,2}^2 - b_{1,2}^2\right)\frac{\partial \vartheta_{1,2}}{\partial x} + b_{1,2}^2 \Delta u_x^{(1,2)} = \frac{\partial^2 u_x^{(1,2)}}{\partial t^2},$$

$$\left(a_{1,2}^2 - b_{1,2}^2\right)\frac{\partial \vartheta_{1,2}}{\partial y} + b_{1,2}^2 \Delta u_y^{(1,2)} = \frac{\partial^2 u_y^{(1,2)}}{\partial t^2},$$

$$\left(a_{1,2}^2 - b_{1,2}^2\right)\frac{\partial \vartheta_{1,2}}{\partial z} + b_{1,2}^2 \Delta u_z^{(1,2)} = \frac{\partial^2 u_z^{(1,2)}}{\partial t^2},$$

$$\vartheta_{1,2} = \frac{\partial u_x^{(1,2)}}{\partial x} + \frac{\partial u_y^{(1,2)}}{\partial y} + \frac{\partial u_z^{(1,2)}}{\partial z}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

где $a_{1,2}^2 = \dfrac{\lambda_{1,2} + 2\mu_{1,2}}{\rho_{1,2}}$; $b_{1,2}^2 = \dfrac{\mu_{1,2}}{\rho_{1,2}}$ – скорости продольных и поперечных волн, $\lambda_{1,2}$, $\mu_{1,2}$ – упругие постоянные, ρ_1, ρ_2 – плотности сред, занимающих верхнее и нижнее полупространства, соответственно.

Начальные условия при $t = 0$ $\vec{u}^{(1,2)} = 0,\ \dfrac{\partial \vec{u}^{(1,2)}}{\partial t} = 0$.

Граничные условия имеют вид $x > 0,\ |y| < \infty,\ z = 0.$

$$\begin{cases} u_x^{(1)} = u_x^{(2)},\ u_y^{(1)} = u_y^{(2)},\ u_z^{(1)} = u_z^{(2)}, \\ \sigma_{xz}^{(1)} = \sigma_{xz}^{(2)},\ \sigma_{yz}^{(1)} = \sigma_{yz}^{(2)},\ \sigma_{zz}^{(1)} = \sigma_{zz}^{(2)}, \end{cases} \quad x < 0,\ z = 0,\ |y| < \infty$$

$$\begin{cases} u_x^{(2)} = 0,\ u_y^{(2)} = 0,\ u_z^{(2)} = C_0 H(x) H(y - \eta') H(t), \\ \sigma_{xz}^{(1)} = 0,\ \sigma_{yz}^{(1)} = 0,\ \sigma_{zz}^{(1)} = 0, \end{cases} \quad x > 0,\ z = 0,\ |y| < \infty$$

где C_0, η' – положительные постоянные, $H(t)$ – единичная функция Хевисайда.

Решение, как и в [1], ищется методом интегральных преобразований и Винера-Хопфа [4], однако, здесь, уже в отличие от [1], коэффициенты матриц систем Винера-Хопфа на бесконечности разрывны. Проводятся устранения этих сингулярностей на действительной оси преобразования Фурье, и для указанных граничных задач получаются системы Винера-Хопфа с непрерывными матрицами шестого порядка

$$\phi^+(\eta,\lambda) = G_3(\eta,\lambda)\phi^-(\eta,\lambda) + g_2(\eta,\lambda)$$

где $G_3^{-1}(\eta,\lambda) = (c_{ij}),\ i,j = 1,..6,\ G_3 = A^{-1}B,\ g_2(\eta,\lambda) = G_3(\eta,\lambda)g_1,\ g_1 = B^{-1}g$

$$g=\begin{pmatrix} d_1\\ d_2\\ d_3\\ d_4\\ d_5\\ d_6\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} \left(\gamma^-\right)^{\frac{3}{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \left(\gamma^-\right)^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \left(\gamma^-\right)^{2\alpha_3} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \left(\gamma^-\right)^{2\alpha_4} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\gamma^-\right)^{2\alpha_2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\gamma^-\right)^{2\alpha_1}\end{pmatrix},$$

$$\phi^+=\begin{pmatrix} \phi_1^+\\ \phi_2^+\\ \phi_3^+\\ \phi_4^+\\ \phi_5^+\\ \phi_6^+\end{pmatrix},\ \phi^-=\begin{pmatrix} \Pi_1^+\\ \Pi_2^+\\ \phi_8^-\\ -\phi_6^-\\ \phi_5^-\\ -\phi_7^-\end{pmatrix}$$

$$d_{1,2}=\mp\frac{p_1C_0}{p_4}-\frac{C_0 i}{4\pi^2},\ d_{3,4}=\mp\frac{2\chi C_0}{4\pi^2\lambda}+\left(\frac{a^2\gamma_2' i}{b^2p_4}+\frac{p_1\eta}{p_4}\right)\frac{C_0 i}{4\pi^2\lambda},$$

$$d_{5,6}=\left(-\frac{p_1\eta}{p_4}+\frac{a^2\gamma_2' i}{b^2p_4}\mp 2\chi i\eta\right)\frac{C_0 i}{4\pi^2\lambda},\ \gamma=\sqrt{1-\lambda^2-\eta^2},\ \gamma_2'=\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-\lambda^2-\eta^2},$$

$$p_1={\gamma_2'}^2-\eta^2-\lambda^2-2\gamma\gamma_2',\ p_2=3{\gamma_2'}^2-\eta^2-\lambda^2-4\gamma\gamma_2',$$

$$p_3=2\lambda^2{\gamma_2'}^2+\left({\gamma_2'}^2-\eta^2-\lambda^2\right)\left({\gamma_2'}^2-\eta^2\right)+4\eta^2\gamma\gamma_2',\ p_4=\gamma\gamma_2'+\eta^2+\lambda^2,$$

$$p_5=2\eta^2{\gamma_2'}^2+\left({\gamma_2'}^2-\eta^2-\lambda^2\right)\left({\gamma_2'}^2-\lambda^2\right)+4\lambda^2\gamma\gamma_2',$$

$$b_{j1}=\frac{1}{4i}a_{j1}-\frac{1}{4}a_{j2}-\frac{a_{j5}}{8\chi i}+\frac{a_{j6}}{8\chi},\ b_{j2}=\frac{1}{4i}a_{j1}-\frac{1}{4}a_{j2}+\frac{a_{j5}}{8\chi i}-\frac{a_{j6}}{8\chi},$$

$$b_{j3}=\frac{1}{4i}a_{j1}+\frac{1}{4}a_{j2}+\frac{a_{j5}}{8\chi i}+\frac{a_{j6}}{8\chi},\ b_{j4}=\frac{1}{4i}a_{j1}+\frac{1}{4}a_{j2}-\frac{a_{j5}}{8\chi i}-\frac{a_{j6}}{8\chi},$$

$$b_{j5}=\frac{a_{j3}+a_{j4}}{2},\ b_{j6}=\frac{a_{j3}-a_{j4}}{2},\gamma^{\pm}=\sqrt{\sqrt{1-\lambda^2}\pm\eta}$$

$$a_{11}=\frac{\lambda\eta p_1}{R_1},\ a_{12}=\frac{\lambda\eta^2p_2}{\gamma_2'R_1},\ a_{13}=\frac{\eta p_3}{\gamma_2'R_1}+1,\ a_{14}=\frac{\left(a^2-b^2\eta^2\right)\gamma+b^2\eta^2\gamma_2'}{b^2\eta p_4}-1,$$

$$a_{15}=\frac{\lambda\left(\gamma-\gamma_2'\right)}{p_4},\ a_{16}=\frac{\lambda p_1}{\eta p_4},\ a_{21}=\frac{\eta\lambda p_1}{R_1},\ a_{22}=\frac{\eta^2\lambda p_2}{\gamma_2'R_1},\ a_{23}=\frac{\eta p_3}{\gamma_2'R_1}-1,$$

$$a_{24}=-\frac{\left(a^2-b^2\eta^2\right)\gamma+b^2\eta^2\gamma_2'}{b^2\eta p_4}-1,\ a_{25}=-\frac{\lambda\left(\gamma-\gamma_2'\right)}{p_4},\ a_{26}=-\frac{\lambda p_1}{\eta p_4},$$

$$a_{31}=2\chi\left(\frac{i\eta^2p_1}{R_1}-\frac{a^2\gamma\eta}{b^2R_1}\right)+1,\ a_{32}=2i\eta\chi\left(\frac{p_5}{\gamma_2'R_1}-\frac{\eta p_1}{R_1}\right)-i,$$

$$a_{33}=2i\eta\chi\left(\frac{\eta\lambda p_2}{\gamma_2'R_1}-\frac{i\lambda p_1}{R_1}\right),\ a_{34}=-\frac{\lambda p_1}{i\eta p_4}-\frac{\gamma-\gamma_2'}{p_4}\lambda,$$

$$a_{35}=-2\chi-\frac{ip_1}{p_4}-\gamma\frac{a^2-b^2\lambda^2}{\eta b^2p_4}-\frac{\gamma_2'\lambda^2}{\eta p_4},\ a_{36}=-2\chi i-\frac{i\gamma_2'a^2}{\eta b^2p_4}-\frac{p_1}{p_4},$$

$$a_{41} = -2\chi\left(\frac{i\eta^2 p_1}{R_1} - \frac{a^2\gamma\eta}{b^2 R_1}\right) + 1,\ a_{42} = -2i\eta\chi\left(\frac{p_5}{\gamma_2' R_1} - \frac{\eta p_1}{R_1}\right) - i,$$

$$a_{43} = -2i\eta\chi\left(\frac{\eta\lambda p_2}{\gamma_2' R_1} - \frac{i\lambda p_1}{R_1}\right),\ a_{44} = -\frac{\lambda p_1}{i\eta p_4} - \frac{\gamma - \gamma_2'}{p_4}\lambda,$$

$$a_{45} = 2\chi + \frac{ip_1}{p_4} + \frac{\left(a^2 - b^2\lambda^2\right)\gamma + b^2\gamma_2'\lambda^2}{\eta b^2 p_4},\ a_{46} = 2\chi i + \frac{\gamma_2' a^2}{i\eta b^2 p_4} - \frac{p_1}{p_4},$$

$$a_{51} = 2\chi\left(\frac{i\eta^2 p_1}{R_1} + \frac{a^2\gamma\eta}{b^2 R_1}\right) + 1,\ a_{52} = 2i\eta\chi\left(\frac{p_5}{\gamma_2' R_1} + \frac{i\eta p_1}{R_1}\right) + i,$$

$$a_{53} = 2\chi\left(\frac{i\eta^2\lambda p_2}{\gamma_2' R_1} - \frac{\lambda\eta p_1}{R_1}\right),\ a_{54} = \frac{i\lambda p_1}{\eta p_4} + \frac{\gamma - \gamma_2'}{p_4}\lambda,$$

$$a_{55} = -2\chi + \frac{ip_1}{p_4} + \frac{\left(a^2 - b^2\lambda^2\right)\gamma + b^2\gamma_2'\lambda^2}{\eta b^2 p_4},\ a_{56} = 2\chi i - \frac{i\gamma_2' a^2}{\eta b^2 p_4} + \frac{p_1}{p_4},$$

$$R_1 = \left(\gamma_2'^2 - \eta^2 - \lambda^2\right)^2 + 4\gamma\gamma_2'\left(\eta^2 + \lambda^2\right),$$

$$a_{61} = -2\chi\left(\frac{i\eta^2 p_1}{R_1} + \frac{\eta\gamma a^2}{b^2 R_1}\right) + 1,\ a_{62} = -2i\chi\eta\left(\frac{p_5}{\gamma_2' R_1} + \frac{i\eta p_1}{R_1}\right) + i,$$

$$a_{63} = -2\chi\left(\frac{i\eta^2 p_2}{\gamma_2' R_1} - \frac{\eta\lambda p_1}{R_1}\right),\ a_{64} = \frac{\gamma - \gamma_2'}{p_4}\lambda + \frac{i\lambda p_1}{p_4\eta},$$

$$a_{65} = 2\chi + \frac{\left(a^2 - b^2\lambda^2\right)\gamma + \gamma_2'\lambda^2}{b^2\eta p_4} + \frac{ip_1}{p_4},\ a_{66} = -2i\chi - \frac{a^2\gamma_2' i}{b^2\eta p_4} + \frac{p_1}{p_4},$$

где порядок особенности, как и в плоском случае, имеет следующий вид: $\alpha_{1,3} = \frac{1}{4} \pm \frac{1}{2\pi i}\ln\chi,\ \alpha_{2,4} = \frac{3}{4} \pm \frac{1}{2\pi i}\ln\chi,\ \chi = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}}$.

Далее, решение приводится к интегральным уравнениям Фредгольма. Факторизуются указанные матрицы [3] и в замкнутой форме получается решение для перемещения и напряжения, причём, при обратном преобразовании Лапласа и Фурье получается эффективная интегральная запись решения для скачков деформаций и напряжений на верхнем и нижнем берегах в форме Смирнова-Соболева [2] при $z = 0,\ x > 0$. Посчитаны напряжения около края трещины:

$$\frac{Jat}{\mu} = \mathrm{Re}\frac{1}{\pi i}\cdot\int_{-5}^{5}\cdot d\lambda\int_{-5}^{5} d\xi\cdot\left\{X^+(\ ,\ )\right\}^{-1} g_2(\ ,\ )\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{\tilde{\eta}}\begin{pmatrix}
0 & 0 & \theta^{-\alpha_3}\frac{1}{8\chi} & -\theta^{-\alpha_4}\frac{1}{8\chi} & \theta^{-\alpha_2}\frac{1}{8\chi} & -\theta^{-\alpha_1}\frac{1}{8\chi} \\
0 & 0 & -i\theta^{-\alpha_3}\frac{1}{8\chi} & i\theta^{-\alpha_4}\frac{1}{8\chi} & i\theta^{-\alpha_2}\frac{1}{8\chi} & -i\theta^{-\alpha_1}\frac{1}{8\chi} \\
0 & 0 & -\frac{1}{4}\theta^{-\alpha_3} & -\frac{1}{4}\theta^{-\alpha_4} & \frac{1}{4}\theta^{-\alpha_2} & \frac{1}{4}\theta^{-\alpha_4} \\
0 & 0 & -\frac{1}{4i}\theta^{-\alpha_3} & -\frac{1}{4i}\theta^{-\alpha_4} & -\frac{1}{4i}\theta^{-\alpha_2} & -\frac{1}{4i}\theta^{-\alpha_1} \\
\frac{1}{2}\theta^{-\bar{\alpha}_1} & -\frac{1}{2}\theta^{-\bar{\alpha}_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2}\theta^{-\bar{\alpha}_1} & \frac{1}{2}\theta^{-\bar{\alpha}_2} & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

где $\theta = -\dfrac{x}{at\tilde{\eta}}$, $\alpha_{1,3} = \dfrac{1}{4} \pm \dfrac{1}{2\pi i}\ln\chi$, $\alpha_{2,4} = \dfrac{3}{4} \pm \dfrac{1}{2\pi i}\ln\chi$, $\chi = \sqrt{\dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}}$

Эти особенности решения вблизи края существенно иные, чем в [1], и кроме того, она больше по порядку, имеется осциллирующая часть.

Вычислены также коэффициенты интенсивности напряжения:

$$I_{1,2,3,4} = \int_{-5}^{5}\left(1 - \frac{y - \eta'}{at}\lambda\right)^{-1+\alpha_{1,2,3,4}} d\lambda \int_{-5}^{5}\left\{X^{-}(\zeta)\right\}^{-1} B^{-1}(\zeta)\frac{1}{C_0}g(\zeta)\,d\zeta,$$

$$I_{5,6} = \int_{-5}^{5}\left(1 - \frac{y - \eta'}{at}\lambda\right)^{-1+\bar{\alpha}_{1,2}} d\lambda \int_{-5}^{5}\left\{X^{-}(\zeta)\right\}^{-1} B^{-1}(\zeta)\frac{1}{C_0}g(\zeta)\,d\zeta$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдоев А.Г., Мартиросян А.Н., Погосян С.М. Решение смешанной граничной задачи для упругого полупространства. //ДАН НАН Армении. 2005. Т.105. №4. С. 31-37.
2. Векуа Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений. М.: Изд.«Наука», 1970. 380с.
3. Мартиросян А.Н. Математические исследования нестационарных линейных граничных задач для сплошных сред. «Зангак-97», 2007. 244с.
4. Нобл Б. Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений с частными производными. М.: ИЛ., 1962. 278с.

Сведения об авторах:

Мартиросян А.Н. – доктор физ.-мат. наук, профессор, Горисский Государственный университет, (093) 19 24 65

Динунц А.С. – кандидат физ.-мат. наук, доцент, Горисский Государственный университет, (077) 33 76 90**,**
E-mail: **dinuntsas@gmail.com**

О СВЕРХЗВУКОВОЙ ЛОКАЛИЗОВАННОЙ ДИВЕРГЕНЦИИ ДОСТАТОЧНО ШИРОКОЙ ПАНЕЛИ СО СВОБОДНЫМ КРАЕМ, СЖАТОЙ ПО ДВУМ НАПРАВЛЕНИЯМ

Мартиросян С.Р.

В статье в линейной постановке исследуется влияние первоначального напряжённого состояния на потерю статической устойчивости невозмущённого состояния равновесия сжатой по двум направлениям достаточно широкой прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край.

Получено аналитическое решение задачи локализованной дивергенции в окрестности свободного края достаточно широкой панели.

1. Рассматривается тонкая упругая прямоугольная пластинка, занимающая в декартовой системе координат $Oxyz$ область $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $-h \le z \le h$. Декартова система координат $Oxyz$ выбирается так, что оси Ox и Oy лежат в плоскости невозмущённой пластинки, а ось Oz перпендикулярна к пластинке и направлена в сторону сверхзвукового потока газа, обтекающего пластинку с одной стороны в направлении оси Ox с невозмущённой скоростью V. Течение газа будем считать плоским и потенциальным.

Пусть край $x = 0$ пластинки свободен, а края $x = a$, $y = 0$ и $y = b$ шарнирно закреплены. Предполагается, что шарниры идеальны.

Будем полагать, что пластинка сжата в своей срединной плоскости силами $N_x = 2h\pm_x$ и $N_y = 2h\sigma_y$, равномерно распределёнными по краям $x = 0$, $x = a$ и $y = 0$, $y = b$ пластинки соответственно, являющимися результатом нагрева, или каких-либо других причин; сжимающие усилия σ_x и σ_y предполагаются постоянными во всей срединной поверхности панели и неменяющимися с изменением прогиба пластинки $w = w(x, y)$ [1].

Прогиб $w = w(x, y)$ пластинки вызовет избыточное давление Δp на верхнюю обтекаемую поверхность пластинки со стороны обтекающего потока газа, которое учитывается приближённой формулой «поршневой теории» [2]: $\Delta p = -a_0\rho_0 V \dfrac{\partial w}{\partial x}$, a_0 – скорость звука в невозмущённой газовой среде, ρ_0 – плотность невозмущённого потока газа. Будем полагать, что прогибы w малы относительно толщины пластинки $2h$.

Выясним условия, при которых наряду с невозмущённой формой равновесия (неизогнутая пластинка) возможна искривлённая форма равновесия (изогнутая пластинка) в случае, в котором изгиб пластинки обусловлен одновременно соответствующими аэродинамическими нагрузками Δp и приложенными по краям $x = 0$, $x = a$ и $y = 0$, $y = b$ пластинки сжимающими силами $N_x = 2h\sigma_x$ и $N_y = 2h\sigma_y$, соответственно.

В предположении справедливости гипотезы Кирхгофа и «поршневой теории» дифференциальное уравнение изгиба сжатой по двум направлениям тонкой, изотропной, прямоугольной пластинки описывается соотношением [1, 3]

$$D\Delta^2 w + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + a_0\rho_0 V \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \tag{1.1}$$

$\Delta^2 w = \Delta(\Delta w)$, Δw – оператор Лапласа; D – цилиндрическая жёсткость.

Граничные условия в принятых предположениях относительно способа закрепления кромок пластинки имеют вид [1, 3]

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + N_x \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = 0; \tag{1.2}$$

$$w = 0, \ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = a; \tag{1.3}$$

$$w = 0, \ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \ \text{при } y = 0, \ y = b; \tag{1.4}$$

ν – коэффициент Пуассона.

Требуется найти наименьшую скорость потока газа – критическую скорость V_{cr}, приводящую к потере статической устойчивости невозмущённого состояния равновесия обтекаемой прямоугольной пластинки с нагружёнными краями в предположении, что напряжения σ_x и σ_y малы по сравнению с критическими напряжениями $(\sigma_x)_{cr.}$ и $(\sigma_y)_{cr.}$, которые могут произвести выпучивание пластинки при отсутствии обтекания: при $V \geq V_{cr}$ устойчивое невозмущённое состояние равновесия пластинки становится статически неустойчивым.

Иными словами, анализ устойчивости плоской формы равновесия обтекаемой сверхзвуковым потоком газа со скоростью V прямоугольной пластинки, сжатой усилиями $\sigma_x < (\sigma_x)_{cr.}$ и $\sigma_y < (\sigma_y)_{cr.}$, сводится к исследованию дифференциального уравнения (1.1) с соответствующими краевыми условиями (1.2)–(1.4) для прогиба $w(x, y)$.

2. Для получения достаточных признаков статической неустойчивости системы «пластинка –поток» общее решение дифференциального уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2) – (1.4), будем искать в виде двойного ряда

$$w(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{4} C_{nk}\exp(\mu_n r_k x)\cdot\sin(\mu_n y)\,,\ \ \mu_n = \pi n b^{-1}\,, \tag{2.1}$$

C_{nk} – произвольные постоянные; n – число полуволн вдоль стороны b пластинки; r_k – корни характеристического уравнения

$$r^4 - 2\cdot(1-\beta_x^2)\cdot r^2 + \alpha_n^3\cdot r + (1-\beta_y^2) = 0\ , \tag{2.2}$$

которое в соответствии с решением Феррари можно представить в виде пары квадратных уравнений:

$$r^2 + \sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\cdot r + q - \sqrt{q^2-1+\beta_y^2} = 0\,, \tag{2.3}$$

$$r^2 - \sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\cdot r + q + \sqrt{q^2-1+\beta_y^2} = 0\,, \tag{2.4}$$

q – действительный корень кубического уравнения – параметр скорости V:

$$8\cdot(q+1-\beta_x^2)(q^2-1+\beta_y^2) - \alpha_n^6 = 0\,. \tag{2.5}$$

Здесь,

$$\alpha_n^3 = a_0\rho_0 V D^{-1}\mu_n^{-3}\,;\ \beta_x^2 = 1/2\cdot N_x D^{-1}\mu_n^{-2}\,;\ \beta_y^2 = N_y D^{-1}\mu_n^{-2}\,. \tag{2.6}$$

С помощью графоаналитических методов исследования характеристического уравнения, записанного в виде (2.2), или в эквивалентной форме (2.3) и (2.4), найден «допустимый» интервал значений параметра скорости $q = q(V)$:

$$q \in \left(\left(\beta_x^2 - 1 + 2\sqrt{(\beta_x^2-1)^2 + 3(1-\beta_y^2)}\right)\Big/3, \infty\right)\ . \tag{2.7}$$

Можно показать, что в интервале значений (2.7) характеристическое уравнение (2.2) имеет два отрицательных корня $r_1 < 0$, $r_2 < 0$ и пару комплексно сопряжённых корней $r_{3,4}$, которые легко находятся, являясь решением квадратных уравнений (2.3) и (2.4), и определяются выражениями:

$$r_{1,2} = -0.5\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \pm \sqrt{\sqrt{q^2-1+\beta_y^2} - 0.5(q-1+\beta_x^2)}\,, \tag{2.8}$$

$$r_{3,4} = 0.5\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \pm i\sqrt{\sqrt{q^2-1+\beta_y^2} + 0.5(q-1+\beta_x^2)}\ . \tag{2.9}$$

Из соотношения (2.5), в силу обозначений (2.6), следует, что скорость потока газа V для достаточно широких прямоугольных пластинок ($a \gg b$) определится выражением

$$V = 2\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)\cdot(q^2-1+\beta_y^2)}\cdot\pi^3 n^3 D(a_0\rho_0 b^3)^{-1}\,. \tag{2.10}$$

Принимая $C_{n3} = C_{n4} = 0$ в общем решении (2.1), согласно условию затухания колебаний на крае $x = a$ [4], получаем общее решение задачи локализованной дивергенции в виде

$$w(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_{n1}\exp(\mu_n r_1 x) + C_{n2}\exp(\mu_n r_2 x)\right)\cdot\sin(\mu_n y)\,, \tag{2.11}$$

в котором корни $r_{1,2}$ определены выражениями (2.8).

Подставляя общее решение (2.11) в граничные условия (1.2), получаем однородную систему алгебраических уравнений второго порядка относительно постоянных C_{n1} и C_{n2}.

Приравненный к нулю определитель этой системы уравнений приводит к дисперсионному уравнению локализованной дивергенции в окрестности свободного края пластинки $x = 0$:

$$F(q,\nu,\beta_x^2,\beta_y^2) = \tag{2.12}$$

$$= \left(q+1-\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}\right)^2 - 2\beta_x^2\left(q-\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}\right) - 2(q+1)\nu - (1-\nu)^2 = 0 .$$

Гиперповерхность (2.12) разграничивает область устойчивости и область локализованной дивергентной неустойчивости в пространстве «существенных» параметров системы «достаточно широкая пластинка- поток» $\left\{q,n,\gamma_*,\nu,\beta_x^2,\beta_y^2\right\}$, в котором $\gamma_* = a\cdot b^{-1} \gg 1$ – параметр отношения сторон прямоугольной пластинки.

Заметим, что зависимость форм потери статической устойчивости невозмущённого состояния равновесия достаточно широких прямоугольных пластин ($\gamma > \gamma_* \gg 1$), и полубесконечной пластины-полосы ($\gamma = \infty$) от параметров системы «пластинка-поток» одна и та же [5].

3. Исследуем дисперсионное уравнение (2.12) в интервале значений (2.7).

С помощью численных методов анализа для различных значений параметров $n,\nu,\beta_x^2,\beta_y^2$ найдены значения первых корней $q_{locdiv} = q(n,\nu,\beta_x^2,\beta_y^2)$ уравнения (2.12) в интервале (2.7) при дополнительном ограничении на критическую скорость при сверхзвуковом обтекании

$$q \in \left(\left(\beta_x^2 - 1 + 2\sqrt{(\beta_x^2-1)^2 + 3(1-\beta_y^2)}\right)\Big/3, \infty\right) \subseteq \left(q(a_0 M_0), \infty\right), \tag{3.1}$$

где $M_0 = \sqrt{2}$ – наименьшее значение числа Маха.

Подставляя значения первых корней $q_{locdiv} = q(n,\nu,\beta_x^2,\beta_y^2)$ уравнения (2.12) в выражение (2.10), получаем приведённые значения критических скоростей локализованной дивергенции $\left\{V_{locdiv} D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)\right\}$, наименьшему значению которых соответствует $n = 1$ при фиксированных значениях остальных параметров. При скоростях потока газа $V \geq V_{locdiv}$ происходит «мягкий» переход от устойчивости к статической неустойчивости в виде локализованной дивергенции в окрестности свободного края сжатой пластинки: обтекание приводит к возникновению дополнительных напряжений, приводящих к «выпучиванию» узкой полосы поверхности пластинки вдоль её свободного края $x = 0$.

Таблица 1

β_x^2 \ β_y^2	0.0	0.1	0.3	0.5	0.8
0.0	143.91	133.23	109.65	83.60	44.30
0.1	130.11	119.74	98.91	75.55	37.52
0.3	105.05	95.23	76.86	57.65	26.65
0.5	76.87	69.76	54.35	41.77	15.11

Ограниченность объёма статьи не позволяет привести полученные результаты полностью.

Анализ численных результатов решения исходной задачи показал, что локализованная дивергенция имеет место при всех значениях коэффициента Пуассона ν и при значениях $\beta_x^2 \in [0, 0.8)$, $\beta_y^2 \in [0, 0.9)$. При этом, приведённая критическая скорость локализованной дивергенции $V_{locdiv} D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$ меньше в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν.

В табл.1 представлены значения приведённой критической скорости локализованной дивергенции $V_{locdiv} D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$ для $\nu = 0.3$ и некоторых значений коэффициентов напряжения β_x^2 и β_y^2. Из данных табл.1 видно, что при фиксированном значении коэффициента напряжения β_x^2

с увеличением коэффициента напряжения β_y^2 от 0 до 0.9 приведённая критическая скорость $V_{locdiv}D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$ уменьшается в $3-5$ раз , а при фиксированном значении коэффициента β_y^2 с увеличением коэффициента напряжения β_x^2 от 0 до 0.8 приведённая критическая скорость $V_{locdiv}D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$ уменьшается в 2 раза. Это указывает на существенное дестабилизирующее действие первоначального напряжённого состояния, обусловленного сжимающими силами, на устойчивость плоской формы равновесия обтекаемой достаточно широкой пластинки.

Таким образом, начальное напряжённое состояние сжатой по двум направлениям обтекаемой пластинки оказывает сушественное дестабилизирующее действие на устойчивость её невозмущённой формы равновесия, в сравнении с обтекаемой панелью с ненагруженными краями [5]: приводит к «скачкообразному» падению значений критической скорости локализованной дивергенции в несколько раз.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. М.: Физматгиз, 1963. 880 с.
2. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях // ПММ. 1956. Т.20. № 6. С.733–755.
3. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Наука, 1961. 329 с.
4. Коненков Ю.К. Об изгибной волне «релеевского» типа. // Акустический журнал. 1960. Т.6. № 1. С.124–126.
5. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О флаттере упругой прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край. // Изв. НАН Армении. Механика. 2014. Т.67. № 2. С.12 - 42.

Сведения об авторе:

Мартиросян Стелла Размиковна – кандидат физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения (+374 10) 524890
E-mail: mechinsstella@mail.ru

НАПРЯЖЁННОЕ СОСТОЯНИЕ СОСТАВНОЙ ЗАМКНУТОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ОБОЛОЧКИ С УЧЁТОМ НЕОДНОРОДНОГО СТАРЕНИЯ

Мирзоян Е.С., Мирзоян С.Е., Давтян З.А.

Как известно, теория ползучести неоднородно наследственно-стареющих тел [1, 2, 3] наиболее точно отражает физико-механические процессы, которые происходят в телах и конструкциях, изготовленных из стареющих вязкоупругих материалов. В рамках этой теории и рассматривается задача о напряженно-деформированном состоянии замкнутой составной (трехслойной) сферической оболочки, нагруженной изнутри и извне равномерно распределенными радиальными давлениями. Решение поставленной задачи сводится к решению системы двух интегральных уравнений Вольтерра второго рода относительно двух контактных радиальных напряжений, возникающих между слоями. После определения неизвестных контактных радиальных напряжений, определяется напряжённо-деформированное состояние составной сферической оболочки. Рассмотрены частные случаи задачи, имеющие самостоятельный интерес. В некоторых задачах система интегральных уравнений Вольтерра сведена к одному интегральному уравнению Вольтерра второго рода, которое решается в замкнутом виде.

1. Рассмотрим вязкоупругую замкнутую сферическую оболочку, состоящую из трёх отдельных замкнутых сферических оболочек (слоёв) с различными материалами и возрастов, спаянных по поверхностям их соприкосновения. Пусть эта составная оболочка (трёхслойный вязкоупругий полый шар) в момент времени $t = \tau_0$ изнутри и извне загружён равномерно распределёнными радиальными давлениями интенсивностей $P_0(t)$ и $P_3(t)$, соответственно:

$$\sigma_r(r,t)|_{r=r_0} = -P_0(t), \quad \sigma_r(r,t)|_{r=r_3} = -P_3(t) \tag{1}$$

В условиях совместной работы между слоями возникнут только радиальные силы взаимодействия. При этом, в силу симметрии касательные напряжения будут равны нулю.

Принимается, что слои имеют разные вязкоупругие характеристики и постоянные возрасты τ_1, τ_2 и τ_3 соответственно.

Требуется определить неизвестные контактные радиальные напряжения $P_1(t)$ и $P_2(t)$, возникающие между слоями.

Для вывода определяющих уравнений поставленной задачи рассмотрим равновесие каждого слоя в отдельности.

Тогда для определения упруго-мгновенных напряжений и перемещений слоёв имеем [4,5]:

$$U_r^{(k)}(r,t) = A_k(t)r + B_k(t)/r^2 \tag{2}$$

$$\begin{gathered} \sigma_r^{(k)}(r,t) = \frac{E_k(t)}{1-2\vartheta_k}A_k(t) - \frac{2E_k(t)}{(1+\vartheta_k)r^3}B_k(t) \\ \sigma_\theta^{(k)}(r,t) = \sigma_\varphi^{(k)}(r,t) = \frac{E_k(t)}{1-2\vartheta_k}A_k(t) + \frac{E_k(t)}{(1+\vartheta_k)r^3}B_k(t) \end{gathered} \tag{3}$$

$$\sigma_r^{(k)}(r,t)\Big|_{r=r_{k-1}} = -P_{k-1}(t), \quad \sigma_r^{(k)}(r,t)\Big|_{r=r_k} = -P_k(t) \quad (k = 1,2,3) \tag{4}$$

Здесь $A_k(t)$ и $B_k(t)$ – пока неизвестные коэффициенты, подлежащие определению, $U_r^{(k)}(r,t)$ – упруго-мгновенные радиальные перемещения k – ого слоя, $P_1(t)$ и $P_2(t)$ - неизвестные радиальные контактные напряжения, соответственно, на линиях $r = r_1$ и $r = r_2$ слоев, ϑ_k - коэффициенты Пуассона материалов слоев, $E_k(t)$ – упруго-мгновенный модуль деформации.

Удовлетворяя граничным условиям (4) и подставляя полученные значения $A_k(t)$ и $B_k(t)$ $(k = 1,2)$ для напряжений и перемещений слоев, из (2) и (3) получим выражения:

$$\begin{gathered} U_r^{(k)}(r,t) = \frac{2(1-2\vartheta_k)}{E_k(t)l_k}\left[r_{k-1}^3P_{k-1}(t) - r_k^3P_k(t)\right]r + \frac{(1+\vartheta_k)r_k^3r_{k-1}^3}{r^2E_k(t)l_k}\left[P_{k-1}(t) - P_k(t)\right] \\ \sigma_r^{(k)}(r,t) = \frac{2\left[r_{k-1}^3\left(r^3-r_k^3\right)P_{k-1}(t)+r_k^3\left(r_{k-1}^3-r^3\right)P_k(t)\right]}{r^3l_k} \\ \sigma_\theta^{(k)}(r,t) = \sigma_\varphi^{(k)}(r,t) = \frac{2\left[r_{k-1}^3P_{k-1}(t)-r_k^3P_k(t)\right]}{l_k} + \frac{r_k^3r_{k-1}^3\left[P_{k-1}(t)-P_k(t)\right]}{r^3l_k} \\ l_k = 2\left(r_k^3 - r_{k-1}^3\right) \qquad (k = 1,2,3) \end{gathered} \tag{5}$$

Условия непрерывности радиальных перемещений на соприкасающихся поверхностях сферической оболочки $r = r_k \quad (k = 1,2)$, с учётом ползучести принимают вид:

$$(I - L_k)U_r^{(k)}(r,t) = (I - L_{k+1})U_r^{(k+1)}(r,t) \qquad (k = 1,2) \tag{6}$$

Здесь

$$L_i[Y(t)] = \int_{\tau_0}^{t} E_i^*(\tau)K_i^*(t,\tau)Y(\tau)\,d\tau, \qquad K_i^*(t,\tau) = K_i(t + \rho_i, \tau + \rho_i),$$

$$E_i^*(\tau) = E_i(\tau + \rho_i), \;\; \rho_i = \tau_i - \tau_0 \quad K_i(t,\tau) = \frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{E_i(\tau)} + C_i(t,\tau)\right] \quad (i = 1,2,3)$$

где τ_i – возрасты, $C_i(t,\tau)$– меры ползучести слоёв ($i = 1,2,3$), а I – единичный оператор.

После некоторых преобразований из (6) с учётом (5) получим систему

$$\begin{cases} (1 - L_1)\frac{a_1P_0(t) - b_1P_1(t)}{E_1(t)} = (1 - L_2)\frac{a_2P_1(t) - b_2P_2(t)}{E_2(t)} \\ (1 - L_2)\frac{a_3P_1(t) - b_3P_2(t)}{E_2(t)} = (1 - L_3)\frac{a_4P_2(t) - b_4P_3(t)}{E_3(t)} \end{cases} \tag{7}$$

где

$$\begin{aligned} &a_1 = 3(1 - \vartheta_1)r_0^3r_1/l_1\,,\; b_1 = [2(1 - 2\vartheta_1)r_1^3 + (1 + \vartheta_1)r_0^3]r_1\,/l_1\,, \\ &a_2 = [2(1 - 2\vartheta_2)r_1^3 + (1 + \vartheta_2)r_2^3]r_1\,/l_2\,,\; b_2 = 3(1 - \vartheta_2)r_2^3r_1/l_2\,, \\ &a_3 = 3(1 - \vartheta_2)r_1^3r_2/l_2\,,\; b_3 = [2(1 - 2\vartheta_2)r_2^3 + (1 + \vartheta_2)r_1^3]r_2\,/l_2\,, \\ &a_4 = [2(1 - 2\vartheta_3)r_2^3 + (1 + \vartheta_3)r_3^3]r_2\,/l_3\,,\; b_4 = 3(1 - \vartheta_3)r_3^3r_2/l_3 \end{aligned} \tag{8}$$

Таким образом, для определения неизвестных контактных радиальных напряжений между слоями сферической оболочки получается система двух интегральных уравнений Вольтерра второго рода с двумя неизвестными $P_1(t)$ и $P_2(t)$. После определения неизвестных $P_1(t)$ и $P_2(t)$, по формулам (5) определяется напряжённо-деформированное состояние составной вязкоупругой сферической оболочки.

Отметим, что ядра, входящие в (7), являются вырожденными, и поэтому система интегральных уравнений Вольтерра второго рода (7) допускает численную реализацию.

2. Рассмотрены некоторые частные случаи задачи, имеющие практический интерес. Исследованы задачи при разных комбинациях вязкоупругих слоёв составной оболочки.

В случае, когда внутренний и внешний вязкоупругие слои одинаковые, а срединный слой изготовлен из несжимаемого вязкоупругого материала, систему (7) удаётся свести к одному интегральному уравнению Вольтерра второго рода относительно одного из неизвестных радиальных контактных напряжений следующего вида:

$$A(t)q(t) - \int_{\tau_0}^{t}[A_1K_1^*(t,\tau) + A_2K_2^*(t,\tau)]q(\tau)\,d\tau = F(P_0(t), P_3(t)) \tag{9}$$

После определения неизвестного контактного напряжения из уравнения (9), другой неизвестный определяется из алгебраического уравнения вида:

$$q_1(t) = -aq(t) + bP_0(t) + cP_3(t) \tag{10}$$

Отметим, что при ядрах типа (6) интегральное уравнение Вольтерра типа (9) решается замкнуто [5,6,7].

Таким образом, в рассмотренном частном случае получено замкнутое решение поставленной задачи.

Отметим также, что из решения этой задачи, в частности, получаются замкнутые решения следующих задач:

а) Средний слой составной оболочки – упругий, остальные слои – вязкоупругие.

б) Внутренний и внешний слои составной оболочки упругие, а срединный – вязкоупругий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н.Х. Некоторые задачи теории ползучести для неоднородно-стареющих тел. //Изв. АН СССР. МТТ. 1976. №3. С.153-164.
2. Арутюнян Н.Х., Колмановский В.Б. Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука,1983. 336с.
3. Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В. Контактные задачи теории ползучести. Ереван: 1999, 320 с.
4. Рекач В.Г. Руководство к решению задач по теории упругости. М.: ВШ, 1984. 287 с.
5. Мирзоян С.Е. Задача Ламе для двухслойного вязкоупругого полого шара с учетом неоднородного старения. //В сб.: «Исследование по механике твердого деформируемого тела», Ереван: Изд. АН АрмССР, 1983. С.112-119.
6. Мирзоян С.Е., Мхитарян С.М. О некоторых задачах контактного взаимодействия между бесконечными стрингерами и полосами с учётом неоднородности старения материалов. //Изв. АН АрмССР. Механика. 1981.Т.34. №5. С.27-40.
7. Давтян З.А., Мхитарян С.М. О двух контактных задачах кручения цилиндров при помощи цилиндрических оболочек с учетом их вязкоупругих свойств. //Изв. АН АрмССР. Механика. 1984. Т.37. №3. С.3-17.

Сведения об авторах:

Мирзоян Езник С. – кандидат физ-мат. наук, доцент ЕГУ,
Адрес: 0025, Ереван, ул. Алека Манукяна 1. **Тел.:** (+37410) 551334,
E-mail: mirzoyan@ysu.am
Мирзоян Саак Е. – кандидат физ-мат. наук, ст. научн. сотр., Институт механики НАН РА
Адрес: 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2. **Тел.:** (+37410) 524890,
E-mail: mechins@sci.am
Давтян Завен А.– кандидат физ-мат. наук, ст. научн. сотр., Институт механики НАН РА
Адрес: 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2. **Тел.:** (+37410) 524890,
E-mail: mechins@sci.am

НАПРЯЖЁННОЕ СОСТОЯНИЕ ВОЗЛЕ ПРОИЗВОЛЬНО ОРИЕНТИРОВАННЫХ ТРЕЩИН НА ПРОДОЛЖЕНИИ ЖЁСТКОГО ВКЛЮЧЕНИЯ ПРИ ДЕЙСТВИИ СДВИГАЮЩЕЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ СИЛЫ

Мишарин А.С., Попов В.Г.

Решена задача об определении динамических коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) для трещин, которые расположены под углом от концов включения. Включение расположено в неограниченном упругом теле, находящемся в условиях деформации продольного сдвига, где происходят гармонические колебания, вызванные приложенной к включению сдвигающей силы. Исходная задача сводится к решению системы сингулярных интегрально-дифференциальных уравнений с неподвижными особенностями. Для численного решения системы разработан метод, который учитывает реальную асимптотику неизвестных функций и использует специальные квадратурные формулы для сингулярных интегралов.

Введение. В сфере строительных технологий и машиностроении конструкции и детали машин довольно часто содержат элементы или технологические дефекты, которые можно рассматривать как тонкие включения большой жёсткости. Но, как показывают исследования [1], тонкие жёсткие включения вызывают значительную концентрацию напряжений в окружающей среде, которая может привести к образованию трещин, распространяющихся под некоторыми углами, относительно плоскости включения. Исследование коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) для трещины на продолжении включения, которые расположены на одной линии, в статической постановке, изучались в работах [2], [3], [4]. Аналогичная задача для полуплоскости с трещиной на продолжении включения решена в [5]. Задачи по определению динамического напряжённого состояния возле дефектов, представляющих собой тонкие включения, от концов которого под некоторыми углами отходят трещины, почти не решались. Это связано со сложностями, которые возникают при решении интегрально-дифференциальных уравнений с неподвижными особенностями. В работах [6], [7], [8] решены задачи определения динамического напряжённого состояния в окрестности V-подобных трещин и включений, а также трещин в виде ломанных. Там же предложен численный метод решения интегральных и интегро-дифференциальных уравнений с неподвижными особенностями. Этот метод учитывает реальную асимптотику решения в окрестности особых точек и основан на использовании для сингулярных интегралов специальных квадратурных формул. В данной работе подобный метод применён при решении следующей задачи.

Постановка задачи. Рассматривается неограниченная упругая среда, находящаяся в условиях антиплоской деформации. В среде содержится сквозное тонкое абсолютно жёсткое включение, от которого под произвольным углом выходят трещины. В плоскости Oxy включение и трещины расположены как показано на рис. 1. На включение действует сдвигающая сила $P = P_0 e^{-i\omega t}$, где ω – частота колебаний. Множитель $e^{-i\mu t}$, который определяет зависимость от времени, далее всюду опущен. При таких условиях неизвестной является z-компонента вектора перемещений $w(x, y)$, удовлетворяющая уравнению Гельмгольца:

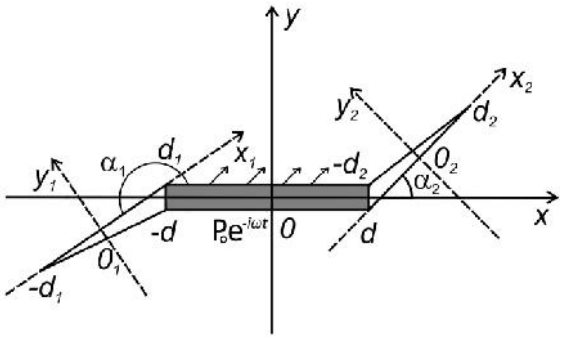


Рис. 1.

$$\Delta w + \kappa_2^2 w = 0,\ \kappa_2^2 = \frac{\rho\omega^2}{G} \qquad (1.1)$$

где Δ – оператор Лапласа в системе координат Oxy. Это уравнение следует рассматривать с граничными условиями на дефектах, для формирования которых с каждым из дефектов связывается локальная система координат: $O_l x_l y_l$, $l = 1, 2$, центр которой совпадает с серединой соответствующей трещины (рис. 1).

Пусть $w_l(x_l, y_l), l = 1, 2$ – перемещение в системе координат связанной с l-трещиной. Тогда, при отсутствии на берегах трещин нагрузки, должны выполняться равенства:

$$\tau_{y_l z}(x_l,0)=0,\ x_l\in\left[-d_l,d_l\right],\ l=1,2\,. \tag{1.2}$$

Также на поверхности трещин перемещения $w_l(x_l,y_l),\ l=1,2$ терпят разрывы с неизвестными скачками, для которых вводятся обозначения:

$$w_l(x_l,+0)-w_l(x_l,-0)=\chi_l(x_l),\ x_l\in\left[-d_l,d_l\right],\ l=1,2\,. \tag{1.3}$$

Граничные условия на включении сформулируем из условий идеального сцепления:

$$w(x,0)=a,\ x\in\left[-d,d\right], \tag{1.4}$$

где a – неизвестная амплитуда продольных (вдоль оси Oz) колебаний включения. На поверхности включения напряжение $\tau_{yz}(x,y)$ имеет разрыв с неизвестным скачком, для которого вводится обозначение:

$$\tau_{yz}(x,+0)-\tau_{yz}(x,-0)=\chi(x),\ x\in\left[-d,d\right]. \tag{1.5}$$

Неизвестная амплитуда определяется из уравнения:

$$-m\omega^2 a=\int_{-d}^{d}\chi(\eta)d\eta+P\ ,\ m=2d\rho_v h\,. \tag{1.6}$$

Метод решения. Для решения этой задачи в системе координат, связанной с дефектами, строятся разрывные решения уравнения (11.) со скачками (1.3) и (1.5). Эти разрывные решения находятся по формулам [9]:

$$w^d(x,y)=\int_{-d}^{d}\frac{\chi(\eta)}{G}r_2(\eta-x,y)d\eta,\ w_l^d(x_l,y_l)=\int_{-d_l}^{d_l}\chi_l(\eta)\frac{\partial}{\partial y_l}r_2(\eta-x_l,y_l)d\eta, \tag{1.7}$$

$$r_2(\eta-x,y)=-\frac{i}{4}H_0^{(1)}\left(\kappa_2\sqrt{(\eta-x)^2+y^2}\right).$$

Перемещение ищется в виде суперпозиции:

$$w(x,y)=w^d(x,y)+w_1^g(x,y)+w_2^g(x,y)\,, \tag{1.8}$$

где $w_l^g(x,y),\ l=1,2$ находятся по формулам (1.7) после перехода в них к координатам Oxy. Чтобы окончательно определить перемещения дифракционного поля, необходимо отыскать неизвестные скачки (1.3), (1.5). Для этого следует воспользоваться условиями (1.2), (1.4). При этом, равенство (1.4) заменим двумя эквивалентными равенствами:

$$\frac{\partial w^d(x,0)}{\partial x}=0\ ,\ \ w^d(d,0)=a\ . \tag{1.9}$$

После подстановки (1.8) в граничные условия (1.2) и (1.9) получаем систему интегро-дифференциальных уравнений относительно неизвестных скачков. Эта система после выделения сингулярных составляющих ядер и перехода к промежутку $[-1,1]$ имеет вид:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\frac{S(\tau,\zeta)}{\tau-\zeta}+G(\tau,\zeta)+R(\tau,\zeta)\right)F(\tau)d\tau+\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\left(\kappa_0^2 D\ln\left|\tau-\zeta\right|+R_0(\tau,\zeta)\right)\Phi(\tau)d\tau=0,\\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1}\varphi_0(\tau)\left[\gamma\ln\left|1+\tau\right|+R_1(\tau)\right]d\tau-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi_2(\tau)R_2(\tau)d\tau=-\frac{P_1}{4\varepsilon\kappa_0^2\gamma^2\overline{\rho}},\end{cases} \tag{1.10}$$

где

$F(\tau)=(\varphi_0(\tau),\varphi_1{}'(\tau),\varphi_2{}'(\tau))^T=(f_0(\tau),\ f_1(\tau),\ f_2(\tau))^T$, $\Phi(\tau)=(0,\varphi_1(\tau),\varphi_2(\tau))^T$;

$S(\tau,\zeta)$ – диагональная матрица с элементами $q_0(\tau,\zeta)\equiv-1, q_l(\tau,\zeta)=\dfrac{1+(-1)^l\tau}{1+(-1)^l\zeta}, l=1,2$, по диагонали; $G(\tau,\zeta)=\{g_{lj}(\tau,\zeta)\}, l,\ j=0,1,2$ – матрица, ненулевые элементы которой равны:

$$g_{10}(\tau,\zeta)=\frac{\gamma\sin\beta_1\tau^+}{p_1(\tau^+,\zeta^-)},g_{20}(\tau,\zeta)=\frac{\gamma\sin\beta_2\tau^-}{p_2(\tau^-,\zeta^+)},g_{01}(\tau,\zeta)=\frac{-\tau^-}{p_1(\zeta^+,\tau^-,)},g_{02}(\tau,\zeta)=\frac{\tau^+}{p_2(\zeta^-,\tau^+,)};$$

D – диагональная матрица с элементами $0, \gamma_l^2, l = 1,2$ по диагонали;

$p_j(x,y) = \gamma^2 x^2 + 2\gamma\gamma_j xy\cos\beta_j + \gamma_j^2 y^2,\ j = 1,2, \tau^{\pm} = 1 \pm \tau, \zeta^{\pm} = 1 \pm \zeta, P_1 = P_0 b^{-1}.$

$f_l(\tau) = d_l^{-1}\chi_l(\eta), x_l = d_l\zeta, \eta = d_l\tau, \gamma_l = d_l b^{-1},\ f_0(\tau) = G^{-1}\chi(\eta), \eta = d\tau, \gamma = db^{-1}, b = \max(d, d_l),$

Матрицы $R(\tau,\zeta)$ и $R_0(\tau,\zeta)$ состоят из функций, определяющих регулярные интегралы.

Приближённое решение системы интегро-дифференциальных уравнений. Наличие в сингулярной составляющей системы (1.10) неподвижных особенностей влияет на поведение ее решения в окрестности точек $\zeta = \pm 1$ [10]. Асимптотика решения в окрестности этих точек определяется по методике, изложенной в [11]. В результате установлено, что неизвестные функции необходимо разыскивать в виде:

$$(f_l(\tau))' = \left(1 + (-1)^l \tau\right)^{\delta_l} \left(1 - (-1)^l \tau\right)^{-\frac{1}{2}} \psi_l(\tau),\ l = 1,2,\ f_0(\tau) = \left(1+\tau\right)^{\delta_1}\left(1-\tau\right)^{\delta_2}\psi_0(\tau), \tag{1.11}$$

где степенные показатели находятся по формулам:

$$\delta_l = -\frac{\pi + 2\beta_l}{2(\pi + \beta_l)}, 0 < \beta_l < \pi, l = 1,2, \beta_1 = \alpha_1 - \pi,\ \beta_2 = \alpha_2.$$

При этом, чтобы функции с такими особенностями были решениями системы (1.10), должны выполняться равенства [11]:

$$\psi_1(1) = \psi_2(-1), \psi_1(-1) = \psi_2(1). \tag{1.12}$$

а функции $\psi_l(\tau), l = 0,1,2$ считаются такими, что удовлетворяют условию Гельдера на промежутке $[-1,1]$. Дальнейшее решение базируется на аппроксимации этих функций интерполяционными многочленами:

$$\psi_l(\tau) = \sum_{m=1}^{n} \psi_{lm} \frac{P_{\ln}(\tau)}{(\tau - \tau_{lm})[P_{\ln}(\tau_{lm})]'}, l = 0,1,2, \tag{1.13}$$

где $\psi_{lm} = \psi_l(\tau_{lm}), P_{0n}(\tau) = P_n^{\delta_2,\delta_1}(\tau), P_{1n}(\tau) = P_n^{-\delta,-1/2}(\tau), P_{2n}(\tau) = P_n^{-1/2,-\delta}(\tau)$ – многочлены Якоби, а τ_{lm} – корни этих многочленов.

Для интегралов с ядром Коши применим следующие квадратурные формулы [12]:

$$\int_{-1}^{1} \frac{q_l(\tau,\zeta_{lk})(f_l(\tau))}{\tau - \zeta_{lk}} d\tau = \sum_{m=1}^{n} \frac{A_{lm} q_l(\tau_{lm},\zeta_{lk})\psi_{lm}}{\tau_{lm} - \zeta_{lk}}, k = 1,...,n-1, l = 0,1,2, \tag{1.14}$$

где ζ_{lk} – нули соответствующих функций Якоби второго рода $J_n^{\delta_2,\delta_1}(\tau)$, $J_n^{\delta_1,-1/2}(\tau)$, $J_n^{-1/2,\delta_2}(\tau)$, а A_{lm} – коэффициенты соответствующих квадратурных формул Гаусса-Якоби [13].

Далее аналогичные формулы необходимо получить для интегралов с неподвижными особенностями:

$$E_{lj} = \int_{-1}^{1} f_l(\tau) g_{lj}(\tau,\zeta) d\tau, l = 0,1,2. \tag{1.15}$$

Если $1 \pm \zeta > \varepsilon > 0$, то функции входящие в матрицу $G(\tau,\zeta_{lj})$, являются бесконечно-дифференцируемыми и к интегралам (1.15) можно применить квадратурные формулы Гаусса-Якоби. Основная проблема состоит в вычислении этих интегралов при $1 \pm \zeta \to 0$. Для этого используются представления (1.11), (1.13) и интегралы (1.15) находятся методом, базирующимся на применении теоремы о свёртке для интегрального преобразования Меллина [14]. Окончательно, формулы для вычисления интегралов с неподвижными особенностями при $\zeta = \zeta_{jk}$ имеют вид:

$$E_{lj} = (-1)^l \sum_{m=1}^{n} \psi_{lm} S_{mk}^{lj}, l = 0,1,2 \tag{1.16}$$

$$S_{mk}^{lj} = \sum_{p=1}^{3} B_p^{lj}(\tau_{lm},\zeta_{jk}) h_p^{lj}\left(r_{lj}^k\right)/n!, \varepsilon > r_{lj} > 0, r_{0j} = \gamma_j(1 + (-1)^j \zeta_{jk})/(2\gamma), r_{l0} = \gamma(1 + (-1)^l \zeta_{lk})/(2\gamma_l),$$

$$B_1^{0j}(x,y)=A_{0j}^m z_{0j}(x,y)n!,\ B_1^{l0}(x,y)=A_{l0}^m\gamma_l^2(1+(-1)^l x)\cos\beta_l n!/\ p_l(x,y)$$

$$B_p^{0j}(x,y)=z_{0j}(x,y)[(1+(-1)^j x)^{3-p}\gamma_j^2 y^2-x^{3-p}p_j(x,y)]/(x^{3-p}(1+x)[P_n^{\delta_{3-j},\delta_j}(x)]'),$$

$$B_p^{l0}(x,y)=[(1+(-1)^l x)^{3-p}\gamma_l^2 y^2+((-1)^l p_l(x,y))^{3-p}]\cos\beta_l/(xp_l(x,y)[P_n^{\delta_{3-l},\delta_l}(x)]'),$$

$$z_{0j}(x,y)=\gamma(1+(-1)^j x)+\gamma_j(1+(-1)^j y)\cos\beta_l/\ p_l(x,y),\ \ h_1^{lj}(y)\equiv 1,$$

$$h_p^{0j}(y)=2^{\delta_j+\delta_{3-j}}\Gamma(\delta_{3-j}+n+1)/(\gamma^2\sin(\beta_j)\sin(\pi\delta_j))(\sin(\pi\delta_{3-j})\sum_{s=0}^{\infty}c_{sp}^{0j}y^{s+\delta_j}-\sin(\pi(\delta_j+\delta_{3-j}))\sum_{s=0}^{\infty}d_{sp}^{0j}y^s),$$

$$h_p^{l0}(y)=-2^{\delta_l-0.5}\Gamma(n+0.5)/(\gamma_l^2\sin(\beta_l))(\pi/\sin(\pi\delta_l)\sum_{s=0}^{\infty}c_{sp}^{l0}y^{s+\delta_l}-\sum_{s=0}^{\infty}d_{sp}^{l0}y^s),l,j=1,2,p=2,3.$$

$$c_{sp}^{0j}=(-1)^{s+1}\Gamma(s-\delta_j-n)b_{sp}^j,c_{sp}^{l0}=b_{sp}^l/\Gamma(n-s+0.5),b_{sp}^i=\frac{\Gamma(\delta_i+s+n+1)\sin(\beta_i(\delta_i+s+p-2))}{s!\Gamma(s+\delta_i+1)}$$

$$d_{sp}^{0j}=u_{sp}^j\Gamma(s-\delta_j-\delta_{3-j}-n+p-2)(n+s+p-2)!\Gamma(s-\delta_{3-j}-n)/\Gamma(s-\delta_j+1),$$

$$d_{sp}^{l0}=u_{sp}^l\Gamma(\delta_l+s+p-2)/\Gamma(\delta_l-s+n+0.5),u_{sp}^i=(-1)^{s+1}\sin(\beta_i(s+1))/(s+p-2)!$$

Таким образом, при $1-(-1)^l\zeta_{lk}\to 0, l=1,2$ и $1\pm\zeta_{0k}\to 0$ интегралы (16) представляются быстро сходящимися степенными рядами.

Для вычисления интегралов, которые содержат непосредственно неизвестные функции $f_l(\tau), l=0,1,2$, и для интегралов с логарифмической функцией применяются формулы из [15].

Применение квадратурных формул (1.14), (1.16), а также формул Гаусса-Якоби, приводит к замене системы интегро-дифференциальных уравнений (1.10) системой линейных алгебраических уравнений относительно значений функций $\psi_l, l=0,1,2$ в узлах интерполяции.

Для механики разрушения наибольший интерес представляют коэффициенты интенсивности напряжений (КИН):

$$K_1=\lim_{x_1\to -d_1-0}\sqrt{-x_1-d_1}\cdot\tau_{y_1z}^d(x_1,0),K_2=\lim_{x_2\to d_2+0}\sqrt{x_2-d_2}\cdot\tau_{y_2z}^d(x_2,0). \tag{1.17}$$

Через решение системы приближённые значения КИН выражаются формулами:

$$K_l=-G\sqrt{d_l}\,2^{\delta_l-1}\psi_l((-1)^l),\ l=1,2. \tag{1.18}$$

Анализ численных результатов и выводы. При проведении числовой реализации, во-первых, ставилась цель исследовать практическую сходимость предложенного метода численного решения. Для этого рассмотрен дефект, показанный на рис.1, при $\alpha_1=\pi+\beta,$. $\alpha_2=\beta,\beta_1=\beta_2=\beta.$ Трещины и включение имеют одинаковую длину $d=d_l, l=1,2$.

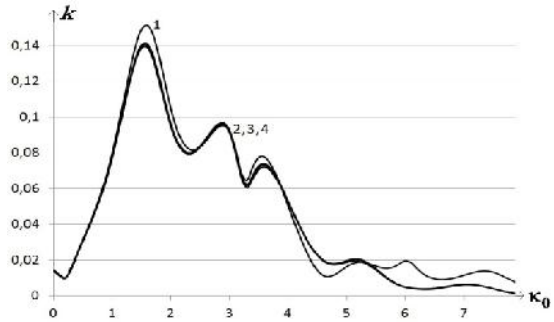


Рис. 2.

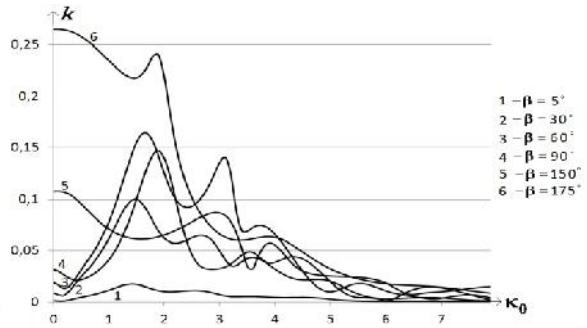


Рис. 3.

По формулам (1.18) рассчитаны безразмерные значения КИН ($k_l=K_lG^{-1}/\sqrt{d_l}, l=1,2$). Причём, в результате симметрии имеем: $k_1=k_2=k$. Вычисление выполнено при значении угла $\beta=45^{\circ}$. Результаты вычислений приведены в виде графиков зависимости абсолютной величины КИН от безразмерного волнового числа $\kappa_0=\kappa_2 b, b=\max(d,d_l)$. Значения $n=5,10,15,20$ соответствуют количеству узлов интерполяции в формуле (1.13). При

получении значений КИН с погрешностью, не превышающей $0{,}1\%$, хватает до 20 узлов интерполяции в (1.13). А для волн с малой частотой $\kappa_0 \le 1{,}5$ достаточно и 5 узлов (см. рис. 2). Проведено исследование влияния расположения трещин на значение КИН при изменении значений угла β в зависимости от безразмерного значения волнового числа при действии сдвигающей гармонической силы. При увеличении угла β, при малых значениях частоты, наблюдается увеличение значений КИН. Наименьшие значения КИН наблюдаются при выходе на случай, когда дефекты лежат на одной прямой. В целом, в результате сложности волнового поля, возникшего при действии сдвигающей гармонической силы, зависимость КИН от частоты имеет существенные максимумы, на величину и положение которых влияет конфигурация дефекта.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сулим Г.Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями / Сулим Г. Т. - Львів: Дослід.-видав. центр НТШ. - 2007. - 716 с.
2. Бережницкий Л.Т., Панасюк В.В., Стащук Н.Г. Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле. - Киев: Наук. Думка, 1983. - 288с.
3. Бережницкий Л.Т., Стащук Н.Г. Коэффициенты интенсивности напряжений около трещины на продолжении линейного жесткого включения// Докл. АН УССР. Сер. А. -1981.- №11. - С. 30-46.
4. Бережницкий Л.Т., Стащук Н.Г., Громяк Р.С. К определению критического размера макротрещины, возникающей на продолжении линейного жесткого включения // Пробл. Прочности.-1989. - № 2. С. 68-71.
5. Акопян В. Н. Напряжённое состояние полуплоскости с выходящим на границу абсолютно жёстким включением и трещиной / В. Н. Акопян, А. А. Амирджанян // Известия национальной академии наук Армении. Механика. - 2015. - Т. 68 - №1. - С. 25 - 36.
6. Попов В.Г. Две трещины, выходящие из одной точки под воздействием волны продольного сдвига // Изв. РАН. МТТ. 2018. №2. С. 91-100.
7. Литвин О.В., Попов В.Г. Взаємодія гармонічної хвилі поздовжнього зсуву з v-подібним включенням. Математичні методи та фізико-механічні поля. Т. 60 - №1 - С. 96 - 106.
8. Popov V.G. A crack in the shape of a three-link broken line under the action of a longitudinal shear wave// Journal of Mathematical Sciences, vol. 222, No. 2, April, 2017, pp. 112-120.
9. Попов В.Г. Метод разрывных решений в плоских динамических задачах теории упругости. /Дисс. д.ф.-м.н. 1996 р.
10. Дудучава Р.В. Интегральные уравнения свертки с разрывными предсимволами, сингулярные интегральные уравнения с неподвижными особенностями и их приложения к задачам механики / Тбилиси: Мецниереба, 1979. 133 с.
11. Попов В.Г. Дифракция упругих волн сдвига на включении сложной формы, расположенном в неограниченной упругой среде. - Гидроаэромеханика и теория упругости: Численные и аналитические методы решения задач гидроаэро-динамики и теории упругости. - Днепропетровск: Днепропетр. гос. ун-т, 1986. - С. 121-127.
12. Андреев А.Р. Прямой численный метод решения сингулярных интегральных уравнений первого рода с обобщенными ядрами// Изв. РАН. Механика твердого тела. - 2005. - №1. С. 126-146.
13. Крылов В.И. Приближенное вычисление интегралов. – М.: Наука, 1967. - 500 с.
14. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. – М.: Наука, 1982.- 344 с.
15. Попов В.Г. Напружений стан навколо двох тріщин, що виходять з однієї точки при гармонічних коливаннях повздовжнього зсуву/ Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка / Серія: фізико-математичні науки, 2013, 3, С. 205-208.

Информация об авторах:

Мишарин А.С. НУ «Одесская морская академия», 65029, г. Одесса, ул. Дидрихсона, 8,
E-mail: as.mishandr@gmail.com

Попов В.Г., д.ф.-м.н., профессор, НУ «Одесская морская академия», 65029, г.Одесса, ул. Дидрихсона, 8

E-mail: dr.vg.popov@gmail.com

УСТОЙЧИВОСТЬ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ БАЛКИ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ СЛЕДЯЩЕЙ НАГРУЗКОЙ

Мкртчян М.Г., Саакян А.А.

Задача колебаний консольной балки со следящей силой моделируется при помощи замены распределённой инерционной массы сосредоточенными массой и инерционным моментом. Получено дисперсионное уравнение задачи, анализ которого показывает, что в общем случае такие колебания не влияют на стабильность балки.

Общая постановка задачи. Рассмотрим балку, один конец которой жёстко закреплён, а на другом конце приложена следящая (неконсервативная) растягивающая сила [1]. Исследуется возможность потери флаттерной устойчивости балки в зависимости от величины приложенной нагрузки и параметров, характеризующих сосредоточенные массу и инерционный момент [2]. Для моделирования и решения этой задачи используется метод Болотина [3].

В рамках обычных предположений элементарной теории изгиба, дифференциальное уравнение малых изгибных колебаний балки относительно невозмущённой формы равновесия, при наличии неконсервативной растягивающей силы P, имеет вид:

$$D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - P\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho l\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,\ 0 \le x \le l. \tag{1}$$

Полагая, что один конец балки жёстко защемлён и на другом конце имеются сосредоточенные масса m и инерционный момент M^*, граничные условия запишутся в виде:

$$w = 0,\ \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0,$$

$$D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -M^*\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2},\quad D\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad \text{при} \quad x = l, \tag{2}$$

где $w = w(x,t)$ – малый прогиб балки в точке x в момент времени t, D – жёсткость балки на изгиб, l – длина балки, ρ – плотность материала балки.

В соответствии с подходом В.В. Болотина [3] задачу колебаний и устойчивости сводим к задаче устойчивости с уравнением

$$D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - P\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \tag{3}$$

и граничными условиями (2). То есть: а) влиянием динамического члена в уравнении пренебрегается по сравнению с динамическими членами в граничных условиях (2), или же, б) распределённый инерционный член в уравнении (1) заменяется инерционным членом и инерционным моментом в граничных условиях.

Таким образом, общая задача решения уравнения (1) с граничными условиями (2) заменяется модельной задачей для уравнения (3) с граничными условиями (2).

Перейдём к безразмерным величинам, отнеся линейные величины к длине балки l, и перепишем уравнение (3) и условия (2) в виде:

$$\frac{\partial^4 w^*}{\partial \xi^4} - \alpha^2\frac{\partial^2 w^*}{\partial \xi^2} = 0 \tag{4}$$

$$w^*(\xi,t) = 0,\qquad \frac{\partial w^*}{\partial \xi} = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial \xi^2} = -\gamma\frac{\partial^3 w^*}{\partial \xi \partial t^2},\qquad \frac{\partial^3 w^*}{\partial \xi^3} = r\frac{\partial^2 w^*}{\partial t^2} \quad \text{при} \quad \xi = 1 \tag{6}$$

где $\alpha^2 = \dfrac{Pl^2}{D}$, $\gamma = \dfrac{M^* l}{D}$, $r = \dfrac{ml^3}{D}$ – безразмерные параметры, характеризующие, соответственно, следящую растягивающую силу P, сосредоточенные на конце $\xi = 1$ инерционный момент M^* и массу m.

Решение задачи (4)-(6) будем искать в виде

$$w^*(\xi, t) = f(\xi) e^{i\omega t} . \tag{7}$$

Общее решение для функции $f(\xi)$ будет:

$$f(\xi) = c_0 + c_1\xi + c_2 \operatorname{sh}\alpha\xi + c_3 \operatorname{ch}\alpha\xi . \tag{8}$$

Требование, чтобы (7), с учётом (8), удовлетворяло граничным условиям (5)-(6), приводит к системе однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных c_0, c_1, c_2, c_3. Равенство нулю детерминанта этой системы даёт дисперсионное уравнение для определения частоты ω:

$$\omega^4 \gamma r[2(1-\operatorname{ch}\alpha) + \alpha \operatorname{sh}\alpha] + \omega^2 \alpha[r \operatorname{sh}\alpha - \alpha r \operatorname{ch}\alpha - \gamma\alpha^2 \operatorname{sh}\alpha] + \alpha^4 = 0 . \tag{9}$$

При заданных значениях параметров γ и r, первый из которых может принимать как положительные, так и отрицательные значения, а второй только положительные, следует выяснить, существует ли такое значение параметра α, при котором реальное решение полученного уравнения, обеспечивающее колебательный характер изгиба балки, переходит в мнимое, приводя к потере устойчивости колебаний балки.

В полученном биквадратном уравнении замечаем, что параметры γ и r, характеризующие сосредоточенные на конце $\xi = 1$ инерционный момент M^* и массу m, являются множителями при старшем члене, и, следовательно, при обращении одного из них в ноль уравнение (9) сводится к простому квадратному уравнению.

В одном случае, когда сосредоточенная масса отсутствует $(m = 0)$, имеем:

$$r = 0,\ \gamma \neq 0 \ \Rightarrow\ \omega^2 = \frac{\alpha}{\gamma \operatorname{sh}\alpha} , \tag{10}$$

в другом, когда отсутствует инерционный момент $(M^* = 0)$,

$$\gamma = 0,\ r \neq 0,\ \Rightarrow\ \omega^2 = \frac{\alpha^3}{r(\alpha \operatorname{ch}\alpha - \operatorname{sh}\alpha)} . \tag{11}$$

В первом случае очевидно, что колебания балки возможны только при положительных значениях γ, при этом, для любого значения α частота ω является реальной, не обращающейся в ноль, величиной и, следовательно, балка не теряет устойчивость. Во втором же случае нужно провести несложное исследование поведения знаменателя. Нетрудно проверить, что в окрестности нуля $(\alpha \to 0)$ знаменатель последнего выражения есть малая положительная величина, а производная по α является положительной величиной на луче $(0, \infty)$. Следовательно, можно утверждать, что знаменатель не меняет свой знак, что свидетельствует об устойчивости балки и в этом случае.

В общем случае, когда присутствуют и сосредоточенная масса, и инерционный момент, для ω^2 будем иметь:

$$\omega^2=\alpha\frac{\alpha r\,\mathrm{ch}\,\alpha-\left(r-\alpha^2\gamma\right)\mathrm{sh}\,\alpha\pm\sqrt{\left[\alpha r\,\mathrm{ch}\,\alpha-\left(r-\alpha^2\gamma\right)\mathrm{sh}\,\alpha\right]^2-4\alpha^2 r\gamma\left[2\left(1-\mathrm{ch}\,\alpha\right)+\alpha\,\mathrm{sh}\,\alpha\right]}}{2r\gamma\left[2\left(1-\mathrm{ch}\,\alpha\right)+\alpha\,\mathrm{sh}\,\alpha\right]}. \quad (12)$$

Пусть $\gamma>0$. Численный анализ представления (12) показал, что при произвольном значении $\alpha>0$ возможны колебания балки с двумя разными частотами:

$$\omega_1{}^2=\alpha\frac{\alpha r\,\mathrm{ch}\,\alpha-\left(r-\alpha^2\gamma\right)\mathrm{sh}\,\alpha+\sqrt{\left[\alpha r\,\mathrm{ch}\,\alpha-\left(r-\alpha^2\gamma\right)\mathrm{sh}\,\alpha\right]^2-4\alpha^2 r\gamma\left[2\left(1-\mathrm{ch}\,\alpha\right)+\alpha\,\mathrm{sh}\,\alpha\right]}}{2r\gamma\left[2\left(1-\mathrm{ch}\,\alpha\right)+\alpha\,\mathrm{sh}\,\alpha\right]} \quad (13)$$

$$\omega_2{}^2=\alpha\frac{\alpha r\,\mathrm{ch}\,\alpha-\left(r-\alpha^2\gamma\right)\mathrm{sh}\,\alpha-\sqrt{\left[\alpha r\,\mathrm{ch}\,\alpha-\left(r-\alpha^2\gamma\right)\mathrm{sh}\,\alpha\right]^2-4\alpha^2 r\gamma\left[2\left(1-\mathrm{ch}\,\alpha\right)+\alpha\,\mathrm{sh}\,\alpha\right]}}{2r\gamma\left[2\left(1-\mathrm{ch}\,\alpha\right)+\alpha\,\mathrm{sh}\,\alpha\right]}. \quad (14)$$

Исследуем поведение этих частот при изменении параметра α. При малых значениях этого параметра частоты ω_1 и ω_2 имеют поведение:

$$\omega_1{}^2=\frac{2}{r\gamma}\left\{r+3\gamma+\sqrt{r^2+3r\gamma+9\gamma^2}\right\}+O\left(\alpha^2\right) \qquad \alpha\to 0 \quad (15)$$

$$\omega_2{}^2=\frac{2}{r\gamma}\left\{r+3\gamma-\sqrt{r^2+3r\gamma+9\gamma^2}\right\}+O\left(\alpha^2\right) \qquad \alpha\to 0 \quad (16)$$

а при больших значениях α имеем:

$$\omega_1{}^2=\frac{\left(\alpha-1\right)\alpha r+\alpha^3\gamma}{r\gamma\left(\alpha-2\right)} \qquad \alpha\to\infty \quad (17)$$

$$\omega_2{}^2=\frac{2\alpha^3}{\left(\alpha-1\right)r+\alpha^2\gamma}e^{-\alpha} \qquad \alpha\to\infty \quad (18)$$

Изменение обеих частот происходит монотонно, первая частота монотонно возрастает до бесконечности, вторая – монотонно убывает, асимптотически стремясь к нулю. Следовательно, ни одна из них не обращается в ноль и колебания балки с любой из этих частот устойчивы.

Пусть теперь $\gamma<0$. В этом случае только один из корней (12) принимает положительные значения и таким корнем является корень (14), который при малых α имеет поведение, совпадающее с (16), а при больших α – с (17).

На основе вышеизложенного, можно сделать вывод, что при любых допустимых значениях параметров r и γ изгибные колебания балки при наличии растягивающей следящей силы не теряют устойчивость.

На рис.1 и рис.2 приведены графики зависимости частоты колебаний от величины растягивающей силы для определённых значений параметров r и γ.

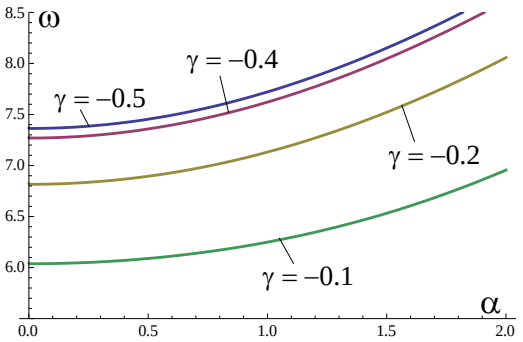


Рис.1. Графики зависимости частоты от растягивающей силы при $r = 0.2$

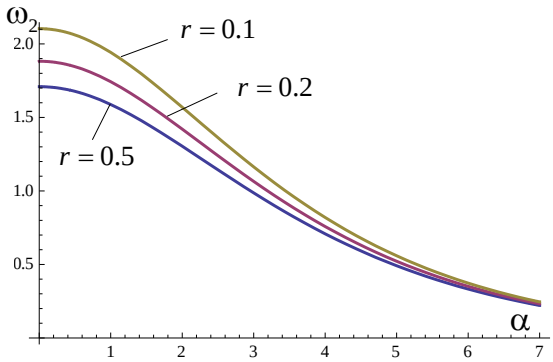


Рис.2. Графики зависимости частоты от растягивающей силы при $\gamma = 0.2$

Замечая «параллельность» кривых на рис.1, представляет интерес выявить зависимость частоты колебаний от параметра γ при некотором значении растягивающей силы. На рис.3 приведены графики для $\alpha = 2$ и разных значений параметра $r = 0.5, 1, 2$.

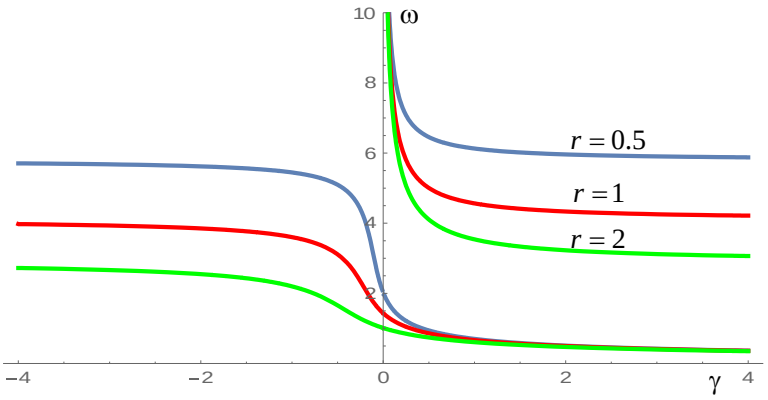


Рис.3. Графики зависимости частоты от инерционного момента при $\alpha = 2$

Из рис.3 можно заметить, что при больших значениях инерционного момента, независимо от направления его действия, имеется только одна частота изгибных колебаний балки, определяемая формулой

$$\omega = \sqrt{\frac{\alpha^3 \operatorname{sh}\alpha}{r\left[2\left(1-\operatorname{ch}\alpha\right)+\alpha \operatorname{sh}\alpha\right]}}\,. \tag{19}$$

Прямая, соответствующая этому значению, является горизонтальной асимптотой для ветвей в первом и втором квадрантах.

Заключение. При наличии осевой следящей растягивающей силы колебания балки всегда устойчивы, независимо от величин, сосредоточенных на конце массы m, и инерционного момента M^*. Выявлено, что при отрицательно направленном инерционном моменте существует только только одна частота устойчивых изгибных колебаний балки, в то время как

при положительно направленном моменте имеются две такие частоты, одна из которых при возрастании M^* стремится к нулю.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мартиросян С.Р. Об одной неконсервативной задаче устойчивости консольной балки. // Изв. НАН Армении. Механика. 2009. Т.62. № 3. С.10-13.
2. Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. М.: Наука, 1984. 176с.
3. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Наука, 1961. 329с.

Сведения об авторах:

Мкртчян Манук Грайрович – к.ф.-м.н., научный сотрудник, Институт механики НАН РА,
Тел.: (099)549-333
E-mail: mkmanuk@yandex.ru

Саакян Арег Аветикович – к.ф.-м.н., научный сотрудник, Институт механики НАН РА,
Тел.: (099)608-866
E-mail: areg1992@gmail.com

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ТОРА

Мурашкин Е.В., Дац Е.П.

Рассмотрены основные модельные соотношения теории температурных напряжений в тороидальной системе координат. Решена задача расчёта напряжённо-деформированного состояния полого упругопластического тора, подверженного неравномерному радиальному нагреву. В рамках гипотезы об обобщённом плоском напряжённом состоянии получены приближённые аналитические решения для полей напряжений и перемещений в областях термоупругого деформирования и пластического течения. Сделана оценка возможности применения полученных решений для описания напряжённо-деформированного состояния тора произвольных размеров в условиях осесимметричного теплового воздействия.

1. Введение. Теория температурных напряжений изучает воздействие заданного температурного поля на формирования напряжённо-деформированного состояния материала. Особый интерес у исследователей вызывает изучение процессов необратимого деформирования, являющихся результатом влияния высоких температурных градиентов. На сегодняшний день решён ряд задач деформирования упругопластического материала в условиях центральной и осевой симметрии теплового поля. В частности, получены одномерные решения для упругопластического шара [28, 30, 12, 5, 23, 4]. При неравномерном температурном нагреве с учётом зависимости предела текучести от температуры. В цилиндрической системе координат получен ряд решений для различных условий пластичности, описывающих необратимое деформирование упруго-пластических дисков [25, 19, 16, 3, 8], труб [27, 26, 1, 6, 5, 32, 11, 9, 7, 29], конструкций, собранных способом горячей посадки [16, 15, 13, 14], многослойных материалов в условиях применения технологий аддитивного изготовления объектов [23, 4, 17, 18, 19, 20, 14, 21, 22, 31, 24]. В постановках таких задач принимаются гипотезы о плоском напряжённом или плоском деформированном состоянии, а также осесимметричном распределении поля температур, что позволяет получать одномерные решения, описывающие термоупругое поведение материала и его деформирование в условиях пластического течения. Одним из мало изученных направлений в теории температурных напряжений является исследование деформирования тел, обладающих тороидальной симметрией. Тороидальная форма конструкций находит широкое применение в таким областях как магнитостатика, магнитогидродинамика, управляемый термоядерный синтез, магнитостатика и др. Учёт температурного поля может оказаться существенным при оценке прочностных характеристик и влиянии температурных деформаций для таких конструкций. В представленной работе рассмотрена задача об определении напряжённо-деформированного состояния полого упругопластического тора, подверженного радиальному распределению температурного градиента.

2. Соотношения теории температурных напряжений в тороидальных координатах. Тороидальная система координат (r, θ, φ) определяется при помощи перехода от декартовых координат (X, Y, Z) к тороидальным соотношениями:

$$X = (R_0 + r\sin(\theta))\cos(\varphi), \quad Y = (R_0 + r\sin(\theta))\sin(\varphi), \quad Z = R_0\cos(\theta), \tag{1}$$

где R_0 – главный радиус тора, $r \in [r_1, r_2]$, r_1 и r_2 – внутренний и внешний радиусы тора. Центр тора совпадает с началом декартовой системы координат, а центр тороидальной системы расположен на образующей оси тора. Малые деформации $d_{ij} = e_{ij} + p_{ij}$, состоящие из термоупругой e_{ij} и пластической p_{ij} составляющей, определяются через перемещения u_i в виде:

$$d_{rr} = u_{r,r}, \quad d_{\theta\theta} = \frac{u_{\theta,\theta}}{r} + \frac{u_r}{r}, \quad d_{\varphi\varphi} = \frac{u_r \sin(\theta) + u_\theta \cos(\theta)}{\psi} + \frac{u_{\varphi,\varphi}}{\psi},$$

$$d_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_{r,\theta}}{r} + u_{\theta,r} - \frac{u_\theta}{r}\right), \quad d_{r\varphi} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_{r,\varphi}}{\psi} + u_{\varphi,r} - \frac{u_\varphi \sin(\theta)}{\psi}\right), \tag{2}$$

$$d_{\theta\varphi} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_{\theta,\varphi}}{\psi} + u_{\varphi,\theta} - \frac{u_\varphi \cos(\theta)}{\psi}\right), \quad \psi = (R_0 + r\sin(\theta)).$$

Здесь и далее индексом после запятой обозначается частное дифференцирование по соответствующей пространственной координате.

Система уравнений равновесия в напряжениях σ_{ij} записывается в виде

$$\sigma_{rr,r} + \frac{\sigma_{r\theta,\theta}}{r} + \frac{\sigma_{r\varphi,\varphi}}{\psi} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{\sin(\theta)}{\psi}(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} + \mathrm{ctg}(\sigma_{r\theta})) = 0,$$

$$\sigma_{r\theta,r} + \frac{\sigma_{\theta\theta,\theta}}{r} + \frac{\sigma_{\theta\varphi,\varphi}}{\psi} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} + \frac{\sin(\theta)}{\psi}(\sigma_{r\theta} + \mathrm{ctg}(\theta)(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi})) = 0, \tag{3}$$

$$\sigma_{r\varphi,r} + \frac{\sigma_{\theta\varphi,\theta}}{r} + \frac{\sigma_{\varphi\varphi,\varphi}}{\psi} + \frac{\sigma_{r\varphi}}{r} + \frac{2\sin(\theta)}{\psi}(\sigma_{r\varphi} + \mathrm{ctg}(\theta)\sigma_{\theta\varphi}) = 0$$

Зависимости между термоупругими деформациями и напряжениями определяются законом Дюамеля-Неймана [2]:

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}(e_{rr} + e_{\theta\theta} + e_{\varphi\varphi}) - \alpha\delta_{ij}(3\lambda + 2\mu)(T - T_0) + 2\mu e_{ij}, \tag{4}$$

где δ_{ij} – символ кронекера, λ, μ – константы материала, α – коэффициент линейного теплового расширения, $(T - T_0)$ – разница между текущей и начальной температурой материала.

3. Постановка задачи.

Рассмотрим полый тор с размерами R_0 и $r_1 < r < r_2$. Будем полагать, что материал подвержен влиянию осесимметричного температурного распределения относительно оси Z. В таком случае напряжённо-деформированное состояние не зависит от окружной координаты φ и справедливы соотношения:

$$u_\varphi = 0, \quad d_{r\varphi} = d_{\theta\varphi} = 0, \quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{\theta\varphi} = 0 \tag{6}$$

Пусть решение стационарного уравнения теплопроводности имеет граничные условия:

$$T(r_1, \theta) = T_k, \quad T(r_2, \theta) = T_0. \tag{10}$$

Определим напряжённо-деформированное состояние материала в условиях термоупругого равновесия при $\varepsilon = 0$. Система уравнений равновесия (3) примет вид:

$$\sigma_{rr,r} + \frac{\sigma_{r\theta,\theta}}{r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, \quad \sigma_{r\theta,r} + \frac{\sigma_{\theta\theta,\theta}}{r} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} = 0. \tag{11}$$

Компоненты вектора перемещений представим в следующей форме:

$$u_r(r,\theta) = F(r) + R_0 C\sin(\theta), \quad u_\theta(r,\theta) = R_0 C\cos(\theta). \tag{12}$$

где $F(r)$ – неизвестная функция радиуса, C – неизвестная константа. Используя (12), запишем соотношения для деформаций при $\varepsilon = 0$:

$$d_{rr} = F_{,r} \quad d_{\varphi\varphi} = C \quad d_{\theta\theta} = \frac{F}{r} \quad d_{r\theta} = 0. \tag{13}$$

Далее, подставив выражения (13) в систему уравнений равновесия (11), получим уравнение для определения функции $F(r)$:

$$F_{,rr} + (r^{-1}F)_{,r} = \alpha\gamma T_{,r} \quad \gamma = \frac{(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + 2\mu)}. \tag{14}$$

Решением (14) является функция

$$F(r)=\frac{\gamma}{r}\int_{r_1}^{r}\Delta(\rho)\rho d\rho+Ar+\frac{B}{r},\quad \Delta(r)=\alpha r(T(r)-T_0), \tag{15}$$

где $A,\ B$ – константы интегрирования. Функция (16) соответствует общему решению для перемещений в цилиндре в условиях плоского деформированного состояния.

4. Пластическое течение. Процесс расчёта термоупругого деформирования при увеличении значения температуры T_k ограничен возможностью выхода напряжённого состояния на поверхность текучести (призма Треска). Пластическое течение возникает на внутренней поверхности тора при выполнении условия пластичности в форме:

$$\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}=2k,\quad \sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi}=2k. \tag{16}$$

По мере роста параметра T_k граница зоны пластичности b движется в направлении внешней поверхности. Решения для перемещений и напряжений в области упругого деформирования $b<r<r_2$ остаются справедливыми с точностью до новых констант интегрирования A, B, C. Зона пластичности состоит из двух частей: область полной пластичности $r_1<r<a$ (ребро призмы Треска), в которой выполняется условие (16), и область пластичности $a<r<b$ (грань призмы Треска), в которой выполняется условие пластичности:

$$\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi}=2k. \tag{17}$$

В области $r_1<r<a$ задача является статически определимой, и напряжения являются решениями системы уравнений равновесия (3) с учётом условий (7), (16):

$$\sigma_{rr}^{*}=-\frac{2}{r}\int_{r_1}^{r}\frac{k(\rho)}{\rho}d\rho,\quad \sigma_{\theta\theta}^{*}=\sigma_{\varphi\varphi}^{*}-\frac{2}{r}\int_{r_1}^{r}\frac{k(\rho)}{\rho}d\rho-2k. \tag{18}$$

Перемещения в данной области вновь представим в виде суммы функций (12):

$$u_r(r,\theta)=F^{*}(r)+R_0C\sin(\theta),\quad u_\theta(r,\theta)=R_0C\cos(\theta), \tag{19}$$

где $F^{*}(r)$ определяется по формуле

$$F^{*}(r)=\frac{3}{r}\int_{r_1}^{r}\Delta(\rho)\rho d\rho-\frac{1}{(3\lambda+2\mu)}\left(r\int_{r_1}^{r}\frac{k(\rho)}{\rho}d\rho+\frac{1}{r}\int_{r_1}^{r}k(\rho)\rho d\rho\right)+Cr+\frac{D}{r}, \tag{20}$$

где D – константа интегрирования.

Далее рассмотрим решения в области $a<r<b$. Согласно ассоциированному закону пластического течения, выполнение условия (23) приводит к следующим соотношениям для компонент пластических деформаций:

$$p_{rr}+p_{\varphi\varphi}=0,\quad p_{\theta\theta}=0. \tag{21}$$

Перемещения в данной области представим в виде

$$u_r^{**}(r,\theta)=F^{**}(r)+R_0C\sin(\theta),\quad u_\theta^{**}(r,\theta)=R_0C\cos(\theta), \tag{22}$$

где $F^{*}(r)$ определяется по формуле

$$\begin{aligned}F^{**}(r)=&\frac{\psi}{2\eta}\left(\frac{(\eta+1)}{r^{\eta}}\int_{r_1}^{r}\Delta(\rho)\rho^{\eta}d\rho+(\eta-1)r^{\eta}\int_{r_1}^{r}\frac{\Delta(\rho)}{\rho^{\eta}}d\rho\right)+rC-\\&-\frac{1}{2(\lambda+\mu)}\left(\frac{1}{r^{\eta}}\int_{r_1}^{r}k(\rho)\rho^{\eta}d\rho+r^{\eta}\int_{r_1}^{r}\frac{k(\rho)}{\rho^{\eta}}d\rho\right)+Mr^{\eta}+\frac{N}{r^{\eta}},\end{aligned} \tag{23}$$

где M, N – константы интегрирования.

Отметим, что по мере увеличения температуры внутренней поверхности T_k на внешней поверхности так же возможно появление и развитие второй зоны пластического течения. Общие решения в данной зоне совпадают с полученными ранее с точностью до противоположного знака

перед функцией предела текучести.

4. Обсуждение результатов. Решения для напряжений и перемещений, полученные в условиях термоупругого равновесия сравнивались с численными результатами для различных значений параметра ε . Было установлено, что при значениях $\varepsilon < 0.1$ максимальное отклонение аналитических решений для напряжений составляет менее 4% от численных расчётов. При этом, решения для перемещений отличаются менее чем на 1% от численных аналогов. Таким образом, можно сделать вывод о том, что полученные аналитические зависимости с высокой степенью точности можно использовать для расчёта напряжённо-деформированного состояния термоупругого материала при конечных значениях параметра ε . Очевидно, что данные решения являются полезными при моделировании процесса пластического течения, так как позволяют получать наиболее простым способом распределения напряжений и перемещений в зонах течения и обеспечивают непрерывность исследуемых функций на упругопластических границах. Дальнейшее исследование напряжённо-деформированного состояния в условиях тороидальной симметрии связано с построением приближённых решений, учитывающих нестационарность температурного градиента и возможность возникновения повторного пластического течения при разгрузке.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда по гранту № 17-19-01257.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bland D. Elasto-plastic thick-walled tubes of work-hardening subject to internal and external pressures and to temperature gradients. //Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1956, Vol.4, P.209–229.
2. Boley B., J. Weiner. Theory of Thermal Stresses. New York: Wiley, 1964.
3. Burenin A.A., Dats E.P., Murashkin E.V. Formation of the residual stress field under local thermal action. //Mechanics of Solids, 2014, Vol. 49, №2, P.218–224.
4. Burenin A.A., Dats E.P., Murashkin E.V. Residual stresses in am fabricated ball during a heating. AIP Conference Proceedings, 2018, Vol. 1959, P. 1–5.
5. Dats E.P., Murashkin E.V., Gupta N.K., On yield criterion choice in thermoelastoplastic problems. //Procedia IUTAM, 2017, Vol. 23, P. 187–200.
6. Dats E., Mokrin S., Murashkin E. Calculation of the residual stresses of hollow cylinder under unsteady thermal action. //Lecture Notes in Engineering and Computer Science, 2015, Vol. 2218, P. 1043–1046.
7. Dats E., Mokrin S., Murashkin E. Calculation of the residual stress field of the thin circular plate under unsteady thermal action. //Key Engineering Materials, 2016, Vol. 685, P. 37–41.
8. Dats E., Murashkin E. On unsteady heat effect in centre of the elastic-plastic disk. Lecture Notes in Engineering and Computer Science, 2016, Vol. 2223, P. 69–72.
9. Dats E., Murashkin E., Stadnik N. On a multi-physics modelling framework for thermo-elastic-plastic materials processing. Procedia Manufacturing, 2017, Vol. 7, P. 427–434.
10. Dats E., Murashkin E., Stadnik N. On heating of thin circular elastic-plastic plate with the yield stress depending on temperature. Procedia Engineering, 2017, Vol. 173, P. 891–896.
11. Dats E., Murashkin E., Stadnik N. Piecewise linear yield criteria in the problems of thermoplasticity. IAENG International Journal of Applied Mathematics, 2017, Vol. 47, № 3, P. 261–264.
12. Gamer U. On the elastic-plastic deformation of a sphere subjected to a spherically symmetrical temperature field. Journal of Thermal Stresses, 1988, Vol.13, P.159–173.
13. Kovacs A. Residual stresses in thermally loaded shrink fits. //Periodica Polytechnica Mechanical Engineering, 1996, Vol. 40, P. 103–112.
14. Kuznetsov S.I., Manzhirov A.V., Fedotov I. Heat conduction problem for a growing ball. //Mechanics of Solids, 2011, Vol.46, P.929–936.
15. Lippmann H. The effect of a temperature cycle on the stress distribution in a shrink fit. //International Journal of Plasticity, 1992, Vol. 8, P. 567–582.

16. Mack W. Thermal assembly of an elastic-plastic hub and a solid shaft. //Archive of Applied Mechanics, 1993. Vol. 63, P. 42–50.
17. Manzhirov A.V. Mechanical design of viscoelastic parts fabricated using additive manufacturing technologies. Lecture Notes in Engineering and Computer Science, 2015, Vol. 2218, P. 710–714.
18. Manzhirov A.V. Advances in the theory of surface growth with applications to additive manufacturing technologies. Procedia Engineering, 2017, Vol. 173, P. 11–16.
19. Manzhirov A.V. Mechanical design of am fabricated prismatic rods under torsion. MATEC Web of Conferences, 2017, Vol. 95, P. 12002.
20. Manzhirov A.V., Parshin D.A. Accretion of a viscoelastic ball in a centrally symmetric force field. Mechanics of Solids, 2006, Vol. 41, P. 51–64.
21. Manzhirov A.V., Parshin D.A. Arch structure erection by an additive manufacturing technology under the action of the gravity force. Mechanics of Solids, 2015, Vol. 50, P. 559–570.
22. Manzhirov A.V., Parshin D.A. Influence of the erection regime on the stress state of a viscoelastic arched structure erected by an additive technology under the force of gravity. Mechanics of Solids, 2015, Vol. 50, P. 657–675.
23. Murashkin, E., Dats E. Thermoelastoplastic deformation of a multilayer ball. Mechanics of Solids, 2017, Vol. 52, №5, P. 495—500.
24. Murashkin, E., Dats E. Coupled thermal stresses analysis in the composite elastic-plastic cylinder. Journal of Physics: Conference Series, 2018, Vol. 991, P. 1–12.
25. Odeno H. Transient thermal stresses in elasto-plastic discs. //Journal Mechanical Engineering Science, 1969, Vol. 2, P. 384–391.
26. Orcan Y. Residual stresses and secondary plastic flow in a heat generating elastic-plastic cylinder with free ends. //International Journal of Mechanical Sciences, 1995, Vol. 33, P. 1689–1698.
27. Orcan Y., Gamer U. Elastic-plastic deformation of a centrally heated cylinder. Acta Mechanica, 1991, Vol. 90, P. 61–80.
28. Parkus, G. Unsteady Thermal Stresses. Moscow: Fizmatgiz, 1963.
29. Burenin A.A, Dats E. P., Mokrin S.N., Murashkin E.V. Plastic flow and unloading of a hollow cylinder during the «heating-cooling» action. Bulletin of Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State, 2013, Vol. 16, № 2, P. 22–28.
30. Raniecki B. Stresses in an elastic-plastic hollow sphere subjected to a variable temperature field. Rozprawy Inzynierskie, 1966, Vol. 14, P. 479.
31. Stadnik N., Dats E. Continuum mathematical modelling of pathological growth of blood vessels. //Journal of Physics: Conference Series, 2018, Vol. 991, P. 1–7.
32. Dats E., Murashkin E., Tkacheva A., Shcherbatyuk G. Thermal stresses in an elastoplastic tube depending on the choice of yield conditions. Mechanics of Solids, 2018, Vol. 53, № 1, P. 23–32.

Сведения об авторах:

Мурашкин Е.В. – к.ф-м.н., старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва.

Дац Е.П. – к. ф.-м. н., доцент, Владивостокский государственный университет экономики и сервиса, Владивосток.

ИДЕНТИФИКАЦИЯ НЕОДНОРОДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРЕДНАПРЯЖЁННЫХ ТЕРМОУПРУГИХ ТЕЛ С ПОКРЫТИЯМИ

Нестеров С.А.

Поставлена обратная задача об идентификации неоднородного предварительного напряжённого состояния системы покрытие-подложка полого термоупругого цилиндра. На основе подхода, предложенного Гузем А.Н., получены уравнения термоупругости для предварительно-напряжённого цилиндра. Прямая задача термоупругости после применения преобразования Лапласа решается на основе метода пристрелки и обращения решений на основе метода Дурбина. На основе слабой постановки в пространстве трансформант по Лапласу и метода линеаризации получены операторные уравнения для решения обратной задачи на основе итерационного процесса. В ходе итерационного процесса поправки к восстанавливаемым характеристикам определялись из решения интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода. Приведены результаты вычислительных экспериментов по восстановлению функций различных типов.

Введение

Защиту деталей, работающих в условиях интенсивного термо-силового нагружения, обычно обеспечивают путём нанесения функционально-градиентного термобарьерного покрытия, на поверхность детали [1]. В процессе эксплуатации под воздействием различных факторов в таких покрытиях могут возникать предварительные напряжения, которые могут достигать больших значений и привести к расслоению покрытий. Задача усовершенствования методов диагностики предварительного напряжённого состояния покрытий в термоупругих телах – одна из важнейших технических проблем. Среди неразрушающих методов диагностики преднапряжений в последнее время получил распространение метод, основанный на решении коэффициентных обратных задач [2-4].

Коэффициентные обратные задачи (КОЗ) термоупругости – сложные нелинейные задачи. Обычно на практике исследование обратных задач термоупругости проводят для слабонеоднородных тел [5] или слоистых [6]. Как правило, КОЗ сводится к решению соответствующих экстремальных задач градиентными методами [6, 7]. Использование градиентных методов минимизации требует существенных затрат машинного времени и обладает рядом других недостатков. В качестве альтернативы градиентным методам в последние годы используется подход, основанный на построении итерационного процесса, на каждом этапе которого решается линеаризованное операторное уравнение 1-го рода [8]. Опираясь на этот подход, в [9-13] представлено решение КОЗ термоупругости для стержня и цилиндра. Использовано два способа нагружения термоупругих тел – тепловой и механический. Однако, в этих работах неисследованным оставался вопрос об идентификации материальных характеристик и преднапряжений с приповерхностным изменением характеристик. Решению этой задачи и посвящена данная работа.

1. Постановка задачи об идентификации неоднородного предварительного напряжённого состояния термоупругого цилиндра

Рассмотрим задачу о радиальных колебаниях неоднородного предварительно напряжённого длинного полого термоупругого цилиндра в условиях плоской деформации под действием равномерно распределённой нагрузки, приложенной на внешней поверхности $r = b$. Внутренняя поверхность цилиндра $r = a$ теплоизолирована и свободна от механических напряжений. В соответствии с моделью, предложенной Гузем А.Н. [14, 15], уравнения связанной термоупругости для преднапряжённого цилиндра имеют вид:

$$\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{T_{rr} - T_{\varphi\varphi}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \tag{1.1}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(k(r) r \frac{\partial \theta}{\partial r}\right) = c(r)\frac{\partial \theta}{\partial t} + T_0 \gamma(r)\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial t}\right), \tag{1.2}$$

$$T_{rr} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda \frac{u_r}{r} + \sigma_{rr}^0 \frac{\partial u_r}{\partial r} - \gamma\theta, \tag{1.3}$$

$$T_{\varphi\varphi} = \lambda \frac{\partial u_r}{\partial r} + (\lambda + 2\mu)\frac{u_r}{r} + \sigma_{\varphi\varphi}^0 \frac{u_r}{r} - \gamma\theta, \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial r}(a,t)=0\,,\ -k(b)\frac{\partial\theta}{\partial r}(b,r)=q_0\,, \tag{1.5}$$

$$T_{rr}(a,t)=0\,,\ T_{rr}(b,t)=p_0\,, \tag{1.6}$$

$$\theta(r,0)=u_r(r,0)=\frac{\partial u_r}{\partial t}(r,0)=0\,. \tag{1.7}$$

Здесь $T_{rr}(r,t)$, $T_{\varphi\varphi}(r,t)$ – компоненты добавочного тензора напряжений Пиолы, σ^0_{rr}, $\sigma^0_{\varphi\varphi}$ – преднапряжения, которые удовлетворяют уравнению равновесия $\frac{d\sigma^0_{rr}}{dr}+\frac{\sigma^0_{rr}-\sigma^0_{\varphi\varphi}}{r}=0$, $u_r(r,t)$ – радиальное перемещение, $\theta(r,\tau)$ – приращение температуры.

Перейдём в (1.1)-(1.7) к безразмерным параметрам и переменным, обозначая:

$$z=\frac{r-a}{b-a},\ \ z_0=\frac{a}{b-a},\ \ \bar{s}(z)=\frac{\lambda+2\mu}{\mu_0},\ \ \bar{\lambda}(z)=\frac{\lambda(r)}{\mu_0},\ \ \bar{k}(z)=\frac{k(r)}{k_0},\ \ \bar{c}(z)=\frac{c(r)}{c_0},\ \ \bar{\gamma}(z)=\frac{\gamma(r)}{\gamma_0},$$

$$\bar{\rho}(z)=\frac{\rho(r)}{\rho_0},\ \ \nu=\sqrt{\frac{\mu_0}{\rho_0}},\ \ t_1=\frac{b-a}{\nu},\ \ t_2=\frac{(b-a)^2c_0}{k_0},\ \ \tau=\frac{t}{t_2},\ \ W(z,\tau)=\frac{\gamma_0\theta}{\mu_0},\ \ U(z,\tau)=\frac{u_r}{b-a},$$

$$\Omega_z(z,\tau)=\frac{T_{rr}}{\mu_0},\ \ \Omega_\varphi(z,\tau)=\frac{T_{\varphi\varphi}}{\mu_0},\ \ \Omega^0_z(z)=\frac{\sigma^0_{rr}}{\mu_0},\ \ \Omega^0_\varphi(z)=\frac{\sigma^0_{\varphi\varphi}}{\mu_0},\ \ \delta=\frac{\gamma_0^2T_0}{\mu_0c_0},\ \ \varepsilon=\frac{t_1}{t_2},\ \ p^*=\frac{p_0}{\mu_0},$$

$$\mu_0=\frac{1}{b-a}\int_a^b\mu(r)dr\,,\qquad k_0=\frac{1}{b-a}\int_a^b k(r)dr\,,\qquad c_0=\frac{1}{b-a}\int_a^b c(r)dr\,,\qquad \gamma_0=\frac{1}{b-a}\int_a^b\gamma(r)dr\,,$$

$$\rho_0=\frac{1}{b-a}\int_a^b\rho(r)dr\,,\ \lambda_0=\frac{1}{b-a}\int_a^b\lambda(r)dr\,.$$

После обезразмеривания начально-краевая задача (1.1)-(1.7) примет вид:

$$\frac{\partial\Omega_z}{\partial z}+\frac{\Omega_z-\Omega_\varphi}{z+z_0}=\rho\frac{\partial^2U}{\partial\tau^2}\,, \tag{1.8}$$

$$\Omega_z=(\bar{s}+\Omega^0_z)\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\bar{\lambda}}{z+z_0}U-\bar{\gamma}W\,, \tag{1.9}$$

$$\Omega_\varphi=\bar{\lambda}\frac{\partial U}{\partial z}+(\bar{s}+\Omega^0_\varphi)\frac{U}{z+z_0}-\bar{\gamma}W\,, \tag{1.10}$$

$$\frac{1}{z+z_0}\frac{\partial}{\partial z}(\bar{k}(z)(z+z_0)\frac{\partial W}{\partial z})=\bar{c}(z)\frac{\partial W}{\partial\tau}+\delta\bar{\gamma}(z)(\frac{\partial^2U}{\partial z\partial\tau}+\frac{1}{z+z_0}\frac{\partial U}{\partial\tau})\,, \tag{1.11}$$

$$\frac{\partial W}{\partial z}(0,\tau)=0\,,\ -\bar{k}(1)\frac{\partial W}{\partial z}(1,\tau)=q^*\,, \tag{1.12}$$

$$\Omega_z(0,\tau)=0\,,\ \Omega_z(1,\tau)=p^*\,, \tag{1.13}$$

$$W(z,0)=U(z,0)=\frac{\partial U}{\partial\tau}(z,0)=0\,. \tag{1.14}$$

Прямая задача термоупругости заключается в определении функций $U(z,\tau)$ и $W(z,\tau)$ из (1.8)-(1.14) при известных термомеханических характеристиках и преднапряжениях. В работе прямая задача после применения преобразования Лапласа решается методом пристрелки. Для нахождения оригиналов решений применяется метод Дурбина.

В обратной задаче требуется определить функцию $\Omega_z^0(z)$ из (1.8)-(1.14) при известных термомеханических характеристиках по некоторой дополнительной информации. В качестве такой информации в случае теплового нагружения цилиндра выступает приращение температуры на его наружной поверхности:

$$W(1,\tau) = f_1(\tau),\ \tau \in [a_1, b_1], \tag{1.15}$$

а в случае механического нагружения – смещение на его наружной поверхности:

$$U(1,\tau) = f_2(\tau),\ \tau \in [a_2, b_2]. \tag{1.16}$$

2. Формулировка итерационного процесса для решения обратной задачи

Поставленная обратная задача (1.8)-(1.16) решается путём построения итерационного процесса. Функцию, характеризующую преднапряжение $\Omega_z^0(z)$, аналогично [12], представим в виде $\Omega_z^0(z) = \eta \overline{b}(z)$, где η – уровень преднапряжённого состояния, $\overline{b}(z)$ – закон неоднородности, который необходимо восстановить. Процедура восстановления $\overline{b}(z)$ состоит из двух этапов. На первом этапе определяется начальное приближение на основе минимизации функционала невязки, который в случае теплового нагружения цилиндра имеет вид:

$$J_1 = \int_{a_1}^{b_1} (f_1(\tau) - W(1,\tau))d\tau, \tag{2.1}$$

а в случае механического нагружения его вид будет:

$$J_2 = \int_{a_2}^{b_2} (f_2(\tau) - U(1,\tau))d\tau. \tag{2.2}$$

На втором этапе уточнялись законы изменения начального состояния по схеме $\overline{b}^{(n)} = \overline{b}^{(n-1)}(z) + \delta\overline{b}^{(n-1)}(z)$. Поправки $\delta\overline{b}^{(n-1)}$ находились путм решения соответствующего операторного уравнения [12]:

$$\int_0^1 \delta b^{(n-1)} R(z,\tau)dz = q^*(f_1(\tau) - W^{(n-1)}(1,\tau)) + p^*(f_2(\tau) - U^{(n-1)}(1,\tau)). \tag{2.3}$$

Здесь ядро уравнения (2.3) имеет вид:

$$R(z,\tau) = \int_0^\tau \frac{\partial U^{(n-1)}}{\partial z}(z,\tau_1)\left(\frac{\partial U^{(n-1)}}{\partial z}(z,\tau-\tau_1) - U^{(n-1)}(z,\tau-\tau_1)\right)d\tau_1.$$

Уравнение вида (2.3) для определения поправок являются уравнениями Фредгольма 1-го рода с вполне непрерывными операторами, при обращении которых был использован метод регуляризации А.Н. Тихонова.

Выход из итерационного процесса осуществлялся по достижении функционалом невязки (2.1) или (2.2) порогового значения, равного 10^{-4}.

3. Результаты вычислительных экспериментов

При проведении вычислительного эксперимента принято: $\delta = 0.04$, $\varepsilon = 10^{-6}$, $\eta = 10^{-3}$, $z_0 = 1$. Определены наиболее информативные временные интервалы для измерения входной информации. Выяснено, что измерение температуры наиболее информативно на интервале $[a_1, b_1] = [0, 7]$ при 7 точках наблюдения внутри него, а измерение смещения на интервале $[a_2, b_2] = [0, 2]$ и 10 точках наблюдения внутри него.

Восстанавливались законы распределения неоднородностей $\overline{b}(z)$ в покрытии в различных классах функций: степенных, экспоненциальных, тригонометрических. Выяснено, что в случае механического способа нагружения цилиндра ($p^* = 1$, $q^* = 0$) для достижения условия выхода требовалось не более 14 итераций. При этом, наибольшая погрешность реконструкции возникала в окрестностях точек разрыва функции (до 10%), а в остальных точках не превышала 4%. На результаты реконструкции влияет толщина покрытия: чем толще покрытие, тем результат

реконструкции лучше. В то же время результаты реконструкции не зависят от соотношения модулей покрытия и подложки. В случае теплового способа нагружения ($p^* = 0$, $q^* = 1$) погрешность реконструкции преднапряжения значительно возрастала. Это связано с тем, что параметр термомеханической связанности δ имеет небольшое значение.

На рисунке ниже представлен результат реконструкции функции $\bar{b}(z)$ при механическом способе нагружения; при этом сплошной линией показан график исходной функции, точками – восстановленной. Покрытие нанесено на внешнюю сторону цилиндра. Функция, характеризующая преднапряжение, моделировалась таким образом: в подложке $\bar{b}(z) = 0.1$ ($0 \le z \le 0.7$), в покрытии $\bar{b}(z) = 2z^3$ ($0.7 < z \le 1$). Для достижения порогового значения в функционале (2.2) потребовалось 6 итераций. Наибольшая погрешность (8%) возникала в окрестности соединения покрытия с подложкой.

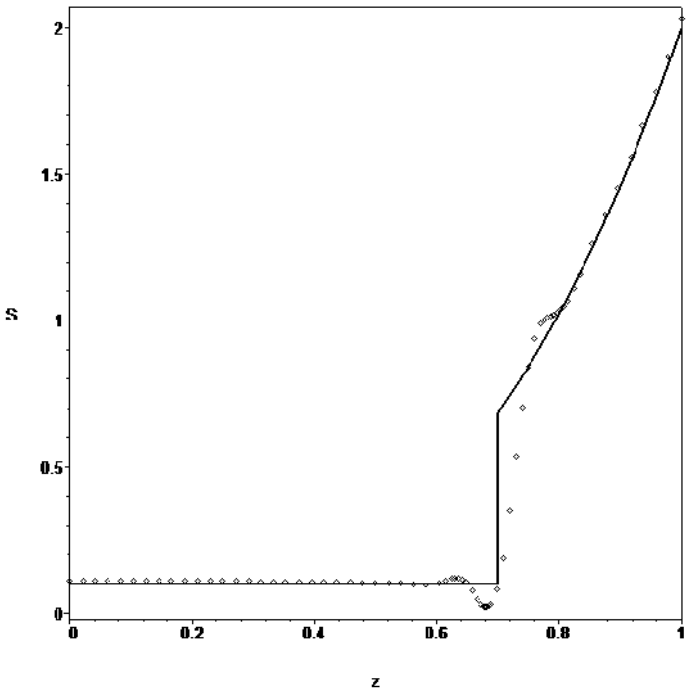


Рис. Результат восстановления $\bar{b}(z)$ в системе покрытие-подложка

4. Заключение

Представлен способ определения неоднородного преднапряжённого состояния полого термоупругого цилиндра с покрытием. Решение обратной задачи построено на основе итерационного процесса, на каждом шаге которого определяются поправки путём решения интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода. В ходе вычислительных экспериментов выяснено, что на результаты реконструкции влияет толщина слоев: чем толще слой, тем результат реконструкции лучше. Вычислительные эксперименты показали эффективность данного подхода по реконструкции гладких законов неоднородности. Результаты реконструкции не зависят от соотношения модулей покрытия и подложки.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ (проект № 18-11-00069).

ЛИТЕРАТУРА

1. Lee, W.Y., Stinton, D.P., Bernardt, C.C., Erdogan, F, Lee, Y.D., Mutasin, Z. Concept of functionally graded materials for advanced thermal barier coatings applications // Journal of American Ceramic Society. 1996. Vol. 19. P. 3003–3012.
2. Ватульян А.О., Дударев В.В., Недин Р.Д. Предварительные напряжения: моделирование и идентификация. Ростов-на-Дону: Из-во ЮФУ, 2014. 206 с.

3. Nedin R., Vatulyan A. Inverse problem of nonhomogeneous residual stress identification thin plates // International Journal of Solids and Structures. 2013. V. 50. P. 2107-2114.
4. Ватульян А.О., Дударев В.В., Богачев И.В. Об определении предварительного напряженного состояния в трубе // Доклады РАН. 2014. Т.456. №3. С. 299-301.
5. Ломазов В.А. Задачи диагностики неоднородных термоупругих сред. Орел: ОрелГТУ, 2002. 168 с.
6. Lukasievicz S.A., Babaei R., Qian R.E. Detection of material properties in a layered body by means of thermal effects // J. of Thermal Stresses. 2003. Vol. 26, №1. Pp. 13-23.
7. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988. 288 с.
8. Ватульян А.О. К теории обратных коэффициентных задач в линейной механике деформируемого тела // ПММ. 2010. №6. С. 911-918.
9. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Об одном способе идентификации термоупругих характеристик для неоднородных тел // Инженерно-физический журнал. 2014. Т.87. №1. С.217-224.
10. Nedin R., Nesterov S., Vatulyan A. On an inverse problem for inhomogeneous thermoelastic rod // International Journal of Solids and Structures. 2014. Vol. 51(3). Pp. 767-773.
11. Ватульян А.О., Нестеров С.А. К определению неоднородных термомеханических характеристик трубы // Инженерно-физический журнал. 2015. Т. 88. №4. С. 951-959.
12. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Об особенностях идентификации неоднородного предварительно напряженного состояния в термоупругих телах // Прикладная математика и механика. 2017. Т.81. Вып.1. С.103-110.
13. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Об особенностях идентификации неоднородных характеристик предварительно-напряженного термоупругого цилиндра // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2015. №1. С. 34-40.
14. Гузь А.Н., Жук А.П., Махорт Ф.Г. Волны в слое с начальными напряжениями. Киев: Наукова думка, 1976. 104 с.
15. Guz A.N. Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses // International Applied Mechanics. 2005, no. 38, pp. 23-59.

Информация об авторе:

Нестеров Сергей Анатольевич – старший научный сотрудник, Южный математический институт – филиал Владикавказского научного центра РАН, отдел дифференциальных уравнений, 8 918 50 73 340.
E-mail: 1079@list.ru

ДЕЙСТВИЕ СОБСТВЕННОГО ВЕСА НА НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА

Оганесян Э.К.

В этой работе использовано сочетание МКЭ и асимтотического метода для изучения напряжённо-деформированного состояния в окрестности угловой точки. Благодаря этому сочетанию двух хорошо известных методов, становится возможным более глубокое изучение поведения напряжений не только около угловой точки, но и тело, в целом.

Рассматривается полый круглый цилиндр, имеющий два различных радиуса. Цилиндр одним торцом защемлён, внутренняя боковая сторона и другой торец свободны от внешних усилий. Цилиндр находится под действием сил тяжести, действующих перпендикулярно к оси цилиндра, а также равномерно распределённая по образующей касательных усилий, действующих на внешней поверхности цилиндра.

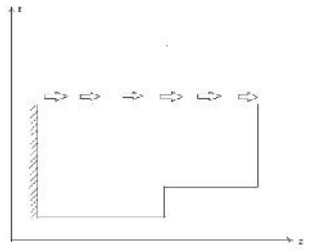


Рис.1

Задача решается методом конечных элементов (МКЭ).

Перемещения, вызванные объёмной силой тяжести, представляем в виде первой гармоники:

$$U_r(r,z,\varphi) = U(r,z)\cos\varphi$$

$$U_\varphi(r,z,\varphi) = W(r,z)\sin\varphi$$

$$U_z(r,z,\varphi) = V(r,z)\cos\varphi$$

В качестве элемента выбираем кольцевые элементы, поперечное сечение которых имеют треугольный вид с шестью узлами.

Рассмотрим осевое сечение цилиндра при φ=0. Здесь φ – угол отсчитываемый от вертикальной оси с положительным значением в направлении против часовой стрелки. Искомые функции перемещения аппроксимируем полиномами второго порядка .

$$U_r = a_1 + a_2 r + a_3 z + a_4 r^2 + a_5 rz + a_6 z^2 \quad (1)$$

$$U_z = a_7 + a_8 r + a_9 z + a_{10} r^2 + a_{11} rz + a_{12} z^2$$

В соответствии с процедурой МКЭ, коэффициенты α_i свяжем однозначно с значениями искомых функций. Для каждого элемента в матричной форме для перемещений по U_r и U_z будем иметь, соответственно,

$$\{\delta_u\}=[C_u]\{\alpha_u\} \quad \{\delta_v\}=[C_v]\{\alpha_v\}$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$\{\alpha_u\}=[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6]^T$

$\{\alpha_v\}=[\alpha_7, \alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_{11}, \alpha_{12}]^T$

$$\{\delta_u\} = \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \\ u_{ij} \\ u_{im} \\ u_{jm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r_i & z_i & r_i^2 & (rz)_i & z_i^2 \\ 1 & r_j & z_j & r_j^2 & (rz)_j & z_j^2 \\ 1 & r_m & z_m & r_m^2 & (rz)_m & z_m^2 \\ 1 & r_{ij} & z_{ij} & r_{ij}^2 & (rz)_{ij} & z_{ij}^2 \\ 1 & r_{im} & z_{im} & r_{im}^2 & (rz)_{im} & z_{im}^2 \\ 1 & r_{jm} & z_{jm} & r_{jm}^2 & (rz)_{jm} & z_{jm}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} = [C_u]\{\alpha_u\}$$

В объединнёном виде для узловых перемещений по *r* и *z* будем иметь соотношение (2):

$\{\delta\}^e=[N]\{\alpha\}$ (2)

где $\{\alpha\}=\{\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3 \ldots \alpha_{12}\}$

$$\{¢\}^e=\begin{Bmatrix} ¢_U, & 0 \\ 0, & ¢_V \end{Bmatrix}$$

Численное решениезадачи

Для численного решения задачи рассмотрим цилиндр длиной 12.8R, у которого внешний радиус равен 1.25R, а внутренний радиус широкой части цилиндра равен 0.5R, в узкой части – 0.25R. В качестве физико-механических параметров материала принято $E=2.08*10^6$ кгс/см^2 , $\upsilon=0.28$, $\gamma=7.8*10^{-3}$ кг/см^3 .

Осевое сечение разбито на 110 треугольных элементов с 76 вершинами. Вычислены амплитудные значения смещений узловых окружностей, соответствующих узловым точкам при указанном разбиении.

Для более глубокого изучения поведения напряжений около угловой точки с углом $2\alpha=2/3\pi$, на границе смены различных значений радиуса цилиндра использованы известные асимптотические формулы для перемещений:

$$r^{-\lambda}u_r = A\cos[(1+\lambda)\theta]+B\sin[(1+\lambda)\theta]+ \\ C\cos[(1-\lambda)\theta]+D\sin[(1-\lambda)\theta] \quad (3)$$

$$r^{-\lambda}u_z = B\cos[(1+\lambda)\theta]-A\sin[(1+\lambda)\theta]+ \\ \nu_2 D\cos[(1-\lambda)\theta]-\nu_2 C\sin[(1-\lambda)\theta]$$

$$\mu^{-1}r^{1-\lambda}\sigma_\theta = -2\lambda A\cos[(1+\lambda)\theta]-2\lambda B\sin[(1+\lambda)\theta]- \\ (1+\lambda)(1-\nu_2)C\cos[(1-\lambda)\theta]-(1+\lambda)(1-\nu_2)D\sin[(1-\lambda)\theta]$$

$$\mu^{-1}r^{1-\lambda}\tau_{r\theta} = -2\lambda A\sin[(1+\lambda)\theta]+2\lambda B\cos[(1+\lambda)\theta]- \\ (1-\lambda)(1-\nu_2)C\sin[(1-\lambda)\theta]+(1-\lambda)(1-\nu_2)D\cos[(1-\lambda)\theta]$$

где $\nu_2 = \dfrac{3+\lambda-4\nu}{3-\lambda-4\nu}$

Здесь λ – корень трансцендентного уравнения $\sin 2\alpha\lambda = \lambda \sin 2\alpha.$. Постоянные коэффициенты A, B, C, D определяются с помощью систем четырёх уравнений, полученных с помощью подстановки в выбранных двух узловых точках, близких к углу, значений перемещения $\left(U_r^1, U_z^1\right)$ и $\left(U_r^2, U_z^2\right)$ в формулы (3). Эти точки подбираются произвольно, но необходимо выбрать их достаточно близко к изучаемой угловой точке. После определения постоянных A, B, C, D эти значения подставляем обратно в формулы (3), и получаем искомые формулы для определения перемещения и напряжения в точках, близких к угловой точке.

Вычислены амплитудные значения нормальных и касательных напряжений по всем кольцевым элементам цилиндра. Исследованы характер изменения перемещений Ur и Uz для следующих вариантов нагружения: внешняя поверхность цилиндра свободна от нагрузки и внешняя поверхность цилиндра нагружена касательними усилиями $\tau_{rz} = 30, 20, 10.$ Для рассмотренных вариантов вычислены касательные напряжения в сечениях r = 1 и r = 0.75.

<u>Сведения об авторе:</u>

Оганесян Эмин Казарович - к. ф.-м. н., научный сотр. Института механики НАН РА, Ереван, 0019, Пр. Маршала Баграмяна, 24/2.
E-mail: eogannisyan@ mail.ru; **Тел.:** (010) 26-46-99

СДВИГОВЫЕ ВОЛНЫ ФЛОКЕ В ФУНКЦИОНАЛЬНО ГРАДУИРОВАННЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СРЕДАХ

Папян А.А., Казарян Р.А., Оганян С.К.

Рассматривается задача распространения сдвиговых волн Флоке в периодической структуре, состоящей из альтернативно чередующихся ячеек функционально-градуированного упругого материала. Задача решается в рамках теории Флоке и метода трансфер-матриц. Для специального класса неоднородности материала, допускающего точное решение, получено дисперсионное уравнение, определяющее волновое число Флоке в зависимости от частоты сдвиговых волн. Установлено, что неоднородность приводит к возникновению запретных зон частот нового типа.

Введение. Функционально градуированные материалы представляют собой неоднородные упругие тела, свойства которых непрерывно изменяются. Структура функционально градуированных материалов привлекла широкое внимание учёных и инженеров, эти материалы играют важную роль в самых передовых интегрированных системах контроля вибрации и мониторинга состояния прочности конструкций. Моделирование, анализ и развитие теории функционально градуированных материалов были рассмотрены в [1,2].

Впервые наличие зон запирания частот в периодической однонаправленной упругой структуре было отмечено в работе [3]. Более детально вопросы распространения упругих волн в периодических структурах изучены в работах [4-11]. Применению теории Флоке к задачам распространения упругих волн в одномерных периодических структурах посвящены работы [4,5]. В работах [8,9] исследованы волны Флоке в упругих периодических стержнях и балок. В работе [10] приводится обзор по распространению упругих и электромагнитных волн в периодической структуре и приведён анализ роли импеданса на существование зон запирания частот. Волны Флоке в пьезоэлектрической периодической среде изучены в работе [11]. Метод трансфер-матриц, являющимся широко распространенным методом расчёта слоистых структур изложен в [12].

Постановка и решение задачи

Рассмотрим задачу распространения сдвиговых волн Флоке в упругой среде, представляющую собой периодическую структуру, состоящую из альтернативно чередующихся элементарных ячеек периода L, $\left((n-1)L < x < nL, n \in Z\right)$ из функционально градуированного материала, где плотность и модуль упругости материала изменяются следующим образом:

$\rho(x) = \rho_0 f(x)$; $G(x) = G_0 f(x)$, $f(x)$ – функция, характеризующая неоднородность.

Уравнение чисто сдвиговой волны запишется в следующем виде:

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}, \tag{1}$$

где $\sigma_{xz} = G\dfrac{\partial W}{\partial x}$; $\sigma_{yz} = G\dfrac{\partial W}{\partial y}$. (2)

Решение дифференциального уравнения (1) будем искать в следующем виде:

$$W(x,y,t) = w(x)\exp(i\omega t - iky), \tag{3}$$

где ω – частота, k – волновое число.

Подставляя искомое решение (3) в (1,2), получим:

$$\sigma = G_0 f(x)\frac{dw}{dx}, \quad \frac{d\sigma}{dx} = \left(k^2 G_0 - \rho_0\omega^2\right) f(x) w. \tag{4}$$

Соотношения (4) можем переписать в матричной форме:

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} w \\ \sigma \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} w \\ \sigma \end{pmatrix}; \qquad M = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{G_0 f(x)} \\ -\left(\rho_0\omega^2 - k^2 G_0\right) f(x) & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Переходя к новым функциям

$$w_0(x) = w(x) f^{1/2}(x); \quad \sigma_0(x) = \sigma(x) f^{-1/2}(x), \tag{6}$$

получим

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} w_0(x) \\ \sigma_0(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(x) & \frac{1}{G_0} \\ \left(\rho_0\omega^2 - k^2 G_0\right) & -P(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_0(x) \\ \sigma_0(x) \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где $P(x) = \dfrac{f'(x)}{2f(x)}$.

Дифференцируя (7), имеем:

$$\begin{pmatrix} w_0''(x) \\ \sigma_0''(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + P(x)^2 + P'(x) & 0 \\ 0 & A + P(x)^2 - P'(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_0(x) \\ \sigma_0(x) \end{pmatrix}, \tag{8}$$

где A= $k^2\left(\dfrac{\omega^2\rho_0}{k^2 G_0} - 1\right)$.

Принимая во внимание

$$P(x)^2 + P'(x) \equiv \frac{1}{f^{\frac{1}{2}}(x)}\left(f^{\frac{1}{2}}(x)\right)^{//}, \quad P(x)^2 - P'(x) \equiv \frac{1}{f^{-\frac{1}{2}}(x)}\left(f^{-\frac{1}{2}}(x)\right)^{//}, \tag{9}$$

мы приходим к следующему способу нахождения точных решений.

Если предположить, что

$$P(x)^2 + P'(x) = a^2 \text{ или } P(x)^2 - P'(x) = a^2, \tag{10}$$

где $a = \text{const}$., то мы получим два класса неоднородных функций, которые приводят к точному решению уравнения (8).

1) $$f(x) = \left(\cosh\left(a\left(x-(n-1)L\right)+d\right) + \frac{b}{a}\sinh\left(a\left(x-(n-1)L\right)+d\right)\right)^2 \tag{11}$$

2) $$f(x) = \left(\cosh\left(a\left(x-(n-1)L\right)+d\right) + \frac{b}{a}\sinh\left(a\left(x-(n-1)L\right)+d\right)\right)^{-2} \tag{12}$$

здесь a, b и d – параметры, характеризующие неоднородность материала.

В случае $a \to 0$ имеем:

$$f(x) = \left(1 + b\left(x-(n-1)L\right)+d\right)^{\pm 2}.$$

Общее решение уравнение (8) в матричном виде будет иметь следующий вид:

$$U(x) = M(x)C, \tag{13}$$

где $U(x) = \begin{pmatrix} w(x) \\ \sigma(x) \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$.

Для первого класса неоднородности матрица $M(x)$ имеет вид:

$$M_+(x) = \begin{pmatrix} \sin(qx)\, f^{-1/2}(x) & \cos(qx)\, f^{-1/2}(x) \\ G_0\dfrac{2q\, f(x)\cos(qx) - f'(x)\sin(qx)}{2\, f^{1/2}(x)} & -G_0\dfrac{2q\, f(x)\cos(qx) + f'(x)\sin(qx)}{2\, f^{1/2}(x)} \end{pmatrix}, \tag{14}$$

а для второго класса для матрицы $M(x)$ имеем:

$$M_-(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{f'(x)\sin(qx) + 2q\, f(x)\cos(qx)}{2Af^{\frac{3}{2}}(x)} & \dfrac{f'(x)\cos(qx) - 2q\, f(x)\sin(qx)}{2Af^{\frac{3}{2}}(x)} \\ G_0\, f^{\frac{1}{2}}(x)\sin(qx) & G_0\, f^{\frac{1}{2}}(x)\cos(qx) \end{pmatrix}, \tag{15}$$

где принято следующее обозначение: $q^2 = \frac{\rho_0\omega^2}{G_0} - a^2 - k^2$.

Исключив постоянные C из (13)

$$U(nL) = M(nL)C; \quad C = M^{-1}((n-1)L)U((n-1)L),$$
$$U(nL) = M(nL)M^{-1}((n-1)L)U((n-1)L), \tag{16}$$

получим следующее соотношение:

$$U(nL) = T^{\pm}U((n-1)L), \tag{17}$$

где $T^{\pm} = M^{\pm}(nL)\left(M^{\pm}\right)^{-1}((n-1)L)$.

Согласно теории Флоке, задача будет рассмотрена в интервале $(n-1)L < x < nL$.

В рамках теории Флоке имеем следующее условие периодичности:

$$U(nL) = \mathrm{a}U((n-1)L), \tag{18}$$

где $\lambda = \exp(isL)$, s – число Флоке.

Используя (17,18), получим:

$$\left(T^{\pm} - \mathrm{a}I\right)U((n-1)L) = 0. \tag{19}$$

Из (19) следует:

$$\lambda^2 - Sp\left(T^{\pm}\right)\lambda + 1 = 0. \tag{20}$$

Определяя из (20) собственные числа λ, получим уравнение:

$$\cos(Ls) = F_{\pm}(\omega) \tag{21}$$

$$F_{\pm}(\omega) = \frac{a\sin(Lq)\left(b\cosh(ad) + a\sinh(ad)\right) + q\cos(Lq)\left(a\cosh(ad) + b\sinh(ad)\right)}{2q\left(a\cosh(a(d+L)) + b\sinh(a(d+L))\right)} +$$
$$+\frac{a\cosh(a(d+L))\left(q\cos(Lq) - b\sin(Lq)\right) + \left(\left(bq\cos(Lq) - a^2\sin(Lq)\right)\right)\sinh(a(d+L))}{2q\left(a\cosh(ad) + b\sinh(ad)\right)}$$

которое определяет волновое число s в зависимости от частоты ω. Если имеются области значений ω, для которых $|F(\omega)| > 1$, то в этой области частот распространение сдвиговой волны не имеет места (в этом случае волновое число s не является действительным).

Необходимо отметить, что для двух классов функций (11), (12) $F_+(\omega) = F_-(\omega)$.

Численный анализ и обсуждение результатов.

Рассмотрим частный случай дисперсионного уравнения (16) в случае $b = 0$ и запишем в уравнение в безразмерном виде:

$$F(\eta) = \frac{1}{2}\cos\left(\sqrt{\eta^2 - a_0^2}\right)\cosh(a_0 + a_0 d_0)\sec h(a_0 d_0) +$$
$$+\frac{1}{2}\cos\left(\sqrt{\eta^2 - a_0^2}\right)\cosh(a_0 d_0)\sec h(a_0 + a_0 d_0) + \tag{22}$$
$$+\frac{a_0}{2\sqrt{\eta^2 - a_0^2}}\sin\left(\sqrt{\eta^2 - a_0^2}\right)\left(\sec h(a_0 + a_0 d_0)\sinh(a_0 + a_0 d_0) - \sec h(a_0 d_0)\sin(a_0 + a_0 d_0)\right),$$

где приняты следующие обозначения: $\eta^2 = \left(\frac{\rho L^2\omega^2}{G_0} - L^2k^2\right)$, $a_0 = aL$, $d_0 = dL^{-1}$.

Проведём сравнительный численный анализ уравнения (22), исследуя роль параметра неоднородности на формирование запретных зон частот. На рис.1 приведены графики зависимости относительной ширины первой и второй запретных зон $\Delta\omega/\omega_0$ от параметра

неоднородности в случае, когда $d_0 = -0.5$ и $d_0 = 0$, где $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$; $\omega_0 = (\omega_1 + \omega_2)/2$. Как следует из вида графиков зависимости, неоднородность существенно увеличивает ширину запретных зон.

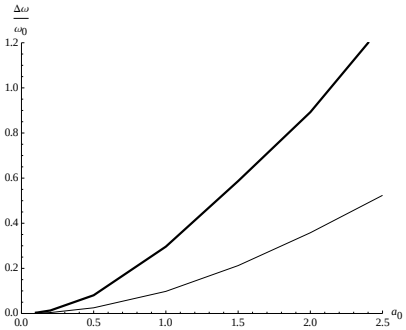


Рис.1а. Зависимость относительной ширины первой запретной зоны от параметра неоднородности, жирная кривая соответствует $d_0 = 0$, тонкая $d_0 = -0.5$

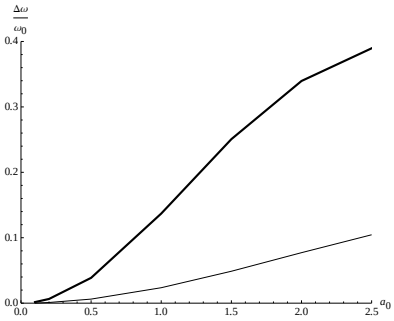


Рис.1б. Зависимость относительной ширины второй запретной зоны от параметра неоднородности, жирная кривая соответствует $d_0 = 0$, тонкая $d_0 = -0.5$

Отметим, что случай $d_0 = 0$ соответствует непрерывным профилям неоднородности материала $f(x) = \left(\cosh\left(a\left(x - nL + L/2\right)\right)\right)^2$; $f(nL) = f((n-1)\mathrm{L})$.

Из графиков, приведённых на рис. 1а и 1б, видно, что относительная ширина запретных зон в случае, когда $d_0 = 0$, больше, чем $d_0 = -0.5$, например, в случае, когда $a_0 = 2$, относительная ширина первой запретной зоны при $d_0 = 0$ два с половиной раза больше от относительной ширины первой запретной зоны при $d_0 = -0.5$.

Наличие зон запирания частот при определённых значениях параметров $a_0 = 1.5$, $d_0 = -0.5$ и $d_0 = 0$, характеризующие механические и геометрические параметры, проиллюстрированы на рис. 2а и 2б в интервале первой зоны Брюллена $0 < sL < \pi$.

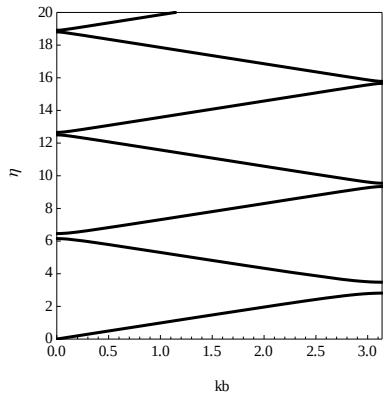


Рис.2а. Дисперсионные кривые зон запирания частот $a_0 = 1.5$, $d_0 = -0.5$

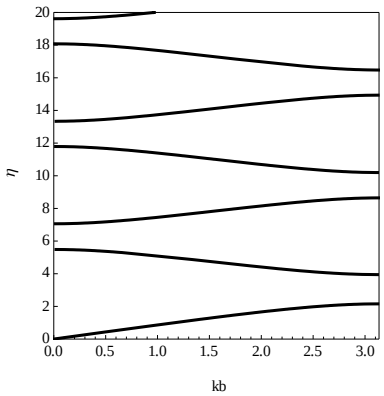


Рис.2б. Дисперсионные кривые зон запирания частот $a_0 = 1.5$, $d_0 = 0$

Заключение

Для специального класса функций, характеризирующих неоднородность материала, допускающих точное решение, исследованы вопросы образования зон запирания частот сдвиговых волн в периодической структуре, состоящей из упругого функционально-градуированного материала. Аналитически получено дисперсионное уравнение, определяющее зоны запирания частот в зависимости от параметра неоднородности функционально-градуированного материала и на основе численного анализа построены соответствующие дисперсионные кривые.

Авторы выражают благодарность профессору К.Б. Казаряну за постановку задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. V. Birman, L.W. Byrd «Modeling and Analysis of Functionally Graded Materials and Structures», Applied Mechanics Reviews, vol. 60, 2007, pp.195-215.
2. R.M. Mahamood, E.T. Akinlabi, M. Shukla, S. Pityana, Functionally Graded Material: An Overview, Proceedings of the World Congress on Engineering, London, UK, 2012, vol. 3, pp. 35-41.
3. Lord Rayleigh, On the maintenance of vibrations of forces of double frequency, and on the propagation of waves through a medium endowed with a periodic structure, Phil. Mag., 24 (1887), pp.145–159.
4. E.H. Lee, A survey of variational methods for elastic wave propagation analysis in composites with periodic structures, in Dynamics of Composite Materials, E.H. Lee, ed., ASME, New York, 1972, pp.122–138.
5. E.H. Lee and W.H. Yang, On waves in composite materials with periodic structure, //SIAM Journal on Applied Mathematics, 25 (1973), pp.492–499.
6. Mingrong Shen , Wenwu Cao, Acoustic band gap formation in a periodic structure with multilayer unit cells, //Journal Phys. D: Appl. Phys. 33 , (2000), p.1150–1154.
7. A. Velo, E. Bruder, N. Rodriguez, G. Gazonas, E. Bruder, Recursive Dispersion Relations in One-Dimensional Periodic Elastic Media, //SIAM Journal on Applied Mathematics. Vol.69, No.3, pp.670–689, (2008).
8. Казарян К.Б., Казарян Р.А., Папян А.А. Волны Флоке в неоднородном периодическом стержне. «Проблемы механики деформируемого твердого тела», посвящ. 95-летию академика НАН Армении С.А. Амбарцумяна. Ереван: 2017. С.110-117.
9. Avetisyan, A.S., Belubekyan, M.V. and Ghazaryan, K.B., 2015. Stability of a beam with periodic supports. Mechanics. Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia, 68(3), pp.16-21.
10. Аветисян А.С., Казарян К.Б. Волны в «фонон-фотон» кристаллах и импеданс. /В сб.: :Проблемы механики деформируемого твердого тела:, посвящ. 90-летию академика НАН Армении С.А. Амбарцумяна. Ереван: 2012. С.15-22.
11. G.T. Piliposian, A.S. Avetisyan, K.B. Ghazaryan, Shear wave propagation in periodic phononic/-photonic piezoelectric medium, Wave Motion, v.49 , 1, 2012 p.125–134.
12. Lekner, J., Light in periodically stratified media. JOSA, 1994. A, 11(11), pp.2892-2899.

Сведения об авторах:

Казарян Р.А. - старший научный сотрудник Института механики НАН Армении. **Адрес:** пр. Маршала Баграмяна, 24/2, 0019, Ереван, Армения, **Тел.:** (099) 39 63 44

Папян А.А. – канд. физ.-мат. наук, научн. сотр. Института механики НАН Армении. **Адрес:** пр. Маршала Баграмяна, 24/2, 0019, Ереван, Армения, **E-mail:** papyanararat11@gmail.com

Оганян С.К. – аспирант Института механики НАН Армении. **Адрес:** пр. Маршала Баграмяна, 24/2, 0019, Ереван, Армения**. E-mail:** sergohanyan@mail.ru

К ВОПРОСУ О РЕКОНСТРУКЦИИ ПРОФИЛЕЙ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ И ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ В ПОВЕРХНОСТНО-УПРОЧНЁННОМ УПРУГОМ ТЕЛЕ МЕТОДОМ ДАВИДЕНКОВА

Петухов Д.С., Келлер И.Э.

Найдены точные соотношения между профилями остаточных напряжений и пластических деформаций в поверхностно упрочнённых телах с плоской и цилиндрической поверхностями. Данные профили восстанавливаются по зависимости прогиба полоски или кольца, вырезанных из детали, от толщины стравленного слоя с упрочнённой поверхности. Предложенные выражения позволяют восстанавливать пластические деформации по получаемой в лаборатории функции прогиба и внедрять их в численные схемы как источник остаточных напряжений, оставляя данные по последним для верификации. Результат необходим для решения задач технологии поверхностного упрочнения деталей машин и задач прогноза их ресурса к контактному и усталостному разрушению.

1. Поверхностный слой сжимающих тангенциальных остаточных напряжений может обеспечить 70% повышения ресурса деталей машин по отношению к развитию усталостного и контактного разрушения. Современные технологии создания такого слоя используют обдувку дробью, ударное воздействие ультразвуком, лазером или струёй жидкости, плазменное имплантирование ионами азота и другие прогрессивные технологии. Центральным моментом при математическом моделировании задач технологии и ресурса является метод экспериментального определения распределения по глубине детали полей остаточных напряжений и пластических деформаций. До сих пор распределение остаточных напряжений по глубине упрочнённого слоя обеспечиваются разрушающими методами контроля остаточных напряжений, основанными на изменении стрелы прогиба u при травлении упрочнённой поверхности полоски или кольца, вырезанных из детали с плоской или цилиндрической поверхностью [1,2], сопровождающиеся записью функции $u(a)$, где a — толщина стравленного слоя. Обычно лаборатория выдает профиль $\sigma(z)$ зависимости тангенциальной компоненты (или тангенциальных компонент) остаточных напряжений от глубины залегания $z = h - a$ в тонком приповерхностном слое толщиной $\hat{h}$ порядка нескольких сотен микрометров, по которым далее восстанавливается полное распределение остаточных напряжений по глубине $\sigma(z)$ и распределение пластических деформаций $\varepsilon(z)$, вызвавшее эти напряжения. Это делается не всегда корректно, при этом результат может сопровождаться качественными отличиями от точного решения задачи [3,4]. В работе выведены точные выражения для распределений компонент $\sigma(z)$ и $\varepsilon(z)$ через $u(a)$, которые используются для решения задач подбора рациональных параметров технологического процесса поверхностного упрочнения деталей машин и определения их ресурса в условиях эксплуатации. Поле $\varepsilon(z)$ в виде фиктивной температурной деформации удобно использовать для включения в расчётную схему остаточных напряжений в рамках стандартных пакетов прикладных вычислений, оба поля необходимы для расчёта высокотемпературной ползучести и релаксации остаточных напряжений поверхностно упрочнённых деталей турбин, ресурса по отношению к малоцикловой усталости и трещиностойкости. Результаты для пластины опубликованы в работе [5], для полого кругового цилиндра приводятся здесь впервые.

2. Записываются пространственные уравнения равновесия свободного линейного изотропного упругого тела в форме пластины с пластическими деформациями $\varepsilon_{rr}(z) = \varepsilon_{\varphi\varphi}(z) = -\frac{1}{2}\varepsilon_{zz}(z) = \varepsilon(z) \geq 0$, локализованными вблизи одной из поверхностей. Накладываются ограничения об однородности и изотропии распределения полных деформаций в плоскости пластины. Граничные условия на краях пластины выводятся из вариационного принципа о минимальности упругой энергии остаточных напряжений (на единицу площади пластины) [6]. Точное решение данной задачи даёт следующие выражения для распределения остаточных напряжений и пластических деформаций по толщине пластины через функцию зависимости стрелы прогиба от толщины снятого с упрочнённой поверхности слоя

$$\sigma(z) = \frac{E}{3l^2}\left(z^2 u'(z) + 4z(u(z) - u(h)) + 2\int_h^z (u(\zeta) - u(h))d\zeta\right), \tag{2.1}$$

$$\varepsilon(z)=\frac{1}{3l^2}\left(z^2u'(z)+4zu(z)+2\int_0^z u(\zeta)d\zeta\right), \tag{2.2}$$

где h,l — толщина и длина полосы. Первое из выражений есть в точности формула Давиденкова-Биргера [1], выведенная методами сопротивления материалов. Вместе с (2.1) справедливо выражение

$$\sigma(z)=-E\left(\varepsilon(z)-Cz-D\right),$$
$$Ch=12M-6N,\quad D=4N-6M,\quad N=\frac{1}{h}\int_0^h\varepsilon(\zeta)d\zeta,\quad M=\frac{1}{h^2}\int_0^h\varepsilon(\zeta)\zeta d\zeta. \tag{2.3}$$

Анализ выражений (2.1)-(2.3) позволяет сделать ряд важных качественных выводов.

i. Из (2.3) следует, что профиль пограничного слоя остаточных напряжений в пластине состоит из части, конгруэнтной профилю пограничного слоя пластических деформаций, и линейной части с коэффициентами, определяемыми из интегральных условий равенства нулю интегральных усилия и момента в пластине. Выражения (2.1), (2.2) показывают, что остаточные напряжения меняют знак в точке, располагающейся в пределах пограничного слоя пластических деформаций, а так же, что после удаления всего слоя пластических деформаций стрела прогиба перестаёт изменяться. В практически важных случаях, когда упрочнённый слой тонок в сравнении с толщиной пластины, последнее (линейное) слагаемое в (2.3) соотносится с первым как малая величина $\hat{h}/h$ с 1, однако её игнорирование ведёт к качественно неверным выводам относительно отсутствия (нежелательных) растягивающих напряжений под слоем сжимающих.

ii. Следует отметить, что согласно (2.1) распределение остаточных напряжений можно вычислять в процессе травления, тогда как распределение пластических деформаций по (2.2) только после полного снятия слоя материала с пластическими деформациями.

iii. В выражении (2.3) функция $\varepsilon(z)$ может быть ненулевой на любом отрезке $z\in[h-\hat{h},h]\subseteq[0,h]$, но, как было отмечено выше, остаточные напряжения будут ненулевыми по всей толщине пластины (кроме двух точек). Выразить явно $\varepsilon(z)$ через $\sigma(z)$ не представляется возможным, однако оператор (2.3) можно обратить в конечномерном пространстве без каких-либо дополнительных гипотез.

iv. При трансформации слоя в полупространство коэффициенты *C* и *D* в выражении (2.3) исчезают, и распределение остаточных напряжений по глубине не изменяет своего знака.

На рис. 2.1-2.3 приведены экспериментально определенная зависимость $u(a)$ и восстановленные по ней распределения остаточных напряжений и пластических деформаций по толщине пластины, демонстрирующие необходимость гладкой аппроксимации данных $u(a)$. Следует отметить, что дискретизация выражений (2.1),(2.2) ведёт к погрешности одного порядка. На рис. 2.4 приведён профиль остаточных напряжений, рассчитанный в пакете ANSYS для пластины с пластическими деформациями, найденными по (2.2), в сопоставлении с остаточными напряжениями, найденными согласно (2.1). Практически точное совпадение данных свидетельствует о верификации полученных соотношений, которые можно внедрять в постпроцессинг установок типа АПООН, ПИОН, Меркулон, УДИОН и т.д. для автоматического определения распределения остаточных напряжений в полоске, вырезанной из пластины-свидетеля.

3. Для случая цилиндрического слоя (толстостенной трубы) были получены выражения для напряжений в зависимости от пластических деформаций:

$$\sigma_{\theta\theta} = 2\mu r^{-2} c_2 + \lambda c_3 + 2(\lambda+\mu)c_1 - \frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} f(r) - \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu} g(r) -$$

$$- \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu} \int_{r_1}^{r} \frac{2f(\xi)+g(\xi)}{\xi} d\xi - \frac{2\mu^2}{\lambda+2\mu} r^{-2} \int_{r_1}^{r} \xi g(\xi) d\xi,$$

$$\sigma_{zz} = 2\lambda c_1 + (\lambda+2\mu)c_3 - \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu} f(r) - \frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} g(r) - \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu} \int_{r_1}^{r} \frac{2f(\xi)+g(\xi)}{\xi} d\xi, \qquad (3.1)$$

$$\sigma_{rr} = -2\mu r^{-2} c_2 + \lambda c_3 + 2(\lambda+\mu)c_1 - \frac{2\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} \int_{r_1}^{r} \frac{2f(\xi)+g(\xi)}{\xi} d\xi +$$

$$+ \frac{2\mu^2}{\lambda+2\mu} r^{-2} \int_{r_1}^{r} \xi g(\xi) d\xi.$$

Здесь $\sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}, \sigma_{rr}$ — окружная осевая и радиальная компоненты остаточных напряжений, r_1 и r_2 – внутренний и внешний радиусы трубы, $\varepsilon_{\theta\theta} = f(r)$ и $\varepsilon_{zz} = g(r)$ – распределения пластических деформаций, c_1, c_2, c_3 – скаляры, интегрально зависящие от пластических деформаций (не приведённые здесь вследствие громоздкости).

Если слой пластических деформаций тонок по сравнению с толщиной трубы, то интегральные выражения в (3.1) вносят слабый вклад в величину остаточных напряжений (даже для больших кривизн трубы ~3-4%). Если толщина трубы мала по сравнению с её радиусом, то компонента σ_{rr} мала по сравнению с $\sigma_{\theta\theta}$ и σ_{zz}.

При разрезании трубы по образующей напряжения изменятся на величину

$$\sigma_{\theta\theta}^{+} = 4kM\left((r_2^2 - r_1^2)(1+\ln(r)) + r_1^2(r_2^2 + r^2)r^{-2}\ln(r_1) - r_2^2(r^2 + r_1^2)r^{-2}\ln(r_2)\right),$$

$$\sigma_{zz}^{+} = 2k\frac{\lambda}{\lambda+\mu} M\left((r_2^2 - r_1^2)(1+2\ln(r)) + 2r_1^2\ln(r_1) - 2r_2^2\ln(r_2)\right), \qquad (3.2)$$

$$\sigma_{rr}^{+} = 4kM\left((r_2^2 - r_1^2)\ln(r) - r_1^2(r_2^2 - r^2)r^{-2}\ln(r_1) - r_2^2(r^2 - r_1^2)r^{-2}\ln(r_2)\right).$$

где $k = \left(\left(r_2^2 - r_1^2\right)^2 - 4r_1^2 r_2^2 \ln^2\frac{r_2}{r_1}\right)^{-1}$, $M = -\int_{r_1}^{r_2} r\sigma_{\theta\theta} dr$ – взятый с обратным знаком момент, создаваемый окружными напряжениями (3.1) на радиальном сечении, перемещения

$$u_r^{+} = \frac{k}{\lambda+\mu} M \frac{1}{r}\left[(\lambda+2\mu)r_1 r\cos\theta\left((r_2^2 - r_1^2) + 2r_2^2\ln\frac{r_2}{r_1}\right) + 2r_1^2\left(\mu r^2 + (\lambda+\mu)r_2^2\right)\ln r_1 -\right.$$

$$\left. - 2r_2^2\left(\mu r^2 + (\lambda+\mu)r_1^2\right)\ln r_2 + (\lambda+2\mu)(r_2^2 - r_1^2)r^2 + 2\mu(r_2^2 - r_1^2)r^2\ln r\right] \qquad (3.3)$$

$$u_\theta^{+} = k\frac{\lambda+2\mu}{\mu(\lambda+\mu)} M\left(2r_1(r_2^2 - r_1^2)\theta - r_1\left(r_2^2 - r_1^2 + 2r_2^2\ln\frac{r_2}{r_1}\right)\sin\theta\right).$$

Перемещения, вызванные пластическими деформациями в случае замкнутой трубы, по сравнению с перемещениями (3.3), пренебрежимо малы. Выражения, аналогичные (3.1)-(3.3), можно получить и для случая замкнутых и разомкнутых колец.

Распределение пластических деформаций можно найти по определяемой экспериментально зависимости прогибов вырезанного сегмента кольца или диаметров разрезанного кольца при от толщины стравленного слоя пластических деформаций. Данные прогибы выражаются через пластические деформации с помощью формул (3.1)-(3.3). Эти выражения находятся численно, для чего искомые функции $f(r)$ и $g(r)$ в выражениях для прогибов представляются кусочно-линейными функциями с неизвестными коэффициентами, которые далее находятся в

результате решения системы линейных алгебраических уравнений. Данная методика также была реализована и верифицирована.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 17-08-01085).

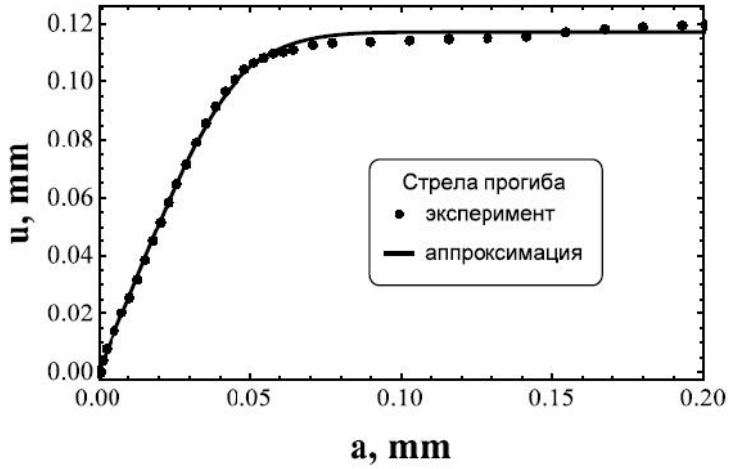


Рис. 2.1. Зависимость стрелы прогиба от толщины снятого слоя.

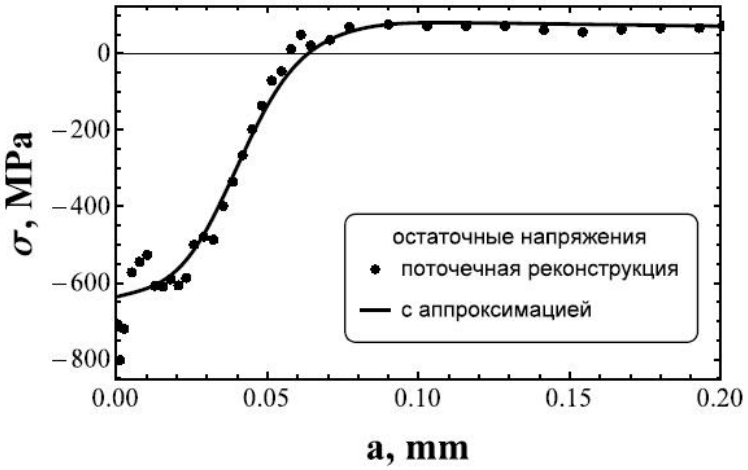


Рис. 2.2. Остаточные напряжения в пограничном слое, определённые по данным эксперимента.

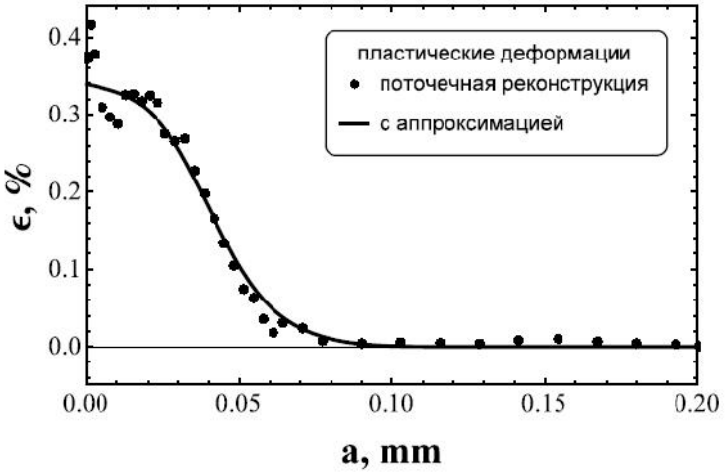


Рис. 2.3. Пластические деформации в пограничном слое, определённые по данным эксперимента.

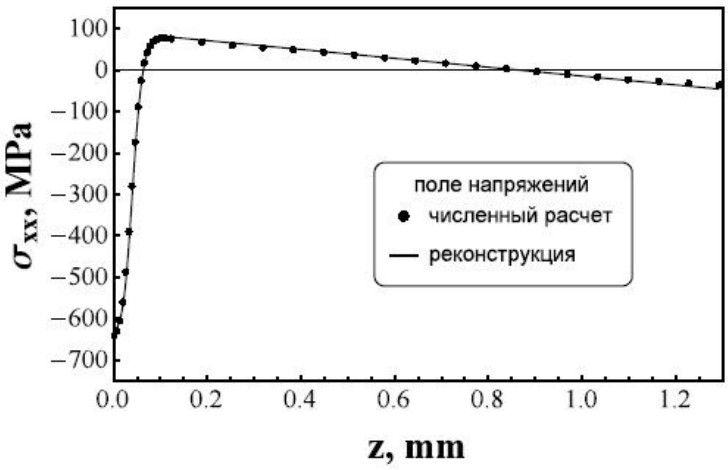


Рис. 2.4. Рассчитанный профиль остаточных напряжений по толщине пластины в сопоставлении с экспериментальными данными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Биргер И.А. Остаточные напряжения. М.: Машгиз, 1963. 232 с.
2. Иванов С.И. К определению остаточных напряжений в цилиндре методом колец и полосок. Остаточные напряжения, Вып. 53. Куйбышев: КуАИ, 1971. С. 32–42.
3. Musinski W.D., McDowell D.L. On the eigenstrain application of shot-peened residual stresses within a crystal plasticity framework: Application to Ni-base superalloy specimens. International Journal of Mechanical Sciences. 2015. V 100. P. 195–208.
4. Радченко В.П., Саушкин М.Н. Феноменологический метод расчёта остаточных напряжений и пластических деформаций в полом поверхностно упрочнённом цилиндрическом образце. //ПММ. 2013. Т.77. Вып.1. С.143-152.
5. Келлер И.Э., Трофимов В.Н., Владыкин А.В., Плюснин В.В., Петухов Д.С., Виндокуров И.В. К вопросу о реконструкции остаточных напряжений и деформаций пластины после дробеструйной обработки. //Вестн. Сам.гос.техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2018. Т.22. №1. С.1–25.
6. Койтер В.Т. Общие теоремы теории упругопластических сред. Москва: Издательство иностранной литературы, 1961. 78 с.

Information about authors:

Dmitriy Sergeevich Petukhov – post-graduate student, Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Department of Nonlinear Mechanics of Deformable Solids, (+7342) 237 83 07
E-mail: petuhovds@mail.ru

Ilya Ernstovich Keller – researcher, Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Department of Nonlinear Mechanics of Deformable Solids, (+7342) 237 83 07
E-mail: kie@icmm.ru

О ЛОКАЛИЗОВАННЫХ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЯХ В ПЛАСТИНЕ-ПОЛОСЕ СО СВОБОДНО ОПЁРТЫМ И СВОБОДНЫМ КРАЯМИ

САНОЯН Ю. Г.

В рамках теории Кирхгофа решена задача изгибных локализованных колебаний полосы. Один край полосы свободно опёрт, другой свободен. Получено дисперсионное уравнение. Найдено аналитическое выражение для расчёта критических точек перехода от локализованных колебаний к нормальным колебаниям и исследованы формы колебаний полосы. Получена и исследована зависимость отношения постоянной распространения к волновому числу от ширины полосы

Введение. Локализованные колебания впервые были экспериментально обнаружены на круглых пластинках Shaw E. [1]. Подобное явление было обнаружено Коненковым Ю. К. для полубесконечных пластин со свободным краем [2]. В настоящее время имеется большое колличество работ по распространению однородных нормальных колебаний в полосах и прямоугольных пластинах с однородными краевыми условиями на краях. В работах [3-8] было установлено, что локализованные колебания возникают при определенных сочетаниях коэффициента Пуассона и ширины пластины. В [9] было показано,что распространяющаяся вдоль оси пластины однородная нормальная волна состоит из симметричных или антисимметрчных колебаний. Представляется интересным исследование изгибных колебаний в пластинах с несиметричными краевыми условиями. Изучение таких локализованных колебаний-цель настоящей работы.

1. Изгибные колебания полосы малой толщины *2h* описываются дифференциальным уравнением

$$\Delta\Delta w(x,y) - k_0^4 w\left(x.y\right) = 0\,, \quad -\infty \le y \le \infty\,, \tag{1}$$

где x и y – декартовы координаты срединной плоскости, $0 \le x \le a$ $w(x,y)$ – смещение вдоль оси z, $k_0 = \left(\rho\omega^2 / D\right)^{1/4}$ –волновое число изгибной волны, ρ – удельная плотность полосы, D – цилиндрическая жёсткость полосы, ω – круговая частота.

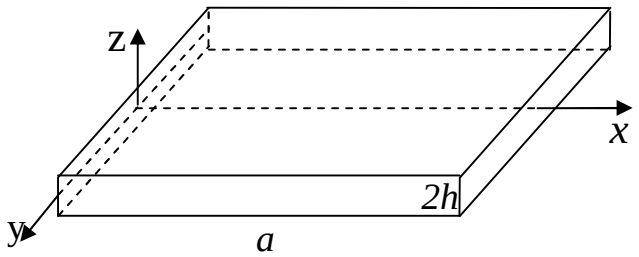


Рис.1. Пластина в прямоугольной системе координат.

Край пластины $x = 0$ свободно опёрт, край $x = a$ свободен (рис.1). Решение однородного уравнения (1) ищем в виде

$$w(x,y) = e^{iky}\left(\frac{\mathrm{sh}\left(\alpha x\right)}{\mathrm{sh}\left(\alpha a\right)} + A\frac{\mathrm{sh}\left(\beta x\right)}{\mathrm{sh}\left(\beta a\right)}\right). \tag{2}$$

В работе рассматриваются только установившиеся во времени гармонические колебания и множитель $\exp(i\omega t)$ не приводится. В формуле (2) k – постоянная распространения волны вдоль оси y, A – постоянная,

$$\alpha = \sqrt{k^2 + k_0^2}\,, \beta = \sqrt{k^2 - k_0^2}\,, \tag{3}$$

Решение (2) должно удовлетворять краевому условию свободно опёртого края

$$w(x,y)=0\,,\quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \text{ при } x=0\,, \tag{4}$$

краевому условию для свободного края (изгибающие моменты и перерезывающие силы равны нулю)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0\,,\quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\left(2-\nu\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}=0 \quad \text{при } x=a \tag{5}$$

и условию, чтобы амплитуда изгибной волны в полосе была конечной. Для локализованных колебаний с $k>0$ это условие выполняется при вещественных значениях k. Решение (2) удовлетворяет и условиям (4). Подставляя (2) в (5) и учитывая (4), получим систему уравнений

$$\alpha-k^2\nu+A\left(\beta^2-k^2\nu\right)=0 \tag{6а}$$

$$\alpha\left(\alpha^2-k^2\left(2-\nu\right)\right)\mathrm{cth}\left(\alpha a\right)+A\beta\left(\beta^2-k^2\left(2-\nu\right)\right)\mathrm{cth}\left(\beta a\right)=0 \tag{6б}$$

Исключая A, найдём дисперсионное уравнение для волнового числа изгибной волны

$$\frac{\sqrt{k^2-k_0^2}\left(k_0^2+k^2\left(1-\nu\right)\right)^2\mathrm{cth}\left(a\sqrt{k^2-k_0^2}\right)}{\sqrt{k^2+k_0^2}\left(k_0^2-k^2\left(1-\nu\right)\right)^2\mathrm{cth}\left(a\sqrt{k^2+k_0^2}\right)}=1\,. \tag{7}$$

В безразмерных величинах (7) имеет вид

$$\frac{\sqrt{\eta^2-1}\left(1+\eta^2\left(1-\nu\right)\right)^2\mathrm{cth}\left(a\sqrt{\eta^2-1}\right)}{\sqrt{\eta^2+1}\left(1-\eta^2\left(1-\nu\right)\right)^2\mathrm{cth}\left(a\sqrt{\eta^2+1}\right)}=1\,,\ \eta=k/k_0\,,\ \gamma=a\,k_0\,. \tag{8}$$

Dля $\eta>1$ и больших a отношение гиперболических котангенсов стремится к единице, а сама формула стремится к дисперсионному уравнению изгибной волны «рэлеевского» типа [1]. График функции $\varphi\left(\eta\right)$, левой части дисперсионного уравнения (8), для значений $\gamma=30$, $\nu=0.3$ представлен левым рис.2 для $\eta\le 1$ и правым для $\eta>1$.

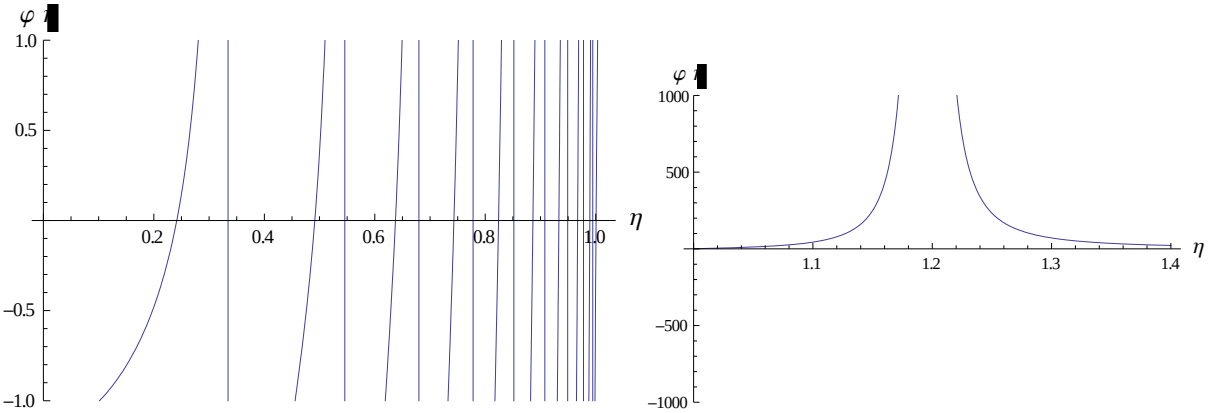


Рис. 2. График $\varphi\left(\eta\right)$ для $\gamma=30$, $\nu=0.3$.

Корни этого уравнения дают значения постоянной распространения в безразмерной величине η_n. Индекс n обозначает порядковый номер распространяющегося в полосе колебания. При увеличении γ число решений η_n неограниченно возрастает. Пронумеруем корни $\eta_n<1$ справа налево от едницы. Единственный корень, который больше 1, обозначим через η_0 .Таким

образом, кроме корня η_0, все корни η_n сосредоточены в области $0 \le \eta_n < 1$, и находятся между соседними асимптотами функции $\mathrm{cth}\left(\gamma\sqrt{\eta^2 - 1}\right)$

$$\sqrt{1-\left(\frac{\pi n}{\gamma}\right)^2} < \eta_n < \sqrt{1-\left(\frac{\pi(n+1)}{\gamma}\right)^2} \tag{9}$$

Асимптот для $\eta > 1$ нет. Последний корень η_n может быть расположен как между асимптотами (9), так и между асимптотой с номером $(n+1)$ и осью абсцис. Таким образом, в полосе можно возбудить конечное число колебаний, которое стремится к бесконечности при $\gamma \to \infty$. Количество нормальных волн для ширины пластины *a*, коэффициента Пуасона $\nu = 0.3$ и волнового числа κ_0 можно подсчитать по графику рис.2

Особый интерес представляет волна с постоянной распространения η_0. Назовём критическими значения η_0, при которых $\eta_0 = 1$. Для определённых значений ширин пластины и коэффициентов Пуассона ν η_0 имеет значения больше единицы и колебания в полосе имеют локализованный характер. Если в уравнении (8) перейти к пределу $\eta \to 1$, получим значение γ и коэффициента Пуассона ν получим формулу для расчёта критических значений η_0

$$\nu(\gamma) = -\frac{2^{5/4}\sqrt{\gamma \mathrm{tn}h\left(\gamma\sqrt{2}\right)} - 2\mathrm{tn}h\left(\gamma\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}\gamma - \mathrm{tn}h\left(\gamma\sqrt{2}\right)} \tag{10}$$

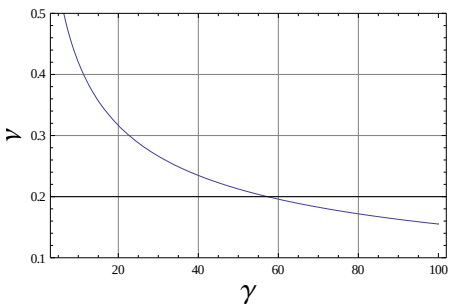


Рис.3. Значения коэффициентов Пуассона и γ для $\eta_0 = 1$.

График функции $\nu(\gamma)$ для значений $\eta_{кр.}$ показан на рис. 3. Минимальное значение γ для существования локализованной волны равно 6.36395. С увеличением γ ν стремится к нулю. В точках кривой рис.3 локализованные колебания переходят в нормальные. Следовательно, при любом значении коэффициента Пуассона всегда найдётся такое γ, при котором в полосе можно возбудить локализованные колебания.

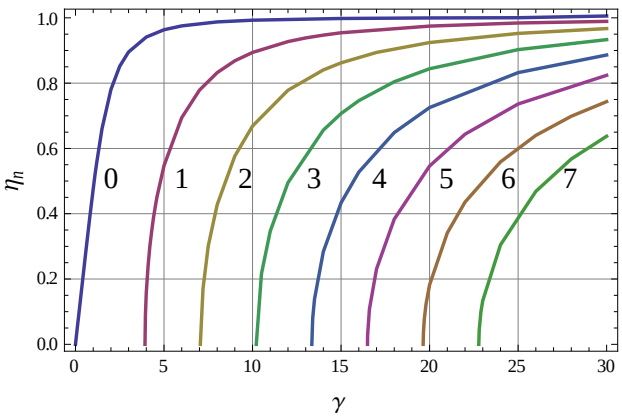


Рис. 4. Зависимость η_n от γ .

На рис. 4.показаны зависимости отношений постоянных распространения к волновому числу от безразмерной величины γ для восьми волн с номерами от нуля до 7.

Рассмотрим формы локализованных изгибных колебаний полосы, которые могут быть возбуждены в пластине при значениях $k > k_0$ ($\eta > 1$). На рис.5 показаны формы изгиба пластин для $a = 30$, $\kappa = 1$, $\nu = 0.3$. Отношение постоянной распространения к волновоу числу для этой волны $\eta_0 = 1.00056$

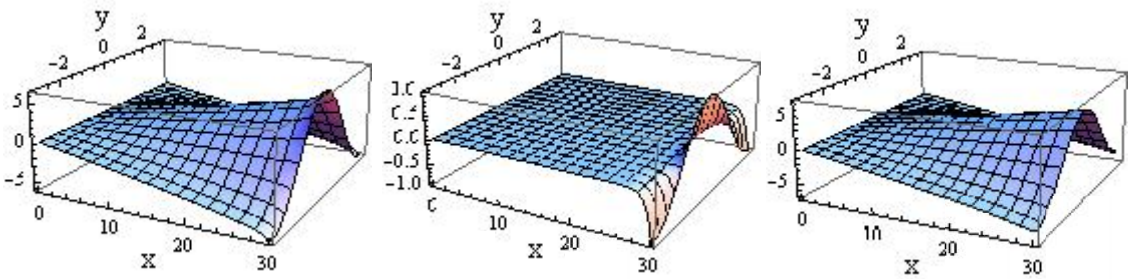


Рис.5. Форма слагаемых изгибных колебаний пластины формулы (2) для $a = 30$, $k = 1$, $\nu = 0.5$, $n = 1$.

Правый график рис.5 показывает профиль половины периода колебания полосы вдоль оси *y*, рассчитанный по формуле (2) для волны сномером *n=0*. Изгиб полосы состоит из суперпозиции двух компонент заключенных в скобки выражения (2). Средний рисунок показывает форму колебаний первого слагаемого скобки (2) и представляет явно выраженное локализованное колебание затухающее вдоль оси *x*. Вторая состовляющая, представленная правым графиком, состоит из линейно убывающих смещений вдоль оси *x* от свободного края к свободно опертому. Вторая компонента превышает первую примерно в четыре раза и она доминирует в колебаниях полосы. Природа этих двух колебаний различна. Быстрое затухание колебаний вдоль оси *x* на среднем графике вызвано экспоненциальной функцией в (8). Линейные смещения поверхности полосы вдоль оси *x* вызваны природой граничных условий: нулевые смещения на одной стороне и свободный край на другой. При увеличении ширины полосы или повышении коэффициента Пуассона затухание возрастает и колебания приобретают форму близкую к локализованным колебаниям.

Закллючение. Для тонких полос со свободно опёртым одним краем и свободным другим краем выведена формула для расчёта критических значений $\eta_{кр.}$, отношения постоянной распространения к волновому числу, которая разделяет локализованные колебания от нормальных колебаний. Рассчитана формула зависимости коэффициента Пуассона ν от $\gamma = a k_0$. Показано,что форма колебаний полос состоит из двух составляющих: из колебаний,

затухающих по экспоненциальной функции и колебаний с линейно убывающими прогибами в направлении, перпендикулярном к распространию волны. Наиболе чётко это проявляется при малых значениях ширин полосы и коэффициента Пуассона. При больших значениях этих параметров форма колебаний имеет смешанную форму.

ЛИТЕРАТУРА

1. Shaw E. A.On the resonant vibrations of thick barium titanate disks. //J.Acoust.soc. AM. 1956. V.28. №1. P. 1-13.
2. Коненков Ю.К. Об изгибных волнах рэлеевского типа. //Акустичекий журнал. 1960. Т.6. Вып. 1. С.124-126.
3. Белубекян М.В. Поверхностные волны в упругих средах. Проблемы механики деформируемого твердого тела. Институт механики НАН РА Армении. 1997. С.79-96.
4. Белубекян М.В. Учет поперечных сдвигов в задаче изгибных колебаний пластинки, локализованных вдоль свободной кромки. Сб.: «Оптимальное управление и прочность механических систем». Ереван: 2002. С.130-133.
5. Мкртчян А.П. Локализованные изгибные и планарные колебания упругих пластин. /Диссертация на соискание учёной степени кандидата физ.-мат.наук. Ереван. 2005.
6. Каплунов Ю.Д., Коссович Е.Л., Мухомодьяров Р.Р., Сорокина О.В. Явные модели распространения изгибных краевых и интерфейсных волн в тонких изотропных пластинах. //Изв. Саратовского университета. 2013. Т.13. Сер. Математика. Механика. Информатика. Вып. 1, ч. 1. С.56-63.
7. Бобровницкий Ю.И. Изгибные колебания шарнирно опёртой полосы. 1974. Т.20 №4, С.503-510.
8. Вешев В.А., Клюкин И.И., Коузов Д.П., Лукьянов В.Д. О распространении колебательной энергии в тонкой упругой пластине постоянной ширины. //Акустичекий журнал. 1977. Т.23, вып. 2. С. 228-233.
9. Вильде М.В., Каплунов Ю.Д., Коссович Л.Ю. Краевые и интерфейсные резонансные явления в упругих телах. М.: Физматгиз, 2010. 300 с.

Сведения об авторе:

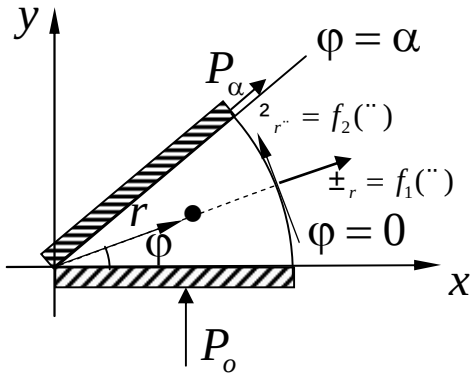
Саноян Ю. Г. – Канд. физ.-мат. н., старший научный сотр. Института механики НАН Армении
Адрес: 0019, Ереван-19, пр. Маршала Баграмяна 24/2.
Телефон: 541319; **E-mail:** yuriisanoyan @mail.ru

УПРУГОЕ РАВНОВЕСИЕ КРУГОВОГО СЕКТОРА, УСИЛЕННОГО СТРИНГЕРОМ И СОПРИКАСАЮЩЕГОСЯ С ЖЁСТКИМ ШТАМПОМ БЕЗ ТРЕНИЯ

Саргсян А.М.

Рассматривается плоская задача теории упругости для кругового сектора с единичным радиусом и углом раствора α $\left(0<\alpha\le 2\pi\right)$, когда на дуговой части контура заданы внешние усилия, на одной радиальной стороне осуществляется условия гладкого контакта, а другая сторона усилена абсолютно жёстким при растяжении и абсолютно гибким при изгибе стрингером. Исследуются характерные особенности напряжений в окрестности вершины кругового сектора и поведение коэффициентов при особенности напряжений.

Упругий круговой сектор модуля упругости E и коэффициента Пуассона ν, отнесённый, как показано на фигуре, к прямоугольной и полярной системам координат, находится в условиях обобщённого плоского напряжённого состояния. В полярной системе координат упругое состояние сектора определяется решением бигармонического уравнения для функций напряжения Эри [1]



$$\Delta\,\Delta\,\Phi\left(r,\varphi\right)=0 \tag{1}$$

при следующих граничных условиях на контуре сектора:

$$u_\varphi\left(r,0\right)=\tau_{r\varphi}\left(r,0\right)=0, \tag{2}$$

$$u_r\left(r,\alpha\right)=\sigma_\varphi\left(r,\alpha\right)=0, \tag{3}$$

$$\sigma_r\left(1,\varphi\right)=f_1\left(\varphi\right),\quad \tau_{r\varphi}\left(1,\varphi\right)=f_2\left(\varphi\right), \tag{4}$$

где $f_1(\varphi)$ и $f_2(\varphi)$ – функции из класса Дирихле [1].

Граничные условия (2) связаны с контактными задачами о вдавливании гладких штампов в упругое основание [2], а граничные условия (3) – с вопросами передачи нагрузок от тонкостенных элементов в виде стрингеров к упругим основаниям [3,4].

Решение бигармонического уравнения (1) представляется в хорошо известном виде [5]:

$$\Phi\left(r,\varphi\right)=r^{\lambda+1}\left[A\sin\left(\lambda+1\right)\varphi+B\cos\left(\lambda+1\right)\varphi+C\sin\left(\lambda-1\right)\varphi+D\cos\left(\lambda-1\right)\varphi\right], \tag{5}$$

где $A,\ B,\ C,\ D,\ \lambda$ – произвольные постоянные.

Напряжения и упругие перемещения выражаются через функции Эри формулами:

$$Eu_r=r^\lambda\left[-A\lambda^+\nu^+S_\varphi^+-B\lambda^+\nu^+C_\varphi^++C\left(4-\lambda^+\nu^+\right)S_\varphi^-+D\left(4-\lambda^+\nu^+\right)C_\varphi^-\right],$$

$$Eu_\varphi=r^\lambda\left[-A\lambda^+\nu^+C_\varphi^++B\lambda^+\nu^+S_\varphi^+-C\left(4+\lambda^-\nu^+\right)C_\varphi^-+D\left(4+\lambda^-\nu^+\right)S_\varphi^-\right], \tag{6}$$

$$\sigma_r=\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi\left(r,\varphi\right)}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi\left(r,\varphi\right)}{\partial\varphi^2},\ \sigma_\varphi$$

где $\lambda^\pm=\lambda\pm1,\ \ \nu^\pm=1\pm\nu,\ S_\varphi^\pm=\sin\left(\lambda\pm1\right)\varphi,\ C_\varphi^\pm=\cos\left(\lambda\pm1\right)\varphi.$

Как следует из (6), напряжения при $0<\mathrm{Re}\lambda<1$ будут обладать у вершины сектора сингулярностью (стремятся к бесконечности) порядка $1-\mathrm{Re}\,\lambda$.

Удовлетворяя граничным условиям (2) и (3), для определения произвольных постоянных $A,\ B,\ C,\ D$ получим однородную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}&\lambda^+A+\lambda^-C=0,\ \lambda^+\nu^+A+(\lambda^-\nu^++4)C=0,\\&S_\alpha^+A+C_\alpha^+B+S_\alpha^-C+C_\alpha^-D=0,\\&-\lambda^+\nu^+S_\alpha^+A-\lambda^+\nu^+C_\alpha^+B+(4-\lambda^+\nu^+)S_\alpha^-C+(4-\lambda^+\nu^+)C_\alpha^-D=0.\end{aligned} \tag{7}$$

Из условий существования нетривиального решения системы (7) следует

$$A=C=0$$

и тригонометрическое уравнение

$$\cos(\lambda+1)\varphi\cdot\cos(\lambda-1)\varphi=0,$$

корни которого действительные и простые:

$$\lambda_k=\alpha_0(2k+1)+1,\ \tilde{\lambda}_n=\alpha_0(2n+1)-1,\ \alpha_0=\pi/2\alpha,\ (k,n)=0,\pm1,\pm2,\ldots \tag{8}$$

Требование конечности энергии упругой деформации в малой окрестности вершины сектора при конечной внешней нагрузке накладывает на корни (8) условия $\lambda_k>0,\ \tilde{\lambda}_n>0,$ которые, в зависимости от угла $\alpha,$ ограничивают область изменения чисел k и n:

I. при $0<\alpha<2\pi$ имеем $k=0,1,2,\ldots;\ n=2,3,4,\ldots$ *(Задача I),*

II. при $0<\alpha<\pi/2$ имеем $k=0,1,2,\ldots;\ n=0,1,2,\ldots$ *(Задача II),* (9)

III. при $\pi/2<\alpha<3\pi/2$ имеем $k=-1,0,1,\ldots;\ n=1,2,3,\ldots$ *(Задача III),*

IV. при $3\pi/2<\alpha<2\pi$ имеем $k=-2,-1,0,\ldots;\ n=2,3,4,\ldots$ *(Задача IV).*

Учитывая, что функции вида

$$\Phi_{kn}(r,\varphi)=D_k r^{\lambda_k+1}\cos(\lambda_k-1)\varphi+B_n r^{\tilde{\lambda}_n+1}\cos(\tilde{\lambda}_n+1)\varphi$$

удовлетворяют уравнению (1) и граничным условиям (2) и (3), функции напряжения Эри для этих четырёх случаев принимают вид:

$$\begin{Bmatrix}\Phi_I\\ \Phi_{II}\\ \Phi_{III}\\ \Phi_{IV}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}a=0\\ a=0\\ a=-1\\ a=-2\end{Bmatrix}\sum_{k=a}^{\infty}\left[D_k r^{\lambda_k+1}+B_k r^{\tilde{\lambda}_k+1}\right]\cos\alpha_0(2k+1)\varphi, \tag{10}$$

причём здесь и далее: $B_0=B_1=0$ для задачи; $B_{-1}=B_0=0$ – для задачи *III*; $B_{-2}=B_{-1}=B_0=B_1=0$ для задачи *IV*.

Тогда, компоненты напряжений, соответствующие этим функциям напряжения Эри, будут иметь вид:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{\varphi I}\\ \sigma_{\varphi II}\\ \sigma_{\varphi III}\\ \sigma_{\varphi IV}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}a=0\\ a=0\\ a=-1\\ a=-2\end{Bmatrix}\sum_{k=a}^{\infty}\left[D_k\lambda_k(\lambda_k+1)r^{\lambda_k-1}+B_k\tilde{\lambda}_k(\tilde{\lambda}_k+1)r^{\tilde{\lambda}_k-1}\right]\cos\alpha_0(2k+1)\varphi, \tag{11}$$

$$\begin{Bmatrix}\tau_{r\varphi I}\\ \tau_{r\varphi II}\\ \tau_{r\varphi III}\\ \tau_{r\varphi IV}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}a=0\\ a=0\\ a=-1\\ a=-2\end{Bmatrix}\sum_{k=a}^{\infty}\left[D_k\lambda_k(\lambda_k-1)r^{\lambda_k-1}+B_k\tilde{\lambda}_k(\tilde{\lambda}_k+1)r^{\tilde{\lambda}_k-1}\right]\sin\alpha_0(2k+1)\varphi, \tag{12}$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{rI}\\ \sigma_{rII}\\ \sigma_{rIII}\\ \sigma_{rIV}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}a=0\\ a=0\\ a=-1\\ a=-2\end{Bmatrix}\sum_{k=a}^{\infty}\left[D_k\lambda_k(3-\lambda_k)r^{\lambda_k-1}-B_k\tilde{\lambda}_k(\tilde{\lambda}_k+1)r^{\tilde{\lambda}_k-1}\right]\cos\alpha_0(2k+1)\varphi. \tag{13}$$

Удовлетворяя граничным условиям (4) для D_k и B_k, получим систему уравнений:

$$\begin{Bmatrix} a=0 \\ a=0 \\ a=-1 \\ a=-2 \end{Bmatrix} \sum_{k=a}^{\infty} \left[D_k \lambda_k \left(3-\lambda_k\right) r^{\lambda_k - 1} - B_k \tilde{\lambda}_k \left(\tilde{\lambda}_k + 1\right) r^{\tilde{\lambda}_k - 1} \right] \cos \alpha_0 \left(2k+1\right)\varphi = f_1\left(\varphi\right),$$

$$\begin{Bmatrix} a=0 \\ a=0 \\ a=-1 \\ a=-2 \end{Bmatrix} \sum_{k=a}^{\infty} \left[D_k \lambda_k \left(\lambda_k - 1\right) r^{\lambda_k - 1} - B_k \tilde{\lambda}_k \left(\tilde{\lambda}_k + 1\right) r^{\tilde{\lambda}_k - 1} \right] \sin \alpha_0 \left(2k+1\right)\varphi = f_2\left(\varphi\right). \tag{14}$$

Умножая первое уравнение на $\cos\alpha_0\left(2m+1\right)\varphi$, а второе – на $\sin\alpha_0\left(2m+1\right)\varphi$ $\left(m=-2,-1,0,...\right)$ и интегрируя по φ в интервале $\left(0,\alpha\right)$, для всех четырёх случаев (9) находим:

$$I.\ \ D_0 = \frac{2}{\alpha}\frac{\tilde{f}_{10}}{\left(1+\alpha_0\right)\left(2-\alpha_0\right)} = \frac{2}{\alpha}\frac{\tilde{f}_{20}}{\alpha_0\left(1+\alpha_0\right)},\ D_1 = \frac{2}{\alpha}\frac{\tilde{f}_{11}}{\left(1+3\alpha_0\right)\left(2-3\alpha_0\right)} = \frac{2}{\alpha}\frac{\tilde{f}_{21}}{3\alpha_0\left(1+3\alpha_0\right)},$$

$$D_k\lambda_k = \frac{1}{\alpha}(\tilde{f}_{1k} + \tilde{f}_{2k}), \quad B_k\left(\lambda_k - 1\right)\left(\lambda_k - 2\right) = \frac{1}{\alpha}\left[\left(\tilde{f}_{1k} + \tilde{f}_{2k}\right)\left(3-\lambda_k\right) - 2\tilde{f}_{1k}\right], \tag{15}$$

$$\tilde{f}_{1k} = \int_0^{\alpha} f_1\left(\varphi\right)\cos\alpha_0\left(2k+1\right)\varphi, \quad \tilde{f}_{2k} = \int_0^{\alpha} f_2\left(\varphi\right)\sin\alpha_0\left(2k+1\right)\varphi d\varphi.$$

При этом, между функциями $f_1\left(\varphi\right)$ и $f_2\left(\varphi\right)$ имеют место соотношения

$$\alpha_0\tilde{f}_{10} - \left(2-\alpha_0\right)\tilde{f}_{20} = 0,\ 3\alpha_0\tilde{f}_{11} - \left(2-3\alpha_0\right)\tilde{f}_{21} = 0. \tag{16}$$

II. В данном случае для D_k и $B_k\left(k=0,1,2,...\right)$ получается те же формулы (15).

$$III.\ D_{-1}\left(1-\sim_0\right) = \frac{1}{\sim}\frac{\sim_0\tilde{f}_{10} - \left(2-\sim_0\right)\tilde{f}_{20}}{\sim_0^2},\ D_0\left(1+\sim_0\right) = \frac{1}{\sim}\frac{\sim_0\tilde{f}_{10} - \left(2+\sim_0\right)\tilde{f}_{20}}{\sim_0^2}, \tag{17}$$

а D_k и $B_k\left(k=1,2,3,...\right)$ имеют вид (15).

$$IV.\ D_{-2}\left(1-3\alpha_0\right) = \frac{1}{\alpha}\frac{3\alpha_0\tilde{f}_{11} - \left(2-3\alpha_0\right)\tilde{f}_{21}}{9\alpha_0^2},\ D_1\left(1+3\alpha_0\right) = -\frac{1}{\alpha}\frac{3\alpha_0\tilde{f}_{11} - \left(2+3\alpha_0\right)\tilde{f}_{21}}{9\alpha_0^2},$$

$$D_{-1}\left(1-\alpha_0\right) = \frac{1}{\alpha}\frac{\alpha_0\tilde{f}_{10} - \left(2-\alpha_0\right)\tilde{f}_{20}}{\alpha_0^2},\ \ D_0\left(1+\alpha_0\right) = -\frac{1}{\alpha}\frac{\alpha_0\tilde{f}_{10} - \left(2+\alpha_0\right)\tilde{f}_{20}}{\alpha_0^2}, \tag{18}$$

D_k и $B_k\left(k=2,3,4,...\right)$ имеют вид (15).

Итак, решение поставленной задачи получено в виде сходящихся рядов (11–13), коэффициенты которых определены в явном виде (15) – (18). Теперь с помощью формул (11–18) исследуем характерные особенности напряжений и коэффициентов при особенностях напряжений в окрестности вершины кругового сектора.

Задача I. $0 < \alpha \le 2\pi;\ k = 0,1,2,...;\ n = 2,3,4,...$ Этот случай был исследован в работе [6], где
было показано, что окрестность вершины сектора $\left(r \to 0\right)$ находится в малонапряжённом состоянии – МС [7], т.е. напряжения стремятся к нулю, если $\alpha < 5\pi/4\ \left(k=2\right)$. А когда $\alpha > 5\pi/4$, то напряжения стремятся к бесконечности (в малой окрестности угловой точки имеет место концентрационное состояние – КС [7]). В предельном случае $\alpha = 5\pi/4$ напряжения в окрестности вершины сектора конечны и вообще отличны от нуля.

Следовательно, $\alpha_{пр} = 5\pi/4$ является предельным углом раствора сектора, меньше (больше) которого напряжения стремятся к нулю (к бесконечности) при $r \to 0$.

Порядок особенности напряжений $1-\tilde{\lambda}_k = 2-\alpha_0\left(2k+1\right)$ изменяется в пределах

$0 < 1-\tilde{\lambda}_k \le 3/4 \ \left(k=2\right),\ 0 < 1-\tilde{\lambda}_k \le 1/4 \ \left(k=3\right),$

при этом, коэффициенты при таких особенностях напряжений в случае нагружения дуговой части контура сектора усилиями, удовлетворяющие условиям (16), отличны от нуля.

В научной литературе, по-видимому, отсутствует независящий от свойств материала такой предельный угол. Более того, при $k=3$ возникает второй, по-видимому, до сих пор ещё неизвестный предельный угол $\alpha_{пр} = 7\pi/4$. Если функции $f_1\left(\varphi\right)$ и $f_2\left(\varphi\right)$ таковы, что коэффициент B_2 становится равным нулю, основной предельный угол будет $\alpha_{пр} = 7\pi/4$.

С учётом соотношений (16) уравнения статики для сектора удовлетворяются.

Задача II. $0 < \alpha < \pi/2;\ k = 0,1,2,...;\ n = 0,1,2,...$ Здесь $\alpha_{пр} = \pi/4$. Если $0 < \alpha < \pi/4$, вблизи вершины сектора имеет место МС, а при $\pi/4 < \alpha < \pi/2$ – КС $\left(k=0\right)$. Причём, в зависимости от угла α, порядок особенности напряжений $1-\tilde{\lambda}_k = 2-\alpha_0$ изменяется в пределах $0 < 2-\alpha_0 < 1$. При $\alpha \to \pi/2$ порядок особенности напряжений стремится к единице, а коэффициент при этой особенности $B_0\alpha_0\left(\alpha_0-1\right) = -\left[\alpha_0\tilde{f}_{10} - \left(2-\alpha_0\right)\tilde{f}_{20}\right]/\alpha$ в общем случае нагружения дуговой части контура сектора отличен от нуля, так как в данной задаче отсутствуют условия (16).

Однако, выясняется, что для удовлетворения уравнениям статичекого равновесия, необходимо выполнение условий (16). А это означает, что в решениях (11–13) исчезают слагаемые с «неинтегрируемыми» особенностями напряжений типа $r^{-1+\varepsilon}\left(\varepsilon \to 0 \text{ при } \alpha \to \pi/2\right)$, которые с точки зрения хрупкого разрушения материала недопустимы [4,8,9,11]. Следовательно, решение второй задачи совпадает с решением первой задачи в интервале $0 < \alpha \le \pi/2$.

Задача III. $\pi/2 < \alpha < 3\pi/2;\ k = -1,0,1,...;\ n = 1,2,3,...$ В этой задаче – два предельных угла: $\alpha_{пр} = 3\pi/4$ при $k=1$ и $\alpha_{пр} = 5\pi/4$ при $k=2$. Порядок особенности напряжений обусловлен как первыми членами формул (11–13), содержащими множитель $r^{-\tilde{}_0}\left(k=1\right)$, так и соответствующими членами рядов (11–13) с множителями $r^{\tilde{\lambda}_k-1}$ при $k=1$, $k=2$, причём

$$1/3 \le \alpha_0 < 1 \ \left(k=-1\right),\ 0 < 1-\tilde{\lambda}_k < 1 \ \left(k=1\right),\ 0 < 1-\tilde{\lambda}_k \le 1/3 \ \left(k=2\right). \tag{19}$$

Коэффициенты при этих особенностях содержат множители соответственно

$\alpha_0\tilde{f}_{10} - \left(2-\alpha_0\right)\tilde{f}_{20} \ \left(k=-1\right),\ 3\alpha_0\tilde{f}_{11} - \left(2-3\alpha_0\right)\tilde{f}_{21} \ \left(k=1\right),\ 5\alpha_0\tilde{f}_{12} - \left(2-5\alpha_0\right)\tilde{f}_{22} \ \left(k=2\right).$

Из (19) видно, что и в этом случае, когда $\alpha \to \pi/2$ или $\alpha \to 3\pi/2$, порядок особенности напряжений стремится к единице. Но уравнения статического равновесия удовлетворяются, если только выполнены условия (16). И потому, решения задач *III* и *I* совпадают в интервале $\pi/2 < \alpha < 3\pi/2$.

Задача IV. $3\pi/2 < \alpha \le 2\pi;\ k = -2,-1,0,...;\ n = 2,3,4,...$ Здесь $\alpha_{пр} = 7\pi/4$. Особенность напряжений обусловлена первыми двумя членами с множителями $r^{-3\alpha_0}$ и $r^{-\alpha_0}$, причём

$3/4 \le 3\alpha_0 < 1 \ \left(k=-2\right),\ 1/4 \le \alpha_0 \le 1/3 \ \left(k=-1\right)$ и соответствующими членами рядов (11–13)

$1/3 \le 1-\tilde{\lambda}_k \le 3/4 \quad (k=2), \;\; 3/2\pi \le \alpha \le 2\pi; \; 0 < 1-\tilde{\lambda}_k \le 1/4 \quad (k=3), \;\; 7/4\pi \le \alpha \le 2\pi.$

Коэффициенты при таких особенностях имеют множители соответственно

$3\alpha_0 \tilde{f}_{11} - (2-3\alpha_0)\tilde{f}_{21}, \; \alpha_0 \tilde{f}_{10} - (2-\alpha_0)\tilde{f}_{20}, \;\; 5\alpha_0 \tilde{f}_{12} - (2-5\alpha_0)\tilde{f}_{22}, \; 7\alpha_0 \tilde{f}_{13} - (2-7\alpha_0)\tilde{f}_{23}.$

И здесь уравнения статического равновесия удовлетворяются при наличии условий (16). Т.е., решение задач IV и I также совпадают.

Таким образом, при заданных граничных условиях (4) на дуговой части контура кругового сектора решения задач *II*, *III* и *IV* в соответствующих областях изменения угла α совпадают с решением первой задачи. Этот результат является непосредственным следствием удовлетворения условиями статического равновесия сектора.

Следовательно, задача (1) – (4) не распадается на отдельные независимые задачи, что имело место в случае, когда обе радиальные стороны кругового сектора соприкасаются с жёстким штампом без трения при тех же граничных условиях (4) на дуговой части контура [11].

ЛИТЕРАТУРА

1. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.2. М.: Наука, 1974. 656 с.
2. Каландия А.И. Замечания об особенности упругих решений вблизи углов. //ПММ. 1969. Т.33. №1. С.132 – 135.
3. Melan E. Ein Beitrag zur Theoretic geschweisseter Verbindungen. // Ing. –Archiv. 1932. Bd.3. Heft 2. p.123.
4. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488 с.
5. Williams M.L. Stress Singularities Resulting From Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates in Extention. //J.Appl. Mech. 1952. Vol. 19. №4. P. 526 – 528.
6. Саргсян А.М. Плоская задача теории упругости для кругового сектора, одна сторона которого соприкасается с жёстким штампом без трения, другая сторона усилена стрингером. // В сб. научн. тр. международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды». Цахкадзор, Армения, 02 – 07 октября, 2017г. С.121 – 122.
7. Чобанян К.С. Напряжения в составных упругих телах. Ереван: Изд-во АН АрмССР. 1987. – 338с.
8. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. М.–Л.: Наука, 1977. 270 с.
9. Gevorgyan S.Kh., Manukyan E.H., Mkhitaryan S.M., Mkrtchyan M.S. On a Mixed Problem For An Elastic Space With A Crack Under Antiplane Deformations. Collection of Papers. Yerevan. 2005. 282p.
10. Григорян М.С., Мхитарян С.М. О контактном взаимодействии двух одинаковых стрингеров с упругой полубесконечной пластиной. //Доклады НАН Армении. 2018. Т.118. №1. С. 49 – 59.
11. Саргсян А.М. О концентрации напряжений в упругом секторе и пьезоэлектрическом клине. LAP LAMBERT Academic Publishing. 2015. – 77 с.

Сведение об авторе:

Саргсян Азат Мкртычевич, к.ф.-м.н., ведущий научн. сотр. Института механики НАН Армении. **Адрес:** Армения, 0018, Ереван, ул. Т.Меци 40, кв.47. **E-mail:** azat-sargsyan@mail.ru.

МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ТОНКИХ ПЛАСТИН СО СТЕСНЁННЫМ ВРАЩЕНИЕМ

Саркисян А.А., Саркисян С.О.

В работе построена общая прикладная модель динамического изгиба изотропных микрополярно-упругих тонких пластин со стеснённым вращением, при которой полностью учитываются поперечные сдвиговые деформации.

1. Введение.

Микрополярная теория упругости является одной из основных феноменологических моделей сред с внутренней структурой. Эффекты микрополярности материала особенно существенны в тонких телах (балки, пластинки, оболочки). Современные достижения в области теории микрополярных тонких балок, пластин и оболочек освящены в работе [1].

В работе [2] развит метод гипотез построения моделей микрополярно-упругих тонких балок, пластин и оболочек со стеснённым вращением, который опирается на асимптотическом анализе изучения свойств решений плоских и пространственных граничных задач микрополярной теории упругости в тонких областях. В указанных моделях микрополярно-упругих тонких балок, пластин и оболочек полностью учитываются поперечно сдвиговые и родственные им деформации.

В данной работе, принимая в основу основные уравнения пространственной динамической задачи линейной микрополярной теории упругости со стеснённым вращением, с помощью метода гипотез [2] построена общая модель динамического изгиба микрополярных упругих тонких пластин со стеснённым вращением, при которой учитываются поперечно сдвиговые и родственные им деформации.

2. Постановка задачи.

Рассмотрим изотропную пластинку постоянной толщины $2h$ как трёхмерное упругое микрополярное тело. Отнесём пластинку к ортогональной прямолинейной системе координат x_1, x_2, z. Примем, что срединная плоскость пластинки совпадает с координатной плоскостью $x_1 x_2$. Будем исходить из основных уравнений пространственной динамической задачи линейной микрополярной теории со стеснённым вращением [3]:

уравнения движения

$$\frac{\partial\sigma_{ii}}{\partial x_i}+\frac{\partial\sigma_{ji}}{\partial x_j}+\frac{\partial\sigma_{3i}}{\partial z}=\rho\frac{\partial^2 V_i}{\partial t^2},\quad \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial z}=\rho\frac{\partial^2 V_3}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial\mu_{ii}}{\partial x_i}+\frac{\partial\mu_{ji}}{\partial x_j}+\frac{\partial\mu_{3i}}{\partial z}+(-1)^j(\sigma_{j3}-\sigma_{3j})=J\frac{\partial^2\omega_i}{\partial t^2},\quad \frac{\partial\mu_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial\mu_{23}}{\partial x_2}+\frac{\partial\mu_{33}}{\partial z}+(\sigma_{12}-\sigma_{21})=J\frac{\partial^2\omega_3}{\partial t^2}; \tag{1}$$

физические соотношения

$$\gamma_{ii}=\frac{1}{E}[\sigma_{ii}-\nu(\sigma_{jj}+\sigma_{33})],\quad \gamma_{33}=\frac{1}{E}[\sigma_{33}-\nu(\sigma_{11}+\sigma_{22})],\ \tilde\gamma_{12}=\gamma_{12}+\gamma_{21}=\frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{12}+\sigma_{21}\right)$$

$$\tilde\gamma_{13}=\gamma_{13}+\gamma_{31}=\frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{13}+\sigma_{31}\right),\ \tilde\gamma_{23}=\gamma_{23}+\gamma_{32}=\frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{23}+\sigma_{32}\right)$$

$$\chi_{ii}=\frac{1}{2\gamma}\mu_{ii},\ \chi_{33}=\frac{1}{2\gamma}\mu_{33},\ \chi_{ij}=\frac{\gamma+\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\mu_{ij}-\frac{\gamma-\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\mu_{ji}$$

$$\chi_{i3}=\frac{\gamma+\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\mu_{i3}-\frac{\gamma-\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\mu_{3i},\quad \chi_{3i}=\frac{\gamma+\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\mu_{3i}-\frac{\gamma-\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\mu_{i3} \tag{2}$$

геометрические соотношения

$$\gamma_{ii}=\frac{\partial V_i}{\partial x_i},\ \gamma_{33}=\frac{\partial V_3}{\partial z},\ \tilde\gamma_{12}=\gamma_{12}+\gamma_{21}=\frac{\partial V_2}{\partial x_1}+\frac{\partial V_1}{\partial x_2},\ \tilde\gamma_{13}=\gamma_{13}+\gamma_{31}=\frac{\partial V_3}{\partial x_1}+\frac{\partial V_1}{\partial z}$$

$$\tilde\gamma_{23}=\gamma_{23}+\gamma_{32}=\frac{\partial V_3}{\partial x_2}+\frac{\partial V_2}{\partial z},\ \omega_i=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_3}{\partial x_j}-\frac{\partial V_j}{\partial z}\right),\ \omega_3=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_2}{\partial x_1}-\frac{\partial V_1}{\partial x_2}\right)$$

$$\chi_{ii}=\frac{\partial\omega_i}{\partial x_i},\ \chi_{33}=\frac{\partial\omega_3}{\partial z},\ \chi_{ij}=\frac{\partial\omega_j}{\partial x_i},\ \chi_{i3}=\frac{\partial\omega_3}{\partial x_i},\quad \chi_{3i}=\frac{\partial\omega_i}{\partial z} \tag{3}$$

Здесь $i, j=1,2; i\neq j$.

Для граничных условий на лицевых плоскостях пластинки примем граничные условия первой граничной задачи несимметричной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений

$$\sigma_{3n} = p_n^{\pm},\ \ \mu_{3n} = m_n^{\pm} \quad \text{при} \quad \alpha_3 = \pm h\ ,\ n = 1,2,3 \tag{4}$$

Граничные условия на боковой поверхности пластинки $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, в зависимости от способа приложения внешней нагрузки или закрепления, запишутся либо в силовых и моментных напряжениях, либо в перемещениях и поворотах, либо в смешанном виде:

$$\sigma_{mn} n_m = p_n^*,\ \mu_{mn} n_m = m_n^* \ \text{ на } \Sigma_1,\ V_n = V_n^{\bullet},\ \omega_n = \omega_n^{\bullet} \ \text{ на } \Sigma_2,\ m,n = 1,2,3, \tag{5}$$

где p_n^*, m_n^* – компоненты заданных внешних усилий и моментов на Σ_1; $V_n^{\bullet}$, $\omega_n^{\bullet}$ – заданные компоненты векторов перемещений и независимого поворота на Σ_2.

При помощи начальных условий, при $t = 0$, задаются значения компонентов векторов перемещения, независимого поворота, линейной и вращательной скоростей точек тела:

$$\begin{aligned} &V_n\big|_{t=0} = f_n(x_1, x_2, z), \quad \frac{\partial V_n}{\partial t}\Big|_{t=0} = F_n(x_1, x_2, z) \\ &\omega_n\big|_{t=0} = \varphi_n(x_1, x_2, z), \quad \frac{\partial \omega_n}{\partial t}\Big|_{t=0} = \Phi_n(x_1, x_2, z), \quad n = 1,2,3 \end{aligned} \tag{6}$$

Решение начально-краевой задачи (1)-(6) складывается из суммы решений симметричной и обратно-симметричной по z задач (это утверждение можем доказать таким же подходом, как аналогичное утверждение было доказано в классической теории упругости). В симметричной задаче (плоское напряжённое состояние пластинки) $\sigma_{ii}, \sigma_{ij}, \sigma_{33}, \mu_{i3}, \mu_{3i}, V_i, \omega_3$ – чётные по z функции, а $\sigma_{i3}, \sigma_{3i}, \mu_{ii}, \mu_{ij}, \mu_{33}, V_3, \omega_i$ – нечётные, в обратно-симметричной задаче (изгиб пластинки), наоборот. В дальнейшем будем рассматривать задачу изгиба микрополярной пластинки.

Отметим, что для задачи изгиба пластинки, граничные условия (4) (при $z = \pm h$) примут вид:

$$\sigma_{3i} = \frac{p_i^+ + p_i^-}{2} = \tilde{p}_i,\ \ \sigma_{33} = \pm\frac{p_3^+ - p_3^-}{2} = \pm\tilde{p}_3, \quad \mu_{3i} = \pm\frac{m_i^+ - m_i^-}{2} = \pm\tilde{m}_i,\ \ \mu_{33} = \frac{m_3^+ + m_3^-}{2} = \tilde{m}_3 \tag{7}$$

3. Модель микрполярных упругих тонких пластин со стеснённым врашением.

Предположим, что толщина пластинки $2h$ мала по сравнению с размером a пластинки в плане, т.е. $2h << a$.

Ниже будем развивать подход [2] для построения динамической модели микрополярных упругих тонких пластин со стеснённым вращением на основе метода гипотез.

Качественные результаты исходного приближения асимптотического метода интегрирования начально-краевой задачи (1)-(6) позволяют в основе построения двумерной динамической модели микрополярных упругих тонких пластин со стеснённым вращением формулировать следующие достаточно общие предположения (гипотезы):

1) Нормальный элемент, первоначально перпендикулярный к срединной плоскости пластинки, остаётся после деформации прямолинейным, но уже не перпендикулярным к деформированной срединной плоскости, свободно вращается на некоторый угол, не изменяя при этом своей длины.

Вследствие этого примем следующий линейный закон изменения перемещений и свободных вращений:

$$V_i = z\psi_i(x_1, x_2, t),\ \ V_3 = w(x_1, x_2, t), \tag{8}$$

где ψ_i – полные углы поворота; w – перемещение точек срединной плоскости пластинки в направлении z.

Отметим, что гипотезы (8) – это известная кинематическая гипотеза Тимошенко в классической теории тонких пластин.

2) В физических соотношениях (3) для γ_{ii} силовым напряжением σ_{33} можем пренебрегать относительно силовых напряжений σ_{ii}; аналогичным образом, в соотношениях для χ_{i3}, моментным напряжением μ_{3i} можем пренебрегать относительно моментного напряжения μ_{i3}.

3) При определении деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений, для силовых напряжений σ_{3i} сначала примем

$$\sigma_{3i} = \overset{0}{\sigma}_{3i}(x_1, x_2, t) \tag{9}$$

После определения указанных величин, значения σ_{3i} окончательно определим, как сумму значений (9) и результата интегрирования по z соответствующего уравнения движения из (1), требуя, чтобы усреднённые по толщине пластинки их величины были равны нулю.

Из кинематической гипотезы (8), имея в виду геометрические соотношения, для ω_i и ω_3 из (3) для компонентов вектора вращения получим:

$$\omega_i = \Omega_i(x_1, x_2, t), \quad \omega_3 = z\iota(x_1, x_2, t), \tag{10}$$

где Ω_i – некоторые свободные повороты первоначально нормального элемента вокруг осей x_i; § –интенсивность свободного поворота ω_3 вдоль оси z:

$$\Omega_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_2} - \psi_2\right), \quad \Omega_2 = \frac{1}{2}\left(\psi_1 - \frac{\partial w}{\partial x_1}\right), \quad \iota = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2}\right). \tag{11}$$

Подставляя перемещения и повороты из формул (8), (10) в выражения (3), для деформаций и изгибов-кручений получим:

$$\gamma_{11} = zK_{11}(x_1, x_2, t), \quad \gamma_{22} = zK_{22}(x_1, x_2, t), \quad \tilde{\gamma}_{12} = \gamma_{12} + \gamma_{21} = z\tilde{K}_{12}(x_1, x_2, t),$$

$$\tilde{\gamma}_{13} = \gamma_{13} + \gamma_{31} = \tilde{\Gamma}_{13}(x_1, x_2, t), \quad \tilde{\gamma}_{23} = \gamma_{23} + \gamma_{32} = \Gamma_{23}(x_1, x_2, t), \quad \gamma_{33} = 0,$$

$$\chi_{11} = k_{11}(x_1, x_2, t), \quad \chi_{12} = k_{12}(x_1, x_2, t), \quad \chi_{13} = zl_{13}(x_1, x_2, t), \quad \chi_{31} = 0, \quad \chi_{33} = \iota(x_1, x_2, t),$$

$$\chi_{22} = k_{22}(x_1, x_2, t), \quad \chi_{21} = k_{21}(x_1, x_2, t), \quad \chi_{23} = zl_{23}(x_1, x_2, t), \quad \chi_{32} = 0, \tag{12}$$

где приняты следующие обозначения:

$$K_{ii} = \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i}, \quad \tilde{K}_{12} = K_{12} + K_{21} = \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2}, \quad \tilde{\Gamma}_{i3} = \Gamma_{i3} + \Gamma_{3i} = \frac{\partial w}{\partial x_i} + \psi_i,$$

$$\kappa_{ii} = \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_i}, \quad \kappa_{ij} = \frac{\partial \Omega_j}{\partial x_i}, \quad l_{i3} = \frac{\partial \iota}{\partial x_i}. \tag{13}$$

Подставляя (12) в выражения обобщённого закона Гука (2) с учётом гипотезы 2), а также руководствуясь гипотезой 3), для силовых и моментных напряжений будем иметь:

$$\sigma_{11} = z\frac{E}{1-\nu^2}\left[\mathrm{K}_{11} + \nu\,\mathrm{K}_{22}\right], \quad \sigma_{22} = z\frac{E}{1-\nu^2}\left[\nu\,\mathrm{K}_{11} + \mathrm{K}_{22}\right], \quad \sigma_{12} + \sigma_{21} = z2\mu\tilde{K}_{12}$$

$$\sigma_{13} + \overset{0}{\sigma}_{31} = 2\mu\tilde{\Gamma}_{13}, \quad \sigma_{23} + \overset{0}{\sigma}_{32} = 2\mu\tilde{\Gamma}_{23}, \quad \mu_{11} = 2\gamma k_{11}, \quad \mu_{22} = 2\gamma k_{22}, \quad \mu_{33} = 2\gamma\iota$$

$$\mu_{12} = (\gamma+\varepsilon)k_{12} + (\gamma-\varepsilon)k_{21}, \quad \mu_{21} = (\gamma+\varepsilon)k_{21} + (\gamma-\varepsilon)k_{12}, \quad \mu_{13} = z\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{13}, \quad \mu_{23} = z\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{23}$$

$$\sigma_{3i} = \overset{0}{\sigma}_{3i}(x_1, x_2, t) + \left(\frac{h^2}{6} - \frac{z^2}{2}\right)\left[\frac{\partial \overset{1}{\sigma}_{ii}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overset{1}{\sigma}_{ji}}{\partial x_j} - \rho\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2}\right], \quad \sigma_{33} = -z\left(\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} - \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) = z\frac{\tilde{p}_3}{h}$$

$$\mu_{3i} = -z\left[\frac{\partial \mu_{ii}}{\partial x_i} + \frac{\partial \mu_{ji}}{\partial x_j} + (-1)^j\left(\sigma_{j3} - \overset{0}{\sigma}_{3j}\right) - J\frac{\partial^2 \Omega_i}{\partial t^2}\right] = z\frac{\tilde{m}_i}{h}. \tag{14}$$

С целью приведения трёхмерной задачи (1)-(3) к двумерной, вместо компонент тензоров силового и моментного напряжений, перейдём к статически эквивалентным интегральным по толщине пластинки характеристикам:

$$N_{i3} = \int_{-h}^{h}\sigma_{i3}dz \ \ (i \leftrightarrow 3), M_{ii} = \int_{-h}^{h}\sigma_{ii}zdz, M_{ij} = \int_{-h}^{h}\sigma_{ij}zdz, L_{ii} = \int_{-h}^{h}\mu_{ii}dz, L_{ij} = \int_{-h}^{h}\mu_{ij}dz, \Lambda_{i3} = \int_{-h}^{h}\mu_{i3}dz. \tag{15}$$

Удовлетворяя граничным условиям (7), получим основную систему уравнений модели динамического изгиба микрополярных упругих тонких пластин со стеснённым вращением:

уравнения движения

$$\frac{\partial N_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{23}}{\partial x_2} = 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2\tilde{p}_3, \quad N_{3i} - \left(\frac{\partial M_{ii}}{\partial x_i} + \frac{\partial M_{ji}}{\partial x_j}\right) + \frac{2\rho h^3}{3}\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2} = 2h\tilde{p}_i$$

$$\frac{\partial L_{ii}}{\partial x_i}+\frac{\partial L_{ji}}{\partial x_j}+(-)^j(N_{j3}-N_{3j})=2Jh\frac{\partial^2\Omega_i}{\partial t^2}-2\tilde{m}_i\,,\ \frac{\partial\Lambda_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial\Lambda_{23}}{\partial x_2}+(M_{12}-M_{21})=\frac{2Jh^3}{3}\frac{\partial^2\iota}{\partial t^2}-2h\tilde{m}_3 \tag{16}$$

физические соотношения упругости

$$M_{ii}=\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}(K_{ii}+\nu K_{jj}),\ M_{12}+M_{21}=\frac{4\mu h^3}{3}\tilde{K}_{12}\,,\ N_{i3}+N_{3i}=4\mu h\tilde{\Gamma}_{i3}$$

$$L_{ii}=4\gamma h\kappa_{ii}\,,\ L_{ij}=2h[(\gamma+\varepsilon)\kappa_{ij}+(\gamma-\varepsilon)\kappa_{ji}]\,,\ \ \Lambda_{i3}=\frac{2h^3}{3}\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{i3}\,. \tag{17}$$

Здесь имеют место геометрические соотношения (11) и (12).

К системе уравнений (16), (17), (11), (12) микрополярных упругих тонких пластин присоединим граничные условия на граничном контуре Γ срединной плоскости пластинки (например, при $x_1=\text{const}$):

$$M_{11}=M_{11}^*\ \text{или}\ K_{11}=K_{11}^*,\ M_{12}=M_{12}^*\ \text{или}\ K_{12}=K_{12}^*,N_{13}=N_{13}^*\ \text{или}\ w=w^*$$

$$L_{11}=L_{11}^*\ \text{или}\ \kappa_{11}=\kappa_{11}^*,\ L_{12}=L_{12}^*\ \text{или}\ \kappa_{12}=\kappa_{12}^*,\ \ \Lambda_{13}=\Lambda_{13}^*\ \text{или}\ l_{13}=l_{13}^*. \tag{18}$$

К системе основных уравнений микрополярных пластин со стеснённым вращением (16), (17), (11), (12) и граничным условиям (18) присоединим также соответствующие начальные условия при $t=0$ для $w,\ \frac{\partial w}{\partial t},\psi_i,\ \frac{\partial\psi_i}{\partial t},\ \Omega_i,\frac{\partial\Omega_i}{\partial t},\iota,\ \frac{\partial\iota}{\partial t}$.

Система уравнений (16), (17), (11), (12) и граничные условия (18) и указанные начальные условия представляют собой математическую модель микрополярных упругих тонких пластин со стеснённым вращением, при которой полностью учитывались поперечные сдвиговые и родственные им деформации. Это – система 12-ого порядка с 6-ю граничными условиями на каждом краю срединной плоскости пластинки. Можно констатировать, что построенная модель микрополярных упругих пластин имеет математическое (асимптотическое) обоснование.

На основании следующих систем из двух уравнений:

$$N_{13}+N_{31}=4\mu h\tilde{\Gamma}_{13},\quad N_{13}-N_{31}=\frac{\partial L_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial L_{12}}{\partial x_1}-2Jh\frac{\partial^2\Omega_2}{\partial t^2}$$

$$N_{23}+N_{32}=4\mu h\tilde{\Gamma}_{23}\ ,\quad N_{23}-N_{32}=-\left(\frac{\partial L_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial L_{21}}{\partial x_2}\right)+2Jh\frac{\partial^2\Omega_1}{\partial t^2}$$

$$M_{12}+M_{21}=\frac{4\mu h^3}{3}\tilde{K}_{12},\quad M_{12}-M_{21}=-\left(\frac{\partial\Lambda_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial\Lambda_{23}}{\partial x_2}\right)+\frac{2Jh^3}{3}\frac{\partial^2\iota}{\partial t^2}\,, \tag{19}$$

можно определить усилия и моменты $N_{13},\ N_{31},\ N_{23},N_{32},\ M_{12},\ M_{21}$. Подставляя полученные таким образом выражения в первые три уравнения (16) и учитывая соотношения упругости (17) (для $M_{11},M_{22},L_{11},L_{22},\ L_{12},L_{21},\Lambda_{13},\Lambda_{23}$) и геометрические соотношения (11),(12), получим систему из следующих трёх уравнений:

$$\begin{gathered}
2\mu\nabla^2 w+2\mu\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}\right)+(\gamma+\varepsilon)\nabla^2\left(\frac{\partial\Omega_2}{\partial x_1}-\frac{\partial\Omega_1}{\partial x_2}\right)=J\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\Omega_2}{\partial x_1}-\frac{\partial\Omega_1}{\partial x_2}\right)+2\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\frac{2\tilde{p}_3}{h}\\
2\mu\left(\psi_1+\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)-(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial^2\Omega_2}{\partial x_1^2}-(\gamma-\varepsilon)\frac{\partial^2\Omega_1}{\partial x_1\partial x_2}-2\gamma\frac{\partial^2\Omega_2}{\partial x_2^2}-\frac{h^2}{3}\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x_2}\nabla^2\iota-\\
-\frac{2\mu h^2}{3(1-\nu)}\left[2\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x_1^2}+(1+\nu)\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x_1\partial x_2}+(1-\nu)\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x_2^2}\right]+J\frac{\partial^2\Omega_2}{\partial t^2}+\frac{Jh^2}{3}\frac{\partial^3\iota}{\partial x_2\partial t^2}+\frac{2\rho h^2}{3}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}=0\\
2\mu\left(\psi_2+\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)+(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial^2\Omega_1}{\partial x_2^2}+(\gamma-\varepsilon)\frac{\partial^2\Omega_2}{\partial x_1\partial x_2}+2\gamma\frac{\partial^2\Omega_1}{\partial x_1^2}+\frac{h^2}{3}\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x_1}\nabla^2\iota-\\
-\frac{2\mu h^2}{3(1-\nu)}\left[2\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x_2^2}+(1+\nu)\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x_1\partial x_2}+(1-\nu)\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x_1^2}\right]-J\frac{\partial^2\Omega_1}{\partial t^2}-\frac{Jh^2}{3}\frac{\partial^3\iota}{\partial x_1\partial t^2}+\frac{2\rho h^2}{3}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2}=0
\end{gathered} \tag{20}$$

где ∇^2 – двумерный оператор Лапласа $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$.

Граничные условия шарнирного опирания для этой модели имеют вид:

$$w=0,\ \psi_2=0,\ M_{11}=0,\ L_{12}=0,\ \Omega_1=0,\ \Lambda_{13}=0 \text{ при } x_1=0,\ x_1=a,$$
$$w=0,\ \psi_1=0,\ M_{22}=0,\ L_{21}=0,\ \Omega_2=0,\ \Lambda_{23}=0 \text{ при } x_2=0,\ x_2=b. \quad (21)$$

Используя геометрические соотношения (12) и физические соотношения упругости (17), приведённые выше граничные условия (21) с точки зрения их удобного использования представим так:

$$w=0,\ \psi_2=0,\ \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}=0,\ \frac{\partial\Omega_2}{\partial x_1}=0,\ \Omega_1=0,\ \frac{\partial\iota}{\partial x_1}=0 \text{ при } x_1=0,\ x_1=a$$
$$w=0,\ \psi_1=0,\ \frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}=0,\ \frac{\partial\Omega_1}{\partial x_2}=0,\ \Omega_2=0,\ \frac{\partial\iota}{\partial x_2}=0 \text{ при } x_2=0,\ x_2=b \quad (22)$$

Для решения задачи свободных колебаний, можем решение представить в виде:

$$w=A^1_{mn}e^{ip_{mn}t}\sin\frac{m\pi}{a}x_1\sin\frac{n\pi}{b}x_2$$
$$\psi_1=A^2_{0n}e^{ip_{0n}t}\sin\frac{n\pi}{b}x_2+A^2_{mn}e^{ip_{mn}t}\cos\frac{m\pi}{a}x_1\sin\frac{n\pi}{b}x_2$$
$$\psi_2=A^3_{m0}e^{ip_{m0}t}\sin\frac{m\pi}{a}x_1+A^3_{mn}e^{ip_{mn}t}\sin\frac{m\pi}{a}x_1\cos\frac{n\pi}{b}x_2 \quad (23)$$

где $A^1_{mn}, A^2_{m0}, A^2_{mn}, A^3_{0n}, A^3_{mn}$ –постоянные; $p_{00}, p_{m0}, p_{0n}, p_{mn}$ – частоты собственных колебаний микрополярной прямоугольной пластинки со свободным вращением.

Подставив соотношения (11) в уравнения (20) и затем имея в виду вид решений (23), получатся однородные алгебраические уравнения относительно постоянных $A^1_{mn}, A^2_{m0}, A^2_{mn}$, A^3_{0n}, A^3_{mn}. Потребовав ненулевые решения, получаются уравнения относительно частот, из которых можно находить частоты собственных колебаний.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГКН МОН РА и РФФИ (РФ) ш рамках совместных научных программ 18RF-106 и 18-53-05022, соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Altenbach H., Eremeyev V. Basics of Mechanics of Micropolar Shells, In: Shell-like Structures. CISM International Centre for Mechanical Sciences (Courses and Lectures), ed. by H. Altenbach, V. Eremeyev, (Springer, Cham, 2017) Volume 572. P. 63-112.
2. Саркисян С.О. Общая теория тонких оболочек на основе несимметричной теории упругости со стеснённым вращением //Упругость и неупругость. Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвящ. 100-летию со дня рождения А. А. Ильюшина. М.: 20-21 января 2011 года. С. 231-235.
3. Койтер В.Т. Моментные напряжения в теории упругости // Механика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1965. №3. С. 89-112.

Сведения об авторах:

Саркисян Арменуи Акоповна – к. ф.-м. н., директор центра «Научная политика, обеспечение и управление качества» Ширакский государственный университет им. М. Налбандяна, доцент кафедры «Математика, физика и информационные технологии», (374 94) 42 21 03;
e-mail: armenuhis@mail.ru

Саркисян Самвел Оганесович – профессор, член-корр. НАН РА, Ширакский государственный университет им. М. Налбандяна, почётный зав. кафедрой высшей «Математики, физики и информационных технологий», (374 93) 15 16 98;
e-mail: s_sargsyan@yahoo.com

О ДВУМЕРНЫХ УРАВНЕНИЯХ ДВУХСЛОЙНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ ЗАДАННЫХ ТАНГЕНЦИАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ НА ПЛОСКОСТИ РАЗДЕЛА СЛОЁВ

Саркисян Н.С., Хачатрян А.М.

Асимптотическим методом из геометрически нелинейных уравнений пространственной задачи теории упругости выведены двумерные дифференциальные уравнения с частными производными для расчёта двухслойной анизотропной пластинки, на верхней лицевой плоскости которой заданы значения соответствующих компонент тензора напряжений, а на нижней – смешанные условия теории упругости. На плоскости раздела слоёв заданы законы распределения тангенциальных напряжений, в частности, закон сухого трения Кулона.

Введение. Для решения задач слоистых балок, пластин и оболочек обычно используется та или иная гипотеза, в частности, гипотеза недеформируемых нормалей для всего пакета в целом [1,2]. Впоследствии были предложены многочисленные модели, обзор которых можно найти, например, в [3-4]. Приближённая теория изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости построена в работе [4]. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек построена в [5]. Вопрос определения НДС слоистой анизотропной пластинки, когда на её верхней и нижней лицевых плоскостях заданы значения соответствующих компонентов тензора напряжений, рассмотрен в [8]. Решения задач определения НДС анизотропных слоистых пластин, на одной лицевой стороне которой заданы компоненты вектора перемещения, а на другой – условия первой, второй или смешанной задач теории упругости, изложены в [9]. Асимптотическое решение смешанной трёхмерной внутренней задачи для анизотропной термоупругой пластинки введены в работе [10]. Двумерные уравнения двухслойной анизотропной пластинки при неполном контакте между слоями приведены в [11]. В работе [12] асимптотическим методом построено решение смешанной трёхмерной внутренней задачи для однослойной анизотропной термоупругой пластинки в нелинейной постановке. Асимптотическим методом из геометрически нелинейных уравнений пространственной задачи теории упругости двумерные уравнения для расчёта двухслойной анизотропной пластинки, когда на плоскости раздела слоёв заданы условия неполного контакта, выведены [13].

1. Постановка задачи. Рассмотрим тонкую двухслойную пластинку $\Omega = \{(x, y, z): 0 \le x \le a, 0 \le y \le b, \ -h_2 \le z \le h_1\}$, где a – длина, b – ширина, составленная из однородных анизотропных материалов. Слои имеют различные толщины h_k, коэффициенты упругости $a_{ij}^{(k)}$, k – номер слоя. Здесь и в последующем индекс k принимает значения $k = 1,2$. Общая толщина полосы – $2h$. Плоскость отсчёта Oxy совпадает с плоскостью раздела слоёв, которая параллельна лицевым плоскостям пластинки. Условия на лицевых плоскостях $z = h_k$ задаются формулами:

$$\begin{gathered}\sigma_{xz} = \left(\frac{h}{l}\right)^4 \sigma_{xz}^{+}(x,y),\ \sigma_{yz} = \left(\frac{h}{l}\right)^4 \sigma_{yz}^{+}(x,y),\ \sigma_{z} = \left(\frac{h}{l}\right)^4 \sigma_{z}^{+}(x,y),\quad z = h_1 \\ \sigma_{xz} = \left(\frac{h}{l}\right)^4 \sigma_{xz}^{-}(x,y),\ \sigma_{yz} = \left(\frac{h}{l}\right)^4 \sigma_{yz}^{-}(x,y),\ w = \left(\frac{h}{l}\right)^3 w^{-}(x,y),\quad z = -h_2\end{gathered} \tag{1.1}$$

На плоскости раздела $z = 0$ заданы условия неполного контакта:

$$\sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{(2)},\ w^{(1)} = w^{(2)},\ \sigma_{xz}^{(1)} = \sigma_{xz}^{(2)} = f_1(x,y),\quad \sigma_{yz}^{(1)} = \sigma_{yz}^{(2)} = f_2(x,y) \tag{1.2}$$

В зависимости от выбранной модели контакта, функции $f_k(x,y)$ считаются заданными. В частности, случаю $f_k(x,y) \equiv 0$ соответствует отсутствие силы трения между слоями.

Требуется найти решение геометрически нелинейных уравнений пространственной задачи теории упругости анизотропного тела при граничных условиях (1.1), условиях неполного контакта слоёв (1.2) и условиях на бокавой поверхности пластинки. Краевые условия на торцах $x = 0, a$ и $y = 0, b$ пока произвольные.

Для решения поставленной задачи будем исходить из трёхмерных уравнений геометрически нелинейной теории упругости [3,6,7]. В этих уравнениях введём безразмерные переменные

$\xi = x/l$, $\eta = y/l$, $\varsigma = z/h$ и безразмерные перемещения $U^{(k)} = u^{(k)}/l$, $V^{(k)} = v^{(k)}/l$, $W^{(k)} = w^{(k)}/l$, где l – характерный тангенциальный размер пластинки $(h << l)$.

Решение внутренней задачи ищется в виде [9-12]

$$Q^{(k)} = \varepsilon^{q_k} \sum_{s=0}^{S} \varepsilon^s Q^{(k,s)}, \tag{1.3}$$

где $Q^{(k)}$ – любое из напряжений или безразмерных перемещений, s – номер приближения, S – количество приближений. Целое число q_k подбирается так, чтобы получилась непротиворечивая система для определения $Q^{(k,s)}$:

$$q_k = 3 \text{ для } \sigma_x^{(k)}, \sigma_y^{(k)}, \sigma_z^{(k)}, \sigma_{xy}^{(k)}, U^{(k)}, V^{(k)}, W^{(k)}, \tag{1.4}$$

$$q_k = 4 \text{ для } \sigma_{xz}^{(k)}, \sigma_{yz}^{(k)}.$$

Эта асимптотика, по сути, не отличается от той, что применялась для решения той же задачи в линейной теории упругости [9-11]. В нелинейной задаче, чтобы получить итерационный процесс, асимптотический ряд (1.4) необходимо начинать с положительных степеней малого параметра [12]. Поэтому, было принято $q = q_0 + 4$, где q_0 – значение асимптотики, соответствующее задаче в линейной теории упругости.

Асимптотике (1.3), (1.4) соответствует выбор представления (1.1).

Подставив (1.3) в преобразованные введением безразмерных координат и безразмерных компонент вектора перемещения, уравнения теории упругости анизотропного тела, с учётом (1.4), получим систему для определения $Q^{(k,s)}$ [14].

Решив эту систему, получим

$$\begin{gathered}
\sigma_z^{(k,s)} = \sigma_{z0}^{(k,s)} + \sigma_z^{*(k,s)}, \; U^{(k,s)} = u^{(k,s)} + u^{*(k,s)}, \; (U, V, W), \\
\sigma_x^{(k,s)} = B_{11}^{(k)} \frac{\partial u^{(k,s)}}{\partial \xi} + B_{12}^{(k)} \frac{\partial v^{(k,s)}}{\partial \eta} + B_{16}^{(k)} \left(\frac{\partial u^{(k,s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{(k,s)}}{\partial \xi} \right) + a_3^{(k)} \sigma_{z0}^{(k,s)} + \sigma_x^{*(k,s)}, \\
\sigma_{xy}^{(k,s)} = B_{16}^{(k)} \frac{\partial u^{(k,s)}}{\partial \xi} + B_{26}^{(k)} \frac{\partial v^{(k,s)}}{\partial \eta} + B_{66}^{(k)} \left(\frac{\partial u^{(k,s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{(k,s)}}{\partial \xi} \right) + c_3^{(k)} \sigma_{z0}^{(k,s)} + \sigma_{xy}^{*(k,s)}, \\
\sigma_{xz}^{(k,s)} = -\left[L_{11}\left(B_{ij}^{(k)}\right) u^{(k,s)} + L_{12}\left(B_{ij}^{(k)}\right) v^{(k,s)} \right] \zeta - \left(a_3^{(k)} \frac{\partial \sigma_{z0}^{(k,s)}}{\partial \xi} + c_3^{(k)} \frac{\partial \sigma_{z0}^{(k,s)}}{\partial \eta} \right) + \sigma_{xz0}^{(k,s)} + \sigma_{xz}^{*(k,s)}, \\
(x, y;\, 1, 2;\, a, b)
\end{gathered} \tag{1.5}$$

где дифференциальные операторы $L_{11}\left(B_{ij}^{(k)}\right)$ определяются по формулам:

$$\begin{gathered}
L_{11}\left(B_{ij}^{(k)}\right) = B_{11}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2B_{16}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + B_{66}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}, \; (1, 2; \xi, \eta) \\
L_{12}\left(B_{ij}^{(k)}\right) = B_{16}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \left(B_{12}^{(k)} + B_{66}^{(k)}\right) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + B_{26}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}
\end{gathered} \tag{1.6}$$

а коэффициенты $B_{ij}^{(k)}, a_i^{(k)}, b_i^{(k)}, c_i^{(k)}$ – по известным формулам [3,5,8].

$\sigma_{xz0}^{(k,s)}, \sigma_{yz0}^{(k,s)}, \sigma_{z0}^{(k,s)}, u_0^{(k,s)}, v_0^{(k,s)}, w_0^{(k,s)}$ – неизвестные функции интегрирования и будут определены ниже, с помощью условий (1.1) и (1.2).

Величины со звездочками, входящие в формулы (1.8), как обычно, известны для каждого приближения s, поскольку выражаются через предыдущие приближения. Сюда же входят члены, обусловленные геометрически нелинейностью поставленной задачи. Они приведены в работе [14].

Представив функции $f_k(x, y)$ в виде рядов по степеням малого параметра ε и удовлетворив условиям неполного контакта (1.2), получим:

$$w^{(1,s)} = w^{(2,s)} = w^{(s)},\ \sigma_{z0}^{(1,s)} = \sigma_{z0}^{(2,s)},$$
$$\sigma_{xz0}^{(1,s)} = \sigma_{xz0}^{(2,s)} = f_1^{(s)}(\xi,\eta),\ \sigma_{yz0}^{(1,s)} = \sigma_{yz0}^{(2,s)} = f_2^{(s)}(\xi,\eta), \tag{1.7}$$
$$f_k^{(0)}(\xi,\eta) = f_k(x/l, y/l),\ f_k^{(s)}(\xi,\eta) = 0,\ s > 0,\ k = 1,2;$$

С учётом (1.7), удовлетворив поверхностным условиям (1.1), определим неизвестные функции интегрирования $\sigma_{z0}^{(k,s)}$, $w^{(k,s)}$:

$$w^{(s)} = w^{-(s)} - w^{*(2,s)}(\xi,\eta,\varsigma_2), \quad \sigma_{z0}^{(k,s)} = \sigma_z^{+(s)} - \sigma_z^{*(1,s)}(\xi,\eta,\varsigma_1) \tag{1.8}$$

а также получим систему дифференциальных уравнений с частными производными относительно неизвестных перемещений $u^{(k.s)}, v^{(k,s)}$

$$L_{11}\left(C_{ij}^{(k)}\right)u^{(k,s)} + L_{12}\left(C_{ij}^{(k)}\right)v^{(k,s)} - f_1^{(s)}(\xi,\eta) = p_1^{(k,s)}$$
$$L_{12}\left(C_{ij}^{(k)}\right)u^{(k,s)} + L_{22}\left(C_{ij}^{(k)}\right)v^{(k,s)} - f_2^{(s)}(\xi,\eta) = p_2^{(k,s)} \tag{1.9}$$

Обобщённые нагрузки $p_1^{(k,s)}$ и $p_2^{(k,s)}$ определяются по формулам:

$$p_1^{(k,s)} = -\sigma_{xz}^{\pm(s)}(\xi,\eta) - \left(a_3\frac{\partial\sigma_z^{+(s)}}{\partial\xi} + c_3\frac{\partial\sigma_z^{+(s)}}{\partial\eta}\right)\zeta_k +$$
$$+\sigma_{xz}^{*(k,s)}(\xi,\eta,\varsigma_k) + \left(a_3\frac{\partial\sigma_z^{*(1,s)}(\xi,\eta,\zeta_1)}{\partial\xi} + c_3\frac{\partial\sigma_z^{*(1,s)}(\xi,\eta,\zeta_1)}{\partial\eta}\right)\zeta_k$$
$$p_2^{(k,s)} = -\sigma_{yz}^{\pm(s)}(\xi,\eta) - \left(b_3\frac{\partial\sigma_z^{+(s)}}{\partial\eta} + c_3\frac{\partial\sigma_z^{+(s)}}{\partial\xi}\right)\zeta_k + \tag{1.10}$$
$$+\sigma_{yz}^{*(k,s)}(\xi,\eta,\varsigma_k) + \left(b_3\frac{\partial\sigma_z^{*(1,s)}(\xi,\eta,\zeta_1)}{\partial\eta} + c_3\frac{\partial\sigma_z^{*(1,s)}(\xi,\eta,\zeta_1)}{\partial\xi}\right)\zeta_k$$

где

$$\sigma_{xz}^{\pm(0)}, \sigma_{yz}^{\pm(0)}, \sigma_z^{\pm(0)} = \sigma_{xz}^{\pm}, \sigma_{yz}^{\pm}, \sigma_z^{\pm};\ w^{-(0)} = w^{-};\ w^{-(s)}, \sigma_{xz}^{\pm(s)}, \sigma_{yz}^{\pm(s)}, \sigma_z^{\pm(s)} = 0,\ s > 0$$
$$\varsigma_1 = h_1/h,\ \varsigma_2 = -h_2/h,\ h = (h_1 + h_2)/2$$

Операторы $L_{ij}\left(C_{ij}^{(k)}\right)$ определяются по формулам (1.6). Необходимо лишь $B_{ij}^{(k)}$ заменить на $C_{ij}^{(k)}$. В свою очередь, жёсткости $C_{ij}^{(k)}$ определяются по формулам:

$$C_{ij}^{(k)} = (-1)^{k+1}\varsigma_k B_{ij}^{(k)}. \tag{1.11}$$

Если задана такая модель контакта, что функции $f_k(x,y)$ не зависят от перемещений $u^{(k,s)}, v^{(k,s)}$, то система уравнений (1.9) распадается на две системы относительно $u^{(1,s)}, v^{(1,s)}$ и $u^{(2,s)}, v^{(2,s)}$, которые совпадают с уравнениями обобщённой плоской задачи, теории упругости, когда имеется плоскость упругой симметрии [2]. Если же задана такая модель контакта, что функции $f_k(x,y)$ зависят от перемещений $u^{(k,s)}, v^{(k,s)}$, то вместо двух уравнений при полном контакте, здесь имеем систему из четырёх уравнений. Отметим, что при $s = 0$ правые части системы уравнений (1.10), т.е. обобщённые нагрузки $p_1^{(s)}$ и $p_2^{(s)}$ не содержат члены, обусловленные геометрически нелинейностью поставленной задачи. Для приближений $s > 0$ меняются лишь правые части уравнений, куда входят коэффициенты, характеризующие общую анизотропию, а также члены, обусловленные геометрически нелинейностью уравнений теории упругости. Вклад последующих приближений будет существенным особенно для материалов, обладающих сильной анизотропией и в том случае, когда внешние нагрузки имеют большую изменяемость.

2. Взаимодействие слоёв по закону сухого трения Кулона.

Рассмотрим случай, когда упругие слои взаимодействуют по закону сухого трения Кулона. Тогда

$$\sigma_{xz}^{(1)} = \sigma_{xz}^{(2)} = \chi_1 \frac{l}{h} \sigma_z \left(x, y, 0\right), \quad \sigma_{yz}^{(1)} = \sigma_{yz}^{(2)} = \chi_2 \frac{l}{h} \sigma_z \left(x, y, 0\right) \tag{2.1}$$

и, как следствие, получим:

$$f_k^{(s)}\left(\xi, \eta\right) = \chi_k f^{(s)}\left(\xi, \eta\right), \; k = 1, 2, \tag{2.2}$$

где

$$f^{(s)}\left(\xi, \eta\right) = \sigma_z^{+(s)} - \sigma_z^{*(1,s)}\left(\xi, \eta, \varsigma_1\right) \tag{2.3}$$

Коэффициенты χ_k – постоянные величины. В частности, если χ_1 или χ_2 равны нулю, то это означает, что отсутствует сила трения между слоями по направлению Ox или Oy. Если одновременно χ_1, χ_2 равны нулю, то силы трения отсутствуют по всей плоскости контакта.

Подставив значения $f_k^{(s)}\left(\xi, \eta\right)$ из (2.2), (2.3) в (1.13), получим новую систему дифференциальных уравнений с частными производными:

$$\begin{aligned} &L_{11}\left(C_{ij}^{(k)}\right) u^{(k,s)} + L_{12}\left(C_{ij}^{(k)}\right) v^{(k,s)} = \overline{p}_1^{(k,s)} \\ &L_{12}\left(C_{ij}^{(k)}\right) u^{(k,s)} + L_{22}\left(C_{ij}^{(k)}\right) v^{(k,s)} = \overline{p}_2^{(k,s)} \end{aligned} \tag{2.4}$$

где

$$\begin{aligned} &\overline{p}_1^{(k,s)} = p_1^{(k,s)} + \chi_k \left(\sigma_z^{+(s)} - \sigma_z^{*(1,s)}\left(\xi, \eta, \varsigma_1\right)\right) \\ &\overline{p}_2^{(k,s)} = p_2^{(k,s)} + \chi_k \left(\sigma_z^{+(s)} - \sigma_z^{*(1,s)}\left(\xi, \eta, \varsigma_1\right)\right) \end{aligned} \tag{2.5}$$

Заметим, что когда упругие слои взаимодействуют по закону сухого трения Кулона, то при тех же условиях на лицевых плоскостях (1.1), в отличие от первой краевой задачи, не происходит повышение порядка разрешающих дифференциальных уравнений [11]. Значения произвольных постоянных, появившихся при интегрировании системы (2.4), могут быть определены из граничных условий при $x = 0, a$ и $y = 0, b$ с привлечением решения пограничного слоя. Для удовлетворения граничным условиям следует применить приближённые методы, например, метод наименьших квадратов, метод Трефца и другие.

В случае, когда коэффициенты $\chi_1 = \chi_2 = 0$, в системе уравнений (2.4) меняются лишь правые части, куда не входят внешние нагрузки $\sigma_z^{+(s)}$ и $\sigma_z^{-(s)}$.

Отметим, что при $s = 0$ правые части системы уравнений (2.4), т.е. обобщённые нагрузки $\overline{p}_1^{(s)}$ и $\overline{p}_2^{(s)}$ не содержат члены, обусловленные геометрически нелинейностью поставленной задачи. Для приближений $s > 0$ меняются лишь правые части уравнений, куда входят коэффициенты, характеризующие общую анизотропию, а также члены, обусловленные геометрически нелинейностью исходных уравнений. Как видно из формул для величины со звездочками, нелинейность проявляется, начиная с приближения $s \geq 2$ [13].

Заключение. В работе найдена асимптотика и из геометрически нелинейных уравнений пространственной задачи теории упругости выведены линейные двумерные дифференциальные уравнения с частными производными для расчёта двухслойной анизотропной пластинки, на лицевых плоскостях которой заданы смешанные краевые условия теории упругости, а на плоскости раздела слоёв – закон распределения тангенциальных напряжений, в частности, закон сухого трения Кулона.

Построено решение внутренней задачи и показано, что когда на плоскости раздела слоёв задан закон распределения тангенциальных напряжений, то это не приводит к повышению порядка разрешающих дифференциальных уравнений. Также показано, что члены, обусловленные геометрически нелинейностью исходных уравнений, проявляются в последующих приближениях и будут существенными особенно для материалов обладающих сильной анизотропией и в случае, когда внешние нагрузки имеют большую изменяемость.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. М.: Гостехиздат, 1957. 463 с.

2. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360с.
3. Григолюк Э.И., Коган Ф.А. Современное состояние теории многослойных оболочек. //ПМ. 1972. Т.8. Вып.6. С.3-17.
4. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. //ПММ. 1962. Т.26. Вып.4. С. 668-686.
5. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 414с.
6. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. Л.-М.: ОГИЗ, 1948. 211с.
7. Черных К.Ф., Литвененкова З.Н. Теория больших упругих деформаций. Л.: Изд. ЛГУ, 1988.
8. Агаловян Л.А., Багдасарян Ю.М., Хачатрян А.М. К определению напряжённо-деформированного состояния слоистых пластин с анизотропией общего вида// Изв. НАН Армении. Механика. 1996. Т.49. №3. С.10-22.
9. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: Изд. «Гитутюн» НАН РА, 2005. 468с.
10. Агаловян Л.А., Товмасян А.Б. Асимптотическое решение смешанной трёхмерной внутренней задачи для анизотропной термоупругой пластинки// Изв. НАН Армении. Механика. 1993. Т.46. №3-4. С. 3-11
11. Агаловян Л.А., Хачатрян А.М. О двумерных уравнениях двухслойной анизотропной пластинки при неполном контакте между слоями// В сб.: «Контактные и смешанные граничные задачи механики деформируемого твердого тела». Ереван: 1999. С.23-29.
12. Хачатрян А.М., Товмасян А.Б. Асимптотическое решение трехмерной внутренней задачи анизотропной термоупругой пластинки на основе геометрически нелинейной теории упругости. // Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. №1. С.42-49.
13. Саркисян Н.С., Хачатрян А.М. О двумерных уравнениях двухслойной анизотропной пластинки по нелинейной теории упругости // Изв. НАН Армении. Механика. 2017. Т.70. № 1. С.64-73.

Сведения об авторах:

Хачатрян Александр Мовсесович–д. ф.-м. н., проф. кафедры математики АрГУ.
Адрес: АР, Степанакерт, ул. Мхитара Гоша, 5. **Тел.:** (+37499) 211949.
E-mail: alexkhach49@yandex.ru

Саргсян Нарине Суреновна – преподаватель кафедры математики АрГУ.
Адрес: АР, Степанакерт, ул. Мхитара Гоша, 5.
Тел.: (+37497) 21-00-78. **E-mail:** narine_sargsyan_2012@mail.ru

ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ ПРИКЛАДНОЙ ТЕОРИИ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

Саркисян С.О.

Как в классической теории упругости [1], аналогично и в микрополярной (моментной, несимметричной) теории упругости [2] законы деформирования упругого тела могут быть выражены в виде вариационных принципов. Из этих принципов выводятся все основные уравнения, соответственно, классической или микрополярной теории упругости-равновесия, геометрические, физические, совместности и естественные граничные условия. Благодаря этому, задача определения напряжённо-деформированного состояния классического или микрополярного упругого тела может быть сведена к соответствующей вариационной задаче математической физики.

Вариационные принципы, получившие всеобщее признание в строительной механике по классической теории упругости [3], в микрополярной теории упругости аналогично могут найти применения при построении прикладных теорий микрополярных мембран, тонких стержней, пластин и оболочек.

В данной работе на основе метода гипотез [4-7], которые адекватным образом заменяют основные свойства асимметрического решения краевой задачи микрополярной теории упругости в тонких областях [8], из вариационных принципов трёхмерной микрополярной теории упругости, получены вариационные принципы прикладной теории микрополярных упругих тонких оболочек. Таким образом, для прикладной теории микрополярных упругих тонких оболочек получен общий вариационный принцип стационарного характера (типа Ху-Вашицу) и как частные случаи, получены экстремальные вариационные принципы типа Лагранжа и Кастильяно.

1.Постановка задачи. Общий вариационный принцип трёхмерной микрополярной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений.

Рассмотрим упругое тело (трёхмерную оболочку), находящееся в равновесии под действием внешних сил и моментов. Рассмотрим функционал I, зависящий от $v_r, \omega_r, \gamma_{mn}, \chi_{mn}, \sigma_{mn}, \mu_{mn}$ $(r = 1,2,3, \quad m,n = 1,2,3)$,

$$
\begin{aligned}
I = \iiint\limits_{(V)} \Big\langle \big(W - K_r V_r - c_r \omega_r\big) - \Bigg\{ & \sigma_{11}\left[\gamma_{11} - \left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial v_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} V_2 + \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial z} V_3\right)\right] + \\
& + \sigma_{22}\left[\gamma_{22} - \left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial V_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} V_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial z} V_3\right)\right] + \sigma_{33}\left(\gamma_{33} - \frac{\partial V_3}{\partial z}\right) + \\
& + \sigma_{12}\left[\gamma_{12} - \left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial V_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} V_1 - \omega_3\right)\right] + \sigma_{21}\left[\gamma_{21} - \left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial V_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} V_2 + \omega_3\right)\right] - \\
& + \sigma_{13}\left[\gamma_{13} - \left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial V_3}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial z} V_1 - \omega_2\right)\right] + \sigma_{31}\left[\gamma_{31} - \left(\frac{\partial V_1}{\partial z} + \omega_2\right)\right] - \\
& + \sigma_{23}\left[\gamma_{23} - \left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial V_3}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial z} V_2 - \omega_1\right)\right] + \sigma_{32}\left[\gamma_{32} - \left(\frac{\partial V_2}{\partial z} + \omega_1\right)\right] - \\
& + \mu_{11}\left[\chi_{11} - \left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial \omega_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2}\omega_2 + \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial z}\omega_3\right)\right] + \\
& + \mu_{22}\left[\chi_{22} - \left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial \omega_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1}\omega_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial z}\omega_3\right)\right] + \mu_{33}\left(\chi_{33} - \frac{\partial \omega_3}{\partial z}\right) - \\
& + \mu_{12}\left[\chi_{12} - \left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial \omega_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2}\omega_1\right)\right] + \mu_{21}\left[\chi_{21} - \left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial \omega_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1}\omega_2\right)\right] - \\
& + \mu_{13}\left[\chi_{13} - \left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial \omega_3}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial z}\omega_1\right)\right] + \mu_{31}\left(\chi_{31} - \frac{\partial \omega_1}{\partial z}\right) - \\
& + \mu_{23}\left[\chi_{23} - \left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial \omega_3}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial z}\omega_2\right)\right] + \mu_{32}\left(\chi_{32} - \frac{\partial \omega_2}{\partial z}\right)\Bigg\}\Big\rangle dV -
\end{aligned}
\tag{1}
$$

$$-\iint\limits_{S^+}\left(q_1^+V_1+q_2^+V_2+q_3^+V_3+m_1^+\omega_1+m_2^+\omega_2+m_3^+\omega_3\right)_{z=h}dS_z-$$
$$-\iint\limits_{S^-}\left(q_1^-V_1+q_2^-V_2+q_3^-V_3+m_1^-\omega_1+m_2^-\omega_2+m_3^-\omega_3\right)dS_z-$$
$$-\iint\limits_{(\Sigma_1')}\left(\sigma_{21}^0V_1+\sigma_{22}^0V_2+\sigma_{23}^0V_3+\mu_{21}^0\omega_1+\mu_{22}^0\omega_2+\mu_{23}^0\omega_3\right)dS_1-$$
$$-\iint\limits_{(\Sigma_1'')}\left[\sigma_{21}\left(V_1-\tilde{V}_1^0\right)+\sigma_{22}\left(V_2-\tilde{V}_2^0\right)+\sigma_{23}\left(V_3-\tilde{V}_3^0\right)+\mu_{21}\left(\omega_1-\tilde{\omega}_1^0\right)+\mu_{22}\left(\omega_2-\tilde{\omega}_2^0\right)+\mu_{23}\left(\omega_3-\tilde{\omega}_3^0\right)\right]dS_1-$$
$$-\iint\limits_{(\Sigma_2')}\left(\sigma_{11}^0V_1+\sigma_{12}^0V_2+\sigma_{13}^0V_3+\mu_{11}^0\omega_1+\mu_{12}^0\omega_2+\mu_{13}^0\omega_3\right)dS_2-$$
$$-\iint\limits_{(\Sigma_2'')}\left[\sigma_{11}\left(V_1-\tilde{V}_1^0\right)+\sigma_{12}\left(V_2-\tilde{V}_2^0\right)+\sigma_{13}\left(V_3-\tilde{V}_3^0\right)+\mu_{11}\left(\omega_1-\tilde{\omega}_1^0\right)+\mu_{12}\left(\omega_2-\tilde{\omega}_2^0\right)+\mu_{13}\left(\omega_3-\tilde{\omega}_3^0\right)\right]dS_2.$$

Здесь

$$\begin{aligned}W=\frac{1}{2}\{&\lambda\left(\gamma_{11}+\gamma_{22}+\gamma_{33}\right)^2+2\mu\left(\gamma_{11}^2+\gamma_{22}^2+\gamma_{33}^2\right)+\\&+(\mu+\alpha)\left(\gamma_{12}^2+\gamma_{21}^2+\gamma_{13}^2+\gamma_{31}^2+\gamma_{23}^2+\gamma_{32}^2\right)+2(\mu-\alpha)\left(\gamma_{12}\gamma_{21}+\gamma_{13}\gamma_{31}+\gamma_{23}\gamma_{32}\right)+\\&+\beta\left(\chi_{11}+\chi_{22}+\chi_{33}\right)^2+2\gamma\left(\chi_{11}^2+\chi_{22}^2+\chi_{33}^2\right)+(\gamma+\varepsilon)\left(\chi_{12}^2+\chi_{21}^2+\chi_{13}^2+\chi_{31}^2+\chi_{23}^2+\chi_{32}^2\right)+\\&+2(\gamma-\varepsilon)\left(\chi_{12}\chi_{21}+\chi_{13}\chi_{31}+\chi_{23}\chi_{32}\right)\}\end{aligned}\qquad(2)$$

– объёмная плотность потенциальной энергии деформации тела; $\hat{\sigma}$, $\hat{\mu}$ – тензоры напряжений и моментных напряжений; $\hat{\gamma}$, $\hat{\chi}$ – тензоры деформаций и изгиб-кручений; $\vec{V}$, $\vec{\omega}$ – векторы перемещений и свободных поворотов. Величины с верхними индексами нуль – заданные величины на соответствующих поверхностях края оболочки, а с верхними индексами $\pm$ – заданные величины на лицевых поверхностях оболочки $z=\pm h$.

Функционал, естественно, назвать полным функционалом моментной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений. На его основе можно получить вариационное уравнение

$$\delta I=0,\qquad(3)$$

из которого следуют все основные уравнения и граничные условия указанной теории.

Функционал (1) можно называть обобщением классического функционала Ху-Вашица в моментной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений.

Сформулированный вариационный принцип представляет собой наиболее общий вариационный принцип в моментной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений. Из него, как частные случаи, следуют все другие вариационные принципы, в том числе и экстремальные принципы Лагранжа и Кастильяно. Каждое из частных вариационных принципов может быть получено из (1), (2) путём присоединения к последнему предварительных условий, которые считаются заранее выполненными. Например, если присоединить к (1), (2) в качестве предварительных, геометрические соотношения моментной теории упругости и граничные условия для перемещений и свободных поворотов на поверхностях края Σ_1'' и Σ_2'', из (1), (2) приходим к вариационному принципу Лагранжа.

2. Общий вариационный принцип прикладной теории микрополярных упругих тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений. В работах [4,5] сформулированы гипотезы, которые адекватным образом заменяют основные качественно-количественные свойства асимптотического решения трёхмерной граничной задачи микрополярной теории упругости в тонкой области оболочки [8] и, построена прикладная теория микрополярных упругих тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений.

В работах [4,5] таким путём для перемещений и свободных поворотов, деформаций и изгиб-кручений, напряжений и моментных напряжений получены нижеприведённые формулы:

$$\begin{aligned}&V_i=u_i(\alpha_1,\alpha_2)+z\psi_i(\alpha_1,\alpha_2),\qquad \omega_3=\Omega_3(\alpha_1,\alpha_2)+z\iota(\alpha_1,\alpha_2),\quad i=1,2,\\&V_3=w(\alpha_1,\alpha_2),\quad \omega_i=\Omega_1(\alpha_1,\alpha_2),\quad \mathrm{i}=1,2.\\&\gamma_{ii}=\Gamma_{ii}(\alpha_1,\alpha_2)+zK_{ii}(\alpha_1,\alpha_2),\qquad \gamma_{ij}=\Gamma_{ij}(\alpha_1,\alpha_2)+zK_{ij}(\alpha_1,\alpha_2),\end{aligned}\qquad(4)$$

$$\gamma_{i3}=\Gamma_{i3}(\alpha_1,\alpha_2),\qquad \gamma_{3i}=\Gamma_{3i}(\alpha_1,\alpha_2),$$
$$\chi_{ii}=k_{ii}(\alpha_1,\alpha_2),\qquad \chi_{ij}=k_{ij}(\alpha_1,\alpha_2), \tag{5}$$
$$\chi_{i3}=k_{i3}(\alpha_1,\alpha_2)+zl_{i3}(\alpha_1,\alpha_2),\qquad \chi_{33}=k_{33}(\alpha_1,\alpha_2),$$
$$\gamma_{33}=0,\qquad \chi_{3i}=0,\quad i,j=1,2,\quad i\neq j,$$
$$\sigma_{ii}=\overset{0}{\sigma}_{ii}(\alpha_1,\alpha_2)+z\overset{1}{\sigma}_{ii}(\alpha_1,\alpha_2),\quad \sigma_{ij}=\overset{0}{\sigma}_{ij}(\alpha_1,\alpha_2)+z\overset{1}{\sigma}_{ij}(\alpha_1,\alpha_2),$$

где

$$\overset{0}{\sigma}_{ii}=\frac{E}{1-\nu^2}\left(\Gamma_{ii}+\nu\Gamma_{jj}\right),\quad \overset{1}{\sigma}_{ii}=\frac{E}{1-\nu^2}\left(K_{ii}+\nu K_{jj}\right),$$
$$\overset{0}{\sigma}_{ij}=(\mu+\alpha)\Gamma_{ij}+(\mu-\alpha)\Gamma_{ji},\quad \overset{1}{\sigma}_{ij}=(\mu+\alpha)K_{ij}+(\mu-\alpha)K_{ji}.$$
$$\sigma_{i3}=(\mu+\alpha)\Gamma_{i3}+(\mu-\alpha)\Gamma_{3i},\quad \overset{0}{\sigma}_{3i}=(\mu+\alpha)\Gamma_{3i}+(\mu-\alpha)\Gamma_{i3}, \tag{6}$$
$$\mu_{ii}=\beta k_{mm}+2\gamma k_{ii},$$
$$\overset{0}{\mu}_{33}=\beta k_{mm}+2\gamma k_{33},\quad k_{mm}=k_{11}+k_{22}+k_{33},$$
$$\mu_{ij}=(\gamma+\varepsilon)k_{ij}+(\gamma-\varepsilon)k_{ji}.$$
$$\mu_{i3}=\overset{0}{\mu}_{i3}(\alpha_1,\alpha_2)+z\overset{1}{\mu}_{i3}(\alpha_1,\alpha_2),$$

где

$$\overset{0}{\mu}_{i3}=(\gamma+\varepsilon)k_{i3},\quad \overset{1}{\mu}_{i3}=(\gamma+\varepsilon)l_{i3}.$$
$$\sigma_{3i}=\overset{0}{\sigma}_{3i}(\alpha_1,\alpha_2)-z\left\{\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial\left(A_j\overset{0}{\sigma}_{1i}\right)}{\partial\alpha_i}+\frac{\partial\left(A_i\overset{0}{\sigma}_{2i}\right)}{\partial\alpha_j}\right]+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_2}\overset{0}{\sigma}_{ij}+\frac{\sigma_{i3}}{R_i}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_1}\overset{0}{\sigma}_{jj}\right\}+$$
$$+\left(\frac{h^2}{6}-\frac{z^2}{2}\right)\left\{\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial\left(A_j\overset{1}{\sigma}_{1i}\right)}{\partial\alpha_i}+\frac{\partial\left(A_i\overset{1}{\sigma}_{2i}\right)}{\partial\alpha_j}\right]+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_2}\overset{1}{\sigma}_{ij}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_1}\overset{1}{\sigma}_{jj}\right\}.$$
$$\mu_{33}=\overset{0}{\mu}_{33}(\alpha_1,\alpha_2)-z\left\{\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial\left(A_2\overset{0}{\mu}_{13}\right)}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\left(A_1\overset{1}{\mu}_{23}\right)}{\partial\alpha_2}\right]-\left(\frac{\mu_{11}}{R_1}+\frac{\mu_{22}}{R_2}\right)+\left(\overset{0}{\sigma}_{12}-\overset{0}{\sigma}_{21}\right)\right\}+$$
$$+\left(\frac{h^2}{6}-\frac{z^2}{2}\right)\left\{\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial\left(A_2\overset{1}{\mu}_{13}\right)}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\left(A_1\overset{1}{\mu}_{23}\right)}{\partial\alpha_2}\right]+\left(\overset{1}{\sigma}_{12}-\overset{1}{\sigma}_{21}\right)\right\}.$$

Далее в работах [4,5] вводятся усреднённые по толщине оболочки усреднённые усилия, моменты и гипермоменты: $T_{ii},S_{ij},M_{ii},H_{ij},N_{i3},N_{3i},L_{ii},L_{ij},L_{i3},\Lambda_{i3}$.

Используя эти понятия и выражения (4)-(6), на основе (1) получим общий вариационный функционал прикладной теории микрополярных упругих тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений

$$I_0=\iint\limits_{(S)}W_0-\left\{T_{11}\left[\Gamma_{11}-\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial u_1}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}u_2+\frac{w}{R_1}\right)\right]+\right.$$
$$+T_{22}\left[\Gamma_{22}-\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial u_2}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}u_1+\frac{w}{R_2}\right)\right]-S_{12}\left[\Gamma_{12}-\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial u_2}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}u_1-\Omega_3\right)\right]-$$

$$
\begin{aligned}
&-S_{21}\left[\Gamma_{21}-\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial u_1}{\partial\alpha_2}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}u_2+\Omega_3\right)\right]-N_{13}\left[\Gamma_{13}-\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial w}{\partial\alpha_1}-\frac{u_1}{R_1}+\Omega_2\right)\right]+\\
&+N_{23}\left[\Gamma_{23}-\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial w}{\partial\alpha_2}-\frac{u_2}{R_2}-\Omega_1\right)\right]+N_{31}\left[\Gamma_{31}-\left(\psi_1-\Omega_2\right)\right]+\\
&+N_{32}\left[\Gamma_{32}-\left(\psi_2+\Omega_1\right)\right]+M_{11}\left[K_{11}-\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\right)\psi_2\right]+\\
&+M_{22}\left[K_{22}-\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial\psi_2}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\psi_1\right)\right]+H_{12}\left[K_{12}-\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial\psi_2}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\psi_1-\iota\right)\right]+\\
&+H_{21}\left[K_{21}-\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha_2}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\psi_2+\iota\right)\right]+L_{11}\left[k_{11}-\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial\Omega_1}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\Omega_2+\frac{\Omega_3}{R_1}\right)\right]+\\
&+L_{22}\left[k_{22}-\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial\Omega_2}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\Omega_1+\frac{\Omega_3}{R_2}\right)\right]+L_{33}\left[k_{33}-\iota\right]+ \qquad (7)\\
&+L_{12}\left[k_{12}-\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial\Omega_2}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\Omega_1\right)\right]+L_{21}\left[k_{21}-\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial\Omega_1}{\partial\alpha_2}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\Omega_2\right)\right]+\\
&+L_{13}\left[k_{13}-\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial\Omega_3}{\partial\alpha_1}-\frac{\Omega_1}{R_1}\right)\right]+L_{23}\left[k_{23}-\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial\Omega_3}{\partial\alpha_2}-\frac{\Omega_2}{R_2}\right)\right]+\\
&+\Lambda_{13}\left(l_{13}-\frac{1}{A_1}\frac{\partial\iota}{\partial\alpha_1}\right)+\Lambda_{23}\left(l_{23}-\frac{1}{A_2}\frac{\partial\iota}{\partial\alpha_2}\right)\Bigg\}\Bigg\rangle A_1A_2d\alpha_1d\alpha_2-\\
&-\iint\limits_{(S)}\Big[\left(q_1^++q_1^-\right)u_1+\left(q_2^++q_2^-\right)u_2+h\left(q_1^+-q_1^-\right)\psi_1+h\left(q_2^+-q_2^-\right)\psi_2+\left(q_3^++q_3^-\right)w+\\
&+\left(m_2^++m_2^-\right)\Omega_2+\left(m_3^++m_3^-\right)\Omega_3+h\left(m_3^+-m_3^-\right)\iota\Big]A_1A_2d\alpha_1d\alpha_2-\\
&-\int\limits_{(\Gamma_1')}\left(S_{21}^*u_1+T_{22}^*u_2+N_{23}^*w+H_{21}^*\psi_1+M_{22}^*\psi_2+L_{21}^*\Omega_1+L_{22}^*\Omega_2+L_{23}^*\Omega_3+\Lambda_{23}^*\iota\right)A_1d\alpha_1-\\
&-\int\limits_{(\Gamma_1'')}\Big[S_{21}\left(u_1-u_1^*\right)+T_{22}\left(u_2-u_2^*\right)+H_{21}\left(\psi_1-\psi_1^*\right)+M_{22}\left(\psi_2-\psi_2^*\right)+N_{23}\left(w-w^*\right)+\\
&+L_{21}\left(\Omega_1-\Omega_1^*\right)+L_{22}\left(\Omega_2-\Omega_2^*\right)+L_{23}\left(\Omega_3-\Omega_3^*\right)+\Lambda_{23}\left(\iota-\iota^*\right)\Big]A_1d\alpha_1+\\
&+\int\limits_{(\Gamma_2')}\left(T_{11}^*u_1+S_{12}^*u_2+N_{13}^*w+M_{11}^*\psi_1+H_{12}^*\psi_2+L_{11}^*\Omega_1+L_{12}^*\Omega_2+L_{13}^*\Omega_3+\Lambda_{13}^*\iota\right)A_2d\alpha_2+\\
&+\int\limits_{(\Gamma_2'')}\Big[T_{11}\left(u_1-u_1^*\right)+S_{12}\left(u_2-u_2^*\right)+N_{13}\left(w-w^*\right)+M_{11}\left(\psi_1-\psi_1^*\right)+H_{12}\left(\psi_2-\psi_2^*\right)+\\
&+L_{11}\left(\Omega_1-\Omega_1^*\right)+L_{12}\left(\Omega_2-\Omega_2^*\right)+L_{13}\left(\Omega_3-\Omega_3^*\right)+\Lambda_{13}\left(\iota-\iota^*\right)\Big]A_2d\alpha_2,
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{aligned}
W_0=&\frac{1}{2}\Bigg\{\frac{2Eh}{1-\nu^2}\left(\Gamma_{11}^2+2\nu\Gamma_{12}\Gamma_{21}+\Gamma_{21}^2\right)+\frac{2Eh^3}{3\left(1-\nu^2\right)}\left(K_{11}^2+2\nu K_{11}K_{22}+K_{22}^2\right)+\\
&+2h\left[\left(\mu+\alpha\right)\Gamma_{12}^2+2\left(\mu-\alpha\right)\Gamma_{12}\Gamma_{21}+\left(\mu+\alpha\right)\Gamma_{21}^2\right]+\\
&+\frac{2h^3}{3}\left[\left(\mu+\alpha\right)K_{12}^2+2\left(\mu-\alpha\right)K_{12}K_{21}+\left(\mu+\alpha\right)K_{21}^2\right]+ \qquad (8)\\
&+2h\Big[\left(\beta+2\gamma\right)\left(k_{11}^2+k_{22}^2+\iota^2\right)+2\beta\left(k_{11}k_{22}+k_{11}\iota+k_{22}\iota\right)\Big]+\\
&+2h\left[\left(\gamma+\varepsilon\right)k_{12}^2+2\left(\gamma-\varepsilon\right)k_{12}k_{21}+\left(\gamma+\varepsilon\right)k_{21}^2\right]+2h\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\left(k_{13}^2+k_{23}^2\right)+\frac{2h^3}{3}\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\left(l_{13}^2+l_{23}^2\right)\Bigg\}.
\end{aligned}
$$

На основе (7), составляя вариационное уравнение $\delta I_0 = 0$, получим все группы уравнений прикладной теории микрополярных упругих тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений и естественные граничные условия[4,5].

Из полученного вариационного уравнения, как частные случаи, получены экстремальные принципы Лагранжа и Кастильяно.

В работе получен закон сохранения энергии, доказаны теоремы единственности и взаимности в прикладной теории микрополярных упругих тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
2. Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Pergamon Press. Oxford. New York. Toronto. Sydney. Paris. Frankfurt. 1986. 383 p.
3. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 542с.
4. Sargsyan S.H. Mathematical Models of Micropolar Elastic Thin Shells// Advanced Structured Materials. Vol.15. Shell-like Structures. Non-classical Theories and Applications. Springer. Chapter 8. 2011. P.91-100.
5. Sargsyan S.H. General theory of micropolar elastic thin shells// Journal of Physical Mezomechanics. 2012. Vol.15. №1-2. P.69-79.
6. Sargsyan S.H. Mathematical model of micropolar elastic thin plates and their strength and stiffness characteristics//Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2012. Vol.53. № 2. P.275-282.
7. Sargsyan S.H. Effective Manifestations of Characteristics of Strength and Rigidity of Micropolar Elastic Thin Bars// Journal of Materials Science and Engineering. 2012. Vol.2. № 1. P.98-108.
8. Sargsyan S.H. Asymptotically Confirmed Hypotheses Method for the Construction of Micropolar and Classical Theories of Elastic Thin Shells// Advances in Pure Mathematics. 2015. Vol.5. №10. P.629-643.

Сведение об авторе:

Саркисян Самвел Оганесович– член-корр. НАН РА, доктор физ.-мат. наук, профессор. Ширакский государственный университет им. М. Налбандяна. (374 93) 15 16 98
E-mail: s_sargsyan@yahoo.com

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА РЕЛАКСАЦИИ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ПЛОСКИХ ПОВЕРХНОСТНО УПРОЧНЁННЫХ ДЕТАЛЯХ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

Саушкин М.Н., Радченко В.П., Бербасова Т.И.

Предложена математическая модель формирования остаточных напряжений в поверхностно упрочнённом призматическом образце после процедуры упрочнения и их релаксации в процессе ползучести. Получены расчётные соотношения, позволяющие оценить кинетику напряжённо-деформированного состояния упрочненного образца в процессе ползучести. Исследовано влияние размеров образца на кинетику напряжённо-деформированного состояния в упрочненном слое вследствие ползучести в условиях чистой термоэкспозиции. Выполнена экспериментальная проверка модели для образца с квадратным сечением 10×10 мм из сплава ЭП742 при температурной выдержке при температуре 650 °С в течение 100 часов. Наблюдается соответствие расчётных и экспериментальных данных. Выполнен ряд модельных расчётов, который показал, что размеры образца практически не влияет на процесс релаксации, поэтому в расчётах может использоваться и модель упрочнённого полупространства, и модель призматического бруса. Выбором технологии упрочнения можно управлять наведением полей остаточных напряжений, создавая заданное поле напряжений.

Введение. Поверхностное упрочнение – один из технологических приёмов повышения ресурса деталей и элементов конструкций, в частности, эффективность такого упрочнения отмечается в вопросах повышения сопротивления усталости при нормальных и умеренных температурах [1, 2]. Устойчивость наведённых остаточных напряжений к высокотемпературным нагрузкам, которые инициируют развитие деформаций ползучести в деталях и элементах конструкций, что, в свою очередь, приводит к релаксации остаточных напряжений, является одной из ключевых проблем в задачах, связанных с наведением остаточных напряжений в деталях и элементах конструкций.

Решение этой проблемы связано с развитием теоретических и экспериментальных работ для оценки релаксации остаточных напряжений вследствие ползучести, при этом, хорошо развиты методы решения краевых задач для гладких упрочнённых цилиндрических образцов [3–5].

В настоящей работе разработанные и используемые подходы для цилиндрических образцов переносятся на случай плоских образцов.

Математическая модель. Рассматривается призматический образец (брус), одна сторона которого подверглась процедуре упрочнения. Введём декартову систему координат, совмещая плоскость XOY с упрочнённой поверхностью, а ось OZ – направляя вглубь упрочнённого слоя. Через σ_x, σ_y, σ_z и q_x, q_y, q_z обозначим диагональные (главные) компоненты тензоров остаточных напряжений и остаточных пластических деформаций после процедуры упрочнения. Недиагональными компонентами тензоров напряжений и пластических деформаций пренебрегаем, поскольку их значения, как правило, на порядок меньше, чем у диагональных компонент, что действительно наблюдается для ряда технологий упрочнения (термопластическое упрочнение, гидро- и пневмодробеструйная обработка, азотирование и др.). Будем предполагать, что упрочнение выполнено равномерно по всей поверхности упрочнения.

При введённых ограничениях остаточные сжимающие напряжения и пластические деформации зависят лишь от переменной z: $\sigma_i = \sigma_i(z)$, $q_i = q_i(z)$, $i = x, y, z$, $0 \le z \le H$, где H – соответствующий размер образца. Для полных деформаций вводится гипотеза плоских сечений (для сечений, параллельных плоскостям XOY и YOZ):

$$\varepsilon_x(z) = 0, \quad \varepsilon_y(z) = 0, \tag{1}$$

где $\varepsilon_x(z)$ и $\varepsilon_y(z)$ – компоненты тензора полных деформаций. Для связи компонент пластических деформаций q_x и q_y используется гипотеза анизотропного упрочнения в виде

$$q_x(z) = \alpha q_y(z), \tag{2}$$

где α – параметр анизотропии упрочнения (феноменологический параметр, см. например [6]).

Из условия пластической несжимаемости $q_x + q_y + q_z = 0$ и (2) получаем

$$q_z(z) = -(1+\alpha) q_y(z). \tag{3}$$

Учитывая, что $\varepsilon_i(z) = e_i(z) + q_i(z)$, $i = x, y, z$, где $e_i(z)$ – компоненты тензора упругих деформаций, запишем соотношения (1) в развёрнутом виде:

$$\frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)\right] + q_x = 0, \quad \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)\right] + q_y = 0, \tag{4}$$

где E – модуль Юнга, μ – коэффициент Пуассона. В этих соотношениях по аналогии со случаем полупространства [7] в силу малости толщины упрочнённого слоя (всего 100–200 мкм) можно положить, что $\sigma_z \equiv 0$. В силу этого, из (2) и (4) имеем:

$$\sigma_y = \frac{1 + \alpha\mu}{\alpha + \mu}\sigma_x. \tag{5}$$

Теперь из (2)–(5) нетрудно получить:

$$q_x = -\frac{\alpha(1-\mu^2)}{E(\alpha+\mu)}\sigma_x, \quad q_y = -\frac{1-\mu^2}{E(\alpha+\mu)}\sigma_x, \quad q_z = -\frac{(1+\alpha)(1-\mu^2)}{E(\alpha+\mu)}\sigma_x. \tag{6}$$

Таким образом, из формул (5), (6) следует, что если известна компонента тензора остаточных напряжений $\sigma_x = \sigma_x(z)$, $0 \le z \le H$, и коэффициент анизотропии α, то все компоненты тензоров остаточных напряжений и пластических деформаций определяются через эти величины. В частных случаях, например, при термопластическом упрочнении, упрочнении дробью, ультразвуковом упрочнении поверхности, величина $\alpha = 1$ и формулы (5), (6) упрощаются:

$$\sigma_x = \sigma_y, \quad q_x = q_y = -\frac{1-\mu}{E}\sigma_x, \quad q_z = \frac{2(1-\mu)}{E}\sigma_x.$$

В настоящей работе используется феноменологический подход экспериментального определения $\sigma_x = \sigma_x(z)$, базирующийся на широко апробированном методе полосок [8], хорошо зарекомендовавшем себя, в частности, в работе [7]. Аппроксимация для этой зависимости принята в виде

$$\sigma_x(z) = \sigma_0 \exp\left(-\frac{(z - z_*)^2}{l^2}\right) - \sigma_1 \exp\left(-\frac{(z - z_*)^2}{b^2}\right), \tag{7}$$

которая может использоваться как для случая полупространства, так и для случая цилиндрических образцов конечного размера. Здесь σ_0, σ_1, l и b – параметры, методика идентификации которых такая же, как в работе [7], а $z = z_*$ – координата, соответствующая локальному минимуму зависимости (7).

Рассмотрим методику решения задачи релаксации остаточных напряжений в брусе вследствие ползучести под действием самоуравновешенных остаточных напряжений. Пусть упрочнение выполняется при температуре $T = T_1$ (модуль упругости материала E_1), а ползучесть – при $T = T_2$ и модуле упругости $E = E_2$. Тогда, при $T = T_2$ в момент времени $t = 0 - 0$ имеем распределение напряжений и деформаций, задаваемых (5)–(7), при этом модуль Юнга в (6) $E = E_1$.

В момент температурной нагрузки до температуры $T = T_2$ ($T_2 > T_1$) имеем:

$$\sigma_x(z) = -\frac{E_2\alpha}{1 - \mu\frac{1+\mu\alpha}{\mu+\alpha}} q_y(z), \quad \sigma_y(z) = \frac{1+\mu\alpha}{\mu+1}\sigma_x(z).$$

Пусть в течение времени $t \in [0, t_*]$ образец выдерживается при температуре $T = T_2$. При этом из-за действия самоуравновешенных напряжений в брусе будут развиваться деформации ползучести $p_i = p_i(z)$, $i = x, y, z$. Тогда с учётом гипотезы плоских сечений (1) получаем:

$$\varepsilon_x(z,t) = \frac{1}{E_2}\left[\sigma_x(z,t) - \mu\sigma_y(z,t)\right] + q_x(z) + p_x(z,t) = 0,$$

$$\varepsilon_y(z,t) = \frac{1}{E_2}\left[\sigma_y(z,t) - \mu\sigma_x(z,t)\right] + q_y(z) + p_y(z,t) = 0.$$

После решения данной системы уравнений относительно σ_x и σ_y будем иметь формулы для определения кинетики этих напряжений во времени вследствие ползучести:

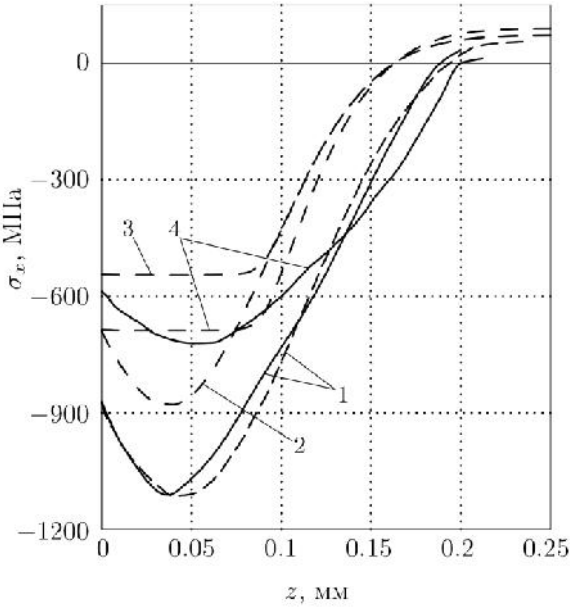
$$\sigma_x(z,t) = \frac{E_2}{\mu^2 - 1}\left[\mu q_y(z) + q_x(z) + \mu p_y(z,t) + p_x(z,t)\right],$$
$$\sigma_y(z,t) = \frac{E_2}{\mu^2 - 1}\left[\mu q_x(z) + q_y(z) + p_y(z,t) + \mu p_x(z,t)\right]. \qquad (8)$$

Таким образом, если известны значения деформаций ползучести $p_x(z,t)$ и $p_y(z,t)$, то напряжения $\sigma_x(z,t)$ и $\sigma_y(z,t)$ определяются соотношениями (8). Здесь величины $p_x(z,t)$ и $p_y(z,t)$ вычисляются численно на основании выбранной теории ползучести «шагами» по времени с дискретизацией временной переменной $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = t_*$.

Если при достижении времени $t = t_* + 0$ происходит температурная разгрузка до $T = T_1$, то формулы для расчёта остаточных напряжений в конечном виде принимают вид:

$$\sigma_x(z,t_*) = \frac{E_1}{\mu^2 - 1}\left[\mu q_y(z) + q_x(z) + \mu p_y(z,t) + p_x(z,t)\right],$$
$$\sigma_y(z,t_*) = \frac{E_1}{\mu^2 - 1}\left[\mu q_x(z) + q_y(z) + p_y(z,t) + \mu p_x(z,t)\right].$$

Результаты расчета. Экспериментальная проверка методики выполнена для образцов квадратного сечения 10×10 мм из сплава ЭП742 при $T_1 = 20\ ^\circ\text{C}$, $T_2 = 650\ ^\circ\text{C}$ и длительности температурной выдержки $t_* = 100$ час по данным работы [7]. В качестве примера на рисунке приведены экспериментальная (сплошная линия) и расчётная (штриховая линия) зависимости, обозначенные цифрой 1, соответствуют $\sigma_x = \sigma_x(z)$ после упрочнения при температуре $20\ ^\circ\text{C}$ ($t = 0 - 0$); цифрой 2 отмечена эта же расчётная зависимость при ступенчатом изменении температуры с $20\ ^\circ\text{C}$ до $650\ ^\circ\text{C}$ ($t = 0 + 0$); цифрой 3 – расчётная зависимость $\sigma_x = \sigma_x(z, t_* - 0)$ после ползучести в течение $t_* = 100$ часов при температуре $650\ ^\circ\text{C}$; цифрой 4 – распределение остаточных напряжений после температурной разгрузки с $T_2 = 650\ ^\circ\text{C}$ до $T_1 = 20\ ^\circ\text{C}$ в момент времени $t = t_* + 0$ (сплошная линия – эксперимент, штриховая – расчёт). В целом, наблюдается удовлетворительное соответствие расчётных и экспериментальных данных как после процедуры упрочнения, так и после ползучести.



Кинетика зависимости $\sigma_x = \sigma_x(z,t)$ в процессе ползучести упрочнённого бруса из сплава ЭП742 при температуре $650\ ^\circ\text{C}$

Выполнен детальный анализ величины H на процесс релаксации остаточных напряжений. В интервале $1 \le H \le 10$ мм финишные кривые остаточных напряжений $\sigma_x = \sigma_x(z, t_*)$ практически не различаются.

Также исследовано влияние параметра анизотропии упрочнения α на распределение остаточных напряжений в призматическом образце, которое оказалось более чем существенным. Если при $\alpha = 1$ эпюры $\sigma_x = \sigma_x(z)$ и $\sigma_y = \sigma_y(z)$ совпадают (это следует просто из теоретических соображений), то в зависимости от величины α при одном и том же исходном распределении $\sigma_x = \sigma_x(z)$ распределение $\sigma_y = \sigma_y(z)$ отличается от $\sigma_x = \sigma_x(z)$ более чем в 3 раза (в предельных случаях $\alpha = 0$ и $\alpha \to +\infty$). При этом, при $0 < \alpha < 1$ величина $\sigma_y = \sigma_y(z)$ по модулю всегда больше величины $\sigma_x = \sigma_x(z)$, а при $\alpha > 1$ – меньше.

Таким образом, выбором технологии упрочнения (то есть величиной α) можно управлять наведением полей остаточных напряжений, создавая заданное поле напряжений. Все эти выводы справедливы для призматических тел с любыми геометрическими размерами сечений (в рассматриваемой математической модели – при любых значениях величины H).

Заключение. Разработана математическая модель формирования напряжённо-деформированного состояния в упрочнённом плоском призматическом, которая может быть использована для широкого класса технологий упрочнения. Разработана математическая модель релаксации остаточных напряжений в плоской детали, адекватность которой подтверждена экспериментально. Выполнен ряд модельных расчётов, который показал следующие результаты. Величина H ($1 \le H \le 10$ мм) практически не влияет на процесс релаксации, поэтому в этих границах изменения H можно использовать и модель упрочнённого полупространства [7], и модель призматического бруса. Выбором технологии упрочнения (величиной α) можно управлять наведением полей остаточных напряжений, создавая заданное поле напряжений.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ, проект № 16-01-00249-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кравченко Б.А., Круцило В.Г., Гутман Г.Н. Термопластическое упрочнение – резерв повышения прочности и надежности деталей машин. Самара: СамГТУ, 2000.
2. Павлов В.Ф., Кирпичев В.А., Иванов В.Б. Остаточные напряжения и сопротивление усталости упрочненных деталей с концентраторами напряжений. Самара: СНЦ РАН, 2008.
3. Радченко В.П., Саушкин М.Н. Ползучесть и релаксация остаточных напряжений в упрочненных конструкциях. М.: Машиностроение-1, 2005.
4. Радченко В.П., Саушкин М.Н. Прямой метод решения краевой задачи релаксации остаточных напряжений в упрочненном изделии цилиндрической формы при ползучести. //Прикл. механика и техн. физика, 2009. Т.50, № 6. С.90–99.
5. Радченко В.П., Кочеров Е.П., Саушкин М.Н., Смыслов В.А. Экспериментальное и теоретическое исследование влияния растягивающей нагрузки на релаксацию остаточных напряжений в упрочненном цилиндрическом образце в условиях ползучести. //Прикл. механика и техн. физика, 2015. Т.56, № 2. С.169–177.
6. Саушкин М.Н., Афанасьева О.С., Дубовова Е.В., Просвиркина Е.А. Схема расчета полей остаточных напряжений в цилиндрическом образце с учетом организации процесса поверхностного пластического деформирования. //Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2008. № 1(16). С. 85–89.
7. Радченко В.П., Саушкин М.Н., Бочкова Т.И. Математическое моделирование формирования и релаксации остаточных напряжений в плоских образцах из сплава ЭП742 после ультразвукового упрочнения в условиях высокотемпературной ползучести // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика, 2016. №2 С.93–112.

8. Иванов С.И. Определение остаточных напряжений в пластинах методом полосок. Вопросы прочности элементов авиационных конструкций. Куйбышев: Куйб. авиац. ин-т, 197 С. 139–152.

Сведения об авторах:

Михаил Николаевич Саушкин – кандидат физико-математических наук, доцент; Самарский государственный технический университет, Институт автоматики и информационных технологий, каф. прикладной математики и информатики; **тел.:** +7(846) 337 04 43; **e-mail:** saushkin.mn@samgtu.ru

Владимир Павлович Радченко – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой; Самарский государственный технический университет, Институт автоматики и информационных технологий, каф. прикладной математики и информатики; **тел.:** +7(846) 337 04 43**; e-mail:** radchenko.vp@samgtu.ru

Татьяна Игоревна Бербасова – аспирант; Самарский государственный технический университет, Институт автоматики и информационных технологий, каф. прикладной математики и информатики; **тел.:** +7(846) 337 04 43; **e-mail:** tanechka.bochkova@mail.ru

ОБ ОДНОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ СИСТЕМЕ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНИКА

Сейранян С.П.

Рассматривается первая краевая плоская задача теории упругости для прямоугольника. Отмечается, что ранее данная задача при произвольных граничных условиях точным аналитическим преобразованием будущим академиком НАН РА Б.Л. Абрамяном феноменальным образом приведена к четырём парам независимых бесконечных систем линейных алгебраических уравнений упрощённого вида [1]. Однако, в заключении глубокоуважаемый Б.Л. Абрамян при анализе пар бесконечных систем на их принадлежность к классу вполне регулярных использует численый анализ О.О. Пирумяна, который, как показали наши аналитические исследования, а также численные результаты с применением **MATHEMATICA**, для пары систем, соответствующей симметричным относительно обеих осей симметрии прямоугольника граничным условиям, оказался ошибочным.

В представляемой работе средствами математического анализа приводится математически строгое доказательство принадлежности отмеченной парной системы к классу вполне регулярных. Таким образом, завершено решение первой краевой плоской задачи теории упругости для прямоугольника при симметричных относительно обеих осей симметрии прямоугольника граничных условиях.

1. В известной первой краевой задаче плоской теории упругости для прямоугольника [1] и задаче изгиба прямоугольных защемленных пластин ([2], [3]) встречаются бесконечные системы линейных алгебраических уравнений, доказательство которых на их принадлежность к классу вполне регулярных систем приводится к нахождению некоторого числа δ, при котором сразу для всех i = 1, 3,… выполняется неравенство

$$U(\xi_i)=\frac{8\xi_i^2}{\pi\psi(\xi_i)}\sum_{m=1.3...}^{\infty}\frac{m}{(\xi_i^2+m^2)^2}<1-\delta,\quad i=1,3,..., \tag{1.1}$$

где $0<\delta<1$, $\xi_i=ih/l$, $\xi_i\in(0,\infty)$, h и l, например, в [1] – стороны прямоугольника,

$$\psi(\xi_i)=\tanh(\pi\xi_i/2)+\pi\xi_i/(2\cosh^2(\pi\xi_i/2)). \tag{1.2}$$

Ранее автор работы [1] при попытке доказательства (1.1), распространяя применение названной им «формулы трапеций и прямоугольников»[1] ([3], стр.81) на случай параметра вида $h/l\neq1$, прежде приходит к неравенству

$$\sum_{m=1.3....}^{\infty}\frac{m}{(\xi_i^2+m^2)^2}\le S_1(\xi_i)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1+\xi_i^2)^2}+\dfrac{21+\xi_i^2}{4(9+\xi_i^2)^2} & \text{при } \xi_i\le3\\[2ex] \dfrac{3+\xi_i^2}{4(1+\xi_i^2)^2}+\dfrac{1}{8\xi_i^3} & \text{при } \xi_i>3\end{cases} \tag{1.3}$$

Далее, вводя функцию $f_2(\xi_i)=8\xi_i^2S_1(\xi_i)/(\pi\psi(\xi_i))$, автор работы [1], опираясь на численный анализ О.О.Пирумяна, пишет: «Произведя исследование, увидим, что функция получает своё максимальное значение при $\xi_i=\xi^*=6.13$». Причём, приведённое ими значение $f_2(\xi^*)=0.770$. Однако, как показали проведённые нами вычисления с применением пакета **Mathematica–6**, $f_2(\xi^*)=0.703$, $f_2(3.001)=0.793$, тем самым, опровергнув приводимую ими как точку максимума ξ^*, так и значение данной функции в точке ξ^*. Сама же функция $f_2(\xi_i)$ при $\xi_i>3$, как будет показано ниже, не имеет максимума[2].

Дифференцируя по ξ_i произведение первого слагаемого в (1.3) при $\xi_i>3$ на $4\xi_i^2/\psi(\xi_i)$ и приме-
няя неравенство $\cosh^2(t)-t^4>\cosh(2t)/2-t^4>2t^4/3(t^2/15-1)>0$ при $t=\pi\xi_i/2>3\pi/2>\sqrt{15}$, получаем:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi_i}\frac{(3+\xi_i^2)\xi_i^2}{(1+\xi_i^2)^2\psi(\xi_i)}=\left[2\xi_i\frac{(3-\xi_i^2)}{(1+\xi_i^2)^3}\left(\tanh(\pi\xi_i/2)+\frac{\pi\xi_i/2}{\cosh^2(\pi\xi_i/2)}\right)-\frac{(\xi_i^2+3)\xi_i^2}{(1+\xi_i^2)^2}\frac{\pi}{\cosh^2(\pi\xi_i/2)}\left(1-\right.\right.$$

---

[1] Здесь вместо прямоугольников должно быть входящих прямоугольников ([4], **373**): формула прямоугольников представляет собой произведение значения функции на середине отрезка на длину отрезка ([4], **322**).

[2] Ошибочное числовое значение $f_2(\xi^*)=0.770$ опубликовано в обзоре [2] !

$$-\frac{\pi}{2}\xi_i \tanh(\pi\xi_i/2)\Bigg)\Bigg]\frac{1}{\psi^2(\xi_i)} < \left[2\xi_i\frac{(3-\xi_i^2)}{(1+\xi_i^2)^3}\tanh(\pi\xi_i/2)+\frac{8(\xi_i^2+3)}{\pi^2(1+\xi_i^2)^2\xi_i}\tanh(\pi\xi_i/2)\right]\frac{1}{\psi^2(\xi_i)} =$$

$$=\frac{2\xi_i}{(1+\xi_i^2)^3}\frac{\tanh(\pi\xi_i/2)}{\psi^2(\xi_i)}\left[3-\xi_i^2+4\frac{\xi_i^4+4\xi_i^2+3}{\pi^2\xi_i^2}\right] < \frac{2\xi_i}{(1+\xi_i^2)^3}\frac{\tanh(\pi\xi_i/2)}{\psi^2(\xi_i)}\left[3+\left(\frac{4}{9}-1\right)\xi_i^2+\frac{4}{9}\left(4+\frac{3}{\xi_i^2}\right)\right]\Bigg|_{\xi_i=3} =$$

$$=-\frac{4\xi_i}{27(1+\xi_i^2)^3}\frac{\tanh(\pi\xi_i/2)}{\psi^2(\xi_i)} < 0 \quad \text{при } \xi_i > 3 \tag{1.4}$$

Далее, полагая $t=\pi\xi_i/2$, имеем:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi_i}\left(\psi(\xi_i)\,\xi_i\right)=\frac{\pi}{2}\left[\tanh(t)\left(1-\frac{2t^2}{\cosh^2(t)}\right)+\frac{3t^2}{\cosh^2(t)}\right]\Bigg|_{t=\pi\xi_i/2}=\frac{\pi}{2}\left[\tanh(t)\left(1-\frac{(2t)^2}{1+\cosh(2t)}\right)+\frac{3t^2}{\cosh^2(t)}\right]\Bigg|_{t=\pi\xi_i/2}>0$$

при $\xi_i > 3$, (1.5)

ибо $1+\mathrm{ch}2t-(2t)^2 > 2+2t^2+2/3t^4-4t^2 = 2+2t^2(t^2/3-1) > 0$ при $t=\pi\xi_i/2 > 3\pi/2 > \sqrt{3}$ (1.6)

С использованием (1.4) и (1.5), приходим к заключению, что функция $f_2(\xi_i)$ при $\xi_i>3$ – сумма двух монотонно убывающих функций. Значит, $f_2(\xi_i)$ при $\xi_i>3$ – монотонно убывающая функция. Следовательно, на множестве $\xi_i>3$, как открытом множестве, $f_2(\xi_i)$ не имеет максимума.

Полученное нами монотонное убывание $f_2(\xi_i)$ при $\xi_i>3$ с учётом (1.1), (1.3) приводит к оценке

$$\mathrm{U}(\xi_i) \le f_2(\xi_i) \le \sup_{\xi_i>3} f_2(\xi_i) = \lim_{\xi_i\to 3+0} f_2(\xi_i) = \left\{\frac{8\pi}{\psi(\xi_i)}\left[\frac{(3+\xi_i^2)\xi_i^2}{4(1+\xi_i^2)^2}+\frac{1}{8\xi_i}\right]\right\}\Bigg|_{\xi_i=3} < 0.793 \quad \text{при } \xi_i>3 \tag{1.7}$$

Здесь и ниже в (2.5), (2.9) переход к строгому неравенству связан с округлением до трёх значащих цифр прибавлением к третьей значащей цифре единицы вычисленного с применением пакета **Mathematica** предыдущего выражения.

Таким образом, в работе [1] глубокоуважаемый будущий академик НАН РА Б.Л. Абрамян первую краевую плоскую задачу теории упругости для прямоугольника при произвольных граничных условиях точным аналитическим преобразованием феноменальным образом приводит к четырём парам независимых бесконечных систем линейных алгебраических уравнений упрощённого вида. А в заключении автор цитируемой работы Б.Л. Абрямян, обладая колоссальной научной интуицией, замечает выполнение условия (1.1), но не уделяет достаточного внимания для его строгого математического обоснования.

Не встречается и в работах других авторов [2] доказательство (1.1).

Ниже, в представлямом нами исследовании, продолжает восполняться возникший пробел.

Утверждение (1.7) основано на достоверности приведённого аналитического выражения функции $S_1(\xi_i)$ при $\xi_i>3$ [1], вывод которого, как будет показано ниже, требует обоснования.

Введём функцию $f(t)$, заменив в аналитическом выражении общего члена ряда (1.1) индекс m на переменную t, $1 \le t < \infty$. Тогда, вычисляя её производные, получаем:

$$f(t)=\frac{t}{(t^2+\xi_i^2)^2},\ f'(t)=3\frac{(\xi_i/\sqrt{3}-t)(\xi_i/\sqrt{3}+t)}{(t^2+\xi_i^2)^3},\ f''(t)=12\,t\frac{(t-\xi_i)(t+\xi_i)}{(t^2+\xi_i^2)^4} \tag{1.8}$$

Из (1.8) замечаем, что $f(t)$ функция имеет непрерывную первую производную $f'(t)$ и конечную вторую производную $f''(\xi_i)=0$, $f''(t)\le 0$ ($f''(t)\ge 0$) при $t\in[1,\xi_i]$ ($t\in[\xi_i,\infty)$).

Значит, в промежутке $[1,\xi_i]$ ($[\xi_i,\infty)$) функция $f(t)$ обращена выпуклостью вверх (вниз) ([4], **143**). В промежутке же $[1,\xi_i/\sqrt{3})$ ($(\xi_i/\sqrt{3},\infty]$) $f'(t)>0$ ($f'(t)<0$), причём, $f'(\xi_i/\sqrt{3})=0$. Тогда, на названных промежутках $f(t)$ монотонно возрастает (убывает), достигая максимума в точке $t=\xi_i/\sqrt{3}$ ([4], **110**). Функция же $f'(t)$ принимает минимальное значение в точке $t=\xi_i$.

Пусть далее m_* – нечётное число, удовлетворяющее условиям $m_* \le \xi_i < m_*+2$, где $\xi_i \ge 3$, а i – произвольное нечётное фиксированное число.

Лемма. Функция $f(t)$ в промежутке $[m_*,\infty)$ монотонно убывает.

Докажем, что $f(t)$ в промежутке $[m_*,\infty)$ монотонно убывает. Рассмотрим прежде частный случай $\xi_i \in \{2k+1, k=1,2,...\}$. Тогда, $m_* = \xi_i$. Но, $[\xi_i,\infty] \subset [\xi_i/\sqrt{3},\infty]$, что, по доказанному выше, и приводит к требуемому утверждению. Пусть теперь $\xi_i \notin \{2k+1, k=1,2,...\}$. Введём функцию $\Lambda(\xi_i,t) = (\xi_i/\sqrt{3}-t)-$ сомножитель при положительном сомножителе в выражении $f'(t)$ в (1.8). Если окажется, что $\Lambda(\xi_i,m_*)<0$, то функция $f(t)$ убывает и при больших значениях *t*, т.е. в требуемом промежутке $[m_*,\infty)$. Положим прежде $3<\xi_i<5$. Тогда $m_*=3$, при котором получаем $\Lambda(\xi_i,3)=\xi_i/\sqrt{3}-3< 5/\sqrt{3}-3<0$. Пусть далее $\xi_i>5$. Тогда, полагая $m_*=\xi_i-\alpha$, где $0<\alpha<2$, приходим к неравенству $\Lambda(\xi_i,\xi_i-\alpha)=\xi_i(1/\sqrt{3}-1)+\alpha<$ $<5(1/\sqrt{3}-1)+2=5/\sqrt{3}-3<0$.

Итак, при $\xi_i \ge 3$ $f(t)$ в промежутке $[m_*,\infty)$ монотонно убывает, что и требовалось доказать.

Доказанная лемма позволяет, представляя ряд (1.1) в виде частичной суммы, полученной суммированием общего члена при значениях $m=1,3,...,m_*$ и остатка, применить далее к двум частям ряда те же рассуждения, что и в частном случае параметра вида $h/l=1$ в [2] (стр.81).

$$\sum_{m=1,3....}^{\infty}\frac{m}{(\xi_i^2+m^2)^2}=\frac{1}{2}\frac{1}{(\xi_i^2+1)^2}+\left[\frac{1}{2}\frac{1}{(\xi_i^2+1)^2}+\sum_{m=3,.5....}^{m_*}\frac{m}{(\xi_i^2+m^2)^2}-\frac{1}{2}\frac{m_*}{(\xi_i^2+m_*^2)^2}\right]+\frac{1}{2}\frac{m_*}{(\xi_i^2+m_*^2)^2}+$$

$$+\sum_{\substack{m=m_*+2,\\ .m_*+4,....}}^{\infty}\frac{m}{(\xi_i^2+m^2)^2}\le\frac{1}{2}\frac{1}{(\xi_i^2+1)^2}+\frac{1}{2}\int_1^{m_*}\frac{t\,dt}{(\xi_i^2+t^2)^2}+\frac{1}{2}\frac{m_*}{(\xi_i^2+m_*^2)^2}+\frac{1}{2}\int_{m_*}^{\infty}\frac{t\,dt}{(\xi_i^2+t^2)^2}=\frac{1}{2}\frac{1}{(\xi_i^2+1)^2}+$$

$$+\frac{1}{2}\int_1^{\infty}\frac{t\,dt}{(\xi_i^2+t^2)^2}+\frac{1}{2}\frac{m_*}{(\xi_i^2+m_*^2)^2}=\frac{1}{2}\frac{1}{(\xi_i^2+1)^2}-\frac{1}{4}\frac{1}{(\xi_i^2+t^2)}\Bigg|_{t=1}^{\infty}+\frac{1}{2}\frac{m_*}{(\xi_i^2+m_*^2)^2}=\frac{1}{4}\frac{3+\xi_i^2}{(\xi_i^2+1)^2}+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{m_*}{(\xi_i^2+m_*^2)^2},\ \xi_i\ge 3,\ i=1,3,... \qquad (1.9)$$

Здесь конечная сумма в скобках – половина суммы площадей трапеций под кривой $f(t)$ при $1\le t\le m_*$, которая затем оценивается сверху половиной определённого интеграла. Для оценки же остатка применяется интегральный признак сходимости рядов Маклорена – Коши ([4], **373**).

Отметим, что первое слагаемое в (1.9) совпадает с таковым в нижней части (1.3), а второе – с таковым там же в (1.3), но при условии $\xi_i \in \{2k+1, k=1,2,...\}$. В противном случае, когда $\xi_i \notin \notin \{2k+1, k=1,2,...\}$, второй член в (1.9), согласно утверждению леммы, больше такового в (1.3).

Полученный результат (1.9) не привел к выводу нижней части формулы (1.3), однако, принимая во внимание, что Б.Л. Абрамян был выдающимся аналитиком, найдём дополнительный искусственный приём, который приведёт к доказательству $S_1(\xi_i)$ при $\xi_i>3$.

Заметим, что при $m=m_*+2, m_*+4,...$ верхняя оценка остатка исходного ряда в (1.9) получена представлением суммы остатка половиной суммы площадей входящих прямоугольников ([4], **373**). При этом использовалось лишь монотонное убывание функции $f(t)$ при $t\in[m_*,\infty)$ и её интегрируемость. Воспользуемся теперь одновременно и её выпуклостью вниз на $[m_*+2,\infty)$. Рассмотрим отрезок $\varsigma_k=[m_*+2k, m_*+2(k+1)]$ при любом натуральном k и надстроим над вхо-дящим прямоугольником на ς_k прямоугольный треугольник так, чтобы один из катетов совпа-дал с верхней стороной входящего прямоугольника, а другой катет и гипотенуза лежали соот-ветственно на прямой $t=m_*+2k$ и касательной к $f(t)$ в точке $m_*+2(k+1)$, образуя в точке их пересечения третью вершину таким способом построенного треугольника. Известно, что гра-фик касательной к выпуклой вниз кривой всеми точками лежит не выше данной кривой ([4], **143**). Поэтому сумма площадей входящего прямоугольника и построенного треугольника не превосходит площади под кривой на данном отрезке. Значит, верхнюю оценку в (1.9) можно

уменьшить на величину s – половину суммы площадей треугольников s_k на ς_k при суммировании по k=1,2,… Записывая s в виде ряда, оценивая его сумму с учётом (1.8) применением интегрального признака Маклорена-Коши ([4], **373**) с последующим использованием оценки, имеем:

$$s=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}s_k=\sum_{k=2}^{\infty}[-f'(m_*+2k)]\ge-\int_2^{\infty}f'(m_*+2t)\,dt=-\frac{1}{2}f(m_*+2t)\Big|_{t=2}^{\infty}=\frac{1}{2}\frac{m_*+4}{[(m_*+4)^2+\xi_i^2]^2} \quad (1.10)$$

$$\frac{1}{2}\frac{m_*}{(m_*^2+\xi_i^2)^2}-s\le\frac{1}{2}\left[\frac{m_*}{(m_*^2+\xi_i^2)^2}-\frac{m_*+4}{((m_*+4)^2+\xi_i^2)^2}\right]=-\frac{1}{2}f'(m_*+4\theta)4\le 2\max_{m_*\le t\le m_*+4}[-f'(t)]=$$

$$=2[-f'(\xi_i)]=1/(2\xi_i^4),\ \text{где } 0\le\theta\le 1. \quad (1.11)$$

Подчиняя оценку в (1.11) требуемому, но в форме строгого неравенства условию и, решая данное неравенство, находим

$$m_*/[2(m_*^2+\xi_i^2)^2]-s\le 1/(2\xi_i^4)<1/(8\xi_i^3)\ \text{при}\ \xi_i>4. \quad (1.12)$$

Пусть теперь $3\le\xi_i\le 4$. Тогда $m_*=3$. Здесь с учётом (1.11) потребуем, чтобы

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{(9+\xi_i^2)^2}-s\Big|_{m_*=3}\right)\le\frac{1}{2}\left[\frac{3}{(9+\xi_i^2)^2}-\frac{7}{(49+\xi_i^2)^2}\right]=\frac{6636+168\,\xi_i^2-4\xi_i^4}{2\,(9+\xi_i^2)^2(49+\xi_i^2)^2}<\frac{1}{8\xi_i^3} \quad (1.13)$$

Введём далее функцию аргументов τ и ζ формулой

$$F(\tau,\zeta)=(6636/\zeta^4+168/\zeta^2-4)/[\zeta(9/\tau^2+1)^2(49/\tau^2+1)^2] \quad (1.14)$$

Тогда правая часть неравенства (1.13) принимает вид

$$F(\xi_i,\xi_i)<0.25\ \text{при}\ 3\le\xi_i\le 4. \quad (1.15)$$

Представляя отрезок [3,4] в виде суммы отрезков $\Delta^{(k)}$=[3+0.1(k–1), 3+0.1k], где k=1, 2,…,10, и, замечая, что $F(\xi_i, \xi_i)\le F(3+0.1k, 3+0.1(k-1))<0.236$ при $\xi_i\in\Delta^{(k)}$, приходим к выполнению неравенства (1.15), а с ним и к доказательству требуемого, но строгого неравенства (1.13).

В итоге, с использованием (1.12), (1.13) приходим к обоснованию (1.3) при $\xi_i>3$.

2. Пусть далее $0<\xi_i\le 3$. Тогда функция $\Lambda(\xi_i,t)=(\xi_i/\sqrt{3}-t)\le\sqrt{3}-t<0$ при $t\ge 3$. Поэтому функция $f(t)$ монотонно убывает при $t\ge 3$. Применяя признак Маклорена – Коши ([4], **373**) к ряду (1.3), начиная со второго члена, приходим к совпадению с формулой (1.3) при $0<\xi_i\le 3$.

2.1 Оценивается $U(\xi_i)$ в (1.1) при $1\le\xi_i\le 3$. Умножая первое и второе слагаемые в верхней части формулы (1.3) на ξ_i^2 и дифференцируя каждое произведение по ξ_i, получаем:

$$\left(\xi_i^2/(\xi_i^2+1)^2\right)'=2\xi_i(1-\xi_i)(1+\xi_i)/(\xi_i^2+1)^3 \quad (2.1)$$

$$\left(\frac{\xi_i^2(21+\xi_i^2)}{4(\xi_i^2+9)^2}\right)'=\frac{3\xi_i(63-\xi_i^2)}{2(\xi_i^2+9)^3}=\frac{3\xi_i(3\sqrt{7}-\xi_i)(3\sqrt{7}+\xi_i)}{2(\xi_i^2+9)^3}>0\ \text{при}\ 1\le\xi_i<3\sqrt{7} \quad (2.2)$$

Таким образом, функция под знаком дифференцирования в (2.1), (2.2) при $1\le\xi_i\le 3$ – строго убывающая (возрастающая) положительная функция ([4], **132**).

Дифференцируя теперь функцию $\psi(\xi_i)$ по переменной ξ_i, находим

$$\left(\psi(\xi_i)\right)=\pi/\cosh^2(\pi\xi_i/2)\left(1-\pi\xi_i/2\tanh(\pi\xi_i/2)\right),\ 1\le\xi_i\le 3 \quad (2.3)$$

Заметим, что выражение в скобках содержит положительные сомножители – строго возрастающие функции переменной ξ_i. Поэтому и их произведение есть положительная строго возрастающая функция. Но при $\xi_i=1$ данное произведение принимает большее 1.44 значение. Тогда и при $\xi_i>1$ названное произведение больше единицы. Значит, производная от функции $\psi(\xi_i)$ (2.3) на отрезке $1\le\xi_i\le 3$ есть функция отрицательная. Следовательно, при $1\le\xi_i\le 3$ функция $\psi(\xi_i)$ – положительная строго убывающая функция ([4], **132**).

Представим далее отрезок $[1,3]$ в виде суммы отрезков Δ_j, j = 1, 2, …,10

$$[1, 3] = \bigcup_{j=1}^{10} \Delta_j, \text{ где } \Delta_j = [\alpha_j, \alpha_{j+1}], \ \alpha_j = 1 + 0.2\,(j-1) \tag{2.4}$$

Тогда и на каждом отрезке Δ_j функции под знаком производных в (2.1), (2.3) ((2.2)) – строго убывающие (строго возрастающая) функции (функция). Значит, максимумы названных функций в (2.1) ((2.2)) достигаются на каждом Δ_j в левом (правом) конце отрезка. Функция же $1/\psi(\xi_i)$ достигает максимума на правом конце Δ_j. Отсюда

$$U(\xi_i) \le f_2(\xi_i) \le \frac{8}{\pi\psi(\alpha_{j+1})}\left[\frac{\xi_i^2}{(\xi_i^2+1)^2}\bigg|_{\alpha_j} + \frac{\xi_i^2(21+\xi_i^2)}{(\xi_i^2+9)^2}\bigg|_{\alpha_{j+1}}\right] < \Lambda_j \le \Lambda_4 = 0.822 < 1 \text{ при } \xi_i \in \Delta_j \tag{2.5}$$

j = 1, 2, …,10; Λ_j – вычисленные с упомянутым в п.1 округлением константы.

2.2 Пусть теперь $0 < \xi_i \le 1$. Умножая первое слагаемое в верхней части формулы (1.3) на ξ_i и записывая производную от полученного выражения по ξ_i с применением второй из формул (1.8), полагая в ней ξ_i=1, а t заменяя на ξ_i, получаем

$$\left(\xi_i/(\xi_i^2+1)^2\right)' = 3(1/\sqrt{3}-\xi_i)(1/\sqrt{3}+\xi_i)/(\xi_i^2+1)^3. \tag{2.6}$$

Таким образом, функция под знаком дифференцирования в (2.6) в промежутке $0 < \xi_i \le 1$ достигает своего максимума при $0 < \xi_i = 1/\sqrt{3}$ ([4], **134**).

Умножая второе слагаемые в верхней части формулы (1.3) на ξ_i и дифференцируя произведение по ξ_i, находим

$$\left(\xi_i(21+\xi_i^2)/(\xi_i^2+9)^2\right)' = (189-36\xi_i^2-\xi_i^4)/(\xi_i^2+9)^3 > 0 \text{ при } 0 < \xi_i \le 1 \tag{2.7}$$

Далее имеем

$$\left(\frac{\xi_i}{\psi(\xi_i)}\right)' = \frac{1}{\psi^2(\xi_i)}\left[\tanh(\pi\xi_i/2) - \frac{\pi\xi_i}{2\cosh^2(\pi\xi_i/2)} + \frac{\pi^2\xi_i^2\sinh(\pi\xi_i/2)}{2\cosh^3(\pi\xi_i/2)}\right] > 0 \text{ при } 0 < \xi_i \le 1 \tag{2.8}$$

Здесь мы воспользовались неравенством $g(t) = \tanh(t) - t/\cosh^2(t) > 0$ при $t > 0$, к которому приходим из следующих соображений: $g(0) = 0, g'(t) = 2t\sinh(t)/\cosh^3(t) > 0$ при $t > 0$ и функция $g(t)$ при $t > 0$ положительная, монотонно возрастающая функция ([4], **132**).

Отсюда функции под знаком дифференцирования в (2.7) и (2.8), монотонно возрастая, достигают своих максимальных значений при ξ_i =1. Следовательно,

$$U(\xi_i) \le f_2(\xi_i) \le \frac{8}{\pi}\left[\frac{\xi_i}{\psi(\xi_i)}\right]\bigg|_{\xi_i=1}\left[\frac{\xi_i}{(\xi_i^2+1)^2}\bigg|_{\xi_i=1/\sqrt{3}} + \frac{\xi_i(21+\xi_i^2)}{4(\xi_i^2+9)^2}\bigg|_{\xi_i=1}\right] < 0.829 < 1 \text{ при } 0 < \xi_i \le 1 \tag{2.9}$$

3. Указывается δ в неравенстве (1.1). Пусть Δ_0=(0, 1], Δ_{11}=[3, ∞). Имеем (0, ∞) =$\Delta_0 \cup \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_{11}$. Положим Λ_0=0.826, Λ_{11}=0.829. Зададимся $\forall\ \xi_i = \xi_i^* \in (0,\infty)$. Тогда $\xi_i^* \in$ одному или двум пересекающимся промежуткам. Значит, $U(\xi_i^*) < \max\limits_{0\le j\le 11}\Lambda_j = \Lambda_{11} = 0.829$. Но ξ_i^*, по условию, $\forall$. Отсюда то же верно и при $\xi_i \in (0,\infty)$. Полагая $\delta = 1 - \Lambda_{11} = 0.171$, приходим к требуемому значению.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамян Б.Л. К плоской задаче теории упругости для прямоугольника // ПММ. 1957. Т.XXI. № 1. С.89–100.
2. Мелешко В.В. Бигармоническая проблема для прямоугольника: история и современность. // Математические методы и физ.-мех. поля. 2004. Т.47. № 3. С.45–63.
3. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. – М.- Л.: Государственное изд-во технико-теоретической литературы, Ленинград, 1949. 695 с.
4. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления.– М.: Физматлит, т. I /II 2007/2003, 679 /863с.

Сведения об авторе:

Сейранян Сурен Паруйрович – к.ф.-м.н., ст. научный сотр. Института механики НАН РА. **Тел.:** (374 55) 54 28 38, **E-mail:** seysuren@yandex.ru, seysuren@mail.ru.

МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК НАНОКОМПОЗИТОВ МЕТАЛЛ-ГРАФЕН

Семёнов Б.Н.

Для оценки влияния графеновых включений на деформационные характеристики нанокомпозита «металл-графен» построена 2D модель и проведён конечно-элементный анализ деформирования представительного объёма с последующей гомогенизацией механических свойств в зависимости от концентрации графеновых включений. Показано, что влияние включений на упругие модули и предел пластичности нанокомпозита не является значимым. Исследовано влияние графеновых включений на прочность и трещиностойкость нанокомпозита «(нано)металл-графен». Результаты моделирования свидетельствуют о том, что в нанокомпозите наблюдается снижение концентрации напряжений в окрестности конца трещины при его приближении к графеновому включению.

1. Введение

Благодаря своим уникальным механическим свойствам, таким как высокий модуль Юнга (1 ТПа), предел прочности (130 ГПа), высокая степень деформируемости (более 20%) [1,2] и высокой удельной площади поверхности графен, а также графеновые листы, состоящие из нескольких слоёв графена, очень перспективен для использования в качестве армирующего элемента в различных композиционных материалах [3-8]. Однако, использование графеновых листов в качестве наполнителя в металломатричных композитах сопряжено с серьёзными технологическими проблемами. В последние годы удалось найти решение этих проблем и получить металломатричные нанокомпозиты, упрочнённые графеновыми включениями, расположенными преимущественно на границах зёрен металлической матрицы [4-8]. Было отмечено, что композиты системы «металл-графен» имеют высокую прочность и твёрдость. В частности, у алюминиевых композитов при армировании графеновыми листами с массовой долей 0.3% предел прочности увеличился на 69% [5].

Целью настоящей работы является компьютерное моделирование в среде пакета ANSYS деформирования и разрушения композита «металл-графен», определение его эффективных механических параметров и объяснение повышения прочности с позиций механики деформируемого твёрдого тела.

2. Моделирование эффективных свойств композита «металл-графен»

Композит «металл-графен» состоит из поликристаллической металлической матрицы и графеновых прослоек, расположенных в границах зёрен металлической матрицы. Проведём оценку эффективных механических свойств композита «металл-графен» при помощи компьютерного моделирования деформирования представительного объёма металло-композита для различного расположения графеновых прослоек в границах зёрен. Будут рассмотрены структуры композита с различным расположением графеновых прослоек: a) графеновые листы образуют непрерывную ячеистую структуру, в ячейки которой помещены зерна металла, b) графеновые листы, расположены на границах зёрен с разрывами в узлах ячеек, c) графеновые листы расположены на границах зёрен, образуя непрерывные структуры вдоль линии растяжения, d) графеновые листы расположены на границах зёрен, образуя непрерывные структуры поперек линии растяжения.

В расчётной модели был выбран характерный размер одной ячейки 1.73 мкм, а толщина графеновых листов –10 нм. Представительный объём, для которого производились расчёты, с учётом симметрии области, имел размеры 3мкм x 3.48мкм. Представительный объём растягивался в вертикальном направлении и строилась зависимость относительного удлинения от приложенной силы. В качестве металлической матрицы был выбран сплав Ti-12Ta-9Nb-3V-6Zr-O из группы так называемых гам-металлов, проявляющих суперсвойства, такие как ультранизкий модуль упругости, сверхвысокую прочность, суперэластичность.

Были выбраны следующие механические свойства металлической матрицы: модуль Юнга $E = 52$ ГПа, коэффициент Пуассона $\upsilon = 0.3$, предел текучести $\sigma_T = 1{,}7$ ГПа. Для графена - модуль Юнга $E = 1000$ ГПа, коэффициент Пуассона $\upsilon = 0.345$. В расчётной модели предполагалось, что металлическая матрица подчиняется закону идеального упруго-пластического деформирования без упрочнения.

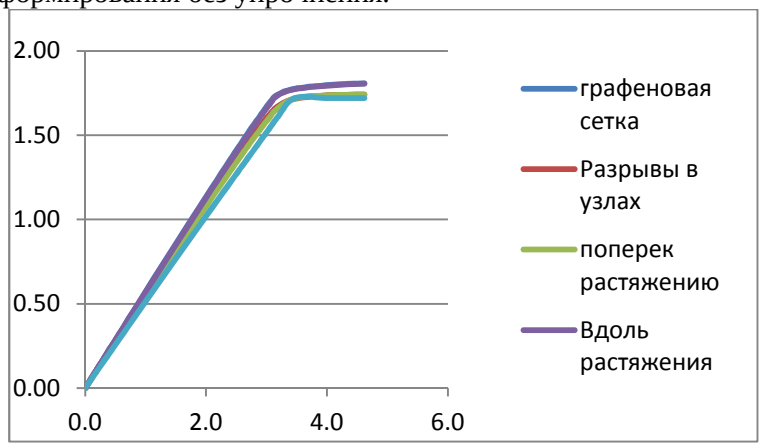


Рис.1. Диаграмма растяжения σ-ε для gum-metals с объёмной долей графеновых хлопьев 1% для различных расположений графеновых прослоек.

Полученные компьютерным моделированием для различных вариантов армирования эффективные параметры (модуль Юнга, предел текучести) для всех рассмотренных структур композита «металл-графен» незначительно отличаются от соответствующих параметров металлической матрицы (рис.1). Наличие в нанокомпозите графеновых включений с высоким упругим модулем приводит к деформационному упрочнению материала, что объясняется упругим деформированием графена вплоть до разрушения в широком диапазоне деформаций.

3. Прочностные свойства композита «металл-графен»

Многочисленные эксперименты [3-8] свидетельствуют, что композиты системы «металл-графен» характеризуются прочностными свойствами, значительно превышающими свойства металлической матрицы. Причин этого повышения прочностных свойств несколько.

Во-первых, графен обладает чрезвычайно высокими прочностными и адгезионными свойствами. Поэтому для разрушения графенового листа и/или вырывания его из металлической матрицы требуются значительные усилия. Во-вторых, графен является высокомодульным материалом с высокой степенью деформируемости, поэтому он служит препятствием для возникшей в металлической матрице трещины.

Для оценки прочностных свойств композита «металл-графен» исследуем влияние графенового листа на концентрацию напряжений в окрестности, зародившейся в металлической матрице трещины. Проведём сравнение напряжённого состояния в окрестности трещины в металлической матрице с армирующим графеновым элементом, расположенным вблизи кончика трещины, с напряжённым состоянием в окрестности трещины в однородном металлическом материале.

В качестве расчётной модели рассмотрим прямоугольную область 400нм x 200нм с центральной трещиной, расположенной посредине образца вдоль оси x, длина трещины 190 нм. Прямоугольник растягивается равномерно распределёнными по границам области $y = \pm 100$ нм усилиями p. Задача решается методом конечных элементов при помощи пакета ANSYS.

В окрестности конца трещины введена точка концентрации с примыкающими к ней специальными элементами, радиус которых равен 0.5 нм. Рассматриваются 3 задачи: 1) прямоугольник из материала металлической матрицы, 2) прямоугольник из материала металлической матрицы с армирующим элементом в виде 2-х узких вертикальных прямоугольных областей шириной 1нм, расположенных на расстоянии 5 нм от вершин трещины, 3) армируюшие элементы в виде прямоугольников расположены под углом 60^0 к

трещине на расстоянии 5 нм от её вершины. Армирующий элемент имеет механические свойства графена, а материал металлической матрицы – железа. В силу симметрии задачи относительно оси ординат рассматривается только правая половина расчётной модели с условием симметрии на оси ординат. Задача решается в линейной постановке в условиях плоской деформации.

Для однородного материала максимальные растягивающие напряжения, усреднённые на элементе, примыкающем к вершине трещины, и отнесённые к приложенной нагрузке, равны $S_{1max}/p = 63.47$, а коэффициент интенсивности напряжений K_I, отнесённый к приложенной нагрузке, равен $K_I/p = 32{,}53$ нм$^{-1/2}$.

В случае армирования вертикальной графеновой вставкой максимальные растягивающие напряжения, усреднённые на элементе, примыкающем к вершине трещины, и отнесённые к приложенной нагрузке, равны $S_{1max}/p = 30$, а коэффициент интенсивности напряжений K_I, отнесённый к нагрузке, равен $K_I/p = 23.41$ нм$^{-1/2}$ (рис. 2).

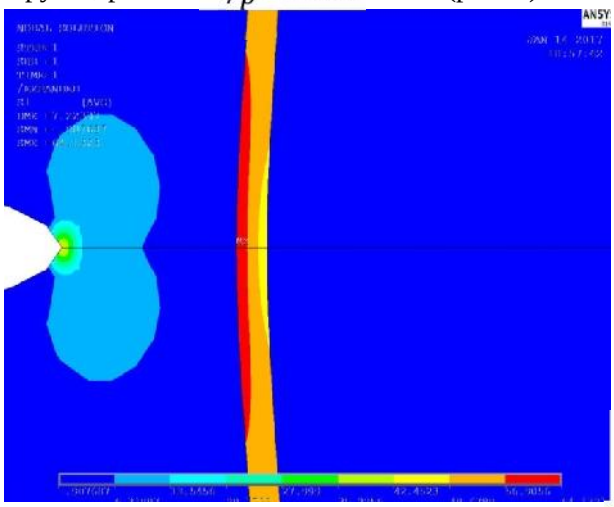


Рис.2. Распределение максимальных растягивающих напряжений S_1, отнесённых к нагрузке p, в окрестности трещины в металле, армированном графеновыми листами толщиной 1 нм.

На рис. 3a) и рис. 3b) приведено распределение максимальных растягивающих напряжений на продолжении трещины в случае однородного материала металлической матрицы и при армирующем графеновом элементе.

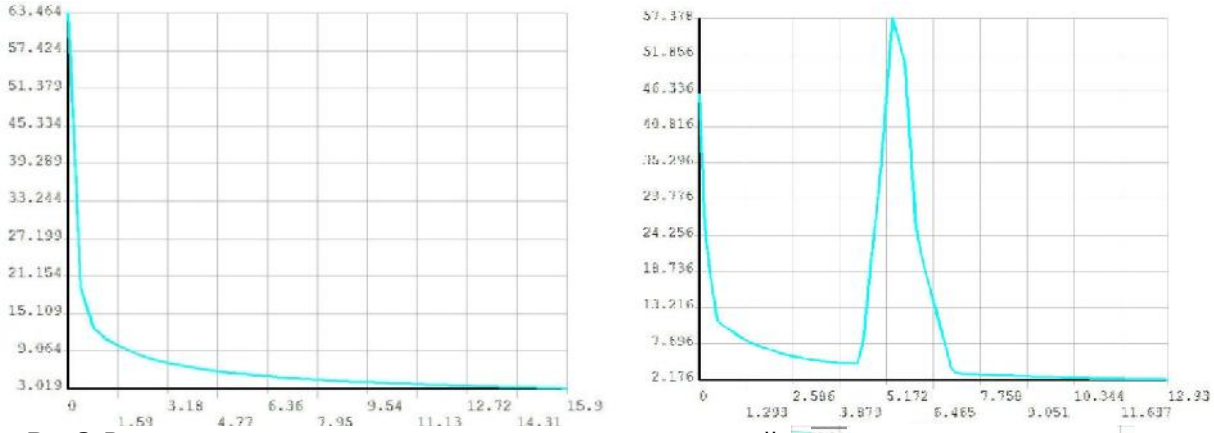


Рис.3. Распределение максимальных растягивающих напряжений $\frac{S_1}{p}$, отнесенных к нагрузке $\frac{p}{}$, на продолжении трещины, a) в однородном металле, b) в металле, армированном графеновыми листами толщиной 1 нм.

На рис. 4 приведено распределение максимальных растягивающих напряжений в случае армирующего графенового элемента, расположенного под углом 60^0 к трещине. Максимальные растягивающие напряжения, усредненные на элементе, примыкающем к вершине трещины, и

отнесенные к приложенной нагрузке в этом случае равны $S_{max}/p = 40.0$, а коэффициент интенсивности напряжений K^I, отнесенный к нагрузке, равен $K^I/p = 25.77$ нм$^{-1/2}$, $K^{II}/p =$ 2ю63 нм$^{-1/2}$.

Таким образом, наличие армирующего элемента снижает концентрацию напряжений в окрестности конца трещины, и приводит к повышению прочности композита «металл-графен».

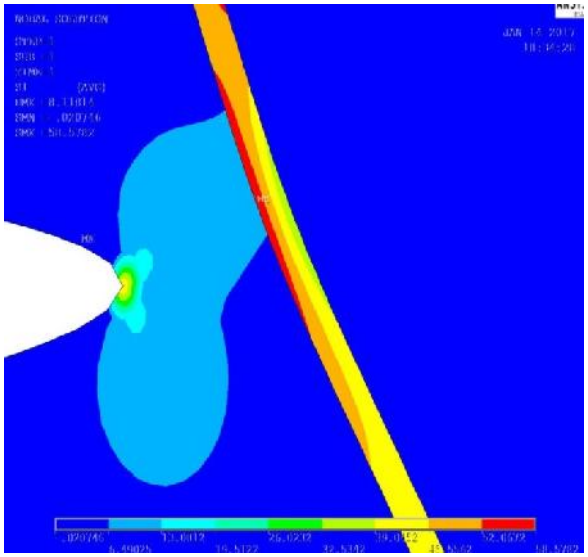


Рис.4. Распределение максимальных растягивающих напряжений S_1 в окрестности трещины, расположенной под углом в 60^0 к графеновому листу толщиной 1 нм.

4. Заключение

Для оценки влияния графеновых включений на деформационные характеристики нанокомпозита «металл-графен» проведён конечно-элементный анализ деформирования представительного объёма с последующей гомогенизацией механических свойств. Для представительного объёма построены кривые деформирования (сила - относительное удлинение), на основании которых исследована зависимость эффективных модулей и пластического течения от концентрации графеновых включений. Показано, что влияние включений на упругие модули и предел пластичности нанокомпозита типа «металл-графен» невелико. При объёмной концентрации до 2% увеличение упругого модуля не превышает 4%, предела пластичности - 1,5 %. Наличие в нанокомпозите графеновых включений с высоким упругим модулем приводит к деформационному упрочнению материала, что объясняется упругим деформированием графеновых включений вплоть до разрушения в широком диапазоне деформаций.

Основные эффекты, оказываемые графеновыми нановключениями на механические характеристики нанокомпозитов «металл-графен», - следующие: *торможение дислокаций* графеновыми нановключениями, *перенос напряжений* на графеновые нановключения и *торможение роста зёрен* графеновыми нановключениями в металлической матрице.

Во-первых, графеновые листы и наноплитки эффективно тормозят скольжение решёточных дислокаций – основных носителей пластической деформации в металлической матрице. Данный эффект вносит доминирующий вклад в упрочнение нанокомпозитов. Второй упрочняющий эффект графеновых нановключений – это перенос напряжений на такие нановключения. Рассматриваемый эффект существенно зависит от силы химических связей между атомами металлической матрицы и графена. Кроме того, действуют и геометрические факторы, которые способствуют переносу напряжений в нанокомпозитах «металл-графен». Дело в том, что нановключения графена, характеризующиеся искривлённой геометрической формой, высокой эластичностью и огромными значениями отношения высоты или ширины нановключения (листа, нанопластины) к его толщине, легко изгибаются, частично

обволакивают зёрна и геометрически закрепляются в границах зёрен в нанокомпозитах «металл-графен». Как следствие, графеновые нановключения жёстко закреплены в местах их локализации и имеют большие площади контакта с металлической матрицей, что позволяет эффективно реализовываться переносу напряжений (от «мягкой» матрицы на жёсткие нановключения). Третий упрочняющий эффект графеновых нановключений связан с их способностью тормозить миграцию границ зёрен и, таким образом, рост зёрен в металлических матрицах. Это позволяет металлической матрице сохранить свои прочностные характеристики при синтезе нанокомпозитов «металл-графен» и их деформировании.

Для оценки трещиностойкости нанокомпозита «(нано)металл-графен» построена компьютерная модель распространения трещины в таком композите. Было исследовано поле напряжений в окрестности вершины трещины в однородном металлическом материале с эффективными модулями и в нанокомпозите с трещиной, вершина которой находится вблизи графенового включения. Результаты конечно-элементного моделирования свидетельствуют о том, что, во-первых, в нанокомпозите имеет место снижение концентрации напряжений в окрестности конца трещины при приближении к графеновому включению и, во-вторых, изменение направления площадки наибольших растягивающих напряжений, что приведёт к искривлению траектории роста трещины и, следовательно, к повышению трещиностойкости (из-за соответствующего увеличения необходимой для роста трещины энергии). Отметим также, что графеновые листы на границах зёрен металлической матрицы нанокомпозита «металл-графен» стабилизируют наноразмерную структуру, препятствуя рекристаллизации.

Данное исследование выполнено при поддержке РФФИ (проект № 18-01-00884*).*

ЛИТЕРАТУРА

1. Lee C., Wei X., Kysar J.W., Hone J. Measurement of the Elastic Properties and Strength of Mono- layer Graphene. *Science,* vol.321, No.5887,2008.
2. Ovid'ko I.A. Mechanical properties of graphene. *Reviews on Advanced Materials Science,* vol. 34, 2013.
3. Kim Y., Lee J., Yeom M.S., Shin J.W., Kim H., Cui Y., Kysar J.W., Hone J., Jung Y., Jeon S.o & Han S.M. Strengthening effect of single-atomic-layer graphene in metal–graphene nanolayered composites. *Nature Communications, vol.* 4, 2013.
4. Bartolucci S. F. *et al.* Graphene-aluminum 5 nanocomposites. *Mater. Sci. Eng. A,* vol.528, 2011.
5. J. Wang, Z. Li, G. Fan, H. Pan, Z. Chen, D. Zhang Reinforcement with graphene nanosheets in aluminum matrix composites. // *Scripta Materialia* 66 (2012) 594-597.
6. Koltsova T.S., Nasibulina L.I., Anoshkin I.V., Mishin V.V., Kauppinen E.I., Tolochko O.V., Nasibulin A.G. New Hybrid Copper Composite Materials Based on Carbon Nanostructures. *Journal of Materials Science and Engineering B*, vol. 2, 2012..
7. Chen L.-Y., Konishi H., Fehrenbacher A., Ma C., Hu G.-Q., Choi H., Hu H.-F., Pfefferkorn F.E., Li X.-C. Novel nanoprocessing route for bulk graphene nanoplatelets reinforced metal matrix nanocomposites. *Scripta Materialia, vol.* 67, 2012.
8. Ovid'ko I.A. Metal-Graphene Nanocomposites with Enhanced Mechanical Properties: A Review. *Reviews on Advanced Materials Science, vol.* 38 , 2014.

Information about authors:

Boris Semenov – associate professor, Saint Petersburg State University, Faculty of Mathematics and Mechanics (7 812) 4286989, (7 921) 9214965, **E-mail:** semenov@bs1892.spb.edu

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РОСТА СОСУДИСТОЙ СТЕНКИ АРТЕРИИ В УСЛОВИЯХ РАЗВИВАЮЩЕГОСЯ АТЕРОСКЛЕРОЗА

Стадник Н.Э.

Настоящее исследование посвящено проблемам математического моделирования процессов роста кровеносных сосудов человека подверженных атеросклерозу. Сосудистая стенка моделируется упругим толстостенным цилиндром. Рассматривается краевая задача о поверхностном росте упругого толстостенного цилиндра. Выявлены особенности эволюции напряжённо-деформированного состояния в зависимости от механических параметров протекающих биологических процессов.

Заболевания, связанные с патологическим ростом стенок сосудов, являются основной причиной смертности населения. В основе патологического роста стенки сосуда чаще всего лежит атеросклероз, процессы роста при инфекционных и иммунных заболеваниях, артериоло- и артериосклероз, при гипертонической болезни, васкулиты.

В кровеносной системе человека выделяют три типа сосудов: артерии, вены и микроциркуляторное русло. К последнему типу, в свою очередь, относят гемокапилляры, артериолы, венулы, а также артериоло-венулярные анастомозы. Артерии и вены построены по единому плану, рис.1.

Рис.1. Стадии атеросклероза.

Под ростом сосудов будем понимать утолщение стенки нормального сосуда вследствие развития патологического процесса. В медицинском контексте, такой рост, как правило, представлен воспалительным процессом в стенке сосуда и процессом дистрофии (накопление определенных компонентов в строме сосуда). К росту стенки сосуда так же может привести процесс дистрофии без воспалительной реакции. Такие широко распространённые заболевания, как атеросклероз и васкулиты, инициируются воспалительной реакцией, которая приобретает хроническое течение и в дальнейшем сопровождается накполением липидов и белков в стенке сосуда. Процессы ремоделирования сосуда, например, при артериальной гипертензии не всегда сопровождает воспалительная реакция, однако, происходит утолщение стенки сосуда за счёт накопления компонентов межклеточного матрикса и активной пролиферации гладкомышечных клеток.

Атеросклероз характеризуется поражением артерий в виде отложений в интиме липидов, белков и реактивного разрастания соединительной ткани с образованием бляшек.

При атеросклерозе в интиме артерий появляются жиробелковый детрит (athere) и очаговое разрастание соединительной ткани (sklerosis), что приводит к формированию атеросклеротической бляшки, суживающей просвет сосуда. Поражаются артерии крупного и среднего калибра, реже в процесс вовлекаются мелкие артерии. Различают следующие стадии морфогенеза атеросклероза:

1. Долипидная стадия макроскопически не определяется.

2. Стадия липоидоза характеризуется очаговым пропитыванием интимы липидами (холестерином), липопротеидами, что ведёт к образованию жировых (липидных) пятен и полос. Макроскопически такие жировые пятна выглядят в виде участков жёлтого цвета, которые иногда могут сливаться и образовывать плоские удлинённые полосы не возвышающиеся над поверхностью интимы.
3. В стадию липосклероза происходит размножение клеток фибробластов, рост которых стимулирует разрастание в интиме молодой соединительной ткани. Последующее созревание этой ткани сопровождается формированием фиброзной бляшки. Макроскопически фиброзные бляшки представляют собой плотные, круглой или овальной формы образования белого или желтовато-белогоцвета, возвышающиеся над поверхностью интимы.
4. При атероматозе атероматозные массы отграничены от просвета сосуда слоем зрелой, гиалинизированной соединительной ткани, формируется покрышка бляшки.
5. Стадия изъязвления, сопровождающаяся образованием атероматозной язвы. Дефект интимы покрывается тромботическими наложениями.
6. Атерокальциноз характеризуется отложением в фиброзные бляшки солей кальция, т.е. их обызвествлением (петрификацией). Это завершающая стадия атеросклероза.

При гипертонической болезни в артериях крупного и среднего калибра выявляется эластоз и эластофиброз. Эластоз и эластофиброз – это последовательные стадии процесса и представляют собой гиперплазию и расщепление внутренней эластической мембраны, которая развивается компенсаторно в ответ на стойкое повышение артериального давления. В дальнейшем происходит гибель эластических волокон и замещение их коллагеновыми волокнами, т.е. склерозом. Стенка сосудов утолщается, просвет сужается. В мелких сосудах и артериолах клетки вырабатывают полупрозрачные массы, напоминающие гиалиновый хрящ. Со временем эти массы становятся более плотными, утолщают стенки и суживают просвет.

Процессы роста стенок сосудов можно описать при помощи математических моделей объёмного или поверхностного роста. Остановимся только на процессах поверхностного роста тонкостенных сосудов. Воспользуемся идеями механики растущих тел [1-5]. Основными переменными краевой задачи для растущего тела выберем тензор скоростей напряжений, тензор деформации скоростей и вектор скорости перемещения. На поверхности роста поставим специфическое краевое условие, зависящее от тензора кривизны поверхности роста и натяга приращиваемых элементов [6,7]. Задачи деформирования в условиях сферической и цилиндрической симметрии рассматривались в [8-15].

Рассматриваются некоторые модельные задачи для упругого тонкостенного поверхностно растущего цилиндра. Условие тонкостенности позволяет изучить конечные перемещения точек цилиндра при условии малых деформаций. Это, в частности, даёт возможность решить задачу с точными краевыми условиями на движущейся поверхности. Обсуждаются особенности поведения основных характеристик, зависящие от давления на внутреннюю поверхность цилиндра, натяга притекающих новых элементов и скорости притока этих элементов.

Работа выполнена по теме государственного задания (номер госрегистрации АААА-А17-117021310381-8) и частично в рамках проектов, поддержанных Российским фондом фундаментальных исследований (проект №№ 17-01-00712-а, 18-01-00844, 17-51-45054).

ЛИТЕРАТУРА

1. Манжиров А.В., Черныш В.А. Контактная задача дискретного наращивания неоднородного вязкоупругого стареющего цилиндра системой жестких втулок // ПММ. 1991. Т.55. Вып.6. С.1018-1025
2. Манжиров А.В., Паршин Д.А. Моделирование процессов наращивания цилиндрических тел на вращающейся оправке с учетом действия центробежных сил // Изв. РАН. МТТ. 2006. № 6. С.149-166.
3. Manzhirov A.V. «Fundamentals of mechanical design and analysis for AM fabricated parts». Procedia Manufacturing. 2016. Vol. 7. PP. 59-65
4. Manzhirov A.V. Advances in the theory of surface growth withapplications to additive manufacturing technologies // Procedia Engineering. 2017. Vol. 173.PP. 11–1

5. Manzhirov A.V. «Mechanical analysis of an AM fabricated viscoelastic shaft under torsion by rigid disks». in Lecture Notes in Engineering and Computer Science: Proceedings of the World Congress on Engineering 2017, WCE 2017, 5–7 July 2017, London, U.K., Vol. II. London: IAENG, 2017. PP. 856-860
6. Stadnik N. and Dats E. Continuum mathematical modelling of pathological growth of blood vessels // Journal of Physics: Conference Series, 2018. Vol. 991. PP. 012075
7. Stadnik N.E., Murashkin E.V., Dats E.P. «Residual Stresses Computing in Blood Vessels in virtue of Pathological Growth Processes». in Lecture Notes in Engineering and Computer Science: Proceedings of The World Congress on Engineering, 2018, 4-6 July, 2018, London, U.K., PP. 618-622
8. Burenin A.A., Dats E.P., and Murashkin E.V., Formation of the residual stress field under local thermal action // Mechanics of Solids, 2014. Vol. 49, No. 2, PP. 218–224
9. Dats E., Murashkin E., and Stadnik N., On a multi-physics modelling framework for thermo-elastic-plastic materials processing // Procedia Manufacturing, 2017. Vol. 7, PP. 427–434
10. Dats E., Murashkin E., and Stadnik N., On heating of thin circular elastic-plastic plate with the yield stress depending on temperature // Procedia Engineering, 2017. Vol. 173, PP. 891–896
11. Dats E.P., Murashkin E.V., and Gupta N.K., On yield criterion choice in thermoelastoplastic problems // Procedia IUTAM, 2017. Vol.23, PP.187–200
12. Dats E., Murashkin E., and Stadnik N., Piecewise linear yield criteria in the problems of thermoplasticity // IAENG International Journal of Applied Mathematics, 2017. Vol. 47, No. 3, PP. 261–264
13. Murashkin E. and Dats E., Thermoelastoplastic deformation of a multilayer ball // Mechanics of Solids, 2017. Vol. 52, No. 5, PP. 495–500
14. Murashkin E., Dats E., and Klindukhov V., Numerical analysis of the elastic-plastic boundaries in the thermal stresses theory frameworks // Journal of Physics: Conference Series, 2017. Vol. 937, No. 1, PP. 012030
15. Murashkin E. and Dats E., Coupled thermal stresses analysis in the composite elastic-plastic cylinder // Journal of Physics: Conference Series, 2018. Vol. 991, No. 1, PP. 012060

Сведения об авторе:

Никита Эдуардович Стадник – младший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

E-mail: nik-122@mail.ru

ОБ ОДНОЙ ТРЁХМЕРНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПО МОДЕЛИРОВАНИЮ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЙ

Тагворян В.В.

Рассмотрена пространственная динамическая задача теории упругости для слоистого пакета из N ортотропных пластин, моделирующий поведение Литосферных плит Земли и отдельных блоков земной коры во время землетрясений. Изучен случай, когда измерительные приборы, при помощи которых измеряются значения компонент вектора перемещения, помещены на поверхности контакта между вторым и третьим слоями. Найдены асимптотические решения пространственной задачи теории упругости, согласно данных измерительных приборов, которые позволяют проследить процесс землетрясений. Найдено асимптотическое решение внутренней задачи. Подчеркнут случай, когда решение становится математически точным. Приведён иллюстрационный пример.

1. Исследования по прогнозу землетрясений показали, что сильные землетрясения являются результатом тектонических движений Литосферных плит Земли (≈95% землетрясений) [1-3]. Процесс подготовки землетрясений охватывает два основных типа тектонических движений: медленные (вековые) и быстрые (скачкообразные). Быстротечные (скачкообразные) движения (форшок, землетрясение, афтершок) являются динамическими и для их описания необходимо решать соответствующую динамическую задачу теории упругости для слоистого пакета. Граничные условия для этой задачи, как правило, задаются лишь на лицевой поверхности пакета и задача является неклассической. Асимптотический метод решения сингулярно возмущённых дифференциальных уравнений [4] позволил решить эту проблему.

Однако, на данные, которые взяты от измерительных средств (наклономеры, деформографы и др.) могут повлиять атмосферные и другие внешние воздействия. Чтобы исключить подобное, соответствующие измерительные средства начали прилагать во внутрь, на некотором расстоянии от лицевой поверхности пакета.

Неклассическая квазистатическая задача для однослойных и многослойных пластин с учётом также влияния изменения температурного поля, когда компоненты вектора перемещения заданы на лицевой поверхности пакета, решена в [5,6]. Та же задача решена для слоистого пакета, когда данные измерений сняты с поверхности контакта между слоями с номерами k и (k+1)[7]. Неклассическая динамическая задача для многослойных пластин, когда компоненты вектора перемещения заданы на лицевой поверхности пакета, решена в [8].

В данной работе решена динамическая задача для многослойного пакета, когда значения компонент вектора перемещения сняты с поверхности контакта между вторым и третьим слоями, как данные наклономеров и других измерительных средств. Показано, что если входящие в граничные условия функции являются многочленами от тангенциальных координат, итерационный процесс обрывается и получается математически точное решение во внутренней задаче асимптотического подхода. В качестве иллюстрации приведено математически точное решение для пакета из четырёх ортотропных пластин.

Основные уравнения и постановка краевой задачи.

Рассмотрим слоистый пакет из N ортотропных пластин, занимающий область $D=\{(x,y,z):$ $0\le x\le a,\ 0\le y\le b,\ 0\le z\le h,\ h=h_1+h_2+...+h_N,\ \min(a,b)=l, h<<l\}$, где $h_n\ \left(1\le n\le N\right)$ – толщины пластин (Рис. 1).

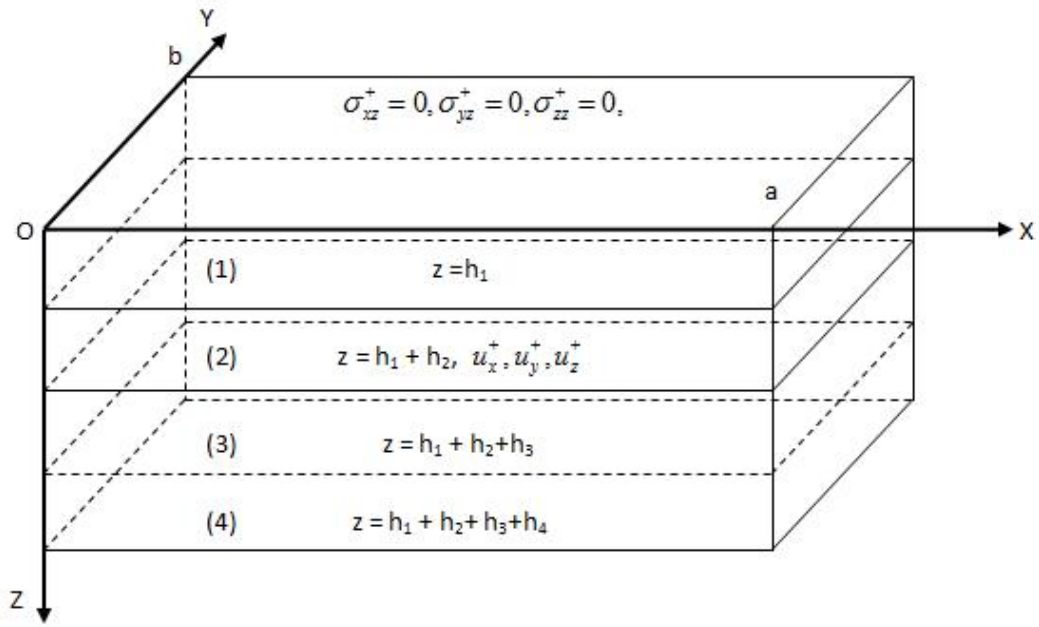


Рис 1. Слоистый пакет из ортотропных пластин

Требуется найти для пакета решение уравнений движения и соотношений упругости Гука при граничных условиях при z = 0 (лицевая поверхность свободна):

$$\sigma_{jz}^{(1)}\left(x,y,0,t\right)=0,\quad j=x,y,z, \tag{1.1}$$

заданы значения перемещений точек поверхности контакта между вторым и третьим слоями как данные наклономеров и других измерительных средств:

$$u^{(2)}\left(x,y,\mathrm{H}_2,t\right)=u^{(+)}\left(x,y\right)\exp\left(i\Omega t\right),\ \left(u,v,w\right) \tag{1.2}$$

и при условиях полного контакта между всеми слоями, которые для произвольного (k)-ого слоя, записываются:

$$\sigma_{jz}^{(k)}\left(z=H_k\right)=\sigma_{jz}^{(k+1)}\left(z=H_k\right),\qquad j=x,y,z,\qquad H_k=\sum_{j=1}^{k}h_j,\quad k=1,2,...,N-1$$

$$u^{(k)}\left(z=H_k\right)=u^{(k+1)}\left(z=H_k\right),\qquad \left(u,v,w\right) \tag{1.3}$$

где Ω – частота колебаний точек поверхности контакта между вторым и третьим слоями пакета, которая фиксируется наклономерами, сейсмостанциями и GPS. Отметим также, что постоянные упругости, толщины h_k и плотности $\rho_к$ слоёв считаются известными.

Изложенным в [8] методом можно найти все искомые величины для пластинчатого пакета из N ортотропных пластин. Подчинив полученное в [8] общее решение во внутренней задаче условиям (1.1)-(1.3), найдём окончательное решение. Это решение, как правило, не будет удовлетворять граничным условиям на боковой поверхности пакета, поэтому необходимо иметь решение для пограничного слоя, которое при удалении от боковой поверхности во внутрь пакета убывает экспоненциально. Поскольку тангенциальные размеры Литосферных плит значительно большие по сравнению с их толщиной, обычно этим решением пренебрегают. При необходимости решение для пограничного слоя можно построить изложенным в [4] способом.

О математически точных решениях.

Можно показать, что если входящие в граничные условия (1.2) функции являются многочленами от тангенциальных координат, то итерационный процесс обрывается и получает-

ся математически точное решение во внутренней задаче. В качестве иллюстрации приведём математически точное решение для четырёхслойного пакета из ортотропных пластин, когда на поверхности контакта между вторым и третьим слоями заданы компоненты вектора перемещения как данные измерений наклономеров и других измерительных средств, а входящие в граничные условия (1.2) функции постоянные.

Граничными условиями задачи будут:

$$\sigma_{jz}\left(x,y,0,t\right)=0,\qquad j=x,y,z\quad \text{при}\quad \zeta=0, \tag{1.4}$$

$$\begin{cases}\sigma_{jz}^{(2)}\left(\xi,\eta,\zeta_1\right)=\sigma_{jz}^{(1)}\left(\xi,\eta,\zeta_1\right),\ j=x,y,z\\ u^{(2)}\left(\xi,\eta,\zeta_1\right)=u^{(1)}\left(\xi,\eta,\zeta_1\right),\left(u,v,w\right)\end{cases}\quad \text{при}\quad \zeta=\zeta_1=\frac{h_1}{h}. \tag{1.5}$$

$$\begin{cases}\sigma_{jz}^{(3)}\left(\xi,\eta,\zeta_2\right)=\sigma_{jz}^{(2)}\left(\xi,\eta,\zeta_2\right),\ j=x,y,z,\\ u^{(2)}\left(\xi,\eta,\zeta_2\right)=u^{(3)}\left(\xi,\eta,\zeta_2\right)=u^{+}=\text{const},\left(u,v,w\right)\end{cases}\quad \text{при}\quad \zeta=\zeta_2=\frac{h_1+h_2}{h}, \tag{1.6}$$

$$\begin{cases}\sigma_{jz}^{(4)}\left(\xi,\eta,\zeta_3\right)=\sigma_{jz}^{(3)}\left(\xi,\eta,\zeta_3\right),\ j=x,y,z\\ u^{(4)}\left(\xi,\eta,\zeta_3\right)=u^{(3)}\left(\xi,\eta,\zeta_3\right),\left(u,v,w\right)\end{cases}\quad \text{при}\quad \zeta=\zeta_3=\frac{h_1+h_2+h_3}{h}. \tag{1.7}$$

Итерация обрывается на исходном приближении. В результате имеем:

величины первого слоя $\left(0\le\zeta\le\zeta_1\right)$:

$$u^{(1)}=u^{+}\frac{\cos\Omega_*\sqrt{a_{55}^{(1)}\rho_1}\zeta}{\sqrt{\frac{a_{55}^{(2)}\rho_1}{a_{55}^{(1)}\rho_2}}D_u^{-}\sin\Omega_*\sqrt{a_{55}^{(1)}\rho_1}\zeta_1+D_u^{+}\cos\Omega_*\sqrt{a_{55}^{(1)}\rho_1}\zeta_1}\exp\left(i\Omega t\right),\quad \left(\mathrm{u,v};a_{55},a_{44}\right)$$

$$w^{(1)}=w^{+}\frac{\cos\Omega_*\sqrt{\frac{\rho_1}{A_{11}^{(1)}}}\zeta}{\sqrt{\frac{A_{11}^{(1)}\rho_1}{A_{11}^{(2)}\rho_2}}D_w^{-}\sin\Omega_*\sqrt{\frac{\rho_1}{A_{11}^{(1)}}}\zeta_1+D_w^{+}\cos\Omega_*\sqrt{\frac{\rho_1}{A_{11}^{(1)}}}\zeta_1}\exp\left(i\Omega t\right), \tag{1.8}$$

$$\sigma_{13}^{(1)}=-\Omega\sqrt{\frac{\rho_1}{a_{55}^{(1)}}}u^{+}\frac{\sin\Omega_*\sqrt{a_{55}^{(1)}\rho_1}\zeta}{\sqrt{\frac{a_{55}^{(2)}\rho_1}{a_{55}^{(1)}\rho_2}}D_u^{-}\sin\Omega_*\sqrt{a_{55}^{(1)}\rho_1}\zeta_1+D_u^{+}\cos\Omega_*\sqrt{a_{55}^{(1)}\rho_1}\zeta_1}\exp\left(i\Omega t\right),\ \left(\mathrm{u,v};a_{55},a_{44}\right)$$

$$\sigma_{33}^{(1)}=-\Omega\sqrt{A_{11}^{(1)}\rho_1}w^{+}\frac{\sin\Omega_*\sqrt{\frac{\rho_1}{A_{11}^{(1)}}}\zeta}{\sqrt{\frac{A_{11}^{(1)}\rho_1}{A_{11}^{(2)}\rho_2}}D_w^{-}\sin\Omega_*\sqrt{\frac{\rho_1}{A_{11}^{(1)}}}\zeta_1+D_w^{+}\cos\Omega_*\sqrt{\frac{\rho_1}{A_{11}^{(1)}}}\zeta_1}\exp\left(i\Omega t\right),$$

величины второго слоя $\left(\zeta_1\le\zeta\le\zeta_2\right)$:

$$u^{(2)}=\left[\left(u^{+}\frac{\sin\Omega_{*}\sqrt{a_{55}^{(2)}\rho_{2}}\zeta_{1}}{D_{u}^{+}}-C_{u2}^{(1,0)}\sqrt{\frac{a_{55}^{(2)}\rho_{1}}{a_{55}^{(1)}\rho_{2}}}\frac{\sin\Omega_{*}\sqrt{a_{55}^{(1)}\rho_{1}}\zeta_{1}\cos\Omega_{*}\sqrt{a_{55}^{(2)}\rho_{2}}\zeta_{2}}{D_{u}^{+}}\right)\sin\Omega_{*}\sqrt{a_{55}^{(2)}\rho_{2}}\zeta+\right.$$

$$\left.+\left(u^{+}\frac{\cos\Omega_{*}\sqrt{a_{55}^{(2)}\rho_{2}}\zeta_{1}}{D_{u}^{+}}+C_{u2}^{(1,0)}\sqrt{\frac{a_{55}^{(2)}\rho_{1}}{a_{55}^{(1)}\rho_{2}}}\frac{\sin\Omega_{*}\sqrt{a_{55}^{(1)}\rho_{1}}\zeta_{1}\sin\Omega_{*}\sqrt{a_{55}^{(2)}\rho_{2}}\zeta_{2}}{D_{u}^{+}}\right)\cos\Omega_{*}\sqrt{a_{55}^{(2)}\rho_{2}}\zeta\right]\exp\left(i\Omega t\right),$$

$$\left(\mathrm{u},\mathrm{v};a_{55},a_{44}\right) \qquad (1.9)$$

$$w^{(2)}=\left[\left(w^{+}\frac{\sin\Omega_{*}\sqrt{\frac{\rho_{2}}{A_{11}^{(2)}}}\zeta_{1}}{D_{w}^{+}}-C_{w2}^{(1,0)}\sqrt{\frac{A_{11}^{(1)}\rho_{1}}{A_{11}^{(2)}\rho_{2}}}\frac{\sin\Omega_{*}\sqrt{\frac{\rho_{1}}{A_{11}^{(1)}}}\zeta_{1}\cos\Omega_{*}\sqrt{\frac{\rho_{2}}{A_{11}^{(2)}}}\zeta_{2}}{D_{w}^{+}}\right)\sin\Omega_{*}\sqrt{\frac{\rho_{2}}{A_{11}^{(2)}}}\zeta+\right.$$

$$\left.+\left(w^{+}\frac{\cos\Omega_{*}\sqrt{\frac{\rho_{2}}{A_{11}^{(2)}}}\zeta_{1}}{D_{w}^{+}}+C_{w2}^{(1,0)}\sqrt{\frac{A_{11}^{(1)}\rho_{1}}{A_{11}^{(2)}\rho_{2}}}\frac{\sin\Omega_{*}\sqrt{\frac{\rho_{1}}{A_{11}^{(1)}}}\zeta_{1}\sin\Omega_{*}\sqrt{\frac{\rho_{2}}{A_{11}^{(2)}}}\zeta_{2}}{D_{w}^{+}}\right)\cos\Omega_{*}\sqrt{\frac{\rho_{2}}{A_{11}^{(2)}}}\zeta\right]\exp\left(i\Omega t\right),$$

$$\sigma_{13}^{(2)}=\left[\Omega\sqrt{\frac{\rho_{2}}{a_{55}^{(2)}}}\left(u^{+}\frac{\sin\Omega_{*}\sqrt{a_{55}^{(2)}\rho_{2}}\zeta_{1}}{D_{u}^{+}}-C_{u2}^{(1,0)}\sqrt{\frac{a_{55}^{(2)}\rho_{1}}{a_{55}^{(1)}\rho_{2}}}\frac{\sin\Omega_{*}\sqrt{a_{55}^{(1)}\rho_{1}}\zeta_{1}\cos\Omega_{*}\sqrt{a_{55}^{(2)}\rho_{2}}\zeta_{2}}{D_{u}^{+}}\right)\cos\Omega_{*}\sqrt{a_{55}^{(2)}\rho_{2}}\zeta-\right.$$

$$\left.-\Omega\sqrt{\frac{\rho_{2}}{a_{55}^{(2)}}}\left(u^{+}\frac{\cos\Omega_{*}\sqrt{a_{55}^{(2)}\rho_{2}}\zeta_{1}}{D_{u}^{+}}+C_{u2}^{(1,0)}\sqrt{\frac{a_{55}^{(2)}\rho_{1}}{a_{55}^{(1)}\rho_{2}}}\frac{\sin\Omega_{*}\sqrt{a_{55}^{(1)}\rho_{1}}\zeta_{1}\sin\Omega_{*}\sqrt{a_{55}^{(2)}\rho_{2}}\zeta_{2}}{D_{u}^{+}}\right)\sin\Omega_{*}\sqrt{a_{55}^{(2)}\rho_{2}}\zeta\right]\exp\left(i\Omega t\right),$$

$$\left(\mathrm{u},\mathrm{v};a_{55},a_{44}\right)$$

$$\sigma_{33}^{(2)}=\left[\Omega\sqrt{A_{11}^{(2)}\rho_{2}}\left(w^{+}\frac{\sin\Omega_{*}\sqrt{\frac{\rho_{2}}{A_{11}^{(2)}}}\zeta_{1}}{D_{w}^{+}}-C_{w2}^{(1,0)}\sqrt{\frac{A_{11}^{(1)}\rho_{1}}{A_{11}^{(2)}\rho_{2}}}\frac{\sin\Omega_{*}\sqrt{\frac{\rho_{1}}{A_{11}^{(1)}}}\zeta_{1}\cos\Omega_{*}\sqrt{\frac{\rho_{2}}{A_{11}^{(2)}}}\zeta_{2}}{D_{w}^{+}}\right)\cos\Omega_{*}\sqrt{\frac{\rho_{2}}{A_{11}^{(2)}}}\zeta-\right.$$

$$\left.-\Omega\sqrt{A_{11}^{(2)}\rho_{2}}\left(w^{+}\frac{\cos\Omega_{*}\sqrt{\frac{\rho_{2}}{A_{11}^{(2)}}}\zeta_{1}}{D_{w}^{+}}+C_{w2}^{(1,0)}\sqrt{\frac{A_{11}^{(1)}\rho_{1}}{A_{11}^{(2)}\rho_{2}}}\frac{\sin\Omega_{*}\sqrt{\frac{\rho_{1}}{A_{11}^{(1)}}}\zeta_{1}\sin\Omega_{*}\sqrt{\frac{\rho_{2}}{A_{11}^{(2)}}}\zeta_{2}}{D_{w}^{+}}\right)\sin\Omega_{*}\sqrt{\frac{\rho_{2}}{A_{11}^{(2)}}}\zeta\right]\exp\left(i\Omega t\right),$$

где $C_{u2}^{(1,0)},C_{v2}^{(1,0)},C_{w2}^{(1,0)}$ имеют вид:

$$\mathrm{C}_{u2}^{(1,0)}=\frac{u^{+}}{\sqrt{\frac{a_{55}^{(2)}\rho_{1}}{a_{55}^{(1)}\rho_{2}}}D_{u}^{-}\sin\Omega_{*}\sqrt{a_{55}^{(1)}\rho_{1}}\zeta_{1}+D_{u}^{+}\cos\Omega_{*}\sqrt{a_{55}^{(1)}\rho_{1}}\zeta_{1}},\qquad\left(\mathrm{u},\mathrm{v},\mathrm{w};a_{55},a_{44},\frac{1}{A_{11}}\right)\qquad(1.10)$$

и приняты следующие обозначения для $D_{u}^{+},D_{v}^{+},D_{w}^{+},D_{u}^{-},D_{v}^{-},D_{w}^{-}$:

$$D_{u}^{+}=\sin\Omega_{*}\sqrt{a_{55}^{(2)}\rho_{2}}\zeta_{1}\sin\Omega_{*}\sqrt{a_{55}^{(2)}\rho_{2}}\zeta_{2}+\cos\Omega_{*}\sqrt{a_{55}^{(2)}\rho_{2}}\zeta_{1}\cos\Omega_{*}\sqrt{a_{55}^{(2)}\rho_{2}}\zeta_{2},$$

$$\left(\mathrm{u},\mathrm{v},\mathrm{w};a_{55},a_{44},\frac{1}{A_{11}}\right)$$

$$D_u^- = \sin\Omega_* \sqrt{a_{55}^{(2)}\rho_2}\,\zeta_1 \cos\Omega_* \sqrt{a_{55}^{(2)}\rho_2}\,\zeta_2 - \cos\Omega_* \sqrt{a_{55}^{(2)}\rho_2}\,\zeta_1 \sin\Omega_* \sqrt{a_{55}^{(2)}\rho_2}\,\zeta_2,$$

$$\left(\mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w}; a_{55}, a_{44}, \frac{1}{A_{11}}\right)$$

Удовлетворив граничным условиям (1.6) и (1.7), легко можно найти все искомые величины для последних двух слоёв.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rikitake T. Earthquake prediction. – Amsterdam: Elsevier, 1976. - 357 p.
2. Касахара К. Механика землетрясений. – М.: Мир, 1985. – 264 с.
3. Ле Пишон К., Франшто Ж., Бонин Ж. Тектоника плит. – М.: Мир, 1977. – 288 с.
4. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, Физматлит, 1997. С.414 // Aghalovyan L.A. Asymptotic theory of anisotropic plates and shells. – Singapore-London: World Scientific Publishing, 2015. – 376 p.
5. Aghalovyan L.A. On one class of three-dimensional problems of elasticity theory for plates.//Proceedings of A.Razmadze Mathematical Institute of Georgia. 2011.Vol.155. p. 3-10.
6. Aghalovyan L.A., Aghalovyan M.L. Monitoring of stress-strain state of plate-like packet of base-foundation constructions on the base of the data of seismic stations and GPS systems.//Proceedings of the 5th European Conference on Structural Control – EACS 2012, Genoa, Italy, 18-20 June 2012. Paper N # 069. p. 1-8.
7. Агаловян Л.А., Тагворян В.В. Об одной задаче сейсмологии для слоистых пластин. Проблемы механики деформируемого твёрдого тела. Ереван: Изд. «Гитутюн» НАН РА. 2017. С. 24-35.
8. Агаловян Л.А., Агаловян М.Л. О динамическом поведении литосферных плит Земли на основе данных сейсмостанций и GPS систем. Актуальные проблемы механики сплошной среды. //Труды Меж. Конф., посв. 100-летию академика НАН РА Н.Х. Арутюняна. 08-12 октября 2012. Цахкадзор. Армения. Ереван. 2012. Т.1. С.42-46.

Сведения об авторе:

Тагворян Варужан Варданович – аспирант Института механики НАН РА,
(374 10) 47 10 17, (374 93) 80 55 40. **E-mail:** varuzh1993@gmail.com

РАЗВИТИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МИКРОПОЛЯРНОГО УПРУГОГО ТОНКОГО СТЕРЖНЯ С КРУГОВОЙ ОСЬЮ

Хачатрян М.В.

Математическая модель деформации микрополярных упругих тонких стержней с круговой осью с независимыми полями перемещений и вращений построена в работе [1]. В данной работе на основе этой модели изучаются конкретные задачи о деформации микрополярного тонкого стержня с круговой осью, когда один конец жёстко защемлён, а другой конец – свободный: а) на стержень действует равномерно распределённая нормальная нагрузка, б) на свободном конце приложена вертикальная сосредоточенная сила. Для решения поставленных задач развивается численный метод конечных элементов. Выводятся матрица жёсткости и вектор эквивалентных внешних усилий узловых сил и моментов. Приведён анализ на основе полученных численных результатов.

1. Краевые задачи микрополярного упругого тонкого стержня с круговой осью.

Основная система прикладной теории плоского изгиба микрополярного упругого тонкого стержня с круговой осью выражается так [1]:

уравнения равновесия

$$\frac{1}{r_0}N-\frac{1}{r_0}\frac{dQ_1}{d\varphi}=2q,\quad \frac{1}{r_0}Q_1+\frac{1}{r_0}\frac{dN}{d\varphi}=-2q_1,$$
$$Q_2-\frac{1}{r_0}\frac{dM_{11}}{d\varphi}=2hq_2,\quad Q_2-Q_1-\frac{1}{r_0}\frac{dL_{13}}{d\varphi}=-2m. \tag{1.1}$$

соотношения упругости

$$N=2Eh\Gamma_{11},\ Q_1=2h(\mu+\alpha)\Gamma_{12}+2h(\mu-\alpha)\Gamma_{21},\ Q_2=2h(\mu+\alpha)\Gamma_{21}+2h(\mu-\alpha)\Gamma_{12},$$
$$M_{11}=\frac{2Eh^3}{3}K_{11},\ L_{13}=2Bhk_{13}. \tag{1.2}$$

геометрические соотношения

$$\Gamma_{11}=\frac{1}{r_0}\frac{du}{d\varphi}+\frac{1}{r_0}w,\quad \Gamma_{12}=\frac{1}{r_0}\frac{dw}{d\varphi}-\frac{1}{r_0}u-\Omega_3,\quad \Gamma_{21}=\psi+\Omega_3,$$
$$K_{11}=\frac{1}{r_0}\frac{d\psi}{d\varphi},\quad k_{13}=\frac{1}{r_0}\frac{d\Omega_3}{d\varphi}. \tag{1.3}$$

Здесь E и μ – классические модули упругости и сдвига, а α и B – новые упругие константы для микрополярного материала стержня; об остальных обозначениях см. [1].

Общий вид функционала потенциальной энергии деформации при плоском изгибе упругого стержня с круговой осью выражается так:

$$U=\int_0^a\left(W_0-2hq_2\psi-2qw-2q_1u-2m\Omega_3\right)ds-$$
$$-\left((Q_1w+Nu+M_{11}\psi+L_{13}\Omega_3)\big|_{s=a}-(Q_1w+Nu+M_{11}\psi+L_{13}\Omega_3)\big|_{s=0}\right), \tag{1.4}$$

где

$$W_0=Eh\Gamma_{11}^2+E\frac{h^3}{3}K_{11}^2+h(\mu+\alpha)(\Gamma_{12}^2+\Gamma_{21}^2)+2h(\mu-\alpha)\Gamma_{12}\Gamma_{21}+Bhk_{13}^2, \tag{1.5}$$

W_0 – линейная плотность потенциальной энергии деформации при плоском изгибе.

Рассмотрим задачу а): $q_1=0,\ q_2=0,\ m=0,\ q=\text{const}\neq 0$ **.**

Подставляя (1.2) в (1.1), имея в виду (1.3), из уравнений равновесий будем иметь:

$$\begin{cases} E\dfrac{d^2u}{ds^2}+\dfrac{1}{r_0}(E+\mu+\alpha)\dfrac{dw}{ds}-\dfrac{1}{r_0^{\,2}}(\mu+\alpha)u-\dfrac{1}{r_0}2\alpha\Omega_3+\dfrac{1}{r_0}(\mu-\alpha)\psi=0 \\ \dfrac{Eh^2}{3}\dfrac{d^2\psi}{ds^2}-(\mu+\alpha)\psi-2\alpha\Omega_3-(\mu-\alpha)\dfrac{dw}{ds}+\dfrac{1}{r_0}(\mu-\alpha)u=0 \\ (\mu+\alpha)\dfrac{d^2w}{ds^2}-\dfrac{1}{r_0}(E+\mu+\alpha)\dfrac{du}{ds}-\dfrac{1}{r_0^{\,2}}Ew+(\mu-\alpha)\dfrac{d\psi}{ds}-2\alpha\dfrac{d\Omega_3}{ds}=-\dfrac{q}{h} \\ \alpha\dfrac{dw}{ds}-\dfrac{1}{r_0}\alpha u-2\alpha\Omega_3-\alpha\psi+\dfrac{B}{2}\dfrac{d^2\Omega_3}{ds^2}=0 \end{cases} \tag{1.6}$$

Для граничных условий задачи а) имеем:

$$\begin{aligned} &w=0,\ u=0,\ \psi=0,\ \Omega_3=0 \quad \text{при } s=0; \\ &Q_1=0,\ N=0,\ M_{11}=0,\ L_{13}=0 \quad \text{при } s=a. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Решение систем уравнений (1.6) можем привести к решению дифференциального уравнения относительно углового поворота ψ. Для этого, из второго уравнения равновесия $(1.6)_2$ определим функцию u:

$$u=-\frac{1}{\mu-\alpha}\frac{Eh^2r_0}{3}\frac{d^2\psi}{ds^2}+\frac{\mu+\alpha}{\mu-\alpha}r_0\psi+\frac{2\alpha}{\mu-\alpha}r_0\Omega_3+r_0\frac{dw}{ds}. \tag{1.8}$$

Подставим (1.8) в уравнения $(1.6)_1$, $(1.6)_3$ и $(1.6)_4$. Далее определяя производное от $(1.6)_3$ и суммируя с $(1.6)_1$, получим:

$$\begin{cases} \dfrac{Eh^2r_0^{\,2}}{3}\dfrac{\mu+\alpha}{\mu-\alpha}\dfrac{d^4\psi}{ds^4}+\dfrac{Eh^2(\mu+\alpha)-12\alpha\mu r_0^{\,2}}{3(\mu-\alpha)}\dfrac{d^2\psi}{ds^2}-\dfrac{4\alpha\mu r_0^{\,2}}{\mu-\alpha}\dfrac{d^2\Omega_3}{ds^2}- \\ -\dfrac{4\alpha\mu}{\mu-\alpha}\psi-\dfrac{4\alpha\mu}{\mu-\alpha}\Omega_3=0 \\ -\dfrac{2Eh^2}{3}\dfrac{\alpha}{\mu-\alpha}\dfrac{d^2\psi}{ds^2}+\dfrac{4\alpha\mu}{\mu-\alpha}\psi+\dfrac{4\alpha\mu}{\mu-\alpha}\Omega_3-B\dfrac{d^2\Omega_3}{ds^2}=0 \end{cases} \tag{1.9}$$

Суммируя уравнения системы (1.9), получим связь между ψ и Ω_3:

$$\frac{d^2\Omega_3}{ds^2}=\frac{Eh^2r_0^{\,2}(\mu+\alpha)}{3\left(4\alpha\mu r_0^{\,2}+B(\mu-\alpha)\right)}\frac{d^4\psi}{ds^4}+\frac{Eh^2(\mu-\alpha)-12\alpha\mu r_0^{\,2}}{3\left(4\alpha\mu r_0^{\,2}+B(\mu-\alpha)\right)}\frac{d^2\psi}{ds^2}. \tag{1.10}$$

Из второго уравнения $(1.9)_2$, имея в виду (1.10), приходим относительно ψ к следующему обыкновенному линейному однородному дифференциальному уравнению шестого порядка:

$$\frac{d^6\psi}{ds^6}+\frac{4\alpha\mu r_0^{\,2}\left(Eh^2+3B\right)-BEh^2(\mu+\alpha)}{r_0^{\,2}BEh^2(\mu+\alpha)}\frac{d^4\psi}{ds^4}-\frac{4\alpha\mu\left(Eh^2+3B\right)}{r_0^{\,2}BEh^2(\mu+\alpha)}\frac{d^2\psi}{ds^2}=0 \tag{1.11}$$

Общее решение уравнения (1.11) будет выражаться так:

$$\psi=C_1+C_2s+C_3\sin\beta s+C_4\cos\beta s+C_5e^{k_5s}+C_6e^{k_6s}, \tag{1.12}$$

где $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ – постоянные интегрирования.

Подставляя (1.12) в (1.10), получим выражения для Ω_3:

$$\Omega_3=A\left(-C_3\sin\beta s-C_4\cos\beta s\right)+\frac{Eh^2}{3B}\left(C_5e^{k_5s}+C_6e^{k_6s}\right)+C_7^{\,*}s+C_8^{\,*}. \tag{1.13}$$

Подставляя выражения (1.12) и (1.13) в $(1.9)_1$, находим связь между коэффициентами: $C_7^{\,*}=-C_2$, $C_8^{\,*}=-C_1$ и получим окончательно выражения для Ω_3:

$$\Omega_3=A\left(-C_3\sin\beta s-C_4\cos\beta s\right)+\frac{Eh^2}{3B}\left(C_5e^{k_5s}+C_6e^{k_6s}\right)-C_2s-C_1. \tag{1.14}$$

Теперь (1.8), (1.12) и (1.14), подставляя в $(1.6)_3$, для w приходим к следующему дифференциальному уравнению второго порядка:

$$E\frac{d^2w}{ds^2}+\frac{1}{r_0^{\,2}}Ew=D_1\beta\left(-C_3\cos\beta s+C_4\sin\beta s\right)+D_2\left(k_5e^{k_5s}+k_6e^{k_6s}\right)-EC_2+\frac{q}{h}. \tag{1.15}$$

Общее решение дифференциального уравнения (1.15) имеет вид:

$$\begin{gathered}w=D_1\left(-C_3\sin\beta s-C_4\cos\beta s\right)s+D_2\left(C_5k_5e^{k_5s}+C_6k_6e^{k_6s}\right)+C_7\cos\beta s+C_8\sin\beta s-\\-r_0^{\,2}C_2+\frac{q}{Eh\beta^2}.\end{gathered} \tag{1.16}$$

Подставляя (1.12), (1.14) и (1.16) в (1.8), получим выражения для u :

$$\begin{gathered}u=D_3\left(C_3\sin\beta s+C_4\cos\beta s\right)+D_1\frac{1}{\beta}\left[\left(C_4\beta s-C_3\right)\sin\beta s-\left(C_3\beta s+C_4\right)\cos\beta s\right]+\\+D_4\left(C_5e^{k_5s}+C_6e^{k_6s}\right)+\frac{1}{\beta}C_1+\frac{1}{\beta}C_2s-C_7\sin\beta s+C_8\cos\beta s,\end{gathered} \tag{1.17}$$

где

$$\begin{gathered}A=\frac{2\alpha\left(Eh^2\beta^2+6\mu\right)}{3\left(4\alpha\mu+B\beta^2\left(\mu-\alpha\right)\right)};\quad \beta=\frac{1}{r_0};\quad k_{5,6}=\pm\sqrt{\frac{4\alpha\mu\left(Eh^2+3B\right)}{BEh^2\left(\mu+\alpha\right)}}\\D_1=\frac{Eh^2}{3}\frac{E+\mu+\alpha}{2E\left(\mu-\alpha\right)}\beta^2+\frac{E\left(\mu+\alpha\right)+4\mu\alpha}{2E\left(\mu-\alpha\right)}-\frac{\alpha\left(E+2\mu\right)}{E\left(\mu-\alpha\right)}A\\D_2=\frac{1}{E\left(k_5^{\,2}+\beta^2\right)}\left(\frac{Eh^2}{3}\frac{E+\mu+\alpha}{\mu-\alpha}k_5^{\,2}-\frac{E\left(\mu+\alpha\right)+4\mu\alpha}{\mu-\alpha}-\frac{2\alpha\left(E+2\mu\right)}{\mu-\alpha}\frac{Eh^2}{3B}\right)\\D_3=\frac{1}{\beta}\left(\frac{Eh^2}{3}\frac{1}{\mu-\alpha}\beta^2+\frac{\mu+\alpha}{\mu-\alpha}-\frac{2\alpha}{\left(\mu-\alpha\right)}A\right)\\D_4=\frac{1}{\beta}\left(-\frac{Eh^2}{3}\frac{1}{\mu-\alpha}k_5^{\,2}+\frac{\mu+\alpha}{\mu-\alpha}+\frac{2\alpha}{\mu-\alpha}\frac{Eh^2}{3B}+D_2k_5^{\,2}\right)\end{gathered} \tag{1.18}$$

Теперь о задаче б). Рассматривается микрополярный упругий стержень**,** когда один конец жёстко защемлён, а другой конец – свободный, на свободном конце приложена вертикальная сосредоточенная сила. В этом случае уравнения равновесия примут вид:

$$\begin{gathered}\frac{1}{r_0}N-\frac{1}{r_0}\frac{dQ_1}{d\varphi}=0,\quad \frac{1}{r_0}Q_1+\frac{1}{r_0}\frac{dN}{d\varphi}=0,\\Q_2-\frac{1}{r_0}\frac{dM_{11}}{d\varphi}=0,\quad Q_2-Q_1-\frac{1}{r_0}\frac{dL_{13}}{d\varphi}=0.\end{gathered} \tag{1.19}$$

Соотношения упругости и геометрические соотношения – те же самые (1.2), (1.3).
Для граничных условий имеем:

$$\begin{gathered}w=0,\ u=0,\ \psi=0,\ \Omega_3=0\ \text{ при } s=0;\\Q_1=P,\ N=0,\ M_{11}=0,\ L_{13}=0\ \text{ при } s=a.\end{gathered} \tag{1.20}$$

Система уравнений (1.19), (1.2), (1.3) аналогичным образом можем привести к уравнению (1.11) относительно ψ . Сохраняются выражения (1.12), (1.14) и (1.17), а для w получим:

$$\begin{gathered}w=D_1\left(-C_3\sin\beta s-C_4\cos\beta s\right)s-D_2\left(C_5k_5e^{k_5s}+C_6k_6e^{k_6s}\right)+C_7\cos\beta s+C_8\sin\beta s-r_0^{\,2}C_2+\\+C_7\cos\beta s+C_8\sin\beta s-r_0^{\,2}C_2.\end{gathered} \tag{1.21}$$

Для определения постоянных интегрирования C_1-C_8 удовлетворим граничным условиям (1.20), в результате получим восемь линейных алгебраических неоднородных уравнений относительно искомых постоянных интегрирования. После решения алгебраической системы

уравнений получим все значения постоянных интегрирования и окончательно получим выражения для искомых основных функций w, u, ψ и Ω_3.

2. Матрица жёсткости конечного элемента упругого стержня с круговой осью. Основными кинематическими параметрами в задаче изгиба микрополярного упругого тонкого стержня с круговой осью являются: прогиб оси стержня $-w(s)$; осевое перемещение $-u(s)$; полный угол поворота нормального элемента $-\psi(s)$, $\Omega_3(s)-$ свободный поворот этого элемента. Распределение принятых основных кинематических переменных вдоль элемента дуги оси стержня будем аппроксимировать полиномами:

$$\begin{aligned} &w(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3, \quad u(s) = b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + b_3 s^3, \\ &\psi(s) = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + c_3 s^3, \quad \Omega_3(s) = d_0 + d_1 s + d_2 s^2 + d_3 s^3, \; s = r_0\varphi \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь a_i, b_i, c_i – коэффициенты, которые выражаются через узловые перемещения и повороты. Узловые перемещения обозначим следующим образом:

$$\begin{aligned} &w(0) = \delta_1, \quad w'(0) = \delta_2, \quad u(0) = \delta_3, \quad u'(0) = \delta_4, \; \psi(0) = \delta_5, \quad \psi'(0) = \delta_6, \\ &\Omega_3(0) = \delta_7, \; \Omega_3'(0) = \delta_8, \; w(a) = \delta_9, w'(a) = \delta_{10}, \; u(a) = \delta_{11}, \quad u'(a) = \delta_{12}, \\ &\psi(a) = \delta_{13}, \; \psi'(a) = \delta_{14}, \; \Omega_3(a) = \delta_{15}, \; \Omega_3'(a) = \delta_{16}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Как видим, данный конечный элемент имеет шестнадцать степеней свободы.

Подставим разложения (2.1) в (2.2), выразим коэффициенты a_i, b_i, c_i, d_i через узловые перемещения и повороты δ_k. Подставив таким образом определенные a_i, b_i, c_i в (2.1), имеем для перемещений и поворотов аппроксимации:

$$\begin{aligned} &w(s) = \sum_{i=1,2,9,10} \delta_i N_i(s), \quad u(s) = \sum_{i=3,4,11,12} \delta_i N_i(s), \\ &\psi(s) = \sum_{i=5,6,13,14} \delta_i N_i(s), \quad \Omega_3(s) = \sum_{i=7,8,15,16} \delta_i N_i(s), \end{aligned} \tag{2.3}$$

где $N_i(s)$ – функции формы элемента, которые имеют вид:

$$\begin{aligned} &N_1 = N_3 = N_5 = N_7 = 1 - \frac{3}{a^2} s^2 + \frac{2}{a^3} s^3, \; N_2 = N_4 = N_6 = N_8 = s - \frac{2}{a} s^2 + \frac{1}{a^2} s^3, \\ &N_9 = N_{11} = N_{13} = N_{15} = \frac{3}{a^2} s^2 - \frac{2}{a^3} s^3, \; N_{10} = N_{12} = N_{14} = N_{16} = -\frac{1}{a} s^2 + \frac{1}{a^2} s^3. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Подставив (2.3) в функционал (1.4), после выполнения интегрирования получим функцию от шестнадцати независимых переменных $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, ..., \delta_{16}$. Минимизация функционала (1.4) приводит к нахождению минимума функции шестнадцати независимых переменных. Вычислив соответствующие частные производные, получим:

$$[K] \cdot \{\delta\} = [P]. \tag{2.5}$$

Здесь K – матрица жёсткости элемента размером 16×16, представляющего собой важнейшее понятие метода конечных элементов; $\{\delta\}^T = \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, ..., \delta_{16}$ – вектор узловых перемещений и поворотов; $[P]$ – вектор усилий в узлах (вектор нагрузки).

В результате, решение системы (2.5) с учётом граничных условии даст величины узловых обобщённых перемещений. Для повышения точности решений, понятно, что необходимо разбить стержень на несколько конечных элементов (приведём также результат по классической теории упругого тонкого стержня при её изгибе). Результат вычислений приведём для случая, когда физические постоянные и геометрические размеры балки имеют значения: $\mu = 7 \cdot 10^{10}\, Па$, $E = 1{,}8 \cdot 10^{11}\, Па$, $P = 1000 H$, $a = 15 \cdot 10^{-2}\, м$, $r_0 = 9{,}6 \cdot 10^{-2}\, м$, $h = 3{,}75 \cdot 10^{-3}\, м$, $\alpha = 7 \cdot 10^{8}\, Па$, $B = 3 \cdot 10^{6}\, H$, $q = 1000 Па$.

Таблица 1. Максимальные прогибы и повороты микрополярного и класического упругого тонкого стержня для задачи а).

Количество элементов	w x10^5 (м)		u x10^6 (м)		ψ x10^4		Ω_3 x10^4
	Микропол.	Классич.	Микропол.	Классич.	Микропол.	Классич.	Микропол.
1	0.2606	0.6819	-1.7738	-4.5126	-0.3246	-0.8748	0.3001
2	0.3152	1.2884	-2.3519	-9.0424	-0.3586	-1.5592	0.3426
4	0.3170	1.3216	-2.3856	-9.3567	-0.3545	-1.5741	0.3428
8	0.3171	1.3224	-2.3869	-9.3648	-0.3539	-1.5731	0.3428
Точное решение	0.3171	1.3224	-2.3869	-9.3651	-0.3538	-1.5729	0.3428

Таблица 2. Максимальные прогибы и повороты микрополярного и класического упругого тонкого стержня для задачи б).

Количество элементов	w x10^4 (м)		u x10^4 (м)		ψ x10^3		Ω_3 x10^3
	Микропол.	Классич.	Микропол.	Классич.	Микропол.	Классич.	Микропол.
1	0.21117	0.5511	-0.13510	-0.35462	-0.27666	-0.7232	0.24964
2	0.25934	1.0619	-0.16349	-0.67038	-0.34262	-1.4107	0.30756
4	0.26088	1.0878	-0.16443	-0.68764	-0.34485	-1.4436	0.30918
8	0.26091	1.0884	-0.16445	-0.68805	-0.34487	-1.4442	0.30921
Точное решение	0.26091	1.0884	-0.16445	-0.68805	-0.34487	-1.4442	0.30921

Таблица 3. Прогибы микрополярного упругого тонкого стержня с круговой осью в зависимости от микрополярного пораметра α.

~	Микрополярная модель w x10^5 (м)		Классическая модель w x10^5 (м)		$w_{\max}^{мик.} / w_{\max}^{кл.}$	
	Задача а)	Задача б)	Задача а)	Задача б)	Задача а)	Задача б)
7×10^5	1.28	1.05	1.32	1.08	0.97	0.97
7×10^6	1.03	0.85	1.32	1.08	0.78	0.78
14×10^6	0.87	0.72	1.32	1.08	0.65	0.66
7×10^7	0.51	0.42	1.32	1.08	0.38	0.38
7×10^8	0.31	0.26	1.32	1.08	0.23	0.24

Как видно из таблиц, при увеличении постоянной упругости α (микрополярной постоянной), жёсткость стержня сильно увеличивается по сравнению с классическим случаем [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Саркисян С.О., Хачатрян М.В. Математическая модель статической деформации микрополярного упругого стержня с круговой осью и метод конечных элементов //Актуальные проблемы прочности. Монография. Витебск. НАН Белоруси. Т.1. Глава 14. С.258-271. 2018.
2. Саркисян С.О., Хачатрян М.В. Классическая модель статики упругих тонких стержней с круговой осью с учетом поперечных сдвигов и метод конечных элементов //В сб.: научных трудов международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды». Цахкадзор, Армения. 2017. С.125-126.

Сведение об авторе:

Хачатрян Мелине – аспирант, Ширакский государственный университет.
(374 94) 61 82 13, **E-mail:** khachatryanmeline@mail.ru

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЁРДОГО ТЕЛА, ИМЕЮЩЕГО НЕПОДВИЖНУЮ ТОЧКУ

Шагинян С.Г., Аветисян Л.М.

В работе рассматриваются задачи устойчивости и стабилизации вращательного движения абсолютно твёрдого тела вокруг неподвижной точки в случае Софьи Ковалевской.

Показано, что тело допускает вращение вокруг главной центральной оси симметрии тела с постоянной угловой скоростью. Принимая, что это движение является невозмущённым движением, составлена система дифференциальных уравнений возмущённого движения и показано, что рассматриваемое движение является неустойчивым.

По направлениям соответствующих обобщённых координат введены управляющие воздействия, проверена полная управляемость линейного приближения полученной управляемой системы. Поставлена и решена задача оптимальной стабилизации рассматриваемого движения.

Построена оптимальная функция Ляпунова, получены оптимальные управляющие воздействия, уравнения оптимальных движений и минимальные значения функционалов, зависящих от угловой скорости невозмущённого движения тела. Для различных значений угловой скорости невозмущённого движения построены графики оптимальных движений.

1. Дифференциальные уравнения движения твёрдого тела. Рассмотрим абсолютное твёрдое тело, вращающееся вокруг неподвижной точки O. Предполагаем, что на тело действует только сила тяжести $\vec{P}$, эллипсоид инерции тела для неподвижной точки есть вытянутый эллипсоид вращения, т.е. $A = B = 2C$, а центр тяжести тела лежит в экваториальной плоскости эллипсоида инерции (случай С.В.Ковалевской) [1].

Для исследования движения тела выбираем основные оси $O\xi\eta\zeta$, связанные с Землей так, чтобы ось $O\zeta$ была направлена по вертикали. Оси подвижной системы $Oxyz$ направляем по главным осям инерции тела. Ось Oz совпадает с осью динамической симметрии, ось Ox проводим через центр тяжести C, тогда ось Oy определяется однозначно. Обозначим радиус-вектор центра тяжести C относительно неподвижной точки O через $\overrightarrow{OC} = \vec{a}(a, 0{,}0)$, а направляющие косинусы вертикали $O\xi$ – относительно подвижных осей – через $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Динамические уравнения Эйлера в этом случае будут [1]:

$$2C\frac{dp}{dt} - Cqr = 0,$$

$$2C\frac{dq}{dt} + Cpr = Pa\gamma_3, \text{ или}$$

$$C\frac{dr}{dt} = -Pa\gamma_2,$$

$$2\frac{dp}{dt} - qr = 0,$$

$$2\frac{dq}{dt} + rp = n\gamma_3, \tag{1}$$

$$\frac{dr}{dt} = -n\gamma_2,$$

где $n = \frac{Pa}{C}$.

Присоединим к системе (1) уравнения Пуассона:

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = r\gamma_2 - q\gamma_3$$

$$\frac{d\gamma_2}{dt} = p\gamma_3 - r\gamma_1 \tag{2}$$

$$\frac{d\gamma_3}{dt} = q\gamma_1 - p\gamma_2$$

Уравнения (1) и (2) представляют систему шести обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с шестью неизвестными $p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

Системы (1) и (2) допускают решение

$$p = \omega = const,\ q = r = 0,\ \gamma_1 = 1,\ \gamma_2 = \gamma_3 = 0, \tag{3}$$

т.е. тело может вращаться около оси Ox с постоянной угловой скоростью ω.

2. Исследование устойчивости движения. Сначала исследуем устойчивость движения (3) тела. Составим уравнения возмущенного движения тела, соответствующие решению (3). Введем следующие обозначения:

$$x_1 = p - \omega, \quad x_2 = q, \quad x_3 = r, \quad x_4 = \gamma_1 - 1, \quad x_5 = \gamma_2, \quad x_6 = \gamma_3. \qquad (4)$$

Тогда систему (1), (2) можно привести к виду:

$$\begin{aligned}
2\frac{d(x_1+\omega)}{dt} - x_2 x_3 &= 0 \\
2\frac{dx_2}{dt} + x_3(x_1+\omega) &= 0 \\
2\frac{dx_3}{dt} &= -n x_5 \\
\frac{d(x_4+1)}{dt} &= x_3 x_5 - x_2 x_6 \\
\frac{dx_5}{dt} &= (x_1+\omega)x_6 - (x_4+1)x_3 \\
\frac{dx_6}{dt} &= (x_4+1)x_2 - (x_1+\omega)x_5
\end{aligned} \qquad (5)$$

Ограничивая только линейным приложением, получим:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= 0 \\
\dot{x}_2 &= -\frac{1}{2}\omega x_3 \\
\dot{x}_3 &= -n x_5 \\
\dot{x}_4 &= 0 \\
\dot{x}_5 &= \omega x_6 - x_3 \\
\dot{x}_6 &= x_2 - \omega x_5
\end{aligned} \qquad (6)$$

Составим характеристическое уравнение системы (6)

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -\frac{1}{2}\omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -\lambda & \omega \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\omega & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \qquad (7)$$

или

$$\lambda^2\left(\lambda^4 + \lambda^2(\omega^2 - n) - \frac{1}{2}n\omega^2\right) = 0. \qquad (8)$$

Для того, чтобы система (6) была устойчивой, необходимо и достаточно, что выполнялись следующие условия:

$$\begin{aligned}
D = (\omega^2 - n)^2 + 2n\omega^2 = \omega^2 + n^2 > 0, \\
\omega^2 - n > 0, \\
-\frac{1}{2}n\omega^2 > 0,
\end{aligned} \qquad (9)$$

но последние условия (9) не выполняются, так как $n > 0$, $\omega^2 > 0$. Следовательно, уравнение (8) имеет корень с положительной действительной частью, что означает, что решение (3) систем (1), (2) неустойчиво [2].

3. Задача оптимальной стабилизации. В системе (6) по направлениям обобщённых координат x_1, x_2 и x_4 присоединим управления так, чтобы движение (3) абсолютного твёрдого тела стало асимптотически устойчивым. Тогда, уравнения движения (6) примут вид:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= u_1 \\
\dot{x}_2 &= -\frac{1}{2}\omega x_3 + u_2 \\
\dot{x}_3 &= -n x_5 \\
\dot{x}_4 &= u_3 \\
\dot{x}_5 &= \omega x_6 - x_3 \\
\dot{x}_6 &= x_2 - \omega x_5
\end{aligned} \qquad (10)$$

Полная управляемость [3] системы (10) легко проверяется и получается, что она вполне управляема.

Сформулируем следующую задачу:

Задача. Требуется определить такие оптимальные управляющие воздействия u_1^o, u_2^o, u_3^o, для которых решение $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \dots, x_6 = 0$ системы (10) стало бы асимптотически устойчивым и минимизируется функционал

$$J[\cdot] = \int_0^\infty \left(\sum_{i=1}^6 x_i^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2\right) dt. \qquad (11)$$

Задачу решаем методом Ляпунова-Беллмана [4,5]. Так как в системе (10) вводятся параметры n и ω, то оптимальная функция Ляпунова $V^0(x_1, x_2, \dots, x_6)$ и оптимальные управляющие воздействия будут функциями от n и ω. Из $n = \frac{Pa}{C}$ видно, что значение n зависит от формы тела. А при движении тела ω может принимать разные значения.

Фиксируя значение параметра n, решена задача оптимальной стабилизации для разных значений n. Для оптимальной функции Ляпунова получено

$$V^0(x_1, x_2, \dots, x_6) = \frac{1}{2}\left(c_{11}x_1^2 + c_{22}x_2^2 + c_{33}x_3^2 + c_{44}x_4^2 + c_{55}x_5^2 + c_{66}x_6^2 + 2c_{23}x_2x_3 + 2c_{25}x_2x_5 + 2c_{26}x_2x_6 + 2c_{35}x_5x_3 + 2c_{36}x_3x_6 + 2c_{56}x_5x_6\right),$$

а для оптимальных управляющих воздействий –

$$u_1^o = -x_1, \quad u_2^o = -(c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + c_{25}x_5 + c_{11}x_6), \quad u_3 = -x_4 \qquad (12).$$

Минимальное значение функционала будет

$$J[\cdot] = \frac{1}{2}\left(c_{11}x_{10}^2 + c_{22}x_{20}^2 + c_{33}x_{30}^2 + c_{44}x_{40}^2 + c_{55}x_{50}^2 + c_{66}x_{60}^2 + 2c_{23}x_{20}x_{30} + 2c_{25}x_{20}x_{50} + 2c_{26}x_{20}x_{60} + 2c_{35}x_{50}x_{30} + 2c_{36}x_{30}x_{60} + 2c_{56}x_{50}x_{60}\right)$$

где $x_{i0} = x_i(0)$, $i = 1, \cdots, 6$, а при $n = 50$,

$$c_{11} = c_{44} = 2,$$

$$c_{22} = 5 \cdot 10^{-7}\omega^6 - 5 \cdot 10^{-5}\omega^5 + 0{,}0019\omega^4 - 0{,}0337\omega^3 + 0{,}2625\omega^2 - 0{,}9003\omega + 25{,}528$$
$$c_{33} = 3 \cdot 10^{-5}\omega^6 - 0{,}0032\omega^5 + 0{,}1599\omega^4 - 4{,}0373\omega^3 + 54{,}298\omega^2 - 375{,}6\omega + 1152{,}7$$
$$c_{55} = 0{,}0012\omega^6 - 0{,}1535\omega^5 + 7{,}7596\omega^4 - 197{,}85\omega^3 + 2683{,}8\omega^2 - 18680\omega + 55996$$
$$c_{66} = 8 \cdot 10^{-5}\omega^6 - 0{,}0088\omega^5 + 0{,}3441\omega^4 - 6{,}0166\omega^3 + 47{,}389\omega^2 - 158{,}57\omega + 934{,}19$$
$$c_{23} = -3 \cdot 10^{-6}\omega^6 + 0{,}0003\omega^5 - 0{,}015\omega^4 + 0{,}3728\omega^3 - 5{,}1356\omega^2 + 40{,}132\omega - 189{,}11$$
$$c_{25} = 10^{-5}\omega^6 - 0{,}0019\omega^5 + 0{,}093\omega^4 - 2{,}3969\omega^3 + 34{,}393\omega^2 - 281{,}85\omega + 1318$$
$$c_{26} = 5 \cdot 10^{-6}\omega^6 - 0{,}0005\omega^5 + 0{,}019\omega^4 - 0{,}2941\omega^3 + 1{,}7179\omega^2 - 2{,}9522\omega + 151{,}95$$
$$c_{35} = -0{,}0002\omega^6 + 0{,}022\omega^5 - 1{,}1077\omega^4 + 28{,}149\omega^3 - 380{,}74\omega^2 + 2646\omega - 8031{,}1$$
$$c_{36} = -2 \cdot 10^{-5}\omega^6 + 0{,}0026\omega^5 - 0{,}1183\omega^4 + 2{,}6507\omega^3 - 32{,}637\omega^2 + 231{,}45\omega - 1022$$
$$c_{56} = 0{,}0001\omega^6 - 0{,}0145\omega^5 + 0{,}6741\omega^4 - 15{,}853\omega^3 + 207{,}61\omega^2 - 1586{,}6\omega + 7077{,}8$$

4. Построение оптимальных решений. Для построения оптимальных решений системы (10) достаточно подставить значения оптимальных управляющих воздействий из (12) в (10) и решить полученную систему. Например, при $n = 1$ с$^{-2}$, $\omega = 10\ c^{-1}$ система принимает вид

$$\dot{x}_1 = -x_1,\ \dot{x}_2 = -1.8827x_2 + 5.2278x_3 + 1.3083x_5 - 1.2722x_6,$$
$$\dot{x}_3 = -x_5,\ \dot{x}_4 = -x_4,\ \ \dot{x}_5 = 10x_6 - x_3,\ \ \dot{x}_6 = x_2 - 10x_5. \qquad (13)$$

Решим систему (13) с начальными условиями $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0{,}2$; $x_4(0) = x_5(0) = x_6(0) = 0{,}1$. Тогда, оптимальное решение системы (13) будет

$x_1(t) = 0.2e^{-t}$, $x_2(t) = -0.6875e^{-1.8117t}(e^{0.4463t} - 1.3119e^{1.4364t} + 0.0211e^{1.7408t}\cos(9.9753t) - 0.0104e^{1.7408t}\sin(9.9753t))$,

$$x_3(t) = -0.0499e^{-1.8117t}(e^{0.4463t} - 4.8551e^{1.4364t} - 0.1514e^{1.7408t}\cos(9.9753t) + 0.1539e^{1.7408t}\sin(9.9753t)),$$

$x_4(t) = 0.1e^{-t}$,

$$x_5(t) = -0.0682e^{-1.8117t}(e^{0.4463t} - 1.3348e^{1.4364t} - 1.1323e^{1.7408t}\cos(9.9753t) - 1.0979e^{1.7408t}\sin(9.9753t)),$$

$$x_6(t) = 0.0043e^{-1.8117t}(e^{0.446t} + 4.8254e^{1.4364t} + 17.35034e^{1.7408t}\cos(9.9753t) - 18.1445e^{1.7408t}\sin(9.9753t)).$$

На рис. 1-6 приведены графики оптимальных движений.

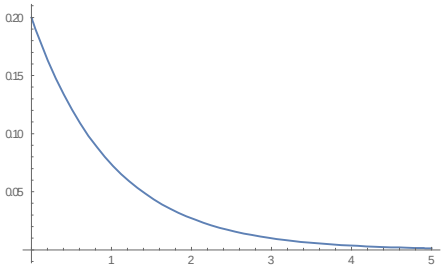


Рис.1. График функции $x_1(t)$.

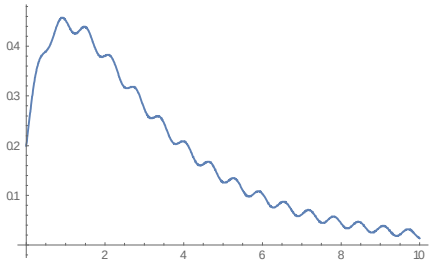


Рис.2. График функции $x_2(t)$.

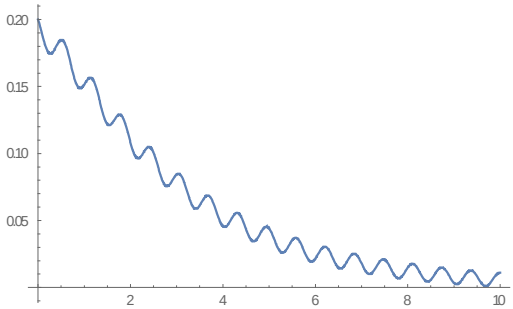


Рис.3. График функции $x_3(t)$.

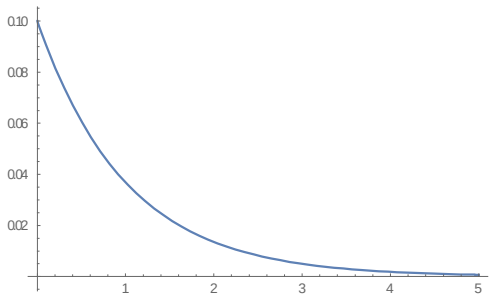


Рис.4. График функции $x_4(t)$.

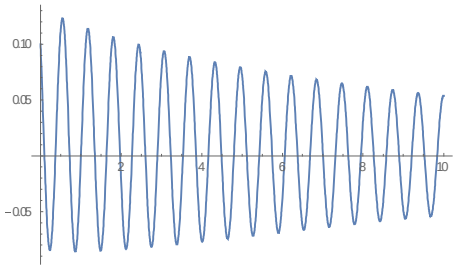


Рис.6. График функции $x_6(t)$.

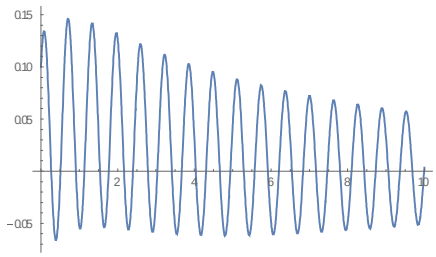


Рис.5. График функции $x_5(t)$.

Построенные графики показывают, что возмущённое движение стремится к нулю, т.е. оптимальное движение стремится к движению (3).

Заключение

В работе рассматриваются задачи устойчивости и стабилизации вращательного движения абсолютно твёрдого тела вокруг неподвижной точки в случае Софьи Ковалевской.

Приведены дифференциальные уравнения движения тела, показано, что тело допускает вращение вокруг главной центральной оси симметрии тела Ox с постоянной угловой скоростью. Принимая, что это движение является невозмущённым движением, составлена система дифференциальных уравнений возмущённого движения и показано, что рассматриваемое движение является неустойчивым.

По направлениям соответствующих обобщённых координат введены управляющие воздействия, проверена полная управляемость линейного приближения полученной управляемой системы. Поставлена и решена задача оптимальной стабилизации рассматриваемого движения.

Построена оптимальная функция Ляпунова, получены оптимальные управляющие воздействия, уравнения оптимальных движений и минимальные значения функционалов, зависящих от угловой скорости невозмущённого движения тела. Для различных значений угловой скорости невозмущённого движения построены графики оптимальных движений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. М.: Наука, 1972, ч. 2, 332с.
2. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966, с. 475-514.
3. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968, 475с.
4. Красовский Н.Н. Проблемы стабилизации управляемых движений. В кн.: Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. Доп. 4. М.: Наука, 1966, с.475-515.
5. Альбрехт Э.Г., Шелементьев Г.С. Лекции по теории стабилизации. Свердловск: 1972, 274с.

Сведения об авторах:

Шагинян Смбат Григорьевич – кандидат физмат наук, доцент кафедры механики, Ереванский государственный университет, факультет математики и механики
E-mail: shahinyan@ysu.am

Аветисян Лилит Мелсиковна – магистрант кафедры механики, ЕГУ, факультет математики и механики
E-mail: avetisyan.lilit.96@mail.ru

УЛЬТРАЗВУКОВАЯ ВОЛНА В СИЛЬНО НЕРАВНОВЕСНОЙ СРЕДЕ С ТОЧЕЧНЫМИ ДЕФЕКТАМИ

Шекоян А.В.

Рассмотрено распространение ультразвуковой волны (УЗ) в сильно неравновесной среде, обусловленное наличием многочисленных точечных дефектов. Из исходных уравнений, которые состоят из линейного уравнения теории упругости и двух нелинейных кинетических уравнений, описывающее изменение количество дефектов.

Из этой системы выведено нелинейное эволюционное уравнение, которое решено при слабой диффузии и получено аналитическое выражение для смещения. Показано, что это решение имеет разрыв, где могут появляться различные нелинейные явления, в том числе, нелинейный резонанс. Выведено нелинейное уравнение Шредингера. Получен коэффициент поглащения УЗ волны. Показана, что нелинейность не влияет на нелинейную частоту УЗ волны и не меняет нелинейный эйконал. Приведена формула для интенсивности УЗ волны. Показано, когда можно наблюдать нелинейный резонанс.

1. Введение

Хорошо известно, что при воздействии на материал лазерного излучения или потока частиц, в нём создаются точечные дефекты (вакансии, межузельные атомы), которые существенно меняют физические свойства материалов.

Точечные дефекты мигрируют по материалу, взаимодействуют друг с другом, с другими дефектами среды, например, с дислокациями, создают групировки точечных дефектов.

В статье [3] выведена, в рамках гамильтонового формализма, система уравнений описывающая распространение упругой волны с учётом её взаимодействия с точечными дефектами. Однако, так как считается, что конценрация точечных дефектов мала, ограничивается линейными кинетическими уравнениями.

В данной статье предполагается, что количество точечных дефектов большое, тогда существенно нелинейное взаимодействие точечных дефектов создаёт комплексы точечных дефектов, поэтому кинетические уравнения берутся нелинейными.

Материал, который находится под дефектообразующим излучением, можно рассматривать как открытую систему, находящуюся вдали от равновесия [1]. Благодаря нелинейному характеру процесса, в такой среде проявляется множество неустойчивых состояний. При определённой плотности точечных дефектов, как обычно делается в синергетике, пользуются нелинейными кинетическими уравнениями [4,5]. В этом случае может быть так, что динамические уравнения теории упругости – линейные, а кинетические уравнения – нелинейные. В твёрдом теле могут происходить процессы самоорганизации, т.е. образование диссипативных структур.

Целью данной статьи является исследование процессов, когда уравнения УЗ волны – линейные, кинетические уравнения – нелинейные, то есть учитывается нелинейное взаимодействие точечных дефектов.

2. Исходные уравнения

Предполагается, что имеется упругая, изотропная, диэлектрическая бесконечная среда. Нетермическим излучением создаются многочисленные точечные неравновесные дефекты. В такой среде распространяется ультразвуковая линейная волна.

Взаимосвязанная система уравнений, описывающая вышеуказанный процесс, состоит из линейного уравнения для ультразвуковой волны и двух нелинейных кинетических уравнений для вакансии и межузельных атомов.

В одномерном приближении эти уравнения имеют вид:

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - d_1\frac{\partial n_1}{\partial x} - d_2\frac{\partial n_2}{\partial x}, \tag{1}$$

$$-\frac{\partial n_1}{\partial t} + q_1\frac{\partial u}{\partial x} + D_1\frac{\partial^2 n_1}{\partial x^2} - \beta_1 n_1 - \beta_{12} n_2 + \alpha_1 n_1^2 + \alpha_2 n_2^2 + \alpha_3 n_1 n_2 = 0, \tag{2}$$

$$-\frac{\partial n_2}{\partial t} + q_2\frac{\partial u}{\partial x} + D_2\frac{\partial^2 n_2}{\partial x^2} - \beta_2 n_2 - \beta_{21} n_1 + \alpha_1 n_1^2 + \alpha_2 n_2^2 + \alpha_3 n_1 n_2 = 0, \tag{3}$$

где u – смещение, n_1 и n_2 – объёмные концентрации вакансий и межузельных атомов в единице объёма среды, соответственно, ρ – плотность материала, D_1 и D_2 – коэффициенты диффузии вакансий и межузельных атомов, соответственно, β_{12} и β_{21} – скорости взаимной рекомбинации

дефектов типа «межузельных атомов – вакансия» и «вакансия – межузельный атом», соответственно, β_1 и β_2 – скорости рекомбинации дефектов на стоках, t – время, x – координата, q_1, q_2 – коэффициенты взаимодействия деформации с дефектами, α_1, α_2 и α_3 – нелинейные коэффициенты взаимодействий точечных дефектов, $a = \lambda + \frac{4}{3}\mu$, λ и μ – коэффициенты Ламе.

3. Вывод эволюционного уравнения

Обычно, нелинейные волновые процессы изучаются методом эволюционного уравнения [6]. Суть этого метода заключается в том, что из сложных систем дифференциальных уравнений математической физики выводят одно уравнение, названное эволюционной, которое легче исследовать.

Математическая процедура о получении эволюционного уравнения подробно описана в монографии [6]. Воспользовавшись им, из системы уравнений (1)–(3) получается следующее эволюционного уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + t_1 \frac{\partial^4 u}{\partial \tau^4} + t_2 \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + t_3 \frac{\partial^2 u^2}{\partial \tau^2} + t_4 u^2 + t_5 \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^2 \partial x} = 0, \tag{4}$$

где $t_1 = \frac{q_2 D_1}{2a\mathrm{v}^5 Q_n'}\left(D_2 d_2 m - \beta_2 D_1 d_1^2\right)$, $t_2 = -\frac{\beta_{21} D_1 q_2 m}{2a\mathrm{v}^3 Q_n'}$,

$$t_3 = -\frac{q_2\left(D_2 d_2 m - \beta_2 D_1 d_1^2\right)}{2a\mathrm{v}^2 Q_n' m}, \quad t_4 = \frac{q_n d_1 m\left[1 - \left(\beta_{21} d_2 - \beta_2 d_1\right) m^{-1}\right]}{2aQ_n'},$$

$$t_5 = \frac{1}{\mathrm{v}^2 Q_n'}\left[D_2 m - \beta_1 d_1\left(\frac{D_2 d_2}{d_1} - \frac{\beta_2 D_1 d_1}{m}\right)\right], \quad m = d_2\beta_1 + \beta_{12} d_1, \quad q_n = \frac{\left(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3\right)}{\mathrm{v}^2},$$

$$Q_n' = d_1\left(\beta_1\beta_2 - \beta_{12}\beta_{21}\right) - 2\beta_{21}\alpha_1\beta_1.$$

Из (4) видно, что t_4 обусловлен только нелинейным взаимодействием точечных дефектов.

В некоторых случаях диффузию можно не учитывать, тогда $D_1 = D_2 = t_1 = t_2 = t_3 = t_5 = 0$ и уравнение (4) примет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + t_4 u^2 = 0. \tag{5}$$

Уравнение (5) легко интегрируется и имеет следующий вид:

$$u = \frac{u_0}{1 + t_4 u_0 x}, \tag{6}$$

где $u = u_0$ при $x = 0$. Как видно из выражения (6), в точке $x = -\left(t_4 u_0\right)^1$ функция (6) имеет разрыв. Это означает, что в указанной точке волна неустойчива и могут проявляться различные нелинейные эффекты.

4. Нелинейное уравнение Шредингера

Решение уравнения (4) ищем в следующем виде [6]:

$$u = \frac{1}{2}\left[A\left(\tau_1\right)\exp\theta + A_1\left(\tau_1\right)\exp 2\theta + \text{компл. сопряжённые}\right] \tag{7}$$

где $\theta = i\omega_0\tau - \left(\alpha + i\omega_2\right)\tau_1$, ω_0 – основная заданная частота, а ω_2 – приращение частоты из-за нелинейностей. Подставляя (7) в уравнение (4), для наивысших порядков получим следующие дисперсионные соотношения:

$$\alpha = 2\mathrm{v}\frac{t_1\omega_0^4 - t_2\omega_0^2}{1 - t_5\omega_0^2}, \quad \omega_2 = 0. \tag{8}$$

$\omega_2 = 0$ означает, что нелинейности не приводят к приращению частоты, то есть нелинейной дисперсии нет, хотя линейная дисперсия есть [3].

В следующем приближении получается нелинейное модуляционное уравнение для амплитуды первой гармоники:

$$\frac{dA}{d\tau_1} = -\frac{t_3 \mathrm{v}}{t_6}|A|^2 A = Q|A|^2 A, \tag{9}$$

где A –комплексная амплитуда. Подставим $A = q\exp is$ в уравнение (9), где q – действительная амплитуда, а s – возмущенный эйконал. Разделим в уравнении действительные и мнимые части, получим для q и s следующие уравнения:

$$\frac{dq}{d\tau_1} = Qq^3 \tag{10}$$

$$\frac{ds}{d\tau_1} = 0. \tag{11}$$

Из (11) вытекает, что s=const, то есть эйконал при распространении нелинейной волны не изменяется.

Уравнение (10) – обыкновенное дифференциальное уравнение. Оно легко интегрируется и для q^2 получается

$$q^2 = \frac{q_0^2}{1 - 2Qq_0^2\tau_1}, \tag{12}$$

где q_0 – значение амплитуды при $\tau_1 = 0$, q^2 – интенсивность нелинейной волны. Как видно из выражения (12), в точке $\tau_1 = \frac{1}{2Qq_0^2}$ функция q^2 претерпевает разрыв. Это означает, что в этой точке будет нелинейный резонанс.

4. Заключение

Рассмотрено распространение УЗ волны в сильно неравновесной среде, где есть многочисленные точечные дефекты.

Такие процессы рассматриваются как открытая система, то есть существенно нелинейное взаимодействие между точечными дефектами, поэтому кинетические уравнения берут нелинейными. Хотя уравнение для УЗ волны – линейная.

Выведено эволюционное уравнение и найдено его аналитическое решение при слабой диффузии. Из решения видно, что оно имеет разрыв, где волна неустойчива и могут проявляться различные нелинейные явления.

Выведено нелинейное уравнение Шредингера. Получена формула для коэффициента поглощения. Показано, что нелинейность не приводит к изменению нелинейной частоты и эйконала.

Решено нелинейное уравнение Шредингера и показано, что можно наблюдать нелинейный резонанс.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мирзоев Ф.Х., Панченко В.Я., Шелепин Л.А. УФН. 166, 3 (1996).
2. Артамонова О.В., В.И. Ерофеев. //В сб. IX Всероссийской научной конференции: «Нелинейные колебания механических систем» 2012. С.84.
3. Шекоян А.В. Акустическая волна в среде с точечными дефектами. //Изв. НАН Армении. Физика. 50, 2 (2015).
4. Хакен Г. Синергетика. М.: Мир, 1985.
5. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979.
6. Багдоев А.Г., Ерофеев В.И., Шекоян А.В. Линейные и нелинейные волны в диспергирующих сплошных средах. М.: Физматлит, 2009.

Сведение об авторе:

Шекоян Ашот Вазгенович – ст.н.с. Института механики НАН Армении. **Тел.:** (077) 56 95 64.

E-mail: ashotshek@mechins.sci.am

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РОТОРА, ВРАЩАЮЩЕГОСЯ НА НЕЛИНЕЙНЫХ ОПОРАХ

Шекян Г.Г., Геворгян А.В., Аветисян Р.А.

Основываясь на теоремах Ляпунова и Барбашина – Красовского об устойчивости движения, доказывается асимптотическая устойчивость ротора, вращающегося на нелинейных опорах. С помощью функции Ляпунова для заданной системы оценена область неустойчивого вращения ротора для произвольного возмущения.

Показано, что положение равновесия системы ротор-нелинейная опора асимптотически неустойчива, поскольку восстанавливающаяся сила аппроксимируется степенным рядом.

Введение. Проблемы устойчивости в механике возникли при изучении равновесных положений системы. В середине XIX столетия в науке и технике возникли проблемы, потребовавшие постановки общей задачи об устойчивости не только равновесия, но и движения. Теория устойчивости движения широко применяется в механике, астрономии, химии и даже в биологии. Особо важное значение теория устойчивости имеет для техники и технических задач – турбины, генераторы, роторные и пр. машины должны устойчиво сохранять заданный режим работы.

Постановка задачи. Пусть масса вращающегося ротора m сосредоточена в середине вертикального вала, установленного в жёстко-укреплённых шарикоподшипниках. Предположим, что подшипники обладают, в общем случае, нелинейной податливостью и в силу симметричности ось ротора может перемещаться плоскопараллельно. Собственное вращение происходит вокруг оси симметрии материальной системы, поэтому реакции подшипников приводятся к одной равнодействующей от радиального перемещения оси ротора, направленной к точке O_1 пересечения плоскости движения центра масс с осью недеформированных подшипников (рис.1).

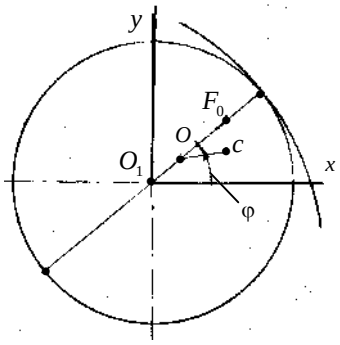


Рис.1. Вертикально-уравновешенный ротор на нелинейных опорах. $Oc = e$ – эксцентриситет ротора. F_0 – реакция подшипника от радиального перемещения центра масс, направленной к точке O_1

Для любой реакции подшипника $F(q)$ должно выполняться условие

$$F_0(0) = 0; \quad \frac{dF_0(q)}{dq} >, \quad (q > 0), \tag{1}$$

где q –деформация подшипника (в данном случае обобщённая координата).

Кроме того, производная $dF_0(q)/dq$ должна быть ограничена при $q = 0$.

Будем считать, что кинетическая и потенциальная энергии определяются равенствами

$$T = m \cdot q^2/2; \quad \Pi = k \cdot q^{n+1}/n+1, \tag{2}$$

где m – приведённая масса системы ротор-опора, k – постоянный коэффициент, n – положительное число, не менее двух $(n \geq 2)$.

Считая ротор абсолютно сбалансированным $(e=0)$, и что помимо потенциальной силы на систему действуют силы сопротивления среды, пропорционально первой степени скорости, составим уравнение возмущённого движения:

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}-\frac{\partial T}{\partial q}=-\frac{\partial \Pi}{\partial q}-\mu\cdot\dot{q},$$

где μ – положительная постоянная, а $\dot{q}$ – производная координата q по времени.

Учитывая значения T и Π, получим:

$$m\ddot{q}+\mu\dot{q}+kq^{n}=0 \qquad (3)$$

Обозначив $\dot{q}=x_1$, $q=x_2$, будем иметь:

$$m\dot{x}_1+\mu x_1+kx_2^{n}=0; \qquad (4)$$

В качестве функции Ляпунова возьмём полную механическую энергию

$$L=T+\Pi=\frac{1}{2}m\dot{q}^{2}+\frac{k}{n+1}q^{n+1},$$

или $L=\frac{1}{2}m\dot{x}_1^{2}+\frac{k}{n+1}x_2^{n+1}$, (5)

где полная производная функции L по времени будет:

$\dot{L}=x_1\cdot\dot{x}_1\cdot m+kx_2^{n}\cdot\dot{x}_2$; здесь $\dot{x}_2=x_1$.

С учётом значений $\dot{x}_1$ и $\dot{x}_2$ будем иметь:

$$\dot{L}=x_1\left(-\mu x_1-kx_2^{n}\right)+kx_2^{n}\cdot x_1 \text{ или } \dot{L}=-\mu x_1^{2}; \qquad (6)$$

Рассмотрим возможные случаи.

1. Число k положительно $(k>0)$, а число n – нечётное. Для этого случая L – определённо-положительная функция переменных x_1 и x_2 ($n+1$–число чётное), а производная $\dot{L}$ – отрицательная функция относительно совокупности переменных x_1 и x_2. Согласно теореме Ляпунова об устойчивости движения, можно утверждать, что невозмущённое движение устойчиво, но не асимптотически. Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости применить нельзя, т.к. производная $\dot{L}$ отрицательная, но не определенно-отрицательная функция переменных x_1 и x_2 (при $x_1=0,\ x_2\neq 0$ производная $\dot{L}=0$). Обратимся к теореме Барбашина–Красовского, которая гласит: если для дифференциальных уравнений возмущённого движения (3) можно найти определенно положительную функцию $L(x)$, удовлетворяющую равенству

$$\lim_{x\to 0}L(x)=\infty, \qquad (7)$$

где x удовлетворяет двум условиям: $\dot{L}=0$ вне точек k-многообразия и на многообразии k, не содержащее целых траекторий системы при $0\le t\le\infty$, то невозмущённое движение устойчиво, в целом.

Прежде всего, следует отметить, что функция L, определяемая равенством (5), удовлетворяет также условию (7)

$$\lim_{x\to\infty}L(x_1,x_2)=\infty$$

Многообразие с k получим, положив $\dot{L}=-\mu x_1^{2}=0$ (это ось x_2, когда $x_1=0;\ x_2\neq 0$)

Многообразие не содержит целых траекторий, и уравнения (4) принимают вид

$$-k\ddot{x}_2=0;\quad \dot{x}_2=0,$$

что невозможно (на k – переменная $x_2=0$).

Очевидно, что на k производная $\dot{L}=0$, а вне k она отрицательна, следовательно,

выполнены все условия теоремы Барбашина – Красовского, и тогда положение равновесия $x_1 = 0, \quad x_2 = 0$ асимптотически устойчиво в целом при любых начальных возмущениях.

2. Число k положительно $(k > 0)$, а число n – чётное. Функцию L определим следующим образом:

$$L = -\left(\frac{1}{2} m x_1^2 + \frac{k}{n+1} x_2^{n+1}\right), \quad \text{а} \quad \dot{L} = \mu x_1^2. \tag{8}$$

При $k > 0$ и n чётном, функция L может принимать положительное значение.

На прежнем многообразии $k(x_1 = 0, \quad x_2 \neq 0)$ производная $\dot{L} = 0$, а вне k производная $L > 0$. Кроме того, многообразию k не принадлежат целые траектории системы. Поэтому выполнены все условия теоремы Красовского, которая гласит: если для дифференциальных уравнении возмущённого движения можно найти функцию L такую, что её производная $\dot{L}$ удовлетворяет условиям

$\dot{L} > 0$ вне k и $L = 0$ на k,

где k – многообразие точек, не содержащий целые траектории при $0 \le t < \infty$, и если при этом можно указать точки, лежащие в произвольной окрестности начала координат, такие, что в них $L > 0$, то невозмущённое движение неустойчиво.

Тогда, в силу этого, равновесия $x_1 = \dot{q} = 0, \quad x_2 = q = 0$ неустойчивы.

3. Число k отрицательно $(k < 0)$, а n – любое целое положительное число, не меньше двух $(n \ge 2)$. Функцию L берём в форме (8). При любом целом n и $k < 0$ функция L может принимать положительные значения (например, при $x_1 = 0, \quad x_2 < 0$). Повторяя доказательство для случае 2, убеждаемся, что при $k < 0$ положение равновесия неустойчиво.

Таким образом, рассматривается система (ротор на нелинейных опорах) асимптотически устойчива относительна q и $\dot{q}$ при $k > 0$ и n – нечётном. Во всех остальных случаях она неустойчива.

Поскольку в подшипниках качения восстанавливающая сила упругости аппроксимируется степенным рядом вида $aq + bq^3 + \cdots$, то положение равновесия ($\dot{q} = 0, \quad q = 0$) системы ротор–нелинейная опора асимптотически неустойчиво.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пановко Я.Г., Губанов И.И. Устойчивость и колебание упругих систем. М.: Наука, 1987. 352с.
2. Меркин Д.Р. Достаточные условия для асимптотической устойчивости одной нелинейной системы // Уч. Зап. Гос. Пед. Инст. им. А.И. Герцена. т.141. Ленинград, 1966, с.98-112.
3. Шекян Г.Г. Устойчивость высокоскоростных роторов, вращающихся на подшипниках качения. //Труды ВНИИКЭ, т.8. Ереван: 1976, с.136–147.
4. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М.: Гостехиздат, 1950. 351с.

Сведения об авторах:

Шекян Гамлет Гургенович–д.т.н., профессор Института механики НАН Армении, (+374 91), 49 38 40; **E-mail:** hamlet@mechins.sci.am

Геворгян Арамаис Викторович – внештатн. науч. сотр. Института механики НАН Армении, (+374 94) 88 58 98; **E-mail:** argev77@mail.ru

Аветисян Рубен Ашотович – преподаватель каф. инж. графики Нац. политех. университета Армении.

ON A MORE POWERFUL THAN IN NEWTON CENTRAL INTERACTION OF BODIES AND THE PROBLEM OF A BLACK HOLE

Lenser Aghalovyan

Demonstrated such a central interaction of bodies which at short distances is more powerful than Newtonian interaction. Bodies' new central interaction which is potential with more powerful than Newtonian one's potential is described. It is shown that under such interaction the Second cosmic (escape) velocity is essentially more than the Second cosmic (escape) velocity by Newton theory. The connection of the new central interaction with the gravitational radius of the Black Hole is found. It is shown that the gravitational radius of the Black Hole may be arbitrarily big. All the Black Holes differ from each other with the gravitation center intensity index.

On more powerful central interaction of bodies

The central force of the interaction will be given in the form of

$$\vec{F} = -GmM\frac{e^{k/r}}{r^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}, \tag{1}$$

or

$$F = -GmM\frac{e^{k/r}}{r^2}. \tag{2}$$

where G is the gravitational constant in Newton's law of gravitation ($G = 6.67\cdot 10^{-11} m^3/(kg\cdot s^2)$). Index k will characterize the power (intensity) of the gravity center. At $k = 0$ the interaction (1) coincides with Newtonian one (coefficient GmM is chosen for it). And if $k > 0$, it will be more powerful than Newtonian interaction. It is obvious that k has dimensionality of the length.

The field made by force $\vec{F}$, given in formula (1) is potential with potential

$$U = -\frac{GmMe^{k/r}}{k} + \text{const}, \tag{3}$$

which is essentially stronger than the potential of Newton field ($U = -GmM/r$). As force $\vec{F}$ is central, the trajectory of the material point is plane curve and the law of the squares takes place:

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = C, \tag{4}$$

where C is equal to the initial velocity moment relatively to the center of gravity.

$$r = \frac{1/k_1}{1+(k_2/k_1)\cos\sqrt{\delta_1}(\theta-\theta_0)} \tag{5}$$

i.e., the trajectory is conic section with parameters [6]

$$p = \frac{1}{k_1} = \frac{C^2}{GM} - k, \tag{6}$$

$$\varepsilon = \frac{k_2}{k_1} = \sqrt{1+\left(\frac{C^2}{MGk}-1\right)\left(2+\frac{hk}{MG}\right)}$$

$$v_0^2 < \frac{2GM}{r_0}\left(\frac{e^{k/r_0}-1}{k/r_0}\right) = v_*^2 \tag{7}$$

Therefore, at $v_0 < v_*$ the trajectory is an ellipse, at $v_0 = v_*$ it is a parabola, and at $v_0 > v_*$ it is a

hyperbola. $\lim_{k\to 0} v_*^2 = 2GM / r_0 = v_{*0}^2$, $v_{*0} = \sqrt{2GM / r_0}$ is the second cosmic (escape) velocity by Newton theory, i.e. the initial velocity under which the body overcomes the gravitation of the body with mass M. And if $k > 0$, according to (7) $v_* > v_{*0}$, i.e. the second cosmic (escape) velocity under the interaction (1) is greater than the classic one which was to be expected.

On gravitational radius of a Black Hole

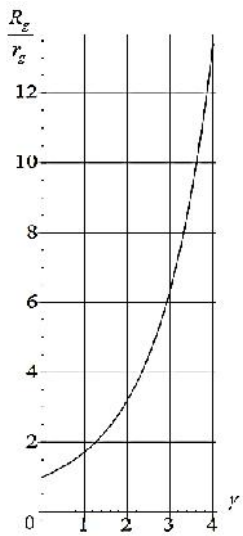
The body with mass M will be dark (invisible or "Black Hole") if any body (particle) with mass m and initial velocity, even equal to the speed of light c, cannot overcome the field of gravitation of the mass M. A natural question rises – what is the gravitational radius R_g under the interaction (1). For the determination of the gravitational radius R_g in formula (7) the initial conditions will be: at $r_0 = R_g$, $v_* = c$. We have

$$\frac{2GM}{R_g}\left(\frac{e^{k/R_g}-1}{k/R_g}\right) = c^2, \tag{8}$$

Noting $\lim_{k\to 0} R_g = r_g$ and passing in (24) to the limit at $k \to 0$ we have

$$\frac{2GM}{r_g} = c^2, \text{ or } \frac{2GM}{c^2} = r_g \tag{9}$$

i.e. radius r_g is the well-known gravitational radius under Newton classic central interaction.



Note $\gamma = k / R_g$, then from (8) taking into account (9) it follows

$$R_g = r_g \frac{e^{\gamma}-1}{\gamma} \tag{10}$$

or

$$\frac{R_g}{r_g} = \frac{e^{\gamma}-1}{\gamma} \tag{11}$$

$\lim_{¥\to 0} R_g / r_g = 1$ at $\gamma > 0$, $R_g > r_g$ and from the graph of the function R_g / r_g (see Figure 1) it follows that the gravitational radius R_g under the interaction (1) compared with Newtonian gravitational radius r_g can be arbitrarily large. From formulae (8), (10) it follows that parameter k is proportional to the gravitational radius $R_g (k = \gamma R_g)$. Setting the value γ from graph (Figure 1) or by formulae (11)

R_g / r_g will be determined, i.e. the gravitational radius R_g itself. Then $k = ¥ R_g$. In Table1 for some values γ the corresponding values R_g / r_g are brought.

Table 1. The values of R_g / r_g corresponding to the given values of γ.

¥	1	2	3	5	10
R_g / r_g	1.718	3.194	6.362	29.483	2202.546

	50	100	200	1000
	1.037×10^{20}	2.689×10^{41}	3.61×10^{84}	1.97×10^{431}

It is possible to do the opposite: to give the values R_g / r_g and from equation (11) or Fig. 1 determine γ (Table2), and hence the values k ($k = \gamma R_g$).

Table 2. The values of γ corresponding to the given values of R_g / r_g.

R_g / r_g	1	2	3	5	10
γ	0	1.256	1.904	2.66	3.615

	50	100	200	500	1000
	5.647	6.475	7.285	8.335	9.118

The results obtained above permit us to draw a conclusion that Black Hole (Dark Body) may exist with arbitrarily large gravitational radius R_g; gravitation of the Black Hole (Dark Body) is not submitted to the classical (Newtonian) law of gravitation, but is submitted to the essentially powerful central gravitation (1). A lot of Black Hole (Dark Body) may exist. The last fact has long been confirmed by the astronomers (Greighton et al (2008) ; Ellis (1999) ; Genzel et al (2003) ; Harms et al (1994) ; Hehl et al (1998) ; Kormendy et al (1995) ; McConnell et al (2011);Mitra (2012)).

All the Black Hole (Dark Body) will differ in power of the created by them gravitational field, i.e. by the value of the index k of gravitational intensity. Using formula (11) they can be renumbered according to the values increase of the index k.

Thus, Black Hole creates near to itself a stronger central force field of attraction than Newtonian, and submit the law.

$$\vec{F} = -GmM \frac{e^{¥ \frac{R_g}{r}}}{r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \tag{12}$$

The Newtonian theory of gravitation is also capable of describing Black Hole, if the law of central attraction is taken in the form (12).

Discussion and Conclusions

A new version of the central interaction of bodies is established: $F = -GmM\, e^{k/r} / r^2$ whish at short distances describes more powerful, comparing with Newtonian one, gravitational interaction. Conditions, under which the movement trajectory is a conical section, are derived. The connection

between the gravitational radius R_g of the Black Hole and the gravitation intensity index "k" of the gravitation center is found. It is shown that the gravitational radius of the Black Hole may be arbitrarily big. A lot of Black Holes may exist. The gravitation of the Black Hole (Dark Body) does not obey the classical (Newtonian) law of Gravitation, it obeys the law of the essentially powerful central gravitation (1) or (12).

References

1. Kittel, Ch. and Knight, W. D. et al, 1965, Mechanics (Berkeley Physics Course, v.1), (Mc Graw-Hill)
2. Layzer, D. 1984, Constructing the Universe (New York. Scientific American Books. Inc)
3. Aghalovyan, L.A. On Universal Central Strong (Weak) Interaction of Bodies and Particles. 2006, Reports of National Academy of Sciences of Armenia, 106, 3, 238-244. (in Russian)
4. Greighton, T. and Price, R. Supermassive Black Hole. 2008, Scholarpedia, 3, 1
5. Hehl, F. W. and Kiefer, C. et al, Black Hole: Theory and observation. 1998, Proc. of the 179th W.E. Heraeus Seminar Held at Bad Honnef (Springer, Germany)
6. Aghalovyan, L. The Consequences of a Strengthened Newtonian Gravity at Short Distances. International Journal of Astronomy and Astrophysics, 2018, 8, 191-199

Information about the author:

Lenser Aghalovyan – Institute of Mechanics of National Academy of Sciences of Armenia, Yerevan, Armenia. **E–mail:** lagal@sci.am

JOINT PROPAGATION OF ELASTIC SHEAR AND PLANE DEFORMATION ELECTROACOUSTIC WAVES IN PERIODICALLY-INHOMOGENEOUS PIEZOELECTRIC WAVEGUIDE

Avetisyan A.S., Khachatryan V.M., Kamalyan A.A.

In some piezoelectric crystals, the anisotropy of the material allows the separated distribution of elastic ***SH*** electro-active wave signal. In addition, for some piezoelectric crystals, the anisotropy of the material allows the separated propagation of the electro-active wave signal of ***PV*** plane deformation. During the propagation, the electro-elastic wave signal transforms and passes from one band to the other by penetrating through the vacuum gap by means of the accompanying electrical oscillations. It is possible if the adjacent piezoelectric bands have a non-acoustic contact.

In the case of a high-frequency electro-elastic wave signal (short waves, when $^{a}(\mu) \ll h$), in piezoelectric rectangles the shapes of the electro-elastic surface waves of Gulyaev-Bleustain and Rayleigh are formed. In fact, in alternating layers of the composite waveguide, heterogeneous wave fields are formed, that carry different "information". In the high-frequency mode, the wave energy is localized at the edges of the interlayers. The determination of the bands of permissible frequencies is made, taking into account the longitudinal periodicity of the modeled inhomogeneous waveguide. We use the Floquet-Lyapunov theory for periodic structures. From the filtering equation for different combinations of selected pairs of piezoelectric materials the zones of admissible frequencies for localized and non-localized electro-elastic waves propagating along the composite waveguide are determined. Based on this an electromechanical resonator of certain type can be created.

The equation of frequency filtering also gives forbidden frequency bands on which the composite waveguide of certain piezoelectric materials and linear dimensions does not allow the propagation of localized electro-elastic waves or any propagation of waves in general.

Introduction. n modern high-precision technologies, composite periodically heterogeneous waveguides of piezoelectric crystals are widely used as converters, filters or resonators of an electroacoustic wave signal. A review of the prospects, the current state and future directions for the development of studies of wave processes in periodic structures is given in **[1].** In studies on the propagation of elastic waves in elastic periodic waveguides, the Floquet-Lyapunov theory is successfully applied in **[3]** etc**.** The dispersion relations of SH-waves propagating in periodic piezoelectric composite layered structures were obtained and investigated in the paper **[4].** In the mentioned works, the wave field is homogeneous, and when propagating in a periodically inhomogeneous waveguide, the nature of the original normal wave does not change. However, it is known that in anisotropic piezoelectric materials, depending on the crystallographic symmetry of the piezoelectric, it is possible to excite a pure shear electroelastic wave, or an electroelastic wave of plane deformation **[5]**. In another paper **[6]**, the possibility of joint propagation of electroelastic waves of dissimilar physicomechanical characteristics in a composite waveguide from the corresponding piezoelectric crystals was demonstrated.

In this work we propose a simple waveguide circuit that allows for multiple mutual transformation and joint propagation of localized electroactive normal waves of anti-plane deformation and plane deformation.

1. Formulation of the problem. Consider the propagation of electroelastic waves in a periodically longitudinally inhomogeneous layer, which is referred to the orthogonal coordinate system $0xyz$ (Fig. 1). The waveguide is constructed from alternating, without acoustic contact, unlimited bands of piezoelectric crystals with rectangular cross sections

$$\Omega_1(x,y,z) \triangleq \left\{x \in [0;a_1];\ y \in [-h;h];\ |z| < \infty\right\};\quad \Omega_2(x,y,z) \triangleq \left\{x \in [-a_2;0];\ y \in [-h;h];\ |z| < \infty\right\} \tag{1.1}$$

The crystallographic sections and orientations of the crystallographic axes of the band materials are assigned to the Cartesian coordinate system $0xyz$ so that in separate alternating bands there exist separate electroactive waves of antiplane and plane deformations, respectively. The material of the bands $\Omega_1(x,y,z)$ belongs to the crystallographic class of 6mm of hexagonal symmetry, and the axis $\vec{p}$ of symmetry of the piezoelectric crystal is parallel to the axis $0\vec{z}$.

Then in the plane $x0y$, the quasistatic equations of the electroactive antiplane deformation $\left\{0;\ 0;\ \mathrm{w}_1(x,y,t);\ \ddot{}_1(x,y,t)\right\}$ have the following form

$$\mathrm{w}_{1,xx}(x;y) + \mathrm{w}_{1,yy}(x;y) = -\mu^2 C_{1t}^{-2} \cdot \mathrm{w}_1(x;y),$$

$$\ddot{}_{1,xx}(x;y) + \ddot{}_{1,yy}(x;y) = \left(e_{15}^{(1)} / £_{11}^{(1)}\right) \cdot \left[\mathrm{w}_{1,xx}(x;y) + \mathrm{w}_{1,yy}(x;y)\right] \tag{1.2}$$

where $C_{1t} = \sqrt{\tilde{c}_{44}^{(1)} / \rho_1}$, $\tilde{c}_{44}^{(1)} = c_{44}^{(1)}\left(1 + \kappa_1^2\right)$, $c_{44}^{(1)}$, $\kappa_1^2 = e_{15}^{(1)} / \left(c_{44}^{(1)} \varepsilon_{11}^{(1)}\right)$, $e_{15}^{(1)}$, $\varepsilon_{11}^{(1)}$ and ρ_1 are the known physical parameters of the first piezocrystalline material.

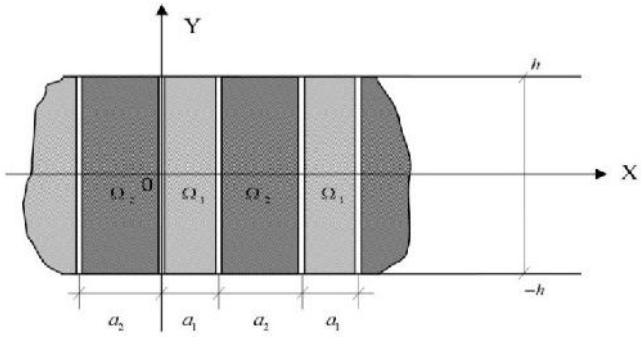


Fig.1 *Periodically longitudinally-inhomogeneous composite waveguide without acoustic contact between piezoelectric interlayers*

The conditions of mechanically free surfaces $y = \pm h$ of rectangular sections of the bands $\Omega_{10}(x, y)$ will be written in the form

$$\left[c_{44}^{(1)} w_{1,y}(x;y;t) + e_{15}^{(1)} \varphi_{1,y}(x;y;t)\right]_{y=\pm h} = 0 \tag{1.3}$$

The conditions for the conjugation of an electric field with an external field on the surfaces $y = \pm h$ of rectangular sections of the bands $\Omega_{10}(x, y)$ are written in the form

$$\left[e_{15}^{(1)} w_{1,y}(x;y;t) - \varepsilon_{11}^{(1)} \varphi_{1,y}(x;y;t) + \varepsilon_0 \varphi_{,y}^{(e)}(x;y;t)\right]_{y=\pm h} = 0 \ ; \quad \left[\varphi_1(x;y;t) - \varphi^{(e)}(x;y;t)\right]_{y=\pm h} = 0 \tag{1.4}$$

Accordingly, on the electrically open $y = h$ and electrically closed $y = -h$ surfaces of the piezoelectric layer, the conditions of transparency and screening of the electric field acquire the forms

$$\left[e_{15}^{(1)} w_{1,y}(x;y;t) - \varepsilon_{11}^{(1)} \varphi_{1,y}(x;y;t)\right]_{y=h} = 0 \ ; \qquad \varphi_1(x;y;t)\big|_{y=-h} = 0 \tag{1.5}$$

During the propagation of an electroelastic wave signal, the wave field is repeatedly transformed $\{0;\ 0;\ w_1(x,y,t);\ \varphi_1(x,y,t)\} \rightleftarrows \{u_2(x,y,t);\ v_2(x,y,t);\ 0;\ \varphi_2(x,y,t)\}$ by penetrating the accompanying electrical oscillations through the vacuum slit. This is possible if the neighboring piezoelectric strips are not in acoustic contact with each another.

The material of the composite bands $\Omega_2(x;y;z)$ belongs to the class $\bar{6}m2$ of hexagonal symmetry, and the inversion axis $\vec{p}_6$ of symmetry of the piezoelectric crystal is combined with the axis $0y$. In the plane $x0y$, the quasistatic equations of the electroactive plane deformation are written in the form [9]

$$u_{2,xx}(x;y) + \left(1 - \nu_{61}\right) v_{2,xy}(x;y) + \nu_{61} u_{2,yy}(x;y) + \left(e_{11}/c_{11}\right) \varphi_{2,yy}(x;y) = -\mu^2 C_{2l}^{-2} u_2(x;y) \ ,$$

$$v_{2,xx}(x;y) + \left(\nu_{16} - 1\right) u_{2,xy}(x;y) + \nu_{16} v_{2,yy}(x;y) + \left(e_{11}/c_{66}\right) \varphi_{2,xy}(x;y) = -\mu^2 C_{2t}^{-2} v_2(x;y) \ ,$$

$$\varphi_{2,xx}(x;y) + \varphi_{2,yy}(x;y) = \left(e_{11}/\varepsilon_{11}\right) \cdot \left[u_{2,xx}(x;y) + u_{2,yy}(x;y)\right] \tag{1.6}$$

In the equations (1.6) $c_{11}^{(2)}$, $c_{66}^{(2)} = \left(c_{11}^{(2)} - c_{12}^{(2)}\right)/2$, $C_{2l} = \sqrt{c_{11}^{(2)} / \rho_2}$, $C_{2t} = \sqrt{c_{66}^{(2)} / \rho_2}$, $e_{11}^{(2)}$, $\varepsilon_{11}^{(2)}$ and ρ_2 are the known physical parameters of the second piezocrystalline material, and $\nu_{16} = \nu_{61}^{-1} = c_{11}^{(2)} / c_{66}^{(2)}$ is the dimensionless coefficient of relative stiffness.

The conditions of mechanically free surfaces $y = \pm h$ of rectangular sections of the bands $\Omega_{20}(x, y)$ are written in the form

$$\left[u_{2,y}(x;y) + v_{2,x}(x;y) + \left(e_{11}^{(2)} / c_{66}^{(2)}\right) \varphi_{2,y}(x;y)\right]_{y=\pm h} = 0 \ ; \ \left(c_{12}^{(2)} u_{2,x}(x;y) + c_{11}^{(2)} v_{2,y}(x;y;t)\right)_{y=\pm h} = 0 \tag{1.7}$$

The conditions for the conjugation of an electric field with the external field on the surfaces $y = \pm h$ of rectangular sections of the bands $\Omega_{2n}(x, y)$ are written in the form

$$\left[\varphi_2(x;y) - \varphi^{(e)}(x;y)\right]_{y=\pm h} = 0 \ ; \ \left[e_{11}^{(2)}\left(u_{2,y}(x;y) + v_{2,x}(x;y)\right) - \varepsilon_{11}^{(2)} \varphi_{2,y}(x;y) + \varepsilon_0 \varphi_{,y}^{(e)}(x;y)\right]_{y=\pm h} = 0 \tag{1.8}$$

Accordingly, on the electrically open surface $y=h$ and on the electrically closed surface $y=-h$ of the piezoelectric layer, the conditions of transparency and screening of the electric field acquire the forms, respectively

$$\left[\mathrm{u}_{2,y}(x;y)+\mathrm{v}_{2,x}(x;y)-\left(£_{11}^{(2)}/e_{11}^{(2)}\right)\ddot{}_{2,y}(x;y)\right]_{y=h}=0\,; \qquad \ddot{}_{2}(x;y)\big|_{y=-h}=0 \tag{1.9}$$

In the case of non-acoustic contact at the inner ends $x_{-1n}=-a_2\pm n(a_1+a_2)$, $x_{0n}=\pm n(a_1+a_2)$ and $x_{1n}=a_1\pm n(a_1+a_2)$ of the interlayers $\Omega_{1n}(x,y)$ and $\Omega_{2n}(x,y)$, the surface conditions of mechanically free surfaces and the conjugation conditions of the electric field are satisfied.

On the inner face surface $x=0$, the conditions of mechanically free surfaces will be written in the form

$$\left[c_{44}^{(1)}\mathrm{w}_{1,x}(x;y)+e_{15}^{(1)}\ddot{}_{1,x}(x;y)\right]_{x=0}=0 \tag{1.10}$$

$$\left[\mathrm{u}_{2,y}(x;y)+\mathrm{v}_{2,x}(x;y)+\left(e_{11}^{(2)}/c_{66}^{(2)}\right)\ddot{}_{2,y}(x;y)\right]_{x=0}=0\ ;\quad \left[c_{11}^{(2)}\mathrm{u}_{2,x}(x;y)+c_{12}^{(2)}\mathrm{v}_{2,y}(x;y)\right]_{x=0}=0 \tag{1.11}$$

and the conjugacy conditions for the electric field are written in the form

$$\begin{aligned}&\left[e_{15}^{(1)}\mathrm{w}_{1,x}(x;y)-£_{11}^{(1)}\ddot{}_{1,x}(x;y)\right]_{x=0}=\\&=\left[e_{11}^{(2)}\mathrm{u}_{2,x}(x;y)-e_{11}^{(2)}\mathrm{v}_{2,y}(x;y)-£_{11}^{(2)}\ddot{}_{2,x}(x;y)\right]_{x=0}\end{aligned}\ ;\qquad \left[\ddot{}_{1}(x;y)-\ddot{}_{2}(x;y)\right]_{x=0}=0 \tag{1.12}$$

According to the Floquet-Lyapunov theory, the periodicity of the longitudinal inhomogeneity of the composite waveguide makes it possible to write down the conjugation conditions of the electric field on the face surfaces $x=-a_2$ and $x=a_1$ in the following form

$$\begin{aligned}&\left[e_{15}^{(1)}\mathrm{w}_{1,x}(x;y)-£_{11}^{(1)}\ddot{}_{1,x}(x;y)\right]_{x=a_1}=\\&=«\cdot\left[e_{11}^{(2)}\mathrm{u}_{2,x}(x;y)-e_{11}^{(2)}\mathrm{v}_{2,y}(x;y)-£_{11}^{(2)}\ddot{}_{2,x}(x;y)\right]_{x=-a_2}\end{aligned}\ ;\qquad \ddot{}_{1}(x;y)\big|_{x=a_1}=«^{-1}\cdot\ddot{}_{2}(x;y)\big|_{x=-a_2} \tag{1.13}$$

Taking into account the non-acoustic contact in the periodically inhomogeneous waveguide structure, the conditions of mechanically free surfaces on the face areas $x=-a_2$ and $x=a_1$ according to the Floquet-Lyapunov theory are simplified and written in the form

$$\left[c_{44}^{(1)}\mathrm{w}_{1,x}(x;y)+e_{15}^{(1)}\ddot{}_{1,x}(x;y)\right]_{x=-a_2}=0\ ;\qquad \left[c_{11}^{(2)}\mathrm{u}_{2,x}(x;y)+c_{12}^{(2)}\mathrm{v}_{2,y}(x;y)\right]_{x=-a_1}=0\,; \tag{1.14}$$

$$\left[\mathrm{u}_{2,y}(x;y)+\mathrm{v}_{2,x}(x;y)+\left(e_{11}^{(2)}/c_{66}^{(2)}\right)\ddot{}_{2,y}(x;y;t)\right]_{x=-a_1}=0\,;\ \left[c_{11}^{(2)}\mathrm{u}_{2,x}(x;y)+c_{12}^{(2)}\mathrm{v}_{2,y}(x;y)\right]_{x=-a_1}=0 \tag{1.15}$$

In the boundary conditions (1.13) $«=\exp(Lk)$ is the Floquet multiplier (the periodicity factor) and $L=a_1+a_2$ is the linear periodicity parameter. $k(\mu)=2®/ª(\mu)$ is the wave number of the formed wave (Floquet wave number).

2.1 Shaping along the thickness of the composite layer. Let us represent the normal waves propagating along an infinite, periodically inhomogeneous waveguide in the form of functions $f(x,y,t)=F(y)\cdot\exp i(k_j x-\mu t)$. Then, the normal electroelastic shear waves induced in the interlayers $\Omega_{1n}(x,y)$ as solutions of the formulated mathematical mixed boundary value problem (1.2), (1.3) and (1.5) will be written in the form

$$\begin{aligned}&\mathrm{w}_1(x,y,t)=\left[A_1\exp(k_1\sim_{1t}y)+B_1\exp(-k_1\sim_{1t}y)\right]\cdot\exp[i(k_1x-\mu t)]\\&\ddot{}_{1}(x,y,t)=\left\{\begin{matrix}C_1\exp(k_1y)+D_1\exp(-k_1y)+\\+(e_{15}^{(1)}/£_{11}^{(1)})\left[A_1\exp(k_1\sim_{1t}y)+B_1\exp(-k_1\sim_{1t}y)\right]\end{matrix}\right\}\cdot\exp[i(k_1x-\mu t)]\end{aligned} \tag{2.1}$$

In the obtained solutions (2.1) $\sim_{1t}=\sqrt{1-\left(\mu^2/k_1^2(\mu)\right)C_{1t}^{-2}}$ is the wave coefficient of antiplane deformation waves.

In the case of a high-frequency electroelastic wave signal (short waves, when $ª(\mu)\ll h$ or $k(\mu)\cdot h\gg 1$), on the surface $y=-h$ of piezoelectric rectangles $\Omega_{1n}(x,y)$ electroelastic surface waves of Gulyaev-Bleustein type are formed. On the surfaces $y=h$ of piezoelectric rectangles $\Omega_{1n}(x,y)$, the localization of electroelastic waves of the Gulyaev-Bleustein type does not occur. Each of the formed forms has its own phase dependence $k_1^-(\mu)=k_{GB}(\mu)$ or $k_1^+(\mu)=k_{0*}(\mu)$ with its own phase

velocity $V_{GB}^{-}(\mu)=\mu/k_{GB}(\mu)$ or $V_{0*}^{+}(\mu)=\mu/k_{0*}(\mu)$. From (2.1) it is obvious that only short waves of length $\alpha_1(\mu)<2\pi C_{1t}/\mu$ can be fading.

The wave number $k_1(\mu)$ in the interlayer $\Omega_{1n}(x,y)$ is determined from the shaping equation

$$\sigma_{1t}\left[\sigma_{1t}th(2\sigma_{1t}k_1h)-\kappa_1^2th(2k_1h)\right]=0 \tag{2.2}$$

From (2.2) it follows that in a layer of limited thickness, waves of the Gulyaev-Bleustein type become strongly dispersive.

In consequence of the conjugation of electric fields on the face surfaces of contiguous interlayers $\Omega_{1n}(x,y)$ and $\Omega_{2n}(x,y)$, in the interlayer $\Omega_{2n}(x,y)$, an electroelastic plane deformation wave is generated [6, 7]

$$u_2(x,y,t)=\begin{bmatrix} A_{u+}e^{p_{u}y}+A_{u-}e^{-p_{u}y}+ \\ +a_{v+}B_{v+}e^{p_{v}y}+a_{v-}B_{v-}e^{-p_{v}y}+a_{\psi+}D_{\psi+}e^{p_{\psi}y}+a_{\psi-}D_{\psi-}e^{-p_{\psi}y} \end{bmatrix}\cdot\exp[i(k_2x-\mu t)] \tag{2.3}$$

$$v_2(x,y,t)=\begin{bmatrix} B_{v+}e^{p_{v}y}+B_{v-}e^{-p_{v}y}+ \\ +b_{u+}A_{u+}e^{p_{u}y}+b_{u-}A_{u-}e^{-p_{u}y}+b_{\psi+}D_{\psi+}e^{p_{\psi}y}+b_{\psi-}D_{\psi-}e^{-p_{\psi}y} \end{bmatrix}\cdot\exp[i(k_2x-\mu t)] \tag{2.4}$$

$$\psi_2(x,y,t)=\begin{bmatrix} D_{\psi+}e^{p_{\psi}y}+D_{\psi-}e^{-p_{\psi}y}+ \\ +d_{u+}A_{u+}e^{p_{u}y}+d_{u-}A_{u-}e^{-p_{u}y}+d_{v+}B_{v+}e^{p_{v}y}+d_{v-}B_{v-}e^{-p_{v}y} \end{bmatrix}\cdot\exp[i(k_2x-\mu t)] \tag{2.5}$$

The indexes of the eigenmodes of the oscillations $p_{u-}(\mu/k_2)=-p_{u+}(\mu/k_2)$, $p_{v-}(\mu/k_2)=-p_{v+}(\mu/k_2)$, $p_{\psi-}(\mu/k_2)=-p_{\psi+}(\mu/k_2)=k_2$ are the solutions of the characteristic equation of the system (1.6). The matching coefficients $a_{v+};a_{v-};a_{\psi+};a_{\psi+};b_{u+};b_{u-};b_{\psi+};b_{\psi-};d_{u+};d_{u-};d_{v+};d_{v-}$ are also defined from the same system.

In the characteristic equation $\sigma_{2l}=\sqrt{\gamma_{61}-\left(\mu^2/k_2^2(\mu)\right)C_{2l}^{-2}}$ and $\sigma_{2t}(\mu)=\sqrt{\gamma_{16}-\left(\mu^2/k_2^2(\mu)\right)C_{2t}^{-2}}$ are the wave coefficients of the plane deformation and $\kappa_{16}^2=e_{11}^{(2)}\Big/\left(c_{66}^{(2)}\varepsilon_{11}^{(2)}\right)$ is the electromechanical coupling coefficient of the second piezoelectric.

In order to have damped electroelastic waves of Rayleigh type in the interlayer $\Omega_{2n}(x,y)$, it is necessary that the truncated characteristic biquadratic equation

$$\left(1+\kappa_{16}^2\right)p^4-\left[\left(1+\kappa_{16}^2\right)\sigma_{2l}^2+\sigma_{2t}^2+\kappa_{11}^2-\kappa_{16}^2-\left(\gamma_{16}+\gamma_{61}-2\right)\right]k_2^2p^2+\sigma_{2t}^2\sigma_{2l}^2k_2^4=0 \tag{2.6}$$

has two positive roots: $p_{u\pm}^2(\mu/k_2)>0$ and $p_{v\pm}^2(\mu/k_2)>0$.

Substituting the solutions (2.3)÷(2.5) into the boundary conditions (1.11), (1.13) and (1.14), we obtain the shaping equation in the interlayer $\Omega_{1n}(x,y)$ in the form

$$\det\left\|g_{ij}[k_1(\mu);\sigma_{2l}(\mu);\sigma_{2t}(\mu);\kappa_{11}^2;\kappa_{16}^2;\gamma_{16}\right\|_{6\times6}=0 \tag{2.7}$$

Hence, the wave number $k_2(\mu)$ in the interlayers $\Omega_{2n}(x,y)$ is determined.

In the case of propagation of a high-frequency electroelastic wave signal (short waves, when $\alpha(\mu)\ll h$ or $k(\mu)\cdot h\gg1$), at each boundary $y=\pm h$ of the piezoelectric rectangle $\Omega_{2n}(x,y)$, electroelastic surface waves of Rayleigh type are formed. Each of them has its own phase dependence $k_2^{\pm}(\mu)=k_R^{\pm}(\mu)$, with its phase velocity $V_R^{\pm}(\mu)=\mu/k_R^{\pm}(\mu)$ [6, 7].

In this case, Eq. (2.7) decays into two more simplified equations characterizing the electroelastic waves of Rayleigh type localized at the free surfaces of the interlayer $\Omega_{2n}(x,y)$.

$$\det\left\|g_{ij}^{(-)}[k_1(\mu);\sigma_{2l}(\mu);\sigma_{2t}(\mu);\kappa_{16}^2;\gamma_{16}\right\|_{3\times3}=0;\quad \det\left\|g_{ij}^{(+)}[k_2(\mu);\sigma_{2l}(\mu);\sigma_{2t}(\mu);\kappa_{16}^2;\gamma_{16}\right\|_{3\times3}=0 \tag{2.8}$$

Naturally, for different electromechanical conditions on external surfaces $y=\pm h$, the localization of wave energy occurs in different modes. The regions for determining the phase velocities of slow surface waves in the interlayers are different. In these interlayers for permissible frequencies the lengths $\alpha_{GB}(\mu)$ or $\alpha_R(\mu)$ of propagating waves are also different. In fact, in alternating layers of the composite waveguide heterogeneous wave fields carrying the given wave information are formed.**2.2**

Propagation of the formed forms in a periodically longitudinally inhomogeneous composite layer. Taking into account the periodicity of the modeled longitudinally inhomogeneous waveguide, in order to determine the patterns of propagation of the formed forms of electroelastic waves, we use the Floquet-Lyapunov theory for periodic structures.

Formally representing the solutions of (2.1) and (2.3) ÷ (2.5) in the form of normal waves

$$f_{nm}(x,y,t) = F_{nm}(y)\cdot\left[C_{nm}\sin[k_m(\mu)x] + D_{nm}\cos[k_m(\mu)x]\right]\cdot\exp(-i\mu t)$$

and substituting into the boundary conditions of the conjugacy of the electromechanical field at the inner ends $x_{-1n} = -a_2 \pm n(a_1 + a_2)$, $x_{0n} = \pm n(a_1 + a_2)$, $x_{1n} = a_1 \pm n(a_1 + a_2)$ and the interlayers $\Omega_{1n}(x,y)$ and $\Omega_{2n}(x,y)$ without acoustic contact (1.10)÷(1.15), we obtain the dispersion equation of propagation (dispersion equation of frequency filtration) of electroelastic waves

$$\cos^2(Lk) + f\left(k_{GB}^{\pm}(\mu);k_R^{\pm}(\mu)\right)\cdot\cos(Lk_n) + 4g\left(k_{GB}^{\pm}(\mu);k_R^{\pm}(\mu)\right) - 8 = 0$$

From the filtration equation, for different combinations of selected pairs of piezoelectric materials, zones of admissible frequencies for localized and non-localized electroelastic waves propagating along the composite waveguide are determined. By proper choice of materials and linear dimensions of the interlayers, the optimal transfer of wave energy from one layer to another can be achieved, or vice versa.

Based on this an original electromechanical resonator can be created.

The filtration equation also gives forbidden frequency bands for which the composite waveguide of certain piezoelectrics and linear dimensions does not allow the propagation of localized electroelastic waves, or waves in general. This will allow to mute unnecessary frequencies in a device with a composite waveguide.

REFERENCE

1. M.I.Hussein, M.J. Leamy, M. Ruzzene, Dynamics of phononic materials and structures: historical origins, recent progress, and future outlook, Applied Mechanics Reviews, 2014, v. 66, p.040802/1-38
2. E. H. Lee, A survey of variation methods for elastic wave propagation analysis in composites with periodic structures, in Dynamics of Composite Materials, E. H. Lee, ed., ASME, New York, 1972, pp. 122–138.
3. S. Adams, R. Craster, S. Guenneau , Bloch waves in periodic multi-layered acoustic waveguides, Proceedings Royal Society London A 464 (2008) p.2669-2692,
4. Qian Z.H., Jin F., Wang Z.K., Kishimoto K., Dispersion relations for SH-wave propagation in periodic piezoelectric composite layered structures, Int. J. Eng. Sci., vol. 42 (2004), pp.673-689
5. Avetisyan A.S., The problem of propagation of shear waves in a piezoelectric medium, Procc. of NAS of Armenia, Mechanics, (1985), vol. 38, №1, pp. 12-19.
6. Avetisyan A.S., Khachatryan V.M., The formulation and propagation of elastic ***(SH)*** shear waves in a cellular composite waveguide, Procc. of NAS of Armenia, Mechanics, (2018), vol. 71, №3, pp. 13-40.
7. Avetisyan A.S., Mkrtchyan S.H., The electro-elastic Rayleigh waves in a case of electrically opened or electrically closed surfaces of the waveguide, Procc. of NAS of Armenia, Mechanics, (2018), vol. 71, №1, pp. 12-30.

About authors:

Department of Dynamics of Deformable Systems and Coupled Fields, Institute of Mechanics of NAS of Armenia, Baghramyan ave. 24/2, 0019, Yerevan, Armenia

Avetisyan A.S., E–mail: ara.serg.avetisyan@gmail.com,

Khachatryan V.M., E–mail: khachvaz@gmail.com,

Kamalyan A.A., E–mail: Kamalyan.Andranik@yahoo.com

ON THE BENDING VIBRATIONS OF ORTHOTROPIC ELASTIC FASTENING STRIPS AND BEAMS WITH TAKING INTO ACCOUNT THE TRANSVERSE SHEAR AND CHANGE OF TEMPERATURE

Gevorgyan G.Z, Kirakosyan R.M.

The problem of bending vibrations of orthotropic elastic fastening strips and beams of variable thickness is considered taking into account the transverse shear and temperature changes. The equations obtained make it possible to determine the frequencies of the natural oscillations as a function of the axial force due to the change in temperature. The problems are solved by the collocation method for various values of the geometric and physical parameters.

Consider an orthotropic plate-strip of variable thickness $h(x)$, length a. The coordinate plane xOy is compatible with the middle plane of the plate. The coordinate axes are parallel to the main directions of anisotropy of the plate-strip material. The equations of flexural vibrations of a plate-strip, taking into account the effect of transverse shear and the presence of an axial force, can be represented in the form [1], [2]:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} = -P\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} - N_x = -\frac{\rho h^3}{12}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} - a_{55}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}\right) \tag{1}$$

Where

$$N_x = \frac{2}{3}h\varphi_1 - \frac{h^2 B_{11}}{12}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - a_{55}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right)\frac{\partial h}{\partial x},\ M_x = -\frac{h^3 B_{11}}{12}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - a_{55}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right) \tag{2}$$

Here a_{ij} and B_{ij} are the elastic parameters of the material, φ_1 –a function characterizing the distribution of tangential stresses τ_{xz}, w the deflection of the middle plane of the plate-strip, t-time, and ρ –the density of the material. The remaining notations are generally accepted [3]. In the case of a beam, B_{11} replace it with E. Let us assume that there are no stresses in the plate at the initial time. At the final moment, the temperature of the plate changes by an amount θ. For deformation in the axial direction, we can write

$$\varepsilon_x = \alpha\theta + \frac{P_0}{B_{11}h} \tag{3}$$

where α is the coefficient of thermal expansion. If the plate is fixed in the axial direction, from the condition of invariance of the length, we obtain:

$$P_0 = -\frac{\alpha\theta B_{11} l}{\int_0^l \frac{dx}{h}} \tag{4}$$

In the case of resilient fastening $P = \beta P_0,\quad 0 \le \beta \le 1$. In the case of rigid fixation $\beta = 1$.

We introduce dimensionless quantities

$$\begin{gathered} x = a\bar{x},\ h = h_0 H,\ s = h_0 / a,\ N_x = \bar{N}_x B_{11} h_0 e^{i\omega t},\ M_x = \bar{M}_x B_{11} h_0^2 e^{i\omega t},\ \alpha\theta = \bar{\theta} \\ P = TB_{11}h_0,\ w = \bar{w}h_0 e^{i\omega t}, u = \bar{u}h_0 e^{i\omega t},\ \varphi_1 = \varphi B_{11} e^{i\omega t},\ \omega^2 = \Omega^2 B_{11} / \rho a^2,\ \chi = a_{55}B_{11}, \end{gathered} \tag{5}$$

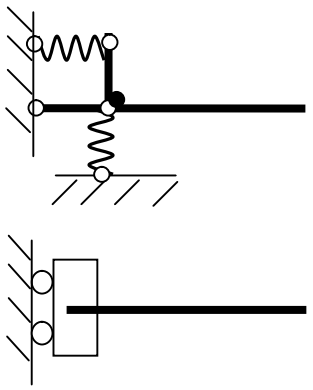
Substituting (2) in (1), proceeding to the problem of oscillations and using dimensionless notation, we obtain

$$\begin{gathered} \left(12sT - s^3H^2H''\right)\bar{w}'' + \Omega^2 s^2 H^2 \bar{w}' + 12\Omega^2 sH\bar{w} + \\ + \left(8H + \chi s^2 H^2 H''\right)\varphi' + \left(16H' - \chi\Omega^2 s^2 H^2 H'\right)\varphi = 0 \end{gathered} \tag{6}$$

$$s^3H^2\overline{w}''' + 2s^3HH'\overline{w}'' + \Omega^2 s^3 H^2 \overline{w}' -$$
$$-\chi s^2 H^2 \varphi'' - 2\chi s^2 HH'\varphi' + \varphi\left(8 - \chi\Omega^2 s^2 H^2\right) = 0$$

Typically, the boundary conditions of embedding, hinged support or free end are used. Closer to real conditions are the elastic sealing conditions [4]. Which, after some changes, we present in the form:

1. The angle of rotation of the middle line or the end of the plate is proportional to the bending moment, which in the dimensionless form is represented by:



1.a) $l_1 \dfrac{d\overline{w}}{dx} \pm (1 - l_1)\overline{M}_x = 0$ or 1.b) $l_1 \dfrac{d\overline{u}}{dz} \pm (1 - l_1)\overline{M}_x = 0$ if χ =0 they coincide

2. The shear force is proportional to the displacement w (Fig. 1).

$l_2 \overline{w} + (1 - l_2)\overline{N} = 0$

From these conditions for different $l_1,\ l_2$, the following boundary conditions can be obtained:

a) $l_1 = 0,\ l_2 = 0\ (\overline{M} = 0,\ \overline{N} = 0)$ - free end

b) $l_1 = 0,\ l_2 = 1\ (\overline{M} = 0,\ \overline{w} = 0)$ - hinged support

c) $l_1 = 1,\ l_2 = 0\ (d\overline{w} / d\overline{x} = 0,\ \overline{N} = 0)$ the symmetry conditions or can be called a sliding seal (Fig. 1b).

Fig. 1

d) $l_1 = 1,\ l_2 = 1\ (d\overline{w} / d\overline{x} = 0,\ \overline{w} = 0)$ - a rigid fit.

In [6] for the elastic sealing conditions, a slightly different approach.

The dimensionless displacement, lateral force and moment have the form:

$$u_x = z\left(s\frac{d\overline{w}}{d\overline{x}} - \chi\varphi\right),\ \ \overline{N} = s^3 H \frac{dH}{d\overline{x}} - \chi s^2 H \frac{dH}{d\overline{x}}\frac{d\varphi}{d\overline{x}} - 8\varphi,\ \ \overline{M}_x = s\frac{d^2\overline{w}}{d\overline{x}^2} - \chi\frac{d\varphi}{d\overline{x}} \tag{7}$$

Equations (6) make it possible to solve both the stability problem and the vibration problem taking into account the temperature change. If we put $\Omega = 0$, then we can determine the critical value of the force, and the temperature at which the plate-strip loses stability.

Let us consider strip-plates of variable thickness, for which the dimensionless thickness varies according to the laws (Fig 2):

$$a)\ H(\overline{x}) = 1,\ b)\ H(\overline{x}) = 2(1 + \overline{x})/3,\ c)\ H(\overline{x}) = 3(\overline{x} - 0.5)^2 + 0.75$$
$$d)\ H(\overline{x}) = 1.2[1 - 2(\overline{x} - 0.5)^2],\ e)\ H(\overline{x}) = 0.6(2 - \overline{x}^2),\ f)\ H(x) = 0.75[1 + (\overline{x} - 1)^2] \tag{8}$$

They all have the same cross-sectional area and thickness of the thickest part of the variability in the fine twice.

The problem will be solved by a modified collocation method. The functions $\overline{w}$ and φ take in the form

$$\overline{w} = \sum_{i=0}^{n} a_i \overline{x}^i,\ \ \varphi = \sum_{i=0}^{n} b_i \overline{x}^i \tag{9}$$

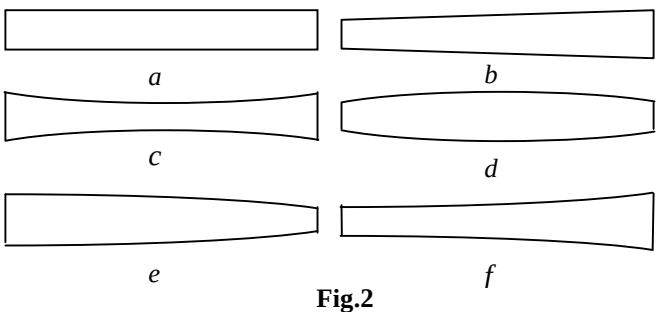


Fig.2

As collocation points, we take the zeros of the shifted Chebyshev polynomials $T_n(2\bar{x}-1)$, $\bar{x}_k = \left[1+\cos\frac{\pi(k-1/2)}{n}\right]/2$. Satisfying the equations (6) at the points of collocations, and at the end points to the boundary conditions, we obtain a homogeneous system of $2n+4$ equations with respect to a_i, b_i.

After determining the critical values of force or frequencies of natural oscillations, one can determine both the form of the functions and those corresponding to these values. To do this, we must divide the resulting equations by one of the coefficients and, convert the corresponding column to the right side and discard one of the equations. Solving these equations, we can determine the functions $\bar{w}$ and φ. with an accuracy of a constant factor.

In Table. 1-3 shows the dimensionless values of *Tcr* for three types of boundary conditions.

Table 1

rig.- rig.	a	b	C	d	E	f
$\chi=0$	-0,0337	-0,0273	-0.0442	-0.0272	-0.0273	-0.0290
$\chi=3$	-0,0290	-0,0243	-0.0323	-0.0240	-0.0241	-0.0252
$\chi=10$	-0,0221	-0,0189	-0.0228	-0.0187	-0.0188	-0.0195

Table 2

rig.-hinge. hinge- rig.-- .	a	b	C	d	E	f
$\chi=0$	-0.0168	-0,0145 -0.0146	-0.0139	-0.0165	-0.0148 -0.0149	-0.0141 -0.0148
$\chi=3$	-0.0155	-0.0135 -0.0135	-0.0132	-0.0152	-0.0135 -0.0139	-0.129 -0.0131
$\chi=10$	-0.0132	-0.0115 -0.0115	-0.0114	-0.0129	-0.0116 -0.0118	-0.0111 -0.0112

Table 3

hinge.- hinge.	a	b	C	d	E	f
$\chi=0$	-0.00823	-0.00717	-0.00457	-0.0107	-0.00789	-0.00625
$\chi=3$	-0.00793	-0.00692	-0.00444	-0.0103	-0.00759	-0.00606
$\chi=10$	-0.00732	-0.00641	-0.00415	-0.0093	-0.00699	-0.00564

In Table. 4-6 are the dimensionless values of the first frequency for three values of T.

Table 4

rig.- rig.		a	b	c	d	E	f
$\chi=0$	$T=0$	0.644	0.626	0.807	0.513	0.595	0.665
	T=0.5T_{cr}	0.422	0.425	0.441	0.317	0.428	0.478
	T=-0.5T_{cr}	0.714	0.753	1.03	0.651	0.719	0.805
$\chi=3$	$T=0$	0.591	0.578	0.747	0.474	0.549	0.615
	T=0.5T_{cr}	0.383	0.422	0.509	0.260	0.397	0.446
	T=-0.5T_{cr}	0.735	0.694	0.910	0.616	0.662	0.739
$\chi=10$	$T=0$	0.506	0.498	0.645	0.410	0.473	0.531
	T=0.5T_{cr}	0.365	0.367	0.469	0.332	0.345	0.390
	T=-0.5T_{cr}	0.611	0.595	0.765	0.474	0.569	0.632

Table 5

rig.-hinge. hinge- rig		a	B	c	d	E	f
$\chi = 0$	$T = 0$	0.443	0.390 0.473	0.467	0.403	0.458 0.388	0.393 0.486
	T=0.5T_{cr}	0.315	0.276 0.341	0.348	0.287	0.329 0.274	0.270 0.342
	T=-0.5T_{cr}	0.539	0.477 0.568	0.564	0.491	0.553 0.475	0.485 0.590
$\chi = 3$	$T = 0$	0.422	0.374 0.449	0.453	0.384	0.436 0.371	0.377 0.464
	T=0.5T_{cr}	0.301	0.265 0.326	0.323	0.274	0.314 0.262	0.247 0.315
	T=-0.5T_{cr}	0.512	0.457 0.541	0.550	0.467	0.526 0.454	0.471 0.567
$\chi = 10$	$T = 0$	0.383	0.343 0.407	0.418	0.349	0.395 0.340	0.346 0.421
	T=0.5T_{cr}	0.273	0.244 0.298	0.300	0.250	0.289 0.243	0.245 0.308
	T=-0.5T_{cr}	0.466	0.419 0.486	0.505	0.424	0.472 0.414	0.423 0.503

Table 6

hinge-hinge		a	b	C	d	e	f
$\chi = 0$	$T = 0$	0.284	0.273	0.234	0.310	0.282	0.260
	T=0.5T_{cr}	0.200	0.193	0.167	0.220	0.201	0.185
	T=-0.5T_{cr}	0.348	0.333	0.285	0.379	0.345	0.318
$\chi = 3$	$T = 0$	0.279	0.268	0.230	0.304	0.277	0.256
	T=0.5T_{cr}	0.197	0.191	0.165	0.215	0.222	0.182
	T=-0.5T_{cr}	0.341	0.328	0.281	0.372	0.338	0.313
$\chi = 10$	$T = 0$	0.268	0.260	0.225	0.290	0.266	0.247
	T=0.5T_{cr}	0.190	0.184	0.162	0.206	0.190	0.176
	T=-0.5T_{cr}	0.328	0.316	0.273	0.354	0.325	0.302

In the tables given, it is accepted s=0.1 for three values $\chi = 0$ corresponds to the classical formulation of the problem, when the influence of the transverse shear is not taken into account, $\chi = 3$ refers to an isotropic plate-strip at $\nu = 1/3$, and $\chi = 10$ -to an orthotropic plate.

From the above tables, as might be expected, it can be concluded that a compressive force or an increase in temperature with an unchanged length of the plate leads to a decrease in the frequency of the flexural vibrations of the plate-strip, and the tensile force or the decrease in temperature, to an increase.

As shown by numerical calculations, the difference between the boundary conditions 1.a and 1.b at not more than 3%.

The critical temperature may be calculated by the formula $\overline{\theta}_{cr} = T_{cr} s \int_o^1 \frac{dx}{H(x)}$. For other discussed cases $\int_o^1 \frac{dx}{H(x)}$ is vareed from 1.03-1.05. For constant thickness it equal to 1.

The greatest difference in *Tcr* for classical and refined statements is 48% and occurs when both ends are embedded in plate c) when the thin part is in the middle of the plate-strip.

When both ends are embedded in case c), the value of *Tcr* is 33% greater than for a plate of constant thickness.
In the case of a joint-hinge, the maximum value of *Tcr* assumes a constant thickness for the plate, and the hinge-hinge case for plate d) is 29% larger than for a plate of constant thickness.
For the problem of free oscillations, the greatest difference in the classical and refined formulations is 25% and occurs also in the case when both ends are fixed in case c) at $\chi = 10$.
The greatest difference with respect to a plate of constant thickness also occurs when both ends are embedded in case c) and is 25%.

References

1 Киракосян Р.М. Основные уравнения ортотропных пластин переменной толщины при учете поперечных сдвигов и обжатия.// Изв. НАН Армении. Механика. 2002. Т.55. №4. С.12–20.Kirakosyan R.M. Basic equations of orthotropic plates of variable thickness with allowance for transverse shear and compression. Proc. NAS of Armenia. Mechanics. 2002.V .55. №4. P.12-20.
2. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Физматгиз, 1959. 439с.Timoshenko S.P. Vibration Problems in Engineering
3. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360с. Ambartsumian S.A. The theory of anisotropic plates.
4. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник под.ред. Биргера И.А. и Пановко Я.Г. Т.3. Изд. Машиностроение, 1964. 564с. Strength, stability, vibrations. Reference book under. Birger I.A. and Panovko Ya.G. T.3. Ed. Mechanical Engineering, 1964. 564p.
5. Геворкян Г.З., Киракосян Р.М. Свободные поперечные колебания прямоугольных ортотропных пластин переменной толщины при учёте поперечных сдвигов и инерции вращения.// В сб., посв. 80-летию академика НАН РА С.А. Амбарцумяна. Ереван: 2002. С.137–146. Gevorgyan GZ, Kirakosyan R.M. Free transverse oscillations of rectangular orthotropic plates of variable thickness with allowance for transverse shifts and inertia of rotation. // In coll., Cons. The 80th anniversary of academician of NAS RA S.A. Ambartsumian. Yerevan: 2002. P.137-146.
6. Киракосян Р.М. Неклассическая задача изгиба ортотропной балки с упруго защемленной опорой. Докл. НАН Армении. Т 114, 2014, №2. С.101–107.Kirakosyan R.M. Nonclassical bending problem for an orthotropic beam with an elastically supported support. Dokl. NAS of Armenia. V 114, 2014, No. 2. P.101-107.
7. Геворкян Г.З., Киракосян Р.М. О неклассической задаче определения частот свободных колебаний ортотропных пластин линейно-переменной толщины. //В сб.: “Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред”. Горис 1–7 октября 2005.Gevorgyan GZ, Kirakosyan R.M. On the nonclassical problem of determining the frequencies of free oscillations of orthotropic plates of linearly variable thickness. // In: "Problems of dynamics of interaction of deformable media". Goris October 1-7, 2005.
8. Геворкян Г.З. Статическая устойчивость ортотропных пластин-полос переменной толщины при учёте поперечного сдвига. // В сб.: Актуальные проблемы механики сплошной среды. Труды II международной конференции, 4-8 октября, Дилижан, Армения. С.177–181.Gevorgyan G.Z. Static stability of orthotropic plate-strips of variable thickness with allowance for transverse shear. // In: Actual problems of continuum mechanics. Proceedings of the II International Conference, October 4-8, Dilijan, Armenia. P.177-181.

About the author:

Gevorgyan Gnun
Ph.D. Institute of Mechanics NAS RA
E-mail: gnungev2002@yahoo.com, E-mail gnungev@gmail.com
Kirakosyan Razmik
Doctor of sci. Institute of Mechanics NAS RA
E-mail armanrw@gmail.com

PIEZOELECTRIC SHEAR SURFACE WAVES NEAR AN IMPERFECTLY BONDED INTERFACE BETWEEN LAYER AND HALF-SPACE

Ghazaryan K.B., Mozharovsky V.V., Papyan A.A., Sarkisyan S.V.

The paper focuses on shear surface wave propagation in layered piezoceramic media (layer and half-space) with imperfect interface. The bonding along interface is considered to be imperfect with the assumption that the imperfect interface is dielectrically weakly conducting one. Dispersion equation was derived analytically. The influence of imperfect interface on surface wave phase speed and some interesting phenomena were discussed.

Introduction.

Piezoelectric composites that are made of by using two or more types of piezoceramics are widely studied and discussed in [1-10, 12]. In the analyses [1-5] of wave propagation in these composites the perfect bonding at the interface between two materials is routinely assumed, i.e., the elastic displacement and traction, tangential electric field and normal electric displacement are continuous across the interface. The composite structures consisting of piezoelectric ceramics with several types of partial contacts at the interface between two materials i.e., the electrically (magnetically) shorted or electrically (magnetically) closed, mechanically compliant (sliding) interfaces are considered in [6-10]. A model of boundary contact for electro-magneto-elastic composites with interface roughness is proposed in [11].

In the paper an analytical solution is given for a problem of shear surface wave propagation near imperfectly bonded interface between layer and half-space. The imperfectly bonded interface is considered to be mechanically perfect and dielectrically weakly conducting one, e.g. the tractions and elastic displacements are continuous, while the normal electrical displacement is continuous but the tangential electrical field is discontinuous across the interface [12].

Statement and solution.

Consider piezoceramic layer and piezoceramic semi-space imperfectly bonded at interface $x=0$.

The y and z axes are in the interface, where $x=0$, the region $-h<x<0$ is occupied by piezo ceramic (2) and $x>0$ by piezo ceramic (1). The ceramics are from of 6mm hexagonal symmetry class and are poled along the z or $-z$ direction.

We consider the anti-plane motion. The displacement vector is given by

$U_x = U_y = 0, \quad U_z = U_z(x,y,t)$.

The governing equation and material relation in quasi static approximation can be cast as $(i=1,2)$

$$\nabla\cdot\vec{\sigma}_i = \rho\frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2}, \qquad \nabla\times\vec{E}_i = 0, \qquad \nabla\cdot\vec{D}_i = 0, \qquad \vec{E}_i = -\vec{\nabla}\cdot\varphi_i,$$

$$\vec{\sigma} = \vec{\nabla}\left(G_i U_i + e_{15i}\varphi_i\right), \qquad \vec{D}_i = \vec{\nabla}\left(-\varepsilon_i\varphi_i + e_{15i}U_i\right), \vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{1}$$

$$\vec{\sigma} = \left(\sigma_{xz}(x,y,t), \sigma_{yz}(x,y,t)\right); \quad \vec{E} = \left(E_x(x,y,t), E_y(x,y,t), 0\right);$$

$$\vec{D} = \left(D_x(x,y,t), D_y(x,y,t), 0\right),$$

Here, σ_{xz} and σ_{yz} are shear stresses, $\vec{E}$ is the electric field intensity vector, $\vec{D}$ is the electrical displacement vector, $\varphi = \varphi(x,y,t)$ is the electric field potential, ρ is bulk density, G is the shear modulus, ε is electrical permittivity coefficient, e is the piezoelectric modulus.

Using (1) we get the following set of equations

$$c_i^2\Delta U_i - \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = 0; \qquad \Delta\left(U_i - \frac{e_i}{\varepsilon_i}\varphi_i\right) = 0, \; i=1,2 \tag{2}$$

where $c_i = \sqrt{\left(G_i + \varepsilon_i^{-1}e_i^2\right)\rho_i^{-1}}, \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

At the interface $x=-h$ me take the following boundary conditions

$$\sigma_{2xz}\left(-h,y,t\right)=0;\quad \varphi_2\left(-h,y,t\right)=0;$$

At mechanically perfect and dielectrically weakly conducting interface $x=0$ we have the following boundary conditions [12].

$$\begin{aligned}
&\sigma_{1xz}\left(0,y,t\right)=\sigma_{2xz}\left(0,y,t\right);\\
&U_1\left(0,y,t\right)-U_2\left(0,y,t\right)=0;\\
&\varphi_1\left(0,y,t\right)-\varphi_2\left(0,y,t\right)=0;\\
&D_{x1}\left(0,y,t\right)-D_{x2}\left(0,y,t\right)+\zeta\varphi_1\left(0,y,t\right)=0;
\end{aligned}\tag{3}$$

where dielectric interface parameter is positive $\zeta\geq 0$. For instance, if $\zeta=0$ conditions (3) corresponds to a perfectly bonded interface; $\zeta=\to\infty$ (3) conditions describes a mechanically completely and electrically shorted interface.

For surface wave we require that all fields to vanish at $x\to\infty$

$$\lim_{x\to\infty}U_1\left(x,y,t\right)=0;\ \lim_{x\to\infty}\varphi_1\left(x,y,t\right)=0;$$

Presenting the solutions in the form of plane wave propagating along y direction,

$$U_i\left(x,y,t\right)=U_{0i}\left(x\right)\exp\left(iky-i\omega t\right),\quad \varphi_i\left(x,y,t\right)=\varphi_{0i}\left(x\right)\exp\left(iky-i\omega t\right),\tag{4}$$

we get functions $U_{0i}\left(x\right),\varphi_{0i}\left(x\right)$ as

$$\begin{aligned}
&U_{01}\left(x\right)=C_{12}\exp\left(-kx\sqrt{1-\eta_1^2}\right),\eta_1<1\\
&\varphi_{01}\left(x\right)=A_{12}\exp\left(-kx\right)+C_{12}\frac{e_1}{\varepsilon_1}\exp\left(-kx\sqrt{1-\eta_1^2}\right)\\
&U_{02}\left(x\right)=C_{21}\cos\left(kx\sqrt{\eta_2^2-1}\right)+C_{22}\sin\left(kx\sqrt{\eta_2^2-1}\right)\\
&\varphi_{02}\left(x\right)=A_{21}\cosh\left(kx\right)+A_{22}\sinh\left(k\,x\right)+\frac{e_2}{\varepsilon_2}\left(C_{21}\cos\left(kx\sqrt{\eta_2^2-1}\right)+C_{22}\sin\left(kx\sqrt{\eta_2^2-1}\right)\right)
\end{aligned}\tag{5}$$

Here $C_{12},C_{21},C_{22},A_{12},A_{21},A_{22}$ are the arbitrary constants, $\eta_i=\omega\left(c_ik\right)^{-1}$ is the dimensional phase speed of electro-elastic surface wave, the condition $\eta_1<1$ provides decaying of surface waves from interface. Substituting these solutions into the boundary conditions (3), a homogeneous set of equations, with respect to the arbitrary constants $C_{12},C_{21},C_{22},A_{12},A_{21},A_{22}$ is obtained.

The dispersion equation can be obtained by equating the determinant of the set of equations to zero. This equation is very cumbersome and will be omitted here.

We will now consider two important special cases.

1) The layer and semi-space are of the same ceramic and are poled in the same direction;

In this case the dispersion equation can be cast as

$$\theta(\mathrm{f}_1+\mathrm{f}_2)-2K(1+\chi)\,\mathrm{f}_3=0\tag{6}$$

$$\mathrm{f}_1 = (1+\chi)^2\left(1-\eta^2\right)+\chi^2-2\sqrt{1-\eta^2}\chi(1+\chi);$$
$$\mathrm{f}_2 = 4e^{-K\left(1+\sqrt{1-\eta^2}\right)}\sqrt{1-\eta^2}\chi(1+\chi)-e^{-2K\sqrt{1-\eta^2}}\chi\left(\sqrt{1-\eta^2}+\chi+\sqrt{1-\eta^2}\chi\right)-$$
$$-e^{-2K}(1+\chi)\left(\left(1-\eta^2\right)(1+\chi)+\sqrt{1-\eta^2}\chi\right); \tag{7}$$
$$\mathrm{f}_3 = \left(\sqrt{1-\eta^2}\chi-\left(1-\eta^2\right)(1+\chi)\right);$$

Here the following notations are used

$$K = kh;\ \chi = \frac{e_{15}^2}{G\varepsilon};\ \eta = \frac{\omega}{(ck)};\ \ \theta = \frac{\zeta h}{\varepsilon}. \tag{8}$$

Equation (6) determines the wave speed $\eta(\theta, K)$ regarding dimensionless thickness parameter K and dimensionless interface dielectric parameter θ. When $\theta = 0$ we have

$$\mathrm{f}_3 = 0 \tag{9}$$

The solution of (6) does not depend from K and coincides with the well-known Bluestein-Gulyaev solution [13].

$$\eta_0 = \frac{\sqrt{1+2\chi}}{1+\chi} = \sqrt{1-\chi_0^4}; \qquad \chi_0^2 = \frac{e^2}{G\varepsilon+e^2} = \frac{\chi}{1+\chi} \tag{10}$$

Numerical analysis and discussion

Here and later all numerical analysis were realized for ceramic PZT-5H.

The analysis shows that for a fixed value of K with increasing dielectric interface parameter θ, the value of the phase velocity decreases, from $\eta_0 = 0.935$ up to minimal value $\eta_* = 0.88$ ($K = 1.5,\ \theta = 55.2$). Further increase of parameter θ does not change phase velocity η.

For a sufficiently large values of θ the dispersion equation (6) may have the two roots caused only by imperfect interface. For example, when $K = 5.6$ and $\theta = 95$ we have $\eta_1 \approx \eta_0 = 0.935, \eta_2 = 0.978$.

2) The layer and semi-space are of the same ceramic and are oppositely poled ;

In this case the dispersion equation can be written as

$$Kg_1 + \theta g_2 = 0 \tag{11}$$

$$g_1 = -5\chi(1+\chi)\sqrt{1-\eta^2}+(1+\chi)^2\left(1-\eta^2\right)+4\chi(1+\chi)\sqrt{1-\eta^2}\,\mathrm{sec}h(K)\,\mathrm{sec}h\left(K\sqrt{1-\eta^2}\right)-$$
$$-\left(\sqrt{1-\eta^2}\chi(1+\chi)+(1+\chi)^2\left(1-\eta^2\right)\right)\tanh(K)-$$
$$-\left(\sqrt{1-\eta^2}\chi(1+\chi)+(1+\chi)^2\left(1-\eta^2\right)\right)\tanh\left(K\sqrt{1-\eta^2}\right) \tag{12}$$
$$-\left((1+\chi)^2\eta^2-1+\chi\left(\sqrt{1-\eta^2}-2+\left(\sqrt{1-\eta^2}-5\right)\chi\right)\right)\tanh(K)\tanh\left(K\sqrt{1-\eta^2}\right)$$

$$g_2 = 2\chi(1+\chi)\sqrt{1-\eta^2}\,\mathrm{sec}h(K)\,\mathrm{sec}h\left(K\sqrt{1-\eta^2}\right)-$$
$$-\chi\left(2\sqrt{1-\eta^2}(1+\chi)+\left(\sqrt{1-\eta^2}+\left(\sqrt{1-\eta^2}-1\right)\chi\right)\tanh\left(K\sqrt{1-\eta^2}\right)\right)-$$
$$-\tanh(K)\left(\left((1+\chi)\left(\sqrt{1-\eta^2}-1\right)\chi-1+\eta^2(1+\chi)\right)-\left((1+\chi)^2\left(1-\eta^2\right)+\chi^2\right)\tanh\left(K\sqrt{1-\eta^2}\right)\right) \tag{13}$$

On the Fig.1 the dispersion curves are presented for two limiting cases of dielectric interface parameter θ: $\theta = 0, \theta \to \infty$. Dashed curve corresponds to the roots of equation $g_1 = 0$, the thin curve to the roots of equation $g_2 = 0$.

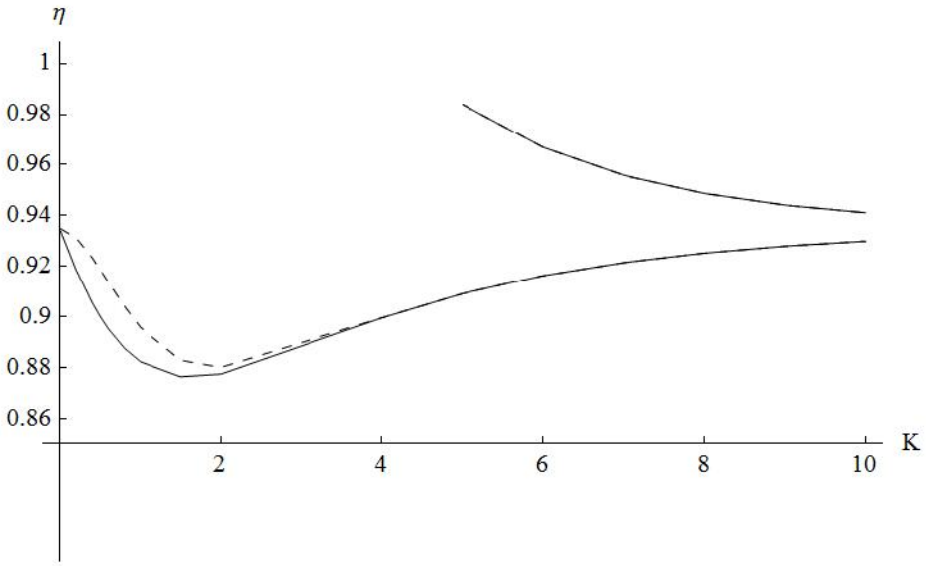


Fig.1. Phase speed dispersion curves, dashed curve correspond to the roots of equation $g_1 = 0$ thin curve to the roots of equation $g_2 = 0$

At $K = 0$ we have that curves start from $\eta = \eta_0$ and for sufficiently large values of K $\eta \to \eta_0$. Existence of two roots, namely the two different surface waves conditioned only by oppositely polarization of layer. As it follows from analysis of curves presented in Fiq.1 and numerical analysis of dispersion equation (11) for any values of dielectric interface parameter θ, the imperfect interface weakly affects the surface wave speed. The speed maximum deviation may reach 1.7 %. .

Acknowledgements
This work was supported by the RA MES State Committee of Science and Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (RB) in the frames of the joint research projects SCS AB16-47 and BRFFR T17APM-034, accordingly.

REFERENCE

1. Аветисян, А.С., Маргарян, Д.М., 1994. Электроупругие поверхностные волны сдвига на границе раздела двух пьезоэлектрических полупространств. Mechanics. Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia, 47(3-4), pp.31-36.
2. Danoyan, Z.N. and Piliposian, G.T., 2007. Surface electro-elastic Love waves in a layered structure with a piezoelectric substrate and a dielectric layer. International journal of solids and structures, 44(18-19), pp.5829-5847.
3. Даноян, З.Н., Атоян, Л.А., Саакян, С.Л. and Даноян, Н.З., 2014. Волны типа Лява в слоистой структуре, состоящей из двух однородных полупространств с неоднородными слоями, соединённых однородным слоем. Mechanics. Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia, 67(3), pp.49-55.
4. Nie, G., Liu, J., & Liu, X. (2017). Propagation behavior of two transverse surface waves in a three-layer piezoelectric/piezomagnetic structure. Waves in Random and Complex Media, 27(4), 637-663.
5. Singh, A.K., Parween, Z., Kumar, S. and Chattopadhyay, A., 2018. Propagation characteristics of transverse surface wave in a heterogeneous layer cladded with a piezoelectric stratum and an isotropic substrate. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 29(4), pp.636-652.

6. M.V. Belubekyan, V.M. Belubekyan, Surface waves in piezoactive elastic system of a layer on a semi-space. Proc. of the Yerevan State University. Phys.& Math. Sci., 2013, 3, pp.45–48
7. Белубекян, В. М., Белубекян, М. В., Поверхностные электроупругие сдвиговые волны в пьезоактивной системе слой – полупространство, Ученые записки ЕГУ,Ереван,3,2006, 25-30
8. Ghazaryan K.B, Piliposyan D.G, Interfacial effects for shear waves in one dimensional periodic piezoelectric structure., Journal of Sound and Vibration, 330 (26), 2011, pp.6456-6466. .
9. Piliposyan D.G., Piliposian G.T. and Ghazaryan K.B., 2017. Propagation and control of shear waves in piezoelectric composite waveguides with metallized interfaces. International Journal of Solids and Structures, 106, pp.119-128.
10. Gasparyan, D.K. and Ghazaryan, K.B., 2015. Shear Floquet waves in magneto-electro-elastic solid with periodic interfaces of imperfect contacts. Mechanics. Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia, 68(1), pp.57-65.
11. Avetisyan, A.S., 2015. On the formulation of the electro-elasticity theory boundary value problems for electro-magneto-elastic composites with interface roughness. Mechanics. Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia, 68(2), pp.29-42.
12. Wang, X., Sudak, L.J., 2007. A piezoelectric screw dislocation interacting with an imperfect piezoelectric bi-material interface. International journal of solids and structures, 44(10), pp.3344-3358.
13. Bluestein, J.L., A new surface wave in piezoelectric medium. Appl. Phys. Lett, 1968,13, pp.412-413.

Information about authors:

Ghazaryan K.B. – professor, principal researcher ,Institute of Mechanics NAS , Armenia,
Phone: (374 99) 227395, **E-mail:** ghkarren@gmail.com
Mozharovsky V.V. – professor, principal researcher, Head of laboratory, a Gomel State University, Belarus, **E-mail:** val-mozh@yandex.ru
Sarkisyan S.V. – professor, Chair of the mechanics , Yerevan State University, Armenia,
E-mail: vas@ysu.am
Papyan A.A. – Phd, science researcher, Institute of mechanics NAN of Armenia.
Phone: (374 93) 05 00 93. **E-mail:** aro088@mail.ru

ON A CLASS OF BOUNDARY-VALUE PROBLEMS ON INTERACTION OF STRINGERS AND STAMPS WITH MASSIVE ELASTIC BODIES

Grigoryan M.S., Hovhannisyan E.K., Mkhitaryan S.M.

This paper considers a class of mixed boundary-value problems of the mathematical theory of elasticity, which is related to the interaction of stringers and stamps with massive bodies in the form of an elastic half-plane and a quarter-plane.

1. Introduction. In classical contact problems of the theory of elasticity [1-4], a model of a smooth contact is used, when only normal forces act in the contact zone; while frictional and adhesion forces are neglected. These problems in the ideological and methodological aspects are closely related to the problem of loads transferring from thin-walled elements in the form of stringers to massive deformable bodies [5-8]. Here the Melan-Buffler contact model [5,6] is adopted, when only tangential forces act in the contact zone and normal forces are neglected because of the negligibly small rigidity of the stringer. In this paper a class of mixed boundary-value problems for an elastic half-plane and quarter-plane is discussed, when on one part of the elastic body boundary the stringer is considered to be absolutely rigid to stretching-compression and absolutely flexible to the bending, while on the rest part of the boundary, the condition of indentation of rigid stamps into the foundation or the condition for the elastic stringer fastened on the foundation boundary occurs.

2. Formulation of problems and derivation of basic equations. Let an elastic half-plane $y \le 0$ have modulus of elasticity E, Poisson's ratio ν and its boundary is loaded by normal and tangential forces of intensity $p(x)$ and $\tau(x)$, respectively:

$$\sigma_y\big|_{y=-0} = -p(x), \qquad \tau_{xy}\big|_{y=-0} = \tau(x) \qquad (-\infty < x < \infty),$$

where σ_y and τ_{xy} are components of normal and tangential stresses, respectively. Using the known solution of the first boundary-value problem for the lower elastic half-plane [9] (page 408, f-la (2) andpage 406, f-la (15)), for the derivatives of horizontal $(u'(x))$ and vertical $(v'(x))$ displacements of half-plane boundary points under plane deformation, we find

$$u'(x) = u'(x,-0) = \vartheta_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau(s)\,ds}{s-x} - \vartheta_2 p(x); \quad v'(x) = v'(x,-0) = -\vartheta_2 \tau(x) - \vartheta_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(s)\,ds}{s-x}; \tag{1}$$

$$\vartheta_1 = 2\left(1-\nu^2\right)/\pi E; \qquad \vartheta_2 = (1+\nu)(1-2\nu)/E;$$

where the integrals are understood in the sense of the Cauchy principal value.

Now we consider the following mixed boundary-value problem for the elastic half-plane $y \le 0$.

I. Let the elastic half-plane $y \le 0$ be reinforced by an absolutely rigid to stretching-compression and absolutely flexible to bending stringer on half-plane boundary along the negative semi-axis $(-\infty, 0]$, while along the positive semi-axis the half-plane is loaded only by tangential forces of intensity $\tau(x)$. For the elastic half-plane $y \le 0$ this problem is mathematically formulated as

$$\sigma_y\big|_{y=-0} = 0 \quad (-\infty < x < \infty); \quad \tau_{xy}\big|_{y=-0} = \tau(x) \quad (0 < x < \infty), \qquad u(x,y)\big|_{y=-0} = 0 \; (-\infty < x \le 0). \tag{2}$$

To solve the boundary-value problem (2) we set

$$\tau_{xy}\big|_{y=-0} = T(x) = \begin{cases} \tau(x) & (x > 0); \\ \tau_0(x) & (x < 0); \end{cases}$$

and using the first equality (1)

$$u'(x) = \vartheta_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{T(s)\,ds}{s-x} \qquad (-\infty < x < \infty).$$

Whence taking into account the third condition in (2), using the Hilbert inverse formula we arrive at the key equation of the problem

$$T(x) = -\frac{1}{\pi^2 \vartheta_1} \int_{0}^{\infty} \frac{u'(s)\,ds}{s-x} \qquad (-\infty < x < \infty). \tag{3}$$

This equation is considered on the interval $(0,\infty)$, we get the following singular integral equation (SIE) for the function $u'(x)$

$$\frac{1}{\pi^2\vartheta_1}\int_0^\infty \frac{u'(s)\,ds}{s-x} = -\tau(x) \quad (0<x<\infty). \tag{4}$$

The unique integrable solution of the SIE (4) on the interval $(0,\infty)$ can be obtained from the known solution of the same SIE in the finite interval [10] by the passage to the limit. As a result, we get

$$u'(x) = \frac{\vartheta_1}{\sqrt{x}}\int_0^\infty \frac{\sqrt{s}\,\tau(s)\,ds}{s-x} \quad (0<x<\infty). \tag{5}$$

After the function $u'(x)$ is determined by (5), it is possible to find tangential stresses on the interval $(-\infty,0)$. Namely, considering the key equation (3) on the interval $(-\infty,0)$, we find

$$\tau_0(x) = -\frac{1}{\pi^2\vartheta_1}\int_0^\infty \frac{u'(s)\,ds}{s-x} \quad (-\infty<x<0).$$

Further, substituting here the expression $u'(x)$ from (5), after elementary transformations we obtain

$$\tau_0(x) = -\frac{1}{\pi\sqrt{-x}}\int_0^\infty \frac{\sqrt{s}\,\tau(s)\,ds}{s-x} \qquad (-\infty<x<0).$$

Here we used the known formula from [11] (p. 176, f-la (28)).

II. We consider the same problem I, when in the boundary conditions (2), instead of the tangential forces $\tau(x)$ vertical forces $p(x)$ are given, i.e. $\sigma_y\big|_{y=-0} = -p(x)$ $(0<x<\infty)$. Based on the equalities (1), the solution of this boundary-value problem is

$$v'(x) = -\vartheta_1\int_0^\infty \frac{p(s)\,ds}{s-x} \quad (-\infty<x<\infty); \qquad \tau_0(x)=0 \quad (-\infty<x\le 0). \tag{6}$$

Proceeding from the solution of problem I, we consider the problem of the contact interaction of an elastic stringer of finite length with an elastic half-plane. Let the boundary of the elastic half-plane $y\le 0$ be reinforced by an absolutely rigid stringer on the interval $(-\infty,0)$, as above, and it be reinforced by the stringer of the modulus of elasticity E_s and height h along the positive semi-axis $(0,\infty)$ on the interval (b,a). At the end points $x=b$ and $x=a$ of the stringer, the horizontal concentrated forces P_b and P_a act, respectively, and on its upper edge tangential forces of intensity $\tau_+(x)$ act.

Here, as usual, the Melan-Bufler one-dimensional elastic continuum model [5,6] is accepted for the elastic stringer and the elastic half-plane is under the conditions of plane deformation. It is required to determine: the distribution of tangential contact stresses $\tau_0(x)$ under an absolutely rigid stringer; $\tau_-(x)$ under an elastic stringer; axial stresses $\sigma_s(x)$ in the cross-sections of the elastic stringer.

Turn to the derivation of the governing integral equation (GIE) of the posed problem, we consider, as in [8,12], the equilibrium on the parts $[b,x]$ and $[x,a]$ of the elastic stringer and add the obtained resulting equations. As a result, for the axial stresses $\sigma_s(x)$ we obtain

$$\sigma_s(x) = \frac{1}{2h}\left[P_a + P_b + \int_b^a \operatorname{sign}(x-s)\,\tau_-(s)\,ds - \int_b^a \operatorname{sign}(x-s)\,\tau_+(s)\,ds\right] \quad (b\le x\le a). \tag{7}$$

Hence, according to the Hooke's law

$$\varepsilon_s(x) = \frac{1}{2hE_s}\left[P_a + P_b + \int_b^a \operatorname{sign}(x-s)\left[\tau_-(s)-\tau_+(s)\right]ds\right] \qquad (x\le b\le a), \tag{8}$$

where $\varepsilon_s(x)$ is axial deformation of the stringer. In this case, according to (7), the equilibrium condition of the elastic stringer has the form

$$\int_b^a \tau_-(s)\,ds = Q; \qquad Q = P_a - P_b + T_+; \qquad T_+ = \int_b^a \tau_+(s)\,ds. \tag{9}$$

Next, we write down the contact condition of an elastic stringer with an elastic half-plane:

$$u'(x) = \varepsilon_s(x) \qquad (b<x<a).$$

Substituting here the expression $u'(x)$ from (5) and $\varepsilon_s(x)$ from (8), we obtain the following governing SIE of the considered contact problem

$$\int_b^a \left[\frac{\vartheta_1}{\sqrt{x}} \frac{\sqrt{s}}{s-x} - \frac{1}{2hE_s} \operatorname{sign}(x-s) \right] \tau_-(s)\,ds = \frac{1}{2hE_s} \left[P_a + P_b - \int_b^a \operatorname{sign}(x-s)\tau_+(s)\,ds \right] (b < x < a). \tag{10}$$

The solution of the SIE (10) must satisfy the condition (9).

Now we integrate both parts of the SIE (10) and as a result we obtain the Fredholm GIE of the first kind for $\tau_-(x)$.

$$\int_b^a \left[\vartheta_1 \ln \frac{\sqrt{x}+\sqrt{s}}{\left|\sqrt{x}-\sqrt{s}\right|} - \frac{1}{2hE_s}|x-s| \right] \tau_-(s)\,ds = \frac{1}{2hE_s} \left[(P_a+P_b)x - \int_b^a |x-s|\tau_+(s)\,ds \right] + C \qquad (b < x < a), \tag{11}$$

where C is a constant to be determined.

Further, we introduce in the GIE (11) and in the condition (9) the following dimensionless quantities

$$\xi = \sqrt{x/a}, \quad \eta = \sqrt{s/a}; \quad k = \sqrt{b/a}; \; \lambda = aE/4(1-\nu^2)hE_s; \quad \varphi(\xi) = 2\xi\tau_-(a\xi^2)/E; \quad h(\xi) = 2\xi\tau_+(a\xi^2)/E;$$

$$C_0 = c/2(1-\nu^2)a; \quad g(\xi) = \lambda \left[S_0\xi^2 - \int_k^1 \left|\xi^2-\eta^2\right| h(\eta)\,d\eta \right]; \quad S_0 = (P_a+P_b)/aE; \quad f(\xi) = g(\xi) + C_0.$$

Then GIE (11) is transformed to the form

$$\frac{1}{\pi}\int_k^1 \left[\ln\frac{\xi+\eta}{|\xi-\eta|} - \pi\lambda\left|\xi^2-\eta^2\right| \right] \varphi(\eta)\,d\eta = f(\xi) \qquad (k < \xi < 1), \tag{12}$$

and the condition (9) is transformed to the form

$$\int_k^1 \varphi(\eta)\,d\eta = Q_0; \quad \left(Q_0 = Q/aE = (P_a - P_b + T_+)/aE\right). \tag{13}$$

After solving the IE (12) under the condition (13) according to (7), the dimensionless axial stresses $\sigma_s^0(\xi)$ in the cross-sections of the elastic stringer will be determined by the formula

$$\sigma_s^0(\xi) = \frac{1}{2h_0}\left[S_0 + \int_k^1 sign(\xi-\eta)\varphi(\eta)\,d\eta - \int_k^1 sign(\xi-\eta)h(\eta)\,d\eta \right] \; (k \le \xi \le 1); \; \sigma_s^0(\xi) = \sigma_s(a\xi^2)/E; \; h_0 = h/a.$$

We turn to the boundary-value problem II and based on its solution we consider the contact problem on indentation of system of an arbitrary finite number n of rigid stamps into the lower elastic half-plane. In this case, the bases of the stamps are characterized by a function $f(x)$, the central vertical force P_p acts on the p-th stamp and the contact of the stamps with the is carried out along the system of intervals $L = \bigcup_{p=1}^{n} \left[a_p, b_p\right]$ on the abscissas positive semi-axis foundation of the half-plane. In this case, with the help of (6) we obtain the well-known governing SIE of the problem, which admit the exact solution [1].

Next, for an elastic quarter-plane $\Omega_+ = \{0 \le r < \infty; \; 0 \le \vartheta \le \pi/2\}$ referred to a polar coordinate system r, ϑ, we consider the following mixed boundary-value problems.

III. $\quad u_r\big|_{\vartheta=+0} = \sigma_\vartheta\big|_{\vartheta=+0} = 0 \quad (0 < r < \infty); \quad \tau_{r\vartheta}\big|_{\vartheta=\pi/2-0} = \tau(r), \quad \sigma_\vartheta\big|_{\vartheta=\pi/2-0} = 0 \quad (0 < r < \infty).$

IV. $\quad u_r\big|_{\vartheta=+0} = \sigma_\vartheta\big|_{\vartheta=+0} = 0 \quad (0 < r < \infty); \quad \sigma_\vartheta\big|_{\vartheta=\pi/2-0} = -p(r), \quad \tau_{r\vartheta}\big|_{\vartheta=\pi/2-0} = 0 \quad (0 < r < \infty).$ (14)

Here u_r are elastic displacements in the radial direction, and $\tau_{r\vartheta}, \sigma_\vartheta$ are components of stresses in the polar coordinate system. According to the boundary conditions of problems III and IV, the edge of the quarter-plane $\vartheta = 0$ is reinforced by an absolutely rigid stringer and only tangential $(\tau(r))$ or only normal $(p(r))$ forces act on the face $\vartheta = \pi/2$, respectively. Based on the results of [13], using the Mellin's integral transform, we can construct exact solutions of these problems. As a result, for the problems III and IV, we have, respectively

$$\frac{du_r(r,\pi/2)}{dr} = 2\vartheta_1 r^2 \int_0^\infty \frac{\tau(s)\,ds}{s^2-r^2}; \qquad u_\vartheta(r,\pi/2) = -\vartheta_1 \int_0^\infty \ln\frac{r+s}{|r-s|}\,p(s)\,ds \qquad (0 < r < \infty); \tag{15}$$

Here u_g are elastic displacements in the circumferential direction.

Using the first formula of (15), we can consider the problem of contact interaction between an elastic stringer, which clamped to the face $\vartheta = \pi/2$ of the quarter-plane and the quarter-plane itself. And using the second formula of (15), we can consider the contact problem of indentation of the system of n rigid stamps into the quarter-plane along a system at segments L of the face $\vartheta = \pi/2$ and, thus, we can physically simulate the classical skew-symmetric contact problem of the theory of elasticity [1].

3. The solution of GIE (12)-(13). We use the spectral relationships [14]. To solve (12)-(13)

$$\frac{1}{\pi}\int_k^1 \ln\frac{\xi+\eta}{|\xi-\eta|}\frac{T_n(Y)\,d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)(\eta^2-k^2)}} = \lambda_n T_n(X) \quad (n=0,1,2,...) \tag{16}$$

$$X=\cos\vartheta,\ \vartheta=\frac{\pi}{K'}\int_1^{\xi/k}\frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}\ \left(k=\sqrt{b/a}\right);\quad Y=\cos\varphi,\ \varphi=\frac{\pi}{K'}\int_1^{\eta/k}\frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}\ (k<\xi,\eta<1);$$

$$K(k)=K=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}};\quad K'=K(k')\quad \left(k'=\sqrt{1-k^2}\right);\lambda_n=\begin{cases}(\pi n)^{-1}K'th(\pi nK/K') & (n=1,2,...);\\ K & (n=0).\end{cases}$$

Here $T_n(X)$ are Chebyshev polynomials of the first kind of argument X, while X and Y are incomplete elliptic integrals of the first kind, $K(k)$ is the complete elliptic integral of the first kind, k' is complementary modulus.

Proceeding from (16), the solution of the GIE (12) can be represented in the form of an infinite series

$$\varphi(\xi)=\left(1\Big/\sqrt{(1-\xi^2)(\xi^2-k^2)}\right)\sum_{n=0}^{\infty}Z_nT_n(X)\quad (k<\xi<1) \tag{17}$$

with unknown coefficients Z_n. Further, we substitute (17) in (12) and (13) and interchange the order of summation and integration. As a result, after a simple transformation [8], we obtain the following infinite

system of linear algebraic equations (ISLAE) for Z_n

$$\lambda_m Z_m-\mu\sum_{n=1}^{\infty}K_{mn}Z_n=c_m\qquad (m=1,2,...) \tag{18}$$

$$\mu=2\lambda/K';\quad c_m=2\left(K'g_m+\lambda Q_0K_{m0}\right)/K'^2;\quad C_0=\left(\lambda_0Q_0K'-g_0K'-\lambda Q_0K_{00}-\lambda K'\sum_{n=1}^{\infty}K_{0n}Z_n\right)\Big/K'^2;$$

$$K_{mn}=\int_k^1\int_k^1\left|\xi^2-\eta^2\right|\frac{T_m(X)T_n(Y)\,d\xi d\eta}{\sqrt{(1-\xi^2)(\xi^2-k^2)(1-\eta^2)(\eta^2-k^2)}}\quad (m,n=0,1,2,...);\quad g_m=\int_k^1 g(\xi)\frac{T_m(X)\,d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(\xi^2-k^2)}}$$

In particular, for an absolutely rigid stringer $(\lambda=0)$, the GIE (12) takes the form $\left(g(\xi)\equiv 0\right)$

$$\frac{1}{\pi}\int_k^1\ln\frac{\xi+\eta}{|\xi-\eta|}\varphi(\eta)\,d\eta=C_0\qquad (k<\xi<1)$$

and at the condition (13), according to (18) the equation admits an elementary exact solution

$$\varphi(\xi)=KQ_0\Big/K'\sqrt{(1-\xi^2)(\xi^2-k^2)}\quad (k<\xi<1).$$

We note that during the numerical realization of the ISLAE (18), by transformation of the interval $(k,1)$ into the interval $(-1,1)$ the coefficients K_{mn} and g_m can easily be calculated with the help of Gaussian quadrature formulas at Chebyshev nodes.

REFERENCE

1. Shtaerman I.Ya. Contact problems of the theory of elasticity. M.-L.: Gostekhizdat, 1949. 270 p.
2. Galin L.A. Contact problems of theory of elasticity and viscoelasticity. M.: Nauka, 1980. 304p.
3. Lure A.I. Three-dimensional problems of theory of elasticity. M.: 1955, 493p.
4. Development of contact problems theory in USSR. M.: Nauka, 1976. 493p.
5. Melan E. Ein Beitrag zur Theorie geschweißter Verbindungen. //Ingr. Arch., 1932. Bd. 3. №2. pp. 123-129.

6. Bufler H. Zur Krafteinleitung in Scheiben über geschweißte oder geklebte Verbindungen.-Österr. //Ing. Arch. 1964. Bd.18. №3-4. pp.284-292.
7. Muki R. Sternberg E.J. Transfer of load from an edge-stiffener to a sheet–A Reconsideration of Melan's problem.// J. Appl. Mech. Ser. E., 1967. 34 (3), pp.233-242.
8. Alexandrov V.M., Mkhitaryan S.M. Contact problems for bodies with thin coatings and interlayers. M.: Nauka, 1983. 488p.
9. Muskhelishvili N.I. Singular integral equations. M.: Nauka, 1968, 511p.
10. Gakhov F.D. Boundary value problems. M., Nauka, 1977. 640p.
11. Bateman H., Erdalyi A. Tables of integral transforms. Vol.2. M.: Nauka, 1970. 328p.
12. Mkhitaryan S.M., Mkrtchyan M.S., Kanetsyan E.G. On a method for solving Prandtl's integro-differential equation applied to problems of continuum mechanics using polynomial approximations: On a method for solving Prandtl's integro-differential equation. ZAMM Journal of applied mathematics and mechanics: 97(6), pp. 639-654.
13. Mkhitaryan S.M. On a class of problems on interaction of various type stress concentrators with an elastic semi-infinite plate. //Journal of Physics: Conference Series. Vol. 991, 2018. http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/991/1/012059/pdf
14. Mkhitaryan S.M. On Eigen-functions of an integral operator, produced by a logarithmic kernel at two intervals and their application to the contact problems. //Proceedings of AS of Armenia. Mechanics. 1982. Vol. 35. №6. Pp. 3-18.

Information about authors:
Grigoryan Marine, Researcher, Institute of Mechanics NAS RA, PhD, Associate Prof., National Universaty of Architecture and Construction of Armenia, (374) 91 63 97 58,
E-mail: gmarinchka@mail.ru
Hovhannisyan Emin, PhD, Researcher, Institute of Mechanics NAS RA, (374) 98 03 74 70.
Mkhitaryan Suren, Prof. Dr. Corr. Member of NAS RA**,** Institute of Mechanics NAS RA,
(374) 93 93 61 17,
E-mail: smkhitaryan39@rambler.ru

SHORT PACED VIBRATION CREEPING OF A CLAYISH GROUND DURING THE LANDSLIDE

Hayroyan S.H., Karapetyan K.A., Hayroyan H. S.

The sliding stresses of the slope ground being under static condition as usual are less than the sliding standard resistance. The main task is the determination of slope stability under static stresses, when at the same time additional forces acting on the slope with different dynamic (seismic) vibration [1,2] . In this kind of condition (except of investigation of slope composing soils' sliding resistance) it's important also investigation of a creeping process under the impact of vibration forces .Experiments aimed at determining the clayish soil slip-stress resistance under static and dynamic forces were carried out using the upgraded M-5[3] torsion test tool. There samples of clayish soils with different consistency and humidity properties taken at the Dilijan town International school mountain slope in Armenia were used.Comparing the hydrophysical properties of soils(table1), one can see that the clayish soil samples consequently have .

Table 1. Experimentally determined hidro-physical indexes of soil samples.

Types	Specific gravity ρ, g/sm^3	Soil humidity W	Mineral particles specific gravity ρ_s , g/sm^3	Porosity coefficient e	Limits of plasticity			Consistensy index $I_L=(W-W_p)/(W_L-W_p)$
					Liquid limit W_L	Plastic limit W_p	Plasticity index I_p	
1	1.98	0.155	2.67	0.579	0.281	0.149	0.132	0.045
2	1.95	0.186	2.67	0.644				0.280

1-half-hard(I_L=0,045), 2-tight-plastic(I_L=0,280)

We need to take in an account that the slope ground being under static condition was exposed to the effects of different relative sliding stresses influence. After stabilization of modification processes the samples have been tested for different frequencies sliding dynamic stresses and the sliding deformation results have been registered after compilation of each 10; 30; 60; 120 and 360 seconds. Experiments are held by using three types of soils of different consistency by this choice.

- Halve-hard and tight plastic consistency samples after influence of $\tau_0=0{,}5\tau_{f,st}$ static sliding stresses;
- Halve-hard and tight plastic consistency samples accordingly under $\tau_0=0{,}81\tau_{f,st}$ and $\tau_0=0{,}77\tau_{f,st}$ stresses set;

Figure N2a and 1b represent halve-hard (I_L=0,045, and W=0.155) consistency samples experimental family creeping charts of curves registred under influence of compressing σ=0.3MPa stresses and static relative τ/τ_f=0.500 slide in case of scroll deformation (γ) and time (t) dependence under 8; 10; 12 Hz frequency dynamic stresses influences'. Under influence of sliding dynamic stresses different than f=8; 10; 12Hz frequency for registration of creeping vibration curves family (fig.1a) we have used the below given dependence formula:

$$\Upsilon=c(t)xF(f) \qquad (1),$$

Where the c(t) is the scrolling deformation-timing dependence in case of a unit frequency, and the F(t)- frequency function, which determines in case of t=const time from deformation-frequency dependence.

For discussion of vibration creeping curves family obtained by using the formula (1) it has been taken a unit of frequency as 10Hz, under influence of which the value of a creeping determines from the deformation (ϒ) against of timing (t) dependence by using the formula below:

$$c(t, f=10Hz)=0,0034\ln t-0,004 \quad (2)$$

For the purpose of F(f) frequency function determination, first of all it has been determined the dependence of creeping deformation (ϒ) against of frequency (f) in case, when the t=120 seconds, which is expressed as:

$$\Upsilon=0,0008.e^{0,273f} \quad (3)$$

Here, the experimental obtained curve is drawn in a solid line, but the hypothetic curve obtained by the formula (3) is in a dashed lines.

The freuency function F(f) will be determined by the formula:

$$F(f) =0,0008.e^{0,273f} /c(t=120, f=10Hz) \quad (4)$$

Where inserting the value of c(t=120,f=10Hz)=0,0125 in the formula (4) will get the following formula for frequency function:

$$F(f)=0,065.e^{0,273f}; \quad (5)$$

Which satisfies the condition of F(f=10Hz) =1. Having the dependences of c(t) and F(f) the formula (1) will get modified as:

$$\Upsilon(t, f)= 0,065\ e^{0,273f}\ [0,0034\ln(t)\ -0,004] \quad (6)$$

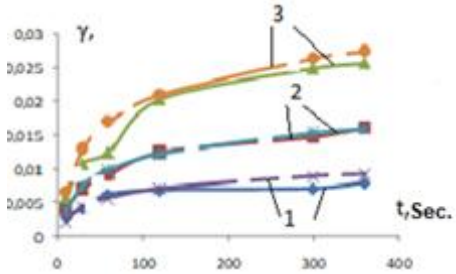


Fig. 1a

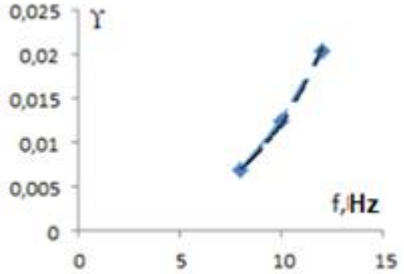


Fig. 1b

The fig.1a represents the vibration creeping charts families obtained by using the formula (6) of deformation against of timing dependence (solid lines), while the experimental calculated curves are the dashed lines.

The fig.1b represents creeping charts familes obtained by using the scrolling deformation-vibration frequency dependence when t=120 seconds. The dashed lines correspond to experimental calculation data.

By the same way is approximated the tight-plastic (I_L=0,280) consistency clayish grounds vibration creeping curves family (figure 2a) under compressed normal σ=0,3MPa, and initial considerable static $\tau_0/\tau_{f,st}$=0.50 sliding stresses. At this time it has been also considered under 8Hz, 10Hz, and 12Hz frequency dynamic $\pm\Delta\tau=(\tau_{f,st}-\tau_0)$ MPa stresses influence. The dashed line style curves are obtained by using the formula (7) below.

$$\Upsilon(t, f)= (0,0012\ln t-0,00187).\ e^{0,0817f} \quad (7)$$

The figure 2b chart is obtained when the t=120 sec.

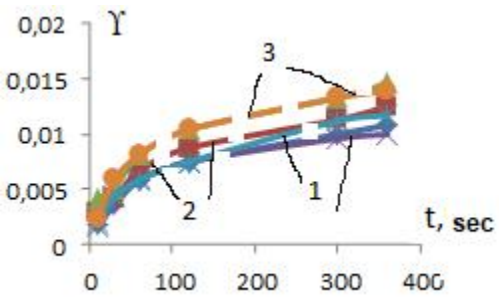


Fig. 2a.

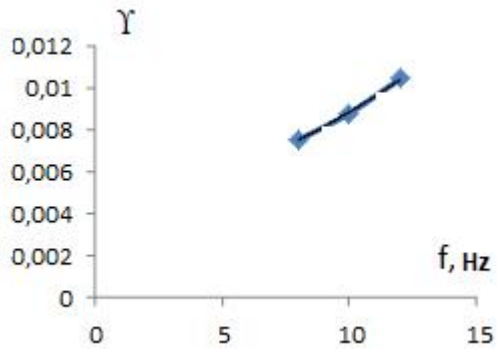


Fig.2b.

Now, lets discuss the results of vibration-creeping processes obtained when we tested the halve-hard clayish ground made in form of a cylinder and kept under compressed (σ=0.3Mpa) stress and considerable static stresses $\tau_0/\tau_{f,st}$=0.8, where locallized slidng zone is formed under f=8; 10; 12 Hz frequency sliding stresses. The results are represented as a family of sliding deformation (Δ)-time (t) and frequency dependences in the fig.3a and 3b, in case when the ground consistency value was I_L=0,045.

The ground sliding vibration creeping deformation (Δ) depends on timing (t) and frequency (f) and determines by the following equition:

$$\Delta=\delta(t)xF(f) \quad (8).$$

Where the δ(t) is the dependence function between sliding vibration creeping deformation (δ) against of timing (t) in case of a unit frequency. The F(f) is the frequency function, that determines by sliding vibration deformation-frequency dependence, where F(f) =1 condition takes place for some t=const timing.

The sliding vibration creeping (δ) against timing (t) dependence corresponding to f=10Hz frequency determines by the following equition:

$$\delta(t, f=10Hz)= 0,2138t-1,3326 \quad (9)$$

For determination of F(f) frequency function it has been determined the sliding vibration deformation – frequency (f) dependence when t=30 seconds. It is determines by the following equition:

$$\Delta=0,1803e^{0,341f} \quad (10)$$

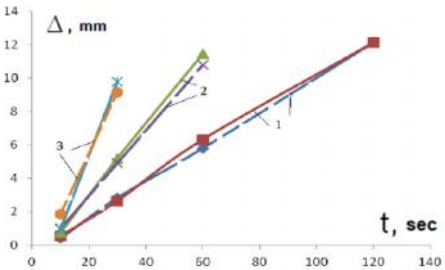


Fig. 3a.

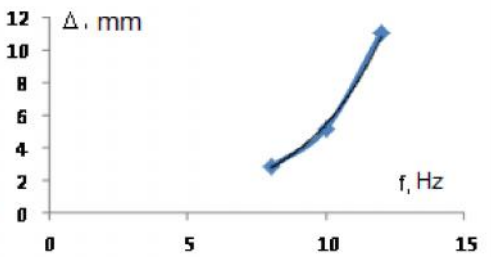


Fig. 3b.

The fig.3a demonstrates the curves obtained until sliding deformation consumption. The experimetal curves are drawn by solid lines, while the dashed lines are obtained by using the formula (13).
The fig.3b represents the curves experimental obtained for t=30 sec (the solid line), and by using the formula (10)- dashed line.
The F(f) frequency function will get determined by the following formula:

$$F(f) = 0,180e^{0,341f} / \delta\ (t=30, f=10Hz) \quad (11)$$

Inserting the value δ (t=30sec, f=10Hz)=5,200 in the formula (11) we will get the following formula:

$$F(f)=0,034\ e^{0,341f} \quad (12),$$

Which will satisfy the condition, when ` F(f=10Hz)=1.
As a result the dependence (8) will get expressed as follow:

$$\Delta = (0{,}0073t - 0{,}0453)e^{0{,}341f} \quad (13).$$

The next experiment has been carried out over tight-plastic consistency (I_L=0,280) clayish ground (figure 4). Under influance of static sliding conciderably $\tau_0/\tau_{f,st}$=0.770 stresses and f=8; 10; 12Hz frequency sliding $\pm\Delta\tau=\tau_{f,st}-\tau_0$ stresses it has been registred data for a) sliding vibration creeping deformation (Δ) against timing dependency curves family and b) for some t=30 sec timing period for sliding vibration creeping deformation (δ) against frequency (f) dependences curves. The curves' family will get defined by the formula below:

$$\Delta\,(t,f) = 0{,}000444\, f^{3{,}7145}(0{,}0306t + 0{,}2524) \quad (14)$$

Obtained results are illustrated in the figure 5:

The figure represents the experimental data obtained under normal σ=0,3MPa compressed initial static and considerably $\tau_0/\tau_{f,st}$=0.770 sliding stresses under different 8Hz, 10Hz, and 12Hz frequency dynamic vibration sliding $\pm\Delta\tau=\tau_{f,st}-\tau_0$ MPa stresses unfluances and sliding vibration creeping curves family calculated by using the formula (14). Fig. 54a. represents sliding deformation against of timing dependency curves family, where the experimental obtained are drawn by solid lines, and dashed lines when the formula (14) is used. Fig.4b. represents the sliding deformation against of fluctuation frequency chart (solid lines) in case, when t=30 sec.

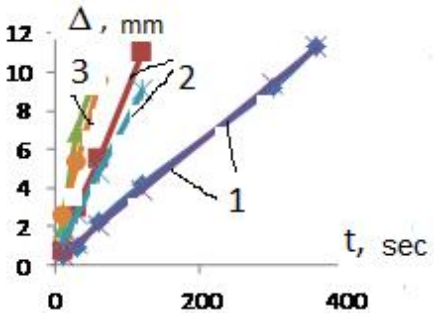


Fig.4a.

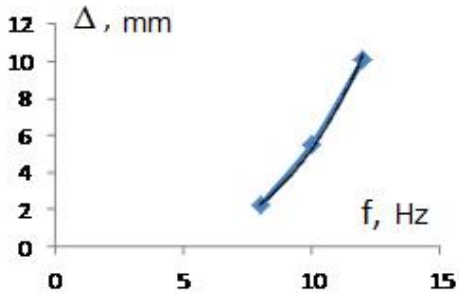


Fig. 4b.

Conclusions

Under initial static sliding considerably τ/τ_f=0.5 tension and 8, 10, and 12Hz frequency dynamic tension the halve-hard, and tight-plastic consistency clayish grounds vibration creeping deformation against of timing dependence demonstrates an exponential tendency, while in case of $\tau_0/\tau_{f,st}$>0,7 the vibration creeping deformation (Δ)-against of timing (t) dependence demonstrates a linear tendency.

References

1. Возненский Е.А. Поведение грунтов при динамических нагрузках: Учебное пособие.-М, ; Изд-во МГУ, 1997.-288с.
2. Trofimov V.T. ; Korolev V.A.; Voznesensky E.A.; Gladkovskaya G.A.; Vasilchuk U.K.; Ziangirov R.S.; Soil Science, Moscow University Publishing House, . Moscow.; 2005, p.1024 .
3. Meschyan S. R. Experimental foundation of glayey soils rheology. Gitutyun publisher, Yerevan 2008; p. 495.

Information about authors:

Hayroyan S.H. Department of Hydrogeology and engineering geology at the YSU of RA,

Karapetyan K.A. Institute of Mechanics of NAS of RA,

Hayroyan H. S. Department of Hydrogeology and engineering geology at the YSU of RA

ON AN APPROACH TO THE PROBLEM OF THE STRESS STATE OF PIECEWISE-HOMOGENEOUS ELASTIC BODIES WITH CRACKS

Kanetsyan E.G., Mkrtchyan M.S., Mkhitaryan S.M.

A new approach to the stress state problems of piecewise-homogeneous elastic bodies with cracks on the joint line of dissimilar materials whose characteristics possess oscillatory properties is proposed.

Introduction. For their theoretical and practical significance, problems of the stress state of piecewise-homogeneous elastic bodies with cracks located on the joint line of dissimilar materials have become the subject of research by many authors. In this field of fracture mechanics, numerous works have been published, most of which are reflected in handbooks [1, 2]. We also point out the papers [3-6]. A characteristic feature of these problems is the phenomenon of oscillation of breaking stresses and other characteristics near the crack tips. The presence of oscillations makes it very difficult to study regularities of changes in basic characteristics of fracture mechanics, such as the dislocation density on the crack edges, breaking stresses outside the cracks on their lines of location, stress intensity factors (SIFs). In the present paper, an approach for overcoming difficulties caused by oscillation is proposed using the example of the problem on the stress state of a piecewise homogeneous half-plane with cracks. The essence of the method is: a) the oscillatory part of the solution to the governing singular integral equation (SIE) is separated; b)corresponding oscillating integrals are calculated exactly [7]; c) a well-known numerical-analytical method based on Gauss quadrature formulas at Chebyshev nodes is applied to the transformed SIE [8-9]. The methods of the small parameter and Jacobi polynomials are also used for solving the governing SIE.

1. **Problem formulation and the governing SIE.** Let a piecewise homogeneous elastic half-plane consisting of a strip $\omega_+ = \{-\infty < x < \infty;\ 0 \le y \le h\}$ with elastic constants $(G_+,\ \nu_+)$ and a lower half-plane $\Pi_- = \{-\infty < x < \infty;\ -\infty < y \le 0\}$ with elastic constants $(G_-,\ \nu_-)$, where $G_\pm$ are the shear moduli, $\nu_\pm$ are Poisson's coefficients, contain a collinear system of cracks $L = \bigcup_{k=1}^{n} (a_k, b_k)$ along the lines of connection of dissimilar materials. Let further normal and tangential forces of intensities $p_\pm(x)$ and $\tau_\pm(x)$, respectively, be applied to the crack edges (the sign "+" refers to the crack upper edge, the sign "– "refers to the lower edge of the crack). It is required to determine problem basic characteristics. The governing SIE of the posed problem is given in [10]. For simplicity, confining ourselves to the case of one crack on $(-a, a)$, this SIE in terms of dimensionless quantities can be written as

$$-i\,\mathrm{th}(\pi\mu)\,w(x) + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{w(s)\,ds}{s-x} + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}K(x,s)\,w(s)\,ds + \\ +\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}L(x,s)\,\overline{w(s)}\,ds = g(x)\quad (-1<x<1);\ \int_{-1}^{1}w(s)\,ds = 0. \tag{1}$$

Here $w(x)$ is a complex combination of dislocation densities on the crack edges; $K(x,s)$, $L(x,s)$ are kernels regular in the square $-1 < x,\ s < 1$; $g(x)$ is a known function that takes into account the influence of loads on the crack edges, and

$$\mu = \frac{1}{2\pi}\ln\left[\frac{k+3-4\nu_+}{1+k(3-4\nu_-)}\right]\quad \left(k = \frac{G_+}{G_-}\right). \tag{2}$$

Based on the solution of the characteristic part of the SIE (1), the solution of this SIE can be represented in the form

$$w(x) = (1-x)^{\gamma}(1+x)^{\bar{\gamma}}\,\chi(x)\quad \left(\gamma = -\frac{1}{2} - i\mu,\ -1<x<1\right), \tag{3}$$

where $\chi(x)$ is the Hölder function on the interval $[-1, 1]$. It follows from (3) that the quantity $w(x)$ increasing infinitely oscillates as $x \to \pm 1$, infinitely many times changing its sign. In order to avoid oscillation, we transform the representation (3) as follows

$$w(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left\{\left[\chi(x)-Ax-B\right](1-x)^{-i\mu}(1+x)^{i\mu}+(Ax+B)(1-x)^{-i\mu}(1+x)^{i\mu}\right\}\quad(-1<x<1),$$

where A and B are some constants. We determine these constants from conditions

$\varphi(\pm1)=0;\ \varphi(x)=\chi(x)-Ax-B,$

whence

$$A=\frac{1}{2}\left[\chi(1)-\chi(-1)\right];\ B=\frac{1}{2}\left[\chi(1)+\chi(-1)\right]. \tag{4}$$

As a result, the function $w(x)$ is represented by the formula

$$w(x)=\frac{\psi(x)}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{Ax+B}{\sqrt{1-x^2}}(1-x)^{-i\mu}(1+x)^{i\mu};\ \psi(x)=\varphi(x)(1-x)^{-i\mu}(1+x)^{i\mu}\ \left(\varphi(\pm1)=0;\ -1<x<1\right), \tag{5}$$

where the second term takes into account the oscillatory part of the solution of SIE (1).

Now we substitute (5) into the SIE (1) and calculate the elementary integrals conditioned by the solution oscillation part. After simple transformations, we arrive at the following SIE for $\psi(x)$:

$$-ith(\pi\mu)\psi(x)+\frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi}\left[\int_{-1}^{1}\frac{\psi(s)\,ds}{(s-x)\sqrt{1-s^2}}+\int_{-1}^{1}K(x,s)\frac{\psi(s)\,ds}{\sqrt{1-s^2}}+\int_{-1}^{1}L(x,s)\frac{\overline{\psi(s)}ds}{\sqrt{1-s^2}}\right]=f(x) \tag{6}$$

$$f(x)=h_0(\mathrm{x})-Ah_1(\mathrm{x})-\mathrm{B}\,h_2(\mathrm{x})-\bar{A}h_3(\mathrm{x})-\bar{B}h_4(\mathrm{x});\qquad(-1<x<1).$$

while the condition from (1) becomes

$$\int_{-1}^{1}\frac{\psi(s)\,ds}{\sqrt{1-s^2}}=C;\ C=\frac{\pi}{\mathrm{ch}(\pi\mu)}(B+2i\mu A). \tag{7}$$

Here $h_j(\mathrm{x})\ \left(j=\overline{0,4}\right)$ are known function free from oscillation properties. We denote the solution to the SIE (6) for right-hand sides $h_j(\mathrm{x})$ and corresponding constants C chosen according to (7) by $\psi_j(x)$. Then the solution of the SIE (6) under the condition (7) is represented by the formula

$$\psi(x)=\psi_0(x)-A\psi_1(x)-B\psi_2(x)-\bar{A}\psi_3(x)-\bar{B}\psi_4(x)\quad(-1\le x\le1). \tag{8}$$

As $\psi(\pm1)=0,$ then from (8)

$$\begin{cases}A\psi(1)+B\psi_2(1)+\bar{A}\psi_3(1)+\bar{B}\psi_4(1)=\psi_0(1)\\ A\psi(-1)+B\psi_2(-1)+\bar{A}\psi_3(-1)+\bar{B}\psi_4(-1)=\psi_0(-1).\end{cases} \tag{9}$$

These equations, together with their conjugates, constitute a complete system of linear equations for A, B, $\bar{A}$ and $\bar{B}$. Values of $\psi_j(\pm1)$ are determined by the Lagrange interpolation polynomials for functions $\psi_j(x)$ at the Chebyshev nodes [9].

Thus, the initial governing SIE (1) is equivalent to the SIE (6) - (7).

2. On the methods of solving (1) or (6) – (7). The solution of this SIE can be constructed using the method already mentioned above [8,9]. Following a well-known procedure, we arrive at the following system of linear algebraic equations (SLAE)

$$\begin{cases}-i\mathrm{th}(\pi\mu)\psi(x_r)+\dfrac{\sqrt{1-x_r^2}}{M}\displaystyle\sum_{m=1}^{M}\left\{\left[\frac{1}{s_m-x_r}+K(x_r,s_m)\right]\psi(s_m)+\right.\\ \left.+L(x_r,s_m)\overline{\psi(s_m)}\right\}=f(x_r)\qquad\left(r=\overline{1,M-1}\right);\\ \dfrac{\pi}{M}\displaystyle\sum_{m=1}^{M}\psi(s_m)=C;\quad x_r=\cos\left(\frac{\pi r}{M}\right)\ \left(r=\overline{1,M-1}\right);\ s_m=\cos\left(\frac{2m-1}{2M}\pi\right)\ \left(m=\overline{1,M}\right),\end{cases} \tag{10}$$

from which the quantities $\psi(s_m)$ are determined, and, in accordance with the above and (8), we must replace $\psi(s_m)$ by $\psi_j(s_m)\ \left(j=\overline{0,4}\right)$ and choose constants C, corresponding to $\psi_j(x)$.

Note that according to the interpolation Lagrange polynomial for function $\psi(x)$ at Chebyshev nodes

$$\psi(x_r)=\frac{2}{M}\sum_{m=1}^{M}\left[\frac{1}{2}+\sum_{j=1}^{M-1}\cos\left(\frac{\pi jr}{M}\right)\cos\left(\frac{2m-1}{2M}j\pi\right)\right]\psi(s_m)=\frac{2}{M}\sum_{m=1}^{M}S_{rm}^{M}\psi(s_m)$$

we have

$$=\frac{2}{M}\sum_{m=1}^{M}\left\{\frac{\cos\left[\pi(2r+2m-1)(M-1)/4M\right]\sin\left[\pi(2r+2m-1)/4\right]}{\sin\left[\pi(2r+2m-1)/4M\right]}\right.$$

$$\left.+\frac{\cos\left[\pi(2r-2m+1)/4\right]\sin\left[\pi(2r-2m+1)(M-1)/4M\right]}{\sin\left[\pi(2r-2m+1)/4M\right]}\right\}\psi(s_m)\qquad\left(r=\overline{1,M-1},\ M=\overline{1,M}\right).$$

Now, taking into account the last SLAE, we can write (10) as

$$\begin{cases}\dfrac{1}{M}\displaystyle\sum_{m=1}^{M}\left\{\left[\frac{\sqrt{1-x_r^2}}{s_m-x_r}-2i\operatorname{th}(\pi\mu)S_{rm}^{M}+\sqrt{1-x_r^2}K(x_r,s_m)\right]\psi(s_m)+\right.\\ \left.+\sqrt{1-x_r^2}L(x_r,s_m)\overline{\psi(s_m)}\right\}=f(x_r)\qquad\left(r=\overline{1,M-1}\right);\quad\dfrac{\pi}{M}\displaystyle\sum_{m=1}^{M}\psi(s_m)=C.\end{cases}\tag{11}$$

The solution of the governing SIE (1) can also be constructed by the method of orthogonal Jacobi polynomials. Namely, proceeding from the known integral relation [11]

$$\begin{aligned}&-i\operatorname{th}(\pi\mu)(1-x)^{\gamma}(1+x)^{\bar\gamma}\mathrm{P}_n^{(\gamma,\bar\gamma)}(x)+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{(1-s)^{\gamma}(1+s)^{\bar\gamma}\mathrm{P}_n^{(\gamma,\bar\gamma)}(s)ds}{s-x}=\\&=\frac{1}{2\operatorname{ch}(\pi\mu)}\mathrm{P}_{n-1}^{(\bar\gamma+1,\gamma+1)}(x)\qquad\left(\gamma=-\frac{1}{2}-i\mu;\ n=0,1,2,...,-1<x<1\right),\end{aligned}\tag{12}$$

where $\mathrm{P}_n^{(\alpha,\beta)}$ are the Jacobi polynomials $\left(\mathrm{P}_{-1}^{\bar\gamma+1,\gamma+1}(x)\equiv 0\right)$, we represent the solution to SIE (1) as

$$w(x)=(1-x)^{\gamma}(1+x)^{\bar\gamma}\sum_{n=0}^{N}x_n\mathrm{P}_n^{(\gamma,\bar\gamma)}(x)\ \ (-1<x<1)\tag{13}$$

with unknown coefficients x_n. Substituting (13) into the SIE (1) and using (12), we get

$$\frac{1}{2\operatorname{ch}(\pi\mu)}\sum_{n=1}^{N}x_n\mathrm{P}_n^{(\bar\gamma+1,\gamma+1)}(x)+\sum_{n=1}^{N}x_nK_n^{\gamma}(x)+\sum_{n=1}^{N}\bar x_nL_n^{\gamma}(x)=f(x)\qquad(-1<x<1);\ x_0=0;\tag{14}$$

$$K_n^{\gamma}(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}K(x,s)\mathrm{P}_n^{(\gamma,\bar\gamma)}(s)(1-s)^{\gamma}(1+s)^{\bar\gamma}ds;L_n^{\gamma}(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}L(x,s)\mathrm{P}_n^{(\bar\gamma,\gamma)}(s)(1-s)^{\bar\gamma}(1+s)^{\gamma}ds.$$

Hence, using the orthogonality conditions for the Jacobi polynomials, we obtain a finite SLAE for the coefficients x_n. Here we can also consider the limiting case $\mathrm{N}\to\infty$ and, as above, separate the oscillating parts.

The SIE (1) can also be solved by the third method – the method of a small parameter. Indeed, assuming $\lambda=\operatorname{th}(\pi\mu)$, by an analysis of formula (2), it can be shown that for all real elastic bodies $-\ln(3/2\pi)<\mu<\ln(3/2\pi)$ $\left(\ln(3/2\pi)=0{,}17485\right)$ and, consequently, $-1/2<\lambda<1/2$. Therefore, the solution of (1) can be represented by a power series in the small parameter λ

$$w(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n w_n(x)\quad(-1<x<1).\tag{15}$$

Substituting (15) in (1) and equating the coefficients of the same powers of λ, we arrive at the recurrent SIEs.

4. A particular case of a piecewise homogeneous plane with one crack. In this particular case, in (1) $K(x,s)=L(x,s)\equiv 0$ and the governing SIE goes into the characteristic SIE, which admits an elementary exact solution [12]. An exact solution of this equation can also be obtained by the method of orthogonal Jacobi polynomials, using (12). Namely, if we represent the desired solution in the form (13) with $\mathrm{N}=\infty$, we arrive at (14) for $\mathrm{N}=\infty$, $K_n^{\gamma}(x)=L_n^{\gamma}(x)\equiv 0$, and hence the coefficients x_n are determined exactly from the orthogonality condition for the Jacobi polynomials.

In the particular case under consideration, the governing SIE (6) takes the form

$$-i\operatorname{th}(\pi\mu)+\left(\sqrt{1-x^2}/\pi\right)\int_{-1}^{1}\frac{\psi(s)ds}{s-x}=f(x)=\sqrt{1-x^2}\left[g(x)-A/\operatorname{ch}(\pi\mu)\right]\quad(-1<x<1)$$

and reduces to the SLAE (11) where $K(x_r,s_m)=L(x_r,s_m)\equiv 0$; (8) takes the form

$$\psi(x)=\psi_0(x)-A\psi_1(x)-B\psi_2(x)\quad(-1\le x\le 1);$$

the system of equations (9) becomes

$$\begin{cases}A\psi(1)+B\psi_2(1)=\psi_0(1)\\ A\psi_1(-1)+B\psi_2(-1)=\psi_0(1).\end{cases}$$

We note that proceeding from (2) $\mu=0$ for a homogeneous plane. From (2), it follows that $\mu=0$ also when we have the following relation between the elastic constants:

$$k=G_+/G_-=(1-2\nu_+)/(1-2\nu_-).$$

Next, going to the method of small parameter in this particular case, we set

$$w(x)=\varphi(x)/\sqrt{1-x^2}\quad(-1<x<1),$$

where $\varphi(x)$ is the Hölder function on the segment $[-1,1]$, and introduce the Cauchy operator S:

$$\omega_n(x)=Sw_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{w_n(s)ds}{s-x}=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_n(s)ds}{(s-x)\sqrt{1-s^2}}.$$

From Muskhelishvili's results on the behavior of an integral of Cauchy type at the end points of the integration interval [12] as well as from the results of [13] (p. 28, Theorem 4.1) it follows that the operator S maps the space $L^2_{\rho(x)}(-1,1)\left(\rho(x)=\sqrt{1-x^2}\right)$ of functions again upon $L^2_{\rho(x)}(-1,1)$, while $w_n(x)=\varphi_n(x)/\sqrt{1-x^2}\in L^2_{\rho(x)}(-1,1)$ and $\varphi_n(x)\in L^2_{\rho^{-1}(x)}(-1,1)$.

In addition, the subspace of the space $L^2_{\rho^{-1}(x)}(-1,1)$ whose elements are orthogonal to unit, that is, satisfy the conditions

$$\int_{-1}^{1}w_n(x)dx=\int_{-1}^{1}\varphi_n(x)dx/\sqrt{1-x^2}=0\quad(n=0,1,2,...)$$

is invariant to S. Then, using Parseval's equality, from the theory of Fourier series, it is easy to show that S is a unitary operator in this subspace and on the basis of this fact one can prove the convergence of the method of a small parameter in the space of quadratically summable functions.

5. Problem basic characteristics. After the solution of the SIE (1) is constructed, the complex combination of the tangential $(\tau(x))$ and normal forces $(p(x))$ outside the crack along the line of its location is determined by the formula [13]:

$$\frac{\tau(x)+p(x)}{G_+}=\frac{A_1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{w(s)ds}{s-x}-\frac{iA_2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\chi_0(s)ds}{s-x}\quad(x\in R)\,[-1,1],$$

where $x_0(x)$ is a known function depending on loads on crack edges; the constants A_1 and A_2 are given in [10]; SIF at the tips of the crack $(-a,a)$ can be calculated from formulas

$$K_{\pm a}=K_I^{\pm a}-iK_{II}^{\pm a}=i\frac{\sqrt{2\pi}}{\operatorname{ch}(\pi\mu)}\lim_{\substack{x\to a+0\\ x\to -a-0}}\begin{cases}(x-a)^{1/2+i\mu}\\ (-a-x)^{1/2-i\mu}\end{cases}\Omega(x)=\mp i\frac{\sqrt{2\pi}A_1G_+}{\operatorname{ch}^2(\pi\mu)}\lim_{\substack{x\to a-0\\ x\to -a+0}}\begin{cases}(a-x)^{1/2+i\mu}\,w(x)\\ (x+a)^{1/2-i\mu}\,w(x)\end{cases},$$

where $\Omega=\tau(x)+ip(x)$. We also introduce J-integrals – the rates of release of the potential energy accumulated in the vicinity of the crack tips

$$J_{\pm a}=\tilde{\mu}\left|K_{\pm a}\right|^2=\tilde{\mu}\left[\left(K_I^{\pm a}\right)^2+\left(K_{II}^{\pm a}\right)^2\right];\ \tilde{\mu}=\frac{1}{4}\left(\frac{1-\nu_+}{G_+}+\frac{1-\nu_-}{G_-}\right).$$

Eventually, functions $J_{\pm a}$ can be expressed in terms of the constants A and B defined in (4) or determined from system (9). Once the critical values are reached, the crack begins to spread.

REFERENCE

1. Murakami Y. Stress Intensity Factors Handbook. vol.1 and vol.2, NY: Pergamon Press., 1987.
2. Savruk, M.P. Stress Intensity Factors for the Bodies with Cracks. Handbook vol.2.. Kiev: Nauka Dumka, 1988.
3. Rice J.R., Sih G. C. Plane problems of cracks in dissimilar media, //J. Appl. Mech. Trans. ASME, vol. 32, pp. 418–423, 1965.
4. Erdogan F. Stress distribution in bonded dissimilar materials with cracks, //J. Appl. Mech. Trans. ASME, vol. 32, pp. 403-410, 1965.
5. Cherepanov G.P. On the stress state in an inhomogeneous plate with cuts, //Izv. AN SSSR, Mekhanika I Mashinostroenie, № 1, pp. 131-137, 1962.
6. Hakobyan V.N. Mixed Boundary Value Problems on Interaction of Continuum Deformable Bodies with Different Types Stress Concentrators, Yerevan: “Gitutyun” Publ. House of NAS RA, 2014, 323p.
7. Kanetsyan E.G., Mkhitaryan S.M., Mkrtchyan M.M. On a class of contact problems and problems of the mechanics of cracks for piecewise homogeneous elastic bodies, Proceeding of 7th International Conference on contemporary problems of Architecture and Construction, Florence, Italy, 19-21 November 2015, pp. 481-486.
8. Erdogan G.D., Gupta, and T. S. Cook, The numerical solutions of singular integral equations, in: Methods of Analysis and Solution of Crack Problems, Leyden: Noordhoff Intern. Publ., 1973.
9. Panasyuk V.V., Savruk N. P., and Datsyshin A. P., Distribution of Stresses around Cracks in Plates and Shells, Kiev: Naukova Dumka, 1976, 443p.
10. Verlinsky SV, Mkhitaryan S.M. The stress state of a piecewise-homogeneous elastic half-plane with an internal collinear crack system. Collection of scientific works of Conf. "Optimum control, stability and strength of mechanical systems", Yerevan: YSU Publ. House, pp. 143-147, 2002.
11. Popov G.Ya. Concentration of Elastic Stresses Near Punches, Cuts, Thin Inclusions, and Reinforcements, M: Nauka, 1982, 342p.
12. Muskhelishvili N.I. Singular integral equations, M.: Nauka, 1968, 511p.
13. Gokhberg, I. Ts., Krupnik N.Ya. Introduction to the theory of one-dimensional singular integral operators, Kishinev: Izd. "Shtinitsa", 1973, 426 p.

Information about authors:

Kanetsyan Eghine, PhD, Associate Prof., National Universaty of Architecture and Construction of Armenia, Institute of Mechanics NAS RA, (374) 93 46 15 88, ekanetsyan@gmail.com

Mkrtchyan Muscheg, PhD, Senior Researcher, Institute of Mechanics NAS RA
(374) 98 80 19 56, muscheg-mkrtchyan@rambler.ru

Mkhitaryan Suren, Prof. Dr. Corr. Member of NAS RA**,** Institute of Mechanics NAS RA,
(374) 93 93 61 17, smkhitaryan39@rambler.ru

PROPAGATION OF AN ELECTROELASTIC SHEAR WAVE SIGNAL IN A CELLULAR COMPOSITE PIEZOCRYSTALLINE LAYER

Khachatryan V.M., Avetisyan A.S.

Possible variants of the shaping and propagation of the modes of the electroelastic shear wave in a cellular composite three-layer waveguide with canonical rectangular cells from various piezoelectric materials of class 6mm of hexagonal symmetry are discussed. The dispersion equations of shape formation in periodic composite interlayers are investigated along the thickness of the waveguide. It is shown that by the appropriate choice of material triplets in vertical interlayers of the periodic structure, it is possible to achieve different schemes of wave formation (waveforms of the Love type or waves of the Gulyaev-Bleustein type) along the thickness of the composite waveguide. The character of the localization of the energy of the electroelastic shear wave at the boundaries of contiguous cells is described by the moduli of physical constants of materials and the ratio of the length of the formed wave to the thicknesses of the composite layers. Dispersion equations of frequency filtration are obtained and investigated during the propagation of formed wave forms along the inhomogeneous waveguide. It is shown that a proper selection of pairs of materials in adjacent interlayers of the periodic structure results in a three-channel waveguide with different frequency ranges. The phonon structure of the composite layers of the waveguide leads to different frequency transmission bands forming a filter along separate layers.
Long-wave (low-frequency) and short-wave (high-frequency) approximations of dispersion equations are investigated.

Introduction. With the development of accurate instrumentation, wave phenomena associated with the layering of waveguides have been widely studied in recent years. In the scientific literature one can find many works devoted to wave processes in transversely inhomogeneous or longitudinally inhomogeneous waveguides. An extensive technical overview of the latest advances in the problems of the dynamics of electro-acoustic waves in periodic structures is given in the papers **[1].**
A review of the most widely used methods for determining the structure of eigenmodes propagating in periodic structures or the features of wave formation in different composite structures are presented in particular in the papers **[2], [3], [4]** etc.
The proposed article discusses possible variants of mode shaping and the features of the propagation of an electroelastic shear wave in a cellular composite waveguide. The waveguide is modeled as a three-layer, longitudinally inhomogeneous electroelastic layer, consisting of periodically alternating composite inhomogeneous interlayers.

1. Modeling of a composite waveguide and formulation of a mathematical boundary value problem. A three-layer waveguide of thickness $2H = 2\left(h_0 + h_1 + h_2\right)$ is represented as a composite inhomogeneous waveguide of periodically alternating composite interlayers with canonical rectangular cells from different piezoelectric materials of class 6mm of hexagonal symmetry (Fig. 1).

$$\Omega_{n1}(x;y;z) = \left\{0 \le x \le a;\ -2h_2 - h_0 \le y \le h_0 + 2h_1;\ |z| < \infty\right\}$$

$$\Omega_{n2}(x;y;z) = \left\{a \le x \le a+b;\ -2h_2 - h_0 \le y \le h_0 + 2h_1;\ |z| < \infty\right\} \tag{1.1}$$

In a periodic cell, each composite interlayer of (1.1) is formed of three rectangular cells $\left\{m_{nm}(x;y)\right\}$ perfectly aligned with each other on the inner surfaces of the layered waveguide $y = \pm h_0$, with the numbers $n = 0;1;2$ and $m = 1;2$ where $n = 0;\ 1;\ 2$ is the number of periodically inhomogeneous layer in the waveguide and $m = 1;\ 2$ is the number of distinguished composite interlayer in periodic cells.
The unboundedness of the component layers of the waveguide along coordinate z makes it possible to go over to the two-dimensional formulation of the problem in the isotropic plane $x0y$ of piezoelectrics of class 6mm. Then, along the three longitudinally inhomogeneous channels of the composite waveguide, the interrelated modes of the electroelastic shear wave can propagate

$$\left\{\mathrm{W}_{nm}(x;y;t);\Phi_{nm}(x;y;t)\right\} = \left\{\mathrm{w}_{nm}(x;y);\varphi_{nm}(x;y)\right\}\cdot\exp(-i\omega t) \tag{1.2}$$

In order to study the patterns of wave propagation in a composite waveguide, in each of the rectangular cells $\left\{m_{nm}(x;y)\right\}$, the wave equations of antiplane deformation relative to the elastic shear $\mathrm{W}_{nm}(x;y;t)$ and the electric potential $\Phi_{nm}(x;y;t)$ will be solved

$$\mathrm{w}_{nm,xx}(x;y) + \mathrm{w}_{nm,yy}(x;y) = -\omega^2\tilde{C}_{nm}^{-2}\cdot\mathrm{w}_{nm}(x;y)$$

$$\cdot_{nm,xx}(x;y) + \cdot_{nm,yy}(x;y) = 0 \tag{1.3}$$

Here we introduce the notations of new electromechanical potential functions $\cdot_{nm}(x;y) = \ddot{}_{nm}(x;y) - \left(e_{nm}/£_{nm}\right)\mathrm{w}_{nm}(x;y)$, the velocities of volumetric shear waves $\tilde{C}_{nm} = \sqrt{\tilde{G}_{nm}/°_{nm}}$, shear moduli G_{nm}, reduced shear moduli $\tilde{G}_{nm} = G_{nm}\left(1 + ¡^2_{nm}\right)$, densities $°_{nm}$, piezoelectric moduli $e_{nm} = e^{nm}_{15}$, permittivity $£_{nm} = £^{nm}_{11}$ and $¡^2_{nm} = e^2_{nm}/\left(£_{nm}G_{nm}\right)$ - electromechanical coupling coefficients of piezoelectric materials in the corresponding cells $\{m_{nm}(x;y)\}$.

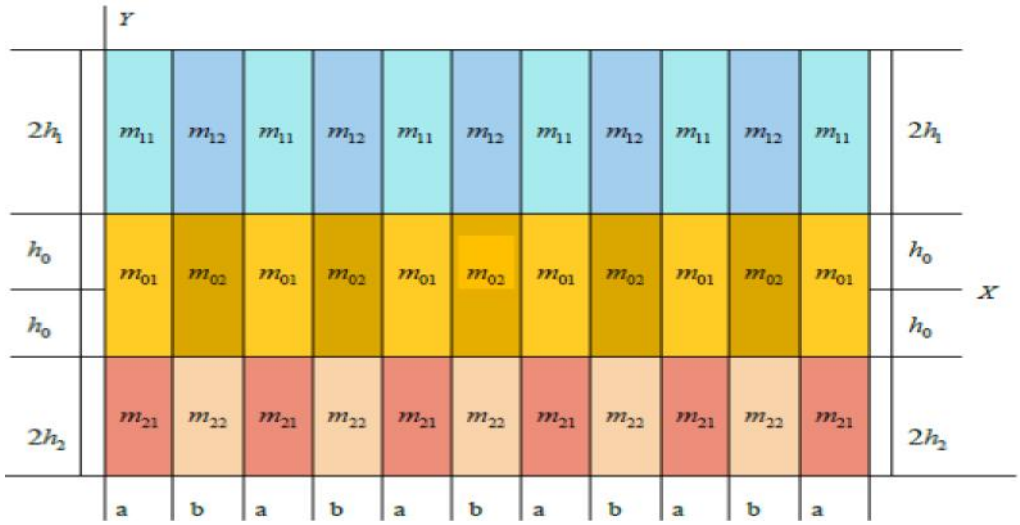


Fig. 1 *The cellular structure of a periodically inhomogeneous three-layer elastic waveguide*

On the inner surfaces of the contact $y = h_0$ and $y = -h_0$ of the rectangular cells in periodically repeating interlayers $\Omega_{n1}(x;y;z)$ and $\Omega_{n2}(x;y;z)$, the conditions of complete electromechanical contact are satisfied.

$$\mathrm{w}_{01}(x;h_0) = \mathrm{w}_{11}(x;h_0);$$
$$\cdot_{01}(x;h_0) + \left(e_{01}/£_{01}\right)\mathrm{w}_{01}(x;h_0) = \cdot_{11}(x;h_0) + \left(e_{11}/£_{11}\right)\mathrm{w}_{11}(x;h_0)$$
$$\tilde{G}_{01}\mathrm{w}_{01,y}(x;y) + e_{01}\cdot_{01,y}(x;y)\Big|_{y=h_0} = \tilde{G}_{11}\mathrm{w}_{11,y}(x;y) + e_{11}\cdot_{11,y}(x;y)\Big|_{y=h_0}$$
$$-£_{01}\cdot_{01,y}(x;y)\Big|_{y=h_0} = -£_{11}\cdot_{11,y}(x;y)\Big|_{y=h_0} \tag{1.4}$$
$$\mathrm{w}_{01}(x;-h_0) = \mathrm{w}_{21}(x;-h_0);$$
$$\cdot_{01}(x;-h_0) + \left(e_{01}/£_{01}\right)\mathrm{w}_{01}(x;-h_0) = \cdot_{21}(x;-h_0) + \left(e_{21}/£_{21}\right)\mathrm{w}_{21}(x;-h_0)$$
$$\tilde{G}_{01}\mathrm{w}_{01,y}(x;y) + e_{01}\cdot_{01,y}(x;y)\Big|_{y=-h_0} = \tilde{G}_{21}\mathrm{w}_{21,y}(x;y) + e_{21}\cdot_{21,y}(x;y)\Big|_{y=-h_0}$$
$$-£_{01}\cdot_{01,y}(x;y)\Big|_{y=h_0} = -£_{21}\cdot_{21,y}(x;y)\Big|_{y=h_0} \tag{1.5}$$
$$\mathrm{w}_{02}(x;h_0) = \mathrm{w}_{12}(x;h_0);$$
$$\cdot_{02}(x;h_0) + \left(e_{02}/£_{02}\right)\mathrm{w}_{02}(x;h_0) = \cdot_{12}(x;h_0) + \left(e_{12}/£_{12}\right)\mathrm{w}_{12}(x;h_0)$$
$$\tilde{G}_{02}\mathrm{w}_{02,y}(x;y) + e_{02}\cdot_{02,y}(x;y)\Big|_{y=h_0} = \tilde{G}_{12}\mathrm{w}_{12,y}(x;y) + e_{12}\cdot_{12,y}(x;y)\Big|_{y=h_0}$$
$$-£_{02}\cdot_{02,y}(x;y)\Big|_{y=h_0} = -£_{12}\cdot_{12,y}(x;y)\Big|_{y=h_0} \tag{1.6}$$
$$\mathrm{w}_{02}(x;-h_0) = \mathrm{w}_{22}(x;-h_0);$$
$$\ddot{}_{02}(x;)\cdot_{02}(x;-h_0) + \left(e_{02}/£_{02}\right)\mathrm{w}_{02}(x;-h_0) = \cdot_{22}(x;-h_0) + \left(e_{22}/£_{22}\right)\mathrm{w}_{22}(x;-h_0)$$
$$\tilde{G}_{02}\mathrm{w}_{02,y}(x;y) + e_{02}\cdot_{02,y}(x;y)\Big|_{y=-h_0} = \tilde{G}_{22}\mathrm{w}_{22,y}(x;y) + e_{22}\cdot_{22,y}(x;y)\Big|_{y=-h_0}$$

$$-£_{02}\cdot\ _{02,y}(x;y)\Big|_{y=-h_0}=-£_{22}\cdot\ _{22,y}(x;y)\Big|_{y=-h_0} \tag{1.7}$$

On the external mechanically free shielded surfaces $y=h_0+2h_1$ and $y=-h_0-2h_2$ of the waveguide, the boundary conditions will be written in the following form, respectively

$$\cdot\ _{11}(x;h_0+2h_1)+\left(e_{11}/£_{11}\right)\mathrm{w}_{11}(x;h_0+2h_1)=0$$

$$\tilde{G}_{11}\mathrm{w}_{11,y}(x;y)+e_{11}\cdot\ _{11,y}(x;y)\Big|_{y=h_0+2h_1}=0\,; \tag{1.8}$$

$$\cdot\ _{12}(x;h_0+2h_1)+\left(e_{12}/£_{12}\right)\mathrm{w}_{12}(x;h_0+2h_1)=0$$

$$\tilde{G}_{12}\mathrm{w}_{12,y}(x;y)+e_{12}\cdot\ _{12,y}(x;y)\Big|_{y=h_0+2h_1}=0\ ; \tag{1.9}$$

$$\cdot\ _{21}(x;-h_0-2h_2)+\left(e_{21}/£_{21}\right)\mathrm{w}_{21}(x;-h_0-2h_2)=0$$

$$\tilde{G}_{21}\mathrm{w}_{21,y}(x;y)+e_{21}\cdot\ _{21,y}(x;y)\Big|_{y=-h_0-2h_2}=0\,; \tag{1.10}$$

$$\cdot\ _{22}(x;-h_0-2h_2)+\left(e_{22}/£_{22}\right)\mathrm{w}_{22}(x;-h_0-2h_2)=0$$

$$\tilde{G}_{22}\mathrm{w}_{22,y}(x;y)+e_{22}\cdot\ _{22,y}(x;y)\Big|_{y=-h_0-2h_2}=0\ ; \tag{1.11}$$

In each layer ($n\in\{0;\ 1;\ 2\}$), in all the lateral surfaces of the adjacent interlayers, the conditions for complete mechanical contact are satisfied. In the section $x=a$, these conditions will be written in the known form

$$\cdot\ _{n1}(0;y)+\left(e_{n1}/£_{n1}\right)\mathrm{w}_{n1}(0;y)=\cdot\ _{n2}(0;y)+\left(e_{n2}/£_{n2}\right)\mathrm{w}_{n2}(0;y)$$

$$\mathrm{w}_{n1}(0;y)=\mathrm{w}_{n2}(0;y)\ ; \tag{1.12}$$

$$\tilde{G}_{n1}\mathrm{w}_{n1,x}(x;y)+e_{n1}\cdot\ _{n1,x}(x;y)\Big|_{x=0}=\tilde{G}_{n2}\mathrm{w}_{n2,x}(x;y)+e_{n2}\cdot\ _{n2,x}(x;y)\Big|_{x=0} \tag{1.13}$$

$$-£_{n1}\cdot\ _{n1,x}(x;y)\Big|_{x=0}=-£_{n2}\cdot\ _{n2,x}(x;y)\Big|_{x=0} \tag{1.14}$$

Taking into account the periodicity of the structure in the direction of wave propagation, the conditions for the conjugation of mechanical fields in the sections $x=-b$ and $x=a$ are written in the form

$$w_{n1}(a;y)=«\cdot w_{n2}(-b;y)\ ; \tag{1.15}$$

$$\cdot\ _{n1}(a;y)+\left(e_{n1}/£_{n1}\right)w_{n1}(a;y)=«\cdot\left[\cdot\ _{n2}(-b;y)+\left(e_{n2}/£_{n2}\right)w_{n2}(-b;y)\right] \tag{1.16}$$

$$«^{-1}\cdot\left[\tilde{G}_{n1}w_{n1,x}(a;y)+e_{n1}\cdot\ _{n1,x}(a;y)\right]=\tilde{G}_{n2}w_{n2,x}(-b;y)+e_{n2}\cdot\ _{n2,x}(-b;y) \tag{1.17}$$

$$«^{-1}\cdot£_{n1}\cdot\ _{n1,x}(a;y)=£_{n2}\cdot\ _{n2,x}(-b;y) \tag{1.18}$$

In the boundary conditions (1.15)÷(1.17) $«=\exp(Lk)$ is the Floquet multiplier (coefficient of periodicity) and $L=a+b$ is the linear periodicity parameter. $k(\mu)=2®/ª(\mu)$ is the wave number of the formed wave (Floquet wave number) corresponding to the permitted wavelengths $ª(\mu)$.

The canonicity of the cellular structure of the waveguide leads to the same geometric periodicity in all three inhomogeneous layers $n\in\{0;\ 1;\ 2\}$, so the Floquet multiplier is the same.

2. Solution of the mathematical boundary value problem. Taking into account the invariance of the systems of equations (1.3) in all cells of the cellular waveguide and the same structural periodicity of all three layers (channels) of the waveguide, we construct the solution of the boundary value problem by the method of separation of variables.

$$\left\{\mathrm{w}_{nm}(x;y);\cdot\ _{nm}(x;y)\right\}=\left\{X^{\mathrm{w}}_{nm}(x)\cdot Y^{\mathrm{w}}_{nm}(y);X^{\cdot}_{nm}(x)\cdot Y^{\cdot}_{nm}(y)\right\}.$$

Then the solutions of the systems of equations (1.3) are represented by functions $Y^{\mathrm{w}}_{nm}(y)$ and $Y^{\cdot}_{nm}(y)$ describing the waveforms along the thickness of the composite layer

$$\begin{aligned}Y^{\mathrm{w}}_{nm}(y)&=A^{\mathrm{w}}_{nm}\cdot sh(k_m\tilde{\ }_{nm}y)+B^{\mathrm{w}}_{nm}\cdot ch(k_m\tilde{\ }_{nm}y)\\ Y^{\cdot}_{nm}(y)&=A^{\cdot}_{nm}\cdot sh(k_m y)+B^{\cdot}_{nm}\cdot ch(k_m y)\end{aligned}\ ;\quad \text{for both interlayers}\quad m=1;2 \tag{2.1}$$

and by functions $X_{nm}^{\mathrm{w}}(x)$ and $X_{nm}^{\cdot}(x)$, describing the pattern of wave propagation along the composite layer

$$X_{n1}^{\mathrm{w}}(x) = X_{n1}^{\cdot}(x) = C_{n1}\sin(k_1 x) + D_{n1}\cos(k_1 x)$$
$$X_{n2}^{\mathrm{w}}(x) = X_{n2}^{\cdot}(x) = C_{n2}\sin(k_2 x) + D_{n2}\cos(k_2 x) \tag{2.2}$$

Satisfying the boundary conditions (1.4)÷(1.11), we obtain two identical dispersion equations for the formation of wave modes along the thickness of each composite interlayer $\Omega_{n1}(x;y;z)$ and $\Omega_{n2}(x;y;z)$

$$\det\left\| g_{ij}\left[k_m(\mu);h_n;\tilde{C}_{nm};\mathrm{i}_{nm}^{2}\right]\right\|_{12\times 12} = 0\,; \qquad \text{in both interlayers} \quad m = 1;2 \tag{2.3}$$

At different frequencies of the wave signal $\mu \in \left[\mu_0;\ \mu^*\right]$ different combinations of geometric and physical parameters of rectangular cells in composite interlayers lead to the formation of different forms of an electroelastic wave (with the corresponding phase function $k_m^{0*}(\mu)$ in the given interval) along the thickness of the composite waveguide.

In the absence of a piezoelectric effect in the materials of cells, equation (2.3) takes the classical form [5]

$$th(2\sim_{0m} k_m h_0) = \frac{«_{0m}^{1m}\cdot th(2\sim_{1m} k_m h_1) + «_{0m}^{2m}\cdot th(2\sim_{2m} k_m h_2)}{1 + «_{0m}^{1m} th(2\sim_{1m} k_m h_1)\cdot «_{0m}^{2m} th(2\sim_{2m} k_m h_2)} \tag{2.4}$$

where $\sim_{nm} \triangleq \sqrt{1-\mu^2 \big/ \left(k_m^2(\mu)c_{nm}^2\right)}$ are the coefficients of attenuation of slow waves in the corresponding waveguide cells $\{m_{nm}(x;y)\}$, $«_{0m}^{1m} \triangleq G_{1m}\sim_{1m} \big/ G_{0m}\sim_{0m}$ and $«_{0m}^{2m} \triangleq G_{2m}\sim_{2m} \big/ G_{0m}\sim_{0m}$ are characteristic relative coefficients of slow waves.

Taking into account the same periodicity of all three layers, we use the Floquet-Lyapunov theory.

Substituting the solutions in the cells of a periodic cell (interlayers with numbers $m = 1;2$) into conditions of complete mechanical contact on the face surfaces of cells and taking into account the periodicity of the channel structures (1.12)÷(1.18), for nontrivial wave distributions in periodic composite layers, we obtain three equations for the frequency filtering for each layer with the number $n = 0;1;2$

$$\cos^2(Lk_n) + f\left(k_1^{0*}(\mu);k_2^{0*}(\mu)\right)\cdot\cos(Lk_n) + 4g\left(k_1^{0*}(\mu);k_2^{0*}(\mu)\right) - 8 = 0\,, \tag{2.5}$$

where $f\left(k_1^{0*}(\mu);k_2^{0*}(\mu)\right)$ and $g\left(k_1^{0*}(\mu);k_2^{0*}(\mu)\right)$ are rather cumbersome combinations of trigonometric functions $\sin(a\cdot k_1^{0*}(\mu))$, $\cos(a\cdot k_1^{0*}(\mu))$, $\sin(b\cdot k_2^{0*}(\mu))$ and $\cos(b\cdot k_2^{0*}(\mu))$, and also the relative parameters of the geometric and physical characteristics of neighboring cells in periodically inhomogeneous channels $n = 0;1;2$.

In particular cases of a periodically inhomogeneous single-channel waveguide, the simplification of the filtration equations (2.5) is obtained and investigated in [6, 7].

In the case of a three-channel elastic cellular waveguide, when the piezoelectric effect is absent in the cell materials, the filtration equations (2.5) are simplified

$$\cos[Lk_n^*(\mu)] = \left\{\begin{array}{l}\cos[ak_1^{0*}(\mu)]\cdot\cos[bk_2^{0*}(\mu)] - \\ -\dfrac{G_{n1}^2\cdot[k_1^{0*}(\mu)]^2 + G_{n2}^2\cdot[k_2^{0*}(\mu)]^2}{2G_{n1}\cdot k_1^{0*}(\mu)G_{n2}\cdot k_2^{0*}(\mu)}\sin[ak_1^{0*}(\mu)]\cdot\sin[bk_2^{0*}(\mu)]\end{array}\right\} \tag{2.6}$$

Each of these equations $n \in \{0;\ 1;\ 2\}$ corresponds to one of the channels in a three-layer waveguide. From each equation (2.6) the permitted wavelengths are determined with the corresponding bands of admissible (or forbidden) frequencies

$$\mathrm{a}_n^*(\mu) = 2®\, L\cdot\arccos^{-1}\left\{\begin{array}{l}\cos[ak_1^{0*}(\mu)]\cdot\cos[bk_2^{0*}(\mu)] - \\ -\dfrac{G_{n1}^2\cdot[k_1^{0*}(\mu)]^2 + G_{n2}^2\cdot[k_2^{0*}(\mu)]^2}{2G_{n1}\cdot k_1^{0*}(\mu)G_{n2}\cdot k_2^{0*}(\mu)}\sin[ak_1^{0*}(\mu)]\cdot\sin[bk_2^{0*}(\mu)]\end{array}\right\} \tag{2.7}$$

The permitted wave numbers $k_0^*(\mu)$, $k_1^*(\mu)$ and $k_2^*(\mu)$ determined in each channel (layer with the number $n \in \{0;\ 1;\ 2\}$) and also the corresponding zones of admissible frequencies must be coordinated by the condition of synchronous propagation over the interlayers.

The wave number $k(\mu) = 2®/^{a}(\mu)$ (wave number of Floquet) of the formed wave corresponding to the permitted frequencies μ is already defined as the cross section of the sets along the entire composite waveguide

$$\{k(\mu)\} = \{k_0^*(\mu)\} \cap \{k_1^*(\mu)\} \cap \{k_2^*(\mu)\} \tag{2.8}$$

At first glance, from the relations (2.7) and (2.8) it follows that the filtration property of a composite waveguide is mainly determined by the parameters of the longitudinal inhomogeneity G_{n1}, G_{n2}, a and b. But, as it turns out later, the features of filtration in a composite waveguide are determined by the composite character of periodic interlayers. The composition of materials and the linear dimensions of the cells in the interlayers determine the character of the formed waveform $k_1^{0*}(\mu)$ and $k_2^{0*}(\mu)$ in the interlayers. Unlike a single-channel waveguide, the wave numbers $k_1^{0*}(\mu)$ and $k_2^{0*}(\mu)$ of the formed forms in composite interlayers of a composite waveguide are determined from boundary value problems on a certain spectrum of frequencies $\mu \in [\mu_0;\ \mu^*]$. Therefore, in the domain of determining the dispersion equation of the formation, it is necessary to search for the zone of admissible frequencies of propagating waves.

REFERENCE

1. Hussein M.I., Leamy M.J., Ruzzene M., Dynamics of phononic paterials and structures: historical origins, recent progress, and future outlook, Applied Mechanics Reviews, (2014), vol. 66 , pp. 1-38
2. Achenbach J. D., Wave Propagation in Elastic Solids, Amsterdam, North-Holland, (1993), p. 440
3. Meleshko V. V., Bondarenko A. A., Dovgiy S. A., Trofimchuk A. N., van Heijst G. J. F., Elastic waveguides: History and the state of the art. I, (2009), vol. 162, №1, pp. 99-120 .
4. Gazalet J., Dupont S., Kastelik J.C., Rolland Q., and Djafari-Rouhani B., A tutorial survey on waves propagating in periodic media: Electronic, photonic and phononic crystals. Perception of the Bloch theorem in both real and Fourier domains. Wave Motion, (2013), vol. 50, p. 619-654
5. Avetisyan A.S., Khachatryan V.M., The formulation and propagation of elastic ***(SH)*** shear waves in a cellular composite waveguide, Procc. of NAS of Armenia, Mechanics, (2018), vol. 71, №3, pp. 13-40
6. Piliposyan D.G., Ghazaryan K.B, Piliposian G.T., Avetisyan A.S., Wave Propagation in Periodic Piezoelectric Elastic Waveguides, Proc. of the ASME 2012 Conference on Smart Materials, Adaptive Structures and Intelligent Systems-SMASIS2012, September 19-21, 2012, Stone Mountain, Georgia, USA, DOI: 10.1115/SMASIS2012-7911
7. Piliposian G.T., Avetisyan A.S., Ghazaryan K.B., Shear wave propagation in periodic phononic /photonic piezoelectric medium, Wave Motion, (2012), vol. 49, pp. 125–134

About authors:

Avetisyan A.S. - Department on Dynamics of Deformable Systems and Coupled Fields,
E -mail: ara.serg.avetisyan@gmail.com,

Khachatryan V.M. - Department on Dynamics of Deformable Systems and Coupled Fields,
E -mail: khachvaz@gmail.com,
Institute of Mechanics of NAS of Armenia, Baghramyan ave. 24/2, 0019, Yerevan, Armenia.

RECENT DEVELOPMENTS IN CONTROLLABILITY ANALYSIS OF DYNAMIC SYSTEMS: THE GREEN'S FUNCTION APPROACH– I. DERIVATION OF RESOLVING SYSTEMS

Khurshudyan As. Zh.

We present a two-part thematic review, devoted to the theory and applications of the Green's function approach. In the first part we review the Green's function approach for linear and nonlinear dynamic systems, i.e., systems whose dynamics is described by linear or nonlinear state constraints (governing equations, initial and/or boundary conditions, other possible constraints). We begin with a short introduction into exact and approximate controllability theory and describe the two main approaches usually used to establish whether a particular system is exact or approximate controllable or not. Further, we describe the Green's function approach and the ways of how resolving constraints on the control function can be derived.

1. Introduction

Applied control systems may be produced and exploited only after successful tests analyzing some of its properties, such as stability, reliability, flexibility, controllability, etc. In this paper we will focus on the property of controllability. If control regimes developed by our controllers[1] are able to transmit a control system from a given state to a desired state in a given finite amount of time, then the system is called controllable. The development of the controllability theory of systems described by partial differential equations has been carried out in 1960's and are mainly due to Butkovski A. G., Fattorini H. O., Russel D. L., Lions J.-L. Its further development the controllability theory of systems with distributed parameters has been found in works of Zuazua E., Glowinski R., Lasiecka I., Kunisch K., Gugat M. Leugering G., Krabs W., Avdonin S., Agrachev A. and others. For a more thorough list refer to [1–13] and the related references therein.

There are two main types of controllability – exact and approximate. A system is called exactly controllable if by a specific choice of admissible controls it can be transitioned from a given state to a required state exactly in a finite amount of time. It is clear that even though some required states may not be achieved exactly by any choice of admissible controls, there may exist admissible controls transitioning the system to a sufficiently narrow neighborhood of the desired state. In such cases, the system is called *approximately* controllable. Let us put these definitions into a rigorous mathematical fashion. Assume that $\boldsymbol{w}:\mathcal{U}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^m$, $m, n\in\mathbb{N}$, characterizes the state of a control system, $\mathcal{U}$ is the set of admissible controls. At this, $\boldsymbol{w}$ satisfies some state constraints[2]. For controllability analysis, we need to quantify the residue

$$\mathcal{R}_T(\boldsymbol{u})=\left\|\boldsymbol{w}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x},T)-\boldsymbol{w}_T(\boldsymbol{x})\right\|_{\boldsymbol{W}_T} \quad \text{on } \mathcal{U}$$

evaluating the mismatch between the state implemented by an admissible control $\boldsymbol{u}$ at a given finite T and the desired state $\boldsymbol{w}_T$, which depends only on the state variable $\boldsymbol{x}$. Here $\boldsymbol{W}_T$ is the space of state when t is fixed (appropriate Hilbert space), and $\|\bullet\|_{\boldsymbol{W}_T}$ is its norm. Note that $\mathcal{R}_T(\cdot)$ is a short version of the notation $\mathcal{R}(T,\cdot)$.

Thus, if there exists an admissible control $\boldsymbol{u}\in\mathcal{U}$ such that

$$\mathcal{R}_T(\boldsymbol{u})=0 \tag{1.1}$$

then the system is called *exactly* controllable. If this does not hold for any choice of admissible controls, but there exists an admissible control $\boldsymbol{u}\in\mathcal{U}$ such that

$$\mathcal{R}_T(\boldsymbol{u})\le\varepsilon \tag{1.2}$$

with a given accuracy ε, then the system is called *approximately* controllable.

Remark 1. Apparently, the exact controllability of a system implies its approximate controllability with arbitrarily small accuracy. However, the opposite is not correct.

Despite the simple mathematical definition of exact and approximate controllabilities, it is far not so simple to establish whether a system with particular state constraints is exact or approximate

[1] Hereinafter, such controls are called *admissible* controls.
[2] For instance, partial differential equations and initial/boundary conditions.

controllable or is not controllable at all. In general, there exist two direction of controllability analysis. One consists in proving that there exist at least one admissible control for which either (1.1) or (1.2) exists leaving the determination of controls to numerical analysis. The other one consists in explicit determination of controls providing either (1.1) or (1.2)[3] and thus ensuring that such a control exists.

One of the most crucial aspects of controllability analysis is the choice of $\mathcal{U}$. In most studies, it is chosen as follows:

$$\mathcal{U} \in \left\{ \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U},\ \mathrm{supp}\left(\boldsymbol{u}\right) \subseteq \left[0, T\right],\ \text{o.p.c.} \right\}.$$

Here $\mathrm{supp}\left(\boldsymbol{u}\right) = \overline{\left\{ t \in \mathbb{R}^{+},\ \boldsymbol{u}\left(t\right) \neq 0 \right\}}$, o.p.c. means other possible constraints[4], $\boldsymbol{U}$ is the control functions space (appropriate Hilbert space). In this context, the sets of resolving controls are defined as

$$\mathcal{U}_{res}^{ex} \in \left\{ \boldsymbol{u} \in \mathcal{U},\ \left(1.1\right) \right\} \quad \text{and} \quad \mathcal{U}_{res}^{app} \in \left\{ \boldsymbol{u} \in \mathcal{U},\ \left(1.2\right) \right\}.$$

The lack of controllability would mean $\mathcal{U}_{res}^{ex} = \varnothing$ or $\mathcal{U}_{res}^{app} = \varnothing$. Note that $\mathcal{U}_{res}^{app} = \varnothing$ implies $\mathcal{U}_{res}^{ex} = \varnothing$. However, the opposite is not correct.

The main mathematical tool used to prove the existence of resolving controls is the Banach fixed-point theorem (or its modifications). On the other hand, for explicit determination of resolving controls there exist two methods. The first one uses a constrained minimization algorithm to solve:

$$\mathcal{R}_T\left(\boldsymbol{u}\right) = \left\| \boldsymbol{w}\left(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}, T\right) - \boldsymbol{w}_T\left(\boldsymbol{x}\right) \right\|_{\boldsymbol{W}_T} \underset{\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}}{\rightarrow} \min$$

where $\boldsymbol{w}$ is constrained by the state constraints. This method works fine when the state constraints have simple form, e.g., are linear, but for complicated state constraints, this method may require burdensome computational costs. Then, the resolving controls are determined as follows:

$$\boldsymbol{u} = \arg\min_{\boldsymbol{v} \in \mathcal{U}} \left\| \boldsymbol{w}\left(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}, T\right) - \boldsymbol{w}_T\left(\boldsymbol{x}\right) \right\|_{\boldsymbol{W}_T}.$$

The advantage of this method is that when we minimize $\mathcal{R}_T$ on $\mathcal{U}$, we are able to figure out if (1.1) holds or not, and if it does not, for which ε does (1.2) hold. Indeed, as soon as $\min_{\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}} \mathcal{R}_T\left(\boldsymbol{u}\right) = 0$, then the system is exactly controllable, while if $\min_{\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}} \mathcal{R}_T\left(\boldsymbol{u}\right) = \varepsilon_0 \neq 0$, then the minimizers (resolving controls) ensure the system approximate controllability with any $\varepsilon \leq \varepsilon_0$.

The second method uses the system of constraints

$$\boldsymbol{w}\left(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}, T\right) - \boldsymbol{w}_T\left(\boldsymbol{x}\right) = 0, \tag{1.3}$$

which is equivalent to (1.1) in order to reduce a system of equivalent constraints on admissible controls, from which they can be explicitly derived. The advantage of this method is that in some cases the explicit determination of the resolving controls can be much simpler, than by the previous method. On the other hand, this method is applicable only in the case when $\boldsymbol{w}$, as the solution of the state constraints, is found explicitly.

Being a universal tool of analysis of initial/boundary-value problems for ordinary or partial differential equations, the Green's function approach allows to proceed in both directions. In this paper we will show how the Green's representation formula can be used to determine admissible controls providing (1.1), as well as to prove that there exist admissible controls providing (1.2).

2. The Green's Function Approach: The Derivation of Constraints on Admissible Controls

The Green's function approach is applicable for analysis of controllability of dynamic systems the state of which obeys ordinary or partial differential equations. Let the state of a control system be described by the following abstract differential equation:

[3] Hereinafter, such admissible controls are called resolving controls.

[4] In the case, when the state is determined as the solution of an initial/boundary value problem for a differential equations, then these constraints may include compatibility conditions between the boundary and initial conditions.

$$\mathcal{D}_{\boldsymbol{u}_1}\left[\boldsymbol{w}\right]=\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{x},t\right),\quad \boldsymbol{u}_1\in\mathcal{U}_1,\ \boldsymbol{u}_2\in\mathcal{U}_2,\ \boldsymbol{x}\in\Omega\subseteq\mathbb{R}^n,\ t\in\mathbb{R}^+, \tag{2.1}$$

subject to the following boundary and initial conditions:

$$\mathcal{B}_{\boldsymbol{u}_{b_1}}\left[\boldsymbol{w}\right]=\boldsymbol{u}_{b_2},\quad \boldsymbol{u}_{b_1}\in\mathcal{U}_{b_1},\ \boldsymbol{u}_{b_2}\in\mathcal{U}_{b_2},\ \boldsymbol{x}\in\partial\Omega,\ t\in\mathbb{R}^+, \tag{2.2}$$

$$\mathcal{I}\left[\boldsymbol{w}\right]=\boldsymbol{w}_0,\quad \boldsymbol{x}\in\Omega,\ t=0. \tag{2.3}$$

Here $\mathcal{D}_{\boldsymbol{u}}\left[\bullet\right]$ is the state differential operator, $\mathcal{B}_{\boldsymbol{u}_b}\left[\bullet\right]$ and $\mathcal{I}\left[\bullet\right]$ are the operators of boundary and initial conditions, Ω is an open subset of $\mathbb{R}^n$, $\partial\Omega$ is its boundary, $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ and $\boldsymbol{u}_{b_1}$, $\boldsymbol{u}_{b_2}$ are control functions[5], as above $\mathcal{U}$ with all indices denotes the set of admissible controls, $\boldsymbol{w}_0$ is a given function, $\boldsymbol{F}$ is the resultant of all influences acting on the system.

Let the problem is to establish exact or approximate controllability conditions for (2.1)–(2.3) in the simplest case, when the desired state is given as follows:

$$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}_T,\quad \boldsymbol{x}\in\Omega,\ t=0. \tag{2.4}$$

Apparently, if the solution of (2.1)–(2.3) is determined, then (1.3) becomes an explicit constraint on $\boldsymbol{u}$ or $\boldsymbol{u}_b$ or both.

2.1. Linear Systems

If $\mathcal{D}_{\boldsymbol{u}}\left[\bullet\right]$, $\mathcal{B}_{\boldsymbol{u}_b}\left[\bullet\right]$ and $\mathcal{I}\left[\bullet\right]$ are linear in $\boldsymbol{w}$,, then [13, 14]

$$\begin{aligned}\boldsymbol{w}\left(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_{b_1},\boldsymbol{u}_{b_2}\boldsymbol{x},t\right)=&\int_\Omega\int_0^t\boldsymbol{G}\left(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_{b_1},\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi},t,\tau\right)\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{\xi},\tau\right)\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\,\mathrm{d}\tau+\\&+\int_\Omega\int_0^t\boldsymbol{G}\left(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_{b_1},\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi},t,\tau\right)\text{¢}_{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{u}_{b_2}\left(\tau\right)\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\,\mathrm{d}\tau+\\&+\int_\Omega\int_0^t\boldsymbol{G}\left(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_{b_1},\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi},t,\tau\right)\text{¢}_{\tau}\boldsymbol{w}_0\left(\boldsymbol{\xi}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\,\mathrm{d}\tau,\end{aligned} \tag{2.5}$$

where $\boldsymbol{G}$ is the Green's function of (2.1)–(2.3), $\text{¢}_{\boldsymbol{\xi}}$ and ¢_{τ} are generalized functions expressed in terms of the Dirac function and its derivatives. For their specific uses refer to [13].

2.1.1. Exact Controllability

In order to analyze the exact controllability of the system, we need to evaluate the solution (2.5) at $t=T$ and substitute it into (1.3) to arrive at

$$\boldsymbol{I}_{T1}\left(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_{b_1},\boldsymbol{x}\right)+\boldsymbol{I}_{T2}\left(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_{b_1},\boldsymbol{u}_{b_2},\boldsymbol{x}\right)+\boldsymbol{I}_{T3}\left(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_{b_1},\boldsymbol{x}\right)=\boldsymbol{w}_T\left(\boldsymbol{x}\right),\qquad \boldsymbol{x}\in\Omega, \tag{2.6}$$

where $\boldsymbol{I}_{T1},\boldsymbol{I}_{T2}$, and $\boldsymbol{I}_{T3}$ are the integrals in (2.5), successively. Apparently, (2.6) is a system of nonlinear equality type constraints on the control functions.

It is hardly possible to resolve (2.6) for all the controls simultaneously. For the sake of simplicity, assume that only $\boldsymbol{u}_2$ is an acting control. Then, the constraint becomes

$$\int_\Omega\int_0^T\boldsymbol{G}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi},t,\tau\right)\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\xi},\tau\right)\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\,\mathrm{d}\tau=\boldsymbol{w}_T\left(\boldsymbol{x}\right)-\boldsymbol{I}_{T2}\left(\boldsymbol{x}\right)-\boldsymbol{I}_{T3}\left(\boldsymbol{x}\right),\qquad \boldsymbol{x}\in\Omega, \tag{2.7}$$

where we omit the dependence of $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{I}_{T2}$, and $\boldsymbol{I}_{T3}$ on other functions. Thus, (2.7) is equivalent to (1.1), which means that any $\boldsymbol{u}\in\mathcal{U}$ satisfying (2.7) is a resolving control:

$$\mathcal{U}_{res}^{ex}=\left\{\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{U},\ \left(2.7\right)\right\}\subseteq\mathcal{U}.$$

[5] In general, controllability of the system with respect to several controls can be considered. However, in practice, only one control is considered.

Remark 2. Obviously, both sides of (2.7) depend on $\boldsymbol{x} \in \Omega$, which makes the determination of $\boldsymbol{u}$ quite sophisticated. In such cases, both sides of (2.7) is expanded into a series of functions $\{\ddot{}_n\}_{n=1}^{\infty}$ which are orthogonal (in general, with some weight) in Ω. Equating the coefficients of $\ddot{}_n$ for corresponding n, we derive an infinite system of nonlinear integral constraints on $\boldsymbol{u}$. This procedure is first proposed by Butkovskiy A. G. in [15].

2.1.2. Approximate Controllability

For the analysis of (1.2), we also use the solution (2.5) evaluated at $t = T$. Substituted it into (1.2) and making use of the triangle inequality, we arrive at

$$\mathcal{R}_T\left(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_{b_1}, \boldsymbol{u}_{b_2}\right) \le \mathcal{R}_{T1}\left(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_{b_1}\right) + \mathcal{R}_{T2}\left(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_{b_1}, \boldsymbol{u}_{b_2}\right) + \mathcal{R}_{T3}\left(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_{b_1}\right) + \left\|\boldsymbol{w}_T\right\|_{W_T},$$

$$\mathcal{R}_{T1}\left(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_{b_1}\right) = \left\|\boldsymbol{I}_{T1}\left(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_{b_1}, \boldsymbol{x}\right)\right\|_{W_T}, \quad \mathcal{R}_{T2}\left(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_{b_1}, \boldsymbol{u}_{b_2}\right) = \left\|\boldsymbol{I}_{T2}\left(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_{b_1}, \boldsymbol{u}_{b_2}, \boldsymbol{x}\right)\right\|_{W_T},$$

$$\mathcal{R}_{T3}\left(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_{b_1}\right) = \left\|\boldsymbol{I}_{T3}\left(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_{b_1}, \boldsymbol{x}\right)\right\|_{W_T}.$$

Thus, as soon as for the given accuracy ε, $\varepsilon_T = \varepsilon - \left\|\boldsymbol{w}_T\right\|_{W_T} \ge 0$, then the inequality

$$\mathcal{R}_{T1}\left(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_{b_1}\right) + \mathcal{R}_{T2}\left(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_{b_1}, \boldsymbol{u}_{b_2}\right) + \mathcal{R}_{T3}\left(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_{b_1}\right) \le \varepsilon_T \tag{2.8}$$

is sufficient for approximate controllability of the (2.1)–(2.3). In other words,

$$\tilde{\mathcal{U}} = \left\{\boldsymbol{u} \in \mathcal{U},\ (2.8)\right\} \subseteq \mathcal{U}_{res}^{app}.$$

Even though (2.8) is only a sufficient condition, it is much simpler verifiable, than (2.6).

The case of zero terminal conditions, i.e., $\boldsymbol{w}_T \equiv 0$, $\boldsymbol{w} \in \Omega$, is often referred to as null–controllability. In this case, evidently, $\varepsilon_T = \varepsilon \ge 0$. The resolving system preserves its form.

2.2. Nonlinear Systems

It has been shown in [16–20] that it is possible to extend the concept of the Green's function to nonlinear (actually quasi-linear) equations of specific form. Let the state of a nonlinear system be characterized by a nonlinear ordinary or partial differential equations which are reduced to the following ordinary differential equation:

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{w}}{\mathrm{d}t^2} + \boldsymbol{N}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}}{\mathrm{d}t}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}_1, t\right) = \boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{u}_2, t\right), \qquad \boldsymbol{u}_1 \in \mathcal{U}_1,\ \boldsymbol{u}_2 \in \mathcal{U}_2,\ \ t \in \mathbb{R}^+, \tag{2.9}$$

subject to some Cauchy conditions, where $\boldsymbol{N}$ is a generic nonlinearity, $\boldsymbol{F}$ is the resultant of all external forces acting on the system. Then, the general solution of (2.9) is reads as follows [16, 17]:

$$\boldsymbol{w}\left(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, t\right) = \int_0^t \hat{\boldsymbol{G}}\left(\boldsymbol{u}_1, t-\tau\right) \boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{u}_2, \tau\right) \mathrm{d}\tau, \quad \hat{\boldsymbol{G}}\left(\boldsymbol{u}_1, t\right) = \boldsymbol{G}\left(\boldsymbol{u}_1, t\right) \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \tag{2.10}$$

where $\boldsymbol{G}$ satisfies (2.9) with $\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{u}_2, t\right) = ¢\left(t\right)$, and therefore it is called *nonlinear* Green's function of (2.8), a_n are determined in terms of the quantities $\boldsymbol{w}^{(n)}\left(\cdot, \cdot, 0\right)$.

Remark 4. Note that there exist various ways to reduce nonlinear *partial* differential equations to (2.8) with ordinary differentials. For specific applications refer to [21]. Note also that [22] contain a huge amount of nonlinear equations of the form (2.9) that are solved explicitly.

Thus, the same steps as in Subsection 2.1 can be applied in this case to derive a corresponding system of restrictions (2.6) and (2.8) on admissible controls. The controllability theory of nonlinear systems described by (2.9) is developed in [23].

REFERENCES

1. Butkovskiy A.G. Maximum principle for optimal systems with distributed parameters. Automation and Remote Control, 1961, vol. 22, issue 10, pp. 1288–1301 [in Russian].
2. Fattorini H.O., Russell D.L. Exact controllability theorems for linear parabolic equations in one space dimension. Arch. Rat. Mech. Anal, 1971, vol. 43, issue 4, pp. 272–292.
3. Russell D.L. Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations. Recent progress and open questions. SIAM Reviews, 1978, vol. 20, issue 4, pp. 639–739.
4. Lions J.-L., Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems. SIAM Reviews, 1988, vol. 30, pp. 1–68.
5. Krabs W. On Moment Theory and Controllability of One Dimensional Vibrating Systems and Heating Processes. Springer, Berlin, 1992.
6. Avdonin S.A., Ivanov S.A. Families of Exponentials. The Method of Moments in Controllability Problems for Distributed Parameter Systems. Cambridge Univ. Press, 1995.
7. Fursikov A., Imanuvilov O.Yu. Controllability of Evolution Equations. Lecture Notes Series, vol. 34. Seoul National University, Seoul, 1996.
8. Lions J.-L. Exact controllability and perturbations for distributed systems SIAM Reviews, 1998, vol. 30, issue 1, pp. 1–68.
9. Zuazua E. Controllability and Observability of Partial Differential Equations: Some Results and Open Problems. Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 2006.
10. Glowinski R., Lions J.-L., He J. Exact and Approximate Controllability for Distributed Parameter Systems: A Numerical Approach. Cambridge University Press, New York, 2008.
11. Lasiecka I., Triggiani R. Control Theory for Partial Differential Equations. Cambridge University Press, Cambridge, 2011.
12. Gugat M., Exact Controllability. In “Optimal Boundary Control and Boundary Stabilization of Hyperbolic Systems”. Birkhäuser, Cham, 2015.
13. Avetisyan A.S., Khurshudyan As. Zh. Controllability of Dynamic Systems: The Green’s Function Approach. Cambridge Scholars Publishing, Cambridge, 2018.
14. Avetisyan A.S., Khurshudyan As. Zh. Green’s function approach in approximate controllability problems. Proc. NAS Armenia. Mechanics, 2016, vol. 69, issue 2, pp. 3–20.
15. Butkovskiy A.G. The method of moments in the theory of optimal control of systems with distributed parameters. Autom. Rem. Contr., 1963, vol. 24, no. 9, pp. 1217–1225 [in Russian].
16. Frasca M., Khurshudyan As. Zh. Representation of the Green’s function for nonlinear differential equations. Preprint arXiv:1805.10495.
17. Frasca M., Khurshudyan As. Zh. Short time expansion for second order differential equations nonlinear in the first derivative. Preprint arXiv:1806.00274
18. Khurshudyan As. Zh. Nonlinear implicit Green’s functions for numerical approximation of PDEs: Generalized Burgers’ equation and nonlinear wave equation with damping. International Journal of Modern Physics C, accepted.
19. Khurshudyan As. Zh. Nonlinear Green’s functions for wave equation with quadratic and hyperbolic potentials. Advances in Mathematical Physics, 2018, 7179160.
20. Khurshudyan As. Zh. New Green’s functions for some nonlinear oscillating systems and related PDEs. Int. J. Mod. Phys. C, 2018, vol. 29, issue 4, 1850032, 9 pages.
21. Polyanin A.D., Zaitsev V. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations. Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2012.
22. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems. Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2017.
23. Avetisyan A.S., Khurshudyan As. Zh. Green’s function approach in approximate controllability of nonlinear physical processes. Mod. Phys. Let. A, 2017, vol. 32, 1730015.

Information about authors:

Khurshudyan Asatur Zh. – Researcher, Department on Dynamics of Deformable Systems and Coupled Fields, Institute of Mechanics, NAS of Armenia, and Institute of Natural Sciences, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai, China. E-mail: khurshudyan@mechins.sci.am

RECENT DEVELOPMENTS IN CONTROLLABILITY ANALYSIS OF DYNAMIC SYSTEMS: THE GREEN'S FUNCTION APPROACH– II. HEURISTIC DETERMINATION OF CONTROLS

Khurshudyan AS. ZH.

In the second part of our review, we describe a heuristic method for explicit determination of resolving controls providing exact or approximate controllability for systems with linear and nonlinear constraints. We also provide specific example illustrating how it is applied in the analysis of specific problems.

3. Heuristic Method of Determination of Resolving Controls

In this section we summarize the method of heuristic determination of resolving controls providing (I.1.1) or (I.1.2)[1] developed in [1].

3.1. Exact controllability

For the sake of simplicity, hereinafter we deal with one-dimensional case, i.e., when $n=1$. The Green's function approach allows to derive the following nonlinear constraint on the control function:

$$\int_0^T K_T\left(u,x,\tau\right)d\tau = M_T\left(x\right), \quad x\in\left[a,b\right],$$

where K_T and M_T are given functions with expansion coefficients K_{Tn} and M_{Tn} into series of functions $\left\{\varphi_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ orthogonal (with some weight) in $\left[a,b\right]$. At this, $-\infty\le a<b\le\infty$. Eventually, we derive the following infinite system of nonlinear equations:

$$\int_0^T K_{Tn}\left(u,\tau\right)d\tau = M_{Tn}, \quad n=1,2,... \tag{3.1}$$

When K_{Tn} is linear in u, (3.1) is usually treated as a linear problem of moments and solved by the methods of functional analysis [I.15]. In the general case, the solution of (3.1) is quite complicated. In [24] we develop a method of heuristic construction of controls satisfying (3.1). The peculiarity of the method consists in the fact that the constructed controls contain a set of free parameters which may be chosen to turn (3.1) into an equality, as well as to minimize some cost functional.

The most intuitive way of resolving controls representation is in terms of the Fourier expansion

$$u\left(t\right)=\begin{cases}\sum_{k=1}^{\infty}u_k\sin\left(\omega_k t+\phi_k\right), & t\in\left[0,T\right],\\ 0, & \text{else},\end{cases} \tag{3.2}$$

where u_k, ω_k and ϕ_k are real parameters. Substituting (3.2) into (3.1), we will obtain an infinite system of nonlinear algebraic equations for u_k, ω_k and ϕ_k. At this, if ω_k and ϕ_k are given, then (3.1) is an infinite system of linear algebraic equations. If for the given data, that system is regular (alternatively, fully regular), then its bounded solution exists, i.e., the system is exact controllable.

Because of the dimension, the solvability of (3.1) in this case can be quite sophisticated. Usually, since the expansion of K_T and M_T must converge, then K_{Tn} and M_{Tn} must satisfy decay conditions as $n\to\infty$. This allows to truncate (3.1) (similarly, (3.2)) with a finite $N\in\mathbb{N}$ and resolve it. Consider

$$\int_0^T K_{Tn}\left(u,\tau\right)d\tau = M_{Tn}, \quad n=1,2,...,N. \tag{3.3}$$

[1] Formulas and references from part I begin with a notion I.

Then, u_k, ω_k and ϕ_k are determined from

$$\hat{\boldsymbol{K}}_T\left(u_k,\,\omega_k,\phi_k\right)=\boldsymbol{M}_T,$$

where

$$\hat{\boldsymbol{K}}_T=\left(\hat{K}_{Tn}\right)_{n=1}^{N},\quad \hat{K}_{Tn}\left(u_k,\,\omega_k,\phi_k\right)=\int_0^T K_{Tn}\left(\sum_{k=1}^{N}u_k\sin\left(\omega_k\tau+\phi_k\right),\tau\right)d\tau,\quad \boldsymbol{M}_T=\left(M_{Tn}\right)_{n=1}^{N}.$$

Similar systems of nonlinear algebraic equations can be derived also for the piecewise-continuous control regime

$$u(t)=\sum_{m=1}^{M}u_m(t)\chi_{\left[t_m,t_{m+1}\right]}(t),$$

where u_m are continuous regimes that are given or unknown, $\chi_{[t_1,t_2]}$ is the characteristic function of the interval $\left[t_1,t_2\right]$. Here $0\le t_1<t_2<\ldots<t_{M+1}\le T$ are the switching points that can be fixed or unknown. In this case the resulting system is formed by

$$\hat{K}_{Tn}\left(u_m,\,t_m\right)=\int_0^T K_{Tn}\left(\sum_{m=1}^{M}u_m(\tau)\chi_{\left[t_m,t_{m+1}\right]}(\tau),\tau\right)d\tau.$$

The following piecewise-constant regime is used in switching systems like heating control:

$$u(t)=\sum_{m=1}^{M}u_m\theta\left(t-t_m\right),$$

where u_m are real parameters and $0\le t_1<t_2<\ldots<t_M\le T$ are the switching points, θ is the Heaviside function. Note that in this case, M can also be considered as a parameter.

In some applications, impulsive impacts described by shifts of Dirac function are used:

$$u(t)=\sum_{m=1}^{M}u_m\delta\left(t-t_m\right).$$

Here, as above, the control parameters are u_m, t_m, and M.

A continuous regime of the form

$$u(t)=\begin{cases}\sum\limits_{m,\,k}u_{m\,k}\;t^m\left(T-t\right)^k, & t\in\left[0,T\right],\\ 0, & \text{else},\end{cases}$$

where $u_{m\,k}$, m and k are the control parameters. Note that here $m,\,k\in\mathbb{R}$ provided that the integrals in (3.3) make sense.

The following periodic regime also can be useful for fast computations:

$$u(t)=\begin{cases}\sum\limits_{m=1}^{M}\sum\limits_{k}u_{m\,k}\left[1-\cos\left(\dfrac{2\pi m}{T}t\right)\right]^k, & t\in\left[0,T\right],\\ 0, & \text{else},\end{cases}$$

where $u_{m\,k}$, m, M, and k are the control parameters. In this case, $k\in\mathbb{R}$ is such that the integrals in (3.3) make sense.

1.1. Approximate Controllability

In the case of approximate controllability, instead of the infinite dimensional system (3.1), we derive a single inequality type constraint on the control function:

$$\int_0^T k_T(u,\tau)\,d\tau \le m_T, \tag{3.4}$$

where k_T and m_T are expressed in terms of the norms of Green's function, boundary function, initial/terminal states, etc. From computational aspects, the inequality (3.4) is much easier to provide, compared with (3.3). As a matter of fact, using the controls heuristically determined above, from (3.4) it is possible to reduce inequality type constraints on the control parameters.

Note that control regimes with a few number of parameters can also be used in this case. As an example, consider the function

$$u(t)=\begin{cases} u_0 \sin(\omega t+\phi), & t\in[0,T], \\ 0, & \text{else}, \end{cases}$$

where u_0, ω, and ϕ are the control parameters.

Consider also the stopping regime

$$u(t)=u_0(t)\theta(t-t_0),$$

where u_0 can be any of the control regimes above (even a constant), and $0<t_0\le T$ is the stopping time.

Thus, indeed, substituting these regimes into (3.4), it is, in principle, possible to reduce inequality type of constraints on control parameters.

Remark 5. In [1], it is shown that, under proper assumptions, some of the heuristic solutions above resolve the corresponding *linear* problem of moments.

2. Applications

In the analysis of particular linear and nonlinear systems, the Green's function approach turns to be a very efficient tool. In view of validity for both linear and nonlinear systems, the Green's function approach gives a unified approach in controllability analysis. In this section we briefly outline some linear and nonlinear systems analyzed by the Green's function approach.

2.1. A Finite Elastic Seam Subjected to a Load with Uncertainty

The problem is in characterization of the set $\mathcal{U}_{res}^{app}$ for the following control system [I.13]:

$$EJ\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\rho S\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=P(t)\chi_{[0,T_0]}(t)\delta(x-x_0), \quad 0<x<l,\ t>0,$$

$$w(0,t)=u(t),\ \ w(l,t)=\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=0,l}\equiv 0, \quad t\ge 0,$$

$$w(x,0)=w_0(x),\ \ \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0}=w_1(x), \quad 0\le x\le l,$$

providing (cf. (1.2))

$$\left\|w(x,T)-w_{T0}(x)\right\|_{L^\infty[0,l]}\le\varepsilon_0, \quad \left\|\left.\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}\right|_{t=T}-w_{T1}(x)\right\|_{L^\infty[0,l]}\le\varepsilon_1, \tag{4.1}$$

for given $w_{T0}, w_{T1}\in L^\infty[0,l]$. The above system describes the bending vibrations of a thin elastic beam with finite length l, subject to a dynamic load of intensity P, $|P|\le P_0=\text{const}$, vanishing at a given $0<T_0<T$ and concentrated at an uncertain point $0<x_0<l$ of the beam. It is additionally known that $l_0<x_0<l_1$ for some given l_0 and l_1. Here E, J, ρ, S are the mechanical and geometric characteristics of the beam.

Considering

$$\mathcal{U} \in \left\{ \boldsymbol{u} \in L^2\left[0,T\right], \operatorname{supp}\left(\boldsymbol{u}\right) \subseteq \left[0,T\right],\ \text{c.c.} \right\}$$

as the set of admissible controls where c.c. means compatibility conditions between the boundary and initial data[2], the following inclusion is derived:

$$\tilde{\mathcal{U}} = \left\{ u \in \mathcal{U},\ |u| \le \min\left\{ \frac{\varepsilon_{T0}}{\varsigma_{T0}}, \frac{\varepsilon_{T1}}{\varsigma_{T1}} \right\} \right\} \subseteq \mathcal{U}_{res}^{app} \quad \text{as soon as } \varepsilon_{T0} \ge 0,\ \varepsilon_{T1} \ge 0,$$

where

$$\varsigma_{T0} = \int_0^T g_0\left(T-\tau\right)\mathrm{d}\tau,\ \varsigma_{T1} = \int_0^T g_1\left(T-\tau\right)\mathrm{d}\tau,$$

$$g_0\left(t\right) = \sqrt{2}\pi\alpha\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} n^2\psi_n^2\left(t\right)},\ g_1\left(t\right) = \sqrt{2}\pi^3\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} n^6\psi_{1n}^2\left(t\right)},$$

$$\psi_n\left(t\right) = \sin\left(\frac{\pi^2 n^2}{\alpha}t\right),\ \psi_{1n}\left(t\right) = \cos\left(\frac{\pi^2 n^2}{\alpha}t\right),$$

$$\varepsilon_{T0} = \varepsilon_0 - \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} A_{T0n}^2 + \beta_0\alpha^4 P_0^2},\ \varepsilon_{T1} = \varepsilon_1 - \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} A_{T1n}^2 + \beta_1\alpha^2 P_0^2},\ \alpha^2 = 12\frac{l^2}{h^2},$$

$$A_{T0n} = 2w_{0n}\psi_{1n}\left(T\right) + \frac{2\alpha}{\pi^2 n^2}w_{1n}\psi_n\left(T\right),\ A_{T1n} = -\frac{\pi^2 n^2}{2\alpha}w_{0n}\psi_n\left(T\right) + 2w_{1n}\psi_{1n}\left(T\right).$$

Analysis shows that the norms (4.1) do not depends on l_0, l_1 significantly, unless $l_0 < \frac{l}{2} < l_1$, as it is expected. Numerical simulation of the beam bending shows that if P_0 causes infinitesimal deformations, so that the Euler-Bernoulli beam model is valid, $w \ll 1$. This means that in (4.1) a significantly high accuracy should be required. Nevertheless, in practice, instead of (4.1), we can use the residue [13]

$$\tilde{\mathcal{R}}_T\left(u\right) = \left\| E\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \sigma_0 \right\|_{L^\infty[0,T]}$$

where the first term inside the norm characterizes the axial stress arising in the beam, while σ_0 is a given threshold value for the axial stress.

2.2. Controllability of the Burgers' Equation Controlled by a Distributed Control Acting on Linear Heat Equation

The Green's function approach developed in [13, 14] can be efficiently applied for studying exact and approximate controllabilities of exactly linearizable nonlinear differential equations. Such an example provide the Burgers' equation

$$\frac{\partial w}{\partial t} + w\frac{\partial w}{\partial x} = d\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\quad 0 < d = \text{const},$$

which is reduced to the linear heat equation

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = d\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2},$$

by means of the Hopf-Cole transformation

[2] Since we consider an approximate controllability problem, it is not necessary to require the compatibility of the boundary and terminal conditions. Nevertheless, it is advised to choose functions of compatible amplitudes.

$$w=-2d\frac{1}{\Theta}\frac{\partial\Theta}{\partial x}. \tag{4.2}$$

Consider the controllability of the Burgers' equation which is reduced by (4.2) to the following controlled linear heat equation [13, 25, 26]:

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t}=d\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}+u(t)v(x), \tag{4.3}$$

where v is a given function describing the distribution of controls.

In [2] it is proved that, if for given boundary and initial conditions, (4.3) is *exactly* controllable by an admissible control $u\in\mathcal{U}$, then the associated Burgers' equation is also exactly controllable. Moreover, the determination of the resolving controls is reduced to an infinite system of linear algebraic equations. It is shown that the system can be truncated and solved for a finite N.

Apparently, the equivalency between the exact controllabilities does not hold for the approximate controllability. Moreover, it is proved in [2] that for the approximate controllability of the Burgers' equation it is sufficient that

$$\int_0^T\left[g_1(T-\tau)-\frac{\varepsilon_T}{2d}g_0(T-\tau)\right]|u(\tau)|\,\mathrm{d}\tau\le\frac{\varepsilon_T}{2d}c_0-c_1,$$

as soon as

$$\varepsilon_T=\varepsilon-\|w_T\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\ge 0, \tag{4.4}$$

where $w_T\in L^\infty(\mathbb{R})$ is the desired terminal state. Here

$$g_0(t)=\left\|\int_{-\infty}^{\infty}G(x-\xi,t)v(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})},\quad g_1(t)=\left\|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial G(x-\xi,t)}{\partial x}v(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})},$$

$$G(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi d\,t}}\exp\left[-\frac{x^2}{4d\,t}\right],\ c_0=\left\|\int_{-\infty}^{\infty}G(x-\xi,T)\exp\left[-\frac{1}{2d}\int_{-\infty}^{\xi}w_0(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\right]\mathrm{d}\xi\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})},$$

$$c_1=\left\|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial G(x-\xi,T)}{\partial x}\exp\left[-\frac{1}{2d}\int_{-\infty}^{\xi}w_0(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\right]\mathrm{d}\xi\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})},$$

and $w_0\in L^\infty(\mathbb{R})$ is the given initial state.

In other words, as soon as, together with (4.4), the following inequality holds: $\tilde{\varepsilon}_T=\frac{\varepsilon_T}{2d}c_0-c_1\ge 0$, then

$$\tilde{\mathcal{U}}=\left\{u\in\mathcal{U},\ |u|\le\frac{\tilde{\varepsilon}_T}{\varsigma_T}\right\}\subseteq\mathcal{U}_{res}^{app},\quad\text{where}\quad \varsigma_T=\int_0^T\left[g_1(T-\tau)-\frac{\varepsilon_T}{2d}g_0(T-\tau)\right]\mathrm{d}\tau.$$

REFERENCES

1. Khurshudyan As. Zh. Heuristic determination of resolving controls for exact and approximate controllability of nonlinear dynamic systems. //Mathematical Problems in Engineering, 2018, Article ID 9496371, 16 pages.
2. Khurshudyan As. Zh. Resolving controls for the exact and approximate controllability of the viscous Burgers' equation: The Green's function approach. //International Journal of Modern Physics C, vol. 29, issue 4, 1850045, 14 pages.

Information about authors

Khurshudyan Asatur Zh. – Researcher, Department on Dynamics of Deformable Systems and Coupled Fields, Institute of Mechanics, NAS of Armenia, and Institute of Natural Sciences, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai, China. **E-mail**: khurshudyan@mechins.sci.am

MECHANICS OF ADDITIVE MANUFACTURING AND SURFACE GROWTH PROCESSES

Alexander V. Manzhirov

Additive manufacturing technologies is a special case of growth processes. Mathematical modeling of additive manufacturing technologies is aimed at improving the performance of device, machine, and mechanism parts. The fundamentally new mathematical models considered in the paper describe the evolution of the final product stress-strain state in additive manufacturing and are of general interest for modern technologies in engineering, medicine, electronics industry, aerospace industry, and other fields

1. Preliminary remarks. Mechanics of additive manufacturing technologies is aimed at improving the quality of the final geometry and mechanical properties of the structures, devices, and parts of fabricated in such a way. Modern research demonstrates significant differences in the mechanical characteristics of solids formed in the result of growth processes as compared with traditional properties of solids obtained using classical approach of continuum mechanics. Moreover, the classical approach for adequate modeling of additive manufacturing solids fails. For this reason, it should be replaced by new ideas and methods of modern mechanics, mathematics, physics and engineering. The approach considered here gives the opportunity for the construction of a new effective model for the description of additive manufacturing processes (see, e.g., [1–5]).

The description of the additive manufacturing process involves three characteristic instants: the instant $\tau_1^*(\mathbf{x})$ when the element with the position vector $\mathbf{x}$ is formed, the instant $\tau_0(\mathbf{x})$ when a load is applied to this element, and the instant $\tau^*(\mathbf{x})$ when the element is deposited on the additive manufacturing fabricated solid.

The deposition process is determined by specifying these three instants. One can suppose usually that for the additive manufacturing process $\tau_1^*(\mathbf{x}) = \tau_0(\mathbf{x}) = \tau^*(\mathbf{x})$, i.e. the elements are deposited at the same instant as they are formed and a load is applied to them. This is not the only case and one can consider the cases when $\tau_0(\mathbf{x}) = \tau^*(\mathbf{x})$ but the instant $\tau_1^*(\mathbf{x})$ differs from them and when the deformation of elements begins as soon as they are formed and they are being added to the basic solid only over some time interval, i.e., $\tau_1^*(\mathbf{x}) = \tau_0(\mathbf{x}) \neq \tau^*(\mathbf{x})$. Hereunder we consider the first case and the function $\tau^*(\mathbf{x})$.

We suggest an approach to modeling surface growth processes in solids on the basis of the following postulates:

- Material (not reference description) is utilized.
- The additive manufacturing of a solid is modeled by the motion of its boundary due to the influx of new material to the surface of the solid.
- The stress rate tensor, the strain rate tensor (or the stretch rate tensor), and the velocity vector to be the main variables in the system of equations describing the additive manufacturing.
- We use new kinematic and quasistatic conditions on the moving boundary (the growth or deposition surface) which determine the conservation law for an additive manufacturing solid composition and specific contact interaction between 3D solid and 2D deposited surfaces.

To simplify the problem the noninertial cases of boundary value problems with zeros volumetric force is considered.

The material description of the mechanics of additive manufacturing and surface growth processes which differs from knows approaches in continuum mechanics is proposed. Existing approaches of material description (see, e.g., [6]) use stress tensor, strain tensor and displacement vector as basic variables of boundary value problems. We use stress rates tensor, stretch tensor and velocity vector. The relations between classical and new variables have the form

$$\mathbf{T}(\mathbf{x},t) = G(t)\left[\frac{\mathbf{T}(\mathbf{x},\tau^*(\mathbf{x}))}{G(\tau^*(\mathbf{x}))} + \int_{\tau^*(\mathbf{x})}^{t} \mathbf{S}(\mathbf{x},\tau)d\tau\right],$$
$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \mathbf{u}(\mathbf{x},\tau^*(\mathbf{x})) + \int_{\tau^*(\mathbf{x})}^{t} \mathbf{v}(\mathbf{x},\tau)d\tau. \tag{1}$$

In all relations below we will use (1) to change old variables by new ones. We note that all necessary initial conditions for desired values are given and loadings change with time as the parts and structures grow.

2. The general nonlinear theory. We now consider the general nonlinear theory of the additive manufacturing process for a solid from hyperelastic material. For a growing solid we have the equilibrium equation

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = \mathbf{0}, \tag{2}$$

the boundary conditions on the stationary part of the surface

$$\mathbf{x} \in S_1 : \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} = \frac{\partial \mathbf{p}_0}{\partial t}, \qquad \mathbf{x} \in S_2 : \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial t}, \tag{3}$$

the quasistatic condition on the surface of growth which can be obtained from the solution of the contact interaction problem between a 3D solid and 2D surface (see, e.g., [7–9]).

$$\mathbf{x} \in S^*(t): \quad \mathbf{n} \cdot S = -\frac{s_n}{G}(\mathcal{T}_s : \mathbf{L})\mathbf{n}, \quad s_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}, \tag{4}$$

the kinematic boundary condition on the growth surface (the conservation law for an additive manufacturing fabricated solid composition)

$$\mathbf{x} \in S^*(t): \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_{def} + \mathbf{v}_{gr}, \tag{5}$$

the relation between the strain rates and velocities

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}[\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T], \tag{6}$$

and the constitutive equation in the form

$$\mathbf{S} = 2\mathcal{F}_t(\mathbf{D}, v), \tag{7}$$

the equation of the unknown growth surface $S^*(t)$ for an additive manufacturing solid has the form

$$t = \tau^*(\mathbf{x}), \tag{8}$$

where S is the stress rate tensor, ∇ is the Hamilton operator, where $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{u}_0$ are given vectors of surface forces and strains, $\mathbf{n}$ is the unit vector normal to the solid surface, $\mathbf{v}$ is the velocity vector, $\mathcal{T}_s$ is the 2D tensor of the deposited elastic surface tension, $\mathbf{L}$ is the 2D tensor of this surface curvature, $\mathbf{D}$ is the stretch tensor, $\mathbf{v}_{def}$ is the unknown velocity of the boundary due to deformation of a solid, $\mathbf{v}_{gr} = -\mathbf{v}_{dep}$ is the prescribed velocity of growth which is opposite to the velocity of deposition of a new material to the surface of a solid.

Relations (2) – (8) form the general nonlinear boundary value problem for a growing solid. It should be noted the general boundary value problem for additive manufacturing fabricated solid contains three sets of controlled values, namely, the loadings, the stresses on the deposited surfaces and the velocity of deposition.

3. Additive manufacturing of thin-walled parts. Under thin-walled parts we mean such solids which are subjected to large displacements but small strains in the process of their additive manufacturing fabrication and loading. In this case we can use linear constitutive relations (Hook's law) while boundary conditions still nonlinear and surface of deposition or growth is unknown. In this case we obtain the boundary value problem in the form

$$
\begin{gathered}
\nabla \cdot \mathbf{S} = \mathbf{0}, \\
\mathbf{x} \in S_1: \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} = \frac{\partial \mathbf{p}_0}{\partial t}, \qquad \mathbf{x} \in S_2: \quad \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial t}, \\
\mathbf{x} \in S^*(t): \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} = -\frac{s_n}{G}(\mathcal{T}_s : \mathbf{L})\mathbf{n}, \quad s_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}, \\
\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\mathrm{def}} + \mathbf{v}_{\mathrm{gr}}, \quad t = \text{²}^*(\mathbf{x}), \\
\mathbf{D} = \frac{1}{2}[\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T], \\
\mathbf{S} = 2\mathbf{D} + (K-1) I_1(\mathbf{D})\mathbf{1},
\end{gathered}
\tag{9}
$$

where G is the elastic shear modulus, ¬ is Poisson's ratio, $K = (1-2\nu)^{-1}$. Here we propose the 3D theory for additive manufacturing fabricated thin-walled solids. Using equations (9) one can construct an approximate theory of additive manufacturing fabricated plates and shells with specific equations bases on known hypotheses.

4. Additive manufacturing of thick-walled parts. Consider a theory of mechanical behavior of additive manufacturing fabricated solids for small strains. It is quite clear that one deals with thick-walled structures which deformation for classical structural materials in the processes of growth and loading is small. In this case the velocity of deformation can be neglected as compared with the known velocity of the growth surface motion and the boundary value problem has the form

$$
\begin{gathered}
\nabla \cdot \mathbf{S} = \mathbf{0}, \\
\mathbf{x} \in S_1: \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} = \frac{\partial \mathbf{p}_0}{\partial t}, \qquad \mathbf{x} \in S_2: \quad \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial t}, \\
\mathbf{x} \in S^*(t): \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} = -\frac{s_n}{G}(\mathcal{T}_s : \mathbf{L})\mathbf{n}, \quad s_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}, \\
\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\mathrm{gr}}, \quad t = \text{²}^*(\mathbf{x}), \\
\mathbf{D} = \frac{1}{2}[\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T], \\
\mathbf{S} = 2\mathbf{D} + (K-1) I_1(\mathbf{D})\mathbf{1},
\end{gathered}
\tag{10}
$$

Relations (10) form the general boundary value problem for thick-walled solids. This boundary value problem is mathematically identical to the boundary value problem of the theory of elasticity for small deformations and most adequate results have been obtained in the framework of this version of the theory (see, e.g., [10–27]).

Both approximate theories for thin- and thick-walled additive manufacturing fabricated parts and structures give adequate mathematical models of additive manufacturing processes for almost all application. Nevertheless, the development of the general nonlinear theory is very important especially prom the point of view of new constitutive relations for material description of a continuum.

5. Conclusions.

- New approach for the material description of mechanical properties of additive manufacturing fabricated parts and structures is proposed.
- Equations of the general nonlinear theory for additive manufacturing fabricated parts and structures is obtained.
- Approximate versions of the general theory for thin- and thick-walled parts and structures are presented.
- As a result, the classification of additive manufacturing processes is given and conditions for applying of approximate theories for the solution of various problems are discussed.

6. Acknowledgments. This work was financially supported by the Russian Science Foundation under grant No. 17-19-01257.

REFERENCE

1. I. Gibson, D. W. Rosen, and B. Stucker, Additive Manufacturing Technologies: Rapid Prototyping to Direct Digital Manufacturing (Springer Verlag, LLC, New York, 2010) 498p.
2. A. Gebhardt and J. S. Hoetter, Additive Manufacturing: 3D Printing for Prototyping and Manufacturing (Carl Hanser Verlag, Munich, 2016) 611p.
3. I. Gibson, D. Rosen, and B. Stucker, Additive Manufacturing Technologies (Springer, New York, 2010) 238p.
4. J. C. Heigel, P. Michaleris, and E. W. Reutzel, Addit. Manufact., 5, 9–19 (2015).
5. C. K. Chua and K. F. Leong, 3D Printing and Additive Manufacturing: Principles and Applications (With Companion Media Pack). Fourth Edition of Rapid Prototyping (World Scientific Publishing Co. Inc., 2014) 548p.
6. P. A. Zhilin, H. Altenbach, E. A. Ivanova, and A. Krivtsov, “Material Strain Tensor”, in H. Altenbach, S. Forest, A. Krivtsov (Eds.), Generalized Continua as Models for Materials (Springer, 2013) 321–330.
7. A. V. Manzhirov, «Mechanics of Growing Solids: New Track in Mechanical Engineering», in ASME 2014 International Mechanical Engineering Congress and Exposition, Montreal, Quebec, Canada, November 14–20, 2014, Vol. 9: Mechanics of Solids, Structures and Fluids, (ASME, Montreal, 2014) doi: 10.1115/IMECE2014-36712.
8. A. V. Manzhirov, “Mechanical design of viscoelastic parts fabricated using additive manufacturing technologies,вЂќ in Lecture Notes in Engineering and Computer Science: Proceedings of The World Congress on Engineering 2015 (WCE 2015), 1–3 July, 2015, London, U.K., (IAENG, London, 2017), pp. 710–714.
9. A. V. Manzhirov, Procedia Engineering, 173, 11–16 (2017).
10. A. V. Manzhirov, Journal of Physics: Conference Series. 991 (1) 012056 (2018).
11. A. V. Manzhirov, Key Engineering Materials, 535–536, 89–93 (2013)
12. A. V. Manzhirov and D. A. Parshin, Mech. Solids, 50 (5), 559–570 (2015).
13. A. V. Manzhirov and D. A. Parshin, Mech. Solids, 50 (6), 657–675 (2015).
14. A. V. Manzhirov and D. A. Parshin, Mech. Solids, 51 (6), 692–700 (2016).
15. A. V. Manzhirov, «A Method for Mechanical Design of AM Fabricated Viscoelastic Parts», in Transactions on Engineering Technologies, ed. by S. Ao, G.C. Yang, L. Gelman (Springer, Singapore, 2016), pp. 223–235.
16. D. A. Parshin, Mech. Solids, 52 (5), 530–540 (2017).
17. A. V. Manzhirov and N. K. Gupta, Procedia IUTAM, 23, 1–12 (2017).
18. A. V. Manzhirov, «Mechanical Analysis of an AM Fabricated Viscoelastic Shaft Under Torsion by Rigid Disks», in Lecture Notes in Engineering and Computer Science: Proceedings of The World Congress on Engineering 2017 (WCE 2017), 5–7 July, 2017, London, U.K., Vol. II (IAENG, London, 2017), pp. 856–860.
19. D. A. Parshin and A. V. Manzhirov, Journal of Physics: Conference Series, 937, 012038 (2017).
20. A. V. Manzhirov, Procedia Manufacturing, 7, 59–65 (2017).
21. A. V. Manzhirov and D. A. Parshin, «Modeling Spherical Accretion of Aging Viscoelastic Objects Under Self-gravitation», in IAENG Transactions on Engineering Sciences: Special Issue for the International Association of Engineers Conferences 2016, Vol. II (World Scientific Publishing, 2018), pp. 14–27.
22. A. V. Manzhirov and D. A. Parshin, Engineering Letters 26(2) 267–275 (2018).
23. A. V. Manzhirov and M. N. Mikhin, Journal of Physics: Conference Series. 991 (1) 012057 (2018).
24. D. A. Parshin and A. V. Manzhirov, Journal of Physics: Conference Series. 991 (1) 012063 (2018).

Information about authors

Alexander V. Manzhirov – Prof. DSc, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Vernadsky Ave 101 Bldg 1, Moscow, 119526, Russia; Bauman Moscow State Technical University 2, Baumanskaya Str 5, Moscow, 105005, Russia. **E-mail:** manzh@inbox.ru

CONTROL OF DEFECT MODES FOR SHEAR WAVES IN MULTILAYERED PIEZOELECTRIC STRUCTURES WITH ELECTRICALLY SHORTED INTERFACES

Piliposyan D.

Properties of shear waves in a piezoelectric stratified periodic structure with electrically shorted interfaces and a defect layer are studied. Due to the electro-mechanical coupling in piezoelectric materials the structure exhibits defect modes in the structure with full transmission peaks. The results show an existence of one or two transmission peaks depending on the material properties .

1. Introduction

Recently the problem of elastic wave propagation in piezoelectric periodic structures has been attracting increasing attention due to extensive applications in smart materials and structures, particularly those made of two or more different constituents arranged periodically. For example, thin film piezoelectric layered structures have been widely used in high frequency, high perfor- mance, small size, low cost, low energy consumption technologies.

For a piezoelectric crystal of 6 mm symmetry the dynamic setting of the problem does not make the problem technically more complicated compared to the quasistatic approximation [1]. Within elasto-electrodynamic theory the propagation of SH Bloch waves in a piezoelectric waveguide with full contact interfacial conditions is considered in [2]. The obtained analytical solutions describe both the propagation of acoustic waves and the effect of the internal resonance of electromagnetic and acoustic waves (phonon–polariton coupling), which cannot not be revealed within the quasistatic approximation. It is also of particular interest to consider piezoelectric structures with a defect layer which can be introduced into the structure, and, by changing the geometry and altering the elastic characteristics of these inclusions, design tunable periodic struc tures [3].

2. The statement of the problem

We investigate the reflection/transmission properties of a finite stack of cells in a piezoelectric waveguide by coupling the wave fields in neighbouring layers via a matrix propagator. We consider a structure consisting of a stack of M cells, each containing a pair of layers a_j, j= 1,2 made from different piezoelectric crystals and one additional single layer, thus 2M+1 layers altogether. On each side the waveguide has two infinite piezoelectric substrates made from material 2 .

For an anti-plane problem the interconnected elastic and electro-magnetic excitations in a transversely isotropic piezoelectric crystal are described by the following equations for u_z, E_x, E_y, H_z

$$\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y}=\rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2},\ \sigma_{xz}=c_{44}\frac{\partial u_z}{\partial x}-e_{15}E_x,\ \sigma_{yz}=c_{44}\frac{\partial u_z}{\partial y}-e_{15}E_y, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=-\mu_{33}\frac{\partial H_z}{\partial t},\quad -\frac{\partial H_z}{\partial x}=\frac{\partial D_y}{\partial t},\ \frac{\partial H_z}{\partial y}=\frac{\partial D_x}{\partial t}, \tag{2.2}$$

$$D_x=e_{15}\frac{\partial u_z}{\partial x}+\varepsilon_{11}E_x,\quad D_y=e_{15}\frac{\partial u_z}{\partial y}+\varepsilon_{11}E_y, \tag{2.3}$$

where u_z is the displacement, σ_{ik} the stress tensor, D_x, D_y and E_x, E_y the electric displacements and electric field intensities, and H_z the magnetic field intensity, ρ, c_{44}, e_{15}, ε_{11} and μ_{33} are the mass density, the elastic, piezoelectric, dielectric and magnetic constants respectively. The mass density ρ, the elastic, piezoelectric and dielectric constants c_{jk}, e_{jk} and ε_{jk} are piecewise continuous functions with a period β. Harmonic time dependence, $\exp(i\omega t)$ for the all physical variables with ω as wave angular frequency is assumed henceforth. We assume that waves propagate in the (x,y) plane. Taking notations $H=i\omega H_0$, $u_z=u$ the system of equations (1.1)-(1.3) can be reduced to the following uncoupled system of equations for $H_0(x)$ and $u(x)$

$$\frac{\mathrm{d}^2u(x)}{\mathrm{d}x^2} - p^2u(x) + \omega^2\frac{\rho}{G}u(x) = 0\,, \quad \frac{\mathrm{d}^2H(x)}{\mathrm{d}x^2} - p^2H(x) + \omega^2\varepsilon_{11}\mu_{33}H(x) = 0\,, \tag{2.4}$$

$$\sigma_{xz}(x) = Gu'(x) + \frac{e_{15}p}{\varepsilon_{11}}H(x), \quad \sigma_{yz}(x) = Gpu(x) + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}H'(x), \tag{2.5}$$

$$E_x = -i\frac{e_{15}u'(x) + pH(x)}{\varepsilon_{11}}, \quad E_y(x) = -i\frac{e_{15}pu(x) + H'(x)}{\varepsilon_{11}}. \tag{2.6}$$

The solutions of $u(x)$, $H(x)$ and $\sigma_{xz}(x)$, $E_y(x)$ in the nth cell have the following form

$$\begin{pmatrix} u_{(n)}(x) \\ \sigma_{xz(n)}(x) \\ H_{(n)}(x) \\ E_{y(n)}(x) \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i}Gq \\ 0 \\ ep/\varepsilon \end{pmatrix} e^{\mathrm{i}q(x-n\beta)} + B\begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i}Gq \\ 0 \\ ep/\varepsilon \end{pmatrix} e^{-\mathrm{i}q(x-n\beta)} + C\begin{pmatrix} 0 \\ -e^2p/\varepsilon \\ 1 \\ -\mathrm{i}e^2s/\varepsilon \end{pmatrix} e^{\mathrm{i}s(x-n\beta)} + D\begin{pmatrix} 1 \\ -e^2p/\varepsilon \\ 1 \\ \mathrm{i}e^2s/\varepsilon \end{pmatrix} e^{-\mathrm{i}s(x-n\beta)}. \tag{2.7}$$

It has been demonstrated that due to such interfaces phononic bandgaps can be achieved in an otherwise homogeneous superlattice [2]. Here due to electrically shorted interfaces the homogeneous structure becomes a periodic system of interfaces where the electric field intensity experiences discontinuity. Thus the interfacial conditions are continuity conditions for the acoustic fields and electrically shorted boundary condition for the electrical field:

$$\begin{pmatrix} u(x) \\ \pm(x) \end{pmatrix}^{(n,1)} = \begin{pmatrix} u(x) \\ \pm(x) \end{pmatrix}^{(n,2)} \tag{2.8}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ E(x) \end{pmatrix}^{(n,1)} = \begin{pmatrix} E(x) \\ 0 \end{pmatrix}^{(n,2)} \tag{2.9}$$

For electrically shorted interfaces the transfer matrix cannot be obtained as a particular case from the transfer matrix [4] of perfectly bonded interfaces since the amplitudes at interfaces become connected via degenerate matrices which cannot be inverted. To get around this problem electrically shorted boundary conditions at the interfaces between two layers (n,1) and (n,2) (the same at the interface (n,2)/ (n+1,1) can be incorporated into the continuity boundary conditions for displacements and stresses. From (2.7) and (2.8) the amplitudes $C_n^{(j)}$ and $D_n^{(j)}$ can be expressed via the amplitudes $A_n^{(j)}$ and $B_n^{(j)}$ in the following way

$$\begin{pmatrix} C_n^{(j)} \\ D_n^{(j)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_+^{(j)}e^{ia_j\left(q^{(j)}-s^{(j)}\right)} & \eta_-^{(j)}e^{ia_j\left(q^{(j)}+s^{(j)}\right)} \\ -\eta_-^{(j)}e^{i(a_j+d_j)(q^{(j)}-s^{(j)})} & -\eta_+^{(j)}e^{-i(a_j+d_j)(q^{(j)}-s^{(j)})} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_n^{(j)} \\ B_n^{(j)} \end{pmatrix}, \tag{2.10}$$

$$\eta_\pm^{(j)} = \frac{ie^{(j)}p(1-e^{id_j(s^{(j)}\pm q^{(j)})})}{s^{(j)}(1-e^{2ia_js^{(j)}})}. \tag{2.11}$$

The amplitudes $C_n^{(j)}$ and $D_n^{(j)}$ are eliminated by substituting (2.10) into the expression (2.7). Then the problem will have only the incident and reflected amplitudes of an elastic wave. Using the remaining boundary conditions in (2.8) a unimodular transfer matrix coupling the amplitudes of forward and backward travelling elastic waves in the layers of the two neighboring cells (n) and (n+1) can be constructed as follows:

$$\begin{pmatrix} A_n^{(1)} \\ B_n^{(1)} \end{pmatrix} = \hat{\mathrm{S}}\begin{pmatrix} A_{n+1}^{(1)} \\ B_{n+1}^{(1)} \end{pmatrix}, \tag{2.12}$$

where $\hat{\mathrm{S}} = \hat{\mathrm{S}}^{(1)}\hat{\mathrm{S}}^{(2)}$ and the elements of matrices $\hat{\mathrm{S}}^{(1)}$ and $\hat{\mathrm{S}}^{(2)}$ are

$$S_{11}^{(j)} = S_{22}^{(j)*} = \frac{\psi_+^{(j)} + \psi_+^{(l)}}{\psi_-^{(j)} + \psi_+^{(j)}}e^{i(a_lq^{(l)}-(a_j+d_j)q^{(j)})}, \quad S_{12}^{(j)} = S_{21}^{(j)*} = \frac{\psi_+^{(j)} + \psi_-^{(l)}}{\psi_-^{(j)} + \psi_-^{(j)}}e^{-i(a_lq^{(l)}-(a_j+d_j)q^{(j)})}. \tag{2.13}$$

$$\psi_{\pm}^{(j)} = iG^{(j)}q^{(j)} \pm \frac{pe^{(j)}}{\varepsilon^{(j)}}\left(\eta_{\pm}^{(j)} - e^{id_j\left(q^{(j)}+s^{(j)}\right)}\eta_{\mp}\right), \quad j,l = 1,2, \quad j \neq l. \tag{2.14}$$

and * in the superscript denotes the complex conjugate.

The amplitudes of the incident, reflected and transmitted acoustic waves in the entrance and the exit thus have the following relation:

$$\begin{pmatrix} A_I \\ B_R \end{pmatrix} = \hat{S}^n \begin{pmatrix} A_T \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.15}$$

Formula for the two by two unimodular matrix in (2.15) can be written as

$$\hat{S}^n = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^* & S_{11}^* \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} S_{11}U_{n-1} - U_{n-2} & S_{12}U_{n-1} \\ S_{12}^*U_{n-1} & S_{11}^*U_{n-1} - U_{n-2} \end{pmatrix}, \tag{2.16}$$

where

$$U_n = \frac{\sin\left((n+1)k\beta\right)}{\sin(k\beta)},$$

and where the Bloch wave number k is defined by the following dispersion equation [4]:

$$\cos\left(k\beta\right) = \frac{\left(S_{11} + S_{11}^*\right)}{2} = \frac{\cos(aq)\sin(as) + \gamma^2\theta^2\cos(as)\sin(aq)}{\sin(as) + \gamma^2\theta^2\sin(aq)}. \tag{2.17}$$

It is clear from formula (2.17) that for periodic piezoelectric structure with unit cells constructed of identical piezoelectric elements the propagation of Bloch-Floquet waves at acoustic frequencies is possible. However at optic frequencies due to metallised interfaces there is no propagating electromagnetic wave.

Using (2.16)

$$\begin{pmatrix} A_I \\ B_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11}U_{n-1} - U_{n-2} & S_{12}U_{n-1} \\ S_{12}^*U_{n-1} & S_{11}^*U_{n-1} - U_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_T \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.18}$$

From (2.18) we find the reflection coefficient

$$R = \frac{B_R}{A_I} = \frac{S_{12}^*U_{M-1}}{S_{11}U_{n-1} - U_{n-2}}, \tag{2.19}$$

and

$$|R|^2 = \frac{\left|S_{12}{}^2\right|}{\left|S_{12}\right| + \left(\sin\left(k\beta\right)/\sin\left((M-1)k\beta\right)\right)^2}.$$

At the band edges, where $k\beta = \pi n$, the reflectivity will be given by

$$|R|^2 = \frac{\left|S_{12}\right|^2}{\left|S_{12}\right| + (1/n)^2}, \tag{2.20}$$

and the transitivity by $|T|^2 = 1 - |R|^2$.

Within the band gaps where β is complex, $k\beta = \pi n + i\delta$, formula (2.20) takes the form

$$|R|^2 = \frac{\left|S_{12}\right|^2}{\left|S_{12}\right| + \left(\sinh\left(k\beta\right)/\sinh\left((n-1)k\beta\right)\right)^2}. \tag{2.21}$$

It follows that the reflection coefficient will approach unity as the number of cells increases and the total reflection regions will precisely coincide with the stop band for Bloch waves.

Analogously to (2.21) the relationship between the amplitudes of forward and backward travelling wave fields at the first and last layers and can be written as follows:

$$\begin{pmatrix} A_I \\ B_R \end{pmatrix} = \hat{S}^n \hat{Z} \hat{S}^m \begin{pmatrix} A_T \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.22}$$

From (2.18)-(2.20) the following analytical formula can be written for the transmission coefficient:

$$T = \frac{A_T}{A_I} = \frac{1}{\zeta_1 U_{n-2}^2 - \zeta_2 U_{n-2} U_{n-1} + \zeta_3 U_{n-1}^2}, \tag{2.23}$$

with

$$\zeta_1 = Z_{11}, \zeta_2 = 2S_{11}Z_{11} + S_{12}^* Z_{12} + S_{12} Z_{12}^*, \quad \zeta_3 = |S_{12}|^2 Z_{11}^* + S_{11}(\zeta_2 - S_{11}Z_{11}). \tag{2.24}$$

We now use the transmission coefficient (45) to investigate the transmission properties of SH waves in a superlattice with an identical element PZT-4 in the unit cell and a defect layer. The reflection of an electro-elastic wave is caused by the equipotential condition on the interfaces. The opposite polarisation here does not affect the band structure. The transmission spectrum shows (Fig.1) that the presence of a defect layer, which has material parameters of PZT-4 without the piezoelectric effect, does not affect the width of the forbidden band. It creates a passband with a transmission peak of 100% within the bandgap. Increasing the thickness of the defect layer from $\Delta = 0.3\beta$ to shifts the passband towards a lower frequency. The width of the band gap is narrower here compared to the superlattice with perfectly bonded interfaces and interestingly there is no appearance of a second transmission peak within the bandgap.

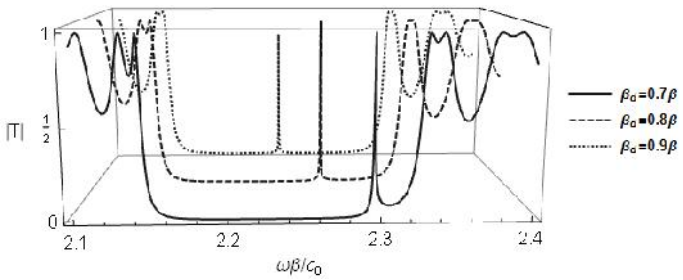


Fig. 1. Absolute values of the transmission coefficient for a superlattice with identical element PZT-4 in the unit cell and different thicknesses of the defect layer, n=20.}

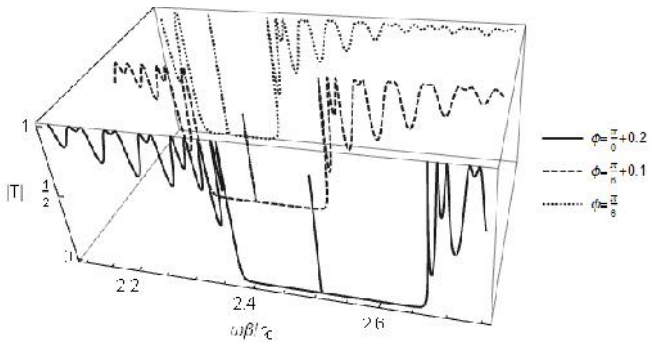


Fig. 2. Absolute values of the transmission coefficient for a superlattice made of PZT-4 crystal for different angles of incidence, n=20.}

Figure 2 shows the transmittance spectra for different angles of incidence. The defect mode is very similar to that for the perfectly bonded interfaces between layers. The width of the band gap gets significantly larger shifting towards higher frequencies with the position of the defect mode also shifting towards higher frequencies withing a band gap, demonstrating again that the passband can be tuned by changing the angle of the incident wave.

3. Conclusion

The propagation of elasto-electromagnetic coupled SH waves in a quasi-one dimensional periodic piezoelectric waveguide with metallized interfaces is considered in this paper. In the case of electrically shorted interface conditions band gaps exist also when the constituent materials in the cells of the waveguide are identical. In this case the periodic system becomes a periodic system of interfaces where the magnetic field intensity experiences discontinuity. There is only one cut-offfrequency and instead of trapping there are evanescent modes propagating below the cut-offfrequency. The reflection of an electro-elastic wave is caused by the equipotential condition on the interfaces. Since the parameter of electromechanical coupling is normally very small, the reflection coefficient experiences a sharp increase near the resonances providing sharpening of certain properties compared to periodic structure made from different piezoelectric layers with both metallized and non-metallized interfaces.

REFERENCE

1. Belubekyan M.V., 2008. Screen surface shear wave in a piezo-active semi-space of hexagonal symmetry. In: Proc. 6th Int. Conf., Problems of Dynamics of Interaction of Deformable Media, pp. 125–130 .

2. Piliposyan D.G., Ghazaryan K.B., Piliposian G.T., 2014. Shear Bloch waves and coupled phonon–polariton in periodic piezoelectric waveguides. Ultrasonics 54 (2), 644–654.

3. Goffaux C., Vigneron J.P, 2011. Theoretical study of a tunable phononic band gap system. Phys. Rev. B 64, 075118.

4. D.G. Piliposyan, G.T. Piliposian, K.B. Ghazaryan, 2017. Propagation and control of shear waves in piezoelectric composite waveguides with metallized interfaces International Journal of Solids and Structures 106–107 (2017) 119–128.

Information about author:

Davit Piliposyan is a researcher at Institute of Mechanics of National Academy of Sciences of Armenia. **Tel.:** (374 91) 24 11 11. **E-mail:** piliposyan@mechins.sci.am

AN OPTIMAL CONTROL PROBLEM WITH ENERGY CONSTRAINT FOR AN UNMANNED AERIAL VEHICLE

Shahinyan A.S.

Abstract. In this paper we consider a quadrotor Unmanned Aerial Vehicle (UAV). Dynamics of the UAV are written using pure theoretical modelling. The state space model is given which includes some parameters. An Optimal Control problem is stated and solved for the linearized model. A numerical example is also given by presenting optimal control inputs calculated analytically and optimal trajectories of the motion. All calculations are done using MATLAB R2017a.

Dynamics of a UAV

To derive the pure theoretical dynamics of a UAV let us fix a coordinate system $Oxyz$. Let O be the origin. We will also need another coordinate system $O_B x_B y_B z_B$ fixed in the center of mass O_B of the UAV (fig. 1). The torques and forces generated by each of the propellers are shown in the Fig. 1. The propellers are numbered 1 to 4 [1].

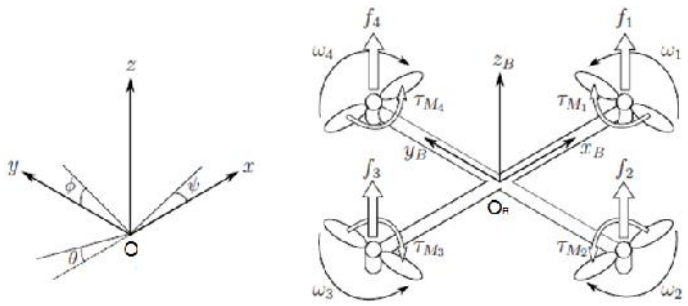


Fig. 1.

Let $\xi = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^T$ be the coordinates of the center of mass of the UAV with respect to the system $Oxyz$. As mentioned above, the center of the mass of the UAV coincides with the origin of the coordinate system $O_B x_B y_B z_B$. Let us describe the inclined position of the UAV about the point O_B using yaw, pitch and roll angles. Let Φ be the pitch angle, Θ be the roll angle and, finally, let Ψ be the yaw angle. Then we will have two vectors describing the position of the UAV. Those are the following:

$$\xi = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^T, \eta = \begin{pmatrix} \Phi & \Theta & \Psi \end{pmatrix}^T \tag{1.1}$$

In the coordinate system the linear velocities V_B and the angular velocities v are the following

$$V_B = \begin{pmatrix} V_{Bx} & V_{By} & V_{Bz} \end{pmatrix}^T, \quad v = \begin{pmatrix} p & q & r \end{pmatrix}^T \tag{1.2}$$

In this setup we will have the dynamics of the system as given below [1, 2].

$$\ddot{x} = \frac{T}{m} c_\Psi s_\Theta c_\Phi + \frac{T}{m} s_\Psi s_\Phi, \qquad \ddot{y} = \frac{T}{m} s_\Psi s_\Theta c_\Phi - \frac{T}{m} c_\Psi s_\Phi, \qquad \ddot{z} = -g + \frac{T}{m} c_\Theta c_\Phi,$$

$$\dot{\Phi} = p + \frac{s_\Phi s_\Theta}{c_\Theta} q + \frac{c_\Phi s_\Theta}{c_\Theta} r, \qquad \dot{\Theta} = c_\Phi q - s_\Phi r, \qquad \dot{\Psi} = \frac{s_\Phi}{c_\Theta} q + \frac{c_\Phi}{c_\Theta} r,$$

$$\dot{p} = \frac{\left(I_{yy} - I_{zz}\right) qr}{I_{xx}} - I_r \frac{q}{I_{xx}} \omega_\Gamma + \frac{\tau_\Phi}{I_{xx}}, \qquad \dot{q} = \frac{\left(I_{zz} - I_{xx}\right) pr}{I_{yy}} - I_r \frac{p}{I_{yy}} \omega_\Gamma + \frac{\tau_\Theta}{I_{yy}}, \tag{1.3}$$

$$\dot{r} = \frac{\left(I_{xx} - I_{yy}\right) pq}{I_{zz}} - I_r \frac{q}{I_{zz}} \omega_\Gamma + \frac{\tau_\Psi}{I_{zz}}.$$

Where the following notations are used: $C_\alpha := \cos\alpha$, $S_\alpha := \sin\alpha$, $\tau_B = \begin{pmatrix} \tau_\Phi \\ \tau_\Theta \\ \tau_\Psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} lk\left(-\omega_2^2 + \omega_4^2\right) \\ lk\left(-\omega_1^2 + \omega_3^2\right) \\ \sum_i \tau_i \end{pmatrix}$ and

$$T = \sum_i F_i = \sum_i k\omega_i^2, \qquad \vec{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & T \end{pmatrix}^T$$

Let us do the following notations and linearize the system around the origin

$$x_1 = x, \; x_2 = \dot{x}, \; x_3 = y, \; x_4 = \dot{y}, \; x_5 = z, \; x_6 = \dot{z},$$
$$x_7 = \Phi, \; x_8 = \Theta, \; x_9 = \Psi, \; x_{10} = p, \; x_{11} = q, \; x_{12} = r \tag{1.4}$$

We will have

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = gx_8,\ \dot{x}_3 = x_4,\ \dot{x}_4 = -gx_7,\ \dot{x}_5 = x_6,\ \dot{x}_6 = u_1$$

$$\dot{x}_7 = x_{10},\ \dot{x}_8 = x_{11},\ \dot{x}_9 = x_{12},\ \dot{x}_{10} = \frac{u_2}{I_{xx}},\ \dot{x}_{11} = \frac{u_3}{I_{yy}},\ \dot{x}_{12} = \frac{u_4}{I_{zz}} \tag{1.5}$$

Where $u_1 = \frac{T}{m} - g$, $u_2 = \tau_\Phi$, $u_3 = \tau_\Theta$, $u_4 = \tau_\Psi$

Now let

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} \end{pmatrix}^T \tag{1.6}$$

Then we can write the system (1.5) in matrix form as

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{1.7}$$

We can check the controllability [3] of the system (1.7) using the controllability matrix K which is

$$K = \left(B, AB, A^2B, A^3B, A^4B, A^5B, A^6B, A^7B, A^8B, A^9B, A^{10}B, A^{11}B\right) \tag{1.8}$$

By substituting A and B into K we see that $\text{rank}K = 12$. This means that the system (1.7) is fully controllable.

Energy-Optimal Control Problem and Solution

In general energy-optimal control problem formulation is the following.

Problem: Given the system (1.7), the initial position of the system $x(0) = x_0$ and the desired final position $x(t_1) = x_d$. Find control inputs $u^0 = \left(u_1^0 \quad u_2^0 \quad u_3^0 \quad u_4^0\right)^T$ such that it drives the system from the given initial position to the given desired final position while minimizing the energy constraint

$$J[\bullet] = \int_0^{t_1} \|u\|_{L_2}^2 \, d\tau \tag{1.9}$$

Here

$$x_0 = \left(x_{01} \quad x_{02} \quad x_{03} \quad x_{04} \quad x_{05} \quad x_{06} \quad x_{07} \quad x_{08} \quad x_{09} \quad x_{010} \quad x_{011} \quad x_{012} \right)^T$$

$$x_d = \left(x_{d1} \quad x_{d2} \quad x_{d3} \quad x_{d4} \quad x_{d5} \quad x_{d6} \quad x_{d7} \quad x_{d8} \quad x_{d9} \quad x_{d10} \quad x_{d11} \quad x_{d12} \right)^T$$

Solution: It is a well-known fact (see [4]) that the optimal control inputs can be written in the form

$$u^0(t) = B^T X^T(t_1, t)\eta \tag{1.10}$$

where

$$\eta = \left(W(t_1, 0)\right)^{-1} \times \left(x_1 - X(t_1, 0)x_0\right) \tag{1.11}$$

and

$$W(t_1, 0) = \int_0^{t_1} X(t_1, \tau) BB^T X^T(t_1, \tau) d\tau \tag{1.12}$$

is the controllability gramian for the system (1.7). Controllability gramian is used to check the controllability of a system as well.

Back to System

Back to system (1.7) we already know the matrices A and B, so we can get the state transition matrix $X(t_1,\tau)=e^{A(t_1-\tau)}=\chi_{i,j}$, where $i,j=\overline{1,12}$. We will have

$\chi_{i,i}=1\left(i=\overline{1,12}\right)$, $\chi_{1,2}=\chi_{3,4}=\chi_{5,6}=\chi_{7,10}=\chi_{8,11}=t_1-\tau$, $\chi_{2,8}=-\chi_{4,7}=g(t_1-\tau)$,

$-\chi_{3,7}=\chi_{1,8}=-\chi_{4,10}=\chi_{2,11}=\frac{g}{2}(t_1-\tau)^2$, $\chi_{1,11}=-\chi_{3,10}=\frac{g}{6}(t_1-\tau)^3$.

All other $\chi_{i,j}$ which are not mentioned above are equal to 0.

Then we can simply substitute state transition matrix $X(t_1,\tau)$ and B into (1.12) and calculate the controllability gramian $W(t,0)$. We will have

$$W(t,0)=\begin{pmatrix}
\frac{g^2t^7}{252I_{yy}^2} & -\frac{g^2t^6}{72I_{yy}^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{gt^5}{30I_{yy}^2} & 0 & 0 & -\frac{gt^4}{24I_{yy}^2} & 0\\
-\frac{g^2t^6}{72I_{yy}^2} & \frac{gt^5}{30I_{yy}^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{gt^4}{24I_{yy}^2} & 0 & 0 & \frac{gt^3}{6I_{yy}^2} & 0\\
0 & 0 & \frac{g^2t^7}{252I_{xx}^2} & -\frac{g^2t^6}{72I_{xx}^2} & 0 & 0 & -\frac{gt^5}{30I_{xx}^2} & 0 & 0 & \frac{gt^4}{24I_{xx}^2} & 0 & 0\\
0 & 0 & -\frac{g^2t^6}{72I_{xx}^2} & \frac{gt^5}{30I_{xx}^2} & 0 & 0 & \frac{gt^4}{24I_{xx}^2} & 0 & 0 & -\frac{gt^3}{6I_{xx}^2} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{t^3}{3} & -\frac{t^2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{t^2}{2} & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -\frac{gt^5}{30I_{xx}^2} & \frac{gt^4}{24I_{xx}^2} & 0 & 0 & \frac{t^3}{3I_{xx}^2} & 0 & 0 & -\frac{t^2}{2I_{xx}^2} & 0 & 0\\
\frac{gt^5}{30I_{yy}^2} & -\frac{gt^4}{24I_{yy}^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{t^3}{3I_{yy}^2} & 0 & 0 & -\frac{t^2}{2I_{yy}^2} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{t^3}{3I_{zz}^2} & 0 & 0 & -\frac{t^2}{2I_{zz}^2}\\
0 & 0 & \frac{gt^4}{24I_{xx}^2} & -\frac{gt^3}{6I_{xx}^2} & 0 & 0 & -\frac{t^2}{2I_{xx}^2} & 0 & 0 & \frac{t}{I_{xx}^2} & 0 & 0\\
-\frac{gt^4}{24I_{yy}^2} & -\frac{gt^3}{6I_{yy}^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{t^2}{2I_{yy}^2} & 0 & 0 & \frac{t}{I_{yy}^2} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{t^2}{2I_{zz}^2} & 0 & 0 & \frac{t}{I_{zz}^2}
\end{pmatrix}$$

It is easy to check that the above matrix is full rank i.e. $\operatorname{rank} W(t_1,0)=12$. This is equivalent to the system being controllable. Now what we need to do, is to invert $W(t_1,0)$ and substitute it into (1.11) and get η. Finally, from (1.10) we get the optimal controls using already gained expression for η.

Thus, we get the optimal control input vector in the following form: $u^0=\begin{pmatrix}u_1^0 & u_2^0 & u_3^0 & u_4^0\end{pmatrix}^T$, where we have each component in the following forms.

$$u_2^0=-4\Big[210(x_{03}-x_{d3})(20t^3-t_1^3)-30t_1^4(4x_{04}-3x_{d4})+(30x_{07}+4t_1x_{010}-15x_{d7}+t_1x_{d10})gt_1^5+$$
$$+1260tt_1(x_{03}-x_{d3})(2t_1-5t)+2100t^3t_1(x_{04}+x_{d4})+90tt_1^3(15x_{04}+13x_{d4})-180t^2t_1^2(18x_{04}+17x_{d4})-$$
$$-30gtt_1^4(10x_{07}-7x_{d7})-15gtt_1^5(2x_{010}+x_{d10})-420gt^3t_1^2(x_{07}-x_{d7})+45gt^2t_1^3(15x_{07}-13x_{d7})+$$
$$+15gt^2t_1^4(4x_{010}+3x_{d10})-35gt^3t_1^3(x_{010}+x_{d10})\Big]\frac{I_{xx}}{gt_1^7}$$

$$u_3^0 = -\frac{4I_{yy}}{gt_1^7}\Big[210\left(x_{01}-x_{d1}\right)\left(20t^3-t_1^3\right)-30t_1^4\left(4x_{02}+3x_{d2}\right)-\left(30x_{08}+4t_1x_{011}-15x_{d8}+t_1x_{d11}\right)gt_1^5+$$
$$+1260tt_1\left(x_{01}-x_{d1}\right)\left(2t_1-5t\right)+2100t^3t_1\left(x_{02}+x_{d2}\right)+90tt_1^3\left(15x_{02}+13x_{d2}\right)-180t^2t_1^2\left(18x_{02}+17x_{d2}\right)+$$
$$+30gtt_1^4\left(10x_{08}-7x_{d8}\right)+15gtt_1^5\left(2x_{011}+x_{d11}\right)+420gt^3t_1^2\left(x_{08}-x_{d8}\right)-45gt^2t_1^3\left(15x_{08}-13x_{d8}\right)+$$
$$-15gt^2t_1^4\left(4x_{011}+3x_{d11}\right)+35gt^3t_1^3\left(x_{011}+x_{d11}\right)\Big]$$
$$u_1^0 = \frac{6\left(x_{05}-x_{d5}+t_1x_{06}\right)}{t_1^2}+\left(\frac{12\left(x_{05}-x_{d5}+t_1x_{06}\right)}{t_1^3}-\frac{6\left(x_{06}-x_{d6}\right)}{t_1^2}\right)\left(t-t_1\right)-\frac{4\left(x_{06}-x_{d6}\right)}{t_1}$$
$$u_4^0 = \frac{2I_{zz}\left(6tx_{09}-3t_1x_{09}-6tx_{d9}+3t_1x_{d9}-2t_1^2x_{012}-t_1^2x_{d12}+3tt_1x_{012}+3tt_1x_{d12}\right)}{t_1^3}$$

Simulation Results

To simulate the above solved problem, we assume that we have the following values of parameters.

$$I_{xx}=I_{yy}=4.856\times10^{-3}\ kg\cdot m^2,\ I_{zz}=8.801\times10^{-3}\ kg\cdot m^2,\ g=9.81\,\frac{m}{s^2},\ t_0=0\ s,\ t_1=15\ s,$$

$$x(0)=0,\ \ x(15)=\begin{pmatrix}50 & 0 & 30 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & \frac{\pi}{2} & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^T$$

For these values we will have optimal control inputs as follows.

$$\begin{pmatrix}u_1^0\\u_2^0\\u_3^0\\u_4^0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.27-0.036t\\1.5\times10^{-6}\left(t-15\right)^3+3.3\times10^{-5}\left(t-15\right)^2+2\times10^{-4}t-2.7\times10^{-3}\\-2.4\times10^{-6}\left(t-15\right)^3-5.5\times10^{-5}\left(t-15\right)^2-3.3\times10^{-4}t+4.5\times10^{-3}\\3.7\times10^{-4}-4.9\times10^{-5}t\end{pmatrix}$$

The graphs of optimal control inputs are shown in Fig. 2.

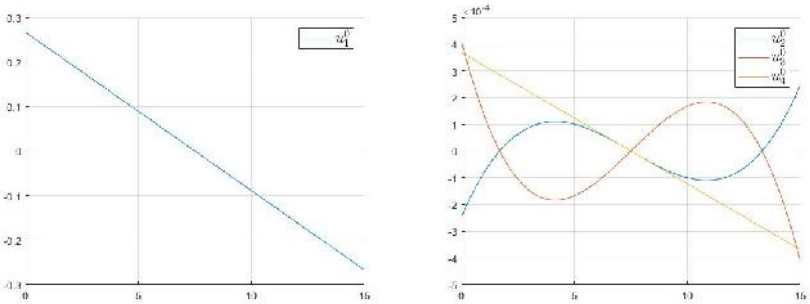
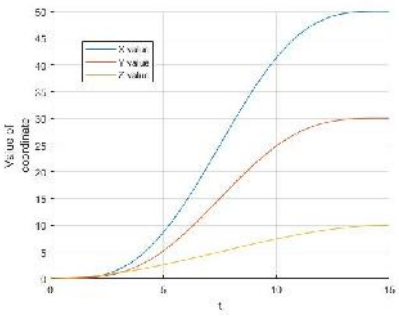
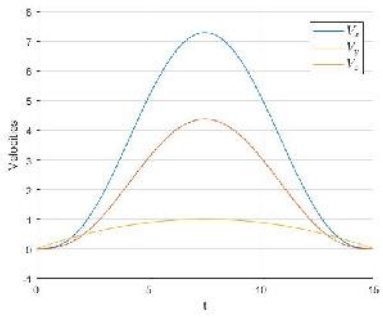


Fig. 2.

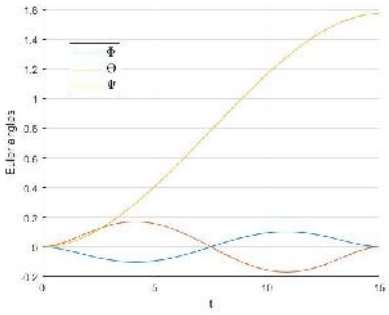
The optimal trajectories of states and the optimal path are also shown in Figure 3.



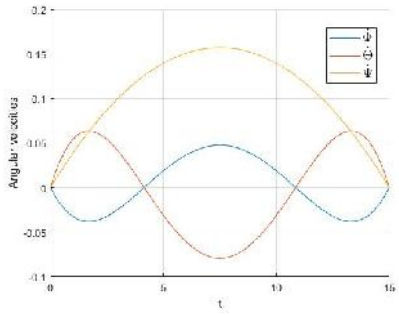
a)



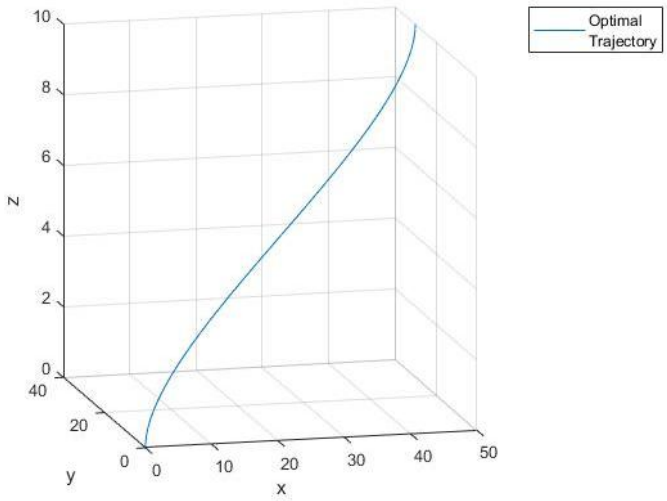
b)



c)



d)



e)

Fig. 3: a) Graphs of optimal motions of X, Y and Z coordinates of the center of mass of the UAV; b) Graphs of components of optimal velocity of the center of mass of the UAV; c) Graphs of Euler's angles of the UA; d) Graphs of Angular velocities of the UAV; e) Optimal path of the center of mass of the UAV.

Conclusion

In this work an optimal control problem of quadrotor Unmanned Aerial Vehicle (UAV) is investigated. Pure theoretical dynamics of motion of the UAV are shown. The state space model is given which includes some parameters. An Optimal Control problem is formulated and solved for the first order approximation of state space model. Optimal control inputs are calculated based on all the parameters of the system. A numerical example is also given using an example of set of values of parameters. Optimal control inputs calculated analytically for the numerical example and optimal trajectories of the states and the optimal path of the UAV in 3D space are presented.

References

1. Teppo Luukkonen, Modelling and control of quadcopter. Independent research project in applied mathematics, Espoo, August 22, 2011.
2. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
3. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. Часть 2. М.: Наука, 1972.
4. Brockett, Roger W. Finite dimensional linear systems. SIAM, 2015.

Information about author

Arman Shahinyan – masters student, Yerevan State University, Faculty of Mathematics and Mechanics, (374 55) 66 37 41; **E-mail:** armanshah1995@gmail.com

EVOLUTION EQUATION BASED CONTINUUM APPROACH FOR FATIGUE

Tero Frondelius, Terhi Kaarakka, Reijo Kouhia, Heikki Orelma, Joona Vaara

Mechanical fatigue phenomena occurs when a material is subjected to repeated application of stresses or strains which produces changes in the material microstructure, initiation, growth and coalescence of microdefects, thus degrading the material properties. In this paper we review shortly the continuum approach and its recent extensions.

1. Introduction

Mechanical fatigue phenomena occurs when a material is subjected to repeated application of stresses or strains which produces changes in the material microstructure, initiation, growth and coalescence of microdefects, thus degrading the material properties, see Bolotin [1], Suresh [2], and Murakami [3].
It is customary to distinguish between high-cycle (HCF) and low-cycle fatigue (LCF). In low-cycle fatigue plastic deformations occur in a macroscopic scale while when the loading is in the high-cycle fatigue regime the macroscopic behavior can be considered primarily as elastic. If the loading consist of well defined cycles, the transition between LCF and HCF regimes is typically considered to occur between $10^3 - 10^4$ cycles.

Classical methods for HCF-analysis can be broadly classified as stress invariant, critical plane, strain energy and average stress based approaches. Well known examples are the models by Sines [4], Findley [5], Dang Van [6], Carpinteri and Spagnoli [7] and Papadopoulos [8]. These approaches are well defined if the loading consists of well-defined cycles. For arbitrary loading histories they need the definition of an equivalent uniaxial loading cycle. Another deficient is that heuristic damage accumulation rules have to be applied. To remove these shortcomings Ottosen et al. [9] proposed a continuum based model where they postulated a moving endurance surface in the stress space where the movement and damage evolution are governed by properly formulated evolution equations. This evolution equation based continuum approach to HCF is also used by Brighenti et al. [10,11]. In this paper we review shortly the continuum approach and its recent extensions.

2. Continuum based fatigue model

Ottosen et al. [9] proposed a continuum based HCF-model which is based on a moving endurance surface and some internal variables characterizing the movement and damage accumulation. Evolution of these internal variables is governed by evolution equations. Such an approach treats multiaxial stress states and arbitrary loading sequences in a unified manner and the cycle-counting techniques are not needed.

The original form of the endurance surface proposed in [9] for isotropic high-cycle fatigue has the following form

$$\beta = \frac{1}{\sigma_{-1}}(\bar{\sigma} + AI_1 - \sigma_{-1}) = 0,$$

where I_1 is the first invariant of the stress tensor $\boldsymbol{\sigma}$, i.e. $I_1 = tr(\boldsymbol{\sigma})$, and the effective stress $\bar{\sigma}$ is defined by the second invariant of the reduced deviatoric stress $\boldsymbol{s} - \boldsymbol{\alpha}$ as

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} tr(\boldsymbol{s} - \boldsymbol{\alpha})^2}.$$

The deviatoric stress tensor is $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} tr(\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{I}$, where $\boldsymbol{I}$ stands for the identity tensor.

It is shown in Section 4 in [9] that in the special case of uniaxial cyclic loading where the stress varies between $\sigma_m - \sigma_a$ and $\sigma_m + \sigma_a$ a linear relation between the mean stress and amplitude, i.e., a linear

Haigh diagram, $\sigma_a + A\sigma_m - \sigma_{-1} = 0$, is obtained. As it can be noticed, the non-dimensional positive parameter A is the opposite value of the slope in the Haigh diagram and can be determined e.g. using the formula $A = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_0} - 1$, where σ_0 is the fatigue limit amplitude for tensile pulsating loading and the endurance limit at zero mean stress is σ_{-1}.

A back stress like deviatoric tensor $\boldsymbol{\alpha}$ is a history variable. Its movement determines the movement of the endurance surface $\beta = 0$ in the stress space. Evolution of the $\boldsymbol{\alpha}$-tensor is governed by the evolution equation

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = C(\boldsymbol{s} - \boldsymbol{\alpha})\dot{\beta}$$

where C is a positive dimensionless material parameter and the superimposed dot denotes time rate. Shape of the endurance surface in the deviatoric plane is circular and the meridian lines are straight as with the case of the Drucker-Prager model in plasticity.

In the model all the stress tensors $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{s}$ and $\boldsymbol{\alpha}$ are functions of space and time. In practice, however, we are interested in the variation of stress at some fixed point. For this reason we can think of the stress depends only on time, i.e., geometrically they are curves $\boldsymbol{\sigma}(t)$, $\boldsymbol{s}(t)$ and $\boldsymbol{\alpha}(t)$ in a stress space associated to a point of the body.

Fatigue damage is modelled macroscopically using an isotropic damage variable function D taking values in $[0,1]$, for which the evolution is given in the form

$$\dot{D} = Ke^{L\beta}\dot{\beta}$$

where $K > 0$ and $L > 0$ are material parameters. Since $\dot{D} \geq 0$ and damage never decreases, it then follows that for damage evolution only when $\dot{\beta} \geq 0$. The life time T_f is the time when the damage variable attain the value one, i.e. $D(T_f) = 1$.

In contrast to plasticity, the stress state can lie outside the endurance surface. When the stress state is outside the endurance surface and moves away from this surface, i.e., the evolution of the $\boldsymbol{\alpha}$-tensor and damage takes place when

$\beta \geq 0$ and $\dot{\beta} \geq 0$.

3. Extensions of the model

In the preceding section, we gave a short introduction for the continuum based model, introduced by Ottosen at. al. in [9]. Extension to transverse isotropy is given by Holopainen et al. [12]. The stress gradient effects are considered in [13]. In [14] we introduce complete stochastic formulation of the method. In this approach the fundamental difference is that input stress $\boldsymbol{\sigma}(t)$ and hence $\boldsymbol{s}(t)$, $\boldsymbol{\alpha}(t)$ and $D(t)$ are stationary stochastic processes. We deduce that then the life time T_f is a random variable and we explain how to compute an approximation for its distribution. In future we will develop this approach further.

4. Example: one dimensional repeated load with noise

Let us briefly demonstrate the case, where we assume the measured stress history to be a stochastic process. The most simplest case is the consider a stress history

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{\sigma_a} \sin 2\pi \boldsymbol{t} + \boldsymbol{\sigma_n} + \boldsymbol{\tau W}(\boldsymbol{t})$$

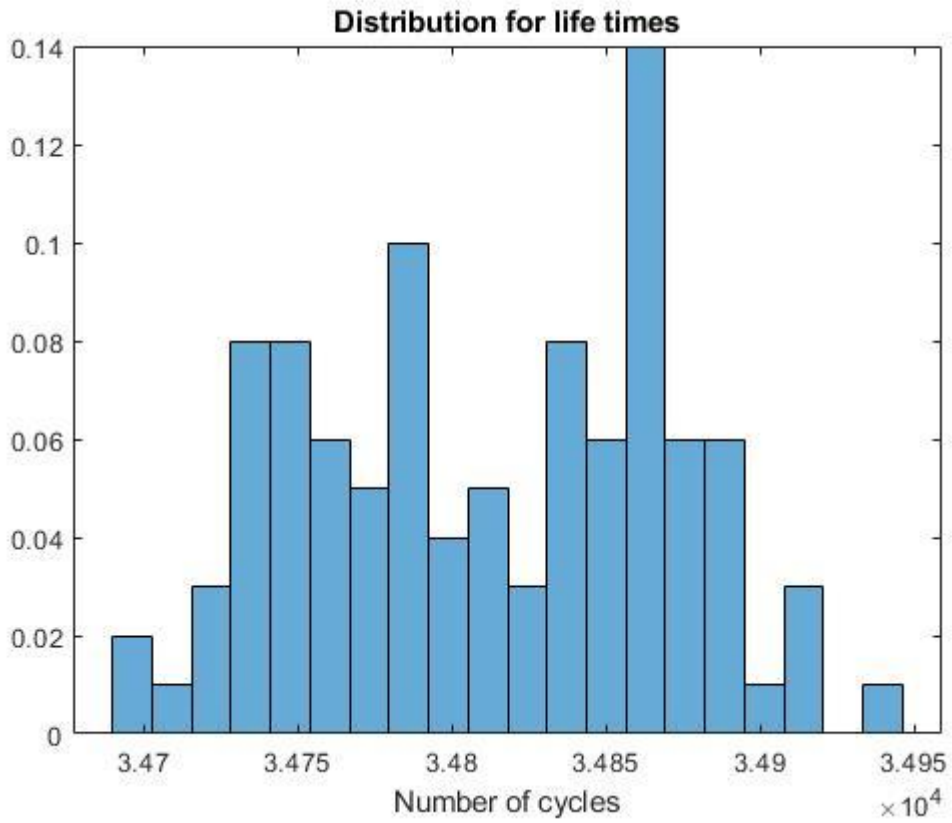
where the mean stress is perturbed with the white noise $W(t)$. This is of course a situation in practical computations, since the pure sinusoidal stress history exists only theoretically, in reality there is always with some perturbation. In this case t is amount of cycles. From measured sinusoidal type stress history, one can estimate the noise stress parameter τ by the maximum likelihood method. As an example, we compute the situation given in Section 6 in [9]. If $\sigma_m = 400$ MPa and $\sigma_a = 500$ MPa, we obtain in the deterministic case ($\tau = 0$) the life time

$$N_f = 4.33 \times 10^4$$

cycles. Let us now assume, that there is noise with $\tau = 50$ MPa in the stress history. Then computing 100 realizations for the process, we obtain the average life time

$$\overline{N}_f = 3.48 \times 10^4$$

cycles and the following approximation of the distribution for the life time random variable:



We see that the noise lowers the life time, what is expected. This example demonstrates well, that computing life time using deterministic methods, we get only one point. This is of course not realistic in practice. Life time is always a random variable with the distribution, and this distribution may be explicitly numerically approximates.

REFERENCE

1. V. Bolotin, Mechanics of Fatigue, CRC Mechanical Engineering Series, CRC Press, Boca Raton, 1999.
2. S. Suresh, Fatigue of Materials, 2nd Edition, Cambridge University Press, 1998.
3. Y. Murakami, Metal Fatigue, E ects of Small defects and Nonmetallic Inclusions, Elsevier Science, 2002.
4. G. Sines, Failure of materials under combined repeated stresses with superimposed static stresses, Tech. Rep. 3495, NACA, Washington, USA (November 1955).
5. W. Findley, A theory for the e ect of mean stress on fatigue of metals under combined torsion and axial load or bending, Journal of Engineering for Industry (1959) 301–306.
6. K. Dang Van, Macro-micro approach in high-cycle multiaxial fatigue, in: D. McDowell (Ed.), Advances in Multiaxial Fatigue, no. 1191 in ASTM STP, Americal Society for Testing and Materials, Philadelphia, 1993, pp. 120–130.
7. A. Carpinteri, A. Spagnoli, Multiaxial high-cycle fatigue criterion for hard metals, International Journal of Fatigue 23 (2) (2001) 135 – 145.
8. I. V. Papadopoulos, Long life fatigue under multiaxial loading, International Journal of Fatigue 23 (10) (2001) 839 – 849.
9. N. Ottosen, R. Stenström, M. Ristinmaa, Continuum approach to high-cycle fatigue modeling, International Journal of Fatigue 30 (6) (2008) 996–1006.
10. R. Brighenti, A. Carpinteri, S. Vantadori, Fatigue life assessment under a complex multiaxial load history: an approach based on damage mechanics, Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures 35 (2) (2012) 141–153.
11. R. Brighenti, A. Carpinteri, N. Corbari, Damage mechanics and Paris regime in fatigue life assessment of metals, International Journal of Pressure Vessels and Piping 104 (2013) 57 – 68.
12. S. Holopainen, R. Kouhia, T. Saksala, Continuum approach for modeling transversely isotropic high-cycle fatigue, European Journal of Mechanics A/Solids 60 (2016) 183–195.
13. N. Ottosen, Niels, M. Ristinmaa, R. Kouhia, Enhanced multiaxial fatigue criterion that considers stress gradient effects, (2018) In International Journal of Fatigue 116. p.128-139
14. T. Frondelius, T. Kaarakka, R. Kouhia, H. Orelma, J. Vaara, Stochastic continuum approach to high-cycle fatigue: Modelling stress history as stochastic process, manuscript, 2018

Information about authors:

Tero Frondelius - Wärtsilä Marine Solutions, R&D and Engineering, Järvikatu 2-4, FI-65100 Vaasa, Finland, **E-mail:** tero.frondelius@wartsila.com

Terhi Kaarakka - Ph.D., Tampere University of Technology, Laboratory of Mathematics, P.O. Box 600, FI-33101 Tampere, Finland, **E-mail:** terhi.kaarakka@tut.fi

Reijo Kouhia, - professor, Tampere University of Technology, Laboratory of Civil Engineering, P.O. Box 600, FI-33101 Tampere, Finland, **E-mail:** reijo.kouhia@tut.fi

Heikki Orelma - docent, Tampere University of Technology, Laboratory of Civil Engineering, P.O. Box 600, FI-33101 Tampere, Finland, **E-mail:** heikki.orelma@tut.fi

Joona Vaara - Wärtsilä Marine Solutions, R&D and Engineering, Järvikatu 2-4, FI-65100 Vaasa, Finland, **E-mail:** joona.vaara@wartsila.com

CONTENTS AND ABSTRACTS

Avetisyan V.V. *Synthesis of Optimal Control of Electromechanical System* 5
The problem of optimal control of the electromechanical system with one degree of freedom is under consideration. As an optimal indicator, a functionality is considered, which takes into account both the impulse momentum generated by the electric motor and the time of the control process. The optimal control synthesis was built by the method of maximum principle, which ensures the transfer the system from any initial state to the final state and during this time the minimal value receives the combined functional. The curves have been constructed on the phase plane of the system, which create different domains of initial states. The optimal transfer to the initial coordinate system is carried out both without transfer and with one or two transfer times. The optimal transfer to the initial coordinate system is carried out both without transfer and with one or two transfer times. It is depending on which domain where located the initial state. Optimal control transfer moments and optimal time counting resolutions of the control process have been obtained.

Aghabekyan P.V. *A contact problem for a semi–infinite plate, reinforced by three semi–infinite stringers*.....9
A contact problem for a semi–infinite plate, reinforced by two semi–infinite stringers, located on the plate boundary and one semi–infinite stringer, perpendicular to the plate boundary. The semi–infinite is deformed under the influence of forces, applied at the ends of the stringers. The problem is in the determination of the contact tangential stresses, acting under the stringers.

Aghalovyan L.A., Ghulghazaryan L.G. *Forced Vibrations of Two-Layered Shell in Case of Viscous Resistance in Both Layers* 14
Forced vibrations of a two-layered orthotropic shell are studied in the case of viscous resistance in the both layers of the shell. Two versions of spatial boundary conditions on the upper surface of the shell are posed, and the displacement vector is given on the lower surface. An asymptotic method is used to solve the corresponding dynamic equations and relations of the three-dimensional problem of elasticity. The amplitudes of the forced vibrations are determined.

Aghayan K.L. *A plane shear wave in a layer with inhomogeneous boundary conditions* 19
The paper discusses a problem on directed propagation of plane shear elastic waves in a waveguide (layer) with mixed boundary conditions. Cases are considered, when both semi-infinite segments of the layer edges are free and are rigidly fastened respective to the direction the incident wave. With the application of Fourier real transforms, solution of the problem is reduced to functional equations (Riemann-type boundary value problem) on real axis and solution of the latter is constructed according to the Wiener-Hopf method. Explicit expressions of wave functions representing field of elastic displacements in respective domains as well as the number and the wave characteristics of the reflected and transmitted propagating waves are obtained.

Agayan K., Atoyan L., Sahakyan S. *Elastic-Spin Waves In The Periodic Construction Of The Type Magnet / Nonmagnetic* 24
This paper is devoted to the existence and propagation of elastic-spin waves in a periodic magnet / non-magnetic medium. The work is a supplement and refinement of the previous work of the authors [9], where an inaccuracy was admitted. The wave fields and the corresponding dispersion equation are found. The transmission bands and the silence zones (the band gaps) in the spectrum of the frequencies of the sought-for waves are identified and found, and some numerical results are presented in the form of dispersion curves.

Hakobyan V., Dashtoyan L., Murashkin E. *The axis-symmetrical stress state of piecewise layered space with periodical inner disk-shaped cracks* 29
In present paper using the Hankel integral transform, the governing system of integral equations, describing the axis-symmetrical state of piecewise-homogeneous, uniformly layered space, formed by alternate junction of two layers with same thickness is built. The space contains the periodic system of disc-shaped parallel cracks on middle planes of layeres. Using rotation operators the governing system

of equations is reduced to the system of second-kind Fredholm-type integral equations. The solution of the system is built by the method of mechanical quadratures.

Hakobyan V., Amirjanyan H., Sahakyan A. *Stress state of the compound plane with interface absolutely rigid inclusion and crack having common tip* 34
This paper considers the plane stress state of a compound elastic plane containing a finite crack and an absolutely rigid thin inclusion on the joint line of two heterogeneous half-planes. The crack and inclusion continue each other and have a common end. Using the discontinuous solutions of the Lame equations for the composite plane with interface defects, the governing system of singular integral equations of the problem is derived with respect to the stress jump function acting on the front sides of the inclusion and the dislocation of displacements of the points of the crack edges. The behavior of unknown functions at the end points of the defects is studied and the solution of the problem is constructed by the method of mechanical quadratures. The regulations of changes in the contact stresses acting on the front sides of the inclusion, crack opening and the J -integral at the end point of the crack are revealed, depending on the physical, mechanical and geometric parameters of the problem.

Amirbekyan A.N., Mkrtchyan M.M., Shekyan L.A. *Bending Two the Same Beams on the Elastic Ribbon Band with the Account of Compressible or Stretching Axial Forces* 39
Within the framework of Timoshenko's theory of the generalized beam bending model, when the deflection of beams is affected both by transverse and longitudinal compressive or tensile forces acting on its median line, we consider a plane contact problem about the bending of symmetrically loaded two identical elastic horizontal beams of finite length lying on an elastic, rough base in the form of a strip, the lower edge of which is clamped. The problem is reduced to solving a non-linear integral equation of Hammerstein type under additional conditions. An effective solution of the problem was obtained using the method developed in, based on the theory of the nonlinear integral Hammerstein equation and the contraction mapping principle . An approximate analytical solution of the problem is given.

Amirjanyan H., Hakobyan L. *Antiplane dynamic contact problem for compound half-space with interphase crack* 44
This article considers the antiplane stress state for compound half space, formed by junction of homogeneous layer and half-space with interphase tunnel crack. The compound half-space is deformed by the absolutely rigid inclusion with smooth base, which is under action of periodically changing loads. The governing system of singular integral equations with respect to amplitudes of contact stresses and dislocations of points on banks of crack is obtained. The solution of the system is constructed by the method of mechanical quadratures.

Arutyunyan A.R., Arutyunyan R.A. *Fatigue of composite materials* 49
According to the results of numerous experiments, composite materials under cyclic loadings are deformed and fractured due to accumulations of numerous defects of different nature. Based on these results, using the conception of scattered damage and fracture, the fatigue strength criterion is formulated. Coefficients of fatigue criterion are concretized and the curves of damage accumulation depending on the number of loading cycles and stress level are plotted. Comparison with fatigue experiments on the glass-reinforced plastics and carbon plastics (CFRP) is given.

Arutyunyan A.R., Arutyunyan R.A., Saitova R.R. *The connection of high temperature creep and damage of metallic materials* 54
Interrelated equations for creep deformation and damage parameter for compressible media are formulated. The approximate and exact solutions of these equations are received. The corresponding long-term strength criteria are formulated. It is shown, that Kachanov-Rabotnov theory gives overestimated values of time to fracture.

Arutyunyan L.A., Edoyan V.A.*A plane problem of a compound plane containing an hole*.....59
It is considered the plane problem of the theory of elasticity for a compound plane consisting of two half-planes with different elastic characteristics and with a curvilinear hole between them, the contour of which is bounded by arcs of intersecting circles.

Baghdasaryan G.Y. , Mikilyan M.A., Vardanyan I.A. *Non-linear flutter of cylindrical panel, flowing by supersonic gas flow* 63
In the present paper, in a nonlinear formulation, the problem of stability of shallow cylindrical shell under the action of supersonic gas flow is considered. It is shown that aerodynamic nonlinearity (especially its asymmetric quadratic part) leads to the appearance of new types of dependences amplitude-speed in both pre- and post- critical speeds.

Baghdasaryan G.Y., Mikilyan M.A., Vardanyan I.A. *Flutter of closed cylindrical shell in presence of non-homogeneous thermal field* 68
The problem of stability of closed cylindrical shell under the influence of both inhomogeneous temperature field and supersonic gas flow in a linear formulation is considered in the present paper. Stability conditions of unperturbed state of aerothermoelastic system under consideration are obtained. It is shown that the joint action of the temperature field and the flowing stream can control the stability process and substantially change the value of critical flutter speed with the help of temperature field.

Barseghyan V.R. *About one problem of control of stage by stage changing linear systems of loaded differential equations with non-separable multipoint intermediate conditions*.....73
One control problem of stage-by-stage changing linear systems of loaded differential equations with given initial, terminal and non-separable (nonlocal) multipoint intermediate conditions is considered. Necessary and sufficient conditions for complete controllability, a condition for the existence of program control and motion are formulated. An explicit form of the control action is constructed.

Belubekyan V.M., Belubekyan M.V., Berberyan A. Kh. *Localization of elastic shear waves near interface of two flat waveguides*.....76
A problem for flat elastic waveguides is considered such that boundary conditions at the surfaces of the waveguides differ from each other. Possibility of localization of elastic waves at the adjoin of waveguides is established.

Belubekyan MV, Garakov V.G. *Reflection of electromagnetic and elastic waves from vacuum-adjoining piezoelectric half-space*.....80
In an 6mm elastic piezoactive environment of hexagonal symmetry there possible propagation of two types of waves -an elastic wave with a concomitant electric field and an electromagnetic wave with an concomitant field of elastic tenstion. For a 6mm half-space of a piezoelectric material the problem of the fall of elastic and electromagnetic waves on the vacuum border is considered. The amplitudes of the reflected electroelastic waves are determined.

Bobyliov D.E. *Using the Regularization Algorithm in the Implementation of the Method of Border Elements for the Calculation of the Stress-Strain State of Multilife Areas* 84
The paper proves the reasons for the poor conditionality of the system of linear equations of the boundary element method, as well as the applied approach to the solution of such systems based on the regularization method of A. Tikhonova. A description of the regularization algorithm based on the selection of the regularization parameter is given.

Byrdin V.M. *Crosses, meanders and loops of transcendental functions and curves & Singular ansatz, dispersion of backward waves and ZGV-problem, of "zero-group-velocity".* 87
Dispersion curves, equations and functions, transcendental, algebraic (of high order) or tabular and graphical (numerical or empirical) are arbitrary and arbitrarily complex is analyzed. The method of analysis is based on the theory of implicit functions and positions of complex analysis. A typical dispersion of the backward wave is described by a meander or quasi-hyperbola, with two or three

asymptotics; the accuracy of the approximation is rather high. The main elements of the ansatz are double branches, points of inflection and intersection (double-crosses), half-loops of group velocity, and also, albeit much less often, higher-order singularities. Transcendental curves are a weakly developed region of geometry and function theory, in comparison with algebraics. Our ansatz also includes the so-called (catchy and in headers) problem of zero and two zeros of group velocity ("double and zero-group-velocity"), very relevant in recent years. And backward waves are the general direction of interdisciplinary theory of waves in mechanics and electrodynamics, which has been revived since 1990 / 2000s. and rich in dozens of vivid effects and application perspectives.

Byrdin V.M., Kosarev O.I., **Mamonova M.G., Puzakina A.K.** *About the diffraction of backward waves Gaussian beam & Divergence of rays and the radiation pattern; dissimilar antidiffraction, biinversion and focusing.* 92
The boundary-value problems and the diffraction phenomena of a backward-waves Gaussian beam are considered, which fully correspond to classical diffraction and our concept of different-names antidiffraction in backward-waves (BW) systems; counterexamples are impossible. Diffraction of the BW beam in the "negative medium" is completely adequate to the divergence of the classical Gaussian beam. The problem of passing a beam through a heterogeneous (different-names) joint of ordinary, "positive" and negative media has been solved. The phenomenon of focusing of the transmitted beam and its biinversion, a double reversal of 2*180°, as well as the refracted field as a whole and beam directional characteristics are described. Biinversion leads to a threefold aggravation of the radiation pattern, albeit local, in the zone of the second turn. The relevance of the backward-waves research in mechanics and electrodynamics, which have been revived since the late 1990s and significantly increased to a multifaceted theory and technology, up to the Nobel and Russian nominations, is discussed. In general, the fundamental backward-waves phenomenology already has several dozen effects.

Vasilyan N.G. *The bending of isotropic rectangular plate by moments distributed along the boundary* 97
In this article is investigated bending problem of the isotropic rectangular plate $(0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b)$, when two edges of the plate $y = 0, b$ are hinged, in $x = 0$ edge are investigated different boundary conditions. The plate is free from distributed loads and $x = a$ side is loaded by moments. Are received generalized cutting forces and investigated condition of equilibrium for cutting forces for each case. This article is dedicated to identify solution difference, which is obtained is due to the transformation of Kirchhoff and Thomson-Tait [7].

Vatulyan A.O., Nedin R.D. *Vibrations of an inhomogeneous coated plate in conditions of prestressed state* 102
Modern materials used in various fields of science and technology, such as compositional and functionally graded materials, have a complex heterogeneous structure. In many engineering applications, to adequately diagnose the processes and mechanical properties of objects, it is necessary to approach the modeling issue in more detail and develop methods for solving inverse problems that allow reconstructing inhomogeneous characteristics and physical fields that depend on three spatial coordinates. In the present work, we have described the general linearized theory for oscillations of elastic prestressed inhomogeneous body. Based on this model, we have derived a particular statement for vibrations of a strip coated inhomogeneous plate in conditions of initial stress-strain state. The analysis of the prestressed state parameters on dynamic characteristics of the plate has been analyzed. Some fundamental theoretical results were obtained; variational and weak statements of the original problem were derived.

Vatulyan A.O., Plotnikov D.K. *Indentation of functionally graded coatings*..... 106
The paper presents an approximate model of deformation of a thin inhomogeneous elastic strip with a coating. The approximate model is based on hypotheses about the nature of the displacement field components, which allows to take into account arbitrary changes in the properties of the strip along the thickness, including discontinuous or strongly graded. The problem of the equilibrium of a functionally graded strip under the action of a rigid indenter with a smooth base is considered. The

results of computational experiments for various laws of inhomogeneity both continuous and strongly graded or discontinuities are presented.

Galanin M.P., Lukin V.V., Rodin A.S. *Application of Schwartz method for solving problem of contact interaction of solids in fuel element at thermoelastic approach*.....110
The algorithm of numerical solution of polycontact problem for thermomechanical interaction of big amount of solids by means of Schwartz method is discussed. The essence of this method is the alternation of stress and kinematic conditions on contact surfaces of bodies. Iteration process is carried out before achievement of convergence when both kinematic and stress conditions on contact surfaces are satisfied with the planned accuracy. Numerical simulation of strain-stress distribution of fuel element part by means of Schwartz method is done. Contacts between fuel pellets and cladding take into account. This problem is considered at axisymmetric thermoelastic approach. The results of calculations with number of pellets from several items to 100 are demonstrated.

Galichyan T.A., Hunanyan A.A. *Propagation of coupled magnetoelastic and electroelastic waves of antiplane deformation in a composite periodically inhomogeneous waveguide*.....115
The propagation of the wave signal of an anti-plane deformation in a periodically longitudinally inhomogeneous layer of piezoelectric and ideally conducting layers located in a transverse constant magnetic field is investigated. When the wave signal of anti-plane deformation propagates, forms of an electroelastic shear wave $\{0;\ 0;\ w_1(x,y,t);\ \ddot{}_1(x,y,t)\}$ in the piezoelectric interlayers, and in the electrically conducting layers elastic-shift forms $\{0;\ 0;\ w_2(x,y,t);\ 0\}$ appear that are toughened in one direction of the material. The features of the formed wave forms are investigated depending on the boundary conditions on the mechanically free surfaces of the layer. The Lyapunov-Floquet method yields the equation for filtering frequencies. For the specific waveforms formed, zones of forbidden and admissible frequencies are determined.

Hachkevech A.R., Ivasko R.A., Kushnir R.M., Ghazaryan K.B. *Physico-Mechanical Fields in Ferrite Bodies under the Influence of Quasi-Stabilized Electromagnetic Fields*.....120
A research technique of the thermo-stressed state of bodies made from widely used in the production of magnetic devices non-striction polycrystalline isotropic ferrite materials subjected to weak quasisteady electromagnetic fields of high carrier frequency is proposed. It makes possible to minimize the parameters characterizing the heat treatment process and the effect on the environment.

Gevorgyan H.A. *An Analysis Of Singularites Near Center Of Heterogeneous Honeycomb Cell At Antiplane Deformation In The Light of The Fem*.....124
A number of publications have been devoted to solving the problem of identifying singularities near vertices of homogeneous and heterogeneous incoming and outgoing corners, among which a significant role is assigned to theoretical research. Here are proposed results of numerical studies of some specific problems of those under discussion, obtained on the basis of the use of a new analogy between the bars' torsion problem and the solution of thin stiff plates and shells of the finite element method plane-spatial modification that has proved itself by examples.

Goryacheva I.G., Yakovenko A.A. *Problems of contact interactions mechanics for the development of clamping medical tools* 128
The contact of clamping tool with a given surface relief and a biological tissue is considered. For the properties describing two mechanical models are used: linearly elastic and viscoelastic materials. The mutual influence of the tool protrusions on each other is considered in frameworks the tissue of model as an elastic half-space. Also, two forms of projections are taken into consideration: the hemispheres uniformly located on the surface of the clamp and protrusions in the form of elongated narrow parallelepipeds with the rounded edges. The constructed analytical solution makes it possible to investigate the influence of the relief shape of the contacting surface of the clamping tool on the dependence of the load applied to it on the depth of its penetration into the soft tissue, as well as on the stress strain state of the tissue close to the contact interaction domain.

Grigoreva P.M., Vilchevskaya E.N. *The choice of the diffusion model and its influence on the chemical reaction front kinetics.* 133
A linear-elastic body with a chemical reaction between gaseous and solid component is considered. The reaction is localised at the chemical reaction front and is supported by the diffusion of the gaseous component through the layer of the new forming solid material. The comparative influence of mechanical stresses on the kinetics of the chemical reaction front is studied. Two approaches of taking into account the contribution of stresses are considered: to the surface reaction rate through the chemical affinity tensor and to the diffusion process through various dependences of the diffusion coefficient on stresses. Rational diffusion coefficient model is proposed. As an example, some boundary-value problems are considered and different diffusion models are compared.

Ghukasyan A.A. *Some models of multi-link manipulators and methods of study of controlled motions* *138*
The research refers to the results of the mathematical modeling of multi-link manipulators as both with absolutely rigid links connected by ideal hinges and the manipulator of the links which are modeled as elastic bodies. The connectors between the links contain elastic elements of great rigidity. The kinematics of the manipulators' motion in both Cartesian and curvilinear coordinate systems has been studied. Special manipulation modes of control have been developed, taking into account the influence of elastic properties. In control problems with incomplete information, various methods aiming to ensure an optimal control are applied.

Ghukasyan A.A., Ordyan A.Ya. *On the optimization of the process of maintenance of a technological area by a manipulator* 143
The research refers to the description of the mathematical model of the process of maintaining the technological area, which consists of either unstable or stable objects (targets) or a controlled multi-link manipulator. It is assumed that the dynamic characteristics of the manipulator can change depending on the mass of the cargo or the instrument.
The problem of an optimal control as well as the succession conditions in the maintenance problems has also been formulated. In the case when the motion of the manipulator at each maintenance interval is described by linear differential equations with constant coefficients, and the motions of the objects are given, the problems of controllability have been investigated. It has been shown that the maintenance process is completely manageable, if it is controlled at each interval of the maintenance. The controllability matrices have been obtained.

Ghulghazaryan G.R., Ghulghazaryan L.G. *About Dispersion Equations for Orthotropic Cylindrical Panel with Free Edges* 148
On the paper, using the system of equations corresponding to the classical theory of orthotropic cylindrical shells, the free vibrations of thin elastic orthotropic cylindrical panel with free edges is investigated. To calculate the natural frequencies and to identify the respective natural modes it is employ the generalized Kantorovich-Vlasov method of redaction to ordinary differential equations. The dispersion equations for finding the natural frequencies of possible types of vibrations are derived. An asymptotic link between the dispersion equations of problem in hand and analogous problem for the rectangular plate with free sides is shown. Also, a link between the dispersion equations of the problem in hand and the boundary-value problem for the semi - infinite orthotropic non-closed circular cylindrical shell with three free edges is shown.

Davtyan Z.A., Mirzoyan S.Y. Gasparyan A.V. *On Stress State of a Multilayer Viscoelastic Composite under Anti-Plane Deformation* 153
In the present paper, a problem on stress-strained state of a piecewise-homogeneous viscoelastic solid, which is a package of an arbitrary finite number of layers of different ages, is considered in the framework of creep theory of uneven-aged media. It is assumed that the contacting layers are made of different materials at different time instants and, therefore, have different ages. Tangential forces, causing anti-plane deformation, are applied to the upper and lower surfaces of the composite.

With the application of Fourier integral transform the problem is reduced to solving a finite-difference equation of second order that contains operators with coordinates of time and space. The obtained formulas allow one to determine the required contact stresses and other mechanical characteristics of the problem related to uneven age of contacting layers.

Demydov O., Popov V. *Nonstationary Torsion Problem for the Finite Cylinder with External Ring-Shaped Crack* 158
The axisymmetric dynamic problem of determining the stress state in the region of an external ring-shaped crack in a finite cylinder is solved. In contradistinction to the traditional solution methods based on the use of the Laplace integral transform, the proposed method consists in the difference approximation only of the time derivative. As a result, the original problem is replaced by a sequence of homogeneous boundary value problems that reduce to the Fredholm integral equation of the second kind. The found numerical solution of this equation gave the possibility to obtain the approximate formula for the SIF calculation.

Dzhan Ts., Zimin V.N., Krylov A.V., Churilin S.A. *Calculation of the space transformable structure deployment* 163
Development of transformable large space structures is associated with solution of a number of technical and mechanical problems. To be brought into the space orbit the transformable structures are closely packed in transport position. In the orbit they have to be deployed to get the working state. To carry out full-scale tests of the deployment of such structures in the ground is a very difficult and expensive task. Therefore, the mathematical modeling of the transformable space structure deployment is applied to confirm their operability for real-time use. The mathematical modeling allows to analyze various schemes of the structure packaging to transport position and deploying to operating position in the orbit. In this paper a mathematical model allowing both to calculate the large transformable space structure deploy and to determine the stress-strain state of its elements during deployment is suggested.
Fulfilled calculations of the deployment allowed to obtain the kinematic parameters and values of equivalent stresses arising in the structure nodes at the appointed time.

Jilavyan S.A., Nahapetyan S.T. *Diffraction of elastic plane shear wave in a compound half-space with mixed boundary condition* 166
The diffraction of shear plane Love's waves in compound elastic half-space is considered. Diffraction is due to mixed boundary condition. Because of diffraction in the inhomogeneous half-space, in addition to the known reflection waves, localized surface and volume waves propagate. With the help of Fourier transform, mixed boundary value problem of diffraction of elastic wave is reduced to the problem of Riemann type theory of analytic functions, for solution of which the method of factorization is used. The solution of the functional equation is obtained, and the contour integration allows obtaining the wave field distribution in each part of the elastic compound half-space.

Dudarev V.V., Mnukhin R.M., Nedin R.D. *Identification of prestressed state level in functionally graded electroelastic bodies* 171
Based on the general formulation of the problem of motion of an inhomogeneous electroelastic body with a initial stress-strain state, problems on steady-state oscillations for a thin disc and a rod with variable properties are formulated. The solutions of direct problems on determination of displacement field were realized numerically on the basis of the shooting method. The analysis of the change of main acoustic characteristics for various laws of the material properties and initial stress levels is carried out. We consider the new coefficient inverse problems on determination of the pre-stress level from the data on of the natural frequencies change. On the example of the problem for the rod, the desired relation is obtained for its solving. Numerical experiments were performed to evaluate the accuracy of the solutions constructed. Practical recommendations for the implementation of the proposed theoretical approaches to the diagnostic are given.

Zhamakochyan K.A. *Study of a problem of bending deformation of micropolar elastic thin beam. The application of the finite element method*..... 175
In the present paper, on the basis of the developed model of bending deformation of micropolar elastic thin beams with independent fields of displacement and rotation and with constrained rotation, the beam bending problem is studied, when one edge is rigidly fixed and the other one is free. A uniformly distributed normal load acts on the beam. In both formulations (with independent fields of displacement and rotation and with constrained rotation), the problem is solved theoretically, and as a result, the deflection functions of the beam are determined. Further, the finite element method is developed for the considered problems. Numerical results are given.

Zemtsova E.G., Morozov P.E., Arbenin A.Yu., Semenov B.N., Morozov N.F., Smirnov V.M. *The Process of Nanostructuring a Metallic Matrix by Disperse Phase (Tic) for Directed Regulation of Mechanical Properties* 180
In this work,we show theoretical and experimental backgrounds of the synthesis of new class of nanostructured composites based on the metallic matrix (iron, aluminum) with TiC nanofibers as a disperse phase. The combined approach is described for the production of metal-based composites. This approach includes the processes of powder metallurgy and surface structuring of the disperse phase.

Kazakov K.E., Kurdina S.P., Sahakyan A.V. *Contact between Regular System of Punches and Foundation with Multilayer Nonuniform Coating*..... 182
The paper presents the investigation of plane contact problems for a regular system of punches and an viscoelastic foundations with elastic coatings whose properties depend on the longitudinal coordinate, which may be due, among other things, to the manufacturing process. Obviously, such nununiformities can be described by both rapidly changing and discontinuous functions. Various variants of the possible statement of the problem are considered. A system of integral equations and additional conditions is obtained. It is reduced to one operator equation with a tensor kernel and two vector additional conditions in a functional vector space. The analytical solution of the problems was obtained. To this end we use generalized projection method. In the expressions for contact stresses the function associated with the nonuniformities of the layers is explicitly distinguished. This allows to make calculations for coatings with nonuniform layers described by complex functions. Expressions for other characteristics are also obtained.

Kerobyan A.V. *To the Solution of the Problem for an Elastic Strip with Finite Number Elastic Finite Overlays Through Adhesive Shear Layers* 186
In this article the problem for an elastic infinite strip which on finite intervals along of its free boundary is strengthened by arbitrary finite number of finite overlays (stringers) with different elastic characteristics and small constant thickness is observed. The contact interaction between infinite strip and overlays through adhesive shear layers with other physical - mechanical properties and geometric configuration is realized. The overlays are deformed under the action of horizontal forces. The determination problem of unknown shear stresses which are acting between infinite strip and overlays are reduced to the system of Fredholm's integral equations of second kind relative to finite number of unknown functions which specified in different finite intervals. It is shown that in the certain domain of the change of characteristic parameter of problem this system of integral equations in Banach space may be solved by the method of successive approximations. The particular cases are observed and the character and behavior of unknown shear stresses are investigated

Kyrylova Olga *The plane dynamic problem for infinity elliptical cylinder with thin rigid inclusion* 191
The problem for determining the state of stress near a tunnels thin rigid inclusion in an infinite elliptic cylinder under vibrations under conditions of plane deformation is solved. Approximate formulas for

calculating the stress intensity factors are obtained and with which the influence of the frequency of the vibrations, the location of the defect on their values and the resonant frequencies are investigated.

Kuvyrkin G.N., Savelyeva I.Y., Kuvshynnikova D.A. *Temperature distribution in a rod coated with a structurally sensitive material* 196
Improving the properties of structural and functional materials in our time is associated with synthesizing materials from structures that have limit values of properties (for example, extremely strong, refractory, thermostable, etc.). Such materials are called "Structurally sensitive" because of the heterogeneity of their structure. The heterogeneity of the structure of such materials is associated with technological peculiarities of their creation. Structurally sensitive materials can be obtained by compacting nanopowders, deposition on the substrate, crystallization of amorphous alloys and with the help of intensive plastic deformation. A promising and urgent problem is the construction of mathematical models that describe the behavior of structurally sensitive materials in a wide range of changes in external influences.
The mathematical model of heat propagation in a compound rod is considered in the paper, where on one. A protective coating of a structurally sensitive material is used from the ends. Using the method finite elements are found numerical solutions for the problem with conditions of ideal thermal contact of parts rod. The results and analysis of numerical calculations for various materials are presented

Lokoshchenko A.M., Fomin L.V., Basalov Yu.G. *Delayed fracture of a stretchable rod in a creep condition in account the diffusion and chemical interaction with aggressive medium* 201
The issue of ensuring the safe operation of materials and components of critical structures under the influence of aggressive media is considered on the basis of the formulation of the problem of the delayed fracture of a stretchable rod in the condition of diffusion and chemical interaction with an aggressive medium. To solve the problem, a mechanical-mathematical model has been developed that includes a modified diffusion equation, the kinetic equation of damage accumulation, and the ratio for the chemical interaction parameter. The parameters of this model are determined on the basis of the experimental dependence of the thickness of the corrosion film on time. The multistage process of fracture is considered, which is associated with the consequent destruction of corrosive layers and a corresponding increase in the effective stress. Time before the fracture of the rod is calculated on the basis of the criterial or kinetic approaches, which are determined depending on the competition of the process of growth of the effective stress and the process of accumulation of damages. .....

Manzhirov A.V., Kazakov K.E. *Contact Interaction between a Rough Punch and Foundation with Variable Thickness Coating* 206
Axisymmetric contact problem for a coated foundation and a rigid annular punch is considered. It is assumed that the shape of the thin upper layer (coating) and the shape of the punch surface can be described by different rapidly changing functions. We obtain basic integral equation for this problem and additional condition. The solution of the problem is obtained analytically in the form of series. To this end we use author’s projection method. It allows one to obtain the solution of the equation with high accuracy that cannot be done by known methods.

Martirosyan A.N., Dinunts A.S. *Influence of Crack Face Boundary Conditions on the Process of Factorization* 210
In present report is considered the non stationary mixed spatial problem for cracks, where is carried out a much more cumbersome procedure for factorizing a matrix of the sixth order, and is solved a system of six integral equations, and finally for the stress at the crack including near the top, are obtained and calculated triple integrals. These problems are especially important for studying the influence of crack face boundary conditions on the process of factorization.

Martirosyan S.R. *About Supersonic Localized Divergence of Wide Enough Panel with a Free Edge, Compressed in Two Directions* 214
In an article in linear statement the effect of initial stress state on the loss of static stability of the unperturbed equilibrium state compressed in two directions of wide enough rectangular plate streamlined by supersonic gas flow running on its free edge is investigated. The analytical solution of a problem of the localized divergence in the vicinity of the free edge of wide panel is received.

Mirzoyan Y.S., Mirzoyan S.Y., Davtyan Z.A. *Stress state of a decompound viscoelastic closed spherical shell with consideration of nonhomogeneous aging*..... 218
The stress-strain state of a viscoelastic closed spherical shell consisting of three separate closed spherical shells (layers) with various materials, welded on the contact surface, loaded from the inside and from the outside by uniformly distributed pressures, is researched. In the conditions of joint work between layers, only radial interaction forces arise, for the determination of which a system of linear integral Volterra equations of the second kind is obtained. After determining the unknown contact radial pressures, the stress-strain state of the viscoelastic shell is determined. In some problems the system of Volterra integral equations is reduced to a single Volterra integral equation, which is solved in a closed form.

Misharin A.S., Popov V.G. *Stress state near arbitrarily oriented cracks on the continuation of a rigid inclusion under the action of the shear harmonic forces* 221
The problem about determining of the dynamic stress intensity factors (SIF) for the cracks that are located at an angle from the ends of the inclusion is solved. The inclusion is located in an unbounded elastic body, under the conditions of deformation of the longitudinal shear, where harmonic oscillations occur due to the shear force applied to the inclusion. The initial problem is reduced to solve the system of singular integral-differential equations with fixed singularities. For the numerical solution of the system the method is developed. It takes into account the real asymptotic of the unknown functions and uses the special quadrature formulas for singular integrals.

Mkrtchyan M.H., Sahakyan A.A. *Stability of a bending oscillations of the beam under tension of the tracking force* 226
The problem of oscillations of a console beam with tracking force is modeled by replacing the distributed inertial mass with a concentrated mass and an inertial moment. The dispersion equation of the problem is obtained, the analysis of which shows that in the general case such oscillations do not affect the stability of the beam.

Murashkin E.V., Dats E.P. *Thermal stresses of elastoplastic torus* 231
The basic model relations of the theory of thermal stresses in a toroidal coordinate system are considered. The problem of the stress-strain state computation of a hollow elastoplastic torus subjected to uneven radial heating is solved. Approximate analytical solutions are obtained for the stress and displacement fields in the domains of thermoelastic deformation and plastic flow within the framework of the hypothesis of a generalized plane stress state. An estimate is made for the possibility of applying the solutions obtained for describing the stress-strain state of a torus of arbitrary dimensions under conditions of an axisymmetric thermal action.

Nesterov S.A. *Identification of inhomogeneous characteristics of prestressed thermoelastic bodies with coatings*..... 236
The dynamic inverse thermoelasticity problem for a non-uniform cylinder with a prestressed coating is considered. The inverse problem consists in determining the thermomechanical characteristics and the prestressed state of the coating of the cylinder, taking into account the presence of a discontinuity point of the first kind at the boundary of the coating and the substrate. The direct problem of thermoelasticity after applying the Laplace transform is solved by the method of alignment and inversion of solutions based on the Durbin method. To solve the inverse problem, an iterative process is constructed, at each stage of which the corrections for the reconstructed characteristics are found by solving the Fredholm integral equation of the first kind. During the computational experiments, the influence of various factors on the results of reconstruction of inhomogeneous thermomechanical characteristics was analyzed.

Oganesian E.K. *Stress state of the cylinder lie under the influence of its own weight* 241
It is intense-deformed condition of the hollow cylinder of the piece-constant radius which one end face is considered. The cylinder, which axis is perpendicularly to a gravity, is under the influence of a body weight. The problem dares a method of finite elements. Using the results

received method finite element, assimtotical by formulas it is studied behavior of pressure near to an angular circle. Schedules normal and tangent pressure in studied surfaces are resulted.

Papyan A.A., Ghazaryan R.A., Ohanyan S.K. *Floquet shear waves in functionally graded periodic media* 243
The problem of propagation of Floquet shear waves is considered in a structure consisting of periodically arranged cells of functionally graded elastic material. The problem is solved in the framework of Floquet theory by means of transfer matrix method. For special class of material homogeneity admitting the exact solution the dispersion equation is obtained determining the frequency band structure. It is shown that the inhomogeneity leads to the existence of forbidden bands of frequencies of new type.

Petukhov DS, Keller I.E. *On the Question of Reconstruction of Profiles of Residual Stresses and Plastic Deformations in a Surface-Stabilized Elastic Body by the Davidenkov Method* 248
Exact relationships between the profiles of residual stresses and plastic deformations in surface-hardened bodies with planar and cylindrical surfaces are found. These profiles are recovered from the dependence of the deflection of the strip or ring cut from the part from the thickness of the stratified layer from the hardened surface. The proposed expressions make it possible to reconstruct plastic deformations from the deflection function obtained in the laboratory and incorporate them into numerical schemes as a source of residual stresses, leaving the data for the latter for verification. The result is necessary for solving the problems of surface hardening technology of machine parts and the tasks of forecasting their resource to contact and fatigue failure.

Sanoyan Yu. G. *On Localized Bending Oscillations in a Plate-Band With a Hinge-Supported and free Edge*.....253
In the framework of the Kirchhoff theory, the problem of bending localized vibrations of a strip is solved. One edge of the strip is freely leaned, and the other is free. An analytical expression is found for calculating the critical points of the transition from localized vibrations to normal vibrations, and the forms of band vibrations of the strip are investigated. The dependence of the ratio of the propagation constant to the wave number on the strip width is obtained and studied.

Sargsyan A.M. *Elastic Equilibrium of a Circular Sector, One Side of which is Rein-Forced by Stringers, the Other Side is Contacted with a Rigid Stamp without Friction*.....258
A case when on the arc part of the contour external loads are given is considered. It is established that the problem is no disintegrated on separate independent problems, as it took place in case when both radial sides are contacted with rigid stamps without friction.

Sargsyan A.H., Sargsyan S.H. *Dynamic Model of the Micropolar Elastic Thin Plates with Constrained Rotation* 263
In this paper the general applied bending dynamic model of the isotropic micropolar elastic thin plates with constrained rotation is constructed in which transverse shear deformations are fully taken into account.

Sarkisyan N.S., Khachatryan A.M. *On two-dimensional equations of a two-layer anisotropic plate under given tangential stresses on the plane of the layer section* 268
Asimptotic method is applied and two dimention differential equations with partial derivatives from geometrically nonlinear equations of three dimention problem of elasticity theory for two-layer anisotropic plate are received. In the one surface of plate are given values of tensor of stress and in the other surface – mixed conditions of elasticity theory. On the plane of separation of layers, the laws of distribution of tangential stresses are given, in particular, the law of dry friction of Coulomb.

Sargsyan S.H. *Variation principles of the applied theory of micropolar elastic thin shells*.....273
In the present paper on the basis of the hypotheses method, that adequately replace the basic properties of the asymmetric solution of the boundary-value problem of the micropolar theory of elasticity in thin domains, variation principles of the applied theory of micropolar elastic thin shells are obtained from

the variation principles of the three-dimensional micropolar theory of elasticity. Thus, general variation principle of a stationary nature (of the Hu-Washizu's type) is obtained for the applied theory of micropolar elastic thin shells and, as particular cases, Lagrange and Castigliano's type extreme variation principles are obtained.

Saushkin M.N., Radchenko V.P., Berbasova T.I. *Modeling of the residual stresses relaxation in the flat surface hardened details under the creep conditions*..... 278
The mathematical model of the residual stresses formation in the surface-hardened prismatic specimen after hardening and the relaxation during the creep process is offered. The calculation relations which allow the estimating of kinetics of the stress-strain state of the hardened specimen under the creep conditions are received. The influence of the specimen sizes on the stress-strain state kinetics in the hardened layer caused by the creep under the pure thermoexposure conditions is researched. The experimental verification of the model for the specimen of 10×10 mm square section made of EP742 alloy using the temperature exposure for 100 hours is made. The calculated data coincide with the experimental data. The executed set of the modeling calculations has shown that the relaxation process does not depend on the specimen sizes, so both the hardened half space model and the prismatic beam model can be used for calculations. It is possible to choose the hardening technology to control the induction of the residual stress fields to create the needed stress field.

Seyranyan S.P. *On one Infinite System of Linear Algebraic Equations in the First Boundary Plane Problem of the Theory of Elasticity for the Rectangle* 283
The first boundary plane problem of the theory of elasticity for a rectangle is considered. It is noted that earlier this problem under arbitrary boundary conditions by an exact analytic transformation by the future academician of the NAS RA, B.L Abrahamyan has been phenomenally reduced to four pairs of independent infinite systems of linear algebraic equations of simplified form. However, in conclusion, the highly respected B.L Abrahamyan, when analyzing pairs of infinite systems for their belonging to the class of completely regular ones, uses the numerical analysis of O.O. Pirumyan, who, as our analytical studies showed, as well as numerical results using MATHEMATICA, for one pair of systems, which corresponds to symmetric boundary conditions with respect to both axes of symmetry of the rectangle, turned out to be erroneous. In the paper presented, mathematical analysis provides a mathematically rigorous proof of the belonging of the last named pair system to the class of completely regular ones. Thus, the solution of the first boundary plane problem of the theory of elasticity for a rectangle is completed for the symmetric boundary conditions with respect to both axes of symmetry of the rectangle.

Semenov B.N. *Models of Mechanical Characteristics of «(Nano)Metal-Graphene» Nanocomposites* 288
To evaluate the effect of graphene inclusions on deformation characteristics of nanocomposite "metal-graphene" the finite element analysis of representative volume deformation followed by homogenization of the mechanical properties deformation is performed and the dependence of effective modules and plastic flow on the concentration of graphene inclusions is studied. It is shown that the influence of inclusions on the modulus of elasticity and plasticity limit of the nanocomposite is not significant. Graphene inclusions effect on strength and fracture toughness of the composite "(nano) metal-graphene". The results of finite-element simulations indicate that in the nanocomposite a decrease in stress concentration in the vicinity of the crack tip is observed when approaching to the graphene inclusion enable.

Stadnik N.E. *A mathematical model of the arterial wall growth under conditions of developing atherosclerosis*..... 293
The present study is devoted to the problems of mathematical modeling of the processes of blood vessels wall growth suggested to atherosclerosis. The vascular wall is modeled by an elastic thick-walled circular cylinder. The boundary value problem of the surface growth of an elastic thick-walled cylinder is considered. The peculiarities of the evolution of a stress-strain state are revealed depending on the mechanical parameters of the real biological processes.

Tagvoryan V.V. *On One Three-Dimensional Dynamic Problem of the Elasticity Theory for Earthquake Modeling*.....296
The spatial dynamic problem of the theory of elasticity for a layered packet of N orthotropic plates, simulating the behavior of the Lithospheric plates of the Earth and individual blocks of the earth's crust during earthquakes is considered. The case, when the measuring devices used to obtain the values of the displacement vector components are placed on the contact surface between the second and third layers is studied. The asymptotic solutions of the spatial problem of elasticity theory according to the date of the measuring devices, which permit us to follow the process of an earthquake are found. An asymptotic solution of the inner problem is found. The case when the solution becomes mathematically exact is stressed. An illustrative example is given.

Khachatryan M.V. *Development of the Finite Element Method for the Boundary Value Problems of a Micropolar Elastic Thin Beam with a Circular Axis*.....301
Mathematical model of deformation of micropolar elastic thin beams with a circular axis with independent fields of displacement and rotations is constructed. In the present paper on the basis of this model concrete bending problems of beam with a circular axis are studied, when one of the edges of the beam is rigidly fixed and the other one is free: a)-evenly distributed normal load is applied on the beam, b)-the vertical concentrated power is applied on the free edge of the beam. Numerical finite element method is developed for solving these concrete problems. Stiffness matrix and vector of equivalent external forces of nodal powers and moments are obtained. The analysis is given on the basis of the obtained numerical results.

Shahinyan S.G., Avetisyan L.M. *On a problem of optimal stabilization of a rotational motion of a rigid body with a fixed point*.....306
The paper deals with the problems of stability and optimal stabilization of the rotational motion of rigid body around a fixed point in the case of Sofya Kovalevskaya.
It is shown that the body allows rotation around the main central axis of symmetry of the body with a constant angular velocity. Assuming that this motion is unperturbed, a system of differential equations of the perturbed motion is constructed and it is shown that the motion under consideration is unstable. The control actions are introduced along the directions of the corresponding generalized coordinates, and the complete controllability of the linear approximation of the control system obtained is verified. The problem of optimal stabilization of the motion under consideration has been formulated and solved. An optimal Lyapunov function is constructed, optimal control actions, optimal motion equations and minimum values of functionals that depend on the angular velocity of the unperturbed motion of the body are obtained. For different values of the angular velocity of unperturbed motion, graphs of optimal control actions and optimal motions are constructed.

Shekoyan A.V. *An Ultrasonic Wave In A Strongly Nonequilibriummedium With Point Defects*.....311
The propagation of ultrasonic wave in the medium with numerous point defects is investigated. This medium is considered as an opened system i.e. strongly non equilibrium process which as a synergetic, is studied by nonlinear kinetic equations. Moreover, the equation describing the ultrasonic wave is taken nonlinear. The nonlinear evolution equation is introduced and is investigated for the case when diffusion is small. It is shown that this function has a gap and has got a nonlinear resonance. The absorption coefficient of ultrasonic wave has been introduced and it is shown that the nonlinearity does not lead to a nonlinear frequency increment. The Schrödinger equation is derived. The formula of intensity for ultrasonic wave is given. It is shown when it would be possible to observe the nonlinear resonance.

Shekyan H.G., Gevorgyan A.V., Avetisyan R.A. *On the Asymptotic stability of a rotating rotor on nonlinear supports*.....314
Based the theorems of Lyapunov and Barbashin–Krasovskii on the stability of motion we prove the asymptotic stability of a rotating rotor on nonlinear colors. Using the Lyapunov function for a given system, the region of unstable rotating of the rotor for an arbitrary perturbation is estimated. It is shown that the equilibrium of the rotor–nonlinear power system.

Aghalovyan Lenser *On a More Powerful than in Newton Central Interaction of Bodies and the Problem OF A Black Hole*..... 317
Demonstrated such a central interaction of bodies which at short distances is more powerful than Newtonian interaction. Bodies' new central interaction which is potential with more powerful than Newtonian one's potential is described. It is shown that under such interaction the Second cosmic (escape) velocity is essentially more than the Second cosmic (escape) velocity by Newton theory. The connection of the new central interaction with the gravitational radius of the Black Hole is found. It is shown that the gravitational radius of the Black Hole may be arbitrarily big. All the Black Holes differ from each other with the gravitation center intensity index.

Avetisyan A.S., Khachatryan V.M., Kamalyan A.A. *Joint Propagation of Elastic Shear and Plane Deformation Electroacoustic Waves in Periodically-Inhomogeneous Piezoelectric Waveguide* 321
In some piezoelectric crystals, the anisotropy of the material allows the separated distribution of elastic ***SH*** electro-active wave signal. In addition, for some piezoelectric crystals, the anisotropy of the material allows the separated propagation of the electro-active wave signal of ***PV*** plane deformation. During the propagation, the electro-elastic wave signal transforms and passes from one band to the other by penetrating through the vacuum gap by means of the accompanying electrical oscillations. It is possible if the adjacent piezoelectric bands have a non-acoustic contact. In the case of a high-frequency electro-elastic wave signal (short waves, when $^{a}(\mu) \ll h$), in piezoelectric rectangles the shapes of the electro-elastic surface waves of Gulyaev-Bleustain and Rayleigh are formed. In fact, in alternating layers of the composite waveguide, heterogeneous wave fields are formed, that carry different "information". In the high-frequency mode, the wave energy is localized at the edges of the interlayers. The determination of the bands of permissible frequencies is made, taking into account the longitudinal periodicity of the modeled inhomogeneous waveguide. We use the Floquet-Lyapunov theory for periodic structures. From the filtering equation for different combinations of selected pairs of piezoelectric materials the zones of admissible frequencies for localized and non-localized electro-elastic waves propagating along the composite waveguide are determined. Based on this an electromechanical resonator of certain type can be created. The equation of frequency filtering also gives forbidden frequency bands on which the composite waveguide of certain piezoelectric materials and linear dimensions does not allow the propagation of localized electro-elastic waves or any propagation of waves in general.

Gevorgyan G.Z., Kirakosyan R.M. *On the Bending Vibrations of Orthotropic Elastic Fastening Plates-Banks and Beems with Regard to the Transverse Shift and Change of Temperature*..... 326
The problem of bending vibrations of orthotropic elastic fastening strips and beams of variable thickness is considered taking into account the transverse shear and temperature changes. The equations obtained make it possible to determine the frequencies of the natural oscillations as a function of the axial force due to the change in temperature. The problems are solved by the collocation method for various values of the geometric and physical parameters.

Ghazaryan K.B., Mozharovsky V.V., Papyan A.A., Sarkisyan S.V. *Piezoelectric Shear Surface Waves Near an Imperfectly Bonded Interface Between Layer and Half-Space* 331
The paper focuses on shear surface wave propagation in layered piezoceramic media (layer and half-space) with imperfect interface. The bonding along interface is considered to be imperfect with the assumption that the imperfect interface is dielectrically weakly conducting one. Dispersion equation was derived analytically. The influence of imperfect interface on surface wave phase speed and some interesting phenomena were discussed.

Grigoryan M.S., Hovhannisyan E.K., Mkhitaryan S.M. *On a Class of Boundary-Value Problems on Interaction of Stringers and Stamps with Massive Elastic Bodies* *336*
This paper considers a class of mixed boundary-value problems of the mathematical theory of elasticity, which is related to the interaction of stringers and stamps with massive bodies in the form of an elastic half-plane and a quarter-plane.

Hayroyan S.H., Karapetyan K.A., Hayroyan H. S. *Short Paced Vibration Creeping Of A Clayish Ground During The Landslide* 341
The sliding stresses of the slope ground being under static condition as usual are less than the sliding standard resistance. The main task is the determination of slope stability under static stresses, when at the same time additional forces acting on the slope with different dynamic (seismic) vibration [1,2] . In this kind of condition (except of investigation of slope composing soils' sliding resistance) it's important also investigation of a creeping process under the impact of vibration forces

Kanetsyan E.G., Mkrtchyan M.S., Mkhitaryan S.M. *On an Approach to the Problem of the Stress State of Piecewise-Homogeneous Elastic Bodies with Cracks*.....345
A new approach to the stress state problems of piecewise-homogeneous elastic bodies with cracks on the joint line of dissimilar materials whose characteristics possess oscillatory properties is proposed.

Khachatryan V.M., Avetisyan A.S. *Propagation of an Electroelastic Shear Wave Signal in a Cellular Composite Piezocrystalline Layer* 350
Possible variants of the shaping and propagation of the modes of the electroelastic shear wave in a cellular composite three-layer waveguide with canonical rectangular cells from various piezoelectric materials of class 6mm of hexagonal symmetry are discussed. The dispersion equations of shape formation in periodic composite interlayers are investigated along the thickness of the waveguide. It is shown that by the appropriate choice of material triplets in vertical interlayers of the periodic structure, it is possible to achieve different schemes of wave formation (waveforms of the Love type or waves of the Gulyaev-Bleustein type) along the thickness of the composite waveguide. The character of the localization of the energy of the electroelastic shear wave at the boundaries of contiguous cells is described by the moduli of physical constants of materials and the ratio of the length of the formed wave to the thicknesses of the composite layers. Dispersion equations of frequency filtration are obtained and investigated during the propagation of formed wave forms along the inhomogeneous waveguide. It is shown that a proper selection of pairs of materials in adjacent interlayers of the periodic structure results in a three-channel waveguide with different frequency ranges. The phonon structure of the composite layers of the waveguide leads to different frequency transmission bands forming a filter along separate layers.
Long-wave (low-frequency) and short-wave (high-frequency) approximations of dispersion equations are investigated.

Khurshudyan As. Zh. *Recent Developments in Controllability Analysis of Dynamic Systems: the Green's Function Approach– I. Derivation of Resolving Systems*.....355
We present a two-part thematic review, devoted to the theory and applications of the Green's function approach. In the first part we review the Green's function approach for linear and nonlinear dynamic systems, i.e., systems whose dynamics is described by linear or nonlinear state constraints (governing equations, initial and/or boundary conditions, other possible constraints). We begin with a short introduction into exact and approximate controllability theory and describe the two main approaches usually used to establish whether a particular system is exact or approximate controllable or not. Further, we describe the Green's function approach and the ways of how resolving constraints on the control function can be derived.

Khurshudyan AS. ZH. *Recent Developments in Controllability Analysis of Dynamic Systems: the Green's Function Approach– II. Heuristic Determination of Controls*.....360
In the second part of our review, we describe a heuristic method for explicit determination of resolving controls providing exact or approximate controllability for systems with linear and nonlinear constraints. We also provide specific example illustrating how it is applied in the analysis of specific problems.

Manzhirov Alexander V. *Mechanics of Additive Manufacturing and Surface Growth Processes*....365
Additive manufacturing technologies is a special case of growth processes. Mathematical modeling of additive manufacturing technologies is aimed at improving the performance of device, machine, and mechanism parts. The fundamentally new mathematical models considered in the paper describe the

evolution of the final product stress-strain state in additive manufacturing and are of general interest for modern technologies in engineering, medicine, electronics industry, aerospace industry, and other fields

Piliposyan D. *Control Of Defect Modes For Shear Waves In Multilayered Piezoelectric Structures With Electrically Shorted Interfaces* 369
Properties of shear waves in a piezoelectric stratified periodic structure with electrically shorted interfaces and a defect layer are studied. Due to the electro-mechanical coupling in piezoelectric materials the structure exhibits defect modes in the structure with full transmission peaks. The results show an existence of one or two transmission peaks depending on the material properties .

Shahinyan A.S. *An Optimal Control Problem with Energy Constraint for an Unmanned Aerial Vehicle* 374
In this paper we consider a quadrotor Unmanned Aerial Vehicle (UAV). Dynamics of the UAV are written using pure theoretical modelling. The state space model is given which includes some parameters. An Optimal Control problem is stated and solved for the linearized model. A numerical example is also given by presenting optimal control inputs calculated analytically and optimal trajectories of the motion. All calculations are done using MATLAB R2017a.

Tero Frondelius, Terhi Kaarakka, Reijo Kouhia, Heikki Orelma, Joona Vaara *Evolution Equation Based Continuum Approach for Fatigue* 379
Mechanical fatigue phenomena occurs when a material is subjected to repeated application of stresses or strains which produces changes in the material microstructure, initiation, growth and coalescence of microdefects, thus degrading the material properties. In this paper we review shortly the continuum approach and its recent extensions.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Аветисян В.В. Синтез оптимального управления электромеханической системой..... 5
Агабекян П.В. Контактная задача для полубесконечной пластины, усиленной тремя полубесконечными стрингерами 9
Агаловян Л.А., Гулгазарян Л.Г. Вынужденные колебания двухслойной оболочки при наличии вязкого сопротивления в обоих слоях 14
Агаян К.Л. Плоская сдвиговая волна в слое с неоднородными граничными условиями19
Агаян К.Л., Атоян Л.А., Саакян С.Л. Упруго-спиновые волны в периодической конструкции типа магнит-немагнит 24
Акопян В.Н., Даштоян Л.Л., Мурашкин Е.В. Осесимметричное напряжённое состояние кусочно-однородного, слоистого пространства с периодическими внутренними дискообразными трещинами 29
Акопян В.Н., Амирджанян А.А., Саакян А.В. Напряжённое состояние составной плоскости с продолжающими друг друга межфазными абсолютно жёстким включением и трещиной 34
Амирбекян А.Н., Мкртчян М.М., Шекян Л.А. Изгиб двух одинаковых балок на упругой шероховатой полосе с учётом сжимающих или растягивающих осевых сил... 39
Амирджанян А.А., Акопян Л.В. Антиплоская динамическая контактная задача для составного полупространства с межфазной трещиной 44
Арутюнян А.Р., Арутюнян Р.А. Усталость композиционных материалов 49
Арутюнян А.Р., Арутюнян Р.А. Саитова Р.Р. О взаимосвязи высокотемпературной ползучести и повреждённости металлических материалов 54
Арутюнян Л.А., Едоян В.А. Плоская задача составной плоскости, содержащей отверстие 59
Багдасарян Г.Е., Микилян М.А., Варданян И.А. Нелинейный флаттер цилиндрической панели, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа 63
Багдасарян Г.Е., Микилян М.А., Варданян И.А. Флаттер замкнутой цилиндрической оболочки в присутствии неоднородного температурного поля 68
Барсегян В.Р. Об одной задаче управления для поэтапно меняющихся линейных систем нагружённых дифференциальных уравнений с неразделёнными многоточечными промежуточными условиями 73
Белубекян В.М., Белубекян М.В., Берберян А.Х. Локализация упругих сдвиговых волн в окрестности стыка плоских волноводов 76
Белубекян М.В., Гараков В.Г. Отражение электромагнитных и упругих волн от границы пьезоэлектрического полупространства, граничащего с вакуумом 80
Бобылев Д.Е. Использование алгоритма регуляризации при реализации метода граничных элементов для расчёта НДС многосвязных областей 84
Бырдин В. М. Кресты, извилины и петли трансцендентных функций и кривых & Сингулярный анзац, дисперсия обратных волн и ZGV-проблема, «нулей-групповой-скорости»..... 87
Бырдин В. М., Косарев О. И., Мамонова М. Г., Пузакина А. К. Об обратноволновой дифракции гауссова пучка & Расхождение лучей и диаграмма направленности; разноимённая антидифракция, биинверсия и фокусировка 92
Василян Н.Г. Изгиб прямоугольной изотропной пластины с распределёнными по кромке моментами 97
Ватульян А.О., Недин Р.Д. Колебания неоднородной пластины с функционально-градиентным покрытием в условиях предварительно напряжённого состояния 102
Ватульян А.О., Плотников Д.К. Индентирование функционально-градиентных покрытий 106

Галанин М.П., Лукин В.В., Родин А.С. Применение метода Шварца для решения задачи контактного взаимодействия тел в тепловыделяющем элементе в термоупругой постановке 110
Галичян Т.А., Унанян А.А. Распространение связанных магнетоупругой и электроупругой волн антиплоской деформации в композитном периодически неоднородном волноводе 115
Гачкевич А.Р., Ивасько Р.А., Кушнир Р.М., Казарян К.Б. Физико-механические поля в ферритовых телах при воздействии квазиустановившихся электромагнитных полей 120
Геворкян Г.А. Анализ особенностей вблизи центра разнородной сотовой ячейки при антиплоской деформации в свете МКЭ 124
Горячева И.Г., Яковенко А.А. Задачи механики контактных взаимодействий при разработке зажимных медицинских инструментов 128
Григорьева П.М., Вильчевская Е.Н. Выбор модели диффузии и его влияние на кинетику химической реакции 133
Гукасян А.А. Некоторые модели многозвенных манипуляторов и методы исследования управляемых движений 138
Гукасян А.А., Ордян А.Я. Об оптимизации процесса обслуживания манипулятором технологического участка 143
Гулгазарян Г.Р., Гулгазарян Л.Г. О дисперсионных уравнениях ортотропной цилиндрической панели со свободными краями 148
Давтян З.А., Мирзоян С.Е., Гаспарян А.В. О напряжённом состоянии многослойного вязкоупругого композита при антиплоской деформации 153
Демидов А.В., Попов В.Г. Нестационарная задача кручения для конечного цилиндра с внешней кольцевой трещиной 158
Джан Ц., Зимин В.Н., Крылов А.В., Чурилин С.А. Расчёт раскрытия трансформируемой космической конструкции 163
Джилавян С.А., Наапетян С.Т. Дифракция плоской упругой волны сдвига в составном полупространстве со смешанным граничным условием 166
Дударев В.В., Мнухин Р.М., Недин Р.Д. Идентификация уровня предварительного напряжённого состояния в функционально-градиентных электроупругих телах 171
Жамакочян К.А. Изучение одной задачи изгибной деформации микрополярной упругой тонкой балки. Применение метода конечных элементов 175
Земцова Е.Г., Морозов П.Е., Арбенин А.Ю., Семёнов Б.Н., Морозов Н.Ф., Смирнов В.М. Процесс наноструктурирования металлической матрицы дисперсной фазой (TiC) для направленного регулирования механических свойств 180
Казаков К.Е., Курдина С.П., Саакян А.В. О контакте регулярной системы штампов и основания с многослойным неоднородным покрытием 182
Керопян А.В. К решению задачи для упругой полосы с конечным числом упругих конечных накладок посредством липких сдвиговых слоёв 186
Кириллова О.И. Плоская динамическая задача для бесконечного эллиптического цилиндра с тонким жёстким включением 191
Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю., Кувшинникова Д.А. Распределение температуры в стержне с покрытием из структурно-чувствительного материала 196
Локощенко А.М., Фомин Л.В., Басалов Ю.Г. Длительное разрушение растягиваемого стержня в условии ползучести с учётом диффузии и химического взаимодействия с агрессивной средой 201
Манжиров А.В., Казаков К.Е. О контакте кольцевого шероховатого штампа и основания с покрытием переменной толщины 206

Мартиросян А.Н., Динунц А.С. Влияние граничных условий на берегах трещины на процесс факторизации 210
Мартиросян С.Р. О сверхзвуковой локализованной дивергенции достаточно широкой панели со свободным краем, сжатой по двум направлениям 214
Мирзоян Е.С., Мирзоян С.Е., Давтян З.А. Напряжённое состояние составной замкнутой сферической вязкоупругой оболочки с учётом неоднородного старения 218
Мишарин А.С., Попов В.Г. Напряжённое состояние возле произвольно ориентированных трещин на продолжении жёсткого включения при действии сдвигающей гармонической силы 221
Мкртчян М.Г., Саакян А.А. Устойчивость изгибных колебаний балки при растяжении следящей нагрузкой 226
Мурашкин Е.В., Дац Е.П. Температурные напряжения упругопластического тора . 231
Нестеров С.А. Идентификация неоднородных характеристик преднапряжённых термоупругих тел с покрытиями 236
Оганесян Э.К. Действие собственного веса на напряжённо-деформированное состояние полого цилиндра 241
Папян А.А., Казарян Р.А., Оганян С.К. Сдвиговые волны Флока в функционально градуированных периодических средах 243
Петухов Д.С., Келлер И.Э. К вопросу о реконструкции профилей остаточных напряжений и пластических деформаций в поверхностно-упрочнённом упругом теле методом Давиденкова 248
Саноян Ю.Г. О локализованных изгибных колебаниях в пластине-полосе со свободно опёртым и свободным краями 253
Саргсян А.М. Упругое равновесие кругового сектора, усиленного стрингером и соприкасающегося с жёстким штампом без трения 258
Саркисян А.А., Саркисян С.О. Модель динамики микрополярных упругих тонких пластин со стеснённым вращением 263
Саркисян Н.С., Хачатрян А.М. О двумерных уравнениях двухслойной анизотропной пластинки при заданных тангенциальных напряжениях на плоскости раздела слоёв.. 268
Саркисян С.О. Вариационные принципы прикладной теории микрополярных упругих тонких оболочек 273
Саушкин М.Н., Радченко В.П., Бербасова Т.И. Моделирование процесса релаксации остаточных напряжений в плоских поверхностно упрочнённых деталях в условиях ползучести 278
Сейранян С.П. Об одной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений в первой краевой плоской задаче теории упругости для прямоугольника 283
Семёнов Б.Н. Моделирование механических характеристик нанокомпозитов металл-графен 288
Стадник Н.Э. Математическая модель роста сосудистой стенки артерии в условиях развивающегося атеросклероза 293
Тагворян В.В. Об одной трёхмерной динамической задаче теории упругости по моделированию землетрясений 296
Хачатрян М.В. Развитие метода конечных элементов для краевых задач микрополярного упругого тонкого стержня с круговой осью 301
Шагинян С.Г., Аветисян Л.М. Об одной задаче оптимальной стабилизации вращательного движения твёрдого тела, имеющего неподвижную точку 306
Шекоян А.В. Ультразвуковая волна в сильно неравновесной среде с точечными дефектами 311
Шекян Г.Г., Геворгян А.В., Аветисян Р.А. Об асимптотической устойчивости ротора, вращающегося на нелинейных опорах 314

Aghalovyan Lenser On a More Powerful than in Newton Central Interaction of Bodies and the Problem of a Black Hole 317
Avetisyan A.S., Khachatryan V.M., Kamalyan A.A. Joint Propagation of Elastic Shear and Plane Deformation Electroacoustic Waves in Periodically-Inhomogeneous Piezoelectric Waveguide..... 321
Gevorgyan G.Z, Kirakosyan R.M. On the Bending Vibrations of Orthotropic Elastic Fastening Plates-Banks and Beems with Regard to the Transverse Shift and Change of Temperature 326
Ghazaryan K.B., Mozharovsky V.V., Papyan A.A., Sarkisyan S.V. Piezoelectric Shear Surface Waves Near an Imperfectly Bonded Interface Between Layer and Half-Space..... 331
Grigoryan M.S., Hovhannisyan E.K., Mkhitaryan S.M. On a Class of Boundary-Value Problems on Interaction of Stringers and Stamps with Massive Elastic Bodies..... 336
Hayroyan S.H., Karapetyan K.A., Hayroyan H. S. Short Paced Vibration Creeping Of A Clayish Ground During The Landslide 341
Kanetsyan E.G., Mkrtchyan M.S., Mkhitaryan S.M. On an Approach to the Problem of the Stress State of Piecewise-Homogeneous Elastic Bodies with Cracks 345
Khachatryan V.M., Avetisyan A.S. Propagation of an Electroelastic Shear Wave Signal in a Cellular Composite Piezocrystalline Layer..... 350
Khurshudyan As. Zh. Recent Developments in Controllability Analysis of Dynamic Systems: the Green's function Approach– I. Derivation of Resolving Systems 355
Khurshudyan AS. ZH. Recent Developments in Controllability Analysis of Dynamic Systems: the Green's Function Approach– II. Heuristic Determination of Controls 360
Manzhirov Alexander V. Mechanics of Additive Manufacturing and Surface Growth Processes 365
Piliposyan D. Control Of Defect Modes For Shear Waves In Multilayered Piezoelectric Structures With Electrically Shorted Interfaces 369
Shahinyan A.S. An Optimal Control Problem with Energy Constraint for an Unmanned Aerial Vehicle 374
Tero Frondelius, Terhi Kaarakka, Reijo Kouhia, Heikki Orelma, Joona Vaara Evolution Equation Based Continuum Approach for Fatigue 379
CONTENTS AND ABSTRACTS 383