НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ

# АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Материалы VI международной конференции
01-06 октября 2019, Дилижан, Армения

ЕРЕВАН – 2019

**Институт механики НАН РА**
**Институт проблем механики им. А.Ю.Ишлинского РАН**
**Национальный комитет по теоретической и прикладной механике Армении**
**Российский национальный комитет по теоретической и прикладной механике**
**Национальный университет архитектуры и строительства Армении**
**Ереванский государственный университет**

Председатель оргкомитета: д.ф.-м.н. В.Н. Акопян (Армения)

Зам. председателя: д.ф.-м.н. А.В.Саакян (Армения), д.ф.-м.н. М.А.Сумбатян (Россия)

Ученые секретари: к.ф.-м.н. Л.Л.Даштоян (Армения), к.ф.-м.н. Е.В.Мурашкин (Россия)



Ответственный редактор: д.ф.-м.н. В.Н.Акопян

Технический редактор: к.ф.-м.н. Г.З.Геворкян

Редактор: Ж.А.Авдалян

В сборник включены доклады, представленные на VI-ую международную конференцию «Актуальные проблемы механики сплошной среды».

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

# ՀՈԾ ՄԻՋԱՎԱՅՐԻ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԱՐԴԻ ՊՐՈԲԼԵՄՆԵՐԸ

VI միջազգային գիտաժողովի նյութեր
01-06 հոկտեմբերի 2019թ., Դիլիջան, Հայաստան

ԵՐԵՎԱՆ – 2019

NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
INSTITUTE OF MECHANICS

# TOPICAL PROBLEMS OF CONTINUUM MECHANICS

Proceedings of VI International Conference
01-06 October 2019, Dilijan, Armenia

YEREVAN – 2019

# ПЛОСКОЕ ЭЛЕКТРОАКТИВНОЕ НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ В ОДНОРОДНЫХ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КРИСТАЛЛАХ

**Аветисян А.С.**

Рассматривается вопрос о возможности возбуждения и распространения электроупругого плоского напряжённо-деформированного состояния в однородных пьезоэлектрических кристаллах.

Выведены необходимые и достаточные условия, позволяющие уточнить формулировки задач об электроупругих напряжённо-деформированных состояний, обусловленные анизотропией твёрдых электроактивных сред. Определены текстуры пьезокристаллических диэлектриков, структуры тензоров электроупругости которых позволяют разделение плоского напряжённо-деформированного электроактивного состояния от неэлектроактивного антиплоского упругого состояния. Получены уточнённые материальные соотношения и квазистатические уравнения электроупругости для всех пьезоэлектрических сред во всех трёх сагиттальных плоскостях кристаллических структур. Проведён сравнительный анализ полученных соотношений плоского напряжённо-деформированного состояния с соответствующими соотношениями электроактивного состояния плоской деформации.

**Введение.** Вопрос возможного разделения плоской электроактивной волны деформаций от чисто сдвиговой упругой (неэлектро активной) волны в однородных пьезоэлектрических средах, в зависимости от анизотропии физических свойств материала, исследован в статье [1]. Там же исследован вопрос возможного разделения волны антиплоской электроактивной деформации от волны чисто упругой плоской деформации. Результаты этих исследований приведены также в монографии [2].

Однако, в этих исследованиях не обсуждается проблема возникновения неплоского напряжённого состояния и осевой диэлектрической поляризации в случае разделения деформационных полей. Возникновения третьего осевого напряжения и третьей компоненты вектора электрического смещения в обоих случаях явно могут нарушать картину плоскостных изменений параметров разделённых волновых полей.

Новые требования для разделения напряжённо-деформированных электроупругих состояний, естественно, уменьшают возможность одновременного возбуждения и распространения чисто плоского или чисто антиплоского напряжённо-деформированных состояний в кусочно-однородных пьезоэлектрических композитах. Этот вопрос актуален тем, что часто в современной электронной технике возникает техническая необходимость: возбуждая электроактивную волну антиплоской деформации в составном волноводе, получить у приёмника электроактивную волну плоской деформации (или наоборот).

В работе [3] показано, что эту проблему можно решить в слоистых, кусочно-однородных волноводах путём выбора находящихся между собой в состоянии неакустического контакта слоёв из разных пьезоэлектрических материалов.

## 1. Постановка задачи. Раздельное возбуждение и распространение плоского или антиплоского напряжённо-деформированных состояний в однородных пьезоэлектрических средах

В линейной теории электроупругости однородных пьезоэлектрических сред пользуемся полной системой квазистатических уравнений:

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}=\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2},\quad \frac{\partial D_n}{\partial x_n}=0 \quad \text{с учётом} \quad E_n=-\frac{\partial\varphi}{\partial x_n} \tag{1.1}$$

и линейными материальными соотношениями

$$\sigma_{ij}=c_{(ij)(nk)}\frac{\partial u_n}{\partial x_k}+e_{m(ij)}\frac{\partial\varphi}{\partial x_m},\quad D_m=e_{m(nk)}\frac{\partial u_n}{\partial x_k}-\varepsilon_{mk}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}, \tag{1.2}$$

где механическое и электрическое поля взаимосвязаны тензором пьезоэлектрических коэффициентов $(\hat{e}_{j(mn)})$.

Описывающие свойства однородного пьезодиэлектрического материала физико-механические постоянные: упругие жёсткости $c_{(ij)(nm)}$, пьезоэлектрические коэффициенты $e_{j(mn)}$ и коэффициенты диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{ik}$, образуют общий тензор линейной электроупругости пьезоэлектрических материалов типа $\left(\hat{\gamma}_{jn}\right)_{9\times9}=\left(\hat{c}_{ij}\right)_{6\times6}\cup\left(\hat{e}_{mn}\right)_{3\times6}\cup\left(\hat{\varepsilon}_{ik}\right)_{3\times3}$ .

Следовательно, в задаче раздельного возбуждения и распространения плоского или антиплоского напряжённо-деформированных состояний в однородной пьезоэлектрической среде с данной анизотропией, наряду с условиями на структуру тензора упругих жёсткостей материала $\left(\hat{c}_{ij}\right)_{6\times6}$, аналогические условия также могут быть наложены на соответствующие структуры тензоров пьезоэлектрических коэффициентов $\left(\hat{e}_{nj}\right)$ и коэффициентов диэлектрической проницаемости $\left(\hat{\varepsilon}_{ik}\right)_{3\times3}$.

Для удобства, в уравнениях электроупругости (1.1), в материальных соотношениях (1.2) и в дальнейшем используются обозначения известных переходов от четырёхзначных индексов на двухзначные индексы $(\alpha\gamma)\rightleftarrows\alpha$ *if* $\alpha=\gamma$ и $(\alpha\gamma)\rightleftarrows 9-\alpha-\gamma$ *if* $\alpha\neq\gamma$. Предполагается также, что обозначенные греческими буквами индексы $\{\alpha;\beta;\gamma\}\in\{1;2;3\}$, $\alpha\neq\beta$, $\beta\neq\gamma$ и $\gamma\neq\alpha$ – немые, и суммирование по ним не проводится.

В научной литературе общий тензор линейной электроупругости пьезоэлектрических материалов, а также материальные соотношения и основные уравнения приводятся, следуя правилам установки кристаллов по сингониям и по правилам выбора кристаллографических осей в них [4].

Не нарушая общности, задача формулируется в базовой плоскости (в одной из сагиттальных плоскостей) $x_\alpha 0 x_\beta$, где все компоненты электроупругого поля $\{u_\alpha(x_\alpha,x_\beta,t);\ u_\beta(x_\alpha,x_\beta,t);\ u_\gamma(x_\alpha,x_\beta,t);\ \varphi(x_\alpha,x_\beta,t)\}$ зависят от координат $x_\alpha$ и $x_\beta$, а изменения по базовой (третьей) координате отсутствуют $\partial[\wp]/\partial x_\gamma\equiv 0$. Необходимо заметить, что в квазистатической задаче электроупругости, двумерное электрическое поле – потенциальное и плоское

$$E_\alpha(x_\alpha,x_\beta,t)=-\partial\varphi(x_\alpha,x_\beta,t)/\partial x_\alpha;\qquad E_\beta(x_\alpha,x_\beta,t)=-\partial\varphi(x_\alpha,x_\beta,t)/\partial x_\beta. \tag{1.3}$$

Естественно, также заметить, что в случае возможного раздельного возбуждения и распространения упругих волн в электроупругой среде, только одна из разделённых волн упругой деформации будет электроактивной. В основных соотношениях (1.1) и (1.2) потенциал электрического поля $\varphi(x_\alpha,x_\beta,t)$ может присутствовать или только в группе волновых компонент, характеризующей электроактивное состояние антиплоской деформации $\{0;\ 0;\ u_\gamma(x_\alpha,x_\beta,t);\ \varphi(x_\alpha,x_\beta,t)\}$ или только в группе волновых компонент, характеризующей состояние электроактивной плоской деформации $\{u_\alpha(x_\alpha,x_\beta,t);\ u_\beta(x_\alpha,x_\beta,t);\ 0;\ \varphi(x_\alpha,x_\beta,t)\}$.

В обоих случаях разделённая от данной электроупругой волны группа волновых компонент уже будет характеризовать не электроактивное состояние деформации.

В статье [1] показано, что разделение электроактивных волн плоской и антиплоской упругой деформации в выбранной координатной плоскости $x_\alpha 0 x_\beta$ анизотропных однородных пьезоэлектриков обеспечивается отсутствием соответствующих постоянных в структуре тензора упругих жёсткостей

$$c_{\alpha(\gamma\alpha)}=c_{\alpha(\beta\gamma)}=c_{\beta(\beta\gamma)}=c_{\beta(\gamma\alpha)}=c_{(\alpha\beta)(\gamma\alpha)}=c_{(\alpha\beta)(\beta\gamma)}\equiv 0. \tag{1.4}$$

В статье также показывается, что наряду с условиями (1.4), разделение волны электроактивной плоской деформации от неэлектроактивной волны антиплоской деформации возможно в случае выполнения условий:

$$e_{\alpha(\gamma\alpha)}=e_{\alpha(\gamma\beta)}=e_{\beta(\gamma\alpha)}=e_{\beta(\gamma\beta)}\equiv 0 \tag{1.5}$$

в тензоре пьезоэлектрических коэффициентов. Разделение же волны электроактивной антиплоской деформации от неэлектроактивной волны плоской деформации возможно, когда наряду с условиями (1.4) в тензоре пьезоэлектрических коэффициентов материала выполняются условия:

$$e_{\alpha\alpha}=e_{\alpha\beta}=e_{\alpha(\alpha\beta)}=e_{\beta\alpha}=e_{\beta\beta}=e_{\beta(\beta\alpha)}\equiv 0. \tag{1.6}$$

Во всех пьезокристаллах, где поля деформаций разделяются, тензоры коэффициентов диэлектрической проницаемости $\left(\hat{\varepsilon}_{ik}\right)_{3\times3}$ – диагональные. Поэтому, в обоих случаях разделения электроактивных волн деформации, условия на отсутствия компонент тензора коэффициентов диэлектрической проницаемости не налагаются.

**2. Плоское электроактивное напряжённо-деформированное состояние в однородных пьезоэлектрических текстурах**

Основные соотношения электроактивной плоской деформации общего вида $\{u_\alpha(x_\alpha,x_\beta,t);\ u_\beta(x_\alpha,x_\beta,t);\ 0;\ \varphi(x_\alpha,x_\beta,t)\}$, когда только принимаются условия отсутствия компоненты упругого перемещения $u_\gamma(x_\alpha,x_\beta,t)\equiv 0$ и производных остальных характеристик волнового поля $\partial[\wp]/\partial x_\gamma \equiv 0$, получаются из уравнений электроупругости (1.1) и материальных соотношений (1.2) с общего тензора линейной электроупругости пьезоэлектрических материалов.

С учётом соответствующих условий (1.4) и (1.5), из полученных уравнений и материальных соотношений следует, что в случае электроактивной плоской деформации наряду с ненулевыми напряжениями $\sigma_{\alpha\alpha}(x_\alpha,x_\beta,t)$, $\sigma_{\beta\beta}(x_\alpha,x_\beta,t)$ и $\sigma_{\alpha\beta}(x_\alpha,x_\beta,t)$, могут возникнуть также третье осевое механическое напряжение $\sigma_{\gamma\gamma}(x_\alpha,x_\beta,t)$ и третья компонента вектора электрического смещения $D_\gamma(x_\alpha,x_\beta,t)$.

Их существование может привести к осевым растяжениям (сжатиям) и осевой поляризации, нарушая плоское электро-деформированное состояние.

Учитывая, что в базовой плоскости $x_\alpha 0 x_\beta$ – упругие жёсткости $c_{\gamma\alpha}\neq 0$ и $c_{\gamma\beta}\neq 0$ и неосевые коэффициенты тензора диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{\gamma\alpha}$ и $\varepsilon_{\gamma\beta}$ равны нулю [4], условия совместимости осевых упругих удлинений (сжатий) и поляризаций электрического поля в базовой плоскости $x_\alpha 0 x_\beta$ запишутся в виде системы алгебраических уравнений относительно осевых удлинений (сжатий):

$$\begin{cases} c_{\gamma\alpha}\left(\partial u_\alpha/\partial x_\alpha\right)+c_{\gamma\beta}\left(\partial u_\beta/\partial x_\beta\right)=-e_{(\alpha\alpha)\gamma}\left(\partial\varphi/\partial x_\alpha\right)-e_{(\beta\beta)\gamma}\left(\partial\varphi/\partial x_\beta\right) \\ e_{\gamma(\alpha\alpha)}\left(\partial u_\alpha/\partial x_\alpha\right)+e_{\gamma(\beta\beta)}\left(\partial u_\beta/\partial x_\beta\right)=0 \end{cases} \tag{2.1}$$

с дополнительными условиями относительно компонент тензоров упругих жёсткостей и коэффициентов пьезоэлектрических постоянных

$$c_{\gamma(\alpha\beta)}\equiv 0,\quad e_{\gamma(\alpha\beta)}\equiv 0\,. \tag{2.2}$$

Из полученной системы уравнений очевидно, что условия совместимости упругих осевых удлинений (сжатий) и осевых поляризаций электрического поля сводятся в условия существования ненулевых упругих удлинений. Решение системы (2.1) уравнений относительно совместимых осевых упругих удлинений (сжатий) представляется в виде двух равенств:

$$\begin{cases} \left(\partial u_\alpha/\partial x_\alpha\right)=\left[e_{\gamma(\beta\beta)}\Big/\left(e_{\gamma(\alpha\alpha)}c_{\gamma\beta}-e_{\gamma(\beta\beta)}c_{\gamma\alpha}\right)\right]\cdot\left[e_{\alpha(\gamma\gamma)}\left(\partial\varphi/\partial x_\alpha\right)+e_{\beta(\gamma\gamma)}\left(\partial\varphi/\partial x_\beta\right)\right] \\ \left(\partial u_\beta/\partial x_\beta\right)=\left[e_{\gamma(\alpha\alpha)}\Big/\left(e_{\gamma(\beta\beta)}c_{\gamma\alpha}-e_{\gamma(\alpha\alpha)}c_{\gamma\beta}\right)\right]\cdot\left[e_{\alpha(\gamma\gamma)}\left(\partial\varphi/\partial x_\alpha\right)+e_{\beta(\gamma\gamma)}\left(\partial\varphi/\partial x_\beta\right)\right] \end{cases}. \tag{2.3}$$

Учитывая произвольность компонент напряжений электрического поля, условия существования совместимых упругих осевых удлинений (сжатий) могут быть разными в зависимости от соотношений между физическими постоянными пьезокристаллической среды. Из (2.3) следует:

А) Если в тензоре электроупругости пьезоэлектрика ненулевые упругие жёсткости $c_{\gamma\alpha}$ и $c_{\gamma\beta}$, а также пьезоэлектрические коэффициенты $e_{\gamma(\alpha\alpha)}$ и $e_{\gamma(\beta\beta)}$ численно такие, что

$$e_{\gamma(\alpha\alpha)}c_{\gamma\beta}\neq e_{\gamma(\beta\beta)}c_{\gamma\alpha}\,, \tag{2.4}$$

то, независимо от величин пьезоэлектрических коэффициентов $e_{\alpha(\gamma\gamma)}$ и $e_{\beta(\gamma\gamma)}$, имеем значения осевых упругих удлинений (сжатий) в виде (2.3).

Условиями раздельного возбуждения и распространения волны электроактивного плоского напряжённо-деформированного состояния от волны чисто упругой антиплоской деформации будут (1.4), (1.5) и (2.2).
Условия совместимости упругих осевых удлинений (сжатий) и осевых поляризаций электрического поля в этом случае запишется в виде (2.3).
Б) Если же в тензоре электроупругости пьезоэлектрика ненулевые упругие жёсткости $c_{\gamma\alpha}$ и $c_{\gamma\beta}$, а также пьезоэлектрические коэффициенты $e_{\gamma(\alpha\alpha)}$ и $e_{\gamma(\beta\beta)}$ численно такие, что

$$e_{\gamma(\alpha\alpha)}c_{\gamma\beta} \equiv e_{\gamma(\beta\beta)}c_{\gamma\alpha}, \tag{2.5}$$

то в этом случае дополнительные условия для раздельного существования электроупругого, плоского напряжённо-деформированного состояния наряду с (1.4), (1.5) и (2.2) будут:

$$e_{\gamma(\alpha\alpha)} \equiv 0; \quad e_{\gamma(\beta\beta)} \equiv 0; \quad e_{(\alpha\alpha)\gamma} \equiv 0; \quad e_{(\beta\beta)\gamma} \equiv 0. \tag{2.6}$$

Условие совместимости упругих осевых удлинений (сжатий) и осевых поляризаций электрического поля в этом случае упрощается и запишется в виде соотношения между совместимых упругих осевых удлинений (сжатий):

$$c_{\gamma\alpha}\left(\partial u_\alpha/\partial x_\alpha\right) = -c_{\gamma\beta}\left(\partial u_\beta/\partial x_\beta\right). \tag{2.7}$$

**Заключение.** В сагиттальной плоскости $x_\alpha 0 x_\beta$ однородной пьезоэлектрической среды, для существования электроупругого плоского напряжённо-деформированного состояния $\{u_\alpha(x_\alpha,x_\beta,t); u_\beta(x_\alpha,x_\beta,t);\ 0\}$, $\{E_\alpha(x_\alpha,x_\beta,t); E_\beta(x_\alpha,x_\beta,t);\ 0\}$, $\{D_\alpha(x_\alpha,x_\beta,t);\ D_\beta(x_\alpha,x_\beta,t); 0\}$, $\{\sigma_{\alpha\alpha}(x_\alpha,x_\beta,t);\ \sigma_{\beta\beta}(x_\alpha,x_\beta,t);\ 0;\ 0;\ 0;\ \sigma_{\alpha\beta}(x_\alpha,x_\beta,t)\}$ необходимо и достаточно выполнение равенств (1.4), (1.5) и (2.2) с условиями совместимости (2.3), а также при дополнительных условиях (2.6) с условиями совместимости (2.7). В двух других сагиттальных плоскостях пьезоэлектрических кристаллов $x_\gamma 0 x_\alpha$ и $x_\beta 0 x_\gamma$ условия существования плоского состояния, материальные соотношения, приведённые электромеханические коэффициенты, а также уравнения электроупругости, получаются ротацией немых индексов в соотношениях (2.1)÷(2.22).
*Работа выполнена при поддержке Государственного Комитета по Науке МОН РА в рамках исследовательского проекта № 18T-2C195.*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Аветисян А.С. К задаче распространения сдвиговых волн в пьезоэлектрической среде. //Известия НАН Армении. Механика. 1985. Т.38. № 1. С.3-11.
   Avetisyan A.S. About the problem of the propagation of trp ransversal waves in piezoelectric solid, Proceed. of NAS of Armenia, (1985), vol. 38, Iss. 1, pp. 3-11, [in Russian].
2. Партон В.З., Кудрявцев Б.А., Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. (1988). М.: Наука, 472 с.
   Parton V.Z., Kudryavtsev B.A., Electro-magneto-elasticity: piezoelectrics and electrically conductive solids, (1988), New York: Gordon and Breach Science Publishers, 503 p., Translated from the Russian by E.G. Strel′chenko.
3. Khachatryan V.M. & Avetisyan A.S. Propagation of an electroelastic shear wave signal in a cellular composite piezocrystalline layer, In book «The Problems of Dynamics of Interaction of Deformable Media», (2018), pp. 321-325.
4. Най Дж. Физические свойства кристаллов и их описание при помощи тензоров и матриц. (1967), 2-е изд. М.: Мир, 386 с. Nye J. Physical properties of crystals and their description using tensors and matrices, (1967), 2nd ed. M.: Mir, 386 p.

**Ara S. Avetisyan** – Corresponding Member of NAS, Professor, Institute of Mechanics, NAS of Armenia, **Address:** 0019, Yerevan, ave. Baghramyan, 24/2. **Phone:** (+37493) 00-44-55;
**E-mail:** ara.serg.avetisyan@gmail.com

## ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ ТИПА БЛЮСТЕЙНА-ГУЛЯЕВА В ЭЛЕКТРОУПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ С ПРИПОВЕРХНОСТНЫМИ ПРОДОЛЬНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

**Аветисян А.С., Камалян А.А., Унанян А.А.**

Посредством проведения виртуального сечения, полупространство с приповерхностными неоднородностями моделируется как слоистая структура типа Лява: однородное полупространство и тонкий продольно-неоднородный слой. Рассмотрены как случай неоднородности материала вдоль выбранного слоя, так и случай геометрической неоднородности механически свободной негладкой поверхности этого слоя. Предполагается, что физико-механические характеристики материала слоя переменной толщины непрерывно и периодически изменяются вдоль слоя. Материал полупространства однороден.

Исследована возможность распространения упругих сдвиговых волн типа Блоха-Флоке в слоистой структуре Лява. Краевая дифференциальная задача с периодически переменными коэффициентами решается путём введения гипотез MELS для тонкого продольно-неоднородного слоя. Получены условия существования периодических волн типа Блоха-Флоке в зависимости от соотношений между переменными характеристиками материала и функцией свободной поверхности слоя. Проведён сравнительный анализ периодических волн Блоха-Флоке в области допустимых частот с характерным волновым образованием волн типа Лява в неоднородной слоистой структуре.

**Введение.** Неоднородность слоя-волновода вдоль направляющей слоя или по толщине слоя по-разному влияют на распространение нормальной волны. Искажаются амплитуда и фаза функции волнового сигнала (первоначальной волны) [1].

Исходя из требовании задачи, для более правильного (близкого к фактическому состоянию) описания влияния неоднородности на процесс распространения волн в деформируемом элементе, в формулировках задач авторы воспользовались разными подходами моделирования. Были использованы модели слабо неоднородной среды [2] или слабых поверхностных неоднородностей [3], модели слоистых кусочно- однородных (и/или неоднородных) структур [4] и другие.

Приповерхностные неоднородности материала или поверхности тела практически существуют во всех элементах как остаточные следствия технологической обработки поверхности детали. При распространении нормальной волны в продольно неоднородной среде, нелинейное взаимодействие амплитуды и укороченной фазы распространяющейся нормальной волны происходит как вследствие физической неоднородности среды [1], так и вследствие геометрической неоднородности поверхности деформируемого элемента [5].

В предлагаемой статье исследуется возможность распространения периодических электроупругих ***(SH)*** поверхностных волн типа Блюстейна-Гуляева в неоднородном полупространстве с приповерхностными продольными неоднородностями пьезоэлектрической среды и поверхности полупространства.

Проведением виртуального сечения неоднородное полупространство моделируется как слоистая структура Лява из однородной пьезоэлектрической подложки с тонким периодически продольно-неоднородным пьезоэлектрическим слоем. Материальные характеристики среды и поверхность пьезоэлектрического слоя, периодические непрерывные функций от координаты вдоль виртуальной границы раздела.

### 1. Постановка задачи.

Полупространство из пьезоэлектрического кристалла класса $6mm$ гексагональной симметрии в прямоугольной декартовой системе координат $0xyz$ занимает область $\{|x| < \infty;\ R + h(x) \geq y > -\infty;\ |z| < \infty\}$. Ось поляризации пьезокристалла параллельна координатной оси $0z$. Приповерхностная неоднородность среды локализована на глубине $2R$. $R-$среднее арифметическое абсолютных значений отклонений профиля поверхностной шероховатости. Проведением виртуального сечения $y = 0$, пьезоэлектрическое полупространство с приповерхностными неоднородностями моделируется в слоистую структуру Лява из однородной пьезоэлектрической подложки и неоднородного пьезоэлектрического тонкого слоя.

В неоднородном слое кристаллической текстуры $6mm$, ненулевые касательные механические напряжения и компоненты электрического смещения имеют известный вид, но с переменными физико-механическими коэффициентами вдоль слоя.

Квазистатические уравнения электроактивной антиплоской деформации в выделенном неоднородном тонком слое $\{|x|<\infty;\ 0\le y\le R+h(x)\}$, с учётом ненулевых касательных напряжения и компонент электрического смещения с переменными коэффициентами вдоль слоя, удобно записать в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} G_1(x)\cdot \mathrm{w}_{1,xx}(x,y,t)+e_1(x)\cdot\varphi_{1,xx}(x,y,t)+ \\ +G_{1,x}(x)\cdot \mathrm{w}_{1,x}(x,y,t)+e_{1,x}(x)\cdot\varphi_{1,x}(x,y,t) \end{bmatrix}+\frac{\partial\sigma_{zy}^{(1)}}{\partial y}=\rho_1(x)\cdot\ddot{\mathrm{w}}_1(x,y,t) \tag{1.1}$$

$$\begin{bmatrix} e_1(x)\cdot \mathrm{w}_{1,xx}(x,y,t)-\varepsilon_1(x)\cdot\varphi_{1,xx}(x,y,t)+ \\ +e_{1,x}(x)\cdot \mathrm{w}_{1,x}(x,y,t)-\varepsilon_{1,x}(x)\cdot\varphi_{1,x}(x,y,t) \end{bmatrix}+\frac{\partial D_y^{(1)}}{\partial y}=0 \tag{1.2}$$

Уравнения электроупругого сдвига в однородном пьезоэлектрическом полупространстве имеет известный вид:

$$\begin{gathered} \mathrm{w}_{0,xx}(x;y;t)+\mathrm{w}_{0,yy}(x;y;t)=c_{0t}^{-2}\cdot\ddot{\mathrm{w}}_0(x;y;t) \\ \varphi_{0,xx}(x,y,t)+\varphi_{0,yy}(x,y,t)=(e_0/\varepsilon_0)\left[\mathrm{w}_{0,xx}(x,y,t)+\mathrm{w}_{0,yy}(x,y,t)\right] \end{gathered} \tag{1.3}$$

В уравнениях (1.1) ÷ (1.3), $c_{0t}^2\triangleq G_0/\rho_0$ – скорость объёмной сдвиговой волны, $G_0$ – модуль сдвига, $e_0$ – пьезоэлектрический модуль, $\varepsilon_0$ – коэффициент диэлектрической проницаемости, $\rho_0$ – плотность материала однородного полупространства, $G_1(x)$, $e_1(x)$, $\varepsilon_1(x)$, $\rho_1(x)$ – непрерывные функции, характеризующие модуль жёсткости, пьезоэлектрический коэффициент, коэффициент диэлектрической проницаемости и плотность материала выделенного неоднородного слоя, соответственно. $\mathrm{w}_0(x,y,t)$ и $\mathrm{w}_1(x,y,t)$ – компоненты упругого перемещения в направлении оси $0z$, в однородном полупространстве в неоднородном слое, соответственно.

Внешняя негладкая поверхность слоя $y=R+h(x)$ предполагается механически свободной и электрически открытой. На ней будут удовлетворены граничные условия

$$\left[\sigma_{zy}^{(1)}+h_{,x}(x)\cdot\sigma_{zx}^{(1)}\right]_{y=R+h(x)}=0, \qquad \left[D_y^{(1)}+h_{,x}(x)\cdot D_x^{(1)}\right]_{y=R+h(x)}=0 \tag{1.4}$$

На виртуально проведённом сечении будут удовлетворены условия идеального контакта между неоднородным слоем и однородным полупространством. Условия полной сопряжённости электромеханического поля в случае антиплоской деформации запишутся в виде

$$\left[\mathrm{w}_0(x,y,t)=\mathrm{w}_1(x,y,t)\right]_{y=0} \tag{1.5}$$

$$\left[G_0\mathrm{w}_{0,y}(x,y,t)+e_0\varphi_{0,y}(x,y,t)-G_1(x)\mathrm{w}_{1,y}(x,y,t)-e_1(x)\varphi_{1,y}(x,y,t)\right]_{y=0}0 \tag{1.6}$$

$$\left[\varphi_0(x,y,t)=\varphi_1(x,y,t)\right]_{y=0} \tag{1.7}$$

$$\left[e_0\mathrm{w}_{0,y}(x,y,t)-\varepsilon_0\varphi_{0,y}(x,y,t)-e_1(x)\mathrm{w}_{1,y}(x,y,t)+\varepsilon_1(x)\varphi_{1,y}(x,y,t)\right]_{y=0}0 \tag{1.8}$$

Условия затухания волнового поля в глубь полупространства запишутся в виде

$$\lim_{y\to-\infty}\mathrm{w}_0(x;y;t)=0, \quad \lim_{y\to-\infty}\varphi_0(x;y;t)=0. \tag{1.9}$$

Таким образом, исследование распространения электроупругих волн сдвига типа Блюстейна-Гуляева в пьезоэлектрическом полупространстве с приповерхностными неоднородностями приводится к исследованию распространения периодических волн типа Блоха-Флоке в слоистой структуре типа Лява.

## 2. Волнообразование и распространение электроупругих *(SH)* волн типа Блоха-Флоке в слоистой структуре Лява

В случае одинаковой (общей) периодичности функций поверхностной негладкости и характеризующие неоднородность материала выделенного слоя характеристик $\{\gamma_n(x)\}=\{\gamma_n(x+\mu)\}$, где $\gamma_n(x)\in\{h(x),G_1(x),e_1(x),\varepsilon_1(x),\rho_1(x)\}$, исследуются волнообразование и процесс распространения электроупругих волн типа Блоха-Флоке в виртуальной слоистой структуре Лява со слоем переменной толщины и с продольной неоднородностью.

Электроупругую ***(SH)*** волну упругого сдвига в виртуально выделенном продольно-неоднородном слое будем искать в виде волн типа Блоха-Флоке

$$\{\mathrm{w}_1(x,y,t);\varphi_1(x,y,t)\}=\{W_{01}(y);\Phi_{01}(y)\}\cdot\exp(i\mu kx)\cdot\exp\left[i(kx-\omega t)\right], \tag{2.1}$$

где функции $W_{01}(y)$ и $\Phi_{01}(y)$ – функции амплитуд соответствующих компонент электроупругой нормальной волны в неоднородном слое, $k$ – волновое число электроупругого волнового сигнала и в качестве параметра Флоке общий (одинаковый) период неоднородности слоя $\mu$.

Условия полной сопряжённости компонент электроупругой волны (1.5)÷(1.8) на поверхности виртуального среза $y=0$ передаёт характер неоднородности из слоя в однородное полупространство $\{|x|<\infty;\ 0\ge y>-\infty;\ |z|<\infty\}$. Вследствие этого, решения системы уранений (1.3), с учётом условий затухания (1.9) в однородном полупространстве, запишутся в аналогичном с (2.1) виде

$$\mathrm{w}_0(x,y,t)=W_0\cdot\exp(-\alpha_0(1+\mu)ky)\cdot\exp\left[i\left((1+\mu)kx-i\omega t\right)\right] \tag{2.2}$$

$$\varphi_0(x,y,t)=\Phi_0\cdot\exp\left[-(1+\mu)ky\right]\cdot\exp\left[i\left((1+\mu)kx-i\omega t\right)\right]+\left(e_0/\varepsilon_0\right)\cdot\mathrm{w}_0(x,y,t), \tag{2.3}$$

где $\alpha_0=\sqrt{1-\eta_0^2(\omega,k)}$ – коэффициент затухания волны в глубь полупространства, $\eta_0(\omega,k)=\omega/\left[(1+\mu)kc_{0t}\right]$ – приведённая фазовая скорость в однородном полупространстве.

Из (2.1)÷(2.3) очевидно, что приповерхностные неоднородности превращают распространение нормального волнового сигнала длины $\lambda_0=2\pi/k$ на распространение укороченной нормальной волны длиною $\lambda_*=2\pi/(1+\mu)k$.

С учётом тонкости выделенного неоднородного слоя, согласно сформулированным в [5] и [6] гипотезам MELS, искомые решения в неоднородном слое представляем в виде

$$\mathrm{w}_1(x,y,t)=\left[\cos\left[\alpha_0(1+\mu)ky\right]+f(x)\cdot\sin\left[\alpha_0(1+\mu)ky\right]\right]\cdot W_0(0)\cdot\exp\left[i\xi(x,t)\right] \tag{2.4}$$

$$\varphi_1(x,y,t)=\left[\cos\left[\alpha_0(1+\mu)ky\right]+f(x)\cdot\sin\left[\alpha_0(1+\mu)ky\right]\right]\cdot\Phi_0(0)\cdot\exp\left[i\xi(x,t)\right] \tag{2.5}$$

С введёнными обозначениями $\xi(x,t)=(1+\mu)kx-\omega t$ – фаза волн типа Блоха-флоке, и

$$f(x)=\left\{F_{01}(h(x))/F_0(0)-\cos\left[\alpha_0(1+\mu)kh(x)\right]\right\}/\sin\alpha_0(1+\mu)kh(x) \tag{2.6}$$

функция распределений амплитуд упругого сдвига и электрического потенциала по толщине виделенного слоя, где $F_n(x)\in\{W(x),\Phi(x)\}$. Очевидно, что выбором решений (2.5) и (2.6) на виртуальном срезе $y=0$ поверхностные условия (1.5) и (1.7) выполняются автоматически.

Удовлетворяя граничным условиям (1.4), для функций распределения амплитуд получаем пару одинаковых дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}h_{,x}(x)\cdot f_{,x}(x)+\left[(1+\mu)k\cdot h_{,x}(x)+\alpha_0(1+\mu)k\cdot\operatorname{ctg}\left[\alpha_0(1+\mu)kh(x)\right]\right]\cdot f(x)-\\-\left[\alpha_0(1+\mu)k+\left[1+(1+\mu)k\right]\cdot h_{,x}(x)\cdot\operatorname{ctg}\left[\alpha_0(1+\mu)kh(x)\right]\right]=0\end{gathered} \tag{2.7}$$

Функция распределения амплитуд $f(x)$ характеризует влияние приповерхностных неоднородностей на формообразование электроупругой волны. Из (2.8) очевидно, что в случае выбора форм по толщине слоя $\cos\left[\alpha_0(1+\mu)ky\right]+f(x)\cdot\sin\left[\alpha_0(1+\mu)ky\right]$, приповерхностная продольная неоднородность среды не влияет на образование форм электроупругих параметров волнового поля. Из (2.8) также следует, что в случае гладкой поверхности неоднородного полупространства, когда $h(x)\equiv h_0$, при распространении форма волны в слое не искажается: $f(x)\equiv 0$. Распространяется волна Лява допустимой длины $\lambda_m\le 2h_0/m$, с фазовой скоростью формы $V_{\phi m}=\omega/k_m=c_{0t}\sqrt{1-m^2\lambda_m^2/4h_0^2}$.

Периодические решения уравнения (2.8) находим, исключая особенности периодических коэффициентов (срезы $x_0^* = \text{const}$, где производная функции $h(x)$ имеет разрыв) в уравнении. Единый (общий) период для коэффициентов каждой формы волны будет $\mu_* = \pi\mu$. Функции распределения амплитуд мод упругого сдвига и электрического потенциала определятся как $f_m(x+\mu_*)=f_m(x)$. Для их определения, учитывая единую периодичность также функций $h_{,x}(x+\mu_*)=h_{,x}(x)$ и $\operatorname{ctg}\left[\alpha_0(1+\mu)k\left(h(x+\mu_*)+\mu_*\right)\right]=\operatorname{ctg}\left[\alpha_0(1+\mu)kh(x)\right]$, разложим их в ряд Фурье.

Подставляя решения (2.5) и (2.6) в уравнения электроупругости (1.1) и (1.2), и интегрируя эти уравнения по толщине неоднородного слоя, получим поверхностные условия эквивалентных динамических нагрузок в виде системы однородных алгебраических уравнений относительно амплитуд на внутренней поверхности.

Элементи матрицы зависят от функций приповерхностной неоднородности среды $\left\{G_1(x);\rho_1(x);e_1(x);\varepsilon_1(x)\right\}$ и негладкости поверхности $h(x)$. Учитывая единую периодичность этих функций, разложим полученные уравнения в ряд Фурье. Из условий существования нетривиальных решений полученных рекуррентных систем алгебраических уравнений

$$\left\|A_{nm}\left[g_i(x)\right]\right\|\times\left\{W_{0m}\left(0\right);\Phi_{0m}\left(0\right)\right\}=0, \qquad n=1;2, \qquad m\in\mathbb{N}^+ \tag{2.8}$$

определяем фазовые скорости $V_m\left(\omega/k\right)=(1+\mu_*)\omega\lambda_m/2\pi$ соответствующих гармоник. Из условий периодичности решений типа Блоха-Флоке

$$\sigma_{zx}^{(1)}\left(\mu_*,y,t\right)=\mu_*\cdot\sigma_{zx}^{(1)}\left(0,y,t\right);\quad \mathrm{w}_1\left(\mu_*,y,t\right)=\mu_*\cdot\mathrm{w}_1\left(0,y,t\right) \tag{2.9}$$

$$D_{zx}^{(1)}\left(\mu_*,y,t\right)=\mu_*\cdot D_{zx}^{(1)}\left(0,y,t\right);\quad \varphi_1\left(\mu_*,y,t\right)=\mu_*\cdot\varphi_1\left(0,y,t\right) \tag{2.10}$$

определяем зависимость $\mu_*(\omega)$, условие ограниченности для которой $\left|\mu_*(\omega)+\mu_*^{-1}(\omega)\right|\le 2$ определяет область допустимых частот соответствующих мод электроупругой волны типа Блоха-Флоке.

**5. Заключение.**

Получены условия существования периодических волн типа Блоха-Флоке в виде соотношений между переменными характеристиками среды в приповерхностной зоне и функцией негладкости свободной поверхности полупространства.

Построены аналитические периодические решения моделированной математической краевой задачи в области допустимых частот волн типа Блоха-Флоке с волнообразованием характерной волны типа Лява.

Подход решения задачи показывает, что в случае непрерывного периодически неоднородного материала слоя, в слоистой структуре Лява могут возникнуть локализованные вблизи поверхности раздела сред волны типа Блоха-Флоке. Амплитудная функция волны – периодическая по направлению распространения, и затухает в глубь полупространства.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Аветисян А.С. О распространении электроупругой монохроматической волны в неоднородном пьезоэлектрике //Изв. НАН Армении. Механика. 1988. Т.41. №5. С.34-40,
   Avetisyan A.S. On the propagation of an electroelastic monochromatic wave in an inhomogeneous piezoelectric. //Proc. NAS of Armenia. Mechanics. 1988. Vol.41. № 5. Pp. 34-40 (in Russian).
2. Белубекян М.В., Мухсихачоян А.Р. Сдвиговая поверхностная волна в слабо неоднородных упругих средах. //Акустический журн. 1996. Т.42. №2. С.179-182,
   Belubekyan M.V., Mukhshahoyan A.R. Shear surface wave in weakly inhomogeneous elastic media. // Acoustic Journal. 1996. T.42. №2. P.179-182 (in Russian).
3. Белубекян М.В., Казарян К.Б. К вопросу существования ПСВ в неоднородном упругом полупространстве. //Известия НАН Армении. Механика. 2000. Т.50. №4. С.6-12.
   Belubekyan M.V., Ghazaryan K.B. On the existence of PSV in a non-uniform elastic half-space, //Proc. NAS of Armenia. Mechanics. (2000). V.50. №4, p.6-12 (inRussian).

4. Avetisyan A.S., Hunanyan A.A. The efficiency of application of virtual cross-sections method and hypotheses MELS in problems of wave signal propagation in elastic waveguides with rough surfaces, //J. of Advances in Phys., 2016, v.11, №7, pp.3564-3574, doi.org/10.13140/RG.2.1.4348.5049.
5. Avetisyan A.S. On the formulation of the electro-elasticity theory boundary value problems for electro-magneto-elastic composites with interface roughness. //Proc. of NAS of Armenia. Mechanics. 2015. Vol. 68. №2, pp. 29-42.
6. Avetisyan A.S. The Mixed Boundary Conditions Problem of Layered Composites with Meta-Surfaces in Electro Elasticity. In: Book «Wave Dynamics, Mechanics and Physics of Microstructured Metamaterials, Advanced Structured Materials», By Sumbatyan M. (Eds) (2019), vol. 109. Springer, Cham, pp.73-96. doi.org/10.1007/978-3-030-17470-5_6.
7. Avetisyan A.S., Hunanyan A.A. Amplitude-phase distortion of the high-frequency shear waves in homogeneous elastic waveguide with weakly rough surfaces. //Proceedings of NAS of Armenia. Mechanics. 2017. Vol.70. №2, pp. 28-42.

**Ara S. Avetisyan**– Corresponding Member of NAS, Professor,
Institute of Mechanics, NAS of Armenia,
**Address:** 0019, Yerevan, ave. Baghramyan, 24/2
**Phone:** (+37493) 00-44-55; **E-mail:** ara.serg.avetisyan@gmail.com
Kamalyan.Andranik@yahoo.com,
Hunanyan.Areg21@gmail.com

# ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ И ПРОБЛЕМА ПРЕДСКАЗАНИЯ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЙ

**Агаловян Л.А.**

Процесс подготовки землетрясений включает два основных этапа тектонических движений: медленные (вековые) и быстротечные (скачкообразные). Вековые движения могут длиться десятки лет, поэтому являются квазистатическими, в результате, в литосферных плитах Земли и в отдельных блоках земной коры с годами накапливаются деформации, которые, достигнув критического значения порядка $10^{-4}$, а по данным известного японского сейсмолога Rikitake [1] – порядка $4,7 \cdot 10^{-5}$, приводят к глобальному разрушению (землетрясению). Основная часть накопленной с годами огромной потенциальной энергии деформаций выделяется в виде объёмных упругих продольных (первичных) $P$ и сдвиговых (вторичных) $S$ - волн, а также поверхностных волн Релея и Лява. Скорость $V_p$ всегда больше скорости $V_s$. Фиксируя время прихода этих волн $(t_p, t_s)$ в заданную точку (сейсмостанцию) по их разности $\Delta t = t_s - t_p$, удаётся установить расстояние очага землетрясения от заданной станции:

$$L = \frac{v_p v_s}{v_p v_s} \Delta t, \Delta t = t_s - t_p \ , \tag{1}$$

а по данным трёх станций его расположение, как область (точка) пересечения трёх сфер с радиусами $L_1, L_2, L_3$ – с центрами в этих точках. Этим и занято большинство сейсмостанций, фиксируя уже произошедшее событие.

Быстротечные (скачкообразные) движения являются динамическими и возникают в результате форшока (Foreshocks), самого землетрясения (Earthquakes) и афтершока (Aftershocks). Таким образом, землетрясения есть результат накопления критических деформаций, приводящих к глобальному разрушению. Следовательно, для предсказания землетрясений, в первую очередь, следует найти напряжённо-деформированные состояния (НДС) литосферных плит и блоков земной коры и проследить за их изменением во времени, преследуя цель выявить критические состояния и их местонахождение. Имея значения компонент тензора напряжений и вектора пермещения, накопленная потенциальная энергия деформации вычисляется по формуле:

$$E = \frac{1}{2} \int_v \left( \sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \varepsilon_{zz} + \sigma_{xy} \varepsilon_{xy} + \varepsilon_{xz} \varepsilon_{xz} + \sigma_{yz} \varepsilon_{yz} \right) dv, \tag{2}$$

а по формуле [2,3]

$$\lg E = 11,8 + 1,5M \tag{3}$$

– магнитуда $M$ ожидаемого землетрясения.

В середине двадцатого века сейсмологами были зафиксированы заметные деформации (перемещения точек) поверхности Земли до землетрясения. Тогда же возникла естественная задача – используя эти данные, определить НДС литосферных плит и блоков земной коры и провести мониторинг их изменения во времени, по данным новых, регулярно проводимых измерений. Возникшая задача оказалась неклассической задачей теории упругости, поскольку на лицевую поверхность плиты и блока земной коры приходится ставить шесть условий: поверхность свободна, т.е. три компоненты тензора напряжений там равны нулю, но известны значения перемещений точек этой поверхности (три условия). В классичекой же задаче теории упругости на поверхности ставятся три условия. Асимптотический метод решения сингулярно-возмущённых дифференциальных уравнений [4] позволил решить эту проблему [5].

Чтобы уменьшить влияние изменений внешних аномальных (в основном, атмосферных) факторов на данные истинно протекающих процессов внутри слоистого пакета (литосферной плиты), в сейсмологии начали измерительные приборы (наклономеры, деформографы и др.) помещать внутри пакета на некоторой глубине от лицевой поверхности. В работе решены соответствующие неклассические квазистатические и динамические задачи, когда измерительные приборы расположены на поверхности контакта между слоями с номерами "$m$" и "$(m+1)$". Указаны случаи, когда асимптотическое решение становится математически точным.

Пусть литосферная плита или блок земной коры состоит из $N$ слоёв и занимает область $Z = \left\{ (x,y,z): 0 \le x \le a, 0 \le y \le b, 0 \le z \le h, h = \sum_{j=1}^{N} h_j, \min(a,b) = l, h << l \right\}$, где $h_j$ – толщины пластин. Для определения НДС в медленном (вековом) движении, необходимо найти в области $Z$ – решение уравнений равновесия трёхмерной задачи теории упругости:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}^{(k)}}{\partial z} + F_x^{(k)} = 0, \quad (x,y,z), \qquad k = 1,2,....N \tag{4}$$

соотношений упругости (обобщённый закон Гука) с учётом влияния температурного поля по модели Дюамеля-Неймана:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_x^{(k)}}{\partial x} = a_{11}^{(k)} \sigma_{xx}^{(k)} + a_{12}^{(k)} \sigma_{yy}^{(k)} + a_{13}^{c(k)} \sigma_{zz}^{(k)} + \alpha_{11}^{(k)} \theta^{(k)}, (1,2,3; x,y,z),\\
&\frac{\partial u_y^{(k)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial y} = a_{44}^{(k)} \sigma_{yz}^{(k)}, \frac{\partial u_x^{(k)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial x} = a_{55}^{(k)} \sigma_{xz}^{(k)},\\
&\frac{\partial u_y^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial u_x^{(k)}}{\partial y} = a_{66}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k)},
\end{aligned} \tag{5}$$

где обозначения – общеизвестные.

Найденное решение должно удовлетворять на лицевой поверхности пакета $z = 0$ условиям свободной границы

$$\sigma_{jz}^{(1)}(x,y,0,t_*) = 0, \qquad j = x,y,z \tag{6}$$

и условиям задания перемещений на плоскости контакта между слоями с номерами $"m"$ и $"(m+1)"$:

$$u_j^{(m)}(x,y,\zeta_m,t_*) = u_j^{(m+1)}(x,y,\zeta_m,t_*) = u_j^{+}(x,y), j = x,y,z; \zeta_m = \left( \sum_{i=1}^{m} h_i \right) \Big/ h \tag{7}$$

где $u_j^{+}(x,y)$ – известные функции как результат проведённых при $t = t_*$ измерений. Найденное решение должно удовлетворять также условиям полного контакта между всеми смежными слоями:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{jz}^{(n)}(x,y,\zeta_n,t_*) = \sigma_{jz}^{(n+1)}(x,y,\zeta_n,t_*); \zeta_n = \left( \sum_{i=1}^{n} h_i \right) \Big/ h\\
&u_j^{(n)}(x,y,\zeta_n,t_*) = u_j^{(n+1)}(x,y,\zeta_n,t_*), j = x,y,z; n = 1,2,....(N-1)
\end{aligned} \tag{8}$$

Чтобы решить сформулированную задачу, необходимо в уравнениях (4) и соотношениях (5) перейти к безразмерным координатам и перемещениям:

$$\xi = x/l, \eta = y/l, \zeta = z/h = \varepsilon^{-1} z/l, u = u_x / l, v = u_y / l, w = u_z / l, \varepsilon = h/l \tag{9}$$

В результате, получим сингулярно-возмущённую малым параметром $\varepsilon$ систему. Решение этой системы $(I)$ складывается из решений внешней $(I^{out})$ задачи и пограничного слоя $(I_b)$.

Решение внешней задачи отыскивается в виде

$$\begin{aligned}
&\sigma_{ij}^{(k)out} = \varepsilon^{-1+s} \sigma_{ij}^{(k,s)}, (i,j = x,y,z), s = \overline{0,S}\\
&u^{(k)out} = \varepsilon^{s} u^{(k,s)}, (u,v,w), k = 1,2,...N
\end{aligned} \tag{10}$$

Подставив (10) в преобразованные согласно (9) системы (4),(5) и приравняв в каждом уравнении соответствующие коэффициенты от $\varepsilon$, получим новую систему, откуда однозначно определяются $\sigma_{ij}^{(k,s)}, u^{(k,s)}, v^{(k,s)}, w^{(k,s)}$. Последние, в свою очередь, будут содержать, зависящие лишь от $\xi, \eta$ неизвестные функции $\sigma_{ij0}^{(k,s)}(\xi,\eta), u_0^{(k,s)}(\xi,\eta), v_0^{(k,s)}(\xi,\eta), w_0^{(k,s)}(\xi,\eta)$. Удовлетворив условиям (6) - (8), однозначно определяются эти функции, следовательно, решение внешней задачи $I^{out}$. Если входящие в условия (7) функции $u_x^+, u_y^+, u_z^+$ являются многочленами от тангенциальных координат, итерационный процесс обрывается, в результате асимптотическое решение становится математически точным [6]. Это решение, однако, не будет удовлетворять граничным условиям на боковой поверхности пакета, возникающая неувязка устраняется решением для пограничного слоя [4].

Чтобы исследовать быстротечные, имеющие динамичский характер процессы (Foreshocks, Earthquakes, Aftershocks), необходимо решить в области $Z$ уравнения движения теории упругости

$$\frac{\partial\sigma_{xx}^{(k)}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}^{(k)}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{xz}^{(k)}}{\partial z}=\rho_k\frac{\partial^2 u_x^{(k)}}{\partial t^2},(x,y,z);k=1,2,...\mathrm{N} \tag{11}$$

при соотношениях упругости (5) (обычно без учёта температуры). Граничными условиями задачи будут:

$$\sigma_{jz}^{(1)}(x,y,0,t)=0 \quad \text{при} \quad z=0,\ j=x,y,z \tag{12}$$

$$u_x^{(m)}(x,y,\zeta_n,t)=u_x^{(m+1)}(x,y,\zeta_n,t)=u_x^+(x,y)\exp\left(\mathrm{i}\Omega t\right)\ \ \left(x,y,z\right) \tag{13}$$

и условия контакта (8) между смежными слоями для произвольного $t$ .

Решение задачи отыскивается в виде:

$$\begin{aligned}&\sigma_{\alpha\beta}^{(\mathrm{k})}(x,y,z,t)=\sigma_{\mathrm{ij}}^{(\mathrm{k})}(x,y,z)\exp\left(i\Omega t\right),\alpha,\beta=x,y,z;i,j=1,2,3\\&u_x^{(\mathrm{k})}(x,y,z,\mathrm{t})=\overline{u}_{\mathrm{x}}^{(\mathrm{k})}(x,y,z)\exp\left(i\Omega t\right),\left(x,y,z\right)\end{aligned} \tag{14}$$

затем перейдя в уравнениях (11) и соотношениях упругости (5) к безразмерным координатам $\xi,\eta,\zeta$ и перемещениям $U^{(k)}=\overline{u}_x^{(k)}/l, V^{(k)}=\overline{u}_y^{(k)}/l, W^{(k)}=\overline{u}_z^{(k)}/l$, получим сингулярно-возмущённую дифференциальную систему. Решение внешней задачи будет иметь вид:

$$U^{(k)\mathrm{out}}=\varepsilon^s U^{(k,s)},(U,V,W),\sigma_{ij}^{k(\mathrm{out})}=\varepsilon^{-1+s}\sigma_{ij}^{(\mathrm{k,s})},\mathrm{s}=\overline{0,S} \tag{15}$$

С учётом (14), подставив (15) в преобразованную систему (11), (5), получим новую систему, откуда напряжения $\sigma_{ij}^{(\mathrm{k,s})}$ выражаются через компоненты вектора перемещения. Последние определяются из обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка [7]. Решив эти уравнения и удовлетворив условиям (12),(13),(8), определим окончательное решение. В динамических задачах то же, если входящие в условия (13) функции являются многочленами $u_x^+, u_y^+, u_z^+$, решение становится математически точным.

Полученные решения квазистатических и динамических задач позволяют, на основе регулярно проводимых измерений, проследить весь процесс подготовки и возникновения землетрясений.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Rikitake T. Earthquake Prediction. Amsterdam; Elsiever, 1976. (Рикитаке Т. Предсказание землетрясений. М.: Мир,1979).
2. Gutenberg B. and Richter C.F. Earthquake magnitude, intensity, energy and acceleration//Bulletin of the Seismological Soc.Am.1956. Vol.46, №2, pp.105-145.
3. Kasahara K. Earthquake Mechanics. Cambridge Univers. Press., Cambridge. 1981 (Касахара К. Механика землетрясений. М.: Мир,1985.)
4. Aghalovyan L.A. Asymptotic Theory of Anisotropic Plates and Shells, Singapore, London. World Scientific Publishing. 2015. 376 p. (Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука. Физматлит, 1997. 414с.)
5. Aghalovyan L.A. On Some Classes of 3D boundary-value problems of statics and dynamics of plates and shells//: shell and membrane theories in mechanics and biology.- Switzerland: Springer International Publishing. 2015, pp.1-23.
6. Агаловян Л.А., Тагворян В.В. Об одной задаче сейсмологии для слоистых пластин // Проблемы механики деформируемого твердого тела. Ереван: «Гитутюн» НАН РА. 2017, с.24-35.
7. Агаловян Л.А., Агаловян М.Л., Тагворян В.В. О решениях динамических трёхмерных задач теории упругости по моделированию землетрясений // Изв. НАН РА. Механика. 2018. Т.71. №4. С.17-29.



**Сведения об авторе:**

**Агаловян Ленсер Абгарович –** академик НАН Армении, доктор физ-мат. наук, заведующий отд. «Механика тонкостенных систем» Института механики НАН РА.
**Тел.:** (37410) 529630; **E-mail:** lagal@sci.am

# УПРУГО-СПИНОВЫЕ ВОЛНЫ В СОСТАВНОЙ СТРУКТУРЕ С ЗАКРЕПЛЁННЫМИ КРАЯМИ

**Агаян К.Л., Атоян Л.А., Саакян С.Л.**

В данной работе исследуется распространение упруго-спиновых волн в двухслойных средах магнит-немагнит. Рассматривается случай, когда оба края конструкции закреплены. Найдено условие существования упруго-спиновых волн и получено соответствующее дисперсионное уравнение. Далее проведён сравнительный численный анализ с целью определения степени влияния магнитных свойств слоя на дисперсионную картину.

**1. Введение.** Вопросы существования и распространения упруго-спиновых волн (УСВ) в составных конструкциях, где одна из составляющих конструкций представляет собой структуру, имеющую магнитоактивные свойства (например, железо-иттриевый гранат (ЖИГ)) привлекают в последние годы всё возрастающее внимание исследователей [1-12], что связано с широкой областью практического применения УСВ. Перечислим некоторые устройства, использующие УСВ: частотные фильтры, линии задержки, приборы эхолокации, устройства хранения и передачи информации, синтезаторы частот и т.д.

В предлагаемой работе рассматривается задача нахождения условий существования и распространения УСВ в двухфазных составных конструкциях, когда одна из фаз является магнитоактивной, а другая – диэлектрик (рис.1). Рассматриваемая двухслойная конструкция считается закрепленной по краям. Задача, где один край закреплен, а другой свободен рассматривался в предыдущей работе авторов [12]. Задача решается с использованием уравнений, учитывающих взаимосвязь спиновых (магнитных) и упругих возмущений [1- 9], это уравнение механического движения среды и уравнение Ландау-Лифшица [1-4], описывающее движение плотности магнитного момента. Найдено дисперсионное уравнение и проведено сравнение дисперсионных картин для магнитного и немагнитного слоев с теми же механическими характеристиками.

**2. Постановка задачи**. Рассматривается двухслойная конструкция, состоящая из упругих ферромагнитного и диэлектрического (не электромагнитоактивного) слоёв конечных толщин, находящаяся во внешнем, постоянном магнитном поле $\vec{H}_0$, направленном по оси $Z$ (рис.1), которая совпадает с осью лёгкого намагничивания ферромагнетика [1–4]. Введём обозначения: $h_1$ и $h_2$ – толщины слоёв, $\vec{M}_0$ – объёмная намагниченность насыщения ферромагнетика, а массовую намагниченность насыщения обозначим через $\vec{\mu}_0 = \vec{M}_0 / \rho$, $\rho$ – плотность ферромагнетика. Через $\mu$ и $\nu$ обозначим компоненты вектора намагниченности $\vec{\mu}(\mu, \nu, 0)$. Границы структуры ($y{=}h_1$ и $y = -h_2$) будем считать закреплёнными. Из компонент перемещений в обеих средах будем считать отличными от нуля только $Z$ компоненты: $w_1$ и $w_2$, т.е. рассматриваются сдвиговые волны.

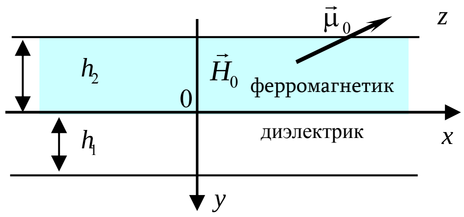


Рис. 1.

Уравнения, описывающие динамические процессы в структуре, представляются в следующем виде:

а) в немагнитном слое:

$$\ddot{w}_1 = S_1^2 \Delta w_1 \tag{1}$$

b) в магнитном слое [12]:

$$\ddot{w}_2 = S_2^2 \Delta w_2 + f\mu_0(\mu_x + \nu_y),\ \dot{\mu} = \omega_M(\hat{b}\nu + f\mu_0 w_{2y}),\ \dot{\nu} = -\omega_M(\hat{b}\mu + f\mu_0 w_{2x}) \tag{2}$$

$S_1$ и $S_2$ – скорости упругих волн, $f$ – коэффициент магнитоупругой связи, $\hat{b} = H_0 / M_0$ – величина, обратная магнитной восприимчивости, $\omega_M = \gamma M_0$, $\gamma = 1{,}8 \cdot 10^7$ · $(э \cdot c)^{-1}$ – гиромагнитное отношение, $\Delta = (\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, 0)$. Уравнения (2) выписаны без учёта обменного взаимодействия, магнитного потенциала, а также магнитной анизотропии $(b=0)$, что, к примеру, верно для широко использующегося на практике железо-иттриевого граната (ЖИГ) [2, 9].

Граничные условия:

$$a)\, w_1|_{y=0} = w_2|_{y=0},\ c)\, w_2|_{y=-h_2} = 0,$$
$$b)\, \sigma_{yz}^{(1)}|_{y=0} = \sigma_{yz}^{(2)}|_{y=0},\ d)\, w_2|_{y=h_1} = 0, \tag{3}$$

$\sigma_{yz}^{(1,2)}$ – напряжения в соответствующих средах, они представляются в виде:

$$\sigma_{yz}^{(1)} = G_1 w_{1y};\ \sigma_{yz}^{(2)} = G_2 w_{2y} + fM_0\nu,$$

где $G_1$ и $G_2$ – модули сдвига.

**3. Решение задачи.** Решения задач (1), (2) ищутся в виде:

$$(w_1, w_2, \mu, \nu) = (W_1(y), W_2(y), M(y), N(y))\exp(\mathrm{i}(\omega t - px)) \tag{4}$$

$p$ – компонента искомого волнового вектора, $\omega$ – круговая частота. Подставим (4) в (1), (2). Для амплитуд $W_1$ и $W_2$ получим следующие уравнения:

$$\frac{d^2W_1}{dy^2} + a^2W_1 = 0,\ a^2 = \omega^2 / S_1^2 - p^2; \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 W_2}{\partial y^2} + c^2 W_2 = 0, \tag{6}$$

$$c^2 = \frac{(\Omega^2 - \hat{b}^2)(\omega^2 - p^2S_2^2) - f^2\mu_0^2\hat{b}p^2}{S_2^2(\Omega^2 - \hat{b}^2) + f^2\mu_0^2\hat{b}}, \tag{7}$$

где $\Omega = \omega/\omega_M$. Решения уравнений (5), (6) представляются в виде:

$$W_1(y) = A_1\cos ay + A_2 \sin ay \tag{8}$$

$$W_2(y) = B_1\cos cy + B_2\sin cy \tag{9}$$

Воспользовавшись граничными условиями (3)$c$ и (3)$d$, получим:

$$W_1(y) = A\sin a(h_1 - y) \tag{10}$$

$$W_2(y) = B\sin c(h_2 + y) \tag{11}$$

где $A$ и $B$ – неизвестные постоянные.

**4. Дисперсионное уравнение.** Подставив найденные решения в неиспользованные граничные условия (3)$a$ и (3)$b$, мы придём к системе для определения постоянных $A$ и $B$. Условие существования ненулевых решений этой системы, приводит нас к характеристическому уравнению:

$$\mathrm{tgch_2} = \frac{\mathrm{c}(1 - \mathrm{p}^2\eta\varsigma_1 - \varsigma)\,\mathrm{tg(ah_1)}}{\mathrm{a}\,G_1G_2^{-1}(\mathrm{p}^2\eta\varsigma_1 - 1) + \varsigma p^2\sqrt{\eta\varsigma_1}\,\mathrm{tg(ah_1)}} \tag{12}$$

Здесь и далее будем пользоваться обозначениями:

$$\eta = \frac{S^2}{S_1^2},\ \varsigma = \frac{f^2\mu_0^2}{\hat{b}S_2^2},\ \varsigma_1 = \frac{S_1^2}{\gamma^2H_0^2},\ \vartheta = \frac{S_1^2}{S_2^2},\ \vartheta\eta = \frac{S^2}{S_2^2},$$
$$\frac{\Omega^2}{\hat{b}^2} = p^2\eta\varsigma_1,\ a = p\sqrt{\eta - 1},\ c = p\sqrt{\frac{(\vartheta\eta - 1)(1 - p^2\eta\varsigma_1) + \varsigma}{1 - p^2\eta\varsigma_1 - \varsigma}}, \tag{13}$$

$S$ – скорость искомой волны, $\varsigma$ характеризует намагниченность насыщения ферромагнетика, $\varsigma_1$ характеризует внешнее поле $\vec{H}_0$.

Из (12) легко получить дисперсионное уравнение для конструкции магнитный слой/немагнитное полупространство, для этого необходимо устремить $h_1$ к бесконечности:

$$\mathrm{tg}ch_2 = \frac{c\,(1-p^2\,\eta\varsigma_1-\varsigma)}{p\sqrt{1-\eta}G_1G_2^{-1}(p^2\,\eta\varsigma_1-1)+\varsigma p^2\sqrt{\eta\varsigma_1}}\ . \qquad (14)$$

Далее исследуем вопрос существования УСВ. Вначале это сделаем для конструкции магнитный слой/немагнитное полупространство. Из (14) видно, что условием существования УСВ является условие положительности подкоренных выражений, откуда следует следующая система:

$$(\vartheta\eta-1)(1-p^2\,\eta\varsigma_1)+\zeta>0,\ 1-p^2\,\eta\varsigma_1-\zeta>0,\ 1-\eta>0\ . \qquad (15)$$

Третье уравнение системы (15) означает, что скорость искомых УСВ должна быть меньше скорости упругих волн в подложке: $S<S_1$. Упростим (15), сделав предположение, что имеет место следующее условие:

$$p^2\,\eta\varsigma_1 \ll 1. \qquad (16)$$

Это условие в исходных переменных определяет следующий диапазон частот УСВ:

$$\omega \ll \omega_H = \gamma H_0\,. \qquad (17)$$

Здесь $\omega_H$ – собственная частота прецессии спина [1-3]. Таким образом, для диапазона частот меньших собственной частоты прецессии спина в ферромагнетике, система (15) принимает вид:

$$\vartheta\eta-1+\zeta>0,\ 1-\zeta>0,\ 1-\eta>0\ . \qquad (18)$$

А соответствующее дисперсионное уравнение (14), с учётом (16), представляется следующим образом:

$$\mathrm{tg}\bar{c}h_2 = \frac{\bar{c}\,(\varsigma-1)}{p\sqrt{1-\eta}G_1G_2^{-1}}\ ,\bar{c} = p\sqrt{\frac{\vartheta\eta-1+\zeta}{1-\zeta}}\ . \qquad (19)$$

Из (18) следует условие существования УСВ для конструкции магнитный слой/немагнитное полупространство при выполнении условия (17):

$$\sqrt{1-\zeta}S_2 < S < S_1\,. \qquad (20)$$

Нетрудно заметить, что для немагнитного слоя $(\zeta=0)$ это условие переходит в классическое условие существования волн Лява для обычных (немагнитных) сред. Анализируя соотношение (20), заключаем, что даже в том случае, когда обычные условия существования волн Лява для немагнитных сред не выполняются, для конструкции с магнитным слоем с той же скоростью упругих волн $S_2$, при соответствующем выборе магнитных параметров слоя и интенсивности постоянного, внешнего магнитного поля $\vec{H}_0$, можно добиться появления УСВ типа Лява.

Перейдём к определению условий существования УСВ в общем случае. Из (15) следует:

а) если $\eta_0<\eta_1$ , то УСВ нет,

б) если $\eta_1<\eta_0<\eta_2$, то УСВ существуют и их диапазон скоростей определяется неравенствами:

$$\eta_1<\eta<\eta_0$$

в) если $\eta_0>\eta_2$, то диапазон скоростей УСВ определяется неравенствами:

$$\eta_1<\eta<\eta_2\,.$$

Выше введены обозначения:

$$\eta_0=\frac{1-\zeta}{p^2\zeta_1},\eta_{2,1}=\frac{\vartheta+p^2\zeta_1\pm\sqrt{(\vartheta+p^2\zeta_1)^2+4\vartheta p^2\zeta_1\zeta}}{2\vartheta p^2\zeta_1}\,.$$

В заключение приведём результаты численного исследования для конструкции магнитный слой-немагнитная подложка в диапазоне частот $\omega \ll \omega_H$. Параметры ферромагнетика таковы:

$S_2 = 3,8 \cdot 10^3$ м/с, $\rho_2 = 5,17 \cdot 10^3$ кг/м$^3$, $G_2 = 7,64 \cdot 10^{10}$ Н/м$^2$, $\mu_0 = 139,3 \cdot 10^{-4}$ Тл, $H_0 = 870 \cdot 10^{-4}$ Тл, а немагнитная подложка имеет параметры: $S_1 = 5,03 \cdot 10^3$ м/с, $\rho_1 = 4,5 \cdot 10^3$ кг/м$^3$, $G_1 = 1,14 \cdot 10^{11}$ Н/м$^2$ [9].

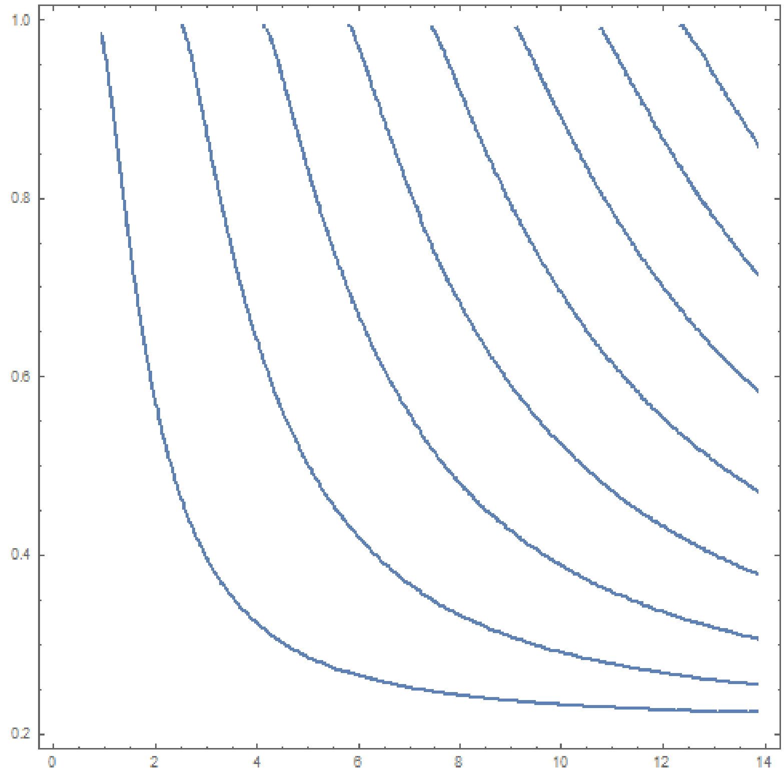



Рис. 2

Анализируя и далее сравнивая представленный на рис.2 график для магнитного слоя с графиком для немагнитного слоя [12], замечаем, что для магнитного случая происходит расширение полосы скоростного диапазона возникающих упруго-спиновых волн, как и в случае свободного края [12], а также происходит сближение ветвей различных мод упруго-спиновых волн.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Ахиезер А.И., Барьяхтар В.Г., Пелетминский С.В. Спиновые волны. М.: Наука, 1967. 368с.
2. Можен Ж. Механика электромагнитных сплошных сред. М.: Мир, 1991. 560с.
3. Гуревич А.Г. Магнитный резонанс в ферритах и ферромагнетиках. М.: Наука, 1973. 591с.
4. Maugin G. A., Hakmi A. Magnetoelastic surface waves in elastic ferromagnets. //J. Acoust. Soc. Amer., 77, p.1010-1026.
5. Белубекян М.В. О поверхностных волнах Лява в случае композиционного слоя. /В сб. Статей: «Актуальные проблемы неоднородной механики», Ереван, 1991. С.25-29.
6. S.A. Nikitov, Ph. Tailhades, C.S. Tsai. Spin waves in Periodic Magnetic Structures – Magnonic crystals. //J.Magnet.Mater. V.23. №3. 2001, pp.320-331.
7. Багдасарян Г.Е. Существование и характер распространения пространственных спиновых поверхностных волн в ферромагнетиках. // Изв. АН РА. Физика. 2009. №6. С.405-416.
8. Danoyan Z.N., Piliposian G.T., Hasanyan D.J. Reflection of spin and spin-elastic waves at the interface of a ferromagnetic half-space. Waves in Random and Complex Media. -Vol.19, №4, November –2009, pp. 567–584.
9. Hasanyan D.J., Batra R.C. Antiplane shear waves in two contacting ferromagnetic half spaces. //J.Elast (2011) 103: 189-203.
10. Camley R.E. Magnetoelastic waves in a ferromagnetic film on a nonmagnetic substrate. //J. Appl. Phys., 50 (8), 1979, pp. 5272-5284.

11. Van de Vaart, Mathews Magnetoelastic Love waves in a magnetic layered nonmagnetic substrate. //Appl. Phys. Lett. V.16, 5, pp. 222-224.
12. Агаян К.Л., Атоян Л.А., Саакян С.Л. Распространение упруго-спиновых волн в магнито-упорядоченных двухслойных структурах. //Изв. НАН РА. Механика. 2019. Т.72. №1. С.3-9.

**Сведения об авторах:**

**Агаян Каро Леренцович** – Д.ф.-м.н., ведущий науч.сотр. Института механики НАН РА.
**Адрес:** РА, 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24/2.
**E-mail:** karoagayan@mail.ru

**Атоян Левон Арутюнович** – К.ф.-м.н., ст.науч. сотр. Института механики НАН РА.
**Адрес:** РА, 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2.
**E-mail:** levous@mail.ru

**Саакян Саак Левонович** – доцент кафедры «Численный анализ и матем. моделирование» Ереванского Гос. Университета.
**Тел.:** (+37477) 002-408; **E-mail:** ssahakyan@ysu.am

# ПЕРЕДАЧА НАГРУЗКИ ОТ СТРИНГЕРА К СОСТАВНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С МЕЖФАЗНОЙ ТРЕЩИНОЙ

**Акопян В.Н., Амирджанян А.А., Акопян Л.В.**

В работе получена определяющая система сингулярных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений задачи о передаче нагрузки от деформируемого стрингера к кусочно-однородной полуплоскости с межфазной трещиной относительно дислокации точек берегов трещины и касательных контактных напряжений, действующих под стрингером. Решение определяющей системы построено методом механических квадратур. Проведён численный расчет и выявлены особенности изменения интеграла Черепанова-Райса $J$ в концевых точках трещины, раскрытия трещины и контактных напряжений под стрингером в зависимости от физических и геометрических характеристик поставленной задачи.

## Постановка задачи и вывод определяющих уравнений

Рассмотрим плоско-деформированное состояние кусочно-однородной полуплоскости, состоящей из бесконечной упругой полосы толщины $h$ и упругой полуплоскости с коэффициентами упругости $E_1, \nu_1$ и $E_2, \nu_2$ соответственно, отнесённой к декартовой системе координат $Oxy$, ось $Ox$ которой направлена по линии стыка полосы и полуплоскости. При этом, будем полагать, что по интервалу $(-a, a)$ линии соединения полосы и полуплоскости, составная полуплоскость расслаблена межфазной трещиной, на берега которой действуют одинаково распределённые нормальные нагрузки интенсивности $p_0(x)$, а на участке $(c, d)$ свободной границы полосы $y = h$ усилена упругим тонким стрингером толщины $h_s$ и приведёнными модулями деформаций $E_s$, на который в точке $x = c$ действует сосредоточенная горизонтальная нагрузка величины $T_0$.

Ставится задача определить контактные напряжения под стрингером, коэффициенты интенсивности разрушающих напряжений и значения интеграла Черепанова-Райса $J$ [1] в концевых точках трещины. Нужно также определить раскрытие трещины и изучить закономерности изменения этих величин в зависимости от физических и геометрических характеристик поставленной задачи.

Для решения поставленной задачи введём в рассмотрение функции неизвестных контактных напряжений под стрингером $\tau(x)$ и функции скачков нормальных и горизонтальных смещений соответственно $V(x)$, $U(x)$. При помощи интегрального преобразования Фурье [2,3] решим следующую вспомогательную граничную задачу:

$$\begin{aligned}
&\tau_{xy}^{(1)}(x,h) = 0 && \left(x \notin (c,d)\right); \\
&\tau_{xy}^{(1)}(x,h) = \tau(x) && x \in (c,d); \\
&u_1(x,0) - u_2(x,0) = U(x) && \left(x < |a|\right); \\
&v_1(x,0) - v_2(x,0) = V(x) && \left(x < |a|\right); \\
&\sigma_y^{(1)}(x,h) = 0 && \left(-\infty < x < \infty\right);
\end{aligned} \tag{1.1a}$$

$$\begin{aligned}
&\sigma_y^{(1)}(x,0) = \sigma_y^{(2)}(x,0) && \left(x > |a|\right); \\
&\tau_{xy}^{(1)}(x,0) = \tau_{xy}^{(2)}(x,0) && \left(x > |a|\right); \\
&u_1(x,0) = u_2(x,0) && \left(x > |a|\right); \\
&v_1(x,0) = v_2(x,0) && \left(x > |a|\right),
\end{aligned} \tag{1.1b}$$

для составной полуплоскости и определим поля напряжений и смещений через введённые функции.

Здесь $\sigma_x^{(j)}(x,y)$, $\sigma_y^{(j)}(x,y)$ и $\tau_{xy}^{(j)}(x,y)$ $(j=1,2)$ – соответственно, нормальные и касательные компоненты напряжений, действующие в полосе и в полуплоскости, а $u_j(x,y)$ и $v_j(x,y)$ – соответственно, горизонтальные и вертикальные смещения точек полосы и полуплоскости.

Далее, используя полученные представления для напряжений и смещений, удовлетворим условиям на берегах трещины и контакта стрингера с полуплоскостью, которые можно записать в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{du_1(x,h)}{dx} = \varepsilon_s(x,t) & (c<x<d); \\ \sigma_y^{(1)}(x,0)+\sigma_y^{(2)}(x,0) = -2p_k(x) & (-a<x<a); \\ \tau_{xy}^{(1)}(x,0)+\tau_{xy}^{(2)}(x,0) = 0 & (-a<x<a), \end{cases} \tag{1.2}$$

где $\varepsilon_s(x,t)$ – осевые деформации включений. В итоге, учитывая, что осевая деформация стрингера от приложенных в точке $c$ нагрузки определяется формулой [4]:

$$\varepsilon_s(x) = \frac{1}{h_s E_s}\left[T_0 - \int_c^x \tau(s)\,ds\right], \tag{1.3}$$

и введя обозначение $V_*(s) = U'(s)+iV'(s)$, придём к следующей определяющей системе сингулярных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} -\frac{l}{d}V_*(s)+\frac{m}{\pi i d}\int_{-a}^{a}\frac{V_*(s)ds}{s-x}+\int_{-a}^{a}\left[R_{11}^*(x-s)V_*(s)+R_{12}^*(x-s)\bar{V}_*(s)\right]ds+ \\ +\int_c^d R_{13}^*(x-s)\frac{\tau(s)}{\mu_1}ds = -\frac{p_0(x)}{\mu_1}. \qquad (-a<x<a) \\ -\frac{1}{2\pi\theta_1^-\mu_1}\int_c^d\frac{\tau(s)ds}{s-x}+\int_{-a}^{a}R_{21}^*(x-s)V_*(s)ds+\int_{-a}^{a}R_{22}^*(x-s)\bar{V}_*(s)ds+ \\ +\int_c^d R_{23}^*(x-s)\frac{\tau(s)}{\mu_1}ds = \frac{1}{h_s E_s}\left[T_0-\int_c^x\tau(s)ds\right]; \quad (c<x<d). \end{gathered} \tag{1.4}$$

При этом,

$$d = \left(\theta_1^- + \mu\theta_1^+\right)\left(\theta_2^+ + \mu\theta_2^-\right); \qquad l = 2\mu\left(\mu\theta_1\theta_2^- - \theta_2\theta_1^-\right); \quad m = -2\mu\left(\theta_1^- + \mu\theta_2^-\right);$$

$$\theta_j = \frac{\mu_j}{\lambda_j+2\mu_j} = \frac{1\text{-}2\nu_j}{2\left(1\text{-}\nu_j\right)}; \quad \theta_j^- = 1-\theta_j; \quad \theta_j^+ = 1+\theta_j; \quad (j=1,2),$$

а ядра $R_{ij}^*(x)$ – регулярные функции, значения которых здесь не приводятся.

Систему (1.4) нужно рассматривать совместно с условиями непрерывности смещений в концевых точках трещин и равновесия стрингера:

$$\int_{-a}^{a} V_*(x)dx = 0; \quad \int_c^d \tau(x)\,dx = T_0. \tag{1.5}$$

Решение системы (1.6) построено методом механических квадратур [5]. Проведён численный анализ и изучены закономерности изменения контактных напряжений под стрингером, интеграла Черепанова-Райса $J$ в концевых точках трещины и раскрытия трещины в зависимости от физико-механических и геометрических параметров задачи. Показано, что при увеличении жёсткости стрингера увеличивается взаимовлияние трещины и стрингера, а удаление стрингера от трещины приводит к уменьшению их взаимовлияния.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Stress Intensity Factors Handbook. Volume 1. Editor-in-Chief Y. Murakami. The Society of Materials Science, Japan. Pergamon Press, Oxford (1987).
2. Акопян В.Н. Смешанные граничные задачи о взаимодействии сплошных деформируемых тел с концентраторами напряжений различных типов. Ереван: Изд. Гитутюн НАН РА, 2014. 322с.
3. Kudish I., Amirjanyan H, and Hakobyan V - Probabilistic Modeling of Coating Delamination: FFW 2018, 9-10 July 2018, Ghent University, Belgium. In book: Proceedings of the 7th International Conference on Fracture Fatigue and Wear January 2019, DOI: 10.1007/978-981-13-0411-8_32, p.359-370
4. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488с.
5. Amirjanyan,H., Sahakyan, A. Mechanical quadrature method as applied to singular integral equations with logarithmic singularity on the right-hand side. Comput.Math. and Math. Phys. (2017) 57: 1285.



**<u>Сведения об авторах:</u>**

**Акопян Ваграм Наслетникович –** доктор физ.-мат. наук., проф., директор Института механики НАН РА, тел.: (37410) 52-48-90, e-mail: vhakobyan@sci.am

**Амирджанян Арутюн Арменович** – кандидат физ.-мат. наук., научный сотрудник Института механики НАН РА, тел.: (37410) 52-48-90, e-mail: amirjanyan@gmail.com

**Акопян Лусине Ваграмовна** – кандидат физ.-мат. наук., научный сотрудник Института механики НАН РА, тел.: (37410) 52-48-90

# АНТИПЛОСКАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СОСТАВНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С МЕЖФАЗНЫМИ ЧАСТИЧНО ОТОРВАННЫМИ ОТ МАТРИЦЫ ТОНКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

**Акопян В.Н., Даштоян Л.Л., Амирджанян А.А.**

Рассмотрены сдвиговые стационарные колебания абсолютно жёсткого полосового штампа с плоским основанием на граничной плоскости составного полупространства, полученного при помощи соединения однородного слоя и полупространства с межфазными полосовыми тонкими абсолютно жёсткими включениями, одна из длинных сторон которых оторвана от матрицы. Считается, что полупространство деформируется под воздействием периодически изменяющихся во времени сосредоточенных линейных нагрузок, приложенных к штампу и включениям. Получена ключевая система СИУ второго рода относительно амплитуд контактных напряжений, действующих под штампом и включениями, а также дислокации точек берегов трещин. Получены простые формулы для определения коэффициентов интенсивности в концевых точках трещин и раскрытия трещин.

**Постановка задачи и вывод определяющих уравнений**

Пусть составное упругое полупространство, отнесённое к декартовой системе координат $Oxyz$ и составленное из слоя толщины $h$ и полупространства, изготовленных из разнородных материалов с модулями сдвигов $\mu_1$ и $\mu_2$, соответственно, заполняющих соответственно области $0 \le y \le h$ и $y \le 0$, на плоскости их стыка $y = 0$ ослаблено магистральными межфазными трещинами, занимающими область $\left\{ y = 0;\ -\infty < z < \infty;\ x \in L = \bigcup_{n=1}^{N} (a_n, b_n) \right\}$ верхние берега которых свободны от нагрузок, а на нижние берега спаяны тонкие, полосовые абсолютно жёсткие включения. Полагается, что составное полупространство деформируется при помощи абсолютно жёсткого полосового штампа с плоским основанием, приложенного к свободной поверхности слоя в области $\{ y = 0;\ a \le x \le b;\ -\infty < z < \infty \}$ и находящегося под воздействием периодически изменяющейся касательной сосредоточенной нагрузки $T_0 e^{i\omega t}$, а также касательных сосредоточенных нагрузок интенсивности $Q_n e^{i\omega t}$ $(n = 1 - N)$, приложенных к включениям.

Ставится задача: определить закономерности изменения контактных напряжений, действующих под штампом и включениями, раскрытия трещин и коэффициента интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещин в зависимости от физико-механических и геометрических характеристик задачи, а также частоты вынужденных колебаний.

Для решения поставленной задачи перейдём к амплитудам смещений $W_j(x, y)$ и напряжений $\tau_{yz}^{(j)}(x, y)$ $(j = 1, 2)$ и введём в рассмотрение неизвестные функции амплитуд контактных напряжений, действующих под штампом $\tau(x)$, функции амплитуд разности смещений точек берегов трещин $W(x)$ и функции амплитуд контактных напряжений на спаянной стороне включения $T(x)$ и рассмотрим следующую вспомогательную граничную задачу:

$$
\begin{aligned}
&W_1(x, 0) = W_2(x, 0) && (x \notin L) \\
&\tau_{yz}^{(1)}(x,\ 0) = \tau_{yz}^{(2)}(x,\ 0) && (x \notin L) \\
&\tau_{yz}^{(1)}(x,\ h) = 0 && (x < a;\ x > b)
\end{aligned}
\tag{1a}
$$

$$
\begin{aligned}
&\tau_{yz}^{(1)}(x, h) = \tau(x) \qquad (a < x < b); \\
&W_1(x, 0) - W_2(x, 0) = W(x) \quad (x \in L); \\
&\tau_{yz}^{(1)}(x, 0) - \tau_{yz}^{(2)}(x, 0) = T(x) \quad (x \in L),
\end{aligned}
\tag{1б}
$$

где $W_j\left(x,y\right)\left(j=1,2\right)$ – соответственно, амплитуда смещений точек слоя и полупространства по направлению оси $Oz$, удовлетворяющие, каждая в области своего определения, уравнению

$$\frac{\partial^2 W_j}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W_j}{\partial y^2}=\frac{\omega^2}{(c_2^{(j)})^2}\frac{\partial^2 W_j}{\partial t^2}, \tag{2}$$

где $c_2^{(j)}$ $\left(j=1,2\right)$ – скорости распространения сдвиговых волн соответственно в слое и полупространстве, а $\tau_{yz}^{(j)}\left(x,y\right)$ $\left(j=1,2\right)$ – амплитуды касательных напряжений, действующих в слое и полупространстве соответственно и связанные со смещениями известными формулами:

$$\tau_{yz}^{(j)}\left(x,y\right)=\mu_j\frac{\partial W_j\left(x,y\right)}{\partial y}\quad\left(j=1,2\right) \tag{3}$$

При помощи обобщённого интегрального преобразования Фурье решим вспомогательную граничную задачу (1) и определим амплитуды функций смещений под штампом и включениями, а также амплитуды функций напряжения на верхнем берегу трещин через введённые неизвестные функции $W(x)$, $\tau(x)$ и $T(x)$. Используя полученные представления, удовлетворим условиям на берегах трещин и в участке, где действует штамп:

$$\begin{aligned}
&\tau_{yz}^{(1)}(x,\ 0)=0 && (x\in L)\\
&W_2'\left(x,0\right)=0 && (x\in L)\\
&W_1\left(x,h\right)=0 && (a<x<b)
\end{aligned} \tag{4}$$

В итоге, для определения неизвестных контактных напряжений под штампом $\tau\left(x\right)$, функции дислокации точек берегов трещины $W'\left(x\right)$ и контактных напряжений под включениями $T\left(x\right)$ придём к определяющей системе сингулярных интегральных уравнений первого рода. Далее, приведя полученную систему к каноническому виду и введя обозначения

$$\varphi_1\left(x\right)=\tau\left(x\right)/\mu_2:\ \varphi_j\left(x\right)=W'\left(x\right)+\left(-1\right)^{j+1}\sqrt{\mu}T\left(x\right)/\mu_2\quad\left(j=2,3\right),$$

придём к следующей системе сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{cases}
\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_a^b\frac{\varphi_1\left(s\right)ds}{s-x}+\int_a^b R_{1,1}\left(s-x\right)\varphi_1\left(s\right)ds+\sum_{i=2}^{3}\int_L R_{1,i}\left(s-x\right)\varphi_i\left(s\right)ds=0\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\left(a<x<b\right);\\
\varphi_j\left(x\right)+\dfrac{\left(-1\right)^{j+1}\sqrt{\mu}}{\pi}\displaystyle\int_L\frac{\varphi_j\left(s\right)ds}{s-x}+\int_a^b R_{2,1}\left(s-x\right)\varphi_1\left(s\right)ds+\\
+\displaystyle\sum_{i=2}^{3}\int_L R_{j,i}\left(s-x\right)\varphi_i\left(s\right)ds=0\qquad\left(x\in L;\ j=2,3\right).
\end{cases} \tag{5}$$

которую нужно рассматривать с учётом уравнений движения штампа и включений при условиях непрерывности смещений в концевых точках трещин, которые в рассматриваемом случае можно записать в следующем виде:

$$\int_a^b \varphi_1(x)\,dx = T_0 / \mu_2;$$
$$\int_{a_j}^{b_j} \varphi_i(x)\,dx = (-1)^{i+1}\sqrt{\mu}Q_n / \mu_2 \quad (i = 2,3;\;\; j = 1 - N). \qquad (6)$$

Здесь функции $R_{ij}(t)$ – линейные комбинации функций $K_{ij}(t)$.

В частном случае, когда составное полупространство расслаблено одной магистральной межфазной трещиной, нижний берег которой усилен абсолютно жёстким включением и деформируется при помощи абсолютно жёсткого полосового штампа с плоским основанием, приложенного к свободной поверхности слоя, построено решение определяющей системы уравнений методом механических квадратур. Проведён численный расчёт и изучены закономерности изменения важных механических характеристик задачи, каковыми являются модуль амплитуды раскрытия трещины, модули коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещины, а также контактные напряжения, действующие под штампом и под включением, в зависимости от физико-механических и геометрических характеристик задачи.

***Исследование выполнено при финансовой поддержке КН МОН РА в рамках научного проекта 18T-2C290.***

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Акопян В.Н., Амирджанян А.А., Акопян Л.В. Вынужденные сдвиговые колебания штампа на границе составного полупространства с межфазными дефектами // Известия НАН Армении. Механика. 2019. Т.72. № 2. С. 6-23.
2. Акопян В.Н., Саргсян А.О. Об одной динамической смешанной задаче для составного пространства с трещиной при антиплоской деформации.// В сб. статей «Избранные вопросы теории упругости, пластичности и ползучести», посв. 75-летию академика М.А. Задояна, Ереван: «Гитутюн», 2006, С.50-56.
3. Саакян А.В. Метод дискретных особенностей в применении к решению сингулярных интегральных уравнений с неподвижной особенностью. // Известия НАН Армении. Механика. 2000. Т.53. № 3. С.12-19.

**Сведения об авторах:**

**Акопян Ваграм Наслетникович -** доктор физ.-мат. наук, проф., директор Института механики НАН РА, **тел.:** (37410) 52-48-90, **e-mail:** vhakobyan@sci.am

**Амирджанян Арутюн Арменович** – кандидат физ.-мат. наук, научный сотрудник Института механики НАН РА, **тел.:** (37410) 52-48-90, **e-mail:** amirjanyan@gmail.com

**Даштоян Лилит Левоновна** – кандидат физ.-мат. наук, учёный секретарь Института механики НАН РА, **тел.:** (37410) 56-81-89, **e-mail:** lilit_dashtoyan@mechins.sci.am

# ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СОСТАВНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С МЕЖФАЗНЫМИ ЧАСТИЧНО ОТОРВАННЫМИ ОТ МАТРИЦЫ ТОНКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

**Акопян Л.В.**

Рассмотрены сдвиговые стационарные колебания периодической системы полосовых штампов с плоскими основаниями на граничной плоскости составного полупространства, состоящего из слоя и полупространства с периодической системой межфазных туннельных трещин, на одном из берегов которых спаяны тонкие полосовые абсолютно жёсткие включения. Выведена ключевая система СИУ второго рода относительно амплитуд контактных напряжений, действующих под штампам и включениями, а также дислокаций точек берегов трещин. Решение последней построено методом механических квадратур. Получены простые формулы для определения коэффициентов интенсивности в концевых точках трещин и раскрытия трещин.

## 1. Постановка задачи и вывод определяющих уравнений

Пусть составное упругое полупространство, отнесённое к декартовой системе координат $Oxyz$ и составленное из слоя толщины $h$ и полупространства, изготовленных из разнородных материалов с модулями сдвигов $\mu_1$ и $\mu_2$, заполняющих соответственно, области $0 \le y \le h$ и $y \le 0$, на плоскости их стыка $y = 0$, ослаблено магистральными межфазными периодическими с периодом $2l$ трещинами, занимающими область $\{y = 0; -\infty < z < \infty; -c + 2nl \le x \le -c + 2nl\}$ $(n \in Z)$, верхние берега которых свободны от нагрузок, а на нижние берега спаяны тонкие, полосовые абсолютно жёсткие включения. Полагается, что составное полупространство деформируется при помощи периодической с периодом $2l$ системы абсолютно жёстких полосовых штампов с плоскими основаниями, приложенными к свободной поверхности слоя в области $\{y = h; a + 2nl \le x \le b + 2nl; -\infty < z < \infty\}$, $(n \in Z)$ и находящихся под воздействием периодически изменяющейся касательной сосредоточенной нагрузки $T_0 e^{i\omega t}$, а также касательных сосредоточенных нагрузок интенсивности $Q_0 e^{i\omega t}$, приложенных к включениям.

Требуется определить закономерности изменения важных механических характеристик задачи, каковыми являются контактные напряжения, действующие под штампами и включениями, раскрытия трещин и коэффициенты интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещин от физико-механических, геометрических параметров и частоты вынужденных колебаний.

Поставленную задачу в базовой плоскости $Oxy$ можно записать в виде следующей граничной задачи:

$$\begin{array}{ll}
W_1(x,0,t) = W_2(x,0,t) & x \notin (-c + 2nl;\ c + 2nl) \\
\tau_{yz}^{(1)}(x,\ 0,\ t) = \tau_{yz}^{(2)}(x,\ 0,\ t) & x \notin (-c + 2nl;\ c + 2nl) \\
\tau_{yz}^{(1)}(x,\ h,\ t) = 0 & x \notin (a + 2nl;\ b + 2nl) \\
\tau_{yz}^{(1)}(x,\ +0,\ t) = 0 & (-c + 2nl < x < c + 2nl) \quad (n \in Z) \\
W_2(x,-0,t) = \text{const.}e^{i\omega t} & (-c + 2nl < x < c + 2nl) \\
W_1(x,h,t) = \text{const.}e^{i\omega t} & (a + 2nl < x < b + 2nl)
\end{array} \tag{1}$$

Здесь $W_j(x,y,t)(j = 1,2)$ – соответственно, смещения точек слоя и полупространств по направлению оси $Oz$, удовлетворяющие, каждая в области своего определения, волновому уравнению, а $\tau_{yz}^{(j)}(x,y,t)$ $(j = 1,2)$ – касательные напряжения, действующие в слое.

Далее, перейдём к амплитудам смещений $W_j(x,y)$ и напряжений $\tau_{yz}^{(j)}(x,y)$ $(j=1,2)$ и, используя результаты работы [1] и сохранив обозначения, запишем ключевое уравнение задачи в случае, когда имеются $2N$ межфазных трещин и штампов. Затем, учитывая периодичность функций неизвестных контактных напряжений под штампами $\tau(x)$, функции дислокации точек берегов трещины $W'(x)$ и контактных напряжений под включениями $T(x)$, перейдём к пределу, когда $N\to\infty$. Тогда, используя известные формулы:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\xi-x+2lk}=\frac{\pi}{2l}\operatorname{ctg}\frac{\pi(\xi-x)}{2l};\qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{ikx}=2\pi\delta(x-2\pi n)\qquad (n\in Z),\tag{2}$$

где $\delta(x)$ – функция Дирака, придём к следующей определяющей системе сингулярных интегральных уравнений с ядром Гильберта:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2l\mu_1}\displaystyle\int_a^b\operatorname{ctg}\frac{\pi(s-x)}{2l}\tau(s)\,ds+\int_a^b R_{1,1}(s-x)\tau(s)\,ds+\int_{-c}^{c}R_{1,2}(s-x)W'(s)\,ds+\\ \qquad+\displaystyle\int_{-c}^{c}R_{1,3}(s-x)T(s)\,ds=0 \qquad\qquad (a<x<b);\\ \dfrac{T(x)}{1+\mu}+\dfrac{\mu_2}{2l(1+\mu)}\displaystyle\int_{-c}^{c}\operatorname{ctg}\frac{\pi(s-x)}{2l}W'(s)\,ds+\int_a^b R_{2,1}(s-x)\tau(s)\,ds+\\ \displaystyle\int_{-c}^{c}R_{2,2}(s-x)W'(s)\,ds+\int_{-c}^{c}R_{2,3}(s-x)T(s)\,ds=0 \qquad (|x|<c)\\ -\dfrac{W'(x)}{1+\mu}-\dfrac{1}{2l\mu_1(1+\mu)}\displaystyle\int_{-c}^{c}\operatorname{ctg}\frac{\pi(s-x)}{2l}T(s)\,ds+\int_a^b R_{3,1}(s-x)\tau(s)\,ds+\\ \displaystyle\int_{-c}^{c}R_{3,2}(s-x)W'(s)\,ds+\int_{-c}^{c}R_{3,3}(s-x)T(s)\,ds=0 \qquad (|x|<c);\end{cases}\tag{3}$$

при условиях равновесия штампа, включений и непрерывности смещений в концевых точках трещины:

$$\int_a^b\tau(x)\,dx=T_0;\quad \int_{-c}^{c}T(x)\,dx=Q_0;\quad \int_{-c}^{c}W'(x)\,dx=0;\tag{4}$$

Здесь:

$$R_{ij}(x)=\frac{1}{2l}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{Q_{ij}(\pi hk/l)}{\Delta(\pi hk/l)}\exp\left(\frac{i\pi k}{l}x\right)\qquad (i,j=1,2,3),$$

где значения ядер $Q_{ij}(x)$ приведены в работе [1].

Для решения полученной системы определяющих уравнений (3) приведём её к каноническому виду. С этой целью умножим последнее уравнение (3) на $\pm\sqrt{\mu}/\mu_2$ и просуммируем со вторым уравнением. В итоге, введя новые безразмерные искомые функции по формулам

$$\varphi_1(x)=\tau(x)/\mu_2:\ \varphi_j(x)=W'(x)+(-1)^{j+1}\sqrt{\mu}T(x)/\mu_2\quad (j=2,3)\tag{5}$$

и обозначения

$$R_{11}^*(t)=\frac{1}{2l}\operatorname{ctg}\frac{\pi t}{2l}-\frac{1}{\pi t}+\mu_2 R_{11}(t)/\mu;\ \ R_{1j}^*(t)=\left[R_{12}(t)+(-1)^{j+1}\mu_2 R_{13}(t)/\sqrt{\mu}\ \right]/2\mu\ ;$$

$$R_{21}^*(t)=-(1+\mu)\left[\sqrt{\mu}R_{21}(t)+\mu_2 R_{31}(t)\right];\quad R_{2j}^*(t)=(-1)^{j+1}\sqrt{\mu}\delta_{2j}\left(\frac{1}{2l}\operatorname{ctg}\frac{\pi t}{2l}-\frac{1}{\pi t}\right)-$$

$$-\frac{(1+\mu)}{2}\left[\sqrt{\mu}R_{22}(t)/\mu_2+R_{32}(t)+(-1)^{j+1}\left(R_{23.}(t)+\mu_2 R_{33.}(t)/\sqrt{\mu}\right)\right];$$

$$R_{31}^*(t)=(1+\mu)\left[\sqrt{\mu}R_{21}(t)-\mu_2 R_{31}(t)\right];$$

$$R_{3j}^*(t)=(-1)^{j+1}\sqrt{\mu}\delta_{2j}\left(\frac{1}{2l}\operatorname{ctg}\frac{\pi t}{2l}-\frac{1}{\pi t}\right)-$$

$$-\frac{(1+\mu)}{2}\left[R_{32}(t)-\sqrt{\mu}R_{22}(t)/\mu_2-(-1)^{j+1}\left(R_{23.}(t)-\mu_2 R_{33.}(t)/\sqrt{\mu}\right)\right]\ (j=2,3),$$

где $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера, придём к следующей системе сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_a^b\frac{\varphi_1(s)ds}{s-x}+\int_a^b R_{1,1}^*(s-x)\varphi_1(s)ds+\sum_{i=2}^{3}\int_{-c}^{c}R_{1,i}^*(s-x)\varphi_i(s)ds=0\ \ (a<x<b);\\ \varphi_j(x)+\dfrac{(-1)^{j+1}\sqrt{\mu}}{2l}\displaystyle\int_{-c}^{c}ctg\frac{\pi(s-x)}{2l}\varphi_j(s)ds+\int_a^b R_{j,1}^*(s-x)\varphi_1(s)ds+\\ +\displaystyle\sum_{i=2}^{3}\int_{-c}^{c}R_{i,j}^*(s-x)\varphi_i(s)ds=0\qquad\qquad (|x|<c;\ j=2,3).\end{cases}\tag{6}$$

При этом, условия (6) примут вид:

$$\int_a^b\varphi_1(x)dx=T_0/\mu_2;\ \int_{-c}^{c}\varphi_i(x)dx=(-1)^i\sqrt{\mu}Q_0/\mu_2\ \ (i=2,3).\tag{7}$$

Решение системы (8) построено методом механических квадратур [2]. Для этого при помощи замены переменных $x=pt+q$ $\left(p=(b-a)/2,\ q=(a+b)/2\right)$ в первом из уравнений (6) и $x=ct$ в остальных двух уравнениях (6), сформулируем их на интервале $(-1,1)$ и систему определяющих уравнений и условия (7) запишем в виде:.

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\psi_1(s)ds}{s-x}+\sum_{i=1}^{3}\int_{-1}^{1}K_{1i}^*(s-x)\psi_i(s)ds=0\quad(-1<x<1;\ j=2,3)\\ \psi_j(x)+\dfrac{(-1)^{j+1}\sqrt{\mu}}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\psi_j(s)ds}{s-x}+\sum_{i=1}^{3}\int_{-1}^{1}K_{ji}^*(s-x)\psi_i(s)ds=0.\end{cases}\tag{8}$$

$$\int_{-1}^{1}\psi_1(x)dx=T_0^*;\ \int_{-1}^{1}\psi_j(x)dx=Q_0^*\quad(j=2,3),\tag{9}$$

где

$$\psi_1(x)=\varphi_1(px+q);\ \ \psi_j(x)=\varphi_j(cx)\quad(j=2,3)\,;T_0^*=T_0/p\mu_2;\ \ Q_0^*=\sqrt{\mu}Q_0/p_1\mu_2;$$

$$K_{11}^*(s,x)=pR_{11}^*\left(p(s-x)\right);\quad K_{1i}^*(s,x)=p_1R_{1i}^*(cs-px-q);\quad (i=2,3)$$
$$K_{j1}^*(s,x)=pR_{j1}^*(ps+q-sx);\quad K_{ji}^*(s,x)=cR_{ji}^*\left(c(s-x)\right)\ (i,j=2,3)$$

Легко установить, что в точках $\pm 1$ искомые функции имеют степенную особенность и их можно представить в следующем виде:

$$\psi_1(t)=\frac{\psi_1^*(t)}{\sqrt{1-t^2}};\quad \psi_2(t)=\frac{\psi_2^*(t)}{(1+t)^{\gamma}(1-t)^{1-\gamma}};\quad \psi_3(t)=\frac{\psi_3^*(t)}{(1+t)^{1-\gamma}(1-t)^{\gamma}}. \tag{10}$$

Здесь $\gamma=\dfrac{1}{2\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{2\sqrt{\mu}}{1-\mu}$ при $(\mu<1)$, $\gamma=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{2\sqrt{\mu}}{\mu-1}$ при $(\mu>1)$,

а $\psi_j^*(x)$ – непрерывные функции, ограниченные вплоть до концов интервала $[-1,1]$.

Подставляя значения функций $\psi_j(x)$ $(j=1-3)$ в (8)-(9) и используя соотношения, приведённые в [2], по стандартной процедуре, придём к системе алгебраических уравнений относительно значений $\psi_j^*(\xi_i)$ $\left(j=1-3;\ i=\overline{1,n}\right)$. После определения функций $\psi_j^*(\xi_i)$ нетрудно при помощи интерполяционного многочлена Лагранжа восстановить функции $\psi_j(x)$ и определить амплитуды всех важных механических характеристик, описывающих напряжённо-деформированное состояние кусочно-однородного полупространства.

В частности, для определения коэффициента интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещины получена формула:

$$K_{III}^*(\pm c)=\frac{K_{III}^{(1)}(\pm c)+iK_{III}^{(2)}(\pm c)}{\mu_2}=\sqrt{2\pi}\lim_{t\to\pm1\pm0}|t\pm1|^{1-\gamma}\,\tau_*^{(j)}(\mathrm{t})=\pm\frac{2^{-\gamma-1/2}\sqrt{\pi}\psi_2^*(\pm1)}{(1+\mu)\sin\pi\gamma}.$$

Тогда,

$$K_{III}(\pm c,t)=K_{III}^*(\pm c)e^{i\omega t}=\left|K_{III}^*(\pm c)\right|e^{i(\omega t-\delta)}\left(\delta=-\operatorname{arctg}\left(K_{III}^{(2)}/K_{III}^{(1)}\right)\right).$$

Для определения же амплитуды безразмерного раскрытия трещины и контактных напряжений, действующих под включением, получены формулы:

$$w_*(t)=w(ct)/c=\frac{1}{2}\int_{-1}^{t}\left[\psi_2(\xi)+\psi_3(\xi)\right]d\xi.$$

$$\tau(t)=\frac{\tau_{yz}^{(2)}(ct,0)}{\mu_2}=-\frac{T(ct,0)}{\mu_2}=\frac{\psi_2(t)-\psi_3(t)}{2\sqrt{\mu}}\qquad(-1<t<1)$$

***Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта 18Т-2С290.***

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Акопян В.Н., Амирджанян А.А., Акопян Л.В. Вынужденные сдвиговые колебания штампа на границе составного полупространства с межфазными дефектами // Изв. НАН Армении. Механика. 2019. Т.72. № 2. С.6-23.
2. Sahakyan A.V. Application of the method of discrete singularities for solving the singular integral equations with unmoved singularities. // Proc. NAS RA. Mechanics. 2000. V.53. №3. Pp.12-19. (In Russian).

**Сведения об авторе:**

**Акопян Лусине Ваграмовна** – кандидат физ.-мат. наук., научный сотрудник Института механики НАН РА, **тел.:** (37410) 52-48-90, **e-mail:** mechins.sci.am@gmail.com

**ВЛИЯНИЕ ДЛИТЕЛЬНОГО ЕСТЕСТВЕННОГО СТАРЕНИЯ НА МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА УДАРОПРОЧНЫХ ПОЛИСТИРОЛОВ**

**Арутюнян А.Р.**

В работе исследуется влияние длительного климатического старения в лабораторных условиях при комнатной температуре в течение 40 лет на механические свойства шести различных марок ударопрочного полистирола (УПС). Полученные кривые деформирования в опытах на растяжение указывают, что для всех марок УПС после старения наблюдается эффект упрочнения. Также были проведены испытания УПС на ползучесть при комнатной температуре и постоянной растягивающей силе. Образцы испытывались в течение 30 сут. и не были разрушены. После естественного старения в течение 40 лет образцы разрушались в диапазоне времён до разрушения от 10 мин. до 30 час. в зависимости от марки УПС. Для описания полученных экспериментальных кривых ползучести используется модифицированный вариант уравнения Максвелла, записанного в шкале эффективного времени. Наблюдается хорошее соответствие теоретических и экспериментальных кривых ползучести.

**Введение.** Полимерные и композиционные материалы на их основе широко используются в различных областях техники, авиастроении, ракетостроении, а также в медицине. Физико-механические характеристики этих материалов после длительной эксплуатации изменяются, что, в значительной степени, обусловлено процессом старения [1-6]. Таким образом, необходимы исследования процессов старения этих материалов.

В данной работе исследуется влияние длительного климатического старения в лабораторных условиях при комнатной температуре в течение 40 лет на механические свойства шести различных марок ударопрочного полистирола (УПС). УПС представляют собой полимер-полимерные матричные композиты с полистирольной матрицей, в которой присутствуют каучукообразные включения размером 0,5-5 мкм и объёмной концентрацией в пределах 20-40 %. Данные полистиролы при комнатной температуре находятся в стеклообразном состоянии и в таких условиях способны испытывать значительные деформации, также на много выше ударная вязкость и другие характеристики разрушения по сравнению с обычными полистиролами [7]. У УПС имеется широкий спектр применения, например, они используются при изготовлении дверей, упаковочных контейнеров, внутренней облицовки вагонов и самолетов. Поэтому исследования длительного процесса старения таких композиционных материалов является актуальным.

**Исследование влияния длительного естественного старения на механические свойства УПС при растяжении.**

Испытания проводились на образцах УПС с общей длиной 60 мм, шириной 10 мм, толщиной 4 мм и длиной рабочей части 50 мм. Образцы без старения испытывались на разрывной машине МР-500Т-2 в 1979г. Далее образцы хранились в лабораторных условиях при комнатной температуре в течение 40 лет, а затем были испытаны на разрывной машине TINIUS OLSEN H10K-T. Эксперименты проводились при скоростях нагружения 5 мм/мин и 50 мм/мин.

Экспериментальные диаграммы напряжение-деформация для полистиролов марок УПС 0804 и УПМ 0703 приведены на рис. 1 и 2. Полученные результаты указывают, что для всех марок ударопрочного полистирола спустя 40 лет естественного старения наблюдается эффект упрочнения. Для всех материалов увеличился предел текучести и для многих уменьшилась величина деформации до разрушения.

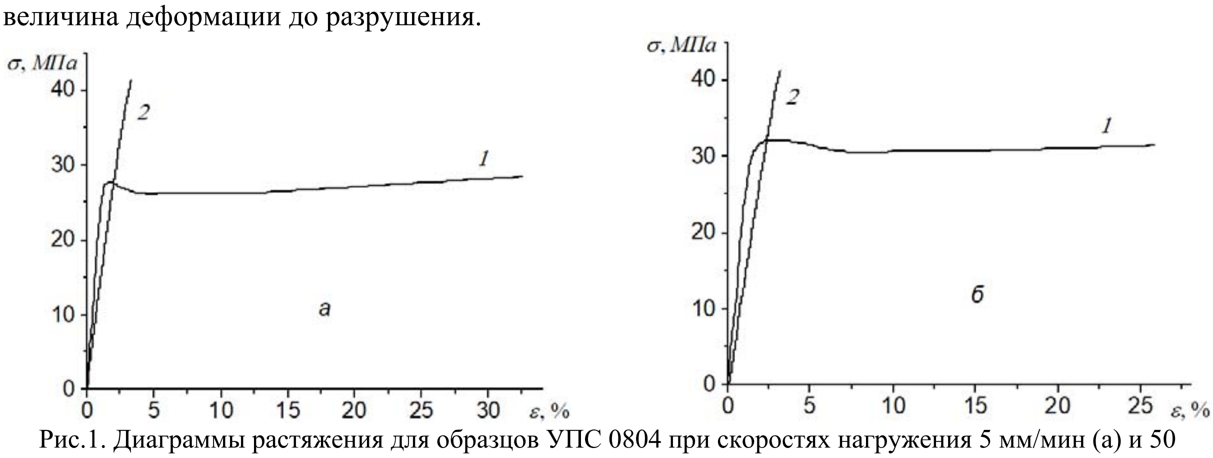



Рис.1. Диаграммы растяжения для образцов УПС 0804 при скоростях нагружения 5 мм/мин (а) и 50 мм/мин (б): 1 – без старения, 2 – со старением в течение 40 лет.

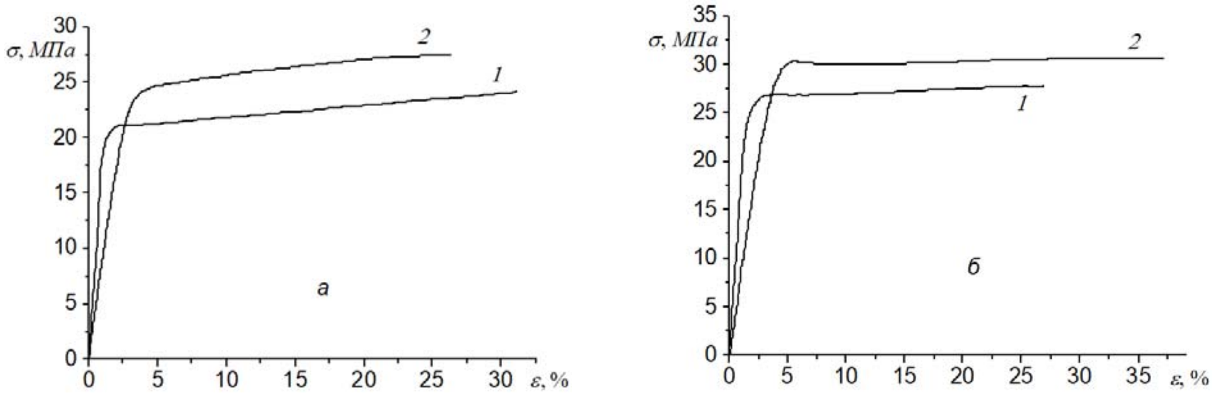



Рис.2. Диаграммы растяжения для образцов УПМ 0703 при скоростях нагружения 5 мм/мин (а) и 50 мм/мин (б): 1 – без старения, 2 – со старением в течение 40 лет.

**Исследование процесса длительного естественного старения УПС в опытах на ползучесть.**

На следующем этапе исследований были проведены испытания УПС на ползучесть при комнатной температуре и постоянной растягивающей силе. Образцы испытывались в течение 30 сут. и не были разрушены. После естественного старения в течение 40 лет образцы разрушались в диапазоне временен до разрушения от 10 мин. до 30 час. в зависимости от марки УПС.

На рис.3 представлены полученные экспериментальные кривые ползучести для образцов марки УПМ 03Л без старения (а) и со старением в течение 40 лет (б). Эксперименты проводились при нагрузке $438\ H$.

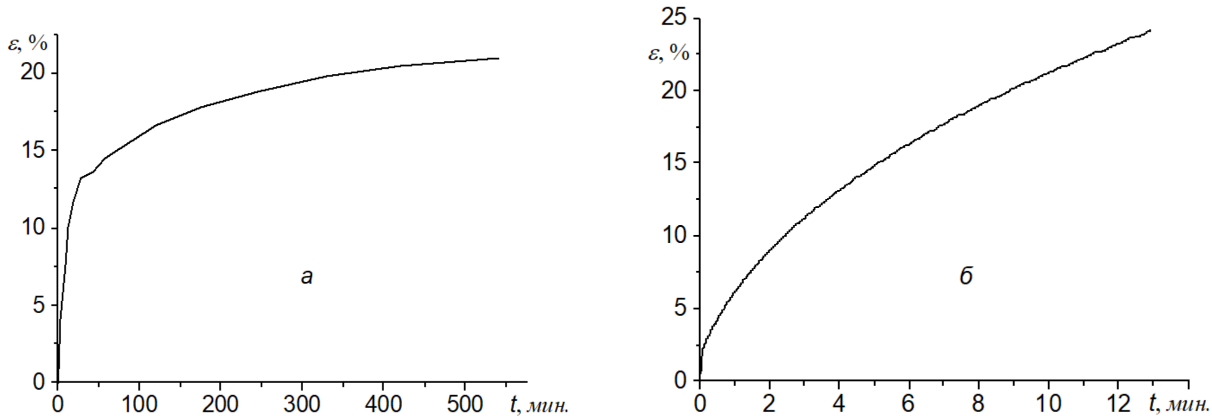



Рис.3. Кривые ползучести образцов марки УПС 03Л без старения (а) и со старением в течение 40 лет (б).

Образцы без старения разрушались при временах порядка $600\ мин.$, тогда как со старением – после $13\ мин.$ Таким образом, эксперименты показывают, что в результате длительного старения образцов УПС 03Л время до разрушения при ползучести уменьшилось более чем в 35 раз.

**Уравнение Максвелла, записанное в шкале обобщённого времени.**

Для описания полученных экспериментальных кривых ползучести рассмотрим задачу о растяжении образца из упруговязкого стареющего материала под воздействием постоянной нагрузки $P$. В качестве реологического уравнения воспользуемся модифицированным уравнением Максвелла, записанным в шкале эффективного времени $\alpha$ [6]

$$\frac{d\varepsilon}{d\alpha} = \frac{1}{E}\frac{d\sigma}{d\alpha} + \frac{\sigma}{\eta}, \qquad (1)$$

$$d\alpha = f_1(\alpha, \varepsilon, T, t)dt + f_2(\alpha, \varepsilon, T, t)d\varepsilon, \qquad (2)$$

где $\varepsilon$ – деформация, $\sigma$ – истинное напряжение, $T$ – температура, $E$ – модуль упругости, $\eta$ – коэффициент вязкости.

Параметр $\alpha$ рассматривается как эффективное время, с помощью которого возможно описание процессов климатического и деформационного старения. Согласно уравнению (2), при мгновенных, активных нагружениях параметр $\alpha$ соответствует деформационному времени $\varepsilon$. В состоянии разгрузки этот параметр описывает кинетику химических процессов старения и сводится к обычному времени $t$. При такой трактовке можно ввести понятие химического времени. Таким образом, параметр эффективного времени в общем случае способен описать взаимосвязанные деформационные и физико-химические процессы и описывать их развитие в шкале деформационного и химического времени. В этом отличие данного параметра от известных температурно-временных и полимеризационных параметров, используемых в механике полимеров [8-11].

При расчётах по формуле (2) параметр эффективного времени зададим в виде

$$d\alpha = k(\alpha_\infty - \alpha)t^m dt\,, \tag{3}$$

где $k$, $\alpha_\infty$, $m$ – постоянные, $\alpha$ – параметр деградации материала ($\alpha = N / N_0$, $N_0$ – начальное число химических связей, $N$ – текущее число разрушенных химических связей). Таким образом, уравнение (3) может рассматриваться как уравнение химической реакции, а параметр $\alpha$ имеет смысл химического времени.

Решение системы уравнений (1) и (3) при начальных условиях $t = 0$, $\alpha = \alpha_0$, $\varepsilon = \sigma_0 / E_0$ может быть записано в виде

$$\frac{\varepsilon}{\sigma_0} = \frac{1}{E_0}\left[1 + \frac{\alpha_\infty - \alpha_0}{\tau}\left(1 - \exp\left(-\frac{k}{m+1}t^{m+1}\right)\right)\right], \tag{4}$$

На рис. 4 и 5 показаны кривые податливости ($D = \varepsilon / \sigma_0$) согласно зависимости (4) и экспериментальные данные по ползучести для образцов марки УПМ 03Л со старением и без старения. При расчётах приняты следующие значения коэффициентов: для образцов без старения *α0=0*, *α∞=8,9*, *m=-0,79*, *k=0,000082 с-1*, *τ= 0,0061 с*, *E0= 64 МПа*; для образцов после сорокалетнего старения *α0=0*, *α∞=0,5*, *m=-0,7*, *k=0,0002 с-1*, *τ= 0,002 с*, *E0= 190 МПа*.

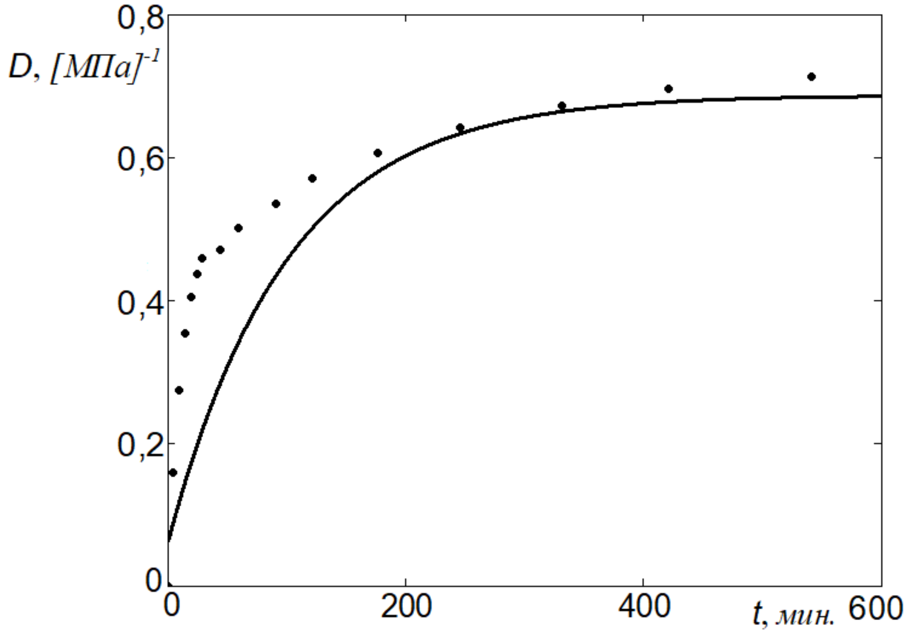


Рис.4. Теоретическая кривая податливости согласно уравнению (4) и экспериментальные точки ползучести образца из УПМ 03Л без старения.

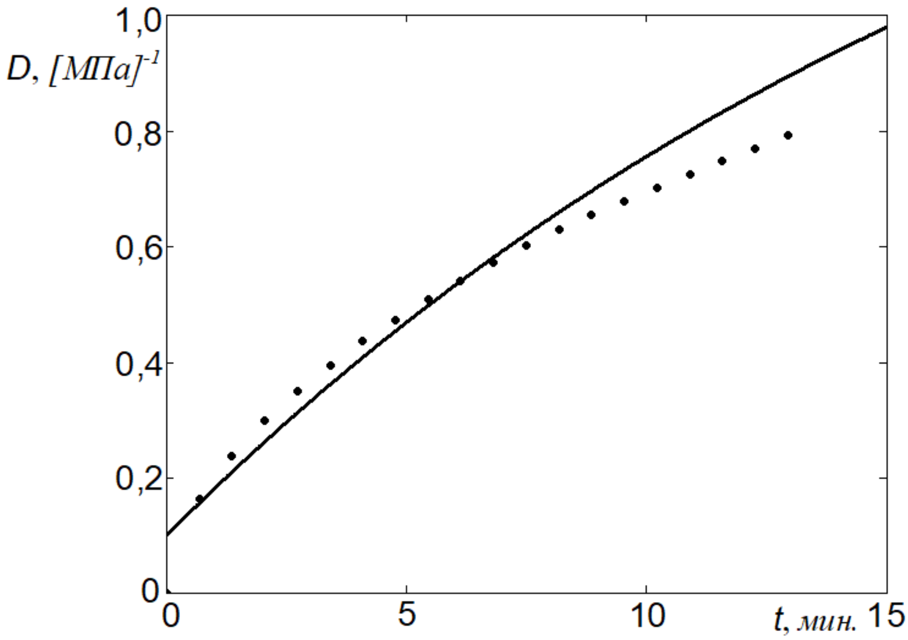



Рис.5. Теоретическая кривая податливости согласно уравнению (4) и экспериментальные точки ползучести образца из УПМ 03Л после старения в течение 40 лет.

Из рис. 4, 5 видно, что полученные кривые хорошо согласуются с соответствующими экспериментальными данными по ползучести УПМ 03Л.

**Заключение.**

В работе исследовано влияние длительного естественного старения при комнатной температуре в течение 40 лет на механические свойства шести марок ударопрочного полистирола (УПС). Получены кривые деформирования в опытах на растяжения при скоростях нагружения 5 мм/мин и 50 мм/мин. Для всех марок УПС после старения наблюдается эффект упрочнения и увеличения предела текучести. Также для многих марок УПС наблюдается уменьшение величины деформации до разрушения.

Были проведены испытания УПС на ползучесть при комнатной температуре и постоянной растягивающей силе. Образцы испытывались в течение 30 сут. и не были разрушены. После естественного старения в течение 40 лет образцы разрушались в диапазоне времен до разрушения от 10 мин. до 30 час. в зависимости от марки УПС. Так для образцов УПС 03Л время до разрушения при ползучести уменьшилось более чем в 35 раз.

Для описания экспериментальных кривых ползучести образцов из полистирола после старения и без старения использован модифицированный вариант уравнения Максвелла, записанного в шкале эффективного времени. Наблюдается хорошее соответствие теоретических и экспериментальных кривых ползучести.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 18-01-00146).

**ЛИТЕРАТУРА**


1. Struik L.C.E. Physical aging in amorphous polymers and other materials. Amsterdam, Oxford, New York: Elsevier Sci. Publ.Comp. 1978. 229p.
2. Nadai A. Theory of flow and fracture of solids. McGraw-Hill. New York. 1963. vol. 2. 321p.
3. Филатов И.С. Климатическая устойчивость полимерных материалов. М.: Наука, 1983. 215с.
4. Bruijn de J.C.M. The failure behavior of high density polyethylene with an embrittled surface layer due to weathering. Delft: Delft University press. 1992. 167p.
5. Бочкарев Р.Н., Филатов И.С. Старение материалов на основе поливинилхлорида в условиях холодного климата. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение. 1990. 115с.
6. Арутюнян Р.А. Проблема деформационного старения и длительного разрушения в механике материалов. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2004. 252с.
7. Merz E.H., Claver G.C., Baer M. Studies on heterogeneous polymeric systems // J. Polym. Sci. 1956. V. 22. I. 101. P. 325-341.
8. Гуль В.Е. Структура и прочность полимеров. М.: Химия, 1971. 344с.
9. Бартенев Г.М., Зуев Ю.С. Прочность и разрушение высокоэластичных материалов М.-Л.: Химия. 1964, 387с.
10. Москвитин В.В. Сопротивление вязко-упругих материалов. М.: Наука, 1972. 327с.
11. Valanis K.C. On the foundation of the endochronic theory of viscoplasticity // Archiwum mechanici stosowanej. 1975. V. 27. № 5-6. P. 857-868.


**Сведения об авторах:**


**Арутюнян Александр Робертович** – кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, математико-механический факультет, Санкт-Петербургский государственный университет, **Тел.:** + 7 (812) 4284164, **E-mail:** a.arutyunyan@spbu.ru

# ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНАЯ ПОЛЗУЧЕСТЬ И ПОВРЕЖДЕННОСТЬ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

**Арутюнян А.Р., Арутюнян Р.А., Саитова Р.Р.**

Рассматривается проблема ползучести и длительной прочности металлических материалов и сплавов. Предлагается определять изменения параметра повреждённости по экспериментальным кривым высокотемпературной ползучести. При этом формулируется только одно кинетическое уравнение для скорости ползучести для случая сжимаемой среды. Параметр сплошности определяется из рассматриваемого кинетического уравнения и зависит от скорости ползучести и деформации ползучести. Аналогичным образом изменение параметра повреждённости определяется по решению Работнова. Для случая сжимаемой среды наблюдается более интенсивное накопление повреждённости и, соответственно, процессов разрушения, по сравнению с решением Работнова.

## 1. Введение.

Проблема тепловой хрупкости рассматривается, когда под действием относительно низких напряжений и высоких температур металлические материалы становятся хрупкими и разрушаются с небольшой величиной остаточной деформации. Концепция повреждённости, которая была введена в механику материалов для описания долговременной прочности в условиях высокотемпературной ползучести, была развита в фундаментальных работах Качанова [1] и Работнова [2]. В этих работах для описания хрупкой области экспериментальной кривой длительной прочности было предложено простое кинетическое уравнение для параметра повреждённости и сформулирован критерий длительной прочности. Вопрос о взаимосвязи деформации ползучести и повреждённости в этих работах не обсуждался. Следующий этап решения проблемы ползучести и разрушения относится к работе Работнова [3], в которой была предложена система двух взаимосвязанных уравнений для деформации ползучести и параметра повреждённости.

В научной литературе по этой проблеме приводятся следующие возможные варианты взаимосвязи ползучести и повреждённости. Процессы ползучести и разрушения развиваются параллельно и в первом приближении не связаны друг с другом. Повреждённость является результатом деформации, которая создаёт источники разрушения, приводит к появлению мест с высокой концентрацией напряжений и является источником точечных дефектов, которые необходимы для развития медленного разрушения. Ползучесть является результатом процессов микроразрушения в объёме материала.

Низкие скорости деформации и высокие температуры способствуют разрушению ползучести. Этот факт позволяет предположить, что повреждённость и разрушение могут протекать независимо от пластической деформации. На это также ссылаются многочисленные случаи медленного разрушения с очень малым значением остаточной деформации. Исследования Рэтклиффа и Гринвуда [4], Бетехтина [5] по изменению плотности в условиях ползучести показали, что заживление пор при однократном и многократном приложении гидростатического давления приводит к резкому деформационному торможению ползучести. Так что, время перелома значительно увеличится. В то же время скорость ползучести практически не меняется. Процессы повреждения по изменению плотности полностью тормозят развитие разрушения, что свидетельствует о независимости скорости ползучести от поврежденности. По-видимому, все три возможных варианта взаимосвязи ползучести и разрушения справедливы.

## 2. Теория Качанова-Работнова.

Критерий Качанова-Работнова был разработан для описания области хрупкого разрушения [1-2]. В модели хрупкого разрушения Качанова [1] параметр сплошности $\psi$ $(1 \geq \psi \geq 0)$ вводится формально, не придавая ему определённого физического смысла. В модели хрупкого разрушения Работнова [2, 3] параметр повреждённости $\omega$ $(0 \leq \omega \leq 1)$ вводится согласно соотношению $\omega = F_T / F_0$ ($F_0$ – начальная площадь, $F_T$ – общая площадь пор) и характеризует степень уменьшения площади поперечного сечения образца. Из соотношения $F = F_0 - F_T$ следует, что $F = F_0(1-\omega)$ ($F$ – текущая площадь поперечного сечения образца). В модели хрупкого разрушения Качанова-Работнова скорость изменения параметра сплошности задаётся следующим уравнением:

$$\frac{d\psi}{dt} = -A\left(\frac{\sigma_0}{\psi}\right)^n \tag{1}$$

где $\sigma_0$ – номинальное напряжение, $A$, $n$ – постоянные.

Чтобы учесть деформационные процессы, Работнов ввёл, помимо уравнения (1), кинетическое уравнение для скорости ползучести $\dot{\varepsilon}$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \dot{\varepsilon} = B\sigma_0^m \psi^{-\beta} e^{m\varepsilon}, \tag{2}$$

где $B$, $m$ – постоянные.

Тогда, из (2) следует

$$\psi = \left(\frac{\sigma_0^m B e^{m\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}}\right)^{1/\beta} \tag{3}$$

**3. Теория для сжимаемой среды**.

При формулировке взаимосвязанных уравнений ползучести и повреждённости, необходимо придать физическое содержание параметру повреждённости. В частности, необратимое изменение объёма (разрыхление) [6] или плотность [7] рассматривались в качестве параметра повреждённости. Этот параметр является наиболее представительной характеристикой повреждённости. В работах [8, 9] рассмотрена система уравнений для скорости ползучести и параметра повреждённости для сжимаемой среды.

В данной работе формулируется только одно кинетическое уравнение для скорости ползучести для случая сжимаемой среды, записанное с использованием параметра сплошности. Из этого уравнения определяется параметр повреждённости в зависимости от скорости ползучести и деформации ползучести.

Вводится сжимаемая среда с параметром сплошности $\psi = \rho/\rho_0$ ($\rho_0$ – начальная, $\rho$ – текущая плотность образца). С учётом закона сохранения массы кинетическое уравнение для скорости ползучести задается как

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \dot{\varepsilon} = B\sigma_0^m \psi^{m-\beta} e^{m\varepsilon}, \tag{4}$$

где $\beta$ – постоянная.

Из уравнения (4) получим

$$\psi = \left(\frac{\dot{\varepsilon} e^{-m\varepsilon}}{B\sigma_0^m}\right)^{1/(m-\beta)}. \tag{5}$$

**4. Описание кривых деформации ползучести.**

Используя формулы (3) и (5), можно определить зависимость параметра сплошности по экспериментальным кривым деформации ползучести [10]. Эти кривые описываются различными эмпирическими зависимостями в виде степенных, экспоненциальных и смешанных функций [10, 11]. В работе [12] был рассмотрен случай степенной зависимости. Далее мы будем использовать следующую зависимость

$$\varepsilon = \frac{e^{kt}}{(f\,t + c)^n} + b, \tag{6}$$

где $f$, $c$, $k$, $b$ – постоянные.

На рис.1 представлены экспериментальные кривые деформации ползучести согласно [10] и эмпирическая зависимость в виде функции (6). При расчётах используются следующие значения коэффициентов: $c = 1\cdot 10^5$, $b = 1\cdot 10^{-1}$, $k = 2{,}6\cdot 10^{-5}\,[ч.]^{-1}$, $n = 0{,}15$, $f = 8\cdot 10^{-2}\,[ч.]^{-1}$.

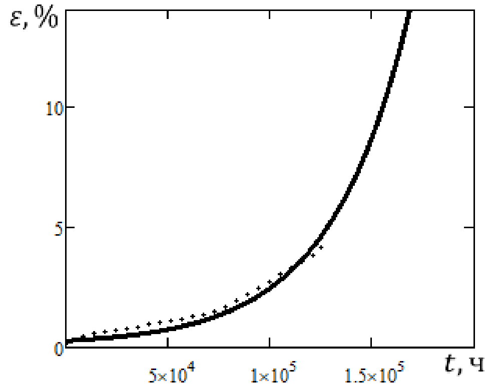



**Рис. 1.** Теоретическая кривая деформации ползучести согласно соотношению (6) и экспериментальным точкам [10].

### 5. Изменения параметра сплошности.

Внося соотношение (6) в (3), получим следующее уравнение для параметра сплошности согласно решению Работнова:

$$\psi = \left[ \frac{B\sigma_0^m e^{m\left(\frac{e^{kt}}{(f\,t+c)^n}+b\right)} (f\,t+c)^n}{e^{kt}\left(k - \frac{n\,f}{f\,t+c}\right)} \right]^{\frac{1}{\beta}} \tag{7}$$

С учётом соотношений (6) и (5), уравнение для параметра сплошности для случая сжимаемой среды имеет вид:

$$\psi = \left[ \frac{e^{kt}\left(k - \frac{n\,f}{f\,t+c}\right) e^{-m\left(\frac{e^{kt}}{(f\,t+c)^n}+b\right)}}{(f\,t+c)^n B\sigma_0^m} \right]^{\frac{1}{m-\beta}} \tag{8}$$

Теоретические кривые сплошности по формулам (7) (кривая 1) и (8) (кривая 2) показаны на рис.2. При расчётах используются следующие значения коэффициентов: $c = 1 \cdot 10^5$, $b = 1 \cdot 10^{-1}$, $k = 2{,}6 \cdot 10^{-5}\,[ч.]^{-1}$, $n = 0{,}15$, $f = 8 \cdot 10^{-2}\,[ч.]^{-1}$, $m = 6$, $\beta = -2$, $\sigma_0 = 120\,МПа$, $B = 3 \cdot 10^{-19}\,[МПа]^{-6}$.

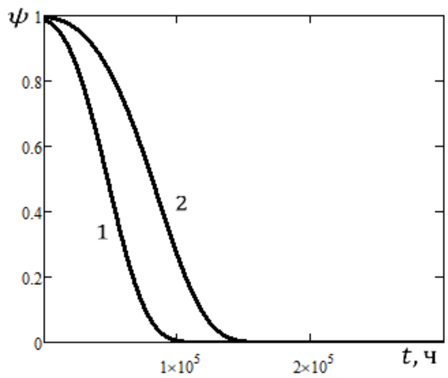



**Рис. 2.** Теоретические кривые сплошности по формулам (7) (кривая 1) и (8) (кривая 2).

Из рис.2 видно, что для сжимаемой среды (кривая 2) накопление повреждений и, соответственно, процессы разрушения проходят более интенсивно, по сравнению с решением Работнова (кривая 1).

**6. Критерии длительной прочности.**

Критерий длительной прочности может быть получен при условии, когда параметр сплошности достигает критического значения. Принимая в (7) условие разрушения в виде $t = t_f$, $\psi = \psi_*$, получим следующий критерий длительной прочности согласно решению Работнова

$$\sigma = \left[ \frac{\psi_*^{\beta} e^{kt} \left( k - \frac{n\, f}{f\, t + c} \right)}{B e^{m\left[\frac{e^{kt}}{(f\, t+c)^n} + b\right]} (f\ t + c)^n} \right]^{\frac{1}{m}} \qquad (9)$$

Принимая в (8) условие разрушения в виде $t = t_f$, $\psi = \psi_*$, критерий длительной прочности для сжимаемой среды имеет вид:

$$\sigma = \left[ \frac{e^{kt} \left( k - \frac{nf}{f\ t + c} \right)}{(f\ t + c)^n e^{m\left[\frac{e^{kt}}{(f\, t+c)^n} + b\right]} B \psi_*^{m-\beta}} \right]^{\frac{1}{m}} \qquad (10)$$

Кривые длительной прочности по формулам (9) (кривая 1) и (10) (кривая 2) показаны на рис.3. При расчётах используются следующие значения коэффициентов: $c = 1 \cdot 10^5$, $b = 1 \cdot 10^{-1}$, $k = 2{,}6 \cdot 10^{-5}\,[ч.]^{-1}$, $n = 0{,}15$, $f = 8 \cdot 10^{-2}\,[ч.]^{-1}$, $m = 6$, $\beta = -2$, $\sigma_0 = 120\, МПа$, $B = 3 \cdot 10^{-19}\,[МПа]^{-6}$, $\psi_* = 0{,}9$.

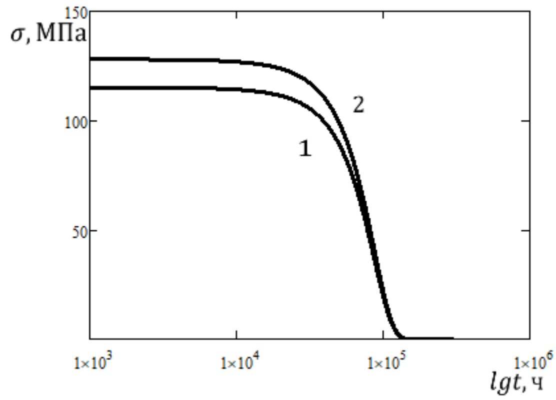



**Рис. 3.** Кривые длительной прочности по решениям (9) (кривая 1) и (10) (кривая 2).

**7. Заключение.**

Учитывается сжимаемость металлических материалов, а относительное изменение плотности рассматривается как параметр сплошности. Предложен метод определения величины повреждённости по экспериментальным кривым ползучести в соответствии с теорией Работнова и теорией для сжимаемой среды. Для описания экспериментальных кривых ползучести используется эмпирическая зависимость в виде смешанных степенных и экспоненциальных функций. Построены теоретические кривые сплошности. Критерий длительной прочности получен при условии, когда параметр сплошности достигает критической величины. Построены соответствующие теоретические кривые длительной прочности. Показано, что для случая сжимаемой среды наблюдается более интенсивное накопление повреждений и, соответственно, процессов разрушения по сравнению с теорией Работнова.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант N 18-01-00146).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Л.М. О времени разрушения в условиях ползучести // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. 1958. № 8. С. 26-31.
2. Работнов Ю.Н. О механизме длительного разрушения // Вопросы прочности материалов и конструкций. М.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 5-7.
3. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752с.
4. Ratcliffe R.T., Greenwood G.W. Mechanism of cavitation in magnesium during creep // Phil. Mag. 1965. V.12. P.59-69.
5. Betekhtin V.I. Porosity of solids // Trans. St.-Petersburg Acad. Sci. for strength problems. 1997. V.1. P.202-210.
6. Новожилов В.В. О пластическом разрыхлении // Прикладная математика и механика. 1965. №4. С.681-689.
7. Арутюнян Р.А. Проблема деформационного старения и длительного разрушения в механике материалов. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2004. 252с.
8. Arutyunyan R.A. High-Temperature Embrittlement and Long-Term Strength of Metallic Materials // Mech. Solids. 2015. 50 (2). P.191-197.
9. Arutyunyan A., Arutyunyan R., Saitova R. The Criterion of High-Temperature Creep of Metals Based on Relative Changes of Density. // WSEAS Transactions on Applied and Theoretical Mechanics. 2019. 14. P.140-144.
10. Aghajani, A. Evolution of Microstructure during Long□term Creep of a Tempered Martensite Ferritic Steel // Dissertation zur Erlangung des Grades Doktor□Ingenieur der Fakultät für Maschinenbau der Ruhr□Universität Bochum. Bochum. 2009. 108p.
11. Агахи К.А., Басалов Ю.Г., Кузнецов В.Н., Фомин Л.В. Моделирование процесса ползучести с учетом стадии предразрушения и идентификация модели // Вестн. Сам. гос. тех. ун-та. Сер.: Физ. мат. науки. 2009. № 2 (19). С.243-247.
12. Арутюнян А.Р., Арутюнян Р.А., Саитова Р.Р. Эволюция процессов поврежденности упруго-пластической среды в условиях высокотемпературной ползучести // Материалы научно-техн. конференции по строительной механике корабля, посвященной памяти д.т.н. профессора В.А. Постнова и 90-летию со дня его рождения, Санкт-Петербург, 13-14 декабря 2017. С.92-93.

**<u>Сведения об авторах:</u>**
**Арутюнян Александр Робертович** – кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, математико-механический факультет, Санкт-Петербургский государственный университет (СПбГУ), **тел.:** + 7 (812) 4284245, **E-mail:** a.arutyunyan@spbu.ru

**Арутюнян Роберт Ашотович** – профессор, доктор физ.-мат. наук, математико-механический факультет, СПбГУ, **тел.:** + 7 (812) 5266591, **E-mail:** r.arutyunyan@spbu.ru

**Саитова Регина Ринатовна** – аспирант, математико-механический факультет, СПбГУ, **тел.:** + 7 (812) 4284164, **E-mail:** rigastr@yandex.ru

## ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВНЕШНЕЙ ОБЛАСТИ КРУГОВОГО СЕГМЕНТА

**Арутюнян Л.А., Едоян В.А.**

Рассматривается плоская задача внешности кругового сегмента при смешанных граничных условиях. На границе круговой части сегмента заданы нормальные и касательные напряжения, а в другой части контура заданы нормальные напряжения и касательные перемещения. При помощи функции напряжений и интегралов Фурье в биполярной системе координат задача решается замкнуто. Рассмотрены частные случаи.

**Введение.** Значительный интерес представляют задачи о равновесии неограниченного тела содержащего отверстие; в частности, установить концентрации напряжений в неограниченной плоскости, ослабленной отверстием. Решение задач неограниченной плоскости, ослабленной отверстием были даны в работах [1-6].

**Постановка задачи.** Рассматривается плоская задача для внешности кругового сегмента при смешанных граничных условиях. Значительный интерес представляют соответствующие внешние задачи, т.е. задачи о равновесии неограниченного тела, содержащего отверстие, контур которого образует круговой сегмента. В частности, существенно установить степень концентрации напряжений в неограниченной плоскости, ослабленной отверстием сегментного типа.

**Метод исследования.** Внешние задачи для этой области решаются в несколько видеизмененной системе биполярных координат. Связь прямоугольных и биполярных координат даются формулами [1]:

$$gx = \sin\beta, \quad gy = \operatorname{sh}\alpha, \quad ag = \operatorname{ch}\alpha - \cos\beta \tag{1}$$

где $a$ – размерный параметр.

Контур кругового сегмента в биполярных координатах описывается координатами $\beta = \beta_1$ и $\beta = -\pi$.

Задача решается при помощи функций напряжений $\phi(\alpha,\beta)$, который удовлетворяет бигармоническому уравнению:

$$\left[\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial\beta^4} - 2\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} + 1\right](g\phi) = 0\,. \tag{2}$$

Напряжения и перемещения в биполярных координатах через функции напряжений $\phi(\alpha,\beta)$ задаются формулами:

$$\alpha\sigma_\alpha(\alpha,\beta) = \left[(\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta)\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} - \operatorname{sh}\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha} - \sin\beta\frac{\partial}{\partial\beta} + \operatorname{ch}\alpha\right](g\phi)$$

$$\alpha\sigma_\beta(\alpha,\beta) = \left[(\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta)\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - \operatorname{sh}\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha} - \sin\beta\frac{\partial}{\partial\beta} + \operatorname{ch}\beta\right](g\phi)$$

$$\alpha\tau_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) = -(\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta)\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}(g\phi) \tag{3}$$

$$U(\alpha,\beta) = \frac{1-2\nu}{2\mu}\left[\frac{\partial(g\phi)}{\partial\alpha} - \frac{\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}(g\phi)\right] - \frac{1}{2\mu}\left[\frac{\partial(g\psi)}{\partial\beta} - \frac{\operatorname{sh}\beta}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}(g\psi)\right]$$

$$V(\alpha,\beta) = \frac{1-2\nu}{2\mu}\left[\frac{\partial(g\phi)}{\partial\beta} - \frac{\operatorname{sh}\beta}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}(g\phi)\right] + \frac{1}{2\mu}\left[\frac{\partial(g\psi)}{\partial\alpha} - \frac{\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}(g\psi)\right]$$

где $\mu$ и $\nu$ – упругие характеристики, а связь между $\psi(\alpha,\beta)$ и $\phi(\alpha,\beta)$ даётся формулой:

$$\frac{\partial^2 (g\psi)}{\partial\alpha\partial\beta} = (1-\nu)\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial\beta^2} - 1\right)(g\phi). \tag{4}$$

На границе кругового сегмента заданы следующие граничные условия: на круговой части сегмента заданы нормальные и касательные напряжения, а на другом берегу заданы нормальные напряжения и касательные перемещения, которые равносильны следующим условиям для функции напряжений:

$$\begin{gathered} g\phi(\alpha,\beta)\Big|_{\beta=\beta_1} = \sigma_1(\alpha), \quad \left.\frac{\partial\big(g\phi(\alpha,\beta)\big)}{\partial\beta}\right|_{\beta=\beta_1} = \tau_1(\alpha) \\ g\phi(\alpha,\beta)\Big|_{\beta=-\pi} = \sigma_0(\alpha), \quad U(\alpha,\beta)\Big|_{\beta=-\pi} = U_0(\alpha) \end{gathered} \tag{5}$$

Предполагается, что $\sigma_1(\alpha)$, $\tau_1(\alpha)$, $\sigma_0$ и $U_0(\alpha)$ удовлетворяют условиям разложения в интеграл Фурье.

Удобно представить бигармоническую функцию $\phi(\alpha,\beta)$ интегралом Фурье такого вида:

$$g\phi(\alpha,\beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t,\beta) e^{-it\alpha} dt, \tag{6}$$

где

$$\begin{gathered} f(t,\beta) = A(t)\operatorname{ch}t(\beta_1-\beta)\cos\beta + B(t)\operatorname{ch}t(\pi+\beta)\cos(\beta_1-\beta) + \\ +C(t)\operatorname{sh}t(\beta_1-\beta)\sin\beta + D(t)\operatorname{sh}t(\pi+\beta)\sin(\beta_1-\beta). \end{gathered} \tag{7}$$

Подставляя (6) в (5) и учитывая (3,4,7), получаем следующие значения для неизвестных величин $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ и $D(t)$ интегрирования:

$$\begin{gathered} \Delta_1(t)A(t) = -2\bar{\sigma}_0(t)\operatorname{ch}t(\pi+\beta_1) - 2\bar{\sigma}_1(t)\cos\beta_1 \\ \Delta_1(t)B(t) = 2\bar{\sigma}_1(t)\operatorname{ch}t(\pi+\beta_1) + 2\bar{\sigma}_0(t)\cos\beta_1 \\ \Delta_2(t)C(t) = -2\bar{U}_0(t)\operatorname{sh}t(\pi+\beta_1) + 2\bar{\tau}_1(t)\cos\beta_1 + \left[t\operatorname{sh}2t(\pi+\beta_1) + \sin 2\beta_1\right]\cdot A(t) \\ \Delta_2(t)D(t) = 2t\bar{U}_0(t)\sin\beta_1 - 2\bar{\tau}_1(t)\operatorname{ch}t(\pi+\beta_1) - \\ -2\left(t^2+1\right)\operatorname{ch}t\left(\pi+\beta_1\sin\beta_1 A(t) + t\Delta_2(t)B(t)\right), \end{gathered} \tag{8}$$

где

$$\Delta_1(t) = \operatorname{ch}2t(\pi+\beta_1) - \cos 2\beta_1; \quad \Delta_2(t) = \operatorname{sh}2t(\pi+\beta_1) - t\sin 2\beta_1$$

$$\begin{gathered} \bar{\sigma}_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sigma_1(\alpha)e^{it\alpha}d\alpha; \quad \bar{\tau}_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tau_1(\alpha)e^{it\alpha}d\alpha \\ \bar{\sigma}_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sigma_0(\alpha)e^{it\alpha}d\alpha; \\ \bar{U}_0(t) = -\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}t\bar{\sigma}_0(t) + \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[(1-2\nu)\operatorname{th}\frac{\alpha}{2}\sigma_0(\alpha) + 2\mu U_0(\alpha)\right]e^{it\alpha}da \end{gathered} \tag{9}$$

В качестве примера рассмотрим круговой сегмент, подвергающийся по участку боковой поверхности $|\alpha| < \alpha_0$ равномерному нормальному обжатию интенсивности $q$, касательные напряжения отсутствуют, а на другом берегу кругового сегмента нормальные напряжения и касательные перемещения равны нулю

$$\sigma_\beta(\alpha,\beta)\Big|_{\beta=\beta_1}=\begin{cases} q, & |\alpha|<\alpha_0\\ 0, & |\alpha|>\alpha_0\end{cases} \qquad \tau_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)\Big|_{\beta=\beta_1}=0$$

$$\sigma_\beta(\alpha,\beta)\Big|_{\beta=-\pi}=0, \qquad U(\alpha,\beta)(\alpha,\beta)\Big|_{\beta=-\pi}=0 \tag{10}$$

Необходимо составить граничные значения по заданным контурным значениям $\sigma_1(\alpha),\ \tau_1(\alpha),\ \sigma_0(\alpha)$ и $U_0(\alpha)(10)$. После некоторых выкладок находим:

$$\sigma_1(\alpha)=\begin{cases} qa\dfrac{e^{-\alpha}\mathrm{ch}\alpha-1}{\mathrm{ch}\alpha_0-\cos\beta_1}+q\left(Y_0\cos\beta_1+X_0\sin\beta_1\right) & |\alpha|<\alpha_0\\ -qY_0e^{-\alpha}+q\left(Y_0\cos\beta_1+X_0\sin\beta_1\right) & |\alpha|>\alpha_0\end{cases}$$

$$\tau_1(\alpha)=-q\left(Y_0\sin\beta_1-X_0\cos\beta_1\right) \tag{11}$$

$$\sigma_0(\alpha)=qY_0;\quad U_0(\alpha)=\frac{1-2\nu}{2\mu}qY_0\mathrm{th}\frac{\alpha}{2},$$

где

$$X_0=\frac{a\sin\beta_1}{\mathrm{ch}\alpha_0-\cos\beta_1};\quad Y_0=\frac{a\mathrm{sh}\alpha_0}{\mathrm{ch}\,\alpha_0-\cos\beta_1}\ .$$

В связи с тем, что постоянная величина не может быть разложена в интеграл Фурье, представим искомые функции напряжений $\phi(\alpha,\beta)$в виде суммы двух бигармонических функций: $\Phi_1(\alpha,\beta)$ и $\Phi_2(\alpha,\beta)$

$$\phi(\alpha,\beta)=\phi_1(\alpha,\beta)+\phi_2(\alpha,\beta). \tag{12}$$

Бигармонические функции $g\phi_1(\alpha,\beta)$ можно представить в следующем виде:

$$g\phi_1(\alpha,\beta)=q\left(Y_0\cos\beta+X_0\sin\beta\right). \tag{13}$$

Неизвестную функцию $\phi_2(\alpha,\beta)$ представим в виде интеграла (6). После удовлетворения граничным условиям (10) для значений неизвестных интегрирования, получаем:

$$\Delta_1(t)A(t)=2\bar\sigma(t)\cos\beta_1;\quad \Delta_1(t)B(t)=2\bar\sigma(t)\mathrm{cht}\beta_1,$$

$$\Delta_1(t)\Delta_2(t)C(t)=2\bar\sigma(t)\left(t\mathrm{sh}2t\beta_1+\sin2\beta_1\right)\cos\beta_1, \tag{14}$$

$$\Delta_1(t)\Delta_2(t)D(t)=2\bar\sigma(t)\left(\left(t^2+1\right)\mathrm{ch}t\beta_1\sin2\beta_1+t\Delta_2(t)\mathrm{ch}t\beta_1\right),$$

где

$$\bar\sigma(t)=-\frac{2qa\sin t\alpha_0}{t\left(t^2+1\right)\left(\mathrm{ch}\alpha_0-\cos\beta_1\right)\sqrt{2\pi}}. \tag{15}$$

В случае, если в точке $\alpha=0;\ \beta=\beta_1$ приложена сосредоточенная сила $P,$ то предельным переходом получаем:

$$\bar\sigma(t)=-\frac{P}{\left(t^2+1\right)\sqrt{2\pi}}. \tag{16}$$

**Заключение:** в частном случае при $\beta_1=\dfrac{\pi}{2}$ для сосредоточенной силы $P,$ на берегах сегмента $\beta=-\pi$ вычислим значения касательных напряжений:

$$\tau_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)\Big|_{\beta=-\pi}=\frac{4P\alpha}{9\sqrt[3]{\left(y^2-a^2\right)^2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{(y+a)^2}-\sqrt[3]{(y-a)^2}}{\sqrt[3]{(y+a)^2}+\sqrt[3]{(y-a)^2}} \tag{17}$$

Как видно из (17), в точках $y = \pm a$ касательные напряжения имеют особенность порядка $2/3$.

**Заключение.** Для задачи антиплоской деформации составного кругового сектора получены условия появления особенностей в вершине сектора.

Решение задачи найдено в рядах Фурье при произвольном нагружении дуги сектора.

**ЛИТЕРАТУРА**


1. УФлянд Я.С. Интегральные преобразование в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1968. 401с.
2. Попов Г.Я. Конструкция упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подключений. М.: Наука, 1982, 344с. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872с.
3. Черепанов Г.П. Механика разрушения композиционных материалов. М.: Наука, 1983. 296с.
4. Савин Г.Н. Концентрация напряжений около отверствий. М.: ГТТИ, 1951.
5. Еганян В.В. Общее решение задачи теории упругости для бесконечной плоскости луночным отверстием, вдоль которого действуют заданные усилия. //Изв. АН Арм.ССР, сер. Физ-мат. наук. 1964. Т.17. №4. С.35.
6. Арутюнян Л.А. Плоская задача для внешности кругового сегмента полуплоскости с сегментной выемкой при смешанных граничных условиях. // Труды IV-ой Межд. конф. Цахкадзор, Армения. 2015. С.62-65.



**Информация об авторе:**

**Арутюнян Левон Арсенович** –к.ф.м.н., Институт механики НАН Армении
099 67 57 47
**E-mail:** mechins@sci.am

**Едоян Вардгес Айкович** – к.ф.м.н., ЕГУАС Армения
093 98 40 40
**E-mail:** edoyan@nuaca.am

# ХАРАКТЕР ЗАВИСИМОСТИ АМПЛИТУДА-СКОРОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ ФЛАТТЕРНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ

**Багдасарян Г.Е., Микилян М.А., Варданян И.А., Григорян Г.С.**

Рассматривается задача нелинейных колебаний изотропной пологой оболочки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа. Исследование проведено с учётом обоих типов нелинейности: аэродинамической и геометрической (как квадратичной, так и кубической). Благодаря учёту аэродинамической нелинейности (особенно её несимметричной квадратичной части) установлено, что зависимость $A(\nu)$ (где $A$ – амплитуда нелинейных колебаний, $\nu$ – параметр, характеризующий величину скорости обтекающего потока) в определённых интервалах изменения параметра скорости $\nu$ является многозначной. Этот факт иллюстрирован на приведённых в тексте рисунках в виде ветвей, нижние из которых, по всей вероятности, являются неустойчивыми. Неустойчивые ветви расположены между двумя устойчивыми ветвями и определяют порядок возмущений, нужных для тяготения к одной из устойчивых ветвей. Отсюда легко находится величина возмущения, необходимого для того, чтобы перебросить систему с одной устойчивой ветви на другую. Показано существование определённых областей изменения $\nu$, при которых невозможно возбудить незатухающие флаттерные колебания как при докритических скоростях, так и в послекритической стадии.

**1.** Рассмотрим тонкую изотропную прямоугольную в плане цилиндрическую панель постоянной толщины $h$. Оболочка отнесена к ортогональным криволинейным координатам $x, y, z$, где координатные линии $x$ и $y$ совпадают с линиями кривизны срединной поверхности. Третья координатная линия $z$ прямолинейная и представляет расстояние по нормали срединной поверхности от точки $(x, y, 0)$ до точки $(x, y, z)$ оболочки.

Пусть оболочка обтекается с одной стороны сверхзвуковым потоком газа с постоянной невозмущённой скоростью $\vec{u}$, направленной вдоль оси $0x$. Исследуются вопросы устойчивости рассматриваемой аэроупругой системы.

На основе исследований принимаются следующие предположения:

1) гипотеза Кирхгофа-Лява [1];

2) давление газа учитывается по приближённой формуле «поршневой теории» [2,3];

3) основные положения теории весьма пологих гибких оболочек с большим показателем изменяемости, считая, что прогибы сравнимы с толщиной оболочки [4].

На основе принятых предположений получается следующая нелинейная система дифференциальных уравнений движения пологой оболочки [5]:

$$D\Delta^2 w + \frac{1}{R}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \left(\rho h \varepsilon + \frac{æ p_\infty}{a_\infty}\right)\frac{\partial w}{\partial t} + æ p_\infty M \frac{\partial w}{\partial x} =$$
$$= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) - æ p_\infty \frac{æ+1}{4} M^2 \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \frac{M}{3}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^3\right] \tag{1.1}$$

$$\frac{1}{Eh}\Delta^2 F = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \tag{1.2}$$

где $D = Eh^3 \big/ 12\left(1-\mu^2\right)$, $M = u/a_\infty$, $a_\infty = æ p_\infty / \rho_\infty$, $F(x, y, t)$ – функция напряжений, $\varepsilon$ – коэффициент линейного затухания, $p_\infty$ – давление невозмущенного потока газа, $a_\infty$ – величина скорости звука для невозмущенного газа, æ – показатель политропы, $t$ – время, $R$ – радиус оболочки, $E$ – модуль упругости, $\mu$ – коэффициент Пуассона, $\rho_0$ – плотность материала оболочки.

При исследовании вопросов устойчивости к уравнениям (1.1) присоединяются также условия на контуре оболочки. Здесь рассматривается шарнирно опёртая по всему контуру пологая оболочка $(0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b)$, края которой свободно смещаются в плане. Найдено решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям свободного смещения краёв панели.

**2.** Приближённое решение уравнения (1.1), удовлетворяющее известным условиям шарнирного опирания, будем искать в виде [5]

$$w(x,y,t)=\left(\sum_{k=1}^{n} f_k(t)\sin\lambda_1 x\right)\sin\mu_1 y;\quad \lambda_k=k\pi/a,\ \mu_1=\pi/b, \tag{2.1}$$

Подставив (2.1) при $n=2$ в уравнение (1.2), получим линейное неоднородное дифференциальное уравнение относительно функции $F$. Подставляя (2.1) и найденное выражение для $F$ в уравнение (1.1) и применяя метод Бубнова-Галеркина для определения безразмерных неизвестных функций $x_1=f_1(t)/h,\ x_2=f_2(t)/h,$ получим следующую нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений [5,6]:

$$\begin{gathered}
\frac{d^2x_1}{d\tau^2}+\chi\frac{dx_1}{d\tau}+x_1-\frac{2}{3}k\nu x_2+k\nu^2\left[\alpha_{11}x_1^2+\alpha_{12}x_2^2+\nu x_2\left(\beta_{11}x_1^2+\beta_{12}x_2^2\right)\right]+\\
+Qx_1\left(\gamma_{11}x_1^2+\gamma_{12}x_2^2\right)+L\left(\delta_{11}x_1^2+\delta_{12}x_2^2\right)=0\\
\frac{d^2x_2}{d\tau^2}+\chi\frac{dx_2}{d\tau}+\gamma^2x_2+\frac{2}{3}k\nu x_2+k\nu^2\left[\alpha_{21}x_1x_2+\nu x_1\left(\beta_{21}x_1^2+\beta_{22}x_2^2\right)\right]+\\
+Qx_2\left(\gamma_{21}x_1^2+\gamma_{22}x_2^2\right)+L\delta_{21}x_1x_2=0.
\end{gathered} \tag{2.2}$$

Здесь, наряду с безразмерным временем $\tau=\omega_1 t$ введены обозначения:

$$\begin{gathered}
k=\frac{4æp_\infty}{\rho_0\omega_1^2h^2},\quad Q=\frac{4}{16\rho_0\omega_1^2},\quad L=\frac{1}{\rho_0h\omega_1^2},\\
\nu=M\frac{h}{a},\quad \gamma=\frac{\omega_2}{\omega_1},\quad \chi=\frac{1}{\omega_1}(\varepsilon+\varepsilon_a),
\end{gathered} \tag{2.3}$$

а также коэффициенты $\alpha_{ik}$ и $\beta_{ik}$, учитывающие аэродинамическую нелинейность

$$\begin{gathered}
\alpha_{11}=\frac{2}{9}(æ+1),\quad \alpha_{12}=\frac{56}{45}(æ+1),\quad \alpha_{21}=\frac{16}{45}(æ+1),\\
\beta_{11}=\beta_{21}=\frac{\pi^2}{40}(æ+1),\quad \beta_{22}=\frac{11\pi^2}{70}(æ+1),\quad \beta_{12}=-\frac{9\pi^2}{70}(æ+1),
\end{gathered} \tag{2.4}$$

и коэффициенты $\gamma_{ik}$ и $\delta_{ik}$, учитывающие геометрическую нелинейность

$$\begin{gathered}
\gamma_{11}=Eh\left(\lambda_1^4+\mu_1^4\right),\ \gamma_{12}=\gamma_{21}=4\gamma_{11}+\frac{81\lambda_1^4\mu_1^4}{\Delta_{12}}+\frac{\lambda_1^4\mu_1^4}{\Delta_{22}},\ \gamma_{22}=Eh\left(\lambda_2^4+\mu_1^4\right),\\
\delta_{11}=-\frac{8\lambda_1^2\mu_1^4}{3\pi^2}\frac{h}{R}\left(\frac{Eh}{\lambda_2^2}+\frac{4\lambda_1^2}{\Delta_{11}}\right),\ \delta_{12}=-\frac{32\lambda_1^2\mu_1^4}{15\pi^2}\frac{h}{R}\left(\frac{Eh}{\lambda_4^2}+\frac{12\lambda_1^2}{\Delta_{21}}\right),\\
\delta_{21}=-\frac{8\lambda_1^2\mu_1^4}{3\pi^2}\frac{h}{R}\left(\frac{8Eh}{15\lambda_2^2}+\frac{16\lambda_1^2}{5\Delta_{11}}+\frac{\lambda_1^2}{\Delta_{12}}+\frac{16\lambda_2^2}{5\Delta_{21}}+\frac{\lambda_3^2}{15\Delta_{32}}\right),\qquad \Delta_{ij}=\frac{1}{Eh}\left(\lambda_i^2+\mu_j^2\right)^2.
\end{gathered} \tag{2.5}$$

В (2.2) $\nu$ – приведённый параметр скорости, $\chi$ – приведённый параметр демпфирования, $\omega_1$ и $\omega_2$ – частоты малых собственных колебаний оболочки, определяемые формулами:

$$\omega_i^2=\frac{1}{\rho h}\left[D\left(\lambda_i^2+\mu_1^2\right)^2+\frac{\lambda_i^4}{R^2\Delta_{i1}}\right]. \tag{2.6}$$

Таким образом, задача устойчивости рассматриваемой гидроупругой системы в первом приближении сведена к исследованию поведения решений системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (2.2) в зависимости от величины скорости обтекающего потока газа (от величины параметра $\nu$). Рассмотрена соответствующая (2.2) линейная система. Из условия существования нетривиального решения этой системы обычным образом получены следующие формулы определения критической скорости $(\nu_{cr})$ флаттера и критического значения $(\theta_{cr})$ частоты колебания при флаттере

$$\nu_{cr}=\frac{3}{4}\frac{\gamma^2-1}{k}\sqrt{1+\frac{2\chi^2\left(\gamma^2+1\right)}{\left(\gamma^2-1\right)^2}},\quad \theta_{cr}^2=\frac{1}{2}\left(\gamma^2+1\right), \tag{2.7}$$

где $\omega$ – частота флаттерных колебаний.

**3.** Приближённое периодическое решение системы (2.2), следуя работам [6,7], будем искать в виде

$$x_1=A_1\cos\theta\tau+B_1\sin\theta\tau+C_1+\ldots,\qquad x_2=A_2\cos\theta\tau+B_2\sin\theta\tau+C_2+\ldots \tag{3.1}$$

Здесь $A_i$, $B_i$, $C_i$ и $\theta=\omega\omega_1^{-1}$ $\left(i=1,2\right)$ – неизвестные постоянные; $\omega$ – неизвестная частота нелинейных колебаний; точками обозначены члены, содержащие гармоники. Структура решения (14) отличается от существующих [5] наличием свободных членов $C_i\neq 0$, присутствие которых характерно задачам с квадратичной нелинейностью [6,7].

Подставляя решение (3.1) в систему (2.2) и приравнивая к нулю коэффициенты при свободном члене, $\cos\theta\tau$ и $\sin\theta\tau$ (члены, содержащие гармоники, пренебрегаются), получаем систему нелинейных алгебраических уравнений, которая довольно громоздка для исследования и здесь не приводится. Для получения приближённых решений этой системы, следуя [6], принимаем, что $\chi\left|B_i\right|<<\left|A_i\right|$, $\left|B_i\right|<<\left|A_k\right|$, $\left|C_j\right|<<\left|A_k\right|$; $\left(i,k=1,2\right)$. Тогда указанная нелинейная система при $\chi\approx 0$ представляется в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&A_1(1-\theta^2)-\frac{2}{3}k\nu A_2+2k\nu^2\alpha_{11}A_1C_1+2k\nu^2\alpha_{12}A_2C_2+\\
&\qquad+\frac{3}{4}k\nu^3A_2(\beta_{11}A_1^2+\beta_{12}A_2^2)+\frac{3}{4}QA_1(\gamma_{11}A_1^2+\gamma_{12}A_2^2)=0,\\
&A_2(\gamma^2-\theta^2)+\frac{2}{3}k\nu A_1+k\nu^2\alpha_{21}(A_1C_2+A_2C_1)+\\
&\qquad+\frac{3}{4}k\nu^3A_1(\beta_{21}A_1^2+\beta_{22}A_2^2)+\frac{3}{4}QA_2(\gamma_{21}A_1^2+\gamma_{22}A_2^2)=0.
\end{aligned}\tag{3.2}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
&2\Delta C_1=-K\nu^2\left[\left(L\left(\delta_{11}A_1^2+\delta_{12}A_2^2\right)+\alpha_{11}A_1^2+\alpha_{12}A_2^2\right)\Delta_2-\left(L\delta_{21}+\alpha_{21}\right)A_1A_2\Delta_4\right]\\
&2\Delta C_2=-K\nu^2\left[\left(L\delta_{21}+\alpha_{21}\right)A_1A_2\Delta_1-\left(L\left(\delta_{11}A_1^2+\delta_{12}A_2^2\right)+\alpha_{11}A_1^2+\alpha_{12}A_2^2\right)\Delta_3\right]
\end{aligned}\tag{3.3}$$

где

$$\begin{aligned}
&\Delta_1=1+\frac{3}{2}Q\gamma_{11}A_1^2+\frac{1}{2}Q\gamma_{12}A_2^2+K\nu^3\beta_{11}A_1A_2,\\
&\Delta_2=\gamma^2+K\nu^3\beta_{22}A_1A_2+\frac{3}{2}Q\gamma_{22}A_2^2+\frac{1}{2}Q\gamma_{21}A_1^2,\\
&\Delta_3=\frac{2}{3}K\nu+\frac{3}{2}K\nu^3\beta_{21}A_1^2+\frac{1}{2}K\nu^3\beta_{22}A_2^2+Q\gamma_{21}A_1A_2,\\
&\Delta_4=-\frac{2}{3}K\nu+\frac{3}{2}K\nu^3\beta_{12}A_2^2+\frac{1}{2}K\nu^3\beta_{11}A_1^2+Q\gamma_{12}A_1A_2,\\
&\Delta=\Delta_1\Delta_2-\Delta_3\Delta_4.
\end{aligned}\tag{3.4}$$

Исследуем нелинейную систему (3.2), решая её численно при следующих исходных данных: $E=7.3\cdot10^{10}$ Н/м$^2$; $\mu=0.34$; $\rho_0$=$2.79\cdot10^3$кг/м$^3$ (дюралюминий), æ=1.4; $\rho_\infty=1.29 кг/м^3$; $a_\infty=340.29 м/с$ (воздух). Исследована зависимость амплитуды установившихся флаттерных колебаний $A$ в точке $\left(a/2, b/2, 0\right)$ оболочки (в рассматриваемом случае $A = A_1$) от параметра $\nu$ при $\theta > \theta_{cr}$.

**4.** Результаты численного решения системы (3.2), представляющие зависимость значения амплитуды флаттерных колебаний от параметра скорости $\nu$, приведены на рисунках 1-4. Приведённые рисунки показывают, что

- Если $b/a < 1$, то существует интервал изменения скорости потока (интервал $\left(0, \nu_0\right)$), где $\nu_0$ зависит от $\theta$, в котором невозможно возбудить флаттерные колебания с выбранной частотой (зона молчания). При $\nu \geq \nu_0$ зависимость $A(\nu)$ является однозначной монотонно убывающей функцией (рис.1,2). При этом, если фиксировать значение $R/a$, то чем тоньше оболочка, тем больше $\nu_0$ и тем больше значение амплитуды (рис.1). Аналогичный характер имеет зависимость $A(\nu)$ при фиксированных $h/a$ (рис.2).

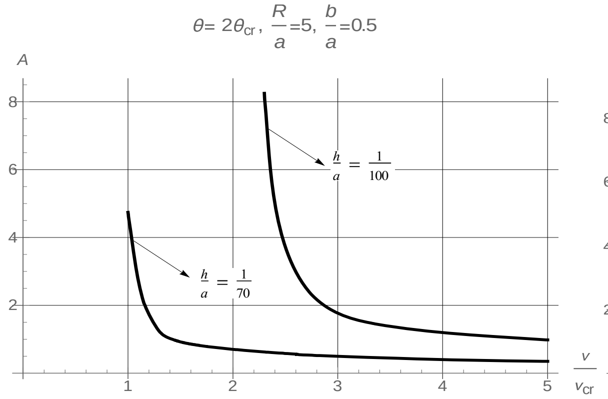


Рис.1

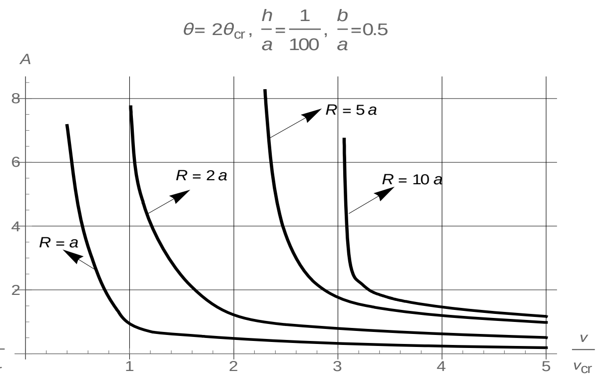


Рис.2

- Если $b/a \geq 1$ и значения частоты колебаний близки к критической, то функция $A(\nu)$ может быть как однозначной, так и двузначной функцией. При фиксированной геометрии характер зависимости $A(\nu)$ от частоты колебаний показан на рис.3-5. Эти рисунки показывают, что с увеличением $\theta$ появляется зона молчания $\left(\nu_*, \nu^*\right)$. Приэтом предельные значения $\nu_*, \nu^*$ зависят от $\theta$. Более того, при $\nu > \nu^*$ функция $A(\nu)-$ однозначная монотонно убывающая, а при $\nu < \nu_*$ она многозначная.

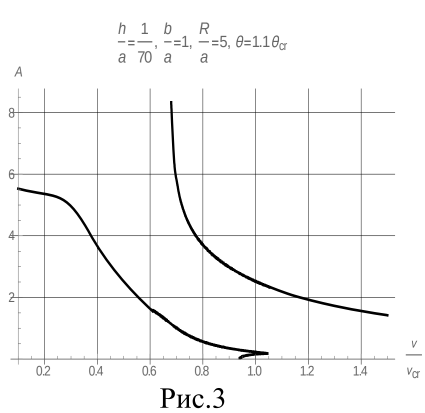


Рис.3

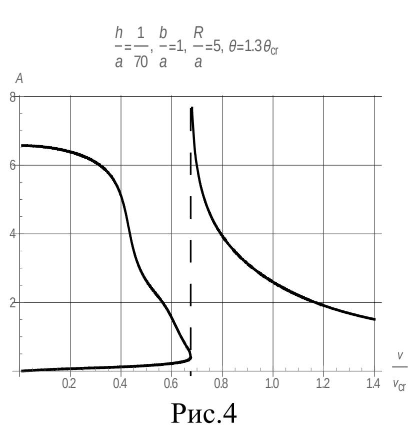


Рис.4

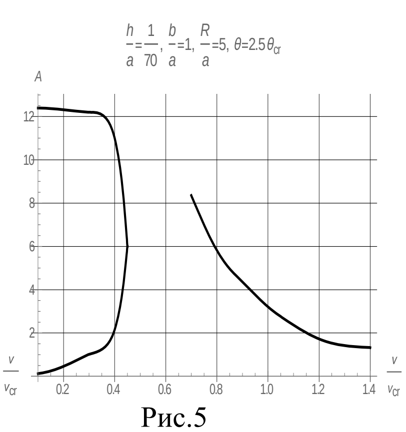
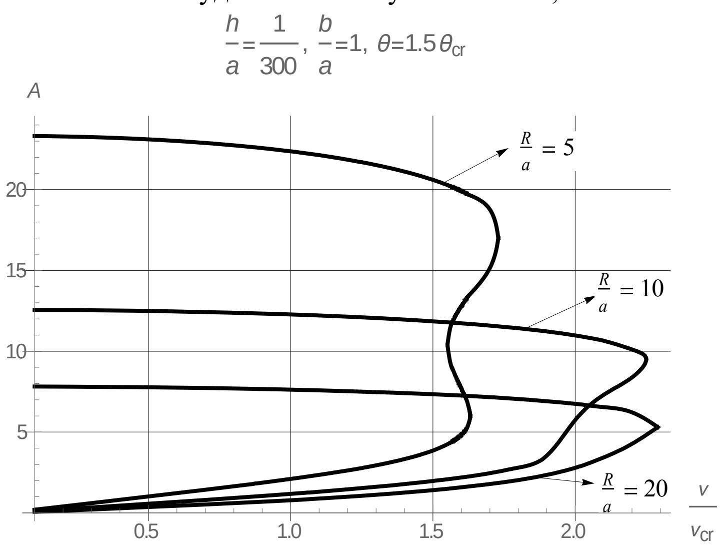


Рис.5

- если оболочка достаточно тонкая, то зона молчания становится полубесконечной и характер функции $A(\nu)$ приведён на рис.6. Этот рисунок показывает, что флаттерные колебания можно возбудить на интервале $(0, \nu_0)$. При этом с увеличением $R/a$ амплитуда колебаний уменьшается, а значение $\nu_0$ увеличивается.




## ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. М.: Гостехтеориздат, 1949.
2. Ashley H., Zartarian C. Piston theory – a new aerodynamic tool for the aeroelastician. //Journ. Aeronaut. Sci. 23, №6, 1956.
3. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях. //ПММ. 1956. Т.XX. Вып.6.
4. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
5. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
6. Багдасарян Г.Е. Об устойчивости ортотропных пологих оболочек, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа. //Изв.АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1961. №1. С. 92-98.
7. Гнуни В.Ц. К теории динамической устойчивости слоистых анизотропных пологих оболочек. //Изв. АН Арм.ССР, 13, №1, 1960.

**<u>Information about authors:</u>**

**Багдасарян Геворг Ервандович** – академик НАН Армении, профессор, главный научный сотрудник Института механики НАН Армении
**Тел.:** (010) 355308; **E-mail:** gevorg.baghdasaryan@rau.am

**Микилян Марине Александровна** – к.ф.-м.н., доцент, старший научный сотрудник Института механики НАН Армении
**Тел.:** (091) 191129; **E-mail:** marine.mikilyan@rau.am

**Варданян Ирэн Арменовна** – внештатный сотрудник Института механики НАН Армении
**Тел.:** (077) 325313; **E-mail:** irena_123@bk.ru.

# ОБ УПРАВЛЕНИИ КОЛЕБАНИЯМИ МЕМБРАНЫ С НЕРАЗДЕЛЁННЫМИ МНОГОТОЧЕЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ НА ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ ПРОГИБА В ЗАДАННЫХ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ МОМЕНТАХ ВРЕМЕНИ

**Барсегян В.Р.**

Для уравнения колебания прямоугольной мембраны с заданными начальным, конечным условиями и неразделёнными значениями прогиба в промежуточных моментах времени исследуются задачи управления колебаниями и оптимального управления с критерием качества, заданным на весь промежуток времени. Используя методы разделения переменных, построены решения рассматриваемых задач с помощью методов теории управления и оптимального управления конечномерными системами с неразделёнными многоточечными промежуточными условиями.

**Введение.** Одним из самых распространённых процессов в природе и технике являются колебательные процессы, которые моделируются волновым уравнением [1-3]. При этом, на практике часто возникают задачи управления и оптимального управления, когда нужно сгенерировать желаемую форму колебания, удовлетворяющую заданным промежуточным условиям. Многоточечные краевые задачи управления и оптимального управления, в которых наряду с классическими краевыми (начальное и конечное) условиями заданы также неразделённые (нелокальные) многоточечные промежуточные условия, исследованы в работах [4-15]. Неразделённые многоточечные краевые задачи, с одной стороны, возникают как математические модели реальных процессов, а с другой – для многих уравнений невозможна корректная постановка локальных краевых задач. Неразделённость многоточечных условий также может быть обусловлена, в частности, невозможностью на практике проводить замеры измеряемых параметров состояния объекта мгновенно или в его отдельно взятых точках. Задачи управления и оптимального управления колебательных процессов как внешними, так и граничными управляющими воздействиями при различных типах граничных условий рассмотрены в работах [1-4, 7-12] и предложены различные методы решения.

Данная работа посвящена разработке конструктивного подхода построения функций управления и оптимального управления колебаниями прямоугольной мембраны с заданными начальными, конечными условиями и неразделёнными (нелокальными) значениями прогиба точек мембраны в промежуточные моменты времени.

**1. Постановка задач.** Рассмотрим однородную упругую прямоугольную мембрану, края которой закреплены. Пусть на мембрану действуют распределённые силы с плотностью $u(x,y,t)$, перпендикулярные к поверхности мембраны, под действием которых мембрана будет колебаться. Ограничимся рассмотрением малых колебаний мембраны. Состояние мембраны описывается функцией $Q(x,y,t)$, $0 \le x \le b$, $0 \le y \le c$, $0 < t < T$, подчинённой при $0 < x < b$, $0 < y < c$ и $0 < t < T$ следующему уравнению:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} \right) + u(x,y,t) \tag{1}$$

с однородными граничными условиями

$$Q(0,y,t)=0, \quad Q(b,y,t)=0, \quad Q(x,0,t)=0, \quad Q(x,c,t)=0, \quad 0 \le t \le T, \tag{2}$$

и удовлетворяющей начальным и конечным условиям

$$Q(x,y,0)=\varphi_0(x,y), \qquad \left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_0(x,y), \quad 0 \le x \le b, \quad 0 \le y \le c, \tag{3}$$

$$Q(x,y,T)=\varphi_T(x,y), \qquad \left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_{t=T} = \psi_T(x,y), \quad 0 \le x \le b, \quad 0 \le y \le c. \tag{4}$$

В правой части уравнения (1) функция $u(x,y,t)$ – плотность силы, которая является управляющим воздействием, $a^2 = \frac{T_0}{\rho}$, где $T_0$ – натяжение, а $\rho$ – плотность мембраны.

Предполагается, что функция $u(x,y,t)\in L_2(\Omega)$, где $\Omega=\{(x,y,t):x\in[0,b],y\in[0,c],t\in[0,T]\}$.

Пусть в некоторые промежуточные моменты времени $0=t_0<t_1<...<t_m<t_{m+1}=T$ на значения функции прогиба мембраны заданы неразделённые (нелокальные) условия в следующем виде:

$$\sum_{k=1}^{m} f_k Q(x,y,t_k)=\alpha(x,y), \tag{5}$$

где $f_k$ – заданные величины $(k=1,...,m)$, $\alpha(x,y)$ – некоторая известная функция, а $\varphi_0(x,y)$, $\psi_0(x,y)$, $\varphi_T(x,y)$, $\psi_T(x,y)$ и $\alpha(x,y)$ – заданные гладкие функции, удовлетворяющие условиям согласования.

Предполагается, что система (1) при ограничениях (2)-(5) на промежутке времени $[0,T]$ является вполне управляемой [5, 16].

Задачи управления и оптимального управления колебаниями прямоугольной мембраны с заданными начальным, конечным условиями и неразделёнными значениями функции прогиба в промежуточные моменты времени $t_k$ ($k=1,...,m$) можно сформулировать следующим образом:

**1). *Задача управления.*** Среди возможных управлений $u(x,y,t)$, где $0\le x\le b$, $0\le y\le c$, $0\le t\le T$, требуется найти управление, переводящее колебания мембраны (1) с граничными условиями (2) из заданного начального состояния (3) в заданное конечное состояние (4), обеспечивая удовлетворение неразделённых многоточечных промежуточных условий (5).

**2). *Задача оптимального управления.*** Среди возможных управлений $u(x,y,t)$, где $0\le x\le b$ ,$0\le y\le c$, $0\le t\le T$, требуется найти оптимальное управляющее воздействие $u^0(x,y,t)$, переводящее колебания мембраны (1) с граничными условиями (2) из заданного начального состояния (3) в заданное конечное состояние (4), обеспечивая удовлетворение неразделенных многоточечных промежуточных условий (5), и минимизирующее функционал

$$\int_0^T\int_0^b\int_0^c [u(x,y,t)]^2\,dxdydt. \tag{6}$$

**2. О решениях задач.** Используя метод разделения переменных, исходные задачи сводятся к задачам управления и оптимального управления динамических систем, описываемых следующим счётным числом обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\ddot{Q}_{kn}(t)+\lambda_{kn}^2 Q_{kn}(t)=u_{kn}(t), \qquad \lambda_{kn}^2=a^2\left[\left(\frac{k\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{c}\right)^2\right], \text{ где } \quad k,n=1,2,\dots, \tag{7}$$

с заданными начальными, неразделёнными многоточечными промежуточными и конечными условиями:

$$Q_{kn}(0)=\varphi_{kn}^{(0)},\ \dot{Q}_{kn}(0)=\psi_{kn}^{(0)}, \tag{8}$$

$$\sum_{j=1}^{m} f_j Q_{kn}(t_j)=\alpha_{kn}, \tag{9}$$

$$Q_{kn}(T)=\varphi_{kn}^{(T)},\ \dot{Q}_{kn}(T)=\psi_{kn}^{(T)}, \tag{10}$$

где через $Q_{kn}(t)$, $\varphi_{kn}^{(0)}$, $\psi_{kn}^{(0)}$, $\varphi_{kn}^{(T)}$, $\psi_{kn}^{(T)}$, $u_{kn}(t)$ и $\alpha_{kn}$ обозначены коэффициенты Фурье, соответствующие функциям $Q(x,y,t)$, $\varphi_0(x,y)$, $\psi_0(x,y)$, $\varphi_T(x,y)$, $\psi_T(x,y)$, $u(x,y,t)$ и $\alpha(x,y)$.

Общее решение уравнения (7) с начальными условиями (8) имеет вид:

$$Q_{kn}(t)=\varphi_{kn}^{(0)}\cos\lambda_{kn}t+\frac{1}{\lambda_{kn}}\psi_{kn}^{(0)}\sin\lambda_{kn}t+\frac{1}{\lambda_{kn}}\int_0^t u_{kn}(\tau)\sin\lambda_{kn}(t-\tau)\,d\tau. \tag{11}$$

Учитывая промежуточные неразделённые (9) и конечные (10) условия и используя подходы, приведённые в работах [6, 7], из уравнения (11) получим, что искомые функции $u_{kn}(\tau)$ для каждого $k$ и $n$ должны удовлетворять следующей системе равенств:

$$\int_0^T u_{kn}(\tau)h_{1kn}(\tau)d\tau = C_{1kn}(T),\ \int_0^T u_{kn}(\tau)h_{2kn}(\tau)d\tau = C_{2kn}(T), \qquad (12)$$

$$\int_0^T u_{kn}(\tau)h_{1kn}^{(m)}(\tau)d\tau = C_{1kn}^{(m)}(t_1,...,t_m),\ k,n=1,\,2,...\,,$$

где введены следующие обозначения:

$$C_{1kn}(T) = \lambda_{kn}\varphi_{kn}^{(T)} - \lambda_{kn}\varphi_{kn}^{(0)}\cos\lambda_{kn}T - \psi_{kn}^{(0)}\sin\lambda_{kn}T\,,$$

$$C_{2kn}(T) = \psi_{kn}^{(T)} + \lambda_{kn}\varphi_{kn}^{(0)}\sin\lambda_{kn}T - \psi_{kn}^{(0)}\cos\lambda_{kn}T\,,$$

$$C_{1kn}^{(m)}(t_1,...,t_m) = \lambda_{kn}\left[\alpha_{kn} - \sum_{j=1}^{m} f_j\left(\varphi_{kn}^{(0)}\cos\lambda_{kn}t_j + \frac{1}{\lambda_{kn}}\psi_{kn}^{(0)}\sin\lambda_{kn}t_j\right)\right], \qquad h_{1kn}(\tau) = \sin\lambda_{kn}(T-\tau)$$

$$h_{2kn}(\tau) = \cos\lambda_{kn}(T-\tau),\ \ 0 \le \tau \le T\,, \qquad (13)$$

$$h_{1kn}^{(m)}(\tau) = \sum_{j=1}^{m} f_j h_{1kn}^{(j)}(\tau), \qquad h_{1n}^{(k)}(\tau) = \begin{cases}\sin\lambda_n(t_k-\tau) & \text{при } 0 \le \tau \le t_k\,,\\ 0 \ \text{ при } \ t_k < \tau \le t_{m+1} = T.\end{cases}$$

Минимизация функционала (6) равносильна минимизации функционалов

$$\int_0^T u_{kn}^2(\tau)d\tau \quad \left(k,n=1,\,2,...\right). \qquad (14)$$

Отметим, что, как видно из обозначения (13), подынтегральная функция в третьем соотношении (12) является разрывной, поэтому классические методы вариационного исчисления не применимы для решения задачи оптимального управления. Следовательно, решение полученной задачи оптимального управления (12)-(14) целесообразно искать с помощью алгоритма решения проблемы моментов [5, 16].

В работе с помощью методов теории управления и оптимального управления конечномерными системами [16, 17], а также системами с многоточечными промежуточными условиями [5, 6] построены:

1) Функция управления $u(x,y,t)$, $0 \le x \le b, 0 \le y \le c$, $0 \le t \le T$, решающая задачу управления.

2) Оптимальное управляющее воздействие $u^0(x,y,t)$, $0 \le x \le b, 0 \le y \le c$, $0 \le t \le T$, решающее задачу оптимального управления.

Построенные явные выражения функции управления и оптимального управления, решающие поставленные задачи, являются кусочно-непрерывными функциями.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975. 568 с.
2. Сиразетдинов Т.К. Оптимизация систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1977. 480с.
3. Знаменская Л.Н. Управление упругими колебаниями. М.: Физматлит, 2004. 176 с.
4. Копец М.М. Оптимальное управление колебаниями прямоугольной мембраны. //Кибернетика и вычислительная техника. 2014. Вып.177. С.28–42.
5. Барсегян В.Р. Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями. М.: Наука, 2016. 230 с.
6. Барсегян В.Р. Об одном подходе к решению задач управления динамических систем с неразделенными многоточечными промежуточными условиями. Автоматика и телемеханика. 2015. № 4. С. 3–15.
7. Барсегян В.Р. Оптимальное управление колебаниями струны с заданными состояниями в

промежуточные моменты времени. //Изв. НАН Армении. Механика. 2008. Т.61. № 2. С.52–60.
8. Барсегян В.Р. Об оптимальном управлении колебаниями мембраны при фиксированных промежуточных состояниях. //Уч. записки ЕГУ. 1998. № 1(188). С.24–29.
9. Барсегян В.Р. О задаче граничного управления колебаниями струны с заданными состояниями в промежуточные моменты времени. XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. //В сборнике докладов: Казань, 20–24 августа 2015. С.354–356.
10. Барсегян В.Р. Об одной задаче граничного оптимального управления колебаниями струны с ограничениями в промежуточные моменты времени. Аналитическая механика, устойчивость и управление: труды XI Международной Четаевской конференции. Т.3. Ч.I. Казань, 13–17 июня 2017. С.119–125.
11. Корзюк В.И. Двухточечная граничная задача для уравнения колебания струны с заданной скоростью в некоторый момент времени. I. //Труды Ин-та мат. НАН Беларуси. 2010. Т.18. №2. С.22–35.
12. Корзюк В.И. Двухточечная граничная задача для уравнения колебания струны с заданной скоростью в некоторый момент времени. II. //Труды Ин-та мат. НАН Беларуси. 2011. Т.19. №1. С.62–70.
13. Макаров А.А. Многоточечная краевая задача для псевдодифференциальных уравнений в полислое. Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія: Математика, прикладна математика і механіка. 2014. № 1120. Вып. 69. С. 64–74.
14. Асанова А.Т. О разрешимости нелокальной краевой задачи для нагруженных гиперболических уравнений с многоточечными условиями. Вестник Карагандинского университета. Серия: Математика. 2016. № 1(81). С. 15–20.
15. Бакирова Э.А. О разрешимости линейной многоточечной краевой задачи для нагруженных дифференциальных уравнений. //Изв. НАН РК. Сер. физ.-мат. 2016. № 5. С.168–175.
16. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
17. Зубов В.И. Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975. 496 с.

**Сведения об авторе:**

**Барсегян Ваня Рафаелович** – доктор физ.-мат. наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении, профессор факультета математики и механики ЕГУ.
**Тел.**: (37410) 52 36 40; **E-mail**: barseghyan@sci.am

# ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ КВАДРОКОПТЕРОМ

**Барсегян В.Р., Закоян Н.Т.**

Рассмотрена структурная схема и математическая модель полёта беспилотного летательного аппарата – квадрокоптера. Для линеаризованной математической модели квадрокоптера принципом максимума рассмотрена задача синтеза законов оптимального управления перемещением квадрокоптера с ограниченными управлениями. Определены оптимальные законы управления и соответствующие фазовые траектории.

**Введение.** Всё большую популярность получают беспилотные летательные аппараты в виде многовинтовых устройств, а чаще – квадрокоптеров. Квадрокоптеры обладают рядом преимуществ, таких как надёжность и простота конструкции, большая стабильность, компактность и маневренность, малая взлётная масса. Область применения квадрокоптеров достаточно широка и не ограничена военной отраслью. Например, квадрокоптеры могут быть использованы как недорогое и эффективное средство для получения фото- и видеоизображений с воздуха. Квадрокоптер хорошо подходит для наблюдения и контроля объектов, территорий и зон, доступ к которым затруднён и в условиях, непригодных для человека [1–3].

В работе рассматривается пространственное движение с шестью степенями свободы. Управляющие силы и моменты формируются с помощью четырёх двигателей, вращающих установленные на их роторах воздушные винты. В математической модели полёта в форме дифференциальных уравнений Ньютона–Эйлера учитываются особенности динамики системы. Для систем линеаризованных уравнений рассмотрена задача оптимального управления перемещением квадрокоптера с ограниченными управлениями. Принципом максимума определены оптимальные законы управления и соответствующие фазовые траектории.

**1. Математическая модель движения квадрокоптера и постановка задачи.** В качестве объекта управления используется геометрический симметричный квадрокоптер, построенный по классической четырёхвинтовой схеме (рис.1).

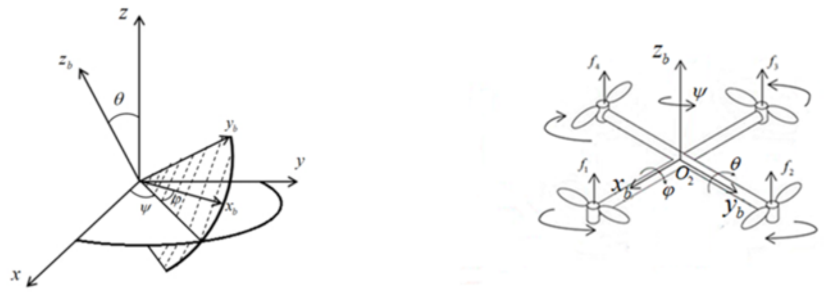



Рис.1.

Положение квадрокоптера в пространстве характеризуется координатами $x, y, z$ центра масс аппарата в неподвижной декартовой системе координат и тремя углами (углы Эйлера) $\varphi, \psi, \theta$ поворота вокруг осей системы координат, жёстко связанной с аппаратом, причём начало координат совпадает с центром масс аппарата. Общепринятыми являются следующие обозначения: $\varphi$ – угол крена (угол поворота вокруг оси $x_b$), $\psi$ – угол рыскания (угол поворота вокруг оси $z_b$), $\theta$ – угол тангажа (угол поворота вокруг оси $y_b$).

Принятые допущения:

- квадрокоптер симметричен относительно осей $x$ и $y$;
- рама квадрокоптера и его винты абсолютно жёсткие;
- каждый двигатель располагается на конце стержня;
- тяга, создаваемая каждым винтом, перпендикулярна к плоскости $xy$.

Движение квадрокоптера осуществляется благодаря четырём винтам. При этом, каждый из винтов имеет свой привод (электродвигатель), придающий ему вращение вокруг вертикальной оси. Каждый из двигателей создаёт тягу и момент вращения. Для того, чтобы скомпенсировать моменты вращения, пара двигателей 1 и 3 вращаются против часовой стрелки, а роторы 2 и 4 –

по часовой. Тем самым, моменты, создаваемые парой двигателей 1 и 3, компенсируются моментами второй пары – 2 и 4. Вращения квадрокоптера производится путём изменения скоростей вращения двигателей. Для изменения крена ($\varphi$) необходимо увеличить угловую скорость вращения двигателя 2 и уменьшить скорость вращения 4. Аналогичным образом осуществляется изменение тангажа ($\theta$). Изменение рысканья производится сложнее: увеличивается скорость вращения двигателей 1-3 и уменьшается скорость вращения 2-4. Изменение угловой скорости двух винтов (пар винтов) необходимо для того, чтобы сохранять общую тягу, создаваемую 4-мя винтами, неизменной.

Система имеет четыре управления, соответствующие угловым скоростям четырёх винтов. Уравнения динамики квадрокоптера (рис.1), как механической системы, получены с использованием законов Ньютона и уравнений Эйлера–Лагранжа. Движение квадрокоптера описывается системой из шести нелинейных дифференциальных уравнений [4, 5]:

$$\ddot{x} = -g\sin\theta - \dot{\psi}\dot{z} + \dot{\theta}\dot{y}, \quad \ddot{y} = g\cos\theta\sin\varphi - \dot{\theta}\dot{x} + \dot{\varphi}\dot{z}, \quad \ddot{z} = g\cos\theta\cos\varphi - \dot{\varphi}\dot{y} + \dot{\psi}\dot{x} + \frac{F_{Tr}}{m},$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{M_x}{\mathrm{I}_{xx}} - \frac{\mathrm{I}_{zz} - \mathrm{I}_{yy}}{\mathrm{I}_{xx}}\dot{\psi}\dot{\theta}, \quad \ddot{\psi} = \frac{M_y}{\mathrm{I}_{yy}} - \frac{\mathrm{I}_{xx} - \mathrm{I}_{zz}}{\mathrm{I}_{yy}}\dot{\varphi}\dot{\theta}, \quad \ddot{\theta} = \frac{M_z}{\mathrm{I}_{zz}} - \frac{\mathrm{I}_{xx} - \mathrm{I}_{yy}}{\mathrm{I}_{zz}}\dot{\varphi}\dot{\psi}, \qquad (1)$$

где $m$ – масса квадрокоптера, $g$ –ускорение, создаваемое силой тяжести, $\mathrm{I}_{xx}$, $\mathrm{I}_{yy}$, $\mathrm{I}_{zz}$ – моменты инерции относительно соответствующих осей $x_b$, $y_b$, $z_b$, связанных с системой координат квадрокоптера, $M_x, M_y, M_z$ – вращающие моменты относительно соответствующих осей квадрокоптера, а $F_{Tr}$ – сила, направленная вдоль оси $z_b$.

Для синтеза управления наиболее значимо линейное приближение системы дифференциальных уравнений (1). Для линеаризации системы разложим правую часть системы уравнений в ряд Тейлора и отбросим нелинейные слагаемые, в итоге получим систему линеаризованных уравнений в форме Коши, описывающих динамику квадрокоптера:

$$\dot{x} = u, \quad \dot{y} = v, \quad \dot{z} = w, \quad \dot{u} = g\theta, \quad \dot{v} = -g\varphi, \quad \dot{w} = -g + F_{Tr}/m,$$

$$\dot{\varphi} = p, \quad \dot{\psi} = q, \quad \dot{\theta} = r, \quad \dot{p} = M_x/\mathrm{I}_{xx}, \quad \dot{q} = M_y/\mathrm{I}_{yy}, \quad \dot{r} = M_z/\mathrm{I}_{zz}. \qquad (2)$$

Управляющие воздействия $u_i$, $i = 1,...,4$, связаны с тягами двигателей $F_{Tr}$, $M_x$, $M_y$, $M_z$ следующим соотношением [6]:

$$u_1 = -g + F_{Tr}/m, \qquad u_2 = M_x, \qquad u_3 = M_y, \qquad u_4 = M_z.$$

Естественно, что такие силы, хотя и могут меняться по направлению вверх и вниз, являются ограниченными по величине. Эта величина в данном случае определяется ресурсом включенных в схему электродвигателей. Предположим, что на управляющие воздействия наложены ограничения $|u_i| \le 1$, $i = 1,...,4$.

Таким образом, система уравнений (2) может быть записана следующим образом:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = gx_9, \quad \dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = -gx_7, \quad \dot{x}_5 = x_6, \quad \dot{x}_6 = u_1,$$

$$\dot{x}_7 = x_{10}, \quad \dot{x}_8 = x_{11}, \quad \dot{x}_9 = x_{12}, \quad \dot{x}_{10} = u_2/\mathrm{I}_{xx}, \quad \dot{x}_{11} = u_3/\mathrm{I}_{yy}, \quad \dot{x}_{12} = u_4/\mathrm{I}_{zz}, \qquad (3)$$

где

$$x_1 = x, \quad x_2 = \dot{x}, \quad x_3 = y, \quad x_4 = \dot{y}, \quad x_5 = z, \quad x_6 = \dot{z},$$

$$x_7 = \varphi, \quad x_8 = \psi, \quad x_9 = \theta, \quad x_{10} = p, \quad x_{11} = q, \quad x_{12} = r.$$

Требуется определить оптимальную программу управления, переводящего систему (3) из любого заданного начального состояния в заданное конечное состояние (в частности, в начало фазовых координат) за минимальный отрезок времени.

**2. Об основных результатах.** Для определения оптимальных законов управления воспользуемся принципом максимума Понтрягина [7]. С учётом формулы (3) гамильтониан запишется следующим образом:

$$H=\sum_{i=1}^{12}\psi_i\dot{x}_i=\psi_1x_2+g\psi_2x_9+\psi_3x_4-g\psi_4x_7+\psi_5x_6+$$

$$+\psi_6u_1+\psi_7x_{10}+\psi_8x_{11}+\psi_9x_{12}+\psi_{10}\frac{u_2}{\mathrm{I}_{xx}}+\psi_{11}\frac{u_3}{\mathrm{I}_{yy}}+\psi_{12}\frac{u_4}{\mathrm{I}_{zz}}.$$

Из условия максимума гамильтониана $H$ получим:

$$\max_{|u_j|\le 1}H=\psi_1x_2+g\psi_2x_9+\psi_3x_4-g\psi_4x_7+\psi_5x+\max_{|u_1|\le 1}\left(\psi_6u_1\right)+$$

$$+\psi_7x_{10}+\psi_8x_{11}+\psi_9x_{12}+\max_{|u_2|\le 1}\left(\psi_{10}\frac{u_2}{\mathrm{I}_{xx}}\right)+\max_{|u_3|\le 1}\left(\psi_{11}\frac{u_3}{\mathrm{I}_{yy}}\right)+\max_{|u_4|\le 1}\left(\psi_{12}\frac{u_4}{\mathrm{I}_{zz}}\right), \quad (4)$$

где $\psi_i$ ($i=1,...,12$) – сопряжённые переменные [7].

Учитывая, что $\mathrm{I}_{xx}$, $\mathrm{I}_{yy}$, $\mathrm{I}_{zz}$ – положительные постоянные, оптимальные управления, обеспечивающие максимум гамильтониана $H$ (4), имеют вид:
$u_1=\operatorname{sgn}\psi_6$, $u_2=\operatorname{sgn}\psi_{10}$, $u_3=\operatorname{sgn}\psi_{11}$, $u_4=\operatorname{sgn}\psi_{12}$.
Из уравнения сопряжённых переменных [7] для системы (3) получим:

$$\psi_6=-c_5t+c_6,\quad \psi_{10}=\frac{1}{6}c_3gt^3-\frac{1}{2}gc_4t^2-c_7t+c_{10},$$

$$\psi_{11}=-c_8t+c_{11},\quad \psi_{12}=-\frac{1}{6}c_1gt^3+\frac{1}{2}gc_2t^2-c_9t+c_{12}.$$

Линейные функции $\psi_6$ и $\psi_{11}$ могут менять знаки не более одного раза или с плюса на минус, или с минуса на плюс: в зависимости от значений постоянных $c_5$ и $c_8$, соответственно. Предполагая относительно функций $\psi_{10}$ и $\psi_{12}$, что все корни правых частей действительны, будем иметь четыре знакопеременных интервала. Например, если $c_3>0$ и $c_1<0$, то оптимальные управления $u_2$ и $u_4$ могут принимать значения «$-1$», «$+1$», «$-1$», «$+1$» поочерёдности, а при $c_3<0$ и $c_1>0$ возможные значения $u_2$ и $u_4$ могут быть поочерёдно равны «$+1$», «$-1$», «$+1$», «$-1$». Если $c_3=0$, то $\psi_{10}=-\frac{1}{2}c_4g\left[(t+\frac{c_7}{gc_4})^2-\frac{c_7^2+2gc_4c_{10}}{g^2c_4^2}\right]$.
Следовательно, если $c_7^2+2gc_4c_{10}>0$, то при $c_4<0$ оптимальное управление $u_2$ может с переключениями принимать значения «$+1$», «$-1$», «$+1$»; при $c_4>0$ $u_2$ может принимать значения «$-1$», «$+1$», «$-1$». Если $c_7^2+2gc_4c_{10}\le 0$, то при $c_4<0$ $u_2=+1$, а при $c_4>0$ $u_2=-1$. Если $c_1=0$, то $\psi_{12}=\frac{1}{2}c_2g\left[(t-\frac{c_9}{gc_2})^2-\frac{c_9^2-2gc_2c_{12}}{g^2c_2^2}\right]$. В случае $c_9^2-2gc_2c_{12}>0$ при $c_2>0$ оптимальное управление $u_4$ может с переключениями принимать значения «$+1$», «$-1$», «$+1$»; при $c_2<0$ $u_4$ может принимать значения «$-1$», «$+1$», «$-1$». Если $c_9^2-2gc_2c_{12}\le 0$, то при $c_2>0$ $u_4=+1$, а при $c_2<0$ $u_4=-1$. Не приводя другие возможные случаи, ясно, что, вообще говоря, структурная схема оптимальных управлений $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$ представляет собой цепочку переключений различных очерёдностей.

Предположим, что заданное конечное состояние является началом фазовых координат, а начальное состояние такое, что оптимальное управление, переводящее движение из начального состояния в начало фазовых координат, определено $u_1=+1$, $u_2=+1$, $u_3=+1$, $u_4=+1$. Для нахождения соответствующего оптимального движения будем иметь закон движения в виде

$\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = gx_9$, $\dot{x}_3 = x_4$, $\dot{x}_4 = -gx_7$, $\dot{x}_5 = x_6$, $\dot{x}_6 = 1$, $\dot{x}_7 = x_{10}$,
$\dot{x}_8 = x_{11}$, $\dot{x}_9 = x_{12}$, $\dot{x}_{10} = 1/\mathrm{I}_{xx}$, $\dot{x}_{11} = 1/\mathrm{I}_{yy}$, $\dot{x}_{12} = 1/\mathrm{I}_{zz}$,

откуда получим:

$$x_1 = \frac{g}{24\mathrm{I}_{zz}}t^4 + \frac{1}{6}ga_1t^3 + \frac{1}{2}ga_2t^2 + a_3t + a_4,\ x_2 = \frac{g}{6\mathrm{I}_{zz}}t^3 + \frac{1}{2}ga_1t^2 + ga_2t + a_3,$$

$$x_3 = -\frac{g}{24\mathrm{I}_{xx}}t^4 - \frac{1}{6}ga_5t^3 - \frac{1}{2}ga_6t^2 + a_7t + a_8,\ x_4 = -\frac{g}{6\mathrm{I}_{xx}}t^3 - \frac{1}{2}ga_5t^2 - ga_6t + a_7,$$

$$x_5 = \frac{1}{2}t^2 + a_9t + a_{10},\ x_6 = t + a_9,\ x_7 = \frac{1}{2\mathrm{I}_{xx}}t^2 + a_5t + a_6,\ x_8 = \frac{1}{2\mathrm{I}_{yy}}t^2 + a_{11}t + a_{12},$$

$$x_9 = \frac{1}{2\mathrm{I}_{zz}}t^2 + a_1t + a_2,\quad x_{10} = \frac{1}{\mathrm{I}_{xx}}t + a_5,\quad x_{11} = \frac{1}{\mathrm{I}_{yy}}t + a_{11},\quad x_{12} = \frac{1}{\mathrm{I}_{zz}}t + a_1.$$

Здесь через $a_i$, $i = 1, ..., 12$, обозначены постоянные интегрирования, которые для заданных начальных условий известны.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Ситников Д.В., Бурьян Ю.А., Русских Г.С. Автопилот мультикоптера // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2012. № 7. С.213–221.
2. Рубин Д.Т., Конев В.Н., Стариковский А.В., Шептунов А.А., Смирнов А.С., Толстая А.М. Разработка квадрокоптеров со специальными свойствами для проведения разведывательных операций // Спецтехника и связь. 2012. № 1. С.28–30.
3. Эпов М.И., Злыгостев И.Н. Применение беспилотных летательных аппаратов в аэрогеофизической разведке // Интерэкспо Гео-Сибирь. 2012. Т.2. № 3. С.22–27.
4. Маргун А.А., Зименко К.А., Базылев Д.Н. и др. Система управления беспилотным летательным аппаратом, оснащённым робототехническим манипулятором // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2014. №6 (94).
5. Luukkonen T. Modelling and control of quadcopter. 2011. http://sal.aalto.fi/publications/pdf-files/eluu11_public.pdf.
6. Puls T., Hein A. 3D trajectory control for quadrocopter // Intelligent Robots and System (IROS), IEEE/RSJ International Conference. 2010. P.640–645.
7. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.


**Сведения об авторах:**


**Барсегян Ваня Рафаелович** – доктор физ.-мат. наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении, профессор факультета математики и механики ЕГУ.
**Тел.:** (37410) 52 36 40**; E-mail:** barseghyan@sci.am

**Закоян Нона Татуловна** – выпускница факультета математики и механики ЕГУ.
**E-mail:** nona.zakoyan@gmail.com

# ВЛИЯНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА УСЛОВИЯ ПОЯВЛЕНИЯ ЛОКАЛИЗОВАННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ

**Белубекян В.М., Терзян С.А.**

Рассматривается прямоугольная пластинка с одним свободным краем, предварительно равномерно сжатая параллельно свободному краю. На остальных кромках пластинки принимаются различные сочетания граничных условий типа Навье и скользящего контакта (анти-Навье). Для кромки пластинки, противоположной свободному краю, приводятся решения задач также для жёстко закреплённого края. Определяются условия появления локализованной неустойчивости в зависимости от отношения сторон пластинки и коэффициента Пуассона.

**Введение.** Статья А.Ю. Ишлинского [1] стала основой для дальнейших исследований потери устойчивости локализованной в окрестности свободного края прямоугольной пластинки [2-9].

Следуя Ю.А. Коненкову [10], были поставлены и решены аналогичные задачи для локализованных изгибных колебаний пластинки, например [11-13].

Указанные задачи были исследованы для пластины с двумя противоположными шарнирно закреплёнными кромками, что позволило использовать метод разделения переменных. Однако, метод разделения переменных можно применять и в случае граничных условий скользящего контакта, или при граничных условиях шарнирного закрепления одного края пластинки и скользящего контакта на противоположном крае.

В настоящей статье приводится сравнение результатов для различных вариантов граничных условий, позволяющих применения метода разделения переменных.

**1**. В прямоугольной декартовой системе координат $(x, y, z)$ пластинка занимает область $0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b,\ -h \le z \le h$. Пластинка равномерно сжата по сторонам $y = 0, b$. Уравнение статической устойчивости пластинки по теории Кирхгофа общеизвестно

$$D\Delta^2 w + P\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0\,, \tag{1.1}$$

где $w(x, y)$ – функция прогиба пластинки, $D$ – жёсткость пластинки на изгиб, $P$ – усилие, приложенное на кромках $y = 0, b\,(P = 2h\sigma_0)$ .

На кромках пластины $y = 0, b$ будут рассматриваться следующие варианты граничных условий:

$$\text{I.}\quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0 \ \text{ при } \ y = 0, b \tag{1.2}$$

$$\text{II.}\quad w = 0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \ \text{ при } \ y = 0,\ \ \frac{\partial w}{\partial y} = 0,\ \ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0 \ \text{ при } \ y = b \tag{1.3}$$

$$\text{III.}\quad w = 0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \ \text{ при } \ y = 0, b\,. \tag{1.4}$$

Во всех случаях предполагается, что край пластинки $x = 0$ свободен

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0,\ \ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0\,. \tag{1.5}$$

Для края $x = b$ будут рассматриваться варианты свободного опирания и жёсткого закрепления.

Нетрудно проверить, что решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2), представимо в виде

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\cos\lambda_n y,\ \lambda_n = \frac{n\pi}{b}\,. \tag{1.6}$$

В случае условий (1.3)

$$w=\sum_{n=1}^{\infty} g_n\left(x\right)\sin\mu_n y,\quad \mu_n=\frac{2n-1}{2b}\pi \tag{1.7}$$

и в случае (1.4)

$$w=\sum_{n=1}^{\infty} q_n\left(x\right)\sin\lambda_n y,\quad \lambda_n=\frac{n\pi}{b}\ . \tag{1.8}$$

В первом и третьем вариантах собственые значения одинаковы. Во всех случаях для функций $f_n, q_n$ получаются:

$$f_n^{IV}-2\lambda_n^2 f_n''+\lambda_n^n\left(1-\alpha_n^2\right)f_n=0,\quad \alpha_n^2=\frac{P}{D\lambda_n^2}\ \left(q_n\right). \tag{1.9}$$

Уравнение для $q_n\left(x\right)$ имеет вид (1.9) с заменой $\lambda_n^2$ на $\mu_n^2$.

**2.** Общее решение (1.9) имеет вид

$$f_n=A_n\,\mathrm{sh}\,p_1\lambda_n x+B_n\,\mathrm{ch}\,p_1\lambda_n x+C_n\,\mathrm{sh}\,p_2\lambda_n x+D_n\,\mathrm{ch}\,p_2\lambda_n x\,, \tag{2.1}$$

где

$$p_1=\sqrt{1+\alpha_n}\,,\ \ p_2=\sqrt{1-\alpha_n} \tag{2.2}$$

– корни характеристического уравнения.

Требование, чтобы решение (1.6), с учётом (2.1), удовлетворяло граничным условиям свободного края (1.5), даёт

$$f_n=\left[\mathrm{sh}\,p_1\lambda_n x-\frac{p_1\left(p_1^2-2+\nu\right)}{p_2\left(p_2^2-2+\nu\right)}\mathrm{sh}\,p_2\lambda_n x\right]A_n+\left(\mathrm{ch}\,p_1\lambda_n x-\frac{p_1^2-\nu}{p_2^2-\nu}\mathrm{ch}\,p_2\lambda_n x\right)B_n\,. \tag{2.3}$$

Пусть на кромке пластины $x=a$ заданы условия свободного опирания

$$w=0,\ \ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0\ \ \text{или}\ \ f=0,\ f''=0\ \text{ при }\ x=a\ . \tag{2.4}$$

Подстановка (2.3) в (2.4) приводит к следующей системе алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных $A_n, B_n$:

$$\begin{gathered}\left[\mathrm{sh}\,\xi_1-\frac{p_1\left(p_1^2-2+\nu\right)}{p_2\left(p_2^2-2+\nu\right)}\mathrm{sh}\,\xi_2\right]A_n+\left(\mathrm{ch}\,\xi_1-\frac{p_1^2-\nu}{p_2^2-\nu}\mathrm{ch}\,\xi_2\right)B_n=0\\ p_1\left(p_1\,\mathrm{sh}\,\xi_1-p_2\frac{p_1^2-2+\nu}{p_2^2-2+\nu}\mathrm{sh}\,\xi_2\right)A_n+\left(p_1^2\,\mathrm{ch}\,\xi_1-p_2^2\frac{p_1^2-\nu}{p_2^2-\nu}\mathrm{ch}\,\xi_2\right)B_n=0\end{gathered}\ , \tag{2.5}$$

где

$$\xi_k=p_k\lambda_n a,\ \ k=1,2\,. \tag{2.6}$$

Условие равенства нулю детерминанта системы (2.5) после ряда преобразований приводится к виду:

$$I\left(p_1,p_2\right)\equiv\left(p_1^2-p_2^2\right)I_1\left(\alpha_n,\nu\right)=0\,, \tag{2.7}$$

где

$$I_1\left(\alpha_n,\nu\right)=\frac{p_1^2-\nu}{p_2^2-\nu}\mathrm{th}\,\xi_1-\frac{p_1\left(p_1^2-2+\nu\right)}{p_2\left(p_2^2-2+\nu\right)}\mathrm{th}\,\xi_2\,. \tag{2.8}$$

Из (2.8) в пределе $a\to\infty,\left(\mathrm{th}\,\xi_n\approx 1\right)$ получится известное уравнение, определяющее значения критических нагрузок локализованной неустойчивости [4,5,11]. Все приведённые формулы (2.1)–(2.8) для функции $f_n$ верны также для функций $g_n\left(x\right)$ и $q_n\left(x\right)$, с одной разницей, что для $g_n\left(x\right)$ вместо $\lambda_n$ необходимо брать $\mu_n$. Отсюда следует, что для варианта граничных условий (1.3) критическое значение минимальной нагрузки локализованной неустойчивости в четыре раза меньше, чем в случае граничных условий (1.2) и (1.4).

Условие появления локализованной неустойчивости устанавливается при $\alpha_n \to 1\left(p_2 \to 0\right)$ [14]. Из уравнения

$$I_1\left(\alpha_n, \nu\right) = 0 \tag{2.9}$$

при $\alpha_n \to 1$ получается

$$-\frac{2-\nu}{\nu}\,\text{th}\,\sqrt{2}\lambda_n a + \frac{\sqrt{2}\nu}{2-\nu}\lambda_n a = 0\,. \tag{2.10}$$

Очевидно, что при $\lambda_n a$ больше чем корни уравнения (2.10), задача устойчивости пластинки будет иметь решение, удовлетворяющее условию

$$0 < \alpha_n < 1\,, \tag{2.11}$$

т.е. условию существования локализованной в окрестности свободного края потери устойчивости.

Нетрудно проверить, что корень уравнении (2.10) удовлетворяет условию $\lambda_n a > 1$. Следовательно, можно использовать приближение $\text{th}\,\sqrt{2}\lambda_n a \approx 1$, что приводит к простой формуле условия существования локализованной неустойчивости

$$\lambda_1 a > \frac{\left(2-\nu\right)^2}{\sqrt{2}\nu^2}\,. \tag{2.12}$$

В (2.12) принято $n = 1$, при котором получается минимальная критическая нагрузка.

В случае граничных условий (1.3) в формуле (2.12), $\lambda_1$ заменяется на $\mu_1$. В частности, получаются следующие неравенства для отношения сторон пластинки в случае вариантов граничных условий (1.2) и (1.3), соответственно,

$$\frac{a}{b} > \frac{\left(2-\nu\right)^2}{\sqrt{2}\pi\nu^2}\,,\quad \frac{a}{b} > \frac{\sqrt{2}\left(2-\nu\right)^2}{\pi\nu^2}\,. \tag{2.13}$$

Появление локализованной неустойчивости во втором варианте, при отношении сторон пластинки, будет в два раза больше, чем в первом.

### ЛИТЕРАТУРА


1. Ишлинский А.Ю. Об одном предельном переходе в теории устойчивости упругих прямоугольных пластин // ДАН СССР. 1954. Т.XCV. №3. С.477-479.
2. Banichuk N.V., Ishlinskii A.Yu. Some special features of the stability and vibrations of rectangular plate //J. Appl. Math. And Mech.1995, 59(4), p.593-597.
3. Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек (Асимптотические методы). М.: Наука, 1995. 320с.
4. Белубекян М.В. Задача локализованной неустойчивости пластинки // В сб.: «Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем». Ереван: Изд. ЕГУ, 1997. С.95-99.
5. Белубекян М.В., Чил-Акопян Э.О. Задачи локализованной неустойчивости пластинки со свободным краем // Изв. НАН Армении. Механика. 2004. Т.57. №2. С.34-39.
6. Белубекян В.М. К задаче устойчивости пластин с учётом поперечных сдвигов // Изв. РАН. МТТ. 2004. №2. С.126-131.
7. Banichuk N.V., Barsuk A.A. Localization of eigenforms and limit transitions in problems of stability of rectangular plates // J.Appl. Math and Mech. 2008. V.72(2), p.302-307.
8. Sharifian R., Belubekyan V. Stability of a rectangular plate axially compressed on its two opposite free edges // ZAMM. 2012. V.92. №7. P.558-564.

9. Белубекян М.В., Саакян А.А. О локализованной неустойчивости свободного края опёртой по двум противоположным сторонам прямоугольной пластинки при различных условиях закрепления четвертой стороны. // Изв. РАН. МТТ. 2018. №3. С.61-66.
10. Коненков Ю.К. Об изгибной волне релеевского типа // Акуст. Журнал. 1960. Т.6. №1. С.124-126.
11. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. К вопросу об изгибных волнах, локализованных вдоль кромки пластинки // Прикл. Механика. НАН Украины. 1994. Т.30. №2. С.61-68.
12. Belubekyan M., Ghazaryan K., Marzocca P., Cormier C. Localized Bending Waves in Rib-Reinforced Elastic Orthotropic Plate. //Journal of Appl/ Mechanics. 2007. V.74., Issue 1. P.169-173.
13. Lawrie J.B., Kaplunov J. Edge waves and resonance on elastic stractures: an overview // Mathematics and Mechanics of Solids. 2012. V.17. P.4-16.
14. Белубекян М.В. Условия появления локализованных изгибных колебаний растянутой пластинки. //В сб.: «Проблемы механики деформируемого твердого тела». Ереван, «Гитутюн». 2017. С.93-98. (Посв. 95-летию С.А. Амбарцумяна)

**<u>Сведения об авторах:</u>**

**Белубекян Вагаршак Мелсович –** к.ф.м.н., Институт механики НАН Армении.
**E-mail:** vbelub@gmail.com
**Терзян Саркис Арутюнович –** к.ф.м.н., н.с. Института механики НАН Армении.
**Тел:** (+374 91) 340432. **E-mail:** sat_and_21@yahoo.com

# О ЗАДАЧЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО СЖАТОЙ КОНСОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ

**Белубекян М.В., Белубекян В.М.**

Рассматривается прямоугольная пластинка с двумя противоположными свободными краями. Одна из оставшихся сторон пластинки закреплена, другая свободна. Предполагается, что пластинка равномерно сжата параллельно свободным краям. Показывается, что кроме общепринятого решения задачи усройчивости такой пластинки в предположении, что расстояние между свободными краями большое (удлинённая пластинка), существуют и другие простые приближения решения.

**1**. В прямоугольной декартовой системе координат *(x,y,z)* изотропная пластинка постоянной толщины занимает область: $0 \le x \le a$, $-0.5b \le y \le 0.5b$, $-h \le z \le h$, как показано на рис.1.

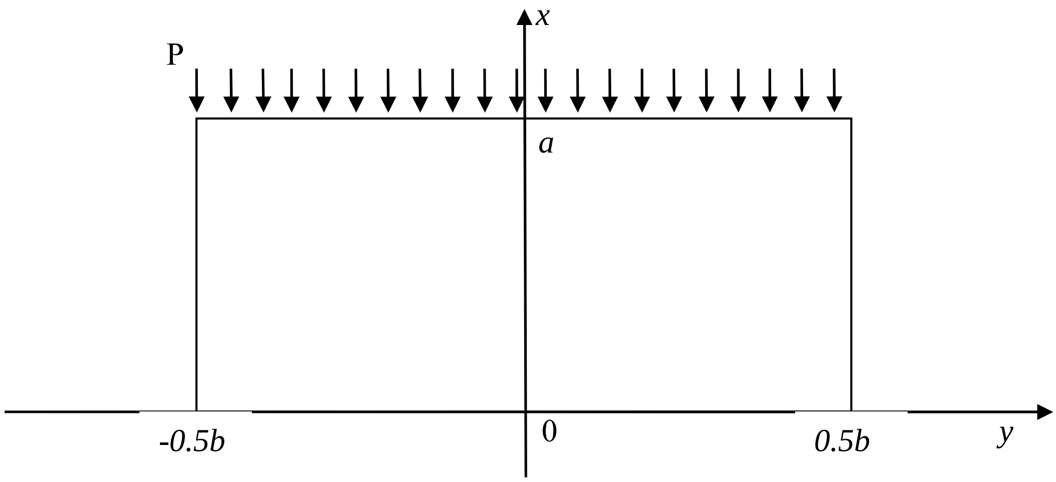



Рис.1. Равномерно сжатая прямоугольная пластинка

Пластинка предварительно равномерно сжата усилием P вдоль координаты *x*.

Уравнение статической устойчивости пластинки (устойчивости по Эйлеру) имеет вид [1]:

$$\mathrm{D}\Delta^2 \mathrm{w} + \mathrm{P}\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial \mathrm{x}^2} = 0, \quad \mathrm{D} = \frac{2\mathrm{Eh}^3}{3(1-\upsilon^2)} \tag{1.1}$$

где *w(x,y)* – функция прогиба, *D* – жёсткость пластинки на изгиб, E – модуль Юнга, $\nu$-коэффициент Пуассона.

Предполагается, что на кромках пластинки имеют место следующие граничные условия

$$\mathrm{w} = 0, \ \partial\mathrm{w}/\partial\mathrm{x} = 0 \quad \text{при } \mathrm{x} = 0 \tag{1.2}$$

$$\mathrm{M_x} = 0, \ \widetilde{\mathrm{N}}_\mathrm{x} + \mathrm{P}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial \mathrm{x}} = 0 \ \text{ при } \mathrm{x} = \mathrm{a} \tag{1.3}$$

Учитывая выражения для момента $\mathrm{M_x}$ и перерезываюшей силы $\widetilde{\mathrm{N}}_\mathrm{x}$ [1], условия (1.3) записываются также в виде

$$\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial \mathrm{x}^2} + \nu\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial \mathrm{y}^2} = 0 \quad \text{при } \mathrm{x} = \mathrm{a} \tag{1.4}$$

Кромки пластинки $y = \pm 0.5b$ свободны, т.е.

$$\mathrm{M_y} = 0, \ \widetilde{\mathrm{N}}_\mathrm{y} = 0 \quad \text{при } y = \pm 0.5b \tag{1.5}$$

или

$$\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial \mathrm{y}^2} + \nu\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial \mathrm{x}^2} = 0, \ \frac{\partial^3 \mathrm{w}}{\partial \mathrm{y}^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 \mathrm{w}}{\partial \mathrm{y}\,\partial \mathrm{x}^2} = 0 \quad \text{при } y = \pm 0.5b \tag{1.6}$$

Требуется найти нетривиальное решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2), (1.4), (1.6).

**2.** Решение рассматриваемой задачи обычно приводится в приближении удлинённой по координате $y$ пластинки. Считается, что форма потери устойчивости пластинки не зависит от координаты $y$ [1,2]. Из постановки приведённой задачи следует, что метод разделения переменных здесь не применим. Использование же метода Галёркина затруднено, как отмечено в монографии Н. Алфутова [1], из-за того, что надо подобрать систему функций, удовлетворяющих граничным условиям относительно моментов и усилий на свободном крае (1.6). Из сказанного делается вывод, который совпадает с содержанием следующей цитаты из монографии Н. Алфутова [1]: «Переходя к другим случаям точного интегрирования основных линеаризованных уравнений, отмечаем, что решение, полученное для удлинённой пластинки, можно использовать и для пластинки конечных размеров с двумя свободными краями. В этом случае с достаточной степенью точности можно принять $w$=$w(x)$. Однако, граничные условия на свободных краях не будут точно удовлетворены. При $h/b \ll 1$ это не влияет на значения критических нагрузок».

В предположении $w$=$w(x)$ , собственные функции задачи получаются в виде:

$$w_n = \mathrm{A_n}(1-\cos\alpha_n x) \ , \alpha_n = \frac{(2n-1)\pi}{2a} \ , \ n = 1,2,\ldots \qquad (2.1)$$

и следующее выражение для критических нагрузок (собственные значения)

$$P_n = \mathrm{D}\alpha_n^2, \qquad min\mathrm{P_n} = \mathrm{P_1} = \frac{\pi^2 D}{4a^2}\,. \qquad (2.2)$$

Решение (2.1) удовлетворяет уравнению (1.1), граничным условиям (1.2), (1.4), но не удовлетворяет условиям свободного края при $y = \pm 0.5b$ (1.6). Однако, решение (2.1) удовлетворяет граничным условиям

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 0 \ , \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0 \ \text{ при } \ y = \pm 0.5b, \qquad (2.3)$$

т.е. условиям скользящего контакта для балки [3] или же условиям

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \ , \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0 \ \text{ при } \ y = \pm 0.5b, \qquad (2.4)$$

т.е. условиям свободного края балки.

Нетрудно проверить, что функция прогиба, представленная в виде

$$(x, y) = \mathrm{A_n}(1-\cos\alpha_n x)y \qquad (2.5)$$

также удовлетворяет уравнению (1.1) и граничным условиям (1.1), (1.4) и не удовлетворяет граничным условиям (1.6). Вместо условий (1.6) функция (2.5) удовлетворяет условиям свободного края балки (2.4). Таким образом, решение (2.5) также можно считать приближённым решением задачи.

**3.** Предлагается решение задачи устойчивости консольной пластинки представить в виде:

$$w_n(x, y) = \mathrm{A}(1-\cos\alpha_1 x)(1-\gamma\frac{y}{b})\,. \qquad (3.1)$$

Решение в виде линейной функции от координаты $y$ в задаче изгиба пластинки с противоположными свободными краями ранее было предложено в статье [4].

После представления (3.1) для определения критической нагрузки используется энергетический метод [1]. Для потенциальной $U$ энергии получаем:

$$U = \frac{1}{2}D\int_0^a\int_{-b}^b\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right]dxdy =$$

$$= A^2\frac{\pi^4 b}{64a^3}D(1+\gamma+\frac{\gamma^2}{3}+2\frac{1-\nu}{\pi^2}\frac{a^2}{b^2}\gamma^2). \qquad (3.2)$$

Из выражения для работы внешних сил $W$ следует:

$$W = \frac{h}{2}\int_{-b}^b\sigma_x\left[\int_0^a\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx\right]dy = PA^2\frac{\pi^2 b}{16a}(1+\gamma+\frac{\gamma^2}{3}) \qquad (3.3)$$

Из условия $U$=$P$ определяется минимальная критическая нагрузка

$$P = \frac{\pi^2 D}{4a^2}\left[1+\frac{1-\nu}{\pi^2}\frac{a^2}{b^2}\gamma^2(1+\gamma+\frac{\gamma^2}{3})\right]. \qquad (3.4)$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение, 1978. 312с.
2. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. Изд 2-е. М.: Наука, 1967.
3. Вибрации в механике. Справочник. Т.1. Колебания линейных систем. ( под ред. В.В. Болотина), М.: Машиностроение, 1978. 352 с.
4. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. К задаче изгиба прямоугольной пластинки с двумя противоположными свободными краями. /В сб.: «Современные проблемы механики сплошной среды». МП «Книга», Ростов-на-Дону, 1995, с.19-23.

**Сведения об авторах:**

**Белубекян Мелс Вагаршакович** – Главный научный сотрудник Института механики НАН Армении, (37410) 52-15-03, (37493) 58-00-96
**E-mail:** mbelubekyan@yahoo.com

**Белубекян Вагаршак Мелсович** – Научный сотрудник Института механики НАН Армении, (37491) 20 95 18
**E-mail:** vbelub@gmail.com

# ВЛИЯНИЕ ИНЕРЦИОННОЙ МАССЫ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ УПРУГОГО ВОЛНОВОДА

**Белубекян М.В., Саркисян С.В.**

При распространении волн в упругих телах значение имеет выбор граничных условий. В настоящей работе предлагается простая модель для исследования влияния инерционной массы, распределённой по плоскости упругого слоя, на характеристики упругого волновода.

**Введение.** При изучении процесса распространения волн в упругих телах особую роль играет выбор граничных условий. В основном, принимается одно из предположений**:** границы тела жёстко закреплены или свободны. Однако, на практике существует множество ситуаций, когда нельзя пренебречь реальными свойствами сред, окружающих тело. Упругий слой с плоскопараллельными лицевыми плоскостями представляет собой частный случай математической модели упругого волновода. В различных областях механики для решения многих инженерных задач широкое применение находят многослойные структуры, а в ряде случаев слоистый композит является волноводной структурой [1-12]. В настоящей статье предлагается простая модель для исследования влияния инерционной массы, распределённой по плоскости упругого слоя, на характеристики упругого волновода. Исследованы следующие задачи [13-14]:

- упругий изотропный слой**:** одна граница слоя жёстко закреплена, а на другой границе присутствует инерционная масса (чисто сдвиговые волны);
- упругий изотропный слой**:** одна граница слоя жёстко закреплена, а на другой границе присутствует инерционная масса (плоская деформация);
- упругий изотропный слой**:** на двух границах слоя распределена инерционная масса (плоская деформация).

Во всех рассмотренных задачах показано влияние инерционной массы на характеристики упругого волновода.

**1.** Рассмотрим упругий изотропный слой толщиной $h$. Слой в прямоугольной системе координат $(x, y, z)$ занимает область**:** $-\infty < x < \infty,\quad 0 \le y \le h,\quad -\infty < z < \infty$ .

Предполагается, что на границах слоя заданы следующие условия**:**

$$w(x, y, t) = 0 \qquad \text{при} \quad y = 0,$$

$$\sigma_{yz} = -m_0 \ddot{w} \qquad \text{при} \quad y = h. \tag{1}$$

Здесь $\rho$ , $\mu$ и $w(x, y, t)$ – объёмная плотность, модуль сдвига материала слоя, компонента вектора перемещения точек слоя, $m_0 > 0$ – инерционная масса. Второе граничное условие (1) может появиться вследствие либо наличия тонкого слоя из материала с отличными от материала слоя характеристиками [8,10], либо наличия инерционной (сосредоточенной) массы, распределённой по плоскости $y = h$ .

Если в слое распространяется периодическая волна с фазовой скоростью $c$, согласно граничным условиям (1) получим следующее дисперсионное уравнение относительно безразмерной фазовой скорости $\eta$ :

$$m\,\mathrm{th}(kh\sqrt{1-\eta}) - \sqrt{(1-\eta)/\eta} = 0. \tag{2}$$

Здесь $\omega$ – частота колебания, $k = \omega / c$ – волновое число, $m = m_0\omega / \rho c_t$ , $\eta = c^2 / c_t^2 < 1$ – искомая безразмерная фазовая скорость, $c_t = \sqrt{\mu/\rho}$ – скорость распространения поперечной волны в слое. Отметим, что уравнение (2) в общем случае может иметь решение, удовлетворяющее как условию $\eta < 1$, так и условию $\eta \ge 1$. Аналогичная ситуация имеет место в задаче распространения сдвиговых волн в двухслойной среде.

Пусть длина волны $l = 2\pi / k$ очень мала по сравнению с толщиной слоя $h$ . В этом предельном случае получим

$$\eta = 1 / (1 + m^2). \tag{3}$$

Если длина волны очень велика по сравнению с толщиной слоя, то для $\eta$ будем иметь

$$\eta = 1 / m^2 k^2 h^2 . \tag{4}$$

Путём предельного перехода $\eta \to 1$ можно показать, что уравнение (2) имеет решение, удовлетворяющее условию $\eta < 1$ (типа локализованных колебаний) при условии

$$kh > 1/m . \tag{5}$$

Отметим, что при $\eta > 1$ получаем колебания упругого изотропного слоя толщиной $h$ с сосредоточенной массой $m_o$ с частотой $\omega$. На рис.1 представлены результаты решения дисперсионного уравнения (2) при различных значениях параметра $kh$ и $m$, удовлетворяющих условию существования (5). При отсутствии сосредоточенной массы $m$, как следует из дисперсионного уравнения (2), безразмерная фазовая скорость $\eta = 1$. Наличие сосредоточенной массы приводит к образованию в слое локализованных колебаний с безразмерной фазовой скоростью $\eta < 1$ (например, при $m = 2$, $kh = 1$ $\eta = 0.3624$). Неравенство (5) является условием возникновения фазовых скоростей, удовлетворяющих условию $\eta < 1$.

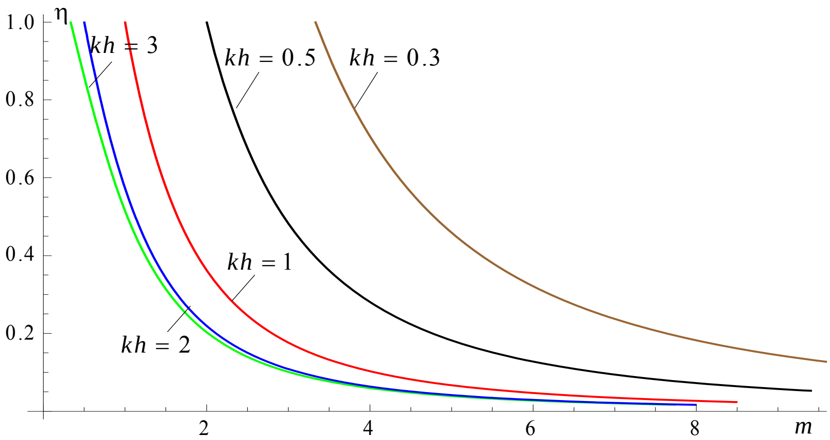



Рис.1. Решения дисперсионного уравнения (2)

**2**. Рассмотрим задачу распространения волн в бесконечном упругом слое толщиной $h$. Слой ограничен плоскостями $y = 0$ и $y = h$. Плоскость $y = 0$ жёстко закреплена, а на плоскости $y = h$ задана $m_0 > 0$ сосредоточенная (инерционная) масса.

В случае задачи плоской деформации относительно безразмерной фазовой скорости распространения волн в упругом слое $\eta$ получаем следующее характеристическое уравнение:

$$\begin{gathered} 4(2-\eta)\sqrt{(1-\eta)(1-\eta\theta)} - \left((2-\eta)^2+4\right)\sqrt{(1-\eta)(1-\eta\theta)}\,\mathrm{ch}\left(H\sqrt{1-\eta\theta}\right)\mathrm{ch}\left(H\sqrt{1-\eta}\right) + \\ + \left((2-\eta)^2 + 4(1-\eta\theta)(1-\eta)\right)\mathrm{sh}\left(H\sqrt{1-\eta\theta}\right)\mathrm{sh}\left(H\sqrt{1-\eta}\right) + \\ + \frac{m}{k}\eta\sqrt{1-\eta}\left(\mathrm{sh}\left(H\sqrt{1-\eta\theta}\right)\mathrm{ch}\left(H\sqrt{1-\eta}\right) - \sqrt{(1-\eta)(1-\eta\theta)}\,\mathrm{ch}\left(H\sqrt{1-\eta}\right)\mathrm{sh}\left(H\sqrt{1-\eta}\right)\right) = 0 \end{gathered} \tag{6}$$

где $H = kh,\ \theta = c_t^2 / c_l^2 < 1, c_l = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho},\ m = m_0 k^2 c^2 \mu^{-1}$. Анализ уравнения (6) показывает, что при различных значениях $H = kh$ получаются приведённые значения $m$, при которых существуют решения типа локализованных колебаний с безразмерной фазовой скоростью $\eta < 1$. Например, при $\theta = 1/3$ $kh \equiv H_* = 3.8063$. В таблице приводятся значения инерционной массы $m$ при различных значениях $H = kh$, когда $\theta = 1/3$.

| H | 0.1 | 0.3 | 0.5 | 0.7 | 1 | 1.1 | 1.3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| m/k | 10.0555 | 3.4978 | 2.2675 | 1.7896 | 1.4768 | 1.4168 | 1.3256 |

Как видно из таблицы, с возрастанием $H$ приведённые значения сосредоточенной массы $m$ убывают. Отметим, что при $\eta > 1$ получаем колебания упругого изотропного слоя толщиной $h$, одна из лицевых плоскостей которого жёстко закреплена, а на другом задана инерционная масса $m_0$ с частотой $\omega = kc$, которую можно определить из уравнения (6).

**3.** Рассмотрим упругий изотропный слой толщиной 2h. Слой в прямоугольной декартовой системе координат $0xyz$ занимает область $L = \{(x, y, z);\ x, y \in (-\infty, \infty), z \in [-h, h]\}$.

Примем, что на плоскостях $z = \pm h$, ограничивающих слой, заданы следующие граничные условия:

$$\sigma_{zz} = 0,\ \ \sigma_{zx} = \mp m_0 \ddot{u} \ . \tag{7}$$

При $m_0 = 0$ граничные условия (7) соответствуют случаю свободных границ, а при $m_0 \to \infty$ получаем смешанные граничные условия. В этом слое распространяется периодическая волна с фазовой скоростью c. Для плоско-напряжённого состояния бесконечного упругого слоя согласно граничным условиям (7) для симметричных мод и антисимметричных колебаний получаем следующие дисперсионные уравнения относительно безразмерной характеристики квадрата фазовой скорости $\eta$:

$$\begin{gathered}(2-\eta)^2 \operatorname{th}\left(H\sqrt{1-\eta}\right) - 4\sqrt{(1-\eta)(1-\eta\theta)}\operatorname{th}\left(H\sqrt{1-\eta\theta}\right) + \alpha\eta\sqrt{1-\eta}\,/\,H = 0,\\ H = kh,\ \alpha = m_0\omega^2 h\mu^{-1}.\end{gathered} \tag{8}$$

$$(2-\eta)^2 \operatorname{cth}\left(H\sqrt{1-\eta}\right) - 4\sqrt{(1-\eta)(1-\eta\theta)}\operatorname{cth}\left(H\sqrt{1-\eta\theta}\right) + \alpha\eta\sqrt{1-\eta}\,/\,H = 0\,.$$

Рассмотрены предельные случаи. Пусть длина волны $l = 2\pi / k$ очень велика по сравнению с толщиной слоя $2h$. В этом случае при $\mu=\lambda$ из (8) получаем $c = c_{ps} \equiv 2c_2\sqrt{2\left(1 - 3\alpha / 8H^2\right)/3}$. Предположим, что длина волны очень мала по сравнению с толщиной слоя 2h. Тогда имеем:

$$R(\eta) \equiv (2-\eta)^2 - 4\sqrt{(1-\eta)(1-\eta\theta)} + \alpha\eta\sqrt{1-\eta}\,/\,H = 0. \tag{9}$$

Это уравнение при $\alpha = 0$ совпадает с классическим уравнением Рэлея [3]. В отличие от уравнения Рэлея, оно дисперсионное, т.е. фазовая скорость $\eta$ зависит от волнового числа $k$. Следует отметить, что аналогичное дисперсионное уравнение получено для задачи Рэлея, когда граница полупространства упруго стеснена либо по направлению нормали, либо по касательному направлению в [12]. Там же установлены условия, при которых поверхностная волна не может существовать и условия существования поверхностной волны в зависимости от коэффициента, характеризующего стеснение, и от длины волны. Из обсуждения предельных случаев следует, что для первой формы симметричных колебаний фазовая скорость лежит в пределах $c_{ps} \ge c \ge c_{Rs}$ ($c_{Rs}$ – корень дисперсионного уравнения (9)). Наличие сосредоточенной массы и при невыполнении условия $\alpha < 2H(1-\theta)$ приводит к тому, что в слое с данной толщиной поверхностная волна не распространяется. Из второго уравнения (8) можно определить фазовую скорость волн изгиба для первой формы антисимметричных колебаний.

На рис.2 приводится поведение функции $D(\eta) = R(\eta)/\eta$ при различных значениях $\alpha / H$. Численный анализ показывает влияние сосредоточенной массы на скорость поверхностной волны. Увеличение значения сосредоточенной массы, распределённой по плоскостям слоя $z = \pm h$, приводит к тому, что скорость поверхностной волны при заданных значениях толщины слоя уменьшается.

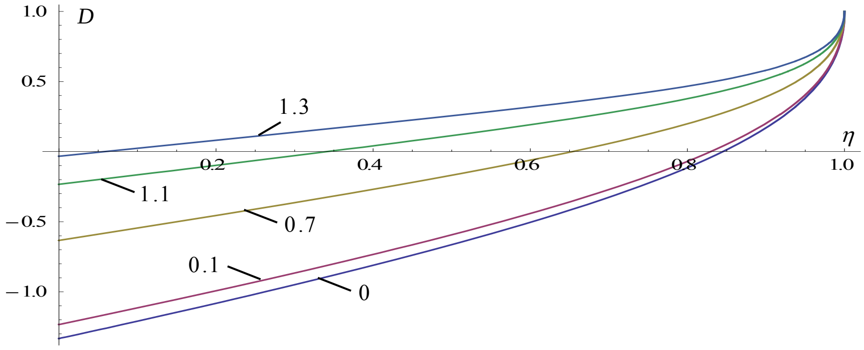



Рис.2. Поведение функции $D(\eta)$ при различных значениях $\alpha/H$ .

## ЛИТЕРАТУРА


1. Pochhammer L.Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrentzen isotropen Kreiszylinder. //J. f d. und angew. Math., 1876. №81, p.324—336.
2. Lamb H. On Waves in an Elastic Plate. //Proceedings of the Royal Society, SA., vol. 93, 1917.
3. Miklovitz, J. The theory of elastic wave and wavequides / J. Miklovitz. – Amsterdam: North-Holland, 1978. 618 p.
4. Newton M.I., Mehale G., Martin F. Gizeli E., Meizak R. F. // Generalized Love waves Europhysics letters. 2002. V. 58. № 6. P.818-822.
5. Распространение волн в упруго-закрепленном изотропном слое / Л.Ю. Коссович [и др.] //Вестник СамГУ. Естественно-научная серия: Механика. 2008. № 8/2 (67). С.78–89.
6. Упругие волноводы: история и современность / В.В. Мелешко [и др.] // Математические методы и физико-механические поля. 2008. Т.51. № 2. С.86–104.
7. Вильде М.В., Каплунов Ю.Д., Коссович Л.Ю. Краевые и интерфейсные резонансные явления в упругих телах. М.: Физматлит, 2010. 280 с.
8. Белубекян В.М., Белубекян М.В. Резонансные и локализованные сдвиговые колебания в слое с прямоугольным поперечным сечением. //Докл. НАН Армении. 2015. Т.115. № 1. С.40–43.
9. Белубекян В.М., Оганян С.К., Казарян К.Б., Можаровский В.В., Марьина Н.А. Распространение сдвиговых волн в плоском изотропном слое с тонкими покрытиями. //Проблемы физики, математики и техники. № 4 (33), 2017. С.40-43.
10. Белубекян М.В. Об условиях существования волн Лява с неоднородным слоем // Изв. АН Армении. Механика. 1991. Т.44. №3. С. 7-10.
11. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981. 283 с.
12. Белубекян М.В. Волна Рэлея в случае упруго-стесненной границы. //Изв. НАН Армении. Механика. 2011. Т.64. №4. С. 3 – 6.
13. Белубекян М.В., Саркисян С.В. Распространение волн в упругом слое, одна из лицевых плоскостей которого жёстко закреплена, с инерционной массой на другом. //Доклады НАН Армении. 2019. Т.119. № 1. С.74-78.
14. Саркисян А.С., Саркисян С.В. Волны в упругом слое с инерционной массой на границе.// Изв. НАН Армении. Механика. 2019. Т.72. №1. С.65-72.



**Сведения об авторах:**

**Белубекян Мелс Вагаршакович** – канд. ф.-м..н., профессор, гл. научн. сотр. Института механики НАН Армении, Ереван, Армения (+374 10) 521503, (+374 10) 580096.
**E-mail:** mbelubekyan@yahoo.com.

**Саркисян Самвел Владимирович** – доктор физ.-мат. наук, професор, зав. кафедрой механики, факультета математики и механики ЕГУ, ведущий науч. сотр. Института механики НАН Армении (374 99) 57-09-13. **E-mail:** vas@ysu.am.

# ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ РЕБРИСТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ, ИЗГОТОВЛЕННОЙ ИЗ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА

**Белубекян Э.В., Погосян А.Г.**

Рассматривается пологая цилиндрическая оболочка открытого профиля, усиленная в середине ребром жёсткости и изготовленная из ортотропного композиционного материала (КМ), под действием внутренней нормальной нагрузки. Ставится задача определения оптимальных геометрических и физических параметров конструкции, обеспечивающих её наибольшую жёсткость и прочность при заданных габаритных размерах оболочки и постоянном весе, равном весу оболочки постоянной толщины.

**Введение.** Применение композиционных материалов (КМ) в тонкостенных элементах конструкций даёт возможность наиболее полного использования отличительных свойств этих материалов при оптимальном проектировании конструкций по критериям наибольшей жёсткости и несущей способности. Этой же цели способствует создание элементов ребристых конструкций, изготовленных из КМ.

Вопросы оптимального проектирования пологой цилиндрической оболочки открытого профиля кусочно-постоянной толщины, изготовленной из КМ, под действием внутреннего давления рассматривались в работе [1], где было показано, что улучшение жёсткостных и прочностных характеристик оболочки происходит при существенном увеличении толщины её среднего слоя с одновременным уменьшением её длины. Этот результат позволил предположить, что наибольшего эффекта следует ожидать при изготовлении оболочки, усиленной в её средней части ребром жёсткости. В связи с этим, в настоящей работе рассматривается задача оптимального проектирования ребристой оболочки, изготовленной из КМ. Поскольку тонкостенные элементы конструкций из КМ, в основном, моделируются как анизотропные, здесь при расчётах используется теория анизотропных оболочек С.А. Амбарцумяна [2]. Определение оптимальных параметров оболочки приводится к задаче нелинейного программирования, которая решается методом деформируемого многогранника [3] с применением пакета параллельных вычислений в среде пакета ***Wolfram Mathematica*** [4].

**Постановка задачи.** Рассматривается пологая цилиндрическая оболочка толщиной $h$, размерами в плане $2L \times b$, шарнирно опертая по сторонам $y = 0$ и $y = b$, жестко закреплённая по краям $x = \pm L$ и усиленная в середине $(x = 0)$ ребром жёсткости прямоугольного сечения $\alpha h_r \times h_r$ . Предполагается, что оболочка находится под действием внутреннего нормального давления $q(y)$ и изготовлена из композиционного материала путём поочерёдной укладки его монослоев под углом $\pm\varphi$ к оси $x$ оболочки.

Ставится задача определения оптимальных значений параметров $\alpha$, $h$, $h_r$, $\varphi$, обеспечивающих наибольшие значения жёсткости (наименьшее значение наибольшего прогиба) и прочности (наибольшее значение допускаемой из условия прочности нагрузки) оболочки при её постоянном весе, равном весу оболочки постоянной толщины $h_0$, и заданных габаритных размерах $\xi = 2L / b$ .

**Определение напряжённо-деформированного состояния оболочки.** Ввиду симметрии, задача определения напряжённо-деформированного состояния оболочки решается для области $x \ge 0$ с удовлетворением граничных условий на сторонах $y = 0$, $y = b$, $x = L$ и упругого опирания на линии $x = 0$.

Принятая структура пакета пластинки позволяет считать её ортотропной. Согласно теории весьма пологих ортотропных оболочек [2] задача сводится к определению потенциальной функции $\Phi(x, y)$, удовлетворяющей уравнению

$$P_1 \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^8} + P_3 \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^6 \partial y^2} + P_5 \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^4 \partial y^4} + P_4 \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^2 \partial y^6} + P_2 \frac{\partial^8 \Phi}{\partial y^8} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} = q, \tag{1}$$

где

$$P_1 = D_{11}\frac{C_{11}}{\Omega},\ \ P_2 = D_{22}\frac{C_{22}}{\Omega},\ \ P_3 = D_{11}\left(\frac{1}{C_{66}} - 2\frac{C_{12}}{\Omega}\right) + 2\left(D_{12} + 2D_{66}\right)\frac{C_{11}}{\Omega},$$

$$P_4 = 2\left(D_{12} + 2D_{66}\right)\frac{C_{22}}{\Omega} + D_{22}\left(\frac{1}{C_{66}} - 2\frac{C_{12}}{\Omega}\right),$$

$$P_5 = D_{11}\frac{C_{22}}{\Omega} + 2\left(D_{12} + 2D_{66}\right)\left(\frac{1}{C_{66}} - 2\frac{C_{12}}{\Omega}\right) + D_{22}\frac{C_{11}}{\Omega},\ \ \Omega = C_{11}C_{22} - \left(C_{12}\right)^2,$$

$C_{ik}$, $D_{ik}$ – жёсткости оболочки: $C_{ik} = B_{ik}h$, $D_{ik} = B_{ik}\frac{h^3}{12}$, $i,k = 1,2,6$, $B_{ik}$ – упругие характеристики КМ в главных геометрических направлениях оболочки, определяемые через его характеристики в главных физических направлениях $B_{ik}^0$ по известным формулам поворота [2].

Выражения перемещений $u$, $v$, $w$ внутренних усилий оболочки $T_1$, $T_2$, $S$, $M_1$, $M_2$, $H$, $N_1$, $N_2$ через потенциальную функцию $\Phi(x,y)$ определяются по известным формулам для пологих цилиндрических оболочек [2].

Граничные условия оболочки запишутся в виде:

- шарнирного опирания на сторонах $y = 0$ и $y = b$

$$w = 0,\ u = 0,\ T_2 = 0,\ M_2 = 0 \ \text{при}\ \ y = 0,\ y = b, \tag{2}$$

- заделки на стороне $x = L$

$$u = 0,\ \ v = 0,\ w = 0,\ \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \ \text{при}\ x = L, \tag{3}$$

- упругого опирания на линии $x = 0$

$$u = 0,\ \ \frac{\partial w}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial}{\partial y}\left(EA\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -2S,\ -2D_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = B\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \ \ \text{при}\ x = 0 \tag{4}$$

где $A = \alpha h_r^2$, $B = EJ = E\frac{\alpha h_r^4}{12}$ – площадь поперечного сечения и жёсткость ребра, $E$ – модуль упругости КМ в направлении армирования.

Разлагая функцию нагрузки в ряд:

$$q(y) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin\lambda_m y,\qquad q_m = \frac{2}{b}\int_0^b q(y)\sin\lambda_m y,\qquad \lambda_m = \frac{m\pi}{b},$$

решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2), представляется в виде

$$\Phi = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{q_m}{\lambda_m^8 P_2}\sin\lambda_m y + \sum_{m=1}^{\infty}\Phi_m \sin\lambda_m y, \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned}\Phi_m = \sum_{j=1}^{8} C_{jm}e^{\alpha_j\lambda_m x} = C_{1m}e^{\alpha_1\lambda_m x} + C_{2m}e^{\alpha_2\lambda_m x} + C_{3m}e^{\alpha_3\lambda_m x} + C_{4m}e^{\alpha_4\lambda_m x} + \\ + C_{5m}e^{\alpha_5\lambda_m x} + C_{6m}e^{\alpha_6\lambda_m x} + C_{7m}e^{\alpha_7\lambda_m x} + C_{8m}e^{\alpha_8\lambda_m x}\end{aligned} \tag{6}$$

Коэффиииенты $\alpha_j$ являются корнями характеристического уравнения:

$$P_1\alpha^8 - P_3\alpha^6 + \left(P_5 + \frac{1}{R^2\lambda_m^4}\right)\alpha^4 - P_4\alpha^2 + P_2 = 0. \tag{7}$$

Удовлетворением условий (3) – (4) определятся значения коэффициентов $C_{jm}$, после чего определятся все расчётные величины. Следует отметить, что вне зависимости от видов корней характеристического уравнения (7), значения коэффициентов $C_{jm}$ будут действительными.

Через перемещения $u, v, w$ определяются деформации $e_x$, $e_y$, $e_{xy}$ в главных геометрических направлениях оболочки [2], после чего определяются деформации, $e_{11}$, $e_{22}$, $e_{12}$ и соответствующие напряжения $\sigma_{11}$, $\sigma_{22}$ и $\sigma_{12}$ в направлениях укладки композита под углом $\pm\varphi$ к оси $x$ оболочки.

**Оптимизация оболочки по критерию жёсткости.** Определение оптимальных параметров оболочки $\alpha$, $h$, $h_r$, $\varphi$, при которых наибольшие прогибы при неизменном весе и заданных габаритных размерах $\xi = 2L/b$ конструкции достигают наименьшего значения, сводится к следующей задаче нелинейного программирования:
найти:

$$\min_{\bar{x}} \max_{x,y} w, \quad \bar{x} = \{\alpha, h, h_r, \varphi\} \tag{8}$$

при ограничениях:

$$\xi b(h_0 - h) = \alpha h_r (h_r - h_0), \tag{9}$$

$$f/b \le 0.2, \ 0.01\delta \le h \le 0.2\delta. \tag{10}$$

Ограничение (9) следует из условия постоянства веса ребристой конструкции, равном весу оболочки постоянной толщины $h_0$, ограничения (10) обусловлены пределами применимости теории тонких пологих оболочек. Здесь $f$ – стрела подъёма оболочки, $\delta = L$ при $L \le b$, $\delta = b$ при $L \ge b$.

Задача (8)-(10) решается методом деформируемого многогранника (МДМ) [3] с использованием ресурсов параллельных вычислительных систем [4], где производится одновременное решение задачи на нескольких процессорах.

**Оптимизация оболочки по критерию прочности.** Задача оптимального проектирования оболочки наибольшей несущей способности заключается в определении оптимальных значений параметров оболочки $\alpha$, $h$, $h_r$, $\varphi$, обеспечивающих наибольшее значение допускаемой из условий прочности нагрузки при её неизменном весе и заданных габаритных размерах. Решение этой задачи сводится к следующей задаче нелинейного программирования:
найти:

$$q_0 = \max_{\bar{x}} q, \ \bar{x} = \{\alpha, h, h_r, \varphi\} \tag{11}$$

при ограничениях (16) и (17).

Здесь $q$ – целевая функция, определяемая из условия:

$$q = \min(q_1, q_2), \tag{12}$$

где $q_1$ и $q_2$ – допустимые значения нагрузки, определяемые из условий прочности, записанных в виде равенств для наиболее опасных точек оболочки

$$\max_{x,y,z}\left[\left(\frac{\sigma_{11}}{R_1}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{22}}{R_2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{T_0}\right)^2 - \frac{\sigma_{11}\sigma_{22}}{R_1^2}\right] = 1, \tag{13}$$

и ребра жёсткости

$$\max_{y,z} \sigma_y^r = R_1, \tag{14}$$

где $\sigma_y^r = -Ez\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}$, при $x = 0$; $R_1$, $R_2$, $T_0$ – прочностные характеристики КМ.

Задача (11) также решается МДМ с применением пакета параллельных вычислений в среде пакета ***Wolfram Mathematica.***

**Численные результаты и выводы.** Числовые расчёты произведены для значений $\bar{h}_0 = \dfrac{h_0}{b} = 0.01, 0.02$, $\bar{b} = \dfrac{b}{R} = 0.05\pi$ при $\xi = 1, 2, 3, 5$.

В качестве материала принят КМ со следующими характеристиками**:**

$\overline{B}^0_{22} = B^0_{22} / B^0_{11} = 0.6164$, $\overline{B}^0_{12} = B^0_{12} / B^0_{11} = 0.12$, $\overline{B}^0_{66} = B^0_{66} / B^0_{11} = 0.1572$, $\overline{B}^0_{66} = B^0_{66} / B^0_{11} = 0.1572$; $R_2 = 0.403 R_1$, $T_0 = 0.264 R_1$.

В табл.1 приведенны оптимальные значения параметров оболочки: $\alpha$, $\overline{h}_r = h_r / b$, $\overline{h} = h/b$, $\varphi$, обеспечивающие наибольшую жёсткость конструкции, а также соответствующие наибольшие значения приведённого прогиба оболочки $\overline{w} = w \dfrac{B^0_{11} h_0^3}{12 q b^4}$. Для сравнения приведены наибольшие значения приведённых прогибов оболочек одинакового веса: постоянной толщины $\overline{w}_0$, $\overline{w}_0$ и кусочно-постоянной толщины $\overline{w}_1$, а также значения коэффициентов $k_0 = \overline{w}_0 / \overline{w}$ и $k_1 = \overline{w}_1 / \overline{w}$, характеризующие увеличение жёсткости оптимальной ребристой оболочки по сравнению с соответствующими равновесными оболочками.

**Таблица 1.** Оптимальные параметры и соответствующие значения максимальных прогибов оболочки.

| $\overline{h}_0$ | $\xi$ | $\alpha$ | $\overline{h}_r$ | $\overline{h}$ | $\varphi$ | $10^2 \cdot \overline{w}$ | $10^2 \cdot \overline{w}_0$ | $10^2 \cdot \overline{w}_1$ | $k_0$ | $k_1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.01 | 1 | 0.2 | 0.100 | 0.0081 | $90^0$ | 0.0487 | 0.1669 | 0.0492 | 3.43 | 1.01 |
| | 2 | 0.2 | 0.095 | 0.0092 | $90^0$ | 0.2242 | 0.6171 | 0.2502 | 2.75 | 1,12 |
| | 3 | 0.2 | 0.090 | 0.0095 | $90^0$ | 0.4662 | 0.9856 | 0.5211 | 2.11 | 1.12 |
| | 5 | 0.2 | 0.01 | 0.01 | $90^0$ | 1.2603 | 1.2603 | 1.2603 | 1 | 1 |

**Таблица 2**. Оптимальные параметры и соответствующие значения допустимой нагрузки и максимальных прогибов оболочки.

| $\overline{h}_0$ | $\xi$ | $\alpha$ | $\overline{h}_r$ | $\overline{h}$ | $\varphi$ | $10^3 \cdot \overline{q}$ | $10^2 \cdot \overline{w}$ | $10^3 \cdot \overline{q}_0$ | $10^3 \cdot \overline{q}_1$ | $k_0$ | $k_1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.01 | 1 | 0.2 | 0.1 | 0.0081 | $90^0$ | 0.2392 | 0.0487 | 0.0796 | 0.2270 | 3.0 | 1.05 |
| | 2 | 0.2 | 0.093 | 0.0092 | $90^0$ | 0.0603 | 0.2243 | 0.0303 | 0.0537 | 1,99 | 1.12 |
| | 3 | 0.2 | 0.086 | 0.0095 | $90^0$ | 0.0354 | 0.4667 | 0.0238 | 0.0316 | 1.49 | 1.12 |
| | 5 | 0.2 | 0.01 | 0.01 | $90^0$ | 0.0225 | 1.2603 | 0.0225 | 0.0225 | 1 | 1 |

В табл.2 приведены оптимальные значения параметров оболочки: $\alpha$, $\overline{h}_r = h_r / b$, $\overline{h} = h/b$, $\varphi$, обеспечивающие наибольшую прочность конструкции, а также соответствующие значения приведённой нагрузки $\overline{q} = \dfrac{q}{R_1} \dfrac{R}{b}$ и максимального прогиба $\overline{w}$. Для сравнения приведены также значения приведённой нагрузки для оболочек одинакового веса: постоянной толщины $\overline{q}_0$ и кусочно-постоянной толщины $\overline{q}_1$, а также значения коэффициентов $k_0 = \overline{q} / \overline{q}_0$ и $k_1 = \overline{q}_1 / \overline{q}_0$, характеризующие увеличение прочности оптимальной ребристой оболочки по сравнению с соответствующими равновесными оболочками.

Как следует из результатов расчёта, оптимальным выбором параметров ребристой оболочки можно достигнуть существенного увеличения её жёсткостных (уменьшение наибольшего прогиба) и прочностных (увеличение несущей способности) характеристик по сравнению с оболочкой постоянной толщины при её неизменном весе и габаритных размерах. В то же время изготовление таких оболочек приводит к несколько улучшенным жёсткостным и прочностным характеристикам по сравнению с соответствующими облочками кусочно-постоянной толщины.

**Заключение.** Таким образом, можно заключить, что из рассмотренных случаев изготовления оболочек наиболее рациональным является оболочка, усиленная в середине ребром жёсткости.

Следует отметить, что, согласно результатам расчёта, значения оптимальных параметров ребристой оболочки, полученные по критериям жёсткости и прочности, отличаются незначительно, что даёт возможность изготовления оболочек, одновременно удовлетворяющих требованиям наибольших прочности и жёсткости.

## ЛИТЕРАТУРА

1 Belubekyan E., Poghosyan A., Sharkhatunyan H. Optimal design of a cilindrical panel of piecewise constant thickness. //Multidiscipline Modeling in Materials and Structures. 2017. Vol.13. Issue 4, pp.568-577. https://doi.org/10.1108/MMMS-03-2017-0015
2 Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 448 с.
3 Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. М.: Мир, 1975. 534 с.
*4* Погосян А.Г., Ханикян В.М. Применение параллельных вычислений в среде пакета Wolfram Mathematica. //Вестник Инженерной Академии Армении. Ереван - 2013. Т.10. №2. С.343-349.

**Сведения об авторах:**

**Белубекян Эрнест Вагаршакович –** доктор технических наук, профессор.
**E-mail:** ebelubekyan@yahoo.com

**Погосян Аревшат Гургенович –**кандидат физико-математических наук, доцент.
Национальный политехнический университет Армении, Ереван.
**E-mail:** arevpoghosyan@mail.ru

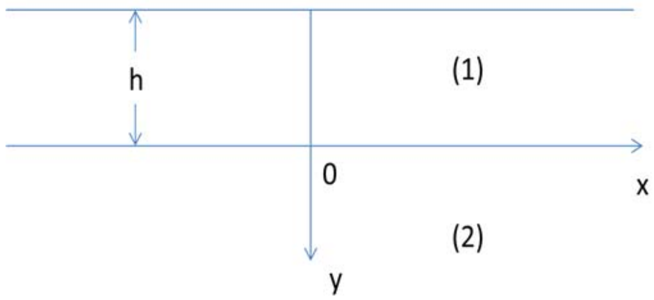
## ПОВЕРХНОСТНЫЕ ЭЛЕКТРОУПРУГИЕ СДВИГОВЫЕ ВОЛНЫ В СИСТЕМЕ ПЬЕЗОСЛОЙ КУБИЧЕСКОЙ СИММЕТРИИ – ПОЛУПРОСТРАНСТВО

**Берберян А.Х., Гараков В.Г.**

Имеется обширная литература по распространению упругих волн в пьезоактивных средах. С этими работами можно ознакомиться, в частности, по монографиям [1-4]. Был исследован также ряд задач по сдвиговым поверхностным волнам в системе слои-полупространство (волны типа Лява), в случае, когда материал слоя обладает пьезоактивным свойством кристаллов гексагональной симметрии класса 6mm [4-6].

В настоящей работе рассматривается вариант, когда слой обладает пьезоэлектрическим свойством кубической симметрии. Исследуется влияние граничных условий на внешней границе слоя. Определяются условия появления поверхностных волн.

**1.** В прямоугольной декартовой системе координат $(x, y, z)$ пьезоактивный упругий слой занимает область $-\infty < x < \infty, -h \le y \le 0, -\infty < z < \infty.$ Полупространство $-\infty < x < 0,\ 0 \le y < \infty,\ -\infty < z < \infty$ является упругим, электрически неактивным (нечувствительным) материалом (рис.1).




Предполагается, что материал слоя обладает свойством пьезоэлектрика кубической симметрии, для которого справедливы уравнения распространения сдвиговых электроупругих волн в квазистатичеком приближении [1,2].

$$C_{44}\vartriangle W + 2e_{14}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} = \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},\quad \varepsilon\vartriangle\varphi - 2e_{14}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} = 0\,. \tag{1.1}$$

В (1.1) $C_{44}$ – модуль сдвига, $e_{14}$ – пьезоэлектрический коэффициент взаимодействия, $\varepsilon$ – диэлектрическая проницаемость, $\rho$ – плотность материала слоя, $w(x, y, t)$ – функция перемещения сдвига, $\varphi(x, y, t)$ – функция электрического потенциала, $\vartriangle$ – двумерный оператор Лапласа.

Для полупространства используется уравнение распространения чисто сдвиговых волн

$$C_{tz}^2\vartriangle w_2 = \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2},\quad C_{tz}^2 = \frac{G}{\rho_2}\,, \tag{1.2}$$

где $C_{tz}$ – скорость распространения сдвиговой волны, $G$ – модуль сдвига, $\rho_2$ – плотность материала полупространства.

Требуется выполнение условия затухания

$$\lim_{y\to\infty} w_2 = 0 \tag{1.3}$$

На контактной поверхности соединения слоя и полупространства принимаются условия непрерывности перемещения, касательного напряжения и условия заземления электрического поля

$$\omega_2 = \omega,\quad \sigma_{yz}^{(2)} = \sigma_{yz},\quad \varphi = 0 \quad \text{при } y = 0\,. \tag{1.4}$$

На внешней границе слоя $y=-h$ будут рассмотрены различные варианты граничных условий.

Решение системы уравнений (1.1) представляется в виде гармонических волн

$$w = f(y)\exp i(\omega t - kx),\ \varphi = g(y)\exp i(\omega t - kx) \tag{1.5}$$

Подстановка (1.5) в (1.1) приводит к решению следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$f'' + k^2\beta_1^2 f - 2ik\frac{e_{14}}{C_{44}}g' = 0$$

$$g'' - k^2 g + 2ik\frac{e_{14}}{\varepsilon}f' = 0, \tag{1.6}$$

где

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{\omega^2}{k^2C_{t1}^2} - 1},\quad C_{t1}^2 = \frac{C_{44}}{\rho} \tag{1.7}$$

Учитывая, что рассматриваются установившиеся волны (колебания), можно определить $f'$ из второго уравнения системы (1.6) и подставив в первое уравнение, предварительно продифференцировав по $y$. В результате получим обыкновенное дифференциальное уравнение четвёртой степени

$$g^{IV} + k^2\left(\beta_1^2 - 1 - \chi\right)g^{II} - k^4\beta_1^2 g = 0 \tag{1.8}$$

где

$$\chi = 4\frac{e_{15}^2}{\varepsilon C_{44}} \tag{1.9}$$

есть коэффициент электромеханической связи пьезокристаллов кубической симметрии.

Решение уравнения (1.8) представляется в виде

$$g(y) = Be^{kpy} \tag{1.10}$$

Подстановка (1.10) в (1.8) приводит к решению биквадратного уравнения относительно параметра $p$, которое будет иметь два (плюс и минус) мнимых корня и два дейтвительных. Общее решение уравнения (1.8) запишется следующим образом**:**

$$g = B_1\sin kp_1y + B_2\cos kp_1y + B_3\mathrm{sh}kp_2y + B_4\mathrm{ch}kp_2y \tag{1.11}$$

где

$$p_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{(\beta_1^2-1-\chi)^2 + 4\beta_1^2} \pm \left(\beta_1^2 - 1 - \chi\right)\right]^{1/2} \tag{1.12}$$

Решение для функции $f$ находится из второго уравнения системы (1.6) с учётом (1.12)

$$f = \frac{i\varepsilon}{2e_{14}}\left[\frac{p_1^2+1}{p_1}\left(B_1\cos kp_1y - B_2\sin kp_1y\right) + \frac{p_2^2-1}{p_2}\left(B_3\mathrm{ch}kp_2y + B_4\mathrm{sh}kp_2y\right)\right] \tag{1.13}$$

Соответствующее решение уравнения (1.2) в полуплоскости, удовлетворяющее условию затухания (1.3), будет

$$w_2 = f_2(y)\exp i(\omega t - kx) \tag{1.14}$$

где

$$f_2(y) = Ae^{-k\beta_2 y},\qquad \beta_2 = \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{k^2c_{t2}^2}} \tag{1.15}$$

**2**. С учётом материальных уравнений

$$\sigma_{yz} = C_{44}\frac{\partial w}{\partial y} + e_{14}\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad \sigma_{yz}^{(2)} = G\frac{\partial w}{\partial y} \tag{2.1}$$

и представления решений уравнений в виде (1.5) и (1.14), граничные условия на поверхности контакта (1.4) получаются в виде

$$f_2 = f_1,\quad Gf_2' = C_{44} f',\quad g = 0 \quad \text{при } y = 0. \tag{2.2}$$

Требования, чтобы функции (1.11), (1.13) и (1.14) удовлетворяли граничным условиям (2.2), приводят к следующим связям между произвольными постоянными

$$A = \frac{i\varepsilon}{2e_{14}}\left(\frac{p_1^2+1}{p_1}B_1 + \frac{p_2^2-1}{p_2}B_3\right),$$

$$\beta_2 GA = \frac{i\varepsilon}{2e_{14}}\left[\left(p_1^2+1\right)B_2 - \left(p_2^2-1\right)B_4\right], \tag{2.3}$$

$$B_4 + B_2 = 0.$$

Исключением произвольной постоянной $A$, получим

$$\rho_2 G\left(\frac{p_1^2+1}{p_1}B_1 + \frac{p_1^2-1}{p_2}B_3\right) = C_{44}\left(p_1^2+p_2^2\right)B_2,\quad B_4 = -B_2. \tag{2.4}$$

Пусть на внешней границе слоя заданы условия

$$\sigma_{yz} = 0,\quad \varphi = 0 \quad \text{при } y = -h. \tag{2.5}$$

Требуя, чтобы полученные выше решения удовлетворяли граничным условиям (2.5) и учитывая, что $B_4 = -B_2$, получим уравнение относительно произвольных постоянных $B_1, B_2, B_3$

$$B_1 \sin k\mathrm{p}_1 h - B_2\left(\cos k\mathrm{p}_1 h - \mathrm{ch}\, k\mathrm{p}_2 h\right) + B_3\, \mathrm{sh} k\mathrm{p}_2 h = 0, \tag{2.6}$$

$$\left(p_1^2+1\right)B_1 \sin k\mathrm{p}_1 h - B_2\left[\left(p_1^2+1\right)\cos kp_1 h - \left(p_2^2-1\right)\mathrm{ch} k\mathrm{p}_2 h - \left(p_2^2-1\right)\mathrm{B}_3 \mathrm{sh} k\mathrm{p}_2 h\right] = 0.$$

Уравнение (2.6) вместе с первым уравнением из (2.4) составляет систему трёх однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных $B_1, B_2, B_3$. Условие равенства нулю детерминанта этой системы даёт уравнение, определяющее фазовые скорости поверхностных волн.

Равенство нулю детерминанта системы уравнений (2.4), (2.6), после некоторых преобразований приводится к виду

$$\begin{gathered}\left(p_1^2+p_2^2\right)\sin \mathrm{p}_1 kh\, \mathrm{sh}\, \mathrm{p}_2 kh + S_3\left(p_1^2 - p_2^2 + 2\right)\sin \mathrm{p}_1 kh\, \mathrm{ch}\, \mathrm{p}_2 kh - \\ -S_1 \mathrm{sh}\, \mathrm{p}_2 kh\left[2\left(p_1^2-1\right)\mathrm{ch}\, \mathrm{p}_2 kh - \left(p_1^2+p_2^2\right)\cos \mathrm{p}_1 kh\right] = 0,\end{gathered} \tag{2.7}$$

где

$$S_1 = \frac{\beta_2 G\left(p_1^2+1\right)}{C_{44}\left(p_1^2+p_2^2\right)p_1},\quad S_2 = \frac{\beta_2 G\left(p_2^2-1\right)}{C_{44}\left(p_1^2+p_2^2\right)p_2}. \tag{2.8}$$

В частном случае отсутствия пьезоэффекта $(\chi = 0)$, уравнение (2.7) приводится к известному уравнению задачи поверхностных волн Лява [7]

$$\mathrm{tg}\beta_1 kh = \frac{\beta_2 G}{C_{44}\beta_1} \tag{2.9}$$

Как известно, уравнение (2.9) при $\beta_2 = 0$ $\left(\varpi^2 / k^2 = C_{t2}^2\right)$ определяет, при каких $kh$ появится n-ая мода волны Лява.

$$kh = \left(\frac{C_t^2}{C_{t1}^2} - 1\right)^{-\frac{1}{2}} n\pi,\quad \left(n = 0,1,2....\right) \tag{2.10}$$

Аналогично задаче Лява из уравнения (2.7) для n-ой моды, учитывающей пьезоэффект, получается

$$kh = \gamma n\pi, \tag{2.11}$$

где

$$\gamma=\sqrt{2}\left[\sqrt{\left(\frac{C_t^2}{C_{t1}^2}-2-\chi\right)^2+4\left(\frac{C_t^2}{C_{t1}^2}-1\right)}+\left(\frac{C_t^2}{C_{t1}^2}-2-\chi\right)\right]^{-\frac{1}{2}} \qquad (2.12)$$

В таблице приводятся значения $\gamma$ для случая $C_t^2=2Ct_{t1}^2$.

| $\chi$ | 0,00 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\gamma$ | 1,00 | 1,026 | 1,051 | 1,078 | 1,105 | 1,131 |

Отсюда следует, что чем больше коэффициент электромеханической связи, тем для более больших значений $kh$ появляется следующая мода поверхностной волны.

**Заключение.** Исследована обобщённая задача Лява в случае, когда материал является пьезоэлектриком класса 6mm. Получено дисперсионное уравнение задачи. Определены условия появления мод поверхностной волны в зависимости от коэффициента электромеханической связи.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука, 1982. 239с.
2. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 472с.
3. 3.Бардзокас Д.И., Кудрявцев Б.А., Сеник Н.А. Распространение волн в электроупругих средах. М.: Едиотория.УРСС, 2003. 336с.
4. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н. Электромагнитоупругие волны. Ереван: Изд. ЕГУ, 2006. 492с.
5. Аветисян А.С., Камалян А.А. О распространении электроупругого сдвигового сигнала в неоднородном пьезоэлектрическом слое класса 6 mm // Доклады НАН Армении. 2014. №2. С.108-115.
6. 6. Белубекян В.М., Белубекян М.В. Поверхностные электроупругие волны в пьезоэлектрической системе слой – полупространство // Учёные записки ЕГУ, 2006. №3. С.25-30.
7. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872с.



<u>**Информация об авторах:**</u>

**Гараков Владимир Герасимович** – к.ф.-м.н., с.н.с., Институт механики НАН РА, (093)338166

**E-mail:** garakov@ yandex.com

**Берберян Армен Хачикович**, к.ф.-м.н., н.с., Институт механики НАН Армении,

**E-mail:** slavia555@yahoo.com

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЛ С ОТСЛАИВАЮЩИХСЯ ПОКРЫТИЯМИ ПРИ УЧЁТЕ ПОЛЕЙ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

**Богачев И.В., Недин Р.Д.**

В работе предложена модель установившихся колебаний предварительно напряжённого тела с отслаивающимся покрытием на основе линеаризованной постановки задачи для упругого неоднородного преднапряжённого тела. Для удобства реализации конечноэлементной методики исследования сформулирована слабая постановка задачи. Задача для прямоугольной области с преднапряжённым слоем-покрытием при наличии зоны отслоения исследована численно с помощью метода конечных элементов. Рассмотрена задача об идентификации уровня однородного предварительного напряжённого состояния отслаивающегося покрытия по данным акустического зондирования поверхности объекта.

**1. Введение.** В настоящее время значительный интерес представляют задачи моделирования отслаивающихся покрытий. Это связано с практической значимостью идентификации такого рода дефектов, возникающих как на макро, так и на микро-уровне в продукции различного назначения. Одной из причин возникновения отслоений, а в последствии трещин и полостей между подложкой и покрытием, является наличие полей предварительных напряжений и остаточных деформаций, в связи с чем необходим учёт данных факторов при моделировании.

Исследованию особенностей отслоений покрытий посвящено достаточно большое количество работ. Среди отечественных авторов стоит отметить работы К.Б. Устинова. Например, в работе [1] отслаивающееся покрытие моделируется как пластина с упругим защемлением к подложке. Проведён анализ параметров потери устойчивости, критического напряжения в случаях изотропного и анизотропного покрытий и подложек. В результате выявлено, что потеря устойчивости для широких диапазонов свойств может описываться одним параметром, зависящим от упругих свойств покрытия и подложки, а также от отношения длины отслоения и толщины покрытия. В работе [2] проведено асимптотическое исследование смещения берегов трещины при нормальном отрыве покрытия от подложки, моделируемых двумя упругими полосами, как вблизи, так и вдали от ее вершины. Также стоит отметить статьи зарубежных исследователей, в частности, Хатчинсона. Работа [3] посвящена исследованию отслоений, вызванных остаточными напряжениями. Метод исследования заключается в измерении ударной вязкости покрытий при последовательном растяжении и изгибе. На основе балочной теории удаётся достаточно точно описать процесс распространения отслоения. Также исследовано влияние остаточного напряжения на процесс отслоения.

В настоящем исследовании предложена и изучена модель колебаний неоднородного предварительно напряжённого тела с отслаивающимся покрытием на основе общей линеаризованной модели преднапряжённого упругого тела.

**2. Постановка задачи.** Линеаризованная постановка задачи об установившихся колебаниях предварительно напряжённого анизотропного тела без явного учёта начальной деформации имеет вид [4]:

$$\left(C_{ijkl}u_{k,l}+u_{i,m}\sigma^0_{mj}\right)_{,j}+\rho\omega^2u_i=0, \tag{2.1}$$

$$u_i\big|_{S_u}=0_i,\ \left(C_{ijkl}u_{k,l}+u_{i,m}\sigma^0_{mj}\right)n_j\big|_{S_\sigma}=P_i, \tag{2.2}$$

Тело жестко защемлено на части границы $S_u$ и нагружено периодически изменяющейся нагрузкой на части $S_\sigma$ (рис.1-а). Здесь $u_i$ – компоненты вектора перемещений, $C_{ijkl}$ – компоненты тензора упругих модулей, $\sigma^0_{mj}$ – компоненты тензора предварительных напряжений (ПН), $\rho$ – плотность тела, $\omega$ – круговая частота колебаний, $P_i$ – компоненты вектора внешней нагрузки. Слабая постановка задачи (2.1)- (2.2) имеет вид [5]

$$\int\limits_{S_\sigma}P_iv_i\,dl-\int\limits_V\left[C_{ijkl}u_{i,j}v_{k,l}+u_{i,m}v_{i,j}\sigma^0_{mj}-\omega^2\rho\,u_iv_i\right]dV=0. \tag{2.3}$$

Здесь $v_i$ – пробные функции, удовлетворяющие тем же главным условиям, что и функции перемещений $u_i$. Такая постановка задачи удобна при решении задач для неоднородных преднапряжённых тел, в том числе, со сложной геометрией, с помощью метода конечных элементов. При этом, в общем случае, упругие модули $C_{ijkl}$ могут быть переменными и задаваться как функции от координат. Также постановка (2.3) удобна для решения большого класса обратных коэффициентных задач, в которых требуется определить уровень или неоднородные поля ПН при известной информации о поле смещения на части границы тела.

В работе рассмотрена задача об установившихся колебаниях прямоугольной области с предварительно напряжённым слоем-покрытием с зоной отслоения (см. рис. 1-б). Будем считать, что подложка и покрытие выполнены из изотропного материала и описываются коэффициентами Ламе $\lambda$, $\mu$. Однородное поле ПН образовано в покрытии в результате приложения начальной сжимающей или растягивающей нагрузки $N_0$, направленной вдоль оси $x_1$. Режим установившихся колебаний вызывается приложением периодически меняющейся нагрузки интенсивности $P$, приложенной к части верхней грани покрытия $l_\sigma$.

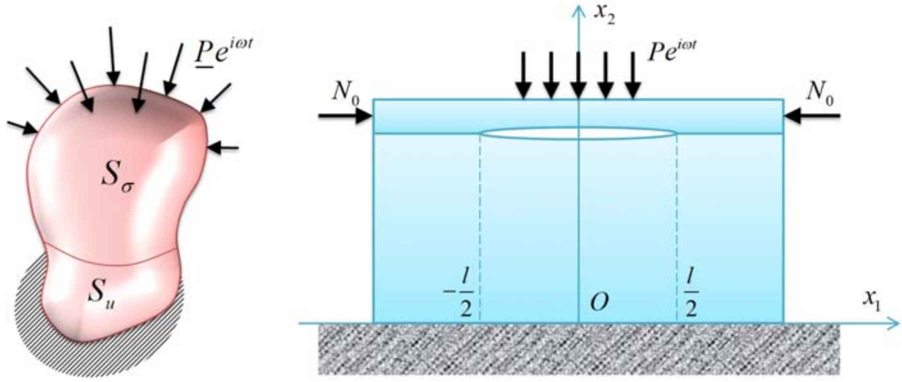



Рис.1. (а) – упругое тело под действием периодически меняющейся нагрузки, (б) – прямоугольная область с отслаивающимся предварительно напряжённым покрытием под действием зондирующей периодически меняющейся нагрузки

В рамках плоского деформированного состояния слабая постановка (2.3) примет вид

$$\int_S \left( R_{11}v_{1,1} + R_{12}v_{1,2} + R_{21}v_{2,1} + R_{22}v_{2,2} - \omega^2 P_0(\zeta_1 v_1 + \zeta_2 v_2) \right) dS - \int_{l_\sigma} P v_2 dl = 0, \quad (2.4)$$

где введены следующие обозначения и функции:

$$R_{11} = \Lambda_0\left(u_{1,1} + u_{2,2}\right) + 2\mathrm{M}_0 u_{1,1} + \Sigma_{11}^0 u_{1,1}, \quad R_{22} = \Lambda_0\left(u_{1,1} + u_{2,2}\right) + 2\mathrm{M}_0 u_{2,2}, \quad R_{12} = \mathrm{M}_0(u_{1,2} + u_{2,1}),$$

$$R_{21} = \mathrm{M}_0(u_{1,2} + u_{2,1}) + \Sigma_{11}^0 u_{2,1}, \ \Sigma_{11}^0 = \int_0^b \sigma_{11}^0 dx_3, \ \Lambda_0 = \int_0^b \lambda dx_3, \ \mathrm{M}_0 = \int_0^b \mu dx_3, \ \mathrm{P}_0 = \int_0^b \rho dx_3.$$

При этом, $S$ – сечение тела в плоскости $x_1\, x_2$, $b$ – размер тела в поперечном направлении оси $x_3$. Обратим внимание, что в общем случае, в силу неоднородности материала и поля ПН во всем теле, интегральные характеристики $\Lambda_0$, $\mathrm{M}_0$, $\mathrm{P}_0$ и $\Sigma_{11}^0$ представляют собой функции координат $x_1$, $x_2$.

**3. Прямая задача.** На основе сформулированной постановки (2.4) исследована численно частная прямая задача для рассмотренной плоской прямоугольной области с отслаивающимся преднапряжённым покрытием с помощью метода конечных элементов (см. рис.2). При этом, использовалась полноценная модель отслоения с локальным сгущением конечноэлементной сетки. Проанализировано влияние параметров отслоения и уровней ПН на амплитудно-частотные характеристики тела.

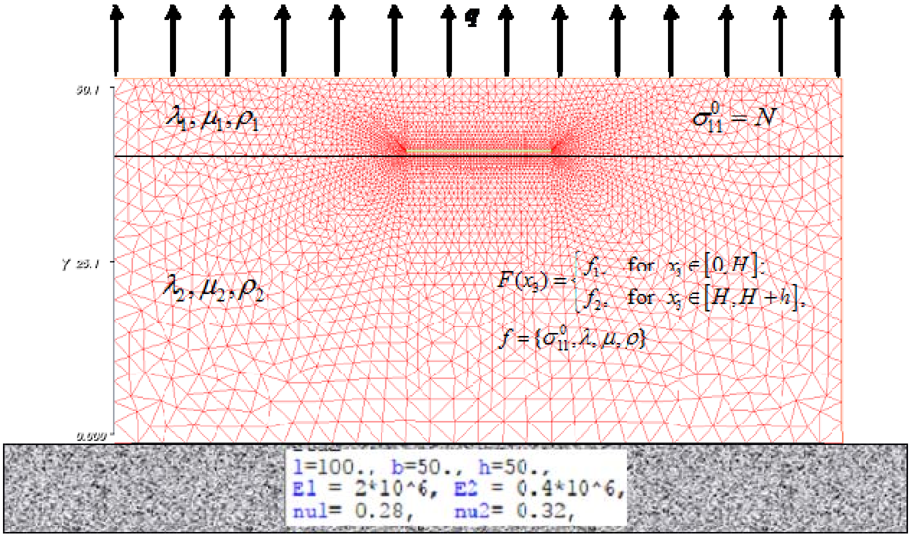



Рис.2. Конечноэлементная модель рассматриваемого тела.

**4. Обратная задача.** Также была рассмотрена задача об идентификации уровня однородного предварительного напряжённого состояния отслаивающегося покрытия для прямоугольной области под действием поверхностной зондирующей нагрузки. Информация о геометрии области, включая толщину покрытия, а также параметры отслоения, считаются известной. В рассмотренном случае на основе уравнений равновесия получена формула, выражающая интегральную характеристику $\Sigma_{11}^0$ через другие известные интегральные характеристики и поле планарных перемещений в следующем виде:

$$\Sigma_{11}^0 = -b\frac{\left[\Lambda_0\left(u_{1,1}+u_{2,2}\right)+2\mathrm{M}_0 u_{1,1}\right]_{,1}+\left[\mathrm{M}_0(u_{1,2}+u_{2,1})\right]_{,2}}{u_{1,1}}. \tag{4.1}$$

Формула (4.1) позволяет восстановить значение ПН в покрытии на основании дополнительной информации об известных значениях компонент планарных перемещений $u_1, u_2$ в наборе точек в области сечения $S$ для заданной частоты колебаний $\omega$. С помощью сплайн-интерполяции описаны функции перемещений на основе значений в наборе точек; с их помощью найдены производные $u_{i,j}$ в нужных точках области. Проведена серия вычислительных экспериментов по реконструкции уровня ПН в покрытии на основании различных наборов измерений перемещений в заданной частоте колебаний (см. рис.3).

$$l = 0.2\,\mathrm{m},\ b = 0.05\,\mathrm{m},\ h = 0.003\,\mathrm{m},\ \delta = 0.1h,\ \nu_p = \nu_c = 0.29,$$

$$E_p = 70\,\mathrm{GPa},\ \rho_p = 2500\,\mathrm{kg/m}^3,\ E_c = 210\,\mathrm{GPa},\ \rho_c = 7700\ \mathrm{kg/m}^3,\ \sigma_p^0 = 0\,.$$

| Prestress level $\tau = \sigma_c^0 / E_p$ | Exact value $\sigma_c^0$ | Reconstruction $\tilde{\sigma}_c^0$ | Relative error (%) |
|---|---|---|---|
| $10^{-5}$ | 21 | 18.7526 | 10.7019 |
| $10^{-4}$ | 210 | 205.206 | 2.28266 |
| $10^{-3}$ | 2100 | 2069.75 | 1.44051 |
| $10^{-2}$ | 21000 | 20715.4 | 1.3552 |

Рис.3. Результаты экспериментов по идентификации уровня ПН.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант 18-11-00069).

**ЛИТЕРАТУРА**


1. Ustinov K.B. On influence of substrate compliance on delamination and buckling of coatings // Engineering Failure Analysis. 2015. Vol. 47B, P.338-344.
2. Устинов К.Б. О расслоении полосы по границе раздела упругих свойств. Часть 1. Постановка задачи, случай нормального отрыва // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2015. – № 4. – С. 226–245.
3. He M.Y., Hutchinson J.W., Evans A.G. A stretch/bend method for in situ measurement of the delamination toughness of coatings and films attached to substrates. // J. Appl. Mech. 2011. Vol. 78 (1). P. 011009-1-011009-5.
4. Ватульян А.О., Дударев В.В., Недин Р.Д. Предварительные напряжения: моделирование и идентификация. Монография. Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ. 2015. 206 с.
5. R.D. Nedin, V.V. Dudarev, A.O. Vatulyan. Some aspects of modeling and identification of inhomogeneous residual stress. // Engineering Structures. V. 151. 2017. P. 391-405.


**Information about authors:**


**Bogachev Ivan Victorovich** – Researcher, Southern Federal University, I.I. Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences, +7 (863) 2975 111;
**E-mail:** bogachev89@yandex.ru

**Nedin Rostislav Dmitrievich** – Associate Professor, Southern Federal University, I.I. Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences, +7 (863) 2975 111; Senior Researcher, Vladikavkaz Scientific Center of Russian Academy of Sciences, Southern Mathematical Institute, +78672 53-98-61
**E-mail:** rdn90@bk.ru

# ВЛИЯНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА АЭРОТЕРМОУПРУГУЮ УСТОЙЧИВОСТЬ ЗАМКНУТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

**Варданян И.А.**

**Аннотация.** В настоящей работе в линейной постановке рассмотрена задача устойчивости замкнутой цилиндрической оболочки под действием неоднородного температурного поля и обтекающего оболочку сверхзвукового потока газа. Получены условия устойчивости невозмущенного состояния рассматриваемой аэротермоупругой системы. Показано, что совместным действием температурного поля и обтекающего потока можно регулировать процесс устойчивости и при помощи температурного поля существенно изменить величину критической скорости флаттера.

**1. Основные предположения и постановка задачи.** Рассмотрим тонкую изотропную замкнутую круговую цилиндрическую оболочку постоянной толщины $h$ и радиуса $R$, находящуюся в неоднородном температурном поле $T$. Оболочка отнесена к цилиндрическим координатам $x, \varphi, r$, координатные линии $x$ и $\varphi$ совпадают с линиями кривизны срединной поверхности оболочки ($x$ – вдоль образующей, $\varphi$ – по дуге поперечного сечения). Пусть с внешней стороны оболочка обтекается сверхзвуковым потоком газа с невозмущенной скоростью $U$, направленной вдоль оси $0x$. Исследуются вопросы устойчивости рассматриваемой аэротермоупругой системы. В основе исследования лежат следующие известные предположения:

а) гипотеза Кирхгофа – Лява о недеформируемых нормалях [1];

б) “закон плоских сечений” при определении аэродинамического давления [2]:

$$p = p_\infty \left(1 + \frac{æ - 1}{2}\frac{v_3}{a_\infty}\right)^{\frac{2æ}{æ-1}} \tag{1}$$

где $p$ – давление газа на поверхности оболочки, $a_\infty$ – скорость звука для невозмущенного газа $\left(a_\infty^2 = æ p_\infty \rho_\infty^{-1}\right)$, $p_\infty$ и $\rho_\infty$ – давление и плотность газа в невозмущенном состоянии, æ – показатель политропы, $v_3$ – нормальная составляющая скорости точек поверхности оболочки;

в) линейный закон изменения температуры $T(x,\theta,r)$ по толщине оболочки [3]: $T = T_0(x,\varphi) + (R - r)\Theta(x,\varphi)$ ;

г) гипотеза Неймана об отсутствии сдвигов от изменения температуры [4].

Для простоты и наглядности принимается, что из лицевых поверхностей $\left(r = R \pm h/2\right)$ оболочки происходит теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона – Рихмана (на поверхностях сохраняется постоянная температура со значениями $T^+$ и $T^-$ соответственно), а боковые поверхности ($x = 0$ и $x = a$) теплоизолированы.

Под действием указанного осесимметричного неоднородного по толщине температурного поля $(\Theta \neq 0)$ происходит выпучивание оболочки (с осесимметричным прогибом $w_T(x)$) и вследствие этого появляется аэроупругое давление. Указанное выпученное состояние принимается как невозмущенное [5], и исследуется его устойчивость под действием температурного поля и давления обтекающего потока газа.

**1.1. Определение аэротермоупругих напряжений невозмущенного состояния.** Учитывая принятые предположения, из основных уравнений, соотношений и граничных условий теории термоупругости тонких оболочек, аналогичным образом, как в [5], получаются следующие выражения для внутренних усилий невозмущенного состояния:

$$T_{11}^0 = \delta\left[\frac{E\mu}{1-\mu^2}\frac{h}{a}\int_0^a \frac{w_T(x)}{R}dx - \frac{Eh\alpha}{1-\mu}T_0\right],$$

$$T_{22}^0 = Eh\left[\frac{w_T}{R} - (1-\delta)\alpha T_0 + \delta\left(\frac{\mu^2}{1-\mu^2}\frac{1}{Ra}\int_0^a w_T(x)dx - \frac{\alpha T_0}{1-\mu}\right)\right],$$

$$T_0=\frac{T^+ + T^-}{2},\quad \Theta=\frac{k\left(T^+ \pm T^-\right)}{kh-2\lambda}. \tag{2}$$

Здесь $w_T$ является решением уравнения

$$D\frac{d^4w_T}{dx^4}+\frac{12}{Rh^2}\left(\frac{1-\mu^2}{R}w_T+\frac{\delta\mu^2}{Ra}\int_0^a w_T(x)dx+(1-\delta)\alpha\mu(1+\mu)T_0\right)+æp_\infty M\frac{dw_T}{dx}=0 \tag{3}$$

удовлетворяющего следующим граничным условиям:

$$w_T=0,\quad \frac{d^2w_T}{dx^2}+\alpha\left(1+\mu\right)\Theta=0 \ \ при \ \ x=0, x=a \tag{4}$$

При получении (4) принято, что края оболочки $x=0, x=a$ либо шарнирно оперты и свободно перемещаются вдоль оси $0x$, либо шарнирно оперты и неподвижны.

В (2)-(4) $M=Ua_\infty^{-1}$ – число Маха для невозмущенного потока, $D=Eh^3/12(1-\mu^2)$, $E$ – модуль упругости, $\mu$ – коэффициент Пуассона, $\alpha$ – коэффициент линейного теплового расширения, $\lambda$ – коэффициент теплопроводности материала оболочки, $k$ – коэффициент теплоотдачи, $\delta=\begin{cases}0, & \text{когда края пластинки свободно смещаются,}\\ 1, & \text{когда края пластинки неподвижны.}\end{cases}$

**1.2. Основные уравнения и граничные условия возмущенного состояния.** В данной работе будут рассмотрены: а) задача устойчивости оболочки при шарнирно опертых и свободно смещающихся краях и б) осесимметричная задача устойчивости оболочки, когда края шарнирно оперты и неподвижны.

На основе теории термоупругости изотропных тел, гипотезы Кирхгофа – Лява и принятых предположений, аналогично [6], получена следующая система линейных дифференциальных уравнений устойчивости рассматриваемой аэротермоупругой системы:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial\varphi}+\frac{\mu}{R}\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{(1-\mu^2)T_{22}^0}{ERh}\frac{\partial w}{\partial x}=0\\
\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial\varphi}+\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial\varphi}-\frac{h^2}{12R}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\Delta w+\frac{w}{R^2}\right)=0\\
D\left[\Delta^2 w+\frac{\mu}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}+\frac{12}{Rh^2}\left(\frac{\partial v}{\partial\varphi}+\mu\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{w}{R}\right)\right]+\rho_0 h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-T_{11}^0\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\\
-T_{22}^0\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}+\frac{w}{R^2}\right)+\left(\rho_0 h\varepsilon+\frac{æp_\infty}{a_\infty}\right)\frac{\partial w}{\partial t}++æp_\infty M\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{æ\left(æ+1\right)}{2}p_\infty M^2\frac{dw_T}{dx}\frac{\partial w}{\partial x}=0
\end{gathered} \tag{5}$$

где $u\left(x,\varphi,t\right)$, $v\left(x,\varphi,t\right)$ и $w\left(x,\varphi,t\right)$ – возмущения перемещений точек срединной поверхности оболочки, $\rho_0$ – плотность материала оболочки, $\varepsilon$ – коэффициент линейного затухания.

При решении конкретных задач устойчивости к системе (5) присоединяются граничные условия относительно возмущений, вытекающие из условий закрепления краев оболочки. Если края оболочки шарнирно оперты со свободным смещением в продольном направлении и неподвижны в дуговом, граничные условия представляются в виде:

$$v=0, w=0, M_x=0, N_x=0 \ \ при \ \ x=0 \ и \ x=a \tag{6}$$

В случае же осесимметричной задачи устойчивость рассматриваемой аэротермоупругой системы с неподвижными краями сводится к решению уравнения

$$
D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{12}{Rh^2}\left(\frac{1-\mu^2}{R}w-\mu\frac{\partial w_T}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\mu^2}{Ra}\int_0^a w\mathrm{d}x+\frac{\mu}{a}\int_0^a\frac{dw_T}{dx}\frac{\partial w}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\right)-\frac{Eh}{1-\mu}\alpha T_0\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+
$$

$$
+\rho_0 h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\left(\rho_0 h\varepsilon+\frac{æp_\infty}{a_\infty}\right)\frac{\partial w}{\partial t}+æp_\infty M\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{æ(æ+1)}{2}p_\infty M^2\frac{dw_T}{dx}\frac{\partial w}{\partial x}=0 \tag{7}
$$

при граничных условиях:

$$
w=0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \ \text{при}\ x=0\ \ и\ \ x=a \tag{8}
$$

**2. Условия и области устойчивости**. Переходим к исследованию вопросов устойчивости на основе сформулированных в пункте 1 краевых задачах.

***2.1. Случай свободно смещающихся краев.*** Здесь будем решать задачу (5)-(6). Решение системы (5), удовлетворяющее условиям (6), представим в виде

$$
u(x,\varphi,t)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}u_i(t)\cos\lambda_i x\right)\cos n\theta,
$$

$$
v(x,\varphi,t)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}v_i(t)\sin\lambda_i x\right)\sin n\theta, \tag{9}
$$

$$
w(x,\varphi,t)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}w_i(t)\sin\lambda_i x\right)\cos n\theta,\quad \left(\lambda_i=\frac{i\pi}{a}\right),
$$

где $u_i(t),\ v_i(t),\ w_i(t)$ – подлежащие определению функции времени $t$, $n$ – число волн вдоль окружности.

Подставляя (9) в систему (5) и используя процесс ортогонализации, получаем линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно безразмерных функций $x_m=w_m/h$. Представляя решение этой системы в виде $x_m=y_m e^{\lambda\tau}$, получим однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно $y_m$. Из условия существования нетривиального решения получается характеристическое уравнение относительно $\lambda$.

Невозмущенная форма оболочки будет устойчива, если действительные части корней характеристического уравнения будут отрицательными.

Использованием теоремы Гурвица определяются области устойчивости рассматриваемой аэротермоупругой системы в пространстве параметров $\nu,\ T_0,\ \Theta$, где $\nu=M\,h/a$ и на этом основании определены значения критической скорости обтекающего потока. Рассмотрим частные случаи отдельно.

*1) Случай постоянного температурного поля* $(T_0\neq 0,\ \Theta=0)$**.** В этом случае, если влиянием затухания пренебречь, характеристическое уравнение становится биквадратным. Для фиксированных значений $T_0$ численным решением условий Гурвица для указанного уравнения, определены значения скорости $\nu_{cr}$, при которых рассматриваемая аэротермоупругая система теряет устойчивость. Для расчета здесь и в дальнейшем принято $\alpha$=23.8*10$^{-6}$ град$^{-1}$; $k$=1200 Вт/(м$^2$ град); $\lambda$=210 Вт/(м град); $\mu$=0.34; $a$=1м; $h/a$=1/100; $R/a$=2. Результаты численных расчетов приведены в таблицах 1 и 2.

**Таблица 1**

**Значение критической скорости $\nu_{cr}$ при разных значениях температуры $T_0$ и числа полуволн вдоль круга цилиндра $n$**

| n \ $T_0$ | -500 | 0 | 400 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0.1160 | 0.1160 | 0.1160 |
| 5 | 1.1287 | 1.1671 | 1.1233 |
| 10 | 0.9076 | 0.9084 | 0.9091 |
| 15 | 0.6363 | 0.6392 | 0.6415 |
| 17 | 0.6161 | 0.6192 | 0.6217 |
| 20 | 0.6565 | 0.6596 | 0.6620 |
| 25 | 0.8514 | 0.8540 | 0.8562 |
| 30 | 1.1507 | 1.1529 | 1.1546 |

Табл. 1 показывает, что: а) постоянное температурное поле практически не влияет на значение $\nu_{cr}$; б) в зависимости от числа полуволн $\nu_{cr}$ имеет точку минимума.

***2) Случай переменного по толщине оболочки температурного поля.*** В этом случае из условий устойчивости при разных значениях переменной температуры вычислены значения критической скорости (табл. 2).

**Таблица 2**

**Значение критической скорости $\nu_{cr}$ при $T_0 = -100$, разных значениях Θ и числа полуволн вдоль круга цилиндра $n$**

| n \ $\Theta$ | -500 | 0, $w_T = 0$ | 100 | 1000 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.1154 | 0.1160 | 0.1161 | 0.1170 |
| 5 | 1.0649 | 1.1263 | 1.1407 | 1.3317 |
| 10 | 0.8657 | 0.9073 | 0.9179 | 1.0313 |
| 15 | 0.6105 | 0.6389 | 0.6447 | 0.7092 |
| 20 | 0.622 | 0.6589 | 0.6670 | 0.7536 |
| 25 | 0.7936 | 0.8535 | 0.8670 | 1.0275 |
| 30 | 1.0539 | 1.1525 | 1.1759 | 1.5243 |

Табл. 2 показывает, что: а) переменность температурного поля имеет существенное влияние на величину критической скорости ($\nu_{cr}$ увеличивается); б) функция $\nu_{cr}(n)$ имеет точки экстремума, которые зависят от $\Theta$.

**2.2. Случай неподвижных краев.** Здесь для простоты и наглядности рассматривается осесимметричная задача, т.е. будем решать задачу (7)-(8). Тогда решение уравнения (7), удовлетворяющее условиям (8), представим в виде

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(t) \sin \lambda_i x, \qquad \left( \lambda_i = \frac{i\pi}{a} \right), \tag{10}$$

где $f_i(t)$ – подлежащие определению функции времени $t$.

Ограничимся случаем двучленной аппроксимации:

$$w = f_1(t) \sin \lambda_1 x + f_2(t) \sin \lambda_2 x \ , \tag{11}$$

Подставляя (11) в уравнение (7) и используя процесс ортогонализации, получим однородную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами относительно $f_i(t)$ $(i = 1, 2)$. Представляя решение указанной системы в виде $f_i(t) = c_i e^{pt}$ ($c_i$ – постоянные), получим однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно $c_i$. Из условия существования нетривиального решения приходим к характеристическому уравнению относительно $p$. С помощью теоремы Гурвица получены условия устойчивости рассматриваемой аэротермоупругой системы.

**Таблица 3**

**Значение критической скорости $\nu_{cr}$ при разных значениях постоянной температуры $T_0$**

| $h/a$ \ $T_0$ | -500 | -300 | -100 | -50 | -10 |
|---|---|---|---|---|---|
| $R/a=2$ | | | | | |
| 1/70 | 0.8378 | 0.5037 | 0.1696 | 0.0577 | 0.0129 |
| 1/100 | 0.3827 | 0.2259 | 0.0691 | 0.0299 | 0.0015 |
| 1/200 | 0.0908 | 0.0528 | 0.0149 | 0.0111 | 0.0045 |
| $R/a$ | h/a=1/100 | | | | |
| 3 | 0.4123 | 0.2480 | 0.0837 | 0.0407 | 0.0093 |
| 5 | 0.4778 | 0.2901 | 0.1023 | 0.0462 | 0.0148 |
| 10 | 0.7410 | 0.4515 | 0.1620 | 0.0485 | 0.0172 |

**Таблица 4**

**Значение критической скорости $\nu_{cr}$ при $T_0=-100$ и разных значениях переменной температуры Θ**

| $h/a$ \ Θ | -1000 | -500 | 0 | 500 | 1000 |
|---|---|---|---|---|---|
| $R/a=2$ | | | | | |
| 1/70 | 0.1712 | 0.1704 | 0.1696 | 0.1688 | 0.1680 |
| 1/100 | 0.0697 | 0.0694 | 0.0691 | 0.0688 | 0.0685 |
| 1/200 | 0.0150 | 0.01496 | 0.0149 | 0.0148 | 0.0147 |
| $R/a$ | h/a=1/100 | | | | |
| 3 | 0.0839 | 0.0838 | 0.0837 | 0.0836 | 0.0834 |
| 5 | 0.1022 | 0.10222 | 0.1023 | 0.10232 | 0.1024 |
| 10 | 0.1611 | 0.1615 | 0.1620 | 0.1624 | 0.1629 |

Таблицы 3 и 4 показывают, что: а) при фиксированной температуре чем тоньше оболочка, тем меньше значение критической скорости обтекающего потока, б) при фиксированной толщине оболочки увеличение температурного поля приводит к уменьшению значения критической скорости обтекающего потока, в) увеличение значения параметра $R/a$ приводит к увеличению критической скорости. Сравнение таблиц 1 и 3, 2 и 4 приводит к выводу, что закрепление краев пологой оболочки приводит к существенному увеличению значения критической скорости обтекающего потока.

## Литература


1. Власов В.З. Общая теория оболочек и её приложения в технике. М. Гостехтеориздат. 1949.
2. Ashley H., Zartarian C. – J. Aeronaut. Sci. V. № 6. 1956.
3. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М. Физматгиз. 1961. 339 с.
4. Новацкий В. Вопросы термоупругости. М. Изд-во АН СССР. 1962. 364 с.
5. Багдасарян Г.Е., Микилян М.А., Сагоян Р.О. – Изв. НАН РА. Механика. 2011. Т. 64 № 4. С. 51-67.
6. Baghdasaryan G.E., Mikilyan M.A. Effects of magnetoelastic interactions in electroconductive plates and shells. Springer. 2016. 279 p.



**Information about author**

**Варданян Ирэн Арменовна** – внештатный работник Института механики НАН Армении

Тел.: (077) 325313; E-mail: irena_123@bk.ru.

# УСТОЙЧИВОСТЬ ФОРМ РАВНОВЕСИЯ ПЛАСТИН ПРИ ОБТЕКАНИИ С УЧЁТОМ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ

**Василян Н.Г.**

В статье исследована аэродинамическая задача статической неустойчивости упругой пластины. На пластину действует поток, направленный параллельно невозмущённой срединной поверхности пластинки. Решена задача по уточнённой теории пластинки с учётом поперечных сдвигов, принимая уравнение изгиба таким же, как и в классической теории Кирхгофа, но в граничных условиях, сохраняя уравнение изгиба по уточнённой теории. Исследование уравнения изгиба по уточнённой теории для этой задачи тоже рассмотрена в этой статье с помощью компьютерных программ.

Полученное трансцендентное уравнение решается с помощью графического метода. Найдена критическая скорость потока, при которой невозмущённая форма равновесия пластинки перестаёт быть устойчивой и возникает состояние дивергенции.

**1.** В статье при действии аэродинамической нагрузки на пластину исследуется аэроупругая статическая неустойчивость [6]. На пластину действует поток, направленный параллельно невозмущённой срединной поверхности пластинки, как изображено на рис.1.1(а). Здесь эскизно изображена искривлённая срединная поверхность, которую можно считать цилиндрической при

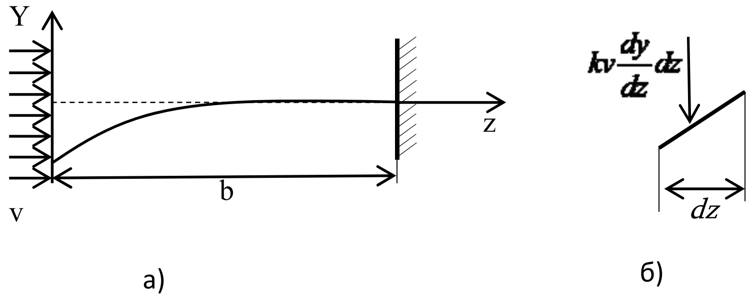



Рис. 1.1. Схема действия воздушного потока на упругую пластинку.

достаточно большой длине пластинки [2,4]. Требуется выяснить условия, при которых наряду с невозмущённой формой равновесия возможна искривлённая форма равновесия, когда изгиб пластинки обусловлен соответствующими этому изгибу аэродинамическими нагрузками.

Обтекание заданной формы искривлённой поверхности пластинки представляет собой сложную задачу аэродинамики. Эта задача ещё больше усложняется, когда форма изгиба пластинки не задана, а зависит от распределения аэродинамических нагрузок. Однако, при сверхзвуковых скоростях потока решение может быть упрощено, если воспользоватся «поршневой теорией», согласно которой местное давление на искривлённую поверхность пропорционально местному углу атаки и скорости потока $\boldsymbol{v}$. Таким образом, опираясь на поршневую теорию, давление на искривлённую цилиндрическую поверхность пластинки определяется выражением

$$q = -kv\frac{dw}{dx} \tag{1.1}$$

где $k$ – постоянная, $w = w(x)$ –прогиб пластинки, а $\frac{dw}{dx}$ – местный угол атаки (рис. 1б).

**2. Исследование влияния граничных условий.** Исследуется задача изгиба упругой пластинки под действием потока $q$ (1.1) по теории С.А. Амбарцумяна [1]. Система уравнений изгиба пластин по уточнённой теории примет вид:

$$
\begin{aligned}
&\frac{4h}{3}\frac{d\varphi_1}{dx}=q=0\\
&D\frac{d^3w}{dx^3}-\frac{8h^3}{15}\left(1+\theta\right)\frac{d^2\varphi_1}{dx^2}+\frac{4h}{3}\varphi_1=0\\
&\frac{8h^3}{15}\frac{d^2\varphi_2}{dx^2}-\frac{4h}{3}\varphi_2=0
\end{aligned}
\qquad (2.1)
$$

где $D=\dfrac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}$ – жёсткость пластинки. Пластина жёстко закреплена по одной стороне из длинных кромок и свободна вдоль другой, следовательно [3]:

а. Свободный край:

$$
x=0\qquad
\begin{aligned}
&\frac{d^2w}{dx^2}-\frac{4}{5G}\frac{d\varphi_1}{dx}=0 &&\left(\sigma_{11}=0\right),\\
&\frac{2}{5G}\frac{d\varphi_2}{dx}=0 &&\left(\sigma_{12}=0\right),\\
&\varphi_1=0 &&\left(\sigma_{13}=0\right).
\end{aligned}
\qquad (2.2)
$$

б. Жёсткая заделка:

$$
x=b\qquad
\begin{aligned}
&\left(u_1=0,\ u_2=0,\ u_3=0\right)\\
&w=0,\ \frac{dw}{dx}-\frac{4}{5G}\varphi_1=0,\ \ \varphi_2=0.
\end{aligned}
\qquad (2.3)
$$

Решая третье уравнение (2.1) и удовлетворяя граничным условиям (2.2) и (2.3), получается $\varphi_2=0$.

$$
\begin{aligned}
&\frac{4h}{3}\frac{d\varphi_1}{dx}-kv\frac{dw}{dx}=0\\
&D\frac{d^3w}{dx^3}-\frac{8h^3}{15}\left(1+\theta\right)\frac{d^2\varphi_1}{dx^2}+\frac{4h}{3}\varphi_1=0
\end{aligned}
\qquad (2.4)
$$

с граничными условиями:

$$
x=0\quad
\begin{cases}
\dfrac{d^2w}{dx^2}-\dfrac{4}{5G}\dfrac{d\varphi_1}{dx}=0,\\
\varphi_1=0
\end{cases}
\qquad
x=b\quad
\begin{cases}
w=0\\
\dfrac{dw}{dx}-\dfrac{4}{5G}\varphi_1=0
\end{cases}
\qquad (2.5)
$$

Дифференцируя второе уравнение (2.4) и подставляя выражение $\dfrac{d\varphi_1}{dx}$ из первого уравнения, для прогиба получается дифференциальное уравнение четвёртой степени:

$$w^{IV} - \frac{4h^2}{5(1-\nu)} s^3 w''' + s^3 w' = 0, \tag{2.6}$$

где $s = \sqrt[3]{\frac{kv}{D}}$. Обозначив $\mu = \frac{4h^2}{5(1-\nu)} = \frac{3D}{5Gh}$, дифференциальное уравнение примет вид:

$$w^{IV} - \mu w''' + s^3 w' = 0. \tag{2.7}$$

Решение дифференциального уравнении (2.7) ищется в виде $w(x) = Ae^{\lambda x}$. С целью исследования влияния изменения граничных условий уравнение изгиба пластинки рассматривается по теории Кирхгофа [5]. Дифференциальное уравнение получается в виде, полученном по классической теории [1], т.е. в виде (2.7), игнорируя среднее слагаемое. Характеристическое уравнение четвёртой степени имеет четыре корня и прогиб пластины примет вид:

$$w(x) = A_1 + A_2 e^{-sx} + e^{\frac{sx}{2}} \left( A_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} sx + A_4 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} sx \right). \tag{2.8}$$

Граничные условия принимаются так, как записано по теории С.А. Амбарцумяна (2.8) и подставляя в (2.5), получается система линейных уравнений от коэффициентов $A_1, A_2, A_3, A_4$:

$$\begin{cases} 2\left(1 + s^2\mu + s^4\mu^2\right) A_2 + \left(-1 + \mu s^2\right)\left(-\sqrt{3} A_3 + \left(1 + 2s^2\mu\right) A_4\right) = 0 \\ 2\left(1 + s^2\mu\right) A_2 + \sqrt{3} s^2 \mu A_3 + \left(2 - s^2\mu\right) A_4 = 0 \\ A_1 + e^{-bs} A_2 + e^{\frac{bs}{2}} \left( A_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} bs + A_4 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} bs \right) = 0 \\ -2\left(1 + s^2\mu\left(1 + s^2\mu\right)\right) A_2 + e^{\frac{3bs}{2}} \left( \left( \left(1 - 2s^2\mu + s^4\mu^2\right) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} bs + \sqrt{3}\left(1 - s^4\mu^2\right) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} bs \right) A_3 \right. \\ \qquad \left. + \left( -\sqrt{3}\left(1 - s^4\mu^2\right) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} bs + \left(1 - 2s^2\mu + s^4\mu^2\right) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} bs \right) A_4 \right) = 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

При исследовании $\mu = 0$ система уравнений (2.9) примет тот же вид, что получается при исследовании проблемы по классической теории [5].

Нулевое значение постоянных удовлетворяет системе линейных уравнений, что соответствует тривиальному решению. Чтобы найти постоянные $A_1, A_2, A_3, A_4$, отличные от нуля, необходимо приравнять к нулю определитель системы линейных уравнений. Развёртывание этого определителя приводит к следующему уравнению для параметра $bs$:

$$4e^{\frac{3bs}{2}} \left(1 - s^6\mu^3\right) \left[ -\sqrt{3}\left(1 + s^4\mu^2\right) + e^{\frac{3bs}{2}} \left( \sqrt{3}\left(-2 + s^4\mu^2\right) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} bs - 3s^4\mu^2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} bs \right) \right] = 0 \tag{2.10}$$

При исследовании уравнений (2.10) получается трансцендентное уравнение:

$$\cos\lambda + u^2 \sin\left(\lambda - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}\left(1 + u^2\right) e^{-\sqrt{3}\lambda} \tag{2.11}$$

где приняты следующие обозначениея: $u = \mu s^2$, $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2} bs.$

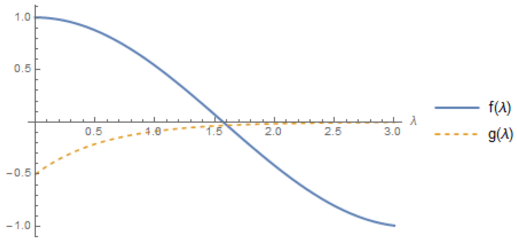



Рис. 2.1. Графическое решение трансцендентного уравнения (2.11)

При исследовании $\mu = 0$ (следовательно, при $u = 0$) из (2.11) получается уравнение, полученное при исследовании изгиба по классической теории, т.е. решение при исследовании изгиба упругих пластин под давлением потока $q$ (по закону (1.1)) по уточнённой теории совпадает с решением классической теории.

Графическое решение (рис.2.1) даёт первый корень, значение которого приведено в следующей таблице:

**Таблица 1**

| | По теории Кирхгофа | При граничных условиях по уточнённой теории |
|---|---|---|
| $sb$ | 1.854 | 1.8498 |
| $V \Big/ \frac{D}{kb^3}$ | 6.38 | 6.3297 |

**3. Решение по уточнённой теории.** Исследуется задача изгиба упругой пластинки под действием потока $q$ (1.1) по теории С.А. Амбарцумяна [1,7]. Система уравнений изгиба пластин по уточнённой теории примет вид (2.1).

Исследуется задача по той же схеме, только решение системы дифференциального уравнения (2.7) найдено по программе Wolfram Mathematica (не игнорируя среднее слагаемое) и имеет вид:

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{6}\left(2\mu - \frac{\sqrt[3]{2}\left(1-\sqrt{3}\mathrm{i}\right)\mu^2}{\zeta} - \frac{\sqrt[3]{4}}{2}\left(1+3\mathrm{i}\right)\zeta\right)$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{6}\left(2\mu - \frac{\sqrt[3]{2}\left(1+\sqrt{3}\mathrm{i}\right)\mu^2}{\zeta} - \frac{\sqrt[3]{4}}{2}\left(1-3\mathrm{i}\right)\zeta\right) \tag{3.1}$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{6}\left(2\mu + \frac{2\sqrt[3]{2}\mu^2}{\zeta} + \sqrt[3]{4}\zeta\right)$$

где $\zeta = \left(-27s^3 + 2\mu^3 + 3\sqrt{81s^6 - 12s^3\mu^3}\right)^{1/3}$.

При исследовании $\mu = 0$ решение дифференциального уравнения (2.6) совпадает с решением по классической теории. Так же совпадает трансцендентное уравнение.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360с.
2. Антонян С.С., Василян Н.Г. Исследование напряжённо-деформированного состояния изгибаемой пластинки в окрестности шарнирно закреплённого края. «Young Scientists School-Conference» MECHANICS-2013. 1–4 октября 2013, Цахкадзор, Армения. С.69-73.
3. Белубекян М.В. Об уравнениях теории пластин, учитывающих поперечные сдвиги // В сб.: «Проблемы механики тонких деформируемых тел» (Посв. 80-летию С.А. Амбарцумяна). – Ереван: Изд. «Гитутюн», 2002. С.67– 88.
4. Васильев В.В. Кручение квадратной пластины угловыми силами и распределёнными моментами. //Механика Твёрдого Тела. 2017. №2. С.20-31.
5. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Физматлит, 1963. 636с.
6. Пановко Я.Г., Губанова И.И.. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1964. 336с.
7. Vasilyan N.G. The investigation of stress concentration in corner points for orthotropic plate bending problem. TPCM, V international conference , 02-07 oct.,2017. Tsakhhadzor, Armenia. p.235.



**<u>Сведения об авторе:</u>**

**Василян Нарине Гургеновна –** канд. физ.-мат. наук, научн. сотр. Института механики НАН Армении,

**Тел.:** (+374 91)707939, (+374 10)624802;

**Адрес:** ул. Даниела Варужана, 9; кв.29. Ереван, Армения, 0060.

**E-mail:** narine@mechins.sci.am

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ОТСЛОЕНИЙ В СЛОИСТЫХ СТРУКТУРАХ

**Ватульян А.О., Плотников Д.К.**

Исследована задача для неоднородной полосы с покрытием при наличии отслоения. На основе преобразования Фурье сформулирована каноническая система дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Сформулирована система интегральных уравнений относительно скачков перемещений на границе основания и покрытия. Построена вычислительная схема нахождения ядер интегральных операторов на основе вспомогательных задач Коши. Система интегральных уравнений решена с помощью метода коллокаций. Построены функции раскрытия для разных типов нагружения полосы.

В настоящее время в инженерной практике широко применяются технологии нанесения упрочняющих и износостойких покрытий на поверхности элементов конструкций. Покрытия используются с целью улучшения прочностных, теплопроводных, трибологических и антикоррозионных свойств. Для тел слоистой структуры характерно образование дефектов в виде трещин или отслоений, что обусловлено концентрацией напряжений в областях сопряжения материалов, обладающих разными свойствами.

Одними из наиболее подходящих моделей для изучения покрытий являются модели слоя или полосы. Как правило, решение задач о деформировании неоднородной полосы основано на формулировке интегрального уравнения, ядро которого может быть построено явно лишь в однородном случае. При исследовании задач для тел неоднородной структуры (градиентной, слоистой) ядра интегральных операторов могут быть найдены либо численно, либо на основе приближённых методов.

Среди работ, посвящённых задачам для неоднородных сред, в том числе полосы, особое внимание нужно уделить монографии [1], которая посвящена разработке численно-аналитических методов решения статических контактных задач теории упругости для непрерывно-неоднородных сред. Предложенные подходы в последствии были расширены для многослойных полупространств с неоднородным покрытием [2,3].

Построение ядер интегральных операторов в задачах для неоднородной полосы возможно также путём формулирования приближённых моделей полосы. В монографии [4] на основе асимптотического анализа решения задачи о равновесии однородной упругой полосы построен ряд приближённых моделей контактного взаимодействия для тел с тонкими покрытиями и прослойками. В [5,6] построены приближённые модели деформирования неоднородной упругой полосы, на основе которых исследованы контактная задача и задача об отслоении покрытия от упругого основания.

В [7] разработан асимптотический метод исследования задачи об идентификации трещины в слоистой среде. Рассмотрена задача идентификации вертикальной трещины на границе раздела двух сред. Отметим также работы, посвящённые задачам, касающимся устойчивости пластин на упругом основании, а также тонких поверхностных плёнок [8,9].

## 1. Постановка задачи для полосы с отслоением

Рассмотрим равновесие неоднородной упругой полосы толщины $h$ с покрытием, жёстко сцеплённой с недеформируемым основанием, под действием нормальной нагрузки $q$ на отрезке $[b,c]$ верхней границы покрытия $x_3=h$ (рис.1). Толщины покрытия и основания соответственно равны $h_2$ и $h_1$, $h_1+h_2=h$. Параметры Ляме полосы являются произвольными положительными функциями координаты $x_3$, т.е. $\lambda=\lambda(x_3)$, $\mu=\mu(x_3)$, причём, при $x_3=h_1$ эти функции имеют разрыв первого рода. На границе покрытия и подложки $x_3=h_1$ на отрезке $[-a,a]$ имеется отслоение, моделируемое математическим разрезом.

Уравнения равновесия и определяющие соотношения плоской задачи имеют вид:

$$\sigma_{ij,j}=0,\quad \varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right),\quad \sigma_{ij}=\lambda(x_3)u_{k,k}\delta_{ij}+2\mu(x_3)\varepsilon_{ij},\quad i,j=1,3, \tag{1.1}$$

где $u_i$ – компоненты вектора перемещений, $\delta_{ij}$ – символ Кронекера.

Сформулируем граничные условия краевых задач в областях I ($x_3 \in [0, h_1]$) и II ($x_3 \in [h_1, h_2]$). Компоненты вектора смещений и тензора напряжений в I и II снабдим знаками «–» и «+» соответственно.

Область I. $x_3 \in [0, h_1]$:

$$u_1^-(0) = 0, \quad u_3^-(0) = 0, \quad \sigma_{13}^-(h_1) = \sigma_{13}^*, \quad \sigma_{33}^-(h_1) = \sigma_{33}^*. \tag{1.2}$$

Область II. $x_3 \in [h_1, h_2]$:

$$\sigma_{13}^+(h_1) = \sigma_{13}^*, \quad \sigma_{33}^+(h_1) = \sigma_{33}^*, \quad \sigma_{13}^+(h) = 0, \quad \sigma_{33}^+(h) = -q, \tag{1.3}$$

где $\sigma_{13}^*$ и $\sigma_{33}^*$ – напряжения на границе раздела покрытия и основания. Отметим, что при $|x_1| \le a$, т.е. вне области отслоения $\sigma_{13}^* = \sigma_{33}^* = 0$.

Обезразмерим задачу, введя безразмерные параметры следующим образом:

$$x_i = \xi_i h, \quad u_i = \hat{u}_i h, \quad \sigma_{ij} = \mu_0 \hat{\sigma}_{ij}, \quad \lambda = \mu_0 \hat{\lambda}, \quad \mu = \mu_0 \hat{\mu},$$

$$q = \mu_0 \hat{q}, \quad h_i = \hat{h}_i h, \quad a = \hat{a} h, \quad b = \hat{b} h, \quad c = \hat{c} h,$$

где $\mu_0$ – характерное значение модуля сдвига полосы, например, $\mu_0 = \max\limits_{0 \le x_3 \le h_1} \mu(x_3)$.

Применим к задачам (1.1), (1.2) и (1.1), (1.3) преобразование Фурье по координате $\xi_1$, получим каноническую систему

$$\begin{aligned} X_1' &= \frac{1}{\hat{\mu}} X_3 - \alpha X_2, \\ X_2' &= \frac{1}{\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}} \left( X_4 + \alpha \hat{\lambda} X_1 \right), \\ X_3' &= \frac{1}{\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}} \left( 4\hat{\mu} \left( \hat{\lambda} + \hat{\mu} \right) \alpha^2 X_1 - \alpha \hat{\lambda} X_4 \right), \\ X_4' &= \alpha X_3, \end{aligned} \tag{1.4}$$

где $\alpha$ – параметр преобразования и введены следующие компоненты вектора $\mathbf{X}$:

$$X_1 = i\tilde{u}_1, \quad X_2 = \tilde{u}_3, \quad X_3 = i\tilde{\sigma}_{13}, \quad X_4 = \tilde{\sigma}_{33}.$$

Приведём граничные условия для краевых задач в трансформантах Фурье с учётом введённых безразмерных параметров.

$$\text{I.} \quad \xi_3 \in [0, \hat{h}_1], \qquad X_1^-(\alpha, 0) = 0, \quad X_2^-(\alpha, 0) = 0, \quad X_3^-(\alpha, \hat{h}_1) = i\tilde{\sigma}_{13}^*, \quad X_4^-(\alpha, \hat{h}_1) = \tilde{\sigma}_{33}^*. \tag{1.5}$$

$$\text{II.} \quad \xi_3 \in [\hat{h}_1, 1], \qquad X_3^+(\alpha, \hat{h}_1) = i\tilde{\sigma}_{13}^*, \quad X_4^+(\alpha, \hat{h}_1) = \tilde{\sigma}_{33}^*, \quad X_3^+(\alpha, 1) = 0, \quad X_4^+(\alpha, 1) = -Q, \tag{1.6}$$

где $Q$ – трансформанта Фурье безразмерной нормальной нагрузки $\hat{q}$.

## 2. Метод пристрелки

Краевые задачи I и II для системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами (1.4) решим с помощью метода пристрелки. Сформулируем следующие вспомогательные задачи Коши для задачи I:

1. $X_1^{(1)}(\alpha, 0) = 0, \quad X_2^{(1)}(\alpha, 0) = 0, \quad X_3^{(1)}(\alpha, 0) = 1, \quad X_4^{(1)}(\alpha, 0) = 0,$

2. $X_1^{(2)}(\alpha,0)=0, \quad X_2^{(2)}(\alpha,0)=0, \quad X_3^{(2)}(\alpha,0)=0, \quad X_4^{(2)}(\alpha,0)=1.$

Решение в области I представляется линейной комбинацией решений 1 и 2 в виде $\mathbf{X}^-=s_1\mathbf{X}^{(1)}+s_2\mathbf{X}^{(2)}$, а коэффициенты $s_1$, $s_2$ находятся из граничных условий (1.5).

Аналогичным образом сформулируем три вспомогательные задачи Коши и построим решение краевой задачи II.

3. $X_1^{(3)}(\alpha,1)=1, \quad X_2^{(3)}(\alpha,1)=0, \quad X_3^{(3)}(\alpha,1)=0, \quad X_4^{(3)}(\alpha,1)=0,$

4. $X_1^{(4)}(\alpha,1)=0, \quad X_2^{(4)}(\alpha,1)=1, \quad X_3^{(4)}(\alpha,1)=0, \quad X_4^{(4)}(\alpha,1)=0,$

5. $X_1^{(5)}(\alpha,1)=0, \quad X_2^{(5)}(\alpha,1)=0, \quad X_3^{(5)}(\alpha,1)=0, \quad X_4^{(5)}(\alpha,1)=1.$

Решение задачи II будем искать в виде $\mathbf{X}^+=s_3\mathbf{X}^{(3)}+s_4\mathbf{X}^{(4)}-Q\mathbf{X}^{(5)}$. Удовлетворив граничным условиям (1.6), найдём параметры $s_3$ и $s_4$.

Введём в рассмотрение функции раскрытия $\chi_1$ и $\chi_3$, характеризующие скачок смещений в области отслоения и определяемые выражениями $\chi_j(\xi_1)=\hat{u}_j^+(\xi_1,\hat{h}_1)-\hat{u}_j^-(\xi_1,\hat{h}_1)$, $j=1,3$. Выразив трансформанты компонент напряжений на берегах отслоения через трансформанты функций раскрытия и нагрузки, получим:

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{13}^* &= K_{10}(\alpha)Q+K_{11}(\alpha)\tilde{\chi}_1+K_{13}(\alpha)\tilde{\chi}_3,\\ \tilde{\sigma}_{33}^* &= K_{30}(\alpha)Q-K_{13}(\alpha)\tilde{\chi}_1+K_{33}(\alpha)\tilde{\chi}_3.\end{aligned} \tag{1.7}$$

Передаточные функции $K_{10}$ и $K_{30}$ убывают на бесконечности, а остальные передаточные функции в (1.7) являются растущими, причём, при $|\alpha|\to\infty$

$$K_{10}\sim C_{10}\cdot\alpha e^{-\alpha\hat{h}_2}, \quad K_{30}\sim C_{30}\cdot|\alpha|e^{-\alpha\hat{h}_2}, \quad K_{11}\sim C_{11}\cdot|\alpha|, \quad K_{13}\sim C_{13}\cdot|\alpha|, \quad K_{33}\sim C_{33}\cdot|\alpha|.$$

### 3. Интегральные уравнения задачи. Метод коллокаций

Найдём обратное преобразование Фурье для напряжений $\hat{\sigma}_{13}^*$, $\hat{\sigma}_{33}^*$ и потребуем равенства их нулю на берегах отслоения. Сформулируем систему интегральных уравнений относительно функций раскрытия $\chi_1(\xi)$, $\chi_3(\xi)$, здесь и далее обозначено $\xi_1=\xi$.

$$\begin{aligned}&\int_{-\hat{a}}^{\hat{a}}k_{11}(\eta-\xi)\chi_1(\eta)d\eta+\int_{-\hat{a}}^{\hat{a}}k_{13}(\eta-\xi)\chi_3(\eta)d\eta=-\int_{-\infty}^{\infty}K_{10}(\alpha)Q(\alpha)e^{-i\alpha\xi}d\alpha,\\ -&\int_{-\hat{a}}^{\hat{a}}k_{13}(\eta-\xi)\chi_1(\eta)d\eta+\int_{-\hat{a}}^{\hat{a}}k_{33}(\eta-\xi)\chi_3(\eta)d\eta=-\int_{-\infty}^{\infty}K_{30}(\alpha)Q(\alpha)e^{-i\alpha\xi}d\alpha,\end{aligned} \tag{1.8}$$

где ядра $k_{mj}$ определяются формулами:

$$k_{mj}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}K_{mj}(\alpha)e^{i\alpha t}d\alpha, \qquad t=\eta-\xi.$$

Систему интегральных уравнений (1.10) решим численно с помощью метода коллокаций. Разобъём отрезок интегрирования $[-\hat{a},\hat{a}]$ на $N$ отрезков $\Delta_k=[\eta_k,\eta_{k+1}]$, считая на каждом $\Delta_k$ функции $\chi_1(\xi)$, $\chi_3(\xi)$ постоянными. Потребуем выполнения системы (1.8) в точках $\xi_k$, причём, $\xi_k=\left(\eta_k+\eta_{k+1}\right)/2$. Получим систему $2N$ линейных алгебраических уравнений относительно постоянных $\chi_{1n}$, $\chi_{3n}$, $n=1..N$.

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\chi_{1n}d_{1nk}+\chi_{3n}d_{2nk}\right)=b_{1k},\quad \sum_{n=1}^{N}\left(-\chi_{1n}d_{2nk}+\chi_{3n}d_{3nk}\right)=b_{3k},\quad k=1..N, \tag{1.9}$$

где коэффициенты $d_{jnk}$ и $b_{jk}$ задаются выражениями:

$$d_{2nk}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{K_{13}(\alpha)}{i\alpha}\Phi\left(\alpha,\eta_n,\eta_{n+1},\xi_k\right)d\alpha,\quad d_{jnk}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{K_{jj}(\alpha)}{i\alpha}\Phi\left(\alpha,\eta_n,\eta_{n+1},\xi_k\right)d\alpha,$$

$$b_{jk}=-\int_{-\infty}^{\infty}K_{j0}(\alpha)Q(\alpha)e^{-i\alpha\xi_k}d\alpha,\quad j=1,3,\quad k=1..N, \tag{1.10}$$

Причём, $\Phi\left(\alpha,\eta_n,\eta_{n+1},\xi_k\right)=\exp(i\alpha(\eta_{n+1}-\xi_{1k}))-\exp(i\alpha(\eta_n-\xi_{1k}))$.

В силу асимптотического поведения передаточных функций $K_{mj}(\alpha)$ при $|\alpha|\to\infty$ интегралы $d_{jnk}$, вообще говоря, расходятся; введём функции $K_{13}^{\ *}(\alpha)=K_{13}(\alpha)-C_{13}\alpha,\quad K_{jj}^{\ *}(\alpha)=K_{jj}(\alpha)-C_{jj}|\alpha|,\quad j=1,3$, ограниченные на бесконечности и представим коэффициенты $d_{jnk}$ в виде

$$d_{2nk}=C_{13}I_{2nk}+d^{*}_{2nk},\quad d_{jnk}=C_{jj}I_{1nk}+d^{*}_{jnk}.$$

$$d^{*}_{2nk}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{K^{*}_{13}(\alpha)}{i\alpha}\Phi\left(\alpha,\eta_n,\eta_{n+1},\xi_k\right)d\alpha,\quad d^{*}_{jnk}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{K^{*}_{jj}(\alpha)}{i\alpha}\Phi\left(\alpha,\eta_n,\eta_{n+1},\xi_k\right)d\alpha, \tag{1.11}$$

где $I_{1nk}=\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sgn}\alpha\,\Phi\left(\alpha,\eta_n,\eta_{n+1},\xi_k\right)d\alpha,\quad I_{2nk}=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi\left(\alpha,\eta_n,\eta_{n+1},\xi_k\right)d\alpha$.

### 4. Результаты вычислительных экспериментов

Интегралы в (1.11) вычисляются путём прямого численного интегрирования с помощью квадратурных формул Гаусса для 8 узлов. Ниже приведены результаты расчётов при $\hat{h}_2=0.1$, $\hat{a}=1$ для однородного основания с градиентным покрытием, свойства которого возрастают линейно. Свойства материалов на границе основания и покрытия отличаются в 10 раз.

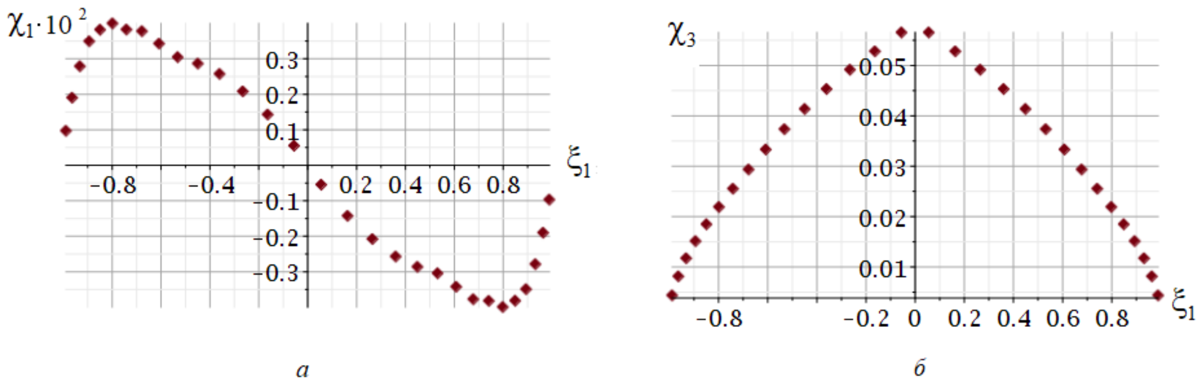
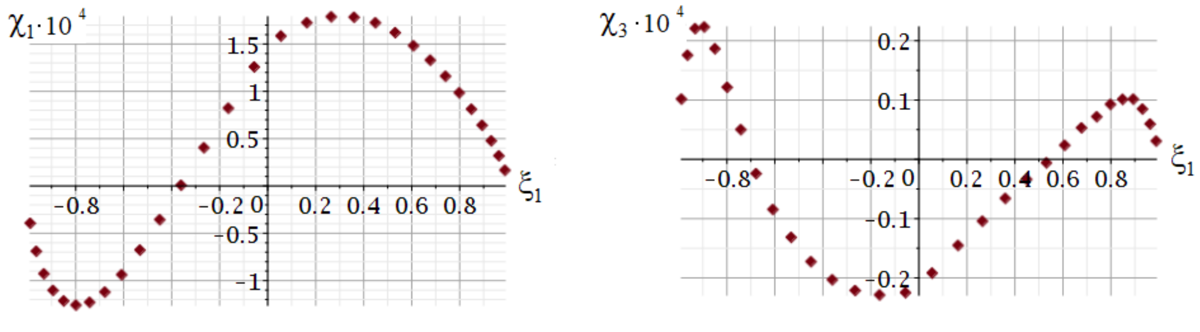



Рис. 1

На рис.1 приведены результаты вычислений функций раскрытия $\chi_1$ и $\chi_3$ для случая нагружения, симметричного относительно начала координат. Метод коллокаций реализован для $N=30$ со сгущением количества отрезков разбиения у краёв зоны отслоения.

На рис.2 представлены функции раскрытия для несимметричной нагрузки при тех же значениях параметров, что и в предыдущем примере.

Построенные функции раскрытия могут быть использованы для нахождения смещений верхней границы покрытия и дальнейшего исследования задач о диагностике отслоений.




*а* *б*

Рис. 2

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект №18-11-00069).

## ЛИТЕРАТУРА


1. Айзикович С.М., Александров В.М., Белоконь А.В., Кренев Л.И., Трубчик И.С. Контактные задачи теории упругости для неоднородных сред. М.: Физматлит, 2006. 240 с.
2. Волков С.С., Васильев А.С., Айзикович С.М., Селезнев Н.М., Леонтьева А.В. Напряженно-деформированное состояние упругого мягкого функционально-градиентного покрытия при внедрении сферического индентора // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2016. № 4. С. 20–34.
3. Vasiliev, A.S., Volkov, S.S., Aizikovich, S.M. Approximated analytical solution of contact problem on indentation of elastic half-space with coating reinforced with inhomogeneous interlayer // Materials Physics & Mechanics. 2018. Vol. 35. Issue 1, pp.175–180.
4. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488 с.
5. Ватульян А.О., Коссович Е.Л., Плотников Д.К. О некоторых особенностях индентирования трещиноватых слоистых структур // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 4. С. 94-100.
6. Ватульян А.О., Плотников Д.К., Поддубный А.А. О некоторых моделях индентирования функционально-градиентных покрытий //Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2018. Т.18, вып.4. С.421-432.
7. Ватульян А.О., Явруян О.В. Исследование обратных задач теории трещин с использованием асимптотического метода // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2018. № 2. С.39–46.
8. Гольдштейн Р.В., Устинов К.Б., Ченцов А.В. Оценка влияния податливости подложки на напряжения потери устойчивости отслоившегося покрытия // Вычислительная механика сплошных сред. 2011. Т.4. № 3. С.48–57.
9. Морозов Н.Ф., Товстик П.Е. О формах потери устойчивости сжатой пластины на упругом основании // Изв. РАН. МТТ. 2012. № 6. С.30–36.


**Сведения об авторах:**


**Ватульян Александр Ованесович** – доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой теории упругости Южного федерального университета, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича 8(863)2975114; **E-mail:**vatulyan@math.rsu.ru

**Плотников Дмитрий Константинович** – аспирант кафедры теории упругости Южного федерального университета, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича 8(909)4124807; **E-mail:** dplotnikov@sfedu.ru

# РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ С КОЛЬЦЕВЫМ ОТСЛОЕНИЕМ

**Ватульян А.О., Юров В.О.**

Изучается распространение волн в неоднородном цилиндрическом волноводе с кольцевым отслоением. Волновод имеет кольцевое поперечное сечение, является неоднородным в радиальном направлении (слоистый или функционально-градиентный). Краевая задача в пространстве трансформант Фурье решена методом пристрелки, сформулирован ряд вспомогательных задач Коши, на основе которых построена система интегральных уравнений относительно скачков смещений. Для решения построенных систем интегральных уравнений с сингулярными и гиперсингулярными ядрами применён метод граничных элементов. Представлены результаты вычислительных экспериментов.

**Введение.** Задачи о распространении волн в однородных и неоднородных волноводах находят применение при моделировании различных объектов, в частности, для исследования волновых процессов в волноводах с покрытиями, причём, основная проблема состоит в выявлении отслоившихся зон по информации о волновых полях на поверхности волновода. При этом важную роль играют решения задач для волноводов с внутренними дефектами-отслоениями, на которых компоненты смещений терпят скачки. Отметим два наиболее часто используемых для решения возникающих смешанных задач подхода. Первый из них исторически связан со сведением смешанной задачи к системе интегральных уравнений относительно скачков (обычно с гиперсингулярными ядрами) и построением их решений либо на основе сведения к системам интегральных уравнений Фредгольма второго рода с последующей дискретизацией, либо на прямом использовании метода граничных элементов [1]. Второй подход, который активно используется в последние годы, базируется на сопряжении аналитических решений для бесконечного волновода и конечно-элементных методов для изучения колебаний конечных областей, содержащих дефект [2,3]; отметим, что обычно при таком подходе полубесконечные части волновода принимаются однородными. К преимуществам такого подхода можно отнести существенную произвольность неоднородности и геометрии конечной части, однако, возникающие задачи сопряжения с аналитическими решениями могут вносить существенную погрешность в решение.

В настоящей работе осуществлено моделирование волновых процессов в неоднородном цилиндрическом волноводе с кольцевым отслоением в рамках метода, нацеленного на формирование системы интегральных уравнений в рамках первого подхода и её численное решение, несмотря на то, что аналитическое представление ядер для такой системы построить невозможно. Традиционные методы построения интегральных уравнений для тел с трещинами произвольной формы, основанные на введении в уравнения движения массовых сил, связанных линейными операторными соотношениями со скачками смещений на трещине, не удаётся реализовать в силу переменности коэффициентов дифференциальных операторов. Отметим,что в настоящей работе такое продвижение реализовано на пути построения символов Фурье ядер интегральных операторов для трещины-отслоения, расположенной на соосной цилиндрической поверхности, основано на использовании сочетания преобразования Фурье и анализа ряда вспомогательных задач Коши для трансформант вектора смещений и вектора напряжений.

**Постановка задачи.** Рассмотрим волны в неоднородном по радиальной координате цилиндрическом волноводе с кольцевым поперечным сечением ($a \le r \le b$), содержащем осесимметричную область с внутренним отслоением. Колебания волновода вызываются действием распределённой осесимметричной нагрузки на внешней границе волновода $q(z)$. Внутренняя граница волновода и берега отслоения свободны от напряжений. $\lambda, \mu$ – параметры Ламе, которые могут зависеть от радиальной координаты.

Введём следующие безразмерные параметры и переменные: $x = \dfrac{r}{b}$, $\xi_0 = \dfrac{a}{b}$, $y = \dfrac{z}{b}$, $\mu_0 = \mu(\xi_0)$, $u_r = bX_1$, $u_z = ibX_2$, $\sigma_r = \mu_0 X_3$, $\sigma_{rz} = i\mu_0 X_4$, $\kappa^2 = \rho\omega^2 b^2 / \mu_0$, $\lambda = \mu_0 g_1$, $\mu = \mu_0 g_2$.

Пусть волновод содержит кольцевое отслоение, представляющее собой цилиндрическую поверхность $x = \xi_1 \in (\xi_0, 1)$, $y \in [-l_0, l_0]$. Будем считать, что берега отслоения не взаимодействуют друг с другом и напряжения на них обращаются в нуль, а внешняя нормальная нагрузка, вызывающая распространение волн в волноводе, приложена в области $x = 1$, $y \in [l_1, l_2]$.

Выполним интегральное преобразование Фурье вдоль продольной координаты в областях $S_1 = \{(x, y), \xi_0 \le x \le \xi_1, -\infty < y < \infty\}$, $S_2 = \{(x, y), \xi_1 \le x \le 1, -\infty < y < \infty\}$ при условии, что известно поле перемещений на условной границе раздела $x = \xi_1$ и каждая область является цилиндрическим волноводом с кольцевым поперечным сечением и введём следующее обозначение для трансформант Фурье

$$\tilde{\mathbf{X}}(x, \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{X}(x, y) e^{i\alpha y} dy \qquad (1)$$

С целью исследования задачи с произвольной неоднородностью, связанной с переменностью упругих свойств в радиальном направлении, сформируем каноническую систему дифференциальных уравнений первого порядка относительно компонент вектора смещений и напряжений, непрерывных по координате $x$, и запишем её в векторном виде:

$$\tilde{\mathbf{X}}' = \left(\mathbf{A}_0 - \kappa^2 \mathbf{A}_{01} + \alpha \mathbf{A}_1 + \alpha^2 \mathbf{A}_2\right) \tilde{\mathbf{X}}, \text{ где } \tilde{\mathbf{X}} = \left(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{X}_3, \tilde{X}_4\right)^T \qquad (2)$$

Причём, компоненты матриц-функций для системы уравнений (2) приводятся в работе [4].

Решение задачи в пространстве трансформант о колебаниях волновода с отслоением под действием внешней нагрузки можно построить в виде

$$\tilde{\mathbf{Z}} = Q(\alpha) \tilde{\mathbf{Z}}^{(0)}(\alpha, \kappa) + \tilde{\chi}_1(\alpha) \tilde{\mathbf{Z}}^{(1)}(\alpha, \kappa) + \tilde{\chi}_2(\alpha) \tilde{\mathbf{Z}}^{(2)}(\alpha, \kappa), \qquad (3)$$

где $Q(\alpha) = \int_{l_1}^{l_2} q(y) e^{i\alpha y} dy$ – трансформанта внешней нормальной нагрузки, $\tilde{\chi}_1(\alpha)$ и $\tilde{\chi}_2(\alpha)$ – трансформанты от неизвестных скачков радиальных и продольных перемещений на отслоении. Для построения вспомогательных вектор-функций $\tilde{\mathbf{Z}}^{(0)}(\alpha, \kappa)$, $\tilde{\mathbf{Z}}^{(1)}(\alpha, \kappa)$, $\tilde{\mathbf{Z}}^{(2)}(\alpha, \kappa)$ сформирован ряд задач Коши; дальнейшие рассуждения основаны на методе пристрелки.

Далее для выполнения условий равенства нулю оригинала вектора напряжений на берегах отслоения необходимо найти оригиналы полей, осуществляя обратное преобразование Фурье по формуле

$$\mathbf{Z}(x, y, \kappa) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \tilde{\mathbf{Z}}(x, \alpha, \kappa) e^{-i\alpha y} d\alpha \qquad (4)$$

здесь контур Г совпадает с $[-\infty, \infty]$ всюду, за исключением полюсов подынтегральной функции, которые он огибает в соответствии с принципом предельного поглощения [5].

Введём в рассмотрение вектор $\mathbf{f}(y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} Q(\alpha) \tilde{\mathbf{Z}}^{(0)}(\alpha, \kappa) e^{-i\alpha y} d\alpha$. В соответствии с граничными условиями компоненты $Z_3$, $Z_4$ решения (4) обращаются в нуль на берегах отслоения. Учитывая представление для трансформант функций раскрытия и меняя порядок интегрирования в (4), получим следующую систему интегральных уравнений с разностными ядрами относительно скачков перемещений:

$$\begin{cases} \int_{-l_0}^{l_0} \chi_1(\eta) k_{13}(\eta - y) d\eta + \int_{-l_0}^{l_0} \chi_2(\eta) k_{23}(\eta - y) d\eta = f_3(y) \\ \int_{-l_0}^{l_0} \chi_1(\eta) k_{14}(\eta - y) d\eta + \int_{-l_0}^{l_0} \chi_2(\eta) k_{24}(\eta - y) d\eta = f_4(y) \end{cases} \qquad (5)$$

В силу того, что $\tilde{Z}_s^{(j)}(\alpha,\kappa)$, $j=1,2,\ s=3,4$ являются неубывающими функциями, интегральным представлениям ядер $k_{js}(t)=\frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{\Gamma}\tilde{Z}_s^{(j)}(\alpha,\kappa)e^{i\alpha t}d\alpha\right)$ можно придать смысл, используя теорию обобщённых функций [6]. Несложный анализ структуры ядер, выполненный в рамках определения конечного значения по Адамару [6], позволил показать, что ядра являются гиперсингулярными.

Система интегральных уравнений (5) для отыскания функций раскрытия может быть решена методом граничных элементов аналогично схеме, изложенной в [7]. Разобьём интегралы по отрезку $[-l_0,l_0]$ на сумму интегралов по элементам $[-l_0,l_0]=\bigcup\limits_{p=1}^{N}\Delta_p$, где $\Delta_p=\left[-l_0+(p-1)h,-l_0+ph\right]$, $h=2l_0N^{-1}$; также введём координаты концов элементов $\eta_p=-l_0+(p-1)h$, и точки коллокаций $y_q=-l_0+(q-1/2)h$, полагая, что $p=1..N$, $s=1..N$. Будем считать, что функции $\chi_1(\xi)$, $\chi_2(\xi)$ постоянны на элементе и введём узловые переменные $\chi_j\big|_{\Delta_p}=\chi_{jp}$. Считая, что система (5) выполнена в некотором наборе точек, придём к следующим соотношениям:

$$\int\limits_{-l_0}^{l_0}\chi_j(\xi)k_{js}(\eta-y_q)d\eta=\sum_{p=1}^{N}\chi_{jp}\int\limits_{\Delta_p}k_{js}(\eta-y_q)d\eta=f_s(y_q), \qquad (6)$$

которые можно трактовать как алгебраическую систему относительно узловых значений следующего вида:

$$\sum_{p=1}^{N}\chi_{jp}H_{pq}^{(js)}=f_{sq},\ j=1,2,\ s=3,4,\ p=1..N,\ q=1..2N \qquad (7)$$

где введены следующие обозначения для коэффициентов системы:

$$H_{pq}^{(js)}=\frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{\Gamma}\frac{\tilde{Z}_s^{(j)}(\alpha,\kappa)}{i\alpha}e^{i\alpha(\eta-y_q)}d\alpha\right)\Bigg|_{\eta_k}^{\eta_{k+1}}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\tilde{Z}_s^{(j)}(\alpha,\kappa)}{\alpha}E_{pq}(\alpha)d\alpha,$$

$$E_{pq}(\alpha)=\left[e^{i\alpha(\eta_{p+1}-y_q)}-e^{i\alpha(\eta_p-y_q)}\right],\ j=1,2,\ s=3,4.$$

Вычисление коэффициентов системы (7) осуществляется путём выделения главных составляющих, соответствующих предельным значениям символов ядер на бесконечности, остальные составляющие находятся численно на основе квадратурных формул. Решение системы (7) позволяет найти узловые значения функций раскрытия и по ним поля смещений на поверхности волновода.

**Численная реализация.** При численных расчётах выбраны следующие значения параметров и переменных: $\kappa=0.5$, $l_0=0.3$, $l_1=-1$, $l_2=-0.5$, $\xi_0=0.75$, $\xi_1=0.9$, $g_1=1.5g_2=1.5\begin{cases}1, & x<\xi_1\\ 10, & x\geq\xi_1\end{cases}$. Выбранный частотный диапазон соответствует одной распространяющейся волне.

На рис.1 приведены функции раскрытия: вещественная часть функции $\chi_1(y)$ слева и мнимая часть $\chi_2(y)$ справа ($N=600$). Проведено исследование решений системы при увеличении числа элементов, численные расчёты показали наличие внутренней сходимости процедуры дискретизации. Вычислительные эксперименты, проводимые для разного числа элементов ($N=30,60,90,270$), свидетельствуют о сходимости алгоритма при $N\to\infty$. Результаты расчётов показали, что функции $\operatorname{Im}\chi_1(y)$, $\operatorname{Re}\chi_2(y)$ на несколько порядков меньше $\mathrm{Re}\chi_1(y)$, $\mathrm{Im}\chi_2(y)$ и поэтому их графики не приводятся. Обе функции один раз меняют знак в выбранном частотном диапазоне. Условие равенства нулю функций раскрытия на краях отслоения выполнено достаточно точно, несмотря на достаточно простую аппроксимацию функций раскрытия. По результатам вычислительных экспериментов установлено, что законы изменения функций раскрытия зависят от области приложения внешней нагрузки. В частности, для нагрузки, расположенной симметрично относительно центра отслоения, функции $\chi_1(y)$, $\chi_2(y)$ также обладают определённой симметрией.

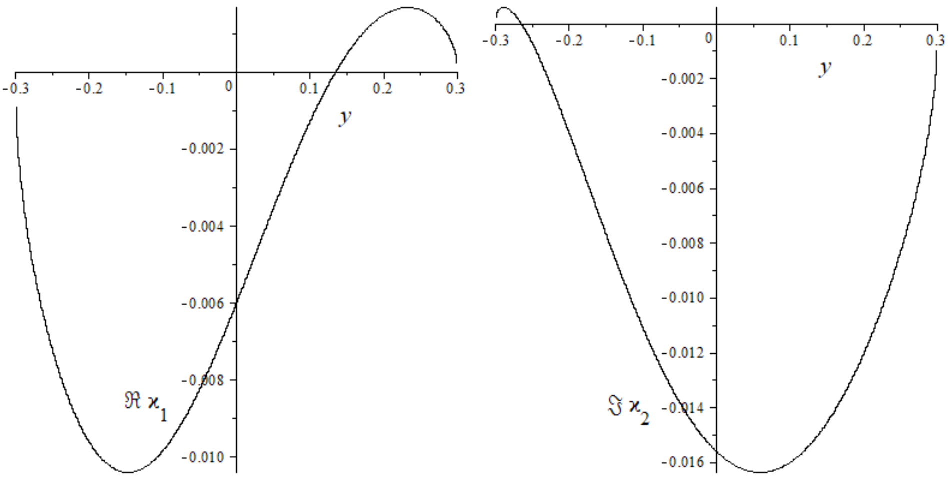



Рис 1.

Работа выполнена при поддержке РНФ (код проекта 18-11-00069).

**ЛИТЕРАТУРА**


1. Ватульян А.О., Явруян О.В. Асимптотический подход в задачах идентификации трещин // ПММ. 2006. №4. С.714-724.
2. Gravenkamp H., Birk C, Song Ch. Simulation of elastic guided waves interacting with defects in arbitrarily long structures using the Scaled Boundary Finite Element Method // J. Computational Physics. 2015. V.295(15). P. 438-455.
3. Glushkov, E.V., Glushkova, N.V., Golub, M.V. Zhang Ch. Resonance blocking of traveling waves by a system of cracks in an elastic layer // Acoust. Phys. (2009). V.55(1). P.8–16.
4. Ватульян А.О., Юров В.О. О свойствах дисперсионного множества для неоднородного цилиндрического волновода // Владикавк. мат. журн. 2018. Т. 20. Вып.1. С.50-60.
5. Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
6. *Кеч В., Теодореску П. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в* технике. М.: Мир, 1978. 518 с.
7. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М.: Наука, 1985. 253с.


**Сведения об авторах:**


**Ватульян Александр Ованесович** – зав. кафедрой теории упругости Института математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета 8(863)2 97 51 14; **E-mail:** vatulyan@math.rsu.ru

**Юров Виктор Олегович** – аспирант кафедры теории упругости Института математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета, 8(951)829 84 47; **E-mail:** vitja.jurov@yandex.ru

# ЗАДАЧА АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ ДЛЯ СОСТАВНОГО ЦИЛИНДРА С ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ В ВИДЕ СЕКТОРА

**Галпчян П.В.**

Антиплоская деформация составного цилиндра с поперечным сечением в виде кругового сектора, вызванная продольным сдвигом по направлению образующих, рассмотрена в [1,2]. В этих работах показано, что в случае, когда вызывающие деформацию касательные силы, действующие на цилиндрической поверхности $r = a$, составляют уравновешенную систему, а радиальные грани свободны, задача решается методом Фурье. Text of the annotation.

**1.** В цилиндрической системе координат $(r, \varphi, z)$ упругое тело занимает область $\theta \le r \le a$, $-\beta \le \varphi \le \alpha, -\infty < z < \infty$. Тело состоит из двух секториальных цилиндров, соединённых вдоль луча (плоскости) $\varphi = 0$. Величины, относящиеся к части $-\beta \le \varphi < 0$, будут обозначаться индексом (1), а к части $0 < \varphi \le \alpha$ – индексом (2).

Рассматривается задача антиплоской деформации $\bar{u} = (0, 0, w)$ при нагружении цилиндра по окружности касательными напряжениями $\sigma_{rz}$.

Уравнения равновесия для перемещений [1]

$$\frac{\partial^2 w_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w_i}{\partial E} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w_i}{\partial \varphi^2} = 0, \ i = 1, 2 . \tag{1.1}$$

В статье [2] рассматривалась аналогичная задача, когда грани $\varphi = \beta$ и $\varphi = \alpha$ свободны, либо нагружены. При этом необходимо было учесть условие равновесия для нагрузок на внешней поверхности цилиндра $r = a$. Здесь задача решается в случае, когда одна из граней (либо обе) закреплена, поэтому условие равновесия внешних нагрузок не требуется.

Пусть на гранях данное условие

$$\sigma_{\varphi z}^{(1)} = 0 \ \text{ при } \varphi = -\beta \ \text{ и } \ w_2 = 0 \ \text{ при } \varphi = \alpha . \tag{1.2}$$

На грани стыковки частей цилиндра должны быть удовлетворены условия непрерывности напряжений и перемещений:

$$w_1 = w_2, \ \ \sigma_{\varphi z}^{(1)} = \sigma_{\varphi z}^{(2)} . \tag{1.3}$$

Условие напряжения даётся в виде

$$\sigma_{rz}^{(1)} = f_1(\varphi), \ \sigma_{rz}^{(2)} = f_2(\varphi) \ \left( \sigma_{rz}^{(2)} = G_i \frac{\partial w_c}{\partial r}, \ \sigma_{\theta z}^{(1)} = G_i \frac{1}{r}\frac{\partial w_c}{\partial \theta} \right). \tag{1.4}$$

**2.** Решение уравнений (1.1) представляется следующим образом [3]:

$$w_i = (r, \varphi) = r^{\lambda} f_i(\varphi) . \tag{2.1}$$

Подстановка (2.1) в (1.1) приводит к решению обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$f_i'' + \lambda^2 f_i = 0 . \tag{2.2}$$

Решение дифференциального уравнения (2.2) при $i = 2$, удовлетворяющего граничному условию при $\varphi = \alpha$ из (1.2), получается в виде

$$f_2(y) = A_2 \sin \lambda (\alpha - \varphi) . \tag{2.3}$$

Решение дифференциального уравнения (2.2) при $i = 1$, удовлетворяющего граничному условию при $\varphi = -\beta$, есть:

$$f_1(y) = A_1 \cos \lambda (\beta + \varphi) . \tag{2.4}$$

В (2.3), (2.4) $A_2$, $A_1$ – произвольные постоянные.

Подстановка (2.1), с учётом (2.3), (2.4) в условия на стыке клиньев (1.3), приводит к следующей системе однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных $A_1, A_2$:

$$A_1 \cos\lambda\beta - A_2 \sin\lambda\alpha = 0,$$
$$A_1 G_1 \sin\lambda\beta - A_2 G_2 \cos\lambda\beta = 0. \qquad (2.5)$$

Из условия равенства нулю детерминанта системы уравнений (2.5) получается уравнение, определяющее собственное значение $(\lambda)$ задачи

$$\gamma^2 \sin^2\lambda\alpha - \cos^2\lambda\beta = 0, \quad \gamma^2 = G_1/G_2 . \qquad (2.6)$$

Уравнение (2.6), в свою очередь, разделяется на две автономные уравнения:

$$\gamma\sin\lambda\alpha + \cos\lambda\beta = 0, \quad \gamma\sin\lambda\alpha - \cos\lambda\beta = 0 , \qquad (2.7)$$

что означает наличие двух спектров собственных значений.

Из (2.7), в частном случае однородного клина с двумя закреплёнными гранями $(\gamma \to \infty,\ G_2 - 0)$ следует [3]

$$\sin\lambda\alpha = 0, \ \lambda_n = n\pi/\alpha, \ \lambda_1 < 1 \text{ при } \alpha > \pi , \qquad (2.8)$$

т.е. концентрация напряжения возможна для угла клина больше $\pi$.

В случае, когда одна грань закреплена, то другая получается свободно $(\gamma = 0,\ G_1 = 0)$

$$\cos\lambda\beta = 0, \ \lambda_n = (2n-1)\pi/(2\beta), \ \lambda_1 < 1 \text{ при } \beta > \pi/2 , \qquad (2.9)$$

т.е. концентрация напряжений получается при угле клина большего прямого угла.

Из (2.7) частный случай однородного клина с двумя свободными гранями не получается. Для этого случая известно [3], что

$$\sin\lambda\beta = 0, \ \lambda_n = n\pi/\beta, \ \lambda_1 < 1 \text{ при } \beta < \pi , \qquad (2.10)$$

т.е. получается результат, совпадающий с (2.8).

В другом частном случае $\beta = \alpha$ , первое уравнение из (2.7) приведён к виду

$$\mathrm{tg}\lambda\alpha = \gamma^{-1} \qquad (2.11)$$

для клина с углом раствора $2\alpha$.

Из (2.11) нетрудно определить минимальное собственное значение, удовлетворяющее условию $\lambda_1 < 1$

В частности, при $\gamma = \sqrt{3}$ получается

$2\alpha > \pi/3$ при $\gamma = 1 - 2\alpha > \pi/2$ (как и для варианта (2.9)), при $\gamma = 1/\sqrt{3} - 2\alpha > 2\pi/3$. Отсюда следует, что в условии (2.11) будет иметь место для углов $2\alpha \le 2\pi$ , удовлетворяющих условию

$$\mathrm{tg}\alpha > \gamma^{-1}. \qquad (2.12)$$

Обобщение условия (2.12) для произвольных углов $\alpha$ и $\beta$, удовлетворяющих условию $\alpha + \beta \le 2\pi$, согласно первому уравнению из (2.7), будет:

$$\gamma\sin\alpha > \cos\beta \qquad (2.13)$$

**3.** Пусть $\lambda_n$ и $\lambda_m$ – собственные значения, определяемые из уравнений (2.7), соответственно. Из первого уравнения системы (2.5) определяются постоянные $A_2$ через $A_1$:

$$A_{2n} = A_{1n}\frac{\cos\lambda_n\beta}{\sin\lambda_n\alpha}, \quad A_{2m} = A_{1m}\frac{\cos\lambda_m\beta}{\sin\lambda_m\alpha}, \quad n, m = 1, 2, ... \qquad (3.1)$$

С учётом (2.1), (2.3), (2.4) и (3.1) решение для искомых функций $w_i$ принимает вид:

$$w_1(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{1n} r^{\lambda_n} \cos\lambda_n(\beta+\varphi) + \sum_{m=1}^{\infty} A_{1m} r^{\lambda_m} \cos\lambda_n(\beta+\varphi)$$
$$w_2(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{1n} r^{\lambda_n} \frac{\cos\lambda_n\beta}{\sin\lambda_n\alpha}\sin\lambda_n(\alpha+\varphi) + \sum_{m=1}^{\infty} A_{1m} r^{\lambda_m} \frac{\cos\lambda_m\beta}{\sin\lambda_m\alpha}\sin\lambda_m(\alpha+\varphi) \qquad (3.2)$$

Заметив, что из уравнений (2.7) следует

$$\lambda_m = -\lambda_n , \qquad (3.3)$$

решение (3.2) можно записать в виде:

$$w_1(r,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_{1n}r^{\lambda_m}+B_n r^{-\lambda_n}\right)\cos\lambda_n(\beta+\varphi)$$
$$w_2(r,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_{1n}r^{\lambda_n}+B_n r^{-\lambda_n}\right)\frac{\cos\lambda_n\beta}{\sin\lambda_n\alpha}\sin\lambda_n(\alpha+\varphi) \qquad (3.4)$$

Произвольные постоянные $A_{1n}, B_n$ должны быть определены из условия нагружения составного сектора при $r=a$ (1.4). Для этого необходимо функции $f_1(\varphi),\ f_2(\varphi)$ предварительно разложить в ряд Фурье по системам ортогональных функций $\cos\lambda_n(\beta+\varphi),\ \sin\lambda_n(\alpha+\varphi)$, соответственно:

$$f_1(\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos\lambda_n(\beta+\varphi),\qquad f_2(\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\lambda_n(\alpha+\varphi). \qquad (3.5).$$

Подстановка (3.5), с учётом (1.4), приводит к следующей бесконечной системе последовательных алгебраических уравнений:

$$G_1\left(\lambda_n A_{1n}a^{\lambda_m-1}-\lambda_n B_n a^{-\lambda_n-1}\right)=a_n$$
$$G_2\left(\lambda_n A_{1n}a^{\lambda n-1}+\lambda_n B_n a^{-\lambda_n-1}\right)=b_n \qquad (3.6)$$

Из (3.7) следует:

$$A_{1n}=\frac{a^{-\lambda_n+1}}{2\lambda_n}\left(\frac{a_n}{G_1}+\frac{b_n}{G_2}\right),\quad B_n=\frac{a^{\lambda_n+1}}{2\lambda_n}\left(\frac{b_n}{G_2}-\frac{a_n}{G_1}\right). \qquad (3.7)$$

**Заключение.** Для задачи антиплоской деформации составного сектора получены условия появления особенностей в вершине.

Решение задачи найдено в рядах Фурье при произвольном нагружении дуги сектора.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Галпчян П.В. Доклады НАН Армении. 1999. Т.99. №1. С.22–27.
2. Галпчян П.В. Изв. РАН. МТТ. 2002. №2. С.68–76.
3. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872с.
4. Галпчян П.В. Напряженное состояние составного цилиндра с секторным поперечным сечением при действии касательных нагрузок. //Доклады НАН Армении. 2008. Т.108. №1. С.60–68.
5. Алексанян Р.К. Кручение призматического стержня с поперечным сечением в виде кругового кольца. //Изв. НАН Армении. Механика. 2017. Т.70. №3. С.20–25.



**Сведения об авторе:**

**Галпчян Перч Ваганович** – Институт механики НАН РА
(374 10) 28 63 98,     (374 93) 28 63 98

# ОТРАЖЕНИЕ ТЕПЛОВОЙ, ПРОДОЛЬНОЙ ИЛИ ПОПЕРЕЧНОЙ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ ОТ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

**Геворгян Г.З., Дарбинян А.З.**

**Введение.** Упруие плоские волны хорошо изучены учёными и инженерами из-за их практической применимости к таким дисциплинам, как сейсмология, акустика, геофизика, материаловедение и др. [1-4]. И в настоящее время упругие плоские волны привлекают внимание инженеров-строителей, геологов и геофизиков, заинтересованных в сейсмологических приложениях. Здесь рассматривается отражение тепловой, продольной или поперечной плоской волны от свободной поверхности упругого полупространства. Задача рассматривается в рамках связанной теории термоупругости при предположении, что зависимость температуры от упругих перемещений учитывается лишь в граничных условиях, и уравнение теплопроводности выписывается с учётом конечности скорости распространения тепла.

**Постановка задачи.** Пусть в полуплоскости распространяется под определённым углом плоская волна. Эта волна отражается от границы. Рассмотрим случаи, когда падающая волна является тепловой, продольной или поперечной и исследуем, какие волны отражаются.

Полуплоскость отнесём к прямоугольной декартовой системе координат $x_1Ox_2$. Ось $Ox_2$ направим вдоль границы, а ось $Ox_1$ – в глубь полуплоскости.

Предполагаем, что поверхность $x_1 = 0$ свободна от нормальных и касательных напряжений.

Уравнения движения в перемещениях с учётом температуры $T\left(x_1, x_2, t\right)$ и уравнение теплопроводности будут [5,6]:

$$\left(\lambda+\mu\right)\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)+\mu\Delta u_1-\left(3\lambda+2\mu\right)\alpha_t T=\rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2},$$

$$\left(\lambda+\mu\right)\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)+\mu\Delta u_2-\left(3\lambda+2\mu\right)\alpha_t T=\rho\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \tag{1}$$

$$\Delta T-\frac{1}{c_3^2}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}=0,$$

где $u_1$ и $u_2$ – компоненты перемещения, $\lambda, \mu$ – постоянные Ламе, $\alpha_t$ – коэффициент линейного расширения, $\rho$ – плотность материала полуплоскости, $c_3=\sqrt{\lambda_t/\left(\tau_r c_v\right)}$ – скорость распространения тепла, $\lambda_t$ – коэффициент теплопроводности, $c_v$ – объёмная теплоемкость, $\tau_r$ – время релаксации теплового потока, которое для металлов имеет величину $\tau_r = 10^{-11}$ сек. [6].

Из условий равенства нулю компонентов напряжения на поверхности $x_1 = 0$ имеем:

$$\sigma_{11}=\lambda\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)+2\mu\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-\left(3\lambda+2\mu\right)\alpha_t=0,$$

$$\sigma_{12}=\mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)=0. \tag{2}$$

К условиям равенства нулю нормального и касательного напряжений на поверхности упругого полупространства следует добавить граничное условие для температуры. Для получения последнего условия предполагается, что на поверхности полупространства имеется очень тонкий слой с отличными от основного тела упругими и тепловыми характеристиками. Предполагается, что коэффициент линейного расширения для слоя $\alpha_{tb}$ отличается от коэффициента $\alpha_t$ полуплоскости, а температура выписывается уравнение связанной теплопроводности $\frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2}+\frac{1}{c_3^2}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}-\eta\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial t}=0$ [6,7] и интегрируя по толщине слоя, получается граничное условие, связывающее температуру $T$ и перемещение $u_1$.

$\frac{\partial T}{\partial x_1}-\eta\frac{\partial u_1}{\partial t}=0$ ,по толщине изменяется слабо. Для этого слоя

(3)

где $\eta=\frac{3\lambda_1+2\mu_1}{\lambda_{t1}}\alpha_{tb}\delta T_0$, $\delta T_0$ – начальный перепад температуры [6].

Посредством скалярных потенциалов [5] $u_1=\frac{\partial\phi}{\partial x_1}+\frac{\partial\psi}{\partial x_2}$, $u_2=\frac{\partial\phi}{\partial x_2}-\frac{\partial\psi}{\partial x_1}$ – первые два уравнения (1) сводятся к уравнениям

$$\Delta\phi-\alpha_0 T=\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2},\quad \Delta\psi=\frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}, \tag{4}$$

где $c_1^2=\frac{\lambda+2\mu}{\rho}$, $c_2^2=\frac{\mu}{\rho}$, $\alpha_0=\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}\alpha_t$.

Граничные условия запишутся в виде

$$2\mu\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial {x_1}^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial x_2}\right)+\lambda\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial {x_1}^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial {x_2}^2}\right)-(3\lambda+2\mu)\alpha_t T(x_1,x_2,t)=0$$

$$2\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial {x_2}^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial {x_1}^2}=0 \qquad \text{при } x_1=0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_1}-\eta\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}+\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right)=0.$$

**Решение.** Решение уравнений (2) будем искать в виде гармоничных волн

$$\psi=Be^{i(\omega t+qx_1-k_2x_2)},\ T=De^{i(\omega t+k_1x_1-k_2x_2)},\ \phi=Ae^{i(\omega t+px_1-k_2x_2)}, \tag{6}$$

где $\omega$ – частота, а $k_1,k_2,p,q$ – волновые числа соответствующих волн.

Подставляя представления (6) в уравнения (4), получаем:

$$T=D_1e^{i(\omega t+k_1x_1-k_2x_2)}+D_2e^{i(\omega t-k_1x_1-k_2x_2)},\psi=B_1e^{i(\omega t+qx_1-k_2x_2)}+B_2e^{i(\omega t-qx_1-k_2x_2)}$$

$$\phi=A_1e^{i(\omega t+px_1-k_2x_2)}+A_2e^{i(\omega t-px_1-k_2x_2)}+\alpha_2\left(D_1e^{i(\omega t+k_1x_1-kx_2)}+D_2e^{i(\omega t-k_1x_1-kx_2)}\right), \tag{7}$$

где $q=\sqrt{\frac{\omega^2}{c_2^2}-k_2^2}$, $p=\sqrt{\frac{\omega^2}{c_1^2}-k_2^2}$ $\alpha_2=\frac{(3\lambda+2\mu)}{(\lambda+2\mu)\left(\frac{\omega^2}{c^2{}_1}-{k_1}^2-{k_2}^2\right)}\alpha_t$.

1. Рассмотрим сначала случай, когда падающая волна тепловая, поэтому учитываем две слагаемые $T(x_1,x_2,t)$, а в выражениях продольной и поперечной волн берём только отражённые слагаемые, т.е. $A_1=B_1=0$. Удовлетворяя граничным условиям (2) и (3), получим систему неоднородных уравнений относительно отношения коэффициентов: $A_2/D_1$, $B_2/D_1$, $D_2/D_1$

$$-2A_2/D_1pk+B_2/D_1\left(q^2-k_2^2\right)-2D_2/D_1\alpha_2k_1k_2=-2\alpha_2k_1k_2$$

$$A_2/D_1\left[p^2\left(2\mu+\lambda\right)+k_2^2\lambda\right]+2B_2/D_1\mu q+D_2/D_1\left[\alpha_2\left(k_1^2\left(2\mu+\lambda\right)+\lambda k_2^2\right)+\left(3\lambda+2\mu\right)\right]=$$

$$=-\left[\alpha_2\left(k_1^2\left(2\mu+\lambda\right)+\lambda k_2^2\right)+\left(3\lambda+2\mu\right)\right]$$

$$A_2 / D_1 p\eta\omega + B_2 / D_1 k_2\eta\omega + D_2 / D_1 k_1 \left(i + \alpha_2\eta\omega\right) = k_1\left(i + \alpha_2\eta\omega\right) \tag{8}$$

Главный определитель системы уравнений (8) будет:

$$\Delta = \omega\eta\left(q^2 + k_2^2\right)\left\{k_1\alpha_2\left[p^2\left(2\mu+\lambda\right) + k_2^2\lambda\right] - p\left[\alpha_2\left(k_1^2\left(2\mu+\lambda\right) + \lambda k_2^2\right) + \left(3\lambda + 2\mu\right)\right]\right\} + \\ +i\left\{\left[p^2\left(2\mu+\lambda\right) + k_2^2\lambda\right]\left(q^2 - k_2^2\right)k_1 + 4\mu pqk_1k_2^2\right\} \tag{9}$$

Вычислим определители

$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$

$$\Delta_1 = -2k_1\left[\alpha_2\left(k_1^2\left(2\mu+\lambda\right) + k_2^2\lambda\right) + \left(3\lambda+2\mu\right)\alpha_t\right]\left[\alpha_2\omega\eta\left(q^2+k_2^2\right) + i\left(q^2 - k_2^2\right)\right]$$

$$\Delta_2 = -2pk_2k_1 i\left[\alpha_2\left(k_1^2\left(2\mu+\lambda\right) + k_2^2\lambda\right) + \left(3\lambda+2\mu\right)\alpha_t\right] \tag{10}$$

$$\Delta_3 = k_1\left\{\omega\eta\left(q^2+k_2^2\right)\left[\alpha_2\left(p^2\left(2\mu+\lambda\right) + k_2^2\lambda\right)\right] + \right. \\ \left. + p\left[\alpha_2\left(k_1^2\left(2\mu+\lambda\right) + k_2^2\lambda\right) + \left(3\lambda+2\mu\right)\alpha_t\right]\right\} + i\left\{\left[p^2\left(2\mu+\lambda\right) + k_2^2\lambda\right]\left(q^2 - k_2^2\right) + 4\mu pqk_2^2\right\}$$

Рассмотрим частный случай, когда $k_2 = 0$, т.е. тепловая волна падает перпендикулярно к границе полуплоскости. Тогда

$$\Delta_1 = 2q^2k_1\left(i + \alpha_2\omega\eta\right)\left(\left(2\mu+\lambda\right)k_1^2\alpha_2 + \left(3\lambda+2\mu\right)\alpha_t\right)$$

$$\Delta_2 = 0 \tag{11}$$

$$\Delta_3 = -pq^2\left(\eta\left(2\mu+\lambda\right)\omega k_1^2\alpha_2 + p\left(2\mu+\lambda\right)k_1\left(i + \omega\eta\alpha_2\right) + \eta\left(2\mu+\lambda\right)\omega\alpha_t\right)$$

Как видно из этих формул при падении перпендикулярной к границе тепловой волны поперечная волна не отражается. А тепловая волна отражается при любых значениях параметров кроме

$$p = -\frac{\omega\alpha_2\eta k_1^2\lambda + 2\eta\omega\alpha_2k_1^2\mu + 3\omega\alpha_t\eta\lambda + 2\omega\alpha_t\eta\mu}{\left(\lambda+2\mu\right)k_1\left(i + \eta\omega\alpha_2\right)}. \tag{12}$$

2. При падении поперечной волны, полагая $A_1 = D_1 = 0$ в (7), получим

$$\psi = B_1e^{i(\omega t + qx_1 - k_2x_2)} + B_2e^{i(\omega t - qx_1 - k_2x_2)},\ T = D_2e^{i(\omega t - k_1x_1 - k_2x_2)}, \phi = A_2e^{i(\omega t + px_1 - k_2x_2)} + D_2\alpha_2e^{i(\omega t - k_1x_1 - k_2x_2)}$$

Удовлетворяя граничным условиям (2) и (3), получим систему неоднородных уравнений относительно коэффициентов: $A_2 / B_1,\ B_2 / B_1,\ D_2 / B_1$.

В правой части будет вектор-столбец

$$\left(2\mu qk_2,\ \left(q^2 - k_2^2\right),\ k_2\omega\eta\right)^T. \tag{13}$$

Главный определитель не изменится, а остальные будут:

$$\Delta_1 = -4q\mu k_1k_2\left(k_2^2\left(-i + \eta\omega\alpha_2\right) + q^2\left(i + \eta\omega\alpha_2\right)\right)$$

$$\Delta_2 = -p\eta\left(\lambda+2\mu\right)\omega k_1^2\left(q^2 + k_2^2\right)\alpha_2 + \\ + k_1^2\begin{pmatrix}\lambda k_2^4\left(-i + \eta\omega\alpha_2\right) + p^2q^2\left(\lambda+2\mu\right)\left(i + \eta\omega\alpha_2\right) + \\ + k_2^2\left(-i\left(-q^2\lambda + 4pq\mu + p^2\left(\lambda+2\mu\right)\right) + \eta\left(q^2\lambda + p^2\left(\lambda+2\mu\right)\right)\omega\alpha_2\right)\end{pmatrix} - \\ - p\omega\eta\left(\lambda+2\mu\right)\left(\lambda\alpha_2k_2^2\right)\left(3\lambda+2\mu\right)\alpha_t \tag{14}$$

$$\Delta_3 = 4pq\eta\mu\omega k_2\left(q^2 + k_2^2\right)$$

Рассмотрим частный случай, когда $k_2 = 0$, т.е. поперечная волна падает перпендикулярно к границе полуплоскости. Тогда получим:

$$\Delta_1 = 0$$

$$\Delta_2 = pq^2\left(p(\lambda+2\mu)k_1(i+\eta\omega\alpha_2) - \eta\omega\left((\lambda+2\mu)k_1^2\alpha_2 + (3\lambda+2\mu)\alpha_t\right)\right) \quad (15)$$

$$\Delta_3 = 0.$$

Как видно из этих формул, при отражении поперечной волны тепловая и продольные волны не отражаются. А поперечная волна отражается при любых значениях параметров кроме $p = \dfrac{\omega\alpha_2\eta k_1^2\lambda + 2\eta\omega\alpha_2 k_1^2\mu + 3\omega\alpha_t\eta\lambda + 2\omega\alpha_t\eta\mu}{(\lambda+2\mu)k_1(i+\eta\omega\alpha_2)}$.

3. При отражении продольной волны в решении уравнений (4), полагая $B_1 = D_1 = 0$ в (7), получим

$$\phi = A_1 e^{i(\omega t + px_1 - k_2x_2)} + A_2 e^{i(\omega t - px_1 - k_2x_2)} + D_2\alpha_2 e^{i(\omega t - k_1x_1 - k_2x_2)}$$

$$T = D_2 e^{i(\omega t - k_1x_1 - k_2x_2)} \quad (16)$$

$$\psi = B_2 e^{i(\omega t - qx_1 - k_2x_2)},$$

Удовлетворяя граничным условиям (2) и (3), получим систему неоднородных уравнений относительно коэффициентов $A_2/A_1,\ B_2/A_1,\ D_2/A_1$. В правой части будет вектор столбец

$$\left(-\left(p^2(2\mu+\lambda) + \lambda k_2^2\right),\ 2pk_2,\ \eta\omega p\right)^T \quad (17)$$

Главный детерминант не изменяется, а все остальные будут:

$$\Delta_1 = p\eta(\lambda+2\mu)\omega k_1^2\left(q^2+k_2^2\right)\alpha_2 + k_1\left[\lambda k_2^4(-i+\eta\omega\alpha_2) + p^2q^2(\lambda+2\mu)(i+\eta\omega\alpha_2) +\right.$$

$$\left. +k_2^2\left(-i\left(-q^2\lambda + 4pq\mu + p^2(\lambda+2\mu)\right) + \eta\left(q^2\lambda + p^2(\lambda+2\mu)\right)\omega\alpha_2\right)\right] +$$

$$+p\eta\omega\left(q^2+k_2^2\right)\left(\lambda k_2^2\alpha_2 + (3\lambda+2\mu)\alpha_t\right)$$

$$\Delta_2 = 4ipk_1k_2\left(p^2(\lambda+2\mu) + \lambda k_2^2\right) \quad (18)$$

$$\Delta_3 = -2p\eta\omega\left(q^2+k_2^2\right)\left(p^2(\lambda+2\mu) + \lambda k_2^2\right)$$

Рассмотрим частный случай, когда $k_2 = 0$, т.е. продольная волна падает перпендикулярно к границе полуплоскости. Тогда получим:

$$\Delta_1 = -pq^2\left(-p(\lambda+2\mu)k_1(i+\eta\omega\alpha_2) - \eta\omega\left((\lambda+2\mu)k_1^2\alpha_2 + (3\lambda+2\mu)\alpha_t\right)\right)$$

$$\Delta_2 = 0 \quad (19)$$

$$\Delta_3 = -2p^3q^2\eta(\lambda+2\mu)\omega.$$

Как видно из этих формул, при отражении продольной волны поперечная волна не отражается. А продольная волна отражается при любых значениях параметров кроме $p = \dfrac{\omega\alpha_2\eta k_1^2\lambda + 2\eta\omega\alpha_2 k_1^2\mu + 3\omega\alpha_t\eta\lambda + 2\omega\alpha_t\eta\mu}{(\lambda+2\mu)k_1(i+\eta\omega\alpha_2)}$

А тепловая волна отражается при любых значениях параметров.

**Заключение.** В общем случае при падении под углом к границе тепловой, продольной или поперечной волны отражаются все три плоские волны.

В частном случае при падении плоской волны перпендикулярно к границе полуплоскости получаем:

при падении тепловой волны поперечная волна не отражается. А тепловая волна отражается при любых значениях параметров кроме одного значения параметра. Продольная волна отражается при любых значениях параметров;

при падении поперечной волны тепловая и продольные волны не отражаются. А поперечная волна отражается при любых значениях параметров кроме одного значения параметра;

при падении продольной волны поперечная волна не отражается. А продольная волна отражается при любых значениях параметров кроме одного значения параметра. Тепловая волна отражается при любых значениях параметров.

Авторы выражают благодарность проф. М.В. Белубекяну за постановку задачи и ценные советы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. L.Rayleigh, On waves propagating along the plane surface of an elastic solid. Proc. R. Soc. London. A17 (1885) 4-11.
2. J.D.Achenbach, Wave Propagation in Elastic Solids. North- Holland, Amsterdam, 1973, 465p.
3. J.G.Harris, Linear Elastic Waves, Cambridge, New-York, 2001, 162p.
4. X.-F. Li On approximate analytic expressions for the velocity of Rayleigh waves. Wave Motion 44 (2006) 120-127.
5. В.Новацкий. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872с.
6. Лыков А.В. Тепломассобмен. М.: Энергия, 1971. 309с.
7. Белубекян М.В. Поверхностные волны в упругих средах. Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Ереван-1997. С.79-96.
8. Eduardo Goday, Mario Duran, Jean-Claude Nedelec. On the existence of surface waves in on elastic half-space with impedance boundary conditions. Wave Motion 49(2012)585-594

**Сведения об авторах:**

**Геворгян Гнун Завенович –** К.ф.-м.н., в.н.с. Института механики НАН Армении
**E-mail:** gnungev2002@yahoo.com, gnungev@gmail.com

**Дарбинян –** К.ф.-м.н., с.н.с. Института механики НАН Армении
**E-mail:** darbinyan_1954@mail.ru

# АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧНОСТИ УПРУГИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ШАТУНА В ПРОЦЕССЕ ДВИЖЕНИЯ КРИВОШИПНО-ПОЛЗУННОГО МЕХАНИЗМА БЕЗ УЧЁТА ДИССИПАТИВНЫХ СИЛ

**Геворкян Г.А.**

Из периодического характера движения реального механизма не следует ли периодичность всех динамических характеристик механизма в процессе такого движения, в том числе, и упругих перемещений составляющих его звеньев? Сформулированный вопрос охватывает сложнейшую проблематику динамики упруго-деформируемого тела; однако, как следует признать, доселе ни в одной из публикаций, посвящённых исследованию механизмов с упругими звеньями, ничего не говорилось о периодичности упругих перемещений звеньев при движении механизмов по периодическим законам без учёта диссипативных сил. В предлагаемом материале на примере исследования периодического движения кривошипно-ползунного механизма устанавливается периодичность упругих перемещений шатуна.

**1. Введение.** В последние десятилетия уделяется особое внимание изучению деформаций исполнительных звеньев реальных механизмов. Одним из самых распространённых в технике механизмов является кривошипно-ползунный механизм, поэтому и наибольшее внимание исследователей явления упругости звеньев исполнительных механизмов в научной литературе отводится именно этому виду механизмов [1 – 4].

Несмотря на наличие ряда хорошо согласующихся численных результатов в авторитетных источниках, воспроизведящих функцию упругого перемещения шатуна во времени, нигде не указывается периодический характер изменения этой функции во времени при отсутствии диссипативных сил. В предлагаемом материале обосновывается периодичность, точнее *псевдопериодичность*, изменения функции упругого перемещения шатуна во времени, причём, как выясняется, период псевдоколебаний этой функции может существенно отличаться от периода обращения самого механизма.

**2. Традиционная формулировка задачи.** Как известно, процесс динамического анализа упругих древовидных динамических систем (рис.1) сводится к численному решению системы нелинейных дифференциальных уравнений [1]:

$$f_i(\vec{x},\dot{\vec{x}},\ddot{\vec{x}},\vec{\lambda},t)=0,\quad i=1,...,p,\quad p=\sum_{j=1}^{n}N_j+n\,, \tag{1}$$

где n – число обобщённых координат, а $N_j$ – число упругих степеней свободы звена $C_j$, связанного с предыдущим $C_{j-1}$ и последующим $C_{j+1}$ звеньями посредством одноподвижных кинематических пар V класса, совместно с алгебраическими уравнениями голономных связей

$$g_i(\vec{x},t)=0,\quad i=1,...,m \tag{2}$$

относительно обобщённого вектор-аргумента

$$\vec{x}=[\vec{x}_1^T,\vec{x}_2^T,...,\vec{x}_n^T]^T,\quad \text{где}\quad \vec{x}_i=[q_i^r,(\vec{q}_i^e)^T]^T,\quad \vec{q}_i^e=[q_{i,1}^e,q_{i,2}^e,...,q_{i,N_i}^e]^T,$$

где символы *r* и *e* выражают сокращения от слов *rigid* (жёсткий) и *elastic* (упругий), и вектора неопределённых множителей Лагранжа

$$\vec{\lambda}=[\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m]^T.$$

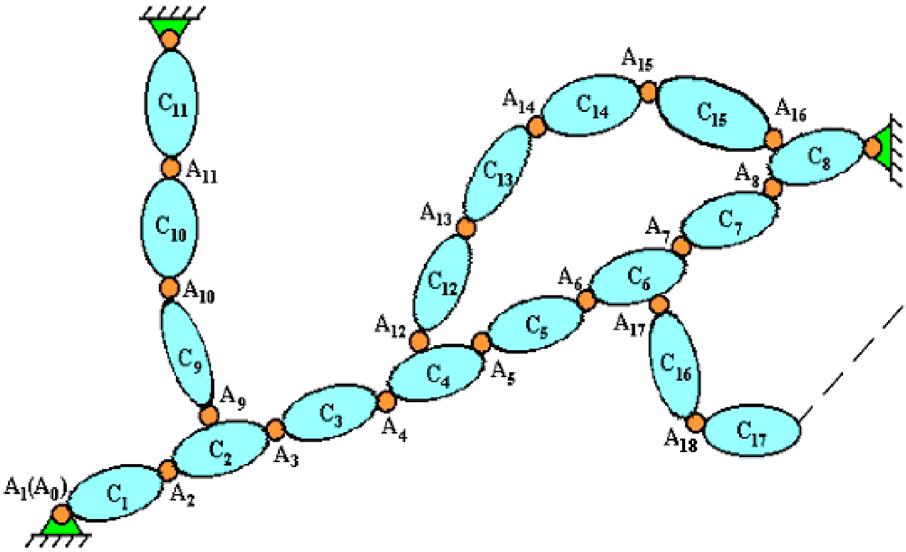



Рис. 1. Схема древовидной динамической системы с замкнутыми цепями

Число m в уравнениях связей (2) выражает количество голономных ограничений, налагаемых на относительное движение звеньев, изображенной на рис.1 упругой динамической системы, состоящей из n линейно-упругих звеньев, связанных между собой вращательными или поступательными узлами [1].

**3. Смешанная задача динамики упругих механизмов.** Линеаризованная для момента времени $t \in [0,T]$ задача, аппроксимирующая систему нелинейных дифференциальных уравнений (1) при склерономных внешних связях (2), предполагает для каждого фиксированного момента времени t решение системы $p+m$ линейных алгебраических уравнений с таким же числом искомых неизвестных [1]:

$$\begin{cases} F_i(\ddot{\vec{x}},\vec{\lambda}) = 0, \quad i = 1,\dots,p, \quad p = \sum\limits_{j=1}^{n} N_j + n, \\ \ddot{g}_k(\ddot{\vec{x}}) = 0, \quad k = 1,\dots,m, \end{cases} \tag{3}$$

где m символизирует количество дополнительных связей, налагаемых на всю древовидную динамическую систему в целом, или, в матричной форме [7]

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{rr} & \mathbf{0}_{n\times(H-n)} & \mathbf{M}_{r\lambda} \\ \mathbf{M}_{er} & \mathbf{M}_{ee} & \mathbf{M}_{e\lambda} \\ \mathbf{M}_{\lambda r} & \mathbf{M}_{\lambda e} & \mathbf{0}_{m\times m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\vec{\mathbf{Q}}}^{r} \\ \ddot{\vec{\mathbf{Q}}}^{e} \\ \vec{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{\Gamma}} + \vec{\mathbf{E}}_r \\ \vec{\mathbf{E}}_e \\ \vec{\mathbf{E}}_\lambda \end{bmatrix}. \tag{3'}$$

После исключения из системы (3’) ускорений упругих переменных формулируется численное решение *смешанной задачи динамики* [5, 6] упругих многозвенных древовидных систем с внешними голономными связями следующим образом [7]:

$$\begin{gathered} \vec{\mathbf{X}} = \mathbf{R}^{-1} \cdot \vec{\mathbf{E}}, \\ \mathbf{Dim(R)} = (n+m)\times(n+m); \quad \mathbf{Dim}(\vec{\mathbf{X}}) = \mathbf{Dim}(\vec{\mathbf{E}}) = n+m. \end{gathered} \tag{4}$$

**4. Численная реализация смешанной задачи динамики упругих механизмов.** Рассмотрим численное решение смешанной задачи динамики упругих механизмов с внешними голономными связями на примере динамического моделирования кривошипно-ползунного механизма с жёстким кривошипом $A_3A_4$ и упругим шатуном $A_2A_3$ без учёта диссипативных сил (рис.2).

Принимая во внимание следующие геометрические и физико-механические характеристики звеньев: $r_i = 3.0 \cdot 10^{-3}$ м, $i = 2,3$; $l_2 = 0.35$ м, $l_3 = 0.15$ м; $m_1 = 0.1$ кг; $\rho_2 = \rho_3 = 7800$ кг/м$^3$; $E_2 = 200$ МПа, а также учитывая начальные условия движения механизма в обобщённых координатах и их скоростях $q_1^r(0) = 0, q_2^r(0) = 0.432$ рад, $q_3^r(0) = -1.787$ рад; $\dot q_1^r(0) = 80 l_3$, $\dot q_i^r(0) = 0, i = 2,3$ и в упругой переменной и её скорости $q_2^e(0) = \dot q_2^e(0) = 0$ при $N_2 = 1$, производится тест функционирования механизма в интервале $t \in [0;\, 1.0$ с$]$ с заданным законом движения ползуна [1]:

$$q_1^r(t) = 0.8 l_3 \sin 100t \tag{5}$$

при наличии стационарных геометрических связей

$$\begin{cases} (0.35 - q_1^r)\sin(q_2^r + q_3^r) - l_2 \sin q_3^r = 0, \\ l_3 \sin(q_2^r + q_3^r) + l_2 \sin q_2^r = 0. \end{cases} \tag{6}$$

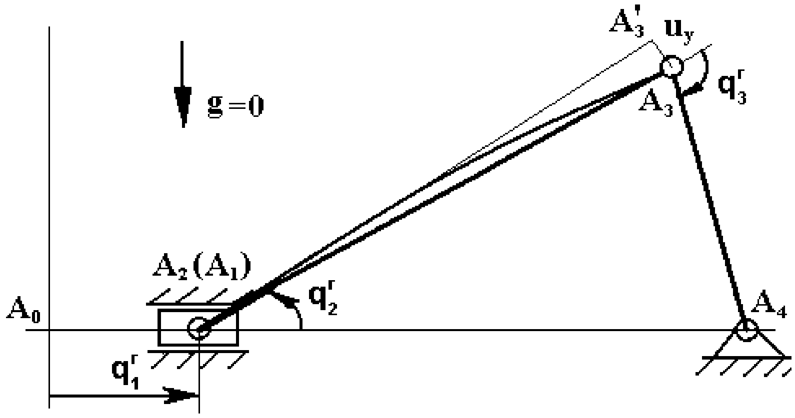



Рис. 2. Кривошипно-ползунный механизм с упругим шатуном

На рис.3 приводится *псевдопериодическая функция упругого перемещения* концевой точки шатуна $u_2(A_3)$ во времени, выработанная в течение 13.5 циклов обращения кривошипно-ползунного механизма.

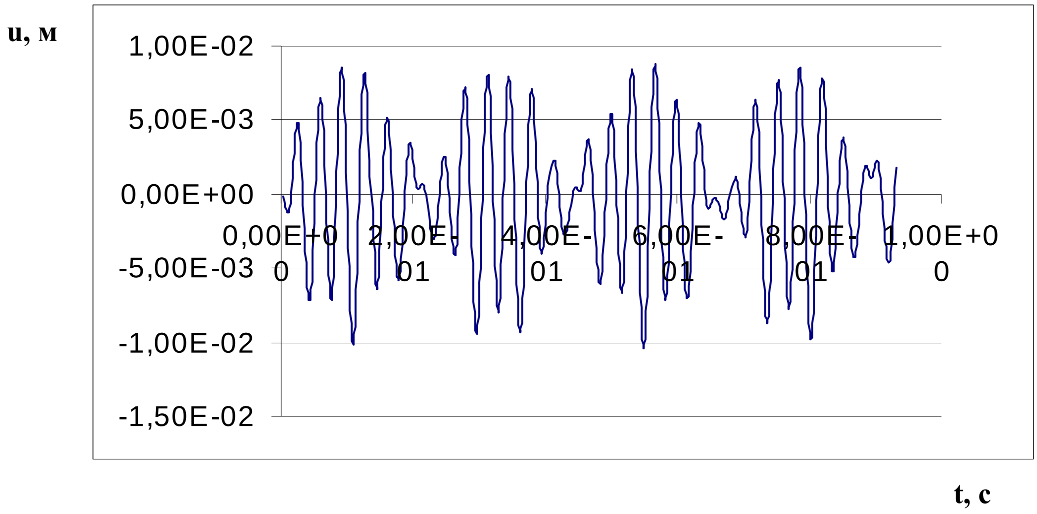



Рис.3. Псевдопериодическая функция упругих перемещений шатуна

**5. Заключение.** По глубокому убеждению автора, полученный результат имеет важное значение не только в теории упругих динамических систем, но и для науки, в целом. В самом деле, представленная псевдопериодическая картина изменения упругих перемещений во времени при отсутствии диссипативных сил служит не только подтверждением корректности воспроизведения движения исследуемого механизма, но и выступает своего рода свидетельством справедливости, выдвинутой в XVII в. Лейбницем концепции *предустановленной гармонии* в природе вещей.

**ЛИТЕРАТУРА**


1. **Gofron M. and Shabana A.A.** Control structure interaction in the nonlinear analysis of flexible mechanical systems // International Journal of Nonlinear Dynamics. 1993. V.4. P. 183 – 206.
2. **Pascal M. and Gagarina T.** A Pseudo-Rigid Model for the Dynamical Simulation of Flexible Mechanisms // Multibody System Dynamics, 1999. V.4. P. 303 – 331.
3. **Azouz N.** Modelisation des sructures souples polyarticulees. Application a la simulation des robots: Doctoral Thesis of the University of Paris 6. 1994. 152 p.
4. **Verlinden O.** Simulation du comportement dynamique de systemes multicorps flexibles comportant des membrures de forme complexe: Doctoral Thesis of the Polytechnic Faculty of Mons. 1994. 222 p.
5. **Саркисян Ю.Л., Степанян К.Г., Азуз Н., Геворкян Г.А.** Динамический анализ упругих манипуляторов обобщённым методом Ньютона-Эйлера // Известия НАН РА и ГИУА. Сер.Т.Н. 2004. Т. 57, №1. С. 3 – 10.
6. **Саркисян Ю.Л., Степанян К.Г., Геворкян Г.А.** Динамический анализ упругих древовидных механических систем без внешних связей // Известия НАН РА и ГИУА. Сер.техн.наук. 2006. Т.59. №1. С. 3 – 9.
7. **Геворкян Г.А.** Динамический анализ упругих древовидных механических систем в присутствии внешних голономных связей // Information Technologies and Management. – Encyclopedia-Armenica. 2004. №4. С. 36 – 43.


**Сведения об авторе:**


**Геворкян Грант Араратович** – к.т.н., научный сотрудник Института механики НАН Армении; **Тел.:** (010) 53-03-64, (099) 39-03-01; **E-mail:** **hrgevorkian@mail.ru**.

# О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ДВУХ ОДИНАКОВЫХ СТРИНГЕРОВ С СИСТЕМОЙ ТРЕЩИН В УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ПРИ АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

**Григорян М.С.**

При антиплоской деформации рассматривается задача о взаимодействии двух одинаковых стрингеров, симметрически расположенных относительно начала координат на границе упругого полупространства с системой коллинеарных вертикальных трещин в полупространстве.

**1. Введение.** Исследования вопросов взаимодействия концентраторов напряжений типа штампов, стрингеров, тонкостенных включений, трещин с массивными деформируемыми телами различных геометрических форм представляет теоретический и практический интерес. Результаты этих исследований имеют важные приложения в механике композитов, в строительной механике, в геомеханике, в расчётах прочности строительных, машиностроительных, в частности, авиационных, конструкций и в других отраслях прикладной механики. Поэтому в научной литературе появилось многочисленные работы по исследованию вопросов взаимодействия концентраторов напряжений указанных типов с массивным деформируемыми телами. В этом направлении здесь укажем на работы [1-3], посвящённые вопросам взаимодействия стрингеров и трещин с массивными упругими телами. В [4-8] развито направление контактного взаимодействия тонкостенных элементов в виде стрингеров с упругими телами различных канонических форм.

В настоящей работе, дополняя результаты работы [9], рассматривается задача о контактном взаимодействии двух одинаковых симметрически расположенных и симметрически нагружённых стрингеров с упругим полупространством, содержащим систему вертикальных коллинеарных трещин, при антиплоской деформации. Предварительно при антиплоской деформации рассматривается контакт двух одинаковых абсолютно жёстких стрингеров со сплошным упругим полупространством. Далее при помощи логарифмического потенциала простого слоя показывается, что при приближении ближних концов стрингеров друг к другу разрушающие касательные напряжения в вертикальной плоскости симметрии полупространства на его границе бесконечно возрастают, принимая при этом и значение предела хрупкого разрушения для данного материала. В результате происходит вертикальное растрескивание упругого полупространства и появление в нём вертикальных трещин. Этим обосновывается постановка задачи о необходимости учёта наличия вертикальных трещин в упругом полупространстве, подверженного контактному воздействию двух одинаковых стрингеров. В конечном итоге решение поставленной задачи сводится к решению системы сингулярных интегральных уравнений (СИУ) из двух уравнений, решение которой строится известным численно-аналитическим методом решения СИУ [10-12]. После решения определяющей системы СИУ определяются все характеристики рассматриваемой задачи.

**2. Контакт двух одинаковых абсолютно жёстких стрингеров с упругим полупространством при антиплоской деформации**. Пусть отнесённое к правой прямоугольной системе координат $Oxyz$ упругое полупространство $x \geq 0$ с модулем сдвига $G$ на своей граничной плоскости $x \leq 0$ усилено двумя абсолютно жёсткими стрингерами в виде бесконечных в направлении оси $Oz$ двумя полосами-ленточками $\omega_- = \{x=0;\ -d \leq y \leq -c; -\infty < z < \infty\}$ и $\omega_+ = \{x=0;\ c \leq y \leq d; -\infty < z < \infty\}$ одинаковых ширин $d-c$. Пусть далее вдоль срединных линий $y = \pm(c+d)/2$ верхних граней этих полос действуют одинаковые по величине и противоположные по направлению равномерно распределённые, т.е. не зависящие от $z$, касательные силы интенсивности $Q$. Под действием этих сил система стрингеры-полупространство будет находиться в состоянии антиплоской деформации (продольного сдвига) в направлении оси $Oz$ с базовой плоскостью $Oxy$. Требуется определить действующие под стрингерами касательные контактные напряжения $\tau_{xz}\big|_{x=+0} = -\tau(y)$ $\left(c < |y| < d;\ \tau(-y) = -\tau(y)\right)$.

Определение функций $\tau(y)$ сведём к решению интегрального уравнения (ИУ). С этой целью заметим, что при описанной антиплоской деформации единственной отличной от нуля компонентой будут перемещения в направлении оси $Oz$ $u_z = u_z(x,y)$, причём, функция $u_z(x,y)$ в полуплоскости $x > 0$ является гармонической функцией. Поэтому эта функция может быть представлена в виде логарифмического потенциала простого слоя на системе отрезков $l = [-d, -c] \cup [c, d]$ с плотностью источников $\tau(y)/\pi G$:

$$u_z(x,y) = \frac{1}{\pi G}\int_l \ln\frac{1}{\sqrt{(y-s)^2 + x^2}}\tau(s)\,ds \qquad (x > 0,\ -\infty < y < \infty). \tag{1}$$

Так как $u_z(x,y)\big|_{x=+0} = \delta\,\mathrm{sign}\,y \quad (y \in l)$, где $\delta$ – мера абсолютно жёсткого перемещения абсолютного жёстких стрингеров, то при помощи (1) для определения искомой функции $\tau(y)$ получим следующее ИУ Фредгольма первого рода:

$$\frac{1}{\pi G}\int_c^d \ln\frac{y+s}{|y-s|}\tau(s)\,ds = \delta \qquad (c < y < d), \tag{2}$$

совпадающее, по существу, с ИУ из [13]. Приняв во внимание свойство нечётности функций $\tau(y)$, это ИУ можно преобразовать на $l$. ИУ (2) обладает решением [13]

$$\tau(y) = d\delta G\Big/K\sqrt{(d^2 - y^2)(y^2 - c^2)} \qquad (c < y < d), \tag{3}$$

где $K = K(k)$ $(k = c/d)$ – полный эллиптический интеграл первого модуля $k$. Далее подставляя (3) в условие равновесия первого стрингера

$$\int_c^d \tau(y)\,dy = Q,$$

установим зависимость между жёстким перемещением правого стрингера $\delta$ и действующей на него силой $Q$: $\delta = (Q/G)(K/K')$ $\left(K' = K(k'),\ k' = \sqrt{1-k^2}\right)$. Тогда при помощи (3)

$$\tau(y) = Qd\Big/K'\sqrt{(d^2 - y^2)(y^2 - c^2)} \qquad (c < y < d). \tag{4}$$

Так как гармоническая функция достигает своего максимума на границе области, то из (1) будем иметь:

$$\max\tau_{yz}\big|_{y=0} = \max\tau_{yz}\big|_{\substack{x=0\\y=0}} = G\frac{\partial u_z}{\partial y}\bigg|_{\substack{x=0\\y=0}} = \frac{1}{\pi}\int_c^d \frac{\tau(s)\,ds}{s} = K_\tau.$$

Следовательно, хрупкое разрушение упругой полуплоскости $x > 0$ происходит по её вертикальной оси симметрии при условии $K_\tau \geq \sigma_b$, где $\sigma_b$ – предел хрупкого разрушения материала полуплоскости. В процессе возможного хрупкого разрушения в упругой полуплоскости образуется краевая трещина. Подставляя сюда выражения (4), придём к условию

$$\frac{Qd}{\pi K'}\int_c^d \frac{ds}{\sqrt{(d^2 - s^2)(s^2 - c^2)}} \geq \sigma_b.$$

После вычисления интеграла [13], будем иметь:

$$kK(k') \leq 2\sigma; \quad \sigma = 4Q/d\sigma_b. \tag{5}$$

При малых $k$, т.е. при малых $c$, соотношение (5) заведомо выполняется [13].

**3. Постановка задачи и вывод основных уравнений.** Пусть теперь описанное выше упругое полупространство $x \geq 0$ с модулем упругости $G$ на своей граничной плоскости $x = 0$ усилено двумя одинаковыми и относительно оси $Oz$ симметрично расположенными упругими стрингерами $\omega_\pm$ с одинаковыми модулями сдвига $G_1$ и высот $h_1$. Предполижим, что эти стрингеры на своих верхних гранях $x=-h_1$ нагружены симметрически, т.е. на этих гранях действуют одинаковые по величине но противоположные по направлению касательные равномерно распределённые по оси $Oz$ силы интенсивности $\tau_+(y)$ $(c<|y|<d;\ \tau_+(-y)=-\tau_+(y))$. Кроме того, предположим, что боковые сечения $y=\pm c,\ y=\pm d$ стрингеров $\omega_\pm$ также нагружены симметрически и вдоль их срединных линий действуют равномерно распределённые по оси $Oz$ касательные сосредоточенные силы, соответственно, интенсивностей $T_c$ и $T_d$. Далее упругое полупространство $x\geq 0$ в своей вертикальной плоскости симметрии $y=0$ содержит произвольное конечное число $n$ сквозных туннельных трещин $\omega_k=\{a_k\leq x\leq b_k;\ y=0;\ -\infty<z<\infty\}$ $(k=\overline{1,n})$. Берега этих трещин также нагружены симметрически касательными силами интенсивности $\tau_0(x)$. При этих предположениях система стрингеры-трещины-упругое полупространство будет находиться в условиях антиплоской деформации с базовой плоскостью $Oxy$. В этой плоскости введём полярную систему координат $r,\vartheta$, направляя полярную ось $Or$ по оси $Ox$ и помещая полюс в начале координат $O$. Тогда описанная задача математически сформулируется в виде следующей смешанной граничной задачи для четверть-плоскости $\Omega=\{0\leq r<\infty;\ 0\leq\vartheta\leq\pi/2\}$:

$$\begin{cases}\Delta u_z=\dfrac{\partial^2 u_z}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_z}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u_z}{\partial\vartheta^2}=0 & (0<r<\infty;\ 0<\vartheta<\pi/2)\\ \tau_{\vartheta z}\big|_{\vartheta=+0}=\dfrac{G}{r}\dfrac{\partial u_z}{\partial\vartheta}\bigg|_{\vartheta=+0}=-T(r);\quad \tau_{\vartheta z}\big|_{\vartheta=\pi/2-0}=-h(r) & (0<r<\infty)\end{cases}\tag{6}$$

Здесь

$$T(r)=\begin{cases}\tau_0(r)\ (r\in L);\\ \tau(r)\ (r\in L'=[0,\infty)\setminus L);\end{cases}\qquad h(r)=\begin{cases}\tau_-(r)\ (c<r<d)\\ 0\quad r\in[0,\infty)\setminus(c,d);\end{cases}$$

где $\tau(r)$ – разрушающие касательные напряжения вне системы трещин $L=\bigcup\limits_{k=1}^{n}[a_k,b_k]$ на луче $\vartheta=0$ а $\tau_-(r)$ – действующие под стрингерами неизвестные пока касательные контактные напряжения. Требуется определить плотность дислокаций на берегах системы трещин $2\varphi(r)=2\partial u_z(r,\vartheta)/\partial r$ при $\vartheta=+0$ и функцию $\tau_-(r)$.

Решение граничной задачи решается методом интегрального преобразования Меллина [9,14]. Из результатов работы [14], в частности, получим:

$$\begin{gathered}T(r)=-\frac{2G}{\pi}\int_L\frac{r_0\varphi(r_0)\,dr_0}{r_0^2-r^2}+\frac{2}{\pi}\int_c^d\frac{r_0\tau_-(r_0)\,dr_0}{r_0^2+r^2}\quad(0<r<\infty)\\ \frac{du_z(r,\pi/2)}{dr}=\frac{2}{\pi}\int_L\frac{r_0\varphi(r_0)\,dr_0}{r_0^2+r^2}-\frac{2}{\pi G}\int_c^d\frac{r_0\tau_-(r_0)\,dr_0}{r_0^2-r^2}\end{gathered}\tag{7}$$

Обращаясь к стрингерам, запишем их дифференциальное уравнение деформирования [14]:

$$h_1G_1\frac{d^2w_1}{dr^2}=\tau_-(r)-\tau_+(r)\quad(c<r<d),\tag{8}$$

где $w_1=w_1(r)$ – перемещения точек стрингеров по оси $Oz$. Из (8) получим:

$$\frac{dw_1}{dr}=\frac{1}{2h_1G_1}\left\{T_c+T_d+\int_c^d\operatorname{sign}(r-r_0)\left[\tau_-(r_0)-\tau_+(r_0)\right]dr_0\right\}.\quad(c\leq r=y\leq d).\tag{9}$$

При этом, имеет место условие равновесия каждого стрингера:

$$\int_c^d \tau_-(r_0)\,dr_0 = T_d - T_c + T_+;\quad T_+ = \int_c^d \tau_+(r_0)\,dr_0. \tag{10}$$

Теперь запишем условие контакта стрингеров с упругой полуплоскостью и условие на системе трещин $L$:

$$\frac{du_z(r,\pi/2)}{dr} = \frac{dw_1}{dr}\quad (c<r<d);\qquad T(r)=\tau_0(r)\quad (r\in L).$$

При помощи (7) и (9), реализуя эти условия, относительно неизвестных функций $\varphi(r)$ и $\tau_0(r)$ придём к следующей системе СИУ:

$$\begin{cases} -\dfrac{2G}{\pi}\displaystyle\int_L \frac{r_0\varphi(r_0)\,dr_0}{r_0^2-r^2} + \frac{2}{\pi}\int_c^d \frac{r_0\tau_-(r_0)\,dr_0}{r_0^2+r^2} = \tau_0(r) \quad (r\in L) \\ \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_L \frac{r_0\varphi(r_0)\,dr_0}{r_0^2+r^2} - \frac{2}{\pi G}\int_c^d \frac{r_0\tau_-(r_0)\,dr_0}{r_0^2-r^2} = \frac{1}{2h_1G_1}\left\{T_c+T_d+\int_c^d \operatorname{sign}(r-r_0)\left[\tau_-(r_0)-\tau_+(r_0)\right]dr_0\right\}(c<r<d). \end{cases} \tag{11}$$

Решение СИУ (11) должно удовлетворять условию (10) и следующим условиям:

$$\int_{a_k}^{b_k} \varphi(r_0)\,dr_0 = 0\ \left(k=\overline{1,n}\right), \tag{12}$$

выражающим условия непреывности перемещений в концевых точках трещин.

После решения СИУ (11) при условиях (10) и (12), разрушающие касательные напряжения вне системы трещин на луче $\vartheta=0$ согласно первому уравнению (7), будет определяться формулой

$$\tau(r) = -\frac{2G}{\pi}\int_L \frac{r_0\varphi(r_0)\,dr_0}{r_0^2-r^2} + \frac{2}{\pi}\int_c^d \frac{r_0\tau_-(r_0)\,dr_0}{r_0^2+r^2}\quad \left(r\in[0,\infty)\setminus L\right).$$

**О решении определящей системы СИУ (11).** Для простоты, как в [14], ограничиваясь одной трещиной по отрезку $[a,b]$, заменой переменных и переходом к безразмерным величинам [14] система СИУ (11) преобразуется в систему СИУ на интервале $(-1,1)$. Соответствующим образом преобразуются также условия (10) и (12). Далее известным методом [10-12] решение преобразованной системы СИУ можно свести к системе систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Из результатов работы [14] сразу можно выписать выражения элементов матрицы и правой части этой системы СЛАУ, полагая в них $\alpha=\pi/2$. Различные случаи расположения трещины и стрингеров исследуются вполне аналогичным с [14] способами. Все характеристики поставленной задачи можно выразить аналитическими формулами простых структур через решение СЛАУ.

**4. Заключение.** Изложенные здесь результаты дополняют результаты работы [9] и дают возможность исследовать важные частные случаи, когда имеется вертикальная краевая трещина или когда концы $r=c$ стрингеров приближаются к нулю. Эти случаи представляют теоретический и практический интерес в ряде прикладных задач.

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Greif R., Sanders J.L. The effect of a stringer on the stress in a cracked sheet. //J. Appl. Mech., Trans. ASME, 32, (1), 1965, pp.59-66.

[2] Mkhitaryan S.M. Contact interaction between an Infinite or finite stringer and elastic semi-infinite plate with a finite vertical crack coming out to the stringer by one end. Contemporary problems in architecture and construction. Advanced materials research, vol. 1020, 2014, Trans tech publications, Switzerland, pp.253-257.

[3] Hakobyan V.N., Mirzoyan S.E., Mkhitaryan S.M. The Problem of the contact between a broken stringer and an elastic infinite strip containing a vertical edge crack. International Applied Mechanics, 51 (2), 2015, pp.176-186.

[4] Melan E. Ein Beitrag zur Theorie geschweißter Verbindungen. Ingr. Arch., 1932, Bd.3, N2, S.123-129.
[5] Bufler H. Zur Krafteinleitung in Scheiben uber geschweißte oder geklebte Verbindungen, Osterr, Ing.–Arch. 18 (3–4), 1964, S. 284–292.
[6] Koiter W.T. On the diffusion of load from a stiffener into a sheet. Quart. J. Mech. and Appl. Math.,1955, v. 8, N 2, pp. 164-178.
[7] Muki R., Sternberg E.: Load transfer from the boundary stiffening rib to the sheet (revision of Melan's problem. Applied mechanics, Proceedings of the Society of Mechanical Engineers, Mechanics, ser. E, 1967, vol. 34, N3, pp.233-242.
[8] Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука. 1983. 488с.
[9] Grigoryan M.S. On the contact interaction of two identical stringers with an elastic semi-infinite continuous or vertically cracked plate. Journal of Physics: Conference Series 991, vol.991, 2018. pp.1-12. https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/991/1/012030/pdf
[10] Erdogan F., Gupta G.D., Cook T.S. The Numerical solutions of singular integral equations. Methods of Analysis a Solution of Crack Problems, Noordhoff Intern. Publ., Leyden, 1973, pp. 368-425.
[11] Theocaris P.S., Iakimidis N.I. Numerical integration methods for the solution of singular integral equations. Quart. Appl Math., vol xxxv, No1, 1977, pp.173-185.
[12] Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова думка, 1976. 443с.
[13] Григорян М.С., Мхитарян С.М. О контактном взаимодействии двух одинаковых стрингеров с упругой полубесконечной пластиной. Докалды НАН РА, т.118, N1, 2018, стр. 49-59.
[14] Grigoryan M.S., Yedoyan V.H. Antiplane deformation of an elastic infinite wedge in the presence of different types of stress concentrators. 10-th international conference on contemporary problems of architecture and construction, Beijing, China, vol.1, 2018, pp.122-129.

**Сведения об авторе:**
**Григорян М.С.** – Институт механики НАН Армении, Национальный университет архитектуры и строительства Армении, marinegrigoryan17@gmail.com

# НЕКОТОРЫЕ ПОСТАНОВКИ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ УПРАВЛЯЕМЫХ ДВИЖЕНИЙ МАНИПУЛЯТОРОВ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ

**Гукасян А.А.**

В работе с помощью принципа максимума и метода динамического программирования исследуется задача оптимального гарантированного управления механических системы при неопределённости положения целевой точки в начале процесса управления. Рассмотрены случаи, когда положение целевой точки в процессе движения уточняется с помощью измерительных устройств скачкообразно и дискретно. Подобные задачи могут возникнуть при моделировании движение робота, когда требуется построить систему управления, обеспечивающую приведение схвата из заданного начального состояния в некоторую конечную область. Представлены алгоритмы исследования задач. Определено гарантированное значение функционала, управляющие воздействия и фазовые траектории движения при скачкообразном и дискретном уточнении положений целевой точки. Различным постановкам задач управления механическими системами и методами их исследования при неполной информации о положении целевой точки посвящены работы [1-11]. В частности, дана математическая формулировка процесса измерения (наблюдения) и сформулирована задача управления в условиях неопределённости. Сформулирована минимаксная задача управления, то есть задача о наилучшем гарантированном результате. Исследована задача об оптимальном гарантированном приведении схвата при простом движении с дискретным уточнением положения целевой точки. Задачи гарантированного быстродействия исследованы при скачкообразном уточнении положения целевой точки, когда в начальный момент времени положение объекта на фазовой плоскости на основе данных измерений датчика определяется с точностью до некоторой окружности, отрезка и эллипса [6-11]. Здесь введено также понятие информационной области, состоящей из позиций, в которых приборы практически точно определяют положение целевой точки. Для линейной модели двухзвенного манипулятора исследована задача оптимального гарантированного управления в случаях поэтапного уточнения местоположения целевой точки. Материалы доклада включают также разработки, которые проведены совместно с соискателями Казаряном В.С. и Манукяном А.А. Ниже приводятся результаты некоторых исследований.

**1. Постановка задачи гарантированного управления.**

Пусть динамика системы описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f(x,u,t), \quad x(t_0) = x^0, \quad u \in U \tag{1.1}$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – вектор состояния системы, $u(t)$ – вектор управления, $U$ – выпуклое множество.

Предполагается, что начальное положение системы $x^0$ задано, а конечная (целевая) точка $x^1$ известна с точностью до некоторой области $G$, $(x^1 \in G)$. Положение конечной точки в процессе движения уточняется с помощью измерительных устройств. В каждый момент времени $t$ область $G(t)$ $(x^1 \in G(t))$ определяется вектором $z(t)$ и скаляром $R(t)$, где $z(t)$– прогнозированное значение вектора $x^1$, а $R(t)$– максимально возможная погрешность прогноза. Изменение функций $z(t)$, $R(t)$ и $h(x,z)$ при непрерывном или дискретном уточнении положения целевой точки описаны в [2,6,7].

Требуется найти допустимое управление $u_0^*$, которое обеспечивает приведение системы из заданного начального положения $x^0$ в конечное положение $x^1 \in G$, при её произвольном расположении в множестве $G$.

Критерий качества переходного процесса системы (1.1) оценим следующим функционалом:

$$J[u,z] = \int_{t_0}^{T} \Phi(x,u,z,t)\,dt \tag{1.2}$$

Из постановки задачи следует, что оптимальное гарантированное значение функционала определяется из следующего условия:

$$J_*\left[u_0^*, z^*\right] = \max_{z \in G} \min_{u \in U} J[u,z] \tag{1.3}$$

**2. Задача гарантированного времени приведения на окружность.**

Рассмотрим задачу гарантированного оптимального по времени приведения материальной точки, движение которого описывается уравнениями [7,10,11].

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad |u| \le 1 \tag{2.1}$$

на окружность $G$, где $G: \left\{x_1^{\,2} + x_2^{\,2} \le R^2\right\}$.

Пусть уточнение положения точки во время движения определяется по закону

$$h = \begin{cases} G, & x_2 > -x_1 \mathrm{tg}\alpha + c \\ 0, & x_2 \le -x_1 \mathrm{tg}\alpha + c \end{cases} \qquad (2.2)$$

где $h$ – информационная функция.

Из принципа максимума следует, что оптимально управляющая функция имеет релейный вид $u = \pm 1$, а фазовыми кривыми являются дуги парабол

$$u = +1: \; x_1 = (1/2)x_2^{\,2} + s_1$$

$$u = -1: \; x_1 = -(1/2)x_2^{\,2} + s_2 \qquad (2.3)$$

Оптимально гарантированное время приведения на окружность зависит от начальной позиции. Предполагается, что точкой пересечения семейства парабол (2.3) с линией является точка А с координатами А (а, б), $b = -a\mathrm{tg}\alpha + c$ (фиг.1).

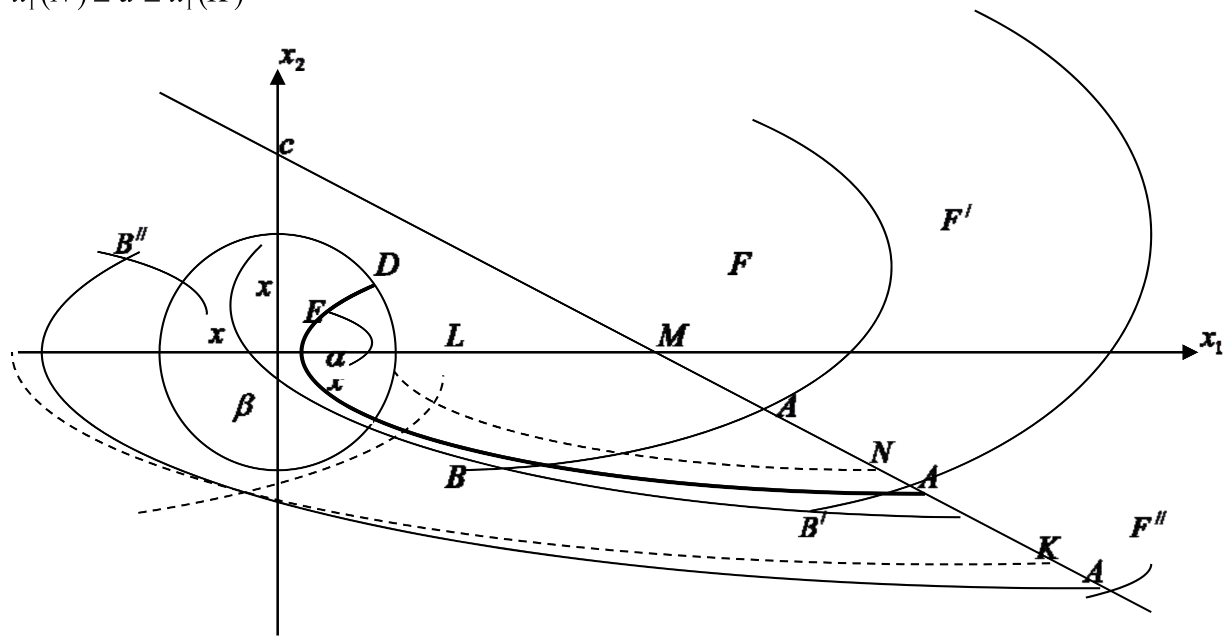
Здесь возможны следующие случаи:

$x_1(L) \le x_1(M)$, где $x_1(L) = (1/2) + \left(R^2/2\right)$, $x_1(M) = c/\mathrm{tg}\alpha$

à) $x_1(M) \le a \le x_1(N)$, где $x_1(N) = \left(1 + \mathrm{ctg}\alpha + \sqrt{1 + 2\mathrm{ctg}\alpha - 2R\mathrm{tg}^2\alpha}\right)\Big/\mathrm{tg}^2\alpha$

á) $x_1(K) \le a < \infty$, где $x_1(K) = \left(1 + \mathrm{ctg}\alpha + \sqrt{1 + 2\mathrm{ctg}\alpha + \mathrm{tg}^2\alpha\left(R^2 + 1\right)}\right)\Big/\mathrm{tg}^2\alpha \qquad (2.4)$

â) $x_1(N) \le a \le x_1(K)$




Фиг.1

Синтез оптимального приведения на любую точку $x(x_1, x_2)$ окружности имеет вид, соответственно,

$$u^a = \begin{cases} -1, & FAB \\ +1, & Bx \end{cases}, \quad u^б = \begin{cases} -1, & F^{//}A \\ +1, & AB^{//} \\ -1, & B^{//}x \end{cases}, \quad u_1^в = \left.\begin{cases} -1, & F^{/}A \\ +1, & AE \\ -1, & Ex \end{cases}\right| \; x \in \alpha_1, \quad u_2^в = \left.\begin{cases} -1, & F^{/}AB^{/} \\ +1, & B^{/}x \end{cases}\right| \; x \in \beta_1, \qquad (2.5)$$

а гарантированные времена приведения на окружность равны

$$T_a(A, x) = 2\sqrt{a + (1/2)b^2 + (1/2)x_2^{\,2} - x_1} + b + x_2, \quad \max_{x \in G} T_a(A, x) = \max_{x \in \Gamma_G} T_a(A, x)$$

$$\max_{x \in G} T_b(A, x) = \max_{x \in \Gamma_G} T_b(A, x) = 2\sqrt{x_1^* + (1/2)\left(x_2^*\right)^2 + (1/2)b^2 - a} - b - x_2^* = T_*\left(A, x^*\right) \qquad (2.6)$$

$$T^{(1)}(A, x) = T_b(A, x), \; (x \in \alpha_1), \qquad T^{(2)}(A, x) = T_a(A, x), \; (x \in \beta_1)$$

**3. Описание алгоритма управления методом динамического программирования**.

Пусть начальное положение системы $x^0$ задано. Конечная точка $x^1$ известна с точностью до некоторого множества $G$, $(x^1 \in G)$. Положение конечной точки в процессе уточняется дискретно [2,6,8,9].

Функция $h(x,z)$ имеет вид:

$$h(x,z)=\begin{cases} R_0 \quad \text{при} \quad x\in\Gamma_0 \\ R_1 \quad \text{при} \quad x\in\Gamma_1 \\ \quad \cdots \\ R_{m-1} \quad \text{при} \quad x\in\Gamma_{m-1} \\ R_m \quad \text{при} \quad x\in\Gamma_m \end{cases} \tag{3.1}$$

где $R_m=0$, то есть, когда фазовый вектор находится внутри множества $\Gamma_m$, целевая точка предполагается известной $G_m=x^1$ (фиг. 2).

Предполагается, что множества $G_i,\Gamma_i$ $(i=1\ldots m)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} &G_m\subseteq G_{m-1}\subseteq\ldots\subseteq G_1\subseteq G_0,\quad G_m=x^1, \\ &\Gamma_m\subset\Gamma_{m-1}\subset\ldots\subset\Gamma_1\subset\Gamma_0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

то есть происходит дискретное сужение областей $G_i$ по мере приближения фазового вектора. В начальный момент времени $t_0$ имеем множество $G_0$ $\left(x^1\in G_0\right)$. Оптимально гарантированным приведение системы в область $G_0$ назовём движение системы от точки $x^0$ к наиболее удалённой (в смысле функционала (1.2)) точке $z_0^*\in G_0$, то есть,

$$\bar{J}[u]=\max_{z_0\in G_0}\min_{u\in U}\int_{t_0}^{T}\Phi(x,u,z_0,t)dt \tag{3.3}$$

Значение функционала (2.5) обозначим через $S(x(t_0),t_0)$. Напишем уравнение Беллмана

$$-\frac{\partial S(x,t)}{\partial t}=\max_{z_0\in G_0}\left\{\min_{u\in U}\left[\Phi(x,u,z_0,t)+<\mathrm{grad}S(x,t),f(x,u,t)>\right]\right\} \tag{3.4}$$

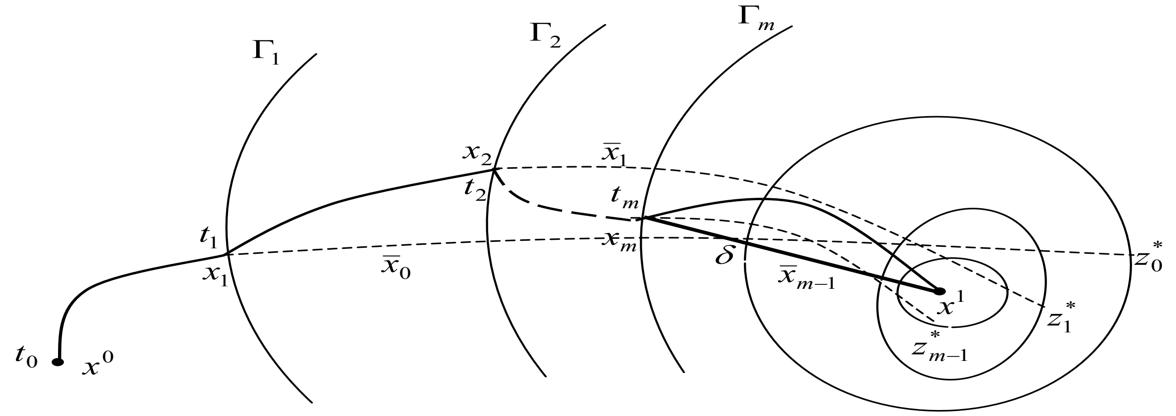
при $S(x(T),T)=0$ ( $S(z_0^*,T)=0$)

Исследуя уравнение Беллмана на каждом интервале уточнения положения целевой точки, получим оптимальное гарантированное управление и фазовую траекторию, по которым из точки $x^0$ можно гарантированно дойти до точки $x^1$

$$\begin{cases} u_0=u_0\left(x^0,z_0^*,t_0,T,t\right),\ \bar{x}_0=\bar{x}_0\left(x^0,z_0^*,t_0,T,t\right),t\in[t_0,t_1] \\ \qquad\qquad\cdots \\ u_{m-1}=u_{m-1}\left(x_{m-1},z_{m-1}^*,t_{m-1},T,t\right),\ \bar{x}_{m-1}=\bar{x}_{m-1}\left(x_{m-1},z_{m-1}^*,t_{m-1},T,t\right),t\in[t_{m-1},t_m] \\ u_m=u_m\left(x_m,x^1,t_m,T,t\right),\ \bar{x}_m=\bar{x}_m\left(x_m,x^1,t_m,T,t\right),t\in[t_m,T] \end{cases} \tag{3.5}$$

Фазовая траектория представляет собой ломанную кривую (фиг.2), а оптимальное гарантированные значения функционала (1.2) будут:

$$J_*^0=S_0\left(x^0,z_0^*,t_0,T,t\right)\Big|_{t=t_0},\quad J_*^1=S_1\left(x_1,z_1^*,t_1,T,t\right)\Big|_{t=t_1},\ \ldots,J_*^m=S_m\left(x_m,x^1,t_m,T,t\right)\Big|_{t=t_m} \tag{3.6}$$




фиг.1

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Черноусько Ф.Л., Меликян А.А. Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1978. 272с.
2. Меликян А.А. Минимаксная задача управления при неполной информации о положении целевой точки. //Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1989. №2. С.111-118.
3. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392с.
4. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420с.
5. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.
6. Гукасян А.А., Казарян В.С. Задача гарантированного управления роботом при неполной информации о положении целевой точки. //Изв. НАН РА. Механика. 1996. №2. С.42-50.
7. Гукасян А.А., Манукян А.А. О гарантированном управлении материальной точки при неполной информации. /Уч. записки ЕГУ. 2002. №1. С.39-48.
8. Айрапетян В.В., Гукасян А.А., Манукян А.А. Об одной задаче оптимального гарантированного управления манипулятором при неполной информации. //Изв. НАН РА. Механика. 2005. №1. С.68-78.
9. Айрапетян В.В., Гукасян А.А., Манукян А.А. Управление механическими системами методом динамического программирования при неполной информации. /Уч. Записки АГПУ им. Х. Абовяна, 2004, №2.
10. Манукян А.А. Алгоритм оптимального гарантированного управления при наличии неопределённости. //Сборник научных трудов конференции «Оптимальное управление, устойчивость и прочность механических систем», Ереван, 2002, с.53-58.
11. Манукян А.А. Гарантированное приведение материальной точки на окружность. Материалы 12-ой республиканской конференции молодых учёных. Ереван–2003, с.104-109.

**Сведения об авторе:**

**Гукасян А.А**. Институт механики НАН Армении, Горисский Государственный Университет.
**E-mail:** ghukasyan10@yandex.ru

## О ЗАДАЧАХ СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ПРОЦЕССЕ ОБСЛУЖИВАНИЯ

**Гукасян А.А., Ордян А.Я.**

В рамках модели процесса обслуживания манипулятором технологического участка, разработанной в работах [1-3], рассматривается задача синтеза оптимального управления на разные этапы обслуживания, когда динамика движения манипулятора описываются линейными дифференциальными уравнениями. В данной работе, в частности, для трёхэтапного обслуживания манипулятором технологического участка, исследуется возможность применения алгоритм оптимального управления манипулятора по быстродействию, которые подробны разработаны в работах [4-6].

**1. Описание модели обслуживания.** Уравнение, описывающее движение манипулятора на каждом интервале обслуживания, представим в виде линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами различных размерностей [3]

$$\dot{\mathbf{x}}^i = \mathbf{A}_i\mathbf{x}^i + \mathbf{b}^i u \text{, где } \mathbf{A}_i = \mathbf{A}\left(\boldsymbol{\omega}^i\right)\left(i = 1,2,\dots,k\right) \tag{1.1}$$

Здесь $\kappa-$ количество этапов обслуживания, которым соответствуют интервалы времени $\left[t_{i-1},t_i\right]$ $\left(i=1,2,\cdots,k\right)$, $\mathbf{x}^i - n_i$-мерный фазовый вектор состояния манипулятора на интервале времени $t\in\left[t_{i-1},t_i\right]$, $\mathbf{A}_i-\left(n_i\times n_i\right)$-мерная матрица с постоянными элементами на интервале $\left[t_{i-1},t_i\right]$, в зависимости от параметра $\boldsymbol{\omega}^i$, $\mathbf{b}^i - n_i$-мерный постоянный вектор, $u\left(t\right)$– скалярная функция управления, $t\in\left[t_o,T\right]$ ($t_0$ –начальный, $t_k = T$ – конечный момент времени, соответственно).

Пусть в пространстве состояния заданы произвольные начальное (при $t=t_0, i=1$) и конечное (при $t = T, i = k$) положения системы (1.1) в виде [3]

$$\mathbf{x}^1\left(t_0\right) = \mathbf{x}^1_{t_0}, \mathbf{x}^k\left(t_k\right) = \mathbf{x}^k\left(T\right) = \mathbf{x}^k_T, \tag{1.2}$$

где фазовый вектор $\mathbf{x}^1_{t_0}$ имеет размерность $n_1$, а $\mathbf{x}^k_T$ – размерность $n_k$ и в общем случае $n_1 \neq n_k$. В промежуточные моменты времени $t_i$ $\left(i = 1,2,\dots,k-1\right)$, когда происходит переход из одного этапа обслуживания в другие фазовые векторы составных систем (1.1), должны удовлетворять условиям:

$$\mathbf{x}^i\left(t_i\right) = \mathbf{z}^i\left(t_i\right) = \mathbf{x}^{i+1}\left(t_i\right), \left(i = 1,2,...,k\right).$$

Задача синтеза управления. Для наглядности предполагаем, что процесс обслуживания манипулятором технологического участка состоит из трёх этапов $\left(k=3\right)$. На первом этапе движение манипулятора описывается уравнениями второго порядка, на втором этапе – третьего порядка, как электромеханическая модель манипулятора, а на третьем этапе – второго порядка с нефиксированной массой на схвате. Требуется построить управляющую функцию в зависимости от фазовых координат, который обеспечивает процесс обслуживания на каждом этапе за минимальное время $\left(T_i \to \min\left(i=1,2,3\right)\right)$.

Уравнения движений манипулятора на разные этапы обслуживания представим в виде

$$\dot{\mathbf{x}}^i = \mathbf{A}_i\mathbf{x}^i + \mathbf{b}^i u^i \text{ , при } t\in\left[t_{i-1},t_i\right], i = 1,2,3. \tag{1.3}$$

где $\mathbf{x}^1 = \left(x^1_1, x^1_2\right)^T$, $\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}^1 = \left(0, \dfrac{1}{m_1}\right)$, $u^1 = u^1\left(t\right)$, $\left|u^1\right| \le 1$,

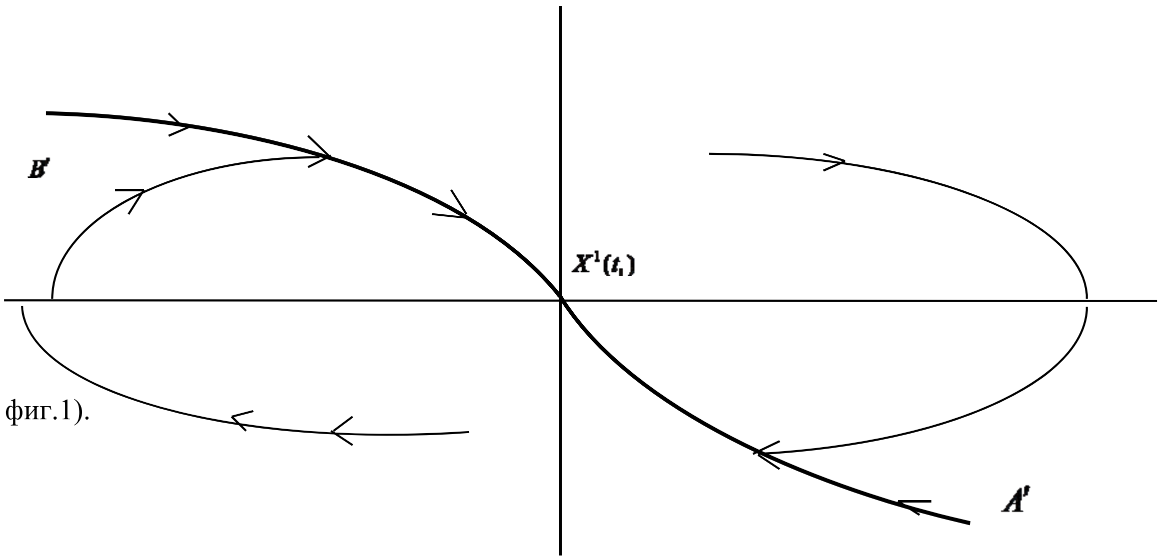
$$\mathbf{x}^2=\left(x_1^2,x_2^2,x_3^2\right)^T,\ \mathbf{A}_2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\ \mathbf{b}^2=\left(0,0,\frac{1}{m_2}\right)^{T,},\ u^2=u^2(t),\ \left|u^2\right|\le 1, \tag{1.4}$$

$$\mathbf{x}^3=\left(x_1^3,x_2^3\right)^T,\ \mathbf{A}_3=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ \mathbf{b}^3=\left(0,\frac{1}{m_3}\right)^T,\ u^3=u^3(t).$$

Здесь предполагается, что масса $m_3$ не фиксирована, но находится в заданных пределах $m_0\le m_3\le M$ и на управляющую силу наложено следующее ограничение [5]:

$$\left|u^3\right|\le 1+\eta,\ \text{где}\ \max\eta=\frac{M-m_0}{M+m_0}. \tag{1.5}$$

**2. Оптимальный синтез по быстродействию**. В работах [4-6] достаточно подробно исследованы отдельные законы оптимального синтеза по быстродействию $\left(T\to\min\right)$, результаты которых можно применять для определения управляющей функции и фазовые траектории движения манипулятора на каждом интервале процесса обслуживания. Из принципа максимума Понтрягина следует, что на первом этапе при ограничении $\left|u^1\right|\le 1$ на управляющей функции, оптимальное управление имеет релейный вид, а фазовые траектории являются кусками парабол (фиг.1).




$X_1^1$

фиг.1).

Оптимальное управление имеет вид:

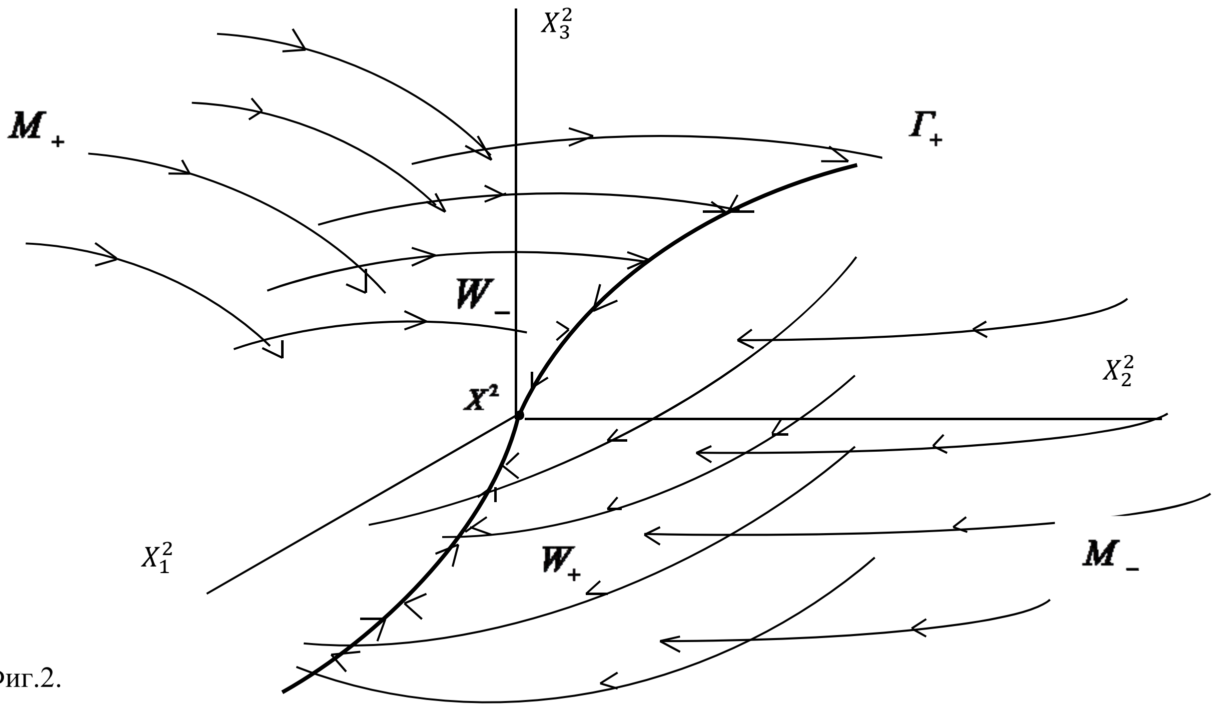
$$u^1\left(x_1^1,x_2^1\right)=\begin{cases}-1, \text{если начальная точка } x^1\left(t_0\right) \text{ находится выше}\\ \text{линии переключения } \mathrm{A}^1x^1B^1 \text{ и на линии } \mathrm{B}^1x^1\\ +1, \text{ если начальная точка } x^1\left(t_0\right) \text{ находится ниже}\\ \text{линии переключения } \mathrm{A}^1x^1B^1 \text{ и на линии } \mathrm{A}^1x^1\end{cases} \tag{2.1}$$

На втором этапе обслуживания принята электромеханическая модель манипулятора, уравнения движений которого описываются уравнением третьего порядка. В [4] подробно исследована динамика движения электромеханического манипулятора и задача оптимального управления в трёхмерном пространстве. Оптимальное управление имеет релейный вид с двумя переключениями. Синтез оптимального управления построена следующим образом [4]:

$$u_1^2\left(x_1^2,x_2^2,x_3^2\right)=\begin{cases}+1 \text{ в } \mathrm{M}_+\\ -1 \text{ на } \mathrm{W}_-\setminus\Gamma_+\\ +1 \text{ на } \Gamma_+\end{cases},\quad u_1^2\left(x_1^2,x_2^2,x_3^2\right)=\begin{cases}-1 \text{ в } \mathrm{M}_-\\ +1 \text{ на } \mathrm{W}_+\setminus\Gamma_-\\ -1 \text{ на } \Gamma_-\end{cases} \tag{2.2}$$

или

$$u^2\left(x_1^2,x_2^2,x_3^2\right)=\begin{cases}u_1^2\left(x_1^2,x_2^2,x_3^2\right), \text{ если } \left(x_1^2(t_1),x_2^2(t_1),x_3^2(t_1)\right)\in M_+\\ u_2^2\left(x_1^2,x_2^2,x_3^2\right), \text{ если } \left(x_1^2(t_1),x_2^2(t_1),x_3^2(t_1)\right)\in M_-\end{cases} \tag{2.3}$$

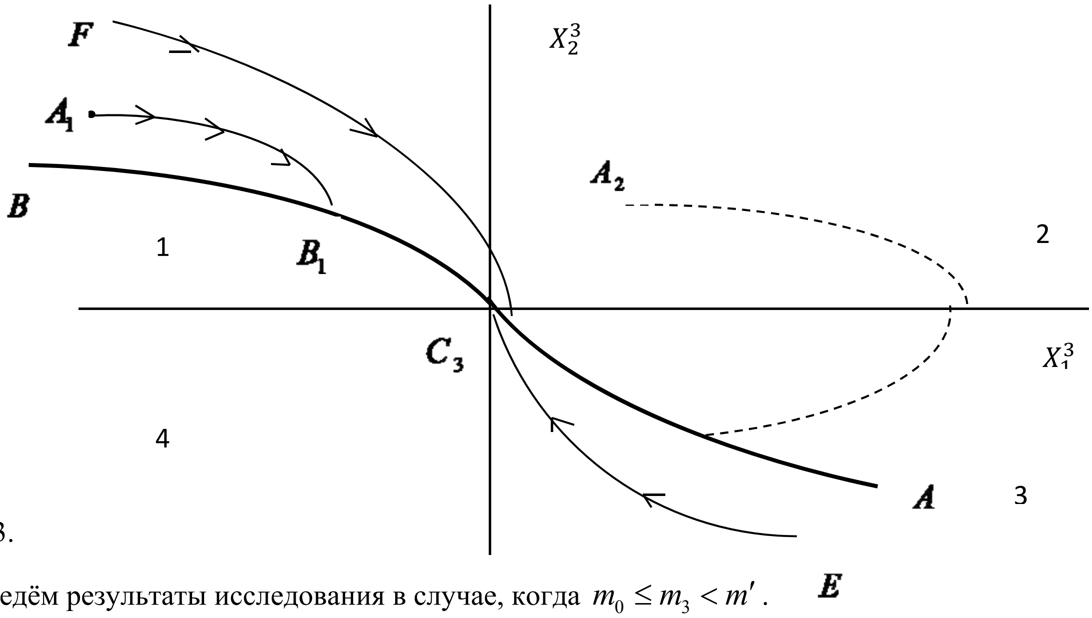



Фиг.2.

Области $M_+,M_-$, поверхности переключения $W_-,W_+$ и кривые переключения $\Gamma_+,\Gamma_-$, а также качественная картина синтеза оптимального управления электромеханическим манипулятором представлена на (фиг.2) [4].

На третьем этапе обслуживания, где массы переносимого груза манипулятором не фиксирована, требуется построить оптимальное управление в форме синтеза $u^3\left(x_1^3,x_2^3\right)$ такое, что при любом значении массы $m_3$, удовлетворяющем ограничениям $m_0\le m_3\le M$, всякая траектория движения схвата манипулятора проводилась в конечную фазовою точку, при фиксированной линии переключения, построенной для массы $m'$ ($m'=\left(M+m_0\right)/2$), с минимальным числом точек переключений, и при возможности сохранить ограничения $\left|u^3\right|\le 1$. В случае, когда масса переносимого груза фиксирована $m_3=m'$, то синтез управления по быстродействию имеет вид [5]:

$$u_3\left(x_1^3, x_2^3\right) = \begin{cases} -1, \text{ если начальная точка } \left(x_1^3\left(t_2\right), x_2^3\left(t_2\right)\right) \text{ находится выше} \\ \text{линии } \mathrm{AC}_3 B \text{ и на линии } \mathrm{BC}_3 \\ +1, \text{ если начальная точка } \left(x_1^3\left(t_2\right), x_2^3\left(t_2\right)\right) \text{ находится ниже} \\ \text{линии } \mathrm{AC}_3 B \text{ и на линии } \mathrm{AC}_3 \end{cases} \qquad (2.4)$$




Фиг.3.

Приведём результаты исследования в случае, когда $m_0 \le m_3 < m'$ .

На фиг.3 жирной линией изображена кривая переключений, отвечающая массе $m'$ и ограничению $\left|u^3\right| \le 1,$ а тонкой сплошной линией – отвечающая массе $m_3$ при ограничении $\left|u^3\right| \le 1$. Пусть сначала начальная точка находится выше кривой переключения $AC_3B$ (фиг.3). Траектория движения здесь состоит из двух ветвей парабол. В случае, когда начальная $\left(x_1^3\left(t_2\right), x_2^3\left(t_2\right)\right)$ точка находится между линиями $C_3B$ и $C_3F$, то при сохранении линии переключения $AC_3B$ движение должно пройти по параболе $x_1^3 = -m_3\left(x_2^3\right)^2 \Big/ 2 + c$ при $u^3 = -1$ до точки пересечения $B_1$. Далее, если не изменить величину управляющей функции, возможность чего имеется, так как $\left|u^3\right| \le 1 + \eta$, где $\max \eta = \left(M - m_0\right) / \left(M + m_0\right)$, то движение до конца должно идти вдоль линии $BC_3$ при скользящем режиме управления [7]. Избегая многочисленных точек переключения на участке траектории, управляющую функцию определим в виде $u^3 = -1 - \eta$, где $\eta = \left(m_3 - m'\right) m' < 0$. Следовательно, движение из точки $B_1$ до $C_3$ пройдем по квазиоптимальному режиму управления [7]. Аналогично можно построить закон управления и фазовые траектории в областях 2,3,4 .

Синтез оптимального и квазиоптимального по времени управления с одной точкой переключения при сохранении линии переключения $AC_3B$ имеет вид (фиг.3):

$$u_*^3\left(x_1^3,x_2^3\right)=\begin{cases}-1, \text{ если начальная точка находится выше линии } \mathrm{AC}_3B\\ +1, \text{ если начальная точка находится выше линии } \mathrm{AC}_3B\\ -\left(1+\eta\right), \text{ если начальная точка находится на линии } BC_3\\ +\left(1+\eta\right), \text{если начальная точка находится на линии } \mathrm{AC}_3\end{cases} \qquad (2.5)$$

В [7] исследован также случай, когда $m' < m_3 < M$ . Даны также оценки времён приведения в терминальное состояние для различных значений масс [7].

Итак, объединяя управление (2,1), (2,3) -(2,5), получим:

$B_1C_3$, в рамках ограничения $\left|u^3\right| \le 1+\eta$,
$$u=\begin{cases}u^1\left(x_1^1,x_2^1\right), t\in\left[t_0,t_1\right]\\ u^2\left(x_1^2,x_2^2,x_3^2\right), t\in\left[t_1,t_2\right]\\ u^3\left(x_1^3,x_2^3\right), m_3=m', t\in\left[t_2,t_3\right]\\ u_*^3\left(x_1^3,x_2^3\right), m_0\le m_3<m', t\in\left[t_2,t_3\right]\end{cases} \qquad (2.6)$$

Управление (2.6) на каждом этапе обеспечивает оптимальное по времени обслуживания в рамках принятой модели технологического участка. В случаях, когда массы переносимого манипулятором груза во время обслуживания возрастает или убывает линейным законом, можно применить алгоритм управления, разработанный в работе [6].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Черноусько Ф.Л., Градецкий В.Г., Болотник Н.Н. Манипуляционные роботы. М.: Наука, 1989. 363с.
2. Гукасян А.А. Об одной задаче оптимального моделирования технологического процесса, обслуживаемого манипуляционным роботом. //Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1986. Т.39. №6. С.39-49.
3. Гукасян А.А. О математическом моделировании процесса обслуживания и условия ее управляемости. // Изв. НАН Армении. Механика. 2017. Т.70. №3. С.26-38.
4. Гукасян А.А. Об оптимальном управлении манипулятором с электромеханическими приводными системами. //В межвузовском сб. научных трудов: «Прикладная математика» ЕГУ, Ереван: 1988, вып.7, с.86-105.
5. Гукасян А.А., Матевосян А.Г. Об управляемом движении материальной точки с нефиксированной массой. //Известия НАН Армении. Механика. 2002. Т.55. №1. С.75-81.
6. Гукасян А.А., Матевосян А.Г. Задача оптимального управления движением точки переменной массы. //В сб. научн. тр. «Математический анализ и его приложения» АГПУ им. Х.Абовяна, Ереван: 2003, вып.3, с.29-40.

**Сведения об авторах:**

**Гукасян А.А.**– Институт механики НАН Армении, Горисский Государственный Университет. **E-mail:** ghukasyan10@yandex.ru.

**Ордян А.Я.**–кафедра математики и информатики, Горисский Государственный Университет.

**E-mail:** oarpine@rambler.ru

## О СВОБОДНЫХ ИНТЕРФЕЙСНЫХ И КРАЕВЫХ КОЛЕБАНИЯХ ТОНКОЙ УПРУГОЙ КОНСОЛЬНОЙ СОСТАВНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ

**Гулгазарян Г.Р., Гулгазарян Л.Г.**

Исследуются свободные интерфейсные и краевые колебания тонкой упругой консольной составной цилиндрической панели, составленной из конечных ортотропных тонких упругих цилиндрических панелей с разными упругими свойствами. Используя систему дифференциальных уравнений, соответствующих классической теории ортотропных цилиндрических оболочек, выводятся дисперсионные уравнения для нахождения собственных частот интерфейсных и краевых колебаний консольной составной цилиндрической панели. Установлены асимптотические связи между дисперсионными уравнениями рассматриваемой задачи и аналогичной задачи для консольной составной прямоугольной пластины, пластины-полосы, соответственно. Приводится механизм, с помощью которого расчленяются возможные типы интерфейсных и краевых колебаний.

**Постановка задачи.** На срединной поверхности цилиндрической панели вводятся криволинейные координаты $(\alpha,\beta)$, где $\alpha(-l^{(2)}<\alpha\le l^{(1)})$ и $\beta(0\le\beta\le s)$ являются соответственно, ориентированной переменной длиной образующей и длиной дуги направляющей окружности. $s$ – полная длина направляющей окружности (Рис.1). $\alpha=0$ соответствует границе раздела свойств материала. Все величины, относящиеся к правой панели $(0\le\alpha\le l^{(1)})$, отмечаются верхним индексом (1), к левой панели $(-l^{(2)}<\alpha\le 0)$ – индексом (2).

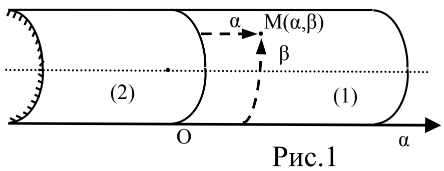



Рис.1

В качестве исходных уравнений, описывающих колебания левых и правых цилиндрических панелей, используются уравнения, которые соответствуют классической теории ортотропных цилиндрических оболочек и записываются в выбранных криволинейных координатах $\alpha,\beta$ [1].

$$\sum_{j=1}^{3}\mu^4 n_{ij}^{(r)}u_j^{(r)}+l_{ij}^{(r)}u_j^{(r)}=\rho^{(r)}\omega^2u_i^{(r)},\quad i=1,2,3;r=1,2. \tag{1}$$

Здесь $u_1^{(r)},u_2^{(r)},u_3^{(r)}$ $(r=1,2)$ – проекции вектора перемещений соответственно в направлениях $\alpha,\beta$ и нормали к срединной поверхности оболочки; $\mu^4=h^2/12$ ($h$– толщина оболочки); $\omega$– угловая частота собственных колебаний; $\rho^{(r)}$ $(r=1,2)$ – плотности материалов.

Граничные условия имеют вид [1],[2]:

$$T_1^{(1)}\Big|_{\alpha=0}=T_1^{(2)}\Big|_{\alpha=0},\; S_{12}^{(1)}+\frac{H^{(1)}}{R}\Big|_{\alpha=0}=S_{12}^{(2)}+\frac{H^{(2)}}{R}\Big|_{\alpha=0},\; M_1^{(1)}\Big|_{\alpha=0}=M_1^{(2)}\Big|_{\alpha=0},\; N_1^{(1)}+\frac{\partial H^{(1)}}{\partial\beta}\Big|_{\alpha=0}=N_1^{(2)}+\frac{\partial H^{(2)}}{\partial\beta}\Big|_{\alpha=0},$$
$$u_1^{(1)}\Big|_{\alpha=0}=u_1^{(2)}\Big|_{\alpha=0},\; u_2^{(1)}\Big|_{\alpha=0}=u_2^{(2)}\Big|_{\alpha=0},\; u_3^{(1)}\Big|_{\alpha=0}=u_3^{(2)}\Big|_{\alpha=0},\; \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=0}=\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=0}; \tag{2}$$

$$T_1^{(1)}\Big|_{\alpha=l^{(1)}}=0,\; S_{12}^{(1)}+\frac{H^{(1)}}{R}\Big|_{\alpha=l^{(1)}}=0,\; M_1^{(1)}\Big|_{\alpha=l^{(1)}}=0,\; N_1^{(1)}+\frac{\partial H^{(1)}}{\partial\beta}\Big|_{\alpha=l^{(1)}}=0; \tag{3}$$

$$u_1^{(2)}\Big|_{\alpha=-l^{(2)}}=0,\; u_2^{(2)}\Big|_{\alpha=-l^{(2)}}=0,\; u_3^{(2)}\Big|_{\alpha=-l^{(2)}}=0,\; \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=-l^{(2)}}=0 \tag{4}$$

$$T_2^{(r)}\Big|_{\beta=0,s}=S_{21}^{(r)}\Big|_{\beta=0,s}=N_2^{(r)}+\frac{\partial H^{(r)}}{\partial\beta}\Big|_{\beta=0,s}=M_2^{(r)}\Big|_{\beta=0,s}=0,\; r=1,2; \tag{5}$$

где $l_{ij},\, n_{ij}, i,j=1,2,3$; $T_k,S_{k,n},M_k,H,\; k,n=1,2$ – дифференциальные операторы, явный вид которых можно найти в [2]. $R$ – радиус направляющей окружности срединной поверхности.

Соотношения (2) выражают условия полного контакта при $\alpha=0$, условия (3) являются условиями свободного торца при $\alpha=l^{(1)}$. Соотношения (4) являются условиями жёсткого закрепления при $\alpha=-l^{(2)}$, условия (5) – условиями свободного края при $\beta=0$ и $\beta=s$.

Оператор, стоящий в левой части (1) и определённый на гладких функциях, удовлетворяющих условиям (2)-(5), обозначим $L_\mu$. С задачей (1)-(5) можно связать самосопряжённый и неотрицательно определённый оператор – расширение оператора $L_\mu$ по Фридрихсу, для которого сохраним то же обозначение. Спектр оператора $L_\mu$ – дискретный и неотрицательный.

Задача (1)-(5) не допускает разделения переменных. Поэтому, исходя из неотрицательной определённости оператора $L_\mu$, для нахождения собственных частот и соответствующих собственных форм, можно применить обобщённый метод сведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям Канторовича-Власова [3]. В качестве базисных функций используются собственные функции задачи

$$w^{VIII} = \theta^8 w, \quad w\big|_{\beta=0,s} = w'\big|_{\beta=0,s} = w''\big|_{\beta=0,s} = w'''\big|_{\beta=0,s} = 0,\ 0 \le \beta \le sx \in \mathbb{R}\,. \tag{6}$$

Задача (6) – самосопряжённая и положительно определенная. Собственным значениям $\theta_m^8, m=\overline{1,\infty}$ задачи (6) соответствуют собственные функции:

$$w_m(\theta_m\beta) = \frac{\Delta_1}{\Delta}x_1(\theta_m\beta) + \frac{\Delta_2}{\Delta}x_2(\theta_m\beta) + \frac{\Delta_3}{\Delta}x_3(\theta_m\beta) + x_4(\theta_m\beta),\ 0 \le \beta \le s, m = \overline{1,+\infty}\ , \tag{7}$$

$$x_1(\theta_m\beta) = \operatorname{ch}\theta_m\beta - \operatorname{ch}\frac{\theta_m}{\sqrt{2}}\beta\cos\frac{\theta_m}{\sqrt{2}}\beta - \operatorname{sh}\frac{\theta_m}{\sqrt{2}}\beta\sin\frac{\theta_m}{\sqrt{2}}\beta,$$

$$x_2(\theta_m\beta) = \operatorname{sh}\theta_m\beta - \sqrt{2}\operatorname{ch}\frac{\theta_m}{\sqrt{2}}\beta\sin\frac{\theta_m}{\sqrt{2}}\beta, \quad x_3(\theta_m\beta) = \sin\theta_m\beta - \sqrt{2}\operatorname{sh}\frac{\theta_m}{\sqrt{2}}\beta\cos\frac{\theta_m}{\sqrt{2}}\beta, \tag{8}$$

$$x_4(\theta_m\beta) = \cos\theta_m\beta - \operatorname{ch}\frac{\theta_m}{\sqrt{2}}\beta\cos\frac{\theta_m}{\sqrt{2}}\beta + \operatorname{sh}\frac{\theta_m}{\sqrt{2}}\beta\sin\frac{\theta_m}{\sqrt{2}}\beta,$$

где выражения для $\Delta, \Delta_1, \Delta_2$ можно найти в [4], а $\theta_m, m = \overline{1,+\infty}$ – положительные нули определителя Вронского функции (8) в точке $\beta = s$. Обозначим:

$$\beta'_m = \int_0^s \left(w'_m(\theta_m\beta)\right)^2 d\beta \Big/ \int_0^s \left(w_m(\theta_m\beta)\right)^2 d\beta,\ \ \beta''_m = \int_0^s \left(w''_m(\theta_m\beta)\right)^2 d\beta \Big/ \int_0^s \left(w'_m(\theta_m\beta)\right)^2 d\beta. \tag{9}$$

В формулах (8) и (9) производные взяты по $\theta_m\beta$ и $\beta'_m \to 1, \beta''_m \to 1$ при $m \to \infty$.

**Дисперсионные уравнения.** В первом, втором и третьем уравнениях системы (1) угловую частоту $\omega$ формально заменим на $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ соответственно. Решение системы (1) ищем в виде

$$(u_1^{(r)}, u_2^{(r)}, u_3^{(r)}) = (u_m^{(r)} w_m(\theta_m\beta),\ v_m^{(r)} w'_m(\theta_m\beta),\ w_m(\theta_m\beta))\exp((-1)^r \chi^{(r)}\theta_m\alpha + \chi^{(r)}\theta_m l^{(r)}),\ r=1,2;\ m=\overline{1,\infty}. \tag{10}$$

Здесь $w_m(\theta_m\beta)$ определяются по формуле (7), $u_m^{(r)}, v_m^{(r)}, \chi^{(r)}$ – неопределённые константы. При этом, условия (5) выполняются автоматически. Подставив (10) в систему (1) и умножив полученные уравнения скалярным образом на вектор-функции

$$\left(w_m(\theta_m\beta), w'_m(\theta_m\beta), w_m(\theta_m\beta), w_m(\theta_m\beta), w'_m(\theta_m\beta), w_m(\theta_m\beta)\right) \tag{11}$$

и интегрируя в пределах от 0 до s, из первых двух пар уравнений получим:

$$(c_m^{(r)} + \varepsilon_m^2 a^2 g_m^{(r)} d_m^{(r)})u_m^{(r)} = (-1)^r \varepsilon_m \chi^{(r)} \left\{ a_m^{(r)} - a^2\beta'_m \frac{B_{22}^{(r)}(B_{12}^{(r)} + B_{66}^{(r)})}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} l_m^{(r)} + \varepsilon_m^2 a^2 \frac{B_{12}^{(r)} B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} d_m^{(r)} \right\}, \tag{12}$$

$$(c_m^{(r)} + \varepsilon_m^2 a^2 g_m^{(r)} d_m^{(r)})v_m^{(r)} = \varepsilon_m \left\{ b_m^{(r)} - a^2 g_m^{(r)} l_m^{(r)} \right\}. \tag{13}$$

Из третьего уравнения, учитывая (12) и (13), получим характеристические уравнения

$$R_{mm}^{(r)} c_m^{(r)} + \varepsilon_m^2 \left\{ c_m^{(r)} + \beta'_m b_m^{(r)} - \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{22}^{(r)}}\left(\chi^{(r)}\right)^2 a_m^{(r)} + a^2 (R_{mm}^{(r)} g_m^{(r)} d_m^{(r)} - 2\beta'_m l_m^{(r)} b_m^{(r)}) + \right.$$

$$\left. + \varepsilon_m^2 a^2 d_m^{(r)} \left( b_m^{(r)} + \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}\left(\chi^{(r)}\right)^2 \right) + a^4 \beta'_m g_m^{(r)} \left(l_m^{(r)}\right)^2 \right\} = 0\ ,\ m = \overline{1,\infty}\ ,\ r = 1,2. \tag{14}$$

Здесь $B_{ij}^{(r)},\ i,j=1,2,6;\ r=1,2$ являются коэффициентами упругости составляющих панелей, $\varepsilon_m=1/(R\theta_m)$, $a^2=\mu^4\theta_m^2$, $\left(\eta_{im}^{(r)}\right)^2=\rho^{(r)}\omega_i^{(r)}/(B_{66}^{(r)}\theta_m^2)$, $i=1,2,3$ . Выражения для $a_m^{(r)},b_m^{(r)},c_m^{(r)},d_m^{(r)},l_m^{(r)},\ g_m^{(r)},r_{mm}^{(r)}$ приведены в [4]. Пусть $\chi_j^{(r)}$ $(j=1,2,3,4)$ – попарно различные корни уравнения (14) с положительными действительными частями и $\chi_{j+4}^{(r)}=-\chi_j^{(r)},\ j=1,2,3,4$, а $(u_{1j}^{(r)},u_{2j}^{(r)},u_{3j}^{(r)})$ – нетривиальные решения вида (10) системы (1) при $\chi^{(r)}=\chi_j^{(r)}\ (j=1,2,...,8)$, соответственно. Представляя решения задач (1)-(5) в виде

$$u_i^{(r)}=\sum_{j=1}^{8}w_j^{(r)}u_{ij}^{(r)}\ ,\ \ i=1,2,3;r=1,2 \tag{15}$$

и учитывая граничные условия (2) –(4), получим совокупность систем уравнений:

$$\sum_{j=1}^{8}\frac{M_{ij}^{(1)}\exp(\theta_m\chi_j^{(1)}l^{(1)})w_j^{(1)}}{c_{mj}^{(1)}+\varepsilon_m^2a^2g_{mj}^{(1)}d_{mj}^{(1)}}-\sum_{j=1}^{8}\frac{cM_{ij}^{(2)}\exp(\theta_m\chi_j^{(2)}l^{(2)})w_j^{(2)}}{c_{mj}^{(2)}+\varepsilon_m^2a^2g_{mj}^{(2)}d_{mj}^{(2)}}=0,\ i=\overline{1,4};\ c=\frac{B_{11}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}}$$

$$\sum_{j=1}^{8}\frac{M_{ij}^{(1)}\exp(\theta_m\chi_j^{(1)}l^{(1)})w_j^{(1)}}{c_{mj}^{(1)}+\varepsilon_m^2a^2g_{mj}^{(1)}d_{mj}^{(1)}}-\sum_{j=1}^{8}\frac{M_{ij}^{(2)}\exp(\theta_m\chi_j^{(2)}l^{(2)})w_j^{(2)}}{c_{mj}^{(2)}+\varepsilon_m^2a^2g_{mj}^{(2)}d_{mj}^{(2)}}=0,\ i=\overline{5,8};\ m=\overline{1,\infty} \tag{16}$$

$$\sum_{j=1}^{8}\frac{M_{ij}^{(1)}w_j^{(1)}}{c_{mj}^{(1)}+\varepsilon_m^2a^2g_{mj}^{(1)}d_{mj}^{(1)}}=0,\ i=\overline{9,12};\sum_{j=1}^{8}\frac{M_{ij}^{(2)}w_j^{(2)}}{c_{mj}^{(2)}+\varepsilon_m^2a^2g_{mj}^{(2)}d_{mj}^{(2)}}=0,\ i=\overline{13,16}.$$

Выражения для $M_{ij}^{(r)},i=\overline{1,16};r=1,2$ не приводятся. Нижний индекс $j$ означает, что соответствующая функция взята при $\chi^{(r)}=\chi_j^{(r)}$. Чтобы совокупность систем уравнений (16) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы совокупность уравнений имела решение:

$$\Delta=\exp(-\sum_{r=1}^{2}\sum_{j=1}^{4}z_j^{(r)})\mathrm{Det}\left\|T_{ij}\right\|_{i,j=1}^{4}=0,\qquad m=\overline{1,\infty}. \tag{17}$$

$$T_{11}=\left\|M_{ij}^{(1)}\right\|_{i,j=1}^{4},\ T_{12}=\left\|(-1)^{i-1}M_{ij}^{(1)}\exp(z_j^{(1)})\right\|_{ij=1}^{4},T_{13}=c\left\|(-1)^iM_{ij}^{(2)}\right\|_{ij=1}^{4},T_{14}=-c\left\|M_{ij}^{(2)}\exp(z_j^{(2)})\right\|_{ij=1}^{4};$$

$$T_{21}=\left\|M_{ij}^{(1)}\right\|_{i=5,j=1}^{8,4},\ T_{22}=\left\|(-1)^{i-1}M_{ij}^{(1)}\exp(z_j^{(1)})\right\|_{i=5,j=1}^{8,4},T_{23}=\left\|(-1)^iM_{ij}^{(2)}\right\|_{i=5,j=1}^{8,4},T_{24}=-\left\|M_{ij}^{(2)}\exp(z_j^{(2)})\right\|_{i=5,j=1}^{8,4}; \tag{18}$$

$$T_{31}=T_{12},\ T_{32}=T_{11},\ T_{33}=0,\ T_{34}=0;\ T_{41}=0,\ T_{42}=0,\ T_{43}=T_{24},\ T_{44}=T_{23}.\ z_j^{(r)}=-\theta_m\chi_j^{(r)}l^{(r)}.$$

Выполняя элементарные действия над столбцами определителя (17), получаем

$$\Delta=\exp\left(-\sum_{r=1}^{2}\sum_{j=1}^{4}z_j^{(r)}\right)\left(K^{(1)}\right)^2\left(K^{(2)}\right)^2\mathrm{Det}\left\|t_{ij}\right\|_{i,j=1}^{4}=0 \tag{19}$$

$$K^{(r)}=(x_1^{(r)}-x_2^{(r)})(x_1^{(r)}-x_3^{(r)})(x_1^{(r)}-x_4^{(r)})(x_2^{(r)}-x_3^{(r)})(x_2^{(r)}-x_4^{(r)})(x_3^{(r)}-x_4^{(r)}),\ r=1,2.$$

$$t_{11}=\left\|m_{ij}\right\|_{i,j=1}^{4},\ t_{12}=\left\|m_{ij}\right\|_{i=1j=5}^{4,8},\ t_{13}=c\left\|m_{ij}\right\|_{i=1j=9}^{4,12},\ t_{14}=c\left\|m_{ij}\right\|_{i=1j=13}^{4,16};$$

$$t_{21}=\left\|m_{ij}\right\|_{i=5,j=1}^{8,4},\ t_{22}=\left\|m_{ij}\right\|_{i,j=5}^{8},t_{23}=\left\|m_{ij}\right\|_{i=5,j=9}^{8,12},\ t_{24}=\left\|m_{ij}\right\|_{i=5j=13}^{8,16}; \tag{20}$$

$$t_{31}=t_{12},\ t_{32}=t_{11},\ t_{33}=0,\ t_{34}=0;\ t_{41}=0,\ t_{42}=0,\ t_{43}=t_{24},\ t_{44}=t_{23}.z_j^{(r)}=-\theta_m\chi_j^{(r)}l^{(r)}.$$

В силу громоздкости выражения для $m_{ij}$ не приводятся. Уравнения (19) эквивалентны уравнениям

$$\nabla=\mathrm{Det}\left\|t_{ij}\right\|_{i,j=1}^{4}=0,\ m=\overline{1,\infty}. \tag{21}$$

Учитывая возможные соотношения между $\eta_{1m}^{(r)},\eta_{2m}^{(r)},\eta_{3m}^{(r)}$, заключаем, что уравнение (21) определяет частоты соответствующих типов интерфейсных и краевых колебаний.

**Асимптотика дисперсионного уравнения (21) при** $\varepsilon_m \to 0$. В предыдущих формулах будем полагать, что $\eta_1^{(r)} = \eta_2^{(r)} = \eta_3^{(r)} = \eta^r$ (r = 1,2). При $\varepsilon_m \to 0$ уравнение (14) преобразуется в совокупность уравнений

$$c_m^{(r)} = \left(\chi^{(r)}\right)^4 - B_2^{(r)}\left(\chi^{(r)}\right)^2 + \frac{B_{11}^{(r)} + B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}\left(\eta^{(r)}\right)^2\left(\chi^{(r)}\right)^2 - \left(\beta'_m - \left(\eta^{(r)}\right)^2\right)\left(\frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}\beta''_m - \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}\left(\eta^{(r)}\right)^2\right) = 0,\ m = \overline{1,\infty} \quad (22)$$

$$R_{mm}^{(r)} = a^2\left(\frac{B_{11}^{(r)}}{B_{22}^{(r)}}\left(\chi^{(r)}\right)^4 - \frac{2(B_{12}^{(r)} + 2B_{66}^{(r)})}{B_{22}^{(r)}}\beta'_m\left(\chi^{(r)}\right)^2 + \beta''_m\beta'_m\right) - \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{22}^{(r)}}\left(\eta^{(r)}\right)^2 = 0,\ m = \overline{1,\infty},\ r = 1,2\ , \quad (23)$$

которые являются характеристическими уравнениями для уравнений планарных и изгибных колебаний прямоугольных составляющих с двумя параллельными свободными краями, соответственно. Корни уравнений (22) и (23) с положительными действительными частями обозначим через $y_1^{(r)}, y_2^{(r)}$ и $y_3^{(r)}, y_4^{(r)}$, соответственно. Можно доказать, что уравнения (21) приводятся к виду

$$\begin{aligned}\mathrm{Det}\left\| t_{ij}\right\|_{ij=1}^{4} &= \left(\frac{B_{11}^{(1)}B_{11}^{(2)}N^{(1)}(\eta_m^{(1)})N^{(2)}(\eta_m^{(2)})}{(B_{12}^{(1)} + B_{66}^{(1)})(B_{12}^{(2)} + B_{66}^{(2)})}\right)^2 \left\{\left(K_3^{(1)}(\eta_m^{(1)})K_3^{(2)}(\eta_m^{(2)})\right)^2 \times\right. \\ &\left.\mathrm{Det}\left\|e_{ij}\right\|_{i,j=1}^{8} \cdot \mathrm{Det}\left\|b_{ij}\right\|_{i,j=1}^{8}\right\} + O(\varepsilon_m^2) = 0,\ m = \overline{1,+\infty}.\end{aligned} \quad (24)$$

Выражения для $N^{(r)}(\eta_m^{(r)}),\ K_3^{(r)}(\eta_m^{(r)}), r = 1,2$ не приводятся (см. [4]).

Из уравнения (24) следует, что при $\varepsilon_m \to 0$ уравнения (21) распадаются на уравнения

$$\begin{aligned}&\mathrm{Det}\left\|e_{ij}\right\|_{i,j=1}^{8} = 0, m = \overline{1,\infty};\ \mathrm{Det}\left\|b_{ij}\right\|_{i,j=1}^{8} = 0, m = \overline{1,\infty}; \\ &K_3^{(1)}(\eta_m^{(1)}) = 0,\ m = \overline{1,\infty};\ K_3^{(2)}(\eta_m^{(2)}) = 0,\ m = \overline{1,\infty}.\end{aligned} \quad (25)$$

Первая и вторая совокупности уравнений из (25) являются, соответственно, дисперсионными уравнениями собственных планарных и изгибных интерфейсных и краевых колебаний составной консольной пластины. Корням третьей и четвёртой совокупностям уравнений соответствуют планарные колебания составляющих цилиндрической панели. Они появляются в результате использования уравнения соответствующей классической теории ортотропных цилиндрических оболочек.

При $\varepsilon_m \to \infty$, $\theta_m l^{(2)} \to \infty$ и $\theta_m l^{(1)} \to \infty$ уравнения (21) можно написать в виде

$$\begin{aligned}\mathrm{Det}\left\| t_{ij}\right\|_{ij=1}^{4} &= \left(\frac{B_{66}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}}\right)^4 \left(N^{(1)}(\eta_m^{(1)})N^{(2)}(\eta_m^{(2)})\right)^2 \left(K_3^{(1)}(\eta_m^{(1)})K_3^{(2)}(\eta_m^{(2)})\right)^2 K_1^{(1)}(\eta_m^{(1)})K_2^{(1)}(\eta_m^{(1)}) \times \\ &L(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)})\, G(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)})Q^{(2)}(\eta_m^{(2)}) + O(\varepsilon_m^2) + \sum_{j=1}^{4}\sum_{r=1}^{2} O(\exp(z_j^{(r)})) = 0,\ m = \overline{1,+\infty}\ .\end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned}L(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) &= K_2^{(1)}(\eta_m^{(1)})Q^{(2)}(\eta_m^{(2)}) + \left(\frac{B_{66}^{(2)}}{B_{66}^{(1)}}\right)^2 K_2^{(2)}(\eta_m^{(2)})Q^{(1)}(\eta_m^{(1)}) + \\ &+ \frac{B_{66}^{(2)}}{B_{66}^{(1)}}\left[2\left(y_1^{(1)}y_2^{(1)} - \frac{B_{12}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}}(\beta'_m - (\eta_m^{(1)})^2)\right)\left(y_1^{(2)}y_2^{(2)} - \frac{B_{12}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}}(\beta'_m - (\eta_m^{(2)})^2)\right) + \right. \\ &\left. + (y_2^{(1)} + y_1^{(1)})(y_2^{(2)} + y_1^{(2)})((\beta'_m - (\eta_m^{(2)})^2)y_1^{(1)}y_2^{(1)} + (\beta'_m - (\eta_m^{(1)})^2)y_1^{(2)}y_2^{(2)})\right],\end{aligned} \quad (27)$$

$$K_2^{(r)}(\eta_m^{(r)}) = (\beta'_m - (\eta_m^{(r)})^2)\left(\frac{B_{12}^{(r)}B_{22}^{(r)}\beta''_m - (B_{12}^{(r)})^2\beta'_m}{B_{11}^{(r)}B_{66}^{(r)}} - (\eta_m^{(r)})^2\right) - (\eta_m^{(r)})^2 y_1^{(r)}y_2^{(r)},\ r = 1,2$$

$$G(\eta_m^{(1)},\eta_m^{(2)})=K_1^{(1)}(\eta_m^{(1)})+\left(\frac{B_{11}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}}\right)^2 K_1^{(2)}(\eta_m^{(2)})+\frac{B_{11}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}}\Bigg[2\left(y_3^{(1)}y_4^{(1)}+\frac{B_{12}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}}\beta'_m\right)\left(y_3^{(2)}y_4^{(2)}+\frac{B_{12}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}}\beta'_m\right)+$$

$$+(y_3^{(1)}+y_4^{(1)})(y_3^{(2)}+y_4^{(2)})(y_3^{(1)}y_4^{(1)}+y_3^{(2)}y_4^{(2)})\Bigg],\ Q^{(r)}(\eta_m^{(r)})=y_1^{(r)}y_2^{(r)}+\frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}(\beta'_m-(\eta_m^{(r)})^2),$$

$$K_1^{(r)}(\eta_m^{(r)})=\left(y_3^{(r)}y_4^{(r)}\right)^2+4\frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}y_3^{(r)}y_4^{(r)}-\left(\frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}\right)^2\left(\beta'_m\right)^2,\ r=1,2\ .$$

Из (26) следует, что при $\varepsilon_m\to\infty$, $\theta_m l^{(2)}\to\infty$ и $\theta_m l^{(1)}\to\infty$ совокупность уравнений (21) распадается на совокупности уравнений:

$$\begin{gathered}L(\eta_m^{(1)},\eta_m^{(2)})=0,\ \ m=\overline{1,+\infty};\ G(\eta_m^{(1)},\eta_m^{(2)})=0,\ \ m=\overline{1,+\infty}\ ;\ K_2^{(1)}(\eta_m^{(1)})=0,\ \ m=\overline{1,+\infty};\\ K_1^{(1)}(\eta_m^{(1)})=0,\ \ m=\overline{1,+\infty};K_3^{(r)}(\eta_m^{(r)})=0,\ r=1,2;\ m=\overline{1,+\infty};\ Q^{(2)}(\eta_m^{(2)})=0,\ \ m=\overline{1,+\infty};\end{gathered}\qquad(28)$$

Первая и вторая совокупности уравнений из (28) являются, соответственно, дисперсионными уравнениями планарного и изгибного интерфейсного колебания для бесконечной составной пластины-полосы со свободными краями (аналоги уравнений Стоунли).

Третья и четвёртая совокупности уравнений из (28) являются, соответственно, аналогами уравнений Рэлея и Коненкова для полубесконечной пластины из материала (1) со свободными краями или аналогами уравнений Рэлея и Коненкова для локализованных у свободных краёв колебаний пластины из материала (1).

Полученные асимптотические формулы и численный анализ (в силу громоздкости в данной работе не приведены) показывают, что при больших $\theta_m$ или при малой кривизне окружности все характеристики собственных интерфейсных и краевых колебаний консольной цилиндрической панели стремятся к характеристикам интерфейсных и краевых колебаний консольной прямоугольной пластины, соответственно. Первые частоты собственных колебаний зависят от выбранных базисных функций, удовлетворяющих тем же граничным условиям, а также, при $\theta_m\to 0$ частоты колебаний у свободного торца становятся независимыми от базисных функций и от граничных условий на образующих. Численные результаты показывают, что асимптотические формулы (24), (26) дисперсионного уравнения (21) являются хорошим ориентиром для нахождения собственных частот задачи (1)-(5).

## ЛИТЕРАТУРА


1. Гулгазарян Г.Р., Гулгазарян Л.Г., Михасев Г.И. Свободные интерфейсные и краевые колебания тонких упругих круговых цилиндрических оболочек со свободными торцами. //Изв. НАН Армении. Механика. 2018. Т.71. № 1. С.61-78.
2. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. М.: Гос. изд. физ. мат. лит., 1961. 384с.
3. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 510с.
4. Гулгазарян Г.Р., Гулгазарян Л.Г. О дисперсионных уравнениях ортотропной цилиндрической панели со свободными краями. //Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. 2018. С.148-152.



**Сведения об авторах:**

**Гулгазарян Гурген Рубенович,** профессор, д.ф.-м.н. АГПУ им. Х. Абовяна. Проф. кафедры математики и методики ее преподования. Тигран Мец 17, 0010, Ереван, Армения. Тел.(+37491) 706700. **E-mail:** ghulgr@yahoo.com

**Гулгазарян Лусине Гургеновна,** проф., д.ф.-м.н., ведущ. научн. сотр. Института механики НАН РА. Проф. каф. Матем. и метод. её преподавания АГПУ им. Х.Абовяна. Тигран Мец 17, 0010, Ереван, Армения. **Тел.:** (+37491) 302554. **E-mail:** lusina@mail.ru

# АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ О ПРОНИКАНИИ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ПОЛУПЛОСКОСТЬ, ЧАСТЬ ГРАНИЦЫ КОТОРОЙ ИМЕЕТ ЖЁСТКУЮ ОПОРУ

**Давтян А.В.**

Рассмотрена задача о проникании давления в упругую полуплоскость, часть границы которой имеет жёсткую опору. Давление создаётся ударной волной от взрыва, который происходит в некоторой точке опоры. Аналитическое решение задачи найдено методом интегральных преобразований и методом Винера-Хопфа. Показано, что на крае опоры для неизвестного компонента напряжений имеется корневая особенность. Сделаны численные расчёты и для некоторых значений параметров построена поверхность зависимости напряжения от координаты и времени на границе полуплоскости. Численные расчёты показали, что вблизи точки взрыва имеет место сжатие, а вблизи края опоры – растяжение.

**Введение.** Задача о распространении давления, заданного на границе, в глубь упругого или жидкого полупространства, изучалась в [1-3]. В [4] методом интегральных преобразований и методом Винера-Хопфа [5] решены задачи о проникании давления в упругую полуплоскость, часть которой имеет жёсткую опору для анизотропной среды. Применением метода свёрток в [4,6] решены более обобщённые задачи, где край опоры движется с переменной скоростью. Применение методов Смирнова – Соболева интегральных преобразований и метода свёрток к многим аналогичным задачам динамической теории упругости, в том числе, и для задач, где точка разрыва граничных условий движется с переменной скоростью дано в [7-13].

**Постановка задачи.** В данной работе рассмотрена задача о проникании давления в упругую полуплоскость $y>0$, которое создаётся ударной волной от взрыва вне упругой изотропной полуплоскости. Рассмотрен случай, когда часть границы имеет жёсткую опору, которая занимает часть границы $x<0$, а взрыв происходит в начальный момент времени $t=0$ в некоторой точке $x=-\ell,\ \ell>0$ на опоре. Поскольку упругая среда, а, тем более, твёрдая опора намного плотнее воздуха, можно, как в [1], считать, что отражение происходит от твёрдой границы полуплоскости и что давление на границе среды известно. Предположено, что скорость ударной волны $V$ больше скорости $a$ продольной волны в среде. Фронт ударной волны в момент $\frac{\ell}{V}$ достигает края опоры и после этого начинается проникание давления в глубь упругой изотропной среды.

Уравнения движения для изотропной среды в плоском случае имеют вид:

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+(a^2-b^2)\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$
$$a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+b^2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+(a^2-b^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \tag{1}$$

где $a,b$ – скорости продольных и поперечных упругих волн, $u,v$ - компоненты перемещений вдоль осей $x,y$, соответственно.

Полагая, что давление позади ударной волны остаётся неизменным ($P=\text{const}$), граничные условия примут вид (фиг.1.):

$$\sigma_{yy}\Big|_{y=0}=\rho\left(\left(a^2-2b^2\right)\frac{\partial u}{\partial x}+a^2\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Bigg|_{y=0}=-PH\left(Vt-\ell-x\right)\ \text{при}\ x>0 \tag{2}$$

$$u\left(t,x\right)\Big|_{y=0}=0\ \text{при}\ x<0 \tag{3}$$

$$\sigma_{xy}\Big|_{y=0}=\rho b^2\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Bigg|_{y=0}=0\ \text{при}\ |x|<\infty, \tag{4}$$

$$u,v=0\left(r^{1/2}\right),\quad r=\sqrt{x^2+y^2}\to 0, \tag{5}$$

где $\rho$ – плотность среды, $H$ – единичная функция Хевисайда. При $t=0$ имеем нулевые начальные условия

$$u\big|_{t=0} = v\big|_{t=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \tag{6}$$

Значения $\sigma_{yy} = \sigma^{+}(t,x)$ при $x<0$ и $u = u^{-}(t,x)$ при $x>0$ неизвестны.

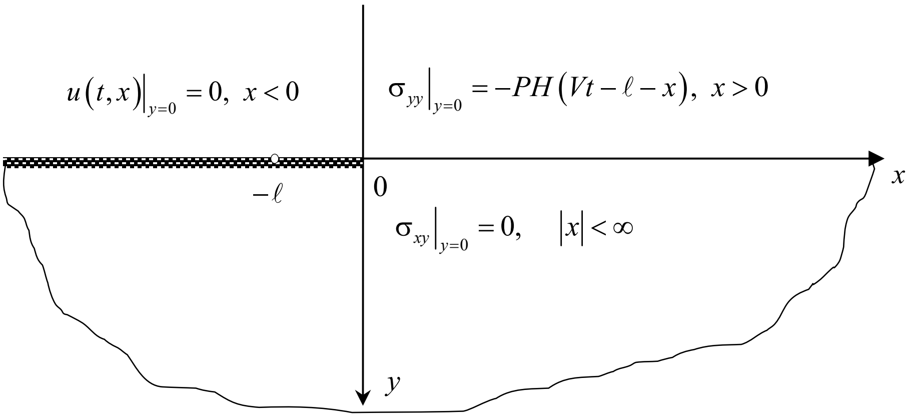



Рис. 1. Схематическое представление задачи.

**Аналитическое решение задачи.** Решение ищется методом интегральных преобразований Лапласа по $t$ и Фурье по $x$ [4]. Обозначая через $u^L$, $v^L$ преобразования Лапласа по $t$ от $u$, $v$ и через $u^{LF}$, $v^{LF}$ - преобразование Фурье по $x$ от $u^L, v^L$ , можно записать

$$u^L,\ v^L = \sum_{n=1}^{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\bar{\alpha}x + i\bar{\beta}_n y} u_n^{LF}, v_n^{LF} d\bar{\alpha}; \qquad \beta_n(\alpha) = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_n^{\,2}} - \alpha^2},\ c_1 = a,\ c_2 = b, \tag{7}$$

где $s=-i\omega$ есть параметр преобразования Лапласа, контур интегрирования по $\bar{\alpha}$ показан на рис. 2.

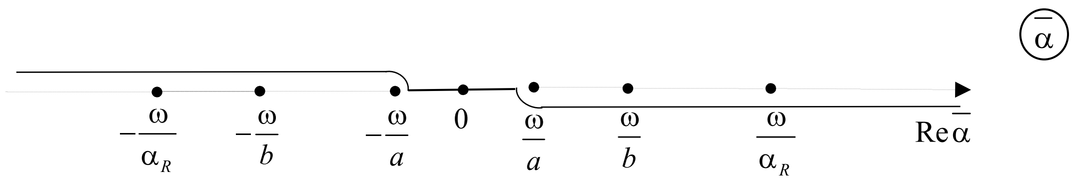



Рис.2. Контур интегрирования в (7).

Подставляя (7) в уравнения движения для упругой изотропной среды и граничные условия, учитывая ещё начальные условия, получаем уравнение Винера –Хопфа

$$\frac{i\rho b^4}{\omega^2} \frac{R(\bar{\alpha}, s)}{\sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - \bar{\alpha}^2}} V^{-}(\bar{\alpha}) = \Omega^{+}(\alpha) + \frac{P\exp\left(-\frac{\ell s}{V}\right)}{2\pi\omega\left(\frac{\omega}{V} - \bar{\alpha}\right)} \tag{8}$$

$$\Omega^{+}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}\sigma_{yy}\Big|_{y=0}e^{-i\bar{\alpha}x}dx,\mathrm{V}^{-}=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}v\Big|_{y=0}e^{-i\bar{\alpha}x}dx,$$
$$R\left(\bar{\alpha},s\right)=\frac{\omega^4}{a^4}\left(\left(\frac{a^2}{b^2}-2\alpha^2\right)^2+4\alpha^2\sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-\alpha^2}\right),\tag{9}$$

где индекс (+) указывает на функции, аналитические в верхней полуплоскости $\bar{\alpha}$, а индекс (-) – на функции, аналитические в нижней полуплоскости. Используя факторизацию функции $R\left(\bar{\alpha}\right)$ [14], получаем решение уравнения (8) в следующем виде:

$$V^{-}=\frac{iPa^2\exp\left(-\frac{s\ell}{V}\right)}{4\pi\rho b^2\left(a^2-b^2\right)}\frac{\sqrt{\frac{\omega}{a}+\frac{\omega}{V}}\sqrt{\frac{\omega}{a}-\bar{\alpha}}D^{+}\left(\frac{\omega}{V}\right)D^{-}\left(\bar{\alpha}\right)}{\omega\left(\bar{\alpha}-\frac{\omega}{V}\right)\left(\frac{\omega}{a}\alpha_R+\frac{\omega}{V}\right)\left(\frac{\omega}{a}\alpha_R-\bar{\alpha}\right)},$$
$$\Omega^{+}=\frac{P}{2\pi\omega\left(\frac{\omega}{V}-\bar{\alpha}\right)}\left[\frac{\left(\frac{\omega}{a}\alpha_R+\frac{\omega}{V}\right)\sqrt{\frac{\omega}{a}+\frac{\omega}{V}}D^{+}\left(\frac{\omega}{V}\right)}{\left(\frac{\omega}{a}\alpha_R+\bar{\alpha}\right)\sqrt{\frac{\omega}{a}+\bar{\alpha}}D^{+}\left(\bar{\alpha}\right)}-1\right],\tag{10}$$

где

$$D^{+}\left(\bar{\alpha}\right)=\exp\left\{\frac{1}{\pi}\int_{1}^{\frac{a}{b}}\mathrm{arctg}\frac{4\zeta^2\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-\zeta^2}\sqrt{\zeta^2-1}}{\left(\frac{a^2}{b^2}-2\zeta^2\right)^2}\frac{d\zeta}{\zeta-\frac{a}{\omega}\bar{\alpha}}\right\},\tag{11}$$

$\pm\alpha_R$ – корни функции $R\left(\alpha\right)$, $\alpha_R>0$. Из (10) при помощи обратных преобразований Лапласа и Фурье получается решение задачи (1) - (6). В частном случае, при $y=0,\ x<0$ имеем:

$$\frac{\partial}{\partial t}\sigma_{yy}=-\frac{aP}{\pi x}\mathrm{Re}\,i\frac{\left(\alpha_R+\alpha\right)\sqrt{1+\frac{a}{V}}D^{+}\left(\frac{a}{V}\right)}{\left(\alpha_R+\frac{a}{V}\right)\sqrt{1+\alpha}D^{+}\left(\alpha\right)\left(\alpha-\frac{a}{V}\right)}H\left(t-\frac{\ell}{V}+\frac{x}{a}\right);\quad \alpha=\frac{a}{x}\left(t-\frac{\ell}{V}\right).\tag{12}$$

Формула (12) представляет собой частный случай решения аналогичной задачи для анизотропной среды, рассмотренной в [4]. Из (12) видно, что для неизвестного компонента напряжений при $x\to-0$ имеется корневая особенность.

**Численные расчеты.** Для некоторых значений параметров $\left(a/b=\sqrt{3};\ a/b=2\right)$ по формуле (12) при помощи стандартной программы численного интегрирования пакета Wolfram Mathematica сделаны численные расчёты. На рис.3 приведена зависимость безразмерного напряжения $\frac{\pi}{P}\sigma_{yy}$ от $\frac{x}{a\left(t-\ell/V\right)}$. Как видно из этих графиков, при $\frac{a}{b}=\sqrt{3}$ в участке $-1<\frac{x}{a\left(t-\ell/V\right)}<-0.64$ имеется место сжатия, а при $-0.64<\frac{x}{a\left(t-\ell/V\right)}<0$ – растяжение. Для случая $a/b=2$ получен, примерно, такой же рисунок. При помощи этих графиков, для фиксированного момента времени $t$ можно найти участок под опорой, где имеет место сжатие, т.е. среда прижимается к опоре, и участок, где имеет место растяжение, т.е. среда стремится оторваться от опоры.

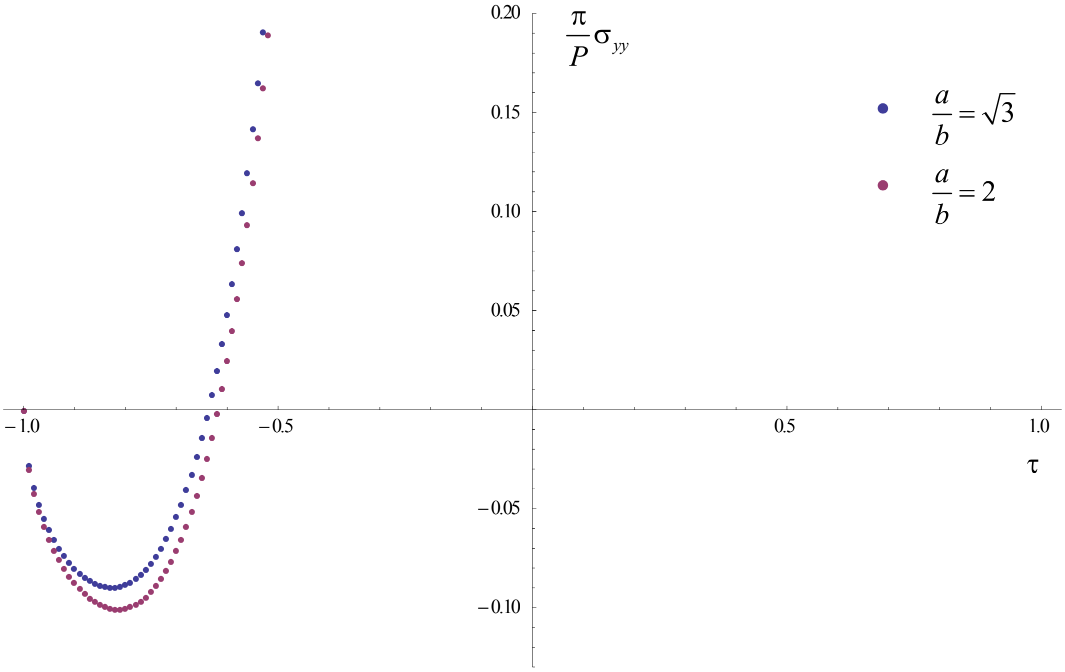



Рис.3. Зависимость $\frac{\pi}{P}\sigma_{yy}$ от $\tau=\frac{x}{a\left(t-\ell/V\right)}$ для случаев $\frac{a}{b}=\sqrt{3}$ и $\frac{a}{b}=2$.

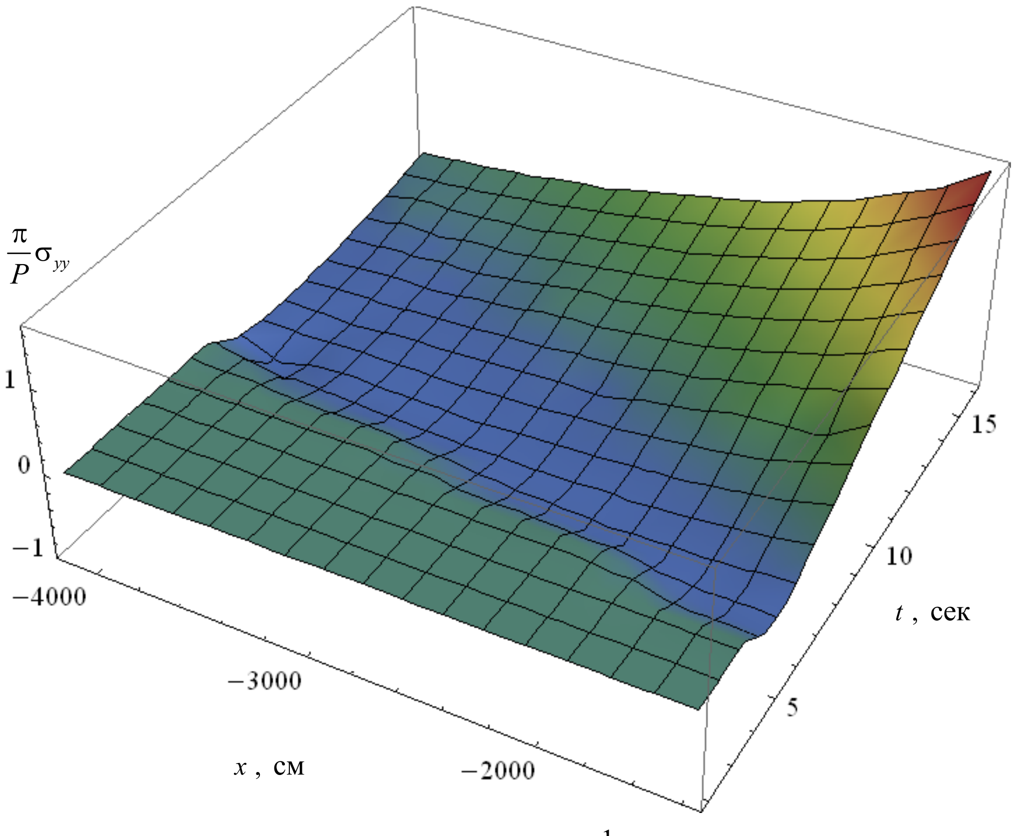



Рис.4. Зависимость $\frac{\pi}{P}\sigma_{yy}$ от $x$ и $t$ при $\frac{a}{b}=2;\ \frac{a}{V}=\frac{1}{\sqrt{2}};\ \ell=3000\sqrt{2}\ см;\ a=1000\ \frac{см}{сек}$.

Для значений параметров $\frac{a}{b}=2;\ \frac{a}{V}=\frac{1}{\sqrt{2}};\ \ell=3000\sqrt{2}\ см;\ a=1000\ \frac{см}{сек}$ проведены расчёты и получена поверхность зависимости $\frac{\pi}{P}\sigma_{yy}$ от $x$ и $t$, которая на опоре вблизи точки взрыва имеет вид, показанная на рис. 4.

Полученные результаты позволяют изучить напряжённое состояние грунта при наличии опоры, создаваемое ударной волной от взрыва в некоторой точке на опоре.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Сагомонян А.Я., Поручиков В.Б. Пространственные задачи неустановившегося движения сжимаемой жидкости. М.: МГУ, 1970. 118с.
2. Огурцов К.И. Динамические задачи для полупространства в случае осевой симметрии. //Уч. зап. ЛГУ, сер. мат. 1951. №149. Вып. 24. С.3-117.
3. Багдоев А.Г. Пространственные нестационарные задачи движения сплошной среды с ударными волнами. Ереван: Изд. АН Арм. ССР, 1961. 276с.
4. Мартиросян А.Н. Математические исследования нестационарных линейных граничных задач для сплошных сред. Ереван: Зангак-97, 2007. 244с.
5. Нобл Б. Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений с частными производными. М.: ИЛ, 1962. 278 с.
6. Давтян А.В. Решение нестационарных смешанных граничных задач теории упругости при наличии трещин и штампов, движущихся с конечной скоростью: /дис. канд. физ.-мат. наук. Ер., 2014. 148 с.
7. Свекло В.А. К решению динамических задач плоской теории упругости для анизотропного тела. //ПММ. 1961. Т.25, вып.5.
8. Norris A.N., Achenbach J.D. Elastic Wave diffraction by a semi-infinite crack in a transversely isotropic material. Q. J. Mech. Appl. Math. 1984. Vol.37, Pt.4, p.565-580.
9. Сарайкин В.А., Слепян Л.И. Плоская задача о динамике трещины в упругом теле. МТТ. 1979. № 4.
10. Поручиков В.Б. Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986.
11. Флитман Л.М. Динамическая задача о штампе на упругой полуплоскости. //ПММ. 1959. Т.23. Вып. 4. С.697-705.
12. Baker B.R. Dynamic stresses created by a moving crack. - Trans. ASME Ser. E. J. Appl. Mech. 1962. V.29. № 3.
13. Freund L.B. Crack-propagation in an elastic solid subjected to general lodding. 1-11 J. Mech. Phys. Solids, 1972 (1), p. 129, (2) p. 141, Vol. 20.
14. Maue A.W. Die Entspannungswelle bei plötzlichem Einschnitt eines gespannten elastischen Körpers. ZAMM. 1954. Bd.34. № 1-2. Pp. 1-12.


**Сведения об авторах:**


**Давтян Ануш Володяевна** – кандидат физ.-мат. наук, Горисский государственный университет, **E-mail:** davtyananush@gmail.com

# КРУЧЕНИЕ ВЯЗКОУПРУГОГО СЛОЯ ТОНКОЙ КРУГЛОЙ ШАЙБОЙ С УЧЁТОМ ФАКТОРА НЕОДНОРОДНОГО СТАРЕНИЯ

**Давтян З.А., Мирзоян С.Е., Акопян В.В., Гаспарян А.В**

В настоящей работе в постановке теории ползучести неоднородно-стареющих сред рассматривается задача кручения кусочно-однородного вязкоупругого слоя тонкой круглой шайбой, которые имеют разные вязкоупругие характеристики и возрасты. Вязкоупругий бесконечный слой по нижней грани жёстко защемлён, а его верхняя грань усилена тонкой круглой шайбой. На шайбу действуют касательные скручивающие силы, которые через контактную площадку передаются вязкоупругому основанию-слою.

**Введение.** Известно, что в постановке теории ползучести неоднородно-стареющих сред принцип Вольтерра не применим [1,2], т.е. операторы по пространственной и временной координате не отделяются друг от друга, и, поэтому, при решении контактных задач, задач о трещинах и других концентраторов напряжений возникают определённые трудности математического характера, которые в отдельных случаях можно преодолеть. В настоящей работе, тесно примыкающим к работам [3-5] методом интегрального преобразования Ханкеля рассматривается контактная задача вязкоупругого слоя при кручении, когда слой по нижней грани жёстко защемлён, а его верхняя грань усилена круглой вязкоупругой шайбой. Решение задачи сведено к решению интегрального уравнения (ИУ), в котором пространственные и временные операторы не отделяются друг от друга. Определяющее ИУ решается методом ортогональных многочленов Лежандра. Рассмотрен частный случай задачи.

**1. Постановка задачи и вывод определяющих уравнений**. Пусть в цилиндрической системе координат $(r,\varphi,z)$ круглая шайба радиуса $a$ и постоянной толщины $h_1$ $(h_1 \ll a)$ по основанию полностью сцеплена к слою $z=h_0$, нижняя грань которого жёстко защемлена. Будем считать, что материалы шайбы и основания обладают свойством ползучести, которые характеризуются неоднородностью процесса старения. Обозначим меру ползучести шайбы при чистом сдвиге через $\omega_1(r,t)$, модуль сдвига – через $G_1(t)$, возраст – через $\tau_1$, а соответствующие характеристики основания – через $\omega_2(r,t)$, $G_2(t)$, $\tau_2$.

Требуется определить закон распространения контактных напряжений $q(r,t)$ на площадке соединения шайбы со слоем, а также угол жёсткого кручения шайбы, если в момент времени $\tau_0$ к ней приложена сила интенсивности $q_0(r,t)$.

Выведем определяющие уравнения поставленной задачи. Уравнения равновесия круглой шайбы в разбираемой задаче, по аналогии с известными результатами из [6, 7], приводятся к модели Меллана при кручении тонкой круглой шайбы.

$$G_1(t)h_1\left(\frac{d^2\,\mathrm{v}_1}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\,\mathrm{v}_1}{dr}-\frac{\mathrm{v}_1}{r^2}\right)=q-q_0 \qquad (0<r<a) \tag{1.1}$$

Здесь $\mathrm{v}_1(r,t)$ – упруго-мгновенное перемещение точек шайбы в окружном направлении.

Решение уравнения (1.1) можно представить в виде

$$\mathrm{v}_1(r,t)=\frac{1}{2rG_1(t)h_1}\int_0^r\left(r^2-r_0^2\right)\left(q(r_0,t)-q_0(r_0,t)\right)dr_0+C_1(t)r \tag{1.2}$$

Здесь $C_1(t)$ – угол поворота шайбы.

Перемещение граничных точек слоя $\mathrm{v}_2(r,t)$, найденные при помощи преобразования Ханкеля, имеет вид [5]:

$$\mathrm{v}_2(r,t)=\frac{1}{G_2(t)}\int_0^a W(r,r_0)q(r_0,t)r_0dr_0 \tag{1.3}$$

$$W(r,r_0)=\int_0^{\infty}\operatorname{th}\left(\lambda h_0\right)J_1\left(\lambda r\right)J_1\left(\lambda r_0\right)d\lambda .$$

Здесь $J_1\left(r\right)$– бесселева функция первого рода индекса 1, $\lambda$ – спектральный параметр Ханкеля $(0<\lambda<\infty)$.

Соотношения (1.2) и (1,3), с учётом ползучести, примут вид [1,2]:

$$\mathrm{v}_1^*(r,t)=\left(I-L_1\right)\mathrm{v}_1(r,t)=\frac{1}{2rh_1G_1}\int_0^r\left(I-L_1\right)\left(r^2-r_0^2\right)\left(q(r_0,t)-q_0(r_0,t)\right)dr_0+C(t)r$$

$$\mathrm{v}_2^*(r,t)=\left(I-L_2\right)\mathrm{v}_2(r,t)=\left(I-L_2\right)\frac{1}{G_2(t)}\int_0^a W(r,r_0)q(r_0,t)r_0dr_0 \tag{1.4}$$

$$L_i\left[y\left(t\right)\right]=\int_{\tau_0}^t G_i\left(u\right)K_i\left(t+\rho_i,u+\rho_i\right)y(u)du \qquad (i=1,2)$$

$$K_i\left(t,u\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{G_i\left(u\right)}+\omega_i\left(t,u\right)\right] \qquad \rho_1=0,\ \ \rho_2=\tau_2-\tau_0,$$

где $I$ – единичный оператор.

Теперь принимая во внимание условие контакта на плоскости $z=h_0$

$$\mathrm{v}_1^*(r,t)=\mathrm{v}_2^*(r,t) \quad (0\le r<a), \tag{1.5}$$

перейдём к новым переменным, положив

$$\rho=r/a,\quad \rho_0=r_0/a,\quad h=h_0/a\quad s=\lambda a,\quad \mu=a/2h_1$$
$$\alpha(t)=G_2(t)/G_1(t),\quad W_{11}(\rho,\rho_0)=aW(a\rho,a\rho_0)$$
$$p(\rho,t)=aq(a\rho,t)/G_2(t),\quad p_0(\rho,t)=aq_0(a\rho,t)/G_1(t).$$

После элементарных выкладок получим следующее определяющее ИУ:

$$\begin{gathered}\left(I-L_2\right)\int_0^1 W_{11}(\rho,\rho_0)p(\rho_0,t)\rho_0d\rho_0-\left(I-L_2\right)\int_0^1 W_{12}(\rho,\rho_0)p(\rho_0,t)\rho_0d\rho_0-\\-\mu\left(I-L_1\right)\alpha(t)\frac{1}{\rho_0}\int_0^{\rho}\frac{\rho^2-\rho_0^2}{\rho}p(\rho_0,t)d\rho_0=F(\rho,t)\end{gathered} \tag{1.6}$$

$$W_{11}(\rho,\rho_0)=\int_0^{\infty}J_1\left(\rho s\right)J_1\left(\rho_0 s\right)ds,\qquad W_{12}(\rho,\rho_0)=\int_0^{\infty}\left[\operatorname{th}\left(sh\right)\text{-}1\right]J_1\left(\rho s\right)J_1\left(\rho_0 s\right)ds$$

$$F(\rho,t)=-\mu\left(I-L_1\right)\alpha(t)\int_0^{\rho}\frac{\rho^2-\rho_0^2}{\rho}p_0(\rho_0,t)d\rho_0+C(t)\rho$$

Решение уравнения (1.6) должно удовлетворять условию равновесия шайбы

$$\int_0^1\left[p(\rho_0,t)-p_0(\rho_0,t)\right]\rho_0^2d\rho_0=0. \tag{1.7}$$

**2. Решение определяющего ИУ.** Перейдя к решению ИУ (1.6) при условии (1.7), воспользуемся методом ортогональных полиномов Лежандра [8]. При помощи спектральных соотношений уравнение (1.6) можно свести к бесконечной системе ИУ Вольтерра. С этой целью решение (1.6) представим в виде бесконечного ряда:

$$p(\rho_0,t)=\frac{1}{\sqrt{1-\rho_0^2}}\sum_{n=0}^{\infty}X_n\left(t\right)P_{2n+1}^1\left(\sqrt{1-\rho_0^2}\right), \tag{2.1}$$

где $\left\{X_n\left(t\right)\right\}_{n=0}^{\infty}$ – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

Теперь подставляя (2.1) в (1.6) и принимая во внимание известные спектральные соотношения [8,9],

$$\int_0^1 W_{11}(\rho,\rho_0)\frac{P_{2n+1}^1\left(\sqrt{1-\rho_0^2}\right)}{\sqrt{1-\rho_0^2}}\rho_0 d\rho_0=\beta_n P_{2n+1}^1\left(\sqrt{1-\rho^2}\right),\qquad \beta_n=\frac{(2n+1)\Gamma(n+1/2)}{4n!(n+1)}, \tag{2.2}$$

где $\left\{P_m^1(x)\right\}_{m=0}^{\infty}$ – присоединённые функции Лежандра, ортогональные на интервале $(0,1)$ с весом $\sqrt{1-x^2}$ , по известной процедуре получим бесконечную систему ИУ Вольтерра:

$$X_m(t)-\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\tau_0}^{t}R_{m,n}(t,\tau)X_n(\tau)d\tau=B_m(t)\qquad (m=0,1,2,3,...) \tag{2.3}$$

Здесь введены обозначения:

$$R_{m,n}(t,\tau)=R_{m,n}^{(1)}+R_{m,n}^{(2)}+R_{m,n}^{(3)}+R_{m,n}^{(4)}+R_{m,n}^{(5)}$$

$$R_{m,n}^{(1)}(t,\tau)=K_2(t+\rho_{2,}\tau+\rho_2)\delta_{m,0}$$

$$R_{m,n}^{(2)}(t,\tau)=\alpha_m\delta(t-\tau)\int_0^1\frac{\Phi_n(\rho)P_{2m+1}^1\left(\sqrt{1-\rho^2}\right)}{\sqrt{1-\rho^2}}\rho d\rho$$

$$R_{m,n}^{(3)}(t,\tau)=R_{m,n}^{(2)}(t,\tau)K_2(t+\rho_{2,}\tau+\rho_2)$$

$$R_{m,n}^{(4)}(t,\tau)=\mu_m\alpha_m\alpha(\tau)\delta(t-\tau)\int_0^1\frac{\Psi_n(\rho)P_{2m+1}^1\left(\sqrt{1-\rho^2}\right)}{\sqrt{1-\rho^2}}\rho d\rho$$

$$R_{m,n}^{(5)}(t,\tau)=\alpha(\tau)R_{m,n}^{(4)}(t,\tau)K_1(t,\tau)$$

$$B_m(t)=-\mu_m\alpha_m(I-L_1)\alpha(t)\int_0^1\int_0^{\rho}\frac{(\rho^2-\rho_0^2)P_{2m+1}^1\left(\sqrt{1-\rho^2}\right)p_0(\rho_0,t)}{\sqrt{1-\rho^2}}d\rho_0 d\rho+\frac{4}{\pi}C(t)G_2(t)\delta_{m,0}$$

$$\Phi_n(\rho)=\int_0^1\frac{W_{12}(\rho,\rho_0)P_{2n+1}^1\left(\sqrt{1-\rho_0^2}\right)\rho_0}{\left(\sqrt{1-\rho_0^2}\right)}d\rho_0,\quad \Psi_n(\rho)=\int_0^{\rho}\frac{(\rho^2-\rho_0^2)P_{2n+1}^1\left(\sqrt{1-\rho_0^2}\right)\rho_0}{\rho\left(\sqrt{1-\rho_0^2}\right)}d\rho_0$$

Здесь $\delta_{m,0}$ – символ Кронекера, а $\delta(t-\tau)$ – дельта-функция Дирака.

Следовательно, решение поставленной задачи свелось к решению бесконечной системы ИУ Вольтерра. Из (1.7) и преставления (2.1) непосредственно находим:

$$X_0(t)=-\frac{3}{2}\int_{\tau_0}^{m}p_0(\rho_0,t)\rho_0^2 d\rho_0\,, \tag{2.4}$$

а угол поворота шайбы $C(t)$, который входит в выражение $B_m(t)$, можно определить из (2.3) при $m=0$, используя соотношение (2.4).

Можно вычислить коэффициенты концентрации контактных напряжений, выражающиеся формулой

$$K_{III}(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{\infty}X_n(t)P_{2n+1}^{1}(0).$$

**3. Частный случай.** Рассмотрим частный случай о передаче крутящих нагрузок от тонкой упругой круглой шайбы к вязкоупругому слою. Будем считать, что свойства слоя описываются в рамках наследственной теории вязкоупругости [10, 11]. Отличительной особенностью этих уравнений является то, что ядра ползучести зависят от разности аргументов.

Если принять, что мера ползучести материала слоя при чистом сдвиге определяется зависимостью [1, 2] $\omega_2(r,t)=2(1-\upsilon_2)\left[1-\exp\left(-\gamma(t-\tau)\right)\right]$, где $\gamma$ – постоянный параметр, определяемый из опыта, а $\upsilon_2$ – коэффициент Пуассона, то ядро ползучести для материала слоя имеет вид

$$K_2(t,\tau)=\frac{\partial\omega_2(t,\tau)}{\partial\tau}=K(t-\tau);\quad G_1(t)=G_1=\text{const};\ G_2(t)=G_2=\text{const}.$$

ИУ задачи в обсуждаемом случае примет вид

$$\begin{gathered}\left(I-L_2\right)\int_0^1 W_{11}(\rho,\rho_0)p(u_0,\xi)\rho_0 d\rho_0-\left(I-L_2\right)\int_0^1 W_{12}(\rho,\rho_0)p(\rho_0,\xi)\rho_0 d\rho_0-\\ -\mu_0\int_0^{\rho}\frac{\rho^2-\rho_0^2}{\rho}p(\rho_0,\xi)d\rho_0=f(\rho,\xi);\quad f(\rho,\xi)=-\mu_0\int_0^{\rho}\frac{\rho^2-\rho_0^2}{\rho}p_0(\rho_0,\xi)d\rho_0+C(\xi)\rho.\end{gathered}\tag{3.1}$$

Здесь введены обозначения:

$$t=\xi+\tau_0,\quad \tau=\eta+\tau_0,\quad p(\rho_0,\xi+\tau_0)=p(\rho_0,\xi),\quad f(\rho,\xi+\tau_0)=f(\rho,\xi),\quad \mu_0=\mu G_2/G_1.$$

К уравнению (3.1) следует присоединить условие равновесия шайбы

$$\int_0^1\left[p(\rho_0,\xi)-p_0(\rho_0,\xi)\right]\rho_0^2 d\rho_0=0.\tag{3.2}$$

Решение интегрального уравнения (3.1) способом, аналогичным изложенному выше, сведём к бесконечной системе интегральных уравнений Вольтерра:

$$\begin{gathered}X_m(\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}R_{m,n}^{(1)}X_n(\xi)+\mu_0\sum_{n=0}^{\infty}\left(I+R_2\right)R_{m,n}^{(2)}X_n(\xi)+\left(I+R_2\right)f_m(\xi)\qquad (m=0,1,2,3,...)\\ f_m(\xi)=\int_0^1 f(\rho,\xi)\frac{P_{2n+1}^{1}\left(\sqrt{1-\rho^2}\right)}{\sqrt{1-\rho^2}}\rho d\rho\end{gathered}\tag{3.3}$$

$$R_2\left[y(\xi)\right]=\int_0^{\xi}R(\xi-\eta)y(\eta)d\eta,\ \text{где}\ R(\xi-\eta)-\text{резольвента ядра}\ K(\xi-\eta).\tag{3.4}$$

Теперь применяя к обеим частям (3.3) преобразование Лапласа по переменной $\xi$, придём к следующей бесконечной системе линейных уравнений относительно трансформант неизвестных коэффициентов $\left\{X_m(\xi)\right\}_{m=0}^{\infty}$:

$$\overline{X_m}(p) = \sum_{n=0}^{\infty} R_{m,n}^{(1)} \overline{X_n}(p) - \mu_0 \left( I + \overline{R}(p) \right) \sum_{n=0}^{\infty} R_{m,n}^{(2)} \overline{X_n}(p) + \overline{d_m}(p) \qquad (m = 0,1,2,3,...), \tag{3.5}$$

где $\overline{X_m}(p)$, $\overline{R}(p)$, $\overline{d_m}(p)$ – трансформанты Лапласа от $X_m(\xi)$, $R(\xi)$, $d_m(\xi)$, соответственно.

Решая бесконечную систему (3.5), находим $\overline{X_m}(p)$, а затем при помощи обратного преобразования Лапласа определим решение исходного уравнения (3.1), а именно:

$$p(\rho,\xi) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \sum_{n=0}^{\infty} P_{2n+1}^{1}\left(\sqrt{1-\rho^2}\right) \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \overline{X_n}(p) e^{p\xi} dp\,.$$

## ЛИТЕРАТУРА


1. Арутюнян Н.Х. Некоторые задачи теории ползучести неоднородно-стареющих тел. //МТТ. 1976. №3.
2. Арутюнян Н.Х., Колмановский В.Б. Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983.
3. Давтян З.А. О кручении вязкоупругого полупространства посредством упругой круглой пластины. Ереван: Изд. АН Арм. ССР, 1981.
4. Давтян З.А., Мирзоян С.Е. О контактных задачах теории вязкоупругости с учетом фактора неоднородного старения. //В кн.: Всесоюзная конф. по смешанным задачам механики деформируемого тела. Тезисы докладов. Днепропетровск, ДГУ, 1981.
5. Davtyan Z.A., Gasparyan A.V., Knyazyan Sh.A. Contact Problems on Interaction of Thin-walled Elements with an Elastic Layer under TORSION. Proceedings of the 9th International Conference on Contemporary problems of Architecture and Construction, 13-18 September, 2017, Batumi, Georgia.
6. Melan E. EinBeitragzurTheoriegeschweisstenVerbindungen –//Ingr. Arch., Bd3, No2, 1932.
7. Bufler H. ZurKrafteinleitung in ScheibenübergeschwreißteodergeklebteVerbindungen. Österr. Ing. Arch, Bd. 18, №3-4, 1964.
8. Попов Г.Я. О методе ортогональных многочленов в контактных задачах теории упругости. //ПММ. 1969. Т.33. Вып. 3.
9. Мхитарян С.М. О спектральных соотношениях для интегральных операторов, приложенных ядром в виде интеграла Вебера-Сонина, и их приложениях к контактным задачам. //ПММ. 1984. Т.48. Вып.1.
10. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974.
11. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977.



**Сведения об авторах:**

**Давтян Завен Азибекович** – к.ф-м.н., ст. научный сотрудник, Институт механики НАН Армении.
**Мирзоян Саак Езникович** – к.ф-м.н., ст. научный сотрудник, Институт механики НАН Армении.
**Акопян Вазгануш Велихановна** – к.ф-м.н., научный сотрудник, Институт механики НАН Армении.
**Гаспарян Ануш Вараздатовна** – к.ф-м.н., ст. научный сотрудник, Институт механики НАН Армении, **Тел.:** (374 10) 52-48-90, **E-mail:** anush@mechins.sci.am

**РАСЧЁТ ТЕПЛОВЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ МАТЕРИАЛАХ В УСЛОВИЯХ ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИММЕТРИИ**

**Дац Е.П., Мурашкин Е.В.**

Настоящее исследование посвящено решению проблем деформации функционально-градиентных материалов при термообработке. Деформация такого материала рассматривается в рамках общепринятого континуума Прандтля-Рейсса. Поля остаточных напряжений и смещений были проанализированы графически.

В настоящее время существует обширная литература по функционально-градиентным материалам, конструкциям и покрытиям, посвящённая их свойствам, методам исследования и расчёта, а также технологиям изготовления. Так из последних работ по функционально-градиентным материалам можно отметить статьи [1-5], где можно найти достаточно полные обзоры литературы. Различные аспекты изучения функционально-градиентных конструкций обсуждаются в работах [6-12], включая их механические свойства.

Аддитивные технологии изготовления конструкций являются активно развивающейся областью механики в настоящий момент. Существует потребность в разработке и развитии методов механики деформируемого твёрдого тела, позволяющих с высокой степенью достоверности оценивать напряжённо-деформированное состояние получаемых изделий.

Исследование напряжённо-деформированного состояния многослойных (составных) конструкций может способствовать совершенствованию аддитивных технологий изготовления материалов, обладающих требуемыми прочностными и функциональными характеристиками. Изучение в таких процессах влияния теплового влияния позволяет учесть особенности формирования остаточных деформаций в условиях высоких температурных градиентов. Одним из способов формирования многослойного материала является присоединение разогретых частей, формирующих натяг в соединении при последующем остывании.

В простейшем случае двух слоёв данный технологический процесс соответствует горячей посадке. Очевидно, что учёт пластических свойств материала в данном случае позволяет более достоверно рассчитать уровень контактного давления, отвечающего за уровень прочности соединения. В более общих случаях присоединение составных частей материала может рассматриваться как процесс дискретного наращивания материала, используемый в технологии аддитивного изготовления изделий произвольной формы.

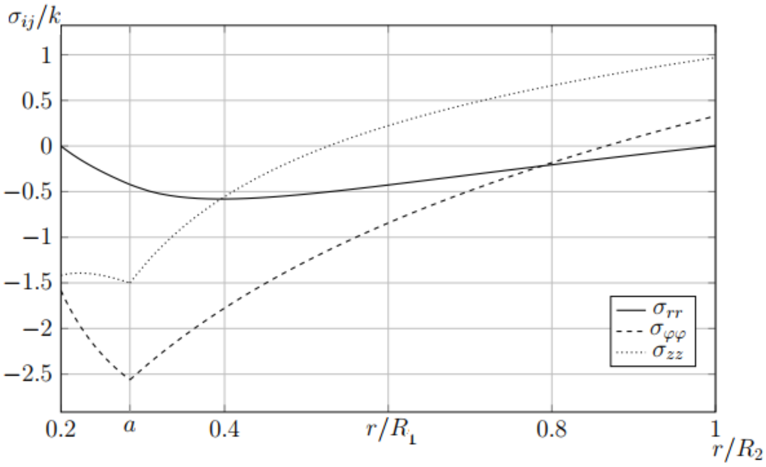



**Рисунок.** Распределение температурных напряжений в составном цилиндре: $R_0/R_2 = 0.2$, $R_1/R_2 = 0.6$

Следует отметить, что последовательность возникновения и развития областей необратимого деформирования ограничивается лишь случаем, что делает использование условия Ивлева более удобным при построении точных решений, учитывающих пластические свойства материала. Решения для условий Треска и Ивлева, полученные в рамках одинаковой постановки задачи могут быть использованы для построения нового аналитического решения, которое является полусуммой решений Треска и Ивлева. Данное новое решение может хорошо аппроксимировать численные решения, получаемые в рамках условия пластичности Мизеса.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А17-117021310381-8) при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17–01–00712, 19-51-60001, 18-51-05012).

## REFERENCE


1. Udupa G., Rao S.S., Gangadharan K.V. Functionally graded composite materials: An overview // Procedia Materials Science. 2014. Vol.5. P.1291–1299. DOI: 10.1016/j.mspro.2014.07.442.
2. Naebe M. Shirvanimoghaddam K. Functionally graded materials: A review of fabrication and properties // Applied Material Today. 2016. Vol.5. 223–245. DOI: 10.1016/j.apmt.2016.10.001.
3. Mahmoud D., Elbestawi M.A. Lattice structures and functionally graded materials applications in additive manufacturing of orthopedic implants: A review // Journal of Manufacturing and Materials Processing. 2017. Vol. 1. Iss. 2. P. 13. DOI: 10.3390/jmmp1020013.
4. Bhavar V., Kattire P., Thakare S., Patil Sachin, Singh R.K.P. A review on functionally gradient materials (FGMs) and their applications // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2017. Vol. 229. P. 012021.
5. Toudehdehghan A., Lim J.W., Foo K.E., Ma'arof M.I.N, Mathews J. A brief review of functionally graded materials // MATEC Web of Conferences. 2017. Vol.131. P.03010. DOI: 10.1051 /matecconf/201713103010.
6. Scheithauer U., Weingarten S., Johne R., Schwarzer E., Abel J., Richter H.J., Moritz T., Michaelis A. Ceramic-based 4D components: additive manufacturing (AM) of ceramic-based functionally graded materials (FGM) by thermoplastic 3D printing (T3DP) // Materials (Basel). 2017. Vol. 10. Iss. 12. E1368. DOI: 10.3390/ma10121368.
7. Burlayenko V.N., Altenbach H., Sadowski T., Dimitrova S.D., Bhaskar A. Modelling functionally graded materials in heat transfer and thermal stress analysis by means of graded finite elements // Applied Mathematical Modelling. 2017. Vol. 45. P. 422–438. DOI: 10.1016/j.apm.2017.01.005.
8. Craveiro F., Bártolo H., Bártolo P.J. Functionally graded structures through building manufacturing // Advanced Materials Research. 2013. Vol.683. P.775–778. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMR. 683. 775.
9. Tounsi A., Bedia E.A.A., Mahmoud S.R., Amziane S. Mathematical modeling and optimization of functionally graded structures // Mathematical Problems in Engineering. 2013. Vol.2013. P.536867. DOI: 10.1155/2013/536867.
10. Gupta A., Talha M. Recent development in modeling and analysis of functionally graded materials and structures // Progress in Aerospace Sciences. 2015. Vol.79. P.1–14. DOI: 10.1016/j.paerosci.2015.07.001.
11. Deng Q.-T., Yang Z.-C. Effect of poisson's ratio on functionally graded cellular structures // Materials Express. 2016. Vol. 6. Iss. 6. P. 461–472. DOI: 10.1166/mex. 2016.1341.
12. Pang T., Kang H., Yan X., Sun G., Li Q. Crashworthiness design of functionally graded structures with variable diameters // International Journal of Crashworthiness. 2017. Vol. 22. Iss.2. P.148 – 162. DOI: 10.1080/13588265.2016.1242548.


**Information about authors:**

**Дац Е.П.** – к. ф.-м. н., доцент, Владивостокский государственный университет экономики и сервиса, Владивосток.

**Мурашкин Е.В.** – к.ф-м.н., старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва. **E-mail:** murashkin@ipmnet.ru

# О ЗАДАЧЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПЕРЕМЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ ЛАМЕ НЕОДНОРОДНОГО ЦИЛИНДРА

**Дударев В.В., Мнухин Р.М.**

Используя общие соотношения линейной теории упругости, рассмотрена задача об установившихся осесимметричных колебаниях неоднородного полого цилиндра. Упругие свойства считаются переменными по радиальной координате. Применяя метод разделения переменных, решена прямая задача об определении поля перемещений. Проанализировано влияние законов изменения параметров Ламе на амплитудно-частотные характеристики. Сформулирована новая обратная коэффициентная задача об определении этих параметров. Численное решение построено с помощью итерационного процесса. На основе общей слабой постановки для упругого неоднородного тела после линеаризации получена система интегральных уравнений Фредгольма первого рода относительно двух неизвестных поправок. Представлены примеры реконструкции.

В настоящее время, благодаря развитию высокоточных производственных процессов, применение неоднородных материалов при изготовлении различных изделий становится всё более популярным. Это обусловлено важными преимуществами таких материалов по сравнению с обычными многослойными композитами: существенное снижение вероятности появления расслоений и трещин, более экономичное использование материала при создании конструкций с заданными механическими характеристиками. Технология производства неоднородных материалов с требуемыми переменными свойствами является достаточно сложной и требует на последнем этапе осуществление точной процедуры комплексной оценки качества изделия. Знание законов изменения материальных свойств тела позволяет более точно осуществлять расчёты на прочность, устойчивость и анализ свободных колебаний, которые обычно проводятся для объектов ответственного назначения. Наиболее востребованными методами диагностики свойств тела являются неразрушающие подходы, среди которых можно отметить акустический метод [1].

**1.** В рамках линейной теории упругости общая постановка задачи об установившихся колебаниях изотропного неоднородного упругого тела может быть записана в виде [2]:

$$\begin{cases} \nabla\cdot\underline{\underline{\sigma}}+\rho\omega^2\underline{u}=0, \\ \underline{\underline{\sigma}}=\lambda\underline{\underline{E}}tr\underline{\underline{\varepsilon}}+2\mu\underline{\underline{\varepsilon}}, \\ \underline{\underline{\varepsilon}}=0.5\left(\nabla\underline{u}+\nabla\underline{u}^T\right), \\ \underline{u}\big|_{S_u}=0, \\ \underline{n}\cdot\underline{\underline{\sigma}}\big|_{S_\sigma}=\underline{P}, \end{cases} \tag{1.1}$$

где $\underline{\underline{\sigma}}$ – тензор напряжений Коши, $\rho$ – плотность, $\omega$ – круговая частота колебаний, $\underline{u}$ – вектор перемещений, $\lambda$, $\mu$ – параметры Ламе, $\underline{\underline{\varepsilon}}$ – линейный тензор деформаций, $\underline{\underline{E}}$ – единичный тензор, $\underline{n}$ – единичный вектор внешней нормали, $S=S_u\cup S_\sigma$ – поверхность тела, $\underline{P}$ – вектор внешней нагрузки. Величины $\lambda$, $\mu$ и $\rho$ считаются переменными по пространственным координатам.

**2.** Рассмотрим задачу об осесимметричных колебаниях неоднородного полого цилиндра в цилиндрической системе координат $(r,\varphi,z)$. Цилиндр имеет высоту $2h$, внутренний радиус $r_1$ и внешний радиус $r_2$. Торцы цилиндра находятся в условиях скользящей заделки. Колебания вызываются распределённой по закону $q(z)$ нормальной нагрузкой с амплитудой $p^0$. На внутренней поверхности цилиндра нагрузки отсутствуют. Свойства цилиндра изменяются только по радиальной координате: $\lambda=\lambda(r)$, $\mu=\mu(r)$, $\rho=\rho(r)$. Постановка задачи для рассматриваемого цилиндра на основе (1.1) примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}+\dfrac{\partial\sigma_{zr}}{\partial z}+\dfrac{\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi}}{r}+\rho\omega^2 u_r=0, \dfrac{\partial\sigma_{rz}}{\partial r}+\dfrac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}+\dfrac{\sigma_{rz}}{r}+\rho\omega^2 u_z=0, \\ r\in[r_1,r_2], z=\pm h, u_z=0, \sigma_{rz}=0, \\ r=r_1, z\in[-h,h], \sigma_{rr}=0,\ \sigma_{rz}=0, \\ r=r_2, z\in[-h,h], \sigma_{rr}=-p^0 q(z),\ \sigma_{rz}=0, \end{cases} \tag{2.1}$$

где $\sigma_{rr}=2\mu\varepsilon_{rr}+\lambda e$, $\sigma_{zr}=\sigma_{rz}=2\mu\varepsilon_{zr}$, $\sigma_{\varphi\varphi}=2\mu\varepsilon_{\varphi\varphi}+\lambda e$, $\sigma_{zz}=2\mu\varepsilon_{zz}+\lambda e$, $\varepsilon_{rr}=\dfrac{\partial u_r}{\partial r}$, $\varepsilon_{\varphi\varphi}=\dfrac{u_r}{r}$, $\varepsilon_{zz}=\dfrac{\partial u_z}{\partial z}$, $\varepsilon_{rz}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_z}{\partial r}+\dfrac{\partial u_r}{\partial z}\right)$, $e=\varepsilon_{rr}+\varepsilon_{\varphi\varphi}+\varepsilon_{zz}$, $u_r=u_r(r,z)$, $u_z=u_z(r,z)$ – компоненты вектора смещения $\underline{u}$. Решение задачи будем строить с помощью метода разделения переменных в виде: $u_r(r,z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}U_k(r)\cos(\nu_k z)$, $u_z(r,z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}W_k(r)\sin(\nu_k z)$, $\nu_k=\pi k/h$, $k\in 0,1...$ Будем считать, что закон изменения внешней нагрузки допускает представление: $q(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}P_k\cos(\nu_k z)$, $P_k=h^{-1}\int\limits_{-h}^{h}q(z)\cos(\nu_k z)dz$. Запишем выражения для компонент тензора напряжений: $\sigma_{rr}(r,z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}R_{1k}(r)\cos(\nu_k z)$, $\sigma_{zr}(r,z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}R_{2k}(r)\sin(\nu_k z)$, $\sigma_{\varphi\varphi}(r,z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}R_{3k}(r)\cos(\nu_k z)$, $\sigma_{zz}(r,z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}R_{4k}(r)\cos(\nu_k z)$.

Введём в рассмотрение безразмерные функции и параметры: $r=r_2\xi$, $\xi\in[\xi_0,1]$, $\xi_0=r_1/r_2$, $U_k(r)=r_2u_k(\xi)$, $W_k(r)=r_2w_k(\xi)$, $\beta_k=r_2\nu_k$, $p_k=p^0P_k/\lambda^*$, $\lambda(r)=\lambda^*\tilde{\lambda}(\xi)$, $\mu(r)=\mu^*\tilde{\mu}(\xi)$, $\rho(r)=\rho^*\tilde{\rho}(\xi)$, $c^*=\mu^*/\lambda^*$, $\kappa^2=\rho^*\omega^2r_2^2/\lambda^*$, $R_{1k}(r)=\lambda^*s_{1k}(\xi)$, $R_{2k}(r)=\lambda^*s_{2k}(\xi)$, $R_{3k}(r)=\lambda^*s_{3k}(\xi)$, $R_{4k}(r)=-\lambda^*s_{4k}(\xi)$. На основе (2.1) получен набор краевых задач:

$$, \begin{cases} u_k'=\dfrac{s_{1k}-\tilde{\lambda}\left(\dfrac{u_k}{\xi}+\beta_k w_k\right)}{\tilde{\lambda}+2c^*\tilde{\mu}} \\ w_k'=\dfrac{s_{2k}}{c^*\tilde{\mu}}+\beta_k u_k \\ s_{1k}'=-\left(\beta_k s_{2k}+\dfrac{s_{1k}-s_{3k}}{\xi}+\kappa^2\tilde{\rho}u_k\right),\ k=1,2... \\ s_{2k}'=-\left(\beta_k s_{4k}+\dfrac{s_{2k}}{\xi}+\kappa^2\tilde{\rho}w_k\right) \\ s_{1k}(\xi_0)=0, s_{2k}(\xi_0)=0 \\ s_{1k}(1)=-p_k, s_{2k}(1)=0 \end{cases} \tag{2.2}$$

$$s_{3k}=\left(\tilde{\lambda}+2c^*\tilde{\mu}\right)\frac{u_k}{\xi}+\tilde{\lambda}\beta_k w_k+\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda}+2c^*\tilde{\mu}}\left(s_{1k}-\tilde{\lambda}\left(\frac{u_k}{\xi}+\beta_k w_k\right)\right),\ k=0,1... \tag{2.3}$$

$$s_{4k}=-\left(\left(\tilde{\lambda}+2c^*\tilde{\mu}\right)\beta_k w_k+\tilde{\lambda}\frac{u_k}{\xi}+\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda}+2c^*\tilde{\mu}}\left(s_{1k}-\tilde{\lambda}\left(\frac{u_k}{\xi}+\beta_k w_k\right)\right)\right),\ k=1,2... \tag{2.4}$$

Задачи (2.2) являются линейными относительно искомых функций $u_k(\xi)$, $w_k(\xi)$, $s_{1k}(\xi)$, $s_{2k}(\xi)$ и их решения при заданных $\tilde{\lambda}(\xi)$, $\tilde{\mu}(\xi)$, $\tilde{\rho}(\xi)$ могут быть получены численно с помощью метода пристрелки [3]. Задавая $\tilde{\lambda}(\xi)$, $\tilde{\mu}(\xi)$, $\tilde{\rho}(\xi)$ в виде функций определенного класса (гладкие, кусочно-постоянные и т.д.), можно исследовать акустические свойства цилиндров с различными переменными материальными свойствами. На основе построенного численного решения (2.2) выявлено, что различные законы изменения параметров Ламе существенно влияют на амплитудно-частотные характеристики цилиндра в окрестности резонансов.

**3.** Рассмотрим обратную коэффициентную задачу об одновременном определении законов $\tilde{\lambda}(\xi)$, $\tilde{\mu}(\xi)$ по данным об амплитудно-частотной характеристике цилиндра $\tilde{f}_k(1,\kappa) = f_k(r_2,\omega)/r_2$, заданной в частотном диапазоне $\kappa \in [\kappa^-, \kappa^+]$.

Для получения необходимых соотношений, связывающих искомые и заданные величины, воспользуемся методом, описанным в работе [4]. Выпишем общую слабую постановку задачи для изотропного неоднородного упругого тела:

$$\int_V \left(\lambda \mathrm{tr}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\left(\underline{u}\right)\right)\mathrm{tr}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\left(\underline{v}\right)\right) + 2\mu\underline{\underline{\varepsilon}}\left(\underline{u}\right)\odot\underline{\underline{\varepsilon}}\left(\underline{v}\right)\right)dV - \omega^2\int_V \rho\underline{u}\cdot\underline{v}\,dV = \int_{S_\sigma}\left(\underline{P}\cdot\underline{v}\right)dS_\sigma \tag{3.1}$$

или кратко

$$A(\lambda,\mu,\underline{u},\underline{v}) = B(\underline{v}). \tag{3.2}$$

Оператор $A(\lambda,\mu,\underline{u},\underline{v})$ является линейным по каждому из четырёх аргументов. Для формулировки обобщённого соотношения взаимности рассмотрим два состояния, которым соответствуют два набора характеристик: $\lambda^{(1)}$, $\mu^{(1)}$, $\underline{u}^{(1)}$ и $\lambda^{(2)}$, $\mu^{(2)}$, $\underline{u}^{(2)}$. Используя технику из работы [4], рассмотрим выражение:

$$A(\lambda^{(1)},\mu^{(1)},\underline{u}^{(1)},\underline{u}^{(2)}) - A(\lambda^{(2)},\mu^{(2)},\underline{u}^{(2)},\underline{u}^{(1)}) = B(\underline{u}^{(2)}) - B(\underline{u}^{(1)}). \tag{3.3}$$

Осуществим линеаризацию по правилу: $\lambda^{(1)} = \lambda^{(n-1)}$, $\lambda^{(2)} = \lambda^{(n-1)} + \lambda^{(n)}$, $\mu^{(1)} = \mu^{(n-1)}$, $\mu^{(2)} = \mu^{(n-1)} + \mu^{(n)}$, $\underline{u}^{(1)} = \underline{u}^{(n-1)}$, $\underline{u}^{(2)} = \underline{u}^{(n-1)} + \underline{u}^{(n)}$, где $\lambda^{(n)}$, $\mu^{(n)}$ и $\underline{u}^{(n)}$ – малые поправки к соответствующим функциям. Пренебрегая слагаемыми второго порядка малости, получим:

$$\int_V \left[\lambda^{(n)}\left[\mathrm{tr}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\left(\underline{u}^{(n-1)}\right)\right)\right]^2 + 2\mu^{(n)}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\left(\underline{u}^{(n-1)}\right)\right)^2\right]dV = -\int_{S_\sigma}\underline{P}\left(\underline{f} - \underline{u}^{(n-1)}\right)dS_\sigma,\ \omega\in[\omega^-,\omega^+], \tag{3.4}$$

где $\underline{f}$ – функция смещения (амплитудно-частотная характеристика), измеренная на границе тела. На основе (3.4) получим необходимые соотношения для решения сформулированной обратной задачи для цилиндра. Учитывая выражение для тензора деформации (1.1) и вектора $\underline{P} = -p^0\sum_{k=0}^{\infty} P_k\cos\left(\nu_k z\right)\underline{e}_r$, осесимметричность задачи, получим систему уравнений при каждом значении частоты $\kappa\in[\kappa^-,\kappa^+]$, записанные в безразмерном виде:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\xi_0}^{1}\left(\tilde{\lambda}^{(n)}(\xi)K_{10}\left(\xi\right) + \tilde{\mu}^{(n)}(\xi)K_{20}\left(\xi\right)\right)\xi d\xi = p_0\left(\tilde{f}_0(1,\kappa) - u_0^{(n-1)}(1,\kappa)\right) \\ \displaystyle\int_{\xi_0}^{1}\left(\tilde{\lambda}^{(n)}(\xi)K_{1k}\left(\xi\right) + \tilde{\mu}^{(n)}(\xi)K_{2k}\left(\xi\right)\right)\xi d\xi = p_k\left(\tilde{f}_k(1,\kappa) - u_k^{(n-1)}(1,\kappa)\right), k = 1,2... \end{cases} \tag{3.5}$$

где

$$\begin{cases} K_{10}(\xi)=\left(u_0^{(n-1)\prime}(\xi)+\dfrac{u_0^{(n-1)}(\xi)}{\xi}\right)^2, \quad K_{20}(\xi)=2c^*\left(\left(u_0^{(n-1)\prime}(\xi)\right)^2+\dfrac{1}{\xi^2}\left(u_0^{(n-1)}(\xi)\right)^2\right) \\ K_{1k}(\xi)=\left(u_k^{(n-1)\prime}(\xi)+\dfrac{u_k^{(n-1)}(\xi)}{\xi}+\beta_k w_k^{(n-1)}(\xi)\right)^2 \\ K_{2k}(\xi)=2c^*\left(\left(u_k^{(n-1)\prime}(\xi)\right)^2+\dfrac{1}{2}\left(w_k^{(n-1)\prime}(\xi)-\beta_k u_k^{(n-1)}(\xi)\right)^2+\dfrac{1}{\xi^2}\left(u_k^{(n-1)}(\xi)\right)^2+\left(\beta_k w_k^{(n-1)}(\xi)\right)^2\right) \end{cases} \tag{3.6}$$

Полученные выражения (3.5) представляют собой систему интегральных уравнений Фредгольма первого рода с гладкими ядрами относительно двух поправок $\tilde{\lambda}^{(n)}$ и $\tilde{\mu}^{(n)}$ при известных значениях функций смещений $u_k^{(n-1)}$ и $w_k^{(n-1)}$. На их основе можно организовать итерационный процесс для определения искомых функций $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{\mu}$, описанный в статьях [4, 5]. При этом отметим важную для практического решения системы положительность ядер (3.6). Численное решение уравнения Фредгольма первого рода является некорректной задачей, поэтому необходимо использовать специальные методы, например, метод регуляризации Тихонова [6]. Ядра (3.6) содержат первые производные от функций $u_k^{(n-1)}$ и $w_k^{(n-1)}$. Для повышения точности их вычисления использованы выражения из (2.2) и решения соответствующих прямых задач.

В качестве примера реконструкции свойств неоднородного материала рассмотрим цилиндр, изготовленный из медь-карбид вольфрама (Cu-WC): $h=0.5$ м, $\xi_0=0.8$, $\rho^*=8900$ кг/м$^3$ ($\tilde{\rho}(\xi)=1$), $p^0=10^{11}$, $q(z)=1-(z/h)^2$, $\lambda^*_{Cu}=0.95\cdot 10^{11}$ Па, $\mu^*_{Cu}=0.41\cdot 10^{11}$ Па, $\lambda^*_{WC}=1.97\cdot 10^{11}$ Па, $\mu^*_{WC}=2.96\cdot 10^{11}$ Па. Законы изменения – убывающие функции: $\tilde{\lambda}(\xi)=-15\xi^2+21.9\xi-5.95$, $\tilde{\mu}(\xi)=-35\xi^2+50.25\xi-14.84$. При построении итерационных процессов для обратных некорректных задач важным аспектом является выбор начального приближения, близкого к точному решению. Здесь начальное приближение отыскивается в виде линейных функций $\tilde{\lambda}_0(\xi)=k_1\xi+b_1$, $\tilde{\mu}_0(\xi)=k_2\xi+b_2$. При этом, параметры $k_i$, $b_i$ вычисляются по априорной информации о значениях искомых функций только на границах отрезка ($\lambda^-$, $\lambda^+$, $\mu^-$, $\mu^+$), которые могут быть определены из экспериментов или заданы техническими условиями.

Следует отметить, что итерационный процесс определения одновременно сразу двух поправок $\tilde{\lambda}^{(n)}(\xi)$, $\tilde{\mu}^{(n)}(\xi)$ может быть построен на основе любых двух интегральных уравнений из (3.5)**Error! Reference source not found.**. Однако, практическая реализация данной процедуры реконструкции осложнена из-за структуры ядер (3.6). Выполненные расчёты показывают, что значения ядра $K_{2k}(\xi,\kappa)$ значительно больше, чем значения $K_{1k}(\xi,\kappa)$. Это приводит к вычислительным трудностям при одновременном определении $\tilde{\lambda}^{(n)}(\xi)$, $\tilde{\mu}^{(n)}(\xi)$. Вследствие такой особенности был предложен двухэтапный итерационный процесс реконструкции искомых законов. На первом этапе идентификации считалось, что значения поправок $\tilde{\mu}^{(n)}(\xi)=0$, что означало равенство модуля сдвига выбранному начальному приближению. С учётом этого допущения на каждой итерации определяются поправки $\tilde{\lambda}^{(n)}(\xi)$ как решение одного из интегральных уравнений (3.5). Поиск $\tilde{\lambda}(\xi)$ останавливается по условию достижения максимального наперёд заданного количества итераций $N$ или малости правой части рассматриваемого интегрального уравнения. На втором этапе фиксируется найденная функция $\tilde{\lambda}(\xi)$, а соответствующие поправки $\tilde{\lambda}^{(n)}(\xi)=0$ и на каждой последующей итерации аналогично определяются поправки $\tilde{\mu}^{(n)}(\xi)$ как решение одного из интегральных уравнений (3.5). Остановка процесса осуществлялась по тем же условиям, как на первом этапе.

На рис.1 в качестве примера решения обратной задачи представлены графики начального приближения (штриховая линия), точного решения (сплошная линия) и восстановленного решения (точки), полученного с помощью предложенного итерационного процесса для интегральных уравнений при $k=0$. Начальные приближения $\tilde{\lambda}_0(\xi)=-5.1\xi+6.05$, $\tilde{\mu}_0(\xi)=-12.75\xi+13.16$, выход осуществлён по числу итераций ( $N=20$ ), частотный диапазон для реконструкции $\tilde{\lambda}(\xi)$: $\kappa\in[1.8,2.1]$, частотный диапазон для реконструкции $\tilde{\mu}(\xi)$: $\kappa\in[4.4,11.5]$.

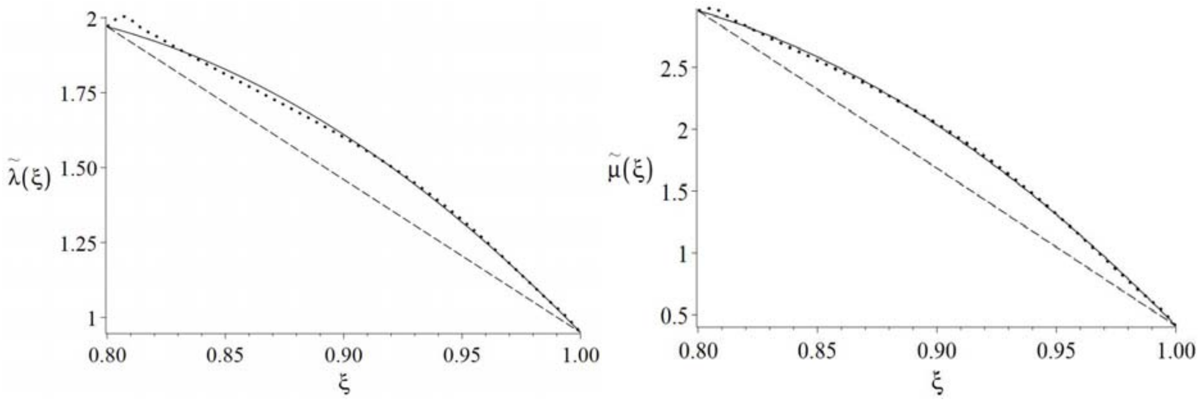



Рис.1. Реконструкция монотонно убывающих функций

Из графиков видно, что решение обратной задачи может быть построено достаточно точно. При этом, главной особенностью получения такого решения является выбор частотного диапазона. Аналогичные результаты были получены для монотонно возрастающих функций.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 18-71-10045.

**ЛИТЕРАТУРА**


1. Michel Grédiac, François Hild, André Pineau. Full-Field Measurements and Identification in Solid Mechanics. John Wiley & Sons, Inc. 2012. 476 p.
2. Lurie A.I., Belyaev A. Theory of Elasticity. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 2005. 1050 p.
3. A. D. Polyanin and V. F. Zaitsev. Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems, CRC Press, Boca Raton–London, 2018. 1496 p.
4. Vatul'yan A.O. The theory of inverse problems in the linear mechanics of a deformable solid // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2010. V.74. №6. P.648–653.
5. Dudarev V.V., Mnukhin R.M., Vatulyan A.O., Nedin R.D., Gusakov D.V. On the determination of the Biot modulus of poroelastic cylinder // ZAMM Journal of applied mathematics and mechanics. 2019. V.99. №3. P. e201800137.
6. Tikhonov A.N., Arsenin V.Y. Solution of Ill-posed Problems. Washington: Winston & Sons, 1977, 270 p.


**Информация об авторах**


**Дударев Владимир Владимирович** – к.ф.-м.н., доцент кафедры теории упругости, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича; старший научный сотрудник, Южный математический институт +7 (863) 297−51−14 (доб. 110)
**E-mail:** dudarev_vv@mail.ru

**Мнухин Роман Михайлович** – аспирант, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича +7 (863) 297–51–14 (доб. 110)
**E-mail:** romamnuhin@yandex.ru

# СВЯЗАННЫЕ АСИМПТОТИКИ ПРОЦЕССОВ ВЗАИМНОЙ ДИФФУЗИИ, ВЯЗКОУПРУГОЙ ДЕФОРМАЦИИ, ХИМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ И ЭВОЛЮЦИИ МИКРОСТРУКТУРЫ

**Дудин Д.С., Келлер И.Э.**

Рассматривается модель связанных квазистатических процессов взаимной диффузии, вязкоупругого деформирования, химических реакций и эволюции микроструктуры в трёхкомпонентной среде в изотермических условиях. Ставится одномерная модельная задача, допускающая однородное стационарное решение. Рассматриваются малые возмущения данного решения, ведущие к системе связанных линейных дифференциальных уравнений и задаче на собственные значения, позволяющей изучить спектр времён релаксации возмущённого процесса в зависимости от длины волны возмущения. Изучены асимптотики данных зависимостей, отвечающих простейшим связанным процессам.

**1. Введение.** Уравнения квазистатических изотермических процессов взаимной диффузии в многокомпонентных деформируемых твёрдых телах (металлических сплавах) с химическими реакциями и эволюцией микроструктуры требуются для моделирования разнообразных задач: предсказания ресурса коррозионной усталости и трещиностойкости нагружённых деталей машин, определения рациональных параметров технологических процессов азотирования и цементирования последних, описания расслоения атомного состава металлических порошковых композиций при интенсивных пластических деформациях. Благодаря своей связанности, данные процессы представляют большую сложность для понимания. Для этого обычно рассматриваются различные модельные задачи [1-4]. В данной работе модель совместного вязкого течения и диффузии бинарного сплава [1] обобщается на химически реагирующую тернарную смесь, для которой дополнительно учитывается возникновение упругих деформаций и эволюция микроструктуры. Для качественного анализа уравнений используется задача, предложенная в [2].

**2. Свободная энергия Гельмгольца.** Рассматривается трёхкомпонентная сплошная среда, в которой может протекать обратимая химическая реакция

$$\nu_A A + \nu_B B \leftrightarrows \nu_C C\,,$$

где $\nu_A$, $\nu_B < 0$, $\nu_C > 0$ – стехиометрические коэффициенты её реагентов и продукта, а *A, B, C* – их химические формулы.

Полагается, что свободная энергия $\psi$ зависит от концентраций атомов $C_\alpha$ (здесь и далее $\alpha = A, B, C$), микроструктурного параметра *H* площади микротрещин в единице объёма в отчётной конфигурации и упругих деформаций $\varepsilon^e$

$$\psi = \psi(C_A, C_B, C_C, H, \varepsilon^e)\,. \tag{2.1}$$

Материальная производная выражения (2.1) есть

$$\dot\psi = F_A \dot C_A + F_B \dot C_B + F_C \dot C_C + F_H \dot H + \boldsymbol{F}_e : \dot\varepsilon^e\,, \tag{2.2}$$

где $F_A = \partial\psi / \partial C_A$, $F_B = \partial\psi / \partial C_B$, $F_C = \partial\psi / \partial C_C$ – парциальные энергии смешения, $F_H = \partial\psi / \partial H$ – микроструктуры, $\boldsymbol{F}_e = \partial\psi / \partial\varepsilon^e$ — упругих деформаций.

В предположении об идеальном смешении атомов различных объёмов принимаются выражения для парциальных энергий смешения в виде [5]

$$\begin{gathered}
F_B = kT\left(\frac{\xi_C\left(V_C(\xi_A,\xi_B) - V_B(\xi_A,\xi_B)\right) + \xi_A\left(V_A(\xi_A,\xi_B) - V_B(\xi_A,\xi_B)\right)}{V_m(\xi_A,\xi_B)} + \ln\frac{\xi_B V_B(0,1)}{V_m(\xi_A,\xi_B)}\right)\\
F_A = kT\left(\frac{\xi_C\left(V_C(\xi_A,\xi_B) - V_A(\xi_A,\xi_B)\right) + \xi_B\left(V_B(\xi_A,\xi_B) - V_A(\xi_A,\xi_B)\right)}{V_m(\xi_A,\xi_B)} + \ln\frac{\xi_A V_A(1,0)}{V_m(\xi_A,\xi_B)}\right)\\
F_C = kT\left(\frac{\xi_B\left(V_B(\xi_A,\xi_B) - V_C(\xi_A,\xi_B)\right) + \xi_A\left(V_A(\xi_A,\xi_B) - V_C(\xi_A,\xi_B)\right)}{V_m(\xi_A,\xi_B)} + \ln\frac{\xi_C V_C(0,0)}{V_m(\xi_A,\xi_B)}\right)
\end{gathered} \tag{2.3}$$

где $\xi_\alpha = C_\alpha / \left(C_A + C_B + C_C\right)$ – переменные состава, $T$ – температура, $k$ – постоянная Больцмана, $V_\alpha$ – парциальные объёмы, $V_m = V_A\xi_A + V_B\xi_B + V_C\xi_C$ – средний парциальный объём.

Для парциальной энергии микроструктуры принимается квазилинейный вид

$$F_H = f_{HA}C_A + f_{HB}C_B + f_{HC}C_C + f_{HH}H\,, \tag{2.4}$$

причём, для обеспечения релаксации микроструктурного параметра необходимо, чтобы $f_{HH} \ge 0, \quad f_{HA} \le 0, \quad f_{HB} \le 0, \quad f_{HC} \le 0$.

**3. Термодинамическое неравенство.** Согласно второму закону термодинамики свободная энергия Гельмгольца изолированной системы не способна расти [6]

$$\int_V \dot\psi\, dV + \int_S \left(\mu_A \boldsymbol{J}_A + \mu_B \boldsymbol{J}_B + \mu_C \boldsymbol{J}_C\right)\cdot \boldsymbol{N}\, dS - \int_V \Omega\boldsymbol{\sigma} : \dot\varepsilon\, dV \le 0\,, \tag{3.1}$$

где $\mu_\alpha$ – химические потенциалы компонент, а $\boldsymbol{J}_\alpha$ – их диффузионные потоки в отчётной конфигурации, $\varepsilon = \varepsilon_m \boldsymbol{I}/3 + \boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{e}$ – тензор полных деформаций и его девиатор, $\Omega$=1+$\varepsilon_m$ – коэффициент объёмного расширения, $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_m \boldsymbol{I} + \boldsymbol{s}$ и $\boldsymbol{s}$ – тензор напряжений Коши и его девиатор, $V$ и $S$ – объём и площадь поверхности тела в отчётной конфигурации, $\boldsymbol{N}$ – нормаль.

Для компонент справедливы уравнения баланса массы

$$\dot C_\alpha = -\nabla\cdot \boldsymbol{J}_\alpha + R_\alpha\,, \tag{3.2}$$

где $R_\alpha$ – производства компонент, а микроструктурный параметр удовлетворяет эволюционному уравнению

$$\dot H = R_H\,, \tag{3.3}$$

где $R_H$ – его производство. В отличие от работы [3], здесь не рассматривается кондуктивный поток микроструктурной переменной.

Применение теоремы о дивергенции к (3.1) с учётом (3.2) даёт

$$\int_V \left( \Omega\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \sum_{\alpha=A,B,C} \left(\mu_\alpha \dot C_\alpha - \boldsymbol{J}_\alpha \cdot \nabla\mu_\alpha - R_\alpha\mu_\alpha\right) - \dot\psi \right) dV \ge 0\,. \tag{3.4}$$

Неравенство (3.4), справедливое для произвольного выделенного объёма, с учётом (2.2), (3.3) и тождества $\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \sigma_m \dot\varepsilon_m + \boldsymbol{s} : \dot{\boldsymbol{e}}$ принимает вид

$$\Omega\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \sum_{\alpha=A,B,C} \left( \left( \frac{\mu_\alpha - F_\alpha}{V_i} + \sigma_m \right) V_\alpha \dot C_\alpha - \boldsymbol{J}_\alpha \cdot \nabla\mu_\alpha - R_\alpha\mu_\alpha \right) - \boldsymbol{F}_e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e - F_H R_H \ge 0\,. \tag{3.5}$$

Перепишем его в терминах актуальной конфигурации с учётом обозначений $c_i = C_i/\Omega$, $\boldsymbol{J}_i \cdot \nabla\mu_i = \Omega \boldsymbol{j}_i \cdot \hat\nabla\mu_i$, $i_i = V_i \dot C_i / \Omega = V_i \dot c_i + c_i V_i \hat\nabla\cdot v$, $r_H = R_H/\Omega$, $r_i = R_i/\Omega = \nu_i \dot\xi$, где $\dot\xi$ – скорость химической реакции, $A = \sum \nu_i \mu_i$ (химическое сродство) и разделения тензора полных деформаций на упругую и вязкую составляющие $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^v$. Термодинамическое неравенство (3.5) принимает окончательный вид

$$\sum_{\alpha=A,B,C} \left( \left( \frac{\mu_\alpha - F_\alpha}{V_\alpha} + \sigma_m \right) i_\alpha - \boldsymbol{j}_\alpha \cdot \hat\nabla\mu_\alpha \right) + \boldsymbol{s} : \dot{\boldsymbol{e}}^v - A\dot\xi - F_H r_H + \boldsymbol{s} : \dot{\boldsymbol{e}}^e + \sigma_m \dot\varepsilon_m^e - \frac{\boldsymbol{F}_e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e}{\Omega} \ge 0, \tag{3.6}$$

**4. Определяющие соотношения.** Материальные уравнения, описывающие консервативные и диссипативные процессы, должны удовлетворять неравенству (3.6).

Химические потенциалы с учётом кинетики объёмного внедрения компонент без учёта перекрестных эффектов могут быть представлены в виде

$$\mu_i = F_i + \beta_i V_i i_i - \sigma_m V_i\,, \tag{4.1}$$

где $\beta_\alpha \ge 0$ – объёмные вязкости, знак которых определяется по (3.5).

Кинетические уравнения диффузии записываются в виде

$$\boldsymbol{j}_\alpha = -c_\alpha M_\alpha \hat\nabla\mu_\alpha\,, \tag{4.2}$$

где $M_\alpha$ – коэффициенты мобильности компонент.

Кинетика сдвигового течения полагается соответствующей реологии линейно-вязкой жидкости

$$\boldsymbol{s} = 2\eta \dot{\boldsymbol{e}}^v , \tag{4.3}$$

где $\eta$ –коэффициент сдвиговой вязкости.

Кинетика химической реакции и роста микроструктуры также принимается в виде линейных уравнений

$$A = -\beta_\xi \dot{\xi} , \tag{4.4}$$

$$F_H = -\beta_H r_H \tag{4.5}$$

где $\beta_\xi \geq 0$ – химическая постоянная, $\beta_H \geq 0$ – физический параметр, характеризующий производство микроструктуры.

Упругие деформации в предположении малых деформаций подчиняются закону Гука

$$\boldsymbol{s} = 2G\boldsymbol{e}^e , \ \sigma_m = K\varepsilon_m^e , \tag{4.6}$$

где $G$, $K$ – модули сдвига и объёмного сжатия.

**5. Модельная задача.** Для анализа релаксации пространственных возмущений ставится одномерная модельная задача [1,2], для которой приняты следующие предположения:

А) Молекулы могут диффундировать вдоль пространственной координаты $x$

$$c_A = c_A(x,t) , \ c_B = c_B(x,t) , \ c_C = c_C(x,t) ; \tag{5.1}$$

Б) Все компоненты тензора полных деформаций равны нулю за исключением

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}(x,t) \neq 0 ; \tag{5.2}$$

В) Все компоненты тензора напряжений равны нулю за исключением

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma(x,t) \neq 0 . \tag{5.3}$$

В силу предположения (5.3) уравнения равновесия удовлетворяются тождественно, но при этом, уравнения диффузии-реакции, вязкоупругого деформирования и эволюции микроструктуры остаются способными описывать нетривиальные процессы. Одномерная постановка упрощает систему дифференциальных уравнений задачи, позволяя рассмотреть всевозможные связанные процессы, описываемые моделью.

**6. Полевые уравнения.** Для модельной задачи остаются следующие полевые уравнения, записанные в терминах актуальной конфигурации в пренебрежении конвективного переноса ($\partial / \partial t$ – производная при фиксированной пространственной координате $x$).

Законы баланса массы (среди которых два независимых)

$$\frac{\partial c_\alpha}{\partial t} + c_\alpha \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial j_\alpha}{\partial x} + \nu_\alpha \dot{\xi} . \tag{6.1}$$

Балансовое уравнение для микроструктурного параметра $h$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h\frac{\partial v}{\partial x} = r_H . \tag{6.2}$$

Уравнение вязкоупругости

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{3}{4G}\frac{\partial \sigma_m}{\partial t} - \frac{3\sigma_m}{4\eta} , \tag{6.3}$$

которое получается из (4.3) и (4.6) в силу предположений (5.2) и (5.3) следующим образом. Сначала выписываются ненулевые компоненты девиаторов тензора напряжений $s_{xx} = -2s_{yy} = -2s_{zz} = -2\sigma / 3$, тензора упругих деформаций $e_{xx}^e = -2e_{yy}^e = -2e_{zz}^e = 2(\varepsilon^e - \varepsilon_\perp) / 3$ и тензора вязких деформаций $e_{xx}^v = -2e_{yy}^v = -2e_{zz}^v = 2(\varepsilon^v + \varepsilon_\perp) / 3$ с учётом обозначения $\varepsilon_{yy}^e = \varepsilon_{zz}^e = -\varepsilon_{yy}^v = -\varepsilon_{zz}^v = \varepsilon_\perp$. Затем из определяющих соотношений для девиатора тензора напряжений (4.3) и (4.6) извлекаются равенства $\sigma = -2\eta\left(\dot{\varepsilon}^v + \dot{\varepsilon}_\perp\right) = -2G\left(\varepsilon^e - \varepsilon_\perp\right)$, из которых с учётом $\dot{\varepsilon} = v' = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^v$ и $\sigma_m = 2\sigma / 3$ и следует (6.3).

Парциальная энергия микроструктуры (2.4) с учётом малости деформаций и связи $c_A V_A + c_B V_B + c_{AB} V_{AB} = 1$ может быть записана как

$$F_H = f_H h - f_A c_A - f_B c_B, \tag{6.4}$$

где $f_A$, $f_B$, $f_H \geq 0$.

Система уравнений (6.1) – (6.3) замыкается определяющими соотношениями (4.1), (4.2), (4.4), (4.5), определений для парциальных энергий (2.3), (6.4) и связи $c_A V_A + c_B V_B + c_{AB} V_{AB} = 1$.

Поставленная нелинейная модельная задача допускает однородное стационарное решение

$$c_\alpha(x,t) \equiv c_\alpha^0,\ h(x,t) \equiv h^0,\ \sigma_m(x,t) \equiv 0, \tag{6.5}$$

подстановка которого в полученную систему даёт $h^0 = \left(f_A c_A^0 + f_B c_B^0\right) / f_H$.

**7. Спектр времен релаксации.**

Для определения спектра времён релаксации нелинейные полевые уравнения линеаризуются относительно решения (6.5). Их возмущённые решения имеют вид

$$c_\alpha\left(x,t\right) = c_\alpha^0 + \mathrm{Re}\left[\hat{c}_\alpha \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\exp\left(i\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\right],$$

$$h\left(x,t\right) = h^0 + \mathrm{Re}\left[\hat{h}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\exp\left(i\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\right], \tag{7.1}$$

$$\sigma_m(x,t) = \mathrm{Re}\left[\hat{\sigma}_m \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\exp\left(i\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\right],$$

где $\lambda$ – характерный размер возмущений, $\tau$ – их время релаксации, $|\hat{c}_\alpha|$, $|\hat{\sigma}_m|$, $|\hat{h}| \ll 1$, $\hat{c}_\alpha, \hat{\sigma}_m, \hat{h} \in \mathrm{C}$. Подстановка выражений (7.1) в систему уравнений модельной задачи ведёт к задаче на собственные значения и характеристическому полиномиальному уравнению четвёртого порядка относительно $\tau$, решения которого $\tau_j(\lambda)$, $j = 1-4$ приведены на рис. 7.1.

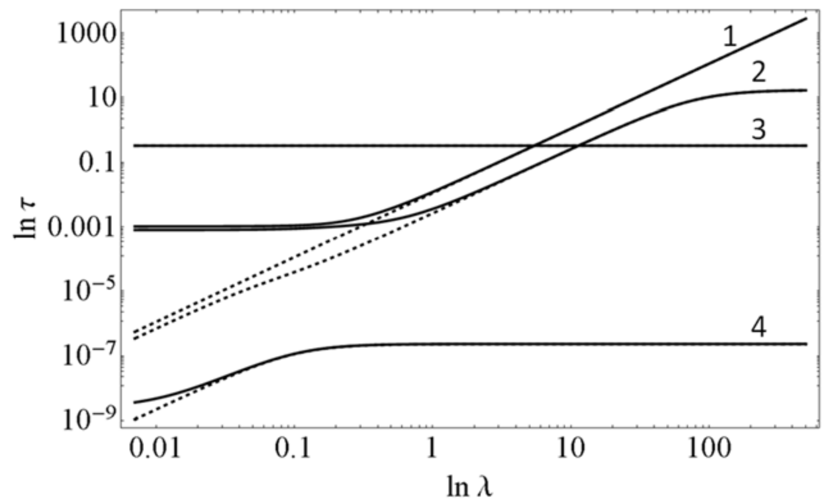



Рис. 1. Зависимости $\tau\left(\lambda\right)$. Сплошные линии $\beta_\alpha \neq 0$, штриховые – $\beta_\alpha = 0$.

Зависимости времён релаксации от длины волны возмущения $\tau_j(\lambda)$ имеют асимптоты при $\lambda \to 0$ и $\lambda \to \infty$, характеризующие простейшие механизмы релаксации возмущений. Несмотря на это, им, как и переходным участкам графиков, соответствуют комбинации связанных процессов взаимной диффузии, химической реакции, вязкоупругого деформирования и изменения микроструктуры. На наклонных участках имеет место пропорциональность $\tilde{J}_\alpha$ – потока компоненты *α* относительно неподвижной системы координат и $-D_{(\alpha)}\partial c_\alpha / \partial x$, где $D_{(\alpha)}$ –

коэффициент взаимной диффузии. Такое поведение характерно для ветви 1 при $\lambda \to \infty$ и ветвей 2 и 4 при $\lambda \to 0$ и $\beta_A = \beta_B = \beta_C = 0$. Данные участки характеризуются наклоном $d \ln \tau / d \ln \lambda = 2$. На горизонтальных участках релаксация контролируется вязкими процессами. Такие участки возникают для ветви 1 при $\lambda \to 0$ и ветвей 2, 4 при $\lambda \to 0$ и $\beta_\alpha \neq 0$, а также при $\lambda \to \infty$.

При заданных материальных параметрах одно из времен релаксации (ветвь 4 на рис.1) оказывается меньше других на несколько порядков независимо от длины волны возмущения. В асимптотическом случае $\lambda \to 0$ и при отсутствии объёмных вязкостей $\beta_A = \beta_B = \beta_C = 0$ механизм релаксации подобен диффузии. При $\lambda \to \infty$ механизм релаксации подобен вязкому течению. В каждом из этих асимптотических случаев аналитически получаются эффективные коэффициенты, позволяющие изучить условия реализуемости быстрого протекания процесса.

**8. Заключение.** Изложенный метод исследования релаксации малых пространственных возмущений позволил исследовать квазистатические изотермические связанные процессы взаимной диффузии в вязкоупругой трёхкомпонентной химически реагирующей среде, в которой может происходить изменение микроструктуры. По полученным зависимостям времён релаксации от длины волны пространственного возмущения однородного стационарного решения, соответствующего термодинамически равновесному состоянию, можно получить коэффициенты взаимной диффузии и вязкости, отвечающие более простым математическим моделям рассматриваемых связанных процессов.

Работа выполнена по теме государственного задания № АААА-А16-116121410009-8 при поддержке гранта РФФИ № 17-08-01085.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Brassart L., Liu Q., Suo Z. Mixing by Shear, Dilation, Swap and Diffusion. Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2018. Vol. 112. P. 253-272.
2. Stephenson G.B. Deformation During Interdiffusion. Acta Metallurgica. 1988. Vol. 36. P. 2663-2683.
3. Князева А.Г. Нелинейные модели деформируемых сред с диффузией. //Физическая мезомеханика. 2011. Т.14. № 6. С.35-51.
4. Фрейдин А.Б. О тензоре химического сродства при химических реакциях в деформируемых материалах. //Известия РАН. Механика твердого тела. 2015. № 3. С. 35-68.
5. Brassart L., Liu Q., Suo Z. Shear, Dilation and Swap: Mixing in the Limit of Fast Diffusion. Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2016. Vol. 96. P. 48-64.
6. Дьярмати И. Неравновесная термодинамика. Теория поля и вариационные принципы. М.: Мир, 1974. 304 с.
7. Mehrer H. Diffusion in Solids. Springer. 2007. 637 p.
8. Paul A., Laurila T., Vuorinen V., Divinski S.V. Thermodynamics, Diffusion and the Kirkendall Effect in Solids. Springer. 2014. 530 p.

**Сведения об авторах:**

**Дудин Д.С.** – магистрант, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, +73422378307, **E-mail:** dmitryovj@yandex.ru.

**Келлер И.Э.** – д.ф.-м.н., заведующий лабораторией, Институт механики сплошных сред УрО РАН, профессор, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, +73422378307, **E-mail:** kie@icmm.ru.

# НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В ПОЛУПРОВОДНИКЕ С ЗАРЯЖЁННЫМИ ДИСЛОКАЦИЯМИ

**Ерофеев В.И., Леонтьева А.В., Шекоян А.В.**

Для описания нелинейной ультразвуковой волны в полупроводнике с заряжёнными дислокациями получено эволюционное уравнение, обобщающее известные уравнения волновой динамики: Бюргерса и Кортевега-де Вриза. Методом усечённых разложений найдено точное аналитическое решение эволюционного уравнения, имеющее профиль кинка. Вид кинка (возрастающий, убывающий) и его полярность зависят от значений параметров и их знаков.

В настоящей работе изучается ультразвуковая (УЗ) волна в полупроводнике, содержащем многочисленные заряжённые дислокации. При этом, предполагается, что присутствует постоянное электрическое поле, создающее электрический ток. Ситуация похожа на случай распространения УЗ волны в пьезополупроводниках, но в рассматриваемой задаче вместо электрического поля, обусловленного пьезосвойствами среды, фигурирует электрическое поле дислокаций.

В одномерном приближении нелинейная система связанных уравнений для перемещения $u$, перемещения дислокации $\xi$ и электрического поля $E$ будет иметь вид:

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\beta b\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{m}{2}\frac{\partial E}{\partial x}+(3c_1+Q)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{4}{3}qb^2\xi\frac{\partial\xi}{\partial x}+nE\frac{\partial E}{\partial x} \tag{1}$$

$$A\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}+B\frac{\partial\xi}{\partial t}=-\lambda\xi-b\beta\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{P}{2}E-\frac{1}{2}b\beta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2-\frac{4}{3}qb^2\xi\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{d}{6}E^a-\frac{a}{3}E\xi \tag{2}$$

$$\frac{1}{2}\rho\frac{\partial\xi}{\partial x}+\varepsilon\frac{\partial E}{\partial x}+\frac{m}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{d}{6}E\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{d}{6}\xi\frac{\partial E}{\partial x}+\frac{q}{3}\xi\frac{\partial\xi}{\partial x}+2n\frac{\partial E}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+$$

$$+2nE\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{m}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial x}=-ne \tag{3}$$

Здесь $\rho$ – плотность среды; $c_1$, $Q$ – линейный и нелинейный модули упругости; $A$, $B$ – коэффициенты, характеризующие массу и затухание колебаний дислокации; $\lambda$ – «жёсткость» дислокации; $\beta$, $q$ – коэффициенты линейного и нелинейного акустодислокационного взаимодействия; $b$ – компонента вектора Бюргерса; $\varepsilon$ – диэлектрическая постоянная; $m$, $P$, $d$, $a$, $n$ – коэффициенты, обусловленные электрическим, акустическим и дислокационным взаимодействием.

Уравнения для компонентов вектора плотности электрического тока имеет вид

$$j_i=e\mu_{ik}(n_0+n(x))\left[E_k^0+E_k(x)\right]+eN_{ik}\frac{\partial n}{\partial x_i}, \tag{4}$$

где $e$ – элементарный заряд, $\mu_{ik}$ – тензор подвижности зарядов, $n_0$ – равновесная концентрация зарядов в единице объёма среды, $n(x)$ – возмущение, $E_0$ – однородное электрическое поле, создающее постоянный ток, $E_k(x)$ – электрическое поле заряжённой дислокации, причём,

$$\vec{E}_k' =\vec{E}_0+\vec{E}_k. \tag{5}$$

К этим уравнениям следует добавить уравнение Максвелла

$$\operatorname{rot}\vec{E}=0 \tag{6}$$

и уравнение

$$-\frac{\partial n}{\partial t}+\operatorname{div}\vec{j}=0. \tag{7}$$

В уравнениях (1)–(3) следует заменить $\vec{E}$ на $\vec{E}'_k$ по формуле (5), а также $n' = n_0 + n(x)$. Подставив (4) в уравнение (7) и исключив $j_i$, получим:

$$-\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\sigma}{e}\frac{\partial E}{\partial x} - v_d \frac{\partial n}{\partial x} + N\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = \mu \frac{\partial}{\partial \tau}(nE), \tag{8}$$

где $\sigma$ – удельная электропроводность, $\mu$ – подвижность зарядов, $v_d = -\mu E_0$ – дрейфовая скорость зарядов, $N$ – коэффициент диффузии зарядов.

Перейдём к новой координате $\tau = \frac{x}{v} - t$, тогда система уравнений для полупроводников примет следующий вид:

$$\begin{aligned}&\left(\rho - \frac{c}{v^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \\ &= -\frac{\beta b}{v}\frac{\partial \xi}{\partial \tau} + \frac{2c}{v}\frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial x} - \frac{P_3}{v}\frac{\partial E}{\partial \tau} - \frac{(3c+Q)}{v^3}\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{4qb^2}{3v}\xi\frac{\partial \xi}{\partial \tau} - \frac{M}{v}E\frac{\partial E}{\partial \tau},\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}&A\frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2} - B\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \\ &= -\Lambda_0 \xi + \frac{b\beta}{v}\frac{\partial u}{\partial \tau} + P_1 E - \frac{b\beta}{2v^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)^2 - \frac{\gamma}{2}\xi^2 + \frac{4}{3}\frac{qb^2}{v}\xi\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{d}{6}E^2 - \frac{a}{3}E\xi,\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}&-\frac{P_2}{2v}\frac{\partial \xi}{\partial \tau} - \frac{\varepsilon}{v}\frac{\partial E}{\partial \tau} + \frac{\mathrm{P}_1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \frac{d}{6v}E\frac{\partial \xi}{\partial \tau} - \frac{d}{2v}\xi\frac{\partial E}{\partial \tau} - \frac{a}{3v}\xi\frac{\partial \xi}{\partial \tau} + \frac{2M}{v}E\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \\ &+ \frac{2M}{v^2}\frac{\partial E}{\partial \tau}\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{m}{v^3}\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}\frac{\partial u}{\partial \tau} = -en,\end{aligned} \tag{11}$$

$$\frac{\partial n}{\partial \tau} - \frac{\sigma}{ev}\frac{\partial E}{\partial \tau} + \frac{v_d}{v}\frac{\partial n}{\partial \tau} + \frac{N}{v^2}\frac{\partial^2 n}{\partial \tau^2} = \frac{\mu}{v}\frac{\partial}{\partial \tau}(nE), \tag{12}$$

где $P_3 = \frac{m}{2} + ME_0$, $\Lambda_0 = \frac{q}{3} + \lambda$, $P_1 = -\frac{d}{3}E_c - \frac{p}{2}$, $P_2 = p + \frac{d}{3}E_0$, $\mathrm{P}_1 = \frac{m}{2} + 2ME_0$.

Систему нелинейных уравнений (9)–(12) будем исследовать методом эволюционного уравнения. Суть метода в том, чтобы из указанной системы вывести одно уравнение, сохраняющее основные физические свойства исходной системы, но более простое для анализа. Для этого следует ввести малый параметр $\varepsilon_1$ и величинам дать соответствующий порядок. Будет принято $u \sim \varepsilon_1^2$, $\tau \sim \varepsilon_1$, $N \sim \varepsilon_1^9$, $A \sim \varepsilon_1^3$, $B \sim \varepsilon_1^2$. Порядок остальных величин вытекает из уравнений (9)–(12). Определяя порядки величин для самых больших величин, получим первую систему уравнений, которая называется главной. Из величин более малых порядков составляют другую систему уравнений, из которой выводим эволюционное уравнение, последовательно исключая из полученной новой системы все величины, получаем одно уравнение для величины *u*. При исключении пользуются главными уравнениями. Этот метод подробно описан в книгах [1, 2].

Система главных уравнений имеет следующий вид:

$$\left(\rho - \frac{c}{v^2}\right)\frac{\partial u}{\partial \tau} = -\frac{\beta b}{v}\xi - \frac{P_3}{v}E, \tag{13}$$

$$-\Lambda_0\xi+\frac{b\beta}{v}\frac{\partial u}{\partial\tau}+P_1E=0, \tag{14}$$

$$-\frac{P_2}{2v}\frac{\partial\xi}{\partial\tau}-\frac{\varepsilon}{v}\frac{\partial E}{\partial\tau}+\frac{\mathrm{P}_1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2}=0, \tag{15}$$

$$\left(1+\frac{v_d}{v}\right)\frac{\partial n}{\partial\tau}-\frac{\sigma}{e}\frac{\partial E}{\partial\tau}=0. \tag{16}$$

Оставшиеся уравнения имеют вид:

$$\frac{2c}{v}\frac{\partial^2 u}{\partial\tau\partial x}-\frac{(3c+Q)}{v^3}\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2}\frac{\partial u}{\partial\tau}-\frac{4qb^2}{3v}\xi\frac{\partial\xi}{\partial\tau}-\frac{M}{v}E\frac{\partial E}{\partial\tau}=0, \tag{17}$$

$$A\frac{\partial^2\xi}{\partial\tau^2}-B\frac{\partial\xi}{\partial\tau}=-\frac{b\beta}{2v^2}\left(\frac{\partial u}{\partial\tau}\right)^2-\frac{\gamma}{2}\xi^2+\frac{4}{3}\frac{qb^2}{v}\xi\frac{\partial u}{\partial\tau}-\frac{d}{6}E^2-\frac{a}{3}E\xi=0, \tag{18}$$

$$-\frac{d}{6v}E\frac{\partial\xi}{\partial\tau}-\frac{d}{2v}\xi\frac{\partial E}{\partial\tau}-\frac{a}{3v}\xi\frac{\partial\xi}{\partial\tau}+\frac{2M}{v}E\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2}+\frac{2M}{v^2}\frac{\partial E}{\partial\tau}\frac{\partial u}{\partial\tau}-\frac{m}{v^3}\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2}\frac{\partial u}{\partial\tau}=-en, \tag{19}$$

$$\frac{N}{v^2}\frac{\partial^2 n}{\partial\tau^2}=\frac{\mu}{v}\frac{\partial}{\partial\tau}(nE). \tag{20}$$

Из системы уравнений (17)–(20) будет выведено эволюционное уравнение. Но сначала из системы главных уравнений следует вывести соотношения между величинами $\xi, E, n$ и смещением *u*. В уравнениях (17)–(20) последовательно исключаются все величины, тогда получается одно уравнение для функции *u*. При выполнении этой процедуры в нелинейных слагаемых, где фигурируют $\xi, E$ и *n*, а также в величинах $\frac{\partial^2\xi}{\partial\tau^2}, \frac{\partial\xi}{\partial\tau}$, исключение делается главными членами. В результате, для функции *u* получается следующее эволюционное уравнение:

$$-\frac{\partial\psi}{\partial x}+q_1\frac{\partial^3\psi}{\partial\tau^3}+q_2\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau^2}+q_3\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\psi\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right)+q_4 2\psi\frac{\partial\psi}{\partial\tau}=0\,, \tag{21}$$

где

$$\psi=\frac{\partial u}{\partial\tau},\ \ q_1=-\frac{AT_2\beta b}{2v\Lambda_0 c},\ \ q_2=-\frac{1}{2vc}\left\{\beta bT_3+\frac{v+v_d}{2v\sigma}\left[\frac{P_2P_3T_2^2}{2}-\frac{P_3}{v}\left(\mathrm{P}_1-\varepsilon T_1-\frac{N\sigma T_1 v}{v+v_d}\right)\right]\right\},$$

$$q_3=-\frac{v+v_d}{2\sigma v^4 c}\left(2MT_1-\frac{dT_1T_2}{3}-m-\frac{aT_2^2}{3}\right)\left(\frac{\beta bP_1}{\Lambda_0}+P_3\right),\ \ T_1=\frac{2\Lambda_0\mathrm{P}_1+P_2\beta b}{P_1P_2+2\Lambda_0\varepsilon},\ \ T_2=\frac{2(\varepsilon\beta b+P_1\mathrm{P}_1)}{P_1P_2+2\Lambda_0\varepsilon},$$

$$T_3=\frac{1}{\Lambda_0}\left\{BT_2+\frac{P_1P_2T_2(v+v_d)}{2v^2\sigma}-\frac{v+v_d}{v^2\sigma}\left[\mathrm{P}_1-\varepsilon T_1-\frac{N\sigma T_1 v}{(v+v_d)^2}\right]\right\},$$

$$q_4=\frac{1}{2v^2c}\left[T_4\beta b+\frac{2MT_1(v+v_d)P_3}{\sigma v^2}+3c+Q+\frac{4qb^2T_2^2}{3}+T_1^2M\right],$$

$$T_4=\frac{1}{v^2}\left(\frac{2MT_1P_1}{v^2\sigma}-\frac{b\beta}{2}-\frac{\gamma T_2^2}{2}+4qb^2T_2-\frac{T_1d}{6}-\frac{aT_1T_2}{3}\right),\ \ v_0^2=\frac{c}{\rho}-\frac{b^2\beta^2}{\rho\Lambda_0}.$$

Используя переменные бегущей волны $\psi(x,\tau)=\psi(z)$, $z=\frac{x}{v}-\tau$, находим решение уравнения методом усечённых разложений [3, 4] в виде:

$$\psi\left(z\right)=-\frac{q_1}{q_3}\left|\frac{2q_1q_4-q_2q_3}{q_1q_3}\right|\text{th}\left(\left|\frac{2q_1q_4-q_2q_3}{2q_1q_3}\right|z\right)+\frac{2q_1q_4-q_2q_3}{q_3^2},$$

где $v$ – скорость нелинейной волны, определяется выражением

$$v=-\frac{q_3^2}{2q_4\left(2q_1q_4-q_2q_3\right)}.$$

Решение имеет профиль кинка. Вид кинка (возрастающий, убывающий) и его полярность зависят от значений параметров и их знаков. В случае, когда все коэффициенты уравнения положительны, имеем убывающий кинк в верхней полуплоскости.

В уравнении (21) слагаемое с коэффициентом $q_1$ обусловлено дисперсией. При $q_1=q_3=0$ из (21) получится уравнение типа Бюргерса. Слагаемое с коэффициентом $q_2$ обусловлено диссипацией. При $q_2=q_3=0$ из (21) получится уравнение Кортевега–де Вриза.

В заключение заметим, что исследование линейной и нелинейной УЗ волн в диэлектрических кристаллах с заряжёнными дислокациями проводилось ранее в [5].

При выполнении работы Ерофеев В.И. и Леонтьева А.В. получали поддержку Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 18-29-10073-мк).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Багдоев А.Г., Ерофеев В.И., Шекоян А.В. Линейные и нелинейные волны в диспергирующих сплошных средах. М.: Физматлит, 2009. 320 с.
2. Bagdoev A.G., Erofeyev V.I., Shekoyan A.V. Wave Dynamics of Generalized Continua. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2016. 274 p.
3. Кудряшов Н.А. Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. 360 с.
4. Кудряшов Н.А. Методы нелинейной математической физики: Учебное пособие. Долгопрудный: Интеллект, 2010. 368 с.
5. Шекоян А.В. Линейные и нелинейные волны в кристаллах с заряжёнными дислокациями. //Физика твёрдого тела. 2012. Т.54. № 4. С.767-769.

**Сведения об авторах:**

**Ерофеев Владимир Иванович** – доктор физико-математических наук, профессор, директор, Институт проблем машиностроения Российской академии наук, Нижний Новгород, Россия (+7831) 432 05 76 **E-mail:** erof.vi@yandex.ru

**Леонтьева Анна Викторовна** – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем машиностроения Российской академии наук, Нижний Новгород, Россия (+7831) 432 03 00 **E-mail:** aleonav@mail.ru

**Шекоян Ашот Вазгенович** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт механики Национальной академии наук Армении, Ереван, Армения

(+374 10) 52 48 90 **E-mail:** ashotshek@mechins.sci.am

# МОДЕЛЬ КРУГЛОЙ ТОНКОЙ ПЛАСТИНКИ ПО МИКРОПОЛЯРНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С НЕЗАВИСИМЫМИ ПОЛЯМИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И ВРАЩЕНИЙ И РАЗВИТИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

**Жамакочян К.А., Саркисян С.О.**

В работе на основе построенной ранее модели статики и динамики микрополярных упругих круглых тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений развивается применение метода конечных элементов. Изучаются две конкретные задачи: 1) статическая осесимметрическая задача круглой пластинки, когда край пластинки шарнирно опёрт, а нагрузка – равномерно распределённая, 2) осесимметричные свободные колебания круглой пластинки, когда край пластинки шарнирно опёрт. Приводятся численные результаты, на основе анализа которых устанавливаются некоторые определённые свойства микрополярных материалов.

**Введение.** В работе [1] приведён обзор построения прикладных моделей микрополярных упругих тонких балок, пластин и оболочек. В работах [2-5] на основе метода гипотез (которые сформулированы, исходя из качественных результатов асимптотического метода интегрирования трёхмерной граничной задачи микрополярной теории упругости в тонких областях), построены общие прикладные теории микрополярных упругих тонких балок, пластин и оболочек с независимыми полями перемещений и вращений.

В работах [6,7] для изучения граничных задач прикладной теории микрополярных упругих тонких балок и прямоугольных пластин с независимыми полями перемещений и вращений разработаны варианты применения метода конечных элементов.

В данной работе развивается это направление и для изучения как статических, так и динамических граничных задач прикладной теории микрополярных упругих круглых тонких пластин разработан и применён метод конечных элементов МКЭ.

**1**. **Микрополярная круглая тонкая пластинка с независимыми полями перемещений и вращений.** Основная система прикладной модели изгибной деформации микрополярной круглой тонкой пластинки с независимыми полями перемещений и вращений выражаются так [3] (рассматриваем осесимметричный случай):

Уравнения равновесия (движения):

$$\frac{dN_{13}}{dr}+\frac{1}{r}N_{13}=-\tilde{p}_3\left(+2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right),\quad N_{31}-\left[\frac{dM_{11}}{dr}+\frac{1}{r}\left(M_{11}-M_{22}\right)\right]=h\tilde{p}_1\left(-\frac{2\rho h^3}{3}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}\right),$$
$$\frac{dL_{12}}{dr}+\frac{1}{r}\left(L_{12}+L_{21}\right)+N_{31}-N_{13}=-\tilde{m}_2\left(+2Jh\frac{\partial^2\Omega_2}{\partial t^2}\right). \tag{1.1}$$

Физические соотношения упругости:

$$N_{13}=2h(\mu+\alpha)\Gamma_{13}+2h(\mu-\alpha)\Gamma_{31}\ ,\quad N_{31}=2h(\mu+\alpha)\Gamma_{31}+2h(\mu-\alpha)\Gamma_{13},$$
$$M_{11}=\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\left[K_{11}+\nu K_{22}\right],\qquad M_{22}=\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\left[\nu K_{11}+K_{22}\right] \tag{1.2}$$
$$L_{12}=2h\left[(\gamma+\varepsilon)k_{12}+(\gamma-\varepsilon)k_{21}\right],\qquad L_{21}=2h\left[(\gamma+\varepsilon)k_{21}+(\gamma-\varepsilon)k_{12}\right].$$

Геометрические соотношения:

$$\Gamma_{13}=\frac{\partial w}{\partial r}+\Omega_2,\ \Gamma_{31}=\psi_1-\Omega_2,\ K_{11}=\frac{\partial\psi_1}{\partial r},\ K_{22}=\frac{\psi_1}{r},\ k_{12}=\frac{\partial\Omega_2}{\partial r},\ k_{21}=-\frac{\Omega_2}{r}. \tag{1.3}$$

Здесь $N_{31},N_{13}$ – усилия; $M_{11},M_{22}$ – моменты от силовых напряжений; $L_{12},L_{21}$ – моменты от моментных напряжений; $\Gamma_{31},\Gamma_{13}$ – сдвиговые деформации; $K_{11},K_{22}$ – изгибно-крутильные деформации, связанные с силовыми напряжениями; $k_{12},k_{21}$ – изгибно-крутильные деформации, связанные с моментными напряжениями; $\mathrm{E},\nu,\mu,\alpha,\gamma,\varepsilon$ - упругие константы микрополярного материала пластинки $\left(\mu=\dfrac{\mathrm{E}}{2(1+\nu)}\right)$; $\rho$ – плотность материала, $J$ – мера инерции при вращении.

Общий вид функционала потенциальной энергии деформации микрополярных упругих круглых тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений (когда пластинка сплошная) выражается так:

$$U = 2\pi\left\{\int_0^a \left\{W - \left[\tilde{p}_1 h\psi_1 + \tilde{p}_3 w + \tilde{m}_2\Omega_2\right]\right\} rdr - \left(M_{11}\psi_1 + N_{13}w + L_{12}\Omega_2\right) r\Big|_{r=a}\right\}, \tag{1.4}$$

Где $W$ – плотность потенциальной энергии при изгибной деформации:

$$W = \frac{Eh^3}{3(1-\nu^2)}\left[K_{11}^2 + K_{22}^2 + 2\nu K_{11}K_{22}\right] + h(\mu+\alpha)\left[\Gamma_{31}^2 + \Gamma_{13}^2\right] + 2h(\mu-\alpha)\Gamma_{13}\Gamma_{31} +$$
$$+ h(\gamma+\varepsilon)\left[k_{21}^2 + k_{12}^2\right] + 2h(\gamma-\varepsilon)k_{12}k_{21}. \tag{1.5}$$

Дальнейшее изучение поставленной задачи будем осуществлять в безразмерных величинах. Ставится задача о построении варианта МКЭ для решения как статических, так и динамических граничных задач микрополярных упругих круглых тонких пластин.

**2. Матрица жёсткости круглой пластинки с независимыми полями перемещений и вращений.** В осесимметричном случае краевая задача приводится к одномерной задаче по независимой переменной $r: 0 \le r \le a$ $(0 \le \xi \le 1)$. Сначала радиус $0 \le r \le a$ $(0 \le \xi = \frac{r}{a} \le 1)$ рассмотрим как один конечный элемент.

Для прогиба $\overline{w}$, полного поворота $\psi_1$ нормального элемента и для свободного поворота нормального элемента $\Omega_2$ выбираем разложения в виде:

$$\begin{aligned} &\overline{w}(\xi) = \alpha_1 + \alpha_2\xi^2 + \alpha_3\xi^3, \\ &\psi_1(\xi) = \alpha_4\xi + \alpha_5\xi^2 + \alpha_6\xi^3, \\ &\Omega_2(\xi) = \alpha_7\xi + \alpha_8\xi^2 + \alpha_9\xi^3, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $\overline{w} = \frac{w}{a}, \xi = \frac{r}{a}$, а также $\overline{\alpha} = \frac{\alpha}{E}$, $\overline{\mu} = \frac{\mu}{E}$, $\overline{\gamma} = \frac{\gamma}{Ea^2}$, $\overline{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{Ea^2}$, $\Delta = \frac{h}{a}$.

Отметим, что выражения (2.1) автоматически удовлетворяют условиям симметрии в центре пластинки: $\frac{\partial \overline{w}}{\partial \xi} = 0,\ \psi_1 = 0,\ \Omega_2 = 0$ при $\xi = 0$.

Узловые перемещения обозначим следующим образом:

$$\begin{aligned} &\overline{w}(0) = \delta_1,\ \psi_1'(0) = \delta_2,\ \Omega_2'(0) = \delta_3, \\ &\overline{w}(1) = \delta_4,\ \overline{w}'(1) = \delta_5,\ \psi_1(1) = \delta_6,\ \psi_1'(1) = \delta_7,\ \Omega_2(1) = \delta_8,\ \Omega_2'(1) = \delta_9. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Как видим, данный конечный элемент имеет девять степеней свободы.

Выразим коэффициенты $\alpha_i$ через узловые перемещения и повороты: $\delta_i$, определяя таким образом $\alpha_i$ и подставляя их в (2.1), получим для перемещения и поворотов следующие аппроксимации:

$$\overline{w}(\xi) = \sum_{i=1,4,5}\delta_i N_i(\xi), \quad \psi_1(\xi) = \sum_{i=2,6,7}\delta_i N_i(\xi), \quad \Omega_2(\xi) = \sum_{i=3,8,9}\delta_i N_i(\xi), \tag{2.3}$$

где $N_i(\xi)$ – функции формы элемента, которые имеют вид:

$$\begin{aligned} &N_1 = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3,\ N_2 = N_3 = \xi - 2\xi^2 + \xi^3, \\ &N_4 = N_6 = N_8 = 3\xi^2 - 2\xi^3,\ N_5 = N_7 = N_9 = -\xi^2 + \xi^3. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Подставив (2.3) в функционал (1.4), после интегрирования получим функцию от девяти независимых переменных $\delta_1, \delta_2, ....\delta_9$. Минимизация функционала (1.4) приводит к нахождению минимума функции от девяти независимых переменных:

$$\frac{\partial U}{\partial \delta_k} = 0 \quad (\mathrm{k} = 1,2,3,...,9). \tag{2.5}$$

Вычислив соответствующие частные производные, приходим к решению системы линейных алгебраических уравнений:

$$[K]\cdot\{\delta\}=\{P\}. \tag{2.6}$$

Здесь $K$ – матрица жёсткости конечного элемента размером $9\times 9$, представляющего собой важнейшее понятие метода конечных элементов; $\{\delta\}^T=\{\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4,\delta_5,\delta_6,\delta_7,\delta_8,\delta_9\}$ – вектор узловых перемещений и поворотов; $\{P\}^T$ – сосредоточенные узловые силы и моменты.

Для громоздкости, элементы матрицы $[K]$ здесь не приводим.

Когда радиус круглой пластинки разбиваем на две части, для первого элемента надо взять уже построенную матрицу жёсткости, а для второй части надо построить новую матрицу жёсткости. Таким образом, для этого прогиба $\overline{w}$, полного поворота $\psi_1$ нормального элемента и для свободного поворота нормального элемента $\Omega_2$ примем разложения в виде:

$$\begin{aligned}
&\overline{w}(\xi)=\alpha_1+\alpha_2\xi+\alpha_3\xi^2+\alpha_4\xi^3,\\
&\psi_1(\xi)=\alpha_5+\alpha_6\xi+\alpha_7\xi^2+\alpha_8\xi^3,\\
&\Omega_2(\xi)=\alpha_9+\alpha_{10}\xi+\alpha_{11}\xi^2+\alpha_{12}\xi^3.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Здесь $\alpha_i, i=1,2...12$ – коэффициенты, которые выражаются через узловые перемещения и повороты. Узловые перемещения обозначим следующим образом:

$$\begin{aligned}
&w\left(\frac{1}{2}\right)=\delta_1,\ w'\left(\frac{1}{2}\right)=\delta_2,\ \psi_1\left(\frac{1}{2}\right)=\delta_3,\ \psi_1'\left(\frac{1}{2}\right)=\delta_4,\ \Omega_2\left(\frac{1}{2}\right)=\delta_5,\ \Omega_2'\left(\frac{1}{2}\right)=\delta_6.\\
&w(1)=\delta_7,\ w'(1)=\delta_8,\ \psi_1(1)=\delta_9,\ \psi_1'(1)=\delta_{10},\ \Omega_2(1)=\delta_{11},\ \Omega_2'(1)=\delta_{12}.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Как видим, данный конечный элемент имеет двенадцать степеней свободы.

В этом случае будем иметь:

$$\overline{w}(\xi)=\sum_{i=1,2,7,8}\delta_i N_i(\xi),\quad \psi_1(\xi)=\sum_{i=3,4,9,10}\delta_i N_i(\xi),\qquad \Omega_2(\xi)=\sum_{i=5,6,11,12}\delta_i N_i(\xi). \tag{2.9}$$

где $N_i(\xi)$ – функции формы элемента, которые выражаются так:

$$\begin{aligned}
&N_1=N_3=N_5=-4+24\xi-36\xi^2+16\xi^3,\\
&N_2=N_4=N_6=-2+8\xi-10\xi^2+4\xi^3,\\
&N_7=N_9=N_{11}=5-24\xi+36\xi^2-16\xi^3,\\
&N_8=N_{10}=N_{12}=-1+5\xi-8\xi^2+4\xi^3.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Подставив (2.9) в функционал (1.4), после интегрирования в пределах $\left(\frac{1}{2},1\right)$ получим функцию от двенадцати независимых переменных $\delta_1,\delta_2,....\delta_{12}$. Минимизация функционала (1.4) приводит к нахождению минимума функции от двенадцати независимых переменных.

Вычислив соответствующие частные производные, получаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$[K_2]\cdot\{\delta\}=\{P\}. \tag{2.11}$$

Здесь $K_2$ – матрица жёсткости второго конечного элемента размером $12\times 12$.

В качестве применения разработанного алгоритма рассмотрим пример о равновесии круглой пластинки, когда её край шарнирно опёрт, пластинка нагружена равномерно распределённой нагрузкой интенсивностью $\widetilde{p}_3$. Граничные условия шарнирного опирания имеют вид:

$$L_{12}\big|_{r=a}=0,\quad w\big|_{r=a}=0,\quad M_{11}\big|_{r=a}=0. \tag{2.12}$$

Функционал (1.4) для данной задачи примет вид:

$$U=2\pi\left\{\int_0^a\{W-\widetilde{p}_3w\}rdr\right. \tag{2.13}$$

Сначала рассмотрим пластинку как один конечный элемент, а потом, как два конечных элемента. Вычислив сосредоточенные узловые силы и моменты, получим:

$$\{P\}^T = \left\{ \frac{3\tilde{p}_3^{\,*}}{20}, 0, 0, \frac{7\tilde{p}_3^{\,*}}{20}, -\frac{\tilde{p}_3^{\,*}}{20}, 0, 0, 0, 0 \right\}, \tag{2.14}$$

где $\tilde{p}_3^{\,*} = \dfrac{\tilde{p}_3 a}{Eh}$.

Полученную систему алгебраических уравнений (2.6) (когда имеем один конечный элемент) будем решать с учётом граничных условий (2.12). Если имеем два конечных элемента, будем совместно решать системы уравнений (2.6) и (2.11) с учётом граничных условий (2.12).
Для безразмерных параметров задачи примем следующие данные:

$$\overline{\mu} = 0.357;\ \ \overline{\gamma} = \overline{\varepsilon} = 7.84\cdot 10^{-6};\ \nu = 0.39;\ \Delta = \frac{1}{100};\ \ \tilde{p}_3^{\,*} = 0.16\cdot 10^{-4}.$$

В таблице 1 приведены значения максимального прогиба микрополярной круглой пластинки в зависимости от значения безразмерного физического параметра $\overline{\alpha}$. В этой же таблице для сравнения приведено значение максимального прогиба по классической модели пластинки.

**Таблица 1.** Максимальные прогибы микрополярной круглой пластинки с независимыми полями перемещений и вращений в зависимости от $\overline{\alpha}$ и классической пластинки.

| $\overline{\alpha}$ | Микрополярная модель $\overline{w}_{\max}\times 10^3$ | | | Классическая модель $\overline{w}_{\max}\times 10^3$ | | | $\dfrac{\overline{w}_{\max}^{\,мик.}}{\overline{w}_{\max}^{\,кл.}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Точное значение | 1 конечный элемент | 2 конечных элемента | Точное значение | 1 конечный элемент | 2 конечных элемента | |
| $0.15\cdot 10^{-5}$ | 12.04 | 12.25 | 12.04 | 12.4 | 12.6 | 12.4 | 0.97 |
| $0.15\cdot 10^{-4}$ | 10.68 | 10.87 | 10.68 | - | - | - | 0.861 |
| $0.15\cdot 10^{-3}$ | 9.6 | 9.84 | 9.6 | - | - | - | 0.774 |
| $0.15\cdot 10^{-2}$ | 9.5 | 9.65 | 9.5 | - | - | - | 0.766 |
| $0.15\cdot 10^{-1}$ | 9.48 | 9.63 | 9.48 | - | - | - | 0.764 |

Как видно из приведённых значений таблицы 1, учёт микрополярности материала приводит к повышению жёсткости пластинки по сравнению с классическим случаем материала.

**3. Динамическая задача микрополярной круглой пластинки с независимыми полями перемещений и вращений.**

Общий вид функционала полной механической энергии в случае свободных изгибных колебаний (сумма потенциальной энергии деформации и кинетической энергии) микрополярно-упругой круглой пластинки выражается так:

$$\tilde{U} = 2\pi\int_0^a \left( W + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\cdot w + \frac{\rho h^3}{3}\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2}\cdot \psi_1 + Jh\frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial t^2}\cdot \Omega_2 \right) r dr, \tag{3.1}$$

где $W$ имеет вид (1.5).

При свободных колебаниях основные кинематические функции задачи представим так:

$$\begin{aligned} \overline{w}(\xi,\tau) &= \left(\alpha_1 + \alpha_2\xi^2 + \alpha_3\xi^3\right)\sin\overline{\omega}\tau, \\ \psi_1(\xi,\tau) &= \left(\alpha_4\xi + \alpha_5\xi^2 + \alpha_6\xi^3\right)\sin\overline{\omega}\tau, \\ \Omega_2(\xi,\tau) &= \left(\alpha_7\xi + \alpha_8\xi^2 + \alpha_9\xi^3\right)\sin\overline{\omega}\tau, \end{aligned} \tag{3.2}$$

где $\overline{\omega}$ – безразмерная частота собственных колебаний:

$$\overline{\omega} = \omega\cdot t_0,\ \ \text{где}\ t_0 = a\sqrt{\frac{\rho}{E}}. \tag{3.3}$$

В данном случае введены следующие безразмерные обозначения $\overline{J} = \dfrac{J}{\rho a^2}$, $\tau = \dfrac{t}{a}\sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$.

Подставляя (3.2) в (3.1), задача минимизации функционала (3.1) приводится к нахождению минимума функции от девяти независимых переменных, вычислив соответствующие частные производные, аналогично статическому случаю приходим к следующему матричному уравнению (когда имеем один конечный элемент):

$$\left(K-\overline{\omega}^2 M\right)\cdot\{\delta\}=0, \qquad (3.4)$$

где $K-$ матрица жёсткости конечного элемента, $M-$ матрица масс конечного элемента. Поступаем аналогичным образом и тогда, когда имеем два конечных элемента.

Для безразмерных параметров задачи примем данные статической задачи, а $\overline{J}=9\cdot10^{-7}$.

**Таблица 2.** Наименьшая частота свободной колебании $\overline{\omega}$ микрополярной круглой пластинки с независимыми полями перемещений и вращений в зависимости от $\overline{\alpha}$ и классической пластинки

| $\overline{\alpha}$ | Микрополярная модель $\overline{\omega}\times10^3$ | | | Классическая модель $\overline{\omega}\times10^3$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Точное значение | 1 конечный элемент | 2 конечных элемента | Точное значение | 1 конечный элемент | 2 конечных элемента |
| $0.15\cdot10^{-6}$ | 32.03 | 32.08 | 32.03 | 31.9 | 32 | 31.9 |
| $0.15\cdot10^{-5}$ | 32.46 | 32.51 | 32.46 | - | - | - |
| $0.15\cdot10^{-4}$ | 34.44 | 34.49 | 34.44 | - | - | - |
| $0.15\cdot10^{-3}$ | 36.15 | 36.22 | 36.17 | - | - | - |
| $0.15\cdot10^{-2}$ | 36.50 | 36.57 | 36.51 | - | - | - |
| $0.15\cdot10^{-1}$ | 36.56 | 36.61 | 36.56 | - | - | - |

При постоянном $\overline{J}=9\cdot10^{-7}$ и при увеличении $\overline{\alpha}$, безразмерная частота $\overline{\omega}$ возрастает. При постоянном $\overline{\alpha}=0.15\cdot10^{-6}$ и при увеличении $\overline{J}$, безразмерная частота $\overline{\omega}$ уменьшается (1. $\overline{J}=9\cdot10^{-2}$, $\overline{\omega}\times10^3=24.44$; 2. $\overline{J}=9\cdot10^{-1}$, $\overline{\omega}\times10^3=7.73$. Расчёты выполнены, когда имеем 2 конечных элемента.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта 18RF-106.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Altenbach H, Eremeyev V. Basics of Mechanics of Micropolar Shells, In: Shell-like Structures. CISM International Centre for Mechanical Sciences (Courses and Lectures), ed. by H. Altenbach, V. Eremeyev, (Springer, Cham, 2017) Volume 572. P. 63-112.
2. Sargsyan S. H. Effective Manifestations of Characteristics of Strength and Rigidity of Micropolar Elastic Thin Bars// Journal of Materials Science and Engineering. 2012. Vol.2. № 1. P.98-108.
3. Саркисян С.О. Математическая модель микрополярных упругих тонких пластин и особенности их прочностных и жесткостных характеристик.// Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т.53. Вып. 2. С.148-156.
4. Саркисян С.О. Общая теория микрополярных упругих тонких оболочек// Физическая мезомеханика. 2011. Т.14. № 1. С.55-66.
5. Sargsyan S. H. Asymptotically Confirmed Hypotheses Method for the Construction of Micropolar and Classical Theories of Elastic Thin Shells// Advances in Pure Mathematics. 2015. Vol.5. №10. P.629-643.
6. Sargsyan S.H., Zhamakochyan K.A. Finite Element Method for Solving Boundary Value Problems of Bending of Micropolar Elastic Thin Bars// Proceedings of the XLII Summer School-Conference Advanced Problems in Mechanics. St.-Petersburg, Russia. June 30-July 5, 2014. P.427-434.
7. Жамакочян К.А., Саркисян С.О. Метод конечных элементов в расчетах на изгиб микрополярных упругих тонких пластин// Вычислительная механика сплошных сред. 2016. Т.9. №3. С 375-383.



**Сведения об авторах:**

**Саркисян Самвел Оганесович** – Чл-корр. НАН Армении, д. ф.-м. н., профессор Ширакского госуниверситета им. М. Налбандяна, (374 93)15 16 98; **E–mail:** s_sargsyan@yahoo.com

**Жамакочян Кнарик Араратовна** – аспирант Ширакского государственного университета им. М. Налбандяна, (374 93) 87 32 94; **E-mail:** knarikzhamakochyan@mail.ru

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ОТКЛОНЕНИЯ ФОРМЫ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ КОСМИЧЕСКОГО КАЛИБРОВОЧНО-ЮСТИРОВОЧНОГО АППАРАТА

**Зарубин В.С., Зимин В.Н., Кувыркин Г.Н.**

Выполненная с высокой точностью сферическая оболочка является одним из вариантов геометрической формы пассивных орбитальных ретрансляторов сигналов и космических аппаратов калибровочно-юстировочного типа, используемых для определения энергетического потенциала радиолокационного канала наземного комплекса контроля движения космических объектов. Под действием солнечного излучения возникает неравномерное по поверхности такой оболочки распределение температуры, вызывающее отклонение её формы от сферической. Полученное решением интегрального уравнения Фредгольма второго рода установившееся распределение температуры оболочки с фиксированной ориентацией относительно Солнца использовано для определения указанных отклонений. Проведён количественный анализ возможного выравнивания квазистационарного распределения температуры оболочки в случае её вращения с постоянной угловой скоростью вокруг оси, перпендикулярной к направлению на Солнце.

Одним из вариантов геометрической формы калибровочно-юстировочного космического аппарата, предназначенного для определения и контроля энергетического потенциала радиолокационного канала наземного комплекса контроля движения космических объектов [1, 2], является выполненная с высокой точностью сферическая оболочка. Такую же форму имеют пассивные ретрансляторы сигналов и используемые в целях калибровки и юстировки радиолокационной аппаратуры некоторые типы малоразмерных эталонных отражателей [1, 3]. Орбиты рассматриваемых космических аппаратов могут быть как круговыми с высотой около 1000 км, в том числе, близкими к полярным, так и эллиптическими с апогеем до 2200 км [2, 3].

При отсутствии системы терморегулирования космических аппаратов указанных типов основным фактором, определяющим температурное состояние сферической оболочки на освещенном участке орбиты, является солнечное излучение. При фиксированном расположении оболочки по отношению к направлению на Солнце возникающая неравномерность распределения температуры по её поверхности приводит к отклонению формы оболочки от идеальной сферической, что может повлиять на функциональные характеристики космического аппарата. Вращение оболочки относительно оси, перпендикулярной по отношению к направлению на Солнце, может способствовать снижению степени неравномерности распределения температуры.

Количественную оценку неравномерности распределения температуры по поверхности сферической оболочки в условиях околоземного космического пространства и влияния этой неравномерности на отклонение формы оболочки от сферической можно получить соответствующими методами математического моделирования [4], используя модификацию ранее разработанной математической модели, описывающей установившееся температурное состояние такой оболочки на низкой околоземной орбите [5]. В данной работе рассмотрена оболочка, выполненная из полимерного композиционного материала, исходная сферическая форма которой определяется сравнительно невысоким внутренним давлением. Предполагается, что при наличии в оболочке оборудования занимаемый им объём достаточно мал, что позволяет не учитывать его влияние на перенос излучения в полости оболочки. Наряду с определением установившегося распределения температуры по поверхности оболочки при её фиксированной ориентации по отношению к направлению на Солнце получено квазистационарное температурное состояние оболочки при её вращении с постоянной угловой скоростью относительно оси, перпендикулярной к этому направлению. Для вычисленного распределения температуры по поверхности невращающейся оболочки проведена оценка отклонения её формы от сферической.

Одним из возможных вариантов конструкции космического калибровочно-юстировочного аппарата является оболочка из полимерного композиционного материала, которая принимает сферическую форму после вывода на околоземную орбиту благодаря внутреннему давлению, создаваемому наполняющим её газом. В этом случае возможно получить оболочку достаточно большого диаметра, что характерно для современных тенденций развертывания на орбите крупногабаритных трансформируемых конструкций [6]. Исходя из условий эксплуатации аппарата, такую оболочку целесообразно выполнять многослойной, включающей несколько слоёв, каждый с различным функциональным назначением. Помимо сравнительно тонкого внутреннего газонепроницаемого слоя, необходим слой из материала с достаточно высокими механическими характеристиками, покрытый внешним слоем материала, свойства которого определяются непосредственно из эксплуатационных требований к аппарату.

При неизменной по толщине температуре и нагружении внутренним давлением $p$ сферическую оболочку допустимо считать безмоментной. Рассмотренные выше варианты температурного состояния оболочки являются осесимметричными относительно координатной оси $Ox_1$, совпадающей с направлением на Солнце. Тогда меридиональное сечение оболочки будет образовано любой плоскостью, содержащей эту ось, а меридиональное напряжение $\sigma_1$ будет направлено по касательной к контуру оболочки в этом сечении. Направление окружного напряжения $\sigma_2$ будет совпадать с касательной к контуру оболочки в её поперечном сечении, перпендикулярном к оси $Ox_1$. Для сферической оболочки толщиной $h$, радиусом $r_0$ средней поверхности и нагружённой внутренним давлением $p$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pr_0}{2h}. \tag{1}$$

Проведём оценку отклонения формы оболочки от сферической, приняв в первом приближении напряжения $\sigma_1$ и $\sigma_2$, не зависящими от этих отклонений и определяемыми формулой (1). Тогда, в предположении линейной упругости изотропного материала оболочки, согласно обобщённому закону Гука, для равных между собой деформаций $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$ соответственно, в меридиональном и окружном направлениях с учётом формулы (1) запишем

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = pr_0\frac{1-\nu}{2Eh} + \alpha\Delta T, \tag{2}$$

где $\nu$, $E$ и $\alpha$ – соответственно, коэффициент Пуассона, продольный модуль упругости (модуль Юнга) и температурный коэффициент линейного расширения материала оболочки, $\Delta T = T - T_0$ – приращение температуры $T$ оболочки по сравнению с однородной по её поверхности температурой $T_0$, при которой радиус её средней поверхности был равен $r_0$.

Если ввести перемещения $u$ и $w$ точек средней поверхности оболочки соответственно в направлениях нормали и касательной к её контуру в меридиональном сечении, то в линейном приближении будут справедливы соотношения

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{r_0}\left(w - \frac{du}{d\chi}\right), \quad \varepsilon_2 = \frac{w + u\,\mathrm{tg}\,\chi}{r_0} = \frac{u_r}{r}, \tag{3}$$

где $u_r$ – перемещение в радиальном направлении в плоскости поперечного сечения оболочки, а $r = r_0\cos\chi$ – радиус контура средней поверхности в этом сечении. Из равенства (2) и второго соотношения (3) следует

$$u_r = \left(pr_0\frac{1-\nu}{2Eh} + \alpha\Delta T\right)r_0\cos\chi. \tag{4}$$

Соотношения (2) и (3) позволяют записать равенство $du/d\chi = -u\,tg\,\chi$, которому удовлетворяет функция $u = C\cos\chi$, где $C = \mathrm{const}$. Тогда из равенства (2) и первого соотношения (3) находим

$$w = pr_0^2\frac{1-\nu}{2Eh} + \alpha r_0\Delta T - C\sin\chi.$$

Перемещение в направлении оси $Ox_1$ равно $u_1 = u\cos\chi - w\sin\chi$, что с учётом формул для перемещений $u$ и $w$ даёт

$$u_1 = C - \left(pr_0\frac{1-\nu}{Eh} + \alpha\Delta T\right)r_0\sin\chi.$$

Если за нуль отсчёта перемещения $u_1$ принять точку $M_1$ на оси $Ox_1$ с координатой $x_1 = r_0$, соответствующую значению $\chi = \pi/2$, то получим $C = pr_0^2(1-\nu)/(2Eh) + \alpha r_0 \Delta T$ и

$$u_1 = \left( pr_0 \frac{1-\nu}{Eh} + \alpha \Delta T \right) r_0 (1 - \sin\chi). \tag{5}$$

Из формул (4) и (5) следует, что наличие внутреннего давления не искажает форму сферической оболочки, а лишь приводит к одинаковому во всех точках средней поверхности приращению $\Delta r_0 = pr_0^2(1-\nu)/(2Eh)$ её радиуса $r_0$. Отклонение формы оболочки от сферической непосредственно связано с неравномерностью распределения температуры по её поверхности. В случае невращающейся оболочки эта неравномерность возникает только на освещённой части её поверхности. На рис. 1 в увеличенном масштабе сплошной кривой для такой оболочки представлено вызванное только влиянием этой неравномерности отклонение контура меридионального сечения средней поверхности от дуги окружности (штрихпунктирная линия со светлыми кружками), соответствующей контуру средней поверхности оболочки в её меридиональном сечении при выбранной фиксированной температуре $T_0 \approx 290{,}4\,\text{К}$. Расположение темных кружков на сплошной кривой по отношению к соответствующим светлым кружкам позволяет сравнить степень локальных искажений контура средней поверхности. В затемнённой части оболочки температура $T_{\min} \approx 236{,}5\,\text{К} = \text{const}$ и поэтому средняя поверхность сохраняет полусферическую форму, но меньшего радиуса, поскольку $T_{\min} < T_0$.

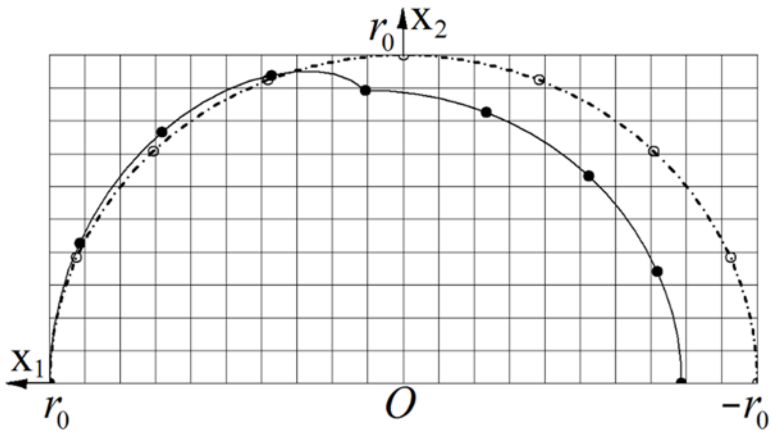



Рис.1. Отклонение формы контура средней поверхности невращающейся оболочки

Количественный анализ математической модели, построенной для описания температурного состояния надувной сферической оболочки космического калибровочно-юстировочного аппарата, позволил выявить степень неравномерности распределения температуры по поверхности оболочки, неподвижной относительно направления на Солнце и вращающейся с постоянной угловой скоростью относительно оси, перпендикулярной к этому направлению. По результатам расчёта температурного состояния невращающейся оболочки проведена оценка отклонения её формы от идеальной сферической.

Работа выполнена в рамках государственных заданий, проекты 9.2422.2017/ПЧ, 9.7784.2017/БЧ.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Малые космические аппараты информационного обеспечения / Под ред. В.Ф. Фатеева. М.: Радиотехника, 2010. 320 с.
2. Мащенко А.Н., Паппо-Корыстин В.Н., Пащенко В.А., Васильев В.Г. Ракеты и космические аппараты конструкторского бюро «Южное» / Под общ. ред. С.Н. Конюхова. Днепропетровск: ГКБ «Южное» им. М. К. Янгеля, 2000. 240 с.
3. Тарасенко М.В. Военные аспекты советской космонавтики. М.: Агентство Российской печати, ТОО «Николь», 1992. 164 с.
4. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математическое моделирование термомеханических процессов при интенсивном тепловом воздействии // Теплофизика высоких температур. 2003. Т.41. № 2. С.300-309.
5. Зарубин В.С. Температурное состояние тонкой сферической оболочки // Прикладная механика и техническая физика. 1963. № 6. С.169-171.
6. Зимин В.Н. К вопросу моделирования и расчета динамики раскрытия трансформируемых космических конструкций // Оборонная техника. 2006. № 1. С.123-127.


**Сведения об авторах:**


**Зарубин Владимир Степанович** – доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д.5, стр.1, **e-mail:** zarubin-vs@.mail.ru).

**Зимин Владимир Николаевич** – доктор технических наук, первый проректор – проректор по научной работе МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д.5, стр.1, **e-mail:** zimin@bmstu.ru).

**Кувыркин Георгий Николаевич**– доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д.5, стр.1, **e-mail:** fn2@bmstu.ru).

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО СОСТОЯНИЯ ОБОЛОЧКИ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА НА ТЕНЕВОМ УЧАСТКЕ ОРБИТЫ

**Зарубин В.С., Зимин В.Н., Савельева И.Ю.**

Построена тепловая модель, описывающая установившееся температурное состояние алюминированной полимерной сферической оболочки калибровочного космического аппарата, находящегося на затемнённом участке околоземной орбиты. Эта модель учитывает перенос тепловой энергии излучением в полости оболочки и позволяет установить зависимость распределения температуры по поверхности оболочки от высоты космического аппарата над поверхностью Земли и от коэффициентов излучения внешней и внутренней поверхностей оболочки. Количественный анализ полученной зависимости показал, что с увеличением указанных коэффициентов излучения происходит выравнивание распределения температуры по поверхности оболочки при сохранении её изотермического участка с наименьшим значением температуры, расположенного на противоположной от Земли стороне оболочки. С увеличением высоты космического аппарата над поверхностью Земли возрастает площадь изотермического участка и происходит существенное снижение среднего уровня температуры оболочки, что необходимо учитывать при оценке работоспособности используемого полимерного материала оболочки.

Для оценки энергетического потенциала радиолокационного канала наземного комплекса контроля движения космических объектов применяют калибровочные космические аппараты (ККА) [1, 2]. Одним из вариантов геометрической формы таких ККА является выполненная с высокой точностью сферическая оболочка. Такая же форма характерна для пассивных ретрансляторов сигналов и некоторых типов эталонных отражателей [1, 3]. Наряду с орбитами, близкими к полярным, указанные ККА могут находиться и на круговых и эллиптических околоземных орбитах [2, 3], имеющих участки, затенённые Землей от облучения Солнцем.

Можно считать, что на затенённом участке околоземной орбиты оболочка ККА подвергается тепловому воздействию лишь собственного излучения поверхности Земли, интенсивность которого существенно меньше по сравнению с интенсивностью достигающего околоземного пространства теплового излучения Солнца. В связи с этим, следует ожидать более низкого уровня температуры оболочки на этом участке орбиты по сравнению с её температурой на участке, освещенном Солнцем [4, 5]. Это вызовет значительное изменение температуры оболочки ККА в пределах одного периода его обращения вокруг Земли [6]. Длительное циклическое изменение температурного состояния оболочки ККА может ограничить ресурс работоспособности её материала.

В качестве материала оболочки обычно используют полимерную пленку толщиной несколько десятков микрометров, покрытую тонким слоем (толщиной несколько нанометров) напыленного алюминия [7], необходимого исходя из эксплуатационных требований к ККА. После вывода ККА на околоземную орбиту оболочка принимает сферическую форму благодаря сравнительно невысокому давлению, создаваемому наполняющим её газом. В этом случае возможно получить сферическую оболочку достаточно большого диаметра, что характерно для современных тенденций развертывания на орбите крупногабаритных трансформируемых конструкций [8].

Даже при радиусе $r_0$ сферической оболочки порядка 10 м начиная с высоты $H = 200$ км ККА над поверхностью Земли его угловой размер при наблюдении с Земли не превышает $10^{-4}$ рад. Поэтому при заданной высоте $H$ текущего положения ККА над поверхностью Земли (расстояние между точками $O$ и $O''$на рис.1) можно принять, что на его поверхность падает собственное излучение Земли с участка её поверхности, площадь которого зависит от центрального угла $\gamma_m = \arccos\dfrac{R_0}{R_0 + H}$. Выделим на этом участке поверхности кольцевой слой бесконечно малой ширины $R_0 d\gamma\,(\gamma \in [0; \gamma_m])$ площадью $dS' = 2\pi R_0^2 \sin\gamma\, d\gamma$ (на рис.1 этот слой заштрихован).

В силу пренебрежимо малого углового размера ККА при наблюдении с поверхности Земли угол $\varphi$ между нормалью к выделенному кольцевому слою и направлением на различные участки поверхности КА можно принять равным $\beta + \gamma$, где $\beta$ – угол между лучами, исходящими из центра сферической оболочки ККА к центру Земли и к этому слою (рис. 1). На поверхность ККА, согласно закону Ламберта, указанный слой посылает поток излучения $dQ = q_0 (r_0 / l)^2 \cos\varphi\, dS'$, где $l^2 = R_0^2 + (R_0 + H)^2 - 2R_0(R_0 + H)\cos\gamma$, $q_0 \approx 215\,\text{Вт}/\text{м}^2$ – плотность потока собственного излучения Земли. В итоге суммарный поток излучения, падающий на поверхность сферической оболочки ККА, будет равен

$$Q = 2\pi R_0^2 r_0^2 q_0 \int_0^{\gamma_m} \frac{\cos(\beta+\gamma)}{R_0^2 + (R_0+H)^2 - 2R_0(R_0+H)\cos\gamma} \sin\gamma\, d\gamma\,. \tag{1}$$

Отметим, что наибольшее значение $\beta_m$ равно $\pi/2 - \gamma_m$, что соответствует углу $\varphi = \pi/2$.

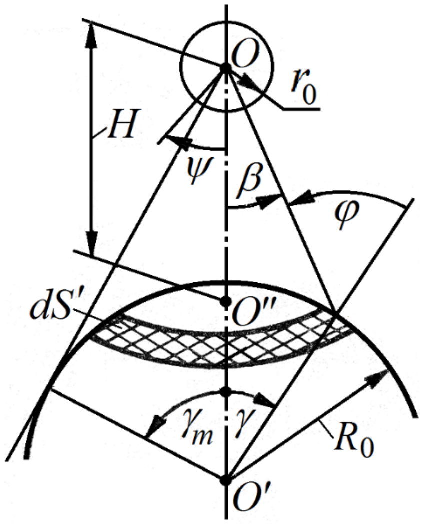



Рис.1. Расчётная схема

Представим $\cos(\beta+\gamma)$ в подынтегральной функции в правой части равенства (1) в виде $\cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\,\sin\gamma$ и в соответствии с рис.1

$$\sin\beta = \frac{R_0}{l}\sin\gamma, \quad \cos\beta = \frac{R_0(1-\cos\gamma)+H}{l}\,, \tag{2}$$

что позволяет вместо равенства (1) записать

$$Q = 2\pi R_0^2 q_0 r_0^2 \int_0^{\gamma_m} \frac{(R_0(1-\cos\gamma)+H)\cos\gamma - R_0(1-\cos^2\gamma)}{(R_0^2 + (R_0+H)^2 - 2R_0(R_0+H)\cos\gamma)^{3/2}} \sin\gamma\, d\gamma\,.$$

Отсюда, используя подстановку $x = \cos\gamma$ и учитывая, что $dx = -\sin\gamma\, d\gamma$ и $\cos\gamma_m = \dfrac{R_0}{R_0+H}$, находим

$$Q = 2\pi r_0^2 q_0 \int_{1/(1+\eta)}^{1} \frac{(1+\eta)x - 1}{(1+(1+\eta)^2 - 2(1+\eta)x)^{3/2}} dx = 2\pi r_0^2 q_0 \left(1 - \frac{\sqrt{\eta(2+\eta)}}{1+\eta}\right), \tag{3}$$

где $\eta = H/R_0$.

Распределение потока излучения, падающего на поверхность сферической оболочки, является неравномерным. Это распределение целесообразно описывать зависимостью $q'(\psi)$ плотности потока падающего излучения от угла $\psi$, отсчитываемого от ближайшей к поверхности Земли точки на поверхности оболочки (рис. 1) вдоль любой дуги большого круга радиусом $r_0$, проходящей через эту точку. Наибольшая плотность $q'(0)$ потока падающего излучения будет при $\psi = 0$ именно в этой точке.

Для нахождения величины $q'(0)$ в окрестности указанной выше точки выделим площадку, перпендикулярную к прямой $O'O$, соединяющей центры Земли и сферической оболочки (рис.1). Тогда, с учётом того, что излучение от кольцевого слоя на поверхности Земли падает на эту площадку под углом $\beta$, использовав второе равенство (2), получим

$$q'(0) = 2q_0 \int\limits_{1/(1+\eta)}^{1} \frac{(1+\eta)\,x-1}{(1+(1+\eta)^2-2\,(1+\eta)\,x)^2}(1-x+\eta)\,dx = \frac{q_0}{(1+\eta)^2}\,. \tag{4}$$

По мере увеличения угла $\psi$ плотность потока излучения, падающего на сферическую оболочку, будет убывать и, в соответствии с принятым выше допущением о возможности пренебречь угловым размером оболочки, примем нулевое значение при $\psi_m = \pi - \gamma_m$, т.е. $q'(\psi_m) = 0$ и, кроме того, $\left.\dfrac{dq'(\psi)}{d\psi}\right|_{\psi=\psi_m} = 0$. Из симметрии распределения $q'(\psi_m)$ относительно прямой $O'O$ следует, что $\left.\dfrac{dq'(\psi)}{d\psi}\right|_{\psi=\psi_m} = 0$. Этим условиям удовлетворяет аппроксимирующее соотношение

$$q'(\psi) = q'(0)\cos^2\frac{\pi\psi}{2\psi_m} + q_1'\sin^2\frac{\pi\psi}{\psi_m}\,, \tag{5}$$

в котором коэффициент $q_1'$ найдём из баланса потоков падающего излучения в виде

$$Q = 2\pi r_0^2 \int\limits_0^{\psi_m}\left(q'(0)\cos^2\frac{\pi\psi}{2\psi_m} + q_1'\sin^2\frac{\pi\psi}{\psi_m}\right)\sin\psi\,d\psi\,. \tag{6}$$

Интеграл в правой части этого равенства представим суммой двух интегралов:

$$I_0 = \frac{q'(0)}{2}\int\limits_0^{\psi_m}\left(1+\cos\frac{\pi\psi}{\psi_m}\right)\sin\psi\,d\psi, \quad I_1 = \frac{q_1'}{2}\int\limits_0^{\psi_m}\left(1-\cos\frac{2\pi\psi}{\psi_m}\right)\sin\psi\,d\psi\,,$$

которые могут быть сведены к табличным [9] и после вычисления примут вид

$$I_0 = q'(0)\frac{1-\cos\psi_m - 2\,(\psi_m/\pi)^2}{2-2\,(\psi_m/\pi)^2}, \quad I_1 = 2q_1'\frac{1-\cos\psi_m}{4-(\psi_m/\pi)^2}\,.$$

Отсюда с учётом равенств (3), (4) и (6), получим:

$$q_1' = q_0\frac{4-(\psi_m/\pi)^2}{2\,(1-\cos\psi_m)}\left(1-\frac{\sqrt{\eta\,(2+\eta)}}{1+\eta} - \frac{1-\cos\psi_m - 2(\psi_m/\pi)^2}{2\,(1+\eta)^2(1-(\psi_m/\pi)^2)}\right). \tag{7}$$

Так как $\psi_m = \pi - \gamma_m = \pi - \operatorname{arctg}\sqrt{\eta\,(2+\eta)}$ и $\cos\psi_m = -\cos\gamma_m = -\dfrac{1}{1+\eta}$, отношения $\overline{q}(0) = q'(0)\,q_0$, $\overline{q}_1 = q_1'/q_0$ и $\overline{Q} = Q/(\pi r_0^2 q_0)$ и угол $\psi_m$ можно представить функциями лишь одного аргумента $\eta$. Отметим, что распределение плотности падающего на поверхность оболочки излучения обладает осевой симметрией относительно прямой $O'O$ (рис.1).

Тепловая модель, описывающая установившееся температурное состояние алюминированной полимерной сферической оболочки калибровочного космического аппарата, находящегося на затенённом участке околоземной орбиты, позволяет установить зависимость распределения температуры по поверхности оболочки от высоты космического аппарата над поверхностью Земли и от коэффициентов излучения внешней и внутренней поверхностей оболочки. Количественный анализ полученной зависимости показал, что с увеличением указанных коэффициентов излучения происходит выравнивание распределения температуры по поверхности оболочки при сохранении её изотермического участка с наименьшим значением температуры, расположенного на противоположной от Земли стороне оболочки. С увеличением высоты космического аппарата над поверхностью Земли возрастает площадь изотермического участка и происходит существенное снижение среднего уровня температуры оболочки, что необходимо учитывать при оценке работоспособности используемого полимерного материала оболочки.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-38-20108.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Малые космические аппараты информационного обеспечения / Под ред. В.Ф. Фатеева. М.: Радиотехника, 2010. 320 с.
2. Мащенко А.Н., Паппо-Корыстин В.Н., Пащенко В.А., Васильев В.Г. Ракеты и космические аппараты конструкторскогобюро «Южное» / Под общ. ред. С.Н. Конюхова. Днепропетровск: ГКБ «Южное» им. М. К. Янгеля, 2000. 240 с.
3. Тарасенкро М.В. Военные аспекты советской космонавтики. М.: Агентство Российской печати, ТОО "Николь", 1992. 164 с.
4. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Локальное распределение температуры на поверхности космического аппарата при неравномерном слнечном облучении // Аэрокосмический научный журнал. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон журн. 2015. № 5. С. 49-63. DOI:10.7463/aersp.0515.0820883.
5. Зарубин В.С., Зимин В.Н., Кувыркин Г.Н. Температурное состояние и отклонение формы сферической оболочки космического калибровочно-юстировочного аппарата // Аэрокосмический научный журнал. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон журн. 2016. № 1. С. 27-45. DOI:10.7463/aersp.0116.0831867.
6. Зарубин В.С. Температурные поля в конструкции летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1966. 216 с.
7. Optical Calibration Sphere Experiment.eo Portal Directory: веб-сайт. Режим доступа: http: //directory.eoportal.org/web/eoportal/satellite-missions/j/jawsat#footback10%29 (дата обращения 15.08.2016).
8. Зимин В.Н. К вопросу моделирования и расчета динамики раскрытия трансформируемых космических конструкций // Оборонная техника. 2006. № 1. С.123-127.
9. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.

**Сведения об авторах:**

**Зарубин Владимир Степанович** – доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2 -я Бауманская ул., д.5, стр.1, **e-mail:** zarubin@.bmstu.ru).

**Зимин Владимир Николаевич** – доктор технических наук, первый проректор – проректор по научной работе МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д.5, стр.1, **e-mail:** zimin@bmstu.ru).

**Савельева Инга Юрьевна** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д.5, стр.1, **e-mail:** inga.savelyeva@bmstu.ru).

# О ЛИНЕЙНОМ ИЗНОСЕ СЛОИСТОГО ОСНОВАНИЯ СИСТЕМОЙ ШЕРОХОВАТЫХ ШТАМПОВ

**Казаков К.Е., Курдина С.П.**

Статья посвящена решению задачи линейного износа основания с неоднородным покрытием системой штампов, имеющих сложный профиль основания. Показано, что для этого необходимо исследовать и строить решение системы смешанных интегральных уравнений с дополнительными условиями, в состав которых входит несколько быстро изменяющихся функций, так как штампы могут иметь сложную форму, а неоднородность покрытия описываться даже разрывной функцией. В построенном решении в явном виде выделены функции, связанные со свойствами покрытия и формами штампов, что позволяет производить эффективные и точные вычисления.

На недеформируемом основании лежит однородный упругий слой толщины $h_{\text{lower}}$ с покрытием толщины $h$, упругие свойства которого зависят от продольной координаты $x$, т.е. $E = E(x)$ и $\nu = \nu(x)$. На границе слоёв и между нижним слоем и недеформируемым основанием осуществляется идеальный контакт. Покрытие является мягким, то есть его жёсткость меньше или равна жёсткости слоя нижнего [1]. В некоторый момент времени $\tau_0$ на такое основание начинает действовать система штампов вдоль оси $Oz$. Более того, указанные штампы колеблются вдоль оси $Oy$, перпендикулярной к плоскости $Oxz$ так, что средняя величина модуля их скорости одинакова и равна $V$. Предполагается, что вдоль оси $Oy$ между штампами и покрытием есть трение. За счёт этого происходит износ покрытия в местах соприкосновения штампов и основания.

Многочисленные эксперименты показывают, что скорость износа обратно пропорциональна твёрдости покрытия $H(x)$ и пропорциональна нормальной силе $-q(x,t)$ и скорости движения штампа $V$ [2–6]

$$v_{\text{w}}(x,t) = -\frac{k_{\text{w}}V}{H(x)}q(x,t),$$

где $k_{\text{w}}$ – коэффициент пропорциональности. В этом случае перемещение верхней грани покрытия за счёт износа

$$u_{\text{w}}(x,t) = -\int_{\tau_0}^{t} v_{\text{w}}(x,\tau)d\tau = -\frac{k_{\text{w}}V}{H(x)}\int_{\tau_0}^{t} q(x,\tau)d\tau. \tag{1}$$

В работе [7] показано, что перемещение верхней грани двухслойного основания за счёт действия распределённой силы $-q(x,t)$ выражается формулой

$$u_{\text{q}}(x,t) = -\frac{q(x,t)h}{R(x)} - \frac{2(1-\nu_{\text{lower}}^2)}{\pi E_{\text{lower}}}\int_{-\infty}^{\infty} k_{\text{pl}}\left(\frac{x-\xi}{h_{\text{lower}}}\right) q(\xi,t)d\xi. \tag{2}$$

Здесь $\nu_{\text{lower}}$ и $E_{\text{lower}}$ – упругие характеристики нижнего слоя, $R(x) = E(x)[1-\nu(x)]/[1-\nu(x)-2\nu^2(x)]$ – контактная жёсткость покрытия [7], $k_{\text{pl}}(s) = \int_0^{\infty}[L(u)/u]\cos(su)du$ – ядро плоской задачи контакта [8], $L(u) = [2\kappa\,\text{sh}(2u) - 4u]/[2\kappa\,\text{ch}(2u) + 4u^2 + 1 + \kappa^2]$, $\kappa = 3 - 4\nu_{\text{lower}}$.

Работы [9, 10] показывают, что существуют материалы и модели износа, для которых жёсткость и твёрдость материалов пропорциональны, т.е.

$$H(x) = k_{\text{H}}R(x). \tag{3}$$

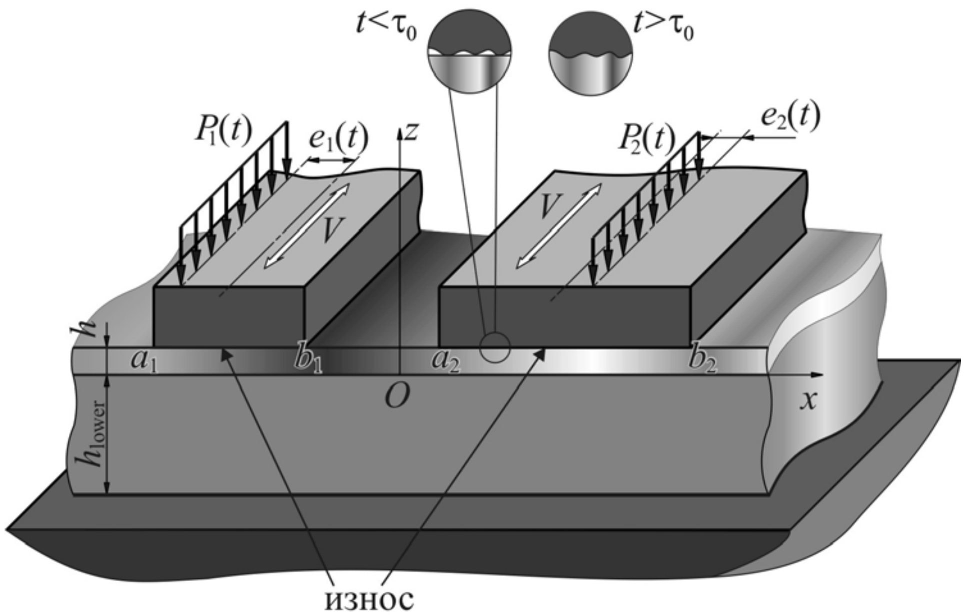
Будем рассматривать именно такие материалы.

В результате, перемещение верхней грани покрытия равно перемещению нижней грани штампа. Учитывая (1)–(3), а также условия равновесия штампов, получим:

$$\frac{k_{\text{H}}q_i(x,t)h}{H(x)} + \frac{k_{\text{w}}V}{H(x)}\int_{\tau_0}^{t} q_i(x,\tau)d\tau +$$

$$+\frac{2(1-\nu_{\text{lower}}^2)}{\pi E_{\text{lower}}}\sum_{j=1}^{n}\int_{a_j}^{b_j} k_{\text{pl}}\left(\frac{x-\xi}{h_{\text{lower}}}\right) q_j(\xi,t)d\xi = \delta_i(t) + \alpha_i(t)(x-\eta_i) - g_i(x), \tag{4}$$

$$\int_{a_i}^{b_i} q_i(\xi,t)d\xi = P_i(t), \quad \int_{a_i}^{b_i}(\xi-\eta_i)q_i(\xi,t)d\xi = M_i(t) = P_i(t)e_i(t), \quad x\in[a_i,b_i], \quad t \ge \tau_0,$$




где $\delta_i(t)$ и $\alpha_i(t)$ – осадка и угол поворота $i$-го штампа, $a_i$ и $b_i$ – левая и правая границы $i$-го штампа, $\eta_i = (a_i + b_i)/2$, $g_i(x)$ – форма основания $i$-го штампа, $P_i(t)$ и $e_i(t)$ – вдавливающая сила и эксцентриситет её приложения.

Введём новые переменные и функции по формулам

$$x^* = \frac{2(x-\eta_i)}{\bar{a}_i}, \quad \xi^* = \frac{2(\xi-\eta_j)}{\bar{a}_j}, \quad t^* = \frac{t}{\tau_0}, \quad \lambda = \frac{2h_{\mathrm{lower}}}{\bar{a}}, \quad \zeta^{i*} = \frac{\bar{a}_i}{\bar{a}}, \quad \eta^{i*} = \frac{2\eta_i}{\bar{a}},$$

$$\delta^{i*}(t^*) = \frac{\delta_i(t)}{\bar{a}}, \quad \alpha^{i*}(t^*) = \zeta^{i*}\alpha_i(t), \quad g^{i*}(t^*) = \frac{g_i(t)}{\bar{a}}, \quad V^* = \frac{k_{\mathrm{w}} V \tau_0}{k_{\mathrm{H}} h},$$

$$m^{i*}(x^*) = \frac{k_{\mathrm{H}} h E_{\mathrm{lower}}}{\bar{a}_i H(x)(1-\nu^2_{\mathrm{lower}})}, \quad q^{i*}(x^*,t^*) = \frac{2\zeta^{i*} q_i(x,t)(1-\nu^2_{\mathrm{lower}})}{E_{\mathrm{lower}}},$$

$$P^{i*}(t^*) = \frac{4P_i(t)(1-\nu^2_{\mathrm{lower}})}{\bar{a}E_{\mathrm{lower}}}, \quad M^{i*}(t^*) = \frac{8M_i(t)(1-\nu^2_{\mathrm{lower}})}{\bar{a}_i\bar{a}E_{\mathrm{lower}}}, \quad k^{ij*}(x^*,\xi^*) = \frac{1}{\pi} k_{\mathrm{pl}}\left(\frac{x-\xi}{h_{\mathrm{lower}}}\right).$$

Тогда, безразмерная система уравнений и дополнительных условий принимает вид:

$$m^i(x)\left[q^i(x,t) + V\int_1^t q^i(x,\tau)d\tau\right] + \sum_{j=1}^n \int_{-1}^1 k^{ij}(x,\xi) q^j(\xi,t)d\xi = \delta^i(t) + \alpha^i(t)x - g^i(x),$$

$$\int_{-1}^1 q^i(\xi,t)d\xi = P^i(t), \quad \int_{-1}^1 \xi q^i(\xi,t)d\xi = M^i(t), \quad x \in [-1,1], \quad t \ge 1.$$

Здесь и далее звездочки будут опущены. Если в данном уравнении для первого слагаемого ввести оператор Фредгольма, то

$$m^i(x)(\mathbf{I}-\mathbf{V})q^i(x,t) + \sum_{j=1}^n \int_{-1}^1 k^{ij}(x,\xi)q^j(\xi,t)d\xi = \delta^i(t) + \alpha^i(t)x - g^i(x), \quad \mathbf{V}f(t) = -\int_1^t Vf(\tau)d\tau.$$

Для того, чтобы учитывать как, возможно, быстро изменяющиеся свойства покрытия, так и сложные формы штампов, решение такой задачи необходимо строить в виде

$$q^i(x,t) = \frac{Q^i(x,t)}{\sqrt{m^i(x)}} - (\mathbf{I}-\mathbf{V})^{-1}\frac{g^i(x)}{m^i(x)},$$

где $Q^i(x,t)$ – новые неизвестные функции, решение для которых ищется в виде разложения по системе специальных ортогональных базисных функций. Тогда, окончательное решение для случая, когда на всех штампах известны силы и моменты, имеет вид

$$q^i(x,t)=\frac{1}{m^i(x)}\left[z_0^i(t)p_0^{i\circ}(x)+z_1^i(t)p_1^{i\circ}(x)+\sum_{k=2}^{\infty}z_k(t)\sum_{m=2}^{\infty}\psi_{km}^i p_m^{i\circ}(x)\right]-(\mathbf{I}-\mathbf{V})^{-1}\frac{g^i(x)}{m^i(x)},$$

$$\alpha^i(t)=\sqrt{\frac{J_{0,i}}{J_{0,i}J_{2,i}-J_{1,i}^2}}\left\{-(\mathbf{I}-\mathbf{V})^{-1}\tilde{g}_1^i+(\mathbf{I}-\mathbf{V})z_1^i(t)+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{n}\left[K_{10}^{ij}z_0^j(t)+K_{11}^{ij}z_1^j(t)+\sum_{k=2}^{\infty}\left(\sum_{l=2}^{\infty}K_{1l}^{ij}\psi_{kl}^j\right)z_k(t)\right]\right\},$$

$$\delta^i(t)=\frac{1}{\sqrt{J_{0,i}}}\left\{(\mathbf{I}-\mathbf{V})^{-1}\tilde{g}_0^i+(\mathbf{I}-\mathbf{V})z_0^i(t)+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{n}\left[K_{00}^{ij}z_0^j(t)+K_{01}^{ij}z_1^j(t)+\sum_{k=2}^{\infty}\left(\sum_{l=2}^{\infty}K_{0l}^{ij}\psi_{kl}^j\right)z_k(t)\right]\right\}-\frac{J_{1,i}}{J_{0,i}}\alpha^i(t),$$

в которых функции, входящие в эти уравнения, определяются аналитически при построении решения и не приводятся здесь в силу громоздкости. Необходимо лишь сказать, что решение строилось при помощи обобщённого проекционного метода А.В. Манжирова [11].

Следует отметить, что в выражении для контактных давлений отдельными сомножителями и слагаемыми выделены функции, связанные с формами штампов и свойствами покрытия. Это позволяет производить эффективные вычисления при расчёте износа тел со сложными покрытиями системами произвольных шероховатых штампов. Другие известные методы решения приведут к существенной ошибке, так как при построении решения не учитывают особенностей задачи.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РНФ (проект № 17-19-01257).

## ЛИТЕРАТУРА


1. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1979. 486 с.
2. Проников А.С. Износ и долговечность станков. М.: Машгиз, 1957. 172 с.
3. Хрущев М.М., Бабичев М.А. Абразивное изнашивание. М.: Наука, 1970. 252 с.
4. Коллинз Дж. Повреждение материалов в конструкциях: Анализ, предсказание, предотвращение. М.: Мир, 1984. 624 с.
5. Горячева И.Г., Добычин М.Н. Контактные задачи в трибологии. М.: Машиностроение, 1988. 254 с.
6. Солдатенков И.А. Износоконтактная задача с приложениями к инженерному расчету износа. М.: Физматкнига, 2010. 160 с.
7. Александров В.М., Коваленко Е.В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 336 с.
8. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
9. Archard J.F. Contact and rubbing of flat surfaces // J. Appl. Phys. 1953. Vol. 24. №8. P. 981–988.
10. Schalliamach A. On the abrasion of rubber // Proc. Phys. Soc.. Sec. B. 1954. Vol.67. №12. P.883–891.
11. Манжиров А.В. Смешанное интегральное уравнение механики и обобщенный проекционный метод его решения // Докл. АН. 2016. Т.470. № 4. С.401–405. = Manzhirov A.V. A mixed integral equation of mechanics and a generalized projection method of its solution // Doklady Physics. 2016. V.61. No.10. P.489–493.


4

**Сведения об авторах:**

**Казаков Кирилл Евгеньевич** – кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник лаборатории моделирования в механике деформируемого твердого тела Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН.
**E-mail:** kazakov-ke@yandex.ru

**Курдина Светлана Павловна** – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры прикладной математики Московского государственного технического университета им.Н.Э. Баумана.
**E-mail:** Svetlana-ka@yandex.ru

**О ПЛОСКОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ОСНОВАНИЙ И ШТАМПОВ СО СЛОЖНОЙ ФОРМОЙ КОНТАКТИРУЮЩИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ**

**Казаков К.Е., Саакян А.А.**

Данная работа посвящена решению задачи о действии произвольной системы штампов на основание с покрытием в случае плоской деформации. Предполагается, что все штампы различны, а их формы и толщина покрытия могут описываться сложными быстро изменяющимися функциями. В этом случае классические методы не эффективны и необходимо использовать специальный подход, состоящий в выделении особенностей отдельными слагаемыми и сомножителями и дальнейшем применении обобщённого проекционного метода А.В. Манжирова.

В предыдущих работах рассматривались задачи множественного контакта для тел с покрытиями и регулярных систем штампов [1–4]. Настоящая работа посвящена исследованию случая, когда штампы, действующие на покрытие, различны.

Однородный вязкоупругий стареющий слой толщины $h_{\text{lower}}$ с покрытием переменной толщины $h(x)$, изготовленным из другого вязкоупругого материала, лежит на подстилающем недеформируемом основании. В некоторый момент времени $\tau_0$ в поверхность такого слоя начинает вдавливаться система произвольных плоских жёстких штампов силами $P_i(t)$ с эксцентриситетами приложения $e_i(t)$ ($i = 1,2,...,n$, где $n$ — количество штампов). Области контакта $b_i - a_i$ со временем не меняются и они значительно больше максимальной толщины покрытия. Здесь $a_i$ – левая координата $i$-го штампа, $b_i$ — его правая координата. Предполагается также, что жёсткость покрытия меньше жёсткости нижнего слоя, или же они одного порядка. Рассматривается случай плоской деформации.

Заменив штампы некоторыми нормальными распределёнными нагрузками $q_i(x,t)$, действующими на тех же участках, где и штампы, и приравняв вертикальные перемещения [5], вызванные этими нагрузками, перемещениям штампов, получим ($i = 1,2,...,n$, $x \in [a_i,b_i]$)

$$\theta(\mathbf{I}-\mathbf{V}_1)\frac{q_i(x,t)h(x)}{E_1(t-\tau_1)}+\frac{2(1-\nu_{\text{lower}}^2)}{\pi}\sum_{j=1}^{n}(\mathbf{I}-\mathbf{V}_{\text{lower}})\mathbf{F}_j\frac{q_j(x,t)}{E_{\text{lower}}(t-\tau_{\text{lower}})}= \\ =\delta_i(t)+\alpha_i(t)(x-\eta_i)-g_i(x), \tag{1}$$

где $\theta$ – безразмерный коэффициент, зависящий от условий слоёв и коэффициента Пуассона покрытия, $E_1(t)$ – модуль Юнга покрытия ($\tau_1$ – момент изготовления покрытия), $\nu_{\text{lower}}$, $E_{\text{lower}}(t)$ – коэффициент Пуассона и модуль упруго-мгновенной деформации нижнего слоя ($\tau_{\text{lower}}$ – момент изготовления нижнего слоя); $\delta_i(t)$ –осадка $i$-го штампа, $\alpha_i(t)$ – угол его поворота, $g_i(x)$ – функции зазора между $i$-м штампом и основанием в недеформированном состоянии; $\mathbf{I}$ — тождественный оператор, $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_{\text{lower}}$ – интегральные операторы Вольтерра с ядрам ползучести при растяжении $K_1(t,\tau)$ и $K_{\text{lower}}(t,\tau)$, соответственно, $\mathbf{F}_i$ – интегральные операторы Фредгольма с ядром плоской контактной задачи $k_{\text{pl}}(s)$ [6], зависящие от условий соединения нижнего слоя и недеформируемого основания, $\eta_i = (a_i + b_i)/2$ – срединная точка $i$-го штампа.

Условия равновесия штампов на основании описываются уравнениями:

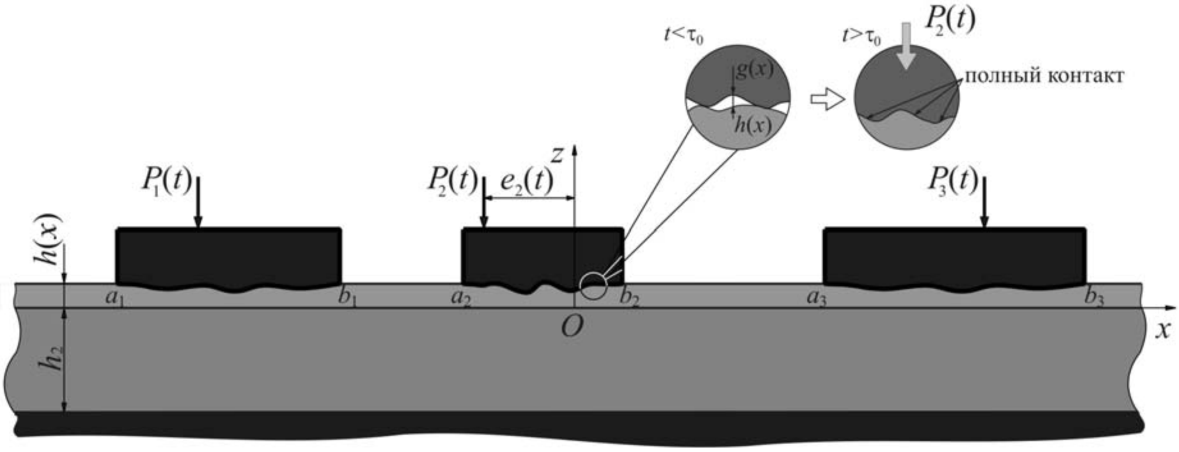
$$\int_{a_i}^{b_i} q_i(\xi,t)d\xi = P_i(t), \quad \int_{a_i}^{b_i} q_i(\xi,t)(\xi-\eta_i)d\xi = P_i(t)e_i(t), \quad i=1,2,\ldots,n. \tag{2}$$

Сделав в (1) и (2) замену переменных по формулам

$$x^*=\frac{2(x-\eta_i)}{\bar{a}_i},\quad \xi^*=\frac{2(\xi-\eta_j)}{\bar{a}_j},\quad t^*=\frac{t}{\tau_0},\quad \tau_1^*=\frac{\tau_1}{\tau_0},\quad \tau_2^*=\frac{\tau_{\text{lower}}}{\tau_0},\quad \lambda=\frac{2h_{\text{lower}}}{\bar{a}},\quad \zeta^{i*}=\frac{\bar{a}_i}{\bar{a}},$$

$$\eta^{i*}=\frac{2\eta_i}{\bar{a}},\quad \delta^{i*}(t^*)=\frac{2\delta_i(t)}{\bar{a}},\quad \alpha^{i*}(t^*)=\zeta^{i*}\alpha_i(t),\quad g^{*i}(x^*)=\frac{2g_i(x)}{\bar{a}},$$

$$P^{i*}(t^*)=\frac{4P_i(t)(1-\nu_{\text{lower}}^2)}{\bar{a}E_{\text{lower}}(t-\tau_{\text{lower}})},\quad M^{i*}(t^*)=\frac{8P_i(t)e_i(t)(1-\nu_{\text{lower}}^2)}{\bar{a}\bar{a}_iE_{\text{lower}}(t-\tau_{\text{lower}})},$$




$$\mathbf{F}^{ij*} f(x^*) = \int_{-1}^{1} k^{ij}(x^*,\xi^*) f(\xi^*)\, d\xi^*, \quad k^{ij}(x^*,\xi^*) = \frac{1}{\pi} k_{\text{pl}}\left(\frac{x-\xi}{h_{\text{lower}}}\right),$$

$$\mathbf{V}_1^* f(t^*) = \int_1^{t^*} K_1^*(t^*,\tau^*) f(\tau^*)\, d\tau^*, \quad K_1^*(t^*,\tau^*) = \frac{E_1(t-\tau_1)}{E_1(\tau-\tau_1)} \frac{E_{\text{lower}}(\tau-\tau_{\text{lower}})}{E_{\text{lower}}(t-\tau_{\text{lower}})} K_1(t-\tau_1,\tau-\tau_1)\tau_0,$$

$$\mathbf{V}_2^* f(t^*) = \int_1^{t^*} K_2^*(t^*,\tau^*) f(\tau^*)\, d\tau^*, \quad K_2^*(t^*,\tau^*) = K_{\text{lower}}(t-\tau_{\text{lower}},\tau-\tau_{\text{lower}})\tau_0,$$

и опустив в окончательных формулах звездочки, получим операторное уравнение и два дополнительных векторных ($x\in[-1,1]$)

$$\begin{gathered} c(t)\mathbf{D}(x)\cdot(\mathbf{I}-\mathbf{V}_1)\mathbf{q}(x,t) + (\mathbf{I}-\mathbf{V}_2)\mathbf{F}\mathbf{q}(x,t) = \boldsymbol{\delta}(t) + \boldsymbol{\alpha}(t)x - \mathbf{g}(x), \\ \int_{-1}^{1}\mathbf{q}(\xi,t)\,d\xi = \mathbf{P}(t), \quad \int_{-1}^{1}\xi\mathbf{q}(\xi,t)\,d\xi = \mathbf{M}(t), \quad x\in[-1,1], \quad t\ge 1, \end{gathered} \tag{3}$$

где $\mathbf{D}(x)$ – диагональная матрица с элементами $m^i(x)$, а остальные вектор-функции и матричные функции определяются из соотношений

$$\mathbf{q}(x,t) = \sum_{i=1}^{n} q^i(x,t)\mathbf{i}^i, \ \mathbf{P}(t) = \sum_{i=1}^{n} P^i(t)\mathbf{i}^i, \ \mathbf{M}(t) = \sum_{i=1}^{n} M^i(t)\mathbf{i}^i, \ \boldsymbol{\delta}(t) = \sum_{i=1}^{n} \delta^i(t)\mathbf{i}^i, \ \boldsymbol{\alpha}(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i(t)\mathbf{i}^i,$$

$$\mathbf{g}(x) = \sum_{i=1}^{n} g^i(x)\mathbf{i}^i, \ \mathbf{k}(x,\xi) = \sum_{i,j=1}^{n} k^{ij}(x,\xi)\mathbf{i}^i\mathbf{i}^j, \ \mathbf{F}\mathbf{f}(x) = \int_{-1}^{1}\mathbf{k}(x,\xi)\cdot\mathbf{f}(\xi)d\xi.$$

Легко видеть, что на каждом штампе можно задать один из четырёх типов условий: осадку и угол поворота, вдавливающую силу и эксцентриситет её приложения, осадку и момент приложения нагрузки, вдавливающую силу и угол поворота штампа. Разумеется, на каждом штампе возможен свой набор условий. Очевидно, что тогда существует всего 15 возможных вариантов постановки задачи.

Можно показать, что представление для контактных давлений в любой из 15 постановок имеет вид ($i = 1,2,...,n$):

$$q^i(x,t) = \frac{1}{m^i(x)} \sum_{i=1}^{n}\sum_{m=0}^{\infty} f_m^i(t) p_m^{i\circ}(x) - \frac{g^i(x)}{c(t)m^i(x)}.$$

Здесь $p_m^{i\circ}(x)$ – многочлены $m$-й степени, $f_m^i(t)$ – функции времени. Видно, что в этом выражении отдельными сомножителем и слагаемыми выделены функции $m^i(x)$ и $g^i(x)$, которые связаны с формами контактирующих поверхностей. Это позволяет производить вычисления в случаях, когда толщина покрытия и формы оснований штампов описываются быстро изменяющимися функциями.

Выражения для остальных неизвестных параметров задачи (осадок и углов поворота штампов, действующих сил и моментов приложения нагрузок) также можно получить в аналитическом виде.

Таким образом, поставлена и решена плоская задача о контакте между вязкоупругим стареющим основанием с вязкоупругим покрытием и конечной произвольной системой жёстких плоских штампов. Решение задачи получено в аналитическом виде, причём, в выражениях для контактных напряжений функции, связанные с формами контактирующих поверхностей, выделены в явном виде. Это позволяет производить вычисления в случаях, когда толщина покрытия и формы оснований штампов описываются быстро изменяющимися функциями.

Исследование выполнено в рамках государственного задания (номер госрегистрации АААА-А17-117021310381-8) при частичной поддержке РФФИ (проект № 18-51-05012-Арм_а) и ГКН МОН РА (проект № 18RF-061).

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Kazakov K.E., Kurdina S.P. Indentation of the regular system of punches into the foundation with routh coating // Mechanics for Materials and Technologies / Ed. by H. Altenbach, R.V. Goldstein, E. Murashkin. Advanced Structured Materials. Vol. 46. Springer. 2017. P. 297–308.
2. Казаков К.Е. О вдавливании системы жестких штампов со сложной формой в основание с покрытием // Известия РАН. Механика твердого тела. 2017. №5. С. 5–11. = Kazakov K.E. On indentation of a system of irregularly shaped rigid punches into a coated foundation // Mechanics of Solids. Vol. 52. No. 5. P. 473–478.
3. Kazakov K.E., Kurdina S.P. Contact interaction between a layered foundation and a system of annular punches with complex base shapes // Journal of Physics: Conference Series. 2018. Vol. 991. 012040.
4. Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В. Контактные задачи теории ползучести. Ереван: Изд-во НАН РА, 1999. 320 с.
5. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488 с.
6. Kazakov K.E., Kurdina S.P., Manzhirov A.V. Contact interaction between surface inhomogeneous foundations and systems of rigid punches // Procedia IUTAM. 2017. V. 23. P. 201–209.

**Сведения об авторах:**

**Казаков Кирилл Евгеньевич** – кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник лаборатории моделирования в механике деформируемого твердого тела Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН.
**E-mail:** kazakov-ke@yandex.ru

**Саакян Арег Аветикович** – к.ф.м.н., научный сотрудник Института механики НАН РА.
**E-mail:** areg1992@gmail.com

# О КЛАССИФИКАЦИИ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УПРУГОГО ОДНОРОДНОГО И КУСОЧНО ОДНОРОДНОГО ПРОСТРАНСТВ С МОНЕТООБРАЗНОЙ ТРЕЩИНОЙ

**Канецян Е.Г., Мкртчян М.С., Мхитарян С.М.**

Дана классификация основных осесимметричных граничных задач математической теории упругости для однородного и кусочно-однородного упругого пространства с монетобразной трещиной. При помощи интегрального преобразования Ханкеля выведены определяющие интегральные уравнения этих задач и указаны методы их точного решения.

**1. Введение.** В монографии [1] дана классификация основных граничных задач теории упругости для упругой плоскости с коллинеарной системой разрезов (трещин) и единым методом краевой задачи Римана теории аналитических функций получены их точные решения в виде комплексных потенциалов. Этим же методом на основании известных зависимостей между плоскими и осесимметричными напряжёнными состояниями в [2,3] получены точные решения ряда осесимметрических граничных задач для упругого пространства с монетообразной трещиной и смешанных граничных задач для упругого полупространства с круговой линией раздела граничных условий. Такие же задачи в [4] решены методом интегрального преобразования Ханкеля. Результаты многочисленных исследований по осесимметричным граничным задачам для однородных и кусочно однородных массивных упругих тел с круговыми линиями раздела граничных условий, полученных различными методами и подходами, подытожены в [5–8].

В настоящей работе в соответствии с [1] основные осесимметричные граничные задачи для упругого однородного и кусочно однородного пространства с круговой трещиной классифицируются следующем образом:

I. на верхнем и нижнем берегах круговой трещины заданы компоненты нормальных и радиальных напряжений;

II. на верхнем и нижнем берегах трещины заданы компоненты нормальных и радиальных перемещений;

III. на верхнем берегу трещины заданы компоненты нормальных радиальных напряжений, а на нижнем берегу заданы в тех же направлениях компоненты перемещений (смешанная граничная задача).

Эти основные граничные задачи (ОГЗ) рассматриваются единым методом интегральных уравнений и при помощи интегрального преобразования Ханкеля описываются интегральными уравнениями (ИУ) Фредгольма первого рода или системами таких уравнений с симметрическими ядрами, выражающимися интегралами Вебера-Сонина или их комбинациями, или же интегродифференциальными уравнениями (ИДУ). Точные решения определяющих ИУ обсуждаемых ОГЗ получаются методом операторов вращения Абеля, в результате чего они сводятся к последовательно решаемым интегральным уравнениям Абеля. Или на основании фундаментальной зависимости между абелевыми операторами и оператором, порождённым ядром Коши, они сводятся к сингулярным интегральным уравнениям (СИУ) или к системам СИУ. После построения решений, определяющих ИУ, определяются все характеристики ОГЗ.

**2. Вывод определяющих ИУ ОГЗ.** Пусть кусочно-однородное пространство отнесено к цилиндрической системе координат $r, \vartheta, z$ и состоит из верхнего $(+)$ и нижнего $(-)$ упругих полупространств с упругими постоянными $(E_{\pm}, \nu_{\pm})$. Пусть далее на поверхности стыка $z = 0$ разнородных материалов содержится межфазная монетообразная трещина $\omega = \{z = 0; 0 < r < a\}$ в форме круга радиуса $a$. Предположим, что на верхнем $(+)$ и нижнем $(-)$ берегах трещины действуют нормальные и радиальные силы, соответственно, интенсивностей $p_{\pm}(r)$ и $\tau_{\pm}(r)$, т.е.

$$\sigma_z(r.z)\big|_{z=\pm 0} = -p_{\pm}(r),\ \sigma_{zr}(r.z)\big|_{z=\pm 0} = -\tau_{\pm}(r) \quad (0 < r < a), \tag{1}$$

где $\sigma_z$ и $\tau_{zr}$ – соответственно, нормальные и касательные компоненты напряжений. Теперь кусочно-однородное упругое пространство мысленно разрежем на верхнее $(z > 0)$ и нижнее $(z < 0)$ полупространства и введём следующие обозначения:

$$\sigma_z\big|_{z=\pm 0} = -\Sigma_\pm(r) = \begin{cases} -p_\pm(r) & (0<r<a); \\ -p(r) & (r>a); \end{cases} \quad \tau_{zr}\big|_{z=\pm 0} = -T_\pm(r) = \begin{cases} -\tau_\pm(r) & (0<r<a); \\ -\tau(r) & (r>a). \end{cases}$$

Тогда, исходя из уравнений Ляме в цилиндрической системе координат, при помощи интегрального преобразования Ханкеля для радиальных $(u_r)$ и нормальных $(u_z)$ перемещений граничных точек верхнего $(+)$ и нижнего $(-)$ упругих полупространств можно получить следующие формулы [9]:

$$u_r^\pm(r,0) = u_\pm(r,0) = \pm\pi\vartheta_0^\pm \int_0^\infty W_{11}(r,\rho) T_\pm(\rho)\rho d\rho - 2\vartheta_1^\pm \int_0^\infty W_{10}(r,\rho)\Sigma_\pm(\rho)\rho d\rho;$$

$$\vartheta_0^\pm = 2\left(1-\nu_\pm^2\right)\big/\pi E_\pm; \quad \vartheta_1^\pm = (1+\nu_\pm)(1-2\nu_\pm)/2E_\pm;$$

$$u_z^\pm(r,0) = w_\pm(r,0) = -2\vartheta_1^\pm \int_0^\infty W_{01}(r,\rho) T_\pm(\rho)\rho d\rho \pm \tag{2}$$

$$\pm 2\pi\vartheta_0^\pm \int_0^\infty W_{00}(r,\rho)\Sigma_\pm(\rho)\rho d\rho \ (0<r<\infty); W_{mn}(r,\rho) = \int_0^\infty J_m(\lambda r) J_n(\lambda r) d\lambda \quad (m,n=0,1).$$

Здесь $W_{mn}(r,\rho)$ – известные интегралы Вебера–Сонина, $J_n(r)$ – бесселевы функции первого рода индекса $n$, а $\lambda$ – спектральный параметр преобразования Ханкеля.

Далее в формулах (2) введём следующие функции:

$$\begin{matrix} \varphi_\pm(r) = w_+(r,0) \pm w_-(r,0); \ \psi_\pm(r) = u_+(r,0) \pm u_-(r,0); \\ \Omega_\pm(r) = \Sigma_+(r) \pm \Sigma_-(r); \ \mathrm{X}_\pm(r) = T_+(r) \pm T_-(r); \end{matrix} \quad (0<r<\infty)$$

и к ним применим обратное преобразование Ханкеля. После несложных преобразований и использования известных свойств преобразования Ханкеля [10], для трансформант Ханкеля введенных функций (этих же функций с черточками наверху) получим:

$$\bar\Omega_+(\lambda) = C_1\bar\Omega_-(\lambda) + D_1\bar{\mathrm{X}}_-(\lambda) + C_2\lambda\bar\varphi_-(\lambda) + D_2\lambda\bar\psi_-(\lambda);$$

$$\bar{\mathrm{X}}_+(\lambda) = D_1\bar\Omega_-(\lambda) + C_1\bar{\mathrm{X}}_-(\lambda) + D_2\lambda\bar\varphi_-(\lambda) + C_2\lambda\bar\psi_-(\lambda);$$

$$\bar\varphi_+(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\left[F_1\bar\Omega_-(\lambda) + E_1\bar{\mathrm{X}}_-(\lambda)\right] - \left[C_1\bar\varphi_-(\lambda) + D_1\bar\psi_-(\lambda)\right]; \tag{3}$$

$$\bar\psi_+(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\left[E_1\bar\Omega_-(\lambda) + F_1\bar{\mathrm{X}}_-(\lambda)\right] - \left[D_1\bar\varphi_-(\lambda) + C_1\bar\psi_-(\lambda)\right]; \ (0<\lambda<\infty)$$

$$C_1 = \Delta^{-1}\left[(3-4\nu_-)k^2 - 3 + 4\nu_+\right]; \ C_2 = 8G_+\Delta^{-1}\left[1-\nu_+ + (1-\nu_-)k\right];$$

$$D_1 = 4k\Delta^{-1}\left[(1-2\nu_+)(1-\nu_-) + (1-2\nu_-)(1+\nu_+)\right]; \ D_2 = 4G_+\Delta^{-1}\left[1-2\nu_+ - (1-2\nu_-)k\right];$$

$$\Delta = \Delta(\nu_+,\nu_-,k) = \left[k(3-4\nu_-)+1\right](k+3-4\nu_+); \ G_\pm = E_\pm/2(1+\nu_\pm); \ k = G_+/G_-.$$

$$E_1 = (G_-\Delta)^{-1}\left[(1-2\nu_-)(3-4\nu_+) - (1-2\nu_+)(3-4\nu_-)k\right];$$

$$F_1 = 2(G_-\Delta)^{-1}\left[(1-\nu_-)(3-4\nu_+) + (1+\nu_+)(3-4\nu_-)k\right];$$

Теперь обращением уравнений (3) можем вывести определяющие ИУ ОГЗ для упругого пространства с круговой трещиной. Сначала рассмотрим случай однородного пространства, полагая $E_+ = E_- = E$, $\nu_+ = \nu_- = \nu$; $\vartheta_0 = 2\left(1-\nu^2\right)\big/\pi E$, $\vartheta_1 = (1+\nu)(1-2\nu)/2E$. Тогда, в случае первой ОГЗ, когда на берегах трещины согласно (1) заданы компоненты напряжений, обе части первого уравнения (3) умножим на $\lambda J_0(\lambda r)$, второго уравнения – на $\lambda$ и полученные результаты проинтегрируем по $\lambda$ от $0$ до $\infty$. Воспользовавшись известными свойствами преобразования Ханкеля [10], после простых преобразований относительно раскрытий трещины $\varphi_-(r)$ и

$\psi_-(r)$, придём к следующим раздельным ИДУ:

$$\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)\int_0^a W_{11}(r,\rho)\varphi_-'(\rho)\,d\rho = p(r);\ \ (0<r<a) \tag{4}$$

$$\frac{d}{dr}\int_0^a W_{00}(r,\rho)\left(\frac{d\varphi_-}{dr}+\frac{\varphi_-}{\rho}\right)\rho d\rho = q(r);\ \ (0<r<a) \tag{5}$$

$$p(r) = -\pi\vartheta_0\left[p_+(r)+p_-(r)\right]+2\vartheta_1\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)\int_0^a W_{11}(r,\rho)\mathrm{X}_-(\rho)\,d\rho;$$

$$q(r) = -\pi\vartheta_0\left[\tau_+(r)+\tau_-(r)\right]-2\vartheta_1\frac{d}{dr}\int_0^a W_{00}(r,\rho)\Omega_-(\rho)\,d\rho.$$

При выводе уравнения (4) и (5) учтены свойства непрерывности напряжений и перемещений вне трещины в плоскости $z=0$. Эти уравнения должны рассматриваться при условиях $\varphi_-(a)=\psi_-(a)=0$, выражающих условия непрерывности перемещений на граничной окружности $r=a$ трещины $\omega$. После решения уравнений (4) и (5) можно найти распределения разрушающих напряжений в плоскости $z=0$ при $r>a$.

Во второй ОГЗ на берегах трещины $\omega$ задаются компоненты перемещений:

$$u_\pm(r,0)=f_\pm(r),\ w_\pm(r,0)=g_\pm(r)\ \ (0\le r\le a),$$

где $f_\pm(r)$ и $g_\pm(r)$ – известные непрерывные и непрерывно дифференцируемые функции на отрезке $0\le r\le a$, удовлетворяющие условиям $f_\pm(r), g_\pm(r)=o\left(\sqrt{r-a}\right)$ при $r\to a+0$. В этом случае раскрытия трещины и, следовательно, плотности дислокаций на берегах трещины, известные величины. А именно:

$$\varphi_-(r)=w_+(r,0)-w_-(r,0)=g_+(r)-g_-(r),\ \psi_-(r)=u_+(r,0)-u_-(r,0)=f_+(r)-f_-(r),$$

$$\varphi_-'(r)=g_+'(r)-g_-'(r),\ \psi_-'(r)=f_+'(r)-f_-'(r)\ \ (0\le r\le a),$$

Причём, $\varphi_-(a)=\psi_-(a)=0$. Кроме того, в рассматриваемой задаче наперёд заданы равнодействующие $P_\pm$ искомых нормальных напряжений на берегах трещины:

$$2\pi\int_0^a p_\pm(r)\,r dr = P_\pm. \tag{6}$$

Теперь, как выше, обращая третье и четвёртое уравнения из (3), относительно скачков напряжений на берегах трещины $\Omega_-(r)$ и $\mathrm{X}_-(r)$ придём к следующим раздельным ИУ:

$$\int_0^a W_{11}(r,\rho)\mathrm{X}_-(\rho)\rho d\rho = P(r);\ \ (0<r<a) \tag{7}$$

$$\int_0^a W_{00}(r,\rho)\Omega_-(\rho)\rho d\rho = Q(r);\ \ (0<r<a) \tag{8}$$

$$P(r)=\frac{\pi\vartheta_0}{\pi^2\vartheta_0^2-\vartheta_1^2}f(r)-\frac{2\vartheta_1}{\pi^2\vartheta_0^2-4\vartheta_1^2}\int_0^a W_{11}(r,\rho)\varphi_-'(\rho)\rho d\rho;\ \ f(r)=f_+(r)+f_-(r);$$

$$Q(r)=\frac{\pi\vartheta_0}{\pi^2\vartheta_0^2-4\vartheta_1^2}g(r)+\frac{2\vartheta_1}{\pi^2\vartheta_0^2-4\vartheta_1^2}\int_0^a W_{00}(r,\rho)\left(\frac{d\psi_-}{d\rho}+\frac{\psi_-}{\rho}\right)\rho d\rho;\ g(r)=g_+(r)+g_-(r).$$

Решение ИУ (8) согласно (6) должно удовлетворять условию

$$2\pi\int_0^a \Omega_-(r)\,r dr = P\ \ \left(P=P_+-P_-\right).$$

В третьей ОГЗ на верхнем берегу трещины $\omega$ заданы компоненты напряжений, а на нижнем берегу – компоненты перемещений, т.е.

$$\sigma_z\big|_{z=+0}=-p_+(r),\tau_{zr}\big|_{z=+0}=-\tau_+(r);\ u_-(r,0)=f_-(r),w_-(r,0)=g_-(r),\tag{9}$$

где $0<r<a$, и требуется определить функции $p_-(r)$ и $\tau_-(r)\ (0<r<a)$. В данном случае обращая все четыре уравнения (3) и реализуя граничные уравнения (9), относительно $p_-(r)$ и $\tau_-(r)$ поучим следующую систему определяющих ИУ:

$$\begin{cases}\vartheta_0\int\limits_0^a\left[\frac{\pi}{2}W_{11}(r,\rho)+\frac{1}{r\rho}L(r,\rho)-l(r,\rho)\right]\tau_-(\rho)\rho d\rho-\\ -\vartheta_1\int\limits_0^a\left[W_{01}(r,\rho)m(r,\rho)-a^{-1}W_{10}(r,\rho)q(r)\right]p_-(\rho)\rho d\rho=F(r)\quad(0<r<a)\\ \vartheta_1\int\limits_0^a\left[W_{01}(r,\rho)+\frac{2}{\pi\rho}K_0(r,\rho)\right]\tau_-(\rho)\rho d\rho+\vartheta_0\int\limits_0^a\left[\frac{\pi}{2}W_{00}(r,\rho)+K(r,\rho)\right]p_-(\rho)\rho d\rho=G(r)\end{cases}\tag{10}$$

$$F(r)=-f_-(r)+\vartheta_0\int\limits_0^a\left\{\frac{\pi}{2}W_{11}(r,\rho)-\frac{1}{r\rho}\left[L(r,\rho)-l(r,\rho)\right]\right\}\tau_+(\rho)\rho d\rho-$$

$$-\vartheta_1\int\limits_0^a\left[W_{01}(r,\rho)m(r,\rho)-W_{10}(r,\rho)q(r)\right]p_+(\rho)\rho d\rho;\ l(r,\rho)=\sqrt{(a^2-r^2)(a^2-\rho^2)}\Big/a;$$

$$G(r)=-g_-(r)+\vartheta_0\int\limits_0^a\left[\frac{\pi}{2}W_{00}(r,\rho)-\vartheta_0K(r,\rho)\right]p_+(\rho)\rho d\rho-\frac{\vartheta_1}{\pi\vartheta_0}C_0-$$

$$-\vartheta_1\int\limits_0^a\left[\frac{2}{\pi\rho}K_0(r,\rho)-W_{01}(r,\rho)\right]\tau_+(\rho)\rho d\rho;\ m(r,\rho)=\frac{r\rho}{a\left(a+\sqrt{a^2-r^2}\right)};q(r)=\frac{\sqrt{a^2-r^2}}{a};$$

$$K(r,\rho)=\int\limits_{\max(r,\rho)}^a\left[(t^2-r^2)(t^2-\rho^2)\right]^{-1/2}dt;\ L(r,\rho)=\int\limits_{\max(r,\rho)}^a t^2\left[(t^2-r^2)(t^2-\rho^2)\right]^{-1/2}dt;$$

$$K_0(r,\rho)=\int\limits_0^a W_0(r,u)\frac{d}{d\rho}\left[L(\rho,u)\right]du;\ C_0=\frac{\pi}{2a}\left[2\vartheta_1\int\limits_0^a\Omega_-(\rho)\rho d\rho+2\vartheta_0\int\limits_0^a\left[\tau_+(\rho)+\tau_-(\rho)\right]d\rho\right].$$

Решение системы ИУ (10) должно быть подчинено условию

$$2\pi\int\limits_0^a p_-(r)rdr=P_-.\tag{11}$$

В частном случае, когда $\tau_+(r)=\tau_-(r)\equiv0\ (0<r<a)$, система ИУ (10) сводится ко второму уравнением (10), которое с учётом (6) и (11) принимает следующий простой вид

$$\vartheta_0\int\limits_0^a\left[\frac{\pi}{2}W_{00}(r,\rho)+K(r,\rho)\right]p_-(\rho)\rho d\rho=G(r),\ C_0=\frac{\pi\vartheta_1}{a}(P_+-P_-).\tag{12}$$

Перейдем к определяющим ИУ ОГЗ для кусочно-однородного пространства с круговой трещиной. В случае первой ОГЗ вновь обращая первые два общих уравнения из (3), после несложных преобразований для определения функций $\varphi_-(r)$ и $\psi_-(r)$ получим следующую систему ИДУ:

$$\begin{cases}A_1\int\limits_0^a W_{11}(r,\rho)\varphi_-'(\rho)\rho d\rho-B_1\psi_-(r)=F_0(r)\qquad(0<r<a)\\ A_1\int\limits_0^a W_{00}(r,\rho)\left(\frac{d\psi_0}{d\rho}+\frac{\psi_0}{\rho}\right)\rho d\rho+B_1\varphi(r)=G_0(r);\ \varphi_-(a)=\psi_-(a)=0;\end{cases}\tag{13}$$

где $F_0(r)$ и $G_0(r)$ – известные функции. Аналогичным образом из (3) могут быть получены определяющие ИУ второй и третий ОГЗ для кусочно-однородного пространства с круговой трещиной $\omega$.

**3. О решении ИУ ОГЗ.** При помощи известных представлений [11,12]

$$W_{00}(r,\rho)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\min(r,\rho)}\left[\left(r^2-t^2\right)\left(\rho^2-t^2\right)\right]^{-1/2}dt,\ W_{11}(r,\rho)=\frac{2}{\pi r\rho}\int_0^{\min(r,\rho)}t^2\left[\left(r^2-t^2\right)\left(\rho^2-t^2\right)\right]^{-1/2}dt.$$

ИУ (4)–(5), (7)–(8), как в [11,12], можно свести к последовательно решаемым интегральным уравнениям Абеля. А на основании этих представлений и следующей зависимости между абелевыми операторами и оператором, порожденным ядром Коши, из [13] (стр. 575).

$$S\varphi=\int_0^1\frac{\varphi(s)sds}{s^2-x^2}=A\varphi=\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{tdt}{\sqrt{x^2-t^2}}\int_t^1\frac{\varphi(s)ds}{\sqrt{s^2-t^2}}$$

решения ИУ и ИДУ, полученных выше, можно свести к решению СИУ. После их решения в явном виде определяются все характеристики рассмотренных ОГЗ.

**Заключение.** В работе рассмотрен довольно обширный класс точно решаемых оссесиметрических ОГЗ для однородного и кусочно-однородного пространств с монетообразной трещиной. С точки зрения приложения развитых здесь идей в механике композитов, геомеханике, механике разрушения и в других прикладных областях, этот класс задач можно существенно расширить.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.
2. Александров А.Я., Соловьев Ю.И. Пространственые задачи теории упругости. М.: Наука, 1978. 464 с.
3. Моссаковский В.И. Основная смешанная граничная задача теории упругости для полупространства с круговой линией раздела граничных условий. //ПММ. 1954. Т.18. Вып.2. С.187-196.
4. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Ленинград: Наука, 1967. 402 с.
5. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. /Под ред. Мураками, т.1, т.2. М: Мир, 1990. 1007 с.
6. Саврук М.П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. Механика разрушения и прочность материалов. Справочное пособие в четерех томаях. Т.2. Киев: Наукова думка, 1988. 618 с.
7. Развитие теории контактных задач в СССР. М.: Наука, 1976. 493 с.
8. Акопян В.Н. Смешанные граничные задачи о взаимодействии сплошных деформируемых тел с концентраторами напряжений различных типов. Ереван: Изд.«Гитутюн НАН РА», 2014. 322с.
9. Попов Г.Я. Контактние задачи для тел линейно-дефформируемого основания. Киев–Одесса: Вища школа, 1982. 168 с.
10. Снедон И. Преобразование Фурье. М.: ИЛ, 1955. 668 с.
11. Ахнезер Н.И. и Щербина В.А. Об обращении некоторых сингулярных интегралов. Записки матем.отд. физ.-матем. ф-та и Харковского матем. Общ.-ва, 1968. Т.25. ССР. 4, 1957. С.191–198.
12. Мхитарян С.М. О формулах Н.И. Ахнезера и В.А. Щербины обращения некоторых сингулярных интегралов. //Матем. Исследования. Кишинев: Т.3, вып. 1(7), 1968, С. 61-70.
13. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.



**Сведения об авторах:**

**Канецян Егине Гургеновна** – ст. преподаватель НУААС, н.с., к.ф.-м.н., Институт механики НАН Армении

**Мкртчян Мушег Серёжаевич –** с.н.с., к.ф.-м.н., Институт механики НАН РА,
**e–mail:** muscheg-mkrtchyan@rambler.ru

**Мхитарян Сурен Манукович** – чл.-корр., д.ф.-м.н., профессор, зав.отделом, Институт механики НАН Армении

# СОПРОТИВЛЯЕМОСТЬ ДЕФОРМАЦИИ СДВИГА СТЕКЛОПЛАСТИКОВЫХ ТРУБ В УСЛОВИЯХ СЛОЖНОГО НАГРУЖЕНИЯ

**Карапетян К.А., Валесян С.Ш., Мурадян Н.С.**

Обсуждаются результаты экспериментального исследования поведения сдвиговых дерформаций тонкостенных трубчатых элементов из стеклотканевых пластиков в условиях комбинированного сложного нагружения внутренним гидростатическим давлением и крутящим моментом с учётом очерёдности их приложения.

На основе сравнительного анализа установленных данных была сделана попытка дать обьяснения обнаруженным особенностям изменения сопротивляемости деформированию на сдвиг стеклотканевых труб, подвергнутых нагружению по упомянутым выше схемам.

## Введение

Напряжённо-деформированное состояние, возникающее в материале тонкостенных конструкций из армированных композитов, эксплуатирующихся в реальных условиях, при решении практических задач допускается воссоздать применением соответствующей схемы комбинированного воздействия растягивающих или сжимающих усилий и крутящих моментов [1].

Известно, что одним из специфических недостатков композитов со слоистой и волокнистой структурой является слабое сопротивление сдвигу, как межслойному, так и в плоскости укладки арматуры [2]. Вследствие упомянутого недостатка, в некоторых случаях эксплуатации доминирующую роль в потере устойчивости и жёсткости тонкостенных конструкций из композитов, в том числе, и изготовленных из армированных пластиков, может сыграть сдвиг в плоскости армирования [3].

В настоящей работе рассматривается вопрос поведения сдвиговых деформаций тонкостенных труб из слоистого стеклопластика при сложном нагружении внутренним гидростатическим давлением (растяжение в кольцевом направлении) и крутящим моментом с учётом очерёдности приложения этих силовых факторов.

## Экспериментальная часть

В качестве опытных образцов были использованы трубы из тканевого (стеклоткань полотняного плетения с основным перекрытием [4]) стеклопластика с внутренним диаметром 38 мм и длиной 285 мм. Величины внешнего диаметра и рабочей зоны трубчатых образцов составляют 39.7 мм и 60 мм, соответственно. Коэффициент армирования стеклопластика составляет $\mu = 0.45$ ($\mu_{\text{основа}} = 0.29$, $\mu_{\text{уток}} = 0.16$). Направление основы стеклоткани совпадает с направлением оси трубы ($\varphi = 0^0$).

Экспериментальные исследования были проведены по описанной ниже методике.

После предварительного определения пределов прочности трубчатых образцов в кольцевом направлении $\sigma_{\theta\theta}^B$ и при простом кручении $\tau_{\theta z}^B$ оставшаяся часть образцов-близнецов была разделена на 2 группы.

Одна группа труб была нагружена внутренним гидростатическим давлением до определённого уровня (соответствующего 0.4; 0.6; $0.8\,\sigma_{\theta\theta}^B$), а затем, сохраняя эту нагрузку постоянной, была доведена до разрушения ступенчатым увеличением крутящего момента.

Другая группа труб предварительно нагружалась крутящим моментом до определённого уровня (соответствующего 0.4; 0.6; $0.8\,\tau_{\theta z}^B$), а далее, сохраняя эту нагрузку постоянной, была доведена до разрушения при действии ступенчато возрастающего внутреннего гидростатического давления.

Продолжительность испытания каждого опытного образца составляла 6-10 мин. в зависимости от величины разрушающего напряжения.

Принятая методика позволяет осуществлять измерения сдвиговых деформаций до уровня напряжения, составляющего 0.88-0.9 доли от величины его разрушающего значения.

## Обсуждение полученных результатов

Здесь отметим, что данные изучения зависимости деформативности и сопротивления разрушению стеклотканевых труб от предварительного кручения при воздействии внутреннего давления подробно обсуждались в работе [5]. В настоящей статье приводятся отдельные данные из указанной работы, касающиеся обсуждаемого здесь вопроса, с целью формулирования некоторых обобщающих выводов.

**Внутреннее давление стеклотканевых труб.**

Рассмотрим динамику развития сдвиговых деформаций в процессе нагружения внутренним гидростатическим давлением опытных трубчатых образцов, предварительно нагружённых постоянно действующим крутящим моментом $M_K$ различных уровней.

Проведённые измерения показали, что в случае $M_K = 0$ деформации сдвига у труб не появляются.

Измерения также показали, что с повышением внутреннего гидростатического давления (т.е. $\sigma_{\theta\theta}$) имеет место развитие сдвиговых деформаций $\gamma_{\theta z}$ с возрастающей скоростью. Указанное явление оказывается тем интенсивнее, чем больше значение крутящего момента $M_K$ (т.е. $\tau_{\theta z}$), приложенного к трубчатым образцам на первом этапе нагружения (рис.1).

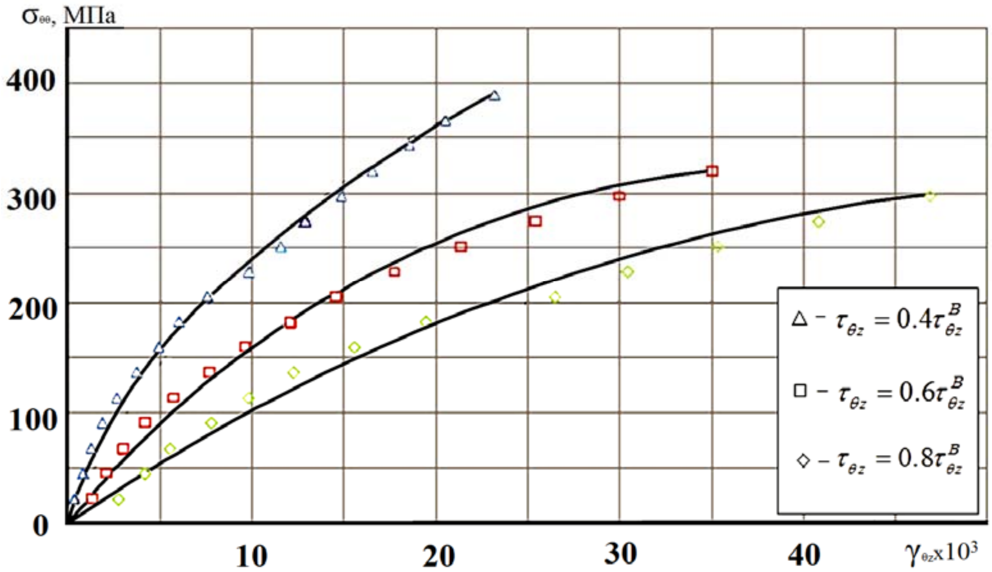



Рис.1. Кривые зависимости деформаций сдвига стеклотканевых труб от предварительного кручения при ступенчатом повышении внутреннего давления.

Развитие в процессе по-шагового повышения внутреннего давления сдвиговых деформаций трубчатых образцов, предварительно нагруженных постоянно действующим крутящим моментом, обьясняется, в основном, проявляющимися в процессе нагружения сдвиговыми деформациями ползучести [5].

Сравнение данных рис.1 с соответствующими данными работы [6] показывает, что при наличии одного и того же уровня крутящего момента, сдвиговые деформации, испытываемые стеклопластиковыми трубами в процессе по-шагового увеличения внутреннего давления в течении одного и того же промежутка времени оказываются намного больше сдвиговых деформаций ползучести труб, находящихся под воздействием простого кручения.

**Кручение стеклопластиковых труб.**

Рассмотрим поведение деформации сдвига в процессе увеличения крутящего момента $M_K$ стеклотканевых труб, находящихся в условиях постоянно действующего внутреннего гидростатического давления различных уровней.

Проведённые измерения показали, что наблюдаемое увеличение деформации сдвига $\gamma_{\theta z}$ при по-шаговом повышении крутящего момента $M_K$ (т.е. $\tau_{\theta z}$) оказывается тем интенсивнее, чем больше уровень внутреннего гидростатического давления (т.е. $\sigma_{\theta\theta}$), приложенного на трубы на первом этапе нагружения (рис.2).

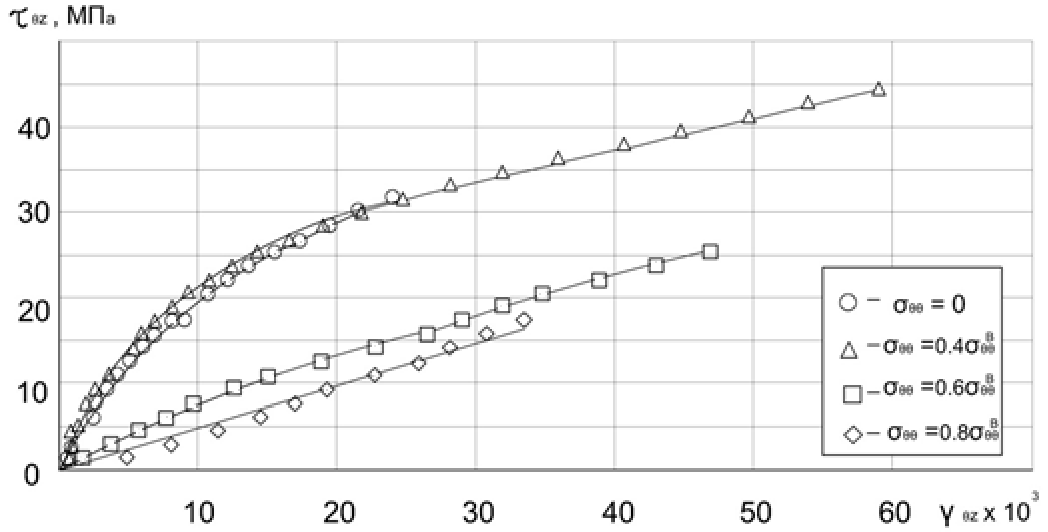



Рис. 2. Кривые сдвиговых деформаций стеклопластиковых труб, подвергнутых кручению в условиях постоянно действующего внутреннего гидростатического давления $\sigma_{\theta\theta}$ или его отсутствия.

Из сравнения данных рис.2 следует, что деформации сдвига труб, подвергнутых кручению при $\sigma_{\theta\theta} = 0.4\sigma^{B}_{\theta\theta} = \text{const}$, при низких уровнях одного и того же значения $\tau_{\theta z}$ (МК), оказываются относительно меньше, чем у труб, подвергнутых только кручению (при $\sigma_{\theta\theta} = 0$).

В случаях предварительного приложения постоянного гидростатического давления, соответствующего 0.6 и $0.8\sigma^{B}_{\theta\theta}$, при одном и том же уровне $\tau_{\theta z}$ наблюдается существенное увеличение податливости деформаций сдвига относильно кручения стеклотканевых труб по сравнению с регистрированными в упомянутых выше режимах испытаний. Одновременно происходит выпрямление кривых зависимостей между $\tau_{\theta z}$ и $\gamma_{\theta z}$ (рис.2), что, наверное, является следствием увеличения сопротивляемости ползучести на сдвиг стеклотканевых труб, предварительно нагружённых внутренним гидростатическим давлением высоких уровней [7].

**Выводы**

1. Существенному увеличению сопротивляемости деформированию на сдвиг трубчатых конструкционных элементов из слоистых пластиков с углом армирования $\varphi = 0^0$, эксплуатирующихся в условиях кручения (например, валы карданных передач автомашин и быстровращающихся роторов и др.), можно достичь путём предварительного приложения к трубам постоянно действующего внутреннего давления величиной, соответствующей 0.4 доли от предельного значения этого силового фактора (сопротивляемость разрушению труб при внутреннем давлении).

2. В интенсификации с возрастающей скоростью явления податливости относительно деформаций сдвига, наблюдаемой в процессе по-шагового увеличения внутреннего давления или крутящего момента трубчатых элементов из тканевых пластиков с $\varphi = 0^0$, предварительно нагружённых, соответственно, крутящим моментов и внутренним давлением высоких уровней ($\tau_{\theta z}$=0.6-0.8$\tau^{B}_{\theta z}$ и $\sigma_{\theta\theta}$=0.6-0.8$\sigma^{B}_{\theta\theta}$), немаловажную роль может сыграть и искажение первоначального взаиморасположения волокон вязки армирующего композит компонента-стеклоткани, происходящее на первом этапе нагружения. При этом, в указанном выше первом случае испытания искажение направленности волокон вязки ткани, происходящее при предварительном кручении труб, находит своё продолжение в процессе дальнейшего их по-шагового нагружения внутренним давлением. Во-втором случае

испытания происходящее уменьшение начальной плотности вязки (число нитей на 1 см$^2$) армирующей композит ткани, вследствие предварительного приложения к трубам внутреннего давления, становится причиной увеличения податливости относительно их дальнейшего кручения.

### ЛИТЕРАТУРА


1. Шнейдерович Р.М. Прочность при статическом и повторно-статическом нагружениях. М.: Машиностроение, 1968. 343с.
2. Балтин Ю.П., Тамуж В.П. Циклическая прочность стеклопластиков при сдвиге в плоскости армирования. // Мех. Пол. 1975. №5. С. 928-931.
3. Тарнопольский Ю.М., Кинцис Т.Я. Методы статических испытаний армированных пластиков.// М.: Химия. 1981. 272с.
4. Мартынова А.А., Ятченко О.Ф., Васильев А.В. Технология изготовления тканей. М.: Академия, 2007. 304с.
5. Карапетян К.А., Валесян С.Ш., Мурадян Н.С. Зависимость деформативности и разрушения стеклопластиковых труб от предварительного кручения при действии внутреннего давления. //Изв.НАН Армении.Механика. 2019. Т.72. №1. С49-60.
6. Карапетян К.А., Хачикян А.Г. Ползучесть тонкостенных стеклопластовых труб, подверженных кручению. //Изв.НАН Армении. Механика. 2000. Т.53. №2. С.66-70.
7. Гольдман А.Я., Фрейдин А.Б. Влияние гидростатического давления на деформирование АБС-пластика при сдвиге. // Механика Композитных Материалов, 1989. №1. С.23-29.



**Сведения об авторах:**

**Карапетян Корюн Ашотович –** д.т.н., зав. лабораторией экспериментальных исследований Института механики НАН Армении, Ереван, Армения, (+374 10) 524852
**E-mail:** koryan@mechins.sci.am

**Валесян Сона Шантовна** – канд. техн.наук, научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения, **E-mail:** svalesyan@yahoo.com

**Мурадян Нарине Сергеевна** – инженер Института механики НАН Армении, Ереван, Армения. **E-mail:** narine-muradyan@mail.ru

# ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УДАРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ГЕТЕРОГЕННЫХ МАТЕРИАЛОВ И КОНСТРУКЦИЙ

**Краус Е.И., Шабалин И.И.**

Выполнено прямое численное моделирование процесса деформирования и разрушения модельных гетерогенных и градиентных сред. Для сопоставления бронестойкости сложных преград использовано прямое численное моделирование. Для преград из различных комбинаций мягкой стали и керамики $B_4C$ при равных объёмных концентрациях построены баллистические кривые их стойкости к удару бойка из твёрдой стали. В численном эксперименте обнаружено, что гетерогенные и градиентные преграды имеют преимущество перед двухслойной преградой (керамика $B_4C$ + сталь) в области скоростей встречи, превышающей 650 м/с. Приведены примеры работоспособности инструментария как при низких, так и при высоких скоростях нагружения сложных технических объектов. Программный комплекс Reactor3D успешно внедрён и применяется на научно-производственных предприятиях России.

Для моделирования процессов деформирования и разрушения сложных технических объектов (СТО) при ударных нагрузках необходим численный инструмент, позволяющий рассмотреть в реальном времени возможные сценарии их развития. В ИТПМ СО РАН развит программный комплекс Reactor3D, который позволяет решать нестационарные задачи деформирования и разрушения СТО и включает следующие этапы:

1. математическая формулировка уравнений баланса массы, импульса и энергии [1];
2. задание начальных данных и постановку граничных условий на всех входящих в СТО элементов;
3. выбор уравнений состояния и уравнений процесса для всех материалов СТО;
4. построение прямым методом гетерогенных и градиентных сред, раздавая распределение свойств материалов по ячейкам счётной области по заданной функции;
5. определение необходимых критериев разрушения материалов, охватывающих различные механизмы разрушения;
6. построение геометрических образов всех элементов СТО и заполнение их разностной сетки;
7. задание конечно-разностных соотношений уравнений баланса на этой сетки;
8. моделирование фрагментов разрушенного материала дискретными частицами конечного размера;
9. построение симметричного алгоритма расчёта контактных границ как для сплошного материала, дискретная частица – граница сплошного материала, так и частица – частица;
10. проведение кодирования перечисленных выше алгоритмов и выполнение верификации построенного кода [2].

Разработаны полные термодинамические уравнения состояния конденсированных сред, адекватно описывающие физику процессов соударения при высоких давлениях и температурах, что позволяет проводить расчёты процессов взаимодействия твёрдых тел с минимальным числом физических параметров в качестве начальных данных. Приведена модификация уравнения состояния, позволяющая учитывать процесс плавления за фронтом ударной волны [3]. Эти уравнения описывают как однородные тела, так и механические смеси материалов.

На основе созданной методики расчёта упругих свойств веществ и сравнение с общепринятыми моделями получены аналитические выражения для определения скорости звука, модуля сдвига и коэффициента Пуассона в конденсированных средах.

Построена работоспособная технология генерации качественных 3D тетраэдрических сеток в сложных многосвязных технических объектах, реализующая развиваемую авторами методологию, основанную на погружении счётных областей с заданной поверхностной триангуляцией в область с регулярной решёткой. На следующем этапе удаляются узлы, не входящие в счётные области, а для сгущений узлов вблизи границ применяется силовой метод. В дальнейшем, локальные преобразования тетраэдров позволяют поднять качество 3D сетки до приемлемого в условиях моделирования динамических процессов при взаимодействии твёрдых тел. Применение методов программирования OpenMP или систем GPU позволяет повысить производительность программных модулей генерации 3D сетки [4].

С помощью численного инструментария Reactor 3D был решён ряд задач ударного нагружения СТО, например, выполнено моделирование процессов деформирования и разрушения трубчатого теплообменного аппарата, входящего в состав системы обеспечения теплового режима космических аппаратов, так и его элементов при ударе частицами техногенного космического мусора.

Расчёты показали, что высокоскоростной удар стальной гайкой М6 при скорости встречи 11 700 м/с выводит из строя теплообменный аппарат. Мелкие вторичные частицы техногенного космического мусора при скоростях встречи порядка 1000 м/с разрушают экранированные трубки теплообменного аппарата как пустые, так и заполненные жидкостью [5].

Проведено сравнение результатов численного моделирования трёх подходов к процессу разрушения при ударном нагружении металлических преград в пространственном случае. В первом случае ячейка с разрушенным материалом заменялась точечной частицей, во втором случае – ячейка выбрасывалась из счёта, а масса узлов не удалялась, в последнем – ячейка заменялась частицей конечного размера. Показано, что выходные параметры системы боек-преграда близки по конечному результату, а время счёта удаётся сократить почти на треть, что важно для проведения серийных исследований различных сценариев соударения [6].

При построении модельных гетерогенных и градиентных сред показано, что аддитивная модель смеси применима только, когда имеется надёжная точность ударной адиабаты в низкоскоростной области, «правило смесей», основанное на обработке многочисленных экспериментальных данных, хорошо подходит на вычисления упругих модулей K и G, а для прогнозирования предела текучести металлокерамического композита лучше подходит аппроксимация по массовой концентрации [7].

Проведено численное моделирование процессов распространения волн сжатия в слоистых и гетерогенных материалах. Одномерные расчты проведены методом конечных разностей и методом распада разрыва в акустическом приближении. Проведено сравнение волновых полей для слоистых систем и аддитивного подхода при той же объёмной концентрации материалов, а также прямого моделирования гетерогенных материалов, полученного случайным распределением одного из материалов по объёму другого. Показано, что системы с крупными слоями не дают стационарных волновых профилей давления, уменьшение толщин слоёв сглаживает волновые профили, а в аддитивном подходе получаем классический профиль волны сжатия. При заданных массогабаритных параметрах защиты в 1D случае, вне зависимости от построения металлокерамической пластины, получаем близкие результаты по профилям скорости и давления на выходе из гетерогенной системы. 2D расчёты дают более реалистичные оценки затухания ударных нагрузок, вплоть до получения безопасности защищаемых объектов.

Проведены расчёты откольного разрушения гомогенных, гетерогенных и градиентных материалов, вызванного ударом тонкой стальной пластины. Показано, что крупнозернистые включения керамики в сталь приводят к множественному отколу, с грубой шероховатостью откольных поверхностей, тогда как уменьшение размера зерна приближает закритический откол в гетерогенной среде к классическому отколу для гомогенных сред. В аддитивном приближении гетерогенная среда стремится к гомогенной среде с эффективными физико-механическими характеристиками.

Рассмотрена нестационарная задача о взаимодействии однородного ударника с защитным элементом в виде гетерогенной пластины, изготовленной из стали и керамики $B_4C$, помещённой в кевларовый «карман» при скоростях соударения до 400 м/с. Имитатор человеческого тела – пластина из желатина. Проведено сравнение результатов моделирования по различным подходам описания поведения гетерогенных сред. На основе прямого численного моделирования получено, что защитный элемент на основе пластины из градиентного материала (сталь + $B_4C$) обладает наилучшими массогабаритными показателями [8].

**Выводы:**

1. Выполнено прямое численное моделирование процесса деформирования и разрушения модельных гетерогенных и градиентных сред. Для сопоставления бронестойкости сложных преград использовано прямое численное моделирование. Для преград из различных комбинаций мягкой стали и керамики B4C при равных объёмных концентрациях построены баллистические кривые их стойкости к удару бойка из твёрдой стали. В численном эксперименте обнаружено, что гетерогенные и градиентные преграды имеют преимущество

перед двухслойной преградой (керамика B4C + сталь) в области скоростей встречи превышающей 650 м/с.
2. Приведены примеры работоспособности инструментария как при низких, так и при высоких скоростях нагружения сложных технических объектов. Программный комплекс Reactor3D успешно внедрён и применяется на научно-производственных предприятиях России.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 19-08-00906.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Фомин В.М. et al. Высокоскоростное взаимодействие тел. Новосибирск: СО РАН, 1990. 600 p.
2. Kraus E.I., Shabalin I.I. Reactor2D: A tool for simulation of shock deformation // AIP Conf. Proc. 2016. Vol. 1770. P. 030092.
3. Kraus E., Shabalin I. Melting behind the front of the shock wave // Therm. Sci. 2019. Vol. 23, № Suppl. 2. P. 519–524.
4. Kraus E.I., Shabalin I.I., Shabalin T.I. Automatic tetrahedral mesh generation for impact computations // AIP Conf. Proc. 2017. Vol. 1893. P. 030129.
5. Fedorov M.Y., Kraus E.I., Shabalin I.I. Investigation of the effects of space debris on the elements of thermal regime systems of spacecraft. 2018. P. 030177.
6. Kraus E.I., Shabalin I.I. Simulation of fracture in 3D dynamic problems of collision of solid bodies. 2018. P. 030165.
7. Kraus E.I., Shabalin I.I., Shabalin T.I. Numerical analysis of wave propagation in a cermet composite // AIP Conf. Proc. 2017. Vol. 1893. P. 030130.
8. Kraus A.E., Shabalin I.I. Comparative analysis of wave distribution in layered and heterogeneous continuous media. 2018. P. 030166.

**<u>Сведения об авторах:</u>**

**Краус Евгений Иванович** – зам. директора по науке, к.ф.-м.н., Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН (+7383) 3303880
**E-mail:** kraus@itam.nsc.ru
**Шабалин Иван Иванович** – старший научный сотрудник, к.ф.-м.н., Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН (+7383) 3303804
**E-mail:** shabalin@itam.nsc.ru

# МЕЖФАЗНОЕ ТЕПЛОАКТИВНОЕ КРУГОВОЕ ВКЛЮЧЕНИЕ В КУСОЧНО-ОДНОРОДНОМ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОМ ПРОСТРАНСТВЕ В УСЛОВИЯХ ПОЛНОГО СЦЕПЛЕНИЯ

**Кривой А.Ф., Морозов Ю.А.**

В пространстве обобщённых функций медленного роста $\Im'(\mathbb{R}^3)$ построено разрывное решение задачи стационарной термоупругости для кусочно-однородного трансверсально-изотропного пространства в случае произвольного нагружения. Используя построенное разрывное решение и свойства функций из $\Im'(\mathbb{R}^3)$, получены двумерные сингулярные интегральные соотношения, которые позволяют задачи о межфазных дефектах в неоднородном трасверсально-изотропном пространстве свести непосредственно к системам двумерных сингулярных интегральных уравнений (СИР) с ядрами, которые выражаются через элементарные функции.

Построено точное решение задачи термоупругости о межфазном круговом включении, которое находится в условиях полного сцепления с разными трансверсально-изотропными полупространствами. Получены зависимости поступательных смещений включения от температуры, равнодействующей нагрузки, главных моментов и термомеханических характеристик трансверсально-изотропных материалов.

**Постановка задачи.** Рассмотрена задача стационарной термоупругости для кусочно-однородного трансверсально-изотропного пространства, находящегося под воздействием заданного на бесконечности теплового потока интенсивности $q_0\left(x_1, x_2, x_3\right)$. В плоскости $x_3 = 0$ соединения двух трансверсально-изотропных пространств содержится теплоизолированное абсолютно жёсткое включение, которое занимает область $\Omega: \{0 \le r \le a,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$. К включению приложена произвольная нагрузка, действие которой приводит к равнодействующей силе $\mathrm{P} = (P_1, P_2, P_3)$ и главному моменту $\mathbf{M} = (M_1, M_2, M_3)$. Расположение граней включения после деформации описывают функции

$$\zeta_6^{\pm} = \zeta_6^0 + \vartheta_0^{\pm}(x_1, x_2),\ \zeta_k^{\pm} = \zeta_k^0,\ k = 4, 5,\ (x_1, x_2) \in \Omega$$
$$\zeta_4^0 = \delta_1 - \varphi_3 x_3,\ \ \zeta_5^0 = \delta_2 + \varphi_3 x_1,\ \ \zeta_6^0 = \delta_3 + \varphi_2 x_2 + \varphi_1 x_2, \tag{1}$$

где

$\{\zeta_k^{\pm}\}_{k=1}^8 = \{\sigma_3(x_1, x_2, \pm 0), \sigma_4(x_1, x_2, \pm 0), \sigma_5(x_1, x_2, \pm 0), u_1(x_1, x_2, \pm 0), u_2(x_1, x_2, \pm 0), u_3(x_1, x_2, \pm 0),$ $T(x_1, x_2, \pm 0), Q(x_1, x_2, \pm 0)\}$, $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_k\}_{k=1}^6 = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}\}$, $\mathbf{u} = \{u_k\}_{k=1}^3 = \{u, v, w\}$

$\vartheta_0^{\pm}(x_1, x_2)$ задают форму включения соответственно при $x_3 = \pm 0$; $\delta_k, \varphi_k$, $k = 1, 2, 3$ – поступательные перемещения и углы поворота включения вокруг соответствующих осей; $T(x_1, x_2, x_3)$ – температура; $Q(x_1, x_2, x_3)$ – тепловой поток.

Рассмотрен случай, когда на включении задан тепловой поток и включение полностью сцеплено с полупространствами, в этом случае граничные условия имеют вид [1,2]:

$$\chi_4^{\pm}(x_1, x_2) = (1 \pm 1)\zeta_4^0,\ \chi_5^{\pm}(x_1, x_2) = (1 \pm 1)\zeta_5^0$$
$$\chi_6^{\pm}(x_1, x_2) = \vartheta^{\pm}(x_1, x_2) + (1 \pm 1)\zeta_6^0,\ \ \vartheta^{\pm} = \vartheta_0^{+} \pm \vartheta_0^{-}, (x_1, x_2) \in \Omega \tag{2}$$
$$\zeta_8^{\pm}(x_1, x_2, \pm 0) = q(x_1, x_2),\ \ (x_1, x_2) \in \Omega; \tag{3}$$

Учитывая условия

$$\chi_k^{-}(x_1, x_2) = 0, k = \overline{1,6},\ \ (x_1, x_2) \notin \Omega$$
$$\lambda_3^{+}\partial_2\zeta_7(x_1, x_2, +0) = \lambda_3^{-}\partial_2\zeta_7(x_1, x_2, -0),\ \ \zeta_7(x_1, x_2, +0) = \zeta_7(x_1, x_2, -0), \tag{4}$$

которые отображают факт полного сцепления полупространств за пределами включения и воспользовавшись методикой, изложенной в работах [1-6], относительно неизвестных скачков напряжений и температуры $\chi_k^{-}(x, y)$ $(k = 1, 2, 3, 7)$,

$$\chi_k^{\pm} = \langle \chi_k(x_1, x_2) \rangle^{\pm} = \zeta_k(x_1, x_2, +0) \pm \zeta_k(x_1, x_2, -0), (x_1, x_2) \in \Omega; \tag{5}$$

получена следующая система двумерных сингулярных интегральных уравнений (СИУ):

$$\frac{1}{2\pi}\iint_\Omega \{q_{31}\chi_1^- \frac{x_1-\xi_1}{r_0^2}+q_{32}^-\chi_2^-\partial_2\frac{x_1-\xi_1}{r_0}+\chi_3^-[q_{32}\partial_1\frac{x_1-\xi_1}{r_0}+\tilde{q}_{21}\partial_2\frac{x_2-\xi_2}{r_0}]\}d\xi_1 d\xi_2=g_1(x_1,x_2)$$

$$\frac{1}{2\pi}\iint_\Omega \{q_{31}\chi_1^- \frac{x_2-\xi_2}{r_0^2}+\chi_2^-[q_{32}\partial_2\frac{x_2-\xi_2}{r_0}+\tilde{q}_{21}\partial_1\frac{x_1-\xi_1}{r_0}]+q_{32}^-\chi_3^-\partial_1\frac{x_2-\xi_2}{r_0}\}d\xi_1 d\xi_2=g_2(x_1,x_2)$$

$$\frac{1}{2\pi}\iint_\Omega \{q_{41}\chi_1^- \frac{1}{r_0}-q_{42}[\chi_2^-\frac{x_2-\xi_2}{r_0^2}+\chi_3^-\frac{x_1-\xi_1}{r_0^2}]\}d\xi_1 d\xi_2=g_3(x_1,x_2)$$

$$q_{66}\chi_8^-(x_1,x_2)-\frac{q_{65}}{2\pi}\iint_\Omega \chi_7^-(\xi_1,\xi_2)\frac{1}{r_0^3}d\xi_1 d\xi_2=\chi_8^+(x_1,x_2) \qquad (6)$$

где

$$g_1(x_1,x_2)=\chi_4^+(x_1,x_2)+\frac{q_{34}}{2\pi}\iint_\Omega \chi_6^-\partial_1\frac{1}{r_0}d\xi_1 d\xi_2-\frac{q_{35}}{2\pi}\iint_\Omega \chi_7^-\frac{x_1-\xi_1}{r_0^2}d\xi_1 d\xi_2$$

$$g_2(x_1,x_2)=\chi_5^+ +\frac{q_{34}}{2\pi}\iint_\Omega \chi_6^-\partial_2\frac{1}{r_0}d\xi_1 d\xi_2-\frac{q_{35}}{2\pi}\iint_\Omega \chi_7^-\frac{x_2-\xi_2}{r_0^2}d\xi_1 d\xi_2$$

$$g_3(x_1,x_2)=\chi_6^+(x_1,x_2)-q_{44}\chi_6^-(x_1,x_2)-\frac{q_{45}}{2\pi}\iint_\Omega \chi_7^-\frac{1}{r_0}d\xi_1 d\xi_2$$

$$r_0=\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2},\ \partial_1\equiv\partial/\partial x,\ \partial_2\equiv\partial/\partial y$$

Величины $\delta_k,\varphi_k$, $k=1,2,3$ определим из трёх уравнений равновесия:

$$\iint_\Omega \chi_k(x_1,x_2)dx_1dx_2=P_{4-k},\quad k=1,2,3 \qquad (7)$$

$$\iint_\Omega \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\end{pmatrix}\chi_1(x_1,x_2)dx_1dx_2=\begin{pmatrix} M_1\\ M_2\end{pmatrix},\iint_\Omega (x_1\chi_2(x_1,x_2)-x_2\chi_3(x_1,x_2))dx_1dx_2=M_3 \qquad (8)$$

**Решение СИУ.** Если включение занимает круговую область $\Omega=\left\{\sqrt{x^2+y^2}\le a\right\}$, то следуя работам [3-6] после введения комбинаций скачков и сумм $\tau^\pm=\chi_3^\pm+i\chi_2^\pm$, $u^\pm=\chi_4^\pm+i\chi_5^\pm$, и перехода к полярным координатам, решение задачи ищем в виде:

$$v_j^\pm(\rho,\varphi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{V}_n^{j,\pm}(\rho)e^{in\varphi},\quad \mathrm{V}_n^{j,-}(\rho)=\Phi_n\left[v_j^-\right]\equiv\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}v_j^-(\rho,\varphi)e^{-in\varphi}d\varphi,\quad j=2,3,5. \qquad (9)$$

где $v_1^\pm(r,\varphi)=\tilde{v}_1^\pm(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi), v_2^\pm(r,\varphi)=e^{-i\varphi}\tau^\pm(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)$,

$v_3^\pm(r,\varphi)=e^{-i\varphi}u^\pm(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi),\quad v_4^\pm(r,\varphi)=\tilde{v}_6^\pm(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)$,

$v_5^\pm(r,\varphi)=\tilde{v}_7^\pm(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi), v_6^\pm(r,\varphi)=\tilde{v}_8^\pm(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)$.

Относительно $\mathrm{V}_n^{j,\pm}(\rho)$ из системы СИР (6) получена следующая система интегральных уравнений:

$$2q_{31}\,\mathrm{W}_{n+1,n}[\mathrm{V}_n^{1,-}]-q_{32}\,\mathrm{W}_{n+1,n+1}[\mathrm{V}_n^{2,-}]+q_{32}^+\,\mathrm{W}_{n+1,n-1}[\overline{\mathrm{V}}_{-n}^{2,-}]=2Q_{1n}$$

$$-2q_{31}\,\mathrm{W}_{n-1,n}[\mathrm{V}_n^{1,-}]-q_{32}\,\mathrm{W}_{n-1,n-1}[\overline{\mathrm{V}}_{-n}^{2,-}]+q_{32}^+\,\mathrm{W}_{n-1,n+1}[\mathrm{V}_n^{2,-}]=2Q_{2n}$$

$$2q_{41}\,\mathrm{W}_{n,n}[V_n^{1,-}]-q_{42}\,\mathrm{W}_{n,n+1}[V_n^{2,-}]+q_{42}\,\mathrm{W}_{n,n-1}[\overline{V}_{-n}^{2,-}]=2Q_{3n}$$

$$(\partial_\rho+n)\rho\,\mathrm{W}_{n+1,n+1}[\tilde{\mathrm{V}}_n^{5,-}]=\rho^2Q_{4n}(\rho) \qquad (10)$$

где

$$Q_{1n}=\Delta_{12}\delta_{-1,n}+i\varphi_3\rho\delta_{0,n}-q_{34}\,\mathrm{W}_{n+1,n+1}[\tilde{\Theta}_n^-]-q_{35}\,\mathrm{W}_{n+1,n}[\mathrm{V}_n^{5,-}];$$

$$Q_{2n}=\overline{\Delta}_{12}\delta_{1,n}-i\varphi_3\rho\delta_{0,n}+q_{34}\,\mathrm{W}_{n-1,n+1}[\tilde{\Theta}_n^-]+q_{35}\,\mathrm{W}_{n-1,n}[\mathrm{V}_n^{5,-}];$$

$$Q_{3n}=\Theta_n^+(\rho)-q_{44}\Theta_n^-(\rho)+2\delta_3\delta_{0,n}+\overline{\phi}_{12}\rho\delta_{1,n}-q_{45}\,\mathrm{W}_{n,n}[\mathrm{V}_n^{5,-}],$$

$Q_{4n}(\rho) = q_{65}^{-1}\,\mathrm{V}_n^{6,+}(\rho)$, $\Theta_n^{\pm}(\rho) = \Phi_n[\vartheta^{\pm}], \tilde{\Theta}_n^{\pm}(\rho) = \rho^n[\rho^{-n}\Theta_n^{\pm}(\rho)]', \phi_{12} = \varphi_2 + i\varphi_1$

$$\mathrm{W}_{nk}\left[f_*\right] = \int_0^a f_*\left(\rho,\varsigma\right)\mathrm{W}_{nk}^0\left(\rho,\rho_*\right)\rho_* d\rho_*, \;\; \mathrm{W}_{nk}^0\left(\rho,\rho_*\right) = \int_0^\infty J_n\left(tr\right)J_k\left(t\rho\right)dt$$

Количество слагаемых в разложении (9) зависит как от формы включения, так и от заданного на нём теплового потока и, как правило, ограничено. В частности, для осесимметричного включения, представляющего собой эллипсоид вращения вокруг оси $x_3$ с полуосями $a$ и $h$, будем иметь: $\vartheta^+(\rho,\varphi) = 0$, $\vartheta^-(\rho,\varphi) = 2ha^{-1}\sqrt{a^2-\rho^2}$, $\Theta_m^+(\rho) = 0$, $\Theta_n^-(\rho) = 2ha^{-1}\sqrt{a^2-\rho^2}\,\delta_{0,n}$. Для определённости будем считать, что тепловой поток, заданный в области $\Omega$, изменяется по полиномиальному закону.

$$q(x_1,x_2) = q_*\sum_{i,j=0}^{1} b_{ij}x_1^i x_2^j \;\;, \tag{11}$$

тогда $v_6^+(\rho,\varphi) = q_*(b_{00} + \rho(b_{01}\sin(\varphi) + b_{10}\cos(\varphi)) + 2^{-1}b_{11}\rho^2\sin(2\varphi))$ и соответственно $\mathrm{V}_0^{6,+}(\rho) = b_{00}\delta_{0n}$, $\mathrm{V}_{\pm 1}^{6,+}(\rho) = (b_{10} \mp b_{01}i)\rho\delta_{\pm 1n}$, $\mathrm{V}_{\pm 2}^{6,+}(\rho) = \mp\dfrac{ib_{11}\rho^2}{2}\delta_{\pm 2n}$. Решение задачи теплопроводности в этом случае имеет вид [7]:

$$\mathrm{V}_0^{5,-}(\rho) = 2b_{00}\sqrt{a^2-\rho^2}, \;\; \mathrm{V}_{\pm 1}^{5,-} = \frac{4}{3}(b_{10} \mp b_{01}i)\rho\sqrt{a^2-\rho^2}, \;\; \mathrm{V}_{\pm 2}^{5,-} = \mp i\frac{8}{15}b_{11}\rho^2\sqrt{a^2-\rho^2} \tag{12}$$

При этом, в разложении (9) останется четыре слагаемых при $n = -2,-1,0,1,2$.

Применив к решению системы (10) подход, изложенный в работах [3-6], получим явные выражения для скачков напряжений на включении:

$$\left\langle\sigma_z\right\rangle^- = \nu_1^-(\rho,\varphi) = -\frac{1}{\pi\rho^2}\partial_\rho\int_\rho^a \frac{t\eta_{10}^-(t)dt}{\sqrt{t^2-\rho^2}} - \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\left[e^{i\varphi}\partial_\rho\int_\rho^a\frac{\eta_{11}^-(t)dt}{\sqrt{t^2-\rho^2}}\right], \tag{13}$$

$$\left\langle\tau_{z\rho}\right\rangle^- + i\left\langle\tau_{z\varphi}\right\rangle^- = \nu_2^-(\rho,\varphi) = -\frac{1}{\pi\rho^2}\partial_\rho\int_\rho^a\frac{\eta_{20}^-(t)+\eta_{30}^-(t)}{\sqrt{t^2-\rho^2}}dt - \frac{1}{\pi}e^{i\varphi}\partial_\rho\frac{1}{\rho^2}\int_\rho^a\frac{(\eta_{21}^-(t)+\eta_{31}^-(t))t}{\sqrt{t^2-\rho^2}}dt -$$

$$-\frac{1}{\pi\rho^2}e^{-i\varphi}\partial_\rho\int_\rho^a\frac{(\overline{\eta}_{21}^-(t)-\overline{\eta}_{31}^-(t))t}{\sqrt{t^2-\rho^2}}dt. \tag{14}$$

Здесь введены обозначения:

$$\eta_{10}^- = -\frac{2\delta_z}{b_2\sqrt{\kappa_*}}\mathrm{Re}\,\omega_1(\rho) + \frac{1}{b_2}\mathrm{Re}\,\Gamma_1[\partial_\rho\Im_0[\Theta^*]] + \frac{\lambda_0 q_{34}}{2a_1}\mathrm{Im}\,\Gamma_1[\partial_\rho\Theta^-],$$

$$\Theta^* = q_{44}\Theta^-(\rho) - \Theta^+(\rho), \eta_{30}^- = -\frac{i8\phi_z}{b_3}\rho, \eta_{31}^- = -\frac{\delta_{xy}}{b_3},$$

$$\eta_{20} = -\frac{2\delta_z\lambda_0}{a_2\sqrt{\kappa_*}}\mathrm{Im}\,\omega_1(\rho) + \frac{\lambda_0}{a_2}\mathrm{Im}\,\Gamma_1[\partial_\rho\Im_0[\Theta^*]] - \frac{q_{34}}{b_1}\mathrm{Re}\,\Gamma_1[\partial_\rho\Theta^-],$$

$$\eta_{10}^- = -\frac{2\delta_z}{b_2\sqrt{\kappa_*}}\mathrm{Re}\,\omega_1(\rho) + \frac{1}{b_2}\mathrm{Re}\,\Gamma_1[\partial_\rho\Im_0[\Theta^*]] + \frac{\lambda_0 q_{34}}{2a_1}\mathrm{Im}\,\Gamma_1[\partial_\rho\Theta^-],$$

$$\eta_{11}^{-} = \frac{2\overline{\phi}_{yx}}{b_2\sqrt{\kappa_*}}\operatorname{Re}\left\{\left(\rho + 2a\gamma_1\right)\omega_1(\rho)\right\} - \frac{\lambda_0\overline{\delta}_{xy}}{a_1\sqrt{\kappa_*}}\operatorname{Im}\omega_1(\rho),$$

$$\eta_{21}^{-} = \frac{2\lambda_0\overline{\phi}_{yx}}{a_2\sqrt{\kappa_*}}\operatorname{Im}\{\left(\rho + 2a\gamma_1\right)\omega_1(\rho)\} - \frac{\overline{\delta}_{xy}}{b_1\sqrt{\kappa_*}}\operatorname{Re}\omega_1(\rho).$$

Из выражений (13), (14) следует, что напряжения при $\rho \to a$ имеют корневую особенность, усиленную осцилляцией. В случае включения в виде эллипсоида вращения вокруг $Z$ с полуосями $a, h$, т.е. $\vartheta^{+} = 0, \vartheta^{-} = 2ha^{-1}\sqrt{a^2 - \rho^2}$, имеем:

$$\delta_z = m_{31}\frac{\mathrm{P}_3}{a} + \frac{h}{a}\left(m_2 + am_3\right), \; m_2 = \frac{q_{34}}{2b_1}, \; m_3 = \frac{1}{2}q_{44}\alpha_0\lambda_0. \tag{15}$$

Остальные поступательные и круговые перемещения в этом случае не зависят от его формы.ого формы. Используя условия (7) при $k = 2,3$ и условия (8), получим:

$$\phi_z = m_{32}\frac{\mathrm{M}_3}{a^3}, m_{32} = \frac{3b_3}{32},$$

$$\begin{pmatrix}\delta_x\\ \delta_y\end{pmatrix} = \frac{m_{11}}{a}\begin{pmatrix}\mathrm{P}_1\\ \mathrm{P}_2\end{pmatrix} + \frac{m_{12}}{a^2}\begin{pmatrix}M_2\\ M_1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\phi_x\\ \phi_y\end{pmatrix} = \frac{m_{21}}{a^2}\begin{pmatrix}\mathrm{P}_2\\ \mathrm{P}_1\end{pmatrix} + \frac{m_{22}}{a^3}\begin{pmatrix}\mathrm{M}_1\\ \mathrm{M}_2\end{pmatrix},$$

где

$$m_{11} = \frac{-l_1 n_{21}}{n_0}, m_{12} = \frac{l_2 n_{11}}{n_0}, m_{21} = \frac{l_1 n_{22}}{n_0}, m_{22} = \frac{-l_2 n_{12}}{n},$$

$$n_0 = n_{11}n_{21} - n_{12}n_{22}, n = \frac{a_1\alpha_0}{b_2\lambda_0}, n_{11} = 1 + \frac{b_1\lambda_0}{\pi b_3\alpha_0}, n_{21} = \frac{2}{3}\left(1 - 8\alpha_0^2\right),$$

$$n_{21} = -\frac{\pi a_2\alpha_0}{b_1\lambda_0}, l_1 = \frac{b_1\lambda_0}{2\pi\alpha_0}, l_2 = \frac{b_2\lambda_0}{4\pi\alpha_0}.$$

**Выводы.** Получено точное решение несвязаной задачи термоупругости об абсолютном жёстком межфазном круговом включении в кусочно-однородном трансверсально-изотропном пространстве. Получены аналитические зависимости между параметрами линейного перемещения включения и характеристиками силового и температурного полей.

## REFERENCE


1. Kryvyy O. The discontinuous solution for the piece-homogeneous transversal isotropic medium // Operator Theory: Adv. and Appl. 2009. **191**. P. 387–398.
2. Kryvyy O. Singular integral relations and equations for a piecewise homogeneous transversally isotropic space with interphase defects //Journal of Mathematical Sciences. 2011. **176.** №4. P.515-531.
3. Кривий О.Ф. Міжфазні кругові включення в кусково-однорідному трансверсально-ізотропному просторі/О.Ф. Кривий //Прикл. Проблеми мех. і мат. 2010. Вип. 8. С.173–183.
4. Kryvyi O.F Interface crack in the inhomogeneous transversely isotropic space // Materials Science- 2012. **47.** № 6. P.726-736.
5. Kryvyy O.F Interface circular inclusion under mixed conditions of interaction with a piecewise homogeneous transversally isotropic space // Journal of Mathematical Sciences. 2012. **184**. № 1. P.101-119.
6. Kryvyi O.F. Delaminated Interface Inclusion in a Piecewise Homogeneous Transversely Isotropic Space.// Materials Science. Sep. 2014. Vol. 50. Issue 2, p.245-253.
7. Кривой А.Ф. Решение задачи теплопроводности для кусочно-однородного ортотропного пространства с межфазными дефектами/ А.Ф Кривой, Ю.А. Морозов //Вісник Одеськ.нац.ун-ту. Математ. і мех. 2012. Т.17, вип. 3(15). С.107-119.


**Information about authors:**


**Kryvyi O. F.** – Prof. National University - Odessa Maritime Academy: Odessa, Ukraine +380674840395
**E-mail:** krivoy-odessa@ukr.net

**Yu. O. Morozov** – Associate professor, Odessa National Polytechnic University, Institute of mechanical engineering: Odessa, Ukraine +380677475439
**E-mail:** morozovyu@gmail.com

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В СТРУКТУРНО-ЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ МАТЕРИАЛАХ

**Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю.**

С использованием соотношений рациональной термодинамики необратимых процессов для сплошной среды, а также модели А.К. Эрингена нелокальной теории упругости, рассмотрен подход к построению математических моделей термомеханических процессов в деформируемом теле с учётом эффектов пространственной нелокальности сплошной среды. Получены численные решения задачи высокоинтенсивного поверхностного нагрева в одномерном случае. Проанализированы распределения температуры и напряжений в зависимости от параметров модели.

Современные конструкционные и функциональные материалы, представляющие собой совокупность микро- или наноструктурных элементов, часто называют структурно-чувствительными материалами. Важной особенностью таких материалов является качественное изменение физических свойств по сравнению с массивным материалом [1]. Известно, что прямое применение методов механики сплошной среды для композитов, модифицированных наноструктурными включениями, некорректно [2-5]. В связи с этим интерес представляет теория, в которой с одной стороны учтено наличие микроструктуры, а с другой стороны – к полученным уравнениям применимы методы механики сплошной среды.

Разработке моделей поведения нелокальной среды, учитывающих особенности структуры, посвящено сравнительно немного исследований. В данной работе, используя идею А.К. Эрингена [6, 7] о том, что дальнодействующие силы, которые отвечают за нелокальное поведение материала в данной точке пространства $\mathbf{x}$, адекватно описываются с использованием функции расстояния $\varphi(|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|)$, убывающей с ростом $|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|$, получены определяющие уравнений, описывающие термомеханические процессы в деформируемом твёрдом теле.

Для этого были введены в рассмотрение эффективная температура $\Phi$ и эффективная деформация $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(eff)}$, которые определены следующими соотношениями:

$$\Phi = p_1 T + p_2 \int_V \varphi(|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|) T(\mathbf{x}',t) d\mathbf{x}', \quad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(eff)} = p_1 \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} + p_2 \int_V \varphi(|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|) \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}',t) d\mathbf{x}'.. \qquad (1)$$

Здесь $T$ – абсолютная температура; $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ – тензор малой деформации; $\varphi(|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|)$ – функция влияния, определяющая эффект пространственной нелокальности, причём $\int_V \varphi(|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|) d\mathbf{x}' = 1$; $p_1,\ p_2 \in [0,1]$ – доли влияния локальных и нелокальных переменных на эффективные переменные, $p_1 + p_2 = 1$. Соотношения, аналогичные (1), используют в механике деформируемого твёрдого тела (без учёта влияния температуры) при построении нелокальных зависимостей компонент тензора напряжений от тензора деформации [4-6].

Определяющие уравнения в этом случае будут иметь вид

$$\rho c_\varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\Phi C_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}^{(eff)} \alpha_{ij}^{(T)} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + q_V, \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl}\left(\varepsilon_{kl}^{(eff)} - \varepsilon_{kl}^{(T)}\right), \qquad (2)$$

где $\rho$ – плотность материала; $c_\varepsilon$ – удельная массовая теплоёмкость при постоянной деформации, $q_k$ – проекции вектора плотности теплового потока на оси $Ox_k$ прямоугольной системы координат, $k = 1, 2, 3$, $q_i = -\lambda_{ij}^{(T)} \partial\Phi(\mathbf{x}',t)/\partial x_j'$; $q_V$ – объёмная плотность мощности внутренних источников (стоков) теплоты; $C_{ijkl}$ – компоненты тензора, характеризующего механические свойства тела; $\alpha_{ij}^{(T)}$ – компоненты тензора коэффициентов температурной деформации; $\varepsilon_{kl}^{(T)}$ – компоненты тензора температурной деформации, $\varepsilon_{kl}^{(T)} = \alpha_{kl}^{(T)} \Delta\Phi$.

С использованием разработанной модели были получены численные решения для задачи поверхностного нагрева упругого изотропного и однородного тела в одномерной постановке. Для получения уравнений термоупругости и теплопроводности было принято, что термомеханическая нагрузка действует по нормали к граничной поверхности, отличной от нуля является только деформация в направлении этой нормали, а температура и напряжения зависят только от времени и координаты $x_1$, направленной по нормали в глубь тела. С учётом постановки задачи соотношения (2) в безразмерных переменных можно привести к следующему виду:

$$R^2\ddot{\sigma}+R^2\left[p_1\ddot{\theta}+p_2\int_V\varphi(|z'-z|)\ddot{\theta}(z',\bar{t})dz'\right]=p_1\frac{\partial^2\sigma}{\partial z^2}+p_2\frac{\partial}{\partial z}\int_V\varphi(|z'-z|)\frac{\partial\sigma(z',\bar{t})}{\partial z'}dz', \tag{3}$$

$$p_1\dot{\theta}+p_2\int_V\varphi(|z'-z|)\dot{\theta}(z',\bar{t})dz'=p_1\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}+p_2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\int_V\varphi(|z'-z|)\theta(z',\bar{t})dz', \tag{4}$$

$$z=0,\quad \sigma\left(0,\bar{t}\right)=0,\ p_1\frac{\partial\theta}{\partial z}+p_2\frac{\partial}{\partial z}\int_V\varphi(|z'-z|)\theta(z',\bar{t})dz'=-q_0\left(\bar{t}\right),$$

$$q_0\left(\bar{t}\right)=M\bar{t}^{\,m}\exp\left(-m\bar{t}\right),\ M=m^m/(m-1)!;$$

$$z\to\infty,\quad \sigma\left(z,\bar{t}\right)\to 0,\ p_1\frac{\partial\theta}{\partial z}+p_2\frac{\partial}{\partial z}\int_V\varphi(|z'-z|)\theta(z',\bar{t})dz'\to 0. \tag{5}$$

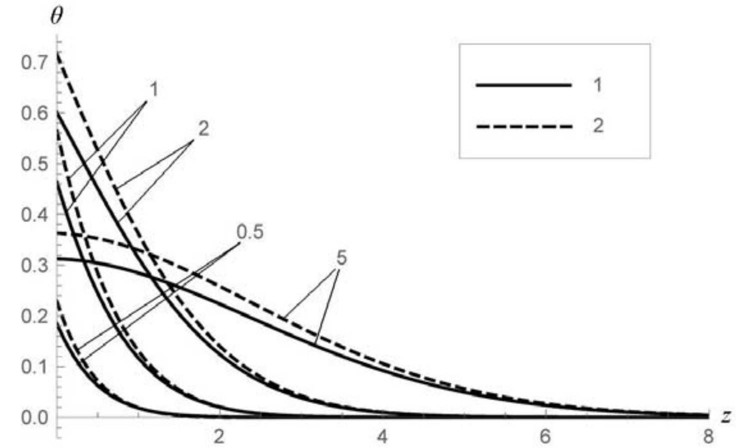
При этом были выбраны следующие безразмерные параметры и переменные:

$$z=x_1/\sqrt{at_0},\ \ \bar{t}=t/t_0,\ \ \theta=\left(T-T_0\right)/T^*,\ \ T^*=At_0^m\sqrt{at_0}/\lambda^{(T)},$$

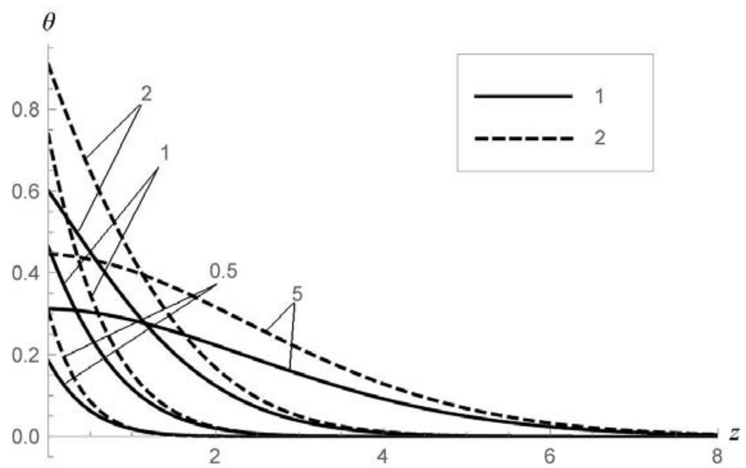
$$R^2=a\rho/\left(\lambda+2\mu\right)/t_0,\sigma=\sigma_{11}/\left((3\lambda+2\mu)\alpha^{(T)}T^*\right).$$

Численное решение задачи (3)-(5) может быть найдено с помощью конечно-элементной процедуры в форме метода Галеркина.

На рис.1 в сравнении на качественном уровне представлены распределения абсолютной температуры без учёта (сплошная линия) и с учётом (штриховая линия) нелокальности пространства по глубине тела для различных моментов времени (значения у кривых) и долях влияния $p_1$ и $p_2$: а) – $p_1=0.75$, $p_2=0.25$; б) – $p_1=p_2=0.5$. Функция нелокальности выбрана в виде: $\varphi(|z_1'-z_1|)=\exp\left(-|z_1'-z_1|/\bar{a}\right)/2\bar{a}$, где $\bar{a}$ – безразмерная величина пространственного влияния. На рис.2 представлены распределения напряжений с учётом нелокальности пространства (штриховая линия) и без учёта (сплошная линия) при различных значениях $R$ и долях влияния $p_1$ и $p_2$, значения у кривых – моменты времени.

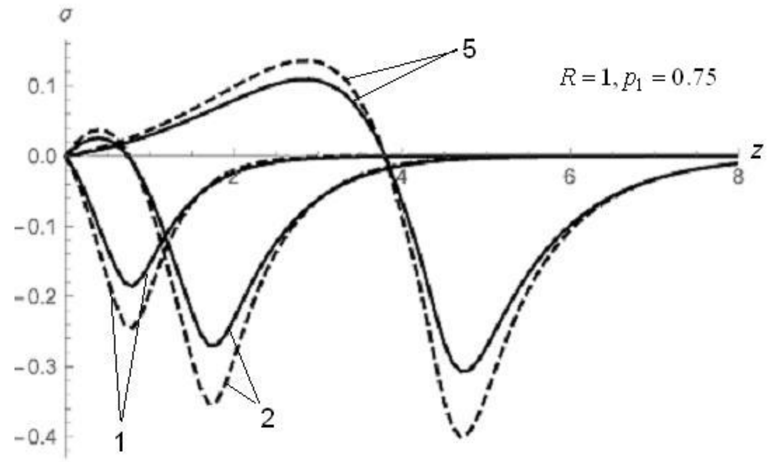



а)

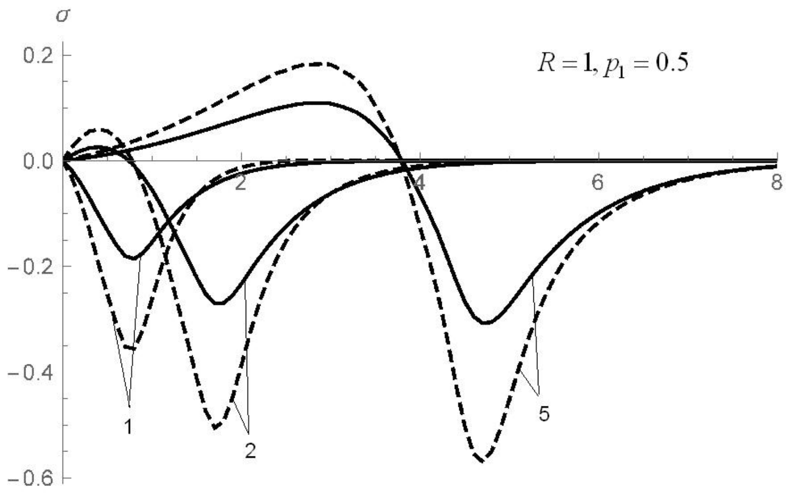



б)

Рис. 1. Распределения температуры по глубине тела




а)




б)

Рис. 2. Распределения напряжения по глубине тела

Представленная термомеханическая модель даёт возможность моделировать термомеханические процессы в деформируемом твёрдом теле при различных допущениях относительно структуры материала

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-38-00618.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Ч. Пул-мл, Ф. Оуэне Нанотехнологии. М.: Техносфера, 2006. 336 с.
2. J. Peddieson, G.R. Buchanan, R.P. McNitt Application of nonlocal continuum models to nanotechnology // International Journal of Engineering Science. 2003. 41. P. 305–312.
3. Кривцов А.М. Деформирование и разрушение твердых тел с микроструктурой. М.: Физматлит, 2007. 304 с.
4. Кунин И.А. Теория упругих сред с микроструктурой. Нелокальная теория упругости. М.: Наука, 1975. 416 с.
5. М. Онами, С. Ивасимидзу, К. Гэнка, К. Сиодзава, К. Танака. Введение в микромеханику. Пер. с япон. М.: Металлургия, 1987. 280 с.
6. Eringen A.C. Nonlocal continuum field teories. New York-Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2002. 393 pp.
7. Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Термомеханическая модель нелокального деформирования твердого тела // Изв. РАН. МТТ. 2016. № 3 С. 20-27.


**Сведения об авторах:**


**Кувыркин Георгий Николаевич** – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр.1, **e-mail:** fn2@bmstu.ru).

**Савельева Инга Юрьевна** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр.1, **e-mail:** inga.savelyeva@bmstu.ru).

**ДЕФОРМАЦИОННОЕ ПОВЕДЕНИЕ ЦЕМЕНТОГРУНТНОГО КОМПОЗИТА ПРИ КРАТКОВРЕМЕННОМ И ДЛИТЕЛЬНОМ СИЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ**

**Манукян Е.С.**

Обсуждаются результаты исследования прочности и сопротивляемости деформированию при кратковременном и длительном сжимающих силовых воздействиях цементогрунтных цилиндрических образцов в продольном, а также в поперечном (диаметральном) направлениях.

С целью оценки физико-механических свойств цементогрунта даётся сравнение величин некоторых характеристик этого материала и легкого бетона на литоидной пемзе.

**Введение.** В последнее время наблюдается тенденция применения цементогрунта с целью строения отдельных ответственных частей, в том числе и фундаментов, малоэтажных зданий и сооружений.

Известно, что прочность на сжатие цементогрунта, пригодного для возведения фундаментов, должна быть не менее 10 МПа. Для получения цементогрунтного композита с такой прочностью и расходом цемента не более 12% возникает необходимость в состав сырьевой смеси ввести поверхностно активные вещества (ПАВ)[1 и др.]

Согласно же данным работы [2], на основе белоземов карбонатного состава можно получить цементогрунты с прочностью 10 МПа и более, не используя при этом никаках ПАВ.

В настоящей работе приводятся и обсужаются данные, полученные в результате испытания на кратковременное и длительное сжатие цилиндрических опытных образцов, изготовленных из цементогрунтного композита на основе белозема карбонатного состава.

**1. Методика проведения исследований**. В качестве объекта исследований служили изготовленные из цементогрунтного композита образцы-цилиндры:

- с диаметром (d) 5 см и высотой (h) 5 см–для определения прочности материала на сжатие [3];
- с d=5 см и h=20 см – для проведения кратковременных и длительных испытаний.

Опытные образцы, полученные методом прямого прессования, освобождались из форм через 14 сут. после изготовления, а в дальнейшем, до момента проведения экспериментальных исследований в возрасте 42 сут., они находились во влажных опилках.

Кратковременное испытание опытных образцов осуществлялось по методике, изложенной в работе [4].

Экспериментальные данные кратковременных продольных ($\varepsilon_{пр}$) и поперечных ($\varepsilon_{поп}$) деформаций были аппроксимированы следующими зависимостями[4]:

$$\varepsilon_{\text{пр}} = \frac{a_1\,\sigma/R}{1-b_1\sigma/R}, \quad (1) \qquad \varepsilon_{\text{поп}} = \frac{a_2\,\sigma/R}{1-b_2\,\sigma/R}. \quad (2)$$

Величины касательного модуля деформации Ē при различных уровнях напряжений $\sigma$ были определены зависимостью [4]

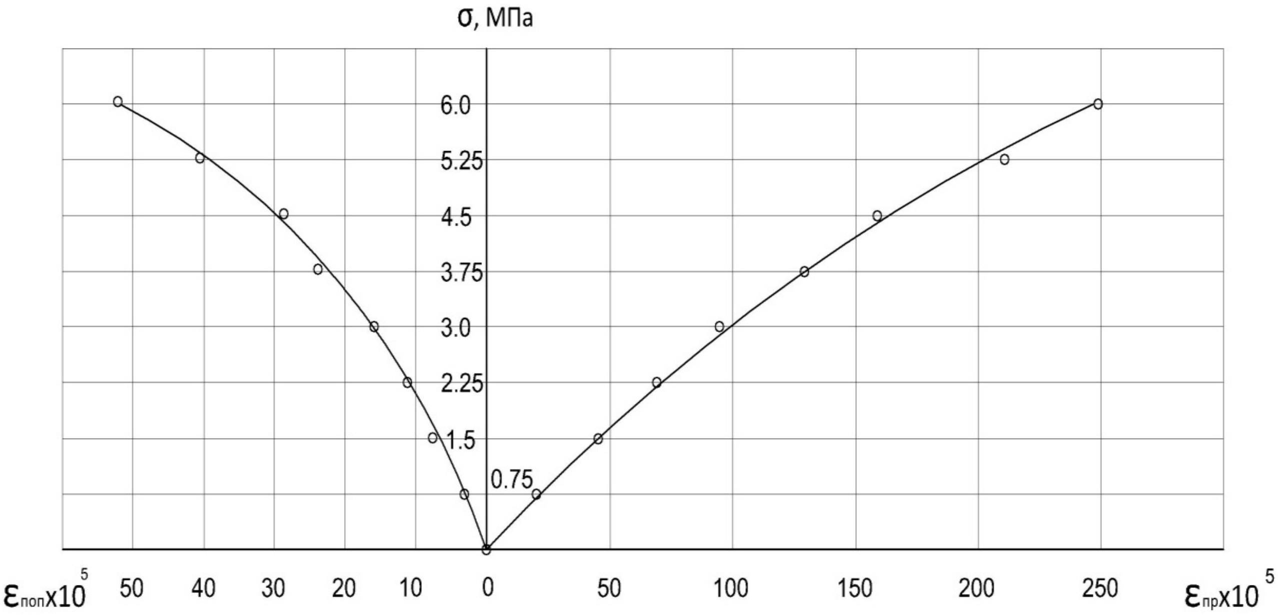
$$\overline{E} = E_0\left(1-b_1\,\sigma/R\right)^2 . \quad (3)$$

В зависимостях (1), (2) и (3) $a_1$, $b_1$, $a_2$, $b_2$ – параметры аппроксимации, R– сопротивление разрушению образцов, а $E_0 = R/a_1$ – начальный модуль деформаций.

При экспериментальных исследованиях на ползучесть длительному сжатию подвергались 3 образца-близнеца и в таком же количестве соответствующих образцов-близнецов измерялись усадочные деформации. Величина сжимающего напряжения для нагруженных образцов составляла 0,4 $R$. Образцы под нагрузкой находились в течение 158 дней. Температура лабораторного помещения в период проведения исследований составляла 22 ±5 $^\circ$ С.

**2**. **Сопротивление цементогрунта деформированию при кратковременном нагружении.**

На рис.1 приведены экспериментальные данные (они показаны метками) зависимостей продольных ($\varepsilon_{пр}$) и поперечных ($\varepsilon_{поп}$) деформаций от напряжения $\sigma$ опытных образцов в сравнении с кривыми, построенными согласно формулам (1) и (2).




ПОПЕРЕЧНЫЕ ПРОДОЛЬНЫЕ

ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ

Рис.1. Кривые деформаций цементогрунтных образцов, подвергнутых кратковременному сжатию

Для параметров аппроксимации экспериментальных данных были приняты следующие значения:

$a_1 = 203{,}2$ , $b_1 = 0{,}43$ и $a_2 = 29{,}0$ , $b_2 = 0{,}694$

Как видно из данных рис.1, эмпирическое описание зависимостями (1) и (2) указанных выше экспериментальных данных можно считать приемлемым.

По данным, приведённым в табл.1, можно составить представление об изменении рассчитанной согласно (3) величины касательного модуля деформации цементогрунтных опытных образцов в зависимости от уровня относительного сжимающего напряжени $\sigma/R$ .

Таблица 1

| Модуль деформации по касательной $\times 10^{-2}$ в МПа при относительном напряжении $\sigma/R$ | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 0,25 | 0,5 | 0,75 |
| 42 | 33 | 26 | 19 |

Отметим, что прочность цементогрунта составляет 10,5МПа, а величина сопротивления разрушению цементогрунтных цилиндрических образцов с d=5см и h=20см составляет 8,5МПа.

**3. Ползучесть цементогрунта.** На рис.2 приведены экспериментальные данные ползучести (они показаны метками) и аппроксимирующие эти данные кривые.

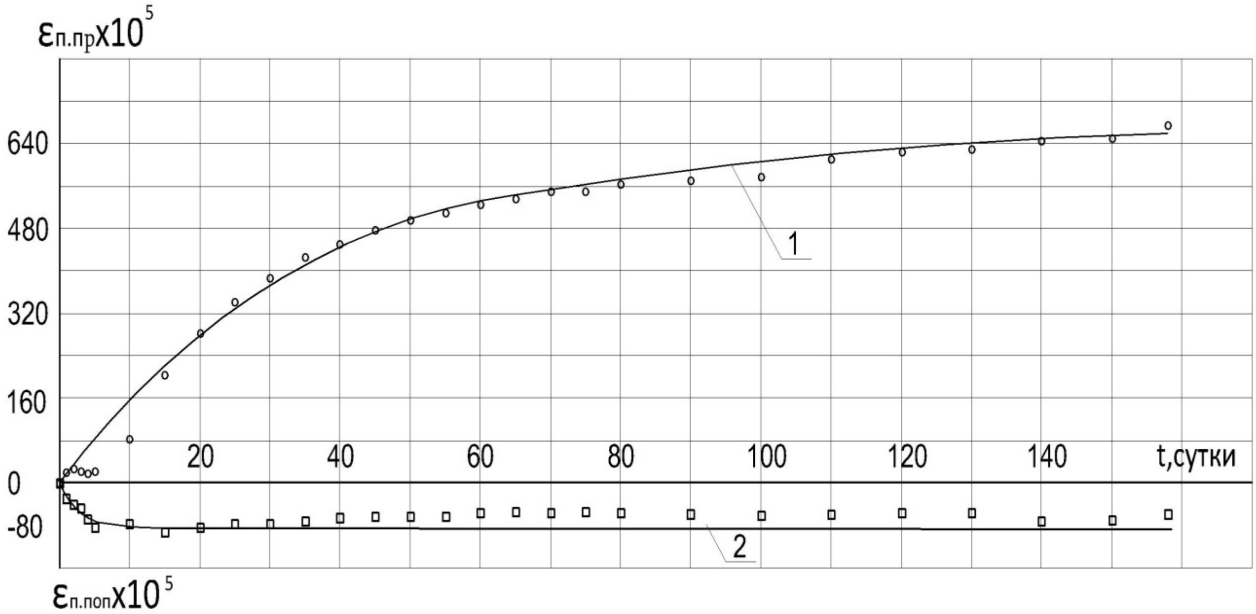



Рис.2. Кривые деформаций ползучести цементогрунтных опытных образцов в продольном (1) и в поперечном (2) направлениях

Представленные на рис.2 кривые, описывающие процесс развития с течением времени деформации ползучести в продольном и в поперечном направлениях, целесообразно условно разделить на этапы.

В случае деформации ползучести в продольном направлении $\varepsilon^{-}_{\text{п.пр}}$ опытных образцов можно отметить три этапа её развития во времени (рис.2):

I этап – развитие с начальной высокой и постепенно подающей скоростью деформации ползучести (в течение, примерно, 66 суток после нагружения образцов),

II этап – развитие деформации ползучести с переменной скоростью (от 66 до 115 сут.),

III этап – практически установившееся состояние с некоторыми колебаниями величины деформации ползучести (от 115 сут. и до конца наблюдении).

В случае поперечных деформаций ползучести $\varepsilon^{+}_{\text{п.поп}}$ процесс развития во время деформации, условно, можно разделить на 2 этапа, а именно:

I этап – развитие с начальной высокой и резко подающей скоростью деформации ползучести (в течение первых 10 сут.),

II этап – установившееся состояние с чувствительными колебаниями величины деформаций ползучести (от 10 сут. и до конца экспериментов).

Следует отметить высокое значение отношения деформаций ползучести в продольном и поперечном направлениях цементогрунтных цилиндрических образцов $\varepsilon^{-}_{\text{п.пр}} / \varepsilon^{+}_{\text{п.поп}} = 9,4 - 10,8$.

**Результаты сравнения.** Для того, чтобы оценить определённые нами физико-механические свойства цементогрунта, в табл. 2 приведены показатели некоторых характеристик этого материала и легкого бетона на литоидной пемзе (вулканическая горная порода) [5].

Отметим, что в опытах на ползучесть литоидпемзобетона величина относительного сжимающего напряжения $\sigma/R$ составляла 0,311[5].

Таблица 2

Показатели некоторых характеристик цементогрунта и литоидпемзобетона

| Вид композитного материала | Плотность т/м$^3$ | Проч-ность при сжатии, МПа | Сопротивл. разрушению опытных цилиндр. образцов, МПа | Начальн. модуль упругости, МПа $\times 10^{-2}$ | Коэфф. Пуассона | Мера ползучести * $\times 10^{5}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| цементогрунт | 1,610 | 10,5 | 8,5 | 42,0 | 0,15-0,16 | 190-195 |
| бетон на литоидн. пемзе | 1,715 | 25,9 | 16,1 | 146,0 | 0,11-0,12 | 18-9 |

* – величина деформации ползучести от еденичного напряжения

Сравнение данных табл. 2 показывает, что цементогрунт обладает с существенно заниженной прочностью и, особенно, сопротивляемостью деформирования по сравнению с аналогичными характеристиками, определёнными для бетона на литоидной пемзе.

**ЛИТЕРАТУРА**


1. Христофоров А.И., Христофорова И.А., Еропов О.Л., Улучшение свойств цементно-песчаного бетона путем введения ПАВ и органических веществ бетонную смесь // Вестник Тамбовского уни-та. Сер.: Естественные и технические науки 2012. Т.17. №2. С.714-717.
2. Karapetyan K.A., Hayroyan S.G., Manukyan E.S., About the possibility of obtaining cementitious soil composites of high strength on the basis of belozems of carbonate composition // Journal of Physics: Conference Series, 2018, V. 991,012032(1-6)pp.
3. Разманов А.А., Бадаева А.Д., Ланин Е.Б., Алнашаш Т.А.. Грунтобетон в закладке фундамента. Строительство уникальных зданий и сооружений. 3(30). 2015. С. 111-128
4. Карапетян К.С., Влияние анизотропии на ползучесть бетона при сжатии и растяжении в зависимости от масштабного фактора // Изв. АН АрмССР. Серия физ.-мат. наук. 1964. Т.17. №4. С 71-90.
5. Карапетян К.С., Карапетян К.А. Неоднородная ползучесть бетонного элемента // Докл. АН Арм. ССР. 1982. Т.75. № 2. С. 65-70.



**Сведения об авторе:**

**Манукян Егише Самвелович –** н.с. Институт механики НАН РА

**Тел.:** (374 99) 50 07 55; **E-mail:** exishe.manukyan@gmail.com

# ПОСТРОЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

**Мартиросян А.Н., Давтян А.В., Динунц А.С., Мартиросян Г.А.**

Рассматривается задача определения фундаментального решения линейной гиперболической системы уравнений с постоянными коэффициентами. Для многих независимых переменных фундаментальное решение уравнений с постоянными коэффициентами получено Гельмгольцем и И.Г. Петровским [1, 2] в виде квадратур. Методы построения фундаментальных решений для ряда уравнений математической физики приводятся в [3]. В данной работе дано эффективное определение фундаментального решения в форме Смирнова-Соболева для пространственной динамической задачи теории упругости для однородного изотропного тела.

Рассматривается задача определения перемещений в упругой среде при наличии точечного импульса в неограниченном пространстве. Для изотропной однородной упругой среды уравнения движения имеют вид5

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= \left(a^2 - b^2\right)\frac{\partial\theta}{\partial x} + b^2\Delta u_1 + \frac{X_0}{\rho}\delta(x)\delta(y)\delta(z)\delta(t)\\
\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} &= \left(a^2 - b^2\right)\frac{\partial\theta}{\partial y} + b^2\Delta u_2 + \frac{Y_0}{\rho}\delta(x)\delta(y)\delta(z)\delta(t)\\
\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} &= \left(a^2 - b^2\right)\frac{\partial\theta}{\partial z} + b^2\Delta u_3 + \frac{Z_0}{\rho}\delta(x)\delta(y)\delta(z)\delta(t)
\end{aligned} \tag{1}$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, $\theta = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}$, $a, b$ – скорости продольных и поперечных волн.

Вводим преобразование Лапласа $\bar{u}_{1,2,3}$ для компонентов перемещений $u_{1,2,3}$, а затем вводим преобразование Фурье в виде

$$\bar{u}_{1,2,3} = \iiint_{-\infty}^{\infty} \bar{\bar{u}}_{1,2,3} \exp\left(i\bar{\alpha}x + i\bar{\beta}y + i\bar{\gamma}z\right) d\bar{\alpha}\, d\bar{\beta}\, d\bar{\gamma}. \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1), применяя обратное преобразование Фурье, получили алгебраическую систему уравнений относительно $\bar{\bar{u}}_{1,2,3}$, решения которых имеют вид:

$$\begin{aligned}
8\pi^3\rho D\bar{\bar{u}}_1 &= X_0\left\{s^2 + b^2\bar{\alpha}^2 + a^2\left(\bar{\gamma}^2 + \bar{\beta}^2\right)\right\} - \left(Y_0\bar{\beta} + z_0\bar{\gamma}\right)\left(a^2 - b^2\right)\bar{\alpha}\\
8\pi^3\rho D\bar{\bar{u}}_2 &= Y_0\left\{s^2 + b^2\bar{\beta}^2 + a^2\left(\bar{\alpha}^2 + \bar{\gamma}^2\right)\right\} - \left(a^2 - b^2\right)\bar{\beta}\left(X_0\bar{\alpha} + z_0\bar{\gamma}\right)\\
8\pi^3\rho D\bar{\bar{u}}_3 &= z_0\left\{s^2 + b^2\bar{\gamma}^2 + a^2\left(\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2\right)\right\} - \left(a^2 - b^2\right)\bar{\gamma}\left(X_0\bar{\alpha} + Y_0\bar{\beta}\right)\\
D &= \left\{s^2 + a^2\left(\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2 + \bar{\gamma}^2\right)\right\}\left\{s^2 + b^2\left(\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2 + \bar{\gamma}^2\right)\right\}, s = -i\omega
\end{aligned} \tag{3}$$

Подставляя (3) в (2), вычисляя вычет в интегралах по $\bar{\gamma}$ относительно полюсов $\bar{\gamma}_n = \omega\sqrt{c_n^{-2} - \alpha^2 - \beta^2}$, $\bar{\alpha} = \omega\alpha$, $\bar{\beta} = \omega\beta$, $c_1 = a$, $c_2 = b$, получим, переходя к цилиндрическим координатам $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $\alpha = \xi\cos\phi$, $\beta = \xi\sin\phi$, $\bar{\gamma}_n = \omega\gamma_n$, $z = z$

$$\bar{u}_j = \frac{\omega}{4\pi^2\rho}\sum_{n=1}^{2}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\overset{=(n)}{u_j}\exp\left(i\omega\phi_n\right)d\xi d\psi\,, \tag{4}$$

где

$$\psi = \phi - \theta,\ \overset{=(1)}{u_1} = \frac{\xi}{\gamma_1}\left(X_0\alpha^2 + Y_0\alpha\beta + Z_0\alpha\gamma_1\right), \qquad \overset{=(2)}{u_1} = \frac{\xi}{\gamma_2}\left[X_0\left(\frac{1}{b^2} - \alpha^2\right) - Y_0\alpha\beta - Z_0\beta\gamma_2\right],$$

$$\overset{=(1)}{u_2} = \left(X_0\alpha + Y_0\beta + Z_0\gamma_1\right)\frac{\beta\xi}{\gamma_1}, \qquad \overset{=(2)}{u_2} = \frac{\xi}{\gamma_2}\left[Y_0\left(\frac{1}{b^2} - \beta^2\right) - X_0\alpha\beta - Z_0\beta\gamma_2\right],$$

$$\overset{=(1)}{u_3} = \xi\left(X_0\alpha + Y_0\beta + Z_0\gamma_1\right),\ \overset{=(2)}{u_3} = \frac{\xi}{\gamma_2}\left[Z_0\left(\alpha^2 + \beta^2\right) - X_0\alpha\gamma_2 - Y_0\beta\gamma_2\right],\ \phi_n = \xi r\cos\psi + z\gamma_n$$

Формулы (4) имеют место при $z > 0$. При $z < 0$, $\gamma_n$ в экспоненте поменяются знаки, а окончательное решение (2), (3) (4) не изменится.

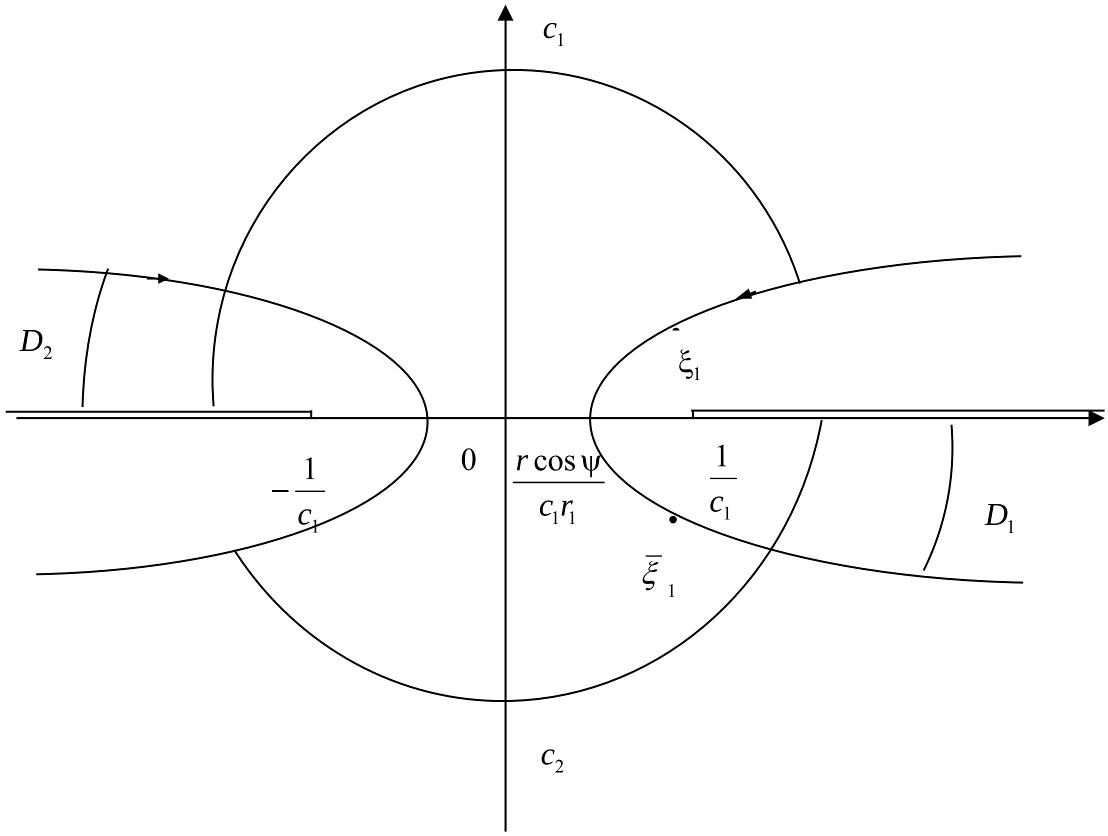
В интегралах по $\psi$ в (4), взятых в пределах $\left(\pi/2, \pi\right)$, сделаем замену $\pi - \psi$ на $\psi$, тогда, в указанных интегралах, взятых уже в пределах $\left(0, \pi/2\right)$, $\cos\psi$ заменится на $-\cos\psi$. Поскольку при нечётных степенях $\cos\psi$ стоят множителем нечетные степени $\xi$, можно полученные интегралы в (4) по $\psi$ в пределах $\left(0, \pi/2\right)$ объединить, причем $\cos\psi$ всюду берем со знаком плюс и интегралы по $\xi$ следует брать в пределах $(-\infty, +\infty)$, а также под знаком интеграла добавить $\operatorname{sgn}\xi$. Сделаем разрез плоскости $\xi$ по действительной оси от точек $\pm c_n^{-1}$ до $\pm\infty$, причём $c_1 = a$ и $c_2 = b$ для первых и вторых интегралов, соответственно, в правых частях (4). Выберем ту ветвь функции $\gamma(\xi) = \bar{\gamma}/\omega\left(\xi\omega = \sqrt{\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2}\right)$, которая на верхних берегах левых и нижних берегах правых разрезов имеет положительную мнимую часть. При $\omega > 0$ контур интегрирования по $\xi$ проходит при $\xi < 0$ в верхней полуплоскости, при $\xi > 0$ – в нижней полуплоскости. Проведём дуги окружностей $c_{1,2}, D_{1,2}$ большого радиуса фиг.1, на которых $\operatorname{Im} f_{1,2}(\xi) < 0$, где $f_{1,2}(\xi) = t - r\xi\cos\psi - z\gamma_{1,2}(\xi)$. Проведём контуры $\Gamma_1, \Gamma_2$, на которых $\operatorname{Im} f_{1,2}(\xi) = 0$ и которые проходят через точки Смирнова-Соболева $\xi_{1,2}$, определяемые уравнениями

$$f_n(\xi_n) = t - \xi r\cos\psi - z\gamma_n(\xi_n) = 0,\ \gamma_n = \sqrt{c_n^{-2} - \xi^2}\,. \tag{5}$$

Из (5) получится для $z > 0$

$$r_1^2 \xi_n = tr\cos\psi + iz\sqrt{t^2 - c_n^{-2} r_1^2}, \quad r_1^2 = z^2 + r^2\cos^2\psi\,, \tag{6}$$

Причём, при $z < 0$ перед радикалом берётся обратный знак. Комплексно-сопряжённые значения $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2$ также удовлетворяют (5), т.е. находятся на $\Gamma_1, \Gamma_2$ (фиг.1). Интеграл по $\xi$ от 0 до $\dfrac{r\cos\psi}{r_1 c_n}$ равен нулю, поскольку при обратном преобразовании Лапласа получится интеграл от дельта-функции аргумента $t - \xi r\cos\psi - z\gamma_n$, $n = 1, 2$, корни которого $\xi_n$ не лежат на вышеупомянутом участке.




Фиг. 1.

Заменяя интегралы по $\xi$ на интегралы по контурам $\Gamma_1, \Gamma_2$, получим из (4) для $\bar{u}_1$, например, при $\omega > 0$

$$\bar{u}_1 = \frac{s}{4\pi^2\rho}\sum_{n=1}^{2}\int_0^{\pi/2}\int_{\Gamma_n} \overset{=(n)}{u_1} \exp\left(i\omega\phi_n\right) d\xi d\psi \tag{7}$$

$$\overset{=(1)}{u_1} = \frac{\xi}{\gamma_1}\left\{X_0\left(\cos^2\theta\cos^2\psi + \sin^2\theta\sin^2\psi\right)\xi^2 + Y_0\cos^2\psi\sin\theta\cos\theta\xi^2 + Z_0\xi\gamma_1\left(\xi\right)\cos\psi\right\}$$

$$\overset{=(2)}{u_1} = \frac{\xi}{\gamma_2}\left\{\left(b^{-2} - \xi^2\cos^2\theta\cos^2\psi - \xi^2\sin^2\theta\sin^2\psi\right)X_0 - Y_0\xi^2\cos 2\psi\sin\theta\cos\theta - Z_0\xi\gamma_2\left(\xi\right)\cos\psi\right\}$$

Здесь учтено, что интегралы от нечётных степеней $\sin\psi, \cos\psi$ в (4) равны нулю. При получении (7) интегралы по $\xi$ в пределах $(-\infty, 0)$ заменялись на проходимые сверху вниз верхние части контуров $\Gamma_1, \Gamma_2$ с учётом знака $\operatorname{sgn}\xi$, а участок $(0, +\infty)$ заменяется на взятые с обратным знаком интегралы по нижним частям контуров $\Gamma_1, \Gamma_2$, проходимым уже снизу вверх.

При $\omega < 0$ берём вместо $c_{1,2}, D_{1,2}$ дуги окружности, дополняющие их соответственно до верхних и нижних полуплоскостей. Учитывая множитель $\operatorname{sgn}\xi$, можно показать, что при $\omega < 0$ снова имеет место (7). Обратное преобразование Лапласа по $t$ даёт, например, для коэффициента при $X_0$ соответствующего интеграла по $\Gamma_1$ значение

$$u_1\Big|_{X_0,\Gamma_1} = X_0\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\pi/2}\int_{\Gamma_1}\left(\cos^2\theta\cos^2\psi + \sin^2\theta\sin^2\psi\right)\frac{\xi^2\delta\left(f_1(\xi)\right)}{4\pi^2\rho\gamma_1(\xi)}d\xi d\psi \tag{8}$$

и после вычисления интеграла от дельта-функции действительного аргумента для $z > 0$ получим:

$$u_1\Big|_{X_0\Gamma_1} = -\frac{X_0}{2\pi^2\rho}\operatorname{Re}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2\theta\cos^2\psi + \sin^2\theta\sin^2\psi}{r\cos\psi\gamma_1(\xi_1) - z\xi_1}\xi_1^3 d\psi\,, \tag{9}$$

где объединены интегралы по верхней и нижней частям $\Gamma_1$, дающие сопряжённые комплексные значения, причём $\xi_1$ даётся (6). Учитывая, что действительная и мнимая части подынтегральных функций есть чётные и, соответственно, нечётные функции $\cos\psi$, получим для (9) значение

$$u_1\Big|_{X_0,\Gamma_1} = \frac{X_0}{2\pi^2\rho}\frac{\partial}{\partial t}H\left(t - \frac{R}{a}\right)\int_0^{\pi/2}\left(\cos^2\theta\cos^2\psi + \sin^2\theta\sin^2\psi\right)\frac{A}{r_1^3}d\psi$$

$$A = 3t^2 rz\cos^2\psi - z^3\left(t^2 - \frac{r_1^2}{a^2}\right),\quad R = \sqrt{z^2 + r^2} \tag{10}$$

Заменяя $\operatorname{tg}\psi = \lambda$, вычисляя интегралы по $\lambda$, получим для (10) значение

$$u_1\Big|_{X_0,\Gamma_1} = \frac{X_0 t\left(3x^2 - R^2\right)}{4\pi\rho R^5}H\left(t - \frac{R}{a}\right) + \frac{1}{4\pi\rho a^2 R^3}X_0 x^2\delta\left(t - \frac{R}{a}\right) \tag{11}$$

Подобным же образом вычисляются остальные интегралы в (7), а также интегралы для $u_2, u_3$. Окончательно формулы для компонентов перемещений имеют вид:

$$u_1=\frac{t}{4\pi\rho}\sum_1^2\frac{(-1)^{n+1}}{R^3}\left\{\left[\left(3x^2-R^2\right)X_0+3xyY_0+3xzZ_0\right]R^{-2}H\left(t-\frac{R}{c_n}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(x^2X_0+xyY_0+xzZ_0\right)\frac{1}{c_n^2}\delta\left(t-\frac{R}{c_n}\right)\right\}+\frac{X_0}{4\pi\rho b^2R}\delta\left(t-\frac{R}{b}\right) \tag{12}$$

$$u_2=\frac{t}{4\pi\rho}\sum_1^2\frac{(-1)^{n+1}}{R^3}\left\{\left[3xyX_0+\left(3y^2-R^2\right)Y_0+3yzZ_0\right]\frac{}{R^2}H\left(t-\frac{R}{c_n}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{c_n^2}\left(X_0xy+Y_0y^2+Z_0yz\right)\delta\left(t-\frac{R}{c_n}\right)\right\}+\frac{Y_0}{4\pi\rho b^2R}\delta\left(t-\frac{R}{b}\right)$$

$$u_3=\frac{t}{4\pi\rho}\sum_1^2\frac{(-1)^{n+1}}{R^3}\left\{\left[3X_0xy+3Y_0yz+Z_0\left(3z^2-R^2\right)\right]R^{-2}H\left(t-\frac{R}{c_n}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{c_n^2}\left(X_0xy+Y_0zx+Z_0z^2\right)\delta\left(t-\frac{R}{c_n}\right)\right\}+\frac{Z_0}{4\pi\rho b^2R}\delta\left(t-\frac{R}{b}\right)$$

Полученное решение задачи для точечных импульсов совпадает с известным решением Стокса [3], однако, использованный здесь метод является более общим и можно распространить результаты на более общие виды сред [4].

**ЛИТЕРАТУРА**


1. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1965.
2. Лере Ж., Гординя Л., Котаке Т. Задача Коши. М.: Мир, 1967.
3. Бабич В.М., Капилевич М.Б., Михлин С.Г., Натансон Г.И., Гиз П.М., Слободецкий Л.Н., Смирнов М.М. Линейные уравнения математической физики. М.: Наука, 1964.
4. Мартиросян А.Н. Математические исследования нестационарных линейных граничных задач для сплошных сред. Ереван: Зангак-97, 2007. 244с.


**Сведения об авторах:**


**Мартиросян Ашот Навасардович** – доктор физ.-мат. наук, проф., Горисский госуниверсистет, (374 93) 19 24 65, **E-mail:** ashot.martirosyan.14@gmail.com

**Давтян Ануш Володяевна –** кандидат физ. - мат. наук, Горисский госуниверситет

**E-mail:** davtyananush@gmail.com

**Динунц Арпине Серобовна** – кандидат физ. - мат. наук, Горисский госуниверситет **E-mail:** dinuntsas@gmail.com

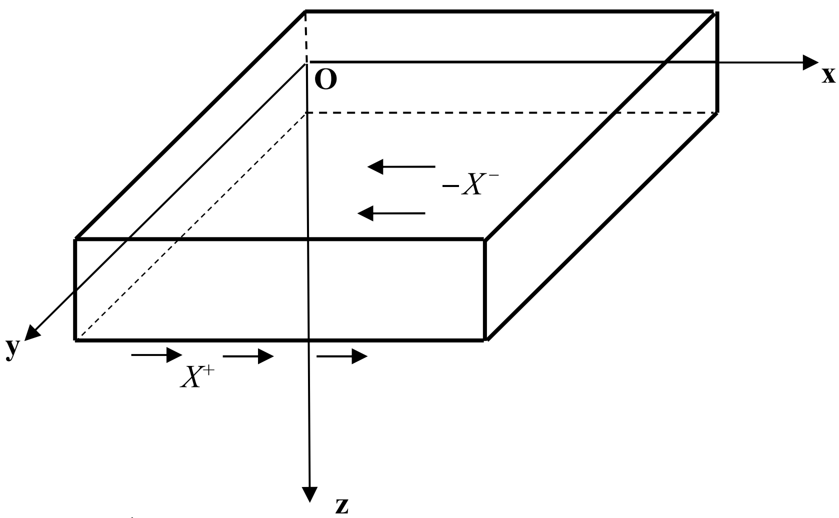
**Мартиросян Гайк Ашотович** -кандидат физ. - мат. наук, доцент Горисского государственного университета, E-mail hayk.martirosyan.75@mail.ru

# НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРУЕМОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛАСТИНЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ НАГРУЗОК, ТАНГЕНЦИАЛЬНО ПРИЛОЖЕННЫХ К ПОВЕРХНОСТИ

**Мартиросян К.Л.**

В этой статье рассматривается упругое изгибание прямоугольной пластины под действием нагрузок, тангенциально приложенных к поверхности. Сделаны выводы о влиянии нагрузок на напряжённо-деформируемое состояние плиты с различными граничными условиями.

Рассматривается пластинка толщины 2h, на лицевых поверхностях которой заданы касательные нагрузки $X^{\pm}$. Прямоугольная декартовая система координат $(x, y, z)$ выбрана так, что срединная плоскость пластинки совпадает с плоскостью $(xOy)$.




Задача напряжённо-деформированного состояния пластинки при наличии касательных нагрузок рассматривается на основе классической теории Кирхгофа (К) [1], на основе уточнённой теории первого порядка – теории Рейснера-Генки-Миндлина по варианту Васильева (R)[2] и на основе уточнённой теории высокого порядка – теории Амбарцумяна (А)[3].

Предполагается, что на лицевых поверхностях заданы касательные нагрузки:

$$z = h: \quad \sigma_{33} = 0, \quad \sigma_{31} = X^{+}(x, y), \quad \sigma_{32} = 0$$
$$z = -h: \quad \sigma_{33} = 0, \quad \sigma_{31} = -X^{-}(x, y), \quad \sigma_{32} = 0. \tag{1}$$

Относительно перемещений, по теориям (К), (R) и (А), соответственно, принимаются следующие допущения [4]:

$$U_1 = U - z\frac{\partial W}{\partial x}, \quad U_2 = V - z\frac{\partial W}{\partial y}, \quad U_3 = W \quad , (2)$$

$$U_1 = U - z\theta_1, \quad U_2 = V - z\theta_2, \quad U_3 = W, \tag{3}$$

$$U_1 = U - z\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{z}{2G}\left(X_1 + \frac{z}{2h}X_2\right) + \frac{1}{G}g(z)\varphi_1,$$
$$U_2 = V - z\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{1}{G}g(z)\varphi_2, \quad U_3 = W. \tag{4}$$

Здесь, $U, V$ – перемещения срединной плоскости; $W$ – прогиб пластинки; $\varphi_1, \varphi_2, \theta_1, \theta_2$ – функции, независящие от координаты $z$; $G$ – модуль сдвига;

$X_1 = X^{+} - X^{-}, \quad X_2 = X^{+} + X^{-}$ – касательные нагрузки,

$$g(z) = z\left(1 - \frac{z^2}{3h^2}\right). \tag{5}$$

Уравнения относительно планарных перемещений срединной поверхности пластинки по теориям (К) и (R) таковы:

$$\Delta U+\theta\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\right)=-\frac{2X_2}{C(1-\nu)}$$

$$\Delta V+\theta\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial x}\right)=0,\quad \theta=\frac{1+\nu}{1-\nu} \tag{6}$$

по теории (A)

$$\Delta U+\theta\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\right)=-\frac{2X_2}{C(1-\nu)}-\frac{\theta h}{3E}\left(\frac{\partial^2 X_2}{\partial x^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 X_2}{\partial y^2}\right),$$

$$\Delta V+\theta\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial x}\right)=-\frac{\theta h}{12G}\frac{\partial^2 X_2}{\partial x\partial y}. \tag{7}$$

Уравнения изгиба пластинки по теории (K)

$$\Delta^2 W=\frac{h}{D}\frac{\partial X_1}{\partial x} \tag{8}$$

по теории (R)

$$\Delta W-\frac{\partial\theta_1}{\partial x}-\frac{\partial\theta_2}{\partial y}=0$$

$$D\left[\Delta\theta_1+\theta\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial x}+\frac{\partial\theta_2}{\partial y}\right)\right]+\frac{4Gh}{1-\nu}\left(\frac{\partial W}{\partial x}-\theta_1\right)=\frac{2h}{1-\nu}X_1 \tag{9}$$

$$D\left[\Delta\theta_2+\theta\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\theta_2}{\partial y}+\frac{\partial\theta_1}{\partial x}\right)\right]+\frac{4Gh}{1-\nu}\left(\frac{\partial W}{\partial y}-\theta_2\right)=0.$$

Аналогичным образом уравнения изгиба по теории (A) приводятся к виду:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}=-\frac{3}{4}\frac{\partial X_1}{\partial x}$$

$$D\frac{\partial}{\partial x}\Delta W-\frac{8h^3}{15}\left[\Delta\varphi_1+\theta\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)\right]+\frac{4h}{3}\varphi_1=$$

$$=\frac{2h^3}{3(1-\nu)}\left(\frac{\partial^2 X_1}{\partial x^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 X_1}{\partial y^2}\right) \tag{10}$$

$$D\frac{\partial}{\partial y}\Delta W-\frac{8h^3}{15}\left[\Delta\varphi_2+\theta\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)\right]+\frac{4h}{3}\varphi_2=\frac{h^3\theta}{3}\frac{\partial^2 X_1}{\partial x\partial y}$$

1. Пусть прямоугольная пластина занимает область $0\le x\le a,\ 0\le y\le b,\ -h\le z\le h$. Параметр приложенной нагрузки задан в виде

$$X_2=\tau_0\sin\lambda_1 y,\ \text{ где }\ \lambda_1=\frac{\pi}{b}. \tag{11}$$

Предполагается, что на кромках пластины $y=0$, $y=b$ имеют место условия Навье по теориям (K), (R) и (A):

$$\frac{\partial V}{\partial y}=0,\quad U=0\ \text{ при }\ y=0,b; \tag{12}$$

а на лицевых поверхностях приложены только касательные нагрузки ( 11).

Решение системы уравнений (6) и (7) по теориям (K), (R) и (A) можно представить в виде

$$U = f(x)\sin\lambda_1 y, \quad V = \varphi(x)\cos\lambda_1 y, \tag{13}$$

которые удовлетворяют граничным условиям (12).

Подстановка (13) в (6) приводит к следующей системе дифференциальных уравнений по теориям (К) и (R):

$$\begin{cases} (1+\theta)f'' - \lambda_1^2 f - \lambda_1\theta\varphi' = \dfrac{2\tau_0}{C(1-\nu)} \\ \varphi'' - (1+\theta)\lambda_1^2\varphi + \theta\lambda_1 f' = 0 \end{cases} \tag{14}$$

по теории (А) подстановка в (7) приводит к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} (1+\theta)f'' - \lambda_1^2 f - \lambda_1\theta\varphi' = \dfrac{\tau_0}{2Gh}\left(\dfrac{h^2\lambda_1^2}{6} - 1\right) \\ \varphi'' - (1+\theta)\lambda_1^2\varphi + \theta\lambda_1 f' = 0 \end{cases}. \tag{15}$$

Решение систем уравнений (14) и (15), соответственно, представим в виде:

$$\begin{aligned} f &= f_0 + f_1 \\ \varphi &= \varphi_0 + \varphi_1 \end{aligned} \quad ,(16)$$

где по теориям (К) и (R):

$$f_1 = \frac{2\tau_0}{(1-\nu)C\lambda_1^2}, \quad \varphi_1 = 0 \tag{17}$$

по теории (А)

$$f_1 = \frac{\tau_0}{2Gh\lambda_1^2}\left(1 - \frac{h^2\lambda_1^2}{6}\right), \quad \varphi_1 = 0 \tag{18}$$

по теориям (К), (R) и (А)

$$\begin{aligned} f_0 &= A_1 e^{\lambda_1 x} + A_2 x e^{\lambda_1 x} + A_3 e^{-\lambda_1 x} + A_4 x e^{-\lambda_1 x}, \\ \varphi_0 &= B_1 e^{\lambda_1 x} + B_2 x e^{\lambda_1 x} + B_3 e^{-\lambda_1 x} + B_4 x e^{-\lambda_1 x}, \end{aligned} \tag{19}$$

откуда произвольные постоянные $B_i$ определяются через постоянные $A_i$ следующим образом:

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1 + \lambda_1^{-1}\gamma A_2, \quad B_2 = A_2, \\ B_3 &= -A_3 + \lambda_1^{-1}\gamma A_4, \quad B_4 = -A_4. \end{aligned} \tag{20}$$

В соотношениях (20) использовано обозначение

$$\gamma = \frac{2+\theta}{\theta} = \frac{3-\nu}{1+\nu}. \tag{21}$$

Рассмотрена задача, где на кромках $x = 0$, $x = a$ заданы условия скользящего контакта.

В данной работе будет исследована задача, на кромках пластины которой имеют место при $x = 0$ жёсткая заделка, а при $x = a$ – условия Навье.

Для пространственной задачи теории упругости условия жёсткой заделки на кромке $x = 0$ имеют вид:

по теориям (К) и (R):

$$U = 0, \; V = 0 \tag{22}$$

По теории (А) граничные условия жёсткой заделки имеют вид:

$$U = -\frac{h}{12G}X_2, \quad V = 0. \tag{23}$$

По теориям (К) и (R) при $x = a$ условия Навье имеют вид:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad V = 0 \tag{24}$$

По теории (А)

$$\frac{\partial U}{\partial x}=-\frac{h}{12G}\frac{\partial X_2}{\partial x},\ V=0. \tag{25}$$

Удовлетворяя решение (13) соответствующим граничным условиям, получим постоянные $A_i$ по теориям (K), (R), (A):

$$
\begin{aligned}
A_1&=\frac{2\tau_0}{(\nu-1)C\lambda_1^{\,2}}\frac{(-\gamma e^{-2\lambda_1 a}+\gamma+2a\lambda_1)}{(\gamma e^{2\lambda_1 a}-\gamma e^{-2\lambda_1 a}+4a\lambda_1)}\\
A_2&=\frac{2\tau_0}{(\nu-1)C\lambda_1}\frac{e^{-2\lambda_1 a}-1}{(\gamma e^{2\lambda_1 a}-\gamma e^{-2\lambda_1 a}+4a\lambda_1)}\\
A_3&=\frac{2\tau_0}{(\nu-1)C\lambda_1^{\,2}}\frac{(\gamma e^{2\lambda_1 a}+\gamma+2a\lambda_1)}{(\gamma e^{2\lambda_1 a}-\gamma e^{-2\lambda_1 a}+4a\lambda_1)}\\
A_4&=\frac{2\tau_0}{(\nu-1)C\lambda_1}\frac{e^{2\lambda_1 a}-1}{(\gamma e^{2\lambda_1 a}-\gamma e^{-2\lambda_1 a}+4a\lambda_1)}
\end{aligned} \tag{26}
$$

выражения для усилий по теориям (K), (R) и (A) будут:

$$
\begin{aligned}
S(0,b)&=-S(0,0)=\frac{\tau_0}{\lambda_1(\gamma e^{2\lambda_1 a}-\gamma e^{-2\lambda_1 a}+4a\lambda_1)}(4(\gamma+2a\lambda_1)+(1+\gamma)(e^{-2\lambda_1 a}-e^{2\lambda_1 a}))\\
S(a,b)&=-S(a,0)=\frac{2\tau_0}{\lambda_1(\gamma e^{2\lambda_1 a}-\gamma e^{-2\lambda_1 a}+4a\lambda_1)}\left(\left(2a\lambda_1-1\right)e^{\lambda_1 a}+(2\gamma+2a\lambda_1+1)e^{-\lambda_1 a}\right)
\end{aligned} \tag{27}
$$

Отметим, что аналогичные задачи напряжённо-деформированного состояния пластины при других граничных условиях под действием касательных нагрузок рассмотрены в статьях [4], [5], [6].

## REFERENCE


1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1963. 635 с.
2. Васильев В.В. Классическая теория пластин - история и современный анализ. //МТТ. 1998. №3. С.47-58.
3. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360 с.
4. Белубекян М.В. Об уравнениях теории пластин, учитывающих поперечные сдвиги. //В сб.: «Проблемы механики тонких деформируемых тел» Ереван: Изд. «Гитутюн» НАН РА. 2002. С.67-88.
5. Киракосян Р.М. Влияние распределения касательных напряжений по толщине пластинки при наличии касательных поверхностных нагрузок.//Докл. НАН Армении. 2006. Т.106. №4. С.304-311.
6. Белубекян М.В., Мартиросян К.Л. К задаче изгиба пластинки по форме цилиндрической поверхности при наличии касательных нагрузок на лицевых поверхностях. //Изв. НАН Армении. Механика. 2007. Т.60. №2. С.41-46.



**Сведения об авторе:**

**Мартиросян Кристина Левоновна –** к.ф.-м.н., нучный сотр. Института механики НАН РА, **e-mail:** Kristine.martirosyan@gmail.com

# О ЗАДАЧЕ СВЕРХЗВУКОВОЙ ДИВЕРГЕНЦИИ СЖАТОЙ ПАНЕЛИ С ОДНИМ СВОБОДНЫМ И ЗАЩЕМЛЕННЫМ КРАЯМИ

**Мартиросян С.Р.**

В статье исследуется влияние первоначального напряжённого состояния на потерю статической устойчивости невозмущённого состояния равновесия сжатой прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающего на её свободный край, в предположении, что сжимающие силы направлены перпендикулярно к скорости потока газа.

Получено аналитическое решение задачи устойчивости системы «пластинка-поток» в линейной постановке. Установлена зависимость, связывающая характеристики собственных колебаний пластинки со скоростью обтекающего её потока газа, позволяющая в пространстве «существенных» параметров системы выделить области устойчивости и неустойчивости: области дивергенции панели и локализованной дивергенции.

**1**. Рассматривается тонкая упругая прямоугольная пластинка, занимающая в декартовой системе координат $Oxyz$ область $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $-h \le z \le h$. Декартова система координат $Oxyz$ выбирается так, что оси $Ox$ и $Oy$ лежат в плоскости невозмущённой пластинки, а ось $Oz$ перпендикулярна к пластинке и направлена в сторону сверхзвукового потока газа, обтекающего пластинку с одной стороны в направлении оси $Ox$ с невозмущённой скоростью $V$. Течение газа будем считать плоским и потенциальным.

Пусть край $x = 0$ пластинки свободен, край $x = a$ жёстко защемлён, а параллельные потенциальному потоку газа края $y = 0$ и $y = b$ шарнирно закреплены. При этом полагаем, что шарниры идеальны.

Пластинка подвержена действию сжимающих сил $N_y = 2h\sigma_y$ в срединной плоскости панели, являющимися результатом нагрева или каких-либо других причин; сжимающие усилия $\sigma_y$ можно считать равномерно распределёнными по ширине пластинки $a$ (сторона пластинки по потоку), постоянными во всей срединной поверхности и не меняющимися с изменением прогиба пластинки $w = w(x, y)$ [1].

Прогиб пластинки $w = w(x, y)$ вызовет избыточное давление $\Delta p$ на верхнюю обтекаемую поверхность пластинки со стороны одностороннего обтекающего потока газа, которое учитывается приближённой формулой «поршневой теории» [1,2]: $\Delta p = -a_0 \rho_0 V \dfrac{\partial w}{\partial x}$, $a_0$ – скорость звука в невозмущённой газовой среде, $\rho_0$ – плотность невозмущённого потока газа.

Будем полагать, что прогибы пластинки $w = w(x, y)$ малы относительно толщины пластинки $2h$.

Выясним условия, при которых наряду с невозмущённой формой равновесия (неизогнутая пластинка) возможна смежная с ней искривлённая форма равновесия, которая сопровождается резким монотонным выпучиванием пластинки (дивергенция панели), либо выпучиванием малой окрестности свободного края пластинки (локализованная дивергенция), в случае, в котором изгиб пластинки обусловлен одновременно соответствующими аэродинамическими нагрузками $\Delta p$ и сжимающими силами $N_y$ в срединной поверхности панели в предположении, что усилия $\sigma_y$ малы по сравнению с критическими $(\sigma_y)_{cr.}$, которые могут произвести выпучивание пластинки при отсутствии обтекания.

В предположении справедливости гипотезы Кирхгофа и «поршневой теории» дифференциальное уравнение изгиба тонкой изотропной прямоугольной пластинки, сжатой в направлении перпендикулярном к потоку газа, описывается соотношением [1, 3]:

$$D\Delta^2 w + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + a_0 \rho_0 V \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \qquad (1.1)$$

$\Delta^2 w = \Delta(\Delta w)$, $\Delta w$ – оператор Лапласа; $D$ – цилиндрическая жёсткость.

Граничные условия в принятых предположениях относительно способа закрепления краёв пластинки имеют вид [1, 3]:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0\,,\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+(2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=0 \text{ при } x=0\,; \tag{1.2}$$

$$w=0\,,\ \frac{\partial w}{\partial x}=0 \quad \text{при } x=a\,; \tag{1.3}$$

$$w=0\,,\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0 \text{ при } y=0\,,\ y=b\,; \tag{1.4}$$

$\nu$ – коэффициент Пуассона.

Требуется найти наименьшую скорость потока газа – критическую скорость $V_{cr}$, приводящую к потере статической устойчивости невозмущённого состояния равновесия обтекаемой прямоугольной пластинки, подверженной действию сжимающих сил $N_y$ в срединной поверхности панели, в предположении, что усилия $\sigma_y$ малы по сравнению с критическими $(\sigma_y)_{cr.}$, которые могут произвести выпучивание пластинки при отсутствии обтекания. Иными словами, анализ устойчивости плоской формы равновесия обтекаемой прямоугольной пластинки, сжатой усилиями $\sigma_y < (\sigma_y)_{cr.}$, сводится к нахождению минимального значения скорости потока газа $V$, при котором краевая задача (1.1)–(1.4) имеет решения, отличные от тривиального, соответствующие разветвлению форм равновесия.

**2.** Для получения достаточных признаков статической неустойчивости системы «пластинка –поток» общее решение дифференциального уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2) – (1.4), будем искать в виде двойного ряда

$$w(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{4}C_{nk}\exp(\mu_n r_k x)\cdot\sin(\mu_n y)\,,\ \mu_n=\pi n b^{-1}\,, \tag{2.1}$$

$C_{nk}$ – произвольные постоянные; $n$ – число полуволн вдоль стороны $b$ пластинки; $r_k$ – корни характеристического уравнения

$$r^4-2\cdot r^2+\alpha_n^3\cdot r+(1-\beta_y^2)=0\,,\ \alpha_n^3=a_0\rho_0 V D^{-1}\mu_n^{-3}\,,\ \beta_y^2=2h\sigma_y D^{-1}\mu_n^{-2}\,,\ \alpha_n^3>0\,,\ \beta_y^2>0\,, \tag{2.2}$$

которое в соответствии с алгоритмом решения Феррари можно представить в виде [4]

$$\left(r^2+\sqrt{2(q+1)}\cdot r+q-\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}\right)\cdot\left(r^2-\sqrt{2(q+1)}\cdot r+q+\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}\right)=0\,, \tag{2.3}$$

где $q$ – параметр скорости потока газа, $V$ – действительный корень кубического уравнения:

$$8\cdot(q+1)(q^2-1+\beta_y^2)-\alpha_n^6=0\,, \tag{2.4}$$

$$q\in\left(\left(-1+2\sqrt{(4-3\beta_y^2}\right)\Big/3\,,\infty\right) \text{ при всех } \beta_y^2\le 4/3 \text{ и } q\in(1,\infty) \text{ при всех } \beta_y^2>4/3\,; \tag{2.5}$$

$\alpha_n^3$ и $\beta_y^2$ – параметры, характеризующие, соответственно, неконсервативную и консервативную составляющие нагрузки.

Как показано в работе [4], в интервале (2.5) значений параметра $q$ характеристическое уравнение (2.2) имеет два действительных корня $r_1$, $r_2$ и пару комплексно-сопряжённых корней $r_{3,4}$ с положительной вещественной частью, которые легко находятся, будучи решением квадратных уравнений – сомножителей уравнения (2.3):

$$r_{1,2}=-0.5\sqrt{2(q+1)}\pm\sqrt{\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}-0.5(q-1)}\,, \tag{2.6}$$

$$r_{3,4}=0.5\sqrt{2(q+1)}\pm i\sqrt{\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}+0.5(q-1)}\,. \tag{2.7}$$

Справедливы следующие соотношения [4]:

$$r_1<0\,,\ r_2<0 \text{ в случае, когда } \beta_y^2\in[0,1) \text{ и } q\in\left((-1+2\sqrt{4-3\beta_y^2})/3\,,\infty\right); \tag{2.8}$$

$r_1 < 0$, $r_2 > 0$, когда $\beta_y^2 \in (1, 4/3]$, $q \in \left((-1+2\sqrt{4-3\beta_y^2})/3, \infty\right)$ и $\beta_y^2 \in (4/3, \infty)$, $q \in (1, \infty)$;

$r_1 < 0$, $r_2 = 0$, когда $\beta_y^2 = 1$ и $q \in (1/3, \infty)$.

Корни $\tilde{r}_k$ характеристического уравнения $\tilde{r}^4 - 2\cdot\tilde{r}^2 + (1-\beta_y^2) = 0$, соответствующего краевой задаче (1.1)–(1.4) при отсутствии обтекания ($V = 0$), имеют вид [1,4]:

$$\tilde{r}_1 = -\sqrt{1+\sqrt{\beta_y^2}},\ \tilde{r}_2 = -\sqrt{1-\sqrt{\beta_y^2}},\ \tilde{r}_3 = \sqrt{1-\sqrt{\beta_y^2}},\ \tilde{r}_4 = \sqrt{1+\sqrt{\beta_y^2}},\ \beta_y^2 < 1; \tag{2.9}$$

$$\tilde{r}_1 = -\sqrt{2},\ \tilde{r}_{2,3} = 0,\ \tilde{r}_4 = \sqrt{2},\ \beta_y^2 = 1;\ \tilde{r}_1 = -\sqrt{1+\sqrt{\beta_y^2}},\ \tilde{r}_{2,3} = \pm i\sqrt{\sqrt{\beta_y^2}-1},\ \tilde{r}_4 = \sqrt{1+\sqrt{\beta_y^2}},\ \beta_y^2 > 1.$$

В силу необходимого условия потери устойчивости в виде локализованной неустойчивости [4]: $\operatorname{Re} r_1 < 0$ и $\operatorname{Re} r_2 < 0$, из выражений (2.8) и (2.9) следует, что невозмущённое состояние равновесия достаточно широких прямоугольных пластин $(\gamma \gg 1)$ может потерять статическую устойчивость в виде локализованной неустойчивости в окрестности свободного края $x = 0$ пластинки только лишь при значениях $\beta_y^2 < 1$; $\gamma = ab^{-1}$ – отношение ширины пластинки $a$ (сторона пластинки по потоку) к её длине $b$.

Тогда, общее решение (2.1), удовлетворяющее необходимому условию локализованной неустойчивости, в силу условия затухания колебаний на крае $x = a$ пластинки, при котором $C_{n3} = C_{n4} = 0$, представится в виде [4]:

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_{n1}\exp(\mu_n r_1 x) + \mathrm{C}_{n2}\exp(\mu_n r_2 x)\right)\cdot\sin(\mu_n y). \tag{2.10}$$

Из соотношения (2.4), в соответствии с обозначением (2.2), получаем явный вид выражения зависимости скорости потока газа $V$ от существенных параметров системы «пластинка–поток»:

$$V(q, n, \gamma, \beta_y^2) = 2\sqrt{2(q+1)\cdot(q^2 - 1 + \beta_y^2)}\cdot\pi^3 n^3\gamma^3 D(a_0\rho_0 a^3)^{-1} \tag{2.11}$$

для прямоугольных пластинок умеренных размеров и достаточно длинных ($\gamma \ll 1$) и

$$V(q, n, \beta_y^2) = 2\sqrt{2(q+1)\cdot(q^2 - 1 + \beta_y^2)}\cdot\pi^3 n^3 D(a_0\rho_0 b^3)^{-1} \tag{2.12}$$

для достаточно широких пластин ($\gamma \gg 1$).

Подставляя общее решение дифференциального уравнения (1.1), соответственно, в виде (2.1) и (2.10), в котором корни $r_k$ характеристического уравнения (2.2) определяются выражениями (2.6) и (2.7), в граничные условия (1.2) и (1.3), получаем две системы однородных алгебраических уравнений, соответственно, четвёртого и второго порядка относительно произвольных постоянных $C_{nk}$. Приравненный нулю определитель каждой из этих систем уравнений – характеристический определитель приводит, соответственно, к дисперсионному уравнению дивергенции панели

$$F_{div.paneli} = F_{div.paneli}(q, n, \gamma, \nu, \beta_y^2) = 0; \tag{2.13}$$

и к дисперсионному уравнению локализованной дивергенции в окрестности свободного края

$$F_{loc.div.} = F_{loc.div.}(q, n, \nu, \beta_y^2) = 0. \tag{2.14}$$

Гиперповерхность (2.13) разграничивает в пространстве $\{q, n, \gamma, \nu, \beta_y^2\}$ «существенных» параметров системы «пластинка – поток» область устойчивости и область дивергенции панели, а гиперповерхность (2.14) – область устойчивости и область локализованной дивергенции. При этом для всех $n$ справедливо условие:

$$\lim_{\gamma\to\gamma_*}(F(q, n, \gamma, \nu, \beta_y^2)) = F_{locdiv}(q, \nu, \beta_y^2) \text{ при } \beta_y^2 < 1; \tag{2.15}$$

$\gamma_* = \gamma_*(\nu, \beta_y^2)$ – граничное значение параметра $\gamma$, разграничивающее области дивергенции панели и локализованной дивергенции.

Аналогичным путём получены описания дисперсионных уравнений в отсутствии обтекания – уравнений неустойчивости панели $\Delta_k = \Delta_k\left(n, \gamma, \nu, \beta_y^2\right) = 0$ при $\beta_y^2 < 1$, $\beta_y^2 = 1$, $\beta_y^2 > 1$ и уравнения локализованной неустойчивости $\Delta_{loc.inst.} = \Delta_{loc.inst.}(\nu, \beta_y^2) = 0$, когда $\beta_y^2 < 1$.

Описания дисперсионных уравнений в данном тексте не приведены в силу их громоздкости и ограниченности объёма статьи.

**3**. С помощью численных методов исследования уравнений $\Delta_k = \Delta_k\left(n, \gamma, \nu, \beta_y^2\right) = 0$, $\Delta_{loc.inst.} = 0$ и уравнений (2.13), (2.14) найдены: критические значения коэффициента напряжения $(\beta_y^2)_{cr.} = \beta_y^2\left(n, \nu, \gamma\right)$; значения критических скоростей дивергенции панели $V_{cr.div} = V_{cr.div}(n, \gamma, \nu, \beta_y^2)$ и локализованной дивергенции $V_{loc.div} = V_{loc.div}(n, \nu, \beta_x^2)$, полученные, соответственно, подстановкой первых корней $q_{cr.div.}^{(1)} = q_{cr.div}^{(1)}(n, \gamma, \nu, \beta_y^2)$ уравнения (2.13) в выражение (2.11) и решения $q_{locdiv} = q_{locdiv}(\nu, \beta_y^2)$ уравнения (2.14) в выражение (2.12); а также, из условия (2.15) найдена граница $\gamma_* = \gamma_*\left(\nu, \beta_y^2\right)$ перехода из области дивергенции панели в область локализованной дивергенции.

Полученные численные результаты показали следующее.

Приведённая критическая скорость дивергенции панели $V_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$, зависящая от параметров $\gamma$, $\beta_y^2$ и $\nu$, возрастает с ростом $\gamma$ на интервале $(0.2, 2)$ примерно на два порядка при фиксированных значениях параметров $\beta_y^2$ и $\nu$, падает в примерно $1.2 - 3.8$ раза с ростом $\beta_y^2 \in [0, 5)$ при фиксированных значениях $\gamma$ ,$\nu$ и меньше в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона $\nu$. Наиболее ярко эффект дестабилизации проявляется при значениях $\gamma \in (0.8, 2)$ и $\beta_y^2 \in (0.95, 1)$, при которых обтекание приводит к «скачкообразному» увеличению коэффициента напряжения до значений, больших критического значения. Вследствие этого происходит «мгновенная» потеря устойчивости плоской формы равновесия прямоугольной пластинки в виде дивергенции панели. Это свидетельствует о существенной дестабилизации равновесного состояния сжатой прямоугольной пластинки умеренных размеров при обтекании, в сравнении с пластинкой с ненагруженными краями [6].

Приведённая критическая скорость локализованной дивергенции $V_{loc.div.} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$, зависящая от параметров $\beta_y^2$ и $\nu$, уменьшается примерно в 4 – 5 раз с ростом коэффициента напряжения $\beta_y^2$ в интервале $\left(0, 0.95\right)$ и меньше в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона $\nu$. Критические значения коэффициента напряжения $(\beta_y^2)_{locinst}$, найденные в отсутствии обтекания оказываются больше примерно на 14%, чем критические значения коэффициента напряжения, найдённых при обтекании. Иными словами, в случае достаточно широких пластин при обтекании происходит занижение порога критического значения коэффициента напряжения сжатия, примерно, на 14%. Отсюда следует, что первоначальное напряжённое состояние приводит к существенной дестабилизации равновесного состояния обтекаемой сжатой достаточно широкой пластинки.

Несмотря на то, что граничное значение $\gamma = \gamma_*$, разграничивающее области дивергенции панели и локализованной дивергенции, является функцией от параметров $\nu$ и $\beta_y^2$ , однако, как показали результаты численных исследований, зависимость $\gamma_*$ от коэффициента Пуассона $\nu$ является несущественной, в отличие от зависимости $\gamma_*$ от коэффициента напряжения $\beta_y^2$. С увеличением коэффициента напряжения $\beta_y^2 \in [0, 0.95)$ граничное значение $\gamma_*$ растёт от 2 до 3, что указывает на смещении границы между областями неустойчивости в сторону области локализованной дивергенции, приводящее, очевидно, к расширению области дивергенции панели и, соответственно, к значительному сужению области локализованной дивергенции.

Это также указывает на существенную дестабилизацию плоской формы равновесия обтекаемой пластинки при больших значениях коэффициента напряжения $\beta_y^2$, характеризующего первоначальное напряжённое состояние пластинки.

В случае достаточно длинных пластин первоначальное напряжённое состояние оказывает незначительное влияние на поведение системы «пластинка–поток», критическая скорость достаточно длинных пластин примерно равна критической скорости дивергенции бесконечно удлинённой консольной пластинки $V_{cr.div} = 6.33D(a_0\rho_0 a^3)^{-1}$, полученной в работе [5].

Оценка полученных численных результатов, применительно к допустимому интервалу сверхзвуковых и гиперзвуковых скоростей [1] показала, что с ростом параметра относительной толщины пластинки, невозмущённое состояние равновесия сжатых прямоугольных пластин умеренных размеров и достаточно широких становится существенно устойчивым при фиксированных значениях остальных параметров системы.

Таким образом, первоначальное напряжённое состояние, обусловленное сжимающими силами, направленными перпендикулярно к потоку газа, приводит, в целом, к существенной дестабилизации плоской формы равновесия обтекаемых прямоугольных пластинок – к «скачкообразному» падению значений критических скоростей дивергенции панели и локализованной дивергенции, в сравнении с соответствующими значениями критических скоростей дивергенции и локализованной дивергенции обтекаемой панели с ненагруженными краями [6].

### ЛИТЕРАТУРА


1. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. М.: Физматгиз, 1963. 880 с.
2. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях // ПММ. 1956. Т. 20. № 6. С.733–755.
3. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Наука, 1961. 329 с.
4. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О сверхзвуковой дивергенции панели, сжатой по направлению потока газа, набегающим на её свободный край // Изв. НАН Армении. Механика. 2018. Т.71. № 4. С.44-68.
5. Мовчан А.А. О колебаниях пластинки, движущейся в газе // ПММ. 1956. Т. 20. № 2.
6. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О флаттере упругой прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край. // Изв. НАН Армении. Механика. 2014. Т.67. № 2. С.14 - 44.


**Сведения об авторе:**


**Мартиросян Стелла Размиковна** – кандидат физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения (+374 10) 524890

**E-mail:** mechinsstella@mail.ru

# ЗАДАЧА О КОНТАКТНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ ПОЛОСЫ С ПОЛУПЛОСКОСТЬЮ С УЧЁТОМ НЕОДНОРОДНОГО СТАРЕНИЯ

**Мирзоян Е.С., Мирзоян С.Е., Давтян З.А.**

Задача о построении функций влияния для кусочно-неоднородной наследственно-стареющей полуплоскости рассмотрена в статье [1]. В данной работе рассматривается контактная задача для составной полуплоскости в постановке теории ползучести неоднородно наследственно-стареющих сред [2,3], когда на линии контакта между полосой и полуплоскостью действуют только нормальные контактные напряжения $P(x,t)$. Принимается, что полоса толщины $h$ и полуплоскость изготовлены из разных материалов в разные моменты времени, вследствие чего имеют разные возрасты. Пусть далее такая составная полуплоскость на своей границе в момент $t=\tau_0$ загружается вертикальной силой произвольной интенсивности $P_0(x,t)$. Требуется определить нормальные контактные напряжения $P(x,t)$ на линии соединения полосы с полуплоскостью, а также другие механические характеристики задачи, связанные, в частности, с разновозрастностью контактирующих тел.

Для решения поставленной задачи рассмотрим соответствующие упруго-мгновенные задачи для полосы и полуплоскости в отдельности. Все величины, относящиеся к полосе, отметим индексом 1, а к полуплоскости – индексом 2.

С помощью преобразования Фурье по координате $x$ для трансформантов Фурье упруго-мгновенных вертикальных перемещений точек границы полосы и полуплоскости имеем следующие выражения [4,5]:

$$\begin{aligned}
&\bar{v}_1(s,0,t)=\frac{2(1-\nu_1^2)}{E_1(t)|s|}\frac{\mathrm{sh}k\mathrm{ch}k+k}{\mathrm{sh}^2k-k^2}\bar{P}(s,t)-\frac{2(1-\nu_1^2)}{E_1(t)|s|}\frac{k\mathrm{ch}k+\mathrm{sh}k}{\mathrm{sh}^2k-k^2}\bar{P}_0(s,t),\\
&\bar{v}_2(s,0,t)=-\frac{2(1-\nu_2^2)}{E_2(t)|s|}\bar{P}(s,t),\quad k=|s|h,
\end{aligned}\tag{1}$$

где $\bar{P}(s,t),\bar{P}_0(s,t),\bar{v}_1(s,0,t),\bar{v}_2(s,0,t)$ – трансформанты Фурье, соответственно, напряжения для $P(x,t),P_0(x,t)$ и перемещений $v_1(s,0,t),v_2(s,0,t)$, $k=|s|h$, $s$ – параметр преобразования Фурье, $v_1(x,0,t)$ и $v_2(x,0,t)$ – вертикальные перемещения для полосы и полуплоскости, соответственно. Условие контакта имеет вид с учётом ползучести

$$(I-L_1)v_1(x,0,t)=(I-L_2)v_2(x,0,t)\tag{2}$$

Здесь $I$ – единичный оператор, $L_i$ $(i=1,2)$ – операторы ползучести

$$L_i\left[Y(t)\right]=\int_{\tau_0}^{t}E_i^*(t)K_i^*(t,\tau)Y(\tau)d\tau,\ \ K_i^*(t,\tau)=K_i(t+\rho_i,\tau+\rho_i),\ E_i^*(t)=E_i(t+\rho_i)$$

$$\rho_i=\tau_i-\tau_0,\ K_i(t,\tau)=\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{E_i(\tau)}+C_i(t,\tau)\right]\ \ (i=1,2),$$

где $\tau_i$ – возраст, $C_i(t,\tau)$ – меры ползучести полосы и полуплоскости, соответственно $(i=1,2)$.

Применяя преобразование Фурье по координате $x$ к условию контакта (2) и подставляя туда значения $\bar{v}_i(s,0,t)$ $(i=1,2)$, после некоторых преобразований для определения $\bar{P}(s,t)$ получим следующее линейное интегральное уравнение Вольтерра второго рода:

$$\bar{P}(s,t)-\int_{\tau_0}^{t}K^*(t,\tau,s)\bar{P}(s,\tau)d\tau = f(s,t) \tag{3}$$

Здесь

$$K^*(t,\tau,s)=\frac{(1-\nu_1^2)f_1(s)K_1^*(t,\tau)+(1-\nu_2^2)K_2^*(t,\tau)}{\frac{1-\nu_1^2}{E_1^*(t)}f_1(s)+\frac{1-\nu_2^2}{E_2^*(t)}}$$

$$f(s,t)=(1-\nu_1^2)f_2(s)(I-L_1)\frac{\bar{P}_0(s,t)}{E_1^*(t)}\Bigg/\left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1^*(t)}f_1(s)+\frac{1-\nu_2^2}{E_2^*(t)}\right)$$

$$f_1(s)=\frac{\mathrm{sh}k\mathrm{ch}k+k}{\mathrm{sh}^2k-k^2},\quad f_2(s)=\frac{k\mathrm{ch}k+\mathrm{sh}k}{\mathrm{sh}^2k-k^2},\ k=|s|h$$

Отметим, что при $t=\tau_0$ из (3) получим:

$$\bar{P}_0(s,t)=\frac{\left(k\mathrm{ch}k+\mathrm{sh}k\right)\bar{P}_0(s,\tau_0)}{\frac{1-\nu_2^2}{1-\nu_1^2}\frac{E_1(\tau_0)}{E_2(\tau_0)}(\mathrm{sh}^2k-k^2)+\mathrm{sh}k\mathrm{ch}k+k} \tag{4}$$

т.е. получается решение соответствующей упруго-мгновенной задачи, рассмотренной в [4].

Отметим также, что после определения $\bar{P}(s,t)$ уравнения (3) с помощью (1) и обратного преобразования Фурье определим вертикальные перемещения $v_i(x,0,t)$ $(i=1,2)$ на линии контакта с учётом неоднородного старения. Далее при помощи обратного преобразования Фурье можем определить контактное нормальное напряжение $P(x,t)$ и перемещения на линии контакта.

Для решения интегрального уравнения Вольтерра второго рода относительно образа Фурье нормального контактного давления $\bar{P}(s,t)$ меры ползучести полосы и полуплоскости $C_i(t,\tau)$ $(i=1,2)$ примем в виде [2]:

$$C_i(t,\tau)=\varphi_i(\tau)\left[1-e^{-\gamma(t-\tau)}\right],\ \varphi_i(\tau)=\frac{A_i}{\tau}+C_i\quad(i=1,2), \tag{5}$$

где $\varphi_i(\tau)$ $(i=1,2)$ – функции старения материалов полосы и полуплоскости, соответственно.

Отметим, что ядро $K^*(t,\tau,s)$ является вырожденным, и поэтому интегральное уравнение Вольтерра второго рода (3) можно заменить дифференциальным уравнением второго порядка с переменными коффициентами [2,6].

После двухкратного дифференцирования уравнения (3) по $t$, после некоторых преобразований получим дифференциальное уравнение второго порядка при определённых начальных условиях, решение которого можем представить в виде [2,7,8]:

$$\begin{gathered}\bar{P}(s,t)=\bar{P}(s,\tau_0)+\bar{P}'(s,\tau_0)\int_{\tau_0}^{t}e^{-\eta(s,\tau)}d\tau+\int_{\tau_0}^{t}e^{-\eta(s,\tau)}d\tau\int_{\tau_0}^{\tau}e^{\eta(s,z)}F(s,z)dz,\\ \eta(s,t)=\int_{\tau_0}^{t}M_0(s,\tau)d\tau,\end{gathered} \tag{6}$$

где

$$M_0(s,t)=\left\{M'(s,t)+\gamma\left[M(s,t)+M_1(s)\varphi_1^*(t)+M_2(s)\varphi_2^*(t)\right]\right\}\Big/M(s,t)$$

$$M(s,t)=\frac{M_1(s)}{E_1^*(t)}+\frac{M_2(s)}{E_2^*(t)},\ M_1(s)=(1-\nu_1^2)f_1(s),\ M_2(s)=1-\nu_2^2$$

$$F(s,t)=\left[f''(s,t)+\gamma f'(s,t)\right]\big/M(s,t).$$

Отметим, что все производные берутся по времени $t$.

Окончательно при помощи обратного преобразования Фурье определим контактное напряжение:

$$P(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{P}(s,t)e^{-isx}ds. \tag{7}$$

Рассмотрим частный вид внешней нагрузки:

$P_0(x,t)=P(x)H(t-\tau_0)$, $H(t)-$ функция Хевисайда, т.е. в момент времени $t=\tau_0$ приложена нагрузка $P(x)$, которая во времени остаётся постоянной.

При указанной нагрузке, после некоторых преобразований из (6) получим:

$$\bar{P}(s,t)=\frac{2(1-\nu_1^2)f_2(s)\bar{P}_0(s)}{E_1M(s,\tau_0)}\left[1+\gamma\frac{a_0(\tau_0)M_2(s)}{E_2M(s,\tau_0)}\int_{\tau_0}^{t}e^{-\eta(s,\tau)}d\tau\right] \tag{8}$$

$$a_0(\tau_0)=E_1\varphi_1^*(\tau_0)-E_2\varphi_2^*(\tau_0)$$

Из решения (8) при $t=\tau_0$ получим:

$$\bar{P}(s,t)=\frac{\left(k\,\mathrm{ch}k+\mathrm{sh}k\right)\bar{P}_0(s)}{\dfrac{1-\nu_2^2}{1-\nu_1^2}\dfrac{E_1^*(\tau_0)}{E_2^*(\tau_0)}(\mathrm{sh}^2k-k^2)+\mathrm{sh}k\,\mathrm{ch}k+k}, \tag{9}$$

которое совпадает с решением упруго-мгновенной задачи [4].

В частности, когда полуплоскость жёсткая $(E_2\to\infty)$ $f=\dfrac{1-\nu_2^2}{1-\nu_1^2}\dfrac{E_1(\tau_1)}{E_2(\tau_2)}=0$, а когда материалы полосы и полуплоскости одинаковые, то $f=1$.

Отметим также, что из решения (8) при условии $E_1\varphi_1(\tau_1)=E_2\varphi_2(\tau_2)$, т.е. когда деформации ползучести и их упруго-мгновенные деформации пропорциональны, контактные напряжения совпадают с соответствующими упруго-мгновенными контактными напряжениями.

Примем теперь $E_i^*(t)=E_i=\mathrm{const}$ $(i=1,2)$. Тогда из формулы (8) получим:

$$\begin{gathered}\bar{P}(s,t)=\frac{f_2(s)\bar{P}_0(s)}{f_1(s)+f}\left[1+\gamma\frac{a_0(\tau_0)}{1+f_1(s)/f}\int_{\tau_0}^{t}e^{-\eta(s,\tau)}d\tau\right]\\ \eta(s,\tau)=\int_{\tau_0}^{t}M_0(s,\tau)d\tau=\gamma\int_{\tau_0}^{t}\left[1+\frac{M_1(s)\varphi_1^*(\tau)-M_2(s)\varphi_2^*(\tau)}{M(s,\tau)}\right]d\tau\end{gathered} \tag{10}$$

Теперь при помощи обратного преобразования Фурье определим неизвестные контактные напряжения в виде

$$\begin{gathered}P(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_2(s)}{f_1(s)+f}\left[1+\gamma\frac{a_0(\tau_0)f}{f+f_1(s)}\int_{\tau_0}^{t}e^{-\eta(s,\tau)}d\tau\right]\bar{P}_0(s)e^{-isx}ds\\ a_0(\tau_0)=E_1\varphi_1^*(\tau_0)-E_2\varphi_2^*(\tau_0),\ f=(1-\nu_2^2)E_1^*(\tau_0)\big/(1-\nu_1^2)E_2^*(\tau_0)\end{gathered} \tag{11}$$

Предположим, что $P_0(x)=P_0\delta(x)$, где $\delta(x)-$ дельта-функция Дирака. Тогда, из формулы (11) для контактных напряжений получим:

$$P(x,t)=\frac{P_0}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{f_2(s)}{f_1(s)+f}\left[1+\gamma\frac{a_0(\tau_0)f}{f+f_1(s)}\int_{\tau_0}^{t}e^{-\eta(s,\tau)}d\tau\right]\cos sxds, \tag{12}$$

$a_0(\tau_0)=E_1\varphi_1(\tau_1)-E_2\varphi_2(\tau_2)$.

Из формулы (12) видно, что контактные напряжения существенно зависят как от величины нагрузки, так и от возрастов и функций старения контактирующих тел.

В частности, из формулы (12) следует, что при условии $E_1\varphi_1(\tau_1)\succ E_2\varphi_2(\tau_2)$, контактные напряжения во времени возрастают, а при условии $E_1\varphi_1(\tau_1)\prec E_2\varphi_2(\tau_2)$, наоборот, убывают во времени.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Мирзоян С.Е. О построении функций влияния для кусочно-неоднородной наследственно-стареющей полуплоскости. //ДАН Арм. ССР. 1977. Т.64. №1. С.30-37.
2. Арутюнян Н.Х., Колмановский В.Б. Теория ползучести неоднородных сред. М.: Наука, 1983. 336с.
3. Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В. Контактные задачи теории ползучести. Ереван: 1999. 320с.
4. Bufler H Der Spannungszustand in einer geschichteten Seibe. //ZAMM. 1961. Bd.41. H.4. p.158-180.
5. Ворович И.И., Александров В.М., Бабенко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455с.
6. Трикоми Т. Интегральные уравнения. – М.: ИЛ, 1960. 299с.
7. Мирзоян С.Е., Мхитарян С.М. О некоторых задачах контактного взаимодействия между бесконечными стрингерами и полосами с учётом неоднородности старения материалов. //Изв. АН АрмССР. Механика. 198. Т.34. №5. С.27-40.
8. Давтян З.А., Мхитарян С.М. О двух контактных задачах кручения цилиндров при помощи цилиндрических оболочек с учётом их вязкоупругих свойств. //Изв. АН АрмССР. Механика. 1984. №3. С.3-17.


**<u>Сведения об авторах:</u>**


**Мирзоян Езник С.** – кандидат физ-мат. наук, доцент ЕГУ, 0025, Ереван, ул. Алека Манукяна 1.
**Тел.:** (+37410) 551334, **E-mail:** mirzoyan@ysu.am

**Мирзоян Саак Е**.– кандидат физ-мат. наук, ст. научн. сотр. Института механики НАН РА
0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2. **Тел.:** (+37410) 524890, **E-mail:** mechins@sci.am

**Давтян Завен А.** – кандидат физ-мат. наук, ст. научн. сотр. Института механики НАН РА
**Адрес:** 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2.
**Тел.:** (+37410) 524890, **E-mail:** mechins@sci.am

# МОДЕЛИРОВАНИЕ КРУЧЕНИЯ ПРИ ПОВЕРХНОСТНОМ РОСТЕ ФУНКЦИОНАЛЬНО ГРАДИЕНТНОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПРИЗМЫ

**Михин М.Н., Мурашкин Е.В.**

В работе рассматривается задача о кручении растущего вязкоупругого призматического стержня с интегральными краевыми условиями на торцах. Изучается процесс непрерывного наращивания под действием крутящего момента. Исследуется распределение интенсивности касательных напряжений на различных стадиях процесса наращивания. Приводятся расчёты задачи кручения призматического стержня с сечением в форме правильного треугольника.

Традиционные методы изготовления изделий сложной формы подразумевают разнообразные технологические процессы обработки, как связанные со снятием материала, так и основанные на синтезе изделий путём последовательного нанесения материала на поверхность произвольной формы. (см., напр., [1 –10]).

Фундаментальными вопросами поверхностного роста занимается механика аддитивных технологий и процессов роста (см., напр., [10–17]).

Рассмотрим однородное вязкоупругое стареющее тело, изготовленное в нулевой момент времени, занимающее некоторую цилиндрическую область $\Pi_1$ с поперечным сечением $\Omega_1$, имеющим границу $L_1$. В момент приложения нагрузки $\tau_0$ к торцам цилиндрического тела прикладываются усилия, статически эквивалентные паре с моментом $M(t)$. Боковая поверхность тела $\Pi_1$ свободна от напряжений.

В момент времени $\tau_1 \geq \tau_0$ начинается непрерывное наращивание тела путём присоединения к нему элементов, изготовленных одновременно с ним. При этом, новые приращиваемые элементы не напряжены. Обозначим через $L(t)$ границу поперечного сечения $\Omega(t)$, которая изменяется с течением времени, при этом, $L(\tau_1) = L_1$ и $\Omega(\tau_1) = \Omega_1$. Граница $L(t)$ сечения $\Omega(t)$ состоит из двух участков $L(t) = L^*(t) \cup L_\sigma(t)$, где граница роста, к которой в рассматриваемый момент времени осуществляется приток материала, при этом $L^*(t) = L^*$ при $\tau \leq \tau_1$, $L_\sigma(t)$ – граница, свободная от напряжений.

Будем считать, что момент приложения нагрузки к приращиваемым элементам $\tau_0 = \tau_0(x_1, x_2)$ совпадает с моментом их присоединения к растущему телу $\tau^* = \tau^*(x_1, x_2)$.

В момент $\tau_2 \geq \tau_1$ наращивание тела прекращается, и с этого момента оно занимает область $\Pi_2 = \Pi(\tau_2)$ с поперечным сечением $\Omega_2 = \Omega(\tau_2)$, имеющим границу $L_2 = L(\tau_2)$. Заметим, что всюду далее рассматривается достаточно медленные процессы, такие, что в уравнениях равновесия можно пренебречь инерционными членами.

Дана постановка возникающих классических и неклассических начально-краевых задач. Предложены методы решения таких задач, основанные на приведении неклассических задач наращивания вязкоупругих стареющих тел к задачам теории упругости с некоторым параметром, использовании теории аналитических функций для решения последних и восстановлении истинных характеристик напряжённо-деформированного состояния тел при помощи полученных формул расшифровки.

Полученные результаты могут служить основой для решения важных прикладных задач для деталей и элементов конструкций, изготавливаемых при помощи современных технологий.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А17-117021310381-8) при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17–01–00712_а, 19-51-60001, 18-51-05012).

**REFERENCE**

1. Gebhardt A., Hoetter J.S. Additive Manufacturing: 3D Printing for Prototyping and Manufacturing. Munich: Carl Hanser Verlag, 2016. 611 p.
2. Gibson I., Rosen D.W., Stucker B. Additive Manufacturing Technologies: Rapid Prototyping to Direct Digital Manufacturing. New York: Springer Verlag, LLC., 2010. XXI + 498 p.
3. N. Guo and M. C. Leu, "Additive Manufacturing: Technology, Applications and Research Needs," Frontiers of Mech. Engng, 8 (3), 215– 243 (2013).
4. H. Bikas, P. Stavropoulos, and G. Chryssolouris, «Additive Manufacturing Methods and Modelling Approaches: A Critical Review», Int. J. Adv. Manufact. Techn., 83 (1-4), 389–405 (2016).
5. E.R. Denlinger, J.Irwin, and P.Michaleris, «Thermomechanical Modeling of Additive Manufacturing Large Parts», // J. Manufact. Sci. Engng, 136 (6), 061007 (2014).
6. W.E. Frazier, «Metal Additive Manufacturing: A Review», //J. Mater. Engng Perform., 23 (6), 1917–1928 (2014).
7. Y. Huang, M.C. Leu, J. Mazumder, and A. Donmez, «Additive Manufacturing: Current State, Future Potential, Gaps and Needs, and Recommendations», //J. Manufact. Sci. Engng, 137 (1), 014001 (2015).
8. I. Gibson, D. Rosen, and B. Stucker, Additive Manufacturing Technologies (Springer, New York, 2010).
9. J.C. Heigel, P. Michaleris, and E.W. Reutzel, «Thermo-Mechanical Model Development and Validation of Directed Energy Deposition
10. Additive Manufacturing of Ti–6Al–4V," Addit. Manufact., 5, 9–19 (2015).
11. Aruyunyan N.Kh., Manzhirov A.V., Naumov V.E. Contact Problems in Mechanics of Growing Bodies [in Russian]. Moscow: Nauka, 1991. 172 p.
12. Aruyunyan N.Kh., Manzhirov A.V. Contact Problems in the Theory of Creep [in Russian]. Moscow: Nauka, 1999. 320 p.
13. Manzhirov A.V. The general non-inertial initial-boundary value problem for a viscoelastic ageing solid with piecewise-continuous accretion. Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1995. Vol. 59. No.5. P. 805-816.
14. Manzhirov A.V. ``Mechanics of growing solids: New track in mechanical engineering.'' In ASME 2014 International Mechanical Engineering Congress and Exposition.Volume 9: Mechanics of Solids, Structures and Fluids. Montreal, Quebec, Canada, November 14-20, 2014.
15. Manzhirov A.V. Mechanical design of viscoelastic parts fabricated using additive manufacturing technologies, Lecture Notes in Engineering and Computer Science: Proceedings of The World Congress on Engineering 2015, WCE 2015, 1–3 July, 2015, London, U.K.London: IAENG, 2015. P. 710–714.
16. Manzhirov A.V. A method for mechanical design of AM fabricated viscoelastic parts. // Transactions on Engineering Technologies, Singapore: Springer, 2016. P. 223–235.
17. Manzhirov A. V. Mechanical analysis of an AM fabricated viscoelastic shaft under torsion by rigid disks // Lecture Notes in Engineering and Computer Science. Vol. 2230. London, U.K, 2017. P. 856–860.

**Information about authors:**

**Михаил Николаевич Михин** – к.ф.-м.н., Филиал Российского государственного гуманитарного университета, Московская область, Домодедово, Россия Ступинский филиал Московского авиационный института, Московская область, Ступино, Россия
**E-mail:** mmikhin@inbox.ru

**Евгений Валерьевич Мурашкин** – к.ф.-м.н., Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН; Москва Россия
**E-mail:** murashkin@ipmnet.ru

# АФТЕРШОКИ КАК ОТРАЖЕНИЕ ПРОЦЕССА ДЕСТРУКЦИИ ОЧАГОВОЙ ОБЛАСТИ СИЛЬНОГО ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЯ

**Мкртчян М.А., Саакян Б.В., Геодакян Э.Г.**

С позиции физической мезомеханики и кинетической теории трещинообразования рассматривается афтершоковая последовательность Спитакского разрушительного землетрясения 7-го декабря 1988г., как процесс, отражающий деструкцию очаговой области. Выявлены основные закономерности и характерные особенности, пространственно-временно-энергетической характеристики раздробления очаговой области.

Подготовка и реализация сильного землетрясения с позиции физической мезомеханики представляет собой многостадийный сложный процесс деструкции целостности геологической среды очаговой области. Под воздействием тектонических напряжений в отдельных плоскостях существующих земной коры дислокации, представляющий собой концентраторы напряжений, возникают их аномальные накопления в виде упругопластической деформаций. В дальнейшем происходит консолидация отдельных носителей, так называемых мезоэлементов, внутри которых возникают стрессовые возмущения и резкое изменение фрикционных свойств геологической среды, придводящих к образованию магистрального разрыва сильного землетрясения [6].

В ходе вспаривания магистрального разрыва происходит неполное высвобождение накопленных напряжений, часть остаточных напряжений неравномерно перераспределяются в окружающую область плоскости разрывообразования, создавая дополнительные концентраторы напряжений, которые дальнейшем реализуются в виде многочисленных повторных толчков-афтершоков [4].

К первой стадии относятся вышеописанные процессы подготовки и формирование магистрального разрыва, которые рассматриваются с позиции физической мезомеханики, вторая стадия разрывообразования и последующий афтершоковый процесс следует рассматривать с позиции кинетической теории трещинообразования [5,7].

В настоящее время изучение первой стадии является крайне трудным и пока окончательно нерешюнной задачей.

В отличие от этого, вторая стадия, связанная с процессом разрушения очаговой области, благодаря многочисленным сейсмостатистическим инструментальным данным и разработанным методом их пространственно-временно-энергетических анализов, позволяют выявить основные закономерности и характерные особенности процесса деструкции геологической среды очаговой области.

В настоящей работе на основе анализа афтершоковой последовательности разрушительного Спитакского землетрясения рассматриваются пространственно-временно-энергетические характеристики процесса деструкции очаговой области этого землетрясения.

Катастрофическое Спитакское землетрясение с магнитудой $M_w$=7 является сильнейшем землетрясением, произшедшей на территории Армении за последнее столетие. По данным сейсмологического центра Гарвардского университета механизм этого землетрясения представляет собой взбросо-сдвиговую подвижку с сейсмическим моментом $M_0=1{,}6\cdot10^{26}$Дин·см, а сброшенное при главном толчке напряжений, рассчитанные по формуле Канамори составляют $\Delta\sigma$=20Бар [10].

Анализ волновых полей инструментальных записей телесейсмических и региональных станций показал, что очаговый процесс Спитакского землетрясения имел мультиплетный характер, состоящий из 4-х субочагов и представлял собой многоактовый процесс в спаривании очаговой области [3].

Благодаря организации густой сети эпицентральных инструментальных наблюдений, за период 36 месяцев были зарегистрированы и с высокой точностью определены гипоцентры более 3000-х афтершоков в энергетическом диапазоне k=lgE=8÷14 [1]. На основе этих данных с применением программы Mapinfo в пакете GIS была построена карта пространственного распределения этих афтершоков (рис.1).

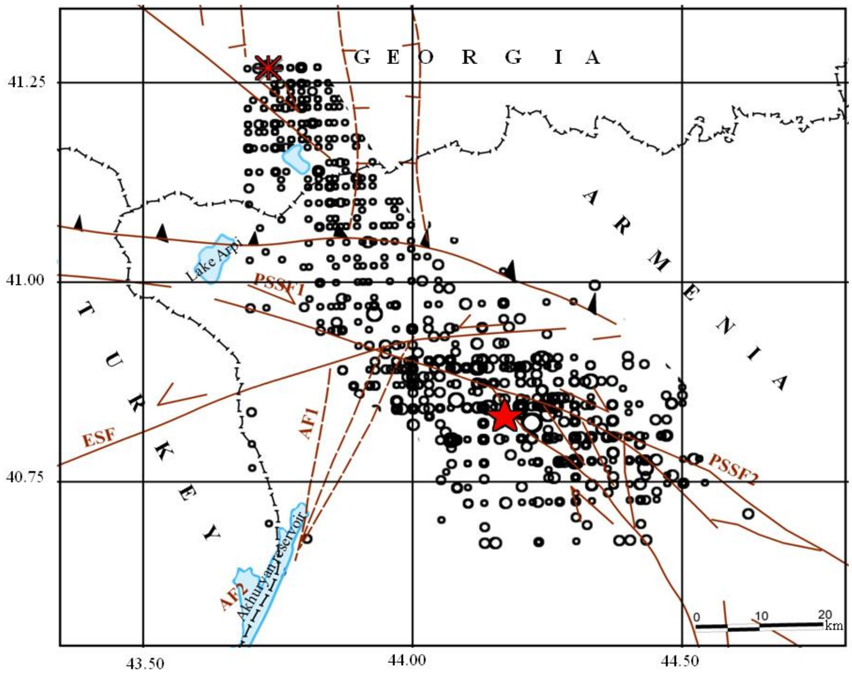



Рис.1. Пространственное распределение афтершоков Спитакского землетрясения

Анализ этой карты показывает, что афтершоки чётко выделяют геометрию разрывообразования, состоящую из 4-х субочагов. Периферийные афтершоки позволяют оконтурить площадь S=3354км$^2$ и, учитывая глубинные залегания всех афтершоков, также объём V=50310км$^3$ геологической среды, охваченной процессом деструкции очаговой области.

В основе современных методов временно-энергетических анализов афтершоков заложено два основных закона сейсмологи – закон Омори и Гутенберг-Рихтера.

Согласно закону Омори, убывание количества афтершоков за единицу времени, происходит по степенной зависимости с отрицательным показателем. Аналитическое выражение – закон Омори, модифицированного со стороны Нартео [9], имеет следующий вид:

$$\lambda_{(t)} = \frac{K}{(t+c)^p}, \qquad (1)$$

где параметры: λ– частота афтершоков в заданном временном интервале;

t– время возникновения основного толчка;

K– эффективность афтершоковой последовательности;

P – коэффициент затухания;

c – временная задержка.

На рис.2(а) приведён график степенного убывания во времени афтершоковой последовательности. Билогарифмическое представление этого графика рис.2(б) позволяет детально разложить этот сложный процесс на три составляющие: линейную, гиперболическую и экспоненциальную. На этой основе были определены количественные временные характеристики параметров (c,p,K) процесса деструкции очаговой области.

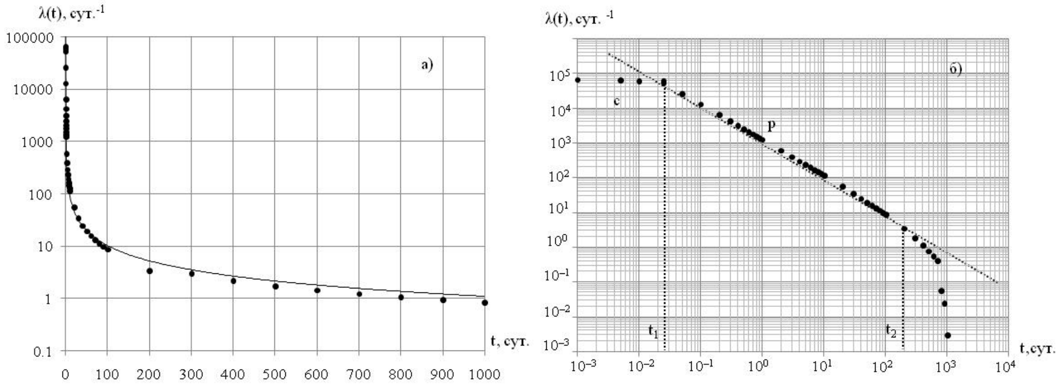



Рис.2. Графики степенного (а) и логарифмического (б) затухания афтершоковой последовательности

Параметр c=36 мин. соответствует начальному периоду афтершокового процесса, характеризуя напряжённо-деформационное состояние плоскости магистрального разрыва. Параметр p=1.08 характеризует гиперболическую часть степенного затухания и, в основном, отражает физико-механическое состояние геологической среды, после которой завершающая фаза затухания афтершокового процесса происходит по экспоненциальную закону, соответствующему релаксации тектонических напряжений очаговой области.

Особый интерес представляют временные интервалы существования этих фаз $t_1$,$t_2$ и частота происходящих в них убывания афтершоков $\lambda_a$, $\lambda_b$, с помощью которых как показано работе [2], можно определить тип магистрального разрыва (гладкая, ребристо-зубчатая и средне-зубчатая). Полученные значения $t_1$=0.025сут., $t_2$=600 сут. указывают, что при Спитакском землетрясении имело место средний зубчатый тип магистрального разрывообразования. Величины значений $\lambda_a$, $\lambda_b$

в этих интервалах несут информацию о самоподобии убывания количества афтершоков за единицу времени и отражают фрактальные свойства вышеуказанного сложного процесса. Наиболее ярким проявлением фрактальности сейсмического процесса является закон Гутенберг-Рихтера [8], устанавливающий линейную связь между логарифмами количества и энергии сейсмической событий:

$$\mathrm{lgN} = \mathrm{A}_{10} - \gamma \cdot \mathrm{K} \quad (2),$$

где N – количество афтершоков данного энергетического класса,

K=lgE – энергетический класс,

$\gamma$ – коэффициент наклона графика,

$\mathrm{A}_{10}$ – сейсмическая активность, нормированная к единице площади и времени.

Применение этого закона для энергетического анализа афтершокового процесса позволяет определить количество афтершоков разных энергетических классов и выявить динамику энергетического развития всего афтершокового процесса.

Для афтершокового процесса Спитакского землетрясения нами были построены графики повторяемости, соответствующие периодам возникновений линейной, гиперболической и экспоненциальной фаз затухания, а также афтершокового процесса, в целом (рис.3).

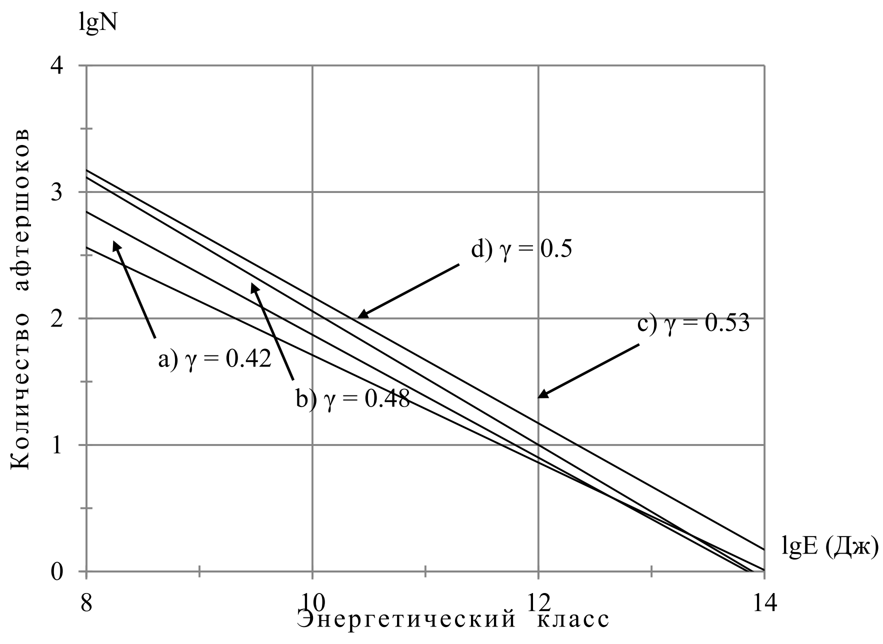



Рис.3. Графики повторяемости афтершокового процесса для отдельных периодов времени:
a) линейная, b) гиперболическая, c) экспоненциальные фазы и d) полный афтершоковый процесс

На линейной фазе афтершоковый процесс насыщен большим количеством афтершоков, имеющих повышенное значение энергетических классов. В последующие временные периоды происходит процесс возникновения афтершоков с умеренным и слабыми значениями энергетического класса до окончательного формирования графика повторяемости всего афтершокового процесса. Значение угла графика повторяемости γ указывает на энергетическую фрактальность, с другой стороны, учитывая зависимость lgE ~ l от протяжённости разрыва в очагах каждого афтершока, этот процесс можно трактовать как процесс деструкции (дробности) геологической среды очаговой области.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Арефьев С.С., Аптекман Ж.Я., Габсатарова И.П., Геодакян Э.Г., Захарова А.И., Линдер А.В., Шебалин Н.В. и др. Каталог афтершоков Спитакского землетрясения 7-го декабря 1988г. // Изв. АН СССР. «Физика Земли». 1991. №11. М.: Изд. «Наука», 1991. С.60-73.
2. Баранов С.В. Моделирование афтершоковой активности западной части Главного Кавказского хребта с 1991 по 2012 год. //Материалы VIII Международной сейсмологической школы «Современные методы обработки и интерпретации сейсмологических данных», Геленджик, 16-20 сентября 2013 г. Обнинск: ГС РАН, 2013. С.51-57.
3. Геодакян Э.Г. О геодинамической модели очага Спитакского землетрясения 7-го декабря 1988 г. // Сб. научных трудов конференции, посвящённой 60-летию основания НАН РА. Гюмри: Изд-во «Гитутюн» НАН РА. 2004. С.64-78.
4. Добровольский И.П. Теория подготовки тектонического землетрясения. М.: Изд. «Наука», 1991. 224с.
5. Журков С.Н. Кинетическая концепция разрушения твёрдых тел // Вестник Академии Наук СССР. 1968. №3. С.46-52.
6. Макаров П.В. Подход физической мезомеханики к моделированию процессов деформации и разрушения // Физическая мезомеханика. 1998. Т.1. №1. С.61-81.
7. Панин В.Е. Основы физической мезомеханики. //Физическая мезомеханика. 1998. Т.1. №1. С.5-22.
8. Gutenberg B., Richter C.F. Magnitude and energy of earthquakes // Ann. Geophys. 1956. Vol.9. P.1-15.
9. Holschneider M., Narteau C., Shebalin P., Peng Z. and Schorlemmer D. Bayesian analysis of the modified Omori law //Journal of geophysical research, vol. 117, bxxxxx, doi:10.1029/2011jb009054, 2012.
10. Kanamori B.H., Anderson D.L. The oretical basis of some empirical relations in seismology //Bull. of the Seismol. Soc. of Amer**.** 1975. Vol.65. № 5. P.1073-1095.



**Сведения об авторе:**

**Мкртчян Мери Артушовна** – младший научн. сотр. Института геофизики и инженерной сейсмологии им. акад. А.Назарова НАН Армении, г. Гюмри, ул. В.Саркисяна, 5.

**E-mail:** mary-mary-86@mail.ru, (+37494 602545)

# КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ С ДВИЖУЩИМИСЯ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

**Мкртчян М.Г.**

Рассматривается задача управления колебаниями струны с граничными условиями первого рода на конечном временном интервале. Данная задача была решена в работе академика В.А. Ильина и академика Е.И. Моисеева методом Даламбера. Также данную задачу с двумя управляющими функциями методом Фурье, в общем случае решила Л.Н. Знаменская в своей работе. Метод Даламбера не позволяет решить данную задачу во многих случаях, а в работе Л.Н. Знаменской задача управления стержня рассмотрена другим методом.

В данной работе решение волнового уравнения [2-4] ищем в виде ряда Фурье [1]. После удовлетворения граничным, начальным и финальным условиям определяется управляющее воздействие. Рассмотрены также 3 частных случая возможных управляющих функций и выполнен расчёт на конкретном примере.

**Постановка задачи.** Рассматривается задача управления колебаниями струны граничными условиями первого рода на конечном временном интервале. Один конец струны жёстко закреплён, а на другом конце действует управляющая сила, которая является функцией от времени. Уравнение, описывающее колебание струны, имеет следующий вид:

$$a^2U_{,xx} = \ddot{U}\,, \qquad 0 \le x \le l\,, \qquad t \ge 0\,, \tag{1}$$

граничные условия –

$$U(0,t) = \mu(t)\,, \qquad U(l,t) = 0 \tag{2}$$

начальные условия –

$$U\big|_{t=0} = \varphi(x)\,, \qquad \dot{U}\big|_{t=0} = \psi(x)\,. \tag{3}$$

Требуется найти функцию управления $\mu(t)$, при котором колебания струны в виде уравнения (1) из начального состояния (3) приводятся в финальное состояние (4), т.е. имеется равенство:

$$U(x,T) = \tilde{\varphi}(x)\,, \qquad \dot{U}\big|_{t=T} = \tilde{\psi}(x)\,, \tag{4}$$

также требуется согласовать начальные и граничные условия:

$$U(0,0) = \varphi(0) = \mu(0),\ \ \varphi(l) = 0. \tag{5}$$

**Решение краевой задачи.**

Вводится новая функция $V(x,t)$ так, чтобы

$$U(x,t) = V(x,t) + \big(1-(x/l)\big)\mu(t), \tag{6}$$

с учётом (6) уравнение (1) приводится к виду:

$$a^2V_{,xx} - \ddot{V} = \big(1-(x/l)\big)\ddot{\mu}(t) \tag{7}$$

(примечание: функция управления входит в уравнение.)

Из (2) получаются граничные условия для новой искомой функции $V(x,t)$

$$V(0,t) = 0\,, \qquad V(l,t) = 0\,. \tag{8}$$

Таким образом, относительно функции $V(x,t)$ имеем неоднородное уравнение (2) с однородными граничными условиями. Для таких задач обычно используется решение в виде ряда Фурье, удовлетворяющего однородным граничным условиям (8)

$$V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\cdot \sin\lambda_n x, \qquad \text{где} \qquad \lambda_n = n\pi/l \tag{9}$$

В этом случае правую часть уравнения (7) также необходимо представить в виде

$$1-(x/l) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \sin\lambda_n x\,, \tag{10}$$

откуда коэффициенты ряда определяются

$$C_n = 2/(n\pi)\,. \tag{11}$$

Подстановка (9), (10) в уравнение (7) приводит к последовательной системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\ddot{f}_n(t)+a^2\lambda_n^2 f_n(t)=-(2/n\pi)\cdot\ddot{\mu}(t). \quad (12)$$

Общее решение уравнения (12) получается методом вариации постоянных в следующем виде:

$$f_n(t)=C_n\sin\lambda_n at+D_n\cos\lambda_n at-\left(2l/\left(n^2\pi^2 a\right)\right)\int_0^t\ddot{\mu}(t)\sin\lambda_n a(t-\tau)\,d\tau. \quad (13)$$

Возвращаясь к функции $U(x,t)$, согласно (6),(9) и (10), получим:

$$U(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(2/(n\pi)\right)\cdot\mu(t)+f_n(t)\right]\sin\lambda_n x. \quad (14)$$

Для того, чтобы (14) удовлетворяло начальным условиям (3), необходимо разложить функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в ряд Фурье:

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\sin\lambda_n x,\ \psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\sin\lambda_n x. \quad (15)$$

Требования, чтобы $U(x,t)$ из (14) удовлетворяли начальным условиям (3), с учётом (15) приводят к уравнениям:

$$\begin{cases}\left(2/(n\pi)\right)\cdot\mu(0)-f_n(0)=\alpha_n\\ \left(2/(n\pi)\right)\cdot\dot{\mu}(0)-\dot{f}_n(0)=\beta_n\end{cases} \quad (16)$$

Из (16) определяются постоянные $C_n$ и $D_n$, выраженные через $\mu(0),\dot{\mu}(0),\alpha_n,\beta_n$. Тогда, прямая задача будет решена, если заданы начальные условия ($\alpha_n$, $\beta_n$) и функция $\mu(t)$.

В дальнейшем, для простоты будем рассматривать частный случай:

$$\psi(x)=0\Rightarrow\beta_n=0\Rightarrow D_n=\alpha_n\ ,\ C_n=0 \quad (17)$$

$$\Rightarrow f_n(t)=\alpha_n\cos\lambda_n at-\left(2l/\left(n^2\pi^2 a\right)\right)\int_0^t\ddot{\mu}(\tau)\sin\lambda_n a(t-\tau)\,d\tau \quad (18)$$

**Исследование задачи управления.** Функция управления $\mu(t)$ не задана, которую необходимо найти так, чтобы удовлетворялось условие (4). Опять же, для простоты, вместо условия (4) рассмотрим условия покоя:

$$U(x,T)=0\ ,\ \dot{U}\Big|_{t=T}=0. \quad (19)$$

В этом случае из (14), с учётом (18) для нахождения функции $\mu(t)$ и T получим следующее:

$$\begin{cases}\mu(T)+\alpha_n\cos(\lambda_n aT)-\left(l/(n\pi a)\right)\int_0^T\ddot{\mu}(\tau)\sin\lambda_n a(T-\tau)\,d\tau=0\\ \dot{\mu}(T)-\alpha_n a\lambda_n\sin(\lambda_n aT)-\left(2/(n\pi)\right)\int_0^T\ddot{\mu}(\tau)\cos\lambda_n a(T-\tau)\,d\tau=0\end{cases} \quad (20)$$

Далее, нужно найти классы функциий $\mu(t)$, при которых можно решить систему уравнений (20). Рассмотрим частные случаи.

**Пример 1.** Найдём управляющую функцию, когда она квадратична:

$$\mu(t)=At^2+B \quad (21)$$

В этом случае (20) будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} AT^2+BT+\alpha_n\cos(\lambda_n aT)-(l/(n\pi a))\int\limits_0^T 2A\sin\lambda_n a(T-\tau)\,d\tau=0 \\ 2AT+B-\alpha_n a\lambda_n\sin(\lambda_n aT)-(2/(n\pi))\int\limits_0^T 2A\cos\lambda_n a(T-\tau)\,d\tau=0 \end{cases} \tag{22}$$

откуда получаем

$$\begin{cases} A=\dfrac{a^2 n\pi\alpha_n\lambda_n\left(\cos[aT\lambda_n]+aT\mathrm{Sin}[aT\lambda_n]\lambda_n\right)}{2l-2l\cos[aT\lambda_n]-4aT\mathrm{Sin}[aT\lambda_n]+a^2n\pi T^2\lambda_n} \\ B=-\dfrac{a\alpha_n\left(a^2n\pi T^2\mathrm{Sin}[aT\lambda_n]\lambda_n^2-2\mathrm{Sin}[2aT\lambda_n]\right)}{2l-2l\cos[aT\lambda_n]-4aT\mathrm{Sin}[aT\lambda_n]+a^2n\pi T^2\lambda_n}- \\ -\dfrac{a\alpha_n\left(2an\pi T\cos[aT\lambda_n]+l\left(-2\mathrm{Sin}[aT\lambda_n]+\mathrm{Sin}[2aT\lambda_n]\right)\right)\lambda_n}{2l-2l\cos[aT\lambda_n]-4aT\mathrm{Sin}[aT\lambda_n]+a^2n\pi T^2\lambda_n} \end{cases} \tag{23}$$

**Пример 2.** Найдём управляющую функцию, когда она имеет гармоничную составляющую:

$$\mu(t)=Ct(1+\varepsilon\sin\omega t). \tag{24}$$

Проверяя условия согласования (5), можно убедиться, что данная функция удовлетворяет этим условиям.

Далее, поставим (24) в систему уравнений (20), получим:

$$\begin{cases} (l/(n\pi a))\int\limits_0^T\left(-\varepsilon\omega^2\sin\omega\tau\right)\sin\lambda_n a(T-\tau)\,d\tau=CT(1+\varepsilon\sin\omega T)+\alpha_n\cos(\lambda_n aT) \\ (2/n\pi)\int\limits_0^T\left(-\varepsilon\omega^2\sin\omega\tau\right)\mathrm{Cos}\lambda_n a(T-\tau)\,d\tau=C\left[1+T\varepsilon\omega\mathrm{Cos}[T\omega]+\varepsilon Sin[\omega T]\right]-\alpha_n a\lambda_n\sin(\lambda_n aT), \end{cases}$$

откуда получим значения параметров функции управления (24): $C(a,\omega,\alpha_n,\lambda_n,l)$ и $\varepsilon(a,\omega,\alpha_n,\lambda_n,l)$.

**Пример 3.** Теперь рассмотрим последний вариант, когда

$$\mu(t)=At+B\sin\omega t. \tag{25}$$

Решая уравнение (20) при (25), получим:

$$A=a\mathrm{Sin}[at\lambda_n]\alpha_n\lambda_n+$$
$$+\frac{a\left(an\pi\lambda_n\omega\mathrm{Cos}[t\omega]+2\omega^2\mathrm{Sin}[t\omega]\mathrm{Sin}[at\lambda_n]\right)\left(\mathrm{Cos}[at\lambda_n]\alpha_n+at\mathrm{Sin}[at\lambda_n]\alpha_n\lambda_n\right)}{a^2n\pi\lambda_n\mathrm{Sin}[t\omega]-t\left(a\omega\mathrm{Cos}[t\omega]+2\omega^2\mathrm{Sin}[t\omega]\mathrm{Sin}[at\lambda_n]\right)-l\omega^2\left(-1+\mathrm{Cos}[at\lambda_n]\right)\mathrm{Sin}[t\omega]}$$

$$B=-\frac{a^2n\pi\lambda_n\cdot\left[\mathrm{Cos}[at\lambda_n]\alpha_n+at\mathrm{Sin}[at\lambda_n]\alpha_n\lambda_n\right]}{\left[a^2n\pi\lambda_n-l\omega^2\left(-1+\mathrm{Cos}[at\lambda_n]\right)\right]\mathrm{Sin}[t\omega]-t\left(a^2n\pi\lambda_n\omega\mathrm{Cos}[t\omega]+2a\omega^2\mathrm{Sin}[t\omega]\mathrm{Sin}[at\lambda_n]\right)}$$

**Пример 4.** Рассмотрим задачу на конкретном примере, когда $n=1$ и заданы следующие начальные условия:

$$U\big|_{t=0}=a_1\sin\lambda_1 x,\quad \dot U\big|_{t=0}=0 \tag{26}$$

$$U(x,t)=V(x,t)+(1-x/l)\cdot\mu(t),\quad \text{где } V(x,t)=f_1(t)\sin\lambda_1 x,\ \lambda_1=\pi/l \tag{27}$$

Далее пройдём по шагам вышеописанное решение . То есть, здесь $\gamma_1=1$. Следующие функции представим в виде

$$1-\left(x/l\right)\approx\left(2/\pi\right)\cdot\sin\lambda_1 x\,. \tag{28}$$

Подстановка (27), (28) в уравнение (7) приводит к последовательной системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$a^2V_{,xx}-\ddot V=\left(1-\left(x/l\right)\right)\cdot\ddot\mu\left(t\right) \tag{29}$$

$$\ddot f_1\left(t\right)+a\lambda_1^2 f_1\left(t\right)=-\left(2/\pi\right)\cdot\ddot\mu\left(t\right) \tag{30}$$

Общее решение уравнении (30) получается методом вариации постоянных в следующем виде:

$$f_1\left(t\right)=C_1\sin\lambda_1 at+D_1\cos\lambda_1 at-\left(2l/\left(\pi^2a\right)\right)\int_0^t\ddot\mu\left(t\right)\sin\lambda_1 a\left(t-\tau\right)d\tau \tag{31}$$

Из (27) и (28) для решения $U\left(x,t\right)$ получим:

$$U\left(x,t\right)=\left[\left(2/\pi\right)\cdot\mu\left(t\right)-f_1\left(t\right)\right]\sin\lambda_1 x, \tag{32}$$

$$\varphi\left(x\right)=\alpha_1\sin\lambda_1 x,\quad \psi\left(x\right)=0\,. \tag{33}$$

Удовлетворим начальным условиям

$$\begin{cases}\left(2/\pi\right)\cdot\mu\left(0\right)-f_1\left(0\right)=\alpha_1\\ \left(2/\pi\right)\cdot\dot\mu\left(0\right)-\dot f_1\left(0\right)=0\end{cases} \tag{34}$$

$$\psi\left(x\right)=0\Rightarrow\beta_1=0\Rightarrow D_1=\alpha_1\ ,\ C_1=0$$

$$\Rightarrow f_1\left(t\right)=\alpha_1\cos\lambda_1 at-\left(2l/\left(\pi^2a\right)\right)\int_0^t\ddot\mu\left(\tau\right)\sin\lambda_1 a\left(t-\tau\right)d\tau\,, \tag{35}$$

получим уравнения относительно функции $\mu\left(t\right)$.

$$\begin{cases}\mu\left(T\right)+\alpha_1\cos\left(\lambda_1 aT\right)-\left(l/\left(\pi a\right)\right)\int_0^T\ddot\mu\left(\tau\right)\sin\lambda_1 a\left(T-\tau\right)d\tau=0\\ \dot\mu\left(T\right)-\alpha_1 a\lambda_1\sin\left(\lambda_1 aT\right)-\left(2/\pi\right)\int_0^T\ddot\mu\left(\tau\right)\cos\lambda_1 a\left(T-\tau\right)d\tau=0\end{cases} \tag{36}$$

Теперь, для примера 3) найдём постоянные управляющей функции:

$$\mu\left(t\right)=At+B\sin\omega t, \tag{37}$$

для ***A*** и ***B*** получим следующие значения:

$$A=a\mathrm{Sin}\left[aT\lambda_1\right]\alpha_1\lambda_1+$$

$$+\frac{\left(a^2\pi\lambda_1\omega\mathrm{Cos}\left[T\omega\right]+2a\omega^2\mathrm{Sin}\left[T\omega\right]\mathrm{Sin}\left[aT\lambda_1\right]\right)\left(\mathrm{Cos}\left[aT\lambda_1\right]\alpha_1+aT\mathrm{Sin}\left[aT\lambda_1\right]\alpha_1\lambda_1\right)}{\left[a^2\pi\lambda_1-l\omega^2\left(-1+\mathrm{Cos}\left[aT\lambda_1\right]\right)\right]\mathrm{Sin}\left[T\omega\right]-T\left(a^2\pi\lambda_1\omega\mathrm{Cos}\left[T\omega\right]+2a\omega^2\mathrm{Sin}\left[T\omega\right]\mathrm{Sin}\left[aT\lambda_1\right]\right)}$$

$$B=-\frac{a^2\pi\lambda_1\left[\mathrm{Cos}\left[aT\lambda_1\right]\alpha_1+aT\mathrm{Sin}\left[aT\lambda_1\right]\alpha_1\lambda_1\right]}{\left[a^2\pi\lambda_1-l\omega^2\left(-1+\mathrm{Cos}\left[aT\lambda_1\right]\right)\right]\mathrm{Sin}\left[T\omega\right]-T\left(a^2\pi\lambda_1\omega\mathrm{Cos}\left[T\omega\right]+2a\omega^2\mathrm{Sin}\left[T\omega\right]\mathrm{Sin}\left[aT\lambda_1\right]\right)}$$

Подставляя значения ниже

$$\lambda_1=\pi/l,\ T=l/a,\ \omega=\left(2a\pi\right)/l\,, \tag{38}$$

получим:

$$A=\left(a\alpha_1\right)/l,\ B=-\alpha_1/\left(2\pi\right),$$

откуда найдём управляющую функцию

$$\mu\left(t\right)=\left(a\alpha_1/l\right)\cdot t-\left(\alpha_1/\left(2\pi\right)\right)\cdot\sin\omega t \tag{39}$$

**Заключение.** В данной работе устанавливаются формулы, дающие обобщённые решения задачи струны с изменяющимися граничными условиями первого рода, при данных начальных и финальных условиях. Задача решена методом Фурье. На примерах найдены некоторые виды управляющих функции при заданых начальных и финальных условиях.

**ЛИТЕРАТУРА**


1. Белубекян М.В. О задаче колебаний мембраны в сверхзвуковом потоке газа. //Докл. АН Арм ССР. 1978. Т.67. №2. С.74-77.
2. Знаменская Л.Н. Управление упругими колебаниями. М.: Физматлит, 2004. 176 с. – ISBN 5-9221-0473-X.
3. Ильин В.А., Тихомиров В.В. Волновое уравнение с граничным управлением на двух концах и задача о полном успокоении колебательного процесса. Дифференц. Уравнения. 1999. Т.35. №5. С.692–704.
4. Барсегян В.Р. О задаче граничного управления колебаниями струны с заданными состояниями в промежуточные моменты времени. // XI Всероссиссийский сьезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механике. Казань, 20-24 августа 2015 года. С.354-356.


**Сведения об авторе:**


**Мкртчян Манук Грайрович** – Научный сотрудник, отдел динамики деформируемых систем и связаных полей Института механики НАН Армении; **E-mail:** mkmanuk@yandex.ru

# АНАЛИЗ ПОВЕДЕНИЯ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМ ПРИ СИЛЬНЫХ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЯХ

**Мхитарян Д.А.**

Анализ сильных и разрушительных землетрясений свидетельствует о том, что во многих случаях в сооружениях, перенесших сейсмические воздействия, развиваются пластические деформации, возникают зоны частичных повреждений и т.д. Согласно исследованиям, пластические деформации в значительной степени уменьшают сейсмические нагрузки, действующие на сооружения. С этой целью нами проведены исследования по изучению поведения изгибаемых элементов зданий и сооружений с учётом циклического образования пластических деформаций в конструкциях.

Опыт разрушительных землетрясений показал, что поведение зданий разнообразных типов: каменных, каркасных, крупнопанельных и др., при землетрясении было различным, что позволяет оценить влияние разнообразных конструктивных систем на сейсмостойкость зданий. Наряду с этим, сейсмостойкость массовых типов зданий и сооружений обеспечивается двумя группами факторов, первая из которых включает свойства конструктивной системы, а вторая – расчётные и конструктивные мероприятия, предусматриваемые в процессе проектирования. Причём, факторы обеих групп взаимосвязаны и оказывают определённое влияние друг на друга. Наряду с этим, сейсмическое воздействие на сооружение характеризуется рядом особенностей, относящихся к колебаниям грунта, к колебаниям сооружения и к условиям их совместного движения. Отметим также, что интенсивность сейсмического воздействия на сооружения зависит от соотношения упругих свойств среды, от особенностей самого воздействия и динамических свойств сооружения (период его собственных колебаний, плотностей и сейсмических жёсткостей). Кроме того, поведение зданий и сооружений при землетрясениях зависит, с одной стороны, от жёсткости, упругости и прочности материала конструкции, от способа её сопряжения с остальными элементами сооружения и устройства её опор, а с другой стороны, от внешней нагрузки. Практика показывает, что период колебаний в определённых стадиях динамического процесса в течении времени может увеличиваться в пределах 2,5-5 раза в зависимости от степени приближения к предельному состоянию. При этом, значительно возрастает коэффициент рассеяния энергии и связанный с ним декремент колебаний [13,16,20].

Кроме того, усилия и перемещения сооружений существенно зависят от учёта податливости и величины усилий, соответствующих состоянию пластического шарнира в элементах. Следовательно, при проектировании зданий и сооружений для сейсмических районов величины сейсмических нагрузок зависят от принятой методики расчёта и предпосылок, учитывающих характер воздействия и действительное напряжённое состояние несущих элементов.

Проведённые за последнее время многочисленные экспериментальные исследования показали, что повторные малоцикловые, особенно знакопеременные нагружения относительно высокого уровня существенно отражают на общей изгибающей диаграмме деформирования и существенно снижают несущую способность железобетонных элементов. Наряду с этим, общепризнанно, что при сильных землетрясениях конструкциям зданий и сооружений приходится работать в стадии напряжений, близких к разрушениям. Поэтому, решающее значение приобретает правильный учёт реальных динамических свойств материалов и конструкций, в особенности, в условиях их упругопластической работы.

Результаты экспериментальных исследований натурных и модельных объектов указывают на существенные изменения характеристик жёсткости сооружений и частот свободных колебаний в процессе накопления повреждений. Понижение на 30-40% жёсткости железобетонных изгибаемых элементов, в основном, следует объяснить нарушением сцепления между арматурой и бетоном в зоне трещин в бетоне и изменением его деформативности под сейсмическими нагрузками [5,6]. Т.е., циклические нагружения вызывают снижение прочности и жёсткости нормальных сечений железобетонных элементов. Опыты подтверждают, что при циклических нагрузках в области от 100 до 400 циклов деформативность бетона и железобетона подвергается значительным изменениям. При этом, бетонные элементы получают 15% увеличения деформаций, а железобетонные изгибаемые элементы – 7%. Так как знакопеременные малоцикловые нагружения испытывают, в основном, вертикальные несущие элементы зданий при поперечных горизонтальных сейсмических воздействиях, колонны каркасных зданий и стены крупнопанельных и монолитных бескаркасных зданий, а также перемычки между проёмами в стенах, узлы соединения в каркасе и стыков сопряжения стен. Следовательно, этим элементам при расчёте и конструктировании должно уделяться первостепенное внимание.

Анализ результатов по инженерному обследованию последствий Спитакского землетрясения в районах Ахуряна, Ашоцка и в г.Гюмри показали, что это катастрофическое землетрясение было сильнейшим в этом районе за весь исторический период. Оно произошло с некоторыми последующими одно за другим толчками, отличающимися интенсивностью.

Сложный характер разрушения задний и сооружений, а также спектральный анализ записей показали, что спектр землетрясений в г. Гюмри был очень широким [1,3,4,7,8,9,10,15,19,20,21,22].

Спитакское землетрясение 1988г. явилось, по существу, натурным испытанием на сейсмостойкость большой группы монолитных, разных групп зданий с различными объёмно планировочными, конструктивными и технологическими характеристиками. Под воздействием меняющихся сейсмических сил в городе Гюмри инерционные силы достигали максимума, а здания и сооружения испытывали пространственное воздействие, в частности, кручение, что явилось одной из причин повреждений и разрушений многочисленных строений с различными конструктивными решениями [1,4,8,9,10-12,19,20,22].

Спитакское землетрясение показало, что при правильном проектировании несущих конструкций зданий и сооружений могут успешно устоять сейсмическим воздействиям при условии соблюдения нормативных требований и принципов сейсмостойкости [3,4,16,17,20]. Практика показывает, что во время землетрясения при достаточном экспериментальном обосновании, в принципе, можно предусмотреть разные уровни повреждений для различных несущих и ненесущих элементов в зависимости от их ответственности в общей уязвимости [16,17]. Результаты обследования зданий и сооружений, а также архитектурных памятников показали, что повреждения железобетонных несущих конструкций обусловлены многими факторами, кроме того, во многом способствовали характер землетрясения, длительность сейсмического воздействия, влияние вертикальной составляющей большое число повторных колебаний, сложные и неблагоприятные сочетания многих факторов, которые вели к значительному увеличению повреждаемости несущих конструкций различных систем [7,11]. Общеизвестно, что в зависимости от вида грунта поведение сооружений при колебаниях проявляются по-разному. Также отметим, что немаловажным фактором является вопрос передачи сейсмических колебаний от грунта к фундаменту сооружения. Изучение этого фактора крайне необходимо для выявления истинных величин сейсмических сил, передаваемых сооружению при землетрясении, с целью производства больше обоснованного расчёта на сейсмостойкость [17].

Параллельно отметим, что основания зданий и сооружений при землетрясениях должны надёжно выполнять свое главное предназначение: иметь несущую способность, достаточную для восприятия нагрузок при колебаниях конструкций и грунта сооружений достаточную деформативность. Влияние податливости грунтов оснований на периоды и формы колебаний зданий, особенно с жёсткой конструктивной схемой, иногда существенно сказывается на величины сейсмических нагрузок. Таким образом, в разных по динамическим характеристикам сооружениях одно и тоже землетрясение может вызвать совершенно различные сейсмические нагрузки [3,17,18,19,20,21,22,23].

При этом, учитывая силу землетрясения, можно считать, что монолитные здания, в целом, выдержали землетрясение, они обладают достаточной сейсмостойкостью и отвечают необходимым требованиям прочности [16,17,19,20,21,22,23].

Обзор последствий сильных землетрясений свидетельствуют о том, что крупнопанельные здания обладают высокой сейсмичностью, т.е. способностью конструктивной системы противостоять сейсмическим воздействиям, не переходя в предельное состояние [16,20,21,22,24].

В сейсмических районах при проектировании и строительстве зданий и сооружений придерживаются определённых принципов, нашедших своё отражение в строительных нормах и правилах по сейсмостойкости [16,17]. Каждому зданию и сооружению присущ индивидуальный комплекс параметров динамических характеристик колебаний, как следствие свойств подстилающего грунта и фундамента объекта, вида и качества соединений отдельных блоков, частей и элементов объекта, изменение которых отображается соответствующими изменениями параметров динамических характеристик о колебании объекта, в целом, его отдельных блоков, частей и элементов [3,5,11,13,19,20,22-24].

На основе обобщения и анализа большого количества факторов, оказывающие влияние на поведение различных систем зданий и сооружений при землетрясениях, дали возможность разрабатывать новые подходы, с помощью которых создаётся возможность объективно отразить все характерные особенности зданий и сооружений при сейсмических воздействиях и строго придерживаться общеизвестных принципов сейсмостойкости [1-5,11,13,17,19,20,23].

Спитакское землетрясение показало, что при правильном проектировании несущих железобетонных конструкций зданий могут успешно устоять сейсмическим воздействиям при условии соблюдения нормативных требований и принципов сейсмостойкости [3,16,17].

Имеется положительный опыт поведения при землетрясениях монолитных железобетонных конструкций и крупнопанельных зданий. Сборные здания по сравнению с монолитными отличаются наличием большого количества стыковых соединений, которые при достаточной прочности и в связи с возможной концентрацией напряжения могут вызвать значительные ослабления конструкции. В связи с этим, при проектировании и исследовании работы крупнопанельных зданий большое внимание уделяется изучению прочности стыковых соединений [2].

Следовательно, решение задач сейсмостойкости – это правильный учёт действительной работы несущих конструкций зданий и сооружений. На основе обобщения и анализа большого количества факторов, оказывающие влияние на поведение различных систем зданий и сооружений, при землетрясениях дают возможность анализировать и объективно отразить все характерные особенности зданий и сооружений при сейсмических воздействиях [1,2,6,11,22,23].

В горизонтальных стыках многоэтажных панельных зданий при землетрясении возникают знакопеременные нормальные сдвигающие усилия. Сложность решения горизонтальных стыков обусловлена тем, что на значительной части стыка может происходить нарушение контакта между панелью и бетоном замоноличивания и в результате этого перераспределения усилий, проводящих к опасной их концентрации на небольших участках. Положение усугубляется необходимостью обеспечить на этих же участках опирание плит перекрытий. В последнее время, в 9-этажных панельных зданиях, строящихся в районах 9-бальной сейсмичности используются контактные стыки, так как предложенное решение контактного стыка представляется наиболее перспективным для возведения многоэтажных крупнопанельных зданий в

## ЛИТЕРАТУРА


1. Айзенберг Я.М. Некоторые уроки землетрясения в Армении 7 декабря 1988г. Строительство и Архитектура. Сейсмостойкое строительство, вып.2. М.: 1991, с.2-7.
2. Гельфанд Л.И. Эффективные конструкции стыков крупнопанельных сейсмостойких многоэтажных зданий. //Строительство и Архитектура, сер. Сейсмостойкое Строительство, вып.8. М.: 1991, с.15-20.
3. Карапетян Б.К., Карапетян Н.К. Предпосылки прогнозирования землетрясений и сейсмостойкое строительство в Армянской ССР. Ереван: Изд. «Айастан», 1981. 170с.
4. Карапетян Б.К. Сейсмическое воздействие Спитакского землетрясения 7 декабря 1988 г. и некоторые неотложные задачи. //Науки о земле. Изд. АН АрмССР, XLII, №3. 1989. С.51-57.
5. Мелкумян М.Г. Формирование динамических расчетных моделей при анализе сейсмической реакции железобетонных зданий и их новых конструктивных решений. Ереван: 1993. 93с.
6. Мхитарян Д.А., Айвазян Г.С. Исследование поведения железобетонных изгибаемых элементов на моделях при циклических нагрузках. //Бюллетень по инженерной сейсмологии. 1988. №12. С.123-129.
7. Мхитарян Л.А., Мартиросян Р.П., Тоноян К.А., Григорян Е.К. Анализ инструментальных данных сильных движений Спитакского землетрясения 7 декабря 1988г. //Науки о Земле. Изд. АН АрмССР. 1989. Т.XLII. № 4. С.67-73.
8. Мхитарян Д.А., Мхитарян Л.А. Оценка интенсивности Спитакского землетрясения по данным обследования архитектурных и надгробных памятников. //Строительство и архитектура. Сейсмостойкое строительство, вып.7-8. М.: 1992, с.30-33.
9. Мхитарян Л.А., Мхитарян Д.А. Макросейсмическое обследование архитектурных и надгробных памятников в эпицентральной зоне Спитакского землетрясения 7 декабря 1988г. //Науки о Земле. Изд. АН РА. 1993. Т.XVI. № 2. С.54-56.
10. Мхитарян Д.А., Мхитарян Л.А. Анализ инженерно-сейсмических данных землетрясений, зарегистрированных в 1991-92 годах на территории Армении. //Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. М.: 1999. №1. С.21-23
11. Мхитарян Д.А. Анализ поведения железобетонных несущих конструкций при сейсмическом воздействии. //Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений, М.: 2008. №1. С.19-22.
12. Мхитарян Д.А. Моделирование железобетонных конструкций при сейсмическом воздействии. //Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. М.: 2009. №1. С.20-22.
13. Мхитарян Д.А. Анализ поведения зданий и сооружений различных систем при сейсмическом воздействии. //Сборник научных трудов ИГИС НАН РА. Ереван: 2011. Изд. «Гитутюн», с.450-460.
14. Назаров А.Г. Методы инженерного анализа сейсмических сил. Ереван: Изд. АН Арм. ССР. 1959. 283с.
15. Назаров А.Г. О механическом подобии твердых деформируемых тел. Ереван: Изд.АН Арм.ССР. 1965. 265с.
16. СНРА II-2.084 Сейсмостойкое Строительство. Нормы проектирования. Ереван: 1995. 70с.
17. Ставницер Л.Р. К вопросу о влиянии грунтов на расчетную сейсмостойкость зданий. //Строительная механика и расчет сооружений. № 2. М.: 1990, с.92-94.
18. Хачиян Э.Е. Сейсмическое воздействие на высотные здания и сооружения. Ереван: Изд. «Айастан», 1973. 327с.
19. Хачиян Э.Е. Трагедия Спитака не должна повториться (К 10-летию Спитакского землетрясения). Ереван: Изд. «Воскан Ереванци», 1998. 264с.
20. Хачиян Э.Е. Сейсмическое воздействие и прогноз поведения сооружений. Национальный университет архитектуры и строительства Армении. Ереван: Изд. «Гитутюн» НАН РА, 2005. 555с.
21. Ципенюк И.Ф. Повреждаемость и надежность крупнопанельных зданий при сейсмических воздействиях. //Вопросы инженерной сейсмологии, вып.29, Москва, «Наука», 1988, с.141-153.


**Сведения об авторе:**


**Мхитарян Долорес** – к.т.н., старш. научн. сотр. Института геофизики и инженерной сейсмологии им. А. Назарова НАН РА, г. Гюмри, ул. В.Саркисяна, 5., **тел.:** (093)-89-60-47, **e-mail:** dolores.mhitaryan@yandex.ru

# ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ, СВОДЯЩИХСЯ К ТОЧНО РЕШАЕМЫМ ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ (ГСИУ)

**Мхитарян С.М.**

Рассматривается один класс граничных задач механики сплошной среды, математически описываемых ГСИУ. Эти уравнения представляют собой аналоги известных сингулярных интегральных уравнений (СИУ) с ядрами Коши, Гильберта и родственными с ними ядрами и допускают точные решения.

**1. Введение**. Вслед за СИУ в последние десятилетия интенсивно развивается направление ГСИУ и их приложений в задачах механики сплошной среды, геофизики, акустики, теории потенциала, математической физики и прикладной математики. Параллельно развивалось направление вычислительной математики, связанное с разработкой различных методов вычисления гиперсингулярных интегралов в смысле Адамара. Результаты многочисленных исследований в этих областях подытожены в монографиях [1–3] и в статьях [4–9], где, в основном, рассматриваются ГСИУ с классическим ядром $(s-x)^{-2}$ и соответствующие гиперсингулярные интегралы.

В настоящей работе расширяется класс точно решаемых ГСИУ и наряду с ГСИУ с указанным ядром рассматривается ГСИУ ещё со следующими ядрами:

$$1)\left(\sin\frac{s-x}{2}\right)^{-2};\ 2)\left(\operatorname{sh}\frac{s-x}{2}\right)^{-2};\ 3)\cos\frac{s-x}{2}\left(\sin\frac{s-x}{2}\right)^{-2};\ 4)\operatorname{sh}\frac{s-x}{2}\left(\operatorname{sh}\frac{s-x}{2}\right)^{-2}$$

на одном интервале или на совокупности из произвольного конечного числа интервалов. ГСИУ с указанными ядрами встречаются в смешанных граничных задачах математической теории упругости, в механике трещин при плоской деформации в случае нормального разрыва, при продольном и поперечном сдвигах; в теории установившейся фильтрации жидкости в пористых средах, в гидродинамике в задачах об обтекании жёсткой пластины идеальной жидкостью при потенциальном течении и в других областях прикладного анализа. Замкнутые или точные решения обсуждаемых ГСИУ получаются на основании решений соответствующих СИУ.

**2. Постановка задач и их определяющие ГСИУ**. Здесь вкратце изложим постановку задачи о трещинах в простейшем случае антиплоской деформации. Пусть отнесённое к правой прямоугольной системе координат $Oxyz$ линейно упругое изотропное пространство с модулем сдвига $G$ в плоскости $y=0$ содержит систему $\Omega$ из произвольного конечного числа $n$ сквозных типа бесконечно-ленточных туннельных трещин $\omega_k$ :

$$\Omega=\bigcup_{k=1}^{n}\omega_k;\ \omega_k=\{y=0;\ \ a_k\le x\le b_k;\ \ -\infty<z<\infty\}.$$

Пусть далее берега трещин нагружены симметрически, т.е. верхние (+) и нижние (–) берега трещин нагружены одинаковыми по величине, но противоположными по направлению касательными силами интенсивности $\tau(x)$, не зависящими от координаты $z$: $\tau_{yz}\big|_{y=\pm0}=\tau(x)\ \left(x\in L;\ L=\bigcup_{k=1}^{n}[a_k,b_k]\right)$, где $\tau_{yz}$ – компонента касательных напряжений. Под действием этих сил упругое пространство будет находиться в состоянии антиплоской деформации (продольного сдвига) в направлении оси $Oz$ с базовой плоскостью $Oxy$. Тогда, единственной отличной от нуля компонентой перемещений точек упругого пространства будет компонента перемещений в направлении оси $Oz: u_z=u_z(x,y)$, которая в каждой из полуплоскостей $y<0$ и $y>0$ является гармонической функцией. Ввиду симметрии относительно оси $Ox$ описанная задача о трещинах эквивалента следующей смешанной граничной задаче теории упругости или теории двумерных гармоничных функций для нижней полуплоскости $y<0$:

$$\begin{cases}\Delta u_z = \dfrac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} = 0 \quad \left(-\infty < x < \infty;\ -\infty < y < 0\right) \\ \tau_{yz}\Big|_{y=-0} = G\dfrac{\partial u_z}{\partial y}\Big|_{y=-0} = \tau(x)\ \ (x \in L);\ u_z\Big|_{y=-0} = 0\ \ \left(x \in L';\ L' = (-\infty, \infty)\setminus L\right); \\ \tau_{xz}, \tau_{yz} \to 0 \text{ при } \ x^2 + y^2 \to \infty. \end{cases} \tag{1}$$

В граничной задаче (1) требуется определить перемещения на системе отрезков $L$, т.е. функцию $f(x) = u_z\big|_{y=-0} = u_z(x,y)\big|_{y=-0}$ $(x \in L)$. Предполагается, что функция $f(x)$ непрерывна на $L$ и обладает производной, удовлетворяющей на $L$ условию Гельдера с некоторым показателем $\lambda\ (0 < \alpha \le 1)$, т.е. $f(x) \in C^{1,\alpha}(L)$. Кроме того, вследствие непрерывности эта функция должна удовлетворять условиям

$$f(a_k) = f(b_k) = 0 \quad \left(k = \overline{1,n}\right). \tag{2}$$

После определения функции $f(x)$, раскрытия трещин и плотности дислокаций на берегах трещин будут определяться, соответственно, формулами

$$\Delta(x) = -2f(x),\ \ \Delta'(x) = -2f'(x)\ \ (x \in L).$$

Затем известными формулами [10,11] определяются коэффициенты интенсивности напряжений (КИН). При помощи функции $f(x)$ легко определяются и разрушающие касательные напряжения вне системы трещин на $L'$.

Решение граничной задачи (1) через функцию $f(x)$ представляется интегралом Пуассона для нижней полуплоскости $y \le 0$ [12] (стр.224, ф-ла(3))

$$u_z(x,y) = -\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(s)\,ds}{(s-x)^2 + y^2} \quad (-\infty < x < \infty;\ \ y < 0);\ u(x) = \begin{cases} f(x) & (x \in L); \\ 0 & (x \in L'). \end{cases} \tag{3}$$

Далее исходя из (3), по закону Гука вычислим касательные напряжения $\tau_{yz}$:

$$\tau_{yz} = G\frac{\partial u_z}{\partial y} = -\frac{G}{\pi}\int_L \frac{(s-x)^2 - y^2}{\left[(s-x)^2 + y^2\right]^2}\ f(s)\,ds\ (-\infty < x < \infty;\ \ y < 0).$$

Отсюда предельным переходом $y \to -0$ получим

$$\tau_{yz}\Big|_{y=-0} = -\frac{G}{\pi}\int_L \frac{f(s)\,ds}{(s-x)^2} \quad (-\infty < x < \infty), \tag{4}$$

где интеграл на $L$ при $s = x$ $\left(x \in (a_k, b_k)\right)$ понимается в смысле Адамара:

$$Hf = \lim_{\varepsilon \to +0}\left[\int_{a_k}^{x-\varepsilon}\frac{f(s)\,ds}{(s-x)^2} + \int_{x+\varepsilon}^{b_k}\frac{f(s)\,ds}{(s-x)^2} - \frac{f(x+\varepsilon) + f(x-\varepsilon)}{\varepsilon}\right]\ \left(k = \overline{1,n}\right).$$

Теперь при помощи (4) реализуем первое граничное условие задачи (1). В результате придём к следующему определяющему ГСИУ:

$$\frac{1}{\pi}\int_L \frac{f(s)\,ds}{(s-x)^2} = -\frac{\tau(x)}{G} \quad (x \in L), \tag{5}$$

решение которого должно удовлетворять условиям (2). После определения функции $f(x)$ из ГСИУ касательные напряжения на $L'$ будут определяться уравнением (4) при $x \in L'$.

Отметим, что к решению ГСИУ (5), с точностью до упругих постоянных и заменой обозначений для напряжений, сводятся решения аналогичных задач о трещинах в упругом пространстве при плоской деформации в случаях поперечного сдвига и нормального разрыва. В безразмерных величинах

$$\xi = x/a,\ \eta = s/a;\ \varphi(\xi) = f(a\xi)/a;\ \ g(\xi) = \tau(a\xi)/G;\ \alpha_k = a_k/a,\ \beta_k = b_k/a,\ L_0 = \bigcup_{k=1}^{n}(\alpha_k, \beta_k),$$

где $a$ – некоторый линейный размер $(a \neq 0)$, ГСИУ (5) преобразуется к виду:

$$\frac{1}{\pi}\int_{L_0}\frac{\varphi(\eta)\,d\eta}{(\eta-\xi)^2} = -g(\xi) \quad \left(\xi \in L_0;\ \varphi(\alpha_k) = \varphi(\beta_k) = 0\right). \tag{6}$$

Теперь вместо (6) запишем более общее ГСИУ

$$\frac{1}{\pi}\int_{L_0} K(\eta-\xi)\varphi(\eta)\,d\eta = -g(\xi). \tag{7}$$

Этим ГСИУ с приведеёнными выше ядрами 1) и 3) описываются задачи о напряжённом состоянии упругого пространства с периодической системой прямолинейных трещин или дугообразных трещин при плоской и антиплоской деформациях. Этим же ГСИУ (7) с ядрами 2) и 4) описываются антиплоские задачи о трещинах в упругой полосе.

Пусть теперь упругая плоскость с модулем Юнга $E$ и коэффициентом Пуассона $\nu$ по оси $Ox$ содержит полубесконечную трещину $0 \le x < \infty$, берега которой симметрически нагружены нормальными силами интенсивности $p(x)$. Опять требуется определить функцию $f(x)$ $(0 \le x < \infty)$ – перемещения граничных точек упругой полуплоскости $y \le 0$ на $[0,\infty)$. Можем записать

$$\begin{gathered} v'(x) = -\vartheta\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Sigma(s)\,ds}{s-x} \quad (-\infty < x < \infty); \\ \vartheta = (1-\nu^2)/\pi E;\ v(x) = \begin{cases} f(x) & (0 \le x < \infty); \\ 0 & (-\infty < x \le 0); \end{cases} \quad \Sigma(x) = \begin{cases} p(x) & (x \in (0,\infty)); \\ \sigma(x) & (x \in (-\infty, 0)) \end{cases} \end{gathered} \tag{8}$$

Далее по формуле обращения Гильберта из (8) находим:

$$\Sigma(x) = \frac{1}{\pi^2\vartheta}\int_0^{\infty}\frac{f'(s)\,ds}{s-x} \quad (-\infty < x < \infty). \tag{9}$$

Рассматривая ключевое уравнение (9) на полуоси $0 < x < \infty$, относительно $f'(x)$ придём к следующему СИУ:

$$\frac{1}{\pi^2\vartheta}\int_0^{\infty}\frac{f'(s)\,ds}{s-x} = p(x) \quad (0 < x < \infty), \tag{10}$$

а после интегрирования по частям – к следующему ГСИУ:

$$\frac{1}{\pi^2\vartheta}\int_0^{\infty}\frac{f(s)\,ds}{(s-x)^2} = p(x) \quad (0 < x < \infty;\ f(0) = 0). \tag{11}$$

**3. О решении определяющих ГСИУ**. В частном случае одной трещины по отрезку $[-a,a]$ оси $Ox$, т.е. когда $L = [-a,a]$, ГСИУ (6) после интегрирования по частям преобразуется в следующее СИУ:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi'(\eta)\,d\eta}{\eta-\xi} = -g(\xi) \quad (-1 < \xi < 1;\ \varphi(\pm 1) = 0).$$

Теперь это СИУ обращаем в классе неограниченных на концах отрезка [-1,1] функций [13]:

$$\varphi'(\xi) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-\xi}}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-\eta^2}\,g(\eta)\,d\eta}{\eta-\xi} + \frac{C}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (-1 < \xi < 1)$$

и обе части этого равенства проинтегрируем по $\xi$. Воспользовавшись выражением известного интеграла из [14] (стр.111) и удовлетворяя условиям $\varphi(\pm 1)=0,$ получим решение ГСИУ (6) в виде

$$\varphi(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\ln\frac{1-\xi\eta+\sqrt{(1-\xi^2)(1-\eta^2)}}{1-\xi\eta-\sqrt{(1-\xi^2)(1-\eta^2)}}g(\eta)d\eta \quad (-1\le\xi\le 1).$$

Обращением соответствующих СИУ аналогичным образом, получим точные решения определяющих ГСИУ в случаях ядер 1) – 4).

Далее обращение СИУ (10) в классе интегрируемых функций даёт

$$f'(x)=-\frac{\vartheta}{\sqrt{x}}\int_{0}^{\infty}\frac{\sqrt{s}\,p(s)ds}{s-x} \qquad (0<x<\infty).$$

Проинтегрируем обе части этого равенства по $x$ и примем во внимание условие $f(0)=0$.

В результате для решения ГСИУ (11) окончательно получим:

$$f(x)=-\vartheta\int_{0}^{\infty}\ln\frac{\sqrt{x}+\sqrt{s}}{\left|\sqrt{x}-\sqrt{s}\right|}\;p(s)ds \quad (0\le x<\infty)$$

или после введения безразмерных величин $x=a\xi,\ s=a\eta;\ p_0(\xi)=\vartheta p(d\xi);\ g(\xi)=f(a\xi)/a$ $(a\neq 0)$ можем записать

$$g(\xi)=-\int_{0}^{\infty}\ln\frac{\sqrt{\xi}+\sqrt{\eta}}{\left|\sqrt{\xi}-\sqrt{\eta}\right|}\;p_0(\eta)d\eta \quad (0\le\xi<\infty).$$

Обратимся, наконец, к решению ГСИУ (6) на совокупности интервалов $L_0$. Интегрированием по частям и использованием условий $\varphi(\alpha_k)=\varphi(\beta_k)=0$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$, как выше, это уравнение сведём к следующему СИУ:

$$\frac{1}{\pi}\int_{L_0}\frac{\varphi'(\eta)d\eta}{\eta-\xi}=-g(\xi) \quad \left(\xi\in L_0;\ \varphi(\alpha_k)=\varphi(\beta_k)=0\right).$$

Решение этого СИУ представляется формулой [13,15]

$$\varphi'(\xi)=\frac{(-1)^{n+p}}{\sqrt{\Pi_n(\xi)}}\left[\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{n}(-1)^{n-m}\int_{\alpha_m}^{\beta_m}\frac{\sqrt{\Pi_n(\eta)}\;g(\eta)d\eta}{\eta-\xi}-p_{n-1}(\xi)\right] \tag{12}$$

$$p_{n-1}(\xi)=c_0+c_1\xi+...c_{n-1}\xi^{n-1},\ \prod\nolimits_n(\xi)=\prod_{m=1}^{n}|\xi-\alpha_m||\xi-\beta_m|;\left(\alpha_p<\xi<\beta_p;\ p=\overline{1,n}\right).$$

где $c_j\left(j=\overline{0,n-1}\right)$ – пока неизвестные коэффициенты. Далее в (12) $\xi$ заменим на $\tau$ и по $\tau$ произведём интегрирование от $\alpha_p$ до $\xi$, причем $\alpha_p\le\xi\le\beta_p$ $\left(p=\overline{1,n}\right)$. В результате

$$\varphi(\xi)=\frac{(-1)^{n+p+1}}{\pi}\sum_{m=1}^{n}(-1)^{n-m}\int_{\alpha_m}^{\beta_m}K_{np}(\xi,\eta)\sqrt{\Pi_n(\eta)}\,g(\eta)d\eta+$$

$$+\frac{(-1)^{n+p+1}}{\pi}\int_{\alpha_p}^{\xi}\frac{c_0+c_1\tau+...c_{n-1}\tau^{n-1}}{\sqrt{\Pi_n(\tau)}}d\eta;K_{np}(\xi,\eta)=\int_{\alpha_p}^{\xi}\frac{d\tau}{\sqrt{\Pi_n(\tau)}(\tau-\eta)} \quad \left(\alpha_p\le\xi\le\beta_p;\ p=\overline{1,n}\right)$$

(13)

Из (11) сразу вытекает, что $\varphi(\alpha_p)=0$ $\left(p=\overline{1,n}\right)$. Полагая же в (11) $\xi=\beta_p$ и принимая во внимание условия $\varphi(\beta_p)=0$ $\left(p=\overline{1,n}\right)$, для определения постоянных $c_j=c_{j-1}$ $\left(j=\overline{1,n}\right)$ получим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\sum_{j=1}^{n} L_{pj}^{(n)} C_j = A_p^{(n)} \quad \left(p=\overline{1,n}\right)$$

$$L_{pj}^{(n)} = \int_{\alpha_p}^{\beta_p} \frac{\tau^{j-1} d\tau}{\sqrt{\Pi_n(\tau)}} \quad \left(j=\overline{1,n}\right); \quad A_p^{(n)} = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{n-m+1} \int_{\alpha_p}^{\beta_p} K_{np}\left(\beta_p, \eta\right) \sqrt{\Pi_n(\eta)}\, g(\eta)\, d\eta. \tag{14}$$

Отметим, что при численной реализации СЛАУ (14) входящие в неё интегралы $L_{\rho j}^{(n)}$ и $K_{n\rho}\left(\beta_\rho, \eta\right)$ легко вычисляются по квадратурной формуле Гаусса по чебышевским узлам. Отметим ещё, что в случае двух симметрических интегралов $L_0 = (-1, -\rho) U (\rho, 1)$ $(\rho = b/a)$ СЛАУ существенно упрощается.

**4. Заключение**. В статье вкратце изложены результаты по точному решению нового класса ГСИУ, встречающихся в разнообразных задачах механики сплошной среды и прикладной математики. Дальнейшее различие идей статьи связано с получением квадратурных формул высоких точностей для вычисления гиперсингулярных интегралов с ядрами 1) – 4).

## ЛИТЕРАТУРА


1. J. Hadamard, Lectures of Cauchy`s Problem in Linear Partial Differential Equations, Dover Publications, N. Y., (1952).
2. I. Lifanov, L. Poltavskii, M. Vainikko and A.Polyanin, Hypersingular Integral Equations and Their Applications, 2004 Boca Raton; London: Chapman & Hall/CRC, - Differential and integral equations and their applications ; v. 4, (2004).
3. W.T. Ang, Hypersingular Integral Equations in Fracture Analysis, Woodhead Publishing, Cambridge, (2013).
4. H.R. Kutt, The numerical evaluation of principal value integrals by finite–part integration. Numerische Mathematik, **24**(3) (1975) 205–210.
5. A.C. Kaya and F.Erdogan, On the solution of integral equations with strongly singular kernels, Quart. Appl. Math., **45**(1) (1987) 105–122.
6. P.A. Martin, End-Point Behaviour of Solutions to Hypersingular Integral Equations, Proc. R. Soc. Lond. A, **432** (1991) 301–320.
7. B. Dutta and S. Banerjea, Solution of a hypersingular integral equation in two disjoint intervals. Appl. Math. Lett, **22**(8) (2009) 1281–1285.
8. A. Korsunsky, Gauss–Chebyshev quadrature formulae for strongly singular integrals, Quart. Appl. Math., **56**(3) (1998) 461–472.
9. Youn–Sha Chan, Albert C. Fannjiang and Glausio H. Paulino, Integral equations with hypersingular kernels – theory and applications to fracture mechanics, International Journal of Engineering Science, **41**(2003) (2002) 683–720.
10. Саврук М.П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. //Механика разрушения и прочность материалов. Спр. пособие в четырёх томах. Т.2. Под редакцией Панасюка. Киев: Наукова думка, 1988. 619с.
11. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. Т.1,2. Под ред. Ю. Мураками. М.: Мир, 1990. 1013с.
12. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736с.
13. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640с.
14. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488с.
15. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. М.-Л.: Гостехтеориздат, 1949. 270с.



**Сведения об авторе:**

**Мхитарян Сурен Манукович** – член-корр. НАН РА, доктор ф.м.н.; проф. Институт механики НАН РА. **E-mail:** smkhitaryan39@rambler.ru

# МЕХАНИКА ФОРМОИЗМЕНЕНИЯ КРУГЛОЙ ТРУБЧАТОЙ ЗАГОТОВКИ В КВАДРАТНОЙ МАТРИЦЕ МЕТОДОМ ГИДРОФОРМОВКИ

**Назарян Э.А.**

Проведено исследование процесса деформирования трубчатых заготовок круглого поперечного сечения в квадратной матрице. Поперечные сечения в текущем и исходном состояниях представлены в виде уравнения $n$-ой степени, что позволяет следить за нестационарным процессом формоизменения и характером накопления деформаций. Разработана методика оценки зависимости относительной величины внутреннего давления от радиуса кривизны в диагональном направлении. Показано, что предельная величина окружной деформации по мере увеличения интенсивности упрочнения уменьшается.

**Введение.** Технологические процессы деформирования трубчатых заготовок из алюминиевых сплавов методами гидроформовки, благодаря высокому качеству изготавливаемых изделий, относительно легкому весу и высоким показателям удельной жёсткости и прочности, получили широкое применение в автомобильной и авиационной промышленностях [1]. Гидроформовка – это технологический процесс, при котором относительно тонкостенная трубчатая заготовка круглого поперечного сечения под действием внутреннего давления расширяется и принимает форму фасонной матрицы.

В процессах гидроформовки, как и при любом процессе обработки металлов давлением, происходят два взаимосвязанных явления: изменение формы и размеров исходной заготовки и деформационное упрочнение. При изменении формы и размеров увеличивается момент инерции изделия, приводящий к значительному росту жёсткости, а при деформационном упрочнении меняются технологические показатели деформируемого металла, что приводит к значительному увеличению прочности изделия.

Основной деформацией при гидроформовке является деформация окружного растяжения, реализуемая путём увеличения внутреннего давления. При больших значениях внутреннего давления может произойти разрушение заготовки, а при недостаточной величине – угловая часть изделия может быть заполнена не полностью. Проблема недостаточного заполнения углового участка связана также с механическими свойствами и технологическими характеристиками деформируемых металлов.

Для определения оптимальных величин внутреннего давления и углового радиуса широкое применение получили методы конечных элементов (МКЭ) [2]. В [3] приведены эмпирические формулы для прогнозирования зависимости внутреннего давления от углового радиуса. В [4] предложены приближённые математические модели, позволяющие определять параметры гидроформовки с учётом и без учёта влияния трения между матрицей и заготовкой. В этих работах рассматривается влияние трения для двух случаев: полное отсутствие трения и предельное трение (трение прилипания). Принимается, что очаг пластических деформаций в обоих случаях состоит из контактной и внеконтактной зоны в виде углового радиуса. Для случая полного отсутствия трения предполагается, что имеет место равномерное распределение толщины в обеих зонах, а при предельном трении – линейное распределение толщины в контактной зоне и равномерное распределение толщины – во внеконтактной зоне [4,5]. Основными недостатками в принятых моделях являются: скачкообразное изменение радиуса кривизны на стыке указанных зон от некоторой конечной величины до бесконечности, постоянная величина углового радиуса и линейное распределение толщины в зоне прилипания. Указанные предположения в значительной степени искажают реальную картину деформирования и приводят к недостаточно обоснованным результатам.

Исходя из этого, целью настоящей работы является разработка аналитической модели формоизменения и исследование процесса деформирования трубчатой заготовки в квадратной матрице с учётом изменения толщины и деформационного упрочнения, которая свободна от вышеизложенных допущений и предположений.

**Постановка задачи и исходные уравнения**. Для исследования процесса деформирования трубчатой заготовки в квадратной матрице выберем прямоугольную систему координат $x, y, z$, где координата $z$ направлена по оси симметрии трубчатой заготовки, а $x$ и $y$ – в положительных направлениях (одной четвёртой) угловой части квадратоной матрицы. Предполагается, что характерный размер трубчатой заготовки $t_0/r_0 \ll 1$ ( $t_0, r_0$ – соответственно, исходные величины толщины и радиуса трубчатой заготовки).

В [4] показано, что в процессе свободного деформирования (отсутствия осевой силы) поперечное сечение трубчатой заготовки деформируется без изменения длины $(\varepsilon_z = 0)$. На основе этого и выше принятого предположения: ( $t_0/r_0 \ll 1$ ) контуры трубчатой заготовки в исходном и деформированном состояниях можно представить уравнением (1) (рис.1)

$$x^n + y^n = 2^n, \tag{1}$$

где $n = 2$ характеризует исходный контур поперечного сечения трубчатой заготовки, а линии $n = 4, 8...20$ – текущие формы поперечного сечения в деформированных состояниях.

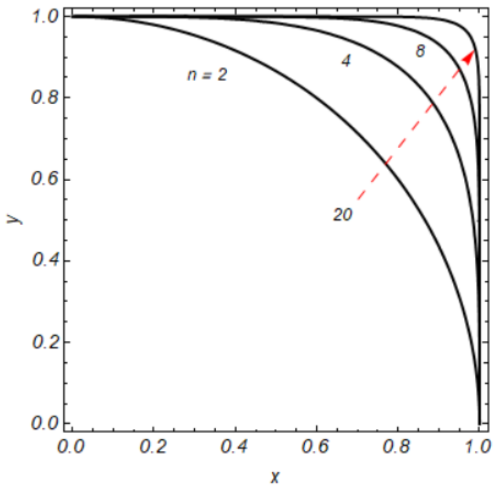



Рис.1. Угловая часть матрицы и трубчатой заготовки, в безразмерных единицах, в исходном $(n = 2)$ и деформированных $(n = 4, 8...20)$ состояниях

Характерной особенностью принятой модели деформирования является непрерывное изменение радиуса кривизны вдоль текущего контура и достаточно интенсивное уменьшение радиуса кривизны в зависимости от параметра $n$. При деформировании без увеличения длины трубчатой заготовки $(\varepsilon_z = 0)$ деформации в окружном направлении и в направлении толщины можно представить в виде [4]

$$\varepsilon_\theta = \ln\frac{L}{L_0}, \quad \varepsilon_t = \ln\frac{t}{t_0}, \tag{2}$$

где $L_0, t_0$ и $L, t$ – соответственно, исходные и текущие длины контуров поперечного сечения и толщины. Исходная длина контура поперечного сечения недеформированной заготовки при $n = 2$ в относительных единицах равна $\pi$, а текущая длина в окружном направлении в некотором промежуточном состоянии деформирования определяется уравнением (3) [6 ]

$$L = \int_0^2 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx. \tag{3}$$

Из (1), определяя $y$ и $dy/dx$, обозначая $x = 2u$ и производя замену переменной в (3), получим

$$L = 2\int_0^2 \sqrt{1 + \left(\frac{u^m}{1 - u^m}\right)^{2-\frac{2}{m}}} du = 2 f(n), \tag{4}$$

где

$$f(n) = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{u^n}{1 - u^n}\right)^{2-\frac{2}{n}}} du. \tag{5}$$

На рис.2 представлен график зависимости $f(n) \Rightarrow n$

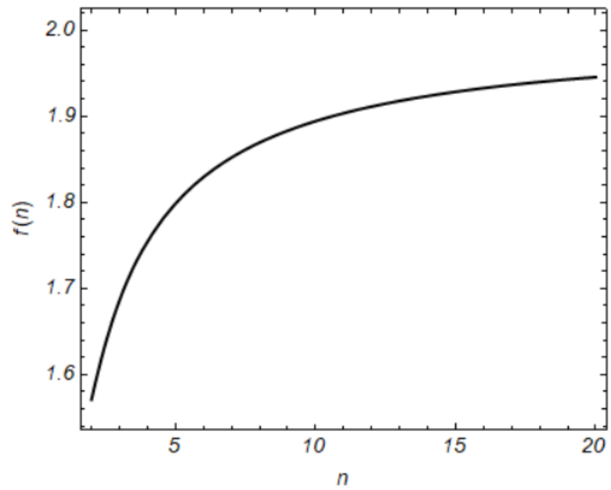



Рис. 2. График зависимости $f(n)$ от параметра $n$

Характер изменения кривой $f(n)$ от параметра $n$ получен численным интегрированием зависимости (5) для дискретных значений $n$ в диапазоне $2 \le n \le 20$. Из сопоставления рис.1 и 2 следует, что в начальном состоянии при $n = 2$ $f(n) = \pi/2$, а при $n \to \infty -$ $f(n) \to 2$. Из этого следует, что при равномерном окружном растяжении углового участка без упрочнения теоретически возможная (предельная) величина окружной деформации $\varepsilon_{\theta_{\max}} \Rightarrow \ln(4/\pi) \approx 0,242$.

**Деформирование трубчатой заготовки в квадратной матрице с учётом упрочнения.** Рассмотрим возможность установления взаимосвязи между внутренним давлением и радиусом углового участка с учётом упрочнения. Для учёта упрочнения зависимость между напряжением текучести и текущей величиной накопленной деформации принято представлять в виде степенной функции [4]

$$\sigma_s = k\varepsilon_i^m, \tag{6}$$

где $k$ и $m$ – параметры деформационного упрочнения, зависящие от механических свойств деформируемого металла: $k = \sigma_b e^m m^{-m}$; $m = \ln(1+\delta)$ ( $\sigma_b, \delta$ – соответственно, напряжение предела прочности и относительное равномерное удлинение при линейном растяжении).

Проводимый анализ основан на безмоментной теории оболочек, согласно которой для тонкостенной оболочки постоянного поперечного сечения уравнение равновесия имеет вид (уравнение Лапласа) [7]

$$\frac{\sigma_\rho}{R_\rho} + \frac{\sigma_\theta}{R_\theta} = \frac{p}{t}, \tag{7}$$

где $\sigma_\rho, \sigma_\theta$ – соответственно, главные направления в меридианальном и окружном направлениях, $R_\rho, R_\theta$ – радиусы кривизны в тех же направлениях , $p$ – внутреннее давление, $t$ – текущая толщина. Для тонкостенной оболочки постоянной кривизны в осевом направлении $R_\rho = \infty$, вследствие чего $\sigma_\rho = 0$ и из (7) при $R_\theta = 2$ следует

$$p = \sigma_\theta \frac{t}{2}. \tag{8}$$

В рассматриваемом случае реализуется следующее напряжённо-деформированное состояние (НДС)**:**

$$\sigma_\theta = \sigma_s; \quad \varepsilon_\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon_i. \tag{9}$$

Из условия постоянства объёма следует, что при исходном радиусе $r = 2$ трубчатой заготовки

$$t \cdot f(n) = t_0 \pi/2 \text{ или } \frac{t}{t_0} = \frac{\pi}{2f(n)}. \quad (10)$$

Подставляя (10) в (8), с учётом принятого НДС и выполняя некоторые преобразования, получим следующую зависимость для внутреннего давления**:**

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\pi}{2f(n)} \left[ \frac{2e}{\sqrt{3}m} \ln \frac{2f(n)}{\pi} \right]^m, \quad (11)$$

где $p_0 = \sigma_b t_0 / 2$.

Из анализа зависимости (11) следует, что множители в правой части противоположно влияют на характер изменения $p/p_0$. Следовательно, зависимость (11) должна иметь экстремум. Продифференцировав (11) $dp/d\,f(n)$ и приравнивая к нулю результат дифференцирования, получим $f(n) = e^m \pi/2$, согласно чему относительная величина максимального внутреннего давления равна $(p/p_0)_{\max} \Rightarrow \left(2/\sqrt{3}\right)^m$.

На рис.3 представлены графики зависимости относительной величины внутреннего давления от текущей длины $f(n)$ при разных значениях параметра $m$ в степенном законе деформационного упрочнения.

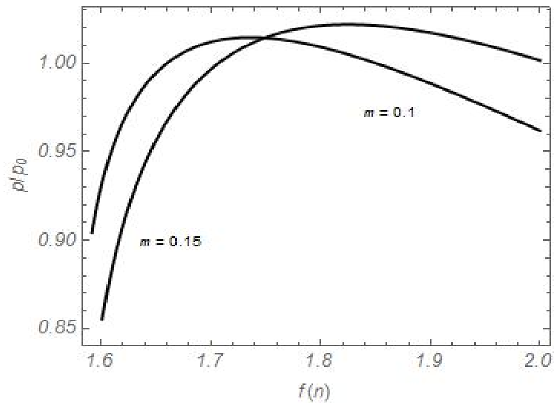



Рис.3. Графики зависимости относительной величины внутреннего давления от $f(n)$ при разных $m$

Из анализа представленных графиков следует, что по мере увеличения $m$ экстремум на графиках смещается вправо, вследствие чего допустимая величина окружной деформации в угловой части растёт. Согласно вышеприведённым расчётам по (11), при $m = 0{,}1$ $f(n) \Rightarrow 1{,}735$, а при $m = 0{,}15$ $f(n) \Rightarrow 1{,}824$. На основе полученных значений $f(n)$ и рис.1 можно в первом приближении оценить величины углового радиуса, при котором происходит разрушение заготовки и становится невозможным дальнейшее деформирование.

**Выводы**

1. Исходя из необходимости обеспечения непрерывности радиуса кривизны вдоль контура поперечного сечения в исходном и текущем состояниях, контур заготовки представлен в виде уравнения $n$-ой степени, позволяющего по мере увеличения параметра $n$ следить за характером накопления деформации при поэтапном формоизменении круглой трубчатой заготовки в изделие квадратного поперечного сечения.
2. На основе разработанной аналитической модели формоизменения трубчатой заготовки в квадратной матрице установлено, что без учёта деформационного упрочнения предельная величина окружной деформации стремится к 0,242, а с учётом упрочнения она зависит от показателя $m$ в степенном законе деформационного упрочнения, причём, по мере роста

этого показателя экстремальное значение относительной величины внутреннего давления смещается вправо.

3. Показано, что предельная относительная величина внутреннего давления в угловом направлении зависит от окружной деформации, радиуса кривизны и механических свойств и технологических характеристик деформируемых материй.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Koc M., Altan T. Prediction of Forming Limits and Parameters in the Tube Hydro forming Process. //International Journal of Machine Tools & Manufacture. 2002. 42, pp. 123-138.
2. Hwang Y., Altan T. Finite Element Analysis of Tube Hydro forming Processes in a Rectangular Die, Finite Elem.Anal. Des., 39 (2002), pp. 1071-1082.
3. Sing H. Fundamentals of Hydro forming Society of Manufacturing Engineers, USA, 2003.
4. Marciniak Z., Dunran J.L., Hu S.J. Mechanics of Sheet Metal Forming, Second ed. Butterworth – Heinemann, Oxford. 2002. P.211.
5. Fuh-Kuo Chen, Shao-Jun Wang, Ray-Hay Lin, A Study of Forming Pressure in the Tube Hydro forming Process //Journal of Materials Processing Technology. 2007, pp. 404-409.
6. Мерзон Г.А., Ященко И.В. Длина, площадь, объем - МЦНМО, 2011 –ISBN 9785940577409.
7. Попов Е.А., Ковалев В.Г., Шубин И.Н.. Технология и автоматизация листовой штамповки. М.: изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. 480 с.


**Сведения об авторе:**


**Назарян Эрнест Агаджанович**, д-р техн.наук, Ереванский государственный университет, факультет физики (374 10) 602322, (374 93)267256, **E-mail:** enazaryan@ysu.am

# К МОДЕЛИРОВАНИЮ И ИДЕНТИФИКАЦИИ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАСТИНЫ С ОТВЕРСТИЯМИ

**Недин Р.Д.**

Описана общая линеаризованная постановка задачи о колебаниях предварительно напряжённого упругого тела. Из неё в рамках гипотез деформирования пластин типа Тимошенко получена постановка задачи об установившихся планарно-изгибных колебаниях функционально-градиентной перфорированной пластины в условиях начального напряжённого состояния. Построен алгоритм численного решения прямой задачи с помощью метода конечных элементов и исследовано влияние неоднородного предварительного напряжённого состояния пластины на её амплитудно-частотные характеристики и резонансные частоты. Приведены результаты вычислительных экспериментов при функционально-градиентных законах изменения материальных модулей, моделирующих сплав W-Cu. Для увеличения точности расчётов в зонах круговых отверстий осуществлялось локальное сгущение конечно-элементной сетки. Предложенная модель позволила задавать произвольный тип предварительного состояния в пластине: как в виде аналитических зависимостей, так и численно. Представлен пример численного эксперимента, в котором в качестве поля предварительных напряжений выступают напряжения, образующиеся в пластине в результате приложения к части её границы начальной механической статической нагрузки. Поле предварительных напряжений в рассматриваемой пластине определялось в результате решения соответствующей задачи статики. Проанализированы возможности идентификации параметров плоского предварительного напряжённого состояния на основе данных измерения частотных характеристик пластины.

**1. Введение.** Современные конструкционные материалы со сложной структурой, включая слоистые и функционально-градиентные композиты, широко используются в военном и гражданском машиностроении, в современном строительстве, при производстве технических систем широкого назначения. Ввиду особенностей технологического процесса изготовления, в таких материалах часто возникают поля неоднородное предварительных напряжений (ПН) и деформаций. Вместе с тем, в производстве ПН часто специально создаются в конструкциях для улучшения их прочностных характеристик. Например, в работе [1] представлены вычислительные и натурные эксперименты по изучению влияния на этапе лазерной нагартовки упругих ПН на деформированную форму образца в виде пластины из алюминиевого сплава. Разработан новый вариант метода учёта влияния ПН на изгибную деформацию и образование остаточных напряжений, в котором за основу берётся известный метод собственных деформаций (eigenstrain) А. Корсунского [2].

В большинстве строительных приложений при решении обратных задач о реконструкции ПН, в основном, анализируются процессы восстановления определённого уровня ПН или величины начального усилия, формирующего поле ПН. В статье [3] разработаны методики определения ПН в бетонных конструкциях. Авторами рассмотрена комбинация как разрушающих, так и неразрушающих методов исследования в сочетании с методом конечных элементов. В работе [4] описан подход к идентификации предварительного натяжения в преднапряжённом бетонном мостовом настиле, базирующийся на измерении динамического отклика. Для описания настила применяется стержневая модель Эйлера–Бернулли и далее МКЭ. При этом, одноосное ПН задаётся в виде начальных усилий в каждом конечном элементе. Отметим, что вариационные и слабые постановки прямых и обратных задач играют важную роль для формулировки операторных соотношений и выбора эффективного метода численного решения. В серии работ [5–11] рассмотрены вопросы моделирования и реконструкции неоднородного предварительного напряжённого состояния в неоднородных тонких пластинах. В настоящей работе исследуются планарно-изгибные колебания функционально-градиентной перфорированной пластины в условиях начального напряжённого состояния.

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим задачу об установившихся колебаниях тонкой упругой изотропной неоднородной пластины с плоским сечением срединной поверхности $S$, жёстко закреплённой на части границы $l_u$, под действием произвольной периодически меняющейся нагрузки $P_k e^{i\omega t}$ ($\omega$ – частота установившихся колебаний, $k = 1,2,3$), приложенной к части границы $l_\sigma$. Для общности будем считать, что все характеристики пластины: $\rho$ – плотность, $\lambda$ – параметр Ламе для плоского напряжённого состояния, $\mu$ – модуль сдвига, заданы в виде зависимостей от координат $x_1, x_2, x_3$. Пусть в пластине имеется объёмное распределение ПН, заданное компонентами соответствующего тензора $\sigma_{ij}^0 = \sigma_{ij}^0(x_1, x_2, x_3)$, где $i, j = 1,2,3$. Согласно теории пластин Тимошенко, соответствующие гипотезы с добавлением планарной составляющей перемещений будут иметь вид:

$$u_1 = \theta_1 x_3 + \zeta_1, \qquad u_2 = \theta_2 x_3 + \zeta_2, \qquad u_3 = w, \tag{2.1}$$

где $\theta_\alpha = \theta_\alpha(x_\beta)$ – углы поворота нормали $n$ относительно осей $x_\alpha$, $\zeta_\alpha = \zeta_\alpha(x_\beta)$ – перемещения в срединной плоскости пластины, $w = w(x_\beta)$ – прогиб пластины (здесь $\alpha, \beta = 1,2$). На основании вариационного принципа для предварительно напряжённого упругого тела в рамках линеаризованной модели [11] и с учётом гипотез деформирования (2.1) постановка краевой задачи формулируется в виде:

$$Q_{\alpha\beta,\beta} - S_\alpha + \omega^2(\mathrm{P}_1\zeta_\alpha + \mathrm{P}_2\theta_\alpha) = 0, \qquad R_{\alpha\beta,\beta} + \omega^2(\mathrm{P}_0\zeta_\alpha + \mathrm{P}_1\theta_\alpha) = 0, \qquad T_{\alpha,a} + \mathrm{P}_0\omega^2 w = 0, \tag{2.2}$$

$$\begin{gathered} w|_{l_u} = 0, \qquad \zeta_a|_{l_u} = 0, \qquad \theta_\alpha|_{l_u} = 0, \\ Q_{\alpha\beta}n_\beta|_{l_\sigma} = 0, \qquad R_{\alpha\beta}n_\beta|_{l_\sigma} = P_\alpha, \qquad T_\alpha n_\alpha|_{l_\sigma} = P_3, \end{gathered} \tag{2.3}$$

где обозначено:

$$Q_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}(\Lambda_2\theta_{m,m} + \Lambda_1\zeta_{m,m}) + \mathrm{M}_2(\theta_{\alpha,\beta} + \theta_{\beta,\alpha}) + \mathrm{M}_1(\zeta_{\alpha,\beta} + \zeta_{\beta,\alpha}) + \Sigma_{m\beta}^2\theta_{\alpha,m} + \Sigma_{m\beta}^1\zeta_{\alpha,m} + \Sigma_{\beta 3}^1\theta_\alpha,$$

$$R_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}(\Lambda_1\theta_{m,m} + \Lambda_0\zeta_{m,m}) + \mathrm{M}_1(\theta_{\alpha,\beta} + \theta_{\beta,\alpha}) + \mathrm{M}_0(\zeta_{\alpha,\beta} + \zeta_{\beta,\alpha}) + \Sigma_{m\beta}^1\theta_{\alpha,m} + \Sigma_{m\beta}^0\zeta_{\alpha,m} + \Sigma_{\beta 3}^0\theta_\alpha,$$

$$S_\alpha = \mathrm{M}_0(w,_\alpha + \theta_\alpha) + \Sigma_{m3}^1\theta_{\alpha,m} + \Sigma_{m3}^0\zeta_{\alpha,m} + \Sigma_{33}^0\theta_\alpha, \qquad T_\alpha = \mathrm{M}_0(w,_\alpha + \theta_\alpha) + \Sigma_{\alpha m}^0 w,_m,$$

$$G_p = \int_{-h/2}^{h/2} g x_3^p dx_3, \qquad G_p = \left\{\Lambda_p, \mathrm{M}_p, \mathrm{P}_p, \Sigma_{\alpha\beta}^p\right\}, \qquad g = \left\{\lambda, \mu, \rho, \sigma_{\alpha\beta}^0\right\} \quad (\alpha, \beta, m = 1,2, \quad p = 0,1,2),$$

$\mathrm{P}_p$ – интегральные характеристики плотности ($p = 0,1,2$), $m$ – индекс, по которому осуществляется суммирование, $P_\alpha$ – компоненты вектора нагрузки в плоскости $S$ пластины, $P_3$ – интенсивность изгибной нагрузки. Введённые функции $G_p$ представляют собой обобщение закона для интегральных характеристик $\Lambda_p, \mathrm{M}_p, \mathrm{P}_p, \Sigma_{\alpha\beta}^p$, выражаемых через соответствующие параметры $\lambda$, $\mu$, $\rho$, $\sigma_{\alpha\beta}^0$, например: $\Sigma_{12}^2 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12}^0 x_3^2 dx_3$, $\mathrm{P}_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho x_3 dx_3$.

Отметим, что здесь рассматриваются совместные планарно-изгибные колебания пластины, и задача в такой постановке может быть сведена к раздельным задачам о планарных и изгибных колебаниях, но только при выполнении дополнительных условий симметрии, описанных в работе [11]. Для цельной пластины с постоянными характеристиками и однородным полем ПН (по всем координатам) эти условия выполняются автоматически, и, следовательно, задачу для пластины можно решать по отдельности для каждого из режимов колебаний.

Обозначим буквами $\Theta_\alpha$, $\mathrm{Z}_\alpha$, $W$ пробные функции, удовлетворяющие тем же главным условиям, что и, соответственно, функции $\theta_\alpha$, $\zeta_\alpha$, $w$: $\Theta_\alpha\big|_{S_u} = 0$, $\mathrm{Z}_\alpha\big|_{S_u} = 0$, $W\big|_{S_u} = 0$. Тогда, согласно гипотезам (2.1) и граничным условиям для пробных функций, слабая постановка сформулированной задачи примет вид:

$$\begin{gathered} \int_{l_\sigma}\left(P_\alpha \mathrm{Z}_\alpha + P_3 W\right)dl - \int_S \left\{Q_{\alpha\beta}\Theta_{\alpha,\beta} + R_{\alpha\beta}\mathrm{Z}_{\alpha,\beta} + S_\alpha\Theta_\alpha + T_\alpha W,_\alpha - \right. \\ \left. -\omega^2\left[\mathrm{P}_2\theta_\alpha\Theta_\alpha + \mathrm{P}_1\left(\theta_\alpha \mathrm{Z}_\alpha + \zeta_\alpha\Theta_\alpha\right) + \mathrm{P}_0\left(\zeta_\alpha \mathrm{Z}_\alpha + wW\right)\right]\right\} dS = 0\,. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Будем считать, что пластина выполнена из функционально-градиентного материала, свойства которого непрерывно меняются по поперечной координате в соответствии с обобщающим законом неоднородности $F$ для материальных параметров пластины $\lambda$, $\mu$, $\rho$:

$$F(x_3) = (F_1 - F_2)\left(\frac{x_3 + 0{,}5h}{h}\right)^n + F_2. \tag{2.5}$$

Здесь: $F_1$ и $F_2$ – физико-механические характеристики материала на поверхностях пластины $x_3 = \pm h/2$. Условимся, что в рамках плоского напряжённого состояния поле ПН в пластине не зависит от поперечной координаты, то есть $\sigma_{\alpha\beta}^0 = \sigma_{\alpha\beta}^0(x_1, x_2)$, где $\alpha, \beta = 1,2$. В этом случае входящие в (7) слагаемые могут быть представлены в виде:

$$
\begin{aligned}
&Q_{11} = \Lambda_2\left(\theta_{1,1}+\theta_{2,2}\right)+\Lambda_1\left(\zeta_{1,1}+\zeta_{2,2}\right)+2\mathrm{M}_2\theta_{1,1}+2\mathrm{M}_1\zeta_{1,1}+\Sigma^2_{11}\theta_{1,1}+\Sigma^2_{12}\theta_{1,2}+\Sigma^1_{11}\zeta_{1,1}+\Sigma^1_{12}\zeta_{1,2},\\
&Q_{22} = \Lambda_2\left(\theta_{1,1}+\theta_{2,2}\right)+\Lambda_1\left(\zeta_{1,1}+\zeta_{2,2}\right)+2\mathrm{M}_2\theta_{2,2}+2\mathrm{M}_1\zeta_{2,2}+\Sigma^2_{12}\theta_{2,1}+\Sigma^2_{22}\theta_{2,2}+\Sigma^1_{12}\zeta_{2,1}+\Sigma^1_{22}\zeta_{2,2},\\
&Q_{12} = \mathrm{M}_2(\theta_{1,2}+\theta_{2,1})+\mathrm{M}_1(\zeta_{1,2}+\zeta_{2,1})+\Sigma^2_{12}\theta_{1,1}+\Sigma^2_{22}\theta_{1,2}+\Sigma^1_{12}\zeta_{1,1}+\Sigma^1_{22}\zeta_{1,2},\\
&Q_{21} = \mathrm{M}_2(\theta_{1,2}+\theta_{2,1})+\mathrm{M}_1(\zeta_{1,2}+\zeta_{2,1})+\Sigma^2_{11}\theta_{2,1}+\Sigma^2_{12}\theta_{2,2}+\Sigma^1_{11}\zeta_{2,1}+\Sigma^1_{12}\zeta_{2,2},\\
&R_{11} = \Lambda_1\left(\theta_{1,1}+\theta_{2,2}\right)+\Lambda_0\left(\zeta_{1,1}+\zeta_{2,2}\right)+2\mathrm{M}_1\theta_{1,1}+2\mathrm{M}_0\zeta_{1,1}+\Sigma^1_{11}\theta_{1,1}+\Sigma^1_{12}\theta_{1,2}+\Sigma^0_{11}\zeta_{1,1}+\Sigma^0_{12}\zeta_{1,2},\\
&R_{22} = \Lambda_1\left(\theta_{1,1}+\theta_{2,2}\right)+\Lambda_0\left(\zeta_{1,1}+\zeta_{2,2}\right)+2M_1\theta_{2,2}+2M_0\zeta_{2,2}+\Sigma^1_{12}\theta_{2,1}+\Sigma^1_{22}\theta_{2,2}+\Sigma^0_{12}\zeta_{2,1}+\Sigma^0_{22}\zeta_{2,2},\\
&R_{12} = \mathrm{M}_1(\theta_{1,2}+\theta_{2,1})+\mathrm{M}_0(\zeta_{1,2}+\zeta_{2,1})+\Sigma^1_{12}\theta_{1,1}+\Sigma^1_{22}\theta_{1,2}+\Sigma^0_{12}\zeta_{1,1}+\Sigma^0_{22}\zeta_{1,2},\\
&R_{21} = \mathrm{M}_1(\theta_{1,2}+\theta_{2,1})+\mathrm{M}_0(\zeta_{1,2}+\zeta_{2,1})+\Sigma^1_{11}\theta_{2,1}+\Sigma^1_{12}\theta_{2,2}+\Sigma^0_{11}\zeta_{2,1}+\Sigma^0_{12}\zeta_{2,2},\\
&S_1 = \mathrm{M}_0(w,_1+\theta_1)_1, \quad S_2 = \mathrm{M}_0(w,_2+\theta_2),\\
&T_1 = \mathrm{M}_0(w,_1+\theta_1)+\Sigma^0_{11}w,_1+\Sigma^0_{12}w,_2, \quad T_2 = \mathrm{M}_0(w,_2+\theta_2)+\Sigma^0_{12}w,_1+\Sigma^0_{22}w,_2.
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

Осреднённые характеристики для ПН с учётом принятых гипотез станут следующими:

$$
\Sigma^0_{\alpha\beta} = \int\limits_{-h/2}^{h/2}\sigma^0_{\alpha\beta}dx_3 = h\sigma^0_{\alpha\beta}, \qquad \Sigma^1_{\alpha\beta} = \int\limits_{-h/2}^{h/2}\sigma^0_{\alpha\beta}x_3\,dx_3 = 0, \qquad \Sigma^2_{\alpha\beta} = \int\limits_{-h/2}^{h/2}\sigma^0_{\alpha\beta}x_3^2dx_3 = \frac{1}{12}h^3\sigma^0_{\alpha\beta}, \tag{2.7}
$$

Осреднённые характеристики материала с учётом того, что он является функционально-градиентным (см. (2.5)), при $n=2$ примут вид:

$$
F_0 = \int\limits_{-h/2}^{h/2}F dx_3 = \frac{1}{3}\left(F_1+2F_2\right)h,\ F_1 = \int\limits_{-h/2}^{h/2}Fx_3\,dx_3 = \frac{1}{12}\left(F_1-F_2\right)h^2,\ F_2 = \int\limits_{-h/2}^{h/2}Fx_3^2dx_3 = \left(\frac{1}{30}F_1+\frac{1}{20}F_2\right)h^3. \tag{2.8}
$$

Таким образом, задача об установившихся планарно-изгибных колебаниях пластины в условиях плоского напряжённого состояния при осреднённых интегральных характеристиках (2.7)-(2.8) сводится к исследованию слабой постановки (2.4). На её основе изучено влияние неоднородного предварительного напряжённого состояния перфорированной прямоугольной пластины на её амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) и резонансные частоты.

**3. Вычислительные эксперименты**. Задача решалась численно с помощью МКЭ для различных функционально-градиентных законов, моделирующих металлокерамики и металлические сплавы. Для увеличения точности расчётов в зонах круговых отверстий использовано локальное сгущение конечно-элементной сетки. Проведён анализ влияния различных типов неоднородного предварительного напряжённого состояния пластины на её динамические характеристики. Важно, что предложенная модель позволяет задавать в пластине предварительное состояние произвольно: как в виде аналитических зависимостей, так и численно. Проведён численный эксперимент, когда в качестве ПН выступают поля напряжений, образованные в пластине в результате приложения к части её границы некоторой начальной механической статической нагрузки. Для отыскания в рассматриваемой пластине такого поля дополнительно решалась соответствующая задача статики, и определялись поля предварительных перемещений $u_1^0$, $u_2^0$ и ПН $\sigma^0_{11}$, $\sigma^0_{12}$, $\sigma^0_{22}$; пластина подвергалась начальному растяжению в направлении оси $x_1$ за счёт приложения механической нагрузки $p_1=150$ МПа (рис.1). При этом, использованы следующие параметры: $l=1{,}0$ м (размер пластины вдоль оси $x_1$); $b=0{,}3$ м (размер пластины вдоль оси $x_2$); $h=0{,}05$ м; материалы фаз медь (фаза $F_1$) и вольфрам (фаза $F_2$), у которых $E_1=110$ ГПа, $\nu_1=0{,}35$, $\rho_1=8900$ кг/м$^3$, $E_2=350$ ГПа, $\nu_2=0{,}29$, $\rho_2=19300$ кг/м$^3$; в пластине имеется 10 сквозных отверстий диаметром 0,021 м.

На рис.1 справа представлены АЧХ пластины, вычисленные в точке ($l$, 0) без учёта и с учётом поля ПН; при этом, значения амплитуд колебаний равны $|w|\times 0{,}1$ м, значения частот колебаний $f$ приведены в Гц. По построенным кривым видно, что выбранное неоднородное поле ПН, образовавшееся в результате приложения механической нагрузки, вносит существенный вклад в их изменение и сдвиг резонансных частот. Аналогичный анализ влияния различных типов однородного и неоднородного предварительно напряжённого состояния на акустические характеристики пластин при планарных колебаниях, а также при изгибных колебаниях в рамках классической модели Кирхгофа был проведён в работах [9-10].

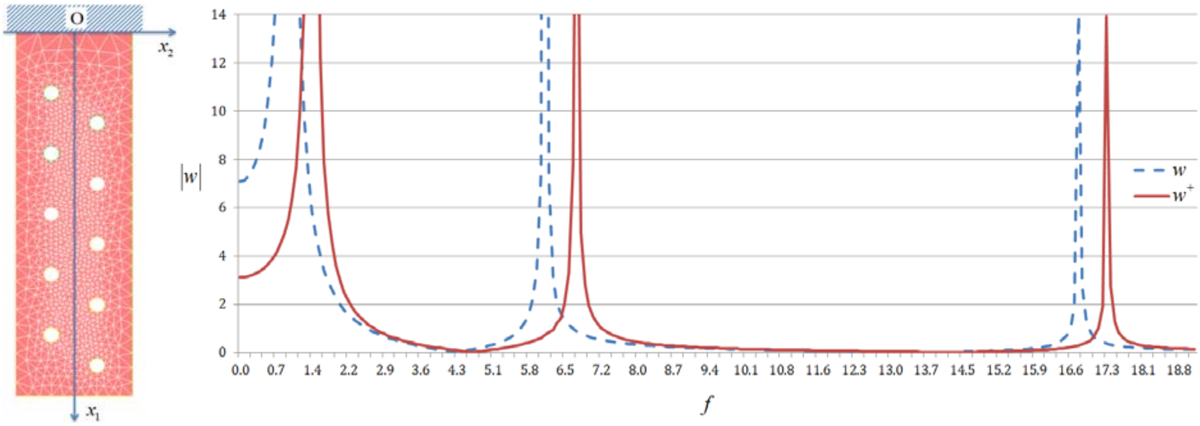



**Рис.1.** Слева: конечноэлементное разбиение пластины. Справа: АЧХ пластины в точке ($l$,0) без учёта ($w$, штриховая линия) и с учётом поля ПН ($w^+$, сплошная линия).

Предложенная для описания колебаний предварительно напряжённой пластины модель позволяет задавать произвольную геометрию сечения пластины, в том числе с отверстиями, учитывать неоднородность материала (в плоскости пластины и по толщине), а также предварительное напряжённое состояние в пластине как в виде аналитических зависимостей, так и численно.

**4. Идентификация ПН.** Полученные результаты анализа влияния неоднородного предварительного напряжённо-деформированного состояния на АЧХ и резонансные частоты могут быть положены в основу изучения обратных задач, когда требуется реконструкция параметров ПН на базе акустического зондирования. Например, для рассмотренной перфорированной пластины на основе данных акустического зондирования можно поставить задачу восстановления параметра ПН. При зондировании нагрузкой, действующей в плоскости пластины, согласно постановке задачи для планарных колебаний пластины,

$$R_{11,1}+R_{12,2}+\omega^2\mathrm{P}_0\zeta_1=0,\quad R_{21,1}+R_{22,2}+\omega^2\mathrm{P}_0\zeta_2=0, \tag{4.1}$$

где функции имеют вид:

$$R_{11}=\Lambda_0\left(\zeta_{1,1}+\zeta_{2,2}\right)+2\mathrm{M}_0\zeta_{1,1}+\Sigma_{11}^0\zeta_{1,1}+\Sigma_{12}^0\zeta_{1,2},\qquad R_{12}=\mathrm{M}_0(\zeta_{1,2}+\zeta_{2,1})+\Sigma_{12}^0\zeta_{1,1}+\Sigma_{22}^0\zeta_{1,2},$$

$$R_{22}=\Lambda_0\left(\zeta_{1,1}+\zeta_{2,2}\right)+2\mathrm{M}_0\zeta_{2,2}+\Sigma_{12}^0\zeta_{2,1}+\Sigma_{22}^0\zeta_{2,2},\qquad R_{21}=\mathrm{M}_0(\zeta_{1,2}+\zeta_{2,1})+\Sigma_{11}^0\zeta_{2,1}+\Sigma_{12}^0\zeta_{2,2}.$$

Слабая постановка при этом будет выглядеть следующим образом:

$$0=\int_{l_\sigma}\left(P_1Z_1+P_2Z_2\right)dl-\int_S\Big(R_{11}Z_{1,1}+R_{12}Z_{1,2}+R_{21}Z_{2,1}+R_{22}Z_{2,2}-\omega^2\mathrm{P}_0(\zeta_1Z_1+\zeta_2Z_2)\Big)dS,$$

Рассмотрим модельную ситуацию, когда известна априорная информация о виде начальной механической нагрузки, вызвавшей предварительное состояние пластины. Так как компоненты тензора ПН линейно зависят от начальной нагрузки, то можно записать: $\Sigma_{\alpha\beta}^0=ph\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}^0$, где $p$ – интенсивность начальной нагрузки, приложенной к части свободной границы пластины, $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}^0=\sigma_{\alpha\beta}^0/p$ –характерное поле ПН с известной структурой. С учётом этого представления в статическом случае (при $\omega=0$) на основе уравнений движения (4.1) получается формула:

$$p=-\frac{1}{h}\frac{\left(\Lambda_0+2\mathrm{M}_0\right)\zeta_{1,11}+\left(\Lambda_0+\mathrm{M}_0\right)\zeta_{2,12}+\mathrm{M}_0\zeta_{1,22}}{\left[\tilde{\sigma}_{11}^0\zeta_{1,1}+\tilde{\sigma}_{12}^0\zeta_{1,2}\right]_{,1}+\left[\tilde{\sigma}_{12}^0\zeta_{1,1}+\tilde{\sigma}_{22}^0\zeta_{1,2}\right]_{,2}}, \tag{4.2}$$

которая позволяет определять параметр $p$, исходя из набора данных измерений планарных компонент смещения $\zeta_1,\zeta_2$ в точках пластины. Затем по этим значениям можно построить функции компонент перемещений, например, с помощью сплайн-интерполяции и далее выразить первые и вторые производные перемещений, входящие в формулу (4.2). Полученная формула даёт возможность проводить вычислительные эксперименты по реконструкции параметра ПН $p$ для различных видов начальной механической нагрузки.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант 18-71-10045).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Hu Y., Li Z., Yu X., Yao Z. Effect of elastic prestress on the laser peen forming of aluminum alloy 2024-T351: Experiments and eigenstrain-based modeling. //J. Mater. Process. Tech., 2015, vol. 221, pp. 214-224. DOI
2. Korsunsky A.M. Residual elastic strain due to laser shock peening: Modelling by eigenstrain distribution. //J. Strain Anal. Eng., 2006, vol. 41, no. 3, pp. 195-204. DOI
3. Bagge N., Nilimaa J., Elfgren L. In-situ methods to determine residual prestress forces in concrete bridges. //Eng. Struct., 2017, vol. 135, pp. 41-52. DOI
4. Lu Z.R., Law S.S. Identification of prestress force from measured structural responses. Mech. Syst. Signal Process., 2006, vol. 20, pp. 2186-2199. DOI
5. Vatulyan A.O., Nedin R.D. On the reconstruction of inhomogeneous residual stress. Vestnik SPbGU. Matematika. Mekhanika. Astronomiya – Vestnik St. Petersburg University. Mathematics, 2011, no. 1. pp. 38-44.
6. Nedin R.D., Vatulyan A.O. Inverse problem of non-homogeneous residual stress identification in thin plates. Int. J. Solid. Struct., 2013, vol. 50, pp. 2107-2114. DOI
7. Nedin R.D., Vatulyan A.O. Concerning one approach to the reconstruction of heterogeneous residual stress in plate. //ZAMM, 2014, vol. 94, pp. 142-149. DOI
8. Dudarev V.V., Nedin R.D., Vatulyan A.O. Nondestructive identification of inhomogeneous residual stress state in deformable bodies on the basis of the acoustic sounding method. //Adv. Mater. Res., 2014, vol. 996, pp. 409-414. DOI
9. Ватульян А.О., Дударев В.В., Недин Р.Д. Предварительные напряжения: моделирование и идентификация. Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2014. 206 с.
10. Nedin R., Dudarev V., Vatulyan A. Some aspects of modeling and identification of inhomogeneous residual stress.// Eng. Struct., 2017, vol. 151, pp. 391-405. DOI
11. Nedin R.D., Vatulyan A.O., Bogachev I.V. Direct and inverse problems for prestressed functionally graded plates in the framework of the Timoshenko model. //Math. Meth. Appl. Sci., 2018, vol. 41, pp. 1600-1618. DOI

## Information about authors:

**Nedin Rostislav Dmitrievich** – Associate Professor, Southern Federal University, I.I. Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences, +7 (863) 2975 111; Senior Researcher, Vladikavkaz Scientific Center of Russian Academy of Sciences, Southern Mathematical Institute, +7 8672 53-98-61. **E-mail:** rdn90@bk.ru

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ЗАДАЧАХ НЕПРЕРЫВНОГО РОСТА ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ

**Нестеров Т.К.**

Рассмотрен метод граничных элементов для численного моделирования плоских задач поверхностного роста предварительно ненапряжёнными элементами в упругом изотропном теле с гладкой границей. Получено граничное интегральное уравнение для поиска скоростей перемещений на границе растущего тела. Рассматривается общий вид силовых граничных условий на границе тела. Предложен метод численной дискретизации границы во времени, на которой происходит процесс роста.

В представленной работе предлагается численная процедура на основе метода граничных элементов для моделирования аддитивного изготовления детали, обладающей цилиндрической формой. Аналитически задача роста была решена в [1], была предложена процедура численного моделирования на основе метода конечных элементов [2] и метода граничных элементов [3] для наращивания толстостенного цилиндра, обладающего свойством осевой симметрии, решена задача роста в конечных деформациях [4]. В настоящей работе предполагаем, что процесс наращивания производится ненапряжёнными элементами на части поверхности цилиндра. Поставленная краевая задача решается в рамках модели непрерывного поверхностного роста, основным отличием которой является то, что задача решается в скоростях исходных величин. Предолагается, что на границе $\Gamma$ заданы силовые граничные условия, а закон роста части границы – известен.

Рассматривается случай напряжённо-деформированного состояния тела, которое изготовлено из изотропного, упругого материала, характеристики которого описываются модулем Юнга $E$ и коэффициентом Пуассона $\nu$. На $\Gamma_1$ (нерастущей части границы $\Gamma$) действуют переменное во времени и пространству давление $p_1(x,t)$ и касательные усилия $g_1(x,t)$, на части растущей границы $\Gamma_2(t)$ давление $p_2(x,t)$ и касательные усилия $g_2(x,t)$

Как известно, плоская задача теории упругости для упругого изотропного тела может быть численно решена с помощью метода граничных элементов. Основой метода является решение граничного интегрального уравнения, которое имеет вид [5,6]:

$$c_{ij}(\xi)u_j(\xi,t) = \int\limits_{\Gamma}\Big[G_{ij}(x,\xi)P_i(x,t) - F_{ij}(x,\xi)u_j(x,t)\Big]dx, \tag{1}$$

где $F(x,\xi)$, $G(x,\xi)$ – фундаментальные решения, $P(x,t)$, $u(x,t)$ – усилия и смещения на границе, $c_{ij}(\xi)$ – множитель, зависящий от гладкости границы, $\xi \in \Gamma$ – точка приложения нагрузки.

В случае задачи роста, т.е. когда часть границы $\Gamma_2(t) \in \Gamma(t)$, изменяется со временем, при этом $\Gamma_1 \bigcup \Gamma_2(t) = \Gamma(t)$, $\Gamma_1 \bigcap \Gamma_2(t) = \varnothing$, уравнение (1) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} c_{ij}(\xi(t))u_j(\xi(t),t) = \int\limits_{\Gamma_1}\Big[G_{ij}(x,\xi)P_{1,i}(x,t) - F_{ij}(x,\xi)u_j(x,t)\Big]dx + \\ + \int\limits_{\Gamma_2(t)}\Big[G_{ij}(x(t),\xi(t))P_{2,i}(x(t),t) - F_{ij}(x(t),\xi(t))u_j(x(t),t)\Big]dx. \end{aligned} \tag{2}$$

Отметим, что т.к. основное тело (тело до начала наращивания) может быть предварительно напряженным и деформированным, а наращивание происходит свободными от напряжений элементами, то на границе роста возникает разрыв в напряжениях [7], чтобы избежать этого, продифференцируем по времени граничное интегральное уравнение (2)

$$\frac{\partial c_{ij}(\xi(t)u_j(\xi(t),t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Gamma_1}\left[G_{ij}(x,\xi)P_{1,i}(x,t)-F_{ij}(x,\xi)u_j(x,t)\right]dx$$
$$+\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Gamma_2(t)}\left[G_{ij}(x(t),\xi(t))P_{2,i}(x(t),t)-F_{ij}(x(t),\xi(t))u_j(x(t),t)\right]dx, \tag{3}$$

и заметим, что если прямо продифференцировать уравнение (3), то полученное выражение может стать крайне трудоёмким для вычисления и программирования. Основной проблемой является то, что граница изменяется со временем. Поэтому предложим альтернативную процедуру численного решения уравнения (3), основанную на дискретизации растущей границы во времени. Для этого построим набор границ $\Gamma_2(t_k)$ в определённые моменты времени $t_k$, $k=1,2,\ldots,n$ и будем уже рассматривать уравнение (3) для каждой границы из построенного набора. Таким образом, уравнение (3) может быть сведено к

$$c_{ij}(\xi(t_k))\frac{\partial u_j(\xi(t_k),t)}{\partial t}=\int\limits_{\Gamma_1}G_{ij}(x,\xi)\frac{\partial P_{1,i}(x,t)}{\partial t}-F_{ij}(x,\xi)\frac{\partial u_j(x,t)}{\partial t}dx+$$
$$+\int\limits_{\Gamma_2(t_k)}G_{ij}(x(t_k),\xi(t_k))\left.\frac{\partial P_{2,i}(x(t),t)}{\partial t}\right|_{t=t_k}-F_{ij}(x(t_k),\xi(t_k))\left.\frac{\partial u_j(x(t),t)}{\partial t}\right|_{t=t_k}dx. \tag{4}$$

Граничные условия в данном случае будут иметь вид:

$$\begin{aligned}&P_1(x,t)=p_1(x,t)\bar{n}_1(x)+g_1(x,t)\bar{\tau}_1(x),\quad x\in\Gamma_1;\\&P_2(x(t),t)=p_2(x(t),t)\bar{n}_2(x(t)))+g_2(x(t),t)\bar{\tau}_2(x(t)),\quad x\in\Gamma_2(t),\end{aligned}\tag{5}$$

здесь $p_1(x,t)$, $g_1(x,t)$ – нормальные и касательные усилия на нерастущей границе, а $\bar{n}_1(x)$, $\bar{\tau}_1(x)$ – нормальный и касательный векторы, $p_2(x(t),t)$, $g_2(x(t),t)$ – нормальные и касательные усилия на растущей границе, $\bar{n}_2(x(t))$, $\bar{\tau}_2(x(t))$ – нормальный и касательный векторы к растущей границе. Отметим что $\Gamma_2(t)$ изменяется со временем по заранее заданному, известному закону наращивания $x(t)$. Теперь необходимо продифференцировать по времени условия на границе (6), чтобы можно было учесть их в уравнении (4).

$$\frac{\partial P_1(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial p_1(x,t)\bar{n}_1(x)}{\partial t}+\frac{\partial g_1(x,t)\bar{\tau}_1(x)}{\partial t},\quad x\in\Gamma_1;$$
$$\frac{\partial P_2(x(t),t)}{\partial t}=\frac{\partial(p_2(x(t),t)\bar{n}_2(x(t)))}{\partial t}+\frac{\partial(g_2(x(t),t)\bar{\tau}_2(x(t)))}{\partial},\quad x\in\Gamma_2(t).$$
$$\frac{\partial P_1(x,t)}{\partial t}=\dot{p}_1(x,t)\bar{n}_1(x)+\dot{g}_1(x,t)\bar{\tau}_1(x),\quad x\in\Gamma_1;$$
$$\frac{\partial P_2(x(t),t)}{\partial t}=\left[\dot{p}_2(x(t),t)\bar{n}_2(x(t))+p_2(x(t),t)\dot{\bar{n}}_2(x(t))\right.$$
$$\left.+\dot{g}_2(x(t),t)\bar{\tau}_2(x(t))+g_2(x(t),t)\dot{\bar{\tau}}_2(x(t))\right]\dot{x}(t),\quad x\in\Gamma_2(t). \tag{6}$$

Далее подставляем граничные условия (6) в граничное интегральное уравнение (4) и решаем его в каждый момент времени $t_k$ с помощью методики численного решения, разработанной, к примеру, в [5,6] полученное уравнение может быть численно решено с использованием любого удобного порядка аппроксимации границы и искомых величин. Таким образом, будут получены скорости перемещений в интересующие моменты времени $t_k$. Далее сами перемещения могут быть найдены с помощью численного интегрирования по времени полученных скоростей перемещений с помощью любой удобной процедуры численного интегрирования.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда грант № 17-19-01257.

**ЛИТЕРАТУРА**


1. Stadnik N.E., Murashkin E.V., Dats E.P. Residual stresses computing in blood vessels invirtue of pathological growth processes // Proceedings of The World Congress on Engineering2018, 4–6 July, 2018, London, U.K. Lecture Notes in Engineering and Computer Science.IAENG London, U.K, 2018. P. 618–622..
2. Романов А.А. Моделирование осесимметричного наращивания труб // Международная молодёжная научная конференция XLIII Гагаринские чтения (Москва, 5-20 апреля 2017 г.): Материалы секции Механика и моделирование материалов и технологий. – ИПМех РАН Москва, 2017. С. 65–66.
3. Нестеров Т.К., Мурашкин Е.В. Численное моделирование осесимметричного процесса наращивания толстостенного цилиндра с помощью метода граничных элементов // Материалы XI Всероссийской научной конференции с международным участием "Математическое моделирование и краевые задачи" (27-30 мая 2019 г., Самара, Россия): в 2-х томах / под ред. В.П. Радченко. — Т. 1. — СамГТУ Самара, 2019.С. 119–122.
4. Дроздов А.Д. Обьемный рост вязкоупругих тел // МТТ. 1990. Т.1. С.95–101.
5. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524с.
6. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. 494с.
7. Манжиров А.В. Общая безынерционная начально-краевая задача для кусочно-непрерывно наращиваемого вязкоупругого стареющего тела// Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 1995. Т.59, №5. С. 836–848.


**Сведения об авторах:**

**Нестеров Тимофей Константинович** – программист, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, лаборатория моделирования в механике деформируемого твердого тела. **E-mail:** **Nesterovtim4@gmail.com**

Мурашкин Евгений Валерьевич – к.ф.-м.н., ст. научный сотрудник, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, лаборатория моделирования в механике деформируемого твердого тела. **E-mail:** murashkin@ipmnet.ru

# К ПОСТРОЕНИЮ ГРАВИТАЦИННО-ВИХРЕВОЙ ТЕОРИИ СЕЙСМОСТОЙКОСТИ

**Оганесян С.М.**

При кинематическом возбуждения консольного стержня показано, что изгибно-сдвиговые колебания начинаются со свободного конца стержня. При этом, в стержне возникают внутренние объёмные силы, которые противодействуют 1/2*f(x,t)* внешней силе, а на свободном конце стержня возникает связанная пара F(l,t) и M(l,t). Эта связанная пара является истинной причиной изгибно-сдвиговых колебаний. Вторая часть силы *f (x,t)* идёт на создание чисто изгибных колебаний.

**1.** В процессе разработки новой (гравитационно-вихревой) теории сейсмостойкости (НТС) [1,5], соответственно, новых расчётных схем, у автора статьи постепенно кристаллизировалась идея, что только новая модель массы (НММ) [6] недостаточна для его построения. Как видно из рис.1-4 работ [1,5] масса (плотность) стержня одновременно по-разному реагирует на одно и то же внешнее воздействие.

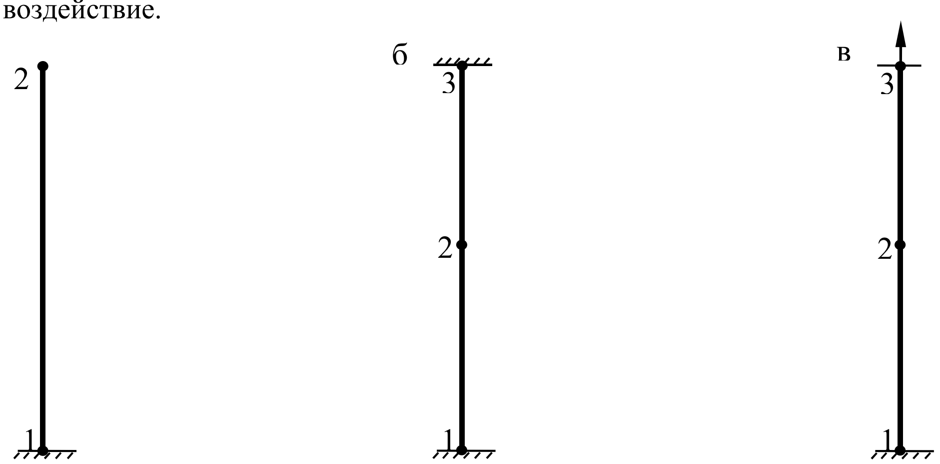



Рис.1. Задача 1-а, задача 2-б, задача 3-в

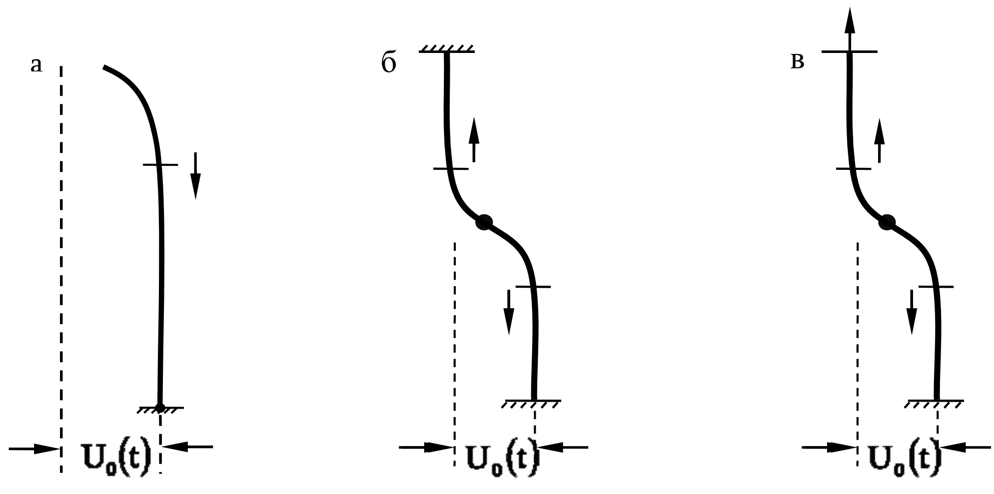



Рис.2. Расчётные схемы изгибно-сдвиговых и чисто изгибных колебаний для задач 1-3.

По мнению автора статьи это невозможно, если плотность стержня (масса тела) сама является гравитационным зарядом [2,5]. Поэтому, необходимо существенно изменить понятие «гравитационного заряда» и принять, что сама масса не является источником гравитационного заряда, как это принято в современной физике, а является только его носителем. Причиной для выдвижения такой природы гравитационного заряда (массы) послужили проведённые автором и другими исследователями опыты по влиянию вибрации на вес тела [7,8]. В работе [7] показано, что уменьшение веса вибростола (250Н) при его вертикальном колебании на частоту 50Гц и амплитуду 0,5мм составило 55Н (вертикальный подъём вибростола 17мм). Очевидно, что с телом (массой) вибростола ощутимых внешних изменений не происходит.

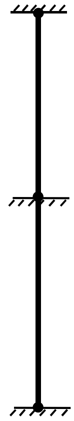


Рис.3. Расчётные схемы чисто сдвиговых колебаний для задачи 2 и 3.

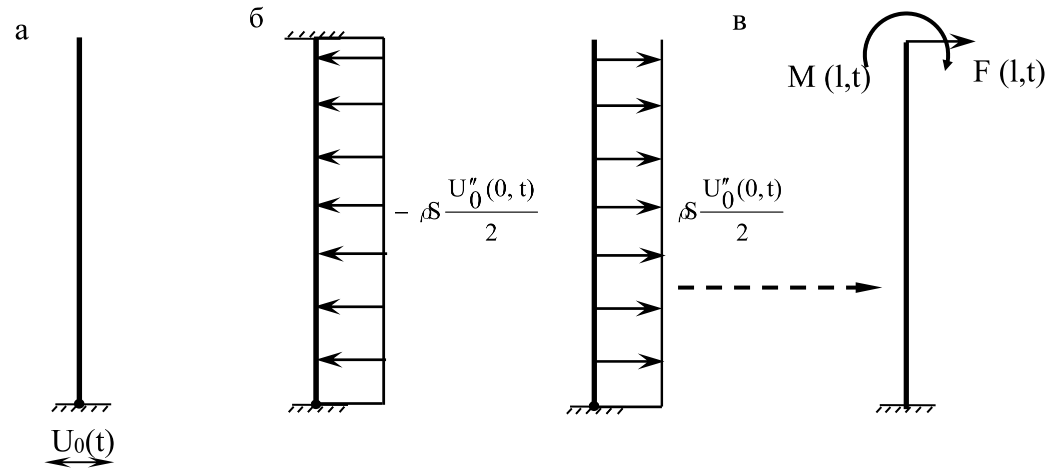



Рис.4. Расчётная схема чисто сдвиговых (б) и изгибных (в) колебаний для задачи 1.

Поэтому, по мнению автора статьи это изменение веса может произойти, если предположить существование гравитационных зарядов, которые каким-то образом проникают в вибростол. Косвенной причиной служат аналоговые связи между массой и индуктивностью при колебательных процессах и/или распространении соответствующих волн в стержне (упругих) и в длинной линии (электромагнитных). Более обоснованно наличие гравитационных зарядов будет показано в настоящей статье.

**2.** В работах [1-4] показано, что при колебании однородного консольного стержня длины $l$ полное перемещение нейтральной линии $U(x,t)$ представимо в виде $U(x,t) = U_1(x,t) + U_2(x,t) + U_3(x,t)$, где $U_1(x,t)$ – чистый изгиб, $U_2(x,t)$ – изгибно-сдвиг, $U_3(x,t)$ – чистый сдвиг. В проведённых автором исследованиях показано [2,5,9], что истинной причиной изгибных колебаний консольного стержня при кинематическом возбуждении является не- распределённая сила $f(x,t) = \mathrm{f(t)} = -\rho S\frac{\partial^2 U_0(0,l)}{\partial t^2}$ , $x \in [0,l]$, а половина её частной производной по переменной $x$

$$f'(t)=\rho S\delta(x-l)\frac{\partial^2 U_0(0,t)}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака, $\rho$ – плотность стержня, $S$ – сечения стержня.

При этом, полную физическую нагрузку при нахождении изгибно-сдвиговой составляющей $U_2(x,t)$ несёт неволновое уравнение

$$\rho S\frac{\partial^2\phi_2}{\partial t^2}-kGS\frac{\partial^2\phi_2}{\partial x^2}=\frac{1}{2}f'_x(t)=-\frac{1}{2}f(t)\delta(x-l) \quad (2)$$

при нулевых начальных и граничных условиях

$$\phi_2(0,t)=\frac{\partial\phi_2(l,t)}{\partial x}=0, \quad (3)$$

$$\phi_2(x,0)=\frac{\partial\phi_2(x,0)}{\partial t}=0, \quad (4)$$

и

$$\frac{\partial U_2}{\partial x}=\bar{\phi}_2(x,t), \quad (5)$$

$$U_2(0,t)=0, \quad (6)$$

где $\bar{\phi}_2(x,t)$ – решение задачи (5) – (6),

а соответствующая уравнению (2) система линейных дифференциальных уравнений

$$\rho S\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}=\frac{\partial p}{\partial x}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}=kGS\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}-\frac{1}{2}f(x,t) \quad (8)$$

где $\varphi$ – угол поворота сечения $S$, $p(x,t)$ – внутренний распределённый импульс.

Из уравнений (7)-(8) видно, что в консольном стержне (задача 1) при кинематическом возбуждении возникает внутренний распределённый объёмный импульс (количество движения) p(x,t), производная $\frac{\partial p}{\partial t}$ которая в равенстве (8) балансирует (противодействует) $\frac{1}{2}f(x,t)$ и одновременно связанный с ним внутренний распределённый момент $\frac{J}{S}\cdot\frac{\partial^2 p}{\partial t\partial x}$. Выражение $\frac{J}{S}\cdot\frac{\partial^2 p}{\partial t\partial x}$ получается из равенства (7) дифференцированием по переменной $t$ и умножением слева и справа на величину

$$\frac{J}{S}, \text{ т.е. } \rho J\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2}=\frac{J}{S}\cdot\frac{\partial^2 p}{\partial x\cdot\partial t}, \quad (9)$$

где J– момент инерции сечения стержня $S$ относительно оси z.

Из уравнения (2) и вышеприведённых рассуждений следует, что процесс начала изгибно-сдвиговых колебаний происходит со свободного конца консольного стержня [2,5,9]. Поэтому на свободном конце стержня одновременно возникают сила $F(l,t)$ и момент силы $M(l,t)$, модули которых равны соответственно, $\frac{1}{2}f(x,t)$ и $\frac{1}{2}\cdot\frac{I}{S}\acute{f}(x,t)$, образующую связанную пару (аналогично куперовской паре), потому что действуя независимо друг от друга, они бы вызывали, соответственно, чисто сдвиговые и чисто изгибные колебания. В работах по исследованию механизма очагов землетрясений их рассматривают не как связанные пары, а как двойную силу с моментом [10-12].

Естественно, возникают вопросы как создаются:

1– Внутренний распределённый импульс (количество движения) $p(x,t)$; 2 – связанная пара F(l,t) и M(l,t).

Наибольшую трудность для понимания создаёт возникновение связанной пары F(l,t) и M(l,t) на свободном конце консольного стержня. Известно, что возникновение всех «инерционных воздействий» связаны с плотностью $\rho$ (массой) однородного стержня. Однако, на конце стержня элементарная масса $\Delta m = \rho S \Delta x$ отсутствует. Поэтому, необходимы новые подходы для объяснения возникновения связанной пары F(l,t) и M(l,t).

В работах [5,16] показано, что система уравнений распространения изгибно-сдвиговых колебаний консольного стержня (7)-(8) аналогичны системе телеграфных уравнений:

$$L\frac{\partial I}{\partial t} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \tag{10}$$

$$C\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{\partial I}{\partial x}, \tag{11}$$

описывающие распространения тока проводимости в однопроводной линии, где $L, C$ – индуктивность и ёмкость единицы длины провода, $V$ – напряжённость, $I$ – ток.

В работе [5,9] показано, что ток проводимости в однопроводной линии передаётся следующим образом. По проводу мгновенно передаёт потенциал $\overline{V_0}(t)$, а на конце провода происходит поляризация электронов (позитронов) по всей площадке сечения провода $S$, которые создают электрическое напряжение $E(l,t) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial\overline{V}_0(t)}{\partial x}$. Это напряжение в виде электрического тока проводимости (поляризованных электронов (позитронов) [14]) распространяется в однопроводной линии.

При рассмотрении вопроса, как возникает связанная пара F(l,t) и M(l,t), мы должны принять (сделать заключение), по аналогии как распространяется ток проводимости в однопроводной линии, что существуют «гравитационные заряды», которые на свободном конце стрежня поляризуются и создают связанную пару F(l,t) и M(l,t).

В работе предлагается по аналогии с работами [7] ввести понятия гравитационного монополя и гравитационного заряда. Связанная пара F(l,t) и M(l,t) создаётся гравитационным монополем.

**ЛИТЕРАТУРА**


1. Оганесян С.М. К вопросу о построении новой теории сейсмостойкости// Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружения. 2013. № 5. С.26-29.
2. Оганесян С.М. К вопросу о построении новой теории сейсмостойкости II. Современные задачи геофизики, инженерной сейсмологии и сейсмостойкого строительства. //В сб. науч. трудов II международной научной конф. молодых ученых, Цахкадзор-2015-Ереван. «Гитутюн» НАН РА, 2016[1], с.90-100.
3. Оганесян С.М. К вопросу о построении новой теории сейсмостойкости III. //Тезисы докладов научно-практической конференции по сейсмостойкому строительству (с международным участием). 1-2 декабря 2016, Москва.- www. SPCEE2016.ru, с.114-117.
4. Оганесян С.М. К построению модели массы //Геофизический журнал. 1998. Т.20. №5. С.3-5.
5. Оганесян С.М. Обобщение решения задачи продольных колебаний упругих систем. Современные задачи геофизики, инженерной сейсмологии и сейсмостойкого строительства. //В сб. науч. трудов II международной научной конф. молодых ученых. Цахкадзор-2015-Ереван. «Изд.Гитутюн» НАН РА, 2016[1], с.391-393.
6. Sommerfeld A. Beiträge zum dynamischen Ausbau der Festigkeitslehre. Zeitschr. Verein Deutscher Ingenieure, Berlin.1902, V. 46. № 11. С. 391-394.
7. Костров Б.В. Механика очага тектонического землетрясения. –М.: Наука, 1975. 176 с.
8. Введенская А.В. Сейсмодинамика. – М.: Наука, 1984. 144 с.
9. Оганесян С.М., Геодакян Э.Г., Карапетян Дж.К., Саакян Б.В., Андикян М.А. К вопросу о возникновении сдвиговой подвижки по изгибной модели подготовки тектонического землетрясения. – /В кн.: Современные задачи геофизики, инженерной сейсмологии и сейсмостойкого строительства. Сб. науч. трудов II международной научной конф. молодых ученых, Цахкадзор-2015-Ереван: Изд. «Гитутюн» НАН РА, 2016, с.260-265.

10. Ищлинский А.Ю. Классическая механика и силы инерции. М.: Наука, 1987. 314с.
11. Тольхук Х.А. Поляризация электронов. Теория и практика //УФН, 1957, т. LXIII, №4, с.761-800.
12. Heaviside O. A Gravitational and Electromagnetic Analogy (1893) [Хевисайд О. Гравитационная и электромагнитная аналогия (параллельный текст на русском и английском языках)] /О.Хевисайд, С.Г. Геворкян (перевод)//Пространство и Время.-2017.-№2-3-4(28-29-30).-С.86-96.
13. Оганесян С.М. Аналогия системы уравнений, описывающих изгибные колебания однородного консольного стержня с телеграфными уравнениями. //Сборник научных трудов конференции: Актуальные проблемы механики сплошной среды. -Ереван: 2015, с.309-311.
14. Оганесян С.М. Регулярные методы решения трёхмерных задач гравиметрии. Ереван-Гюмри: Изд.«Гитутюн» НАН РА, 2004. С.381.

**<u>Сведения об авторе:</u>**

**Оганесян Севада Мкртичевич** – д-р физ.-мат. наук, проф., член-корр. НАН РА, сов. директора, зав. отделом Института геофизики и инженерной сейсмологии им. А.Назарова НАН РА (ИГИС НАН РА) Республика Армения, г. Гюмри, ул. В.Саркисяна, 5.
**E-mail:** iges@mail.ru, (+374793420443)

# НАКОПЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В ЗОНЕ ПОДГОТОВКИ ТЕКТОНИЧЕСКОГО ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЯ И СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТЕОРИИ ПРОГНОЗА

**Оганесян С.М., Геодакян Э.Г., Саакян Б.В.**

В работе приведён обзор современного состояния теории прогноза землетрясений. Большинство существующих моделей очага землетрясения являются развитием двух противоположных представлений о процессе формирования очага землетрясений, которые берут своё начало от работ Г.Ф. Рейда и Ч.Ф. Рихтера. Развитие модели Рихтера привели к представлению о концепции как неравновесных природных катаклизмов, так и фрактальности геологической среды. Предложена новая гравитационно-инерциальная модель подготовки землетрясения, которая объединяет эти альтернативные модели.

Известно, что несмотря на современный технический и технологический прогресс, расширение сетей по регистрации сейсмической активности и огромный объём накопленных данных о феноменологических закономерностях землетрясений, это явление остаётся одним из наиболее катастрофических и недостаточно прогнозируемых природных катаклизмов. Значимость исследования природы землетрясений возрастает в связи с ростом заселённости в окрестности крупных активных разломов [14].

В начале 80-х годов прошлого столетия в США, СССР и Японии начали осуществляться эксперименты по развитию методов прогноза. Предполагалось, что наблюдения позволят выявить особенности деформационного режима и сопутствующих ему физических полей в различные периоды формирования очаговой области.

На данный момент успешных прогнозов крупных землетрясений, выданных за последние 60-70 лет – единицы, тогда как сильные землетрясения, способные вызвать обширные разрушения, случаются на планете, примерно, раз в две недели.

Отрицательный результат относительно прогноза позволил прийти к пониманию того, что наши представления о механизме генерации землетрясений достаточно далеки от реального природного процесса и необходимо вернуться к переосмыслению первопричины появления землетрясения – механизмам деформирования больших массивов горных пород.

Большинство существующих моделей очага землетрясения являются развитием двух противоположных представлений о процессе формирования очага землетрясений, которые берут своё начало от работ Г.Ф. Рейда и Ч.Ф. Рихтера. Согласно Г.Ф. Рейду [18], земная кора находится в непрерывном перемещении и подготовка землетрясения начинается с возникновения некоторого препятствия этому перемещению. Согласно же Рихтеру [13,14], до землетрясения распределение деформаций и напряжений по пространству является однородным, а появление землетрясения связывается с возникновением, по тем или иным причинам, локализованной зоны пониженной прочности, которое также характеризуется пониженным уровнем девиаторных напряжений.

Класс моделей подготовки очага землетрясения, базирующихся на подходах механики деформируемого твёрдого тела, является наиболее малочисленным. Это связано с недостатком знаний о физико-механических процессах, протекающих в массивах горных пород на километровых глубинах. Именно понимание этих причинно-следственных связей и механизмов, за ними стоящих, позволит совершенно на другом уровне подойти к вопросу прогноза. В рамках данного класса моделей необходимо обратить внимание на две различные по логике построения модели. Это – модель консолидации И.П.Добровольского [5] и реологическая модель В.П. Мясникова, В.А. Ляховского [11].

Только в последние несколько лет для описания процесса формирования очага землетрясения стали использоваться подходы, основанные на концепции геосреды как неравновесной критической системы [4,15,16]. Согласно этой концепции, с приближением момента сильного землетрясения характеристики индивидуального поведения структурных элементов геосреды становятся менее существенными, в отличие от коллективных эффектов, охватывающих все пространственно-временные масштабы системы. Под структурными элементами понимаются дефекты геосреды того или иного масштабного уровня – поверхности механического нарушения сплошности, образующиеся в геосреде как в деформируемом твёрдом теле под действием внешних сил (трещины, разломы, границы блоков и т.д.). Наличие пространственно-иерархической структуры дефектов литосферы определяет существенную неоднородность полей напряжения того или иного масштаба, а как следствие, влияет и на способ диссипации, накопленной горными массивами упругой энергии (хрупкое крупномасштабное разрушение, катакластическое течение или локализованное пластическое течение). Следствием иерархического (блочно-иерархического) строения геосреды является самоподобный (автомодельный) характер развития процессов деформирования и разрушения на каждом из пространственных масштабов, проявляющийся в виде ряда масштабно-инвариантных закономерностей [11]:

– закона Гуттенберга–Рихтера и Омори для сейсмических событий и сигналов акустической эмиссии;

– универсального принципа фрактальной делимости твёрдых тел и сред;

– разломо-блоковой делимости литосферы;

– степенного распределения трещин в деформируемом материале по размерам.

Особое внимание обратим на то, что предельное напряжение, требуемое для начала формирования очага макроскопического хрупкого разрушения, меньше, нежели для реализации локализованного катакластического течения. Поэтому высокий уровень локальных напряжений не является индикатором и необходимым условием начала хрупкого разрушения. Этот вывод согласуется с последними результатами по тектонофизической реконструкции природных напряжений в ряде районов крупных землетрясений, выполненными методом катакластического анализа разрывных смещений, активно развивающегося коллективом Ю.Л. Ребецкого [13].

Новая физика предлагала новые методы исследователям неравновесных природных процессов. Фактически детерминистические подходы, характерные для классической физики, заменялись статистическими. Эволюция неравновесных систем не описывается детерминистическими уравнениями или параметрическими поправками к законам классической физики, она реализуется через последовательность бифуркаций, превращая развитие неравновесных систем в необратимый процесс. Это приводит к кажущемуся парадоксу, – свойства одной и той же системы в равновесии и неравновесности могут быть совершенно различны. На самом деле, этот парадокс разрешается достаточно просто: свойства равновесной системы определяются нулевыми флуктуациями параметров (или, по крайней мере, – пренебрежимо малыми флуктуациями), тогда как в неравновесном состоянии свойства системы начинают определяться неограниченным ростом флуктуаций. Именно флуктуации приводят к самоорганизации системы и образованию диссипативных структур. Точно так же свойства равновесной системы никак не связаны с диссипацией энергии, тогда как в неравновесном состоянии свойства той же системы начинают зависеть не только от самого факта диссипации, но также и от механизма диссипации. Законы эволюции системы радикально меняются. Иными словами адекватно моделировать поведение неравновесной системы решениями краевых задач, моделирующих свойства этой же системы в равновесии, невозможно в принципе. Понимание этого факта геофизиками, привыкшими описывать деформации твёрдых сред уравнениями теории упругости и продолжавшими применять методы равновесной физики для изучения неравновесных систем (например, очагов готовящихся землетрясений), не могло произойти мгновенно. Методы неравновесной физики, начиная с 1990-ых годов, начали интенсивно проникать в геофизику.

**Замечание 1.** Масштабная инвариантность–фундаментальное свойство неравновесного процесса разрушения горных пород не находило объяснения в рамках классической физики, но постоянно проявлялось в результатах экспериментальных исследований процесса разрушения. Одним из первых на это обратил внимание академик М.А. Садовский [16].

Научные интересы авторов статьи в области сейсмологии постоянно сталкиваются с вопросами подготовки тектонического землетрясения процессами разрывообразования и разрядки (затухания) афтершоковой активности. Поэтому авторы периодически возвращаются к вопросу об очаге землетрясения.

Известно, что твёрдое тело при деформации запасается разной энергией. Для землетрясения важной является упругая часть запасенной энергии. Общепринято, что именно она провоцирует макроскопические сдвиги и «встряхивание» участков земной коры в окрестности очага землетрясения. Однако, ключевым остаётся вопрос, в котором заключена вся интрига землетрясения, почему при огромном изобилии механизмов и каналов релаксации энергии, вносимой деформацией (через генерацию дефектов и вакансий, дислокаций, микро- и макроскопических трещин и т.д.), всё-таки «деформационная» накачка энергии превосходит утечку, сброс энергии[11].

Первоначально работы авторов [9-11] фактически основывались на модели очага землетрясений Рейда [18]. Однако, проведённые работы за последние годы привели к мысли о необходимости объединения (одновременного) рассмотрения моделей Рейда и Рихтера.

Это связано с тем, что процесс подготовки тектонических землетрясений в данной области земной коры состоит, по мнению авторов, из двух взаимосвязанных процессов: общепринятого деформационного (модель Рейда) и недеформационного накопления энергии за счёт возникновения некоторых дополнительных полей при внешнем воздействии (модель Рихтера).

Особо отметим, что в модели Рихтера эти дополнительные поля в зоне разрыва (на нодальных плоскостях) имеют существенно высокую концентрацию по отношению области подготовки тектонического землетрясения.

В работах [4,5,8] рассматриваются следующие общепринятые возникающие дополнительные поля: электрические, магнитные и электромагнитные поля, флюидные перемещения. Однако, в работе предлагается в качестве дополнительного поля использовать гравитационно-инерционную накачку энергии [10,11]. В работах [9,10] впервые было показано, что при трёхстороннем квазистатическом изгибе прямоугольного параллелепипеда происходят два взаимно связанных физических процесса:

1) в трёх формирующих нодальных плоскостях возникают соответствующие слои двойных сил с моментом (связанная пара силы и момента) [6,16,18];
2) в восьми объёмах индуцируемыми нодальными плоскости «микро» параллелепипедов, возникают внутренние объёмные силы, которые противодействуют (балансируют) внешним воздействиям.

В работе [9] показано, что эти объёмные силы имеют недеформационную гравитационно-инерционную природу и создаются так названными «гравитационными зарядами (гравитационными монополями)».

**Замечание 2.** По-видимому, впервые идея о гравитационно-инерционной природе тектонического землетрясения высказана в работах Барковского [1].

По мнению авторов статьи хаотическое квазистатическое существенное накопление связанной пары сила-момент (гравитационного монополя) и гравитационного зарядов постепенно начинает объединяться в определённую группу и приобретать некоторый порядок, наподобие принятой в необратимых неравновесных системах процессов самоорганизации [12]. После достижения «критического уровня» самоорганизации начинается разрушительный процесс тектонического землетрясения по модели ДД, ЛНТ и консолидационного.

Действительно, рассмотрим трёхмерный параллелепипед, который имеет вертикальную грань от поверхности Земли, равная 40-45км. Эти глубины совпадают с оценкой границы поверхности Мохоровичича для территории Армении. Основываясь на фрактальность геологического строения среды и изгибно-сдвиговую модель подготовки тектонического землетрясения, горизонтальные нодальные плоскости будут располагаться, соответственно, на глубинах 20-23км, 10-12км и 5-6км. Как показано в работе [15], эти глубины для территории Северной Армении совпадают с сейсмогенными слоями.

В заключении отметим, что предложенный в работе гравитационно-инерционный подход открывает принципиально новый путь в изучении процесса подготовки тектонического землетрясения. О перспективности данного подхода указывают практически зафиксированные гравитационные аномалии при сильных землетрясениях, приведённых в работах [1,17].

## ЛИТЕРАТУРА


1. Барковский Е.В. Когда камни падают в небо (О геофизических концепциях вообще, землетрясениях – в частности, краткосрочных прогнозах и предвестниках – между прочим, а также сейсмостойкости жилищ и сооружений). //Журнал «ЖРФРМ», 2003, №1-12, с.7-16.
2. Введенская А.В. Сейсмодинамика. – М.: Наука, 1984. 144с.
3. Гоцадзе О.Д., Кейлис-Борок В.И., Кириллова И.В. и др. Исследование механизма землетрясений… – М.: Изд. АН СССР, 1957. Труды геофизического института, №40(167).148с.

4. Дещеревский А.В., Лукк А.А., Сидорин А.Я. Флуктуация геофизических полей и прогноз землетрясений // Физика Земли. 2003. №4, с.3–20.
5. Добровольский И.П. Математическая теория подготовки и прогноза тектонического землетрясения. М.: Физматлит, 2009. 240с.
6. Иосифьян А.Г. Вопросы единой теории электромагнитного и гравитационно-инерциального полей. Ереван: Изд. АН Арм. ССР, 1959. 31с.
7. Костров Б.В. Механика очага тектонического землетрясения. М.: Наука, 1975. 176с.
8. Любушин А.А. Сейсмическая катастрофа в Японии 11 марта 2011 г.: долгосрочный прогноз по низкочастотным микросейсмам // Геофизические приборы и биосфера. 2011. Т.10. № 1, с.9–35.
9. Оганесян С.М., Геодакян Э.Г., Карапетян Дж.К., Саакян Б.В., Андикян М.А. К вопросу о возникновении сдвиговой подвижки по изгибной модели подготовки тектонического землетрясения. – В кн.: Современные задачи геофизики, инженерной сейсмологии и сейсмостойкого строительства. //В сб. науч. трудов II международной научной конф. молодых ученых: Цахкадзор – 2015 – Ереван: «Изд.Гитутюн» НАН РА, 2016, с.260-265.
10. Оганесян С.М. Масса тела не является источником гравитационного заряда, а является его носителем. /В кн.: Современные задачи геофизики, инженерной сейсмологии и сейсмостойкого строительства. //В сб. науч. трудов IV международной научной конф. молодых ученых: Цахкадзор – 2018 – Ереван: Изд. «Гитутюн» НАН РА, 2019, с.251-260.
11. Оганесян С.М., Геодакян Э.Г., Саакян Б.В. Современное состояние теорий прогнозов землетрясений. О сложной природе накопления напряжений в зоне коллизии подготовки тектонического землетрясения.-Там же- с.261-273.
12. Пригожин И. Введение в термодинамику необратимых процессов. М.: ИЛ, 1960. 172с.
13. Ребецкий Ю.Л. Тектоничекие напряжения и прочность горных массивов. М.: Наука, 2007. 406с.
14. Рихтер Ч.Ф. Элементарная сейсмология. М.: ИЛ, 1963. 670с.
15. Саакян Б.В. Сейсмическое отражение сложных геодинамических процессов в орогенах Большого и Малого Кавказа. //Геология и геофизика Юга России, 2018, № 2, с.90-98.
16. Садовский М.А., Писаренко В.Ф. Сейсмический процесс в блоковой среде. – М.: Наука, 1991. 96с.
17. Старостенко В.И., Гейко А.В., Кендзера А.В., Цветкова Т.А., Бугаенко И.В., Вербицкий С.Т. Катастрофическое землетрясение 26 декабря 2004г. у берегов Суматры: причины, последствия и уроки. //Геофизический журнал. 2005. Т.27. №6. С.940-961.
18. Reid H.F. The California Earthquake of April 16 1906 // Vol. 2. The Mechanics of the Earthquakes. The Carnegie Inst. – Washington, 1910.

**Сведения об авторах:**

**Оганесян Севада Мкртичевич** – д-р физ.-мат. наук, проф., член-корр. НАН РА, сов. директора, зав. отделом Института геофизики и инженерной сейсмологии им. А. Назарова НАН РА (ИГИС НАН РА) Республика Армения, г. Гюмри, ул. В.Саркисяна, 5.
**E-mail:** iges@mail.ru, (+374793420443)
**Геодакян Эдуард Григорьевич** - канд. физ.-мат. наук, зав. отд. Института геофизики и инженерной сейсмологии им. А. Назарова НАН РА (ИГИС НАН РА), Республика Армения, г. Гюмри, ул. В.Саркисяна, 5.
**E-mail:** geodakyan.e@mail.ru, (+37493 513123)

# ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТРАНСТРОПНОГО ТЕЛА В ПОЛЕ СИЛ ТЯЖЕСТИ

**Оганесян Э.К.**

Изучаемая конструкция представляет однородный полый цилиндр из трансверсально-изотропного материала, один торец которого защемлён.

Предполагается, что ось z является осью анизотропии в цилиндрической системе координат ($r$, $z$, $\phi$), а плоскость изотропии перпендикулярна к оси $z$. Конструкция деформируется под действием собственного веса. Рассматривается два варианта геометрии цилиндра: а) внешняя поверхность цилиндра обладает выемкой небольшой глубины, осевое сечение которого содержит прямые углы и б) внешная поверхность не содержит выемки. В этой работе использовано сочетание метода конечных элементов и асимптотического метода для изучения напряжённо-деформированного состояния в окрестности выемки. Представляем перемещения, вызванные объёмной силой тяжести в виде первой гармоники [2]

$$U_r(r,z,\phi)=U(r,z)\cos\phi,$$

$$U_\phi(r,z,\phi)=W(r,z)\sin\phi,$$

$$U_z(r,z,\phi)=V(r,z)\cos\phi.$$

В качестве элемента в МКЭ выбраны кольцевые элементы, поперечное сечение которых имеют треугольный вид. Искомые функции переменщения аппроксимируем полиномами первого порядка. Функции формы представляем в виде:

$$N_i=\left(a_i+b_ir+c_iz+a_4r^2\right)/\left(2\Delta\right),\ N_j=(a_j+b_jr+c_jz)/(2\Delta),\ N_m=\left(a_m+b_mr+c_mz\right)/\left(2\Delta\right)$$

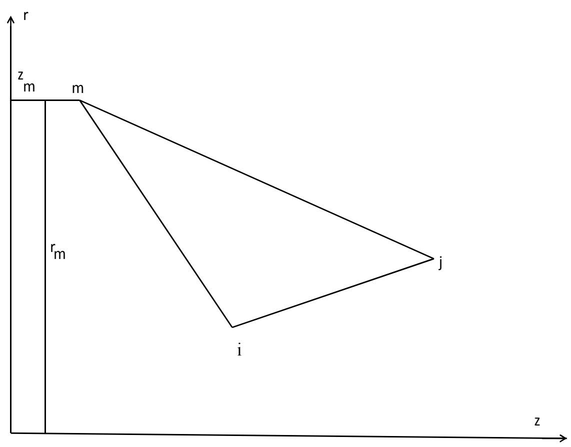



Рис.1.

Матрица жёсткости элемента представляется в виде

$$\{\mathrm{A}\}=([C]^{-1})^T[\Phi][C]^{-1},$$

где $[\mathrm{C}]$-матрица, размерности $6\times6$, связывает узловые перемещения элемента с коэффициентами аппроксимации,

$$[\Phi]=\iint[W]^T[E_\varepsilon][W]drdz,$$

$[W]$-матрица связывает напряжения элемента с коэффициентами аппроксимации, а

$$[E_\varepsilon]=\begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & \mathrm{A}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{A}_{12} & \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{A}_{13} & \mathrm{A}_{13} & \mathrm{A}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{A}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{A}_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\mathrm{A}_{11}-\mathrm{A}_{12})/2 \end{bmatrix}$$

**Численное решение задачи.** Для численного решения задачи рассмотрим цилиндр длиной 12.8R, у которого диаметр широкой части цилиндра равен 1.25R, а узкой части – R. В качестве физико-механических параметров материала принят $E_1$=6.21*$10^5$, $E_2$=5.68*$10^5$, $\upsilon_{12}$=0.22, $\upsilon_{13}$=0.24, $G_{12}$ =2.55*$10^5$, $\gamma$=7.8*$10^{-3}$. Модули юнга указаны в единицах измерения кгс/см$^2$, а плотность материала – в кг/см$^3$. Осевое сечение разбито на 128 треугольных элементов с 85 узловыми точками. При помощи ЭВМ типа IBM PC определены амплитудные значения смещений узловых окружностей, соответствующих узловым точкам при указанном разбиении осевого сечения. Для более глубокого изучения поведения напряжений около угловой точки с углом $2\alpha = (2/3)\pi$ на границе смены различных значений радиуса цилиндра использованы известные асимптотические формулы для перемещений [3].

$$r^{-\lambda}u_r = A\cos[(1+\lambda)\theta] + B\sin[(1+\lambda)\theta] + C\cos[(1-\lambda)\theta] + D\sin[(1-\lambda)\theta] \tag{1}$$

$$r^{-\lambda}u_z = B\cos[(1+\lambda)\theta] - A\sin[(1+\lambda)\theta] + \nu_2 D\cos[(1-\lambda)\theta] - \nu_2 C\sin[(1-\lambda)\theta]$$

$$\begin{aligned}\mu^{-1}r^{1-\lambda}\tau_{r\theta} &= -2\lambda A\sin[(1+\lambda)\theta] + 2\lambda B\cos[(1+\lambda)\theta] - \\ &-(1-\lambda)(1-\nu_2)C\sin[(1-\lambda)\theta] + (1-\lambda)(1-\nu_2)D\cos[(1-\lambda)\theta] \\ \mu^{-1}r^{1-\lambda}\sigma_\theta &= -2\lambda A\cos[(1+\lambda)\theta] - 2\lambda B\sin[(1+\lambda)\theta] - (1+\lambda)(1-\nu_2)C\cos[(1-\lambda)\theta] - \\ &-(1+\lambda)(1-\nu_2)D\sin[(1-\lambda)\theta]\end{aligned} \tag{2}$$

где $\nu_2 = \dfrac{3+\lambda-4\nu}{3-\lambda-4\nu}$

Здесь $\lambda$ – корень трансцендентного уравнения $\sin 2\alpha\lambda = \lambda \sin 2\alpha$

Исследование этого уравнения проведено в [4]. Постоянные коэффициенты определяются с помощью систем четырёх уравнений, полученных с помощью подстановки в выбранных двух узловых точках, близких к углу, значений перемещения в формулы (1). Выбор этих точек призволен, но для увеличения точности необходимо выбрать их достаточно близко к изучаемой угловой точке. После определения постоянных *A, B, C, D*, эти значения подставляются обратно в формулы (1), (2) и получаем искомые формулы для определения перемещения и напряжения в точках, близких к угловой точке. Как и следовало ожидать, асимптотические значения перемещения и напряжения сильно отличаются от значений в тех же точках от перемещений и напряжений, подсчитанных МКЭ без учёта особенностей. При вычислении использованы следующие значения: r=0.001, $\theta = 0.728$, $R$ =100см, $\lambda$ =0.8.

Вычислены амплитудные значения нормальных и касательных напряжений по всем кольцевым элементам.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Зенкевич О.К. Метод конечных элементов в технике. М.: Наука, 1975. 541с.
2. Вильсон Е.Ё. Расчет на прочность осесимметричных тел. Ракетная Техника и Космонавтика. 1965. Т.3. №12. С.124-131.
3. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688с.
4. Karp S.N., Karel F.C.J. The elastic field behavior in the neighborhood of crack of arbitrary angles. //Comm. and Appl. Math. 1962. V.15. №4.
5. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415с.



**<u>Сведения об авторе:</u>**

**Оганесян Эмин Казарович** – к.ф.-м.н., научный сотр. Института механики НАН Армении.

**Адрес:** Ереван, 0019, Пр. Маршала Баграмяна, 24/2. **Тел.:** 26-46-99

**E-mail:** eogannisyan@ mail.ru

# О ВЛИЯНИИ ПЛЁНКИ ПОВЕРХНОСТНО-АКТИВНОГО ВЕЩЕСТВА НА ДРЕЙФОВОЕ ТЕЧЕНИЕ И ФОРМЫ ТРАЕКТОРИЙ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЖИДКИХ ЧАСТИЦ, ВОВЛЕЧЁННЫХ В ПОВЕРХНОСТНОЕ ВОЛНОВОЕ ДВИЖЕНИЕ

**Очиров А.А., Белоножко Д.Ф.**

В работе продемонстрированы возможности недавно разработанной аналитической асимптотической методики расчёта скорости дрейфа Стокса и траекторий движения индивидуальных частиц в жидкости, по поверхности которой распространяется волновое возмущение. Исследовано волновое движение вязкой жидкости, покрытой пленкой поверхностно-активного вещества (ПАВ). Получены аналитические асимптотические выражения для скорости горизонтального массопереноса и уравнения для траекторий движения жидких частиц.

**1. Введение.**

Движение плёнки поверхностно-активных веществ (ПАВ) вдоль поверхности жидкости и её влияние на динамику этого движения неизменно привлекает внимание современных исследователей. Работы последних лет посвящены изучению переноса ПАВ волновым движением [1], влиянию ПАВ на устойчивость течения двухслойных систем [2] и тонких пленок [3]. В одном из недавних исследований была предложена модель расчёта перераспределения ПАВ вдоль поверхности жидкости, по которой распространяется периодическое волновое возмущение [4]. Отдельного внимания заслуживает вопрос изучения траекторий движения индивидуальных жидких частиц вблизи поверхности жидкости. В этом контексте, в статье [5] была предложена методика расчёта движения индивидуальных жидких частиц, участвующих в формировании синусоидальной волны, распространяющейся вдоль поверхности раздела двух идеальных жидкостей. В настоящем исследовании предлагается развитие методики [5] для расчёта траекторий движения индивидуальных жидких частиц в условиях, когда синусоидальная волна распространяется по поверхности жидкости, покрытой пленкой ПАВ.

**2. Математическая формулировка задачи.**

Рассмотрим бесконечно глубокую несжимаемую жидкость с кинематической вязкостью $\nu$, плотностью $\rho$. Будем работать в декартовой системе координат, ось $Oz$ которой направлена вертикально вверх против направления действия сил тяжести $\mathbf{g}$, а плоскость $Oxy$ совпадает с равновесной поверхностью жидкости, покрытой пленкой ПАВ. Полагается, что вдоль поверхности распространяется простейшая синусоидальная бегущая волна, амплитуда $\zeta$ которой мала по сравнению с длиной волны $\lambda$. Движение жидкости считается независящим от горизонтальной координаты $y$. Коэффициент поверхностного натяжения $\gamma$ является функцией концентрации ПАВ $\gamma \equiv \gamma(\Gamma)$. При распространении волнового движения вдоль поверхности жидкости будут происходить локальные изменения поверхностной концентрации ПАВ $\Gamma \equiv \Gamma(x,t)$. Влияние пленки ПАВ на динамику движения жидкости определяется её упругими свойствами. Параметр, отвечающий за упругие свойства, называется упругостью плёнки и определяется тангенсом угла наклона касательной к изотерме $\gamma = \gamma(\Gamma)$ при равновесном значении концентрации $\Gamma = \Gamma_0$. Для обычных ПАВ значения этого параметра отрицательны [6 – 8]. Будем считать, что поверхность жидкости и пленка ПАВ находятся в термодинамическом равновесии, т.е. в состоянии, при котором локальные изменения концентрации ПАВ мгновенно сказываются на значения коэффициента поверхностного натяжения.

При сделанных предположениях математическая формулировка задачи по определению поля скоростей $\mathbf{U}(x,z,t) = u(x,z,t)\mathbf{e}_x + \mathrm{v}(x,z,t)\mathbf{e}_z$ и поверхностной концентрации ПАВ выглядит следующим образом [4, 9]:

$$z < \xi: \ \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{U} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \Delta \mathbf{U} + \mathbf{g}; \ \nabla \cdot \mathbf{U} = 0; \tag{1}$$

$$z = \xi: \ \frac{\partial \xi}{\partial t} + \mathrm{u}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \mathrm{v}; \tag{2}$$

$$p-2\rho\nu\left(\mathbf{n}\cdot\left(\mathbf{n}\cdot\nabla\right)\mathbf{U}\right)=-\frac{\gamma}{\left(1+\left(\partial_x\xi\right)^{3/2}\right)}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} \tag{3}$$

$$-\rho\nu\left(\left(\boldsymbol{\tau}\cdot\left(\mathbf{n}\cdot\nabla\right)\mathbf{U}\right)+\left(\mathbf{n}\cdot\left(\boldsymbol{\tau}\cdot\nabla\right)\mathbf{U}\right)\right)+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\partial_x\xi\right)^2}}\frac{\partial\gamma}{\partial x}=0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial t}+\frac{1}{1+\left(\partial_x\xi\right)^2}\left(\frac{\partial\left(\Gamma u\right)}{\partial x}+\left(\Gamma\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial\left(\mathrm{v}\Gamma\right)}{\partial x}\right)\frac{\partial\xi}{\partial x}+\Gamma\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial z}\right)=0 \tag{5}$$

$$z\to-\infty:\quad u\to 0;\quad \mathrm{v}\to 0. \tag{6}$$

$$\mathbf{n}=\left(-\frac{\partial\xi}{\partial x}\mathbf{e}_x+\mathbf{e}_z\right)\left(1+\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2\right)^{-1/2};\qquad \boldsymbol{\tau}=\left(\mathbf{e}_x+\frac{\partial\xi}{\partial x}\mathbf{e}_z\right)\left(1+\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2\right)^{-1/2}$$

Здесь $\mathbf{n}$ и $\boldsymbol{\tau}$ – векторы нормали и касательной к поверхности жидкости, искажённой волновым возмущением с отклонением от равновесной поверхности $\xi=\xi\left(x,t\right)$, а символом $p=p\left(x,z,t\right)$ обозначено давление внутри жидкости.

В линейном (в первом порядке малости) приближении по амплитуде волны задача (1) – (6) сводится к выражениям [4]:

$$z<0:\quad \frac{\partial\mathbf{U}_1}{\partial t}+\frac{1}{\rho}\nabla p_1-\nu\,\Delta\mathbf{U}_1=0;\quad \nabla\cdot\mathbf{U}_1=0 \tag{7}$$

$$z=0:\quad \frac{\partial\xi_1}{\partial t}-\mathrm{v}_1=0;\quad -\rho g\xi_1+p_1-2\rho\nu\frac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial z}+\gamma\left(\Gamma_0\right)\frac{\partial^2\xi_1}{\partial x^2}=0; \tag{8}$$

$$-\rho\nu\left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial z}+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}\right)+\left(\frac{d\gamma}{d\Gamma}\right)_0\frac{\partial\Gamma_1}{\partial x}=0;\quad \frac{\partial\Gamma_1}{\partial t}+\Gamma_0\frac{\partial \mathrm{u}_1}{\partial x}=0 \tag{9}$$

$$z\to-\infty:\quad \mathrm{u}_1\to 0;\quad \mathrm{v}_1\to 0 \tag{10}$$

**3. Решение задачи.**

Решение задачи первого порядка малости (7) – (10), описывающее распространение по поверхности бегущей волны с амплитудой $\zeta$ задаётся соотношениями [4, 6, 9]:

$$\xi_1=\frac{\zeta}{2}\mathrm{e}^{\theta}+\kappa.c.; \tag{11}$$

$$\Gamma_1=\frac{\mathrm{i}\zeta}{2}k\,\Gamma_0\frac{\left(A+B\right)}{S}\mathrm{e}^{\theta}+\text{к.с.} \tag{12}$$

$$\mathrm{u}_1=\frac{\zeta}{2}\left(A\mathrm{e}^{kz}+B\mathrm{e}^{qz}\right)\mathrm{e}^{\theta}+\text{к.с.};\quad \mathrm{v}_1=\frac{\mathrm{i}\zeta}{2}\left(A\mathrm{e}^{kz}+\frac{Bk}{q}\mathrm{e}^{qz}\right)\mathrm{e}^{\theta}+\text{к.с.} \tag{13}$$

$$A=\mathrm{i}S\left(\frac{q}{k-q}-\frac{\rho\nu kS}{k^2\Pi-\rho\nu(k+q)S}\right);\quad B=\frac{\mathrm{i}\,kqS\left(k\Pi-2\rho\nu S\right)}{\left(k-q\right)\left(k^2\Pi-\rho\nu\left(k+q\right)S\right)}$$

$$\theta=St-\mathrm{i}kx;\,q=\sqrt{k^2+\frac{S}{\nu}};\quad \Pi=\Gamma_0\left(\frac{d\gamma}{d\Gamma}\right)_0$$

Символом к.с. обозначены комплексно-сопряжённые слагаемые. При этом, дисперсионное уравнение, связывающее комплексную частоту $S=r+i\omega$ с волновым числом $k$ и другими параметрами задачи, имеет вид:

$$\left(\left(S+2\nu k^2\right)^2+\omega_0^2+\frac{k^3\Pi}{\rho}\frac{\omega_0^2}{S^2}\right)\left(4\nu^2k^3+\frac{k^2\Pi}{\rho}\left(1+\frac{\omega_0^2}{S^2}\right)\right)^{-1}=\sqrt{k^2+\frac{S}{\nu}}. \tag{14}$$

Здесь для удобства введен вспомогательный параметр $\omega_0^2 = kg\left(1+\alpha^2 k^2\right)$, который имеет смысл квадрата круговой частоты волнового движения на поверхности бесконечно глубокой идеальной жидкости с капиллярной постоянной $\alpha = \sqrt{\gamma_0 / (\rho g)}$, где $\gamma_0 \equiv \gamma(\Gamma_0)$.

Для определения траектории движения выделенной частицы жидкости необходимо перейти к описанию поля скоростей в переменных Лагранжа. В линейном приближении скорости в описании Эйлера и Лагранжа совпадают с точностью до формальной замены пространственных координат $x$ и $z$ на лагранжевы координаты $x_0$ и $z_0$ (подробнее см. [5]). После перехода $x_0$ и $z_0$ имеют смысл положения индивидуальной частицы жидкости в начальный момент времени $t=0$. В линейном приближении по амплитуде волнового движения скорость жидкой частицы в описании Лагранжа запишется следующим образом:

$$\mathrm{u}_{L1} = \frac{\zeta}{2}\left(A\mathrm{e}^{kz_0} + B\mathrm{e}^{qz_0}\right)\mathrm{e}^{St-ikx_0} + к.с.; \quad \mathrm{v}_{L1} = \frac{\mathrm{i}\zeta}{2}\left(A\mathrm{e}^{kz_0} + \frac{Bk}{q}\mathrm{e}^{qz_0}\right)\mathrm{e}^{St-ikx_0} + к.с. \qquad (15)$$

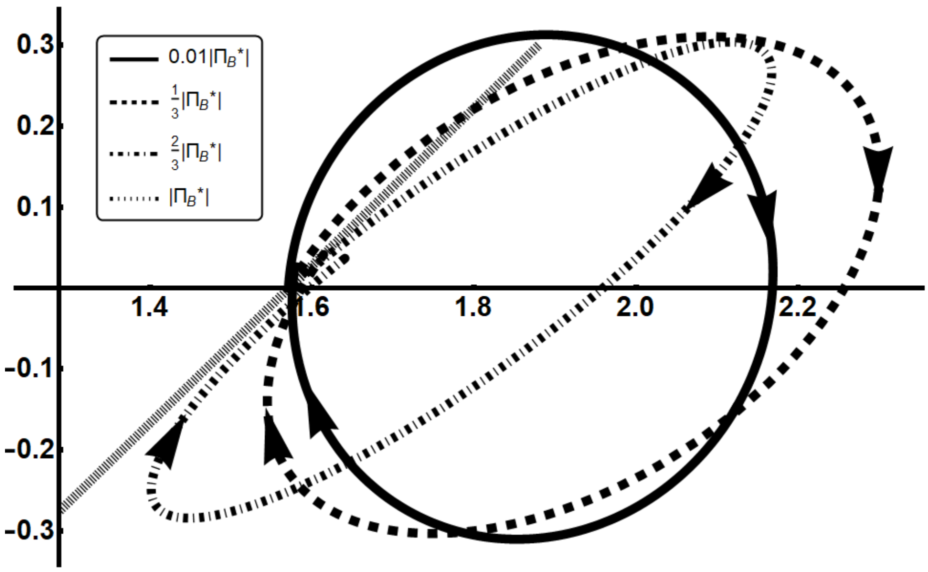



Рис. 1. Траектории движения жидких частиц различных при значениях упругости пленки ПАВ меньше характерного

Прямое интегрирование (13) по времени позволяет получить выражения для траекторий движения индивидуальных жидких частиц, располагающихся непосредственно на поверхности в параметрическом виде. Траектории движения жидкой частицы строились в безразмерных переменных, в которых $\rho = g = \gamma_0 = 1$. Значение безразмерной вязкости принималось равным $\nu = 0.002$, а волнового числа – $k=1$. Значения упругости пленки $\Pi$ варьировались.

В работе [4] показано, что существует такое характерное значение упругости пленки ПАВ (своё для каждой длины волны), при котором гашение капиллярно-гравитационных волн плёнкой ПАВ наиболее эффективно. На рис.1 показаны траектории движения жидкой частицы при упругостях плёнки ПАВ меньше этого характерного значения. Видно, что в отсутствии ПАВ жидкие частицы в линейном приближении по амплитуде волны движутся практически по окружностям. С увеличением упругости круговые траектории «сплющиваются» в эллипсы и при достижении характерного значения упругости вырождаются в отрезки прямых. Дальнейший рост упругости пленки приводит к «выворачиванию» траекторий: жидкие частицы снова движутся по эллипсам, но при этом изменяют направление обхода внутренней части траектории на противоположное (рис.2).

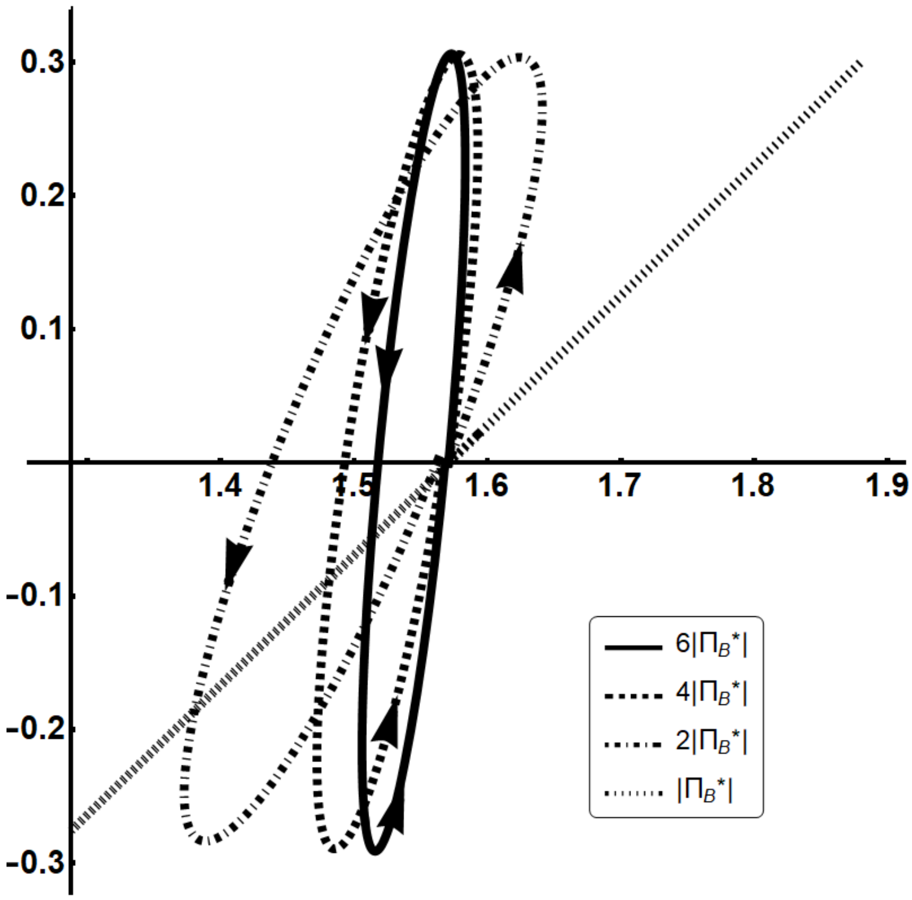


Рис.2. Траектории движения жидких частиц при значениях упругости пленки ПАВ больше характерного

**4. Заключение.**

Упругие тангенциальные силы оказывают значительное влияние на динамику движения индивидуальных жидких частиц даже в линейном приближении по амплитуде волны. Пока упругие силы, связанные с градиентом концентрации ПАВ малы по сравнению с капиллярно-гравитационными, жидкие частицы совершают циклические движения и обходят внутреннюю часть своей траектории так, что в своей верхней точке жидкая частица движется в направлении распространения волны. С увеличением модуля упругих сил площадь внутренней области циклической траектории существенно уменьшается. При некотором значении модуля упругости траектории движения жидких частиц вырождаются в отрезки, наклонённые к направлению распространения волны. При дальнейшем увеличении упругости пленки ПАВ циклические движения возобновляются, но изменяется направление обхода внутренней части траектории.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Strickland S.L., Shearer M., Daniels K.E. Spatiotemporal measurement of surfactant distribution on gravity-capillary waves //J. Fluid Mech. 2015. V.777. P.523-543.
2. Samanta A. Effect of surfactant on two-layer channel flow //J. Fluid Mech. 2013. V.735. P.519-552.
3. Karapetsas G., Bontozoglou V. The role of surfactants on the mechanism of the long-wave instability in liquid film flows //J. Fluid Mech. 2014. V.741. P.139-155.
4. Белоножко Д.Ф., Очиров А.А. О взаимном влиянии волнового движения и характера распределения поверхностно-активного вещества //Известия РАН. Сер. физическая. 2018. Т.82. №1. С.47-51.

5. Белоножко Д.Ф., Очиров А.А. О массопереносе, порождённом волновым возмущением поверхности тангенциального разрыва поля скоростей //Журнал технической физики. 2018. Т. 88. № 5. С. 675-683.
6. Левич В.Г. Физико-Химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 700 с.
7. Lucassen-Reynders E.N., Lucassen J. Properties of capillary waves//Adv. Colloid Interface Sci. 1969. V.2. №4. P.347-395.
8. Ролдугин В.И. Физико-химия поверхности: Учебник-монография. Дологопрудный: Изд. дом «Интеллект». 2008.
9. Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. Нелинейные волны на заряжённой поверхности вязкой жидкости, покрытой плёнкой поверхностно-активного вещества //Журнал технической физики. 2004. Т.74. №11. С.29-37.

**Information about authors:**

**Очиров Артем Александрович** – старший преподаватель каф. инфокоммуникаций и радиофизики Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова; **тел.:** (4852)79-77-70, **e-mail:** otchirov@mail.ru.

**Белоножко Дмитрий Фёдорович** – д.ф.-м.н., доцент, профессор каф. микроэлектроники и общей физики Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова; **тел.:** (4852)30-32-62, **e-mail:** belonozhko@mail.ru.

# НАПРЯЖЁННОЕ СОСТОЯНИЕ СЛОИСТОЙ ПЛОСКОСТИ С СИСТЕМОЙ ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКИХ ВНУТРЕННИХ УПРУГИХ ВКЛЮЧЕНИЙ И ТРЕЩИН

**Саакян А.В., Даштоян Л.Л., Саакян А.А.**

В работе рассмотрена двоякопериодическая задача для слоистой плоскости, когда на срединных линиях разнородных полос имеются периодические системы трещин и упругих включений. Выведена система определяющих уравнений относительно функций распределения дислокаций точек берегов трещин и скачков касательных контактных напряжений, действующих по боковым сторонам включений. Проведён сравнительный анализ полученных числовых результатов с результатами периодической задачи для слоистой плоскости, содержащей в каждой полосе по одной трещине и одному включению и выявлено влияние периода систем концентраторов напряжений на коэффициенты интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещин, раскрытие трещин и распределение контактных напряжений.

**Введение.** Исследованию плоско-деформированного состояния упругой однородной плоскости с периодическими и двоякопериодическими дефектами типа трещин, полностью или частично сцеплённых с матрицей инородных или абсолютно жёстких включений, посвящено много работ. Мощные методы математической теории упругости и математической физики позволили получить замкнутые или эффективные решения ряда важных периодических и двоякопериодических задач. Основные результаты в этом направлении подытожены в монографиях [1-4].

Изучению же аналогичных задач для кусочно-однородных, равномерно слоистых тел с межфазными или внутренними дефектами, которые, на наш взгляд, в настоящее время весьма актуальны с точки зрения слоистых композитов, как нам известно, посвящено не так уж много работ. Из них укажем на работы [5-8], которые тесно связаны с проведёнными здесь исследованиями. В работе [5] построены разрывные решения уравнений плоской теории упругости для кусочно-однородной слоистой плоскости, содержащей межфазные двоякопериодические системы межфазных трещин. Аналогичная задача в случае двоякопериодической системы абсолютно жёстких включений изучена в работе [6]. В работах [7] и [8] исследовано плоско-деформированное состояние кусочно-однородной слоистой плоскости с периодической системой параллельных внутренних трещин и включений, соответственно.

Рассматриваемая задача является двоякопериодическим аналогом периодической задачи, исследованной в работе [9], что позволило провести сравнительный анализ результатов двух работ и выявить эффект наличия периодических систем концентраторов напряжений.

**Постановка задачи и вывод определяющих уравнений.** Пусть имеем кусочно-однородную упругую плоскость, изготовленную путём поочерёдного соединения разнородных упругих полос толщины $2h$. Правосторонюю декартовую систему координат $Oxy$ установим так, чтобы ось абсцисс совпадала с линией раздела материалов, а ось ординат пересекала трещину в середине. При этом, предположим, что периодическую систему трещин содержит полоса, находящаяся выше оси $Ox$, и все величины, относящиеся к ней, снабдим индексом $1$. Периодические системы концентраторов напряжений располагаются на средних линиях соответствующих полос и имеют период $2l$. Приняв расположение трещин симметричным относительно оси $Oy$, расположение упругих включений относительно трещин будем изменять с целью выявления его влияния на коэффициенты интенсивности напряжений в концах трещины. На рис.1 пунктирной линией выделена базовая ячейка двоякопериодической системы.

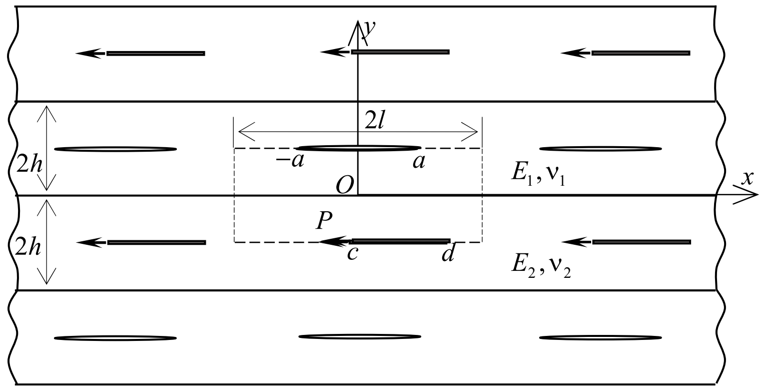



Рис. 1 Схематическое представление поставленной задачи

Плоскость деформируется под воздействием одинаковых распредел/нных нормальных нагрузок $p(x)$, приложенных соответственно к берегам трещин, и сосредоточенных сил $P$, приложенных к включениям.

Очевидно, что при такой постановке задачи линии $y=(2n+1)h \quad (n\in Z)$, на которых расположены концентраторы напряжений, являются линиями симметрии и поставленную задачу можно сформулировать как граничную задачу для двухкомпонентной кусочно-однородной полосы $\Omega\{-\infty<x<\infty;|y|\le h\}$, на границах $y=\pm h$ которой вне трещин и включений заданы условия симметрии, на интервалах, занятых трещинами, заданы нормальные напряжения, а на интервалах, занятых включениями, - условия контакта включений с основанием.

Следуя работе [10], включения будем трактовать как одномерные континуумы, которые под воздействием приложенных к ним сосредоточенных сил и тангенциальных контактных напряжений находятся в одноосном напряжённом состоянии. При этом, вследствие малости толщины накладок и симметрии задачи относительно осей накладок, вертикальные смещения точек накладок можно считать равными нулю.

Требуется определить касательные контактные напряжения, действующие на длинные стороны включений, раскрытие трещин, коэффициенты интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещин и выявить закономерности их изменения в зависимости от физико-механических и геометрических параметров поставленной задачи.

Воспользуемся полученными в работе [9] представлениями для нормальных напряжений на линии $y=h$ и для производной горизонтальных смещений на линии $y=-h$, которые необходимы для удовлетворения граничным условиям на берегах трещин и сторонах включений и, тем самым, вывода определяющих уравнений задачи. Полагая, что имеем периодическую систему трещин и включений, указанные представления для базовой ячейки $(-l\le x\le l)$ запишутся в виде суперпозиции представлений от одиночных концентраторов:

$$\begin{aligned}\sigma_y^{(1)}(x,h)&=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\lambda_1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{V'(s)\,ds}{s+2kl-x}+\int_{-a}^{a}R_{11}(x-s-2kl)V'(s)ds+\int_{c}^{d}R_{12}(x-s-2kl)\tau(s)ds\right\}\\ \frac{dU_2(x,-h)}{dx}&=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{-\frac{\lambda_2}{\pi}\int_{c}^{d}\frac{\tau(s)\,ds}{s+2kl-x}+\int_{-a}^{a}R_{21}(x-s-2kl)V'(s)ds+\int_{c}^{d}R_{22}(x-s-2kl)\tau(s)ds\right\}\end{aligned}\qquad(1)$$

Здесь сохранены все обозначения работы [9].

Пользуясь известными значениями обобщённых рядов

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\xi-x+2lk}=\frac{\pi}{2l}\operatorname{ctg}\frac{\pi(\xi-x)}{2l};\qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{ikx}=2\pi\delta(x-2\pi n)\qquad(n\in Z),$$

где $\delta(x)$ – функция Дирака, представления (1) выпишем в виде:

$$\begin{aligned}\sigma_y^{(1)}(x,h)&=\frac{\lambda_1}{2l}\int_{-a}^{a}\operatorname{ctg}\frac{\pi(s-x)}{2l}V'(s)\,ds+\int_{-a}^{a}Q_{11}(x-s)V'(s)ds+\int_{c}^{d}Q_{12}(x-s)\tau(s)ds\\ \frac{dU_2(x,-h)}{dx}&=-\frac{\lambda_2}{2l}\int_{c}^{d}\operatorname{ctg}\frac{\pi(s-x)}{2l}\tau(s)\,ds+\int_{-a}^{a}Q_{21}(x-s)V'(s)ds+\int_{c}^{d}Q_{22}(x-s)\tau(s)ds\end{aligned}\qquad(|x|\le l)\quad(2)$$

где

$$Q_{ij}(x)=\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}K_{ij}\left(\frac{\pi hk}{l}\right)\sin\left(\frac{\pi k}{l}x\right)\qquad(i,j=1,2)$$

Теперь перейдем к выводу системы определяющих уравнений поставленной задачи. Для этого, используя соотношения (2), удовлетворим условиям на трещине и включении. Предполагая, что на берега трещины действует внешнее нормальное давление $p_0(x)$, на берегу трещины будем иметь условие

$$\sigma_y^{(1)}(x,h) = -p_0(x) \qquad (-a < x < a) \tag{3}$$

Из условия полного сцепления упругого включения следует равенство деформации, контактирующей с включением части границы полосы с осевой деформацией включения от приложенной в точке $x_0 \in [c,d]$ силы $P$:

$$\frac{dU_2(x,-h)}{dx} = \frac{1-\nu_s^2}{h_s E_s}\left[P\,H(x-x_0) - 2\int_c^x \tau(s)\,ds\right] \qquad (c < x < d). \tag{4}$$

где $h_s$ – толщина, а $E_s, \nu_s$ – упругие характеристики включения.

Подставив представления (2) в условия (3) и (4), получим систему из сингулярных с ядром Гильберта, интегрального и интегро-дифференциального уравнений.

Полученную систему нужно рассматривать совместно с условиями непрерывности смещений в концевых точках трещины и условиями равновесия включения:

$$\int_{-a}^{a} V'(s)\,ds = 0; \qquad \int_c^d \tau(s)\,ds = \frac{P}{2} \tag{5}$$

**Решение системы определяющих уравнений.** Решение полученной системы сингулярных уравнений при условиях (5) будем строить методом механических квадратур [11]. С этой целью перейдём к безразмерным величинам и сформулируем систему уравнений и условия (5) на интервале $(-1,1)$. Введя при этом обозначения

$$a_* = a/h; \quad c_* = (d-c)/2h; \quad d_* = (d+c)/2h; \quad l_* = l/h; \quad \vartheta_* = \frac{2\pi h(1-\nu_2)(1-\nu_s^2)c_* E_2}{h_s E_s(1+\nu_2)\kappa_2}$$

$$\varphi_1(t) = V'(at); \qquad \varphi_2(t) = c_*\,\tau\big(h(c_* t + d_*)\big)/\mu_1; \qquad P^* = P/h\mu_1$$

придём к следующей системе определяющих уравнений:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_1(\xi)\,d\xi}{\xi-t} + \int_{-1}^{1} Q_{11}^*(t,\xi)\varphi_1(\xi)d\xi + \int_{-1}^{1} Q_{12}^*(t,\xi)\varphi_2(\xi)d\xi = -\pi\,p_0(at)/\lambda_1 \qquad (-1<t<1) \\ \displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_2(\xi)\,d\xi}{\xi-t} + \int_{-1}^{1} Q_{21}^*(t,\xi)\varphi_1(\xi)d\xi + \int_{-1}^{1} Q_{22}^*(t,\xi)\varphi_2(\xi)d\xi - 2\vartheta_*\int_{-1}^{t}\varphi_2(\tau)\,d\tau = -\vartheta_* P^* H(t-t_0) \end{cases} \tag{6}$$

при условиях

$$\int_{-1}^{1}\varphi_1(s)\,ds = 0; \qquad \int_{-1}^{1}\varphi_2(s)\,ds = \frac{1}{2} \ . \tag{7}$$

Здесь

$$Q_{11}^*(t,\xi) = \frac{\pi}{\lambda_1}\left[\frac{a_*}{l_*}\sum_{k=1}^{\infty} K_{ij}\left(\frac{\pi k}{l_*}\right)\sin\left(\frac{\pi k}{l_*}a_*(t-\xi)\right) + \frac{\lambda_1 a_*}{2l_*}ctg\frac{\pi a_*(\xi-t)}{2l_*} - \frac{\lambda_1}{\pi}\frac{1}{\xi-t}\right]$$

$$Q_{12}^*(t,\xi) = \frac{\pi}{\lambda_1}\frac{c_*}{l_*}\sum_{k=1}^{\infty} K_{12}\left(\frac{\pi k}{l_*}\right)\sin\left(\frac{\pi k}{l_*}\left(a_* t + b_* - c_*\xi - d_*\right)\right)$$

$$Q_{21}^*(t,\xi) = -\frac{\pi}{\lambda_2}\frac{a_*}{l_*}\sum_{k=1}^{\infty} K_{21}\left(\frac{\pi k}{l_*}\right)\sin\left(\frac{\pi k}{l_*}\left(c_* t + d_* - a_*\xi - b_*\right)\right)$$

$$Q_{22}^*(t,\xi) = -\frac{\pi}{\lambda_2}\left[\frac{c_*}{l_*}\sum_{k=1}^{\infty} K_{22}\left(\frac{\pi k}{l_*}\right)\sin\left(\frac{\pi k}{l_*}c_*(t-\xi)\right) - \frac{\lambda_2 c_*}{2l_*}ctg\frac{\pi c_*(\xi-t)}{2l_*} + \frac{\lambda_2}{\pi}\frac{1}{\xi-t}\right]$$

Решение системы (6) при условиях (7), как и в работе [9], строится методом механических квадратур [11].

**Численный анализ.** Численный анализ проведён при предположении, что трещина имеет постоянную длину, равную четверти полутолщины слоя $h$, и расположена симметрично относительно оси $Oy$, т.е. $a_* = 0.25$, $b_* = 0$, а местоположение включения, длина которого равна длине трещины, может изменяться и определяется параметром $r$, указывающим на место левого конца включения, т.е. $c_* = a_*, d_* = r + a_*$. Нормальное давление на берег трещины принято равным нулю, т.е. $p_0 = 0$. Силу, приложенную к левому концу включения $(t_0 = -1)$, отношение толщины включения к полутолщине полосы и отношение приведённого модуля упругости стрингера к $E_2$ будем считать неизменными при значениях: $P^* = 0.25, h_s/h = 0.01, E_s/\left(1-\nu_s^2\right)E_2 = 5$.

Расчёты показали, что и в случае наличия периодической системы концентраторов напряжений трещина раскрывается только при расположении включения правее определённой точки, причём той же, что и для одиночных трещины и включения [9].

На рис.2 приведены графики зависимости коэффициента интенсивности напряжений (КИН) у правого конца трещины от параметра $r$, представляющего координату левого конца включения, при различных значениях полупериода $l$ периодической системы концентраторов напряжений. Для сравнения с периодической задачей с одиночными трещиной и включением в базовом слое, рассмотренной в работе [9], на том же рисунке пунктирной линией приведён соответствующий график из этой работы. Представленные графики соответствуют следующим значениям других параметров задачи: $\nu_1 = 0.35; \nu_2 = 0.25;$ $E_1/E_2 = 2$. Кривые 1-7 соответствуют значениям $l = 2;3;4;6;10;20;60$.

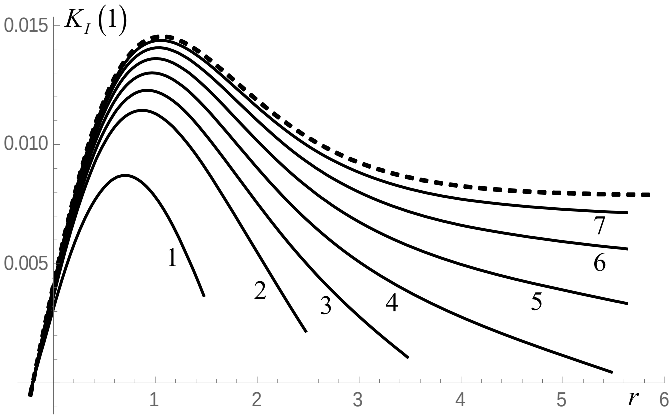



Рис.2 Зависимость КИН у правого конца трещины от параметра $r$.

Из рис.2 замечаем, что наличие периодической системы трещин и включений приводит к существенному снижению значения КИН, заметно влияет также на положение включения, когда КИН приобретает максимальное значение.

На рис.3 приведены формы раскрытия трещины, когда левый конец включения находится на средней линии трещины $(r = 0)$, а полупериод $l$ принимает значения $l = 2;4;10;20$, которым соответствуют кривые $1-4$. И здесь наличие периодической системы концентраторов напряжений приводит к уменьшению раскрытия трещины.

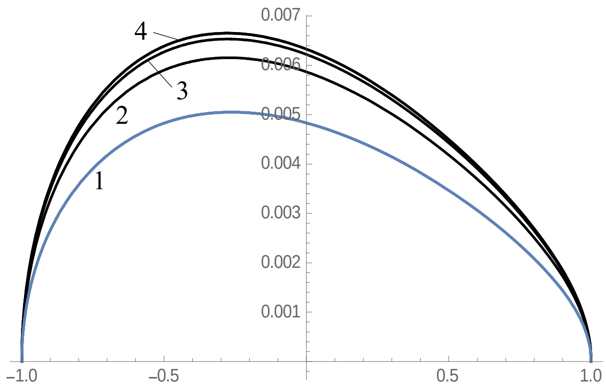



Рис.3 Форма раскрытия трещины.

Расчёты показывают, что распределение контактных напряжений под включением практически не зависит ни от упругих характеристик неоднородной полосы, ни от местоположения включения относительно трещины, ни от периода $l$. Оно существенно зависит от длины включения, отношения толщины включения к полутолщине полосы $h_1/h$ и отношения модулей Юнга включения и примыкающей полосы $E_I^{(1)}/E_2$.

**Заключение.** Исследовано плоско-деформированное состояние слоистой плоскости, составленной из чередующихся полос одинаковой толщины из двух разнородных материалов, когда на срединных линиях полос, изготовленных из одного материала, имеется одинаковая периодическая система трещин, а полос, изготовленных из другого материала, – одинаковая периодическая система упругих включений. Для базовой ячейки поставленной двоякопериодической задачи получена система ключевых уравнений в виде системы сингулярных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений относительно функции дислокации точек берегов трещин и касательных контактных напряжений, действующих на длинные стороны включений. Решение определяющей системы может быть получено методом механических квадратур. Проведён достаточно детальный численный анализ зависимости искомых функций – раскрытие трещины и контактные напряжения – от геометрических параметров задачи и упругих характеристик составляющих полос. В частности, показано, что уменьшение периода периодической системы трещин и включений приводит к существенному снижению КИН в концах трещин и уменьшению величины их расткрытия, практически не влияя при этом на распределение контактных напряжений.

*Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА и РФФИ (РФ) в рамках совместной научной программы 18RF-061 и 18-51-05012, соответственно.*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках.- Киев: Наукова думка, 1976.- 443с.
2. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками.- М.: Наука, 1983.- 488с.
3. Григолюк Э.И., Фильштинский Л.А. Регулярные кусочно-однородные структуры с дефектами. М.: Изд. Физматлит, 1994. 332с.
4. Бардзокас Д.И., Фильштинский Л.А., Фильштинский М.Л. Актуальные проблемы связанных физических полей в деформируемых телах. Т.1. - Москва-Ижевск: 2010.-864с.
5. Акопян В.Н., Даштоян Л.Л. Разрывные решения двоякопериодической задачи для кусочно-однородной плоскости с межфазными дефектами. //Механика композитных материалов, 2017. Т.53. № 5. С.863-879.
6. Hakobyan V.N., Dashtoyan L.L. The stress state of a piecewise uniform layered space with doubly periodic internal cracks. //Journal of Physics: Conference Series, 2018, vol. 991(1):012031
7. Hakobyan V., Dashtoyan L. Doubly periodic problem for piecewise homogeneous plane with absolutely rigid inclusions// Proceedings of 8th International Conference Contemporary Problems of Architecture and Construction, Yerevan, 2016, pp.125-128
8. Акопян В.Н., Амирджанян А.А. Напряжённое состояние кусочно-однородной равномерно слоистой плоскости с системой периодических параллельных внутренних включений. //Известия НАН Армении. Механика. 2018. Т.71. № 2. С. 3-17.
9. V.N. Hakobyan, A.V.Sahakyan and K.L.Aghayan Periodic problem for a plane composed of two-layer strips with a system of longitudinal internal inclusions and cracks. In: Sumbatyan M. (eds) Wave Dynamics, Mechanics and Physics of Microstructured Metamaterials. Advanced Structured Materials, vol 109. Springer, Cham, pp.11-22, https://doi.org/10.1007/978-3-030-17470-5_2
10. Агаян К.Л. Взаимодействие стрингеров с бесконечной пластиной, ослабленной двоякопериодической системой трещин. /В сб.: «Механика деформируемых тел и конструкций», Ереван: Изд.-во АН Арм ССР, 1985. С. 26-32 .
11. A.V.Sahakyan and H.A.Amirjanyan, Method of mechanical quadratures for solving singular integral equations of various types. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 991 (2018) 012070 doi :10.1088/1742-6596/991/1/012070.

**<u>Сведения об авторах:</u>**

**Саакян Аветик Вараздатович** – д.ф.м.н., зам.директора Института механики НАН Армении.
**Тел.:** (37410) 568188, **E-mail:** avsah@mechins.sci.am, avsahakyan@gmail.com

**Даштоян Лилит Левоновна** – кандидат физ.-мат. наук, учёный секретарь Института механики НАН Армении, **тел.:** (37410) 56-81-89, **e-mail:** Lilit_Dashtoyan@mechins.sci.am

**Саакян Арег Аветикович** – к.ф.м.н., науч. сотрудник Института механики НАН Армении.
**E-mail:** areg1992@gmail.com

# УСЛОВИЯ ПОЯВЛЕНИЯ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ КОЛЕБАНИЙ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ СОСТАВНОМ ВОЛНОВОДЕ С ЗАКРЕПЛЁННЫМ КРАЕМ

**Саакян С. Л.**

Начало исследованию чисто сдвиговых волн в плоском слое было положено работой Лява 1911 года. В дальнейшем были решены многочисленные задачи для упругих волноводов с различными граничными условиями и в динамической постановке (задачи с начальными условиями). В настоящей статье рассматриваются плоские полубесконечные волноводы при разных граничных условиях на плоскостях и на краях, ограничивающих волновод. Устанавливается возможность локализации сдвиговых волн в окрестности стыка разных частей полубесконечного плоского волновода.

**1. Постановка задачи.** Пусть плоский волновод состоит из двух частей. В прямоугольной декартовой системе координат первая часть волновода с индексом (1) занимает область $-a \le x < 0$, $0 \le y < h$, $-\infty < z < \infty$; вторая часть с индексом (2) занимает область $0 < x < \infty$, $0 \le y < h$, $-\infty < z < \infty$ (фиг. 1). Рассматриваются чисто сдвиговые упругие колебания (антиплоская деформация)

$$u_i = 0,\ v_i = 0,\ w_i = w_i(x, y, t);\ i = 1{,}2. \tag{1.1}$$

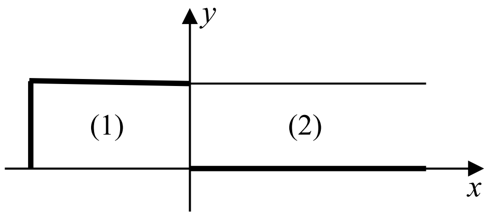



Рис.1.

Уравнения распространения волн для частей волновода имеют вид [2, 7]:

$$c_i^2 \Delta w_i = \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2},\ c_i^2 = \frac{\mu_i}{\rho_i};\ i = 1{,}2. \tag{1.2}$$

Здесь $\Delta$ – двумерный оператор Лапласа, $\mu_i$ – модуль сдвига, $\rho_i$ – плотность материала волновода, $c_i$ – скорость объёмной сдвиговой волны. Предполагается, что поверхность волновода $y = 0$ свободна ($\sigma_{yz}^{(1)} = 0$) при $x < 0$ и закреплена при $x > 0$, а поверхность $y = h$ свободна при $x > 0$ и закреплена при $x < 0$, т.е.

$$\frac{\partial w_1}{\partial y} = 0,\ w_2 = 0 \text{ при } y = 0; \tag{1.3}$$

$$w_1 = 0,\ \frac{\partial w_2}{\partial y} = 0 \text{ при } y = h. \tag{1.4}$$

На стыке двух частей волновода (на месте сочленения) должны быть удовлетворены условия непрерывности перемещений и касательных напряжений $\sigma_{xz}$:

$$w_1 = w_2,\ \mu_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} = \mu_2 \frac{\partial w_2}{\partial x} \quad \text{при } x = 0. \tag{1.5}$$

Конечный край волновода $x = -a$ закреплён [8, 9]:

$$w_1\Big|_{x=-a} = 0. \tag{1.6}$$

При $x \to +\infty$ должно быть удовлетворено условие затухания колебаний:

$$\lim_{x \to +\infty} w_2 = 0. \tag{1.7}$$

**2. Получение соответствующих систем уравнений.** Решения уравнений (1.2) для частей волновода, удовлетворяющие граничным условиям (1.3), (1.4), представляются следующим образом:

$$w_1 = e^{i\omega t}\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\cos\lambda_n y,\ \lambda_n = \frac{\pi + 2\pi n}{2h}, \tag{2.1}$$

$$w_2 = e^{i\omega t}\sum_{m=0}^{\infty} g_m(x)\sin\lambda_m y,\ \lambda_m = \frac{\pi + 2\pi m}{2h}. \tag{2.2}$$

Подстановка (2.1), (2.2) в уравнения (1.2) приводит к последовательности обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $f_n(x),\ g_m(x)$.

Общие решения этих уравнений получаются в виде:

$$f_n(x) = A_n \sin\lambda_n p_n x + B_n \cos\lambda_n p_n x, \tag{2.3}$$

$$g_m(x) = C_m e^{-\lambda_m q_m x} + D_m e^{\lambda_m q_m x}. \tag{2.4}$$

Здесь $A_n$, $B_n$, $C_m$, $D_m$ – произвольные постоянные,

$$p_n = \sqrt{\frac{\omega^2}{\lambda_n^2 c_1^2} - 1},\ q_m = \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\lambda_m^2 c_2^2}}. \tag{2.5}$$

С учётом условия (1.6) решение (2.3) перепишется в следующем виде:

$$f_n(x) = F_n \sin[\lambda_n p_n (a + x)], \tag{2.6}$$

$F_n$ – новые произвольные постоянные. Принимая во внимание условие затухания (1.7), решения (2.4) примут следующий вид:

$$g_m(x) = C_m e^{-\lambda_m q_m x}. \tag{2.7}$$

Тогда из (1.5), (2.6), (2.7) следует

$$\begin{gathered} \sum_{n=0}^{\infty} F_n \sin\lambda_n p_n a \cos\lambda_n y = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \sin\lambda_m y, \\ \mu_1 \sum_{n=0}^{\infty} F_n \lambda_n p_n \cos\lambda_n p_n a \cos\lambda_n y = -\mu_2 \sum_{m=0}^{\infty} C_m \lambda_m q_m \sin\lambda_m y. \end{gathered} \tag{2.8}$$

С учётом разложения в ряд Фурье

$$\sin\lambda_m y = \sum_{n=0}^{\infty} b_{mn} \cos\lambda_n y \tag{2.9}$$

из (2.8) получим следующую систему бесконечных уравнений:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} b_{mn} C_m = F_n \sin\lambda_n p_n a, \\ \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} b_{mn} \lambda_m q_m C_m = -\frac{\mu_1}{\mu_2} F_n \lambda_n p_n \cos\lambda_n p_n a. \end{cases} \tag{2.10}$$

Исключая неизвестные $F_n$ из системы (2.10), относительно неизвестных $C_m$ мы придём к системе бесконечных уравнений:

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_{mn} \left( \mathrm{tg} P_n \xi + \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{P_n}{Q_m} \right) C_m = 0 \ \ (n = 0, 1, 2, \cdots), \tag{2.11}$$

где

$$P_n = \sqrt{\eta^2 - (1 + 2n)^2},\ Q_m = \sqrt{(1 + 2m)^2 - \kappa^2 \eta^2},\ \eta = \frac{2h\omega}{\pi c_1},\ \kappa = \frac{c_1}{c_2},\ \xi = \frac{a\pi}{2h}, \tag{2.12}$$

$$b_{mn} = \begin{cases} \dfrac{2}{(1 + m + n)\pi},\ \textit{когда } m + n \textit{ – чётное число}; \\ \dfrac{2}{(m - n)\pi},\ \textit{когда } m + n \textit{ – нечётное число}. \end{cases} \tag{2.13}$$

**3. Решение поставленой задачи.** Будут рассматриваться соответствующие усечённые системы. Тогда, в приближении $m$ -ого порядка $(m = 0,1,2,\cdots)$, из условия нетривиальности решения усечённой системы получим характерическое уравнение для определения $\eta$ в зависимости от $\xi$ :

$$\begin{vmatrix} b_{00}\left(\mathrm{tg}P_0\xi+\dfrac{\mu_1}{\mu_2}\dfrac{P_0}{Q_0}\right) & b_{10}\left(\mathrm{tg}P_0\xi+\dfrac{\mu_1}{\mu_2}\dfrac{P_0}{Q_1}\right) & \cdots & b_{m0}\left(\mathrm{tg}P_0\xi+\dfrac{\mu_1}{\mu_2}\dfrac{P_0}{Q_m}\right) \\ b_{01}\left(\mathrm{tg}P_1\xi+\dfrac{\mu_1}{\mu_2}\dfrac{P_1}{Q_0}\right) & b_{11}\left(\mathrm{tg}P_1\xi+\dfrac{\mu_1}{\mu_2}\dfrac{P_1}{Q_1}\right) & \cdots & b_{m1}\left(\mathrm{tg}P_1\xi+\dfrac{\mu_1}{\mu_2}\dfrac{P_1}{Q_m}\right) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{0m}\left(\mathrm{tg}P_m\xi+\dfrac{\mu_1}{\mu_2}\dfrac{P_m}{Q_0}\right) & b_{1m}\left(\mathrm{tg}P_m\xi+\dfrac{\mu_1}{\mu_2}\dfrac{P_m}{Q_1}\right) & \cdots & b_{mm}\left(\mathrm{tg}P_m\xi+\dfrac{\mu_1}{\mu_2}\dfrac{P_m}{Q_m}\right) \end{vmatrix} = 0 \tag{3.1}$$

Отсюда и из обозначений (2.12), (2.13) следует, что при нулевом приближении ($m = 0$) имеем следующее характеристическое уравнение относительно неизвестных $\eta$ и $\xi$ :

$$\mathrm{tg}\left(\xi\sqrt{\eta^2-1}\right) = -\frac{\mu_1\sqrt{\eta^2-1}}{\mu_2\sqrt{1-\kappa^2\eta^2}}. \tag{3.2}$$

Это уравнение имеет действительные решения только тогда, когда $\kappa < 1$, т.е. когда $c_1 < c_2$. Эти решения устанавливают наличие частоты для соответствующей моды колебаний. Определённая из (3.2) частота $\omega$ удовлетворяет неравенству $\pi c_1/2h < \omega < \pi c_2/2h$ и зависит от величины $h$, а также от $a$. Причём, для каждого значения величины $\xi$ (отношений $a$ и $h$) существует несколько мод. Критические значения, при которых начинается рождение новых мод, определяется из уравнения (3.2), когда его правая часть равна нулю. При увеличении параметра $\xi$ частоты всех мод монотонно убывают, стремясь ассимптотически к $\pi c_1/2h$. На рис.2 и 3 показаны поведения мод частот колебаний при нулевом приближении, когда $\kappa = 0.2$ при $\mu_1/\mu_2 = 0.01$ и $\mu_1/\mu_2 = 500$, соответственно. На рис. 4 дано совмещённое изображение кривых, представленных на рис. 2 и 3.

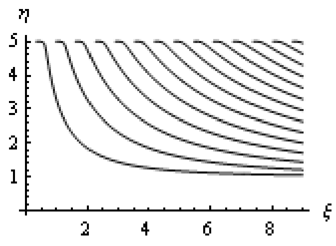


Рис. 2.

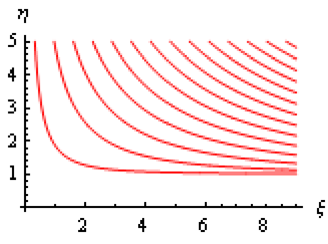


Рис. 3.

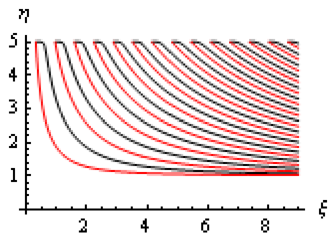


Рис. 4.

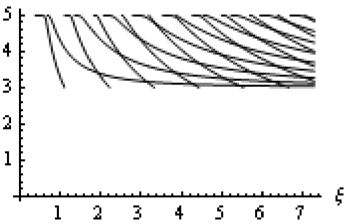


Рис. 5.

В приближении $m$-ого порядка дисперсионное уравнение (3.1) имеет действительные решения только тогда, когда $\kappa < 1$, т.е. когда $c_1 < c_2$. Определённая из (3.1) частота $\omega$ удовлетворяет неравенству $\pi(1+2m)c_1/2h < \omega < \pi c_2/2h$ и зависит от величины $h$ и $a$. Например, в приближении первого порядка ($m = 1$) частота $\omega$ удовлетворяет неравенству $3\pi c_1/2h < \omega < \pi c_2/2h$. На рис.5 показано поведение мод частот колебаний при первом приближении ($m = 1$), когда $\kappa = 0.2$ и $\mu_1/\mu_2 = 0.01$.

Таким образом, можно утверждать, что с увеличением порядка приближения также увеличивается число мод частот колебаний. Сравнение с предыдущими рисунками показывает, что здесь появились новые частотные моды, которые монотонно убывая, асимптотически стремятся к $3\pi c_1/2h$, а прежние моды оказались «срезанными» этой асимптотой.

Таким образом, можно утверждать, что с увеличением порядка приближения также увеличивается число мод частот колебаний, а все моды прежнего приближения «срезаются» новой асимптотой.

Автор выражает благодарность М.В. Белубекяну за постановку задачи, за ценные замечания и полезные обсуждения полученных результатов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Love A. E. H. Some Problems of Geodynamics. Cambridge University Press. 1911, pp.165-178.
2. Miklowitz J. The Theory of Elastic Waves and Waveguides. North-Holland. 1984. 618 p.
3. Мелешко В.В., Бондаренко А.А., Довгий С.А., Трофимчук А.Н., ван Хейст Г.Я. Упругие волноводы: история и современность. Математическе методы и физико-механические поля. Львов, НАН Украины, 2008, т. 51, №2, с. 86-104. Meleshko V.V., Bondarenko A.A., Dovgiy S.A., Trofimchuk A.N., Heijst G. J. F. van. The elastic waveguides: the history and the present-day. Mathematical methods and physico-mechanical fields, 2008, vol. 51, №2, pp. 86-104 (in Russian).
4. Белубекян В.М., Белубекян М.В. Резонансные и локализованные сдвиговые колебания в слое с прямоугольным поперечным сечением. //Доклады НАН Армении. 2015. Т.115. №1. с.40-43. Belubekyan V.M., Belubekyan M.V., Resonanse and Localized Shear Vibration in the Layer with Rectangular Cross Section //Reports of NAS of Armenia, 2015, v.115, №1, pp.40-43 (in Russian).
5. Nazarov S.A., Wave scattering in the joint of a straight and a periodic waveguide, Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2017. T.81. № 2. pp.129-147.
6. Ghazaryan K. B., Papyan A.A. Rezonance and localized shear vibration of bi-material elastic rezonator //Proceed. of NAS of Armenia, Mechanics, v.70, №2, 2017, pp. 52-67.
7. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975, 256с. Novatsky V. Theory of elasticity, M.: Mir, 1975, pp.256 (in Russian).
8. Belubekyan M. V. On the condition of planar localized vibration appearance in the vicinity of the free edge of a thin rectangular plate. //Proceed. of the YSU, Physical and Mathematical Sciences 2017, v.51, №1, pp.42-45.
9. Белубекян М.В. Об условиях существования волн Лява с неоднородным слоем. //Изв. НАН Армении. Механика. 1991. Т.44. №3. С.7-10. Belubekyan M.V., On the Love waves existence condition in the case of nonhomogeneous layer //Proceed. of NAS of Armenia, Mechanics, v.44, №3, 1991, pp.7-10 (in Russian).
10. Белубекян В.М., Белубекян М.В., Берберян А.Х. Локализация упругих сдвиговых волн в окрестности стыка плоских волноводов //Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. //Труды IX межд. конф., 01-06 октября, Горис, Армения, 2018, с.76-79. Belubekyan M.V., Belubekyan V.M., Berberyan A.Kh., Localization of elastic shear waves in the vicinity of the junction of planar waveguides //The problems of dynamics of interaction if deformable media, //Proceed. of IX Int. Conf., 01-06 Oct, Goris, Armenia, 2018, pp.76-79 (in Russian).
11. Piliposyan D.G., Ghazaryan R.A., Ghazaryan K.B. Shear waves in periodic waveguide with alternating boundary conditions //Proceed. of NAS of Armenia, Mechanics, v.67, №3, 2014, pp.40-48.

**Сведения об авторе:**

**Саакян Саак Левонович** – к.ф.-м.н., ЕГУ, фак-т Информатики и прикладной математики. **Тел.:** (+374 77) 002-408; **e-mail:** ssahakyan@ysu.am

# КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ДВУХ АБСОЛЮТНО ЖЁСТКИХ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И ГИБКИХ ПРИ ИЗГИБЕ НАКЛАДОК С ТОНКИМ КРУГОВЫМ СЕКТОРОМ. ЧАСТЬ III

**Саргсян А.М.**

Исследование особенности напряжённого состояния в окрестности угловой точки контура упругого тела имеет важное теоретическое и практическое значение и тесно связано с проблемой обеспечения необходимой прочности упругих тел. Упругое равновесие кругового сектора, когда на дуговой части контура заданы напряжения или перемещения, а радиальные стороны усилены стрингерами, рассмотрены в работах [1,2]. Здесь рассматривается случай, когда на дуговой части контура заданы смешанные граничные условия.

Пусть упругий тонкий круговой сектор отнесён к прямоугольной и полярной системам координат (Рис.1).

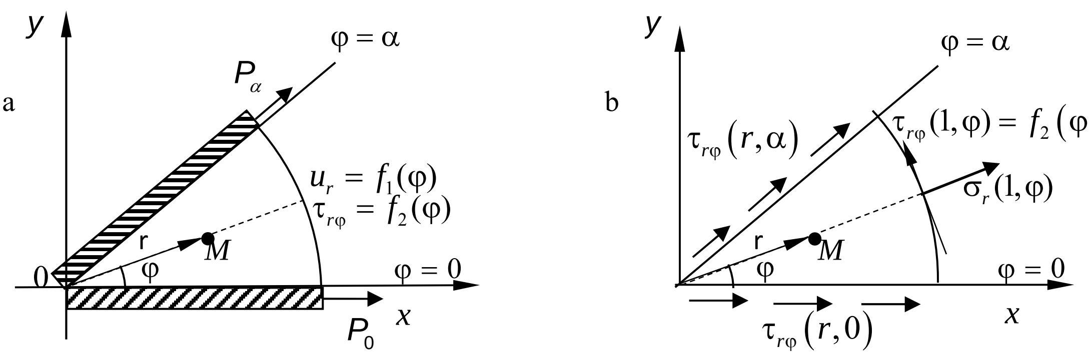



Рис.1. Диаграмма усиления кругового сектора двумя накладками (a) и напряжения, возникающие на контуре сектора (b).

В полярной системе координат упругое состояние кругового сектора определяется решением бигармонического уравнения для функции напряжения Эри [3]

$$\Delta\Delta\Phi(r,\varphi)=0 \tag{1}$$

при следующих граничных условиях на контуре сектора:

$$u_r(r,0)=\sigma_\varphi(r,0)=0\ , \tag{2}$$

$$u_r(r,\alpha)=\sigma_\varphi(r,\alpha)=0\ , \tag{3}$$

$$u_r(1,\varphi)=f_1(\varphi),\quad \tau_{r\varphi}(1,\varphi)=f_2(\varphi);\qquad \sigma_r(1,\varphi)=f_1(\varphi),\quad u_\varphi(1,\varphi)=f_2(\varphi) \tag{4}$$

где $f_1(\varphi)$ и $f_2(\varphi)$ – функции из класса Дирихле, $f_1(0)=f_1(\alpha)=0$.

Граничные условия (2) или (3) связаны с вопросами передачи нагрузок от тонкостенных элементов в виде стрингеров к упругим основаниям [4, 5].

Решение бигармонического уравнения (1) имеет хорошо известный вид [3]

$$\Phi(r,\varphi)=r^{\lambda+1}\left[A\sin(\lambda+1)\varphi+B\cos(\lambda+1)\varphi+C\sin(\lambda-1)\varphi+D\cos(\lambda-1)\varphi\right].$$

Напряжения и перемещения выражаются через функции $\Phi(r,\varphi)$ формулами

$$\sigma_\varphi = \lambda\lambda^+ r^{\lambda-1}\left[AS_\varphi^+ + BC_\varphi^+ + CS_\varphi^- + DC_\varphi^-\right],\ \ \tau_{r\varphi} = -\lambda r^{\lambda-1}\left[A\lambda^+ C_\varphi^+ - B\lambda^+ S_\varphi^+ + C\lambda^- C_\varphi^- - D\lambda^- C_\varphi^-\right]$$

$$\sigma_r = -r^{\lambda-1}\left[A\lambda\lambda^+ S_\varphi^+ + B\lambda\lambda^+ C_\varphi^+ + C(3-\lambda)\lambda S_\varphi^- + D(3-\lambda)\lambda C_\varphi^-\right], \tag{5}$$

$$Eu_r = r^\lambda\left[-A\lambda^+\nu^+ S_\varphi^+ - B\lambda^+\nu^+ C_\varphi^+ + C\left(4-\lambda^+\nu^+\right)S_\varphi^- + D\left(4-\lambda^+\nu^+\right)C_\varphi^-\right] + E\left(a\sin\varphi + b\cos\varphi\right),$$

$$Eu_\varphi = r^\lambda\left[-A\lambda^+\nu^+ C_\varphi^+ + B\lambda^+\nu^+ S_\varphi^+ - C\left(4+\lambda^-\nu^+\right)C_\varphi^- + D\left(4+\lambda^-\nu^+\right)S_\varphi^-\right] + E\left(-a\cos\varphi + b\sin\varphi + cr\right),$$

где $\lambda^\pm = \lambda \pm 1,\ \ \nu^+ = 1+\nu,\ S_\varphi^\pm = \sin(\lambda\pm1)\varphi$ , $C_\varphi^\pm = \cos(\lambda\pm1)\varphi.$ $A, B, C, D, \lambda$ – произвольные постоянные; $a,\ b, c$ – постоянные, определяющие перемещения упругого тела как жёсткого целого, $E$ и $\nu$ – модуль упругости и коэффициент Пуассона. Как следует из (5), напряжения при $0 < \operatorname{Re}\lambda < 1$ будут обладать у вершины сектора сингулярностью порядка $1-\operatorname{Re}\lambda$.

Для определения произвольных постоянных $A,B,C,D$ удовлетворим условиям (2) и (3)

$$\lambda\lambda^+\left(B+D\right)=0,\ \ r^\lambda\left[-\lambda^+\nu^+ B + (4-\lambda^+\nu^+)D\right] = -Eb,\ \ \lambda\lambda^+\left(AS_\alpha^+ + BC_\alpha^+ + CS_\alpha^- + DC_\alpha^-\right)=0,$$

$$r^\lambda\left[-\lambda^+\nu^+ S_\alpha^+ A - \lambda^+\nu^+ C_\alpha^+ B + (4-\lambda^+\nu^+)\left(S_\alpha^- C + C_\alpha^- D\right)\right] = -E\left(a\sin\alpha + b\cos\alpha\right). \tag{6}$$

Т.к. к вершине сектора не приложена сосредоточенная нагрузка, решение (6) даёт $B = D =$ $= a = b = 0$ и уравнение $\sin(\lambda+1)\alpha\cdot\sin(\lambda-1)\alpha = 0,$ корни которого действительные и простые

$$\lambda_k = \alpha_0 k + 1,\ \tilde{\lambda}_n = \alpha_0 n - 1,\ \alpha_0 = \pi/\alpha \quad \left(k, n = 0, \pm1, \pm2, \ldots\right). \tag{7}$$

Требование конечности энергии упругой деформации в малой окрестности угловой точки сектора накладывает на корни (7) условия $\lambda_k > 0,\ \tilde{\lambda}_n > 0,$ которые ограничивают область изменения параметров $k$ и $n$, а именно:

I) $0<\alpha<2\pi,\quad k=0,1,2,\ldots,\quad n=2,3,4,\ldots;$ II) $0<\alpha<\pi,\quad k=0,1,2,\ldots,\quad n=1,2,3,\ldots;$

III) $\pi<\alpha<2\pi,\ k=-1,0,1,\ldots,\ n=2,3,4,\ldots;$ IV) $\alpha=2\pi,\quad k=-1,0,1,\ldots,\ n=3,4,5,\ldots.$

Учитывая, что функции вида $\Phi_{kn}(r,\varphi) = C_k r^{\lambda_k+1}\sin(\lambda_k-1)\varphi + A_n r^{\tilde{\lambda}_n+1}\sin(\tilde{\lambda}_n+1)\varphi$ удовлетворяют уравнению (1) и граничным условиям (2) и (3) на радиальных сторонах сектора, функции напряжения Эри для первых трёх случаев принимают вид

$$\begin{Bmatrix}\Phi_I\\ \Phi_{II}\\ \Phi_{III}\end{Bmatrix} = C_{-1}\sin(\lambda_{-1}-1)\varphi\begin{Bmatrix}0\\0\\1\end{Bmatrix} r^{\lambda_{-1}+1} + C_1\sin(\lambda_1-1)\varphi\begin{Bmatrix}1\\0\\1\end{Bmatrix} r^{\lambda_1+1} +$$
$$+\begin{Bmatrix}a=2\\a=1\\a=2\end{Bmatrix}\sum_{k=a}^{\infty}\left[C_k r^{\lambda_k+1} + A_k r^{\tilde{\lambda}_k+1}\right]\sin(\lambda_k-1)\varphi. \tag{8}$$

Случай IV) рассмотрим отдельно. Для случая III) напряжения и перемещения примут вид

$$\text{III)}\ \begin{Bmatrix}\sigma_\varphi\\ \tau_{r\varphi}\\ \sigma_r\end{Bmatrix}=C_{-1}\left(1-\alpha_0\right)\begin{Bmatrix}\left(2-\alpha_0\right)\sin\alpha_0\varphi\\ -\alpha_0\cos\alpha_0\varphi\\ \left(2+\alpha_0\right)\sin\alpha_0\varphi\end{Bmatrix}r^{-\alpha_0}+C_1\left(1+\alpha_0\right)\begin{Bmatrix}\left(2+\alpha_0\right)\sin\alpha_0\varphi\\ -\alpha_0\cos\alpha_0\varphi\\ \left(2-\alpha_0\right)\sin\alpha_0\varphi\end{Bmatrix}r^{\alpha_0}+$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty}\left[C_k\lambda_k\begin{Bmatrix}\left(\lambda_k+1\right)\\ \left(\lambda_k-1\right)\\ \left(3-\lambda_k\right)\end{Bmatrix}r^{\alpha_0 k}+A_k\left(\lambda_k-1\right)\left(\lambda_k-2\right)\begin{Bmatrix}1\\ 1\\ -1\end{Bmatrix}r^{\alpha_0 k-2}\right]\begin{Bmatrix}\sin\alpha_0 k\varphi\\ -\cos\alpha_0 k\varphi\\ \sin\alpha_0 k\varphi\end{Bmatrix},$$

$$E\begin{Bmatrix}u_r\\ u_\varphi\end{Bmatrix}=-C_{-1}\begin{Bmatrix}\left(\lambda_1^+\nu^+-4\nu\right)\sin\alpha_0\varphi\\ -\left(\lambda_1^-\nu^+-4\right)\cos\alpha_0\varphi\end{Bmatrix}r^{1-\alpha_0}-C_1\begin{Bmatrix}\left(\lambda_1^+\nu^+-4\right)\sin\alpha_0\varphi\\ \left(\lambda_1^-\nu^++4\right)\cos\alpha_0\varphi\end{Bmatrix}r^{1+\alpha_0}- \tag{9}$$

$$-\sum_{k=2}^{\infty}\begin{Bmatrix}\left[C_k\left(\lambda_k^+\nu^+-4\right)r^{\lambda_k}+A_k\lambda_k^-\nu^+r^{\tilde\lambda_k}\right]\\ \left[C_k\left(\lambda_k^-\nu^++4\right)r^{\lambda_k}+A_k\lambda_k^-\nu^+r^{\tilde\lambda_k}\right]\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\sin\alpha_0 k\varphi\\ \cos\alpha_0 k\varphi\end{Bmatrix}+E\begin{Bmatrix}0\\ c\end{Bmatrix}.$$

В случае I) отсутствуют первые слагаемые в правой части формулы (9), а в случае II) – первые и вторые слагаемые ( $k=1,2,3,...$ ).

Для определения $C_k$ и $A_k$ удовлетворим граничным условиям (4.1) на дуговой части контура. Для случая III) получим систему уравнений:

$$\text{III)}-C_{-1}\left(\lambda_1^+\nu^+-4\nu\right)\sin\alpha_0\varphi-C_1\left(\lambda_1^+\nu^+-4\right)\sin\alpha_0\varphi-\sum_{k=2}^{\infty}\left[C_k\left(\lambda_k^+\nu^+-4\right)+A_k\lambda_k^-\nu^+\right]\sin\alpha_0 k\varphi=Ef_1\left(\varphi\right)$$

$$-C_{-1}\lambda_1^-\left(2-\lambda_1\right)\cos\alpha_0\varphi-C_1\lambda_1^-\lambda\cos\alpha_0\varphi-\sum_{k=2}^{\infty}\left[C_k\lambda_k^-\lambda_k+A_k\lambda_k^-\left(\lambda_k-2\right)\right]\cos\alpha_0 k\varphi=E\ f_2\left(\varphi\right). \tag{10}$$

**В случае I) отсутствуют первые слагаемые в левой части последней системы, а в случае II) – первые и вторые слагаемые.**

**Аналогичная система получается и в случае граничных условий (4.2).**

Для решения системы уравнения (10) поступим так же, как в работе [1]. В итоге получим:

$$\text{I)}\ C_1=-\frac{2}{\alpha}\frac{E\,\tilde f_{11}}{\lambda_1^+\nu^+-4}=-\frac{2}{\alpha}\frac{E\,\tilde f_{21}}{\lambda_1^-\lambda_1},\ C_k=-\frac{E\tilde f_{1k}\lambda_k^-\left(\lambda_k-2\right)-\tilde f_{2k}\lambda_k^-\nu^+}{\alpha\lambda_k^-\left(2\lambda_k+\nu-3\right)},\ A_k=-\frac{E\tilde f_{1k}\lambda_k\lambda_k^--\tilde f_{2k}\left(\lambda_k^+\nu^+-4\right)}{\alpha\lambda_k^-\left(2\lambda_k+\nu-3\right)} \tag{11}$$

В данном случае между коэффициентами Фурье $\tilde f_{11},\ \tilde f_{21}$ возникает соотношение

$$\tilde f_{11}\left(\lambda_1^-\nu^++4\right)-\tilde f_{21}\left(\lambda_1^+\nu^+-4\right)=0, \tag{12}$$

$$\tilde f_{1k}=\int_0^\alpha f_1\left(\varphi\right)\sin\alpha_0 k\varphi d\varphi,\quad \tilde f_{2k}=\int_0^\alpha f_2\left(\varphi\right)\cos\alpha_0 k\varphi d\varphi,\ \left(k=1,2,3,...\right)$$

II) $C_k$ и $A_k$ имеют вид (11), однако, здесь $k=1,2,3,...$.

$$\text{III)}\ C_{-1}=-\frac{E\,\tilde f_{11}\lambda_1\lambda_1^--\tilde f_{21}\left(\lambda_1^+\nu^+-4\right)}{\alpha\lambda_1^-\left[4+\nu^+\left(\lambda_1^-\lambda_1^--2\right)\right]},\ C_1=\frac{E\,\tilde f_{11}\lambda_1^-\left(\lambda_1-2\right)-\tilde f_{21}\left(\lambda_1^+\nu^+-4\nu\right)}{\alpha\left[4+\nu^+\left(\lambda_1^-\lambda_1^--2\right)\right]},$$

для $C_k$ и $A_k$ получаются те же формулы (11) $(k=2,3,4,...)$.

Итак, решение краевой задачи (1) – (4) представлено в виде сходящихся рядов (9), коэффициенты которых определяются в явном виде.

Заметим, что ряды (9) и им подобные в случаях I) и II), определяющие напряжения и перемещения во внутренних точках и на контуре кругового сектора, сходятся в смысле сходимости обычных функциональных рядов и удовлетворяют граничным условиям на радиальных сторонах. Проверим выполнимость граничных условий (4) на дуговой части контура $(r=1)$, например, для первой задачи.

$$\begin{Bmatrix} Eu_r(1,\varphi) \\ \tau_{r\varphi}(1,\varphi) \end{Bmatrix} = \frac{2}{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\begin{Bmatrix} \tilde{f}_{1k}\sin\alpha_0 k\varphi \\ \tilde{f}_{2k}\cos\alpha_0 k\varphi \end{Bmatrix} = \frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha}\begin{Bmatrix} f_1(\gamma) \\ f_2(\gamma) \end{Bmatrix}\sum_{k=1}^{\infty}\begin{Bmatrix} \sin\alpha_0 k\gamma\sin\alpha_0 k\varphi \\ \cos\alpha_0 k\gamma\cos\alpha_0 k\varphi \end{Bmatrix} d\gamma.$$

Последние ряды в смысле сходимости обобщённых функций [7, 8] сходятся к $\delta$-функции Дирака. Действительно, разлагая $\delta$-функцию Дирака в виде ряда по синусам и по косинусам

$$\delta(\gamma-\varphi)=\frac{2}{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\sin\alpha_0 k\gamma\sin\alpha_0 k\varphi,\ \ \delta(\gamma-\varphi)=\frac{1}{\alpha}+\frac{2}{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\cos\alpha_0 k\gamma\cos\alpha_0 k\varphi$$

и сопоставляя формулы для $u_r(1,\varphi)$, $\tau_{r\varphi}(1,\varphi)$ с последними разложениями, будем иметь: $u_r(1,\varphi)=f_1(\varphi)$, $\tau_{r\varphi}(1,\varphi)=f_2(\varphi)$,

т.е. решение задачи удовлетворяет всем условиям, заданным на контуре сектора.

Исследуем поведение напряжений вблизи вершины кругового сектора.

I) $0<\alpha<2\pi$, $k=0,1,2,...$, $n=2,3,4,...$ Как следует из (9), при $\alpha<\pi$ вблизи вершины сектора имеет место малонапряжённое состояние [6], т.е. напряжения стремятся к нулю. В случае $\alpha=\pi$ напряжения при $r\to 0$ конечны и вообще отличны от нуля. Если $\alpha>\pi$, то напряжения при $r\to 0$ имеют степенную особенность (стремятся к бесконечности), порядок которого изменяется в пределах $0<2-\alpha_0 k<1$ при $k=2,\ \pi<\alpha<2\pi;$ $0<2-\alpha_0 k<0.5$ при $k=3,\ 3\pi/2<\alpha<2\pi.$.

Коэффициенты при особенности напряжений в общем случае отличны от нуля. Но когда $\alpha\to 2\pi\ (k=2)$, хотя порядок особенности стремится к единице, эти коэффициенты из-за наличия в них множителя $(\lambda_2-2)$ стремятся к нулю. Этот результат существенно отличается от той, который был получен в работе [1], где на дуговой части контура заданы внешние усилия. Там эти коэффициенты отличны от нуля.

II) $0<\alpha<\pi$, $k=0,1,2,...$, $n=1,2,3,...$ Особенность напряжений возникает при $k=1$, $\pi/2<\alpha<\pi$, порядок которого меняется в пределах $0<2-\alpha_0<1$, а общий множитель коэффициентов при особенности имеет вид $(\lambda_1-2)\left[\tilde{f}_{11}(\lambda_1^-\nu^+ +4)-\tilde{f}_{21}(\lambda_1^+\nu^+ -4)\right]$, которое в случае $\alpha \to \pi$ стремится к нулю, так как $(\lambda_1 - 2) \to 0$. При условии (12) окрестность вершины сектора находится в малонапряжённом состоянии при $0 < \alpha < \pi$.

III) $\pi < \alpha < 2\pi$, $k = -1, 0, 1, \ldots$, $n = 2, 3, 4, \ldots$ Для любого значения $\alpha$ все три напряжения имеют степенную особенность того или иного порядка при $r \to 0$. Порядок особенности напряжений меняется в пределах

$0.5 < \alpha_0 < 1$, $\pi < \alpha < 2\pi$, $0 < 2 - \alpha_0 k < 1$, $\pi < \alpha < 2\pi$, $k = 2, 0 < 2 - \alpha_0 k < 0.5$, $3\pi/2 < \alpha < 2\pi$, $k = 3$.

Более подробно рассмотрим поведение напряжений в окрестности вершины сектора при $\alpha \to \pi$ и $\alpha \to 2\pi$ $(k = 2)$. При $\alpha \to \pi$ порядок особенности напряжений стремится к единице, коэффициенты которого стремятся к нулю из-за наличия в них множителя $(\alpha_0 - 1)$. В случае $\alpha \to 2\pi$ порядок особенности напряжений также стремится к единице, а соответствующие коэффициенты стремятся к нулю из-за наличия в них множителя $(\lambda_2 - 2)$. Для $k = 3$ имеем обычную степенную особенность, коэффициенты которого отличны от нуля.

Полученные выводы верны также для случая граничных условий (4.2).

Таким образом, при рассмотрении задач упругого равновесия кругового сектора, когда его радиальные стороны усилены стрингерами, а на дуговой части контура заданы или напряжения, или перемещения, или смешанные граничные условия, выяснилось, что только в первом случае из этих граничных условий коэффициенты при возникшей степенной особенности напряжений $r^{-1+\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$; $\varepsilon \to 0$ при $\alpha \to \pi$ или $\alpha \to 2\pi$) отличны от нуля. И поэтому, с точки зрения механики хрупкого разрушения, первый тип нагружения дуговой части контура кругового сектора является наиболее опасным случаем.

Отметим также, что уравнение статического равновесия кругового сектора во всех трёх случаях I), II) и III) удовлетворяются тождественно.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Саргсян А.М.– Механика композитных материалов. 2017. Т.53, №1. С. 143 - 154.
2. Саргсян А.М. – Доклады НАН Армении (в печати).
3. Williams M.L. - Appl. Mech. 1952. Vol.19, №4. P.526 - 528.
4. Melan E. - Ing. Archiv. 1932. Bd.3. Haft 2. P.123.
5. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488 с.
6. Чобанян К.С. Напряжения в составных упругих телах. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1987. 338 с.
7. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Изд-во технико-теоретической литературы. 1953. 680 с.
8. Гельфанд И.М и др. Обобщенные функции, вып.1,2,3. М.: Физматгиз. 1958.



**Сведения об авторе**:

**Саргсян Азат Мкртычевич**, к.ф.-м.н., ведущий научный сотр. Ин-та механики НАН Армении.

**Адрес:** Армения, 0018, Ереван, ул.Т. Меци, 40, кв.47. Тел.: 374 93 21 73 50;

**E-mail:** azat-sargsyan@mail.ru

# УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ ПО МИКРОПОЛЯРНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

**Саркисян А.А.**

Рассматриваются микрополярные пологие оболочки, упругие прогибы которых сравнимы с их толщиной и вместе с тем малы по сравнению с характерным размером в плане, одновременно малы как углы поворота нормалей к срединной поверхности до деформации, так и их свободные повороты. На основе принятых гипотез построена общая прикладная модель статической деформации микрополярных упругих гибких пологих оболочек. Далее, после линеаризации уравнений построенной геометрически нелинейной модели микрополярных упругих тонких пологих оболочек получена система линейных уравнений статической устойчивости плоского напряжённого состояния пологой оболочки. Решена конкретная задача устойчивости пологой оболочки, края которой шарнирно опёрты и сжаты в одном направлении.

**1. Введение**. Нелинейные теории изгиба пластин Феппеля-Кармана и пологих оболочек Маргерра имеют широкую применимость в прикладной классической теории [1-3]. Аналогично классической геометрически нелинейной теории упругости [4] построены геометрически нелинейные трёхмерные микрополярные теории упругости пластин и оболочек [5].

В работах [6-9] построены прикладные линейные теории микрополярных упругих тонких пластин и оболочек. В работе [10] построена модель линейной задачи устойчивости микрополярных упругих тонких пластин. В работе [11] построен общий вариационный функционал трёхмерной и двумерной геометрически нелинейной микрополярной теории упругости пологих оболочек.

В данной работе построен общий вариационный функционал прикладной теории геометрически нелинейных микрополярных упругих тонких пологих оболочек принимая в основу гипотезы линейной теории микрополярных упругих тонких оболочек [6] и предположения классической теории гибких оболочек Маргерра [1,3]. Варьируя построенный функционал по всем функциональным аргументам, получены уравнения равновесия, физические соотношения упругости, геометрические соотношения и естественные граничные условия прикладной теории статической деформации микрополярных упругих гибких пологих оболочек. На основе линеаризации построенной прикладной теории статической деформации микрополярных гибких пологих оболочек, получены линейные уравнения статической устойчивости микрополярной упругой пологой оболочки, когда она сжата в своей срединной поверхности. Как конкретная задача устойчивости рассмотрена микрополярная цилиндрическая пологая оболочка прямоугольная в плане, когда она сжата в одном направлении.

**2. Геометрически нелинейная теория трехмерных микрополярных упругих пологих оболочек с независимыми полями перемещений и вращений.** Рассмотрим пологую оболочку постоянной толщины $2h$ как трёхмерное микрополярное упругое изотропное тело. Выберем координатные линии $x_1, x_2$ таким образом, чтобы они совпадали с главными линиями кривизны срединной поверхности. Координату $z$ будем отсчитывать по нормали к срединной поверхности, считая положительным по направлению к центру кривизны.

Вариационный функционал трёхмерной микрополярной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений при конечных перемещениях и поворотах (когда тело геометрически представляет собой трёхмерную пологую оболочку) имеет вид [11]:

$$I = \int_{-h}^{h} \iint_S \Bigg\langle W - \Bigg\{ \sigma_{ii} \Bigg[ \gamma_{ii} - \Bigg[ \frac{\partial V_i}{\partial x_i} + \frac{V_3}{R_i} + \frac{1}{2} \Bigg[ \left( \frac{\partial V_1}{\partial x_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_2}{\partial x_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_3}{\partial x_i} \right)^2 + \omega_3^2 + \omega_j^2 -$$

$$-2(-1)^j \left( \frac{\partial V_2}{\partial x_i} \omega_3 - \frac{\partial V_3}{\partial x_i} \omega_j \right) \Bigg]\Bigg]\Bigg] + \sigma_{33} \Bigg[ \gamma_{33} - \Bigg[ \frac{\partial V_3}{\partial z} + \frac{1}{2} \Bigg[ \left( \frac{\partial V_1}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_2}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_3}{\partial z} \right)^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2 -$$

$$-2 \frac{\partial V_1}{\partial z} \omega_2 + 2 \frac{\partial V_2}{\partial z} \omega_1 \Bigg]\Bigg]\Bigg] + \sigma_{ij} \Bigg[ \gamma_{ij} - \Bigg[ \frac{\partial V_j}{\partial x_i} - (-1)^j \omega_3 + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \frac{\partial V_j}{\partial x_j} - (-1)^j \frac{\partial V_j}{\partial x_j} \omega_3 + \frac{1}{2} \Bigg( \frac{\partial V_3}{\partial x_i} \frac{\partial V_3}{\partial x_2} -$$

$$-\frac{\partial V_3}{\partial x_1}\omega_1+\frac{\partial V_3}{\partial x_2}\omega_2-\omega_1\omega_2\Bigg)\Bigg]\Bigg]+\sigma_{3i}\Bigg[\gamma_{3i}-\Bigg[\frac{\partial V_3}{\partial x_i}+(-1)^j\omega_j-\frac{V_i}{R_i}+\frac{\partial V_3}{\partial x_i}\frac{\partial V_3}{\partial z}+(-1)^j\frac{\partial V_3}{\partial z}\omega_j+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_j}{\partial x_i}\frac{\partial V_j}{\partial z}+(-1)^j\left(\frac{\partial V_2}{\partial x_i}\omega_i-\frac{\partial V_j}{\partial z}\omega_3\right)-\omega_i\omega_3\right)\Bigg]\Bigg]+\sigma_{i3}\Bigg[\gamma_{i3}-\Bigg[\frac{\partial V_3}{\partial x_i}+(-1)^j\omega_j-\frac{V_i}{R_i}+\frac{\partial V_3}{\partial x_i}\frac{\partial V_3}{\partial z}+$$

$$+(-1)^j\frac{\partial V_3}{\partial z}\omega_j+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_j}{\partial x_i}\frac{\partial V_j}{\partial z}+(-1)^j\left(\frac{\partial V_2}{\partial x_1}\omega_1-\frac{\partial V_2}{\partial z}\omega_3\right)-\omega_i\omega_3\right)\Bigg]\Bigg]+\mu_{ii}\Bigg[\chi_{ii}-\Bigg[\frac{\partial\omega_i}{\partial x_i}+\frac{\omega_3}{R_i}+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x_i}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega_2}{\partial x_i}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega_3}{\partial x_i}\right)^2\right)\Bigg]\Bigg]+\mu_{33}\Bigg[\chi_{33}-\left(\frac{\partial\omega_3}{\partial z}+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega_2}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega_3}{\partial z}\right)^2\right)\right)\Bigg]+$$

$$+\mu_{ij}\Bigg[\chi_{ij}-\left(\frac{\partial\omega_j}{\partial x_i}+\frac{\partial\omega_j}{\partial x_i}\frac{\partial\omega_j}{\partial x_j}+\frac{1}{2}\frac{\partial\omega_3}{\partial x_i}\frac{\partial\omega_3}{\partial x_j}\right)\Bigg]+\mu_{i3}\Bigg[\chi_{i3}-\Bigg[\frac{\partial\omega_3}{\partial x_i}-\frac{\omega_i}{R_i}+\frac{\partial\omega_3}{\partial x_i}\frac{\partial\omega_3}{\partial z}+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial\omega_j}{\partial x_i}\frac{\partial\omega_j}{\partial z}\Bigg]\Bigg]+\mu_{3i}\Bigg[\chi_{3i}-\left(\frac{\partial\omega_i}{\partial z}+\frac{\partial\omega_i}{\partial x_i}\frac{\partial\omega_i}{\partial z}+\frac{1}{2}\frac{\partial\omega_j}{\partial x_i}\frac{\partial\omega_j}{\partial z}\right)\Bigg]\Bigg\}\Bigg\rangle dx_1dx_2dz-$$

$$-\iint\limits_{S^+}\left[q_s^+V_s+m_s^+\omega_s\right]_{z=h}dx_1dx_2+\iint\limits_{S^-}\left[q_s^-V_s+m_s^-\omega_s\right]_{z=-h}dx_1dx_2+$$

$$+\int\limits_{-h}^{+h}dz\int\limits_{l_1'}\left(\sigma_{2s}^0V_s+\mu_{2s}^0\omega_s\right)dx_1+\int\limits_{-h}^{+h}dz\int\limits_{l_1''}\left[\sigma_{2s}\left(V_s-V_s^0\right)+\mu_{2s}\left(\omega_s-\omega_s^0\right)\right]dx_1+$$

$$+\int\limits_{-h}^{+h}dz\int\limits_{l_2'}\left(\sigma_{1s}^0V_s+\mu_{1s}^0\omega_s\right)dx_2+\int\limits_{-h}^{+h}dz\int\limits_{l_2''}\left[\sigma_{1s}\left(V_s-V_s^0\right)+\mu_{1s}\left(\omega_s-\omega_s^0\right)\right]dx_2 \qquad (1)$$

Здесь по повторяющимся индексам идёт суммирование, $i=1,2;\ j=1,2;\ i\neq j; s=1,2,3$.

В формуле (1) поверхностные интегралы распространены на лицевые $S^+,S^-(z=\pm h)$ и на боковые поверхности пологой оболочки, где на одной части заданы внешние усилия и моменты, а на остальной части – перемещения и повороты (величины с индексами – ноль); $l_i',\ l_i'',\ i=1,2$ – соответствующие части контура срединной поверхности пологой оболочки; $W$ – плотность потенциальной энергии деформации:

$$\mathrm{W}=\frac{1}{2}\Big\{2\mu\left(\gamma_{11}^2+\gamma_{22}^2+\gamma_{33}^2\right)+\lambda\left(\gamma_{11}+\gamma_{22}+\gamma_{33}\right)^2+\left(\mu+\alpha\right)\left(\gamma_{12}^2+\gamma_{21}^2+\gamma_{13}^2+\gamma_{31}^2+\gamma_{23}^2+\gamma_{32}^2\right)+$$

$$+2\left(\mu-\alpha\right)\left(\gamma_{12}\gamma_{21}+\gamma_{13}\gamma_{31}+\gamma_{23}\gamma_{32}\right)+2\gamma\left(\chi_{11}^2+\chi_{22}^2+\chi_{33}^2\right)+\beta\left(\chi_{11}+\chi_{22}+\chi_{33}\right)^2+$$

$$+\left(\gamma+\varepsilon\right)\left(\chi_{12}^2+\chi_{21}^2+\chi_{13}^2+\chi_{31}^2+\chi_{23}^2+\chi_{32}^2\right)+2\left(\gamma-\varepsilon\right)\left(\chi_{12}\chi_{21}+\chi_{13}\chi_{31}+\chi_{23}\chi_{32}\right)\Big\} \qquad (2)$$

В формулах (1) и (2) $V_i,V_3$ – компоненты вектора перемещения; $\omega_i,\omega_3$ – компоненты вектора независимого вращения; $\sigma_{ii},\sigma_{ij},\sigma_{i3},\sigma_{3i},\sigma_{33}$ – компоненты тензора напряжений; $\mu_{ii},\mu_{ij},\mu_{i3},\mu_{3i},\mu_{33}$ – компоненты тензора моментных напряжений; $\gamma_{ii},\gamma_{ij},\gamma_{i3},\gamma_{3i},\gamma_{33}$ – компоненты тензора деформаций; $\chi_{ii},\chi_{ij},\chi_{i3},\ \chi_{3i},\chi_{33}$ – компоненты тензора изгиба-кручений ($i=1,2,\ j=1,2, i\neq j$); $\lambda,\mu$ (коэффициенты Ламе) и $\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon$ –упругие постоянные микрополярного тела.

На основе функционала (1) можно составить вариационное уравнение $(\delta I=0)$, из которого будут следовать (в качестве уравнений Эйлера) все основные уравнения и естественные граничные условия геометрически нелинейной трёхмерной микрополярной теории упругости пологих оболочек.

**3. Геометрически нелинейная прикладная модель микрополярных упругих тонких пологих оболочек при больших прогибах.** С целью приведения геометрически нелинейной трёхмерной задачи микрополярной теории упругости к двумерной, в основу предлагаемой теории микрополярных упругих тонких гибких пологих оболочек ставим: 1) основные гипотезы прикладной линейной теории тонких пологих оболочек [6] и 2) предположения нелинейной классической теории пологих оболочек Маргерра [3].

Также вместо компонент тензоров силовых и моментных напряжений вводим статически эквивалентные им интегральные характеристики: усилия $\left(T_{ii}, S_{ij}, N_{i3}, N_{3i}\right)$, моменты $\left(M_{ii}, M_{ij}, L_{ii}, L_{ij}, L_{i3}, L_{33}\right)$ и гипермоменты $\left(\Lambda_{i3}\right)$ [6].

В результате получим формулу для усредненного функционала $I_0$ геометрически нелинейной прикладной теории микрополярных тонких пологих оболочек [11].

Варьируя $I_0$ по всем независимым функциональным аргументам, из вариационного уравнения $\delta I_0 = 0$ получим основные уравнения и естественные граничные условия микрополярных упругих геометрически нелинейных тонких пологих оболочек с независимыми полями перемещений и вращений, которые выражаются так:

Уравнения равновесия

$$\frac{\partial T_{ii}}{\partial x_i} + \frac{\partial S_{ji}}{\partial x_j} + \left(p_i^+ + p_i^-\right) = 0, \quad \frac{\partial L_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial L_{23}}{\partial x_2} + \left(S_{12} - S_{21}\right) + \left(m_3^+ + m_3^-\right) = 0$$

$$\frac{\partial N_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_1}\left[T_{11}\frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{S_{12}+S_{21}}{2}\frac{\partial w}{\partial x_2}\right] + \frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{S_{12}+S_{21}}{2}\frac{\partial w}{\partial x_1} + T_{22}\frac{\partial w}{\partial x_2}\right] +$$

$$+ \frac{T_{11}}{R_1} + \frac{T_{22}}{R_2} + (p_3^+ + p_3^-) = 0$$

$$N_{3i} - \left(\frac{\partial M_{ii}}{\partial x_i} + \frac{\partial M_{ji}}{\partial x_j}\right) = h\left(p_i^+ - p_i^-\right), \quad \frac{\partial L_{ii}}{\partial x_i} + \frac{\partial L_{ji}}{\partial x_j} + (-1)^j\left(N_{j3} - N_{3j}\right) + \left(m_i^+ + m_i^-\right) = 0$$

$$L_{33} - \left(\frac{\partial \Lambda_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Lambda_{23}}{\partial x_2}\right) - \left(M_{12} - M_{21}\right) = h\left(m_3^+ - m_3^-\right) \tag{3}$$

Соотношения упругости

$$T_{ii} = \frac{2Eh}{1-\nu^2}[\Gamma_{ii} + \nu\Gamma_{jj}], \quad M_{ii} = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}[K_{ii} + \nu K_{jj}],$$

$$M_{ij} = \frac{2h^3}{3}[(\mu+\alpha)K_{ij} + (\mu-\alpha)K_{ji}], \quad S_{ij} = 2h[(\mu+\alpha)\Gamma_{ij} + (\mu-\alpha)\Gamma_{ji}]$$

$$N_{i3} = 2h[(\mu+\alpha)\Gamma_{i3} + (\mu-\alpha)\Gamma_{3i}], \qquad N_{3i} = 2h[(\mu+\alpha)\Gamma_{3i} + (\mu-\alpha)\Gamma_{i3}]$$

$$L_{ii} = 2h[(\beta+2\gamma)\kappa_{ii} + \beta(\kappa_{jj} + \iota)], \quad L_{33} = 2h[(\beta+2\gamma)\iota + \beta(\kappa_{11} + \kappa_{22})],$$

$$L_{ij} = 2h[(\gamma+\varepsilon)\kappa_{ij} + (\gamma-\varepsilon)\kappa_{ji}], \quad L_{i3} = 2h\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\kappa_{i3}, \quad \Lambda_{i3} = \frac{2h^3}{3}\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{i3} \tag{4}$$

Геометрические соотношения

$$\Gamma_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{w}{R_i} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_i}\right)^2, \quad \Gamma_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - (-1)^j\Omega_3 + \frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial w}{\partial x_2}$$

$$\Gamma_{i3} = \frac{\partial w}{\partial x_i} + (-1)^j\Omega_j, \quad \Gamma_{3i} = \psi_i - (-1)^j\Omega_j, \quad K_{ii} = \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i}, \quad K_{ij} = \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i} - (-1)^j\iota,$$

$$\kappa_{ii} = \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_i}, \quad \kappa_{33} = \iota, \quad \kappa_{ij} = \frac{\partial \Omega_j}{\partial x_i}, \quad \kappa_{i3} = \frac{\partial \Omega_3}{\partial x_i}, \quad l_{i3} = \frac{\partial \iota}{\partial x_i} \tag{5}$$

Рассмотрим граничные условия шарнирного опирания:

$T_{ii}=0$, $u_j=0$, $M_{ii}=0$, $\psi_j=0$, $w=0$, $L_{ij}=0$, $\Omega_i=0$, $\Lambda_{i3}=0$ при $x_i=0;a$ (6)

Здесь $u_1,u_2$ – перемещения точек срединной поверхности оболочки вдоль координатных осей $x_1,x_2$; $w$ – перемещение точек срединной поверхности в направлении оси $z$; $\psi_1,\psi_2$ – полные углы поворота, а $\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3$ – свободные повороты первоначально нормального к срединной поверхности элемента вокруг линий $x_1,x_2,z$; $\iota$ – интенсивность свободного поворота вдоль оси $z$; $\Gamma_{ii}$ – деформации удлинений в направлениях $x_1,x_2$; $\Gamma_{ij},\Gamma_{i3},\Gamma_{3i}$ –деформации сдвигов в соответствующих плоскостях; $K_{ii}$ – изгибы срединной поверхности оболочки, обусловленные силовыми напряжениями; $K_{ij}$ – кручения срединной поверхности оболочк, обусловленные силовыми напряжениями; $\kappa_{ii},\kappa_{33}$ – изгибы срединной поверхности оболочки, обусловленные моментными напряжениями; $\kappa_{ij}$ – кручения срединной поверхности оболочки, обусловленные моментными напряжениями; $l_{i3}$ – гиперсдвиги срединной поверхности оболочки, обусловленные моментными напряжениями.

Полученная система уравнений (3)-(5) и граничные условия (6) составляют содержание прикладной теории статики геометрически нелинейных микрополярных упругих тонких пологих оболочек с независимыми полями перемещений и вращений с полным учётом поперечных сдвиговых деформаций. Построенная прикладная модель микрополярных упругих гибких пологих оболочек представляет собой обобщение на микрополярный случай в квадратичном приближении геометрически нелинейной классической теории гибких пологих оболочек Маргерра (которой соответствует случай $\alpha=0$).

Сформулированная выше вариационная задача соответствует наиболее общему вариационному принципу (типа Ху-Вашицу) микрополярных упругих тонких оболочек, из которого можно получить частные вариационные принципы.

**4. Линеаризованные уравнения устойчивости микрополярных упругих тонких пологих оболочек.** Далее рассмотрим простейший случай пологой круговой цилиндрической панели радиуса R, прямоугольной в плане. В этом случае в уравнениях (3)-(5) нужно принять $R_1=R, R_2\to\infty$.

Рассмотрим задачу, когда микрополярная упругая цилиндрическая пологая оболочка шарнирно опёрта и подвергается равномерно распределённой нагрузки, параллельной оси $x_2$ и имеющий интенсивность $p$. В этом случае осуществлён плоское напряжённо-деформированное состояние (НДС), решение которой будет [10]:

$$T_{11}=\overset{0}{T}_{11}=0,\ T_{22}=\overset{0}{T}_{22}=\text{const}=-p,\ S_{12}=\overset{0}{S}_{12}=S_{21}=\overset{0}{S}_{21}\equiv 0,$$

$$L_{13}=\overset{0}{L}_{13}=L_{31}=\overset{0}{L}_{31}\equiv 0,\ \Omega_3=\overset{0}{\Omega}_3\equiv 0 \qquad (7)$$

Компоненты перемещений, деформаций, силовых и моментных напряжений, соответствующие этому НДС, отмечены нулевыми верхними индексами. При потере устойчивости, докритическое НДС получит некоторые возмущения. Величины, характеризующие НДС, вызванные этими возмущениями, отмечены звездочкой вверху. Возмущённое НДС в оболочке характеризуется величинами соответствующих сумм с индексами нуль и звездочкой. Возмущения (т.е. величины со звездочками вверху) представляются малыми и при преобразованиях их степенями выше первой, будем пренебрегать.

Подставим отмеченные соотношения в систему уравнений геометрически нелинейной теории микрополярных упругих пологих оболочек (3)-(5), тогда уравнения возмущённого напряжённого состояния получим в виде:

Уравнения равновесия

$$\frac{\partial T_{ii}}{\partial x_i}+\frac{\partial S_{ji}}{\partial x_j}=0,\ \frac{\partial N_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial N_{23}}{\partial x_2}+\frac{T_{11}}{R}=p\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2},\ \frac{\partial L_{ii}}{\partial x_i}+\frac{\partial L_{ji}}{\partial x_j}+(-1)^j\left(N_{j3}-N_{3j}\right)=0$$

$$N_{3i}-\left(\frac{\partial M_{ii}}{\partial x_i}+\frac{\partial M_{ji}}{\partial x_j}\right)=0,\ \frac{\partial L_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial L_{23}}{\partial x_2}+\left(S_{12}-S_{21}\right)=0,\ L_{33}-\left(\frac{\partial \Lambda_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial \Lambda_{23}}{\partial x_2}\right)-\left(M_{12}-M_{21}\right)=0 \qquad (8)$$

Соотношения упругости

$$T_{ii}=\frac{2Eh}{1-v^2}[\Gamma_{ii}+v\Gamma_{jj}],\ M_{ii}=\frac{2Eh^3}{3(1-v^2)}[K_{ii}+vK_{jj}],\ M_{ij}=\frac{2h^3}{3}[(\mu+\alpha)K_{ij}+(\mu-\alpha)K_{ji}]$$

$$S_{ij}=2h[(\mu+\alpha)\Gamma_{ij}+(\mu-\alpha)\Gamma_{ji}],N_{i3}=2h[(\mu+\alpha)\Gamma_{i3}+(\mu-\alpha)\Gamma_{3i}](i\leftrightarrow 3)$$

$$L_{ii} = 2h[(\beta+2\gamma)\kappa_{ii} + \beta(\kappa_{jj} + \iota)],\ L_{33} = 2h[(\beta+2\gamma)\iota + \beta(\kappa_{11} + \kappa_{22})],$$

$$L_{ij} = 2h[(\gamma+\varepsilon)\kappa_{ij} + (\gamma-\varepsilon)\kappa_{ji}], \quad L_{i3} = 2h\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\kappa_{i3},\ \Lambda_{i3} = \frac{2h^3}{3}\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{i3} \tag{9}$$

Геометрические соотношения

$$\Gamma_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{w}{R}, \Gamma_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2},\ \Gamma_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - (-1)^j\Omega_3,\ \Gamma_{i3} = \frac{\partial w}{\partial x_i} + (-1)^j\Omega_j, \Gamma_{3i} = \psi_i - (-1)^j\Omega_j$$

$$K_{ii} = \frac{\partial\psi_i}{\partial x_i},\ K_{ij} = \frac{\partial\psi_j}{\partial x_i} - (-1)^j\iota,\ \kappa_{ii} = \frac{\partial\Omega_i}{\partial x_i},\ \kappa_{33} = \iota,\ \kappa_{ij} = \frac{\partial\Omega_j}{\partial x_i},\ \kappa_{i3} = \frac{\partial\Omega_3}{\partial x_i},\ l_{i3} = \frac{\partial\iota}{\partial x_i} \tag{10}$$

Рассмотрим граничные условия шарнирного опирания:

$$T_{ii} = 0, u_j = 0, M_{ii} = 0, \psi_j = 0, w = 0, L_{ij} = 0, \Omega_i = 0, \Lambda_{i3} = 0 \text{ при } x_i = 0; a \tag{11}$$

При решении такой граничной задачи из условия нетривиальности решения получим значения критических величин внешних воздействий. Далее решена конкретная задача и осуществлён численный анализ.

**5. Заключение**. В работе принимая в основу геометрически нелинейную теорию микрополярной упругости с независимыми полями перемещений и вращений, обобщая подход Маргерра теории гибких пологих оболочек и развивая гипотезы построения линейной теории микрополярных тонких оболочек, изложена линейная теория устойчивости микрополярных упругих тонких пологих оболочек. Изучена задача устойчивости цилиндрической пологой оболочки, которая позволяет установить важные жёсткостно-устойчивые свойства микрополярного материала по сравнению с классическим случаем.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки. М.: ГИТТЛ, 1956. 419 с.
2. Григолюк Э.И., Мамай В.И. Нелинейное деформирование тонкостенных конструкций. М.: Наука. Физматлит, 1997. 272 с.
3. Marguerre K. Die Durchschlags kraft eines schwachgekrummten Balkes//Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Cesellschaft. 1938. Bd.37. S.22-40.
4. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. Л.-М.: Гостехиздат, 1948. 211 с.
5. Eringen A. C. Suhubi E. S. Non-linear theory of simple microelastic solids// Int. J. Eng. Sci. I-1964, 2,2,189; II-1964,2,4,389.
6. Саркисян С.О. Общая теория микрополярных упругих тонких оболочек //Физическая мезомеханика. 2011. Т.14. № 1. С.55-66.
7. Саркисян С.О. Математическая модель микрополярных упругих тонких пластин и особенности их прочностных и жесткостных характеристик. // Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т.53. Вып. 2. С.148-156.
8. Саркисян С.О., Саркисян А.А. Модель колебаний микрополярных тонких оболочек. // Акустический журнал. 2013. Т.59. №2. С.170-181.
9. Sargsyan A. H., Sargsyan S. H. Dynamic model of micropolar elastic thin plates with independent fields of displacements and rotations.// Journal of Sound and Vibration. 2014. Vol. 333. Issue 18. P.4354-4375.
10. Саркисян А.А., Саркисян С.О. Устойчивость сжатой прямоугольной пластинки по микрополярной теории упругости.// Перспективные материалы и технологии. Монография. Т.2. Витебск. Беларусь: 2019. С. 27-36.
11. Саркисян А.А. Вариационное уравнение геометрически нелинейной теории микрополярных упругих тонких пологих оболочек.// Ученые записки. Ширакский государственный университет. 2019 г. №1. Выпуск А. (в печати)



**Информация об авторе:**

**Саркисян Арменуи Акоповна** – доцент кафедры Математика, физика и информационные технологии, Ширакский государственный университет, директор центра Научной политики, обеспечения и управления качества, (374 94) 42 21 03, **e-mail:** armenuhis@mail.ru

# РАВНОВЕСИЕ УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ, СОДЕРЖАЩЕЙ ДВЕ ПЛОТНО ПРИЛЕГАЮЩИЕ ПО ФРОНТАЛЬНОМУ РАЗРЕЗУ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫЕ УПРУГИЕ ПОЛУПОЛОСЫ

**Саркисян В.Г., Саакян А.В., Хачикян А.С.**

Рассматривается напряжённое состояние кусочно-однородной упругой плоскости, составленной из двух одинаковых полуплоскостей и полосы из другого материала. Предполагается, что полоса по всей ширине разрезана, то есть в составной плоскости имеется трещина, выходящая на линии раздела материалов. Определено напряжённое состояние плоскости и вычислены контактные напряжения.

**Введение.** Определению напряжённого состояния составной плоскости, содержащей трещины, посвящено множество исследований, среди которых, в частности, отметим [1-4]. Особое место занимают задачи определения напряжённого состояния составной плоскости, когда трещина перпендикулярна или под углом выходит на линию раздела материалов, в этой связи отметим лишь работы [4-6].

В настоящей работе рассмотрено напряжённое состояние кусочно-однородной плоскости, составленной из двух одинаковых полуплоскостей, между которыми находятся две плотно прилегающие по фронтальному разрезу полуполосы.

**Постановка задачи.** Рассматривается упругая плоскость, содержащая полосу из другого материала, разрезанную по всей ширине. Фактически, рассматривается задача для составной плоскости с трещиной, выходящей на линии раздела материалов (рис.1). Внешние усилия в виде равномерного давления приложены к берегам трещины симметрично. На линиях соединения полуполос с полуплоскостями имеем условия полного контакта:

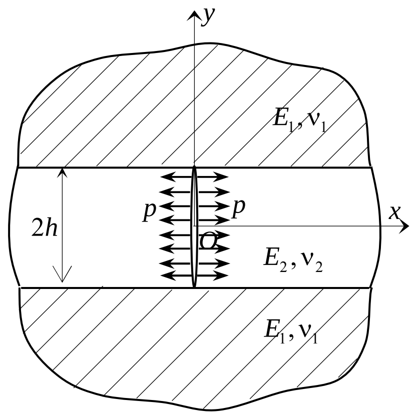


Рис.1

$$u_1(x,\pm h) = u_2(x,\pm h), \qquad v_1(x,\pm h) = v_2(x,\pm h),$$
$$\tau_{xy}^{(1)}(x,\pm h) = \tau_{xy}^{(2)}(x,\pm h), \qquad \sigma_y^{(1)}(x,\pm h) = \sigma_y^{(2)}(x,\pm h), \tag{1}$$

а на берегах трещины заданы напряжения:

$$\tau_{xy}^{(2)}(0,y) = 0$$
$$\sigma_x^{(2)}(0,y) = -p \qquad (-h < y \le h) \tag{2}$$

В силу симметричности задачи, будем рассматривать лишь первую четверть координатной плоскости. Далее, индексом «1» будут отмечаться величины, относящиеся к полуплоскости, а индексом «2» – к полосе. Нетрудно заметить, что полутолщина полосы $h$ является единственным геометрическим параметром, следовательно, можно принять $h = 1$, а все линейные величины, а именно, координаты $x$ и $y$, считать отнесёнными к $h$, т.е. безразмерными.

**Вывод определяющего уравнения задачи.** Бигармоническую функцию Эри представим в виде

$$\Phi(x,y) = \begin{cases} \Phi_1(x,y), \ y > 1, x > 0 \\ \Phi_2(x,y), \ 0 < y < 1, x > 0 \end{cases}$$

$$\Phi_1(x,y) = \int_0^\infty \left[A_1(\lambda) + \lambda y B_1(\lambda)\right] e^{-\lambda y} \cos\lambda x d\lambda, \tag{3}$$

$$\Phi_2(x,y) = \int_0^\infty \left(A_2(\lambda)\operatorname{ch}\lambda y + \lambda y B_2(\lambda)\operatorname{sh}\lambda y\right)\cos\lambda x d\lambda + \sum_{k=0}^\infty \left(a_k + \pi k x b_k\right) e^{-\pi k x}\cos\pi k y$$

Используя формулы, выражающие компоненты напряжений и перемещений через функцию напряжений [7], переходя к образам Фурье и удовлетворяя условиям (1), находим представления подынтегральных коэффициентов бигармонической функции Эри посредством коэффициентов бесконечного ряда:

$$a_k = b_k = -\frac{E_2}{2\lambda_k^2 h}\int_{-h}^{h} w(t)\sin\lambda_k t\, dt\,, \tag{4}$$

где $\lambda_k = \pi k/h$, а $w(t)$ – искомая функция, представляющая собой производную скачка перемещений берегов трещины:

$$w(y) = \left.\frac{\partial u_2}{\partial y}\right|_{x=0} \quad (-h < y < h) \tag{5}$$

Выписав выражение напряжения $\sigma_x(x, y)$ посредством функции Эри, а, следовательно, коэффициентов (4), и приравняв его внешнему давлению $p$ на берегах трещины, получаем сингулярно-интегральное уравнение с обобщённым ядром Коши относительно функции $w(t)$, которая должна удовлетворять условию смыкания концов трещины

$$\int_{-h}^{h} w(t)\,dt = 0\,. \tag{6}$$

Переходя к безразмерным величинам и разыскивая, с учётом симметрии относительно оси абсцисс, решение полученной системы в виде

$$w(h\xi) = (1-\xi)^{\alpha}(1+\xi)^{\alpha} w_*(\xi) \quad (-1<\xi<1), \tag{7}$$

показатель особенности $\alpha$ находим из исследования поведения сингулярного интегрального уравнения в окрестности концов интервала интегрирования $(-1,1)$. Используя известные результаты о поведении сингулярных интегралов в окрестности концевых точек [8], найдём, что показатель $\alpha$ является корнем следующего трансцендентного уравнения

$$\cos\pi(1-\alpha) - A(1-\alpha)^2 + B(1-\alpha) - C = 0 \qquad (-1<\alpha<0), \tag{8}$$

где

$$A = \frac{(\mu-1)(1+\nu_2)}{3-\nu_2+\mu(1+\nu_2)}; \qquad B = \frac{5}{2}\frac{(\mu-1)(1+\nu_2)}{3-\nu_2+\mu(1+\nu_2)}; \qquad \mu = \frac{\mu_2}{\mu_1};$$

$$C = 2\left[\frac{\mu(1+\nu_2)}{3-\nu_2+\mu(1+\nu_2)} - \frac{(1+\nu_1)(2+\nu_2)\nu_2 - \mu(1+\nu_2)\big((\nu_1-2)(1+\nu_2)-\nu_2\big)}{\big(\mu(3-\nu_1)+(1+\nu_2)\big)(1+\nu_2)\big(3-\nu_2+\mu(1+\nu_2)\big)}\right]$$

После определения показателя $\alpha$, решение определяющего сингулярного интегрального уравнения с неподвижной особенностью строится методом механических квадратур [9], сведя его решение к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов полинома, интерполирующего ограниченную на отрезке $[-1,1]$ непрерывную функцию $w_*(\xi)$.

**Численный анализ.** Проведено исследование зависимости распределения нормальных и тангенциальных контактных напряжений на линии раздела материалов, коэффициентов их интенсивности, а также формы раскрытия трещины от отношения модулей упругости и коэффициентов Пуассона материалов полосы и полуплоскостей. Построены графики распределения безразмерных нормальных напряжений $\sigma_y(x)/E_2$ по линии контакта полуплоскости с полосой и напряжений $\sigma_x(y)/E_2$ на продолжении линии трещины, рассчитанные при различных значениях упругих констант материалов.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Развитие теории контактных задач в СССР. /Под редакцией Л.А.Галина. М.: Наука, 1976.
2. Черепанов Г.П. О напряженном состоянии в неоднородной пластинке с разрезами. //Известия АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1962. №1. С.131-137.
3. Саркисян В.Г., Хачикян А.С. Равновесие упругой плоскости, содержащей полосу и симметричные трещины на линиях контакта. //Изв. НАН Армении. Механика. 2015. Т.68. №2. С.3-9.
4. Акопян В.Н. Смешанные граничные задачи о взаимодействии сплошных деформируемых тел с концентраторами напряжений различных типов. Ереван: «Гитутюн», 2014. 322 с.
5. Erdogan F., Gupta G.D., Cook T.S. (1973) Numerical solution of singular integral equations. In: Sih G.C. (eds) Methods of analysis and solutions of crack problems. Mechanics of fracture, vol 1. Springer, Dordrecht
6. Соболь Б. В., Рашидова Е.В., Борисова Е.В.. Задача о поперечной внутренней трещине в составной упругой полуплоскости / Б. В. Соболь, Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред: труды VIII междунар. конф., 22-26 сент. 2014г., Горис-Степанакерт.- Ереван: 2014. С.403-407.
7. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576с.
8. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511с.
9. Sahakyan A.V. Method of discrete singularities for solution of singular integral and integro-differential equations. /Proceedings of A.Razmadze Mathematical Institute, Georgia. Vol.156 (2011), pp.101-111..



**<u>Сведения об авторах:</u>**

**Саркисян Вардан Гарегинович –** К. т..н., ст. научный сотрудник Института механики.
**Тел.:** (37410)61-55-78

**Саакян Аветик Вараздатович –** Д.ф.-м. н., зам.директора Института механики НАН Армении,
**Тел.:** (37410) 568188, (37494)579348
**E-mail:** avsah@mechins.sci.am

**Хачикян Альберт Серобович –** К. ф.м.н, ведущий научный сотрудник Института механики.
**Тел.:** (37410)74-02-89.

# МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ МИКРОПОЛЯРНОГО УПРУГОГО СТЕРЖНЯ С КРУГОВОЙ ОСЬЮ И РАЗВИТИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

**Саркисян С.О., Хачатрян М.В.**

В работе, исходя из двумерных уравнений и граничных условий микрополярной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений, на основе асимптотически обоснованного метода гипотез, построена прикладная модель динамики упругих тонких стержней с круговой осью. Исходя из построенной прикладной модели, для изучения конкретных граничных задач о свободных колебаниях упругих тонких стержней с круговой осью (при различной её геометрии), когда на её концах имеются различные граничные условия, выведены матрицы жёсткости и масс для конечного элемента. Сначала ось стержня в целом принимается как один конечный элемент, далее рассматриваются два, четыре, восемь конечных элемента. Где это возможно, выполнено сравнение полученных результатов расчёта со значениями аналитического решения.

**1. Гипотезы. Вывод основной системы уравнений прикладной одномерной модели динамики тонкого стержня с круговой осью из двумерной модели микрополярной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений.** Рассмотрим стержень с круговой осью (ось-дуга окружности радиуса $r_0$), имеющий постоянное поперечное сечение: высотой $2h = r_2 - r_1$ и шириной $b$, последнее настолько малой, что в стержне имеет место плоское напряжённое состояние (здесь $r_1$ и $r_2$ – радиусы окружностей лицевых поверхностей тела).

В срединной плоскости стержня введём полярную систему координат $(r,\varphi)$ $(r_1 \le r \le r_2,\ 0 \le \varphi \le \varphi_1)$, где имеют место динамические уравнения плоского напряжённого состояния микрополярной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений [1]:

Уравнения движения:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varphi}+\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial r}+\frac{1}{r}\left(\sigma_{21}+\sigma_{12}\right)=\rho\frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial r}+\frac{1}{r}\left(\sigma_{22}-\sigma_{11}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\varphi}=\rho\frac{\partial^2 V_2}{\partial t^2},$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\mu_{13}}{\partial\varphi}+\frac{\partial\mu_{23}}{\partial r}+\frac{1}{r}\mu_{23}+\sigma_{12}-\sigma_{21}=J\frac{\partial^2\omega_3}{\partial t^2}. \tag{1.1}$$

Соотношения упругости:

$$\gamma_{11}=\frac{1}{E}\left[\sigma_{11}-\upsilon\sigma_{22}\right], \qquad \gamma_{22}=\frac{1}{E}\left[\sigma_{22}-\upsilon\sigma_{11}\right], \qquad \gamma_{12}=\frac{\mu+\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{12}-\frac{\mu-\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{21}$$

$$\gamma_{21}=\frac{\mu+\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{21}-\frac{\mu-\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{12}, \quad \chi_{13}=\frac{1}{B}\mu_{13}, \quad \chi_{23}=\frac{1}{B}\mu_{23}, \tag{1.2}$$

Геометрические соотношения:

$$\gamma_{11}=\frac{1}{r}\frac{\partial V_1}{\partial\varphi}+\frac{1}{r}V_2, \quad \gamma_{22}=\frac{\partial V_2}{\partial r}, \quad \gamma_{12}=\frac{1}{r}\frac{\partial V_2}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}V_1-\omega_3, \quad \gamma_{21}=\frac{\partial V_1}{\partial r}+\omega_3$$

$$\chi_{13}=\frac{1}{r}\frac{\partial\omega_3}{\partial\varphi}, \quad \chi_{23}=\frac{\partial\omega_3}{\partial r}. \tag{1.3}$$

Здесь $\sigma_{11},\sigma_{12},\sigma_{21},\sigma_{22}$ – напряжения; $\mu_{13}$, $\mu_{23}$ – моментные напряжения; $\gamma_{11},\gamma_{22},\gamma_{12},\gamma_{21}$ – деформации; $\chi_{13}$, $\chi_{23}$ – изгиб-кручения; $V_1$, $V_2$ – перемещения; $\omega_3$ – свободный поворот точек тела вокруг оси 3, которая перпендикулярна к срединной плоскости ; $E$, $\nu$, $\mu=\dfrac{E}{2(1+\nu)}$, $\alpha$, $B$ – упругие постоянные микрополярного материала; $\rho$ –плотность материала, $J$ –мера инерции материала при вращении.

Будем считать, что на лицевых линиях $r=r_1$, $r=r_2$ заданы внешние напряжения и момент:

на $r=r_1:\ \sigma_{21}=q_1^-,\ \sigma_{22}=q_2^-;\ \mu_{23}=m^-,$

на $r=r_2:\ \sigma_{21}=q_1^+, \sigma_{22}=q_2^+;\ \mu_{23}=m^+;$ (1.4)

а на крайних сечениях области $(\varphi=0,\ \varphi=\varphi_1)$ имеют место один из вариантов нижеприведённых граничных условий:

а) на $\varphi=0:\ \sigma_{11}=\sigma_{11}',\ \sigma_{12}=\sigma_{12}',\ \mu_{13}=\mu_{13}';$

на $\varphi=\varphi_1,\ \sigma_{11}=\sigma_{11}'',\ \sigma_{12}=\sigma_{12}'',\mu_{13}=\mu_{13}'';$ (1.5)

b) на $\varphi=0:\ V_1=V_1',\ V_2=V_2',\ \omega_3=\omega_3';$

на $\varphi=\varphi_1,\ V_1=V_1'',\ V_2=V_2'',\ \omega_3=\omega_3'';$ (1.6)

в) на $\varphi=0:\ \sigma_{11}=\sigma_{11}',\ V_2=V_2',\ \mu_{13}=\mu_{13}';$

на $\varphi=\varphi_1,\ \sigma_{11}=\sigma_{11}'',\ V_2=V_2'',\ \mu_{13}=\mu_{13}''.$ (1.7)

В качестве исходных принимаются следующие основные гипотезы [2]:

1. Предполагается, что при малых деформациях и малых перемещениях прямолинейный элемент нормали к исходной координатной линии (средней линии области) сохраняет свою длину и прямолинейность, но не остаётся перпендикулярным к деформированной координатной линии, а свободно вращается, не изменяя своей длины. Кроме этого, свободное вращение не меняется по толщине области. Вследствие указанных допущений будем иметь следующий линейный закон изменения перемещений и свободного поворота по толщине рассматриваемого стержня:

$$V_1=u(\varphi,t)+z\psi(\varphi,t),\ V_2=w(\varphi,t),\ \omega_3=\Omega_3(\varphi,t), \tag{1.8}$$

где следует иметь в виду, что $r=r_0+z$, $r_0$ – радиус средней линии, $-h\le z\le h$ и $\dfrac{\partial(\cdot)}{\partial r}=\dfrac{\partial(\cdot)}{\partial z}$.

В формулах (1.8) $u(\varphi,t)$ и $w(\varphi,t)$ – перемещения точек средней линии в направлениях по её касательной и по нормали (т.е. $w(\varphi,t)$ – это прогиб стержня); $\psi(\varphi,t)$ – полный угол поворота первоначально нормального элемента; $\Omega_3(\varphi,t)$ – свободный поворот этого элемента.

Отметим, что гипотеза (1.8) относительно только перемещений, это известная кинематическая гипотеза С.П. Тимошенко [3].

2. Нормальные напряжения на площадках, параллельных координатной поверхности, пренебрежимо малы по сравнению с аналогичными напряжениями на площадках, перпендикулярной ей;

3. При определении компонентов тензоров деформаций и напряжений, сначала для касательного напряжения примем:

$$\sigma_{12}=\overset{0}{\sigma}_{12}(\varphi,t), \tag{1.9}$$

далее, после определения указанных выше величин, формулу для $\sigma_{12}$ будем уточнять следующим образом. Проинтегрируем по $z$ соответствующее уравнение движения и при определении постоянного интегрирования (вернее, функции от $\varphi$), будем требовать равенства нулю интеграла от $-h$ до $h$ от полученного выражения. Таким образом, полученное выражение будем прибавлять к формуле (1.9).

4. Примем условие о тонкостенности стержня с круговой осью:

$$1+\frac{h}{r_0}\approx 1,\quad \frac{1}{r}=\frac{1}{r_0+z}=\frac{1}{r_0\left(1+\dfrac{z}{r_0}\right)}\approx\frac{1}{r_0}. \tag{1.10}$$

С целью приведения двумерной задачи микрополярной теории упругости к одномерной, вводим статически эквивалентные напряжениям усилия: $N, Q_1, Q_2$ и моменты: $M_{11}$, $L_{13}$, которые выражаются следующими формулами:

$$\mathrm{N}=\int_{-h}^{h}\sigma_{11}dz\ ,\quad Q_1=\int_{-h}^{h}\sigma_{12}dz\,,\ Q_2=\int_{-h}^{h}\sigma_{21}dz\,,\ \mathrm{M}_{11}=\int_{-h}^{h}\sigma_{11}zdz\,,\ L_{13}=\int_{-h}^{h}\mu_{13}dz\,. \tag{1.11}$$

В результате приходим к системе уравнений прикладной модели микрополярного упругого стержня с круговой осью, которая ранее построена в работе [4]:

Уравнения движения:

$$\frac{1}{r_0}\mathrm{N}-\frac{1}{r_0}\frac{\partial Q_1}{\partial\varphi}=\left(q_2^{+}-q_2^{-}\right)-2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},\qquad \frac{1}{r_0}Q_1+\frac{1}{r_0}\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial\varphi}=-\left(q_1^{+}-q_1^{-}\right)+2\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$Q_2-\frac{1}{r_0}\frac{\partial \mathrm{M}_{11}}{\partial\varphi}=h\left(q_1^{+}+q_1^{-}\right)-\frac{2\rho h^3}{3}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2},\quad Q_2-Q_1-\frac{1}{r_0}\frac{\partial L_{13}}{\partial\varphi}=\left(m^{+}-m^{-}\right)-2Jh\frac{\partial^2\Omega_3}{\partial t^2}. \tag{1.12}$$

Соотношения упругости:

$$\mathrm{N}=2\mathrm{E}h\Gamma_{11},\ Q_1=2h(\mu+\alpha)\Gamma_{12}+2h(\mu-\alpha)\Gamma_{21},\ Q_2=2h(\mu+\alpha)\Gamma_{21}+2h(\mu-\alpha)\Gamma_{12},$$

$$\mathrm{M}_{11}=\frac{2\mathrm{E}h^3}{3}\mathrm{K}_{11}\,, L_{13}=2Bhk_{13}. \tag{1.13}$$

Геометрические соотношения:

$$\Gamma_{11}=\frac{1}{r_0}\frac{\partial u}{\partial\varphi}+\frac{1}{r_0}w,\quad \Gamma_{12}=\frac{1}{r_0}\frac{\partial w}{\partial\varphi}-\frac{1}{r_0}u-\Omega_3\,,\ \Gamma_{21}=\psi+\Omega_3\,,$$

$$\mathrm{K}_{11}=\frac{1}{r_0}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\,,\ k_{13}=\frac{1}{r_0}\frac{\partial\Omega_3}{\partial\varphi}. \tag{1.14}$$

К этой системе уравнений следует присоединить граничные условия:

I.Условия нагруженных краёв:

$$\begin{aligned}&\mathrm{N}\Big|_{\varphi=0}=\mathrm{N}'=\int_{-h}^{h}\sigma_{11}'dz, && \mathrm{M}_{11}\Big|_{\varphi=0}=\mathrm{M}'=\int_{-h}^{h}\sigma_{11}'zdz;\\ &Q_1\Big|_{\varphi=0}=Q_1'=\int_{-h}^{h}\sigma_{12}'dz, && L_{13}\Big|_{\varphi=0}=L_{13}'=\int_{-h}^{h}\mu_{13}'dz.\end{aligned} \tag{1.15}$$

Здесь, как частный случай, получим граничные условия свободного края:

$$\mathrm{N}=0,\ \ Q=0,\ \ \mathrm{M}_{11}=0,\ \ L_{13}=0\,; \tag{1.16}$$

II. Условия, когда на краях заданы перемещения и поворот:

$$\begin{aligned}&u\Big|_{\varphi=0}=u'=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}V_1'dz, && \psi\Big|_{\varphi=0}=\psi'=\frac{3}{2h^3}\int_{-h}^{h}V_1'zdz;\\ &w\Big|_{\varphi=0}=w'=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}V_2'dz, && \Omega_3\Big|_{\varphi=0}=\Omega_3'=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\omega_3'dz.\end{aligned} \tag{1.17}$$

Здесь, как частный случай, получим граничные условия жёсткого защемления:

$$u=0,\ \ w=0,\ \ \psi=0,\ \ \Omega_3=0\,; \tag{1.18}$$

III. Условия типа шарнирного опирания краёв (края загружены):

$$\begin{aligned}&\mathrm{N}\Big|_{\varphi=0}=\mathrm{N}'=\int_{-h}^{h}\sigma_{11}'dz, && \mathrm{M}_{11}\Big|_{\varphi=0}=\mathrm{M}'=\int_{-h}^{h}\sigma_{11}'zdz;\\ &w\Big|_{\varphi=0}=w'=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}V_2'dz\,, && L_{13}\Big|_{\varphi=0}=L_{13}'=\int_{-h}^{h}\mu_{13}'dz\,.\end{aligned} \tag{1.19}$$

Здесь, как частный случай, получим граничные условия шарнирного опирания:

$$w=0,\ u=0,\ \ M_{11}=M',\ L_{13}=L_{13}{}',\qquad(1.20)$$

или $w=0,\ u=0,\ \ M_{11}=0,\ L_{13}=0,\qquad(1.21)$

когда край шарнирно опёрт и не нагружен внешними моментами.

Общий вид функционала энергии упругого стержня с круговой осью выражается так:

$$U_0=\int_0^a\left(W_0+\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}w+\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}u+\frac{\rho h^3}{3}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\psi+Jh\frac{\partial^2\Omega_3}{\partial t^2}\Omega_3\right)ds,\qquad(1.22)$$

где $$W_0=Eh\Gamma_{11}^2+E\frac{h^3}{3}K_{11}^2+h(\mu+\alpha)(\Gamma_{12}^2+\Gamma_{21}^2)+2h(\mu-\alpha)\Gamma_{12}\Gamma_{21}+Bhk_{13}^2,\qquad(1.23)$$

–линейная плотность потенциальной энергии деформации.

**2. Матрица жёсткости и матрица масс конечного элемента микрополярного упругого стержня с круговой осью.**

Основными функциямии в задаче изгиба упругого стержня с круговой осью являются: прогиб - $w(s)$, осевое перемещение -$u(s)$ и углы поворота нормального элемента – $\psi(s)$, $\Omega_3(s)$ (последний свободный поворот). Далее будем рассматривать свободные колебания. Распределение указанных основных функций вдоль элемента дуги оси стержня будем аппроксимировать полиномами $(s=r_0\varphi)$:

$$w(s,t)=\left(a_0+a_1s+a_2s^2+a_3s^3\right)\cdot\sin\omega_n t,\quad u(s,t)=\left(b_0+b_1s+b_2s^2+b_3s^3\right)\cdot\sin\omega_n t,$$
$$\psi(s,t)=\left(c_0+c_1s+c_2s^2+c_3s^3\right)\cdot\sin\omega_n t,\ \Omega_3(s,t)=\left(d_0+d_1s+d_2s^2+d_3s^3\right)\cdot\sin\omega_n t.\qquad(2.1)$$

Здесь $a_i,b_i,c_i,d_i$ – коэффициенты, которые ниже будем выражать через узловые перемещения, повороты и их производные. Для последних примем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
&w(0)=\delta_1,\quad w'(0)=\delta_2,\quad u(0)=\delta_3,\quad u'(0)=\delta_4,\\
&\psi(0)=\delta_5,\quad \psi'(0)=\delta_6,\ \Omega_3(0)=\delta_7,\ \Omega_3'(0)=\delta_8,\\
&w(a)=\delta_9,\ w'(a)=\delta_{10},\ u(a)=\delta_{11},\quad u'(a)=\delta_{12},\\
&\psi(a)=\delta_{13},\ \psi'(a)=\delta_{14},\ \Omega_3(a)=\delta_{15},\ \Omega_3'(a)=\delta_{16}.
\end{aligned}\qquad(2.2)$$

Как видим, данный конечный элемент имеет шестнадцать степеней свободы.

Подставим разложения (2.1) в (2.2), выразим коэффициенты $a_i,b_i,c_i,d_i$ $(i=0,1,2,3)$ через узловые перемещения и повороты $\delta_k$ $(k=1,2,...,16)$. Подставив таким образом определённые $a_i,b_i,c_i,d_i$ в (2.1), для перемещений и поворотов получим аппроксимации:

$$w(s)=\sum_{i=1,2,9,10}\delta_iN_i(s),\ u(s)=\sum_{i=3,4,11,12}\delta_iN_i(s),\ \psi(s)=\sum_{i=5,6,13,14}\delta_iN_i(s),\ \Omega_3(s)=\sum_{i=7,8,15,16}\delta_iN_i(s),\ (2.3)$$

где $N_i(s)$ – функции формы элемента, которые имеют вид:

$$\begin{aligned}
&N_1=N_3=N_5=N_7=1-\frac{3}{a^2}s^2+\frac{2}{a^3}s^3,\quad N_2=N_4=N_6=N_8=s-\frac{2}{a}s^2+\frac{1}{a^2}s^3,\\
&N_9=N_{11}=N_{13}=N_{15}=\frac{3}{a^2}s^2-\frac{2}{a^3}s^3,\quad N_{10}=N_{12}=N_{14}=N_{16}=-\frac{1}{a}s^2+\frac{1}{a^2}s^3.
\end{aligned}\qquad(2.4)$$

Подставив (2.3) в функционал (1.22), после выполнения интегрирования получим функцию от шестнадцати независимых переменных $\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4,...,\delta_{16}$. Минимизация функционала (1.22) приводит к нахождению минимума функции шестнадцати независимых переменных. Вычислив соответствующие частные производные, обращая их в ноль, приходим к следующему матричному уравнению:

$$\left([K]-\omega_n{}^2[M]\right)\cdot\{\delta\}=0.\qquad(2.5)$$

Здесь $K$ – матрица жёсткости элемента размером 16×16, представляющего собой важнейшее понятие метода конечных элементов; $M$ – матрица масс элемента размером 16×16,

$\{\delta\}^T = (\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, ..., \delta_{16})$ – вектор узловых перемещений и поворотов.

В качестве примера рассмотрим задачу свободных колебаний стержня с круговой осью, когда концы еёшарнирно опёрты, а ось стержня представляет собой четверть окружности ( $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ).

Для граничных условий шарнирного опирания имеем:

$$w = 0,\ N = 0,\ M_{11} = 0,\ L_{13} = 0 \ \text{ при } s = 0; a \tag{2.6}$$

Результат вычислений для собственных частот приведём для случая, когда физические постоянные и геометрические размеры балки имеют значения:

$\mu = 7 \cdot 10^{10}\,Па,\ E = 1{,}8 \cdot 10^{11}\,Па,\ \ r_0 = 9{,}6 \cdot 10^{-3}\,м,\ \ a = 15 \cdot 10^{-3}\ м$

$h = 3{,}75 \cdot 10^{-4}\,м$, $\rho = 1114\,кг/м^3$, $B = 3 \cdot 10^4\,Н$, $J = 5{,}31 \cdot 10^{-6}\,кг/м$.

Таблица. Первые низкие частоты свободных колебаний стержня по МКЭ и по аналитическим решениям.

| 2 конечный элемент ($\times 10^{-5}$ (ГЦ)) | 4 конечный элемент ($\times 10^{-5}$ (ГЦ)) | 8 конечный элемент ($\times 10^{-5}$ (ГЦ)) | Аналитическое решение ($\times 10^{-5}$ (ГЦ)) | Классическое решение ($\times 10^{-5}$ (ГЦ)) |
|---|---|---|---|---|
| $\alpha = 6{,}5 \cdot 10^6\,Па$ | | | | |
| $\omega_1 = 0.13805$ | $\omega_1 = 0.13348$ | $\omega_1 = 0.13335$ | $\omega_1 = 0.13336$ | $\omega_1 = 0.12899$ |
| $\omega_2 = 0.89221$ | $\omega_2 = 0.69860$ | $\omega_2 = 0.69563$ | $\omega_2 = 0.69555$ | $\omega_2 = 0.68956$ |
| $\alpha = 6{,}5 \cdot 10^9\,Па$ | | | | |
| $\omega_1 = 0.27191$ | $\omega_1 = 0.26911$ | $\omega_1 = 0.26903$ | $\omega_1 = 0.26904$ | $\omega_1 = 0.12899$ |
| $\omega_2 = 1.48104$ | $\omega_2 = 1.36254$ | $\omega_2 = 1.36043$ | $\omega_2 = 1.36038$ | $\omega_2 = 0.68956$ |

Как убедимся, при увеличении постоянной упругости $\alpha$ (микрополярной постоянной), частоты свободных колебаний стержня увеличиваются по сравнению с классическим случаем.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта 18RF-106.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Pergamon Press. Oxford. New York. Toronto. Sydney. Paris. Frankfurt. 1986. 383.p.
2. Sargsyan S.H. Asymptotically Confirmed Hypotheses Method for the Costruction of Micropolar and Classical Theories of Elastic Thin Shells //Advances in Pure Mathematics. 2015. №5. P.629-642.
3. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967. 444с.
4. Хачатрян М.В. Математическая модель динамики микрополярных упругих круговых тонких стержней // Международная школа-конференция молодых ученых. Сборник научных трудов. 2016. С.145-149.


**Сведения об авторах:**


**Саркисян Самвел Оганесович** – член-корр. НАН Армении, доктор физ.-мат. наук, профессор, (+374 93) 15 16 98. **E-mail:** s_sargsyan@yahoo.com

**Хачатрян Мелине Вардановна** – аспирант кафедры Математики, физики и информационных технологий Ширакского государственного университета им. М. Налбандяна, (+374 94) 61 82 13. **E-mail:** khachatryanmeline@mail.ru

# ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС ДЛЯ РЕШЕНИЯ РАЗЛИЧНЫХ ЗАДАЧ ФИЗИЧЕСКОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

**Северина Н.С.**

В работе описывается комплекс программных средств обеспечения численного моделирования задач физической газовой динамики, включающий графические и информационные компоненты поддержки ресурсоёмких этапов вычислительных экспериментов. Комплекс программных средств состоит из графической оболочки управления элементами системы; базы данных термодинамических свойств веществ и кинетических механизмов, и графического интерфейса управления ею; модуля визуализации результатов решения вычислительных задач; программной компоненты автоматизированной подготовки входных данных для задачи моделирования нестационарных течений реагирующего газа. Разработанный комплекс программ может использоваться для решения задач динамики реагирующего газа, имеющих прикладное значение, а также в качестве иллюстратора учебных курсов по физической газовой динамике.

Областью применения создаваемого программного продукта, в основном, является физическая газовая динамика, но полученные результаты могут быть использованы в широком кругу расчётных задач при соблюдении некоторого числа условий [1-3]. Например, в работе [4] описывается подобный комплекс, ориентированный только на решение задач моделирования квазиодномерных нестационарных реагирующих течений.

Основу программного комплекса составляет методика математического моделирования и компьютерная программа для расчёта квазиодномерных нестационарных реагирующих течений с явным выделением взаимодействующих разрывов [5], позволяющая получать детальную картину течения в каналах. Ударные волны, контактные разрывы и граничные траектории частиц представляются подвижными двойными узлами разностной сетки, перепад значений параметров течения в которых в точности соответствует интегральным законам сохранения. Выбор такой методики моделирования в отличие от методов сквозного счёта позволяет «отделить» инертный газ от реагирующей смеси и зоны, «чистого» газа от многофазных, а также с высокой точностью определять времена зарождения и распространения ударных волн по каналу, зоны распространения капель, моменты и интенсивность образования отражённых волн, точно учитывать влияние звуковых возмущений.

В настоящей работе термодинамические свойства реагирующего газа описываются с помощью модели многокомпонентного совершенного газа в рамках допущения о равновесной заселённости энергетических уровней, отвечающих всем внутренним степеням свободы молекул и атомов. Для веществ, используемых в расчётах, восстанавливаются выражения для удельного термодинамического потенциала Гиббса. Другие термодинамические величины вычисляются через потенциал Гиббса и его частные производные [6]. Химические превращения описываются с помощью многостадийных кинетических механизмов. Все реакции считаются обратимыми, константы скоростей прямых и обратных реакций связаны через условия химического равновесия [7].

Для успешного моделирования химически реагирующего течения в канале необходимо также уметь решать набор «элементарных» задач, используемых при подготовке начальных данных, а также для определения значений, к которым асимптотически стремятся параметры неравновесного течения. К таким задачам относятся [8-12]:

1. Расчёт равновесного состава газовой смеси (с учётом конденсированных продуктов) при заданных атомарном составе и парах термодинамических величин (плотность и температура; плотность и внутренняя энергия; давление и температура; давление и энтальпия и др.); расчёт ударной и равновесной детонационной адиабат; получение параметров детонации Чепмена-Жуге для различных горючих смесей, задача о распаде произвольного разрыва в «замороженной» и «равновесной» постановках ;
2. Решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений химической кинетики и межфазного тепломассообмена, дополненной: заданием плотности внутренней энергии (для определения задержки воспламенения за отражённой ударной волной); соотношениями типа Ренкина-Гюгонио (для расчёта параметров в стационарной детонационной волне); заданием температуры и давления (при определении пределов и задержек воспламенения горючей смеси);

3. Расчёт стационарного многофазного течения с детонационной волной в канале в равновесной и неравновесной постановках.

Желание работать с произвольными наборами химических компонент и механизмов химических превращений требует использование при разработке программного комплекса специализированных баз данных теплофизических свойств веществ и кинетических механизмов, а также программных средств, обеспечивающих взаимодействие между базами данных и программами численного моделирования. С другой стороны, сложная структура результатов вычислений, их многомерность требуют разработки специализированных средств обработки результатов, их анализа и визуализации. Данные требования привели к созданию комплекса программ, решающего следующие задачи:

1. Хранение, добавление и изменение информации о термодинамических свойствах индивидуальных веществ и кинетических механизмов;
2. Быстрое и однозначное задание начальных данных;
3. Извлечение из расчётных данных информации о каждой функции и каждом параметре, интерполяция данных;
4. Визуализация результатов численного моделирования.

На рис.1 изображены компоненты программного комплекса и их взаимодействие. В процессе моделирования пользователь формулирует задачу в программе задания начальных газодинамических параметров. Далее модуль с учётом выбранных параметров подготавливает входные файлы для расчётного модуля, в том числе, описание задействованного кинетического механизма – набора информации из базы данных, описывающего вещества и возможные реакции между ними, для данной задачи.

Программа обработки результатов моделирования в качестве входных данных использует выходные файлы расчётного модуля. Программа редактирования баз данных теплофизических свойств и кинетических механизмов также использует средства визуализации для представления в виде графиков, применяемых при численном моделировании термодинамических и кинетических функций.

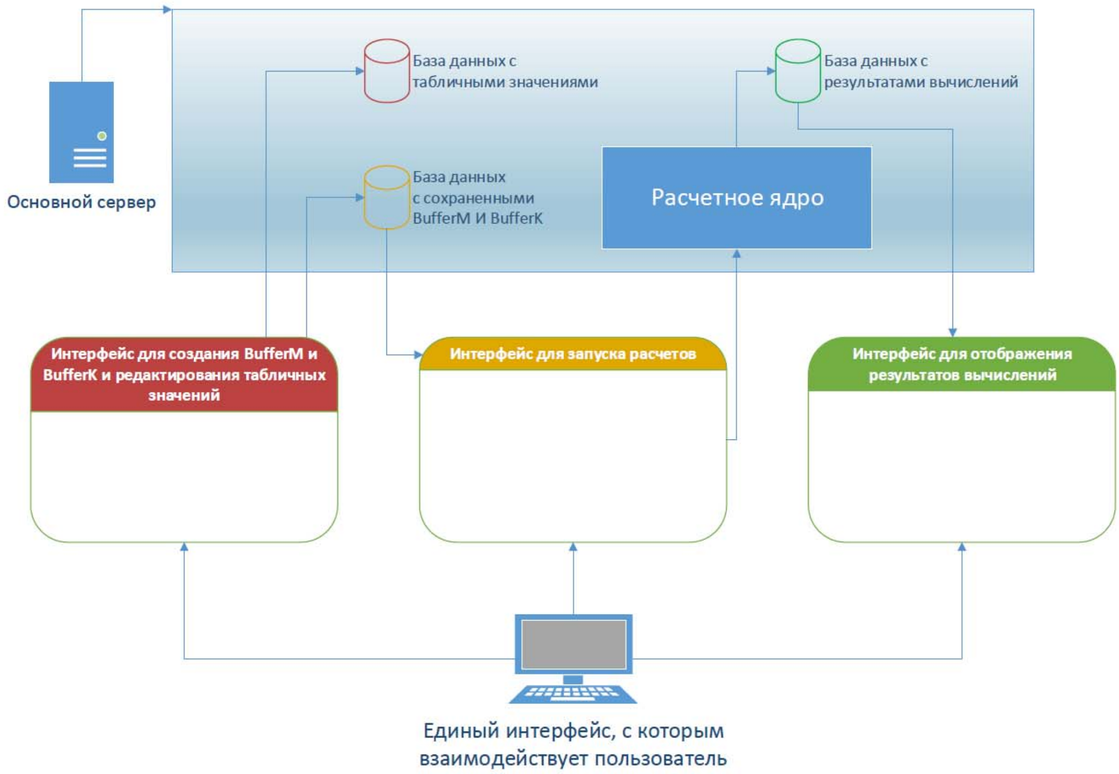



**Рис. 1.** Компоненты программного комплекса и их взаимодействие.

Вид решаемых расчётных задач предполагает кусочно-непрерывный характер распределения параметров течения в расчётной области в начальный момент времени, что позволяет задать расчётную область в виде особых точек и подобластей, границами которых являются данные точки, а затем определить параметры течения в каждой из подобластей. Для задания начальных данных был разработан специализированный интерфейс. Пользователь создаёт список особых точек. Задаёт тип каждой особой точки, координату и скорость её движения. Затем описывает параметры подобластей. Предусмотрены следующие типы особых точек: «входная граница», «выходная граница», «камера сгорания», «выход в атмосферу», «левая стенка», «правая стенка», «распад разрыва», «крайняя характеристика веера волн», «фиксированная точка», «ударная волна». Описание подобласти включает в себя:

1. параметры течения (давление, скорость, температура);
2. тип полевой точки (характеристика ($C_+$,$C_-$,$C_0$), стенка, контактный разрыв, ударная волна, траектория газа, разрывная характеристика, полевая фиксированная точка)
3. число точек разбиения в области;
4. стратегию заполнения подобласти узлами разностной сетки (подвижные или фиксированные узлы);
5. тип газа (инертный, реагирующий, равновесно-реагирующий, с учётом колебательной релаксации);
6. состав смеси (для каждой подобласти допускается разный состав. Программа соединяется с базой данных и получает список всех заданных химических смесей. Пользователь выбирает вид смеси и задаёт мольную долю каждого входящего в смесь вещества).

Помимо настройки расчётной области, есть возможность задания управляющих параметров для расчёта:

1. Тип запуска (с начала или с контрольной точки)
2. Тип интерполяции (линейная или квадратичная)
3. Частота сброса в файл контрольного слоя
4. Частота сброса слоёв в файлы графики
5. Тип задачи (о поршне, распад разрыва в замкнутой области, о детонационной волне и мн. др.).

Программа обработки результатов позволяет строить следующее:

1. *x-t* диаграмму (зависимости координат сеточных линий от времени);
2. параметры вдоль сеточной линии;
3. параметры в заданной координате;
4. распределение параметров в заданный момент времени.

Итак, в работе описан комплекс программ для численного моделирования задач физической газовой динамики, включающий подсистемы информационной поддержки и визуализации. Особенностью разработанного комплекса является его универсальность, возможность применения для различного класса задач из различных прикладных областей, ярко выраженная модульная структура: он содержит четыре слабо зависимые компоненты: база термодинамических и кинетических данных, расчётный модуль с пользовательским интерфейсом, база данных хранения результатов численного моделирования, система визуализации результатов. Все компоненты комплекса могут функционировать автономно и использоваться различными программными продуктами.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Gidaspov V.Y., Severina N.S. Numerical simulation of the fine structure of a cylindrical detonation wave in a hydrogen–air combustible mixture. High Temperature, vol. 53, № 4, 2015.
2. Gidaspov V.Y., Severina N.S. Numerical Simulation of the Detonation of a Propane-Air Mixture, Taking Irreversible Chemical Reactions into Account. High Temperature, vol. 55, № 5, 2017.
3. Gidaspov V.Y., Moskalenko O.A., Severina N.S. Numerical Study of the Influence of Water Droplets on the Structure of a Detonation Wave in a Hydrogen–Air Fuel Mixture. High Temperature, vol. 56, № 5, 2018.

4. Gidaspov V.Y.,Golubev V.K., Severina N.S. A software package for simulation of unsteady Flows of the reacting gas in the channel. Bulletin of the South Ural State University, Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. Vol. 9, № 3, 2016.
5. Гидаспов В.Ю., Пирумов У.Г., Северина Н.С. Математическое моделирование квазиодномерных нестационарных течений реагирующего газа с произвольным числом взаимодействующих разрывов.//Вестник Московского авиационного института. 2008. Т.15. № 5.
6. Гурвич Л.В., Вейц И.В., Медведев В.А. и др. Термодинамические свойства индивидуальных веществ: справочное издание в 4-х т. М.: Наука, 1982. 344 с.
7. Кондратьев В.Н. Константы скорости газофазных химических реакций (справочник), М.: Наука, 1970. 352 с.
8. Гидаспов В.Ю. Распад разрыва в детонирующем газе. //Вестник Московского авиационного института. 2010. Т.17. № 6.
9. Гидаспов В.Ю., Москаленко О.А., Пирумов У.Г. Численное моделирование стационарных детонационных волн в газовых и газокапельных реагирующих смесях. //Вестник Московского авиационного институт. 2009. Т.16. № 2.
10. Гидаспов В.Ю., Москаленко О.А., Пирумов У.Г. Численное моделирование стационарных волн горения и детонации в керосино-воздушной горючей смеси. //Вестник Московского авиационного института. 2014. Т.21. № 1.
11. Гидаспов В.Ю., Северина Н.С . Численное моделирование экспериментов по определению времени задержки воспламенения за падающими ударными волнами. //Физика горения и взрыва. 2013. Т.4. № 4.

**<u>Сведения об авторах:</u>**

**Северина Наталья Сергеевна** – к.ф.-м.н., доцент, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), факультет Информационных технологий и прикладной математики, (903) 677 13 98
**E-mail:** severina@mai.ru

# К РЕШЕНИЮ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНИКА ПРИ АНТИСИММЕТРИЧНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСЕЙ СИММЕТРИИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

**Сейранян С.П.**

Рассматривается первая краевая плоская задача теории упругости для прямоугольника. Ранее данная задача при произвольных граничных условиях точным аналитическим преобразованием будущим академиком НАН Армении Б.Л. Абрамяном феноменальным образом приведена к четырём парам независимых бесконечных систем линейных алгебраических уравнений упрощённого вида [1]. Однако, в заключении глубокоуважаемый Б.Л.Абрамян при анализе пар бесконечных систем на их принадлежность к классу вполне регулярных ограничивается численным анализом О.О.Пирумяна, который, как показали наши численные результаты с применением **MATHEMATICA–6** для пары систем, соответствующей антисимметричным относительно осей симметрии прямоугольника граничным условиям, оказался ошибочным.

В представляемой работе средствами математического анализа приводится математически строгое доказательство принадлежности отмеченной парной системы к классу вполне регулярных. Таким образом, предложенный Б.Л.Абрамяном аналитико-численный метод решения первой краевой плоской задачи теории упругости для прямоугольника при антисимметричных относительно осей симметрии прямоугольника граничных условиях обоснован.

**1. Постановка задачи.** В известной первой краевой плоской задаче теории упругости для прямоугольника [1] при антисимметричных относительно осей симметрии прямоугольника граничных условиях встречается бесконечная система линейных алгебраических уравнений, доказательство принадлежности которой к классу вполне регулярной системы приводится к нахождению некоторого числа $\delta$ - функции параметра $h/l$ при фиксированных значениях $0 < h/l < 0$ которого для всех $p = 2, 4, \ldots$ выполняется неравенство

$$U(\chi_p) = \frac{8\chi_p^2}{\pi\varphi(\chi_p)} \sum_{m=2,4\ldots}^{\infty} \frac{m}{(\chi_p^2 + m^2)^2} \le 1 - \delta. \tag{1.1}$$

Здесь $0 < \delta < 1$, $\chi_p = pl/h$, $h$ и $l$ – стороны прямоугольника,

$$\varphi(\chi_p) = \operatorname{ctanh}(\pi\chi_p/2) - \pi\chi_p/(2\sinh^2(\pi\chi_p/2)) \tag{1.2}$$

**2. История доказательства (1.1) с продолжением и завершением.** Ранее утверждение (1.1) встречается в [1], где глубокоуважаемый Б.Л.Абрамян, прежде, действуя «по формулам трапеций и прямоугольников»[1] со ссылкой на работу [2], непосредственно приводит неравенство

$$\sum_{m=2,4,\ldots}^{\infty} \frac{m}{(\chi_p^2 + m^2)^2} \le S_2(\chi_p) = \begin{cases} \dfrac{2}{(4+\chi_p^2)^2} + \dfrac{32+\chi_p^2}{4(16+\chi_p^2)^2} & \text{при } \chi_p \le 4 \\[2ex] \dfrac{8+\chi_p^2}{4(1+\chi_p^2)^2} + \dfrac{1}{8\chi_p^3} & \text{при } \chi_p > 4 \end{cases} \tag{2.1}$$

Далее, вводя функцию $f_1(\chi_p) = 8\chi_p^2 S_2(\chi_p)/(\pi\varphi(\chi_p))$, автор работы [1], опираясь на численный анализ О.О.Пирумяна, пишет: «Произведя исследование, увидим, что функция $f_1(\chi_p)$ получает своё максимальное значение при $\chi_p = \chi^* = 5.5\pi$». Причём, приведённое ими значение $f_1(\chi^*) \approx$ $\approx 0.692$. Однако, проведённые нами расчёты с применением пакета **Mathematica–6**, приводят к значениям $f_1(\chi^*) = 0.655 < f_1(4.001) = 0.691$, что опровергает приводимую ими точку максимума $\chi^*$. Кроме того, математически строгий вывод (2.1) при $\chi_p > 4$ по формулам трапеций и входящих прямоугольников требует выполнения условий их применения, на чём автор работы [1] не останавливается. Не имеется и каких-либо других исследований, посвящённых данному вопросу с доказательством (1.1) (см., в частности, обзоры в [4], [5]). Ниже восполняется возникший пробел. Приводится математически строгое уточнение (2.1) с доказательством утверждения (1.1).

**2.1. Вывод формулы (2.1) с уточнением.**

---

[1] Правильно по формулам трапеций и входящих прямоугольников**:** формула прямоугольника для функции, определённой на отрезке, задаётся произведением значения функции на середине отрезка на длину отрезка ([3], **322**, **373)**.

Введём функцию $f(t,\chi_p)$, заменяя в общем члене ряда (1.1) индекс $m$ на переменную $t$, полагая $0<t<\infty$. Тогда, вычисляя её производные до второго порядка по $t$, получаем:

$$f(t,\chi_p)=\frac{t}{t^2+\chi_p^2)^2};\quad f'(t,\chi_p)=3\frac{(\chi_p/\sqrt{3}-t)(\chi_p/\sqrt{3}+t)}{(t^2+\chi_p^2)^3};\quad f''(t,\chi_p)=12\,t\frac{(t-\chi_p)(t+\chi_p)}{(t^2+\chi_p^2)^4} \tag{2.2}$$

Из (2.2) следует, что функция $f(t,\chi_p)$ имеет непрерывную первую производную $f'(t,\chi_p)$ и конечную вторую производную $f''(t,\chi_p)$, причём, $f''(t,\chi_p)<0$ ($f''(t,\chi_p)>0$) при $t\in(0,\chi_p)$ ($t\in(\chi_p,\infty)$), $f''(\chi_p,\chi_p)=0$. Значит, в промежутке $(0,\chi_p]$ ($[\chi_p,\infty)$) функция $f(t,\chi_p)$ обращена выпуклостью вверх (вниз) ([3], **143**). В промежутке же $(0,\chi_p/\sqrt{3})$ ($(\chi_p/\sqrt{3},\infty]$) $f'(t,\chi_p)>0$ ($f'(t,\chi_p)<0$), причём, $f'(\chi_p/\sqrt{3},\chi_p)=0$. Тогда на названных промежутках $f(t,\chi_p)$ монотонно возрастает (убывает), достигая максимума в точке $t=\chi_p/\sqrt{3}$ ([3], **110**). Функция же $f'(t,\chi_p)$ принимает минимальное значение в точке $t=\chi_p$ ([3], **110**).

Рассмотрим случай $\chi_p\geq 4$. Докажем лемму.

**Лемма.** Пусть $m^*$– чётное число, удовлетворяющее условию $m^*\leq\chi_p<m^*+2$, где $\chi_p\geq 4$ – фиксированное число. Тогда функция $f(t,\chi_p)$ переменной $t$ в промежутке $[m^*,\infty)$ монотонно убывает.

Докажем, что $f(t,\chi_p)$ в промежутке $[m^*,\infty)$ монотонно убывает. Рассмотрим вначале частный случай $\chi_p\in\{2k,\ k=2,3,...\}$. Тогда $m^*=\chi_p$. Поэтому $[m^*,\infty]=[\chi_p,\infty]\subset[\chi_p/\sqrt{3},\infty]$, что, по доказанному выше, и приводит к требуемому утверждению. Пусть теперь $\chi_p\notin\{2k, k=2,3,...\}$. Заметим, что функция $\Lambda(\chi_p,t)=(\chi_p/\sqrt{3}-t)$– сомножитель при положительном сомножителе в выражении $f'(t,\chi_p)$ в (2.2). Тогда, если $\Lambda(\chi_p,m^*)<0$, то $f'(t,\chi_p)<0$ при $t\geq m^*$, что приведёт к монотонному убыванию функции $f(t,\chi_p)$ при $t\geq m^*$, а значит, к утверждению леммы. Положим прежде $4<\chi_p<6$. Здесь $m^*=4$, при котором получаем $\Lambda(\chi_p,4)=(\chi_p/\sqrt{3}-4)<2\sqrt{3}-4)<0$. Пусть далее $\chi_p>6$. Тогда, полагая $m^*=\chi_p-\beta$, где $0<\beta<2$, приходим к неравенству $\Lambda(\chi_p,\chi_p-\beta)=\chi_p(1/\sqrt{3}-1)+\beta<6(1/\sqrt{3}-1)+2=2\sqrt{3}-4<0.$ Следовательно, при $\chi_p\geq 4$ $f(t,\chi_p)$ в промежутке $[m^*,\infty)$ монотонно убывает, что и требовалось доказать.

Имеем теперь, что функция $f(t,\chi_p)$ при $\chi_p\geq 4$, по доказанному выше с учётом (2.2), в промежутке $(0,\chi_p]$, а значит и при $t\in[2,m^*]\subset(0,\chi_p]$ обращена выпуклостью вверх. Когда же $t\in[m^*,\infty)$, по утверждению леммы, функция $f(t,\chi_p)$ монотонно убывает. Отсюда, применяя в промежутке $[2,m^*]$($[m^*,\infty)$) формулы трапеций (входящих прямоугольников), получаем ([3], **322**, **373**)

$$\sum_{m=2,4,...}^{\infty}\frac{m}{(\chi_p^2+m^2)^2}=\frac{1}{2}\frac{1}{(\chi_p^2+4)^2}+\left[\frac{1}{2}\frac{1}{(\chi_p^2+4)^2}+\sum_{m=4,6,...}^{m^*}\frac{m}{(\chi_p^2+m^2)^2}-\frac{1}{2}\frac{m^*}{(\chi_p^2+(m^*)^2)^2}\right]+\frac{1}{2}\frac{m^*}{(\chi_p^2+(m^*)^2)^2}+$$

$$+\sum_{\substack{m=m^*+2,\\ m^*+4,...}}^{\infty}\frac{m}{(\chi_p^2+m^2)^2}\leq\frac{1}{2}\frac{1}{(\chi_p^2+4)^2}+\frac{1}{2}\int_2^{m^*}\frac{t\,dt}{(\chi_p^2+t^2)^2}+\frac{1}{2}\frac{m^*}{(\chi_p^2+(m^*)^2)^2}+\frac{1}{2}\int_{m^*}^{\infty}\frac{t\,dt}{(\chi_p^2+t^2)^2}=\frac{1}{2}\frac{1}{(\chi_p^2+4)^2}+$$

$$+\frac{1}{2}\int_2^{\infty}\frac{t\,dt}{(\chi_p^2+t^2)^2}+\frac{1}{2}\frac{m^*}{(\chi_p^2+(m^*)^2)^2}=\frac{1}{2}\frac{1}{(\chi_p^2+4)^2}-\frac{1}{4(\chi_p^2+t^2)}\bigg|_{t=2}^{\infty}+\frac{1}{2}\frac{m^*}{(\chi_p^2+(m^*)^2)^2}=\frac{1}{4}\frac{6+\chi_p^2}{(\chi_p^2+4)^2}+$$

$+ f(m^*, \chi_p)/2$ , $\chi_p \geq 4$, $p = 2, 4, ...$ (2.3)

Здесь конечная сумма в скобках – половина суммы площадей трапеций под кривой $f(t)$ при $2 \leq t \leq m^*$, которая затем оценивается сверху половиной определённого интеграла. Для оценки же остатка применяется интегральный признак сходимости рядов Маклорена – Коши ([3], **373**).

Отметим, что первое слагаемое в (2.3) отличается от такового в нижней части (2.1) лишь чис-лителем: совпадение произошло бы, если бы в нем вместо цифры 6 стояла бы цифра 8. Полу-ченное отличие, если учесть совпадение в аналогичном случае, отмеченном при сравнении (1.3) и (1.9) в [6], можно отнести к опечатке. Сравнение же второго слагаемого в (2.3) с таковым в нижней части в (2.1) показывает, что их совпадение происходит лишь при $\chi_p \in \{2k, k = 2, 3, ...\}$. В противном случае, когда $\chi_p \notin \{2k, k = 2, 3, ...\}$, второй член в (2.3), согласно утверждению леммы, больше такового в (2.1).

Полученный результат (2.3) не привёл к выводу нижней части формулы (2.1), однако, принимая во внимание, что будущий академик Б.Л. Абрамян был выдающимся аналитиком, найдём дополнительный искусственный приём, который приведёт к доказательству $S_2(\chi_p)$ при $\chi_p > 4$.

Заметим, что при $m = m^* + 2, m^* + 4, ...$ верхняя оценка остатка исходного ряда в (2.3) получена представлением суммы остатка половиной суммы площадей входящих прямоуголь-ников ([3], **373**). При этом, использовалось лишь монотонное убывание функции $f(t, \chi_p)$ при $t \in [m^*, \infty)$ и её интегрируемость. Воспользуемся теперь одновременно и её выпуклостью вниз на $[m^*+2, \infty)$. Рассмотрим отрезки $\varsigma_k = [m^*+2k, m^*+2(k+1)]$ при $k$ =1, 2,… и построим на входящем прямоугольнике на $\varsigma_k$ прямоугольный треугольник так, чтобы один из катетов совпадал с верхней стороной входящего прямоугольника, а другой катет и гипотенуза лежали соответственно на прямой $t = m^* + 2k$ и касательной к $f(t, \chi_p)$ в точке $t = m^* + 2(k+1)$, образуя в точке их пересечения третью вершину таким способом построенного треугольника. Известно, что график касательной к выпуклой вниз кривой всеми точками лежит не выше данной кривой ([3], **143**). Поэтому сумма площадей входящего прямоугольника и построенного треугольника не превосходит площади под кривой на данном отрезке. Значит, верхнюю оценку в (1.9) можно уменьшить на величину $s$ – половину суммы площадей $s_k$ названных треуголь-ников на $\varsigma_k$ при суммировании по $k$ =1, 2,… Записывая $s$ в виде ряда и оценивая его сумму применением интегрального признака Маклорена – Коши ([3], **373**) с учётом (2.2), приходим к неравенству

$$s = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} s_k = \sum_{k=2}^{\infty}[-f'(m^*+2k, \chi_p)] \geq -\int_2^{\infty} f'(m^*+2t, \chi_p)\,dt = -\frac{1}{2} f(m^*+2t, \chi_p)\Big|_{t=2}^{\infty} = \frac{1}{2} f(m^*+4, \chi_p) \qquad (2.4)$$

Оценивая разность (2.4) и $s$ с использованием формулы Лагранжа ([3], **112**) и (2.2), находим

$$f(m^*, \chi_p)/2 - s \leq \left[f(m^*, \chi_p) - f(m^*+4, \chi_p)\right]/2 = -f'(m^*+4\theta, \chi_p^2)2 \leq 2 \max_{m_* \leq t \leq m_*+4}[-f'(t, \chi_p^2)] = -2\times$$

$$\times \min_{m^* \leq t \leq m^*+4} f'(t, \chi_p) = -2 f'(\chi_p, \chi_p) = 1/(2\chi_p^2), \text{ где } 0 < \theta < 1 \qquad (2.5)$$

Подчиняя оценку в (2.5) требуемому условию и решая данное неравенство, получаем

$$m_*/[2((m^*)^2 + \chi_p^2)^2] - s \leq 1/(2\chi_p^4) \leq 1/(8\chi_p^3) \text{ при } \chi_p \geq 4 \qquad (2.6)$$

Уменьшая правую часть в (2.3) на величину $s$ с учётом (2.6), приходим к искомому результату

$$\sum_{m=2,4,...}^{\infty} \frac{m}{(\chi_p^2 + m^2)^2} \leq \frac{1}{4}\frac{6+\chi_p^2}{(\chi_p^2+4)^2} + \frac{1}{8\chi_p^3} \text{ при } \chi_p \geq 4 \qquad (2.7)$$

Легко видеть, что из неравенства (2.7) следует неравенство (2.1) при $\chi_p > 4$. Таким образом, неравенство (2.1) при $\chi_p > 4$, но с применением предложенного нами дополнительного к фор-мулам трапеций и входящих прямоугольников искусственного приёма, доказано.

Пусть далее $0<\chi_p\le 4$. Тогда функция $\Lambda(\chi_p,t)=(\chi_p/\sqrt{3}-t)\le 4/\sqrt{3}-t<0$ при $t\ge 4$. Поэтому функция $f(t,\chi_p)$ заведомо монотонно убывает при $t\ge 4$. Применяя признак Маклорена – Коши ([3], **373**) к ряду в (2.1), но со второго члена, подтверждаем формулу (3.1) при $0<\chi_p\le 4$.

**3. Об абсолютной верхней оценке функции** $U(\chi_p)$.

Приводится верхняя числовая оценка функции $U(\chi_p)$. Доказано утверждение (1.1).

**3.1. Об абсолютной верхней оценке** $U(\chi_p)$ **при** $\chi_p\ge 4$.

Получим прежде верхнюю числовую оценку произведения выражения справа в (2.7) на $\chi_p^2$. Дифференцируя по $\chi_p$ произведение первого слагаемого в (2.7) на $\chi_p^2$, получаем

$$\frac{d}{d\chi_p}\frac{\chi_p^2}{4}\frac{6+\chi_p^2}{(\chi_p^2+4)^2}=\chi_p\frac{12+\chi_p^2}{(\chi_p^2+4)^2}>0 \text{ при } \chi_p\ge 4 \tag{3.1}$$

Тогда продифференцированное выражение в (3.1) – монотонно возрастающая функция. Отсюда

$$\chi_p^2\left[\frac{1}{4}\frac{6+\chi_p^2}{(\chi_p^2+4)^2}+\frac{1}{8\chi_p^3}\right]\le\lim_{\chi_p\to\infty}\left[\frac{\chi_p^2}{4}\frac{6+\chi_p^2}{(\chi_p^2+4)^2}\right]+\frac{1}{32}=\frac{1}{4}+\frac{1}{32}=\frac{9}{32},\ \chi_p\ge 4 \tag{3.2}$$

Далее,

$$\frac{d}{d\chi_p}\varphi(\chi_p)=\frac{\pi}{\sinh^2(\pi\chi_p/2)}\left[\frac{\pi\chi_p}{2}\operatorname{ctanh}(\pi\chi_p/2)-1\right]>0 \text{ при } \chi_p\ge 4 \tag{3.3}$$

Поэтому $\varphi(\chi_p)$ при $\chi_p\ge 4$ – монотонно возрастающая функция.

Следовательно, с использованием $\varphi(\chi_p)\ge\varphi(4)$, (1.1), (2.7) и (3.2), получаем

$$U(\chi_p)\le\frac{8\chi_p^2}{\pi\varphi(\chi_p)}\left[\frac{1}{4}\frac{6+\chi_p^2}{(\chi_p^2+4)^2}+\frac{1}{8\chi_p^3}\right]\le\frac{9}{4\pi\varphi(4)}<0.717<1 \text{ при } \chi_p\ge 4 \tag{3.4}$$

**Примечание .** Доказательство (3.4) может быть получено при значениях $\chi_p\ge 4$ и непосредственно отправляясь от (2.3). Максимизируя второе слагаемое в (2.3) с учетом (2.2) по *t*, предварительно полагая в нем $m^*=t$, приходим к оценке

$$f(m^*,\chi_p)/2\le f(\chi_p/\sqrt{3},\chi_p)/2=3\sqrt{3}/(32\chi_p^3),\ \ \chi_p\ge 4 \tag{3.5}$$

Поэтому вместо (3.4) получаем:

$$U(\chi_p)\le\frac{8\chi_p^2}{\pi\varphi(\chi_p)}\left[\frac{1}{4}\frac{6+\chi_p^2}{(\chi_p^2+4)^2}+\frac{1}{2}\frac{m^*}{(\chi_p^2+(m^*)^2)^2}\right]\le\frac{8}{\pi\varphi(4)}\left\{\lim_{\chi_p\to\infty}\left[\frac{1}{4}\frac{6+\chi_p^2}{(\chi_p^2+4)^2}\right]+\frac{3\sqrt{3}}{32\chi_p}\right\}<\frac{8}{\pi\varphi(4)}\left[\frac{1}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{128}\right]<$$

$$<0.741<1 \text{ при } \chi_p\ge 4 \tag{3.6}$$

**3.2. Об абсолютной верхней оценке** $U(\chi_p)$ **при** $1.4<\chi_p\le 4$.

Найдем прежде верхнюю числовую оценку произведения выражения в верхней части формулы (2.1) на $\chi_p^2$. Вычисляя производные по $\chi_p$ от первого и второго слагаемых в (2.1), когда $0<\chi_p\le 4$, предварительно умноженных на $\chi_p^2$, получаем

$$\frac{d}{d\chi_p}\frac{2\chi_p^2}{(\chi_p^2+4)^2}=4\chi_p\frac{(2-\chi_p)(2+\chi_p)}{(\chi_p^2+4)^3} \tag{3.7}$$

$$\frac{d}{d\chi_p}\frac{\chi_p^2(\chi_p^2+32)}{(\chi_p^2+16)^2}=\chi_p\frac{1024}{(\chi_p^2+16)^3}>0 \tag{3.8}$$

Анализ производной в (3.7) ((3.8)) показывает, что продифференцированная функция в (3.7) ((3.8)) принимает максимальное значение (монотонно возрастает) при $\chi_p=2$ $(0<\chi_p\le 4)$. Далее функция $\varphi(\chi_p)$ – заведомо монотонно возрастающая функция, если в выражении (3.3) ограничиться $1.4 \le \chi_p \le 4,$ ибо тогда сомножитель при положительном сомножителе в (3.3)

$$\pi\chi_p \mathrm{ctanh}\,(\pi\chi_p/2)/2-1 > 2\,\mathrm{ctanh}\,(\pi\chi_p/2)-1>0 \tag{3.9}$$

Следовательно, с использованием также (1.1) и (2.1), получаем

$$U_2(\chi_p) \le \frac{8\chi_p^2}{\pi\varphi(\chi_p)}\left[\frac{2}{(\chi_p^2+4)^2}+\frac{(\chi_p^2+32)}{(\chi_p^2+16)^2}\right] \le \frac{8}{\pi\varphi\,(1.4)}\left\{\left.\frac{2\chi_p^2}{(\chi_p^2+4)^2}\right|_{\chi_p=2}+\left.\frac{(\chi_p^2+32)\chi_p^2}{(\chi_p^2+16)^2}\right|_{\chi_p=4}\right\} < 0.871$$

при $1.4 < \chi_p \le 4.$ (3.10)

**3.3. Об абсолютной верхней оценке $U(\chi_p)$ при $0<\chi_p \le 1.4.$**

Исследуем прежде поведение функции $\chi_p^2/\varphi(\chi_p)$ в рассматриваемом промежутке $0<\chi_p \le 1.4.$ Дифференцируя названную функцию, получаем

$$\frac{d}{d\chi_p}\frac{\chi_p^2}{\varphi(\chi_p)} = \frac{2\chi_p \mathrm{ctanh}(\pi\chi_p/2)[1-(\pi\chi_p/2)^2/\sinh^2(\pi\chi_p/2)]}{\varphi^2(\chi_p)} > 0 \tag{3.11}$$

Значит, функция под знаком дифференцирования в отмеченном промежутке монотонно возрастает. Отсюда, с применением также (1.1) и (2.1), приходим к результату

$$U(\chi_p) \le \frac{8\chi_p^2}{\pi\varphi(\chi_p)}\left[\frac{2}{(\chi_p^2+4)^2}+\frac{(\chi_p^2+32)}{(\chi_p^2+16)^2}\right] \le \left.\frac{8}{\pi}\frac{\chi_p^2}{\varphi(\chi_p)}\right|_{\chi_p=1.4} \lim_{\chi_p\to 0}\left[\frac{2}{(\chi_p^2+4)^2}+\frac{4}{(\chi_p^2+16)^2}+\frac{1}{4(\chi_p^2+16)}\right] < 0.854<1$$

при $0<\chi_p \le 1.4$ (3.12)

**3.4. О числе δ, при котором выполняется неравенство (1.1).**

Указывается δ, при котором выполняется неравенство (1.1). Пусть $\Delta_1$= (0, 1.4], $\Delta_2$= (1.4, 4], $\Delta_3$= (4, ∞). Введём равные верхним оценкам в (3.12), (3.10), (3.4) величины: $\Lambda_1$= 0.854, $\Lambda_2$= 0.871, $\Lambda_3$= 0.717. Имеем (0, ∞) = $\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3$. Зададимся теперь $\forall\chi_p=\chi_p^\bullet \in (0,\infty)$. Тогда при некотором $k=k_0 \in \{1, 2, 3\}$ $\chi_p^\bullet \in \Delta_{k_0}$. Значит, $U(\chi_p^\bullet) < \Lambda_{k_0} \le \max_{j\in\{1,2,3\}} \Lambda_j = \Lambda_2 = 0.871$. Но $\chi_p^\bullet$, по условию, ∀. Отсюда то же верно и при $\chi_p \in (0,\infty)$. Выбирая δ =1 – $\Lambda_2$= 0.129, приходим к значению δ, при котором для всех $0<\chi_p<\infty$ выполняется неравенство (1.1). Но неравенство $0<\chi_p<\infty$ заведомо выполняется при ∀ фиксированных *h*/*l* и *p* = 2,4,… Следовательно, при ∀ фиксированных значениях *h*/*l* и *p* = 2, 4,…выполняется и неравенство (1.1). Что и требовалось доказать.

**ЛИТЕРАТУРА**


1. Абрамян Б.Л. К плоской задаче теории упругости для прямоугольника // ПММ, т.XXI, № 1, 1957, с. 89–100.
2. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. М.-Л.: Государственное изд-во технико-теоретической литературы, Ленинград, 1949, 695 с.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Физматлит, т.I /II, 2007/2003, 679 /863 с.
4. Мелешко В.В. Бигармоническая проблема для прямоугольника: история и современность // Математические методы и физико-механические поля. 2004. Т.47. № 3. С.45–63.
5. Сухотерин М.В. Метод суперпозиции исправляющих функций в задачах теории пластин. Санкт-Петербург: Изд-во Политехнического университета, 2009. 265 с.
6. Сейранян С.П. Об одной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений в первой краевой плоской задаче теории упругости для прямоугольника // В сб.: «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред», Труды IX международной конференции, г. Горис РА, 1– 6 октября, 2018, с.283-287.



**Сведения об авторе:**

**Сейранян Сурен Паруйрович** – к. ф.-м.н., старш. научн. сотр. Института механики НАН РА.
**Тел.:** (+37455)542838, **E-mail:** seysuren@yandex.ru.

# ВЛИЯНИЕ ШЕРОХОВАТОСТИ ПОДЛОЖКИ НА АДГЕЗИОННЫЕ СВОЙСТВА ЭПОКСИДНОГО КЛЕЯ

**Смирнов С.В., Веретенникова И.А., Смирнова Е.О., Коновалов Д.А., Пестов А.В.**

Исследуется влияние параметров шероховатости подложки на механические и адгезионные свойства покрытия на основе однокомпонентного эпоксидного клея ЭТП-2 горячего отверждения. В качестве подложки использовали образцы с разной шероховатостью поверхности из пластин алюминий-магниевого сплава АМг6 и стали 3. Оценку поверхностных механических свойств (твёрдости, приведённого модуля упругости) покрытий осуществляли с использованием комплекса NanoTriboindentor TI 950. Эксперименты на царапание (скретч-тест) проводили с применением универсальной испытательной машины Zwick-2,5. Было показано, что для данных сочетаний материалов покрытия и подложек шероховатость не влияет на получаемые значение твёрдости и приведённого модуля упругости. В качестве параметра оценки адгезионных свойств была выбрана величина поверхностной энергии расслоения. Для обоих видов подложек шероховатость поверхности оказывает влияние на адгезионные свойства эпоксидного клея ЭТП-2, что проявляется в изменении поверхностной энергии расслоения и сказывается на внешнем виде царапин.

**Введение.** Эпоксидные клеи являются универсальными основами композиций для склеивания материалов со слабо пористой и непористой поверхностью (металлы, фаянс, керамика, твердые породы древесины и др,), что позволяет использовать их в различных отраслях промышленности [1], С практической точки зрения наибольший интерес представляет эпоксидный клей, обладающий в отвержденном состоянии однородной структурой, прочностью, пластичностью, высоким уровнем адгезии и обеспечивающий эффективное формированием клеевого или поверхностного слоя. Необходимость создания таких материалов ранее привела к разработке однокомпонентного эпоксидного клея ЭТП-2 горячего отверждения [2].

Одним из важных направлений исследований в области создания клеев является взаимосвязь между характеристиками склеиваемых поверхностей и эксплуатационными свойствами получаемого соединения [3]. Важное значение имеет шероховатость поверхности на которую наноситься клей, поскольку на ней могут иметь место макро- и микроотклонения от идеальной геометрической формы [4]. Шероховатость поверхности наряду со структурными и физико-химическими свойствами основы оказывает существенное влияние на получение качественных клеевых соединений. Задача конструктора — назначить оптимальную шероховатость поверхностей для нанесения любого покрытия. Например, для поверхности основного металла под нанесение металлических и неметаллических неорганических покрытий, получаемых электрохимическим, химическим и горячим способами, среднеарифметическое отклонение профиля Ra [4] должно быть не более: 10 – под защитные покрытия; 2,5 – под защитно-декоративные покрытия; 1,25 – под твердые и электроизоляционные анодноокисные покрытия [5]. Целью работы является исследование влияния параметров шероховатости подложки на механические и адгезионные свойства покрытия на основе однокомпонентного эпоксидного клея ЭТП-2 горячего отверждения. Достижение поставленной цели осуществляется за счет оценки механических свойств (твердости и приведенного модуля упругости) и поверхностной энергии расслоения эпоксидного клея, нанесенного на подложки с разными значениями шероховатости, методами индентирования и царапания (скретч-тест). Данный метод позволяет исследовать покрытия в различных условиях контакта и моделировать условия эксплуатации [6].

**Материалы и методы.** В качестве материала для исследования использовали покрытие на основе однокомпонентного эпоксидного клея ЭТП-2 горячего отверждения, разработанного в Институте органического синтеза им. И. Я. Постовского УрО РАН [2]. Клей формируется на основе коммерчески доступных эпоксидных смол с эпоксидным числом 20-27%. В качестве катализатора отверждения используется алкоксид титана(IV), синтез которого осуществляется путем реакции переэтерификации коммерчески доступных алкоксидов. Отверждение осуществляли по оптимизированным режимам, подобранным при проведении экспериментальных исследований свойств отвержденного материала в зависимости от вязкости клея и температурно-временного режима процесса. Получаемое покрытие может быть охарактеризовано как твердое и хрупкое.

В качестве подложки использовали образцы с разной шероховатостью поверхности из двух разных материалов – стали 3 и алюминий-магниевого сплава АМг6. Рассматривали четыре варианта подготовки поверхности подложки для каждого материала. В таблице 1 приведены характеристики шероховатости для всей рассматриваемой области (Rq – среднеквадратичная шероховатость, рассчитанная для всей измеренной площади, Ra – средняя шероховатость, рассчитанная для всей измеренной площади, Rt - максимальная высота профиля, максимальная высота от пика до пика впадины). Значения толщины покрытия для каждого варианта подложки приведены в табл. 1.

Эксперименты по индентированию были проведены на комплексе NanoTriboindentor TI 950. Комплекс позволяет осуществлять испытания в диапазоне нагрузок от 30 нН до 10 Н, оснащен цветной CCD камерой для идентификации структур перед тестированием и визуализацией в режиме зондовой микроскопии (SPM визуализация). Индентирование проводили с использованием трехгранной пирамиды Берковича. Первичную обработку результатов испытаний осуществляли с помощью программного обеспечения прибора по методике Оливера-Фарра. В качестве характеризующих параметров были выбраны твердость индентирования $H$ и приведенный нормальный модуль упругости $E_r$.

Таблица 1. Параметры шероховатости подложки, толщина покрытия, характерные размеры царапины и значения поверхностной энергии адгезионного разрушения

<table>
<tr><th>Номер образца</th><th>Ra, мкм</th><th>Rq, мкм</th><th>Rt, мкм</th><th>h, mm</th><th>$F_t$, H</th><th>$F_p$, H</th><th>$S$×$10^{-3}$, мм$^2$</th><th>H, GPa</th><th>$E_r$, GPa</th><th>$G_{int}$×$10^3$, Дж/м$^2$</th><th>$G_{int}/h$×$10^6$, Дж/м$^2$</th></tr>
<tr><td colspan="11">Подложка сталь 3</td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>5,69</td><td>6,73</td><td>41,1</td><td>0,3</td><td>35,15</td><td>56,85</td><td>4,7</td><td rowspan="4">0,34±5%</td><td rowspan="4">4,8±5%</td><td>3496,47</td><td>11389,14</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0,24</td><td>0,34</td><td>7,96</td><td>0,38</td><td>-</td><td>-</td><td>–</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0,07</td><td>0,09</td><td>2,40</td><td>0,33</td><td>151,97</td><td>162,48</td><td>90,84</td><td>189,50</td><td>583,07</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0,04</td><td>0,06</td><td>2,37</td><td>0,37</td><td>69,63</td><td>114,73</td><td>60,73</td><td>102,15</td><td>273,87</td></tr>
<tr><td colspan="11">Подложка АМг6</td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td>2,88</td><td>3,17</td><td>14,81</td><td>0,11</td><td>5,1</td><td>13,1</td><td>3,9</td><td rowspan="4">0,34±5%</td><td rowspan="4">4,8±5%</td><td>39,19</td><td>356,26</td></tr>
<tr><td>6</td><td>1,08</td><td>1,42</td><td>10,34</td><td>0,12</td><td>15,94</td><td>40,8</td><td>39,31</td><td>4,11</td><td>34,26</td></tr>
<tr><td>7</td><td>0,35</td><td>0,49</td><td>5,7</td><td>0,16</td><td>-</td><td>-</td><td>–</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td>8</td><td>0,11</td><td>0,15</td><td>3,08</td><td>0,18</td><td>28,96</td><td>75,3</td><td>68,63</td><td>6,68</td><td>37,10</td></tr>
</table>

Особенности адгезионного и когезионного разрушения эпоксидного лака изучали в испытаниях на царапание (скретч-тест) коническими инденторами Роквелла на приставке к испытательной машине Zwick/Roell Z 2,5. В рабочее пространство машины помещался столик, на котором было смонтировано устройство для перемещения образца в горизонтальном направлении с датчиком силы, регистрирующим усилие горизонтального смещения. Во время испытаний индентор двигался в вертикальном направлении со скоростью 0,001мм/с. Значение перемещения индентора и нормального усилия записывалось с использованием штатных возможностей машины Z 2,5. Латеральное перемещение образца снималось с датчика, установленного на столике. Скорость движения образца составляла 0,07 мм/с. Все данные были синхронизированы по времени. Эксперимент в каждом случае был остановлен в момент образования макротрещин в материале покрытия либо при достижении материала подложки. Испытания осуществляли при температуре 24±2$^0$С. На каждом образце было нанесено по 3 царапины. Исследование и количественное описание рельефа поверхности образцов покрытий после проведения скретч-тестов осуществляли с использованием оптической микроскопии на бинокулярном стереоскопическом микроскопе МБС-1.

В качестве характеристики адгезионного разрушения путем отслоения покрытия от подложки была использована величина удельной упругой энергии на единицу площади границы сцепления (далее энергии адгезионного разрушения) [7,8], которая в отсутствии остаточных напряжений в покрытии может быть приближенно определена по формуле

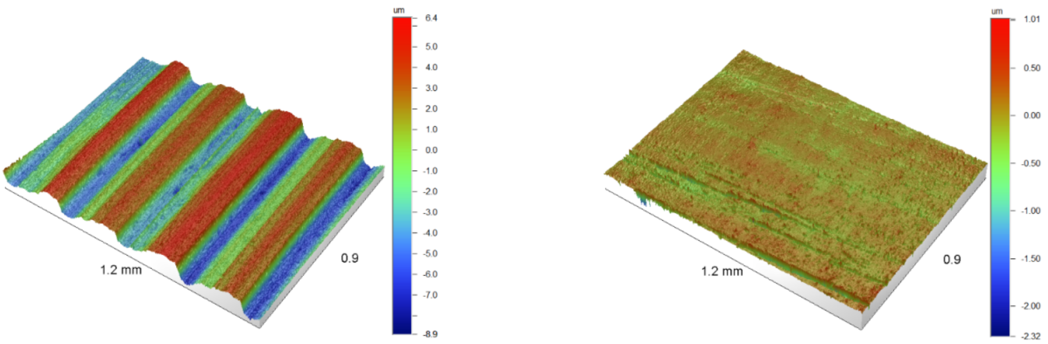
$$G = Z\frac{\sigma_t^2 h}{E}, \qquad (1)$$

где $h$ – толщина покрытия, $E$ – модуль Юнга для материала покрытия, $Z = 1$ – для момента инициации отслоения, $\sigma_t$ – тангенциальная составляющая давления индентора, действующего на покрытие при нанесении царапины, в момент возникновения отслоения. $\sigma_t$ определяется следующим образом

$$\sigma_t = \frac{F_t}{S}, \tag{2}$$

где $F_t$ – тангенциальная составляющая усилия, действующего на покрытие при нанесении царапины, S – площадь вертикальной проекции контактной поверхности индентора с покрытием в момент возникновения отслоения.

**Полученные результаты.** Для примера, на рисунке 1 представлены трехмерные 3D топографические изображения поверхности для образцов 5 (рис.1,a) и 8 (рис.1,b) с разной шероховатостью, из которых хорошо видно отличие высоты микронеоднородностей на поверхностях подложки с разной подготовкой.




(a) (b)

Рисунок 1. Топографическое изображение поверхности образцов 1(а) и 4 (b)

На основании ранее проведенных работ по исследованию механических свойств клея ЭТП-2 [9] для индентирования был выбран треугольный режим нагружения, максимальная нагрузка при всех испытаниях составляла 1 Н, время нагружения – 40 с. Для каждого образца было выполнено по 5 испытаний, результаты которых усреднялись. В таблице 1 приведены усредненные значения твердости $H$ и нормального модуля упругости $E_r$, определяемого методом инструментального индентирования. Шероховатость и материал подложки не влияют на получаемые значение твердости и приведенного модуля упругости, так как глубина внедрения намного меньше, чем высота нанесенного покрытия. В случае же тонкого покрытия, когда глубина проникновения индентора сравнима с толщиной покрытия, может наблюдаться влияние шероховатости на получаемые значения твердости и приведенного модуля упругости [10].

Характер разрушения одно и того же материала при царапании, нанесенного на подложки с разной шероховатостью поверхности значительно отличается. На рисунке 2 приведен внешний вид царапин, полученных на поверхностях из разного материала и с разной подготовкой. Для царапин с образца 1 наблюдается изначально пластическая деформация материала, затем с увеличением глубины внедрения появляются следы хрупкого разрушения, проявляющегося в образовании радиальных трещин, которые при дальнейшем движении индентора увеличиваются в размерах. В конце царапины наблюдаются небольшие области, соответствующие отслоению клея ЭТП-2. Для образца 2 отслоения и скола не наблюдается, даже после того, как индентор движется в материале подложки. Для 3 и 4 образцов отслоение покрытия при достижении индентором материала подложки наблюдается не для всех царапин, а возникает в 50% экспериментов, как показано на рис. 2,в. Однако, в материале покрытия в области царапин наблюдается множество мелких отходящих во все концы трещин.

Для покрытия, нанесенного на алюминий-магниевый сплав АМг6 при Ra больше 1 мкм (образцы 5 и 6) проявляются ярко выраженные участки отслоения. Если после отслоения продолжить царапание, то происходит скол покрытия. Для образца 7 – отслоения и скола не наблюдается, даже после того, как индентор движется в материале подложки. Для 8 образца наблюдается участок отслоения, но явно выраженного скола не наблюдается. Только после того момента, когда индентор при царапании движется уже в основном материале подложки, наблюдается небольшая область скола покрытия. Наблюдаемая зависимость адгезионного разрушения покрытия от шероховатости подложки (рис. 2) может быть обусловлена эффективностью смачивания покрываемой поверхности неотвержденным клеем. Для образцов 2 и 7 имеющаяся шероховатость обеспечивает максимальное смачивание поверхности, в результате чего формируется эффективное покрытие. Понижение или повышение шероховатости приводит к уменьшению смачиваемости поверхности неотвержденным клеем, что приводит к отслоению или разрушению сформированного покрытия.

В табл. 1 приведены данные, необходимые для расчета по формулам (1) и (2) значений поверхностной энергии адгезионного разрушения и полученные значения энергии. В случае, если адгезионного разрушения (отслоения) покрытия не наблюдалась, энергию не рассчитывали.

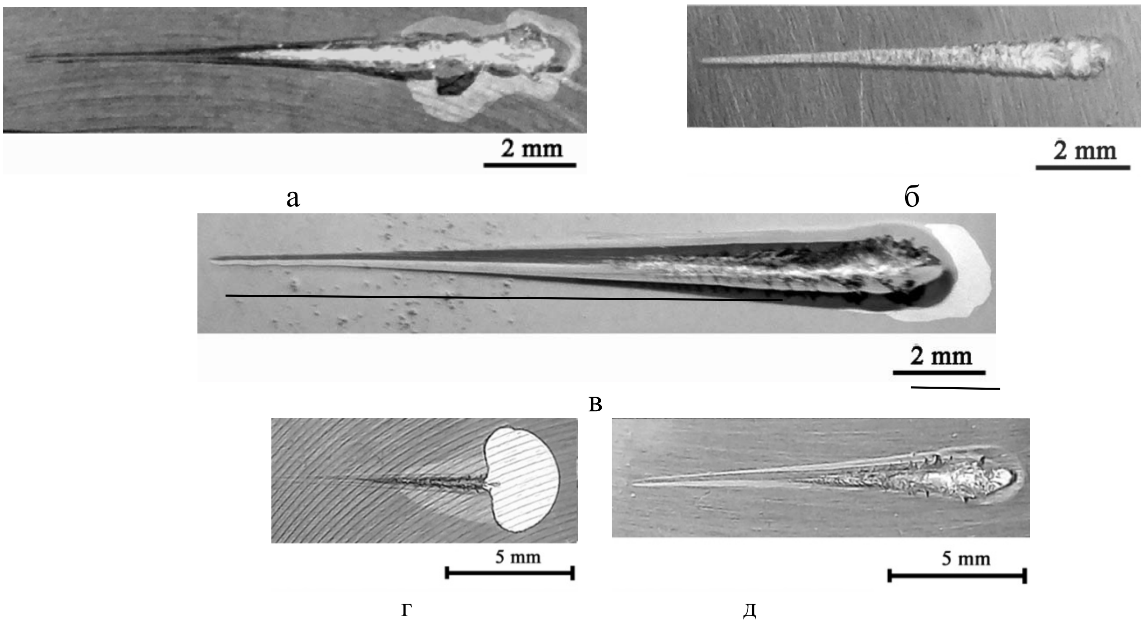


Рис.2. Внешний вид царапин на 1 (а), 2 (б), 4(в), 5 (г) и 7 (д) образцах

Толщина покрытий, нанесенных на подложку из стали 3 и АМг6, примерно одинаковая. Однако толщина покрытий на стали 3 примерно в 3 раза больше, чем на АМг6. Это оказывает существенное влияние на получаемое значение $\boldsymbol{G_{int}}$, поэтому дополнительно определяли $\boldsymbol{G_{int}/h}$ (табл.1). Показано, что при одинаковой толщине покрытия, одинаковых механических поверхностных свойствах и одинаковых параметрах проводимого эксперимента (диаграмма нагружения при царапании) – характеристики царапан (общая длина до касания подложки, нормальные и тангенциальные усилия) очень сильно отличаются. Это влияет на получаемые значения энергии. Максимальная энергия адгезионого разрушения затрачивается для отслоения покрытия на образце 1, минимальная – на образце 6. Для образца 4 моменту отслоения соответствуют самые большие латеральное усилие и площадь отслаиваемой области, однако энергии затрачивается в 18,5 раз меньше, чем для 1 образца. Таким образом, с использованием данных по энергии можно сделать вывод об энергоемкости разрушения рассматриваемого покрытия. Наиболее энергозатратным является разрушение клея ЭТП-2 горячего отверждения, нанесенного на подложки из стали 3, наименее энергозатратное разрушение – при нанесении данного покрытия на подложки из АМг6.

**Выводы.** Для алюминий-магниевого сплава АМг6 при показатели Ra 0,35 мкм разрушение между покрытием и подложкой по типу отслоения и скола не происходит, следовательно, данный класс шероховатости является предпочтительным при нанесении покрытий на основе данного клея. Для этого же материала подложки при показателях Ra больше 3 мкм адгезионная связь между покрытием и подложкой очень низкая, наблюдается отслоение и скол при небольшой латеральной нагрузке. При Ra 1,08 и 0,11 мкм – наблюдается отслоение при больших нагрузках.

Для подложки из стали 3 оптимальным выбран вариант при Ra 0,24 мкм, когда отслоения не наблюдается. При больших и меньших значениях Ra при нанесении данного клея наблюдаются участки отслоения, но не такие большие, как на подложке из сплава АМг6.

Шероховатость поверхности и вид материала подложки оказывают существенное влияние на адгезионные свойства однокомпонентного эпоксидного клея ЭТП-2 горячего отверждения.

Наиболее энергозатратным является разрушение клея, нанесенного на подложки из стали 3, наименее энергозатратное – на подложках из АМг6.

Эксперименты проведены в Центре коллективного пользования «Пластометрия» ИМАШ УрО РАН (г, Екатеринбург), Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант № 19-19-00571),

## ЛИТЕРАТУРА

1. Петрова А.П., Лукина Н.Ф., Дементьева Л.А., Аниховская Л.И. Пленочные конструкционные клеи.// Клеи. Герметики. Технологии, №10, 2014.
2. Суворов А.Л., Дульцева Л.Д., Овчинникова Г.И., Ятлук Ю.Г., Алехина В.Д. Свойства полимеров на основе эпоксидных смол и сложноэфирных олигомеров, содержащих титан. //Пластические массы, № 3, 1989.
3. Al Robaidi A., Anagreh N., Massadeh S., Al Essa A.M. The effect of different surface pretreatment methods on nano-adhesive application in high strength steel and aluminum bonding. //Journal of Adhesion Science and Technology, vol. 25, 2011.
4. ГОСТ 2789-73 Шероховатость поверхности. Параметры и характеристики.
5. ГОСТ 9.301-86 Единая система защиты от коррозии и старения (ЕСЗКС). Покрытия металлические и неметаллические неорганические. Общие требования.
6. ASTM G171 − 03 (REAPPROVED 2009) Standard Test Method for Scratch Hardness of Materials Using a Diamond Stylus.
7. Hutchinson J.W., Suo Z. Mixed mode cracking in layered materials. //Advances in Applied Mechanics, vol.29, 1992.
8. Smirnov S.V., Konovalov D.A., Kalashnikov S.T., Smirnova E.O. Studying the adhesion strength and mechanical properties of coatings on aluminum-magnesium alloy samples. //Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures, iss 6, 2018.
9. Smirnov S.V., Veretennikova I.A., Smirnova E.O., Pestov A.V. Estimating the effect of fillers on the mechanical properties of epoxy glue coatings by microindentation [Electronic resource]. Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures, iss. 6, 2017.
10. Усеинов А., Кравчук К., Маслеников И. Индентирование. Измерение твердости и трещиностойкости покрытий. //Наноиндустрия, №7, 2013.

**Информация об авторах**

**Смирнов Сергей Витальевич** – д.т.н., директор, Институт машиноведения УрО РАН
**тел.:** (343) 374 47 25, (343) 374 40 76, **E-mail:** svs@imach.uran.ru

**Веретенникова Ирина Андреевна** – к.т.н., научный сотрудник, Институт машиноведения УрО РАН, лаб. микромеханики материалов (343) 362 30 27, **E-mail:** irincha@imach.uran.ru

**Смирнова Евгения Олеговна** – к.т.н., научный сотрудник, Институт машиноведения УрО РАН, лаб. микромеханики материалов (343) 362 30 27, **E-mail:** evgeniya@imach.uran.ru

**Коновалов Дмитрий Анатольевич** – к.т.н., научный сотрудник, Институт машиноведения УрО РАН, лаб. микромеханики материалов (343) 362 30 27, **E-mail:** satterkein@yandex.ru

**Пестов Александр Викторович** – к.х.н., зав. лабораторией, Институт органического синтеза им. И.Я.Постовского УрО РАН, лаб. органических материалов (343) 362 34 39, **E-mail:** pestov@ios.uran.ru

# ПРИМЕНЕНИЕ CZM МОДЕЛИ ПРИ РАЗРАБОТКЕ МЕТОДИКИ ОЦЕНКИ ЛОКАЛЬНОЙ АДГЕЗИОННОЙ ПРОЧНОСТИ ПОЛИМЕРНОГО ПОКРЫТИЯ ПРИ ИНДЕНТИРОВАНИИ

**Смирнов С.В., Мясникова М.В., Смирнова Е.О., Коновалов Д.А., Пестов А.В., Игумнов А.С.**

На примере э**поксидной композиции с этиленгликольфталат-титановым отвердителем, нанесённой на поверхность низкоуглеродистой** стали, выполнено исследование локальной адгезионной прочности полимерного покрытия при индентировании в сочетании с численным моделированием условий проведения эксперимента. При внедрении конуса Роквелла перпендикулярно к поверхности покрытия установлено формирование кольцевой области отслоения покрытия вокруг отпечатка, вследствие разрушения адгезионных связей при радиальном сдвиге за счёт вытеснения материла покрытия из-под индентора. Экспериментально определённую ширину зоны отслоения покрытия при фиксированной глубине внедрения индентора использовали в качестве контролируемого параметра при конечно-элементном моделировании размера зоны отслоения. Для задания условий адгезионного контакта использовали билинейный закон CZM, описывающий соотношение между касательным напряжением сцепления и вытяжкой адгезионных связей при сдвиге взаимодействующих поверхностей в контактной плоскости. Определена предельная удельная поверхностная энергия локального адгезионного разрушения покрытия при параметрах CZM, обеспечивающих наилучшее схождение расчётных и экспериментальных данных.

## Введение

Полимерные соединения находят широкое применение в качестве защитных покрытий и клеев в узлах и деталях конструкций и устройств, предназначенных для работы под действием повышенных механических, термических и др. нагрузок. Отслоение (нарушение адгезионных связей) является самым распространенным типом повреждений в конструкциях с покрытиями и возникает не только вследствие нарушения требований, продиктованных технологией нанесения покрытий, но и в процессе эксплуатации за счёт накопления внутренних микроповреждений при различных типах внешнего воздействия. Интенсивность накопления внутренних микроповреждений тесно связана с особенностями изменения напряжённо-деформированного состояния на контакте полимерного соединения. Поэтому существует необходимость в разработке методик оценки адгезионной прочности с помощью критериев, учитывающих параметры напряженно-деформированного состояния на контакте взаимодействующих поверхностей в условиях, приближённых к эксплуатационным.
В основе всех существующих экспериментальных методов измерения адгезионной прочности лежит принцип разрушения адгезионной связи между покрытием и основой. При этом, независимо от выбора метода испытаний, в большинстве исследований [1-5 и др.] в качестве критерия для количественной оценки адгезионной прочности, как правило, применяют энергетическую характеристику – предельную удельную поверхностную энергию, затрачиваемую на распространение трещины адгезионного разрушения. Этот критерий позволяет учесть особенности напряжённо-деформированного состояния при разрушении адгезионных связей и поэтому является более перспективным по сравнению со стандартными характеристиками – пределом прочности на сдвиг или на отрыв, которые приводятся в технической документации на адгезивные материалы.
В настоящей работе предпринята попытка разработать методику оценки локальной адгезионной прочности по величине удельной предельной энергии адгезионного разрушения по результатам численного моделирования напряжённо-деформированного состояния полимерного покрытия при проведении испытаний по внедрению индентора Роквелла.

## Материал и методика исследований

В качестве покрытия использовали эпоксидную композицию с этиленгликольфталат-титановым отвердителем, нанесённую на металлическую основу из низкоуглеродистой конструкционной стали с содержанием углерода 0.2%. Состав покрытия был синтезирован в Институте органического синтеза УрО РАН. Испытания на индентирование проводили на универсальной испытательной машине Zwick/Roell Z2,5. В качестве индентора использовали твёрдосплавный конус Роквелла с углом конусности при вершине 120 град. Внедрение индентора осуществляли перпендикулярно к поверхности покрытия на глубину, превышающую толщину покрытия на 10%. При внедрении наконечник индентора пластически деформирует некий объём материала покрытия, что приводит к формированию кольцевой области вспучивания покрытия вокруг отпечатка. С увеличением глубины внедрения на границе соединения материалов покрытия и основы может зародиться и начать развиваться трещина, вследствие разрушения адгезионных связей преимущественно по механизму сдвига за счёт вытеснения материла покрытия непосредственно из-под индентора. Поверхность покрытия вблизи отпечатка изучали с помощью бесконтактного профилографа-профилометра NT1100 фирмы Veeco.

Границу возможного отслоения покрытия от основы фиксировали по результатам расчёта изменения эффективных упругих свойств адгезионного соединения в области вблизи отпечатка. Для этого провели ряд дополнительных испытаний по внедрению алмазного индентора Виккерса на инструментированном микротвёрдомере FISHERSCOPE 2000xym. Внедрение пирамиды Виккерса при малых нагрузках 0.25 Н осуществляли с шагом примерно 40 мкм вдоль линии по направлению к отпечатку конуса Роквелла (рис.1). Длина линии измерений составляла 500 мкм. В результате получили серию кривых «усилие – глубина внедрения индентора», которые использовали для определения приведённого нормального модуля упругости $E_r$ с помощью методики Оливера-Фарра [6] по начальному наклону кривой «усилие – глубина внедрения индентора» на стадии разгрузки.

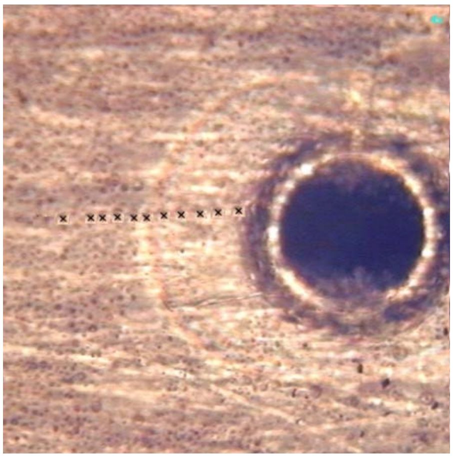


Рис.1. Изображение последовательности отпечатков индентора Виккерса с малой нагрузкой на поверхности покрытия, нанесённых для определения границы области отслоения

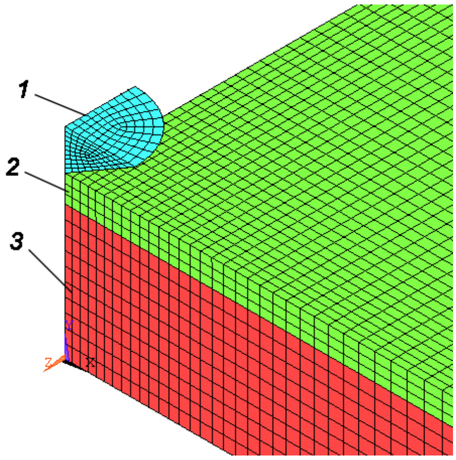



Рис.2. 3D – вычислительная модель полимерного соединения при индентировании

Полученные результаты применили для конечно-элементного моделирования условий проведения эксперимента по формированию зоны отслоения покрытия при внедрении индентора Роквелла. Моделирование проводили в квазистатической постановке в программной среде ANSYS на супервычислителе кластерного типа URAN в ЦКП Института математики и механики УрО РАН. При создании вычислительной модели полимерное соединение задавали в виде двух пластин, каждую из которых наделяли соответствующими механическими свойствами материалов покрытия и стальной основы. Материал покрытия задавали как изотропную упругопластическую пластически несжимаемую среду с билинейным деформационным упрочнением. Поведение материала основы – низкоуглеродистой конструкционной стали, описывали с использованием изотропной упругопластической и пластически несжимаемой среды с изотропным деформационным упрочнением. Материал твёрдосплавного индентора Роквелла полагали идеально упругим. С учётом симметричности процесса деформации ограничились рассмотрением 1/4 части модели соединения (рис.2). При моделировании условий адгезионного контакта на границе соединения покрытия с основой задавали слой контактных элементов с особыми свойствами, которые определяют деформационно-прочностные характеристики адгезионных связей. Эти свойства определялись посредством CZM (модели когезионной зоны), реализованной в ANSYS [7-8]. CZM позволяет моделировать начало расслоения для прогноза допустимой адгезии связанной структуры соединения без необходимости принимать допущение о наличии малой предполагаемой трещины. При этом, контакт между двумя взаимодействующими поверхностями интерпретируется как жёсткая пружина, соединяющая две границы. Предполагается, что при взаимном сдвиге поверхностей возникает виртуальный тонкий упругий слой (по сути – адгезионные связи), обладающий касательной жёсткостью. CZM реализует билинейный закон деформирования связей, описывающий соотношение между касательным напряжением сцепления $\tau$, достигаемым в виртуальном слое при индентировании, и вытяжкой адгезионных связей $U_\tau$ при сдвиге взаимодействующих поверхностей в контактной плоскости (рис.3). Первый линейно-возрастающий участок упругого нагружения характеризует способность виртуального слоя к восприятию упругих деформаций. Тангенс угла наклона этого участка определяет касательную жёсткость адгезионного контакта $k_\tau$. Максимальная точка на диаграмме соответствует локальному пределу поверхностной прочности $\tau_{\max}$, который может быть достигнут на контакте при максимальной вытяжке адгезионных связей $\overline{U_\tau}$ в направлении сдвига без нарушения их целостности. Второй линейно-убывающий участок связан с зарождением и развитием в слое внутренних микродефектов. Его крутизна характеризует интенсивность накопления необратимых микроповреждений, т.е. разупрочнения связей при скольжении в направлении сдвига и, соответственно, определяет хрупкий или вязкий вид разрушения адгезионных связей. Как только затрачивается определённая энергия, связь между двумя поверхностями разрывается и касательное напряжение сцепления $\tau$, соответствующее моменту разрыва связей, становится равным нулю. Площадь диаграммы по физическому смыслу соответствует предельной полной удельной поверхностной энергии $W_a$, затрачиваемой на распространение трещины адгезионного разрушения по механизму сдвига:

$$W_a = \frac{1}{2}\tau_{\max}U_\tau^c \qquad (1)$$

Необходимыми данными, описывающими билинейную диаграмму CZM, являются: максимальное касательное напряжение $\tau_{\max}$ на контакте при сохранении его целостности; значение контактной касательной жёсткости $k_\tau$; величина предельной вытяжки адгезионных связей при сдвиге в контактной плоскости $U_\tau^c$, соответствующая их локальному разрыву. Варьируя значения этих параметров, можно изменять форму диаграммы, т.е. управлять величиной локальной энергии разрушения, определяющей ширину кольцевой отслоившейся области покрытия при одной и той же глубине внедрения индентора.

Исходя из вышеописанного, идентификацию модели осуществляли путём решения серии задач по моделированию формирования зоны отслоения покрытия при разных сочетаниях вышеперечисленных параметров CZM, но при фиксированной глубине внедрения индентора Роквелла. В расчётах применили следующие допущения: 1) максимальная величина касательного напряжения в виртуальном слое $\tau_{\max}$ не может превышать максимального значения когезионной сдвиговой прочности наименее прочной составляющей соединения – эпоксидной композиции с этиленгликольфталат-титановым отвердителем, определённого экспериментально и равного 5.7 МПа; 2) параметр $U_\tau^c$ зависит от физико-механических характеристик связей и принят прямо пропорциональным произведению индекса полимеризации полимерных молекул эпоксидной композиции на размер мономерного звена, что составляет $2\cdot10^{-7}$ м; 3) для выбранного покрытия наиболее вероятным является хрупкое разрушение адгезионных связей, поэтому моделирование осуществляли с условием: $U_\tau^c / U_\tau$ = 1.1÷2.0. Реализацию CZM осуществляли с использованием следующих опций: тип контактного элемента Conta174, тип контакта Bonded, контактный алгоритм Penalty; параметр β (flag for tangential slip under compressive normal contact stress) принят равным 1. Сравнение расчётных данных с результатами эксперимента производили по величине квадратичной невязки значений ширины кольцевой зоны отслоения покрытия.

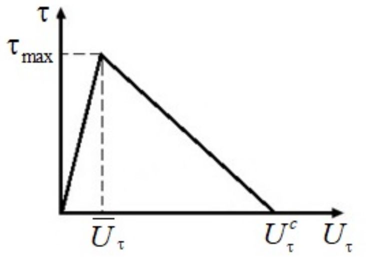



Рис.3. Билинейный CZM закон разрушения адгезионных связей по механизму сдвига

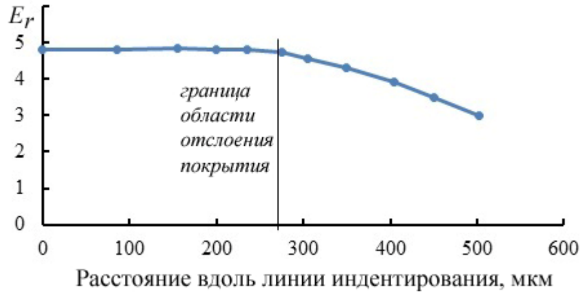



Рис.4. Изменение приведённого нормального модуля упругости вдоль линии нанесения отпечатков индентора

**Результаты исследований и их обсуждение**

Рельеф поверхности покрытия вокруг отпечатка Роквелла после индентирования представляет собой специфический кольцевой вогнутый профиль, формирующийся при пластической деформации за счёт наплыва материала покрытия непосредственно у края отпечатка. Исследование эффективных упругих свойств этой зоны покрытия позволило установить, что ближе некоторого расстояния от отпечатка наблюдается резкое увеличение способности покрытия к упругим деформациям. Такой вывод был сделан на основании результатов определения приведённого нормального модуля упругости $E_r$ вдоль линии измерений в радиальном направлении к отпечатку Роквелла (рис.2 и 4). Из рис.4 следует, что на расстоянии $L_f$, превышающем 220 мкм от края отпечатка, величина модуля практически не меняется, поэтому эту область покрытия можно рассматривать, как имеющую неразрушённую адгезионную связь покрытия с основой. На расстоянии меньше 220 мкм от края отпечатка напротив имеет место снижение значений $E_r$. Этот факт свидетельствует о наличии зазора в этой области между покрытием и материалом основы и может быть использован в качестве признака для определения положения границы отслоения покрытия. Найденное значение $L_f$ использовали в качестве контролируемого геометрического параметра, характеризующего размер зоны отслоения покрытия при идентификации вычислительной модели.

Конечно-элементное моделирование условий адгезионного контакта с помощью билинейной диаграммы CZM позволило управлять размером области отслоения покрытия. По результатам постановки и численной реализации вычислительного эксперимента по решению задач с варьированием параметров CZM в диапазоне: $\tau_{max}$ = 1.7÷5.7 МПа; $\overline{U_\tau}$ = (1.0÷1.8)·$10^{-7}$ м; $U_\tau^c$ = 2·$10^{-7}$ м получили выборку возможных значений ширины зоны отслоения покрытия $L_f$. Путём сравнения расчётных данных с результатами физического эксперимента построена поверхность распределения значений квадратичной невязки величины $L_f$. Параметры диаграммы CZM, обеспечивающие минимальное значение невязки, использованы для расчёта предельной удельной поверхностной энергии $W_a$ локального адгезионного разрушения соединения с использованием формулы (1). Установлено, что при $\tau_{max}$ = 3.7 МПа, $\overline{U_\tau}$ = 1.6·$10^{-7}$ м предельное значение локальной удельной поверхностной энергии составляет $W_a$ = 0.37 Н/м.

**Заключение.** На примере эпоксидной композиции с этиленгликольфталат-титановым отвердителем, нанесённой на поверхность низкоуглеродистой стали, разработаны методологические принципы для оценки адгезионной прочности полимерного покрытия. В качестве основного экспериментального метода применили индентирование конусом Роквелла перпендикулярно к поверхности покрытия. При определённой глубине внедрения индентора установлено формирование кольцевой зоны отслоения покрытия вокруг отпечатка при радиальном сдвиге за счёт вытеснения материала покрытия непосредственно из-под индентора. Ширина зоны отслоения, определённая в расчётах по изменению значений приведённого модуля упругости покрытия в серии дополнительных испытаний по внедрению индентора Виккерса с малыми нагрузками, использована в качестве контролируемого параметра при конечно-элементном моделировании отслоения покрытия. Для задания условий адгезионного контакта использован трёхпараметрический билинейный закон CZM, описывающий соотношение между касательным напряжением сцепления и вытяжкой адгезионных связей при сдвиге взаимодействующих поверхностей в плоскости контакта. В качестве критерия для количественной оценки адгезионной прочности использована предельная величина полной удельной поверхностной энергии адгезионного разрушения.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РНФ № 19-19-00571 в части идентификации вычислительной модели применительно к полимерному покрытию с этиленгликольфталат-титановым отвердителем и в рамках выполнения госзадания ИМАШ УрО РАН в части разработки методики определения адгезионной прочности.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Volinsky A.A., Moody N.R., Gerberich W.W. Interfacial toughness measurements for thin films on substrates. Acta Materialia, vol. 50, 2002, pp. 441–466.
2. Головин Ю.И. Наноиндентирование и механические свойства твердых тел в субмикрообъемах, тонких приповерхностных слоях и пленках (обзор). // Физика твердого тела. 2008. Т.5. №12. С.2113–2142.
3. Гольдштейн Р.В., Перельмутер М.Н. Моделирование трещиностойкости композиционных материалов. //Вычислительная механика сплошных сред. 2009. Т.2. №2. С.22–39.
4. Panigrahi S.K., Pradhan B. Onset and growth of adhesion failure and delamination induced damages in double lap joint of laminated FRP composites. Composite Structures, vol. 85, 2008, pp. 326–336.
5. Чернякин С.А., Скворцов Ю.В. Анализ роста расслоений в композитных конструкциях. /Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета. 2014. № 4(56). С. 249–255.
6. Oliver W.C., Phar G.M. An improved technique for determining hardness and elastic modulus using load and displacement sensing indentation experiments. //J. Mater. Res., V.7, №6, 1992, pp.1554 - 1583.
7. Alfano, Crisfield M.A. Finite Element Interface Models for the Delamination Anaylsis of Laminated Composites: Mechanical and Computational Issues. International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol. 50, 2001, pp. 1701–1736.
8. Xu X., Needleman A. Numerical Simulation of Fast Crack Growth in Brittle Solid. //Journal of the Mechanics and Physics of Solids, vol. 42(9), 1994, pp.1397–1434.

**Информация об авторах:**

**Смирнов Сергей Витальевич** – директор, Институт машиноведения Уральского отделения Российской академии наук, доктор технических наук, профессор (343) 3744076
**E-mail:** svs@imach.uran.ru)

**Мясникова Марина Валерьевна** – старший научный сотрудник, Институт машиноведения Уральского отделения Российской академии наук, лаборатория микромеханики материалов, кандидат технических наук (343) 3623027 . **E-mail:** marina@imach.uran.ru

**Смирнова Евгения Олеговна** – научный сотрудник, Институт машиноведения Уральского отделения Российской академии наук, лаборатория микромеханики материалов, кандидат технических наук (343) 3623027. **E-mail:** evgeniya@imach.uran.ru

**Коновалов Дмитрий Анатольевич** – научный сотрудник, Институт машиноведения Уральского отделения Российской академии наук, лаборатория микромеханики материалов, кандидат технических наук (343) 3623027. **E-mail:** satterkein@yandex.ru

**Пестов Александр Викторович** – заведующий лабораторией, Институт органического синтеза Уральского отделения Российской академии наук, лаборатория органических материалов, кандидат химических наук (343) 3623439. **E-mail:** pestov@ios.uran.ru

**Игумнов Александр Станиславович** – заведующий отделом, Институт математики и механики Уральского отделения Российской академии наук, Центр коллективного пользования ИММ УрО РАН «Суперкомпьютерный центр ИММ УрО РАН», отдел системного обеспечения (343) 3753511
**E-mail:** parallel@imach.uran.ru

# ОБ ОДНОЙ ПРИКЛАДНОЙ ТЕОРИИ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ МАГНИТОЭЛЕКТРОУПРУГИХ ПЛАСТИН

**Соловьев А.Н., Чебаненко В.А. Кириллова Е., Ле Ван Зыонг, До Тхань Бинь**

**Аннотация**. Рассматриваются поперечные колебания пьезоактивного биморфа с пьезоэлектрическим и пьезомагнитными слоями, налеенными на пассивную подложку. Задача ставится в рамках линейной теории пьезомагнитоэлектроупругости. На основе гипотез о распределении механического электрического и магнитного полей с помощью применения вариационного принципа строится прикладная теория. Проведены расчеты собственных колебаний биморфа в конечно элементном пакете ANSYS, которые показали адекватность принимаемых гипотез. Построенная модель биморфа может быть применена для оптимизации его параметров в составе устройства накопления электрической энергии, если оно находится в переменном магнитном поле. Обсуждается построение модели на основе использования эффективных пьезомагнитоэлектрических свойств.

**Введение**. Изучению и оптимизации устройств накопления энергии с использованием пьезоэлектрических генераторов подверженных механическим воздействиям посвящено большое количество работ, например, их обзор можно найти в [1-3]. Рабочим элементом этих устройств является пьезоэлемент, который "напрямую" преобразует энергию механических колебаний в электрическую энергию. Если устройство находится в переменном магнитном поле, в частности, при размещении постоянных магнитов на вращающихся элементах машин. В этом случае деформация пьезоэлетрического элемента и генерация электрического тока, может возникнуть при деформировании пьезомагнитного элемента совмещенного с пьезоэлектрическим элементом.

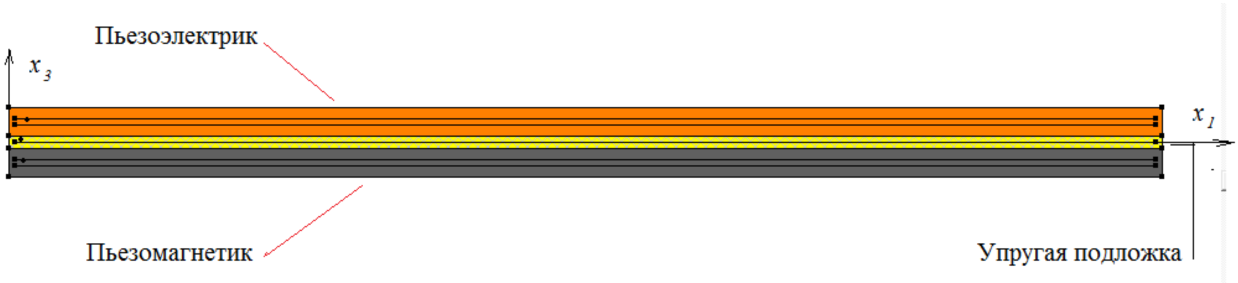



Рис.1 Общий вид устройства

**Постановка задачи.** В настоящей работе рассматривается биморф (рис.1), состоящий из упругой подложки на которую с двух разных сторон наклеены пьезоэлектрический и пьезомагнитный слои. Математической постановка задачи рассматривается в рамках линейной теории электроупругости и магнитоупругости, в которых электрическое и магнитное поля представляются через скалярные потенциалы. Лицевые поверхности пьезослоя электродированы, на одном электроде задан потенциал, второй электрод свободен или подключен к внешней электрической цепи, связанной с накоплением энергии. Пьезомагнитный слой находится в переменном магнитном поле. В результате биморф совершает поперечные изгибные колебания. Моделирование работы устройства в конечно-элементных пакетах, таких как ANSYS, ACELAN затруднено в связи с отсутствием пьезомагнитных конечных элементов.

Общие уравнения и определяющие соотношения для пьезомагнитоэлектрического тела состоят из [4]:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \sigma_{\Omega}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c} : \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{E} - \mathbf{h}^T \cdot \mathbf{H}$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{e} : \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{E} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{H} \tag{2}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{h} : \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\alpha}^T \cdot \mathbf{E} + \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T\right), \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi, \quad \mathbf{B} = -\nabla \phi, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ - тензоры механических напряжений и деформации, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ - векторы электрической индукции и напряженности электрического поля, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ - векторы магнитной индукции и напряженности магнитного поля, $\rho$ - плотность материала, $\mathbf{c}$ - тензор упругих модулей, $\mathbf{e}$ - тензор пьезоэлектрических модулей, $\mathbf{h}$ - тензор пьезомагнитных модулей, $\boldsymbol{\kappa}$ - тензор диэлектрических проницаемостей, $\boldsymbol{\alpha}$ - тензор магнитоэлектрических модулей, $\boldsymbol{\mu}$ - тензор магнитных проницаемостей, $\mathbf{f}$ - вектор плотности массовых сил, $\sigma_\Omega$ - объемная плотность электрических, зарядов, $\mathbf{u}$ - вектор перемещений, $\varphi$ и $\phi$ - электрический и магнитный потенциалы.

Граничные условия определяются для механического, электрического и магнитного поля соответственно.

Сформулируем механические граничные условия. Пусть поверхность $S$ состоит из двух частей $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$, так что $S = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, причём $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$.

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} \text{ на } \Gamma_1, \ \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{p} \text{ на } \Gamma_2 \tag{4}$$

Далее сформулируем электрически граничные условия. Пусть поверхность $S$ состоит из двух частей $\Gamma_3$ и $\Gamma_4$, так что $S = \Gamma_3 \cup \Gamma_4$, причём $\Gamma_3 \cap \Gamma_4 = \varnothing$.

$$\varphi = \varphi(\mathbf{x}, t) \text{ на } \Gamma_3, \ \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = -\sigma_0 \text{ на } \Gamma_4 \tag{5}$$

где $\sigma_0$ - плотность поверхностных зарядов. Кроме того, в случае если электроды подключены к внешней цепи, необходимо добавить два условия:

$$\varphi\big|_{S_E} = v, \quad \iint_{S_E} \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} dS = I, \tag{6}$$

где $s_E$ - площадь электрода, $v$ - неизвестный потенциал, который находится из второго условия, $I$ - электрический ток.

Наконец, сформулируем магнитные граничные условия. Пусть поверхность $S$ состоит из двух частей $\Gamma_5$ и $\Gamma_6$, так что $S = \Gamma_5 \cup \Gamma_6$, причём $\Gamma_5 \cap \Gamma_6 = \varnothing$.

$$\phi = \phi(\mathbf{x}, t) \text{ на } \Gamma_5, \ \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = \sigma_1 \text{ на } \Gamma_6 \tag{7}$$

где $\sigma_1$ - плотность поверхностных свободных токов вдоль границы.

Для упругого слоя подложки неизвестными являются компоненты вектора смещений $\mathbf{u}$, для пьезоэлектрического слоя к ним добавляется электрический потенциал $\varphi$, а для пьезомагнитного магнитный потенциал $\phi$, при этом соотношения (2) преобразуются обнулением соответствующих констант.

**Вариационный принцип и гипотезы.** В работе на основе вариационного принципа и гипотез Кирхгофа-Лява для поперечного изгиба пластин о распределении механического, электрического и магнитного полей, получена система уравнений описывающая цилиндрический изгиб биморфа. Общий вид вариационного уравнения для случая установившихся колебаний с частотой $\omega$ плоского тела площадью $S$ имеет вид

$$\iint_S \delta \tilde{H} dS - \rho\omega^2 \iint_S u_i \delta u_i dS + \iint_S \left(p_i \delta u_i + \sigma_0 \delta\varphi + \sigma_1 \delta\phi\right) dS = 0,$$

где $\delta\tilde{H} = \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} - D_i\delta E_i - B_i\delta H_i$ - вариация энтальпии.

В частности для механического поля принимается гипотеза единой нормали, т.к. рассматривается задача, в которой присутствует разность электрического потенциала на электродах (на одном электроде он равен нулю, на другом возникает выходное напряжение которой определяется из условия (6)), то его распределение на первых модах колебаний достаточно точно описывается линейной функцией, но чтобы учесть возможную неоднородность по длине элемента, связанную с влиянием граничных условий на концах биморфа, то его распределение принимается в виде квадратичной функции, магнитный потенциал на внутренней границе пьезомагнитного слой принимается равным нулю, на внешней границе равномерное распределение $\sigma_1$, поэтому распределение магнитного потенциала предполагается квадратичным и неоднородным по длине элемента. Таким образом задача сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно прогиба пластины $u_3(x_1,\omega)$ и функций распределения электрического и магнитного потенциалов в середине пьезоэлектрического и в середине на внешней границе пьезомагнитного слоя.

**Численные результаты.** Рассматриваются собственные колебания пьезоэлемента длина, которого составляет 10 мм, толщины пьезослоев - 5 мм, толщина подложки 2 мм. Материал пьезоэлектрика **PZT-4**, материал пьезомагнитного слоя - **$CoFe_2O_4$ (6 mm)** [5,6], подложка выполнена из стали, клеевые слои не учитываются. На левом конце заданы условия симметрии, правый конец шарнирно закреплен. В таблице 1 представлены первые три собственные частоты резонанса, антирезонанса, распределение вертикального смещения на деформированном состоянии собственной формы колебаний и распределение электрического и магнитного потенциала на не деформированном образце.

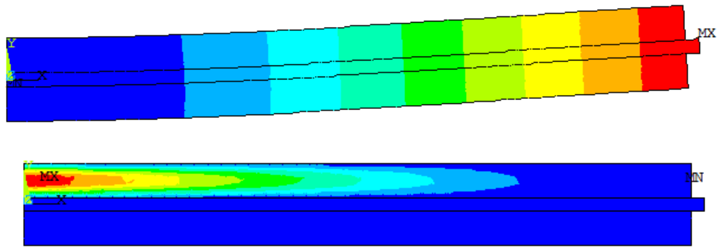
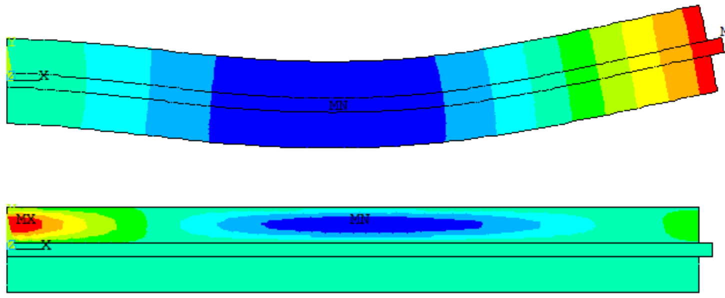
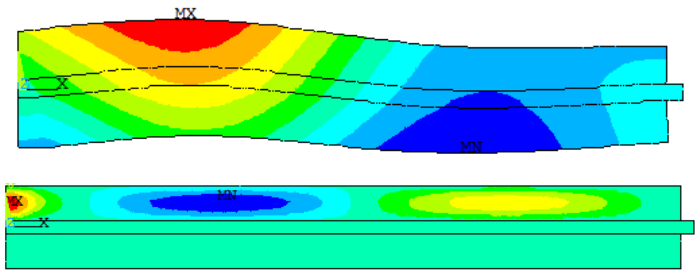
Результаты, представленные в таблице 1 получены в конечно элементном комплексе ANSYS, пьезомагнитный слой моделируется конечным элементом PLANE13, в котором пьезоэлектрические свойства материала заменены на пьезомагнитные, это возможно сделать по двум причинам: пьезослои между собой не контактируют, качественно уравнения для электрического и магнитного потенциалов совпадают. При этом отображение распределения электрического и магнитного потенциала на единой конструкции рисунки в таблице 1, не являются наглядными, т.к. представлены в единой шкале.

Анализ напряженно деформированного состояния, электрического и магнитного полей показывает, что для низших изгибных мод, принятые гипотезы об их распределении адекватно описывают эти состояния. В проведенных численных расчетах исследуется зависимость частот резонанса и антирезонанса, выходного потенциала в зависимости от геометрических параметров и сочетания материалов.

В случае устройства с большим числом чередующихся пьезоэлектрических и пьезомагнитных слоев возможно использования подхода с использованием эффективных свойств пьезомагнитоэлектрического композита [5,6].

Таблица 1

Собственные частоты резонанса и антирезонанса

| | Частота Резонанса, кГц | Частота Антирезонанса, кГц | Распределение вертикального смещения на деформированном состоянии и Распределение электрического и магнитного потенциала на не деформированном образце |
|---|---|---|---|
| 1 | 8.687 | 9.032 |  |
| 2 | 50.821 | 51.478 |  |
| 3 | 120.56 | 124.74 |  |

**Благодарности**

Работа частично (первый автор) поддержана проектной частью госзадания Министерства Образования и науки РФ №. 9.1001.2017/ПЧ и РФФИ (второй автор) грант №. 18-38-00912 мол_а

## ЛИТЕРАТУРА

1. S.N. Shevtsov, A.N. Soloviev, I.A. Parinov, A.V. Cherpakov and V.A. Chebanenko, Piezoelectric Actuators and Generators for Energy Harvesting, Heidelberg, Springer, 2018.
2. Ле Ван Зыонг Конечно-элементное моделирование пьезоэлектрических устройств накопления энергии с усложненными физико – механическими свойствами. // Диссертация на соискание степени кандидата наук. Ростов-на-Дону, Донской государственный технический университет. 2014 г.
3. Duong, L. V., Pham, M. T., Chebanenko, V. A., Solovyev, A. N., Nguyen, C. V. Finite Element Modeling and Experimental Studies of Stack-Type Piezoelectric Energy Harvester //International Journal of Applied Mechanics. 2017, Vol. 9, No. 6, p. 1750084 doi:10.1142/S1758825117500843
4. Kurbatova N.V., Nadolin D.K., Nasedkin A.V., Oganesyan P.A., Soloviev A.N. Finite element approach for composite magneto-piezoelectric materials modeling in ACELAN-COMPOS package

/ Analysis and Modelling of Advanced Structures and Smart Systems. Series «Advanced Structured Materials», Vol. 81, H. Altenbach, E. Carrera, G. Kulikov (Eds.). Springer, Singapore, 2018. Ch.5. P. 69-88.
5. Jin-Yeon Kim. Micromechanical analysis of effective properties of magneto-electro-thermo-elastic multilayer composites // International Journal of Engineering Science 49 (2011) 1001–1018.
6. Challagulla K.S, Georgiades A.V. Micromechanical analysis of magneto-electro-thermo-elastic composite materials with applications to multilayered structures // International Journal of Engineering Science 49 (2011) 85–104.

**Сведения об авторах**

Соловьев Аркадий - д.ф.-м.н., заведующий кафедрой Донской государственный технический университет, ведущий научный сотрудник Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия
+79045041638, +79298014726
E-mail solovievarc@gmail.com
Чебаненко Валерий - к.ф.-м.н., научный сотрудник, Южный научный центр, Ростов-на-Дону, Россия
E-mail valera@chebanenko.ru
Кириллова Евгения - профессор, RheinMain University of Applied Sciences, Wiesbaden, Germany.
E-mail evgenia.kirillova@hs-rm.de
Ле Ван Зыонг - к.т.н., заведующий кафедрой Le Quy Don Technical University, Ha Noi, Vietnam
E-mail leduong145@gmail.com
До Тхань Бинь - аспирант Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Россия
E-mail dothanhbinh@mail.ru

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ПАТОЛОГИЧЕСКОГО РОСТА СТЕНКИ КРУПНОГО СОСУДА ЧЕЛОВЕКА

**Стадник Н.Э.**

В настоящем исследовании обсуждается рост поверхности стенки крупных сосудов человека в условиях патологического процесса. Патологический рост описывается механикой роста, сродни Арутюняну и Манжирову. Сосуд рассматривается как толстостенный трёхслойный сплошной цилиндр. Поверхностный рост происходит на внутренней поверхности цилиндра. Рассчитываются и анализируются поля остаточных напряжений и деформаций, возникающие в процессе роста.

Атеросклероз – патологическое хроническое утолщение стенки артерии за счёт образования атеросклеротической бляшки, вследствие нарушения обменных процессов в организме. Изменения и накопление вещества происходит преимущественно в интиме. Атеросклероз как системная патология всех артерий организма, в конечном итоге может привести к возникновению сердечно-сосудистых событий: ишемическая болезнь сердца (стенокардия, инфаркт миокарда), инсульт, внезапная сердечная смерть. Атеросклероз является основной патологией большинства сердечно-сосудистых заболеваний и представляет собой основную причину преждевременной смерти в современных обществах. В Великобритании ИБС ежегодно вызывает более 105 000 смертей; примерно, 21% смертей среди мужчин и 15% смертей среди женщин. В субклинической стадии заболевание может быть идентифицировано различными методами визуальной диагностики, такими как ультразвуковое исследование, коронарная ангиография, компьютерная томография, магнитно-резонансная томография, ультрасонография B-режима.

Атеросклероз является результатом сложного взаимодействия между липопротеинами, внеклеточным матриксом и клетками стенки сосуда, что приводит к образованию атеросклеротических бляшек. Пусковым моментом для развития атеросклероза сосудов является повреждение (десквамация) сосудистого эндотелия. Сущность образования атеросклеротической бляшки состоит в том, что на начальной стадии липопротеины низкой и очень низкой плотности, а также модифицированные липопротеины откладываются в тонком слое интимы посредством процесса эндотелиального трансцитоза и оттока через стенку сосуда. На первых этапах патологического процесса, клетки макрофаги поглощают липопротеины, постепенно превращаясь в пенистые клетки. Затем, перегруженные модифицированными ЛПНП они разрушаются за счёт некроза и апоптоза, холестерин откладывается в субэндотелии.

Процесс патологического роста стенки сосуда в предлагаемой работе рассматривается в рамках модели поверхностного роста [1-12]. Условие толстостенности позволяет изучить эволюцию остаточных напряжений в стенке сосуда при условии малых деформаций. Обсуждаются особенности поведения основных характеристик напряжённо–деформированного состояния в зависимости от давления внутри сосуда на внутреннюю поверхность цилиндра, возможного натяга новых нарастающих элементов и скорости роста стенки.

При отсутствии начального натяга в присоединяемом слое установлена концентрация напряжений, вызванная влиянием внутреннего давления. При высоких значениях начального натяга в присоединяемом слое также выявлена концентрация напряжений, которая обусловлена существенным влиянием величины натяга в процессе уменьшения радиуса стенки. Таким образом, можно сделать вывод: с одной стороны, при правильно выбранных начальных параметрах процесса наращивания можно добиться минимального влияния внутреннего давления сосуда на деформирование его стенок, с другой стороны, определённый режим наращивания способен вызвать процессы необратимого деформирования и разрушения вместе с наращиваемым слоем «нежелательного материала на стенках сосуда».

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А17-117021310381-8) при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17–01–00712_а, 19-51-60001, 18-51-05012).

## REFERENCE


1. Manzhirov A.V. “Mechanical analysis of an AM fabricated viscoelastic shaft under torsion by rigid disks.” in Lecture Notes in Engineering and Computer Science: Proceedings of the World Congress on Engineering 2017, WCE 2017, 5–7 July 2017, London, U.K., Vol. II. London: IAENG, 2017. PP. 856-860
2. Stadnik N. and Dats E. Continuum mathematical modelling of pathological growth of blood vessels // Journal of Physics: Conference Series, 2018. Vol. 991. PP. 012075
3. Stadnik N.E., Murashkin E.V., Dats E.P. “Residual Stresses Computing in Blood Vessels in virtue of Pathological Growth Processes.” in Lecture Notes in Engineering and Computer Science: Proceedings of The World Congress on Engineering, 2018, 4-6 July, 2018, London, U.K., PP. 618-622.
4. Burenin A.A., Dats E.P., and Murashkin E.V., Formation of the residual stress field under local thermal action // Mechanics of Solids, 2014. Vol. 49, No.2, Pp. 218–224.
5. Dats E., Murashkin E. and Stadnik N. On a multi-physics modelling framework for thermo-elastic-plastic materials processing // Procedia Manufacturing, 2017. Vol. 7, Pp. 427–434.
6. Dats E., Murashkin E. and Stadnik N. On heating of thin circular elastic-plastic plate with the yield stress depending on temperature // Procedia Engineering, 2017. Vol. 173, Pp. 891–896.
7. Dats E.P., Murashkin E.V. and Gupta N.K. On yield criterion choice in thermoelastoplastic problems // Procedia IUTAM, 2017. Vol. 23, Pp. 187–200.
8. Dats E., Murashkin E. and Stadnik N. Piecewise linear yield criteria in the problems of thermoplasticity // IAENG International Journal of Applied Mathematics, 2017. Vol. 47, No. 3, Pp. 261–264
9. Murashkin E. and Dats E. Thermoelastoplastic deformation of a multilayer ball // Mechanics of Solids, 2017. Vol. 52, No. 5, Pp. 495–500.
10. Murashkin E., Dats E. and Klindukhov V. Numerical analysis of the elastic-plastic boundaries in the thermal stresses theory frameworks // Journal of Physics: Conference Series, 2017. Vol. 937, No.1, Pp. 012030
11. Murashkin E. and Dats E. Coupled thermal stresses analysis in the composite elastic-plastic cylinder // Journal of Physics: Conference Series, 2018. Vol. 991, No.1, Pp. 012060.


**<u>Information about authors:</u>**


**Никита Эдуардович Стадник** – младший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия. **E-mail:** nik-122@mail.ru

# СКОЛЬЖЕНИЕ ИНДЕНТОРА ПО ВЯЗКОУПРУГОМУ ТЕЛУ С ПОКРЫТИЕМ: МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ

**Торская Е.В., Степанов Ф.И., Цуканов И.Ю., Шкалей И.В.**

Рассматривается скольжение гладкого индентора по границе вязкоупругого полупространства с жёстким покрытием. Предложена постановка квазистатической контактной задачи и разработан численно-аналитический метод решения с использованием метода граничных элементов и итерационной процедуры. Проведён анализ зависимости распределения контактного давления, диссипативных потерь, внутренних напряжений от скорости скольжения, толщины покрытия и величины коэффициента Пуассона. Описана методика и приведены результаты измерения коэффициента трения полиуретановых материалов, обладающих реологическими свойствами, на которые нанесены более жёсткие углеродные покрытия. Проведено качественное сравнение результатов расчётов и экспериментальных данных.

**1. Введение.** Покрытие вязкоупругих материалов различного типа, используемых в условиях фрикционного контакта, как правило, имеет две цели – уменьшение адгезионной составляющей силы трения и увеличение износостойкости сопряжения. Вязкоупругие материалы, такие как резины, некоторые другие полимеры, являются податливыми, и наносимые покрытия оказываются существенно более жёсткими.

Существует ряд экспериментальных исследований фрикционного взаимодействия жёстких покрытий на вязкоупругом основании с различными контр-телами, например, [1]. При этом, в области моделирования соответствующих работ найти не удалось. Более распространёнными являются модели вязкоупругого покрытия на жёстком основании [2-5].

Целью данной работы является моделирование фрикционного взаимодействия относительно жёстких покрытий на вязкоупругом основании и сравнение полученных результатов с экспериментальными данными. В области моделирования частично использованы модели материалов, методы и подходы, разработанные в [4-7].

**2**. **Постановка и решение контактной задачи.** Рассмотрим скольжение жёсткого гладкого индентора по границе слоя толщиной $h$, скреплённого с полупространством. Индентор скользит с постоянной скоростью $V$ вдоль оси O$x$; и он нагружен вертикальной силой $Q$ (рис. 1). Начало системы координат ($x$, $y$, $z$) размещено в центре индентора, ось O$z$ направлена нормально к ненагружённой поверхности слоя. Начало системы координат находится в точке начального контакта слой-индентор.

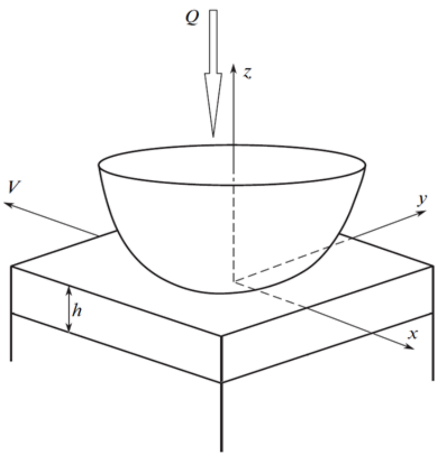



Рис. 1. Схема контакта.

На поверхности рассматриваются следующие граничные условия ($z$=0):

$$\begin{aligned} & w(x,y) = f(x,y) + D, \quad (x,y) \in \Omega \\ & \sigma_z = 0, \quad (x,y) \notin \Omega \\ & \tau_{xz} = 0, \; \tau_{yz} = 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

Здесь $\Omega$ – область контакта, $w(x,y)$ – нормальные смещения поверхности, $D$ – внедрение индентора, $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ – нормальные и тангенциальные напряжения. Форма индентора описывается гладкой функцией $f(x,y)$.

Неизвестными являются распределение контактного давления $p(x,y) = -\sigma_z(x,y)$ и область контакта. Используется следующее уравнение равновесия:

$$Q = \iint\limits_{\Omega} p(x,y)dxdy \tag{2}$$

Также используется условие равенства давления нулю на границе области контакта.
На границе раздела слоя и полупространства выполняются условия полного сцепления:

$$w^{(1)} = w^{(2)},\ u_x^{(1)} = u_x^{(2)},\ u_y^{(1)} = u_y^{(2)} \tag{3}$$

Используется модель вязкоупругого полупространства, сцеплённого с пластиной, обладающей изгибной жёсткостью. Механические свойства полупространства описываются следующими соотношениями [7]:

$$\gamma(t) = \frac{1}{G}\tau(t) + \frac{1}{G}\int\limits_{-\infty}^{t}\tau(t)K(t-\tau)d\tau;$$

$$e_x(t) = \frac{1}{E}\left[\sigma_x(t) - \nu(\sigma_y(t)+\sigma_z(\mathrm{t}))\right] + \frac{1}{E}\int\limits_{-\infty}^{t}\left[\sigma_x(t) - \nu(\sigma_y(t)+\sigma_z(\mathrm{t}))\right]K(t-\tau)d\tau;$$

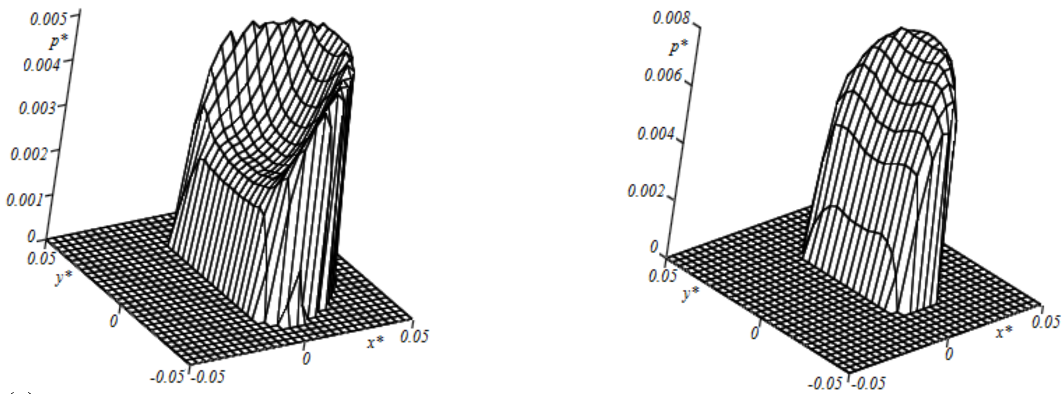
$$e_y(t) = \frac{1}{E}\left[\sigma_y(t) - \nu(\sigma_x(t)+\sigma_z(\mathrm{t}))\right] + \frac{1}{E}\int\limits_{-\infty}^{t}\left[\sigma_y(t) - \nu(\sigma_x(t)+\sigma_z(\mathrm{t}))\right]K(t-\tau)d\tau; \tag{4}$$

$$e_z(t) = \frac{1}{E}\left[\sigma_z(t) - \nu(\sigma_y(t)+\sigma_x(\mathrm{t}))\right] + \frac{1}{E}\int\limits_{-\infty}^{t}\left[\sigma_z(t) - \nu(\sigma_y(t)+\sigma_x(\mathrm{t}))\right]K(t-\tau)d\tau;$$

$$K(t) = k\exp\left(-\frac{t}{\omega}\right)$$

Здесь $\nu$ – коэффициент Пуассона, $E$ и $G$ – модуль Юнга и модуль сдвига. Кривая крипа описывается экспоненциальной функцией, зависящей от времени релаксации $1/k$ и запаздывания $\omega$. Задача решается с использованием метода граничных элементов и итерационной процедуры. Использование двойных интегральных преобразований Фурье позволяет получить аналитические соотношения, к которым затем применяется обратное интегральное преобразование для расчёта коэффициентов влияния, используемых в методе граничных элементов [5].

**3. Результаты расчетов.** В качестве индентора для расчётов использовалась сфера радиуса $R$. Для анализа использовались следующие безразмерные параметры: координаты $(x^*, y^*) = (x, y)/R$, скорость скольжения $V^* = V\omega/R = V'\omega \cdot a/R$, толщина пластины $h^* = h/R$, нагрузка $Q' = Q/R^2G_l$ (здесь $G_l$ – длительный модуль сдвига) и контактное давление $p^*(x,y) = p(x,y)/G_l$.




(a) (b)

Рис. 2. Распределение давления: c=6, $\nu$=0.4, $Q'$=2.0, $h^*$=0.0133, $V^*$=0.05 (a), $V^*$=0.2 (b).

На рис.2 представлено распределение контактного давления, полученное для двух различных скоростей скольжения. Оба рисунка демонстрируют влияние реологии подложки, что приводит к существенной асимметрии площади контакта и распределения давления. На рис.3 показано распределение контактного давления при двух разных скоростях скольжения и четырёх значениях толщины слоя. Здесь уменьшение давления в центре зоны контакта можно наблюдать более явно. Стоит отметить, что это явление происходит при относительно небольших значениях толщины слоя, в то время как при более толстых слоях распределение давления имеет тенденцию быть ближе к герцевскому, что является предсказуемым.

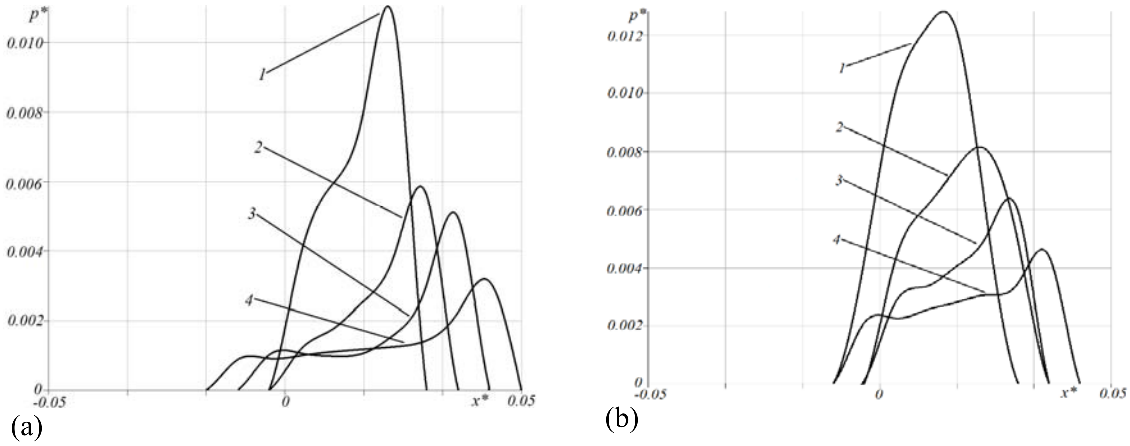



Рис.3. Распределение контактного давления при разных значениях скорости скольжения и толщины пластины: c=6, $\nu$=0.4, $Q'$=2.0, $V^*$=0.05 (a), $V^*$=0.2 (b), $h^*$=0.05 (кривая 1), $h^*$=0.02 (кривая 2), $h^*$=0.0133 (кривая 3), $h^*$=0.0066 (кривая 4).

На рис.4 приведены зависимости коэффициента трения, возникающего за счёт несовершенной упругости [6], от скорости скольжения для различных значений толщины покрытия. Так же, как и в случае вязкоупругого полупространства, этим зависимостям свойственна немонотонность. Максимальные значения зависят от толщины покрытия. В целом, просматривается закономерность, что чем толще покрытие, тем меньше проявляются реологические свойства подложки.

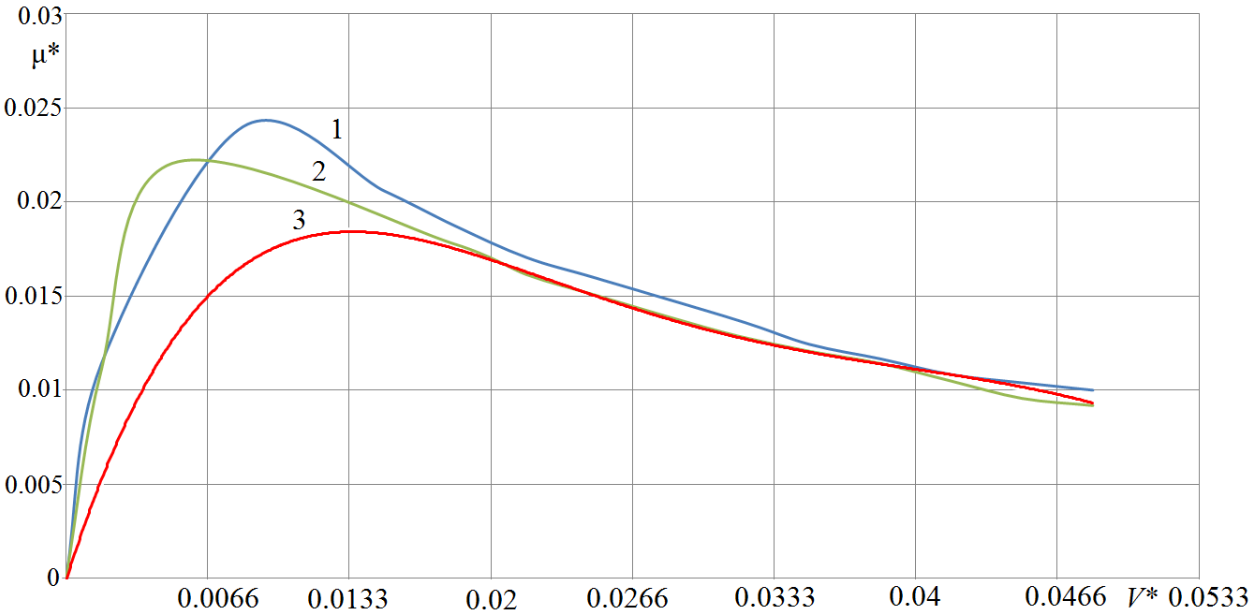



Рис.4. Зависимость коэффициента трения от скорости скольжения: c=5, $\nu_1$=0.3, $\nu_1$=0.4, $Q'$=1.0, $E_1/E_2$=10, $h^*$=0.0016 (кривая 1), $h^*$=0.0033 (кривая 2), $h^*$=0.0066 (кривая 3)

**4. Материалы и методика проведения эксперимента.** В качестве образцов был использован литьевой полиуретан. Всего было изготовлено 4 образца. На три образца, изготовленных из литьевого полиуретана, были нанесены относительно жёсткие углеродные покрытия (напылением), отличающиеся флюенсом потока ионов. Следует отметить, что чем больше флюенс, тем толще покрытие. Точную толщину покрытий определить не удалось. Размеры образцов (ДхШхВ) составляли 20х20х3 мм. Образцы испытывались на машине трения UMT (Cetr, США). Вид рабочей зоны машины трения показан на рис.5.

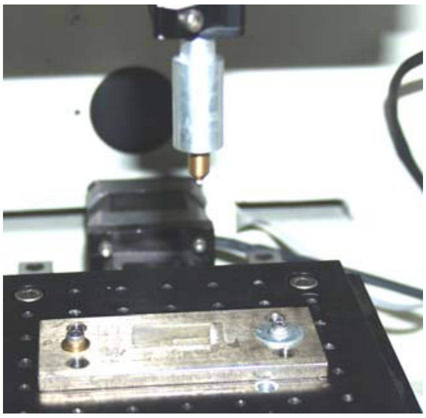


Рис.5. Рабочая зона машины трения для проведения экспериментов

Образец-держатель, представляющий собой прямоугольную стальную пластину, устанавливался на рабочий стол машины трения с помощью винтов. Образец прикреплялся к образцу-держателю с помощью двухсторонней липкой ленты. В качестве контртела использовался корундовый шарик диаметром 1.5 мм, закреплённый на специальном держателе с помощью резьбового соединения. Держатель с контртелом устанавливался в инструментальную головку машины трения, снабжённую датчиками нормальной и касательной сил. Для уменьшения негативного влияния адгезионной составляющей силы трения поверхность образца покрывалась тонким слоем талька. Скольжение контртела осуществлялось в одном направлении; путь трения составлял 15 мм. Нагрузка для всех испытуемых образцов была одинаковой и составляла 50 мН. Для исследования влияния скорости скольжения на деформационную составляющую коэффициента трения были выбраны два значения скорости: 0.1 и 0.5 мм/с. Графики зависимостей коэффициента трения, определяемого как отношение касательной силы к нормальной, от пройденного индентором расстояния показали, что на выбранном пути трения и скоростях скольжения процесс выходит на установившийся режим. В качестве результата испытаний использовалось среднее значение коэффициента трения на участке пути трения, характеризуемом наличием установившегося режима. Для каждого значения скорости скольжения было проведено три опыта.

**5. Результаты экспериментов и их обсуждение.** Результаты испытаний приведены в нижеприведённой таблице

| Материал образца | Флюенс при напылении, ион·см$^{-2}$ | v, мм/с | Коэффициент трения *f* | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | Опыт 1 | Опыт 2 | Опыт 3 | Ср. знач. |
| Полиуретан литьевой | без напыления | 0.1 | 0.21 | 0.2 | 0.24 | 0.22 |
| | | 0.5 | 0.22 | 0.24 | 0.24 | 0.23 |
| | $1·10^{15}$ | 0.1 | 0.21 | 0.2 | 0.24 | 0.22 |
| | | 0.5 | 0.18 | 0.2 | 0.2 | 0.19 |
| | $5·10^{15}$ | 0.1 | 0.14 | 0.17 | 0.17 | 0.16 |
| | | 0.5 | 0.17 | 0.13 | 0.13 | 0.14 |
| | $1·10^{16}$ | 0.1 | 0.13 | 0.15 | 0.15 | 0.14 |
| | | 0.5 | 0.21 | 0.22 | 0.21 | 0.21 |

Результаты экспериментов показали, что данные различных опытов хорошо согласуются (средняя ошибка не превышает 10 %). Образцы с нанесённым покрытием показали значительно меньший коэффициент трения при скоростях скольжения 0.1 и 0.5 мм/с, чем образцы без покрытия. С ростом флюенса при напылении от $1·10^{15}$ до $5·10^{15}$ ион·см$^{-2}$ коэффициент трения снижается при v = 0.1 и 0.5 мм/с; при дальнейшем увеличении флюенса до $1\cdot10^{16}$ ион·см$^{-2}$ значительных изменений значений коэффициента трения не происходило.

Таким образом, наблюдается качественное совпадение влияния толщины относительно жёсткого покрытия на коэффициент трения, возникающий за счёт диссипативных потерь в вязкоупругом материале.

**ЛИТЕРАТУРА**


1. Bai C., Liang A., Cao Z., Qiang L., Zhang J. Achieving a high adhesion and excellent wear resistance diamond-like carbon film coated on NBR rubber by Ar plasma pretreatment. Diamond and Related Materials, 89, 2018.
2. Александров В.М., Марк А.В. квазистатическая периодическая контактная задача для вязкоупругих слоя, цилиндра и пространства с цилиндрической полостью. //Прикладная механика и техническая физика, т.50 (5), 2009.
3. Menga N., Afferrante L., Carbone G. Effect of thickness and boundary conditions on the behavior of viscoelastic layers in sliding contact with wavy profiles. //J Mech Phys Solids, 95, 2016.
4. Степанов Ф.И., Торская Е.В. Моделирование скольжения индентора по вязкоупругому слою, сцеплённому с жёстким основанием. //Известия РАН. Механика твердого тела. 2018. № 1.
5. Torskaya E.V., Stepanov F.I. Effect of surface layers in sliding contact of viscoelastic solids (3-D model of material). //Front. Mech. Eng., 5, 26, 2019
6. Александров В.М., Горячева И.Г., Торская Е.В. Пространственная задача о движении гладкого штампа по вязкоупругому полупространству. //Доклады Академии наук РАН. 2010. Т.430 (4).
7. Горячева И.Г., Степанов Ф.И., Торская Е.В. Скольжение гладкого индентора при наличии трения по вязкоупругому полупространству. //Прикладная математика и механика. 2015. Т.79 (6).


**Сведения об авторах:**


**Торская Е.В.** – проф. РАН, в.н.с. Института проблем механики им. Ишлинского РАН +74954342090. **E-mail:** torskaya@mail.ru

**Степанов Ф.И.** – к.ф.м.н., н.с. Института проблем механики им. Ишлинского РАН

**Цуканов И.Ю.** – к.ф.м.н., н.с. Института проблем механики им. Ишлинского РАН

**Шкалей И.В.** – инженер Института проблем механики им. Ишлинского РАН

# О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА МАТРИЧНОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОБ ИНТЕРФЕЙСНЫХ ТРЕЩИНАХ

**Устинов К.Б.**

Рассмотрен ряд задач о полубесконечной трещине, проходящей по границе раздела фаз между двумя полосами из различного материала. Путём применения двустороннего преобразования Лапласа задачи сведены к системе двух уравнений, соответствующих матричной задаче Римана, или скалярной задаче Римана, асимптотики решения которых получены в виде однократных интегралов.

## Введение

Задачам, связанным с появлением и ростом трещин по границе материалов уделяется серьёзное внимание в механике разрушения, связанное, в первую очередь, с их значением для приложений, среди которых отметим проблемы расслоения многослойных структур и отслоения покрытий в широком диапазоне масштабов.

Среди работ, посвящённых интерфейсным трещинам, особенно следует отметить фундаментальные работы [1, 2], в которых впервые было получено распределение напряжений вблизи вершины и описан тип сингулярности [1], и получена связь между коэффициентами интенсивности напряжений (КИН) и скоростью высвобождения энергии (СВЭ) – аналог формулы Ирвина [2]. Следует также отметить работу [3], где было показано, что характер распределения полей напряжений для широкого класса задач в двумерном изотропном случае, в том числе и для задач об интерфейсных трещинах, определяется лишь двумя комбинациями упругих параметров, названных впоследствии параметрами Дундурса.

Еще одним фактором, усложняющим анализ поведения интерфейсных трещин, является осцилляция напряжений и смещений вблизи вершины трещины [1]. Исследованию математических аспектов данного факта и путей преодоления данной «нефизичности» было уделено достаточное внимание. Однако, что наличие осцилляций в решении, равно как и наличие сингулярности напряжений в решении о трещине в однородной упругой среде, вызвано математической постановкой задачи, в частности, предположениями о линейной упругости для любых сколь угодно больших напряжений, континуальности на сколь угодно малых масштабах, нулевому радиусу закругления в вершине трещины. В действительности, все эти условия выполняются лишь приближённо и лишь в определённых пределах. Поэтому и полученные решения справедливы лишь для тех масштабов и в той степени, для которых справедливы указанные условия. Решения задач с подобными особенностями можно рассматривать как внешние асимптотики для внутренних задач, решения которых и дадут необходимые критерии разрушения. Однако, для любой подобной внутренней задачи все внешние (граничные) условия будут определяться лишь коэффициентом при сингулярности для внешней задачи, который и будет выступать в качестве критической величины.

Исследованиями параметров разрушения (КИН и СВЭ) не исчерпывается круг задач об интерфейсных трещинах. При достаточно протяжённых расслоениях, когда размеры трещин в плане становятся много больше толщин слоёв конструкции, для описания отслоившихся участков становится притягательным использования теории пластин (либо, для криволинейных участков, оболочек) [4–7]. Если основание достаточно жёсткое, пластина, моделирующая отслоение обычно рассматривается как жёстко защемлённая [4], что позволяет достаточно легко моделировать эволюцию отслоения [5]. Более точные решения получены с использованием в качестве граничных условий типа упругой заделки, когда кинематические величины в месте заделки (продольная и поперечная компонента смещения и угол поворота) рассматриваются как зависящие от силовых параметров, действующих в данном сечении – продольной и поперечной (симметричной и несимметричной) силы и изгибающего момента посредством матрицы податливости $3\times4$ [15]. Ранее [6, 8–14] рассматривались аналогичные граничные условия более простого вида (с матрицей 2x2, с учётом только влияния силовых факторов на поворот и др.). Для описания деформирования отслоившихся участков в зависимости от геометрии используют системы уравнений Бернулли-Эйлера (в двумерном случае), уравнений Софи-Жермен (в трёхмерном). В случае значительного изгиба и учета действия продольных сил применяют теорию изгиба фон Кармана. При наличии кривизны поверхности для уравнения изгиба используются уравнения Муштари-Доннела-Власова.

Компоненты матрицы податливости не могут быть рассчитаны, исходя из элементарных соображений. Для их вычисления может быть использован МКЭ [6, 10–13], численные методы решения интегральных уравнений [9], асимптотические аналитические методы [8, 15].

**Применение интегральных преобразований и сведение к матричной задаче Римана как метод решения задач о расслоении по границе раздела**

Одним из эффективных методов решения задач теории упругости об интерфейсных трещинах, в частности, о расслоении многослойных структур и отслоении покрытий, является сведение задачи к скалярной либо матричной задаче Римана [16, 17, 8, 15, 18].

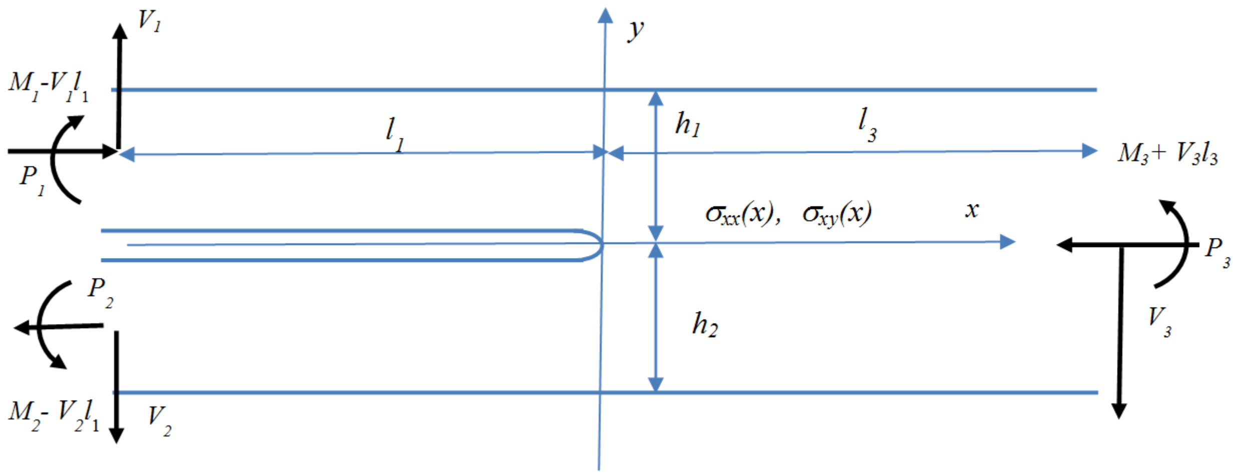



Рис. 1. Геометрия и система приложенных усилий.

Рассмотрим упругую полосу $-h_2 < y < h_1$ составленную из двух полос $-h_2 < y < 0$ и $0 < y < h_1$, имеющих различные упругие свойства, разделённых полубесконечной трещиной $y = 0$, $x < 0$ (Рис.1). Случай $h_2 \to \infty$ соответствует полуплоскости. Предполагается, что удовлетворяются условия плоской деформации (или плоского напряжения), поэтому механическое поведение определяется системой двумерных уравнений упругости

$$\sigma_{ij,i} = 0\,,\ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right),\ \varepsilon_{22,11} + \varepsilon_{11,22} = 2\varepsilon_{12,12}\,,\ \varepsilon_{ij} = s_{ijkl}\sigma_{kl}\,,\ i = 1,2 \tag{1}$$

Здесь $\sigma_{ij}$ – компоненты тензора напряжений; $\varepsilon_{ij}$ – компоненты тензора деформаций; $u_i$ – компоненты вектора смещения; $s_{ijkl}$ – компоненты тензора податливости, обратного к тензору упругости. Границы $y = h_1$, $y = -h_2$ и $y = 0$, $x < 0$ предполагаются свободными от напряжений

$$\sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0, \quad \text{для } y = \pm h, \text{ и для } y = 0,\ x < 0 \tag{2}$$

Предполагается, что нагрузка приложена на бесконечности в виде моментов, $M_i$, продольных и поперечных сил, $P_i, V_i, \mathrm{i} = 1 \div 3$ (Рис. 2). Для компенсации моментов, создаваемых поперечными силами, накладываются дополнительные моменты $V_i l_i$ $\left(l \to \infty\right)$.

Из девяти величин лишь шесть являются независимыми из-за необходимости соблюдения глобального равновесия:

$$P_3 = P_1 - P_2\,,\ M_3 = M_1 - M_2 + \frac{P_1 h_1 + P_2 h_2}{2} + P_3\Delta_h\,,\ V_3 = V_1 - V_2\,,\ \Delta_h = h_1\frac{1 - \Sigma\eta^2}{2\eta\left(1 + \Sigma\eta\right)} \tag{3}$$

Здесь $\eta$ и $\Sigma$ – отношения толщин слоёв и упругих констант

$$\eta = h_1 / h_2, \quad \Sigma = s_{1111}^{(2)} / s_{1111}^{(1)} \tag{4}$$

Отметим, что существуют две комбинации нагрузок, не оказывающие влияние на напряжённое состояние [5], так что напряжённое состояние вблизи вышины трещины полностью определяется четырьмя величинами, которые, имея в виду используемый метод, удобно выбрать в виде интегральных величин [15]:

$$M=-\int_0^\infty x\sigma_{yy}(x,0)\,dx,\ N=\int_0^\infty \sigma_{yy}(x,0)\,dx,\ T=\int_0^\infty \sigma_{xy}(x,0)\,dx,\ \tau_\infty=\lim_{x\to\infty}\sigma_{xy}(x,0) \tag{5}$$

связанных с величинами, изображёнными на рисунке как

$$\begin{gathered}
M=\frac{M_1\left(3\eta^2\Sigma+4\eta\Sigma+1\right)+M_2\eta^2\Sigma\left(3+4\eta+\eta^2\Sigma\right)}{\Delta}+\frac{\left(P_1+\eta\Sigma P_2\right)\left(1-\eta^2\Sigma\right)h}{2\Delta}\\
T=\frac{\left(P_1+\eta\Sigma P_2\right)\left(\eta^3\Sigma+1\right)}{\Delta}+\frac{\left(M_2-M_1\right)6\eta^2(\eta+1)\Sigma}{h\Delta}\\
N=\frac{V_1+V_2}{2}+\frac{V_2-V_1}{2}\frac{\left(\Sigma^2\eta^4+4\Sigma\eta^3-4\Sigma\eta-1\right)}{\Delta},\ \tau_\infty=\frac{6\Sigma\eta^2(\eta+1)}{h\Delta}\left(V_2-V_1\right)\\
\Delta=\eta^4\Sigma^2+4\eta^3\Sigma+6\eta^2\Sigma+4\eta\Sigma+1
\end{gathered} \tag{6}$$

Для каждой полуполосы строится решение, связывающее производные по оси $x$ от смещений и напряжений на внутренней поверхности. Частным случаем будет являться решение для полуплоскости. Данные соотношения могут быть записаны в виде системы интегральных уравнений, а после применения интегрального преобразования (Фурье [18], либо Лапласа [8, 15]) в виде системы обыкновенных уравнений. Складывая выражения для образов производных смещений, получаем искомую систему, соответствующую матричной задаче Римана (в случае применения преобразования Лапласа – на мнимой оси, Фурье – на действительной).

$$\begin{gathered}
\mathbf{F}_-(p)=\mathbf{K}(p)\mathbf{F}_+(p)\\
\mathbf{F}_-(p)=\frac{E^{(1)}}{2(1+\Sigma)}\int_{-\infty}^0\frac{\partial}{\partial x}\begin{Bmatrix}v^{(1)}(x,0)-v^{(2)}(x,0)\\ u^{(1)}(x,0)-u^{(2)}(x,0)\end{Bmatrix}e^{-px}dx,\ \mathbf{F}_+(p)=\int_0^\infty\begin{Bmatrix}\sigma_{yy}(x,0)\\ \sigma_{xy}(x,0)\end{Bmatrix}e^{-px}dx
\end{gathered} \tag{7}$$

Здесь матрицы-функции, обозначенные индексами $\pm$, аналитичны в левой и правой частях комплексной плоскости. Матрица-функция $\mathbf{K}(p)$ – коэффициент задачи – является заданной для каждой конфигурации. Для решения необходимо ограничить возможность поведения искомых функций в опорных точках, что делается из физических соображений

$$\mathbf{F}_+(p)=\begin{Bmatrix}N+Mp+o(p)\\ \tau_\infty p^{-1}+T+o(1)\end{Bmatrix},\ \operatorname{Re}p\to 0+,\quad \mathbf{F}_+(p)=O\left(p^{1-\nu}\right),\ \nu<1,\ \operatorname{Re}p\to\infty \tag{8}$$

**Решение матричной задачи Римана**

Основная сложность решения состоит в факторизации коэффициента $\mathbf{K}(p)$, т.е. его представления в виде произведения матриц-функций, аналитических в левой и правой частях комплексной плоскости. В настоящее время общее решение данной задачи неизвестно. В рассматриваемых задачах в ряде частных случаев вид матрицы $\mathbf{K}(p)$ позволяет применить метод Храпкова [16], либо свести коэффициент задачи к диагональному виду. В частности, были получены решения для следующих задач:

– Полоса на полуплоскости при равенстве нулю второго параметра упругого несоответствия Дундурса.

– Две полосы одинаковой толщины при равенстве нулю второго параметра упругого несоответствия Дундурса.

– Ортотропная полоса с центральной полубесконечной трещиной.

Для первой указанной задачи получено три независимых решения, соответствующие изгибающему моменту и продольной и поперечной силе, приложенных к отслаивающему участку полосы. Для двух других задач получено четыре независимых решения, соответствующие изгибающим моментам, парам продольной и поперечной сил, приложенных к отслаивающимся участкам, а также несимметрично приложенным поперечным силам.

Данный метод решения удобен для получения интересующих величин -КИН и коэффициентов податливости. Асимптотики Лаплас-образов найденных матриц-функций на бесконечности соответствуют поведению оригиналов в нуле, что позволяет найти КИН. Так для задачи о двух слоях одинаковой толщины

$$\begin{Bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{Bmatrix} = \mathbf{k_M} M + \left( \mathbf{k_T} + \frac{\alpha}{2} \mathbf{k_M} \right) T + \mathbf{k_N} N + \mathbf{k_A} \tau_\infty \tag{9}$$

$$\begin{gathered} \mathbf{k_M} = \sqrt{12} \begin{pmatrix} \cos\omega \\ \sin\omega \end{pmatrix}, \ \mathbf{k_T} = \sqrt{4-3\alpha^2} \begin{pmatrix} -\sin\omega \\ \cos\omega \end{pmatrix}, \ \mathbf{k_N} = \delta \mathbf{k_M} - \frac{\alpha\sqrt{3}}{\sqrt{4-3\alpha^2}} \mathbf{k_T} \\ \mathbf{k_A} = \frac{\alpha}{2} \left( \delta - \frac{\sqrt{4-3\alpha^2}}{\sqrt{12}} \right) \mathbf{k_M} + \left( \delta_p - \frac{\sqrt{3}\alpha^2}{2\sqrt{4-3\alpha^2}} \right) \mathbf{k_T} \end{gathered} \tag{10}$$

Асимптотики Лаплас-образов найденных матриц-функций в нуле соответствуют смещениям берегов трещины вдали от вершины [15], их нахождение позволяет извлечь искомые коэффициенты матрицы податливости. Для кинематических величин, соответствующих относительным смещением внутренних берегов, после исправления опечаток [15] коэффициенты матрицы податливости имеют вид (для той же задачи)

$$\begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v' h \\ \Delta v \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{E^{(1)}} + \frac{1}{E^{(2)}} \right) \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ Mh^{-1} \\ N \\ \tau_\infty \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$\begin{gathered} g_{11} = \frac{4-3\alpha^2}{2}\delta_p + \frac{3\alpha^2}{2}\delta - \frac{\sqrt{12-9\alpha^2}}{2}\alpha^2, \ g_{12} = \alpha\left( 3\delta - \frac{\sqrt{12-9\alpha^2}}{2} \right), \\ g_{13} = \frac{\alpha}{8}\left( \sqrt{4-3\alpha^2} - \sqrt{12}\delta \right)^2 - \frac{1}{5}\alpha, \\ g_{14} = \frac{1}{15} + \delta_p^2 + \frac{\alpha^2}{4}\left( 1 + 3\delta^2 - 3\delta_p^2 \right) - \frac{\alpha^2}{4}\sqrt{12-9\alpha^2}\left( \delta + \delta_p \right) \\ g_{21} = \left( \frac{\sqrt{12-9\alpha^2}}{2} - 3\delta \right)\alpha, \ g_{22} = -6\delta, \ -g_{23} = \frac{3}{5} + 3\delta^2 + \frac{3}{4}\alpha^2, \\ g_{24} = \alpha\left( \frac{7}{10} - \frac{9}{8}\alpha^2 - \frac{3}{2}\delta^2 + \frac{\sqrt{12-9\alpha^2}}{2}\delta_m \right), \\ g_{31} = \frac{\alpha}{8}\left( \sqrt{4-3\alpha^2} - \sqrt{12}\delta \right)^2 + \frac{1}{5}\alpha, \ g_{32} = -\frac{3}{5} + 3\delta^2 + \frac{3}{4}\alpha^2, \\ g_{33} = \delta_V = 2\delta^3 - \frac{24\zeta(3)}{\pi^3} + \frac{3\alpha^2}{2}\left( 2\delta - \delta_p \right) - \left( J_3 + \beta_3 \right), \\ g_{34} = \alpha\delta^3 - \frac{12\alpha\zeta(3)}{\pi^3} + \frac{3\alpha^3}{4}\left( 2\delta - \delta_p \right) + \frac{\alpha^3 - 4\alpha\delta\delta_p}{8}\sqrt{12-9\alpha^2} - \frac{\alpha}{2}\left( J_3 + \beta_3 \right) \end{gathered} \tag{12}$$

$$2A(s) = \tanh s \left(\tanh s + s\sqrt{1+\alpha^2 s^2} \cosh^{-2} s\right) / \left(1 - s^2 \sinh^{-2} s\right)$$

$$2B(s) = \left(1 - s\sqrt{1+\alpha^2 s^2} \sinh^{-1} \cosh^{-1} s\right) / \left(1 - s^2 \sinh^{-2} s\right)$$

$$J_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{d}{ds}\left\{\ln\sqrt{A(s)B(s)}\right\}\frac{ds}{s},\ \beta_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{d}{ds}\left\{\left(1+\alpha^2 s^2\right)^{-1/2} \ln\left[\sqrt{\frac{A(s)}{B(s)}}\frac{\alpha s \operatorname{cth} s}{\sqrt{1+\alpha^2 s^2}+1}\right]\right\}\frac{ds}{s} \tag{13}$$

$$J_3 = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{d^3}{ds^3}\left\{\ln\sqrt{A(s)B(s)}\right\}\frac{ds}{s},\ \beta_3 = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{d^3}{ds^3}\left\{\left(1+\alpha^2 s^2\right)^{-1/2} \ln\left[\sqrt{\frac{A(s)}{B(s)}}\frac{\alpha s \coth s}{\sqrt{1+\alpha^2 s^2}+1}\right]\right\}\frac{ds}{s}$$

$$\delta = \frac{4\log 2}{\pi} + J_1 + \beta_1 \quad \delta_p = \frac{4\log 2}{\pi} + J_1 - \beta_1,\ \zeta(3) \approx 1.2021$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы Президиума РАН №7.

## REFERENCE

1. Williams M.L. The stresses around a fault or crack in dissimilar media. Bull. Seismol. Soc. Am., vol. 49, 199–204, 1959.
2. Salganik R.L. The brittle fracture of cemented bodies. J. Appl. Math. Mech, 27, 1468–1478, 1963.
3. Dundurs J. Discussion: Edge-bonded dissimilar orthogonal elastic wedges under normal and shear loading. J. Appl. Mech. Trans. ASME, vol. 36, 650–651, 1969.
4. Kachanov L.M. Delamination Buckling of Composite Materials. Kluwer, 1988. 95 p
5. Suo Z., Hutchinson J.W. Interface crack between two elastic layers. Int. J. Fract., 43, 1–18, 1990.
6. Cotterell B., Chen Z. Buckling and cracking of thin film on compliant substrates under compression. Int. J. Fracture., vol. 104 (2), 169–179, 2000.
7. Hutchinson J.W. Delamination of compressed films on curved substrates. J. Mech. Phys. Solids., vol. 50, 1847–1864, 2001.
8. Ustinov K. On separation of a layer from the half-plane: elastic fxation conditions for a plate equivalent to the layer. Mech. Solid. 50 (1), 62–80, 2015.
9. Yu H.-H., Hutchinson J.W. Influence of substrate compliance on buckling delamination of thin films. Int. J. Fract., vol. 113, 39-55, 2002.
10. Andrews M.G., Massabò R. The effects of shear and near tip deformations on energy release rate and mode mixity of edge-cracked orthotropic layers. Eng. Fract. Mech., vol. 74, 2700–2720, 2007.
11. Barbieri L., Massabò R., Berggreen C. The effects of shear and near tip deformations on interface fracture of symmetric sandwich beams. Eng. Fract. Mech., vol. 201, 298–321, 2018.
12. Li S., Wang J., Thouless M.D. The effects of shear on delamination in layered materials. J. Mech. Phys. Solids, vol. 52, 193–214, 2004.
13. Thouless M. The effects of transverse shear on the delamination of edge-notch flexure and 3-point bend geometries. Compos. B Eng. vol. 40 (4), 305–312, 2009.
14. Ustinov K.B., Dyskin A.V., Germanovich L.N. Asymptotic Analysis of Extensive Crack Growth Parallel to Free Boundary. In 3rd Int. Conf. Localized Damage 94, Southampton: Comput. Mech. Publ., 623–630, 1994.
15. Ustinov, K. On semi-infinite interface crack in bi-material elastic layer. Eur. J. Mech. A Solids, vol. 75, 56–69, 2019.
16. Zlatin A.N., Khrapkov A.A. Semi-infinite crack parallel to the boundary of an elastic half-plane. Sov. Phys. Dokl., 31, 1009, 1986.
17. Khrapkov A. Winer-Hopf Method in Mixed Elasticity Theory Problems. Ed. B.E. Vedeneev, VNIIG Publishing House, 2001.
18. Salganik R.L., Ustinov K.B. Deformation problem for an elastically fixed plate modeling a coating partially delaminated from the substrate (Plane Strain). Mech. Solids, 47, 415–425, 2012.

**Information about author:**

**Ustinov Konstantin Borisovich** – leading research scientist, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, +7(926)164-94-09; **E-mail:** ustinov@ipmnet.ru

# АНАЛИЗ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В СОСТАВНОМ РАСТЯГИВАЕМОМ СТЕРЖНЕ, НАХОДЯЩЕГОСЯ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ И ВЛИЯНИЯ АГРЕССИВНОЙ СРЕДЫ

**Фомин Л.В., Фомина Ю.В.**

Исследовано напряжённо-деформированное состояние составного растягиваемого стержня при ползучести в условиях воздействия на него агрессивной окружающей среды. Ползучесть каждой части стержня описана степенной моделью с разными параметрами. Влияние агрессивной среды определяется диффузионным проникновением её элементов в материал стержня. Использован приближённый метод решения уравнения диффузии, основанный на введении диффузионного фронта. Проанализировано распределение напряжений во времени с учётом проникновения агрессивной среды в разные части стержня с разными коэффициентами диффузии. Получены условия, при которых напряжения в частях стержня либо сближаются во времени, либо расходятся.

Современные материалы и элементы конструкций должны обеспечивать надежность и работоспособность изделий, выполненных из них, в течение всего срока службы. В связи с этим наукоёмкие исследования высокотемпературной прочности материалов и конструкций, в том числе, находящихся в условии воздействия агрессивных сред, достаточно актуальны. Наиболее часто для дополнительной защиты элементов конструкций от деструктивного воздействия внешней, часто рабочей, агрессивной среды применяются типовые элементы составного типа. Внешний слой такой составной конструкции, как правило, контактирует с агрессивным веществом и защищает основные элементы конструкции от его разрушительного воздействия. В работе исследуется напряженно-деформированное состояние такой типовой конструкции, как стержень, находящийся в условии ползучести [1] при растяжении в агрессивной среде [2].

Рассмотрим ползучесть составного стержня с поперечным сечением в виде узкого прямоугольника, который дополнительно к действию растягивающей силы $P$ находится в агрессивной среде. Влияние агрессивной среды определяется диффузионным проникновением её элементов в материал стержня. Поскольку ширина $H$ поперечного сечения значительно превосходит его толщину $b$, то влиянием диффузии со стороны узких сторон прямоугольного сечения можно пренебречь. Длина стержня во много раз превосходит характерные размеры его поперечного сечения, поэтому влиянием продольной координаты стержня на диффузионный процесс можно также пренебречь. Таким образом, процесс диффузии является одномерным и проходит по толщине $b$ вдоль поперечной координаты $z$. Рассматривается симметричный относительно оси $y$ диффузионный процесс.

Примем различные характеристики диффузионного процесса для центральной части и двух крайних частей стержня. Пусть агрессивная среда проникает в центральную часть с коэффициентом диффузии $D_1 = \mathrm{const}$, а в крайние части – с коэффициентом диффузии $D_2 = \mathrm{const}$. Схема диффузионного воздействия агрессивной среды на составной стержень представлена на рис.1.

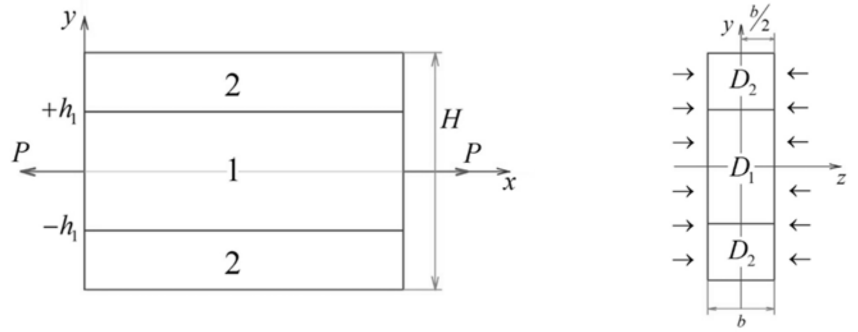



Рис.1. Схема диффузионного воздействия агрессивной среды на составной стержень

Дополнительно примем следующие условия**:** ползучесть частей стержня подчиняется одинаковым законам с разными материальными параметрами, и все части составного стержня жёстко, без проскальзывания соединены между собой. Необходимо проанализировать распределение напряжений во времени с учётом проникновения агрессивной среды в разные части стержня с разными коэффициентами диффузии.

Влияние агрессивной среды определяется диффузионным проникновением её элементов в материал стержня. Использован приближённый метод решения уравнения диффузии, основанный на введении диффузионного фронта [2]. Учёт влияния агрессивной среды произведём с помощью введения в определяющие соотношения установившей ползучести степенного вида некоторой функции интегрально средней по поперечному сечению концентрации $f\left(\bar{c}_m\left(\tilde{t}\right)\right)$ [2, 3]. Примем линейный вид этой функции: $f\left(\bar{c}_m\right)=1+a\bar{c}_m$, где $a$ – материальная константа. Способ определения константы $a$ из экспериментов на длительную прочность подробно изложен в [4].

Система определяющих соотношения для первой (центральной) и двух вторых (крайних) частей составного стержня в едином безразмерном времени $\tilde{t}$ имеет вид:

$$\frac{dp_1}{d\tilde{t}}=K_1\bar{\sigma}_1{}^n f\left(\bar{c}_m\left(\tilde{t}\right)\right),\quad \frac{dp_2}{d\tilde{t}}=K_1 k\bar{\sigma}_2{}^n f\left(\bar{c}_m\left(K_D\tilde{t}\right)\right), \tag{1}$$

$$\tilde{t}=48D_1 t/b^2\ ;\quad k=B_2/B_1\ ;\quad K_1=b^2B_1\sigma_0{}^n/\left(48D_1\right);\quad K_D=D_2/D_1\ ,$$

где деформации ползучести $p_1, p_2$ и напряжения $\bar{\sigma}_1=\sigma_1/\sigma_0$ и $\bar{\sigma}_2=\sigma_2/\sigma_0$ центральной и двух крайних частей соответственно, $B_1$, $B_2$, $n$ – материальные константы в законе установившейся ползучести, $\sigma_0$ – некоторое характерное напряжение размерности МПа, на которое производится обезразмеривание, например, предел кратковременной прочности $\sigma_b$ ($\sigma_0=\sigma_b$) при соответствующей температуре.

Из соотношений (1) с учётом принятого начального условия $p\left(t=0\right)=0$ выразим деформации ползучести $p_1$ и $p_2$ соответственно:

$$p_1=K_1\bar{\sigma}_1{}^n\int_0^{\tilde{t}} f\left(\bar{c}_m\left(\tilde{t}\right)\right)d\tilde{t},\quad p_2=K_1 k\bar{\sigma}_2{}^n\int_0^{\tilde{t}} f\left(\bar{c}_m\left(K_D\tilde{t}\right)\right)d\tilde{t}.$$

Используя условие равенства деформаций $p_1=p_2$ и уравнения равновесия, получим**:**

$$\bar{\sigma}_1=\left[\frac{k\int_0^{\tilde{t}} f\left(\bar{c}_m\left(K_D\tilde{t}\right)\right)d\tilde{t}}{\int_0^{\tilde{t}} f\left(\bar{c}_m\left(\tilde{t}\right)\right)d\tilde{t}}\right]^{\frac{1}{n}}\bar{\sigma}_2\ ,\quad \bar{\sigma}_2=\frac{P}{bH\sigma_0}\left[\alpha\left[\frac{k\int_0^{\tilde{t}} f\left(\bar{c}_m\left(K_D\tilde{t}\right)\right)d\tilde{t}}{\int_0^{\tilde{t}} f\left(\bar{c}_m\left(\tilde{t}\right)\right)d\tilde{t}}\right]^{\frac{1}{n}}+\left(1-\alpha\right)\right]^{-1},\ \text{где}\ \alpha=2h_1/H\ .$$

Анализ показал, что при влиянии на составной стержень диффузии агрессивной среды, распределения напряжений во времени в частях стержня меняются в зависимости от соотношений коэффициентов диффузии и материальных констант в законах ползучести. Построены графики зависимостей напряжений от времени. Определены оптимальные параметры диффузионного процесса и процесса ползучести, которые обеспечивают сходящиеся во времени распределения напряжений в частях стрежня.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
2. Локощенко А.М. Ползучесть и длительная прочность металлов. М.: Физматлит, 2016. 504 с. (Перевод: Lokoshchenko A.M. Creep and Long-Term Strength of Metals. Boca Raton−London−New York: CRC Press Taylor & Francis Group, 2018. 546 p.)
3. Локощенко А.М., Фомин Л.В. Моделирование длительной прочности растягиваемых стержней в агрессивной среде с учётом переменного коэффициента диффузии // Механика композитных материалов. Рига. 2014. №6. С.1033-1042.
4. Фомин Л.В. Описание длительной прочности растягиваемых стержней прямоугольного и круглого поперечных сечений в высокотемпературной воздушной среде // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, №3(32). 2013. С. 87-97.



**Information about authors:**

**Fomin Leonid** – Candidate Doctor of Physics and Maths, Senior Researcher of the laboratory of creep and creep rupture, Research Institute of Mechanics Lomonosov Moscow State University, Russian Federation +7(495)9392428. **E-mail:** fleonid1975@mail.ru

**Fomina Yulia** – Mathematics teacher of the highest category. Secondary school № 28, City district Podolsk, Russian Federation. **E-mail**: dudu1978@yandex.ru

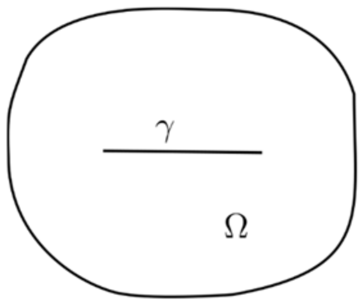
# КРАЕВАЯ ЗАДАЧА О КОНТАКТЕ ПЛАСТИНЫ И ТОНКОГО ПРЕПЯТСТВИЯ С УСЛОВИЕМ ВЗАИМНОГО НЕПРОНИКАНИЯ

**Фурцев А.И.**

Рассматривается задача о контакте между пластиной и тонким упругим препятствием. В задаче предполагается, что взаимное проникновение пластины и препятствия происходить не может. В связи с этим, используется подходящее условие непроникания. Вместе с тем учитывается сцепление тел, которое характеризуется параметром сцепления. Доказывается существование и единственность решения контактной задачи, изучаются предельные переходы по параметру сцепления. Исследуется сопутствующая задача оптимального управления, в которой параметр сцепления выступает в роли управляющего параметра.

В докладе изложены результаты исследования задачи, описывающей контакт пластины и тонкого препятствия, формулируемой в виде краевой задачи. В указанной задаче пластина описывается в рамках теории пластин Кирхгофа–Лява, в свою очередь, тонким препятствием служит балка Бернулли–Эйлера. Для описания контакта пластины и балки используются контактные краевые условия специального вида, в частности, ограничение вида неравенства на искомые перемещения, предотвращающее явление взаимного проникновения тел. Множество точек контакта при подобном подходе заранее не задаётся, а задача в целом является нелинейной.

Приведём формулировку рассматриваемой краевой задачи. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная область, имеющая гладкую границу $\partial\Omega$ и лежащая в координатной плоскости $x_1x_2$. Пусть $\gamma$ – открытый участок координатной прямой $x$. Будем считать, что $\gamma$ расположен строго внутри $\Omega$.




Искомыми в задаче величинами являются функция $v$, определённая в $\Omega$ и описывающая прогибы пластины, а также функция $w$, определённая на $\gamma$ и описывающая прогибы препятствия. Указанные функции должны удовлетворять следующим дифференциальным уравнениям и краевым условиям:

$$(b_{ijkl}v_{,kl})_{,ij} = f \text{ в } \Omega/\overline{\gamma}, \tag{1}$$

$$[m(v)] = 0, \quad [t(v)] + (bw_{,xx})_{,xx} = g \text{ на } \gamma, \tag{2}$$

$$\big([t(v)] + \beta(v-w)\big)(v-w) = 0 \text{ на } \gamma, \tag{1}$$

$$[t(v)] + \beta(v-w) \geq 0, \quad v - w \geq 0 \text{ на } \gamma, \tag{2}$$

$$[v] = [v_{,\mu}] = 0 \text{ на } \gamma, \tag{3}$$

$$[w] = [w_{,x}] = 0 \text{ на } \partial\gamma, \tag{4}$$

$$v = v_{,n} = 0 \text{ на } \partial\Omega. \tag{7}$$

Здесь

$$m(v) = b_{ijkl}v_{,kl}\mu_j\mu_i, \quad v_{,\mu} = v_{,i}\mu_i, \; t(v) = (b_{ijkl}v_{,kl})_{,j}\mu_i + (b_{ijkl}v_{,kl})_{,k}\tau_k\tau_j\mu_i,$$

Через $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ и $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ обозначены нормальный и касательный к $\gamma$ единичные векторы, а $n$ обозначает единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$. Нижними индексами с запятой обозначены производные функций; по повторяющимся индексам производится суммирование.

Квадратные скобки $[\cdot]$ обозначают скачок величин. Коэффициенты $b_{ijkl}$, $b$ дифференциальных уравнений (1), (2) являются заданными функциями, описывающими упругие свойства пластины и препятствия и удовлетворяющими обычным свойствам симметричности и положительной определённости. Правые части $f$, $g$ уравнений (1), (2) описывают внешние силы и также являются заданными функциями. Коэффициент β в соотношениях (3), (4) является заданным неотрицательным числом, характеризующим величину сил сцепления между пластиной и препятствием.

Приведённая краевая задача описывает равновесие пластины, контактирующей с препятствием вдоль линии. Соотношение (1) является уравнением равновесия в рамках теории пластин Кирхгофа –Лява. Соотношения (2) описывают скачки граничных значений изгибающего момента $m(v)$ и перерезывающей силы $t(v)$ на множестве возможного контакта с препятствием. Второе соотношение (2) одновременно служит уравнением равновесия препятствия, моделируемого в рамках теории балок Бернулли – Эйлера. Краевые условия (3),(4) дополняют набор контактных условий. Согласно им, после изгиба имеет место альтернатива: пластина и препятствие либо касаются друг друга, либо нет. Множество точек касания априори не известно. Однако, заранее предполагается, что в точках отсутствия касания пластина и препятствие притягиваются друг к другу силой, пропорциональной величине β. Благодаря последнему неравенству из (4), предотвращается взаимное проникновение контактирующих тел. Согласно условиям (5) – (7), в пластине отсутствуют трещины и изломы, а края пластины и препятствия жёстко закреплены.

На первом этапе исследования изучена корректность задачи (1) – (7). Для этого применён вариационный подход: использована слабая формулировка в виде задачи минимизации функционала энергии и эквивалентного вариационного неравенства. Далее изучена зависимость вариационного решения от параметра сцепления $\beta$, в частности, обоснован предельный переход при стремлении указанного параметра к бесконечности. Для предельной задачи найдена вариационная формулировка: установлено, что она описывает пластину и балку, которые скреплены друг с другом.

На последующих этапах рассмотрена обратная задача определения параметра сцепления, которая поставлена в виде задачи оптимального управления. Это означает, что неизвестный (в обратной задаче) параметр сцепления рассматривается как функция управления, всевозможные значения параметра образуют множество допустимых управлений, и на указанном множестве требуется минимизировать функционал качества, дающий оценку отклонения решения прямой задачи от дополнительной заданной характеристики. В качестве функционала качества используется норма разности между перемещениями, представляющими собой решение прямой задачи, и заранее заданными функциями. Множество допустимых параметров содержит как конечные значения, так и бесконечность.Установлено, что функционал качества имеет минимум на множестве допустимых управлений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 18–29–10007) и Совета по грантам Президента Российской Федерации (грант МК–52.2019.1).

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Хлуднев А.М. Задачи теории упругости в негладких областях. М.: Физматлит, 2010. 252 с.
2. Фурцев А.И. Дифференцирование функционала энергии по длине отслоения в задаче о контакте пластины и балки. //Сиб. электрон. матем. изв. 2018. Т.15. С.935–49.
3. Furtsev A.I. On contact between a thin obstacle and a plate containing a thin inclusion. //J. Math. Sci., vol. 237 (7), p.530–45. 2019.
4. Furtsev A.I. A contact problem for a plate and a beam in the presence of adhesion. //J.Appl.Ind.Math., vol. 13 (2), p.208–18, 2019.

**<u>Сведения об авторе:</u>**

**Фурцев Алексей Игоревич** – аспирант, младший научный сотрудник Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, г. Новосибирск, Россия; **E-mail:** al.furtsev@mail.ru

# АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ АНИЗОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

**Хачатрян А.М., Петросян Г.А.**

Обсуждается вопрос определения напряженно-деформированного состояния в трехмерной задаче для анизотропной цилиндрической оболочки, на внешней поверхности которой заданы значения нормального напряжения и тангенциальных перемещений, а на внутренней поверхности - значения нормального перемещения и тангенциальных напряжении. С применением асимптотического метода построено решение внутренней задачи.

**1.** Теория анизотропных слоистых оболочек на основе гипотезы Кирхгофа-Лява для пакета в целом, а также уточнённые теории анизотропных слоистых пластин и оболочек построены и развиты в известных монографиях С.А. Амбарцумяна [1,2]. Асимптотический метод определения напряжённо-деформированного состояния произвольной изотропной оболочки разработан А.Л. Гольденвейзером [3,4]. Л.А. Агаловян распространил асимптотический метод на анизотропные пластинки и оболочки, выявив характерные особенности, связанные с анизотропией. На основе уравнений теории упругости асимптотическим методом классические и некоторые классы неклассических краевых задач для тонких тел рассмотрены в монографиях [5,6]. Вопрос определения напряжённо-деформированного состояния цилиндрической оболочки с общей анизотропией рассмотрен в работе [7]. На основе асимптотического метода построены итерационные процессы, описывающие возможные напряжённые состояния в первой краевой задаче для цилиндрической оболочки. Вопрос определения напряжённо-деформированного состояния в трёхмерной задаче для анизотропной пластинки, на лицевых плоскостях которой заданы смешанные краевые условия теории упругости, обсуждён в работе [8]. С применением асимптотического метода построены решения внутренней задачи и пограничного слоя.

Рассматривается трёхмерная задача теории упругости для анизотропной цилиндрической оболочки радиуса $R$, длиной $L$ и толщиной $2h$ $\left(x\in[0;L], r\in[R-h;R+h], \theta\in[0;\Theta], 0<\Theta\le 2\pi\right)$. Материал оболочки обладает цилиндрической анизотропией общего вида, а ось анизотропии совпадает с осью цилиндра. На внешней и внутренней поверхностях оболочки заданы следующие условия теории упругости:

$$\begin{aligned} &u_x=u_x^+, u_\theta=u_\theta^+, \sigma_r=\varepsilon^{-1}\sigma_r^+, \text{ когда } r=R+h,\\ &\sigma_{rx}=\varepsilon^{-1}\sigma_{rx}^-, \sigma_{r\theta}=\varepsilon^{-1}\sigma_{r\theta}^-, u_r=u_r^-, \text{ когда } r=R-h, \end{aligned} \tag{1.1}$$

а на торцах $x=0,L$ и краях $\theta=0,\Theta$ могут быть заданы произвольные краевые условия. При $\Theta=2\pi$ имеем замкнутую цилиндрическую оболочку и вместо торцевых условий на краях $\theta=0,\Theta$ необходимо задать условие периодичности напряжений и перемещений, т.е. $Q(r,\theta+2\pi)=Q(r,\theta)$, где $Q$ – любое из напряжений и перемещений.

Для определения напряжённо-деформированного состояния цилиндрической оболочки будем исходить из трёхмерных уравнений теории упругости в цилиндрических координатах, в которые вводятся безразмерные координаты по формулам:

$$\xi=\frac{x}{h}, \zeta=\frac{(r-h)R}{h^2}, \phi=\theta\frac{R}{h}, \zeta\in[-1;1] \tag{1.2}$$

и безразмерные перемещения $U_r=u_r/R, U_\theta=u_\theta/R, U_x=u_x/R$, в результате чего уравнения теории упругости будут содержать малый геометрический параметр $\varepsilon=h/R$.

Решение данной задачи складывается из решения внутренней задачи и решения типа пограничного слоя. Для решения внутренней задачи используется асимптотический метод интегрирования и все напряжения и перемещения представляются в виде суммы по степеням малого параметра [3-6]

$$Q=\varepsilon^{-q}\sum_{s=0}^{S}\varepsilon^s Q^{(s)} . \tag{1.3}$$

Целое число $q$ подбирается так, чтобы после подстановки (1.3) в преобразованные уравнения теории упругости получить рекуррентную систему относительно искомых величин. В рассматриваемой задаче эта цель достигается при [5,6]

$$q=1 \text{ для } \sigma_r,\sigma_\theta,\sigma_x,\sigma_{\theta x},\sigma_{rx},\sigma_{r\theta} \text{ и } q=0 \text{ для } U_r,U_\theta,U_x. \tag{1.4}$$

Подставляя (1.3) в преобразованные уравнения теории упругости, с учётом (1.4), получим следующую систему (здесь и в последуюшем для удобства записи запятыми выделены частные производные):

$$\sigma_{r,\zeta}^{(s)}+\zeta\sigma_{r,\zeta}^{(s-2)}+\sigma_{r\theta,\phi}^{(s-1)}+\zeta\sigma_{rx,\xi}^{(s-3)}+\sigma_{rx,\xi}^{(s-1)}+\sigma_r^{(s-2)}-\sigma_\theta^{(s-2)}=0,$$

$$\sigma_{r\theta,\zeta}^{(s)}+\zeta\sigma_{r\theta,\zeta}^{(s-2)}+\sigma_{\theta,\phi}^{(s-1)}+\zeta\sigma_{\theta x,\xi}^{(s-3)}+\sigma_{\theta x,\xi}^{(s-1)}+2\sigma_{r\theta}^{(s-2)}=0,$$

$$\sigma_{rx,\zeta}^{(s)}+\zeta\sigma_{rx,\zeta}^{(s-2)}+\sigma_{\theta x,\phi}^{(s-1)}+\zeta\sigma_{x,\xi}^{(s-3)}+\sigma_{x,\xi}^{(s-1)}+\sigma_{rx}^{(s-2)}=0,$$

$$U_{x,\xi}^{(s)}=a_{11}\sigma_x^{(s)}+a_{12}\sigma_\theta^{(s)}+a_{13}\sigma_r^{(s)}+a_{14}\sigma_{r\theta}^{(s)}+a_{15}\sigma_{rx}^{(s)}+a_{16}\sigma_{x\theta}^{(s)}, \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned}U_{\theta,\phi}^{(s)}+U_r^{(s-1)}&=a_{12}\sigma_x^{(s)}+a_{22}\sigma_\theta^{(s)}+a_{23}\sigma_r^{(s)}+a_{24}\sigma_{r\theta}^{(s)}+a_{25}\sigma_{rx}^{(s)}+a_{26}\sigma_{x\theta}^{(s)}+\\&+\zeta\left(a_{12}\sigma_x^{(s-2)}+a_{22}\sigma_\theta^{(s-2)}+a_{23}\sigma_r^{(s-2)}+a_{24}\sigma_{r\theta}^{(s-2)}+a_{25}\sigma_{rx}^{(s-2)}+a_{26}\sigma_{x\theta}^{(s-2)}\right),\end{aligned}$$

$$U_{r,\zeta}^{(s)}=a_{13}\sigma_x^{(s-1)}+a_{23}\sigma_\theta^{(s-1)}+a_{33}\sigma_r^{(s-1)}+a_{34}\sigma_{r\theta}^{(s-1)}+a_{35}\sigma_{rx}^{(s-1)}+a_{36}\sigma_{x\theta}^{(s-1)},$$

$$\begin{aligned}U_{\theta,\zeta}^{(s)}+U_{r,\phi}^{(s-1)}+\zeta U_{\theta,\zeta}^{(s-2)}-U_\theta^{(s-2)}&=a_{14}\sigma_x^{(s)}+a_{24}\sigma_\theta^{(s)}+a_{34}\sigma_r^{(s)}+a_{44}\sigma_{r\theta}^{(s)}+a_{45}\sigma_{rx}^{(s)}+a_{46}\sigma_{x\theta}^{(s)}+\\&+\zeta\left(a_{14}\sigma_x^{(s-3)}+a_{24}\sigma_\theta^{(s-3)}+a_{34}\sigma_r^{(s-3)}+a_{44}\sigma_{r\theta}^{(s-3)}+a_{45}\sigma_{rx}^{(s-3)}+a_{46}\sigma_{x\theta}^{(s-3)}\right),\end{aligned}$$

$$U_{x,\zeta}^{(s)}+U_{r,\xi}^{(s-1)}=a_{15}\sigma_x^{(s-1)}+a_{25}\sigma_\theta^{(s-1)}+a_{35}\sigma_r^{(s-1)}+a_{45}\sigma_{r\theta}^{(s-1)}+a_{55}\sigma_{rx}^{(s-1)}+a_{56}\sigma_{x\theta}^{(s-1)},$$

$$\begin{aligned}U_{\theta,\xi}^{(s)}+U_{x,\phi}^{(s)}+\zeta U_{\theta,\xi}^{(s-2)}&=a_{16}\sigma_x^{(s)}+a_{26}\sigma_\theta^{(s)}+a_{36}\sigma_r^{(s)}+a_{46}\sigma_{r\theta}^{(s)}+a_{56}\sigma_{rx}^{(s)}+a_{66}\sigma_{x\theta}^{(s)}+\\&+\zeta\left(a_{16}\sigma_x^{(s-2)}+a_{26}\sigma_\theta^{(s-2)}+a_{36}\sigma_r^{(s-2)}+a_{46}\sigma_{r\theta}^{(s-2)}+a_{56}\sigma_{rx}^{(s-2)}+a_{66}\sigma_{x\theta}^{(s-2)}\right)\end{aligned}$$

Интегрируя полученную систему (1.5) по $\zeta$, получим:

$$\sigma_{rx}^{(s)}=\sigma_{rx0}^{(s)}+\sigma_{rx}^{*(s)},\ (x,\theta),\ \ \sigma_r^{(s)}=\sigma_{r0}^{(s)}+\sigma_r^{*(s)},$$

$$U_x^{(s)}=U_{x0}^{(s)}+U_x^{*(s)},\ (x,\theta,r), \tag{1.6}$$

$$\sigma_{x\theta}^{(s)}=c_3\sigma_{r0}^{(s)}+c_4\sigma_{r\theta0}^{(s)}+c_5\sigma_{rx0}^{(s)}+\tau_{x\theta0}^{(s)}+\sigma_{x\theta}^{*(s)},$$

$$\sigma_x^{(s)}=a_3\sigma_{r0}^{(s)}+a_4\sigma_{r\theta0}^{(s)}+a_5\sigma_{rx0}^{(s)}+\tau_{x0}^{(s)}+\sigma_x^{*(s)},\ (x,\theta;a,b;4,5),$$

где

$$\tau_{x0}^{(s)}=B_{11}\varepsilon_1^{(s)}+B_{12}\varepsilon_2^{(s)}+B_{16}\omega^{(s)},(x,\theta;1,2),\ \tau_{x\theta0}^{(s)}=B_{16}\varepsilon_1^{(s)}+B_{26}\varepsilon_2^{(s)}+B_{66}\omega^{(s)},$$

$$\varepsilon_1^{(s)}=U_{x0,\xi}^{(s)},\ \varepsilon_2^{(s)}=U_{\theta0,\phi}^{(s)},\ \omega^{(s)}=U_{\theta0,\xi}^{(s)}+U_{x0,\phi}^{(s)},$$

$$a_i=\left(a_{i1}B_{11}+a_{i2}B_{12}+a_{i6}B_{16}\right),\ b_i=\left(a_{i1}B_{12}+a_{i2}B_{22}+a_{i6}B_{26}\right),$$

$$c_i=\left(a_{i1}B_{16}+a_{i2}B_{26}+a_{i6}B_{66}\right),\ (i=3,4,5).$$

Коэффициенты $B_{ij}, a_i, b_i, c_i$ определяются по известным формулам [1,2,7], а величины со звездочками, входящие в формулы (1.6), как обычно, известны для каждого приближения $s$ и определяются по формулам:

$$\sigma_x^{*(s)} = a_3\sigma_r^{*(s)} + a_4\sigma_{r\theta}^{*(s)} + a_5\sigma_{rx}^{*(s)} + \tau_x^{*(s)} + B_{12}U_r^{(s-1)} + \zeta B_{16}\varepsilon_0^{(s-2)} +$$
$$+\zeta\left(a_1{}'\sigma_x^{(s-2)} + a_2{}'\sigma_\theta^{(s-2)} + a_3{}'\sigma_r^{(s-2)} + a_4{}'\sigma_{r\theta}^{(s-2)} + a_5{}'\sigma_{xr}^{(s-2)} + a_6{}'\sigma_{x\theta}^{(s-2)}\right),$$
$$\left(x,\theta; a,b; a',b'; 1,2\right),$$
$$\sigma_{x\theta}^{*(s)} = c_3\sigma_r^{*(s)} + c_4\sigma_{r\theta}^{*(s)} + c_5\sigma_{rx}^{*(s)} + \tau_{x\theta}^{*(s)} + B_{26}U_r^{(s-1)} + \zeta B_{66}\varepsilon_0^{(s-2)} +$$
$$+\zeta\left(c_1{}'\sigma_x^{(s-2)} + c_2{}'\sigma_\theta^{(s-2)} + c_3{}'\sigma_r^{(s-2)} + c_4{}'\sigma_{r\theta}^{(s-2)} + c_5{}'\sigma_{xr}^{(s-2)} + c_6{}'\sigma_{x\theta}^{(s-2)}\right),$$

$$\sigma_r^{*(s)} = -\int_0^\zeta\left[\sigma_{r\theta,\phi}^{(s-1)} + \sigma_{rx,\xi}^{(s-1)} + \sigma_r^{(s-2)} - \sigma_\theta^{(s-2)} + \zeta\left(\sigma_{r,\zeta}^{(s-2)} + \sigma_{xr,\xi}^{(s-3)}\right)\right]d\zeta,$$

$$\sigma_{r\theta}^{*(s)} = -\int_0^\zeta\left[\sigma_{\theta,\phi}^{(s-1)} + \sigma_{x\theta,\xi}^{(s-1)} + 2\sigma_{r\theta}^{(s-2)} + \zeta\left(\sigma_{r\theta,\zeta}^{(s-2)} + \sigma_{x\theta,\xi}^{(s-3)}\right)\right]d\zeta, \tag{1.7}$$

$$\sigma_{rx}^{*(s)} = -\int_0^\zeta\left[\sigma_{x\theta,\phi}^{(s-1)} + \sigma_{x,\xi}^{(s-1)} + \sigma_{xr}^{(s-2)} + \zeta\left(\sigma_{rx,\zeta}^{(s-2)} + \sigma_{x,\xi}^{(s-3)}\right)\right]d\zeta,$$

$$U_\theta^{*(s)} = \int_0^\zeta\Big[a_{14}\sigma_x^{(s-1)} + a_{24}\sigma_\theta^{(s-1)} + a_{34}\sigma_r^{(s-1)} + a_{44}\sigma_{r\theta}^{(s-1)} + a_{45}\sigma_{xr}^{(s-1)} + a_{46}\sigma_{x\theta}^{(s-1)} + U_\theta^{(s-2)} +$$
$$+\zeta\left(a_{14}\sigma_x^{(s-3)} + a_{24}\sigma_\theta^{(s-3)} + a_{34}\sigma_r^{(s-3)} + a_{44}\sigma_{r\theta}^{(s-3)} + a_{45}\sigma_{xr}^{(s-3)} + a_{46}\sigma_{x\theta}^{(s-3)} + U_{\theta,\zeta}^{(s-2)}\right) - U_{r,\phi}^{(s-1)}\Big]d\zeta,$$
$$U_r^{*(s)} = \int_0^\zeta\left[a_{13}\sigma_x^{(s-1)} + a_{23}\sigma_\theta^{(s-1)} + a_{33}\sigma_r^{(s-1)} + a_{34}\sigma_{r\theta}^{(s-1)} + a_{35}\sigma_{xr}^{(s-1)} + a_{36}\sigma_{x\theta}^{(s-1)}\right]d\zeta,$$

$$U_x^{*(s)} = \int_0^\zeta\left[a_{15}\sigma_x^{(s-1)} + a_{25}\sigma_\theta^{(s-1)} + a_{35}\sigma_r^{(s-1)} + a_{45}\sigma_{r\theta}^{(s-1)} + a_{55}\sigma_{xr}^{(s-1)} + a_{56}\sigma_{x\theta}^{(s-1)} - U_{r,\xi}^{(s-1)}\right]d\zeta,$$

$$\tau_x^{*(s)} = B_{11}\varepsilon_1^{*(s)} + B_{12}\varepsilon_2^{*(s)} + B_{16}\omega^{*(s)}, \left(x,\theta;1,2\right),\ \tau_{x\theta}^{*(s)} = B_{16}\varepsilon_1^{*(s)} + B_{26}\varepsilon_2^{*(s)} + B_{66}\omega^{*(s)},$$
$$\varepsilon_1^{*(s)} = U_{x,\xi}^{*(s)},\ \varepsilon_2^{*(s)} = U_{\theta,\phi}^{*(s)},\ \omega^{*(s)} = U_{\theta,\xi}^{*(s)} + U_{x,\phi}^{*(s)}, \varepsilon_0^{(s)} = U_{\theta,\xi}^{(s)},$$
$$a_i{}' = -\left(a_{2i}B_{12} + a_{4i}B_{16}\right),\ b_i{}' = -\left(a_{2i}B_{22} + a_{4i}B_{26}\right),\ c_i{}' = -\left(a_{2i}B_{26} + a_{4i}B_{66}\right),\ \left(i = 1,2,...,6\right).$$

Предполагается, что $Q^{(s-k)} \equiv 0$ при $s < k$ .

Удовлетворив поверхностным условиям (1.1), определим неизвестные функции интегрирования:

$$\sigma_{rx0}^{(s)} = \sigma_{rx}^{-(s)} - \sigma_{rx}^{*(s)}\left(\xi,\varphi,-1\right),\left(x,\theta\right),\quad \sigma_{r0}^{(s)} = \sigma_r^{+(s)} - \sigma_r^{*(s)}\left(\xi,\varphi,1\right),$$
$$U_{x0}^{(s)} = u_x^{+(s)} - U_x^{*(s)}\left(\xi,\varphi,1\right),\left(x,\theta\right),\quad U_{r0}^{(s)} = U_r^{-(s)} - U_r^{*(s)}\left(\xi,\varphi,-1\right). \tag{1.8}$$

Из (1.6) с учётом (1.8) получим окончательное решение поставленной задачи:

$$\sigma_r^{(s)} = \sigma_r^{+(s)} + \sigma_r^{*(s)}\left(\xi,\varphi,\zeta\right) - \sigma_r^{*(s)}\left(\xi,\varphi,1\right),$$

$$\sigma_{rx}^{(s)}=\sigma_{rx}^{-(s)}+\sigma_{rx}^{*(s)}(\xi,\varphi,\zeta)-\sigma_{rx}^{*(s)}(\xi,\varphi,-1),\ (x,\theta),$$

$$U_r^{(s)}=u_r^{-(s)}+U_r^{*(s)}(\xi,\varphi,\zeta)-U_r^{*(s)}(\xi,\varphi,-1),$$

$$U_x^{(s)}=u_x^{+(s)}+U_x^{*(s)}(\xi,\varphi,\zeta)-U_x^{*(s)}(\xi,\varphi,1),(x,\theta), \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned}\sigma_x^{(s)}&=a_3\sigma_r^{+(s)}+a_4\sigma_{r\theta}^{-(s)}+a_5\sigma_{rx}^{-(s)}+B_{11}u_{x,\xi}^{+(s)}+B_{12}u_{\theta,\varphi}^{+(s)}+B_{16}\left(u_{\theta,\xi}^{+(s)}+u_{x,\varphi}^{+(s)}\right)+\\&+\sigma_x^{*(s)}(\xi,\varphi,\zeta)-a_3\sigma_r^{*(s)}(\xi,\varphi,1)-a_4\sigma_{r\theta}^{*(s)}(\xi,\varphi,-1)-a_5\sigma_{rx}^{*(s)}(\xi,\varphi,-1)-\\&-B_{11}U_{x,\xi}^{*(s)}(\xi,\varphi,1)-B_{12}U_{\theta,\varphi}^{*(s)}(\xi,\varphi,1)-B_{16}\left(U_{\theta,\xi}^{*(s)}(\xi,\varphi,1)+U_{x,\varphi}^{*(s)}(\xi,\varphi,1)\right),\\&\qquad(x,\theta;a,b;a',b';1,2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{x\theta}^{(s)}&=c_3\sigma_r^{+(s)}+c_4\sigma_{r\theta}^{-(s)}+c_5\sigma_{rx}^{-(s)}+B_{16}u_{x,\xi}^{+(s)}+B_{26}u_{\theta,\varphi}^{+(s)}+B_{66}\left(u_{\theta,\xi}^{+(s)}+u_{x,\varphi}^{+(s)}\right)+\\&+\sigma_{x\theta}^{*(s)}(\xi,\varphi,\zeta)-c_3\sigma_r^{*(s)}(\xi,\varphi,1)-c_4\sigma_{r\theta}^{*(s)}(\xi,\varphi,-1)-c_5\sigma_{rx}^{*(s)}(\xi,\varphi,-1)-\\&-B_{16}U_{x,\xi}^{*(s)}(\xi,\varphi,1)-B_{26}U_{\theta,\varphi}^{*(s)}(\xi,\varphi,1)-B_{66}\left(U_{\theta,\xi}^{*(s)}(\xi,\varphi,1)+U_{x,\varphi}^{*(s)}(\xi,\varphi,1)\right).\end{aligned} \tag{1.10}$$

В формулх (1.8), (1.9) необходимо учитывать, что

$$\begin{aligned}&\sigma_r^{+(0)}=\sigma_r^{+},\sigma_{rx}^{-(0)}=\sigma_{rx}^{-},\ \sigma_{r\theta}^{-(0)}=\sigma_{r\theta}^{-},\ u_x^{+(0)}=u_x^{+},\ u_\theta^{+(0)}=u_\theta^{+},\ u_r^{-(0)}=u_r^{-}\\&\sigma_r^{+(s)}=\sigma_{rx}^{-(s)}=\sigma_{r\theta}^{-(s)}=u_x^{+(s)}=u_\theta^{+(s)}=u_r^{-(s)}=0\ \text{при}\ s>0\end{aligned},$$

Выведенные выше формулы (1.6) – (1.9) носят итерационный характер и позволяют найти значения всех компонент тензора напряжений и вектора перемещения с заранее заданной точностью. Таким образом, условие (1.1) оказалось достаточными для определения всех искомых величин во внутренней задаче. Это решение, как правило, не будет удовлетворять торцевым условиям и условиям на краях цилиндрической оболочки. Для удовлетворения условиям на торцах $x=0,L$ и на краях $\theta=0,\Theta$ необходимо построить решения типа пограничного слоя вблизи этих торцов и краёв [3-6].

**2. Пример.** В качестве иллюстрации рассмотрим частный пример. Пусть на внешней и внутренней поверхностях оболочки заданы следующие условия для напряжений и перемещений:

$$\sigma_r^{+}=-q,u_x^{+}=0,\ u_\theta^{+}=0,\sigma_{rx}^{-}=0,\ \sigma_{r\theta}^{-}=0,\ \ u_r^{-}=0. \tag{2.1}$$

Если ограничиться нулевым приближением, то учитывая, что $Q^{*(0)}=0$, с помощью рекуррентных формул (1.7) – (1.9) получим следующее решение внутренней задачи:

$$\begin{aligned}&\sigma_r=-\frac{R}{h}q,\sigma_x=-\frac{R}{h}a_3q,\sigma_\theta=-\frac{R}{h}b_3q,\ \sigma_{x\theta}=-\frac{R}{h}c_3q,\\&u_x=u_\theta=u_r=0,\ \sigma_{xr}=\sigma_{r\theta}=0.\end{aligned} \tag{2.2}$$

Вычисляя все приближения до $s=2$ включительно, получим решение внутренней задачи с точностью $O\left(\varepsilon^2\right)$:

$$\sigma_r=-\frac{R}{h}q-\frac{r-R-h}{R}(b_3-1)q,\ \sigma_{rx}=\sigma_{r\theta}=0,$$

$$\begin{aligned}\sigma_x=-\frac{R}{h}a_3q-\frac{1}{R}\Big[&B_{12}(a_{13}a_3+a_{23}b_3+a_{36}c_3+a_{33})(r-R+h)+\\&+a_3(b_3-1)(r-R-h)+(a_1'a_3+a_2'b_3+a_6'c_3+a_3')(r-R)\Big]q,\end{aligned}$$

$$\sigma_\theta=-\frac{R}{h}b_3q-\frac{1}{R}\Big[B_{22}\left(a_{13}a_3+a_{23}b_3+a_{36}c_3+a_{33}\right)\left(r-R+h\right)+$$
$$+b_3\left(b_3-1\right)\left(r-R-h\right)+\left(b_1'a_3+b_2'b_3+b_6'c_3+b_3'\right)\left(r-R\right)\Big]q,$$
$$\sigma_{x\theta}=-\frac{R}{h}c_3q-\frac{1}{R}\Big[B_{26}\left(a_{13}a_3+a_{23}b_3+a_{36}c_3+a_{33}\right)\left(r-R+h\right)+ \qquad (2.3)$$
$$+c_3\left(b_3-1\right)\left(r-R-h\right)+\left(c_1'a_3+c_2'b_3+c_6'c_3+c_3'\right)\left(r-R\right)\Big]q,$$
$$u_r=-\left(a_{13}a_3+a_{23}b_3+a_{36}c_3+a_{33}\right)R\left(r-R+h\right)q\,,$$
$$u_\theta=-\left(a_{14}a_3+a_{24}b_3+a_{46}c_3+a_{34}\right)R\left(r-R-h\right)q\,,$$
$$u_x=-\left(a_{15}a_3+a_{25}b_3+a_{56}c_3+a_{35}\right)R\left(r-R-h\right)q\,.$$

В заключение отметим, что решение типа пограничного слоя можно построить, как в аналогичной задаче для анизотропной пластинки [8] с помощью функций типа пограничного слоя [5,6].

**ЛИТЕРАТУРА**


1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360 с.
2. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 448 с.
3. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории оболочек при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости.//ПММ. 1963. Т.27. Вып.4. С.593-608.
4. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
5. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука,1997. 415 с.
6. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: Изд. «Гитутюн» НАН РА, 2005. 468 с.
7. Хачатрян Ш.М. О напряженных состояниях и их определяющих уравнениях цилиндрических оболочек с общей анизотропией// Известия АН Арм. ССР. Механика. 1979. Т.32. №3. С.26-41.
8. Петросян Г.А., Хачатрян А.М. Асимптотическое решение одной смешанной краевой задачи анизотропной пластинки. //Изв. НАН Армении. Механика. 2009. Т.62. №4. С.65-72.



**Сведения об авторах:**
**Хачатрян Александр Мовсесович,** д.ф.м.н., профессор, вед. науч. сотрудник Института механики НАН РА. **Адрес:** РА, г. Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2.
**Тел.:** (37499)21-19-49. **E-mail:** alexkhach49@yandex.ru

**Петросян Гаянэ Альбертовна,** к.ф.м.н., доцент кафедры математики АрГУ.
**Адрес:** Республика Арцах, г. Степанакерт, ул. Мхитара Гоша, 5.
**Тел.:** (37497)23-83-10. **E-mail:** gayan-petrosian@rambler.ru

# ГИПОТЕЗА О МЕХАНИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЭЛЕКТРОНА

**Хачикян А.С.**

Эфир всегда занимал заслуженное внимание человечества [1,2]. Только в последнее столетие он отошёл на задний план. Однако, в последние десятилетия он вновь начинает занимать внимание учёных [3]. Предлагаемые здесь представления об эфире, связанные с предлагаемой гипотезой об электроне, имеют много общего с предложенной в [3] гипотезой о газоподобном эфире. Предложенные модели электрона мне неизвестны и только в (3) называется электроном некий вихрь от частиц эфира.

## Эфир

Заполняющая кажущийся пустым мировое пространство материя называется эфиром. Эфир является средой распространения электромагнитных волн.

В эфире существуют: звезды, планеты и другие космические тела и образования.

По некоторым соображениям масса эфира составляет более 95% всей существующей в природе массы материи.

Эфир представляется нам как подобная газу сложная среда, образованная сообществом материальных частиц.

Мы принимаем мнение, что эфир состоит только и только из материальных частиц и из их агрегатов, имеющих разные формы и размеры и движущихся с ничем не ограниченными (кроме взаимных столкновений различных частиц) относительными скоростями. Эфир – достаточно сложное образование, имеющее разную структуру вблизи планет, звёзд, других космических образований и в открытом космосе. Планеты, звёзды и другие космические образования представляют собой частично проницаемые, а, может быть, некоторая их часть, вследствие большого количества их массы, почти полностью непроницаемые локальные перегородки для эфира. В структуре эфира разные семейства частиц согласно их размерам, скоростям и другим свойствам создают разные парциальные давления, образуя общую сложную структуру.

В эфире происходят очень бурные сложные процессы – столкновения многих частиц и их агрегатов с часто большими скоростями в течении длительного времени.

Характер столкновений частиц эфира неизвестен. Мы достоверно не знаем, имеют ли частицы эфира свойства вязкости. Благодаря наличию упругих частиц (принятых нами) часть столкновений упругое. Благодаря этому последнему условию в эфире, мы думаем, существует давление.

Эти столкнвения частиц приводят к их раздроблению или составлению агрегатов, создаются многие новые частицы и их агрегаты с всевозможными геометрическими формами и размерами (крестики, шарики, валики, куски оболочек, звездообразные частицы с разным количеством лепестков, винтовые поверхности внутренние и внешние, частицы с отверстиями и многое другое). Это – огромная целая мастерская. Эфир – кузница и мастерская природы.

В эфире относительно мало атомов и молекул. Происходящие в эфире процессы мало исследованы.

Наличие давления в эфире создаёт возможность создания в нём вихрей и принципиальную возможность протекания в нём многих из всевозможных типов процессов, описанных в [3] и в других публикациях об эфире.

По сравнению с атмосферами Земли и других планет, которые состоят из смеси молекул известных газов с известными парциальными давлениями, средними скоростями молекул и с относительно небольшим значением наведённого модуля упругости и известны сложнейшими атмосферными процессами, в эфире могут происходить намного больше разнообразных сложнейших процессов.

Трение в происходящих в эфире процессах, имеет повышенное значение из-за относительного увеличения размеров поверхности частиц по сравнению с их инерцией вследствие очень малых размеров частиц.

Наши представления о трении, происходящие от реалий атомно-молекулярного мира, применительно к эфиру должны быть основательно переработаны. В эфире поверхности могут быть почти идеально гладкими, а инерции частиц очень малыми.

Если реально существующий электрон (см. ниже), являющийся основой порождения электромагнитных волн, имеет размеры порядка $10^{-15}$ м (или $10^{-20}$ м), то ничего не мешает существованию агрегатов частиц аналогичной конструкции на диапазоне размеров, например, порядка $10^{-25}$м, естественно, возможно, при другом значении модуля упругости использованного материала, мощности, энергии, скорости и других свойств порождённых волн этими частицами. Такие частицы могут служить также для создания наведенной упругости эфирного газа.

По формулам теории упругости, связывающих значения модуля упругости и величины скорости звука в среде, можно оценить величину модуля упругости материала, порождающего упругие волны со скоростью равной скорости электромагнитных волн. Таким образом, мы оцениваем значение модуля упругости этих материалов равной порядка $10^{20}$Па.

Аналогия нам подсказывает, что чем меньше размеры частиц, тем больше могут быть их модули упругости и, соответственно, больше порождённые ими скорости процессов (волн) по сравнению с известными нам волнами звука и света.

Таким образом, не исключается наличие кроме электромагнитных, других неизвестных сущности процессов. На подобие электронов, в ещё более малых масштабах по размерам, возможно образование активных агрегатов, создающих физические поля иной природы пока нам неизвестных и не ощутимых.

Понятие и учёт давления в эфире, из-за отсутствия сплошной гладкой совершенно непроницаемой перегородки, несколько иное, чем обычно.

Эфир, как одну сплошную среду, трудно описать. Это скорее неоднородная нестационарная смесь разных сплошных сред.

Теория эфира ещё достаточно математически не разработана, несмотря на наличие немногочисленных и во многом интересных работ.

Верхнюю границу значения давления эфира можно оценить по сопротивлению орбитальному движению Земли и других космических тел, что можно измерить.

**Электрон**

Мы думаем, что электрон – это упруго заряжённое образование, подобно катапульты, в среде эфира. Катапульта самостоятельно автоматически заряжается частицами от ударов хаотично движущихся частиц эфира и срабатывает от ударов таких же, но других частиц эфира, и, возможно, также от изменений центробежной силы вследствие изменений скорости вращения катапульты вокруг своей оси. В среде хаотично движущихся частиц эфира катапульта непрерывно заряжается частицами эфира и разряжается, выбрасывая задержанные при заряжении частицы. Катапульта заряжается, в основном, двумя видами частиц – это частицы в виде крестиков (или звездоподобные, с несколькими лепестками) и более или менее шаровидные частицы (шаровидные частицы или оболочки).

Крестики, выбрасываясь, одновременно вращаются вокруг некоторой оси.

Электрон – это совокупность катапульт – от нескольких штук до нескольких десятков штук, собранных на одном общем остове в среде эфира.

Магнитный момент электрона образуется вследствие того, что часть катапульт на электроне приспособлена для работы с крестиками, а часть с шаровидными частицами.

Благодаря непрерывному процессу зарядки и разрядки электрон создает вокруг себя определённое физическое поле, благодаря наличию среды эфира вокруг электрона и наличию давления в этой среде.

Созданное поле электронов, которые вращаются с одинаковыми направлениями вокруг своих осей, создаёт между ними силы отталкивания, а поля между электронами вращающихся в обратном направлении, создают силы притяжения, благодаря существующему полю давления эфира, подобно притягиванию параллельно движущихся в воде кораблей.

Используя оценку мощности заряда электрона, можно найти оценку мощности катапульты. Благодаря частицам, которые выбрасывают электроны, и среде эфира, в которым они находятся, эффекты притяжения и отталкивания передаются дальше в среде эфира.

Обратно вращающиеся электроны – это позитроны.

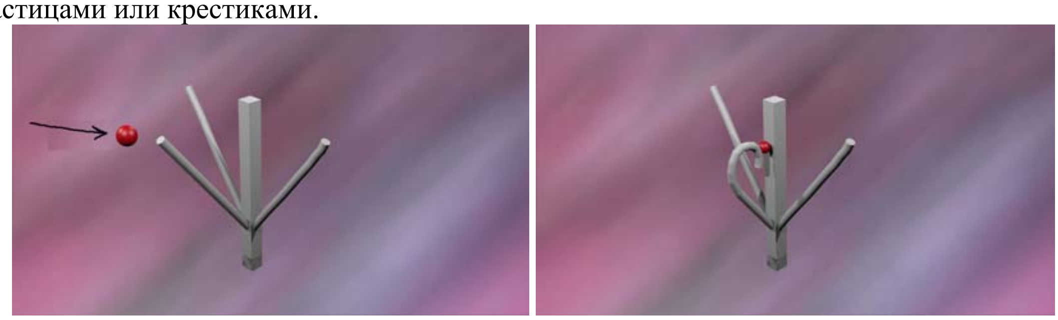
Возбуждение электрона, это изменение уровня заряжённости катапульты, что может происходить также вследствие изменений состояния в среде эфира.

Из сказанного ясно, что электроны могут быть разной мощности, соответственно, количеству его катапульт.

Наличие данного сочетания электрон-позитрон (с определённым направлением вращения) в нашем мире предполагает существование где-то в космосе мира с обратным сочетанием в смысле направления их вращения из-за, в принципе, равноправности правого и левого возможного вращения. Здесь, у нас – наверно, локальное нарушение правила равноправия правого и левого вращения.

Токи смещения получаются, благодаря сопротивлению среды, в которым есть давление (у Максвелла шарики скреплены пружинками).

Магнитный момент электрона может принимать дискретно меняющееся значение вследствие разного количества катапульт, приспособленных для работы с шаровидными частицами или крестиками.



а

б

Рис.1. а – зарядка электрона, б – разрядка электрона

Мы не утверждаем, что электрон конструирован именно так, как мы его описываем, мы описываем только один возможный вариант его состояния.

Представленная на схеме катапульта (рис.1) удобна лишь для наглядной демонстрации принципа её работы. Природа очень изобретательна и, может быть, нашла другую, более практичную и лучшую для работы схему катапульты.

Здесь описаны протекания не всех электромагнитных процессов, но есть потенциальная возможность описания протекания всех процессов. Большую помощь в этом могут оказать рассуждения Максвелла [4].

Сказанное выше невольно приводит к мысли, что все наблюдаемые ядерные силы и ядерные взаимодействия (слабые и сильные), не что иное, как упругие силы и упругие взаимодействия.

Представленная анимационная картина создана А.Г. Арутюняном.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Уиттекер Э. История теории эфира и электричества, классические теории. Москва-Ижевск: 2001. 512 с.
2. Терентьев М.В. История Эфира. М.: 1999, 176 с.
3. Ацюковский В.А. Общая эфиродинамика. Моделирование структур вещества и полей на основе представлений о газоподобном эфире. Издание 2-е. М.: Энергоатомиздат, 2003. 584 с.
4. Максвелл Дж.К. Трактат об электричестве и магнетизме. В двух томах. Т.1 М.: Наука, 1989.


**Сведения об авторе:**


**Хачикян Альберт Серобович –** кандидат физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении. **Адрес:** 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2
**Тел.:** (37410) 74-02-89

# УПРУГИЕ ВОЛНЫ В СРЕДЕ С ЗАРЯЖЁННЫМИ ТОЧЕЧНЫМИ ДЕФЕКТАМИ

**Шекоян А.В.**

Выведена система уравнений, описывающих распространение упругой волны в среде с заряжёнными точечными дефектами. Выведено эволюционное уравнение.

Во многих случаях точечные дефекты должны быть заряжёнными [1,2]. Например, в ионных кристаллах, если удалить один атом, там появляющийся точечный дефект будет заряжённым.

В этом параграфе будет исследовано распространение упругой волны в среде, где есть заряжённые точечные дефекты.

Предполагается, что имеется однородный изотропный, бесконечный диэлектрик, где есть заряжённые точечные дефекты, которые создают в среде электрическое поле $E_i\left(t, x_1, x_2, x_3\right)$. В этом случае точечные дефекты будут взаимодействовать так же и через электрическое поле, кроме тех, которые были, когда они не были заряжёнными. Предполагается, что концентрация точечных дефектов небольшая, так что нелинейным взаимодействием между ними можно пренебречь, которое существовало для незаряжённых точечных дефектов, когда их концентрация была большая.

Система уравнений, описывающая распространение упругой волны в такой среде, описывается уравнениями [3]:

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}, \tag{1}$$

где $\sigma_{ik}$ – тензор напряжений, $u_i$ – смещение, $\rho$ – плотность среды. Изменение количества дефектов в единице объёма среды описывается кинетическими уравнениями, которые в данном случае имеют вид:

$$\frac{\partial n_{1,2}}{\partial t}=q_{01,02}+e_{1,2}\frac{\partial E_i}{\partial x_i}+D_{1,2}\Delta n_{1,2}+q_{1,2}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}-\beta_{1,2}n_1-\beta_{12,21}n_{12} \qquad \left(i=1,2\right) \tag{2}$$

где $n_1$ – количество вакансий в единице объёма, $n_2$ – количество межузельных дефектов в единице объёма, $q_{01,02}$ – скорость генерации точечных дефектов при отсутствии деформации, $e_{1,2}$ – коэффициенты взаимодействия точечных дефектов через электрическое поле, $D_{1,2}$ – коэффициенты диффузии точечных дефектов, $q_{1,2}$ – коэффициенты взаимодействия деформации с дефектами, $\beta_{12,21}$ – скорость взаимной рекомбинации дефектов типа «межузельный атом–вакансия» и вакансия–межузельный атом, соответственно.

Так как заряжённые точечные дефекты создают в среде электрическое поле, которое меняется в пространстве и во времени, то к уравнениям (1) и (2) следует добавить уравнения Максвелла:

$$\mathrm{div}\vec{D}=0, \tag{3}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{E}=0, \tag{4}$$

где $\vec{D}$ – вектор электрического смещения.

Связь тензора и вектора смещения $D_i$ со свободной энергией даётся известными соотношениями [3,4]:

$$\sigma_{ik}=\left(\frac{\partial F}{\partial u_{ik}}\right)_{E_i,n_i}, \quad D_i=-\left(\frac{\partial F}{\partial E_{ik}}\right)_{u_{ik},n_i}, \tag{5}$$

где $F$ – свободная энергия единицы объёма среды, которая имеет следующий вид:

$$F=t_1u_{ik}u_{pl}+t_2u_{ik}E-t_3u_{ik}n_1-t_4u_{ik}n_2+\alpha_1n_1n_2+t_2n_1^2+\alpha_5n_1E+\alpha_3n_2^2+\alpha_4E^2+\alpha_6n_2E+$$
$$+t_5u_{ik}u_{pl}u_{mn}+t_6u_{ik}u_{pl}E+t_7u_{ik}u_{ll}n_1+t_8u_{ik}u_{pl}n_2+t_9u_{ik}n_1E+t_{10}u_{ik}n_2E+t_{11}u_{ik}n_1n_2+t_{12}u_{ik}n_1^2+ \quad (6)$$
$$+t_{13}u_{ik}n_2^2+t_{14}u_{ik}E^2+\alpha_7E^2n_1+\alpha_8E^2n_2+\alpha_9n_1n_2E+\alpha_{10}n_1n_2^2+\alpha_{11}n_2n_1^2+\alpha_{12}n_1^3+\alpha_{13}n_2^3+\alpha_{14}E^3.$$

$t_i$ и $\alpha_i$ –тензоры разного ранга. Для упрощения записи приняты такие обозначения.

Выполняя математические операции по формулам (5) для $E_3$ и $u_3$ получим в одномерном приближении следующие уравнения:

уравнения (2), (7) и (8) представляют замкнутую систему, которая описывает распространение упругой волны в вышеуказанной среде.

$$\rho\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+t_2\frac{\partial E}{\partial x}-t_3\frac{\partial n_1}{\partial x}-t_4\frac{\partial^2n_2}{\partial x}+t_6E\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+t_6\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial E}{\partial x}+$$
$$+2t_5\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+t_7n_1\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+t_8n_2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+t_7\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial n_1}{\partial x}+t_8\frac{\partial n_2}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+$$
$$+t_9E\frac{\partial n_1}{\partial x}+t_9n_1\frac{\partial E}{\partial x}+t_{10}E\frac{\partial n_2}{\partial x}+t_{10}n_2\frac{\partial E}{\partial x}+t_{11}n_2\frac{\partial n_1}{\partial x}+ \quad (7)$$
$$+t_{11}n_1\frac{\partial n_2}{\partial x}+2t_{12}n_1\frac{\partial n_1}{\partial x}+2t_{13}n_2\frac{\partial n_2}{\partial x}+2t_{14}E\frac{\partial E}{\partial x},$$

$$t_2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=2\alpha_4\frac{\partial E}{\partial x}+\alpha_5\frac{\partial n_1}{\partial x}+\alpha_6\frac{\partial n_2}{\partial x}+2t_6\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+t_9n_1\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+t_9\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial n_1}{\partial x}+$$
$$+t_{10}n_2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+t_{10}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial n_2}{\partial x}+2t_{14}E\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+2t_{14}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial E}{\partial x}+2t_7n_1\frac{\partial E}{\partial x}+ \quad (8)$$
$$+2\alpha_7E\frac{\partial n_1}{\partial x}+2\alpha_8n_2\frac{\partial E}{\partial x}+2\alpha_8E\frac{\partial n_2}{\partial x}+\alpha_9n_2\frac{\partial n_1}{\partial x}+\alpha_9n_1\frac{\partial n_2}{\partial x}+6\alpha_{14}E\frac{\partial E}{\partial x}=0,$$

где $a=\lambda+\frac{4}{3}\mu$.

Как и в предыдущих главах, систему нелинейных уравнений (2), (7), (8) будем исследовать методом эволюционного уравнения. Для этого следует перейти к новой координате $\tau=\frac{x}{\mathrm{v}}-t,$ где v –линейная скорость волны. Следует принять также следующие порядки для величин: $u\sim\varepsilon^2$, $D_i\sim\varepsilon^2$, $\tau\sim\varepsilon$, где $\varepsilon$ –некоторый малый параметр. Порядки остальных величин получаются из соответствующих уравнений. После перехода к координате $\tau$ определяются порядки величины. Слагаемые этой системы, которые имеют наивысшие порядки, т.е. главные, имеют следующий вид:

$$\left(\rho-\frac{a}{\mathrm{v}^2}\right)\frac{\partial u}{\partial\tau}=\frac{t_2}{\mathrm{v}}E, \quad (9)$$

$$E=-\frac{t_2}{2\mathrm{v}\alpha_4}\frac{\partial u}{\partial\tau}, \quad (10)$$

$$n_{1,2}=\frac{e_{1,2}t_2}{2\mathrm{v}^2\alpha_4}\frac{\partial u}{\partial\tau}-\frac{q_{1,2}}{\mathrm{v}}u. \quad (11)$$

Остальные уравнения – следующего порядка малости – имеют вид:

$$2a\frac{\partial^2u}{\partial x\partial\tau}-t_4\frac{\partial n_2}{\partial\tau}-t_3\frac{\partial n_1}{\partial\tau}+t_6E\frac{\partial^2u}{\partial\tau^2}+t_6\frac{\partial u}{\partial\tau}\frac{\partial E}{\partial\tau}+$$
$$+2t_5\frac{\partial u}{\partial\tau}\frac{\partial^2u}{\partial\tau^2}+2t_{14}E\frac{\partial E}{\partial\tau}=0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial \tau} + \alpha_6 \frac{\partial n_2}{\partial \tau} - \frac{2t_6}{v^2} \frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \frac{2t_{14}}{v} E \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} +$$
$$+ \frac{2t_{14}}{v} \frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{\partial E}{\partial \tau} + 6\alpha_4 E \frac{\partial E}{\partial \tau} = 0, \tag{13}$$

$$\frac{D_1}{v^2} \frac{\partial^2 n_1}{\partial \tau^2} - \beta_1 n_1 - \beta_{12} n_2 = 0, \tag{14}$$

$$\frac{D_2}{v^2} \frac{\partial^2 n_2}{\partial \tau^2} - \beta_2 n_2 - \beta_{21} n_1 = 0. \tag{15}$$

Исключим величины $E$, $n_1$ и $n_2$ так, чтобы получилось одно уравнение для $u$. В слагаемых, где эти величины находятся под операцией дифференцирования, а также в нелинейных слагаемых, исключение будем делать главными членами (9)–(10).

Выполняя вышеуказанные математические преобразования, получим следующее эволюционное уравнение:

$$p_1 \frac{\partial^8 u}{\partial \tau^8} + p_2 \frac{\partial^7 u}{\partial \tau^7} + p_3 \frac{\partial^6 u}{\partial \tau^6} + p_4 \frac{\partial^5 u}{\partial \tau^5} + p_6 \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3} + p_7 \frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = 0, \tag{16}$$

где коэффициенты $p_i$ имеют следующий вид:

$$p_1 = \frac{t_3 D_2^2 D_1 e_2 t_2}{4\, v^8\, Q \alpha_4 a}, \quad p_2 = -\frac{t_3 D_2 D_1^2 q_2}{2\, v^7\, Qa}, \; p_3 = \frac{D_2 t_2}{4Q\, v^6\, \alpha_4 a} \left( \frac{t_4 D_1 e_1}{v^2} - t_3 e_2 Q_1 + D_1 e_2 \beta_{21} t_3 \right),$$

$$p_4 = \frac{t_4 D_1 D_2 \left( q_1 + q_2 \right)}{2aQ\, v^5}, \; p_5 = \frac{Q_1}{4aQ v^4 \alpha_4} \left( t_4 e_1 t_2 + t_3 \beta_2 \right), \; p_6 = \frac{Q_1}{2Q\, v^3\, a} \left( t_4 q_1 + t_3 q_2 \right),$$

$$p_7 = \frac{1}{\alpha_4 a\, v^2} \left( -\frac{t_6 t_2}{2} + v \alpha_4 t_5 + \frac{t_{14} t_2^2}{8\alpha_4} \right), \; Q = \beta_1 \beta_2 - \beta_{12} \beta_{21}, \quad Q_1 = \beta_2 D_1 + \beta_1 D_2.$$

Из анализа коэффициентов видно, что для заряжённых точечных дефектов диффузия играет существенную роль. Если подставить $D_1 = D_2 = 0$, т.е. пренебрежём диффузию, все коэффициенты уравнения (16), кроме нелинейной превращаются в ноль.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Ланно М., Бургуен Ж. Точечные дефекты в полупроводниках. М.: Мир, 1984. 263с. (M.: Lannoo, I. Bourgoin. Point defects in Semiconductors. Springer–Verlag. Berlin Heidelberg New York. 1981, p.263).
2. Болтаке Б.И. Диффузия и точечные дефекты в полупроводниках. Л.: Наука, ленинградское отделение. 1972. 384с.
3. Багдоев А.Г., Ерофеев В.И., Шекоян А.В. Линейные и нелинейные волны в диспергирующих сплошных средах. М.: Физматлит, 2009. 318с.
4. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. М.: Физматлит, 2003. 620с.


**Сведения об авторе:**


**Шекоян Ашот Вазгенович –** к.ф.м.н., ст.н.с. Института механики НАН Армении.
**E-mail:**ashotshek@mechins.sci.am

# ЗАЩИТА ПОДШИПНИКОВ КАЧЕНИЯ ОТ ВИБРАЦИОННЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ В РОТОРНЫХ МАШИНАХ

**Шекян Г.Г., Геворкян А.В.**

В работе рассмотрены вынужденные колебания высокоскоростных роторных машин с роторами на подшипниках качения. Показано, что в высокоскоростных роторных машинах одной из главных причин выхода из строя подшипников являются вибрационные нагрузки, которые приводят к перенапряжению контактных поверхностей качения и нарушению режима работы подшипников.

**Постановка задачи и решения.** Пусть жёсткий ротор электрической машины вращается на упругих опорах в амортизированном корпусе, в магнитном поле.

Наличие магнитного поля смещает собственные частоты системы в сторону низких частот, поэтому целесообразно вести понятие эквивалентной жёсткости упругих опор, учитывающие жёсткость упругих элементов и условную жёсткость магнитного поля [4], приведённую к геометрическому воздушному зазору.

Условная приведенная жёсткость магнитного поля согласно [5] будет:

$$C_M = 7dlB^2 \frac{1}{\delta} \frac{кг.}{см.}, \tag{1}$$

где $d$ – наружный диаметр пакета ротора в см., $l$ – длина пакета в см., $\delta$ – односторонний геометрический зазор в см., $B$ – магнитная индукция в зазоре.

Эквивалентная жёсткость упругих опор будет [5] $C_2 = C_2' - C_M$, где $C_2'$ – жёсткость упругих опор.

Магнитное одностороннее притяжение при некотором первоначальном неравномерном зазоре ротора со статором будем считать постоянным [4,5]. Если ротор машины смещён параллельно самому себя в статоре на величину $e_0$, то установившееся одностороннее магнитное притяжение будет [5]

$$P_M = 7dlB^2 \frac{e_0}{\delta} кг., \tag{2}$$

Возмущающая сила $P_u \sin \omega t$ от неуравновешенности ротора вызывает изменение первоначального смещения ротора на величину $f \sin \omega t$, а сила одностороннего притяжения изменена на величину

$$P_M - P_{0M} = 7dlB^2 \frac{f}{\delta} \sin \omega t = \Delta P_M \sin \omega t, \tag{3}$$

где $P_M$ – сила одностороннего магнитного притяжения с учётом смещения ротора в статоре, $f$ – прогиб упругих опор от максимальной возмущающей силы неуравновешенности ротора, если бы эта сила была бы приложена на роторе статически.

Тогда, суммарная возмущающая сила будет:

$$P(t) = P_u \sin \omega t + \Delta P_M \cos \varphi \sin \omega t, \tag{4}$$

где $P = P_u + \Delta P_M \cos \varphi$ – максимальная возмущающая сила, $\varphi$ – угол между $P_M$ и $Z$.

Малые колебания системы двух масс (ротора $M_2$ и статора $M_1$) с двумя степенями свободы в направлении оси Z (рис.1) можно описать системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} M_1\ddot{Z}_1 + (1+i\delta_{m_1})C_1 Z_1 + (1+i\delta_{m_2})C_2(Z_2 - Z_1) + f(\mu_1 \dot{Z}) = 0 \\ M_2\ddot{Z}_2 + (1+i\delta_{m_2})C_2(Z_2 - Z_1) + f\left[\mu_1(\dot{Z}_2 - \dot{Z}_1)\right] = P\sin\omega_1 t \end{cases} \tag{5}$$

где $\delta_{m_1}$ – коэффициент неупругого сопротивления в материале амортизатора; $\delta_{m_2}$ – коэффициент неупругого сопротивления материала упругого элемента; $\omega_1$ – частота вращения ротора; $C_1$ –

жёсткость амортизатора; $C_2$ – эквивалентная жёсткость упругих опор с учётом демпфирования в магнитном поле.

В силу отсутствия методов определения функций $f(\mu_1\dot{Z})$ и $f\left[\mu_1(\dot{Z}_2-\dot{Z}_1)\right]$, в работе принято, что $f(\mu_1\dot{Z})=f\left[\mu_1(\dot{Z}_2-\dot{Z}_1)\right]=0$, тогда уравнение (5) примет вид:

$$\begin{cases} M_1\ddot{Z}_1+(1+i\delta_{m_1})C_1Z_1+(1+i\delta_{m_2})C_2(Z_2-Z_1)=0 \\ M_2\ddot{Z}_2+(1+i\delta_{m_2})C_2(Z_2-Z_1)=P\sin\omega_1 t \end{cases} \tag{6}$$

Из решения дифференциальных уравнений (6) амплитуду колебания корпуса будет:

$$A_1^2=\frac{a_1+\delta_{m_2}^2 a_1}{b+\delta_{m_1}^2 a_2}. \tag{7}$$

График этой функции (рис.2) изображает равностороннюю гиперболу с асимптотически параллельными осям координат и смещёнными относительно последних на расстоянии:

$$x_0=-\frac{b}{a_2},\, y_0=\frac{a_1}{a_2}, \tag{8}$$

где $a_1$, $a_2$, $b$ – коэффициенты, зависящие от возмущающей силы, масс ротора и корпуса, а также от параметров упругих опор.

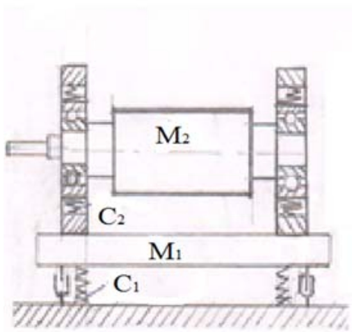



**Рис.1.** Жёсткий ротор на упругих опорах, в амортизированном корпусе

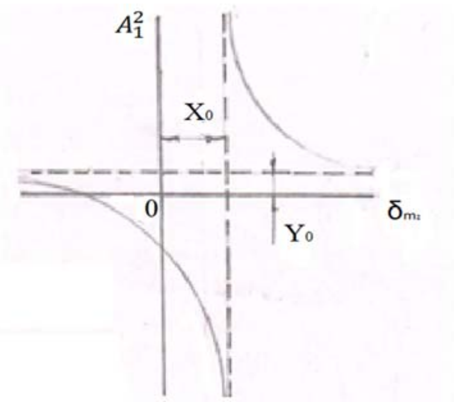



**Рис.2.** Зависимость амплитуды колебаний корпуса машины от величины демпфирования

Как видно из графика (рис.2) функция (7) не имеет экстремума. Амплитуда $A_1^2$ получает большое значение, когда демпфирование приближается к значению $x_0$. С ростом величины демпфирования амплитуда $A_1^2$ понижается, стремясь к пределу, равному $y_0$. Таким образом, сколько бы не повышалось демпфирование системы, снизить $A_1^2$ меньше, чем $y_0$, не удастся.

Для оценки степени виброизоляции корпуса машины упругими опорами вводится понятие коэффициента передачи сил от ротора к корпусу, выражаемого соотношением:

$$\mu=\frac{P'}{P}, \tag{9}$$

где $P'$ – амплитуда сил передаваемых на корпус машины, $P$ – амплитуда возмущающей силы. Для понижения граничной частоты следует понижать порциальные частоты $\omega_1$ и $\omega_2$ уменьшением жёсткости С1 и С2, либо увеличить массы $M_1$ и $M_2$.

Недостатком такой системы является наличие второго резонанса. Более того, граничная частота в двумассовых системах обычно выше, чем в эквивалентных одномассовых системах, что уменьшает частотную зону эффективного снижения коэффициента передачи сил.

Из этого следует, что при применении в электрических машинах упругих и упруго-демпферных опор, нужно отказаться от амортизаторов, которые обычно устанавливают под корпусом машины.

Рассмотрим два основных типа демпфирования**:** вязкое и за счёт внутреннего поглощения энергии в материале упругого элемента. Вводя шесть главных координат qi и соответствующие им обобщённые возмущающие силы Pi(t), i=1,2,3…6, считая силы демпфирования линейно-зависящими от скорости и используя уравнение Лагранжа, получим шесть независимых дифференциальных уравнений вынужденных колебаний при вязком демпфировании:

$$\beta_i \ddot{q}_i + K_i \dot{q}_i + \alpha_i q_i = P_i(t) \tag{10}$$

и шесть дифференциальных уравнений с учётом демпфирования за счёт внутреннего поглощения энергии в материале упругого элемента поры:

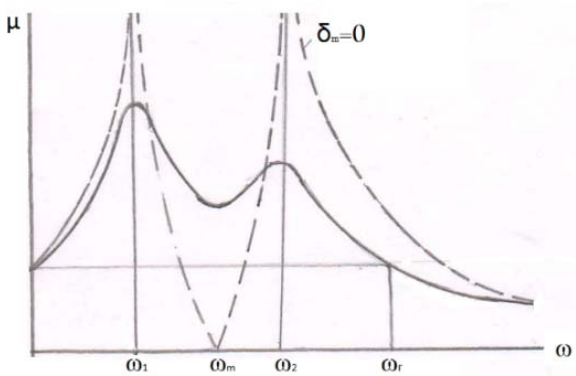



Рис.3. Зависимость коэффициента передачи сил от частоты возмущения для двумассовой системы

$$\beta_i \ddot{q}_i + (1 + i\delta_{mi})\alpha_i q_i = P_i(t) \tag{11}$$

где $K_i$ – коэффициент вязкого трения по $i$-ой главной координате; $\beta_i$ и $\alpha_i$ – коэффициенты, зависящие от параметров массы ротора и упругой опоры; $P_i(t)$ – обобщённая возмущающая сила – $P_i(t) = P_{mi}\,\sin\omega t$.

Решая уравнения (10) и (11), получим соотношения, связывающие комплексные амплитуды смещения и возмущающие силы при вязком демпфировании:

$$P_{mi} = \overline{A}\sqrt{(\alpha_i - \beta_i\omega_i^2)^2 + \omega_i^2 K_i^2}\,, \tag{12}$$

а при учёте демпфирования в материале:

$$P_{mi} = \overline{A}\sqrt{(\alpha_i - \beta_i\omega_i)^2 + \delta_{mi}^2\alpha_i^2}\,, \tag{13}$$

где $\overline{A}$ – комплексная амплитуда смещения; $\omega_i$ – собственная частота системы по i -ой главной координате; $\delta_{mi}$ – коэффициент неупругого сопротивления упругого элемента опоры.

Обобщённые силы, действующие на опору в направлении координат $q_i$, будут:

– при вязком демпфировании: $P'_{mi} = \dfrac{\partial U}{\partial q_i} + \dfrac{\partial F}{\partial q_i} = \overline{A}\sqrt{\alpha_i^2 + \omega_i^2 K_i^2}$ ; (14)

– при демпфировании в материале: $P'_{mi} = \dfrac{\partial U}{\partial q_i} = \overline{A}\alpha_i^2\sqrt{1+\delta_{mi}^2}$ , (15)

где $U$ – потенциальная энергия системы; $F$ – функция рассеяния.

В случае вязкого демпфирования энергия, переходящая в тепло, характеризуется функцией рассеяния, которую по аналогии с кинетической и потенциальной энергией можно представить в виде $F = \dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{6} K_i q_i^2$ .

Коэффициент передачи сил для направлений координат $q_i$ будет:

– в случае вязкого демпфирования: $$\mu_i = \sqrt{\frac{1+4\delta_i^2 K_i^2}{(1-\delta_i^2)^2+\delta_{mi}^2}}\,, \tag{16}$$

а в случае демпфирования в материале: $$\mu_i = \sqrt{\frac{1+\delta_{mi}^2}{(1-\delta_i^2)^2+\delta_{mi}^2}}, \quad \delta_i = \frac{\omega_i}{\omega_{0i}}, \tag{17}$$

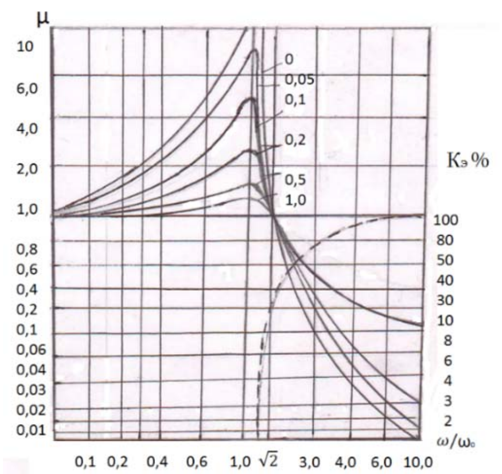
где $K_i$ – коэффициент вязкого демпфирования: $K_i = \dfrac{\gamma_i^2}{\sqrt{4\pi^2+\gamma_i^2}}$ ,

$\gamma_i$ – логарифмический декремент затухания упругой опоры в направлении колебаний по главной координате:

$$\gamma_i = \frac{2\pi K_i}{\sqrt{4\alpha_i\beta_i - K_i^2}}.$$

Графики выражений (16) и (17) представлены на рис.4 и 5. На этих графиках пунктиром нанесены кривые эффективности использования упругих опор, выражаемые зависимостью:

$$K_э = (1-\mu)100\%, \tag{18}$$



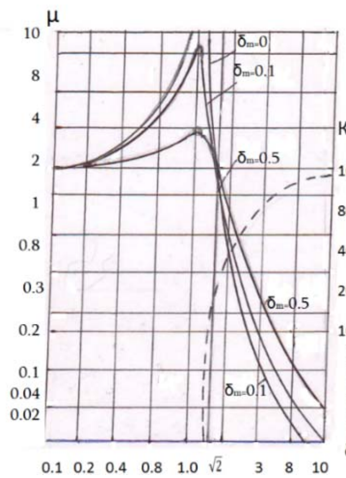




**Рис.4.** Зависимость коэффициента *передачи сил* и ее эффективность при различных значениях вязкого демпфирования

**Рис.5.** Зависимость коэффициента передачи сил и ее эффективности от соотношения частот возмущения и собственных частот при различных значениях демпфирования в материале опоры

## Выводы и заключения

Анализ кривых (рис.4 и 5) позволяет сделать следующие выводы:

– Если частота возмущения $\omega_i$ мала по сравнению с частотой $\omega_{0i}$, то коэффициент передачи сил незначительно отличается от единицы, и применение упругих опор в этом случае не имеет смысла.

– Когда отношение частот приближается к единице, т.е. $\omega_{0i}$ близка к $\omega_i$, коэффициент передачи сил возрастает и при малом демпфировании амплитуда колебания принимает большие значения (резонанс).

– Для всех значений коэффициента демпфирования коэффициент передачи сил становится меньше единицы при $\delta_i > \sqrt{2}$ .

– С уменьшением $\delta_i$, что равносильно уменьшению жёсткости упругого элемента опоры для установившегося режима вращения ротора, значение $\mu$ приближается к нулю, а эффективность уменьшения коэффициента передачи сил повышается. Начиная с $\delta_i \approx 5$, наклон кривой $K_э$ уменьшается так, что нет существенного повышения коэффициента $\mu$ при дальнейшем уменьшении жёсткости упругого элемента опоры. В большинстве случаев достаточно, чтобы

$\delta_i \approx 2,5 \div 5$. Уже при $\delta_i$=2,5 (К=$\delta_m$= 0 – нулевое демпфирование) упругая опора поглощает 81% усилий.

Таким образом, при правильном выборе жёсткости упругих опор динамические нагрузки, действующие на подшипники, существенно снижаются. При этом, упругая опора должна обладать достаточной прочностью для выдерживания веса ротора.

– При $\delta_i > \sqrt{2}$ величина $\mu$ тем меньше, чем меньше коэффициент демпфирования. Однако, этот вывод можно распространить только на электрические машины, работающие в стационарных условиях, у которых возмущающие силы являются гармоническими функциями времени.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Александровский В.В. Упругие опоры для роторов электрических машин. //Труды НИИ Электромеханики. М.: «Энергия», 1965. Т.20, с.35-39.
2. Позняк Э.Л. Нелинейные колебания неуравновешенных роторов на подшипниках качения. //«Машиноведение». 1971. №1. С.23-31.
3. Позняк Э.Л. и др. Демпфирование вынужденных изгибных колебаний гибких роторов / В кн.: «Колебания и прочность при переменных напряжениях». М.: «Наука», 1965. С.53-79.
4. Шекян Г.Г. К вопросу о факторах, снижающих долговечность подшипников высокоскоростных электрических машин. /Международный тематический сборник науч. Трудов, сер. Машиностроение, Ереван:1983. С.19-24.
5. Шекян Г.Г. Динамика роторных машин. Ереван: Изд. «Гитутюн», 2004. 338с.


**Сведения об авторах:**


**Шекян Гамлет Гургенович** – д.т.н., профессор, вед. научный сотрудник. Институт механики НАН РА. (+374 91) 49 38 40,
**E-mail:** hamlet@mechins.sci.am
**Геворкян Арамаис Викторович** – к.т.н., директор ЗАО НП ИЦ «Электромаш ГАМ». (+374 94) 88 58 98,
**E-mail:** elektramash@mail.ru.

**TWO-DIMENSIONAL TURBULENT FLOW IN A CHANNEL OF CONSTANT WIDTH**

**Abramov V.V., Sumbatyan M.A.**

We study a two-dimensional flow of viscous incompressible fluid in a channel of constant width. The problem is studied in frames of the Navier-Stokes equations written in terms of stream – vorticity functions. To solve the problem, we propose a new semi-analytical iteration method which reduces the problem to a pair of elliptic boundary value problems at each time step. The method is based on special Green's functions for stream and vorticity functions. We demonstrate graphically behavior of physical quantities which determine the flow in the channel.

**1. Problem formulation.** We study the problem about a uniform turbulent flow of viscous incompressible fluid in an infinite channel. The problem is studied in a two-dimensional formulation. The channel has a constant width $b$. The roughness of the channel walls as a factor, which affects the laminar-turbulent transition, is ignored. The walls are absolutely rigid, impenetrable for fluid, and the no-slip condition should be satisfied over the walls. Various methods have been applied to solve the formulated problem [1-3].

Let us introduce the Cartesian coordinate system so that axis $Ox$ is directed along the channel, axis $Oy$ is directed transversally to the channel (see Fig. 1). Let us denote the velocity vector as $\overline{v} = (v_x; v_y) = (u; v)$, where $u = u(x,y,t)$ is the longitudinal component of the velocity, and

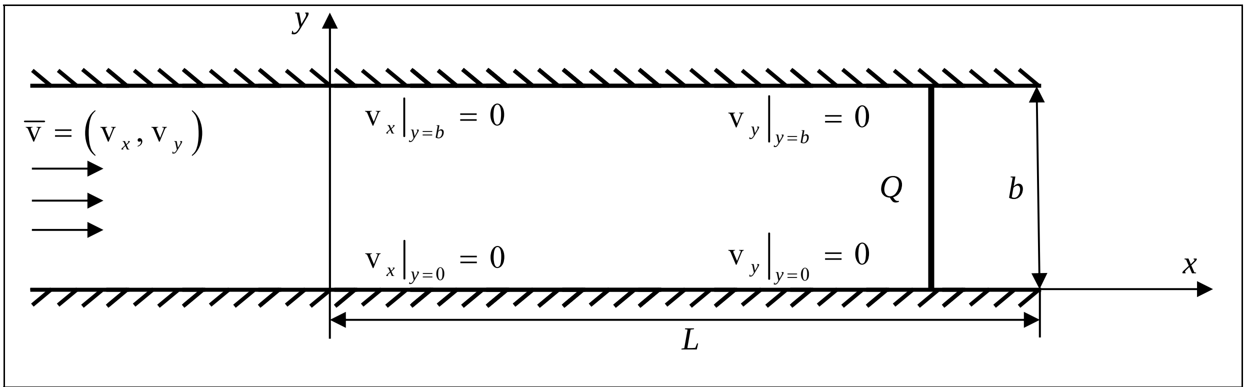



Fig. 1 – The sketch of the domain under consideration

$v = v(x,y,t)$ is its transverse component.

In order to solve the problem, we use the Navier-Stokes equations in terms of stream and vorticity functions [4]:

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = -\frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\zeta}{\partial y} + \upsilon\Delta\zeta,\ u = \frac{\partial\psi}{\partial y},\ v = -\frac{\partial\psi}{\partial x},\ \zeta = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = \Delta\psi \tag{1}$$

Here $\psi = \psi(x,y,t)$ is the stream function, and $\zeta = \zeta(x,y,t)$ is the vorticity.

The flow rate across the normal cross-section of the channel $Q$ is assumed to be known. This implies

$$Q = \int_0^b u(x,y,t)\,dy = \psi(x,b,t) - \psi(x,0,t) \tag{2}$$

The no-slip boundary conditions imply the following mathematical relations:

$$\psi\big|_{y=0} = 0,\ \psi\big|_{y=b} = Q,\ \left.\frac{\partial\psi}{\partial y}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial\psi}{\partial y}\right|_{y=b} = 0 \tag{3}$$

To solve the formulated problem, one should take into account the small-scale vortices that results in increasing number of nodes of the computational grid, required for correct calculations.

In the present work we develop a new approach which is based upon the following assumptions. First, it is experimentally confirmed that the choice of the initial velocity field does not change the qualitative character of the turbulent flow. Therefore, it is assumed that at the initial moment of time there is accepted a certain initial condition for the vorticity. Second, it is assumed that the uniform turbulent flow in the infinite channel has the same properties along the flow, if the characteristics of these flow are registered with a sufficiently long period $L$. This assumption makes possible to write out periodic boundary conditions for the stream function and the vorticity, as well as for their derivatives.

By taking into account the above assumptions and using the simplest Euler's finite-difference implicit scheme along time for the viscous term in (1) and explicit scheme for the convective term, the problem may be reduced at each temporal step to the pair of the following elliptic problems:

$$\begin{gathered}
\zeta_n - \varepsilon\Delta\zeta_n = g_{n-1},\ \Delta\psi_n = \zeta_n \\
\psi\big|_{x=0} = \psi\big|_{x=L},\ \zeta\big|_{x=0} = \zeta\big|_{x=L} \\
\left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{x=L},\ \left.\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right|_{x=L} \\
\psi\big|_{y=0} = 0,\ \psi\big|_{y=b} = Q \\
\left.\frac{\partial\psi}{\partial y}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial\psi}{\partial y}\right|_{y=b} = 0
\end{gathered} \tag{4}$$

where $g = \zeta_{n-1} + \theta\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)_{n-1}$, $\varepsilon = \upsilon\theta$ and $\theta$ is the step over time.

It should also be noted that if one applies a certain more advanced finite-difference scheme instead of Euler's one, say the Adams-Bashforth scheme in a combination with the Crank-Nicolson scheme [4], then the system of two elliptic equations keeps its form (4), with a slight modification of expression for function $g$.

**2. Expressions for stream and vorticity functions.** It is stated above that, to find these two functions, one should solve two elliptic equations: the Helmholtz equation for vorticity function $\zeta$ and the Poisson equation for stream function $\psi$. It is obvious that despite these are two different equations, their solutions are closely connected with each other.

The classical approach to these two elliptic equations is to discretize them, and then – to reduce them to systems of linear algebraic equations (SLAE). For example, for the Helmholtz equation it is quite efficient to use the $LU$ decomposition of the matrix $A$ of the initial SLAE, in particular the $LDL^T$ method, where $L$ is a low-triangle matrix, $D$ is a diagonal matrix, $L^T$ is an upper-triangle matrix. The main advantage of this method is that if such a decomposition is obtained only once, this further permits solution of the SLAE for many right-hand sides. However, this advantage of the method is at the same time its disadvantage, since a storage of this $LDL^T$ requires too much memory. Regarding Poisson's equation, the most popular method is its reduction to a three-diagonal SLAE and the reduction of its further solution to a certain code parallelization.

Our approach consists of solving both the Helmholtz and Poisson equations (4) by using the boundary integral equations (BIE) [5]. For this aim, let us construct two special Green's functions for stream and vorticity functions. They have been developed in [5]:

$$G_\psi(\xi,\eta) = -\frac{1}{b}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-b_m|\xi-x|} + e^{-b_m(L-|\xi-x|)}}{b_m\left(1-e^{-b_mL}\right)}\sin b_m y \sin b_m\eta \tag{5}$$

$$G_\zeta(\xi,\eta) = -\frac{1}{b\varepsilon}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda_m|\xi-x|} + e^{-\lambda_m(L-|\xi-x|)}}{\lambda_m\left(1-e^{-\lambda_mL}\right)}\sin b_m y \sin b_m\eta \tag{6}$$

where $b_m = \dfrac{\pi m}{b}$, $\lambda_m = \sqrt{b_m^2 + \dfrac{1}{\varepsilon}}$.

By applying the BIE method to the elliptic boundary value problems (4) one obtains the following expressions:

$$\psi^{(n)}(x;y) = \varepsilon\left[\left(\frac{\operatorname{sh}\frac{b-y}{\sqrt{\varepsilon}}}{\operatorname{sh}\frac{b}{\sqrt{\varepsilon}}} + \frac{y}{b} - 1\right)\zeta^{(n)}(x;0) + \left(\frac{\operatorname{sh}\frac{y}{\sqrt{\varepsilon}}}{\operatorname{sh}\frac{b}{\sqrt{\varepsilon}}} - \frac{y}{b}\right)\zeta^{(n)}(x;b)\right] +$$

$$+\frac{\varepsilon}{b}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_m}\int_0^L\left[\zeta^{(n)\prime}(\tau;0) - (-1)^m\zeta^{(n)\prime}(\tau;b)\right]\operatorname{sgn}(\tau - x)\left[\frac{\lambda_m}{b_m}\frac{e^{-b_m(L-|\tau-x|)} - e^{-b_m|\tau-x|}}{1-e^{-b_mL}} - \right. \tag{7}$$

$$\left. -\frac{b_m}{\lambda_m}\frac{e^{-\lambda_m(L-|\tau-x|)} - e^{-\lambda_m|\tau-x|}}{1-e^{-\lambda_mL}}\right]d\tau\sin b_m y + \frac{Qy}{b} -$$

$$-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{4\varepsilon b_m\lambda_m\left(1-e^{-b_mL}\right)\left(1-e^{-\lambda_mL}\right)}\int_0^L g_m^{(n-1)}(\tau)\,J_m^0(x;\tau)\,d\tau\sin b_m y$$

$$\zeta^{(n)}(x;y) = \frac{\operatorname{sh}\frac{b-y}{\sqrt{\varepsilon}}}{\operatorname{sh}\frac{b}{\sqrt{\varepsilon}}}\zeta^{(n)}(x;0) + \frac{\operatorname{sh}\frac{y}{\sqrt{\varepsilon}}}{\operatorname{sh}\frac{b}{\sqrt{\varepsilon}}}\zeta^{(n)}(x;b) - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2\varepsilon\lambda_m\left(1-e^{-\lambda_mL}\right)}\int_0^L g_m^{(n-1)}(\xi)\times$$

$$\times\left[e^{-\lambda_m(L-|\xi-x|)} - e^{-\lambda_m|\xi-x|}\right]d\xi\sin b_m y - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{b_m}{b\lambda_m^2\left(1-e^{-\lambda_mL}\right)}\int_0^L\left[\zeta^{(n)\prime}(\xi;0) - (-1)^m\zeta^{(n)\prime}(\xi;b)\right]\times \tag{8}$$

$$\times\operatorname{sgn}(\xi - x)\left[e^{-\lambda_m(L-|\xi-x|)} - e^{-\lambda_m|\xi-x|}\right]d\xi\sin b_m y$$

where $J_m^0(x;\tau) = 2\varepsilon\left\{\lambda_m\left(1-e^{-\lambda_mL}\right)\left(e^{-b_m(L-|\tau-x|)} + e^{-b_m|\tau-x|}\right) - b_m\left(1-e^{-b_mL}\right)\left(e^{-\lambda_m(L-|\tau-x|)} + e^{-\lambda_m|\tau-x|}\right)\right\}$

and $g_m^{(n-1)}(\xi) = \dfrac{2}{b}\displaystyle\int_0^b g^{(n-1)}(\xi;\eta)\sin b_m\eta\, d\eta$.

It should be noted that to find (7) and (8) on the $n$-th temporal layer, it is necessary to know their values on the ($n-1$)-th temporal layer, as well as the value of functions $\zeta^{(n)}(x;0)$, $\zeta^{(n)}(x;b)$, $\zeta^{(n)\prime}(x;0)$ and $\zeta^{(n)\prime}(x;b)$. Hence, the presented expressions (7) and (8) are only some implicit representations for stream and vorticity functions.

**3. Vorticity function on the channel walls.** It is well known that the basic obstacle to satisfy the no-slip condition is that the latter is formulated for the stream function only [4]. Therefore, formally there is no boundary condition in the elliptic boundary value problem for the vorticity in (4). With the approach proposed here the problem to find the quantities $\zeta^{(n)}(x;0)$, $\zeta^{(n)}(x;b)$, $\zeta^{(n)\prime}(x;0)$ and $\zeta^{(n)\prime}(x;b)$ from the no-slip conditions holding over the channel walls (3) can be reduced to the following system of BIEs:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{b_{2m}}{b\lambda_{2m}\left(1-e^{-b_{2m}L}\right)\left(1-e^{-\lambda_{2m}L}\right)}\int_0^L\left[\zeta^{(n)}(\tau;0) - \zeta^{(n)}(\tau;b)\right]J_{2m}^0(x;\tau)\,d\tau = \tag{9}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{-1}{2\varepsilon\lambda_{2m}\left(1-e^{-b_{2m}L}\right)\left(1-e^{-\lambda_{2m}L}\right)}\int_0^L g_{2m}^{(n-1)}(\tau)J_{2m}^0(x;\tau)\,d\tau-\frac{2Q}{b}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{b_{2m+1}}{b\lambda_{2m+1}\left(1-e^{-b_{2m+1}L}\right)\left(1-e^{-\lambda_{2m+1}L}\right)}\int_0^L\left[\zeta^{(n)}(\tau;0)+\zeta^{(n)}(\tau;b)\right]J_{2m+1}^0(x;\tau)\,d\tau=$$
$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{-1}{2\varepsilon\lambda_{2m+1}\left(1-e^{-b_{2m+1}L}\right)\left(1-e^{-\lambda_{2m+1}L}\right)}\int_0^L g_{2m+1}^{(n-1)}(\tau)\,J_{2m+1}^0(x;\tau)\,d\tau \qquad (10)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{b_{2m}}{b\lambda_{2m}\left(1-e^{-b_{2m}L}\right)\left(1-e^{-\lambda_{2m}L}\right)}\int_0^L\left[\zeta^{(n)\prime}(\tau;0)-\zeta^{(n)\prime}(\tau;b)\right]J_{2m}^0(x;\tau)\,d\tau=$$
$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2\varepsilon\lambda_{2m}\left(1-e^{-b_{2m}L}\right)\left(1-e^{-\lambda_{2m}L}\right)}\int_0^L g_{2m}^{(n-1)}(\tau)\operatorname{sgn}(x-\tau)\frac{\partial J_{2m}^*(x;\tau)}{\partial x}\,d\tau \qquad (11)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{b_{2m+1}}{b\lambda_{2m+1}\left(1-e^{-b_{2m+1}L}\right)\left(1-e^{-\lambda_{2m+1}L}\right)}\int_0^L\left[\zeta^{(n)\prime}(\tau;0)-\zeta^{(n)\prime}(\tau;b)\right]J_{2m+1}^0(x;\tau)\,d\tau=$$
$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2\varepsilon\lambda_{2m+1}\left(1-e^{-b_{2m+1}L}\right)\left(1-e^{-\lambda_{2m+1}L}\right)}\int_0^L g_{2m+1}^{(n-1)}(\tau)\operatorname{sgn}(x-\tau)\frac{\partial J_{2m+1}^*(x;\tau)}{\partial x}\,d\tau \qquad (12)$$

where $\dfrac{\partial J_m^*(x;\tau)}{\partial x}=2\varepsilon\lambda_m b_m\left\{\left(1-e^{-\lambda_m L}\right)\left(e^{-b_m(L-|\tau-x|)}-e^{-b_m|\tau-x|}\right)-\left(1-e^{-b_m L}\right)\left(e^{-\lambda_m(L-|\tau-x|)}-e^{-\lambda_m|\tau-x|}\right)\right\}$.

The solution to the system (9) – (10) and (11) – (12) is constructed by the collocation technique, with further cut of the infinite series in the kernel. To solve the arising SLAEs, various numerical techniques may be applied, in the simplest case – this is the Gauss elimination technique. It should be noted that the matrices corresponding to Eqs.(9) and (11), as well as (10) and (12) are identical to each others. This significantly reduces the computational expanses, for any applied method.

**4. The results of calculations and general conclusions.** The method proposed here is related to conditionally convergent methods [4]. This converges for sufficiently small time step $\theta$. If the Reynolds number is defined as follows Re = Q/ν, then for a given flow rate Q the Reynolds number is defined by the kinematic viscosity. In practice, the method converges if the time step decreases proportionally with the decrease of viscosity, or with the increase of the Reynolds number, i.e. $\theta \sim 1/\mathrm{Re}$. In literature there is known the theoretically critical Reynolds number for the two-dimensional channel. With our notations this is equal to $\mathrm{Re}^* = 7696$. For two figures 2 and 3 the initial distribution of physical fields is taken as a strong perturbation of the Poiseuille flow – over both longitudinal and transverse coordinate. The initial profile of the longitudinal velocity is strongly asymmetric. The elongation of the channel is taken L / b = 7.

Figures 2 and 3 show the results of the calculations with the following parameters: the number of terms in the infinite series M = 4096, the time step is $\theta = 5\cdot10^{-4}$ s, the number of nodes along the channel N = 210, the number of iterations $6\cdot10^4$, full time in the physical space is t = 30 s. It should be noted that solid lines are related to the Poiseuille parabola, and dotted lines are obtained by the proposed method. It is clear from Fig.2 that in the laminar flow a strongly asymmetric velocity diagram at the initial step then rapidly becomes symmetric with iterations, approaching with the time steps to the Poiseuille parabola. At the same time, as can be seen from Fig.3, in the turbulent flow the velocity diagram remains asymmetric with time. The calculations performed show that the turbulent flow is oscillating, and one can clearly extract from the flow a principal harmonic oscillation mode with a certain period. With so doing, the maximum value on the diagram of the longitudinal velocity does periodically float from the left to the right and vice versa, with the periodic law described above.

The authors are thankful to the Russian Ministry for Education and Science for the support by the Project 9.5794.2017/8.9.

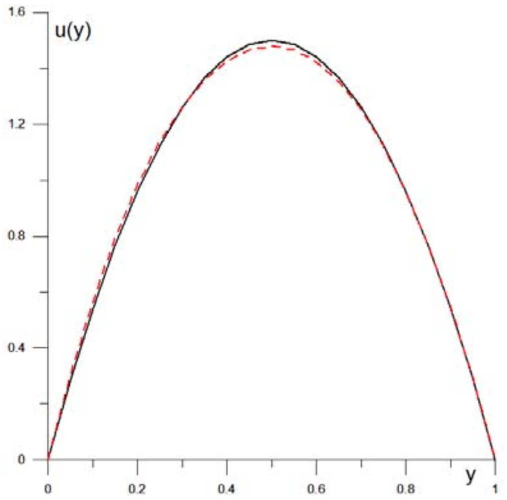



Fig. 2 – Transverse diagram of the downstream velocity in the laminar flow: Re = 5 000

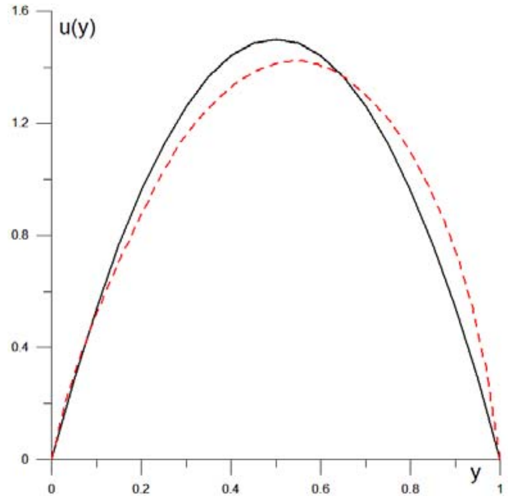



Fig. 3 – Transverse diagram of the downstream velocity in the turbulent flow: Re = 10 000

**REFERENCES**

1. J. Kim, P. Moin, R. Moser, Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number, //J. Fluid Mech., 1987, v.177, p.133-166.
2. N.V. Nikitin, Direct numerical modelling of three-dimensional turbulent flows in pipes of circular cross section, //Fluid Dynamics, 1994, v.29, No.6. p.749-758.
3. M. Briscolini, P. Santangelo, Development of the mask method for incompressible unsteady flows, //*J. Comput. Phys.*, 1989, v.84, p.57-75.
4. P.J. Roache, Computational Fluid Dynamics, 1976, Hermosa Publ.: Albuquerque, 1976.
5. M.A. Sumbatyan, V.V. Abramov, Semi-analytical method to calculate the flow of a viscous incompressible fluid in a channel of constant width, Russian Izvestiya, North-Caucasus region. Natural Sciences, 2014, No.1, p.42 – 46 (in Russian).

**Information about authors:**

**Vladimir V. Abramov** – assistant researcher, Department of Theoretical and Computer Hydroaerodynamics, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science, Southern Federal University, Milchakova Street 8a, Rostov-on-Don, Russia
**E-mail:** abram5189@yandex..ru

**Mezhlum A. Sumbatyan** – Professor, Department of Theoretical and Computer Hydroaerodynamics, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science, Southern Federal University, Milchakova Street 8a, Rostov-on-Don, Russia
**E-mail:** sumbat@math.rsu.ru

**Analytical prediction of thermal stresses in composite shells**

**Anish J., R.Velmurugan, R. Jayaganthan, G. Rajasingh**

## 1. Abstract

The use of fiber-reinforced plastics or FRPs in various industries, such as aviation, automobiles, renewable energy, etc. has drastically increased over the past decades, owing to the significant strength to weight ratios they offer. The design phase of such components must also factor in thermal loads. Thermal expansions and contractions, when restricted, lead to the buildup of stresses in a material. The distribution of these stresses across the layers of a composite tube has been dealt with here with the help of an analytical study, taking into account any radially varying user-defined temperature profile. On account of geometry, the cases handled are axisymmetric and therefore, shear stresses aren't considered.

## 2. Introduction

Fiber reinforced polymers comprise two parts: the fiber reinforcement that carries most of the load, and a polymer matrix that binds the fibers together and aids in load transfer from one fiber to another. Traditional materials such as metals are being swapped for composite materials, owing to the possibility of property tailoring that the latter allow. Construction of parts using composites is done by laying up several anisotropic composite laminae, which allows us to fortify a component with a greater stiffness only along the load paths and help realize weight savings. This advantage however, increases the complexity of design, as one needs to consider the effect of stacking on properties, as well as the variation of parameters such as strain and stress across the different layers of the laminate.

The design of cylindrical components like pressure vessels, additionally involves thermal loads in the analysis. It is convenient to analyze static loading in cases where the thermal loads are known to be more or less constant with time. Axisymmetric plane-strain conditions in a problem further simplify the analysis, whereby the variations along the θ- and z- directions may be safely neglected. However, to calculate stress at all points, numerous iterations are required. Moreover, stiffness matrices and other property matrices/vectors become unwieldly as the number of laminae/fiber orientations in the laminate increase. Temperature variations, although limited to the radial direction, may be linear or non-linear and further add to the complexity of calculations.

Therefore, it is desirable to prescribe a model through a set of steps to handle these complexities, and is accomplished through analytical studies. The work done in [1] provides a foundation for such an analysis. To analyze these stresses, shell-element approaches have been implemented before in [2–4]. Higher order shell theories may help to better predict, variations of stresses and displacements through the thickness. However, the elasticity approach, which has been implemented in this work, seemed to be more comprehensive. The isotropic case dealt with must be carefully extrapolated to an anisotropic case, as has been done in [5–7]. The present study will therefore base itself on the parameters involved in the derivations. Validation of the same shall be done using values from existing literature and the corresponding results.

## 3. Formulation

We may describe the stress-strain relationship for a composite material to be,

$$[\sigma]_{ij} = [Q]_{ij} * (\epsilon_{ij} - \alpha_{ij}.T) \tag{1.1}$$

where,

$\sigma$: Stress (N/m$^2$)

Q: Stiffness (N/m$^2$)

$\epsilon$: Strain

$\alpha$: Coefficient of thermal expansion ( 1/$^o$C)

$T$: Temperature change ($^o$C)

Converting Equation (1.1) into cylindrical co-ordinates as has been done in [8] gives us,

$$\begin{pmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_z \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{rz} \\ \gamma_{r\theta} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_r \\ \alpha_\theta \\ \alpha_z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} . T = \begin{pmatrix} \overline{S33} & \overline{S32} & \overline{S31} & \overline{S36} & 0 & 0 \\ & \overline{S22} & \overline{S21} & \overline{S26} & 0 & 0 \\ & & \overline{S11} & \overline{S16} & 0 & 0 \\ & & & \overline{S66} & 0 & 0 \\ & sym & & & \overline{S55} & \overline{S54} \\ & & & & & \overline{S44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{\theta z} \\ \tau_{rz} \\ \tau_{r\theta} \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

where the $\overline{S_{ij}}$ terms represent the values in the transformed compliance matrix.

Considering an axisymmetric problem (radial temperature distribution), we may equate shear strains to zero. Let us allow the axial strain $\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \epsilon_o$ .

Furthermore, the strain displacement relations in cylindrical co-ordinates are,

$$\epsilon_r = \frac{\partial u(r)}{\partial r} \tag{1.3}$$

$$\epsilon_\theta = \frac{u(r)}{r} \tag{1.4}$$

where u(r) represents the displacement function. Inverting Equation (1.2) and substituting Equations (1.3) and (1.4) into the same, we get the stress-displacement relations. These relations must consequently satisfy the equilibrium relation in cylindrical co-ordinates,

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \tag{1.5}$$

Substituting the expressions for $\sigma_r$ and $\sigma_\theta$ and solving the equation gives the general expression for displacement as,

$$u(r) = k_1 . r^2 + k_2 . r + C_1 . r^{k_3} + \frac{C_2}{r^{k_4}} + k_5 . \epsilon_o . r \tag{1.6}$$

where $k_1$, $k_2$, $k_3$, $k_4$ and $k_5$ are consequences of material and geometric data, and $C_1$ and $C_2$ are constants of integration. All constants assume different values for different layers. Therefore, for a layup containing (n) laminae, we obtain (n) unique solutions and (2n) integration constants ($C_1$ to $C_{2n}$). At the inner ($r_i$) and outermost ($r_o$) layers, if the pressure differential across the entire laminate is zero,

$$\sigma_r^1(r_i) = 0 \tag{1.7}$$

$$\sigma_r^n(r_o) = 0 \tag{1.8}$$

Moreover, continuity of displacement and strain necessitate that,

$$u_r^p(r_q) = u_r^{p+1}(r_q) \tag{1.9}$$

$$\left.\frac{\partial u_r^p(r)}{\partial r}\right|_{r=r_q} = \left.\frac{\partial u_r^{p+1}(r)}{\partial r}\right|_{r=r_q} \tag{1.10}$$

This means to say that the displacements and radial strains of two adjacent layers are equal at their interface. A layup with (n) layers will have (n-1) interfaces, and hence we have 2(n-1) equations from these conditions. Including Equations (1.7) and (1.8), we get a total of (2n) equations for the (2n) integrations constants we have, allowing us to obtain valid solutions for each layer.

For a fully constrained cylinder, $\epsilon_o = 0$. At the ends of the cylinder, we must take care of the axial forces. Since all forces are internal,

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{r_i}^{r_{i+1}} 2\pi r . \sigma_z . dr = 0 \tag{1.11}$$

from which we may obtain the value of $\epsilon_o$ if the problem does not involve plane strain.

Thus having obtained u(r) for each layer, we may obtain stresses and strains across the laminate.

**4. Results and Discussion:**

The present work is verified by adopting the problem dealt with in [9] and is shown in Figure 1.

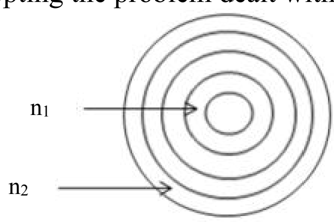



**Figure 1 Cross-section of the composite cylinder [0/90/0/90]**

A cylinder with an orthotropic laminate is allowed to deform in space, where the temperature is at -130ºC. The laminate's curing temperature is about 150ºC. The inner radius of the cylinder was 6.35 mm, and the individual layer thicknesses were 0.127 mm each. The layup is [0/90/0/90]. The temperature of the cylinder was uniform throughout, at around -130ºC, and the ends are free. The mechanical properties of the 0º lamina are listed in Table 1, and the results are compared in Figure 2.

**Table 1 Mechanical properties of the graphite-epoxy 0⁰ laminae**

| Fiber direction | Moduli ($10^9$ N/m$^2$) | | | | | | CTE ($10^{-6}$/ºC) | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $E_1$ | $E_2$ | $E_3$ | $\upsilon_{12}$ | $\upsilon_{23}$ | $\upsilon_{13}$ | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | $\alpha_3$ |
| **Axial** | 146.8 | 9.929 | 9.101 | 0.3 | 0.49 | 0.3 | -0.0774 | 33.66 | 33.66 |

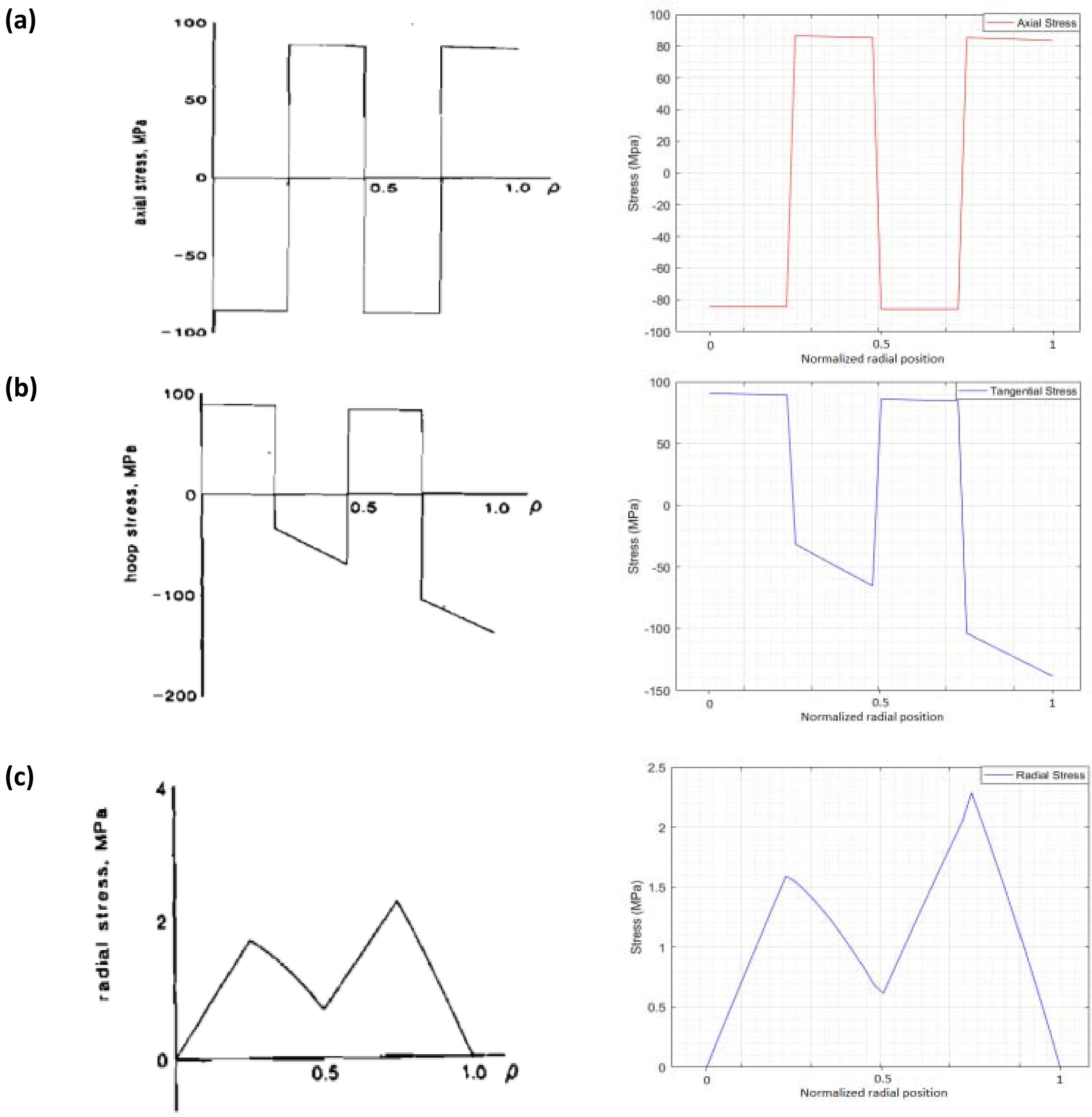



**Figure 2 Comparison of results (a) Axial stress (b) Hoop stress (c) Radial stress (Courtesy of mages on the left: [9])**

Figure 2 (a) depicts the axial stress variation through the thickness of the cylinder. As can be seen, there is good accordance with the results from the original work. A negative CTE means the 0º try to expand, while the 90º layers contract. Thus, along the axial direction, the 0º layers are subjected to a compressive stress, while the 90º layers, a tensile stress.

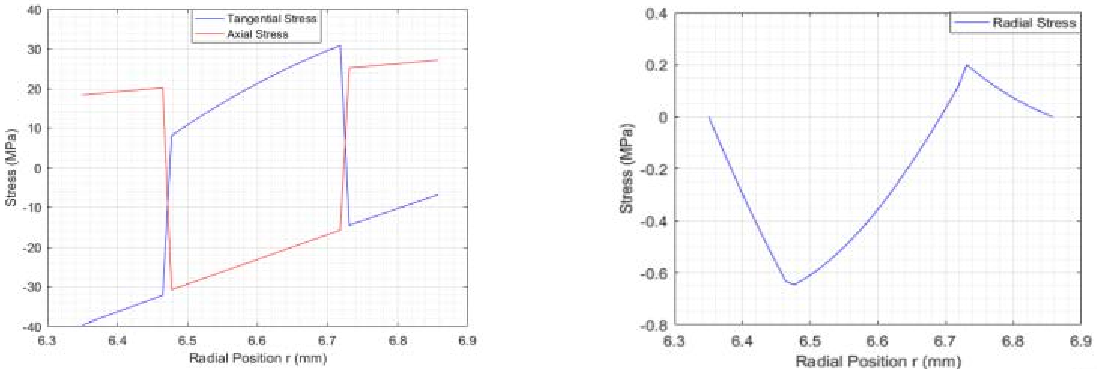
Figs. 2 (b) and (c) depict the hoop and radial stress variations respectively, which also conform well to the results from the original work. The hoop stresses for the 0º layers are tensile because their CTEs are positive in the hoop/tangential direction. A similar argument may be put forth for the 90º layers.

This study extends itself towards observing the variations of stresses in cylindrical layups involving two other stacking sequences. The material properties used in the following layup sequences are listed in Table 1. The temperature on the inner and outer surfaces are maintained at 120°C and 30°C respectively. The variation of temperature is linear in Layup 1 (Figure 3), but any user defined variation may be substituted for T, such as that in Layups 2 and 3 described by Equation (4.1).

$$T = \frac{(T_i - T_o)}{\ln\frac{r_o}{r_i}} . \ln\frac{r_o}{r} \tag{4.1}$$

**Layup 1: [0/90]$_s$**

From Figure 3 (a), we see that the axial stress is tensile in nature in the 0° laminae and compressive in the 90° laminae. Within the 0° laminae, the tensile stress increases as we move radially outward; a similar shift towards a tensile regime is visible within the 90° laminae as well.




**(a)** **(b)**

**Figure 3 Variations of (a) Axial stress and Hoop stress (b) Radial stress**

The variations in stress in Figure 3 (a) may be explained by the existence of bending moments. The innermost lamina (0°) maintained at 120 °C, due to its negative CTE, will tend to contract, while the adjacent lamina (90°) will tend to expand. This differential will lead to the bending of the cylinder, and has been exaggerated and represented in Figure 4.

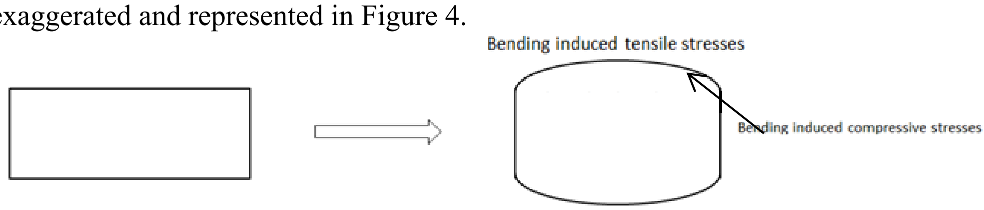



**Figure 4 Exaggerated schematic showing possible bending**

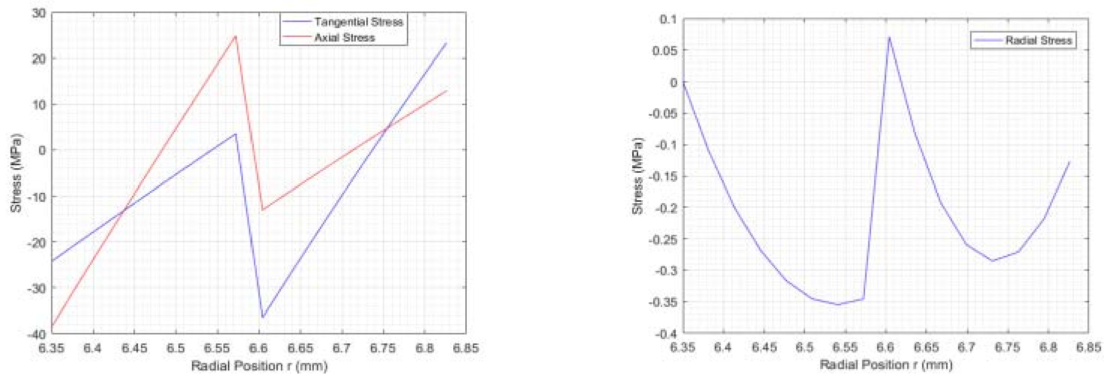
The stress here is a result of the bending-induced compressive stress and the existing tensile stress. This compressive stress decreases in magnitude towards the middle of the wall, which acts as the neutral axis of the bent section. This explains the increasing tensile nature of stress in the 1st 0° and 90° laminae. Beyond the mid-wall position (or the neutral axis), the bending stresses become tensile in nature and increase in magnitude towards the outer surface. This manifests as the decreasing compressive stress in the 2nd 90° lamina, and increasing tensile stress in the outermost 0° lamina. This linear variation of stress is akin to that of bending stresses versus distance from neutral axis.

**Layup 2: [30/-30/60/-60]**

The temperature variation as mentioned before is logarithmic. An interesting observation that can be made in Figure 5 (a) is the compressive stress in the innermost lamina (30° C), where one would expect a tensile stress. This may be due to its differences in CTE values of different directions.

$\alpha_r = 0.3366E - 4\ /{}^oC;\ \alpha_\theta = 0.2523E - 4\ /{}^oC\ ;\ \alpha_z = 0.0836E - 4\ /{}^oC$

The expansions in the radial and tangential direction lead to a Poisson contraction along the axial direction, which hinders the expansion that would have taken place there. This may be the cause for the compressive stresses observed. However, the bending-induced stresses that have been explained earlier lead to a tensile stress further away from the inner surface. Similar arguments may be made for the tangential/hoop stresses.




**(a)** **(b)**

**Figure 5 Variations of (a) Axial stress and Hoop stress (b) Radial stress**

## 5. Conclusion

Thus a methodology has been prescribed that facilitates the prediction of thermal stresses in composite cylinders, based on the assumption that the temperature variation is purely radial. The axisymmetric nature of the shell problem removes the need for analyzing shear effect. The study's verity was checked against the results of existing literature, and was utilized to check the effects of fiber/lamina orientation on the variation of stresses and strains along the radial direction of the cylinder.

## 6. References

[1] Timoshenko S, Goodier JN. Theory of Elasticity 1951.
[2] Brischetto S, Carrera E. Thermal stress analysis by refined multilayered composite shell theories. J Therm Stress 2009;32:165–86. doi:10.1080/01495730802540882.
[3] Raja Iyengar KTS. Thermal stresses in a finite solid cylinder due to an axisymmetric temperature field at the end surface. Nucl Eng Des 1966;3:21–31. doi:10.1016/0029-5493(66)90145-2.
[4] Thangaratnam RK, Palaninathan, Ramachandran J. Thermal stress analysis of laminated composite plates and shells. Comput Struct 1988;30:1403–11. doi:10.1016/0045-7949(88)90204-0.
[5] Witherell MD. A generalized plane-strain elastic stress solution for multiorthotropic-layered cylinder 1992.
[6] Witherell MD. A thermal stress solution for multilayered composite cylinders n.d.
[7] Akçay IH, Kaynak I. Analysis of multilayered composite cylinders under thermal loading. J Reinf Plast Compos 2005;24:1169–79. doi:10.1177/0731684405048840.
[8] Siegl M, Ehrlich I. Transformation of the Mechanical Properties of Fiber-Reinforced Plastic Tubes from the Cartesian Coordinate System into the Cylindrical Coordinate System for the Application of Bending Models. Athens J Technology Eng 2017;4:47–62. doi:10.30958/ajte.4-1-4.
[9] Hyer MW, Cooper DE, Cohen D. Stresses and deformations in cross-ply composite tubes subjected to a uniform temperature change. J Therm Stress 1986;9:97–117. doi:10.1080/01495738608961891.

## 7. Information about authors

Anish Janakiraman, Post-graduate student, Aerospace Engineering, TUM Asia, Singapore
+91 8667579885, ajram1396@gmail.com
R. Velmurugan, Professor, Department of Aerospace Engineering, IIT Madras, India
ramanv@iitm.ac.in
R. Jayaganthan, Department of Engineering Design, IIT Madras, India
G. Rajasingh, DRDL, Hyderabad, India

**HYDROSTATIC DEFORMATION AS AN EFFECTIVE WAY TO IMPROVE PROPERTIES OF CARBON NANOSTRUCTURES**

**Baimova J.A., Krylova K.A.**

Nanotechnology is a rapidly developing branch of science, especially if one considers novel carbon nanostructures. Elastic and inelastic deformation can be considered as a very effective way of changing physical, sorption, thermal and mechanical properties of carbon nanostructures. In the present work, recently experimentally obtained carbon nanostructure – crumpled graphene is considered under hydrostatic tension by molecular dynamics simulation. Pressure-strain curves and structural transformations during hydrostatic compression is discussed. From the obtained results it was found that crumpled graphene is compression-resistant just like paper balls and compressive stress makes them stiffer and harder. The constitutive relationship obtained in this work can be applied to describe the mechanical behavior of crumpled graphene nanostructures. Moreover, the possibility of application of compressive strain to make crumpled graphene better media for hydrogen storage is discussed. It is observed that at 77 K compression results in the considerable increase of hydrogen sorption capacity.

## 1. Introduction

Recently, green and effective methods of fabrication a three-dimensional network of crumpled and folded graphene flakes connected by van-der-Waals interactions was proposed by different scientific groups [1-3]. Such structure derives its name – crumpled graphene (CG) – right from its structural features based on crumpling of graphene flakes (GF)s. Crumpled graphene demonstrates such properties as the outstanding electrical conductivity of $sp^2$ GFs, high specific surface area, hierarchical porosity with shortened diffusion pathways, high mechanical strength and flexibility of graphene nanosheets to name a few. Three-dimensional crumpled graphene can demonstrate combined merits from both graphene and porous materials. Possible application of such structures is in different electrochemical energy devices, such as Li-ion batteries, Li-S batteries, supercapacitors, metal-air batteries, fuel cells, water splitting devices, and flexible devices, hydrogen storage [3].

Mechanical properties of CG are of great interest and was previously studied by molecular dynamics simulation [4-6]. High pressure and low temperatures are effective instruments to improve the hydrogen storage capacity [7]. For example, pressure can be used to increase both chemisorption and physisorption [7,8]. The same approach was used in [9] for pillared graphene bubble system. The other way to increase hydrogen capacity is doping with lithium cations [10].

In the present work, crumpled graphene is studied under hydrostatic compression and considered as the promising hydrogen storage media. First, the effect of shape and size of graphene flakes is investigated on the mechanical behavior of CG. Then, the effect of hydrostatic compression on the capacity of hydrogen storage is studied by molecular dynamics. Conclusions on the possible practical applications of crumpled graphene are given.

## 2. Simulation details

The initial structure of CG is presented in Fig. 1. Poly- and monodisperse CG are considered to study the effect of size and shape of graphene flake on the deformation behavior. For structure, shown in Fig. 1a, 6 different GFs are combined to one structural unit which is further translated as 2×2×2 along *x*, *y* and *z* axis. A number of atoms in one GF changing from 80 to 500 atoms with the average of 228 atoms. Structure, shown in Fig. 1b consists of one GF, but the crumpling behavior is different and all GFs vary by its folded shape. A number of atoms in one GF are 252 atoms and it is translated as 5×5×5 along *x*, *y* and *z* axis. Almost the same structural element is taken for the third structure (Fig. 1c) consists of 616 carbon atoms and 371 hydrogen atoms and it is translated as 3×3×3 along *x*, *y* and *z* axis. For all structures, an initial structural element is shown. The simulation cell for structure A has 10960 atoms, structure B includes 31500 atoms and structure C – 26649 atoms. As it was shown previously, at periodic boundary conditions the size of the simulation cell has no effect on the obtained results. All the structures are presented at density 1 g/cm$^3$ because only just at this value structural elements starts to interact. Third structure C is analogous to structure B and chosen to study the possibility of application of crumpled graphene as hydrogen storage and transportation media.

All the simulations are conducted using LAMMPS package with the AIREBO interatomic potential which was previously effectively used for studying of mechanical properties of three-dimensional carbon nanostructures [4-6]. Equations of motion for the atoms were integrated numerically using the fourth-order Verlet method with the time step of 0.1~fs. The Nose-Hoover thermostat is used to control the system temperature.

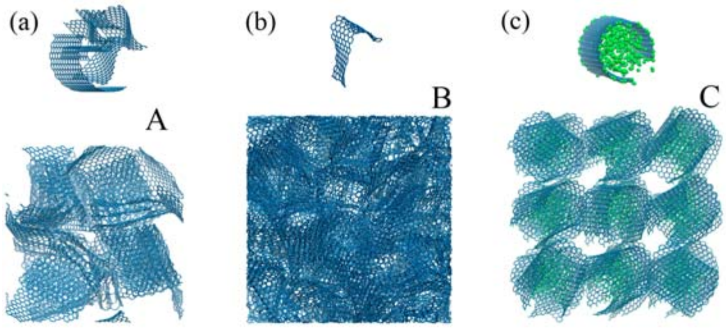



**Fig. 1.** Initial structure of crumpled graphene: (a,b) Poly- and monodisperse CG, (c) monodisperse CG filled with hydrogen. Graphene flake is shown by blue and hydrogen atoms on (c) – by light green.

The strain-controlled hydrostatic compression, $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon$, is applied to the computational cells at the temperature of 300 K for a structure without hydrogen and at 77 K for hydrogenated crumpled graphene. To characterize the response of CG to strain-controlled hydrostatic compression, the corresponding hydrostatic pressure $p = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})/3$, energies and other characteristics are calculated.

## 3. Results and discussion

### 3.1 Deformation behavior

In Fig.2, pressure-strain curves for A and B structures are presented. Both structures are hydrostatically compressed from the initial density of 1 until 2 $g{\cdot}cm^{-3}$ (note that the graphite density is in the range 2.09–2.23 $g{\cdot}cm^{-3}$). It is found that structure B shows higher strength during deformation. Thus, it can be concluded that the strength of the monodisperse crumpled graphene B is higher than that of the polydisperse structure A with approximately the same average size of graphene flakes. Both structures show nonlinear behavior.

As it can be seen from snapshots, in structure B small GFs strongly crumpled, while in structure A big graphene flakes cover smaller GFs, forming graphite-like structure. At the same density, close to 2 $g{\cdot}cm^{-3}$, crumpled graphene B looks much denser because small GFs form a lot of rigid corners and such configuration is stronger than A, where GFs almost have no rigid folds and settled in layers.

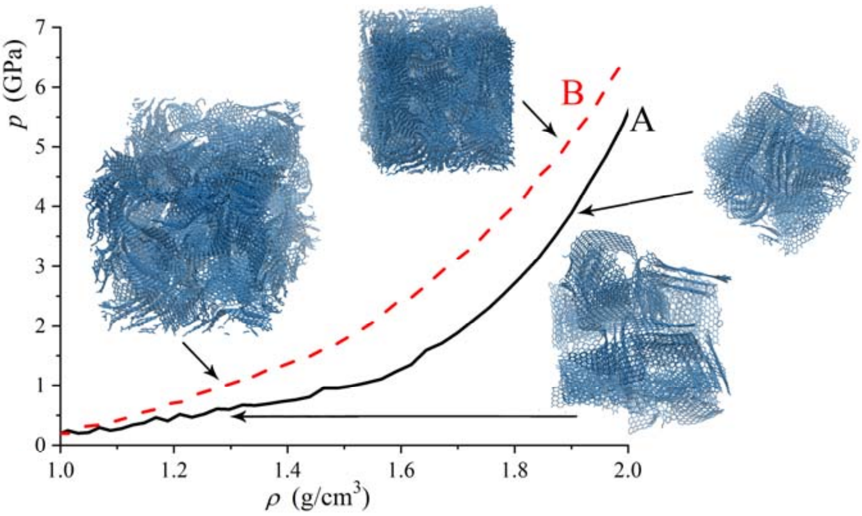



**Fig. 2.** Stress–density curves for structure A (black solid line) and structure B (red dashed line). Snapshots of the CG at different density are also presented.

At 300 K the hybridization of atoms practically does not change with compression within the studied range of densities. This means that no reconstruction of the valent bonds takes place during hydrostatic compression of CG and it is extremely stable against diamondization (no valent bonds with $sp^3$

hybridization are found). Thus, GFs in the structure are stable, connected by van-der-Waals and after unloading can be easily separated from each other. Just some edge atoms can form chemical bonds.

Generally, applicable constitutive relationships describing the deformation of crumpled graphene can be very helpful, because the properties of such materials are highly dependent on the material processing history. The pressure–density (stress–density) nonlinear curves for the hydrostatic compression can be fitted well to the power law

$p = A\cdot(\rho/\rho_0)^{\alpha}$.

Here $p$ is measured in Pa, $\rho$ in g·cm$^{-3}$, $A$ and $\alpha$ are parameters and $\rho_0 = 1$ g·cm$^{-3}$ is the initial density.

To achieve a better fit the constants $A$ and $\alpha$ were assumed to be different for the two density ranges $1 < \rho < 1.5$ g·cm$^{-3}$ and $1.5 < \rho < 3$ g·cm$^{-3}$. Constants $A$ and α for constitutive relationships for monodisperse crumpled graphene under hydrostatic compression are presented in Tab.1.

Tab.1. Constants $A$ and α for constitutive relationships under hydrostatic compression for monodisperse crumpled graphene.

| $T$, K | $1 < \rho < 1.5$ g·cm$^{-3}$ | | $1.5 < \rho < 3$ g·cm$^{-3}$ | |
|---|---|---|---|---|
| | $A$ | $\alpha$ | $A$ | $\alpha$ |
| 300 | 0.041 | 3.8 | 0.018 | 5.38 |
| 1500 | 0.066 | 3.73 | 0.034 | 4.85 |
| 3000 | 0.096 | 3.18 | 0.046 | 4.62 |

### 3.2 Compression of hydrogenated graphene

In Fig. 3, pressure-density curves for hydrogenated crumpled graphene are shown as well as snapshots of structural state at the different strain. As can be seen, until the ρ ~ 0.075 g·cm$^{-3}$ deformation occurs mainly due to the decrease of the pore size and dependence is linear. At ρ ~ 0.12 g·cm$^{-3}$, crumpling and folding of the GFs starts. Thus, further density lower than 0.12 g·cm$^{-3}$ which corresponds to strain 0.2 is not considered. At high strain, no pores can be found and graphene flakes strongly compressed. Compression is conducted at 0 K, thus no movement of hydrogen atoms is observed.

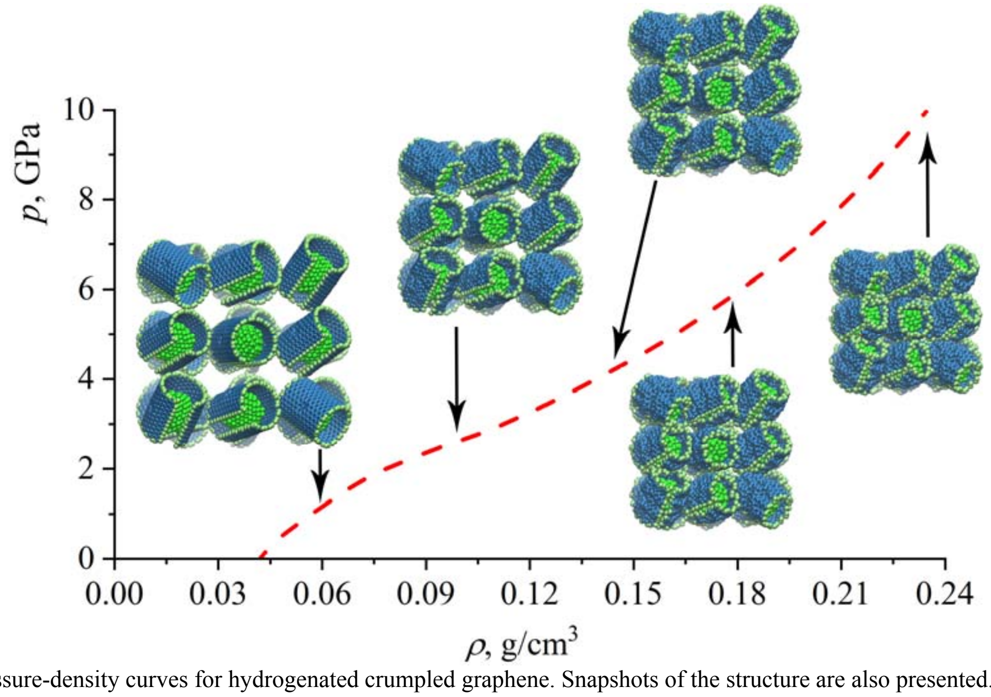



**Fig. 3.** Pressure-density curves for hydrogenated crumpled graphene. Snapshots of the structure are also presented.

Then, after applying compressive strain (ε = 0.2 - 0.4), hydrogen dynamics in the compressed structure is studied at $T = 77$ K). This temperature is chosen since it was previously shown that maximum hydrogen sorption capacity can be reached at 77 K for different carbon structures [11,12]. It should be mentioned, that during a study of hydrogen dynamics, boundaries of the computation cell taken much bigger than boundaries of the initial structure itself to allow hydrogen to move freely toward of crumpled graphene. In Fig. 4 volumetric capacity of hydrogen as the function of exposure time at 77 K is presented. Snapshots of the structure at 10 ps are also presented.

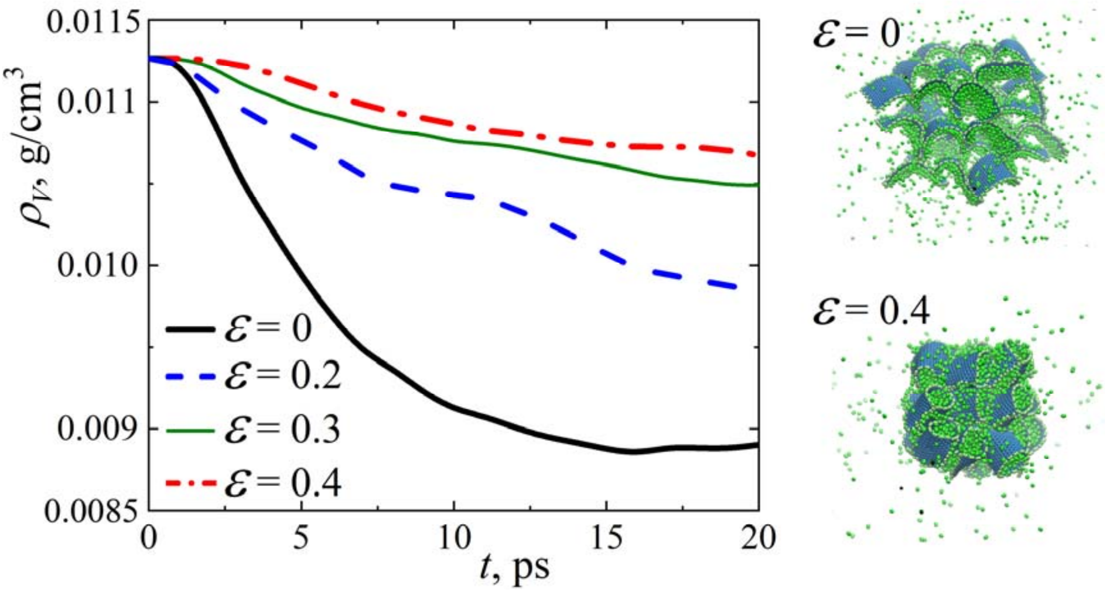



**Fig. 4.** Volumetric capacity of CG exposed at 77 K after hydrostatic compression. Snapshots of the structure at 10 ps.

It can be seen that the hydrostatic compression leads to an increase of $\rho_v$ and after 20 ps the sorption capacity of CG is ~ 19% higher at $\varepsilon = 0.4$ than at $\varepsilon = 0$. Note that the curves $\rho_v(t)$ at 0.3 and 0.4 are close to each other, and almost horizontal slope of these curves at $t > 15$ ps indicates that the sorption capacity of CG will change little at further exposure. From the snapshots it can be seen, that molecular hydrogen $H_2$ occupy all the empty sites inside GF and some hydrogen molecules attached to the back side of the fake.

**Conclusions**

In this work, the mechanical properties of crumpled graphene with the structural elements of different size are studied by molecular dynamics simulation. The possibility of application of crumpled graphene for hydrogen storage is discussed.

From the obtained results it was found that crumpled graphene compression-resistant just like paper balls as compressive stress makes it stiffer and harder. The dispersity of CG strongly affects the deformation behavior. The constants of the simple, power law nonlinear constitutive relation were estimated to reproduce the mechanical behavior of crumpled graphene subjected to hydrostatic pressure at different temperatures. Note that similar power law relations have been successfully used to describe the mechanical response of crumpled metallic foils. In particular, the reported results and the results of the present study suggest that the material density is a proper parameter to describe the deformation state of such materials.

The improvement of the hydrogen storage capacity of CG by application of hydrostatic pressure is found at 77 K. This work shows that the hydrogen storage capacity of the crumpled graphene can be maximized by decreasing the temperature and increasing the applied hydrostatic pressure. The obtained results can significantly enriched the understanding of the possibility to use graphene-based functional materials for hydrogen storage and transportation.


**Aknowlegements**

Calculation of the hydrostatic compression of CG done by J.A.B. and supported by the program of fundamental researches of Governement Academy of Sciences of IMSP RAS. Investigation of hydrogenated CG is made by K.A.K. and supported by the Grant of the President of the Russian Federation for state support of young Russian scientists - doctors of sciences MD-1651. 2018. 2.

## REFERENCE


1. Zhang L., Zhang F., Yang X., et al. Porous 3d graphene-based bulk materials with exceptional high surface area and excellent conductivity for supercapacitors. Scientific Reports, vol.3, №1, 2013. p.1408.
2. Tang Z., Li X., Sun T., et al. Porous crumpled graphene with hierarchical pore structure and high surface utilization efficiency for supercapacitor. Microporous and Mesoporous Materials, vol.272, 2018, p.40.
3. Tang C., Wang H.-F., Huang J.-Q., et al. 3d hierarchical porous graphene-based energy materials: Synthesis, functionalization, and application in energy storage and conversion. Electrochemical Energy Reviews, vol.2, №2, 2019, p.332.
4. Baimova J. A., Korznikova E. A., Dmitriev S. V., Liu B., Zhou K. Review on crumpled graphene: Unique mechanical properties. Rev. Adv. Mater. Sci., vol.39, №1, 2014, p. 69.
5. Baimova J. A., Liu B., Dmitriev S. V., Srikanth N., Zhou K. Mechanical properties of bulk carbon nanostructures: effect of loading and temperature. Physical Chemistry Chemical Physics, vol.16, №36, 2014, p.19505.
6. Baimova J. A., Liu B., Dmitriev S. V., Zhou K. Mechanical properties of crumpled graphene under hydrostatic and uniaxial compression. J. Phys. D: Appl. Phys., vol. 48, №9, 2015, p. 095302
7. Schimmel H. G., Kearley G. J., Nijkamp M. G., et al. Hydrogen adsorption in carbon nanostructures: Comparison of nanotubes,  bers, and coals. Chemistry - A European Journal, vol. 9, №19, 2003, p.4764.
8. Krylova K., Baimova J., Mulyukov R. Effect of deformation on dehydrogenation mechanisms of crumpled graphene: molecular dynamics simulation. Letters on Materials, vol. 9, №1, 2019, p.81.
9. Jiang H., Cheng X.-L., Zhang H., et al. Molecular dynamic simulation of high-quality hydrogen storage in pillared bilayer graphene bubble structure. Computational and Theoretical Chemistry, vol.1068, 2015, p.97.
10. Dimitrakakis G.K., Tylianakis E., Froudakis G.E. Pillared graphene: A new 3-d network nanostructure for enhanced hydrogen storage. Nano Letters, vol.8, № 10, 2008, p.3166.
11. Fierro V., Szczurek A., Zlotea C. et al. Experimental evidence of an upper limit for hydrogen storage at 77k on activated carbons. Carbon, vol.48, №7, 2010, p.1902.
12. Baburin I.A., Klechikov A., Mercier G. et al. Hydrogen adsorption by perforated graphene. International Journal of Hydrogen Energy, vol.40, № 20, 2015, p.6594.



**Information about authors:**

**Julia A. Baimova** – Dr. Sci. Prof. RAS, Institute for Metals Superplasticity Problems of RAS
**E-mail:** julia.a.baimova@gmail.com

**Karina K. Krylova** – PhD, Institute for Metals Superplasticity Problems of RAS
**E-mail:** bukreevakarina@gmail.com

# A NEW STRUCTURAL MODEL FOR PLASTICITY OF NANOSTRUCTURED SOLIDS IN A WIDE RANGE OF STRAIN RATES

**Borodin E.N., Mayer A.E., Gutkin M.Yu.**

Bulk nanocrystalline materials with unusual for their coarse-grained counterparts mechanisms of plasticity, such as grain boundary sliding and grain rotation, require the new physical approaches for simulation of their mechanical behaviour. We propose a new structural model for grain boundary sliding accompanied with the tilt deformation related to the rotation of grains.

## Introduction

Nowadays, there is a large body of researches devoted to manufacturing and processing of nanocrystalline materials (NCMs) at low strain rates, as well as a number of researches based on MD simulations with extremely high strain rates above $10^7\ s^{-1}$ [1]. According to this situation, a number of models for quasi-static conditions of NCM plasticity is available in the literature [2-4]. Some of them [4] extensively used conventional dislocation approach with dislocation absorption, transmission and emission from grain boundaries (GBs). Khan and Zhang [5] and Farrokh and Khan [6] used a complicated mechanical model with Khan–Liang–Farrokh constitutive equation to describe NCM plasticity in a wider range of strain rates. At the same time, high-strain-rate loadings of NCMs with conventional strain rates $10^3$-$10^6 s^{-1}$ and shock wave propagation phenomenon in NCMs remain almost unexplored area of research [7-9].

It seems that time has come to develop a new physically-based model of plasticity to investigate deformation of NCMs, primarily metals and ceramics, after the shock wave front. The novel constitutive plasticity model should be suitable to predict all the effects causing the energy dissipation: dislocation emission and absorption, grain boundary sliding, and subsequent rotation of nanograins. In a number of previous works, Borodin and Mayer [3,8,9] have proposed a mechanical model for grain boundary sliding (GBS) as the only mechanism of plasticity and have defined the yield stress [3,9] and the characteristic relaxation time (CRT) [8,11] parameters for a few nanocrystalline metals. In the present work, we propose a new constitutive model, which comprises the intragrain dislocation plasticity and the grain rotations as an additional to GBS mechanisms of NCM plasticity.

### 1. The rheological model for nanocrystalline plasticity

We will use the visco-elastic model [11-13] with a static barrier stress parameter, corresponding to GBS process initiation, and characteristic relaxation times parameters, which at the constant strain rate gives for the yield stress:

$$\sigma_\tau = \begin{cases} \sigma_y^0 + G\dot{\varepsilon}_{pl}\tau, & \dot{\varepsilon}_{pl} \le \sigma_y^0 / G\tau \\ \sqrt{4G\dot{\varepsilon}_{pl}\tau\sigma_y}, & \dot{\varepsilon}_{pl} > \sigma_y^0 / G\tau \end{cases} \tag{1.1}$$

Here is the shear modulus, $\dot{\varepsilon}_{pl}$ is the total plastic strain rate, $\tau$ is the characteristic relaxation time, and $\sigma_y^0$ is the static yield strength. This model is applicable in a wide range of strain rates [11,12]. It gives the usual static yield stress at quasi-static deformation conditions, the conventional Maxwell model for very viscous liquid at moderate strain rates, and more complicated term for extremely high strain rates.

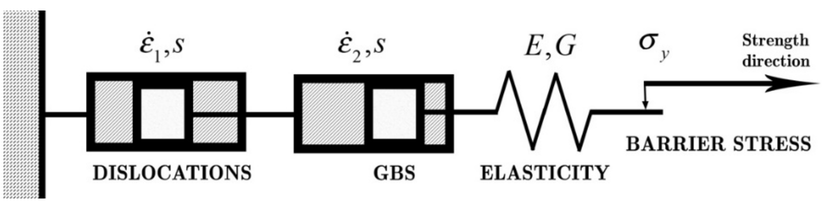



**Fig.1.** The rheological model with two viscous elements, elastic elements and barrier stress.

In NCMs, the dislocation plasticity, leading to tilt deformation of grains, and GBS act simultaneously. From the rheological point of view, these mechanisms correspond to the couple of viscous elements connected in series as shown in Fig.1. The viscosity plays the dominant role at high strain rates, while the barrier stress gives yield stress at quasi-static deformation conditions.

In such a way, at high strain rates both the viscous elements have equal stresses $\sigma_\tau = 2G\tau\dot{\varepsilon}$, that leads to the equation $\dot{\varepsilon}_1\tau_1 = \dot{\varepsilon}_2\tau_2$. On the other hand, $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2$ and it leads to the relation $\dot{\varepsilon}_1\tau_1 + \dot{\varepsilon}_2\tau_2 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\tau$. The resultant CRT for two viscous elements (one for dislocation plasticity and the other one for GBS) is

$$\tau = \frac{\left(\tau_{Disl}^{NC}\right)^2 \tau_{GBS}^{NC} + \left(\tau_{GBS}^{NC}\right)^2 \tau_{Disl}^{NC}}{\left(\tau_{Disl}^{NC}\right)^2 + \left(\tau_{GBS}^{NC}\right)^2}. \tag{1.2}$$

**2. Grain boundary sliding model**

When GBS is the main mechanism of plasticity, the static yield stress reads [3,9]:

$$\sigma_\tau = f(D)\frac{2G}{1-\nu}\left(1-\frac{\delta}{d}\right)^2, \tag{2.1}$$

where $f(D)$ is a function of dispersion of the grain size distribution. At uniform grain size distribution (zero dispersion) $f(0) \sim 0.01$ [3]. Here $d$ is the grain size, $\nu$ is the Poisson ratio and $\delta \sim 1$ nm is the grain boundary width. Equation (2.1) is in a good agreement with a number of experiments on NC metals [3].

At high strain rate, the mechanical response of material on external loading is much more complicated. Its critical yield stress does not determine plastic flow in this case. Viscous term in Eq. (1.1) with an additional CRT parameter is needed because of delay in the mechanical response of the material. We found these times for the case of GBS in [11]. The CRT $\tau_{GBS}^{NC}$ was different for two cases:

$$\tau_{GBS}^{NC} = d\frac{k_B T}{12Gb^4\nu_D}\exp\left(\frac{U_s}{k_B T}\right), \tag{2.2}$$

that is equal to 1-10 ns at extremely high ($10^7$-$10^9 s^{-1}$) strain rates, and another equation corresponds to the Coble creep law

$$\tau_{GBS}^{NC} = \frac{k_B T d^3}{40Gb^3 D\delta} \tag{2.3}$$

and gives about 1-3 μs at moderate ($10^3$-$10^6 s^{-1}$) strain rates that reflects different micro-mechanisms of plasticity inside GBs [11]. Here $\nu_D \sim 10^{13} s^{-1}$ is the Debye frequency, $U_s$ is the activation energy which for copper has the same order of magnitude as the activation energy of viscous flow in the metal melt [11], $k_B$ is the Boltzmann constant, and $T$ is the temperature.

**3. Rotational tilt deformation model**

One can also use the similar technic [8,11,12] to determine the CRT related to tilt deformation caused by grain rotation. For the case of pure tilt deformation, the shear deformation $\varepsilon_{pl}^{Disl}$ of individual grain is equal to $\tan\phi$ (see Fig. 2). Its time derivative gives the angle-increasing rate due to intergranular dislocation sliding:

$$\dot{\phi} = \dot{\varepsilon}_{pl}^{1Disl}\cos^2(\phi), \tag{3.1}$$

or, with the Frank-Bilby equation [14] in the form

$$\frac{\xi b_\perp \left(\dot{N}_D^{emb}\right)^2}{d} = \dot{\phi}\cos\left(\frac{\phi}{2}\right), \tag{3.2}$$

it reads as

$$\dot{\varepsilon}_{pl}^{Disl} = \frac{b_\perp}{d} \frac{\xi\left(\dot{N}_D^{emb}\right)^2}{\cos^2(\phi)\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)}. \tag{3.3}$$

Here $N_D^{emb}$ is the number of dislocations embedded into the grain boundary, $\xi$ is an empirical parameter, $\xi \sim 1$. The dependence $\dot{\varepsilon}_{pl}^{1Disl}\left(N_D^{emb}\right)$ is shown in Fig.3. Obviously, the number of dislocation, which is required for the same strain, rapidly increases with the grain size.

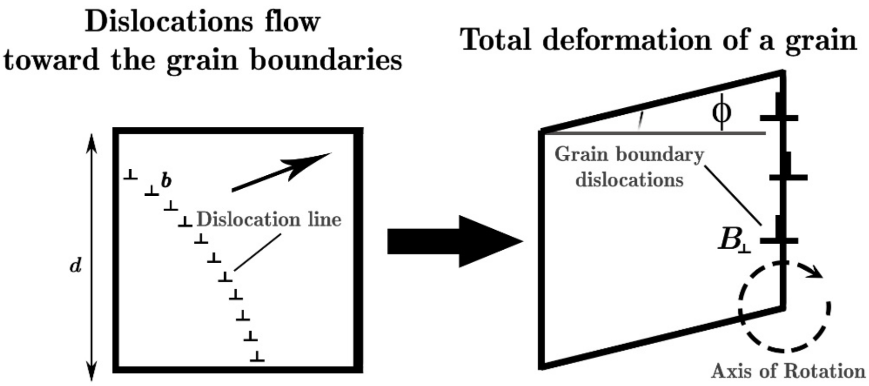



**Fig. 2.** Deformation scheme of a grain by dislocation emission and absorption in the grain boundary.

The quantity $\dot{N}_D^{emb}$ could be estimated directly by thermo-fluctuation model [15,16] with the coefficients obtained from molecular dynamic simulations and analytical consideration:

$$\dot{N}_D^{emb} = \frac{\pi c_t b_\perp d^2 \sigma_{eff}{}^2}{24\varepsilon_D^2} \exp\left[-\frac{U_c}{k_B T}\right], \tag{3.4}$$

where effective shear stress $\sigma_{eff} = \left(\sigma_\tau - \sigma_y^0\right)\cdot H\left(\sigma_\tau - \sigma_y^0\right)$ [3], $H(x)$ is the Heaviside function, $c_t$ is the transverse sound velocity, $\varepsilon_D$ is the energy of dislocation per its unit length [17], and $U_c = \pi\varepsilon_D^2/2b_\perp\sigma_\tau$ is the nucleation energy.

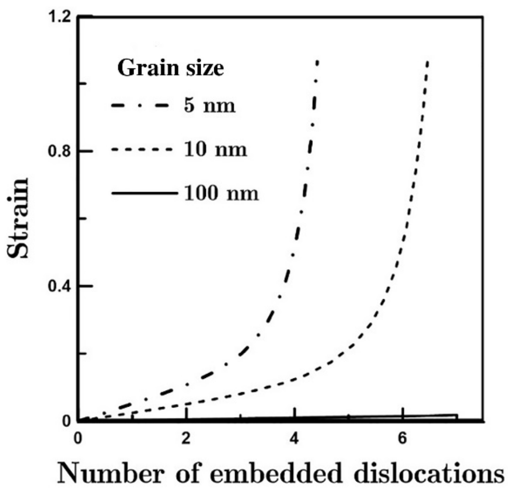



**Fig. 3.** Plots $\dot{\varepsilon}_{pl}^{1Disl}\left(N_D^{emb}\right)$ for grain sizes 5 nm, 10 nm and 100 nm at rate $\dot{N}_D^{emb} = 1$ and $\xi = 0.5$.

If one assumes that [11,12] $\sigma_\tau = 2G\tau_{Disl}^{NC}\cdot\dot{\varepsilon}_{pl}^{Disl}$, then, according to (3.2) and (3.3), the characteristic relaxation time of dislocation plasticity is

$$\tau_{Disl}^{NC} = \frac{\sigma_\tau d \cos^2(\phi)\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)}{2Gb_\perp \xi \left(\dot{N}_D^{emb}\right)^2} \sim \frac{\sigma_\tau d}{Gb_\perp \left(\dot{N}_D^{emb}\right)^2}. \tag{3.5}$$

**ACKNOWLEDGEMENTS**
This work was supported by the grant of RSF №18-19-00255.

## REFERENCE

1. Hahn E.N., Meyers M.A. Grain-size dependent mechanical behavior of nanocrystalline metals. //Materials Science and Engineering A vol.646, 2015.
2. Abdul-Latif A., El Miad A.K., Baleh R., Garmestani H. Modeling the mechanical behavior of heterogeneous ultrafine grained polycrystalline and nanocrystalline FCC metals. //Mechanics of Materials. vol.126, 2018.
3. Borodin E.N., Mayer A.E. A simple mechanical model for grain boundary sliding in nanocrystalline metals. //Materials Science and Engineering A vol. 532, 2012.
4. Shi J., Zikry M.A. Grain size, grain boundary sliding, and grain boundary interaction effects on nanocrystalline behavior. //Materials Science and Engineering A vol. 520, 2009.
5. Khan, A.S., Zhang, H. Mechanically alloyed nanocrystalline iron and copper mixture: behavior and constitutive modeling over a wide range of strain rates. //International Journal of Plasticity vol. 16, 2000.
6. Farrokh, B., Khan, A.S. Grain size, strain rate, and temperature dependence of flow stress in ultra-fine grained and nanocrystalline Cu and AL: synthesis, experiment, and constitutive modeling. //International Journal of Plasticity vol. 25, 2009.
7. Rajaraman S., Jonnalagadda K.N., Ghosh P. Indentation and dynamic compression experiments on microcrystalline and nanocrystalline nickel. In: Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series vol. 1, 2013.
8. Borodin E.N., Mayer A.E. Theoretical interpretation of abnormal ultrafine-grained material deformation dynamics. Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering vol. 24, 2016.
9. Borodin E.N., Mayer A.E. Influence of structure of grain boundaries and size distribution of grains on the yield strength at quasistatic and dynamical loading. Material Research Express vol. 4, 2017.
10. Guo X., Yang G., Weng G.J., Zhu L.L. Numerical simulation of ballistic performance of bimodal nanostructured metals.//Materials Science and Engineering A vol. 630, 2015.
11. Selyutina N.S., Borodin E.N., Petrov Yu.V. Structural–Temporal peculiarities of dynamic deformation of nanostructured and nanoscaled metals. Physics of the Solid State vol. 60, 2018.
12. Petrov Yu.V., Borodin E.N. Relaxation mechanism of plastic deformation and its justification using the example of the sharp yield point phenomenon in whiskers. Physics of the Solid State, vol. 57, 2015.
13. Gruzdkov A.A., Petrov Yu.V. On temperature-time correspondence in high-rate deformation of metals. // Doklady Physics, vol. 44, 1999.
14. Frank F.C.A. Symposium on the Plastic Deformation of Crystalline Solids. (Office of Naval Research, Pittsburgh) 150, 1950.
15. Krasnikov V.S., Mayer A.E. Plasticity driven growth of nanovoids and strength of aluminum at high rate tension: Molecular dynamics simulations and continuum modeling. //International Journal of Plasticity 74, 2015.
16. Mayer A.E., Ebel A.A., Al-Sandoqachi M.K.A. Plastic deformation at dynamic compaction of aluminum nanopowder: molecular dynamics simulations and mechanical model. International //Journal of Plasticity, 2019.
17. Krasnikov V.S., Mayer A.E., Yalovets A.P. Dislocation based high-rate plasticity model and its application to plate-impact and ultra short electron irradiation simulations. //International Journal of Plasticity vol. 27, 2011.

## INFORMATION ABOUT AUTHORS:

**Elijah Borodin** – research fellow in the University of Manchester, School of MACE, Mechanics and Physics of Solids Research Group
+44 078 188 536 51 (UK)
+7 904 552 57 17 (Russia)
elbor7@gmail.com or Elijah.Borodin@manchester.ac.uk

**Alexander Mayer** – professor, Head of the Department of General Physics in the Chelyabinsk State University
mayer@csu.ru

**Mikhail Gutkin** – Principal researcher and Head of Lab of Mechanics of Nanomaterials and Theory of Defects at the Institute of Problems of Mechanical Engineering RAS, and professor at the ITMO University and at the Department of Mechanics and Control Processes, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
m.y.gutkin@gmail.com

# GRAIN BOUNDARY ENGINEERING OF CU-CR-ZRALLOYS WITH HIGHLY LOCALIZED PLASTIC FLOWDURING SEVERE PLASTIC DEFORMATION

**Borodin E.N., Morozova A., Bratov V., Belyakov A., Jivkov A.**

Experimentally measured evolution of microstructural characteristics of Cu-Cr-Zr alloys subjected to equal-channel angular pressing and multidirectional forging is used to propose a novel theoretical model for continuous dynamic recrystallisation as well as an original discrete stochastic approach. The former is implemented in a finite element framework, while the latter in an in-house code. By analyses based on the two methods, it is demonstrated that micro- and macro-inhomogeneities in the developed microstructure of copper alloys have a significant effect on the physical and mechanical behaviour of the material. Neglecting such inhomogeneities leads to overestimation ofmacroscopic mechanical properties, such as the yield strength.

## Introduction

Severe plastic deformation (SPD) is aresearch area, where mechanics of materials closely meets material science. Mechanical properties of the material during and after any SPD process depend clearly on the microstructural changes. Therefore, the problem of finding an appropriate deformation way to obtain some given material microstructure emerge here as central industrial requirement. At present, there are no reliable models that could be used to simulate SPD processes in details, including the prediction of materials' microstructure evolution. Furthermore, there is no sufficient understanding as to which microstructural parameters' evolutionis mostly responsible for the emerging changes inmaterials' mechanical characteristics. The standard set of variables are the easily measurable grain size and hardness, whichoften preventsengineers from observing a much wider spectrum of alterations to material defect microstructure. It can be asserted that the decrease in material grain size is in fact only aconsequence of many different processes accompanying plastic deformation in metals.

Themodel proposed here involves the fraction of high-angle grain boundaries in the bulk of the material as the main parameter characterizing its structure and properties. The performed FEM three-dimensional modelling provides a possibility to visualize macroscopic inhomogeneities accompanying typical SPD processes. As clearly demonstrated, in many cases the received deformational inhomogeneity is substantial and should be accounted for while estimating plastic strain accumulated in different parts of the sample.

## 1. FEM simulation, analytical and experimental investigations of the material hardening and microstructure evolution

Dislocation kinetic and grain boundary evolution give a strain hardening of the material. The Taylor law and the Hall–Petch law [1,2] are the familiar relationships, which give an accurate prediction for the dynamic yield stress in the form

$$\sigma_D^0 = \sigma_y^0 + \alpha G b \sqrt{\rho_D} + K_{HP} \big/ \sqrt{d} \ , \qquad (1.1)$$

where $\sigma_y^0$ is static yield stress of the material without dislocations, which includes all internal stress concentrators except the dislocations or grain boundaries [2,3], $\alpha = 0.4$ is the Taylor constant [1], $G$ is the shear modulus of the material, $b$ is the Burgers vector, $\rho_D$ is the dislocation density, $K_{HP}$ is the Hall–Petch coefficient, and $d$ is the average grain diameter. To determine this value during the severe plastic deformation process one must know both dislocation density and grain size as the functions of deformation value.

Dislocation evolution could be easily described by any logistic-type equations for dislocation density [4,5]. All the model coefficients are well studied, and different physical-based models have been proposed for their estimation [6-8]. Correct prediction of the grain size evolution at continuous dynamic recrystallisation (CDRX) is possibly the biggest challenge in the area of theoretical research of SPD processes.

Let us define the cell sizes as the distances between low angle dislocation boundaries (LAGBs), and to the grain sizes as the distances between high-angle boundaries (HAGBs).Dislocation cell diameter as a function of dislocation density can be written in the form [4,5]:

$$D = \beta \rho_D^{-1/2} \ . \qquad (1.2)$$

Here $\beta$ is a coefficient dependent on the shape of dislocation cells [4,8].

The most natural way to define the grain size is [3]:

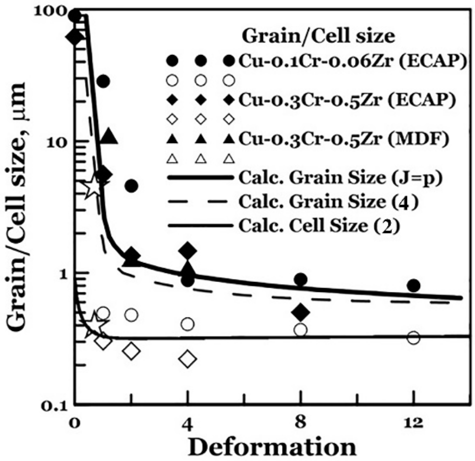
$$d = \frac{D}{J}, \tag{1.3}$$

where $J$ is a function of HAGBs fraction [3,9-11]. For a homogeneous distribution of HAGBs through the material with the fraction $p$ it gives $J = p$ [3,9].

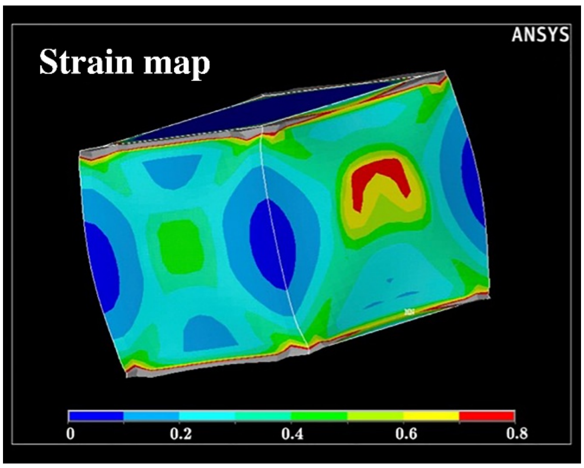
The real grain structure evolution is more complex. For studied copper alloys micro-localisation within the grains is leading to a complex distribution of triple junctions with 0,1,2 or 3 adjacent grain boundaries [9,10], that gives a set of grain boundary triple junctions (TJs) fractions $F_{J0},..F_{J3}$. In order to represent a slightly inhomogeneous microstructure the parameter $J$ in Eq. (3) could be formulated in the form:

$$J = \frac{F_{J1} + 2F_{J2} + 3F_{J3}}{3} \tag{1.4}$$

It gives $J = p$ for purely homogeneous distributions of TJs. From the other hand, at final stage, when $F_{J1} = F_{J2} = 0;\ F_{J3} = 1$, substitution of Eq. (4) into Eq. (3) gives a true equality $d = D$. It needs to be clarified that Eq. (4) assumes that all types of TJs have essentially homogeneous distributions, while this is not required for the grain boundary types. The effect of the slightly inhomogeneity introduced by these fractions is shown in Figure1(a) as a dotted line below the curve corresponding to $J = p$. Obviously, micro-inhomogeneities can influence significantly on the microstructure-properties relations of the material, without changing noticeably its grain structure. Figure 1(b) demonstrate the FEM results with macroscopic inhomogeneities inside the sample of copper alloy after a single pass of multidirectional forging (MDF). Measurements of parameters in the centre of the sample corresponds to the strain value about 0.8 – twice bigger, than the average value over the sample.



(a)



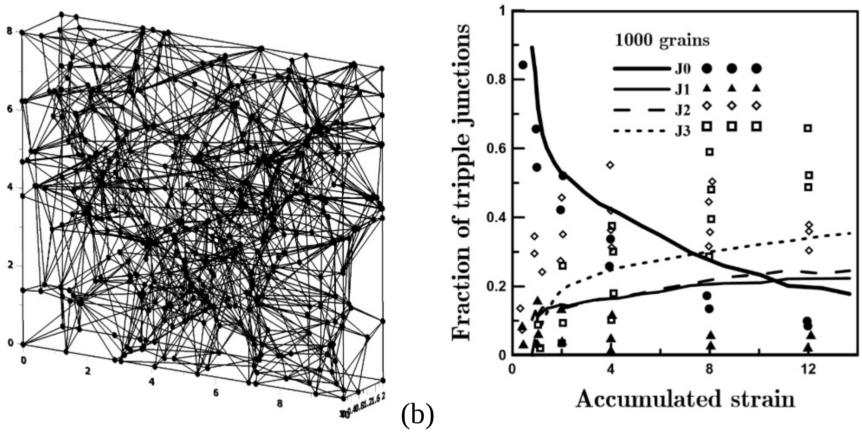
(b)

**Fig. 1.**(a) Grain (dots) and cell (empty dots) size as functions of accumulated strain. Theoretical predictions using Eq. (3) and Eq. (4) (solid lines) are compared to experimental measurements (dots) for ECAP and MDF processed copper alloys. Asterisks correspond to the results of 2D ANSYS simulations of ECAP process and (b)FEM simulation of 3D distributions of von Mises strainin the sample at multidirectional forging.

## 2. Discrete complex basedapproach

For analytical investigation of the effect of TJs fractions on the materials properties we have constructed and analyzed discrete complexes (Figure 2a) based on Voronoi space tessellation [12] containing a sufficient number of 3-cells (grains), 2-cells (grain boundaries) and 1-cells (triple junctions) for the results to be considered representative for the evolution of physical processes defined on its elements. This has allowed us to overcome the limitations of continuous approaches and to describe the effects of inhomogeneity on grain structure evolution as well as on the triple junction's network evolution in details. Firstly, we have demonstrated [9] that the discrete model with purely random evolution of high-angle grain boundaries gives similar results as existing analytical predictions for such case [11].

Following the experiments [10], we estimate the fractions of GBs as follows: $F_{J0} = 0.8 \cdot \mathrm{Exp}\left[-0.25\varepsilon\right]$, $F_{J1} \sim 0.06$, $F_{J3} = 0.54 \cdot \left(1 + \mathrm{Exp}\left[-0.56\varepsilon + 2.4\right]\right)^{-1}$ and $F_{J2} = 1 - F_{J0} - F_{J1} - F_{J3}$, where we use the constraint $\sum_k F_{Jk} = 1$. Its dependences give a picture completely different from the theoretical predictions [11], which may be caused by micro-localisation during SPD. The physical principle of maximizing of entropy applied for structural entropy allows us to obtain much better fitting of the experimental data [10] than it gives a homogeneous process of triple junctions' evolution.The existence of inhomogeneities in Cu–Cr–Zr alloys is brightly manifested in [10].




(a) (b)

**Fig. 2.** (a) Combinatorial discrete complex containing 100 grains and (b) the results of 1000 grains discrete complex based simulation of triple junctions' evolution as the function of accumulated strains. Dots – experimental points [10], lines – discrete based simulation results.

The proposed combinatorial approach is a useful tool for analysis of substructures during SPD and combined with further experimental evidence should lead to explanations of how the microstructural changings are linked to the changing of mechanical properties.

So, both micro- and macro-inhomogeneities sufficiently change the evolution of the materials microstructure during SPD as well as change its physical and mechanical characteristics. Neglecting of macro-localisation leads to sufficient experimental overestimating of grain size decreasing and, hence, yield strength increasing in the sample. Micro-localisation slightly affect on the mechanical behavior, but can sufficiently change physical properties of the material.

**ACKNOWLEDGEMENTS**

E.N. Borodin and A. Jivkov appreciates highly the financial support of EPSRC via grant EP/N026136/1 "Geometric Mechanics of Solids". A. MorozovaandA. Belyakov gratefully acknowledge the financial support received from the Ministry of Science and Education of Russia under the Grant No. 14.575.21.0135 (ID RFMEFI57517X0135) and the technical assistance of the Joint Research Center, "Technology and Materials", Belgorod State University.

## REFERENCE

1. Meyers M.A., Chawla K. Mechanical Behavior of Materials. Cambridge University Press, 2009.
2. Bratov V., Borodin E.N. Comparison of dislocation density based approaches for prediction of defect structure evolution in aluminium and copper processed by ECAP. //Material Science and Engineering Avol. 631, 2015.
3. Borodin E.N., Bratov V. Non-equilibrium approach to prediction of microstructure evolution for metals undergoing severe plastic deformation. //Materials Characterization vol. 141, 2018.
4. Baik S.C., Estrin Y., Kim H.S., Hellmig R.J. Dislocation density-based modeling of deformation behavior of aluminium under equal channel angular pressing. //Material Scienceand Engineering A vol. 351, 2003.

5. Lapovok R., Dalla Torre F.H., Sandlin J., Davies C.H.J., Pereloma E.V., Thomson P.F., Estrin Y. Gradient plasticity constitutive model reflecting the ultrafine micro-structure scale: The case of severely deformed copper. //J. Mech. Phys. Solids vol. 53, 2005.
6. Malygin G.A. Dislocation self-organization processes and crystal plasticity. Phys. Usp. 169 (1999) 979.
7. Dudorov A.E., Mayer A.E. Equations of dislocation dynamics and kinetics at high rates of plastic deformation. //Vestn. Chelyabinsk State Univ. Phys. vol. 39, 2011.
8. Galindo-Nava E.I., Rivera-Dıaz-del-Castillo P.E.J. A thermodynamic theory for dislocation cell formation and misorientation in metals. Acta Materialia vol. 60, 2012.
9. Borodin E.N., Morozova A., Bratov V., Belyakov A., Jivkov A. Experimental and numerical analyses of microstructure evolution of Cu-Cr-Zr alloys during severe plastic deformation. Materials Characterization, 2019 (Accepted for publication, DOI: 10.1016/j.matchar.2019.109849).
10. Morozova A., Borodin E.N., Bratov V., Zherebtsov S., Belyakov A., Kaibyshev R., Grain refinement kinetics in a low alloyed Cu–Cr–Zr alloy subjected to large strain deformation. Materials vol. 10, 2017.
11. Frary M., Schuh C.A., Percolation and statistical properties of low- and high-angle interface networks in polycrystalline ensembles. Physical Review B vol. 69, 2004.
12. Grady L.J., Polimeni J.R., Discrete Calculus. London: Springer-Verlag, 2010.
13. Voro++ free software available at http://math.lbl.gov/voro++

**INFORMATION ABOUT AUTHORS:**

**Elijah Borodin** – research fellow in the University of Manchester, School of MACE, Mechanics and Physics of Solids Research Group
+44 078 188 536 51 (UK)
+7 904 552 57 17 (Russia)
elbor7@gmail.com or Elijah.Borodin@manchester.ac.uk

**Anna Morozova** – research assistant,Belgorod State University
anna morozova_ai@bsu.edu.ru

**Vladimir Bratov** – senior researcher, Institute of Problems of Mechanical Engineering RAS and assistant professor, Saint-Petersburg State University
vladimir@bratov.com

**Andrey Belyakov** – professor, Belgorod State University
belyakov@bsu.edu.ru

**Andrey Jivkov** – professor of Solid Mechanics in the University of Manchester, School of MACE, Mechanics and Physics of Solids Research Group
Andrey.Jivkov@manchester.ac.uk

# EFFECT OF VIBRATION TREATMENT ON MECHANICAL PROPERTIES OF POLYMER MEMBRANES

**Bulychev N.A., Kolesnik S.A.**

The effect of wave field on physical and mechanical properties has been exemplarily studied by the IR-spectroscopy method on films made from mixtures of butadiene-styrene and acrylic latex as models of polymeric membranes. The strengthening of the interphase interaction in heterophase systems that can cause change of their local and transmitting mobility has been observed. It has been shown, that the response of polymeric dispersed systems and composites on influence of nonlinear vibrations proves their influence on deformation properties, like orientation phenomena in solid polymers.

Polymeric focused membranes have an enhanced stability as well as structural and functional similarity with lipid membranes. High-organized polymeric systems with small sizes (micelles, vesicules, mono- and polylayers), and also polymeric dispersions are important for modelling various functions of biomembranes and are perspective as materials and functional elements for biotechnology, medicine etc. Their substantial sensitivity to external influences is due to the microheterogeneity of such multiphase and multicomponent systems. Therefore, the study of dynamic behaviour of latex systems under generation of nonlinear vibrations in a sound range of frequencies attracts a geat deal of interest. It is essential, that the use of latexes in these conditions is aimed to study of wave influence on multiphase systems at different structural levels. Consideration of structural-morphological features of polymers, local and transmitting mobility of the kinetic units describing relaxation spectrum of a system, interphase interaction and the state of an interphase surface can be a basis for elucidation of the mechanism of influence of nonlinear vibrations on mass transfer processes in multiphase and multicomponent systems, and also interrelation of relaxation and resonant absorption of energy. It is necessary to note, that the study of wave influence on latexes as biomedical objects can promote the obtaining the additional information about the relationship of the oscillatory phenomena with biochemical and biophysical processes.

Aqueous dispersed systems like latexes have been being widely applied as polymeric composite materials in technics, construction and various branches of industry. Specific features of properties of such systems cause their great value for biology and medicine, too. Among other applications, latex systems are being used as composite materials in chemical, pharmaceutical, food-processing industry, in medicine, including their application as various membranes (dividing and ionic) and also as the modelling systems, allowing to study exchange processes in alive organisms, microbiology, biochemistry, etc. Biomaterials of type «artificial skin» in which latex are components of the composite materials which are carrying out functions of a skeleton for biocarriers, are also of great interest.

The study of influence of vibrating treatment on dynamic behaviour of multiphase systems allowed to establish that the intensification of heat and mass transfer under the generation of nonlinear vibrations in polymeric dispersions can be accompanied by the relaxation phenomena (such as vibrorelaxation, vibroflowing, vibrotixotropy). Considering the crucial role of relaxation processes in behaviour of real polymeric materials, it is necessary to emphasize that the sensitivity of relaxation characteristics to structural inhomogeneties and to transformations under external influences that is most pronounced in such heterogeneous systems as polymeric mixtures and polymeric composite materials. Features of a structure of macromolecules and supramolecular formations, causing variety of forms of molecular mobility in polymers, lead to a number of relaxation processes; all of them are related to a heat movement of kinetic units of the certain kind and can be described by a spectrum of times of a relaxation. Therefore, spectral representations have been used by consideration of structural changes under influence of vibrating influence on polymers and polymeric composite materials.

In this work, the film properties made from mixtures of latex based on hard-chain and elastic copolymers, undergone by vibrowave treatment have been considered. Process of a film formation in this case is known to start with the evaporation of the dispersion media (water) and finishes with transformation of a dispersion into a coating. The period between the change of the film sizes during the coating formation and achievement of an equilibrium condition is governed by relaxation processes.

Relaxation phenomena arise already during the moment of a film drawing on a substrate when a shift pressure appears and possibilities for the cohesion break of an interface between the film and the substrate are created. During the drying, the coating should relax, forming a thin and smooth layer, thus the module of elasticity increases. Thus, the mechanical relaxation promotes decrease of the probability of fragile destruction and exfoliation of the film from the substrate.

Preliminary tests on search of optimum conditions of vibrowave stirring for obtaining mixtures with improved physicomechanical properties have shown that from three varied factors (ratio of latexes in a mixture, frequency and time of vibrowave treatment) crucial factor is a composition of mixtures.

Interpretating the character of the dependence of elastic-strength properties of polymeric compositions on structure, two factors can be taken into consideration at least. Taking into account a defining role of a continuous phase in the formation of properties of a mixture, S-shaped structure-property curve is based on the phase inversion.

It is also noted, that relative elongation at a break and a limit of fluidity better characterize the nature of a continuous phase, than relative strength at the stretching. At the same time, the deviation of the curve “break stress – composition” from additivity (nonmonotonic dependence) – relative strength under the stretching – can be considered as a proof of strengthening of interaction in an interphase layer in mixtures of polymers under the influence of nonlinear vibrations.

It is quite characteristic, that the effect of nonmonotonic dependence is more pronounced as an extremum in compositions with the preferential content of more hard-chain polymer, which relaxation characteristics cause its greater sensitivity to vibrowave influence

The explanation of observed effects of modifying influence of vibrowave treatment on multiphase systems which is carried out by the direct excitation of nonlinear vibrations in a resonant regime and is observed further at the formation of properties of films and other compositions based on the dispersions, undergone by the vibrowave treatment, it is possible to explain by the occurance of the factor of "memory" as an element of hereditary mechanics. The carrier of such a «memory» is the structural-morphological organization of the examined multiphase systems, and the influence of wave action in a sound range of frequencies is observed at different levels of the structural organization.

The wave effects concerning the organization of a controlled tubulization in a resonance regime in multiphase systems, three-dimensional current and deagglomeration of associates, lead to obtaining dispersions with narrower particle size distribution and, consequently, more homogeneous films with an increased level of physicomechanical properties.

Considering an increase of shift deformations under the influence of vibrations, it is possible to believe that vibrating influence in this case leads to the effect similar to that under plastification on rollers, where there are conditions for orientation of structural formations of a filler and polymer and strengthening of their interaction in an interphase layer. Similar effects have been noted earlier in solid mixturing of hard-chain crystallizing flourine-containing copolymers with flourine rubber [13].

It is obvious, that correlation of anisotropy of structure and physicomechanical parameters of properties is most pronouced in the presence of anisodiametric morphological formations. Comparison of physicomechanical properties of films obtained from latex treated by vibrowave action and in solid-phase mixturing of the same polymers, where defining criteria are stress and deformations of a shift, allows to prove the efficiency of vibrowave influence.

Reduction of the vapor transmittance of latex films as a result of vibrowave influences on the latex, measured by diffusion method, also confirms the change of a film structure under the influence of nonlinear vibrations. It is necessary to emphasize, that the influence of vibrowave treatment observed already at a stage of synthesis of polymers is efficient at the subsequent stages of formation of a complex of properties of polymeric composite materials.

Relaxation processes in latex systems are in the interplay with the regulation of process of a film formation when it is necessary to create high gradient of velocity in the dispersed systems. In this process, three stages of process of a film formation are known to be determined: concentrating of suspensions and transition of low-viscosity mobile system in capillary structure, transformation of capillary structure into a film in which local contacts between particles convert in continuous, dense contact (driving force of particle coalescence can be an interphase tension on border polymer-water, and also force of capillary pressure); and, finally, the third stage (having the greatest value for maintenance of film continuality and its high physicomechanical properties) where processes of

mutual diffusion take place, as well as adhesive interaction and formation of hydrogen or chemical bonds between particles (physical and chemical crosslinking).
Thus, the discovered features of physicomechanical properties of latex systems in a wide range of component ratios, and their IR-spectra show the strengthening of interphase interaction in compositions under the influence of vibrowave treatment in a resonant regime in a sound range of frequencies. Alongside with the data describing the dynamic behaviour of investigated systems, which were obtained by means of various structurally-sensitive methods, the revealed effects (change of dispersity, structural-morphological organization, local and translation mobility) can be considered as a proof of the suggested mechanism of wave influence on the dispersed polymeric systems, leading to an intensification of mass-transfer processes, and also can be used for studying the interrelation of relaxation and resonant absorption of energy.

**Information about authors:**

**Bulychev N.A.** – chief researcher, Lebedev Physical Institute, Luminescence department (499) 132 62 47, professor, Moscow Aviation Institute (national research university), Physical chemistry department, (916) 137 65 86; **E-mail:** nbulychev@mail.ru

**Kolesnik S.A.** – professor, Moscow Aviation Institute (national research university), Department of Computational Mathematics and Programming, (903) 628 21 59; **E-mail:** ksa@mai.ru

# NONSTANDARD CAUSTICS FOR LOCALIZED SOLUTIONS OF THE 2D SHALLOW WATER EQUATIONS WITH APPLICATIONS TO WAVE PROPAGATION AND RUN-UP ON A SHALLOW BEACH

**Dobrokhotov S.Yu., Nazaikinskii V.E.**

The usual semiclassical approximation is not directly applicable to linearized two-dimensional shallow water equations with localized initial data describing long waves (for example, tsunami waves) in a bounded basin of variable depth, because the momentum variables on the geometric optics rays become infinite at the boundary of the region. The Fock quantization of the canonical transformation that regularizes the geometry leads to the Hankel transform. It is used in the construction of the modified Maslov canonical operator giving asymptotic solutions.
This work was supported by the Russian Science Foundation under grant no. 16-11-10282.

The origin, propagation, and run-up on the coast of long ocean waves are the subject of many publications (e.g., see the monographs [1, 2]). One important model is the system of shallow water equations, which is generally considered for a basin of variable depth $D(x)$, $x=(x_1,x_2)$, in some bounded domain $\Omega$ whose boundary is given by the equation $D(x)=0$. In most cases, the tsunami wave amplitude in the open ocean is rather small, and far from the boundary of the domain (that is, from the coast) we can restrict ourselves to the linearized system of shallow water equations. Further, if we consider only wave (but not vortex) solutions, then the linearized shallow water equations can be reduced to the two-dimensional wave equation for the free surface elevation $\eta(x,t)$. The description of tsunami waves in the piston model (corresponding to an instantaneous vertical shift of the bottom over a seismic source) can accordingly be reduced to solving the Cauchy problem for this equation with given initial conditions. If the action of the source is stretched in time, then the initial conditions become zero, but there arises a right-hand side; that is, the wave equation becomes inhomogeneous. Combining these two cases, we obtain the following Cauchy problem for the wave equation with velocity $c(x)=\sqrt{gD(x)}$ (where $g$ is the acceleration due to gravity):

$$\eta_{tt}-\langle\nabla,c^2(x)\nabla\rangle\eta=F(x,t),\quad \eta|_{t=0}=\eta^0(x),\quad \eta_t|_{t=0}=0.$$

We will assume that $D(x)$ is a smooth function in the closure of $\Omega$; moreover, $D(x)>0$ in $\Omega$, and the relations $D(x)=0$ and $\nabla D(x)\neq 0$ hold on $\partial\Omega$. In this case, to obtain a well-posed problem, one imposes the requirement of finiteness of the energy integral of $\eta(x,t)$ instead of the boundary conditions. Namely,

$$J^2(t)=\frac{1}{2}(\nabla\eta,c^2(x)\nabla\eta)+\frac{1}{2}\|\eta_t\|^2<\infty,$$

where the inner product and the norm are taken in the space $L^2(\Omega)$. First, consider the case in which $F(x,t)=0$. We take the initial conditions in the form

$$\eta^0(x)=V\left(\frac{x-x_0}{l}\right),$$

where $x_0\in\Omega$ is the point where the source is located, $V(y)$ is a rapidly decaying function determines the source shape, and $l$ is the linear dimension of the source (which is assumed to be small compared to the characteristic linear dimension $L$ of the basin itself). For the problem obtained, it is natural to seek a solution in the form of asymptotics with respect to the small parameter $\mu=l/L$. (Assuming, for example, that $l=50$ km and $L\geq 1000$ km, we obtain $\mu\leq 1/20$.) In the second case, we set $\eta^0=0$ and take

$$F(x,t)=\frac{1}{\tau^2}g'\left(\frac{t}{\tau}\right)V\left(\frac{x-x_0}{l}\right),$$

here $\tau$ is the characteristic time of the source and $g(\zeta)$ is a smooth function decaying as $\zeta\to\infty$ and satisfying the condition $\int_0^\infty g(\zeta)d\zeta=1$; this condition guarantees the convergence

$\tau^{-2}g'(t/\tau) \to \delta'(t)$ as $\tau \to +0$, which in turn means the transition of a time-stretched source into an instantaneous one. We assume that $\dfrac{l}{\tau c(x_0)} \geq \text{const} > 0$.

The report describes the construction of solutions to the above problem. It relies on the modification [3] of the Maslov canonical operator [4] for equations degenerating on the boundary of a domain, based on the construction of a nonstandard phase space corresponding to such equations [5], on Fock's quantization of canonical transformations [6], and also on representation of localized asymptotic solutions via the canonical operator [7, 8].

As was noted above, the linearized shallow water equations well describe the physical picture of long wave propagation far from the coast, while we consider the linearized problem in the entire domain $\Omega$, so that further explanation why the solutions obtained make sense is necessary from the physical point of view. Here the following scheme can be used (which has so far been implemented at the physical level of rigor). It was shown in [9] that in the one-dimensional case the nonlinear system of shallow water equations

$$u_t + uu_x + \eta_x = 0, \qquad \eta_t + \left[(\eta + D)u\right]_x = 0$$

with the bottom profile $D(x) = x$ becomes linearized in the characteristic variables. Later, it was shown in [10] that this linearization amounts to formally discarding the nonlinear terms. At the same time, the new variables in the linearized system

$$U_s + N_z = 0, \qquad N_s + zU_z = 0$$

are related to the old variables by the point transformation

$$x = z - N + \frac{1}{2}U^2, \quad t = s + U, \quad u = U, \quad \eta = N - \frac{1}{2}U^2.$$

It was shown in [11] that, even in the case of a nonlinear bottom profile, a transformation of this kind (which is now asymptotic) allows one to obtain an asymptotic solution of the nonlinear problem from an asymptotic solution of a linear problem (assuming no wave breakup). In the two-dimensional case, we take advantage of the fact that the characteristics always approach the coast at the right angle. Passing locally to the new variables $(\tilde{x}, \tilde{y})$, where $\tilde{x}$ is the coordinate along the normal to the shore and $\tilde{y}$ is the coordinate along the coast, and freezing the variable $\tilde{y}$, it is possible to transform the asymptotic solution of the linear problem into an asymptotic solution of the nonlinear one with the help of a one-dimensional transformation of the variable $\tilde{x}$ similar to that written above.

The report is based on the results obtained in collaboration with A.Yu. Anikin, D.S. Minenkov, A.A. Tolchennikov and B. Tirozzi [11–14].

## REFERENCES


1. Pelinovsky E.N. Hydrodynamics of Tsunami Waves. Nizhnii Novgorod: Inst. For Appl. Phys. RAS, 1996. (Russian)
2. Stoker J.J. Water Waves: The Mathematical Theory with Applications. New York: Wiley, 1992.
3. Nazaikinskii V.E. Math. Notes, vol. 96, №2, 2014, pp.248–260.
4. Maslov V.P., Fedoryuk M.V. Semiclassical Approximation for Equations of Quantum Mechanics. Moscow: Nauka, 1976. (Russian)
5. Nazaikinskii V.E. Math. Notes, vol. 92, №1, 2012, pp.144–148.
6. Fock V.A. Vestn. LGU. Ser. Matem. Mekh. Astronom., vol. 16, 1959, pp. 67–70.
7. Dobrokhotov S.Yu., Shafarevich A.I., Tirozzi B. Russ. J. Math. Phys., vol.15, №2, 2008, pp.192–221.
8. Nazaikinskii V.E. Math. Notes, vol. 96, № 1, 2014, pp. 99–109.
9. Carrier G.F., Greenspan H.P. J. Fluid Mech., vol. 4., № 1, 1958, pp. 97–109.
10. Pelinovsky E.N., Mazova R.Kh. Natural Hazards, vol. 6. № 3, 1992, pp.227–249.
11. Dobrokhotov S.Yu., Minenkov D.S., Nazaikinskii V.E., Tirozzi B. Chap. 3 in: Theory and Applications in Mathematical Physics, Singapore: World Scientific, 2015, pp.29–47.

12. Dobrokhotov S.Yu., Nazaikinskii V.E., Tolchennikov A.A. Math. Notes, vol. 101, № 5, 2017, pp.802–814.
13. Anikin A.Yu., Dobrokhotov S.Yu., Nazaikinskii V.E. Math. Notes, vol. 104, № 4, 2018, pp. 471–488.
14. Anikin A.Yu., Dobrokhotov S.Yu., Nazaikinskii V.E. Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom., vol. 14, № 4, 2018, pp.393–405.

**Information about authors:**

**Dobrokhotov S.Yu.** – Head of Laboratory of Mechanics of Natural Hazards, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS; Chair, Professor, Moscow Institute for Physics and Technology (State University) (7 495) 433 75 44
**E-mail:** dobr@ipmnet.ru

**Nazaikinskii V.E.** – Principal Researcher, Laboratory of Mechanics of Natural Hazards, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS; Professor, Moscow Institute for Physics and Technology (State University) (7 495) 433 36 95
**E-mail:** nazaikinskii@yandex.ru

# CRITICAL STRESSES DETERMINATION IN CASE OF PORES FORMATION FOR COARSE AND ULTRA-FINE GRAINED AL-6101 UNDER STATIC TENSION

**Efimov M.A., Magomedova D.K., Gunderov D.V., Ryabokon D.V.**

The stress-strain diagrams and the distribution of triaxial stresses, taking into account the difference in geometry for various structural states in Al-6101 under static loading, are analyzed in this paper.

## 1. Introduction

The problem of strength and durability calculations for various metal constructions is one of the most important in the modern world. Knowledge of various mechanical criteria of a material, such as strength, ductility, etc. is required to solve it [1],[3],[4].

Calculations of critical stresses that define the pore nucleation inside a material under static loading, particularly in Al-6101, are presented in this paper. The pore formation as well as their further merging and crack formation indicate the first stage of material rupture. Therefore, having data on the critical stresses of a material, it is possible to predict its rupture. However, there are currently no studies on pore formation for ultrafine-grained aluminum alloys.

## 2. Method

The technique is based on the article [1]. We consider static loading at room temperature and constant tensile speed. Specimens are presented in two geometries and two structural states: the coarse-grained (CG) material after artificial aging (AA) and the ultra-fine grained (UFG) material obtained by ECAP-C [2]. The technique, material and experiment are described in detail in [3], [4].

Samples of 6101 alloy were used in the form of rods with a diameter of 12 mm, obtained by combined casting and rolling. The initial samples were annealed at 550°C for 2 hours with subsequent water quenching at room temperature. The alloy samples with CG structure after quenching were subjected to artificial aging (AA) at 170°C for 12 hours.

The part of billets was processed by SPD via equal-channel angular pressing according to the Conform scheme (ECAP-C) to obtain the UFG structure.

Table 1. Data on the strength and fluidity of the material under static loading.

| Type of structure | Fluidity limit, MPa | Strength limit, MPa |
|---|---|---|
| The coarse-grained (CG) material after artificial aging (AA) | 238 | 312 |
| The ultra-fine grained (UFG) material obtained by ECAP-C | 304 | 351 |

Table 1 shows the strength and fluidity data of the material for sample geometry №1 (figure 1), which are confirmed.

Calculation of the critical stress value $\sigma_r$ at the metal matrix/particle interface was first carried out by a group of Argon, Im and Needleman in [1].

They managed to derive the criterion of pore formation for rods made of coarse steel and copper with a groove:

$\sigma_m + \sigma_{eq} \geq \sigma_r$, (2.1)

Where $\sigma_m = \dfrac{1}{3(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}$ is the hydrostatic stress; (2.2)

$\sigma_{eq} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$ is the equivalent stress, (2.3)

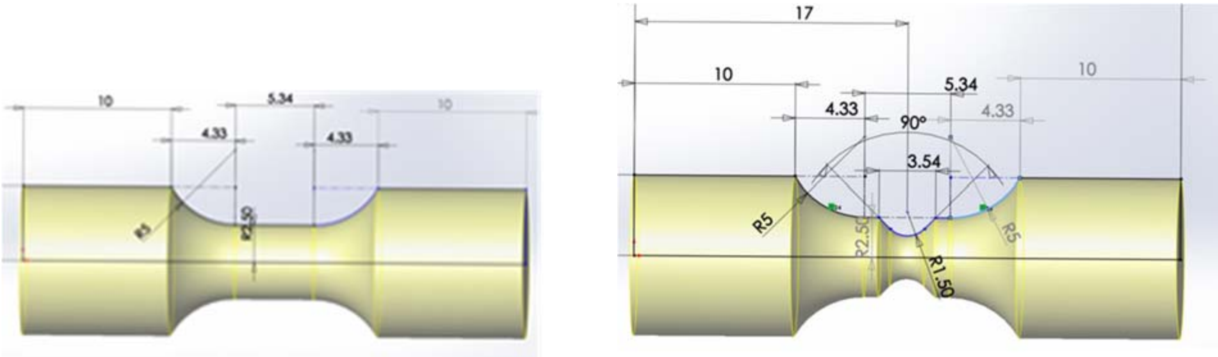
$\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$ are the principal stress values.

The calculation for our material was carried out basing on this criterion.

Naturally, the formation of stresses and pores in a material depends on the geometry of the samples. Therefore, we use 2 types of samples. You can also simulate the stress state of these samples for our case.

As previously mentioned, different specimen geometries were used: №1 — without groove (diameter of the working section is 5 mm)and №2 — also with groove (diameter of the minimal section is 2 mm) (Fig. 1).

The use of the samples of different geometry in the work was due to the interest in plotting the strain distribution map, as well as their relation to the areas where the voids were formed after the experiment.




a) b)

**Figure 1.**Specimens with diameters of working sections of: a) 5 mm- geometry №1; b) 2 mm- geometry №2.

The mechanical tests of the samples on uniaxial tension were carried out at the Shimadzu AG-50kNX tensile machine. Tensile test of the samples was conducted out at room temperature with a constant strain rate of $1.4 \cdot 10^{-4} s^{-1}$. The deformation of the working part of the samples was registered using the Shimadzu TRViewX video extensometer. At least 3 samples were tested for each microstructural state and geometry. The tensile test was conducted until the failure of the samples.

To study the structure for the void presence after mechanical testing, the samples were cut along the axis on the ARTA 123-PRO electro-erosion machine with a precision accuracy of 1-2 µm. Then the surface of the cut was grinded and polished to a surface roughness of 50 nm.

The surface of the samples in the section (along the axis) was examined using the Zeiss Supra 40VP scanning electron microscope with a field cathode (Field Emission).

Using simulation, critical stresses were established in ANSYS at which the samples are destroyed. Therefore, the experiments were stopped until these values were reached (figure 2).

**3. Results.**

Samples with CG structure after AA present larger ductility than in UFG state (Fig. 2).

Calculation of the triaxial (the sum of equivalent and hydrostatic) stresses distribution was made using ANSYS 19.0 package and according to the data from video extensometer and testing machine (Fig. 2) for each geometry of FG specimens and CG specimens.

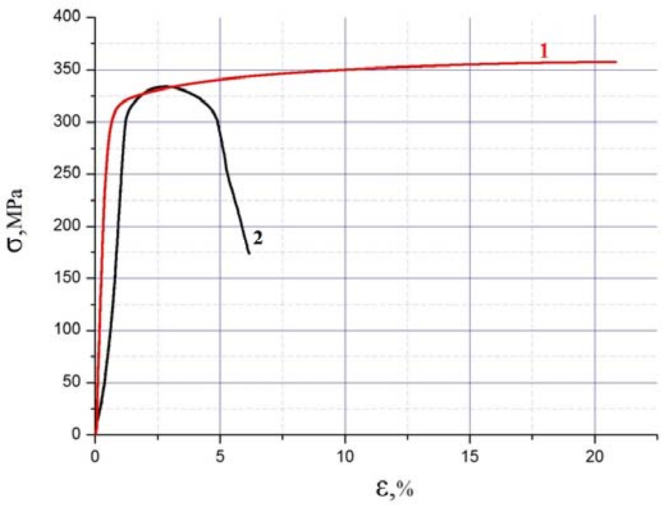
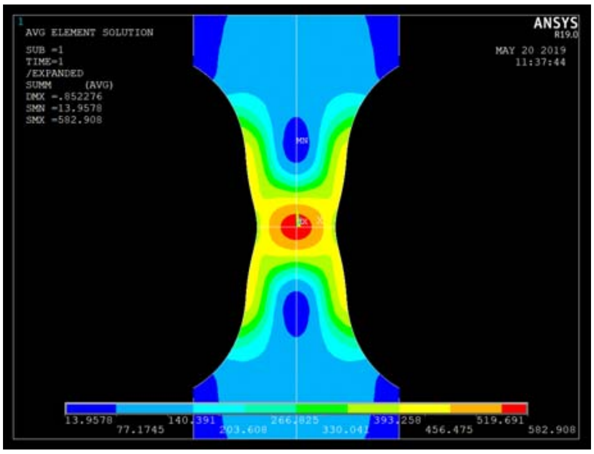
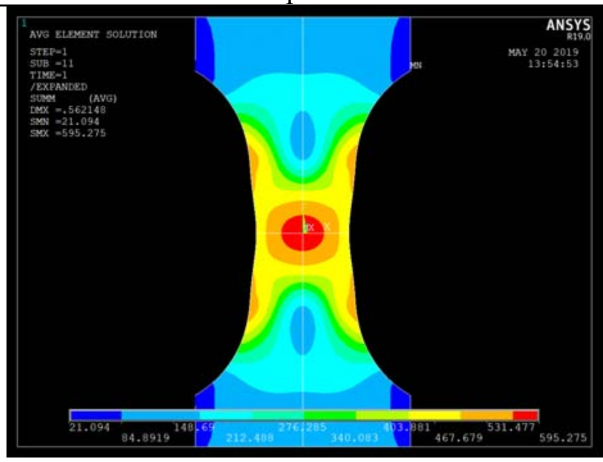
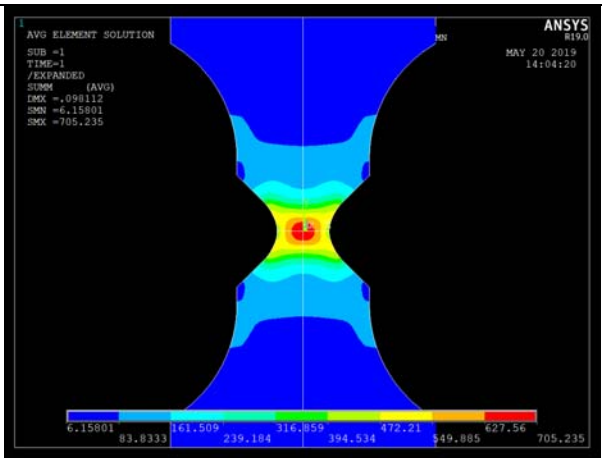
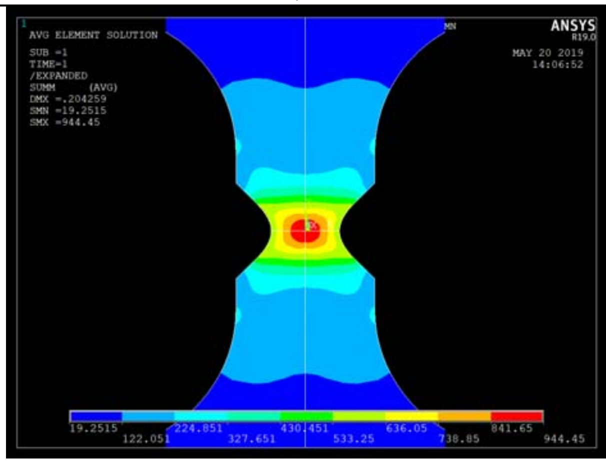
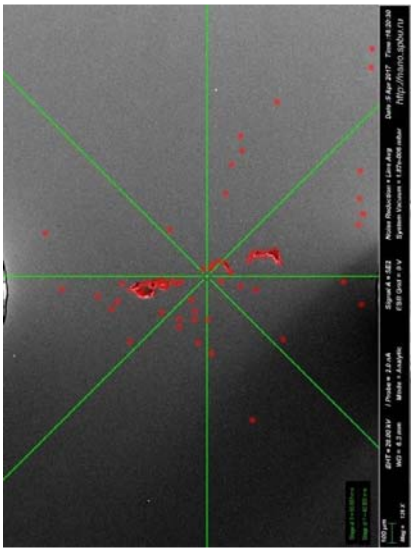



Figure 2. Stress-strain curves for: 1- CG samples after AAand 2- UFG sample produced by ECAP-C.

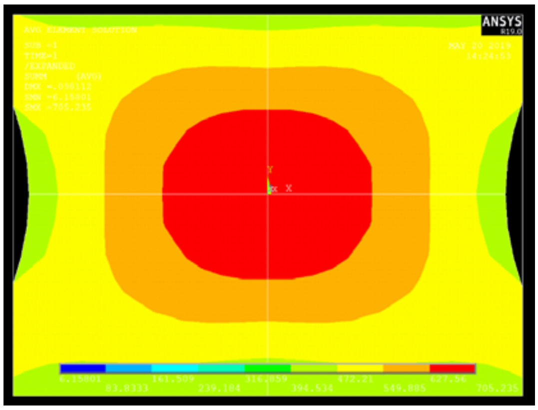
Table 2.The triaxial stresses distribution for CG and UFG specimens.

| | |
|---|---|
|  Geometry №1, AA |  Geometry №1, UFG |
|  Geometry №2, AA |  Geometry №2, UFG |

The images of the axial sections of the specimens as well as the sizes and location of pores inside the material were were obtained using the electron microscope [2], [3].



**a)**




**b)**

Figure 3.a) The image of the section of the coarse-grained and artificial aging specimen with geometry №2 (small areas around pores are highlighted in red for illustrative purposes);b) The triaxial stresses distribution for the same specimen.

Table 2 presents maps of the distribution of stresses under tension of the samples. These stress maps are compared with the image of the cross section of the sample and the pore formation region corresponds to the maximum stresses on the stress distribution map (figure 3).

For visual clarity, let us mark the points with pores in the image of the axial section of the specimen with geometry №2(figure 3).

**4. Analyze results.**

Analysis of the triaxial stresses distribution with regard to differences in geometries shows that the groove leads to the stress values localization in the area of the section that has a minimal diameter, and the nature of the triaxial stresses distribution depends on the groove geometry. The minimal value of triaxial stresses, 331 MPa, refers to CG NA specimen with geometry №1 (Tab. 2), while the maximal value of triaxial stresses, 944 MPa (ANSYS), is achieved in UFG specimen (Tab. 2).

It was possible to clearly identify the area of pore formation in CG AA geometry №2 deformed specimens (Fig. 3).Comparing the image with the highlighted pores, obtained from the microscope, and our model from ANSYS, one can precisely define the boundary of the pore formation region for CG AA №2.For the rest of the specimens, including all UFG specimens, it is impossible to accurately identify areas of pore formation. At the same time, a theoretical analysis of the triaxial stresses distribution shows that UFG specimens demonstrate higher values of triaxial stresses in compareof CG specimens of the same geometry. This analysis suggests that UFG specimens have higher critical stress values compared with CG specimens [4].

The results of quantitative analysis of void sizes, formed at the fracture zone of the tensioned samples, are presented in Table 3. The size change from coarse-grained to ultrafine-grained range leads to a reduction in void size by more than 3 times.

Table 3.The average void size for material with CG and UFG structure.

| Structure type | | Grain size, μm | Void size, μm |
|---|---|---|---|
| CG | AA | >100 | From 3 to 7 |
| UFG | | 0.5…1.5 | From 1 to 2 |

**5. Conclusion**

The triaxial stresses distribution is uniform in the specimens without groove. The groove leads to a concentration of triaxial stresses (i.e., increased values of hydrostatic stresses) in the groove area. The nature of the triaxial stresses distribution is defined by mechanical behavior of a material (i.e., its microstructure and aging state) and the groove geometry. Also, the grain size in the material affects the size of the resulting pores in the material.

The use of the Argon model and the results of a theoretical study of the triaxial stresses distribution in the specimens during the tests made it possible to determine the critical stresses in case of pore $\sigma_r$ ≈ 550 MPa (equation 2.1) for CG AA №2. Qualitative analysis of experimental and theoretical results suggests that the critical stress value during the pore formation in UFG material has higher values.

**REFERENCES**

1. Argon A.S., Im J., Needleman A. Distribution of plastic strain and negative pressure in necked steel and copper bars. Metallurgical Transactions 824-volume 6A, April 1975.

2. Valiev R.Z., Alexandrov I.V. Nanostructured materials produced by severe plastic deformation. Moscow, Logos Pub., 2000. 272p. (in Russian).

3. Magomedova D.K., Murashkin M. Yu. Influence of grain size and second phase particles on the process of the void initiation . //Journal of Physics: Conference Series, 2018.

4.Magomedova D.K., Murashkin M.Yu., Efimov M.A. Technique development for conducting mechanical tests to study the pore formation process in case of material fracture. AIP Conference Proceedings (1959), 2018.

**Information about authors:**

**Efimov M.A.** – student Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, Russia;

**Magomedova D.K.–** junior scientific researcher, Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, Russia, 8(950)0149254, **e-mail:** magmedva.dasha@mail.ru;

**Gunderov D.V.** – scientific researcher, Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, Russia, **e-mail:** dimagun@mail.ru;

**Ryabokon D.V.–**senior lecturer, Military Academy of the Signal Corps named after S.M. Budjonny.

# SUSPENSION OF BOUNDARY EXCITATION OF A MAGNETOSTRICTIVE-PIEZOELECTRIC STRUCTURE BY EXTERNAL MAGNETIC FIELD: RESULTS OF NUMERICAL SIMULATION

**Galichyan T.A., Khurshudyan As.Zh.**

A bilayer structure consisting of a magnetostrictive and a piezoelectric phases is considered under dynamic action of a boundary load and a time-dependent external magnetic field. The aim is to suspend the vibrations of the bilayer within a finite amount of time by controlling the intensity of the external magnetic field. The problem is formulated as a control problem for a coupled system of non-homogeneous partial differential equations of motion. The method of heuristic control is involved to determine possible steering controls ensuring total equilibrium of the bilayer within a required amount of time. Numerical simulation of the equations of motion

## 1. Introduction

Interaction of coupled fields is of high importance especially for structures subjected to external excitations of different nature. Depending on excitations strength and duration of their action, in order to protect the structure, it might be necessary to balance their action by a contraction of another field. For example, when a bridge is subject to a moving load of high intensity, for its protection against fracture, it is advisable to use vibration absorbers or dampers [1]. On the other hand, the action of a boundary load on a fibre-reinforced magneto-elastic beam can be contracted by an external magnetic field applied at some angle to the orientation of reinforcing (magnetic) fibers [2].

In this paper, we aim to suspend forced vibrations of a bilayer magnetostrictive-piezoelectric beam-like structure within a given *finite* amount of time. Magnetoelectric composites consisting of piezoelectric and magnetostrictive phases are of importance for investigations on the nature of coupling between the electric and magnetic subsystems and for applications in magnetic sensors, transducers, actuators and high frequency signal processing [3-6]. The bilayer is subjected to a boundary dynamical load. To contract the boundary load, an external magnetic field varying over time is applied. The suspension is carried out by means of the components of the magnetic field and, given that the action of the boundary load is stopped at some given moment $T_0 > 0,$ the problem is in appropriate choice of these components, such that the bilayer is in total equilibrium at a given time $T > T_0$ and at all subsequent time moments. The method of heuristic control [7] is applied to determine the steering controls. Results of numerical simulation are discussed.

## 2. The Basic Equations and the Purpose of the Study

As a model structure, we consider a bilayer rectangular bilayer of constant thickness and width consisting of mechanically interacting piezoelectric and magnetostrictive layers. In Cartesian coordinate system *Oxyz*, the bilayer occupies the domain $\Omega = {}^p\Omega \cup {}^m\Omega,$ where ${}^p\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 0 \le x \le l_1, 0 \le y \le l_2, 0 \le z \le {}^p h\right\}$ and ${}^m\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 0 \le x \le l_1,\right.$ $\left. 0 \le y \le l_2,\ {}^p h \le z \le {}^p h + {}^m h\right\}$ characterize the piezoelectric and magnetostrictive layers, $l_1, l_2,$ ${}^p h + {}^m h$ are the length, width and thickness of the bilayer, respectively (see Fig. 1).

At the part of the boundary ${}^F\Omega = \left\{(x, y, z),\ x = 0,\ 0 \le y \le l_2,\ z = {}^p h + {}^m h\right\},$ the bilayer is subjected to a dynamic excitation $F = F(t)$ uniformly distributed over $0 \le y \le l_2.$ The rest part of the boundary, i.e., $\partial\Omega \setminus {}^F\Omega$ is mechanically free. Besides, the bilayer is subjected to varying external magnetic field $\boldsymbol{H} = \left(H_x(t), 0, H_z(t)\right).$ At initial time moment $t = 0,$ the bilayer is in total equilibrium. When $F$ starts to act, elastic oscillations occur in the magnetostrictive phase of the bilayer along $0 \le x \le l_1$ leading to occurrence of corresponding magnetic field therein. Since layers are mechanically interacting, elastic oscillations that are transferred to the piezoelectric phase of the bilayer initiate electric field therein. Depending on amplitude and acting interval of $F,$ oscillations and/or corresponding magnetic and electric fields may increase in time and cause damage in the bilayer. That is why it is important to suspend oscillations of the bilayer on time.

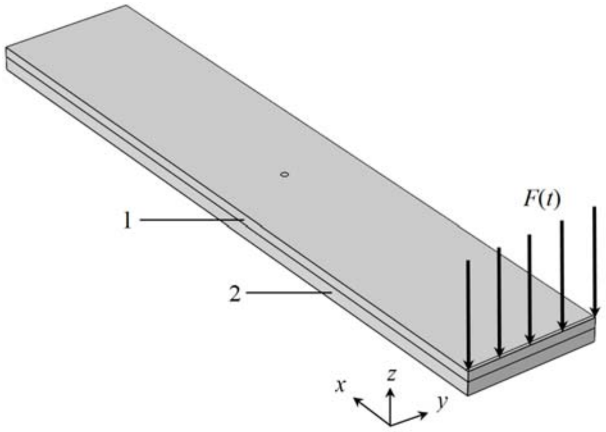



**Fig. 1.** Schematic representation of a bilayer bilayer: 1– magnetostrictive phase, 2– piezoelectric phase

Thus, our aim is to ensure total equilibrium of the bilayer within a given finite amount of time $T$ by means of appropriate choice of the quantities $H_x$ and $H_z$. Here, the control time $T$ is constrained by $T > T_0$, where $T_0$ is the time when $F$ stops to act, i.e., $\operatorname{supp}(F) \subseteq [0, T_0]$. Naturally, it is highly desired that $\Delta = T - T_0$ would be a small quantity.

Assuming that $l_2 \ll 1$, we, in fact, hypothesize that the $y-$component of the displacement field is homogeneous. As a result, $F$ can be regarded as a concentrated load. Moreover, the non-zero components of the Cauchy stress tensor are only ${}^{\alpha}\sigma_{xx}$ and ${}^{\alpha}\sigma_{xz}$, where $\alpha \in \{p, m\}$. Then, the equations of motion read as

$$\begin{cases} {}^{\alpha}\sigma_{xx,x} + {}^{\alpha}\sigma_{xz,z} = {}^{\alpha}\rho\, {}^{\alpha}u_{x,tt} \\ {}^{\alpha}\sigma_{xz,x} + F(t)\delta(x)\delta\left(z - {}^{p}h - {}^{m}h\right)\delta_{\alpha}^{m} = {}^{\alpha}\rho\, {}^{\alpha}u_{z,tt} \end{cases} \quad \text{in } {}^{\alpha}\Omega. \tag{1}$$

Here, as usual, ${}^{\alpha}\sigma_{xx,x}$ means derivative of ${}^{\alpha}\sigma_{xx}$ with respect to $x$, ${}^{\alpha}u_x$ and ${}^{\alpha}u_z$ are the non-zero components of the elastic displacement vector, ${}^{\alpha}\rho$ is the density of the $\alpha^{\text{th}}$ phase, $\delta$ is the Dirac delta function, and $\delta_{\alpha}^{m}$ is the Kronecker symbol. The Kronecker symbol in (1) means that the force is acting only on the magnetostrictive phase of the bilayer.

On the other hand, constitutive equations for the bilayer read as

$$\begin{aligned} &{}^{p}\varepsilon_i = {}^{p}s_{ij}\,{}^{p}\sigma_j + {}^{p}d_{ki}\,{}^{p}E_k, \quad {}^{p}D_k = {}^{p}r_{kj}\,{}^{p}E_j + {}^{p}d_{ki}\,{}^{p}\sigma_i \quad \text{in } {}^{p}\Omega, \\ &{}^{m}\varepsilon_i = {}^{m}s_{ij}\,{}^{m}\sigma_j + {}^{m}q_{ki}\,{}^{m}H_k, \quad {}^{m}B_k = {}^{m}q_{kj}\,{}^{m}\sigma_j + {}^{m}b_{kn}\,{}^{m}H_n \quad \text{in } {}^{m}\Omega, \end{aligned} \tag{2}$$

where ${}^{\alpha}\varepsilon_i$ are the strain tensor components, ${}^{p}E_k$ and ${}^{m}H_k$ are the components of electric and magnetic fields, ${}^{p}D_k$ and ${}^{m}B_k$ are the vector components of the electric displacement and magnetic induction, ${}^{\alpha}s_{ij}$, ${}^{p}d_{ki}$ and ${}^{m}q_{ki}$ are the compliance, piezoelectric and piezomagnetic coefficients, ${}^{p}r_{kj}$ and ${}^{m}b_{kn}$ are the permittivity and permeability of corresponding phases, respectively.

Kinematic relations are linear in both phases, i.e.,

$${}^{\alpha}\varepsilon_{xx} = {}^{\alpha}u_{x,x}, \; {}^{\alpha}\varepsilon_{xz} = 0.5\left[{}^{\alpha}u_{x,z} + {}^{\alpha}u_{z,x}\right], \; {}^{\alpha}\varepsilon_{zz} = {}^{\alpha}u_{z,z}. \tag{3}$$

Note that the assumption $\operatorname{supp}(F) \subseteq [0, T_0]$ can be written down more explicitly as

$$F(t) = F_0(t)\left[\theta(t) - \theta(t - T_0)\right],$$

where $\theta$ is the Heaviside step function. On the other hand, we assume that

$H_x(t) = H_{x0}(t)\left[\theta(t) - \theta(t-T)\right],\ H_z(t) = H_{z0}(t)\left[\theta(t) - \theta(t-T)\right],$

or, in other words, $\operatorname{supp}(\boldsymbol{H}) \subseteq [0,T]$. Here, $F_0$, $H_{x0}$ and $H_{z0}$ are given functions. Thus, the control problem is to choose appropriate $H_{x0}$ and $H_{z0}$, ensuring total equilibrium of the bilayer at $t = T$. Determination of appropriate controls can be carried out in several distinct ways. In this work, we employ the method of heuristic control developed in [7]. The idea of the method is in construction of $n-$parametric families of controls having specific meaning in the particular problem under consideration. Then, these $n$ parameters are chosen in such a way that the required constraints are fulfilled (total equilibrium of the bilayer in our particular case).

The simplest heuristic control would be the 2-parametric family

$$H_{x0} = a_x = \text{const},\ H_{z0} = a_z = \text{const}. \tag{4}$$

It is also possible to consider 6-parametric harmonic regimes

$$H_{x0}(t) = a_x \sin(\omega_x t + \gamma_x),\ H_{z0}(t) = a_z \sin(\omega_z t + \gamma_z). \tag{5}$$

The free parameters in this case are $a_x$, $\omega_x$, $\gamma_x$ and $a_z$, $\omega_z$, $\gamma_z$.

In general, $n-$parametric switching regimes

$$H_{x0}(t) = \sum_{k=1}^{K_x} a_{xk}(t)\theta(t - t_{xk}),\ H_{z0}(t) = \sum_{k=1}^{K_z} a_{zk}(t)\theta(t - t_{zk})$$

can be considered where $a_{xk}$ and $a_{zk}$ are arbitrary functions, $K_x$, $\{t_{xk}\}, K_z$, $\{t_{zk}\}$ are parameters.

## 3. Numerical Simulation

A numerical simulation has been carried out in COMSOL Multiphysics based on equations (1)–(3). The magnetostrictive phase is made of Nickel and the piezoelectric phase is made of Lead Zirconate Titanate (abbrev. PZT-8). For $F_0$, we consider two cases: $F_0(t) = \sin(t)$ and $F_0(t) = \exp(t)$. We also fix $l_1 = 20,\ l_2 = 4.3,\ {}^p h = 0.4, {}^m h = 0.3.$[1] For controls, we consider only regimes (4) and (5). Also, since after $T$, the bilayer is not subjected to any external influence, the bilayer displacement field decreases over time $t > T$ very fast. Therefore, we will consider controls $H_{x0}$ and $H_{z0}$, providing approximate controllability of the bilayer with precision $\varepsilon = 10^{-7}$ (see [8] for the definition and analysis of approximate controllability of deformable systems).

### 3.1. Harmonic excitation

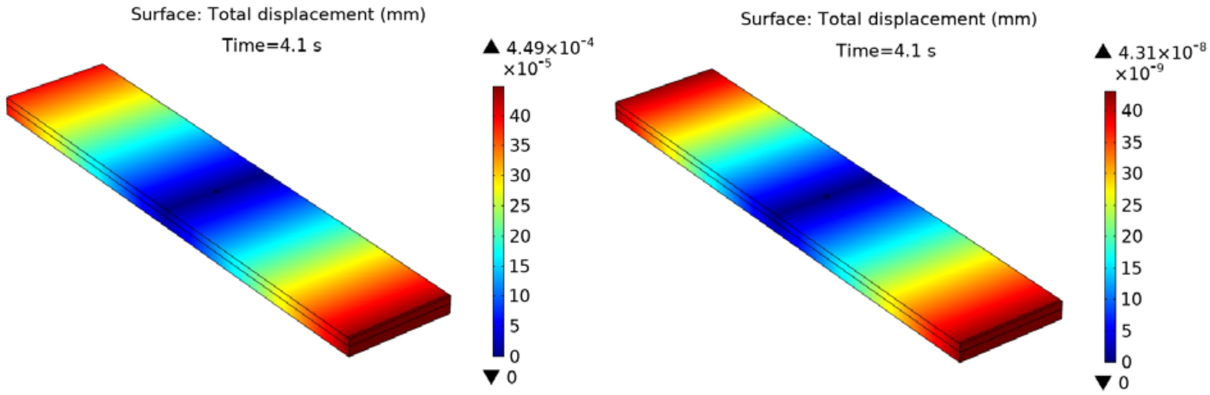
First, consider the case of harmonic excitations $F_0(t) = \sin(t)$. Involving the constant regime (4), we derive that $H_{x0} = 750,\ H_{z0} = 0$ may provide approximate controllability of the structure in required time. Of course this solution is not unique: there may exist infinitely many such solutions. It turns out that when $T_0 = 4$, controlled displacements may vanish already at $T = 4.1$. Figure 2 presents the total displacement of the bilayer at $t = 4.1$ with and without external magnetic field. It is seen that the controlled displacements are of $10^3$ order smaller from the uncontrolled ones. Simulation shows that a similar result can be obtained also in the case of $H_{x0} = 0,\ H_{z0} = 750$ (see Figure 3(a)) and $H_{x0} = 250,\ H_{z0} = 250$ (see Figure 3(b)).

### 3.2. Exponentially increasing excitation

Now let $F_0(t) = 0.04\exp(t)$. In this case, for $T_0 = 4$, total displacements in the absence of external magnetic field become smaller than the precision $\varepsilon$ at $t = 4.3$ (see Figure 4(a)). Thus, we

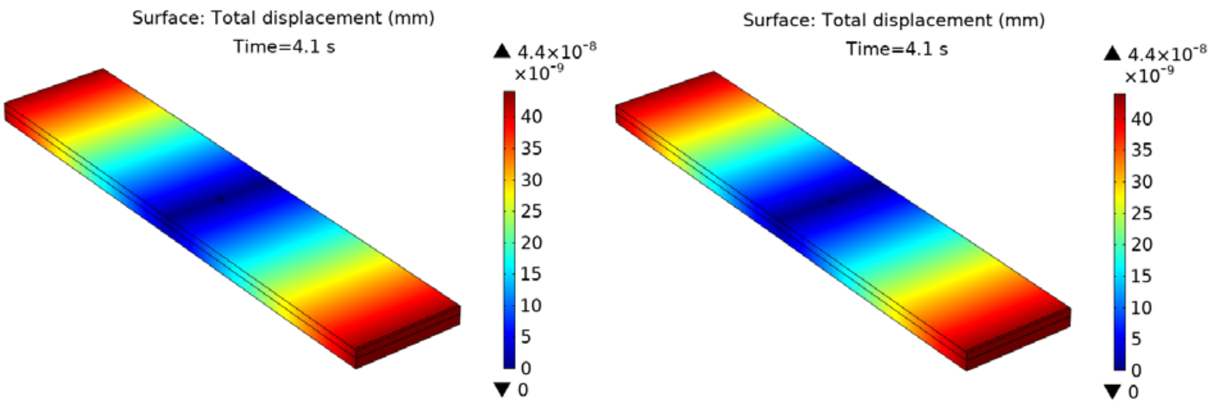
[1] Hereinafter, all quantities are in corresponding SI units.

consider $T < 4.3$. Involving (5) with $a_x = 250, \omega_x = 2, \gamma_x = 0, H_{z0} \equiv 0$, oscillations can be suspended as soon as $T = 4.02$ (see Figure 4(b)). In this case also the solution is not unique.



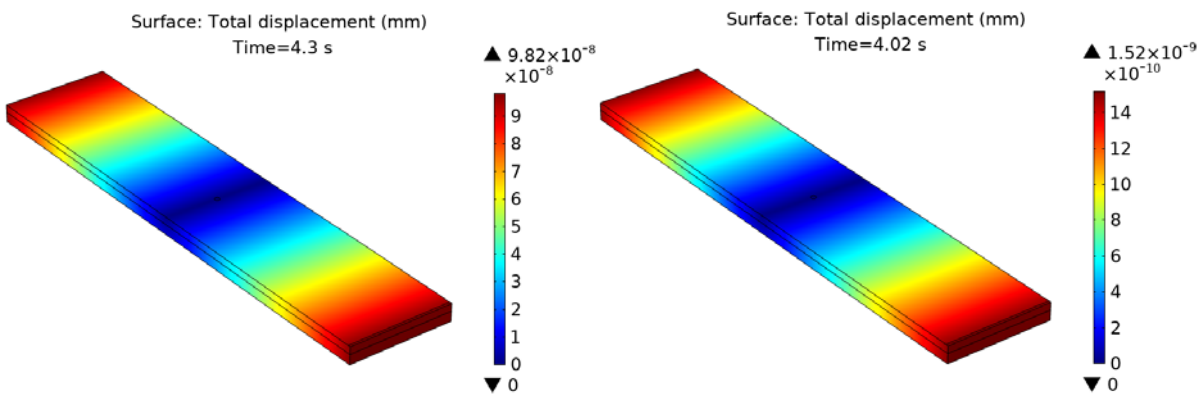

(a) (b)

**Fig. 2.** Uncontrolled (a) and controlled (b) displacements fields of the bilayer: constant control regime




(a) (b)

**Fig. 3.** Controlled displacements fields of the bilayer: a) $H_{x0} = 0$, $H_{z0} = 750$; b) $H_{x0} = 250$, $H_{z0} = 250$




(a) (b)

**Fig. 4.** Uncontrolled (a) and controlled (b) displacements fields of the bilayer: piecewise-constant control regime

## 4. Conclusions

A bilayer composite subjected to boundary dynamic excitations is considered in this paper. The bilayer is composed of a mechanically interacting layers, one of which is made of a magnetostrictive material, the other one is made of a piezoelectric material. The boundary excitations initiate a magnetic field in the magnetostrictive phase through excited elastic oscillations which are transferred to the piezoelectric phase initiating an electric field therein. When the boundary load becomes inactive, there remain electric field in the piezoelectric phase and a magnetic field in the magnetostrictive phase which, as it is well known, have accumulative character. In order to ensure the total equilibrium of the bilayer, an external magnetic field is applied and we have an opportunity to control the variation of its intensity over time. The controlling scheme is as follows. After deactivation of the excitation, the external magnetic field suspends elastic oscillations in the magnetostrictive phase which, due to mechanical interaction with the piezoelectric phase, absorbs its elastic oscillations as well. As a result of proper choice of the amplitude and orientation of the magnetic field using the method of heuristic control, it is possible to suspend the bilayer oscillations much faster. In the case of time-varying magnetic field, the suspension time may be even shorter. In cases considered, the steering controls are not unique which provides opportunities for determination of in appropriate sense optimal controls.

## REFERENCE


1. Sreenivasulu G., Fetisov L.Y., Fetisov Y.K., Srinivasan G., Piezoelectric single crystal langatate and ferromagnetic composites: Studies on low-frequency and resonance magnetoelectric effects, Appl. Phys. Lett., 2012, vol. 100, 052901
2. Onuta T., Wang Y., Lofland S.E., Takeuchi I., Multiferroic Operation of Dynamic Memory Based on Heterostructured Cantilevers, Adv. Mater. 2015, vol. 27, pp. 202–206
3. Filippov D.A., Manicheva I.N., Bordashev K.A., Laletsin V.M., Galichyan T.A., Technology of production and magnetoelectric characteristics of multilayer structures nickel-tin on the gallium arsenide substrate, 2018, IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng., vol. 441, 012017
4. Galichyan T.A., Filippov D.A., Laletin V.M., Firsova.T.O., Poddubnaya N.N., Magneto-Electric Transition in Nickel-Gallium Arsenide-Nickel Multiferroic Structure, JOP: Conf. Ser. 2018, vol. 991, 012022
5. Khurshudyan As.Zh., Vibration suspension of Euler-Bernoulli-von Kármán beam subjected to oppositely moving loads by optimizing the placements of visco-elastic dampers. ZAMM, 2018, vol. 98, pp. 1412–1419.
6. Khurshudyan As.Zh., Min(max)imization of horizontal and vertical displacements of a fibre-reinforced magneto-elastic cantilever rod. ZAMM, 2018, vol. 98, pp. 1924–1929.
7. Khurshudyan As.Zh., Heuristic determination of resolving controls for exact and approximate controllability of nonlinear dynamic systems. Math. Probl. Engin., 2018, 9496371, 16 pages.
8. Avetisyan A.S., Khurshudyan As.Zh., Controllability of Dynamic Systems: The Green's Function Approach. Cambridge Scholars Publishing, Cambridge, 2018.



**Acknowledgements**

*The work was performed with the support of the State scientific grant "Scientific and Technical Contractual (Thematic) Activity" of Armenia: Project Code: 18T-2C195*



**Information about authors:**

**Tigran Galichyan** – researcher, Institute of Mechanics, National Academy of Sciences of Armenia.
**E-mail:** galichyantigran@gmail.com
**Asatur Zh. Khurshudyan** – postdoctoral researcher, Institute of Natural Sciences, Shanghai Jiao Tong University, P. R. China
**E-mail:** khurshudyan@sjtu.edu.cn , khurshudyan@mechins.sci.am

## Influence of surface effects on stress state in a body with two circular holes

**Gandilyan D.V.**

In this paper we consider the problem of two equal holes in the plane with uniform all-round tension, taking into account the effects of surface elasticity. The problem is solved in the approximation of plane strain using bipolar coordinates and series expansion. The solution is of interest for the case of rather close holes. In this case, despite rather simple geometry, rather strong effects of the difference between surface and volumetric properties may be expected due to small distance between holes.

Problems, related to surface elasticity attract attention nowadays. The general methodology of obtaining analytical solutions for problems involving effects of surface elasticity consists in using the specific boundary conditions corresponding to the equations of surface elasticity is rather clear. Moreover, such an approach is almost prescribed by the nature of equations of surface elasticity. Rather general method using complex variables in 2-D was developed in the work of Grekov and co-authors [1], [2]. Meanwhile, the amount of obtained analytical solution for particular problems is limited, may be due to rather awkward appearance of the boundary conditions. The majority of the solutions obtained are restricted to simple geometries like spherical pore [3], [4], [5], circular hole [6], simple plate [7]. However the used shapes of sphere or circular hole are the least interesting from the point of view of influence of surface effects because for such forms the effect is minimal. Here we consider a problem of two equal holes in a plane under uniform comprehensive and uniaxial tension. The problem may be of interest for the case of rather close holes.

The parameters of the model are the following: R is the holes radii; 2d is the distance between the holes centers; $\lambda, \mu$ are Lame's elastic constants; $\lambda^s, \mu^s$ are the similar surface constants.

**1. Bipolar coordinates.** To solve the problem of such geometry it is convenient to use bipolar coordinates [8]. Actually the problem of a plate with two free of stress holes were solved by Ling [9] in 1948 using Jeffery [8] general solution for an area bounded by two non-coaxial circles. Here Ling's solution is generalized [9] (see also [10]) to account for the surface elasticity effects.

Following [8] we introduce bipolar coordinates $\alpha, \beta$ related to Cartesian coordinates $x, y$ as follows

$$x + iy = -a\coth\left(i\frac{\alpha+i\beta}{2}\right), \quad \alpha + i\beta = \ln\frac{x+i(y+a)}{x+i(y-a)}, \tag{1.1}$$

the scale factor being

$$g \equiv 1 \Big/ \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2} = \frac{\cosh\alpha - \cos\beta}{a}. \tag{1.2}$$

The coordinate frame and the problem geometry are shown on Figure 1. Points $O_1, O_2$ have coordinates $(0, -\mathrm{a})$; $(0, \mathrm{a})$ in Cartesian frame. For any point $P$ the radii from points $O_1, O_2$ to this point having lengths $r_1, r_2$, and angles between $x$ -axis and the radii being $\theta_1, \theta_2$, respectively, the bipolar coordinates are

$$r = \ln\frac{r_1}{r_2}, \quad \beta = \theta_1 - \theta_2. \tag{1.3}$$

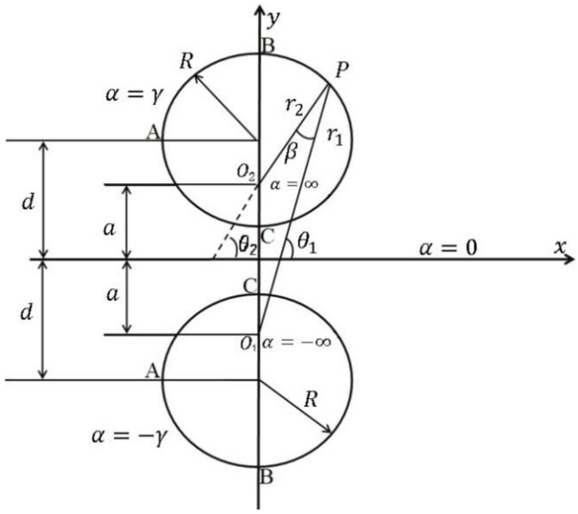



Fig.1. The coordinate frame and the problem geometry.

The constant value $\alpha = \pm\gamma$ correspond to two hole's contours so that for the hole radius $R$, the distance between the holes centers $d$ and the value of $\gamma$ the following relations take place [8]

$$R = {}^{a}/_{\sinh\gamma}, \quad d = a\coth\gamma, \quad {}^{d}/_{R} = \cosh\gamma. \tag{1.4}$$

The components of stress tensor $\sigma_{ij}$ are expressed in terms of one biharmonic function $\Phi$

$$\Delta^2\Phi = 0, \quad \left[\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial\beta^4} - 2\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} + 1\right](g\Phi) = 0, \tag{1.5}$$

as follows

$$a\sigma_{\alpha\alpha} = \left[(\cosh\alpha - \cos\beta)\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} - \sinh\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha} - \sin\beta\frac{\partial}{\partial\beta} + \cosh\alpha\right](g\Phi), \tag{1.6}$$

$$a\sigma_{\beta\beta} = \left[(\cosh\alpha - \cos\beta)\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - \sinh\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha} - \sin\beta\frac{\partial}{\partial\beta} + \cos\beta\right](g\Phi), \tag{1.7}$$

$$a\sigma_{\alpha\beta} = -\left[(\cosh\alpha - \cos\beta)\frac{\partial^2}{\partial\alpha\beta}\right](g\Phi). \tag{1.8}$$

The general solution symmetrical with respect of both $\alpha, \beta$ for the case two holes has the form [9]

$$\frac{g\Phi}{ap} = \frac{1}{2}(\cosh\alpha + \cos\beta) + K(\cosh\alpha - \cos\beta)\ln(\cosh\alpha - \cos\beta) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\alpha)\cos n\beta, \tag{1.9}$$

$$f_n(\alpha) = A_n\cosh(n+1)\alpha + B_n\cosh(n-1)\alpha. \tag{1.10}$$

In addition to (1.9) the following condition for equi-component tension should be satisfied [9]

$$\sum_{n=1}^{\infty}(A_n + B_n) = 0, \tag{1.11}$$

corresponding to decaying additional stresses at infinity.

In order to satisfy the boundary conditions on the contour (due to symmetry only one contour $\alpha = \gamma$ may be considered), the stresses at the contour should be represented as Fourier series, which in case of symmetry in $\alpha, \beta$ are

$$a\sigma_{\alpha\alpha} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\cos n\beta, \tag{1.12}$$

$$a\sigma_{\alpha\beta} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin n\beta, \tag{1.13}$$

$$a\sigma_{\beta\beta} = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n\cos n\beta, \tag{1.14}$$

here coefficients $c_n, b_n, d_n$ are expressed in terms $A_n, B_n, K$.

**2. Boundary conditions; problem formulation.** To solve the problem it is necessary to specify the boundary conditions at the hole contour. In case in question they correspond to the generalized Young-Laplace equation [11]

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} = -\nabla_s \boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{s}}. \tag{2.1}$$

Here $\boldsymbol{\sigma}$ is the bulk stress tensor; $\boldsymbol{n}$ is the unit normal vector to the boundary; $\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{s}}$ is the surface stress tensor; $\nabla_s$ stays for the surface divergence [11]. For the case under consideration, when the surface is formed by circle $\alpha = \gamma$ in bipolar coordinate system (2.1), we have

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \frac{1}{R}\sigma_{\beta\beta}^{s}, \tag{2.2}$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{R}\frac{(\cosh\alpha - \cos\beta)}{\sinh\alpha}\frac{\partial\sigma_{\beta\beta}^{s}}{\partial\beta}. \tag{2.3}$$

To obtain the boundary conditions appropriate to use let us express the surface stress in terms of kinematics variable according to Shuttleworth and Hooke's law

$$\sigma_{\beta\beta}^{s} = C_{\beta\beta\beta\beta}^{s}\epsilon_{\beta\beta}, \quad \epsilon_{\beta\beta} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{\beta\beta} - \nu\sigma_{\alpha\alpha}\right), \tag{2.4}$$

here $C_{\beta\beta\beta\beta}^{s}$ is the surface elastic modulus, $\epsilon_{\beta\beta}$ is the circumferential strain, $E, \nu$ are the bulk Young modulus and Poisson's ratio, respectively. Consequently,

$$\frac{1}{R}\sigma_{\beta\beta}^{s} = \varepsilon\left(\sigma_{\beta\beta} - \nu\sigma_{\alpha\alpha}\right), \quad \varepsilon = \frac{C_{\beta\beta\beta\beta}^{s}}{ER}. \tag{2.5}$$

Accounting for (2.5) the boundary conditions (2.1) are written as follows

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \varepsilon\left(\sigma_{\beta\beta} - \nu\sigma_{\alpha\alpha}\right), \tag{2.6}$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \varepsilon\frac{(\cosh\alpha - \cos\beta)}{\sinh\alpha}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\sigma_{\beta\beta} - \nu\sigma_{\alpha\alpha}\right). \tag{2.7}$$

The solution of the stated problem may be achieved by equating factors at sines and cosines of $\beta$, but that result in rather awkward manipulation with series. An alternative way consists in developing all functions involved in series on $\varepsilon$

$$\sigma_{ij} = \sum_{m=0}^{N}\varepsilon^m\sigma_{ij}^{(m)}, \qquad A = \sum_{m=0}^{N}\varepsilon^m A^{(m)}, \qquad B = \sum_{m=0}^{N}\varepsilon^m B^{(m)}, \tag{2.8}$$

$$b = \sum_{m=0}^{N}\varepsilon^m b^{(m)}, \qquad c = \sum_{m=0}^{N}\varepsilon^m c^{(m)}, \qquad d = \sum_{m=0}^{N}\varepsilon^m d^{(m)}. \tag{2.9}$$

Then, equating the terms of equal $\varepsilon$ we obtain the recurrent systems of boundary conditions

$$\sigma_{\alpha\alpha}^{(0)} = 0, \qquad \sigma_{\alpha\beta}^{(0)} = 0, \tag{2.10}$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}^{(m)} = \left(\sigma_{\beta\beta}^{(m)} - \nu\sigma_{\alpha\alpha}^{(m)}\right), \quad \sigma_{\alpha\beta}^{(m)} = \frac{(\cosh\alpha - \cos\beta)}{\sinh\alpha}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\sigma_{\beta\beta}^{(m)} - \nu\sigma_{\alpha\alpha}^{(m)}\right), \quad m \geq 1. \tag{2.11}$$

**3. Results.** In the calculations, it is assumed that the elastic properties of the base material determined by the parameters for an isotropic aluminum: $E = 70.3$ GPa, $\nu = 0.345$ and the corresponding surface properties — elastic constants taken from [1]:

$\lambda_s = 6.8511\ H/m, \quad \mu_s = -0.376\ H/m.$
Respectively, the modulus of surface elasticity was

$$C_{\beta\beta\beta\beta}^{s} = \lambda_s + 2\mu_s = 6.0991.$$

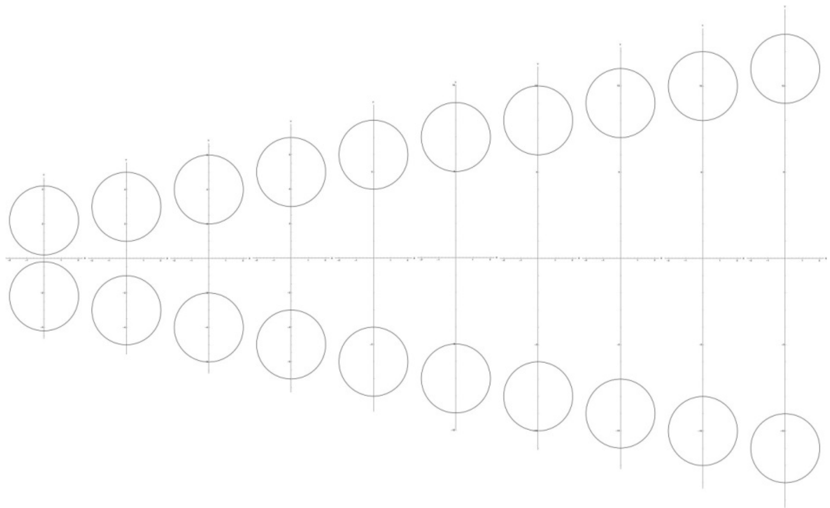


Fig. 2. The location of the two holes.

The radius of the holes was considered $R = 2$. The surface calculated for different $\lambda = {}^{d}/_{R}$. Below are graphs of surface stress at close and far distance between two holes in the case of all-round tension.

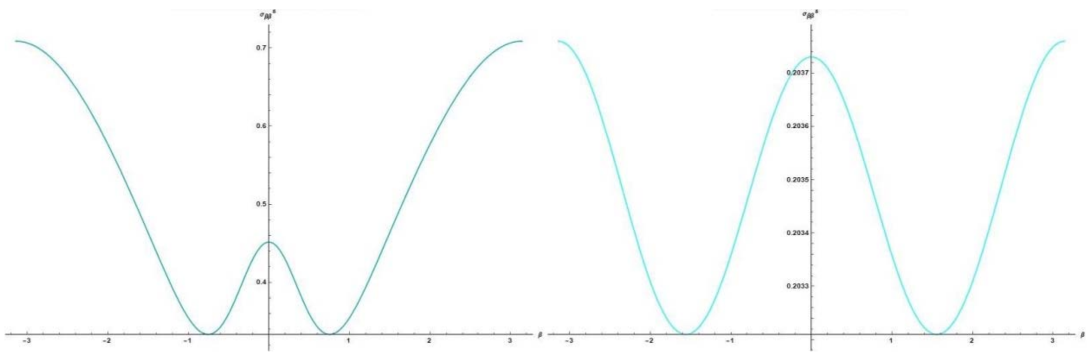


Fig. 3. The surface stress at λ = 1.1 and λ = 15.5.

Below are graphs of surface stress at close and far distance between two holes in the case of uniaxial (longitudinal) tension.

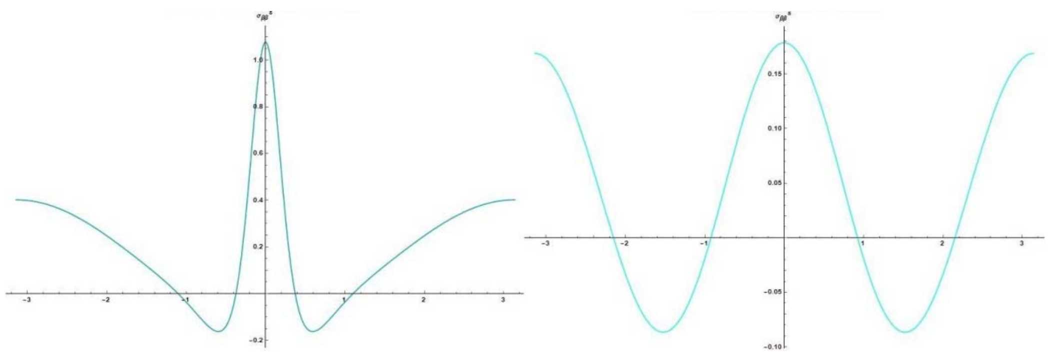


Fig. 4. The surface stress at λ = 1.1 and λ = 15.5.

Taking the results for one hole from [1], we compared two graphs of surface stress (the case of one hole and the case of two holes, but far away from each other).

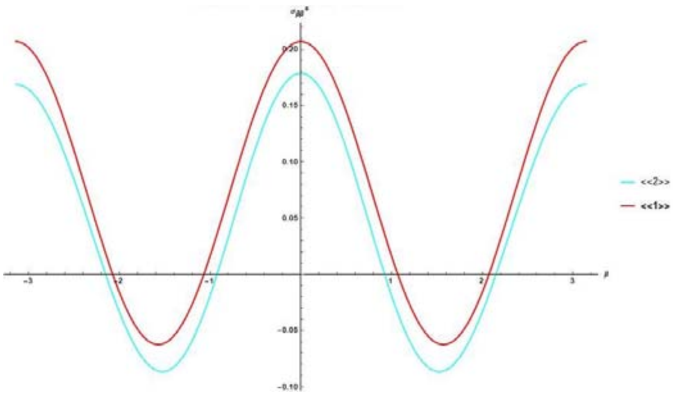


Fig. 5. The comparison of surface stresses.

The work has been done under financial support of the Program of RAS I.16.

## REFERENCE


1. Греков М.А., Язовская А.А. Эффект поверхностной упругости и остаточного поверхностного напряжения в упругом теле с эллиптическим наноотверстием // ПММ. 2014. Т.78. Вып.2. С.249-261.
2. Vikulina Y.I., Grekov M.A., Kostyrko S.A. Model of film coating with weakly curved surface, Mechanics of Solids, vol. 45, 2010, p. 778-788.
3. Duan H.L., Wang J., Huang Z.P., Karihaloo B.L. Eshelby formalism for nanoinhomogeneities, Proc. Roy. Soc. L., vol. 461, № 2062, 2005, p. 3335-3353.
4. Goldstein R.V., Gorodtsov V.A., Ustinov K.B. Effect of residual surface stress and surface elasticity on deformation of nanometer spherical inclusions in an elastic matrix, Phys. Mesomech., vol. 13, № 5-6, 2010, p. 318-328.
5. Устинов К.Б. О влиянии поверхностных остаточных напряжений и поверхностной упругости на деформирование шарообразных включений нанометровых размеров в упругой матрице. // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4. Ч.5. С.2541-2542.
6. Duan H.L., Wang J., Karihaloo B.L., Huang Z.P. Nanoporous materials can be made stiffer than non-porous counterparts by surface modification, Acta materiala, vol. 54, 2006, p. 2983-2990.
7. Altenbach H., Eremeyev V.A. On the shell and plate theories with surface stresses, Shell Structures, Theory and Applications, vol. 2, W. Pietraszkiewicz, I. Kreja (Eds). Boca Raton, CRC Press, 2010, p. 47-50.
8. Jeffery G.B. Plane stress and plane strain in bipolar coordinates, Phil. Trans. of the Roy. Soc. of London ser. A, vol. 221, 1921, p. 265-293.
9. Ching-Bing Ling. On the stresses in a plate containing two circular holes, J. Appl. Phys., vol. 19, № 1, 1948, p. 77-82.
10. Уфлянд Я.С. Биполярные координаты в теории упругости. М.; Л.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1950. 232 с.
11. Gurtin M.E., Murdoch A.I. A continuum theory of elastic material surfaces, Arch. Ration. Mech. Anal., vol. 57, № 4, 1975, p. 291-323.
12. Spiegel M.R., Lipschutz S., Spellman D. Vector Analysis (2nd Edition), Schaum’s Outlines, McGraw Hill (USA), ISBN 978-0-07-161545-7, 2009.


**<u>Information about authors:</u>**

**Gandilyan D.V.** – engineer, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences (IPMech RAS), +7-963-686-76-25
**E-mail:** david.ghandilyan@mail.ru

# SURFACE SHEAR WAVES IN SOME FUNCTIONALLY GRADED PERIODICALLY STRATIFIED SEMI-SPACE

**Ghazaryan K.B., Ghazaryan R.A., Papyan A.A.**

This analytical study demonstrates existence of surface shear elastic wave in periodically stratified functionally graded semi-space, consisting of periodically repeated perfectly bonded inhomogeneous unit sells. The material parameters inhomogeneous of unit sell stiffness and mass density are varied in the same proportion in the unit cells.

The existence of a new type of surface SH wave which propagates along the free surface of a periodically layered half-space was first demonstrated in [1],where is shown that harmonic wave can be exponentially attenuated in periodically layered half-space in a finite stopband of frequencies. The detailed analysis of these SH waves was given in [2-4]. In [5] the transverse surface elastic wave studied in the semi-infinite N-layer super-lattices created by periodic repetition of N different elastic slabs and the special case of a four-layer super-lattice was considered. The SH surface wave in a periodically layered semi space with an arbitrary non-homogeneous unit cell profile is considered in [6]. The study has shown that the existence and spectral properties of the SH surface wave is directly related to geometry and physical properties.

Let now consider periodically stratified functionally graded semi-space, consisting of periodically repeated perfectly bonded inhomogeneous unit sells which surface is free from mechanical tractions The material parameters of unit sells the stiffness and the mass density are varied in the same proportion with the cell height $d$ as $\mu_n(x)=\mu_0 f_n(x)$; $\rho_n(x)=\rho_o f_n(x)$, where $f_n(x)$ is the in homogeneity function which will be specified later, $n=1,2,..\infty$ is the number of the unit sells.

Two inhomogeneity structures of the periodically repeated elementary cells will be considered, cells with «symmetrical» profiles $f_{n1}(x)=\cosh^{-2}\left(a(x+d/2-nd)\right)$ and sells with «non-symmetrical» profiles $f_{n2}(x)=\cosh^{-2}\left(a(x-nd)\right)$, where $x\in\left[(n-1)d,nd\right]$.

For steady SH waves the following equations hold

$$\begin{aligned}&\partial_x\tau_{0n}(x)+\left(\varrho_0\omega^2-\mu_0k^2\right)f_n(x)u_n(x)=0\\&\tau_{0n}(x)-\mu_0 f_n(x)\partial_x\left(u_n(x)\right)=0\end{aligned}\tag{1}$$

For the considered inhomogeneous profiles $f_{ns}(x)$ Eqs. (1) can be converted into differential equations with constant coefficients admitting exact solutions [7,8]. Solutions of Eqs. (1) corresponding to the functions $f_{ns}(x), s=1;2$ can be found as

$$\tau_{0n}(x)=\sqrt{f_{ns}(x)}\left(\alpha_{ni}\exp(irx)+\alpha_{nr}\exp(-irx)\right);u_{0n}(x)=\frac{\partial_x\left(\tau_{0n}(x)\right)}{\beta f_{ns}(x)};\tag{2}$$

$$\beta=\left(\mu_0k^2-\rho_0\omega^2\right),r=\sqrt{\mu_0^{-1}\rho_0\omega^2-k^2-a^2}$$

By introducing the column field vector $\bar{V}_n(x)=\left(u_{0n}(x),\tau_{0n}(x)\right)^T$, $\bar{A}_n=\left(\alpha_{ni},\alpha_{nr}\right)^T$ the solutions of Eq.(2) can be cast as

$$\bar{V}_n(x)=\hat{\mathrm{F}}_{ns}(x)\cdot\bar{A}_n\tag{3}$$

where

$$\hat{\mathrm{F}}_{ns}(x)=\begin{pmatrix}\dfrac{\exp(irx)\left(2irf_{ns}(x)+\partial_x f_{ns}(x)\right)}{2\beta f_{ns}(x)^{3/2}} & \dfrac{\exp(-irx)\left(-2irf_{ns}(x)+\partial_x f_{ns}(x)\right)}{2\beta f_{ns}(x)^{3/2}}\\ \sqrt{f_{ns}(x)}\exp(irx) & \sqrt{f_{ns}(x)}\exp(-irx)\end{pmatrix}\tag{4}$$

The propagator matrix $\hat{\mathrm{M}}$ links field vector values at the surfaces $x=(n-1)d, x=nd$ of unit cell is now to be determined as:

$$\bar{V}_n(nd)=\hat{\mathrm{F}}_n(nd)\cdot\bar{A}_n,\ \bar{V}_n\left((n-1)d\right)=\hat{\mathrm{F}}_n\left((n-1)d\right)\cdot\bar{A}_n\tag{5}$$

Excluding vector $\bar{A}_n$ in Eq. (5) one has

$$\bar{V}_n(nd) = \hat{\mathrm{F}}_n(nd)\hat{\mathrm{F}}_n^{-1}((n-1)d)\bar{V}_n((n-1)d);$$

Herein $\hat{\mathrm{M}} = \hat{\mathrm{F}}_n(nd)\hat{\mathrm{F}}_n^{-1}((n-1)d)$ is the propagator matrix for the inhomogeneous cells.

The matrix trace $Tr(\hat{M})$, namely the condition $|Tr(\hat{M})| > 2$, defines the stopband of frequencies [9], ranges of eigen frequencies in which waves cannot propagate in the infinite periodic medium consisting of periodically repeated inhomogeneous cells.

The elements of the propagator matrix $\hat{M}_1$ corresponding to the solutions of the "symmetrical" profile $f_{n1}(x)$ have the form

$$m_{11}^{(1)} = \cos(rd) - ar^{-1}\sin(rd)\tanh\left(\frac{ad}{2}\right); \qquad m_{22}^{(1)} = m_{11}^{(1)}$$

$$m_{12}^{(1)} = \frac{\left(r^2 + a^2 + \left(r^2 - a^2\right)\cosh(ad)\right)\sin(rd) + 2ar\cos(rd)\sinh(ad)}{2r}; \tag{6}$$

$$m_{21}^{(1)} = -\frac{2\sin(rd)}{r + r\cosh(ad)}.$$

The elements of the cell propagator matrix $\hat{M}_2$ corresponding to the solutions of the «non-symmetrical» profile can be written as

$$m_{11}^{(2)} = \frac{\cos(rd)}{\cosh(ad)}; \qquad m_{12}^{(2)} = r\cosh(ad)\sin(rd) + a\cos(rd)\sinh(ad);$$

$$m_{21}^{(2)} = -\frac{\sin(rd)}{r\cosh(ad)}; \quad m_{22}^{(2)} = \cos(rd)\cosh(ad) - ar^{-1}\sin(rd)\sinh(ad) \tag{7}$$

Using formality of the Floquet theory [9]

$$\bar{V}_n^{(2)}(nd) = \lambda\bar{V}_n^{(1)}((n-1)d), \tag{8}$$

$$\bar{V}_n^{(2)}(nd) = \lambda^n\bar{V}_1^{(1)}(0), \tag{9}$$

where $\lambda = \exp(ikd)$ is the Bloch-Floquet factor and taking into account that

$$\bar{V}_n^{(2)}(nd) = \hat{M}\bar{V}_n^{(1)}((n-1)d), \tag{10}$$

the following equation is obtained

$$\left(\hat{M} - \lambda\hat{I}\right)\bar{V}_n^{(1)}((n-1)d) = 0 \tag{11}$$

here $\hat{I}$ is the identity matrix

Using this equation for $n = 1$ unit cell me get

$$\begin{pmatrix} m_{11} - \lambda & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} - \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1^{(1)}(0) \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \tag{12}$$

The Bloch-Floquet factor $\lambda$ is determined from the condition that Eq. (11) has a non-trivial solution

$$m_{11} - \lambda = 0, \qquad m_{21} = 0 \tag{13}$$

For semi- space consisting from functionally graded stratified cells with profile $f_{n1}(x)$ from Eq. (6) the following equation defining eigen frequencies are obtained

$$\sin(rd) = 0 \tag{14}$$

In the frequency range $rd = \pi m, (m = 0,1,2....)$ we have that $m_{22}^{(1)} = m_{11}^{(1)} = \pm 1$ and so $\lambda = \pm 1$, which means that the continuous profile does not support surface waves attenuating with increasing of $n$.

For semi-space consisting from functionally graded stratified cell with profile $f_{n2}(x)$ the eigen frequencies are determined also from Eq.(14). In this range of the eigen frequencies we have that $m_{11}^{(2)}=\left(-1\right)^{m}\operatorname{sech}(kd)$, $m_{22}^{(2)}=\left(-1\right)^{m}\cosh(kd)$, $m_{11}+m_{22}\geq 2$

The Bloch-Floquet factor $\lambda=\exp\left(ikd\right)$ can be determined now as

$k=ik_0+\pi md^{-1},\ k_0>0, m=0,1,2...$

$$\operatorname{sech}(ad)=\exp\left(-k_0 d\right) \tag{15}$$

Thus, the discontinuous profile $f_{n2}(x)$ supports the surface waves.

**Conclusion.** The existence of a surface wave attenuating with increasing of sell number from semi-space mechanical free interface is established for periodic structure with "non symmetrical" inhomogeneity profiles. The surface modes occurs in the stop band of frequencies. It is shown also that "symmetrical" profiles do not support surface waves.

## REFERENCE


1. B.A. Auld,, G.S. Beaupre, G. Herrmann, Horizontal shear surface waves on a laminated composite, Electronics Letters 1977, vol. 13, No.18, p.525-527.
2. R. E. Camley, B. Djafari-Rouhani, L. Dobrzynski, and A. A. Maradudin, Transverse elastic waves in periodically layered infinite and semi-infinite media. //Phys. Rev. B 27, 1983, p.7318.
3. S. Chen S. Lin, Z. Wang, T. Tang, The Bloch theorem generalized for Semi-Infinitely periodic systems with free furface. Acta Acustica united with Acustica, Vol. 94 (2008) p.528 – 533.
4. V.Jorge, S. Tejada, F. Sánchez-Roa. «Surface elastic waves of semi-infinite superlattice: On the Acoustic-Electromagnetic-Quantum Analogies». //Journal of Materials Science and Engineering A 4 (11) (2014) p. 373-379.
5. El Boudouti, E.H., Djafari-Rouhani, B., Akjouj, A. and Dobrzynski, L., 1996. Theory of surface and interface transverse elastic waves in N-layer superlattices. Physical Review B, 54(20), p.14728.
6. Shuvalov, A. L., Poncelet, O., & Golkin, S. V. (2009, January). Existence and spectral properties of shear horizontal surface acoustic waves in vertically periodic half-spaces. Proc. Royal. Soc. A (2009) 465, p.1489–1511.
7. B.Collet, M.Destrade, G.Maugin, Bleustein–Gulyaev waves in some functionally graded materials, European //Journal of Mechanics A/Solids, 25 (2006) p.695–706.
8. Аветисян А.С., Камалян А.А. О распространении электроупругого сдвигового сигнала в неоднородном пьезодиэлектрическом слое класса 6mm //Докл. НАН Армении. 2014. Т.114. № 2. С.108–115.
9. M.I.Hussein, M.J. Leamy, M. Ruzzene, Dynamics of phononic materials and structures: historical origins, recent progress, and future outlook, Applied Mechanics Reviews, 2014, v.66, p.040802/1-38.


**Information about authors:**


**Ghazaryan K.B.** – professor, principal researcher, Institute of Mechanics NAS, Armenia,
**Phone:** (374 99) 227395**, E-mail:** ghkarren@gmail.com

**Gazaryan R.A.** – researcher, Institute of mechanics NAN of Armenia. **Phone:** (374 99) 39 63 44.

**Papyan A.A.** – Phd, science researcher, Institute of mechanics NAN of Armenia.
**Phone:** (374 93) 05 00 93. **E-mail:** papyanararat11@gmail.com

# SHEAR WAVE REFLECTION AND TRANSMISSION THROUGH MULTILAYERED ELASTIC REFLECTOR

**Ghazaryan K.B., Ghazaryan R.A., Papyan A.A., Ohanyan S.K.**

In this paper shear wave reflection and transmission through stratified reflector perfectly sandwiched between two different homogeneous semi-spaces is considered. Stratified reflector consists of two-phase finite number piecewise homogeneous periodically arranged and perfectly bonded elastic sub-layers. A shear wave incident at the interface of layer from the first semi-space will give rise to a reflected shear wave in the same half-space and a transmitted shear wave in the second semi- space.

Recently much attention has been given to the propagation of elastic waves which occurs in elastic periodic structures (phonon crystals) and consisting of an arrangement of coupled substructures with highly contrasting mechanical properties (elastic stiffness, mass density). The most notable feature of phonon crystals is the existence of stopbands of frequencies in which elastic waves are unable to propagate. The reflection and transmission of electromagnetic waves through periodically stratified medium was considered in [1], where the analytical expression of the reflectivity of a finite multilayer two phase dielectric reflector was presented. In the framework of matrix analysis the implications of the band structure of an infinite periodic structure for reflection by a finite structure are demonstrated in [2] for electromagnetic waves in stratified dielectric media. Numerous problems of wave propagation in elastic multilayered medium were considered by Brekhovskikh in [3].

Let two different elastic homogeneous semi-spaces be in perfect contact with the stratified layer consisting of two-phase finite $N$ number piecewise homogeneous perfectly bonded and periodically arranged elastic sub-layers. A shear wave incident at the interface of layer from the top semi-space will give rise to a reflected shear wave in the same semi-space and a transmitted shear wave in the lower semi-space, as described in Fig.1.

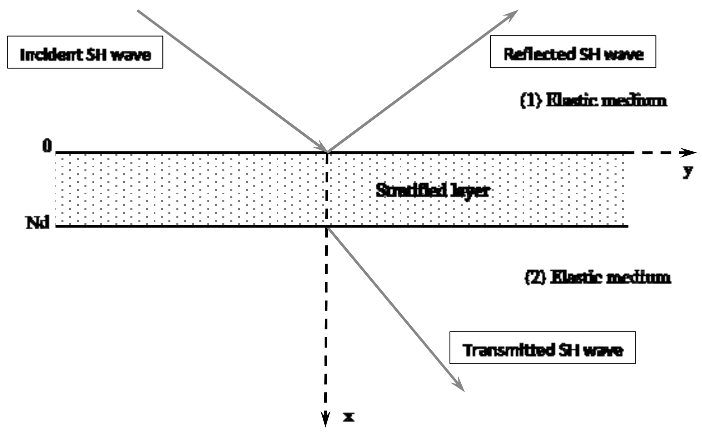



Fig.1. Stratified layer consisting from $N$ sub-layers sandwiched between two elastic medium

The solutions in the upper and the lower half-spaces have the form

$$
\begin{aligned}
v_1(x,y,t) &= \left(A_i \exp(iq_{01}x) + A_r \exp(-iq_{01}x)\right)\exp\left[i(py-\omega t)\right] \\
v_2(x,y,t) &= A_t \exp(iq_{02}x)\exp\left[i(py-\omega t)\right]
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Here $q_{0s} = \sqrt{\omega^2/c_{0s}^2 - k^2}, c_{0s}^2 = \mu_{0s}/\rho_{0s}$ , $s = 1,2$ , $\mu_{0s},\rho_{0s}$ are shear moduli and densities of upper and lower media, accordingly, $\omega, k$ are frequency and wave number , $\mathrm{A}_i, \mathrm{A}_r, \mathrm{A}_t$ stand for the complex amplitudes of incident, reflected and transmitted shear waves, respectively. The amplitudes $\mathrm{A}_r, \mathrm{A}_t$ via $\mathrm{A}_i$ can be found by solving the matrix equation

$$\hat{\mathrm{M}}^N \begin{pmatrix} \mathrm{A}_i + \mathrm{A}_r \\ i\mu_{01} q_{01} \left( \mathrm{A}_i - \mathrm{A}_r \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_t \exp\left( i q_{02} N d \right) \\ i\mu_{02} q_{02}\, \mathrm{A}_t \exp\left( i q_{02} N d \right) \end{pmatrix} \tag{2}$$

Here

$$\hat{\mathrm{M}}^n = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} M_{11} &= m_{11} S_{n-1}(\eta) - S_{n-2}(\eta), \qquad & M_{12} &= m_{12} S_{n-1}(\eta) \\ M_{21} &= m_{21} S_{n-1}(\eta), \qquad & M_{22} &= m_{22} S_{n-1}(\eta) - S_{n-2}(\eta) \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} m_{11} &= \cos(d_1 q_1)\cos(d_2 q_2) - \frac{q_1\mu_1 \sin(d_2 q_2)\sin(d_1 q_1)}{q_2 \mu_2} \\ m_{12} &= \frac{\cos(d_1 q_1)\sin(d_2 q_2)}{q_2\mu_2} + \frac{\sin(d_1 q_1)\cos(d_2 q_2)}{q_1\mu_1} \\ m_{21} &= -q_2\mu_2 \cos(d_1 q_1)\sin(d_2 q_2) - q_1\mu_1 \cos(d_2 q_2)\sin(d_1 q_1) \\ m_{22} &= \cos(d_1 q_1)\cos(d_2 q_2) - \frac{q_2\mu_2}{q_1\mu_1}\sin(d_1 q_1)\sin(d_2 q_2) \end{aligned} \tag{5}$$

$S_n(\eta)$ are the Chebyshev polynomials of second kind [4]

$$S_n(\eta) = \frac{\sin\left((n+1)\phi\right)}{\sin(\phi)}, \qquad \cos(\phi) = \eta$$

$$\eta = \frac{1}{2} Tr\left(\hat{M}\right) = \frac{1}{2}\left(m_{11} + m_{22}\right)$$

In (5) $q_s = \sqrt{\omega^2 / c_s^2 - k^2}, c_s^2 = \mu_s / \rho_s$, $d_s, s = 1, 2$ are thicknesses of sublayers.
Solution of Eq. (2) can be arranged in the form

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_r &= \mathrm{A}_i \frac{\left( q_{01}\mu_{01} q_{02}\mu_{02} M_{12} + M_{21} \right) + i\left( M_{22} q_{01}\mu_{01} - q_{02}\mu_{02} M_{11} \right)}{\left( q_{01}\mu_{01} q_{02}\mu_{02} M_{12} - M_{21} \right) + i\left( M_{22} q_{01}\mu_{01} + q_{02}\mu_{02} M_{11} \right)}; \\ \mathrm{A}_t &= \frac{2\,\mathrm{A}_i\, q_{01}\mu_{01} \exp\left( -i q_{02} N d \right)}{\left( M_{22} q_{01}\mu_{01} + q_{02}\mu_{02} M_{11} \right) - i\left( q_{01}\mu_{01} q_{02}\mu_{02} M_{12} - M_{21} \right)}; \end{aligned} \tag{6}$$

Energy flux conservation is then expressed via reflection and transmission amplitudes in the following algebraic identity

$$q_{01}\mu_{01} \left| A_r \right|^2 + q_{02}\mu_{02} \left| A_t \right|^2 = q_{01}\mu_{01} \left| A_i \right|^2 \tag{7}$$

where

$$
\begin{aligned}
&\left|A_r\right|^2 = A_i^2\left(1-\frac{4q_{10}q_{20}\mu_{10}\mu_{20}}{\left(M_{21}\right)^2+\left(M_{11}\right)^2 q_{01}^2\mu_{01}^2+2q_{01}q_{02}\mu_{01}\mu_{02}+q_{02}^2\mu_{02}^2\left(\left(M_{22}\right)^2+\left(M_{12}\right)^2 q_{01}^2\mu_{01}^2\right)}\right)\\
&\left|A_t\right|^2 = \frac{4A_i^2 q_{01}^2\mu_{01}^2}{\left(M_{21}\right)^2+\left(M_{11}\right)^2 q_{01}^2\mu_{01}^2+2q_{01}q_{02}\mu_{01}\mu_{02}+q_{02}^2\mu_{02}^2\left(\left(M_{22}\right)^2+\left(M_{12}\right)^2 q_{01}^2\mu_{01}^2\right)}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Taking into account Eq. (2) and determining from the matrix equation

$$
U_N^{(2)}\left(Nd\right) = M^{N-m+1}U_m^{(1)}\left((m-1)d\right) \tag{9}
$$

the displacement of the $m$-th cell at $x=(m-1)d$ comes to the following form

$$
\tilde{u}_N = \left|\frac{u_N^{(2)}\left(Nd\right)}{u_m^{(1)}\left((m-1)d\right)}\right| = \frac{1}{\sqrt{\left(m_{22}S_{N-m}(\eta)-S_{N-m-1}(\eta)\right)^2+\left(m_{12}q_{02}\mu_{02}S_{N-m}(\eta)\right)^2}} \tag{10}
$$

Using Eq. (2) the relationship between displacements of adjacent cells $n=m$ and $n=m+1$ is obtained

$$
\tilde{u}_m = \left|\frac{u_{m+1}^{(1)}\left(md\right)}{u_m^{(1)}\left((m-1)d\right)}\right| = \frac{\sqrt{\left(m_{22}S_{N-m-1}(\eta)-S_{N-m-2}(\eta)\right)^2+\left(m_{12}q_{02}\mu_{02}S_{N-m-1}(\eta)\right)^2}}{\sqrt{\left(m_{22}S_{N-m}(\eta)-S_{N-m-1}(\eta)\right)^2+\left(m_{12}q_{02}\mu_{02}S_{N-m}(\eta)\right)^2}} \tag{11}
$$

while the relationship between displacements at the top and bottom surfaces of the layer can be found as

$$
\tilde{u}_0 = \left|\frac{u_N^{(2)}\left(Nd\right)}{u_m^{(1)}\left(0\right)}\right| = \frac{1}{\sqrt{\left(m_{22}S_{N-1}(\eta)-S_{N-2}(\eta)\right)^2+\left(m_{12}q_{02}\mu_{02}S_{N-2}(\eta)\right)^2}} \tag{12}
$$

If the frequencies of incident wave are in the stopband range $\left|\eta\right|>1$ of stratified layer, then $\phi$ is a complex number $\phi = m\pi + i\theta$ [1, 4] and

$$
S_n\left(\eta\right) = \frac{\sinh\left((n+1)\theta\right)}{\sinh\left(\theta\right)}, \qquad \cosh\left(\theta\right) = \left|\eta\right| \tag{13}
$$

For large $N \gg 1$ we have that

$$
\begin{aligned}
&S_{N-1}\left(\eta\right) = \frac{\sinh\left(N\theta\right)}{\sinh\left(\theta\right)} \approx \exp\left((N-1)\theta\right)\\
&\frac{S_{N-2}\left(\eta\right)}{S_{N-1}\left(\eta\right)} = \frac{\sinh\left((N-1)\theta\right)}{\sinh\left(N\theta\right)} = \cosh\left(\theta\right)-\coth\left(N\theta\right)\sinh\left(\theta\right) \approx \exp\left(-\theta\right)
\end{aligned}
\tag{14}
$$

From this set of equations it follows that if the frequencies of the incident wave are in stopbands range of stratified layer, the dimensionless displacement $\tilde{u}_0$ exponentially attenuate to zero with increasing of layer units number $N \to \infty$. Moreover, in the range $m_{22}\left(\omega\right) \le 0$, from Eq.(11), it follows that

$\tilde{u}_m < 1$. This implies that, if the frequencies of incident wave are in the stopbands $|\eta| > 1$ and $m_{22}(\omega) \leq 0$ ranges, simultaneously the guided wave is localized at the neighborhood of the layer surface adjacent to the incidence elastic medium and, due to the condition $m_{22}(\omega) \leq 0$, it is monotonously attenuated with increasing of cell number.
Let note also that due to the localization one can state that $|A_t / A_i| \to 0$ and, according to Eq. (7), $|A_r / A_i| \to 1$ at $N \to \infty$ .
If the frequencies of incident wave are in the passband range of stratified layer, periodically non-localized distributed guided wave can be found, since in the passband range $S_n(\eta)$ are periodic functions. Let note that the all above mentioned results are also valid when $\mu_{02} = 0$, which correspond to the case where the bottom surface of the stratified reflector is traction free.

**Conclusion**

The analytic expressions for amplitudes and flux energies of incident and transmission waves are derived. It is shown that the guided wave in the reflector can be strictly localized at the neighborhood of the surface adjacent to incidence elastic medium and monotonously attenuated with the increasing of the reflector number of sub-layers to the surface adjacent to the other elastic medium. This localization occurs in the range of incident wave stopband. In the range of the incident wave passband the reflector guided wave displacements at adjacent to elastic medium surfaces have the same magnitude**.**

## REFERENCE


1. P.Yeh, A.Yariv, and C.Hong, «Electromagnetic propagation in periodic stratified media. I. General theory» //J. Opt. Soc. Am. 67, 1977, p.423–438.
2. J. Lekner, «Light in periodically stratified media», //J. Opt. Soc. Am. A 11, 2892-2899 (1994).
3. Brekhovskikh L. Waves in Layered Media. Elsevier, 2012. p.497.
4. A.A.Tovar and W. Casperson, Generalized Sylvester theorems for periodic applications in matrix optics, //J. Opt. Soc. Am. A 12, p.578-590 (1995).


**Information about authors**


**Ghazaryan K.B.** – professor, principal researcher, Institute of Mechanics NAS, Armenia.
**Phone:** (374 99) 227395.
**E-mail:** ghkarren@gmail.com

**Ghazaryan R.A**. – science researcher, Institute of mechanics NAN of Armenia.
**Phone:** (374 99) 39 63 44.

**Papyan A.A.** –science researcher, Institute of mechanics NAN of Armenia.
**Phone:** (374 93) 05 00 93.
**E-mail:** papyanararat11@gmail.com

**Ohanyan S.K.** – science researcher, Institute of mechanics NAN of Armenia.
**Phone:** (374 94) 06 32 37
**E-mail:** sergohnn@gmail.com

**ON EVOLUTION EQUATION BASED CONTINUUM APPROACH TO HIGH-CYCLE FATIGUE**

**Heikki Orelma**

In this talk we introduce continuum approach to high-cycle fatigue, founded by Ottosen et. al. 2008. We discuss some historical remarks and consider recent results of the approach. Our approach is theoretical but some illustrated applied examples are represented.

Mechanical fatigue phenomena occurs when a material is subjected to repeated application of stresses or strains which produces changes in the material microstructure, initiation, growth and coalescence of microdefects, thus degrading the material properties, see Bolotin [1], Suresh [2], and Murakami [3]. It is customary to distinguish between high-cycle (HCF) and low-cycle fatigue (LCF). In low-cycle fatigue plastic deformations occur in a macroscopic scale while when the loading is in the high-cycle fatigue regime the macroscopic behaviour can be considered primarily as elastic. If the loading consist of well defined cycles, the transition between LCF and HCF regimes is typically considered to occur between $10^3$-$10^4$ cycles.

In our studies only high-cycle fatigue is considered. Classical methods for HCF-analysis can be broadly classified as stress invariant, critical plane, strain energy and average stress based approaches. Well known examples are the models by Sines [4], Findley [5], Dang Van [6], Carpinteri and Spagnoli [7] and Papadopoulos [8]. These approaches are well defined if the loading consists of well-defined cycles. For arbitrary loading histories they need the definition of an equivalent uniaxial loading cycle. Another deficient is that heuristic damage accumulation rules have to be applied. To remove these shortcomings Ottosen et al. [9] proposed a continuum based model where they postulated a moving endurance surface in the stress space where the movement and damage evolution are governed by properly formulated evolution equations. This evolution equation based continuum approach to HCF is also used by Brighenti et al. [10,11]. Extension to transverse isotropy is given in [12] and gradient effects are included in [13].

There is inherently stochastic nature in fatigue phenomenon. The fatigue life has inherent scatter even under constant cyclic loading. Weibull weakest link-theory [14] has been used to describe the statistically distributed flaws and defects in the material that is reflected in the fatigue behavior [15,16,17]. In many cases the loading which is acting to the structure is random and we can only describe it by statistical distributions.

For irregular loading histories, the classical method to predict a life time is the Rainflow method, which is based on a construction of an equivalent cycle. The method is essentially one dimensional, but can be extended to the multiaxial case considering an equivalent stress criteria. It could also be extended to a stochastic case, c.f. [18]. A common process is to estimate the autocorrelation function from the obtained stress data, then the spectral density function can be found by using the fast Fourier transform, and the life time can be approximated with a level crossing formula, usually the so called Rice's formula, see e.g. [19].

The stochastic Rainflow method works best in one dimensional cases, because the generalization to a multiaxial case is somewhat artificial. Considering only one equivalent stress process is a huge simplification. Another problem is that a generalisation of the method is limited. The main reason is of course that it is derived using a minimal amount of methods from "stochastic toolbox". In this talk a stochastic approach is described for an evolution equation based multiaxial fatigue model applicable for arbitrary loading histories.

The stochastic version of an evolution equation based continuum HCF-model is not only a particular method, but a broad concept to  handle stochastic fatigue in a new way. The concept is essentially multiaxial and it is easily extensible to take into account all the stochastic properties, of which are of interest. In this paper we describe the fundamental idea of the method. The method is actively studied in [20-25]. In this papers we study properly all needed tools related to the finite and unfinite case and focus on proper estimation of stochastic stress history and statistical properties of resulted random variables. Recently the statistical properties of model parameters are studied in [26].

**REFERENCE**


1. V. Bolotin, Mechanics of Fatigue, CRC Mechanical Engineering Series, CRC Press, Boca Raton, 1999.
2. S. Suresh, Fatigue of Materials, 2nd Edition, Cambridge University Press, 1998.
3. Y. Murakami, Metal Fatigue, Effects of Small defects and Nonmetallic Inclusions, Elsevier Science, 2002.
4. G. Sines, Failure of materials under combined repeated stresses with superimposed static stresses, Tech. Rep. 3495, NACA, Washington, USA (November 1955).
5. W. Findley, A theory for the effect of mean stress on fatigue of metals under combined torsion and axial load or bending, Journal of Engineering for Industry (1959) 301–306.
6. K. Dang Van, Macro-micro approach in high-cycle multiaxial fatigue, in: D. McDowell (Ed.), Advances in Multiaxial Fatigue, no. 1191 in ASTM STP, Americal Society for Testing and Materials, Philadelphia, 1993, pp. 120–130.
7. A. Carpinteri, A. Spagnoli, Multiaxial high-cycle fatigue criterion for hard metals, International Journal of Fatigue 23 (2) (2001) 135–145.
8. I. V. Papadopoulos, Long life fatigue under multiaxial loading, International Journal of Fatigue 23 (10) (2001) 839--849.
9. N. Ottosen, R. Stenström, M. Ristinmaa, Continuum approach to high-cycle fatigue modeling, International Journal of Fatigue, 30 (6) (2008) 996--1006.
10. R. Brighenti, A. Carpinteri, S. Vantadori, Fatigue life assessment under a complex multiaxial load history: an approach based on damage mechanics, Fatigue & Fracture of Engineering Materials \& Structures 35 (2) (2012) 14--153.
11. R. Brighenti, A. Carpinteri, N. Corbari, Damage mechanics and Paris regime in fatigue life assessment of metals, International Journal of Pressure Vessels and Piping 104 (2013) 5--68.
12. S. Holopainen, R. Kouhia, T. Saksala, Continuum approach for modeling transversely isotropic high-cycle fatigue, European Journal of Mechanics A/Solids 60 (2016) 183–195.
13. N. Ottosen,  M. Ristinmaa, R. Kouhia, Enhanced multiaxial fatigue criterion that considers stress gradient effects, (2018)  International Journal of Fatigue, 116, p.128--139.
14. W. Weibull, A statistical theory of strength of materials, IVB-Handl.
15. J. Böhm, K. Heckel, Die vorhersage der dauerschwingfestigkeit unter berücksichtigung des statistischen grösseneinflusses, Materialwissenschaft und Werkstofftechnik 13 (4) (1982) 120–128.
16. H. Bomas, T. Linkewitz, P. Mayr, Application of a weakest-link concept to the fatigue limit of the bearing steel sae 52100 in a bainitic condition, Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures 22 (9) (1999) 733--741.
17. L. Flaceliere, F. Morel, Probabilistic approach in high-cycle multiaxial fatigue: volume and surface effects, Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures 27 (12) (2004) 1123--1135.

18. A. Nieslony, E. Macha, Spectral Method in Multiaxial Random Fatigue, Vol. 33 of Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics, Springer, Berlin, Heidelberg, 2007.
19. M. F. Kratz, Level crossings and other level functionals of stationary Gaussian processes, Probab. Surveys 3 (2006) 230--288.
20. T. Frondelius, T. Kaarakka, O. Kaleva, R. Kouhia, H. Orelma, J. Vaara, Continuum model for fatigue (in Finnish), submitted
21. T. Frondelius, T. Kaarakka, R. Kouhia, J. Mäkinen, H. Orelma, J. Vaara, Stochastic continuum approach to high-cycle fatigue: Modelling stress as a stochastic process, submitted
22. T. Frondelius, T. Kaarakka, O. Kaleva, R. Kouhia, H. Orelma, J. Vaara, Safety factor in continuum model for fatigue (in Finnish), submitted
23. J. Jussila, s. Holopainen, T. Kaarakka, R. Kouhia, J. Mäkinen, H. Orelma, N. Ottosen, M. Ristinmaa and T. Saksala, A new paradigm for fatigue analysis - evolution equation based continuum approach, Rakenteiden Mekaniikka, 50(3), (2017) 333--336
24. O. Kaleva, R. Kouhia, H. Orelma, Continuum approach to high-cycle fatigue: Weibull distributed lifetime, to appear in Proceedings of Summer School-Conference "Advanced Problems in Mechanics 2019", Sankt-Peterburg
25. H. Orelma, Continuum approach to high-cycle fatigue: Finite life-time case with stochastic stress history, to appear in Journal of Samara State Technical University
26. O. Kaleva, H. Orelma, Statistical properties of the model parameters in stochastic continuum approach to high-cycle fatigue, submitted

**Information about author:**

**Heikki Orelma** - D.Sc. (Tech.), Adjunct professor, University of Tampere, Mechanics and mathematics, Kalevantie 4, 33100 Tampere, Finland, **E-mail:** heikki.orelma@tuni.fi

# ON MODELING INELASTIC DEFORMATION OF PERMEABLE ROCKS WITH ACCOUNTING TIME-DEPENDENT EFFECTS

**Karev V.I., Klimov D.M., Kovalenko Yu.F., Ustinov K.B.**

A model has been developed for describing stress state and filtration of rocks that include creep-like effects. The model describe elastic-inelastic transition, and further deformation in inelastic region. The key point consists in accounting for anisotropy of elastic, ultimate and filtration properties. The model is particularized for the properties of rocks of Prirazlomnoe oil deposit.

Studying ultimate and rheological properties is an task aimed at ensuring safety and efficient development of hydro-carbonate deposits, especially high-depth deposits.

Before reaching yield stresses permeable rocks are adequately described by equations of poroelasticity [1, 2] that may be written for small strains as follows

$$\begin{aligned}
&\sigma_{ij,i} = 0 \\
&s_{ij} = \sigma_{ij} + \alpha_P p \delta_{ij} \\
&q_i = -\kappa_{ij} p_{,j} \\
&q_{i,i} = 0 \\
&s_{ij} = \Lambda_{ijkl} \varepsilon^E_{kl} \\
&\varepsilon^E_{ij} = \varepsilon^T_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)
\end{aligned} \tag{1}$$

Equations (1) together with boundary conditions for mechanical and filtration values form a closed system. Here $\sigma_{ij}$, $s_{ij}$ are components of the total and effective (acting on rock skeleton) stresses; $\varepsilon^E_{ij}$, $\varepsilon^T_{ij}$ are components tensors of total and elastic; $u_i$ are components of displacement vector; $p$ is pore pressure; $\Lambda_{ijkl}$ are components of tensor of; $\kappa_{ij}$ are components of tensor of permeability; $\delta_{ij}$ is unite Kroniker's tensor; $0 \le \alpha_P \le 1$ is Biot's coefficient, characterizing influence of pore pressure on stress redistribution and depending on pore structure. For well permeable rocks $\alpha_P$ is approaching to unity [3], so in practice $\alpha_P = 1$ may be set.

Permeability is considered as an experimentally determined function of the maximal achieved intensity of shear stresses [4–6]

$$\kappa_{mn} = \kappa_{mn}\left(s_i\right), \quad s_\text{i} = \sqrt{\tfrac{3}{2}\left(s_{jk} - \tfrac{1}{3} s_{ii}\delta_{jk}\right)\left(s_{jk} - \tfrac{1}{3} s_{ii}\delta_{jk}\right)} \tag{2}$$

Due to this dependency the system of equations of deformation and filtration becomes coupled. For transversally isotropic media permeability tensor is characterized by two principle values corresponding to permeability in the plane of isotropy (plane of bedding) and in the normal direction.

On reaching elastic-plastic transition limit the last equation (1) should be replaced with the following

$$\varepsilon^T_{ij} = \varepsilon^E_{ij} + \varepsilon^P_{ij} + \varepsilon^C_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \tag{3}$$

Here $\varepsilon^P_{ij}$ and $\varepsilon^C_{ij}$ are inelastic strains that are separated into time-independent (plastic) and time-dependent parts. To describe time-independent part of inelastic deformation a non-associate law of plastic flaw [4–7] will be used, which is a generalization of anisotropic Hill's [8] and models [9, 10]. According to that law during active loading the affix of stresses lay on the yield surface

$$\begin{aligned}
F = &\sqrt{G^0_{(23)}\left(s_{22} - s_{33}\right)^2 + G^0_{(13)}\left(s_{11} - s_{33}\right)^2 + G^0_{(12)}\left(s_{11} - s_{22}\right)^2 + 2L^0_{(23)} s^2_{23} + 2L^0_{(13)} s^2_{31} + 2L^0_{(12)} s^2_{12}} + \\
&+\left(B^0_{(1)} s_{11} + B^0_{(2)} s_{22} + B^0_{(3)} s_{33}\right) - A(k)
\end{aligned} \tag{4}$$

Here $A(k)$ is a reduced yield limit; $G^0_{(ij)}$, $L^0_{(ij)}$, $B^0_{(ij)}$ are material parameters determining its strength anisotropy. Isotropic hardening is governed by changing of parameter, determined by the work of plastic strains

$$dk = s_{ij} d\varepsilon^p_{ij} \tag{5}$$

During active loading further increase of stresses is accompanied by growth of inelastic strains describing by a law of plastic flaw, according to which increments of plastic strains are proportional to partial derivatives of plastic potential $Q$ over components of stress tensor

$$d\varepsilon^p_{ij} = d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \ , \tag{6}$$

where $d\lambda$ is a plastic multiplier determined by belonging the affix of stresses to the yield surface

$$d\lambda = \frac{\partial F}{\partial s_{ij}} ds_{ij} \Bigg/ H \frac{\partial Q}{\partial s_{mn}} s_{mn} \tag{7}$$

Here $H \equiv -\partial F / \partial k$ is a material characteristic making sense as the inverse of plasticity modulus $H = E_p^{-1}$.

Using yield function as plastic potential $Q = F$ (associate law) allows an elegant derivation of governing equations describing adequately the observed stress-strain dependencies in metals, however using this theory for rocks leads to strong overestimating of volumetric strains. Thus non-associate laws $Q \neq F$ have been introduced [11] to describe inelastic deformation of rocks and concretes. Earlier a concept of dilatancy [12, 13] have been introduced, according to which the change in inelastic volumetric strain is proportional to the change in intensity of inelastic shear strains, rather than to the change in volumetric stress. Adopting this concept immediately results in violating the associate law for volumetric part of inelastic strains. However "deviatoric" associativity preserves. Therefore plastic potential is supposed to have the same form as the yield surface, differing by the factors at the linear terms determining the influence of the normal stresses

$$\begin{aligned} Q = &\sqrt{G^0_{(23)}\left(s_{22}-s_{33}\right)^2 + G^0_{(13)}\left(s_{11}-s_{33}\right)^2 + G^0_{(12)}\left(s_{11}-s_{22}\right)^2 + 2L^0_{(23)}s^2_{23} + 2L^0_{(13)}s^2_{31} + 2L^0_{(12)}s^2_{12}} + \\ &+\left(B^1_{(1)}s_{11} + B^1_{(2)}s_{22} + B^1_{(3)}s_{33}\right) - A(k) \end{aligned} \tag{8}$$

For small dilatancy (which is the case for large number of rocks under investigation) it is sufficient to set

$$B^1_{(i)} = B^0_{(i)} - B_0 \ , \ B_0 = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} B^0_{(j)} \tag{9}$$

A lot of rheological and creep models have been suggested for describing time-dependent inelastic behavior including theories of ageing, flaw, hardening [14–17]. The majority of these theories are constructed analogously to theories of plasticity, in which functions involved (plastic potential, yield stress) become implicitly or explicitly depending on time. Unfortunately all these theories are based on speculative assumptions and involve large number of parameters to be determined. As was mentioned [15], due to lack of sufficient reliable required experimental data there is usually no possibility to choose the most proper variant, and the choice is usually determined by convenience and simplicity. Dealing with rocks all these problems becomes even more actual. According to [15, 16] creep strains are determined in terms of a potential, which is similar to plasticity potential (8).

According to experimental results for studied rocks two regimes of creep deformation may be distinguished: restricted (decaying) creep occurring under stress state below some critical value, and unrestricted (non-decaying) creep occurring under the stresses above this value. For the first case the following law for inelastic deformation may be accepted

$$\varepsilon=\left[\frac{1}{E_{pi}}+\left(\frac{1}{E_{p0}}-\frac{1}{E_{pi}}\right)\exp\left(-t/\tau_0\right)\right]\sigma=\frac{\sigma}{E_p} \tag{10}$$

Here $\tau_0$ is a characteristic relaxation time; $E_{p0}, E_{pi}$ are values of simultaneous and long term plasticity moduli. All three values are model parameters that may generally depend on stress-strain state history, but at firs approximation may be considered as constants.

In case of unrestricted creep rather fast failure of samples were observed under increasing strain rate. Such a behavior may still be described by expression similar to with adding an additional term corresponding to growing deformation under stresses above the critical ones

$$\frac{1}{E_p}=\frac{1}{E_{pi}}+\left(\frac{1}{E_{p0}}-\frac{1}{E_{pi}}\right)\exp\left(-t/\tau_0\right)+\frac{\theta(\sigma_i)}{E_{pu}}\left[\exp\left(t/\tau_u\right)-1\right],\ \theta(\sigma_i)=\begin{cases}0, & \sigma_i<\sigma_i^{cr}\\ 1, & \sigma_i\geq\sigma_i^{cr}\end{cases} \tag{11}$$

Here $E_{pu}$, $\tau_u$ are modulus and characteristic time corresponding to unrestricted creep; $\sigma_i^{cr}$ is the stress corresponding to creep transition to unrestricted stage. Note that choice of types of functions involved in (10), (11) is rather arbitrary, especially for the function describing unrestricted creep. It is followed from the above that for given $F, Q, H$ equations (5) – (7) together with (1) – (2)form a closed system.

In all experiments the observed transition from restricted to unrestricted creep was rather sharp. Characteristic time was of the order of minutes. Therefore modeling of mechanical behavior of rocks in near well zones for time intervals peculiar for technological processes (of the order of hours) may be carried out for $t\to\infty$, i.e. by using long term plasticity modulus. For that kind of processes the description is simplified strongly due to accounting creep deformation together with plastic deformation, the value of long term plasticity modulus being used for $H=E_{pi}^{-1}$ in (7).

Fig. 1, 2 demonstrate experimental (solid lines) and modeled (markers) dependencies of creep deformation on time for two samples of reservoirs of Priraslomnoe oil deposit. Creep strains correspond to the direction of reducing stresses.

The following experimental data were used.

*Sample P5-4.* The sample was tested according to loading program under constant 1-st invariant of stress tensor. During each (out of three) step the maximal principle compressive stress increased (56.2, 57.6, 59.5 MPa), the second principle stress remained constant (33 MPa), the third principle stress was decreased at the same extend as the increase of the first principle stress (9.8, 8.4, 6.5 MPa). The loading program is depicted on Fig. 3.

The critical stress of elastic-inelastic transition was $\sigma_i^{cr}=$ 19 MPa. For each branch value of stress intensity $\sigma_i$ was calculated as the difference between the stress invariant and the critical value $\sigma_i^{cr}$. Parameters of restricted creep involved in (11), obtained by fitting experimental results are the following: $E_{p0}=$ 5.2 GPa; $\tau_0=$ 48c; $E_{pi}=5.13-0.39\sigma_i$ GPa; parameters of unrestricted creep are $E_{pu}=67$ GPa; $\tau_u=$ 19c.

*Sample P7-6.* The sample was tested according to loading program under different 1-st invariant of stress tensor. During each (out of three) step the maximal principle compressive stress increased (50.6, 53.3, 55.5, 57.8, 59.9 MPa), the second principle stress remained constant (13.2 MPa), the third principle stress was decreased at less extend comparing to increase of the first principle stress ((9.1, 8.4, 7.9, 7.3, 6.9 MPa). The loading program is depicted on Fig. 3.b Such a loading program corresponded to lateral stresses of 0.4 of the vertical rock pressure.

For each branch value of stress intensity $\sigma_i$ was calculated as the difference between the stress invariant and the critical value corresponding to the current first invariant. Parameters of restricted creep are $E_{p0}=$ 5.2 GPa; $\tau_0=$ 48c; $E_{pi}=4.6-0.67\sigma_i$ GPa. The dependence is valid for relatively small values of intensity of shear only (Fig. 2). Faster growth of measured comparing to calculated strains for higher stress intensity is also noticeable. The latter is probably due to starting of unrestricted creep.

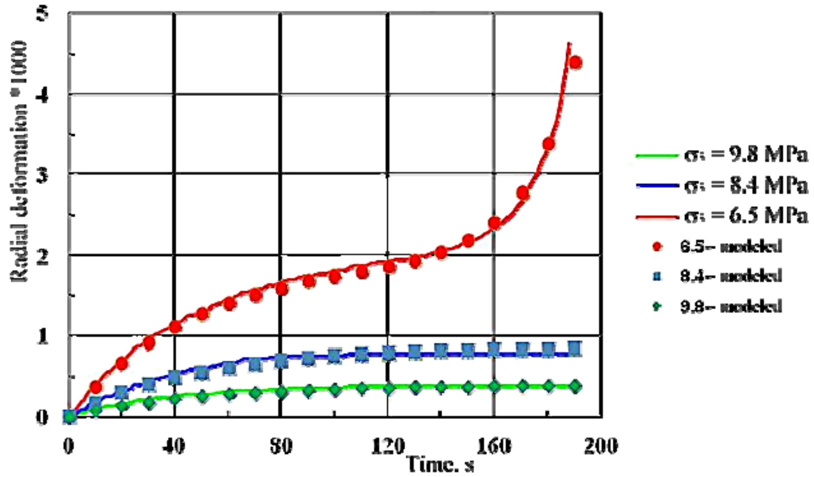



Fig.1. Dependencies of creep strains of sample P5-4 of Prirazlomnoe deposit

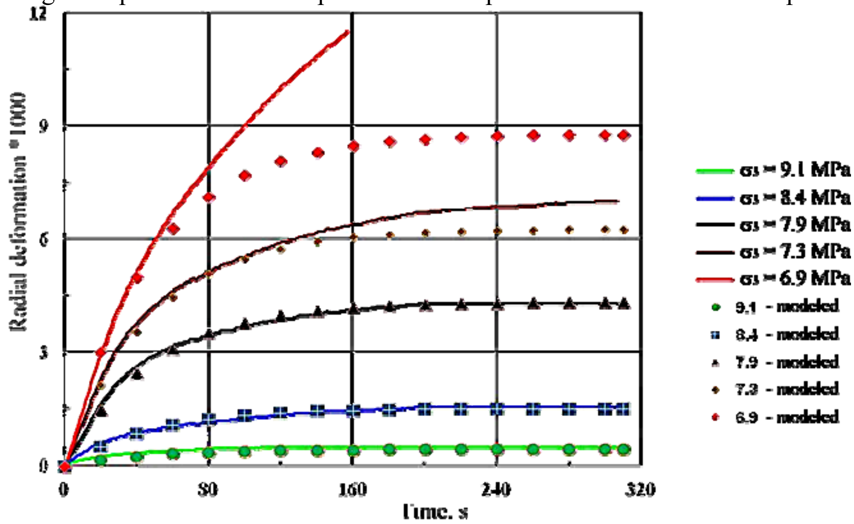



Fig.2. Dependencies of creep strains of of sample P7-6 of Prirazlomnoe deposit

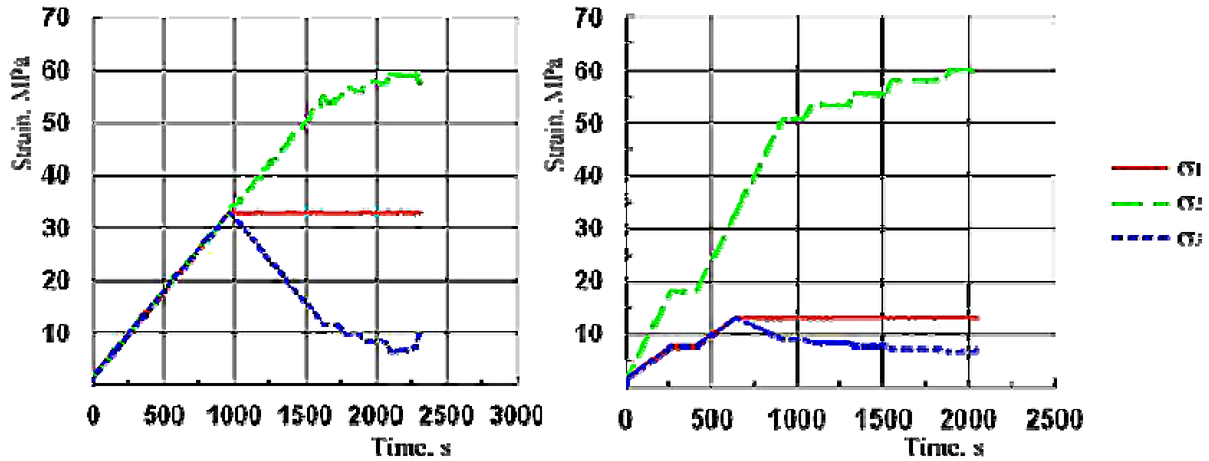



Fig.3. Loading program for sample sample P5-4 (a), P7-6 (b)

Note that parameters immediate plasticity modulus, $E_{p0}$, and characteristic time, $\tau_0$, appeared the same for both samples and not depending on stress state. Value of delayed plasticity modulus, $E_{pi}$, appeared depending on the level of stress and different for the tested samples. The linear dependence was observed for the first sample, while for the second sample the linearity is observed only for initial part of loading, i.e. for small values of the intensity of shear stresses. The difference may be due to discrepancy of the samples properties, but more likely, due to influence of the first invariant of stresses, which was different in these tests.

The work has been done under financial support of Program №8 of presidium of RAS.

**REFERENCE**


1. Terzaghi K. Erdbaumechanik auf Bodenphysikalischer Grundlage. Leipzig F. Deuticke, 1925.
2. Biot M.A. General theory of three-dimensional consolidation. J. Appl. Phys. 12, 155–165, 1941.
3. Желтов Ю.П., Христианович С.А. О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта. Известия Академии наук СССР. Отд-ние техн. наук, № 5, 3–41, 1955.
4. Карев В.И., Коваленко Ю.Ф., Устинов К.Б. Моделирование деформирования и разрушения анизотропных пород вблизи горизонтальной скважины. Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых, № 3, 12–21, 2017.
5. Karev V.I., Klimov D.M., Kovalenko Y.F., Ustinov K.B. Modelling of mechanical and filtration processes near the well with regard to anisotropy. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 991, 012039, 2018. doi :10.1088/1742-6596/991/1/012039
6. Karev V.I., Klimov D.M., Kovalenko Y.F., Ustinov K.B. Modeling of deformation and filtration processes near wells with emphasis of their coupling and effects caused by anisotropy. In: Karev V., Klimov D., Pokazeev K. (eds), Physical and Mathematical Modeling of Earth and Environment Processes. Springer Geology, Springer, Cham, PMMEEP, 2017.
7. Ustinov K.B. On application of models of plastic flow to description of inelastic behavior of anisotropic rocks. Processy v geosredah, № 3(7), 278–287, 2016.
8. Hill R. A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals. Proc. Roy. Soc. London A., 193, 281–297, 1948.
9. Caddel R.M., Raghava E.S., Atkins A.G. A yield criterion for anisotropic and pressure dependent solids such as oriented polymers. J. of Materials Sci., vol. 8, 1641–1646, 1973.
10. Lui C., Huang Y., Stout M.G. On the asymetric yield surface of plastically orthotropic materials: a phenomenological study. Acta Mater. vol. 45 (6), 2397–2406, 1997.
11. Николаевский В.Н. Геомеханика и Флюидодинамика. М.: Недра, 1996. 448 с.
12. Reynolds O. On the dilatancy of media composed of rigid particles in contact, with experimental illustrations. Philosoph. Mag. Ser., 5 (20), 127, 469–8, 1885.
13. Mead W. J. The geologic rôle of dilatancy. The J. of Geology, 33 (5), 685–98, 1925.
14. Качанов Л.М. Теория ползучести. М.: Физматлит, 1960. 455 с.
15. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
16. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 400 с.
17. Симонян А.М. Некоторые вопросы ползучести. Ереван: Гитутюн, 1999. 260 с.
18. DeWitt R. Theory of Disclinations II Continuous and Discrete Disclinations in Anisotropic Elasticity. J. Res. Natn. Bur. Stand., 77A, 49, 1973.


**Information about authors:**


**Karev Vladimir Ioisifovich** – deputy director, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, **E-mail:** wikarev@ipmnet.ru

**Klimov Dmitry Mikhailovich** – advisor of the Russian Academy of Sciences, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS

**E-mail:** klimov@ipmnet.ru

**Kovalenko Yury Fedorovich** – head of the laboratory, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS **E-mail:** perfolinkgeo@yandex.ru

**Ustinov Konstantin Borisovich** – leading research scientist, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, +7(926)164-94-09; **E-mail:** ustinov@ipmnet.ru

# TRANSMISSION OF ELECTROELASTIC PLANE DEFORMATION WAVES AT PLANE NON-ACOUSTIC CONTACT INTERFACE OF TWO DIFFERENT PIEZOELECTRIC HALF-SPACES

**Khachatryan V.M.**

Piezoelectric half-space of the material of hexagonal symmetry class $\bar{6}m2$ has a non-acoustic contact with the piezoelectric half-space of the material of the class $6mm$ of the same symmetry. The propagation and reflection of electroacoustic waves of plane deformation (***P*** & ***SV*** type) in piezoelectric half-space of the material of class $\bar{6}m2$ is considered. The incidence of ***P*** wave at the interface of the half-spaces with non-acoustic contact results in a refracted ***SH*** wave formation in piezoelectric half-space of the symmetry class $6mm$ because of the continuity of potentials of electric fields. For certain pair of materials of half-spaces the amplitudes of reflected and refracted waves, as well as the behavior of the angles of corresponding waves are investigated and plotted against the amplitude and angle of the incident wave.

## 1. Introduction

The phenomena of wave propagation, diffraction, refraction and reflection in solids are studied in various branches of engineering and physical sciences. These problems are of particular interest in piezoelectric media of different textures in the case of acoustic or non-acoustic contact. Particularly, the propagation of electro mechanical disturbances in piezoelectric solids is applicable in modern precision instrumentation, electrical engineering, in chips etc. B.A. Auld [1], Biryukov S.V., Gulyaev Y.V., Krylov V., Plessky V. [2], Achenbach J.D., [3], Brekhovskikh L. [4] and many others have discussed various applications of this phenomenon. Phenomena in the problems of reflection and refraction at the interface of electroelastic media are more diverse. It is connected with the conjugation of the electric and mechanical fields and the variety of variants of the surface conditions both on the mechanically free surface of the piezoelectric medium and on the interface of two piezoelectric media.
It is known that electroactive wave fields in piezoelectrics are separated depending on the anisotropy of the material [5]. The new phenomena in the problems of reflection and refraction will primarily depend on the nature of the wave components of the electro acoustic wave which is incident on the interface surface. Characters of the reflected and refracted wave components will also depend on the conjugacy conditions of the electromechanical fields at the interface of adjacent media. The possible combinations of boundary conditions for electromechanical fields are described in [6].

## 2. Statement and Mathematical Formulation of the Boundary Value Problem

The transformation of the electro-acoustic wave signal at the non-acoustic contact interface $y = 0$ between the piezoelectric half-space of the symmetry class $\bar{6}m2$ ($y < 0$) and the different piezoelectric half-space of the symmetry class $6mm$ ($y > 0$) is considered as shown in Fig.1. The polarization axes the both of piezoelectric crystals are chosen so that they are parallel to the coordinate axis $0z$.

In piezoelectric half-space of the symmetry class $\bar{6}m2$, it is possible to excite separately and propagate an electroactive ***P*** or ***SV*** wave of plane deformation [5].

In the coordinate plane $x0y$ the governing equations for the propagation of electroactive ***P*** & ***SV*** waves of plane deformation are

$$\left(1+\chi_1^2\right)U_{,xx}^{(1)} + \left(\vartheta_{61}^{(1)} + \vartheta_{12}^{(1)}\right)V_{,xy}^{(1)} + \left(\vartheta_{61}^{(1)} + \chi_1^2\right)U_{,yy}^{(1)} = C_{1l}^{-2}\ddot{U}^{(1)} \tag{2.1}$$

$$V_{,xx}^{(1)} + \left(1+\vartheta_{26}^{(1)}\right)U_{,xy}^{(1)} + \vartheta_{16}^{(1)}V_{,yy}^{(1)} = C_{1t}^{-2}\ddot{V}^{(1)} \tag{2.2}$$

$$\varphi_{,xx}^{(1)} + \varphi_{,yy}^{(1)} = \left(e_{11}^{(1)}/\varepsilon_{11}^{(1)}\right)\left(U_{,xx}^{(1)} + U_{,yy}^{(1)}\right) \tag{2.3}$$

In the equations (2.2)÷(2.4) $c_{11}^{(1)}$, $c_{12}^{(1)}$ and $c_{66}^{(1)} = \left(c_{11}^{(1)} - c_{12}^{(1)}\right)\Big/2$ are known elastic rigidity coefficients, $\chi_1^2 = \left(e_{11}^{(1)}\right)^2 \Big/ \left(\varepsilon_{11}^{(1)} c_{11}^{(1)}\right)$ is the coefficient of electromechanical coupling of the material of the symmetry class $\bar{6}m2$, $C_{1l}=\sqrt{c_{11}^{(1)}/\rho_1}$ is the ***P*** wave speed, $C_{1t}=\sqrt{c_{66}^{(1)}/\rho_1}$ is the ***SV*** wave speed in the piezoelectric material. Here definitions of dimensionless quantities are also entered: $\vartheta_{12}^{(1)}=c_{12}^{(1)}/c_{11}^{(1)}$, $\vartheta_{26}^{(1)}=c_{12}^{(1)}/c_{66}^{(1)}$, $\vartheta_{61}^{(1)}=c_{66}^{(1)}/c_{11}^{(1)}$, $\vartheta_{16}^{(1)}=c_{11}^{(1)}/c_{66}^{(1)}$.

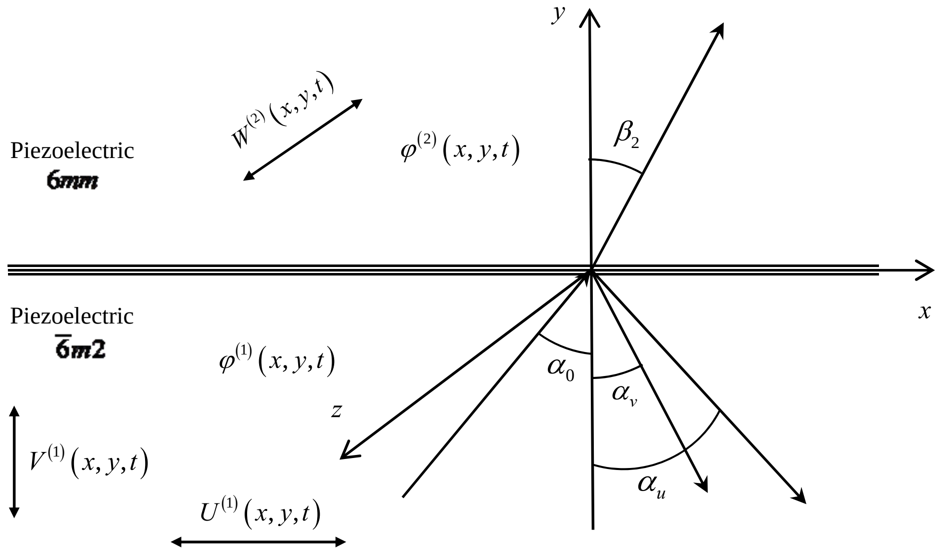



Fig.1. The scheme of the reflection and refraction of an electroelastic ***P*** wave at the interface of two piezoelectrics with non-acoustic contact

In piezoelectric half-space of the symmetry class $6mm$, it is possible to separately excite and propagate an electroactive elastic ***SH*** wave of plane deformation [5]. In the coordinate plane $x0y$ the equations for the propagation of an electroactive ***SH*** wave in piezoelectrics of the symmetry class $6mm$ are

$$W_{,xx}^{(2)}+W_{,yy}^{(2)}=c_{2t}^{-2}\ddot{W}^{(2)};\qquad \varphi_{,xx}^{(2)}+\varphi_{,yy}^{(2)}=\left(e_{15}^{(2)}/\varepsilon_{11}^{(2)}\right)\left(W_{,xx}^{(2)}+W_{,yy}^{(2)}\right), \tag{2.4}$$

where $c_{44}^{(2)}$, $\rho_2$, $e_{15}^{(2)}$, $\varepsilon_{11}^{(2)}$ are known material coefficients of piezoelectric material of the symmetry class $6mm$, $\chi_2^2=\left(e_{15}^{(2)}\right)^2/\left(c_{44}^{(2)}\varepsilon_{11}^{(2)}\right)$ is the coefficient of electromechanical coupling of the first material, $c_{2t}=\sqrt{\tilde{c}_{44}^{(2)}/\rho_2}$ is the ***SH*** wave speed, $\tilde{c}_{44}^{(2)}=c_{44}^{(2)}\left(1+\chi_2^2\right)$ is the reduced shear stiffness.

If in the coordinate surface $z0x$, along the interface of the media the piezoelectrics don't have an acoustic contact then the conjugacy conditions of the electromechanical fields in the plane $y=0$ are written as

$$\varphi^{(1)}(x,y,t)\Big|_{y=0}=\varphi^{(2)}(x,y,t)\Big|_{y=0} \tag{2.5}$$

$$\begin{gathered}\left[e_{11}^{(1)}U_{,y}^{(1)}(x,y,t)+e_{11}^{(1)}V_{,x}^{(1)}(x,y,t)-\varepsilon_{11}^{(1)}\varphi_{,y}^{(1)}(x,y,t)\right]_{y=0}=\\=\left[e_{15}^{(2)}W_{,y}^{(2)}(x,y,t)-\varepsilon_{11}^{(2)}\varphi_{,y}^{(2)}(x,y,t)\right]_{y=0}\end{gathered} \tag{2.6}$$

$$\left[c_{12}^{(1)}U_{,x}^{(1)}(x,y,t)+c_{11}^{(1)}V_{,y}^{(1)}(x,y,t)-e_{11}^{(1)}\varphi_{,x}^{(1)}(x,y,t)\right]_{y=0}=0 \tag{2.7}$$

$$\left[c_{66}^{(1)}U_{,y}^{(1)}(x,y,t)+c_{66}^{(1)}V_{,x}^{(1)}(x,y,t)+e_{11}^{(1)}\varphi_{,y}^{(1)}(x,y,t)\right]_{y=0}=0 \tag{2.8}$$

$$\left[c_{44}^{(2)}W_{,y}^{(2)}(x,y,t)+e_{15}^{(2)}\varphi_{,y}^{(2)}(x,y,t)\right]_{y=0}=0 \tag{2.9}$$

From given schemes of reflection and refraction of electroacoustic wave signals at the non-acoustic contact of the interface of two piezoelectric media $y=0$ (Fig. 1) it is obvious that formations of qualitatively different packets of wave components are possible.

### 3. Reflection and transmission of an electroelastic *P* wave at the non-acoustic surface between the piezoelectrics of the symmetry classes $\overline{6}m2$ and $6mm$.

In case of electroelastic ***P*** wave signal which is incident upon the interface of two piezoelectric half-spaces, the elastic displacement $U_i^{(1)}(x,y,t)$, the accompanying elastic displacement $V_i^{(1)}(x,y,t)$ and the potential of the electric field $\varphi_i^{(1)}(x,y,t)$ have the following form

$$U_i^{(1)}(x,y,t)=U_{0i}\exp\left[ik_i\left(x\cdot\sin\alpha_0+y\cdot\cos\alpha_0-v_i\cdot t\right)\right] \tag{3.1}$$

$$V_i^{(1)}(x,y,t)=a_vU_{0i}\exp\left[ik_i\left(x\cdot\sin\alpha_0+y\cdot\cos\alpha_0-v_i\cdot t\right)\right] \tag{3.2}$$

$$\varphi_i^{(1)}(x,y,t)=\left(e_{11}^{(1)}/\varepsilon_{11}^{(1)}\right)U_{0i}\exp\left[ik_i\left(x\cdot\sin\alpha_0+y\cdot\cos\alpha_0-v_i\cdot t\right)\right], \tag{3.3}$$

where $a_v=\sin\alpha_0\cos\alpha_0\left(1+\vartheta_{26}^{(1)}\right)\Big/\left(C_{1t}^{-2}v_i^2-\sin^2\alpha_0-\vartheta_{16}^{(1)}\cos^2\alpha_0\right)$.

In the piezoelectric half-space of the symmetry class $\overline{6}m2$ the reflected electroacoustic wave will have the following forms of the elastic components and potential of the electric field

$$U_{rl}^{(1)}(x,y,t)=\begin{Bmatrix}U_{0rl}\exp\left[i\left(x\cdot k_{rlu}\cdot\sin\alpha_u-y\cdot p_u-k_{rlu}\cdot v_{rlu}\cdot t\right)\right]+\\+\gamma_uV_{0rl}\exp\left[i\left(x\cdot k_{rlv}\cdot\sin\alpha_v-y\cdot p_v-k_{rlv}\cdot v_{rlv}\cdot t\right)\right]\end{Bmatrix} \tag{3.4}$$

$$V_{rl}^{(1)}(x,y,t)=\begin{Bmatrix}\gamma_vU_{0rl}\exp\left[i\left(x\cdot k_{rlu}\cdot\sin\alpha_u-y\cdot p_u-k_{rlu}\cdot v_{rlu}\cdot t\right)\right]+\\+V_{0rl}\exp\left[i\left(x\cdot k_{rlv}\cdot\sin\alpha_v-y\cdot p_v-k_{rlv}\cdot v_{rlv}\cdot t\right)\right]\end{Bmatrix} \tag{3.5}$$

$$\varphi_{rl}^{(1)}(x,y,t)=\begin{Bmatrix}\gamma_\varphi U_{0rl}\exp\left[i\left(x\cdot k_{rlu}\cdot\sin\alpha_u-y\cdot p_u-k_{rlu}\cdot v_{rlu}\cdot t\right)\right]+\\+\gamma_\varphi\gamma_uV_{0rl}\exp\left[i\left(x\cdot k_{rlv}\cdot\sin\alpha_v-y\cdot p_v-k_{rlv}\cdot v_{rlv}\cdot t\right)\right]+\\+\varphi_{0rl}\exp\left[ik_i\left((x-i\cdot y)\cdot\sin\alpha_0-v_i\cdot t\right)\right]\end{Bmatrix}, \tag{3.6}$$

where the amplitude proportional coefficients for each form are as follows:

$\gamma_\varphi=e_{11}^{(1)}/\varepsilon_{11}{}^{(1)}$, $\gamma_v=k_i\sin\alpha_0\left(1+\vartheta_{26}^{(1)}\right)p_u\Big/\left(\left(k_i\sin\alpha_0\right)^2+\vartheta_{16}^{(1)}p_u^2-C_{1t}^{-2}\left(k_iv_i\right)^2\right)$

$\gamma_u=k_i\sin\alpha_0\left(\vartheta_{61}^{(1)}+\vartheta_{12}^{(1)}\right)p_v\Big/\left(\left(1+\chi_1^2\right)\left(k_i\sin\alpha_0\right)^2+\left(\vartheta_{61}^{(1)}+\chi_1^2\right)p_v^2-C_{1l}^{-2}\left(k_iv_i\right)^2\right)$.

As $p_u$ and $p_v$ only the real positive and pure imaginary positive solutions of the characteristic equation are chosen. Only these values satisfy the conditions of reflection or wave attenuation in depth.

In the piezoelectric half-space of the symmetry class $6mm$ the refracted electroacoustic wave will have the following forms of the elastic component and potential of the electric field

$$W_{rr}^{(2)}(x,y,t)=W_{0rr}\exp\left[ik_{rr}\left(x\cdot\sin\beta_2-y\cdot\cos\beta_2-v_{rr}\cdot t\right)\right] \tag{3.7}$$

$$\varphi_{rr}^{(2)}(x,y,t)=\varphi_{0rr}\exp\left[ik_i\left((x+i\cdot y)\cdot\sin\alpha_0-v_i\cdot t\right)\right]+\left(e_{15}^{(2)}/\varepsilon_{11}^{(2)}\right)W_{rr}^{(2)}(x,y,t) \tag{3.8}$$

The corresponding angles are related as:

$$k_i\sin\alpha_0=k_{rlu}\sin\alpha_u=k_{rlv}\sin\alpha_v=k_{rr}\sin\beta_2 \tag{3.9}$$

$$\sin\alpha_0/v_i = \sin\alpha_u/v_{rlu} = \sin\alpha_v/v_{rlv} = \sin\beta_2/v_{rr} \tag{3.10}$$

where $v_{rr} = c_{2t}$.

Taking into account

$$U^{(1)}(x,y,t) = U_i^{(1)}(x,y,t) + U_{rl}^{(1)}(x,y,t) \tag{3.11}$$

$$V^{(1)}(x,y,t) = V_i^{(1)}(x,y,t) + V_{rl}^{(1)}(x,y,t) \tag{3.12}$$

$$\varphi^{(1)}(x,y,t) = \varphi_i^{(1)}(x,y,t) + \varphi_{rl}^{(1)}(x,y,t) \tag{3.13}$$

and substituting the expressions of elastic displacement components, as well as their accompanying potentials of the electric fields (3.1)÷(3.8) into the boundary conditions (2.5)-(2.9), we get the following system of equations for the amplitudes:

$$\gamma_\varphi U_{0rl} + \gamma_\varphi\gamma_u V_{0rl} + \varphi_{0rl} - \left(e_{15}^{(2)}/\varepsilon_{11}^{(2)}\right) W_{0rr} - \varphi_{0rr} = -\gamma_\varphi U_{0i} \tag{3.14}$$

$$\gamma_\varphi\gamma_v U_{0rl} + \gamma_\varphi V_{0rl} + i\varphi_{0rl} + i\left(\varepsilon_{11}^{(2)}/\varepsilon_{11}^{(1)}\right)\varphi_{0rr} = -\gamma_\varphi a_v U_{0i} \tag{3.15}$$

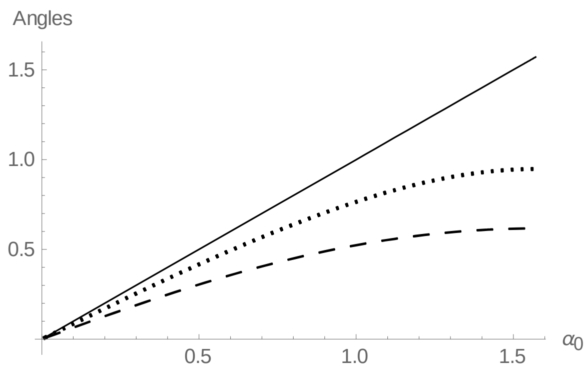
$$\begin{aligned}&\left(\delta_1 k_i \sin\alpha_0 - \gamma_v p_u\right) U_{0rl} + \left(\delta_1 \gamma_u k_i \sin\alpha_0 - p_v\right) V_{0rl} - \\ &-k_i \sin\alpha_0 \left(e_{11}^{(1)}/c_{11}^{(1)}\right)\varphi_{0rl} = -k_i\left(\delta_1 \sin\alpha_0 + a_v \cos\alpha_0\right) U_{0i}\end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}&\left(\gamma_v k_i \sin\alpha_0 - \delta_2 p_u\right) U_{0rl} + \left(k_i \sin\alpha_0 - \delta_2 \gamma_u p_v\right) V_{0rl} - \\ &-i\left(e_{11}^{(1)}/c_{66}^{(1)}\right) k_i \sin\alpha_0 \varphi_{0rl} = -k_i\left(a_v \sin\alpha_0 + \delta_2 \cos\alpha_0\right) U_{0i}\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$k_{rr}\cos\beta_2 \tilde{c}_{44}^{(2)} W_{0rr} + i e_{15}^{(2)} k_i \sin\alpha_0 \varphi_{0rr} = 0, \tag{3.18}$$

where $\delta_1 = \vartheta_{12}^{(1)} - \chi_1^2$ and $\delta_2 = 1 + \vartheta_{16}^{(1)}\chi_1^2$.

Numerical calculations are given for the piezoelectric ZnO (Zinc Oxide) of the class $6mm$ and a hypothetical piezoelectric of the class $\bar{6}m2$ with invented data.



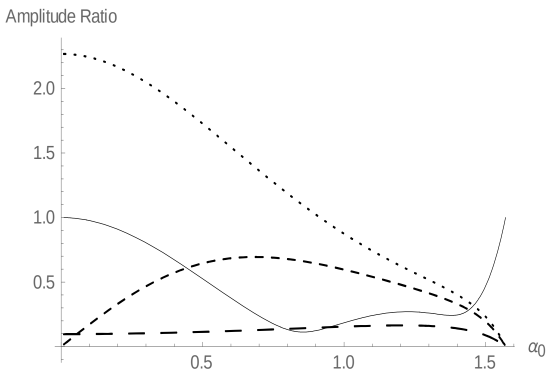

—— the angle of the longitudinal component of the reflected electroacoustic wave of plane deformation - $\alpha_u$

— — the angle of the shear component of the reflected electro-acoustic wave of plane deformation - $\alpha_v$

**….** the angle of the shear component of the refracted electro-acoustic wave of anti-plane deformation - $\beta_2$

**Fig.2.** Behavior of the angles of the reflected (types ***P*** and ***SV***) electro-elastic waves and the refracted electroelastic ***SH*** wave in case of an incident plane ***P*** wave at the interface between two piezoelectrics with non-acoustic contact.

From Fig.2 it follows that the angle of the reflected longitudinal component of the plane deformation wave is equal to the angle of the incident wave $\alpha_u = \alpha_0$. The angle of the reflected shear component of the plane deformation wave and the angle of the refracted shear component of the anti-plane deformation wave are smaller than the angle of the incident wave $\alpha_v < \alpha_u = \alpha_0$, $\beta_2 < \alpha_u = \alpha_0$. Both of these angles have limit values. Moreover, the angle of the refracted shear component of the anti-plane deformation wave is greater than the angle of the reflected shear component of the plane deformation wave. From the solutions (3.4) ÷ (3.8) it also follows that in case of the perpendicular incidence of the ***P*** wave, all the above-mentioned components of the electroelastic wave are also reflected and refracted perpendicularly.




— the amplitude of the longitudinal component of the reflected electroelastic wave of plane deformation - $U_{0rl}$
.... the amplitude of the shear component of the reflected electroelastic wave of plane deformation - $\gamma_u V_{0rl}$
- - - the amplitude of the shear component of the reflected electroelastic wave of plane deformation - $V_{0rl}$
— — the amplitude of the shear component of the refracted electroelastic wave of anti-plane deformation - $W_{0rr}$

**Fig. 3.** The behavior of some amplitudes of the reflected and refracted electroelastic waves in case of a plane ***P*** wave incident upon the interface between two piezoelectrics with the non-acoustic contact.

Fig.3 shows that the change of the incidence angle of the wave signal in the segment $0 \le \alpha_0 \le \pi/2$ , results in the change of the amplitudes of the reflected components of the electroelastic wave of plane deformation and the refracted electroelastic wave of anti-plane deformation, starting from the values of the amplitudes for the perpendicular incidence of the wave signal on the surface of the non-acoustic contact to the corresponding values of the amplitudes for the wave signal parallel to the surface.
*This work was supported by the RA MES State Committee of Science, in the frames of the research project № 18T-2C195.*

## REFERENCE


1. Auld B.A., Acoustic Fields and Waves in Solids. Wiley, New York (1973)
2. Biryukov S.V., Gulyaev Y.V., Krylov V., Plessky V., Surface acoustic waves in inhomogeneous media, Springer Series on Wave Phenomena, Vol. 20, 1995, 388.
3. Achenbach J.D., Wave propagation in elastic solids, North Holland, 1973.
4. Brekhovskikh L., Waves in Layered Media 2e, Applied mathematics and mechanics, Elsevier Science, 2012, 520 p.
5. Avetisyan A.S., On the propagation of shear waves in a piezoelectric medium, // Proc. of NAS of Armenia, Mechanics, 1985, Vol. 38, No.1, pp.12-19, (in Russian),
6. Avetisyan A.S., Mkrtchyan S.H., The electroelastic Rayleigh waves in the waveguide with an electrically closed or open surfaces, //Proc. of NAS of Armenia, Mechanics, 2018, Vol. 71, No.1, pp.12-30, (in Russian).


**Information about authors:**

**Khachatryan V.M.** – Department on Dynamics of Deformable Systems and Coupled Fields, Institute of Mechanics of National Academy of Sciences of Armenia, Armenia, Yerevan-0019, M. Baghramyan ave.24/2; **E-mail:** khachvaz@gmail.com

# DYNAMICS OF THE DISLOCATION DIPOLE WITH THE SMALL ARM IN GRAPHENE IN THERMAL EQUILIBRIUM

**Klyavlina A. I., Rysaeva L.Kh.**

In the ideal graphene carbon atoms arranged in regular hexagons (6-atom rings). In two-dimensional lattice, various defects can be observed, for example, a 5-atom ring or a 7-atom ring instead of a hexagon. At high temperatures, such defects are not static and can move, transforming from one type to another, or completely disappeare. In the present work, molecular dynamics simulation is used to study the evolution of the defective structure of graphene with dislocation dipole with the small arm in thermal equilibrium. The presence of such defects reduces the temperature at which graphene can remain stable in thermal equilibrium, which is in agreement with the data previously presented in the literature. In addition, at elevated temperatures, there is a movement of dislocations in a dipole with a 7 Å arm, so that a new dipole is formed and further transform into the Stone–Wales defect. Again, the Stone–Wales defect at elevated temperatures disappears as a result of the rotation of the C – C bond through an angle of 90 °. The presented results will allow to describe the dynamics of defects in graphene in thermal equilibrium by molecular dynamics simulation, which, in turn, will allow us to derive the phenomenological equations of motion.

## 1. Introduction

Defects in the crystal lattice formed intentionally or during the synthesis have a great influence on the thermal, electrical, and mechanical properties of materials. Graphene, which is a two-dimensional crystalline material in the form of a monatomic layer of carbon atoms, has a high strength, which can be reduced by presence of defects. Currently, graphene is one of the most actively studied nanomaterials due to its unique mechanical, physical, and optical properties, which open up the possibilities of its use in electronics, optics, spintronics, and in many other areas.

For two-dimensional materials, such as graphene and silicene, the properties can strongly depend on structural features, for example, the presence of vacancies or dislocations, that have been actively studied in recent years [1]. The first experimental results on the detection of grain boundaries in graphene were obtained using scanning tunneling microscopy [2], and dislocations were detected using transmission electron microscopy [3]. It was shown that grain boundaries and other defects have a significant effect on the properties of graphene [4].

The Stone-Wales defect (SW) is a pair of defects 5–7 and appears as a result of the rotation of one of the C–C bonds through an angle of 90º, and can also be considered as a dislocation dipole with zero shoulder. Defect SW is often observed in graphene using electron microscopy [5].

In the present work, the dynamics of the dislocation dipole in graphene at thermal equilibrium is studied by molecular dynamics. History of the structural changes during exposure at elevated temperature is described.

## 2. Simulation details

The initial structure of dipole in graphene is presented in Fig. 1. As it can be seen, dipol with the arm $L$ = 6.5 Å is introduced to the structure: initially, SW (dipole with $L$ = 0 Å) defect is introduced and then two dislocations (5-7 defect) are separated to obtain the new configuration of dipole. Size of the computational cell is 106 Å and 75 Å along $x$ and $y$ correspondingly. Periodic boundary conditions are applied along $x$ and $y$.

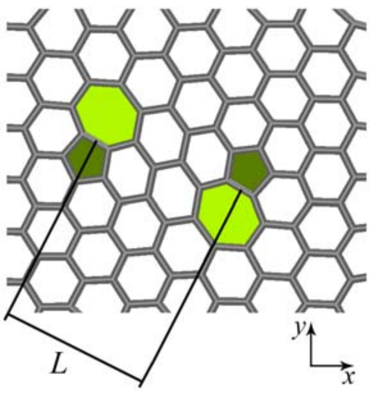



**Fig.1.** Initial configureation of dipole (fragment of the structure).

The simulations are carried out by molecular dynamics using the LAMMPS free simulation package, with the well-known interatomic interaction potential AIREBO. This potential was sucsessfully used for calculation of various properties of carbon structures [6-9].
After the defect was introduced into the computational cell, the energy is conducted to achieve a local minimum of potential energy. The structure was then subjected to exposure at different temperatures (from 300 to 4000 K) in order to study the stability of graphene with defect in thermal equilibrium, and also to reveal the possible dynamics of defects. The temperature stability in the system was maintained using the Nose-Hoover thermostat. Since the process at elevated temperatures is statistical, fifty numerical experiments were performed at each holding temperature.

### 3. Results and discussion

In Fig. 2 a, graphene structure after relaxation at 0 K is presented. As it can be seen, graphene does not sustain planar shape. As was shown earlier [10], the process of thermalization of carbon structures can lead to bond breacking in graphene. After relaxation the structure was thermalized at room temperature (300 K). During thermalization, the potential energy $E_{POT}$ and the kinetic energy $E_K$ oscillate around a certain equilibrium value. In fig. 2b,c the dependence of potential (a) and kinetic (b) energy on time in the process of thermalization of the structure with dipole $T$ = 300 K. As can be seen, the structure is in thermal equilibrium. The kinetic energy of $E_K$ fluctuates around 18.6 eV, while the potential energy of $E_{POT}$ fluctuates around -3541 eV for 250 ps. Data analysis also showed the conservation of total energy. In the process of modeling, the total energy $E_{TOT}$ has a maximum deviation of 0.0015% from its average value of 3523 eV.

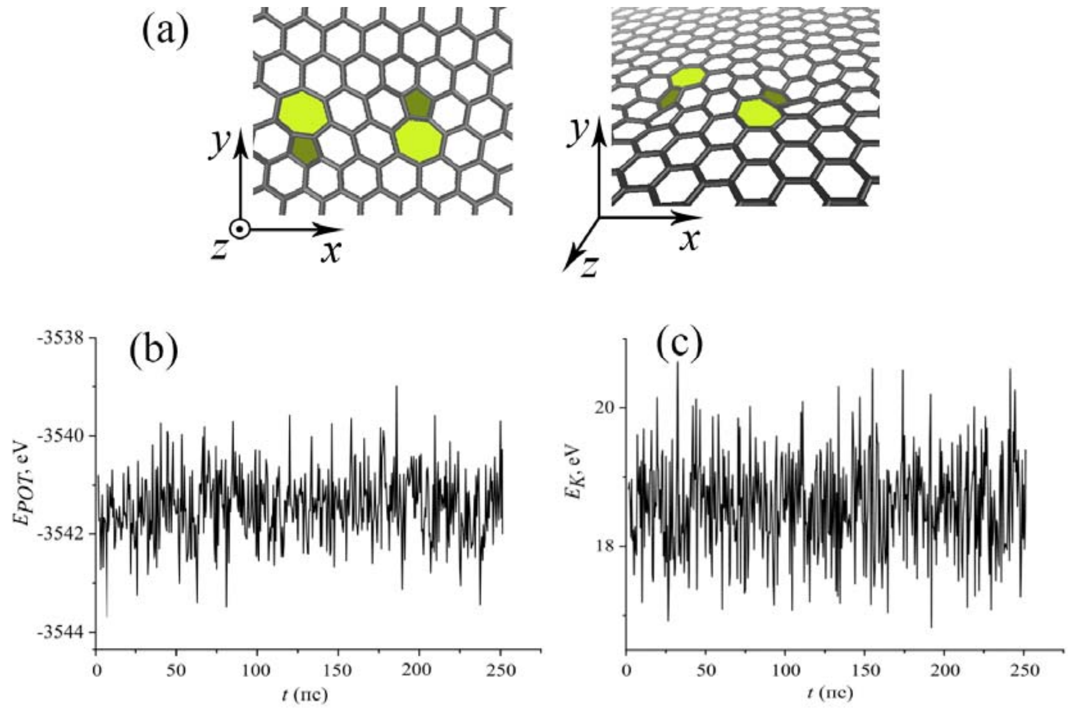



**Fig.2.** (a) Graphene with dipole after relaxation. (b, c) Ptential energy (b) and kinetic energy (c) as the function of time during thermal equilibration.

Estimation of the melting temperature gives value 5000 K (5100 K in [11], 4900K in [12], 4510 K in [13]) for defect-free undeformed graphene, and 3950K [15] for undeformed graphene with SW defect. The melting temperature was estimated as the temperature at which bonds were broken during 5 ps from the averaging on all numerical experiments with randomly set initial conditions.
In Fig. 3 different types of structural transformations which took place at 3600 K are presented: 5-atom carbon rings shown in dark green, 7-atom rings are shown in light gray, 6-atom rings replacing defects shown in light orange. As it can be seen, different types of defect movement can be seen: (i)

two 6-atom rings transform to SW defect by rotation of the bond; (ii) movement of one dislocation (5-7 defect) toward the other; (iii) disappearance of the defects from the structure. After 50 simulation runs, it can be concluded that all the found structural transformations are equally possible. After almost 40% thermalisations graphene had ideal structure due to the annigilation of two dislocations in dipole. It should be noted, that since rotations of the bonds can easily lead to disappearance of SW defect, the reverce transformation is equally possible. Such structural transformation became possible after thermalisation at 1400 K. All the simulation runs are conducted during 500000 steps. Such transformations can starts at any time of thermalisaton.

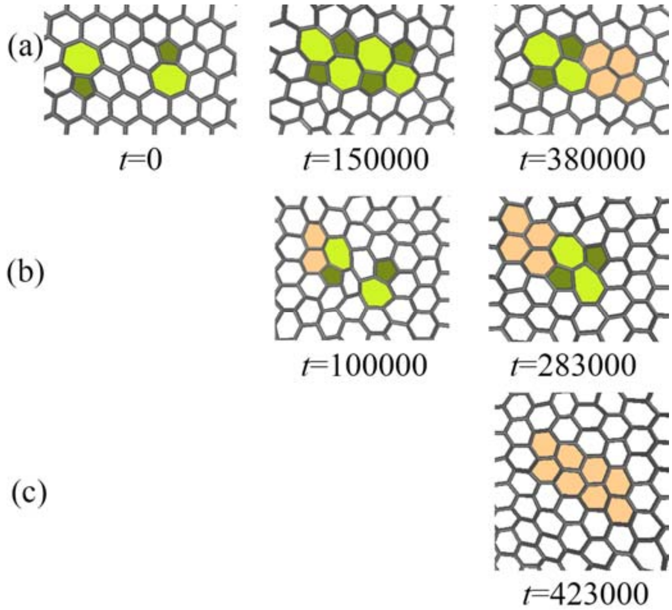



**Fig.3.** Different types of structural transformations at 3600 K: 5-atom carbon rings shown in dark green, 7-atom rings are shown in light gray, 6-atom rings replacing defects shown in light orange.

**Conclusions**

In the present work the molecular dynamics simulation is used to study the stability of graphene with a dipole under thermodynamic equilibrium. Different types of structural transformations took place – from movement of dislocations to transformation to the totally ideal lattice. One of the dislocations in a dipole with a small shoulder begins to move already at a temperature of 1400 K; dipole 2 is transformed into SW defect and can transform to a defect-free state.

The results showed that graphene with dipoles remains stable up to high temperatures. In this case, an increase in temperature leads to dislocation glide, the formation of a new dipole with a different arm length, or the disappearance of a defect from the graphene lattice due to a simple rotation of the C – C bond. At elevated temperatures, active structural transformations occur, the patterns of which can be described within the framework of molecular dynamics and then transferred to phenomenological models.

**Aknowlegements**

Calculation of the hydrostatic compression of CG done by A.I.K. and supported by the program of fundamental researches of Governement Academy of Sciences of IMSP RAS. Investigation of hydrogenated CG is made by J.A.B. and supported by the Grant of the President of the Russian Federation for state support of young Russian scientists - doctors of sciences MD-1651.2018.2.

**REFERENCE**

1. Kochnev A.S., Ovid'ko I.A., Semenov B.N., Sevastyanov Ya.A. Mechanical properties of graphene containing elongated tetravacancies (575757-666-5757 defects). Reviews on Advanced Materials Science, vol.48, 2017, p.142.

2. Albrecht T., Mizes H., Nogami J., Park S.-il., Quate C. Observation of tilt boundaries in graphite by scanning tunneling microscopy and associated multiple tip effects. //Applied Physics Letters, vol.52, 1988, p.362.
3. Hashimoto A., Suenaga K., Gloter A., Urita K., Iijima S. Direct evidence for atomic defects in graphene layers. Nature, vol.430, 2004, p.870.
4. Červenka J., Flipse C.F.J. Structural and electronic properties of grain boundaries in graphite: Planes of periodically distributed point defects. Physical Review B, vol. 79, 2009, p.195429.
5. Meyer J., Kisielowski C., Erni R., et al. Direct imaging of lattice atoms and topological defects in graphene membranes. Nano Letters, vol.8, 2008, p.3582.
6. Baimova J. A., Korznikova E. A., Dmitriev S. V., Liu B., Zhou K. Review on crumpled graphene: Unique mechanical properties. Rev. Adv. Mater. Sci., vol.39, №1, 2014, p.69.
7. Baimova J. A., Liu B., Dmitriev S. V., Srikanth N., Zhou K. Mechanical properties of bulk carbon nanostructures: effect of loading and temperature. Physical Chemistry Chemical Physics, vol.16, №36, 2014, p.19505.
8. Krylova K., Baimova J., Mulyukov R. Effect of deformation on dehydrogenation mechanisms of crumpled graphene: molecular dynamics simulation. Letters on Materials, vol. 9, №1, 2019, p.81.
9. Dimitrakakis G. K., Tylianakis E., Froudakis G. E. Pillared graphene: A new 3-d network nanostructure for enhanced hydrogen storage. Nano Letters, vol.8, №10, 2008, p.3166.
10. Ivanovskaya V.V., Ivanovskiy A.L. Atomic structure, electronic properties, and thermal stability of diamond-like nanowires and nanotubes. Inorganic Materials, vol.43, № 4, 2007, p.349.
11. Openov L.A., Podlivaev A.I. On graphene melting. Physics of solid state, vol.58, № 4, 2016, p. 847.
12. Zakharchenko K., Los J., Katsnelson M., Fasolino A. Atomistic simulations of structural and thermodynamic properties of bilayer graphene. Physical Review B, vol.81, 2010, p.235439.
13. Los J. H., Zakharchenko K. V., Katsnelson M. I., Fasolino A. Melting temperature of graphene. Physical Review B, vol. 91, 2015, p.045415.
14. Baimova J. A., Bo L., Dmitriev S. V., Zhou K., Nazarov A. A. Effect of Stone-Thrower-Wales defect on structural stability of graphene at zero and finite temperatures. EPL, vol.103, №4, 2013, p.46001.

## Information about authors

**Alsou I. Klyavlina** – student, Bashkir State University, ***E-mail:** alsou1961@yandex.ru

**Leysan Kh. Rysaeva**– graduate student, Institute for Metals Superplasticity Problems of RAS
**E-mail:** lesya813rys@gmail.com

## PLANE-STRAIN COMPRESSION OF THREE-LAYER MATERIAL BETWEEN ROTATING PLATES

**Lyamina E.A.**

The qualitative features of rigid plastic solutions for multi-layer materials are affected by the properties of each layer and geometric parameters. For example, in the case of plane strain flow of three-layer material obeying rigid perfectly plastic models through an infinite channel, the solution may not exist under certain conditions, and the solution in the vicinity of bi-material interfaces may be singular [1]. In the case of plane strain compression of such material between parallel plates, some layers may remain rigid under certain conditions [2]. All these properties are important for the application of these solutions to practical problems. In particular, the solution for the process of compression between rotating plates is required for the application of Orowan's method [3]. This method is widely used for the analysis of the process of rolling.

In the present paper, a semi-analytical solution for the process of compression of three-layer material between rotating plates is found assuming that each layer obeys the classical model of rigid plasticity based on the von Mises yield criterion and its associated flow rule.

### 1. General structure of the solution

The process of compression of three layers material between rotating plates is illustrated in Fig.1. The plates rotate with an angular velocity $\omega$. It is assumed that the process is symmetric relative to the horizontal axis. It is seen from the geometry of Figure 1 that the solution can be built up as a combination of two solutions for one layer material. The solution for *Material 1* is outlined below. The solution for *Material 2* can be found in a similar manner.

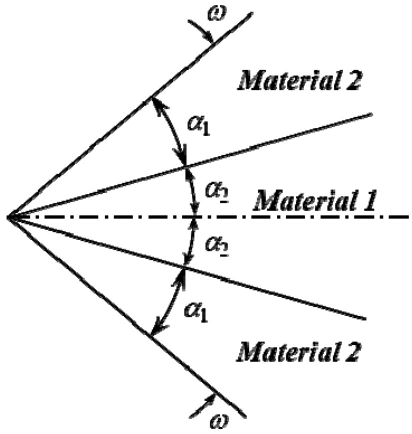



**Fig 1.** Compression of three layer material between rotating plates – notation

### 2. Basic equations for *Material 1* (Fig. 1)

A schematic diagram of the process is illustrated in Fig. 2 where $(r, \theta)$ is a polar coordinate system. The basic equations are:

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{r}=0, \qquad \frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta}+\frac{2}{r}\sigma_{r\theta}=0, \tag{2.1}$$

$$\left[\left(\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}\right)^2+4\sigma_{r\theta}^2\right]^{1/2}=2k, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}=0 \tag{2.3}$$

$$\sin 2\psi\left(\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r}-\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)-\cos 2\psi\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}\right)=0. \tag{2.4}$$

Here (2.1) represents the equations of equilibrium, (2.2) is the yield criterion, (2.3) and (2.4) follow from the associated flow rule. Moreover, $\sigma_{rr}$, $\sigma_{\theta\theta}$ and $\sigma_{r\theta}$ are the components of the stress tensor in the cylindrical coordinate system, $u$ is the radial velocity, $v$ is the circumferential velocity, $\psi$ is the orientation of the major principal stress relative to the $r$-axis, $k$ is the shear yield stress of *Material 1*. The shear yield stress is a material constant. The stress boundary conditions are

$$\psi = 0 \tag{2.5}$$

for $\theta = 0$ and

$$\psi = \psi_f \tag{2.6}$$

for $\theta = \alpha$. Equation (2.6) represents the friction law. The value of $\psi_f$ may be positive or negative. For definiteness, it is assumed that $\psi_f < 0$. The solution for $\psi_f > 0$ can be found in a similar manner. The velocity boundary conditions are

$$v = 0 \tag{2.7}$$

for $\theta = 0$ and

$$v = \omega_i r \tag{2.8}$$

for $\theta = \alpha$. Here $\omega_i$ is the angular velocity of the line coinciding with the interface between two materials (Fig. 1).

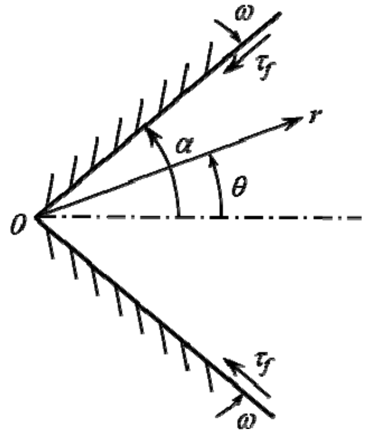



**Fig 2.** Compression of one layer material between rotating plates – notation

## 3. Stress solution

The general stress solution for flow through a wedge shaped channel given in [4] is valid in the case under consideration. Therefore,

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_{rr}}{2k} &= -c\ln r + \frac{1}{2}\cos 2\psi - \frac{1}{2}c\ln\left|c - \cos 2\psi\right| + A, \\
\frac{\sigma_{\theta\theta}}{2k} &= -c\ln r - \frac{1}{2}\cos 2\psi - \frac{1}{2}c\ln\left|c - \cos 2\psi\right| + A, \quad \frac{\sigma_{r\theta}}{k} = \sin 2\psi.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Here *c* and *A* are constant. In the case of $\psi_f < 0$, the solution for $\psi$ is

$$\begin{aligned}
\theta &= -\psi - \frac{c}{\sqrt{c^2 - 1}}\arctan\left(\sqrt{\frac{c+1}{c-1}}\tan\psi\right) \quad if \quad c \le -1, \\
\theta &= -\psi - \frac{c}{\sqrt{c^2 - 1}}\operatorname{arctanh}\left(\sqrt{\frac{1+c}{1-c}}\tan\psi\right) \quad if \quad -1 \le c \le 0.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

This solution for $\psi$ satisfies the boundary condition (2.5). The boundary condition (2.6) and the solution (2.8) allow for the constant c to be determined.

## 4. Velocity solution

The velocity components are represented as

$$u = \frac{\omega_i r}{2}\frac{dg(\psi)}{d\theta}, \qquad v = -\omega_i r g(\psi) \tag{4.1}$$

This representation satisfies equation (2.3) at any choice of the function $g(\psi)$. Substituting (4.1) into (2.4) gives

$$\cos 2\psi \frac{d^2 g}{d\theta^2} - 2\sin 2\psi \frac{dg}{d\theta} = 0. \tag{4.2}$$

This equation can be rewritten as

$$\cos 2\psi \frac{dG}{d\psi}\frac{d\psi}{d\theta} - 2G\sin 2\psi = 0. \tag{4.3}$$

where $G = dg/d\theta$. It is known from the stress solution [4] that

$$\frac{d\psi}{d\theta} = \frac{c}{\cos 2\psi} - 1. \tag{4.4}$$

Using (4.4) to eliminate the derivative $d\psi/d\theta$ in (4.3) one gets

$$\left(c - \cos 2\psi\right)\frac{dG}{d\psi} - 2G\sin 2\psi = 0. \tag{4.5}$$

This equation can be immediately integrated to give

$$G = \frac{G_0}{c - \cos 2\psi}. \tag{4.6}$$

Here $G_0$ is constant. Using the definition for $G$, (4.4) and (4.6) it is possible to arrive at the equation for $g$ in the form

$$\frac{dg}{d\psi} = \frac{\mathrm{G}_0 \cos 2\psi}{\left(c - \cos 2\psi\right)^2}. \tag{4.7}$$

Then, the solution for $g$ satisfying the boundary condition (2.7) is

$$g = G_0 \int_0^{\psi} \frac{\cos 2\gamma}{\left(c - \cos 2\gamma\right)^2} \mathrm{d}\gamma. \tag{4.8}$$

The constant $G_0$ is determined from the boundary condition (2.8).

## 5. Conclusion.

The general solution for compression of three layers material between rotating plates has been outlined. It is evident that the solution is semi-analytic. In particular, there may be necessary to use a numerical technique to satisfy some of boundary conditions at the bi-material interface and at the friction surface. Nevertheless, the solution is simple enough to allow for parametric analysis to be carried out.

**Acknowledgment** – This research was supported by the grant RFBR 17-08-01063.

## REFERENCE

1. Alexandrov S., Mishuris G. and Miszuris W. Planar flow of a three-layer plastic material through a converging wedge - shaped channel - Part 1 - Analytical solution. Europ. J. Mech. A/Solids, 2000, vol. 19(2.5), 811-825.
2. Alexandrov S., Tzou G.-Y. and Huang M.-N. Plane strain compression of rigid/perfectly plastic multi-layer strip between parallel platens, Acta Mech. 2006, vol.184(1-4), 103-120.
3. 3. E. Orowan, The calculation of roll pressure in hot and cold flat rolling. Proc. Inst. Mech. Eng, 1943, vol.150, 140–167.
4. Hill R. The Mathematical Theory of Plasticity, Oxford, Oxford University Press, 1950

## Information about authors:

**Lyamina Elena** – Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, +7 (916) 1836108

**E-mail:** lyamina@inbox.ru

## APPLICATION OF THE OBSTACLE PROBLEM TO PRESSURE CALCULATION FOR CMP MODELING

**Piliposyan D., Ghulghazaryan R., Poghosyan M., Nersisyan H.**

Chemical mechanical polishing/planarization (CMP) is one of the most important fabrication technologies in the semiconductor industry. CMPis used to achieve planar surfaces and remove excess deposited material from the wafer. During CMP, a chemical "slurry" containing abrasive particles and chemical reagents is deposited on the polishing pad. The polishing pad is then pressed against the rotating wafer. The combined action of the polishing pad and chemical slurry results in material removal and planarization of the wafer surface. Modeling of the CMP process allows detection ofpotential planarization defects in chips before manufacturing. Accurate computation of pressure distribution across the wafer surface is crucial for accurate modeling of the CMP process. The pressure distribution calculation is usually done using the Hertz contact theory and Chekina model, which involves computations of direct and inverse fast Fourier transforms (FFT and IFFT) and pad displacements updates.In this paper, we adopted an obstacle problem approach for calculating the pressure distribution across the wafer/die surface for CMP modeling. In an obstacle problem, the pad is assumed to be an elastic membrane with fixed boundaries that is displaced by the wafer surface. The goal is to find the equilibrium position for the pad and calculate the pressure distribution over the surface in contact. The main advantage of this approach is that computations of FFT and IFFT and recalculations of the pad displacements can be avoided. This can lead to a more accurate model that is independent of pad displacement update method.

### 1. Introduction

Chemical mechanical polishing/planarization (CMP) is a process forremoving excess conductive and dielectric materials from a silicon wafer. CMPis one of the most important semiconductor manufacturing processes, andis critical for producing microprocessors, memory, and other integrated circuits (ICs).During the CMP process, a wafer is pressed face-down against the polishing pad while the wafer carrier and a polishing pad are rotating in the same direction. A slurry, containing chemicals and abrasive nanoparticles, is then injected through the slurry dispenser on top of the pad and transported to the pad-wafer interface through centrifugal forces. The CMP results are very sensitive to the applied pressure, slurry chemistry, and the pattern printed on the wafer. Aninappropriate combination of these parameters can lead to non-uniform material removal,creating hotspots like opens, short circuits, and RC circuit delays [1].

CMP modeling is used to correctly predict materials removal and surface profile during polishing [2]. Typically,the material removal rate is described by Preston's law and is proportional to the pressure distribution over the chip area. The pressure distribution calculation is usually based on the Hertz contact theory and Chekina model [3]. In this model, the pad is assumed to be a massive elastic body with a flat surface pressed against the wafer, which is assumed to be a rigid body. The calculations involve application of fast Fourier (FFT) and inverse fast Fourier (IFFT) transforms and pad displacements updates. Such an approach may generate numerical inaccuracies and instabilities of the algorithm.

In this paper, we focus on using an obstacle problemapproach for accurate pressure distribution calculation across the wafer/die surface duringCMP modeling [4]. The solution of the problem can be thought of as the equilibrium position of the pad, which lies above the wafer surface. In the region where the pad is above the obstacle, an elliptic partial differential equation (PDE) is solved, while in the other region, the pad coincides with the wafer. Using this approach, the computations of FFTs and IFFTs can be avoided. This method can lead to more accurate pressure calculation and automatic calculation of pad displacements.

### 2. Pressure Calculation Problem Formulation

The obstacle problem is a classic model in the framework of variational inequalities and free boundary problems [4]. It usually describesthe equilibrium state of an elastic membrane thatis displaced by a physical obstacle, as shown in Fig.1a. Typically, these problems are modelled via a variational principle, using an inequality constraint that represents the physical obstacle.

Suppose a rigid wafer is pressed against an elastic flat surface of a polishing pad with constant applied pressure $P_0$(Fig.1b). Due to wafer surface asperities, the polishing pad deforms, leading to pad surface displacements and uneven distribution of applied pressure $P_0$ on the wafer surface. Our aim is to accurately calculate the pressure distribution throughout the wafer surface, which can later be used in a Preston equation to predict the material removal rate.

Assume that the wafer is given through its fixed contact surface:

$f(x, y)\colon \Omega \to R, \quad \Omega = [0,1] \times [0,1]$, where $f(x,y) > 0$ for any $(x, y) \in \Omega$. (1)

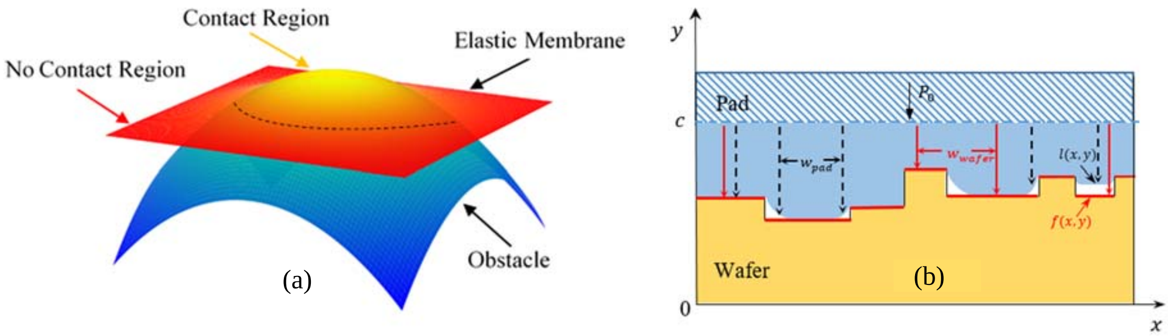



**Figure 1.** Obstacle problem (a) and the wafer-pad contact surface and pad displacements (b).

We define areference plane $z = c$ with respect to which the pad and the wafer displacements will be calculated. This reference plane can be imagined as the top flat surface of the pad, where the actual pressure is applied. We define the displacement of the wafer $w_{wafer}(x, y)$ as the distance between the top of the surface of the wafer and the reference plane $z = c$, and displacement of the pad$w_{pad}(x, y)$as the distance between the pad surface and the reference plane $z = c$(Fig.1b). The pad and wafer displacements can be written as follows:

$$w_{wafer}(x, y) = f(x, y) - c, \quad (x, y) \in \Omega, \tag{2}$$
$$w_{pad}(x, y) = \ell(x, y) - c, \quad (x, y) \in \Omega, \tag{3}$$

where $\ell(x, y)$ is the pad's profile at $(x, y)$. Our goal is to find the pressure $P_w(x, y) > 0$ on the pad/wafer surface at any point $(x, y) \in \Omega$ , given the applied pressure $P_0 > 0$, wafer surface $f(x, y)$, and polishing pad stiffness. We denote:

$$p_{\mathrm{pt}}(x, y) = P_w(x, y) - P_0, \quad (x, y) \in \Omega, \tag{4}$$

and refer to $p_{pt}$ as the perturbated pad pressure. The relation between the perturbated pad pressure $p_{pt}$ and the perturbated pad surface displacement $w_{pad}$ can be obtained from the formula [2]:

$$w_{pad}(x, y) = K \cdot \iint_{\Omega} \frac{p_{pt}(\xi, \eta)}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} d\xi \, d\eta, \qquad (x, y) \in \Omega. \tag{5}$$

Here $K$ is the constant $K = (1 - \nu\text{^}2)) \,/\, \pi E$, with the Poisson ratio $\nu$ andthe Young modulus $E$of the pad. Note that in equation (5), both $w_{pad}$ and $p_{pt}$ are unknown. Additionally, becausethe total pressure on the pad must be$P_0$, the equilibrium condition will have the following form:

$$\iint_{\Omega} p_{pt}(x, y) dx dy = 0. \tag{6}$$

So, if we calculate the value of $p_{pt}$, we will find $P_w$. The main idea behind the proposed solution is as follows: given a fixed value of c, determine values of $p_{pt}$ and $w_{pad}$ from equation (5). If c is not correctly determined, the condition (6)will not be satisfied.

We divide the wafer surface $\Omega$ into two regions:$\Omega_c -$ pad-wafer contact region and $\Omega_{nc} -$ pad-wafer no contact region. For these regions, the following relations for displacements are true:

$$\begin{cases} w_{pad}(x, y) = w_{wafer}(x, y), & \text{then} p_{pt}(x, y) \geq -P_0, \\ w_{pad}(x, y) > w_{wafer}(x, y), & \text{then} p_{pt}(x, y) = -P_0. \end{cases} \tag{7}$$

We introduce the following notations for the sake of brevity:

$$z(x, y) = w_{pad}(x, y), g(x, y) = w_{wafer}(x, y), \ p(x, y) = p_{pt}(x, y). \tag{8}$$

Combining all the above observations, we obtain the following mathematical setting for equation (7).Find a constant $c \in \mathrm{R}$ and functions $z(x, y), p(x, y)$such thatthe complementary condition(9)holds.

$$\min\{z(x,y)-g(x,y),p(x,y)+P_0\}=0 \text{for all } (x,y)\in\Omega, \tag{9}$$

## 3. Integral Equation Discretization and Numerical Solution

In this section, we propose a numerical algorithm for solving the suggested nonlinear problem numerically. For a number $n$(chosen in advance),a mesh in$\Omega$ is constructed that goes through the points$x_k = k\cdot h$ , $y_j = j\cdot h$, with $k,j=0,\ldots,n$, and has a size of $h=1/n$. We denote:

$$\tilde{x}_k = x_k+\frac{h}{2},\qquad \tilde{y}_j = y_j+\frac{h}{2},\qquad k,j = \overline{0,n-1}. \tag{10}$$

Our aim is to calculate approximately the values of the pressure function $p(x,y)$ at the points $(\tilde{x}_k,\tilde{y}_j)$. For the sake of brevity, the notations $p_{kj}=p(\tilde{x}_k,\tilde{y}_j), z_{kj}=z(\tilde{x}_k,\tilde{y}_j)$ are used. To discretize the problem, equations (5)-(6) and (9) must be approximated using quadrature rules. Assuming that the mesh size is small enough, and that $p$ is not changing much within one cell, we approximate the integral of $p$ on one cell by the value of $p$ at the midpoint of that cell multiplied by the area of the cell.After that, the complete discretization scheme of the problem(9) is formulatedas:

$$z_{kj}=\sum_{m,i=0}^{n-1} p_{mi}\cdot a_{kmji} \text{ for } k,j = \overline{0,n-1}, \tag{11}$$

$$p_{kj}=\max\left\{-\sum_{m\neq k,i\neq j}^{n-1}\frac{a_{kmji}}{a_{kkjj}}\cdot p_{mi}+\frac{g_{kj}}{a_{kkjj}},-P_0\right\}=0 \text{ for } k,j = \overline{0,n-1}, \tag{12}$$

where

$$a_{kmji}=K\cdot\iint_{[x_m,x_{m+1}]\times[y_i,y_{i+1}]}\frac{1}{\sqrt{(\tilde{x}_k-\xi)^2+(\tilde{y}_j-\eta)^2}}d\xi d\eta \tag{13}$$

In equation (12), unknowns $p_{mi}$ appear on both the left and right sides. This allows us to use an iterative technique for solving the problem. We take an initial approximation$p_{kj}^0$,$k,j=0,1,\ldots,n$, and update $p_{kj}^m$ using the Gauss-Seidel algorithm. Theoretically, we will have that $p_{kj}^m\to p_{kj}$ as $m\to+\infty$ for any k,j, where $p_{kj}$ is the solution of (6).The value of $g_{kj}$ depends on the displacement c. We must iterate the values of c to ensure that (6) holds. To this end, at each iteration, we increase or decreasethe value of c depending on the sign of the integral in (6). If the integral is negative, we are increasing c, otherwisewe are decreasing c. The increment size is dynamic, and tends to 0 as$m\to+\infty$.

## 4. Results and Discussion

In this section,we discuss the results of numerical experiments. For all cases, the pressure $P_0$ = 10 KPa is taken. The algorithm was tested on several profile patterns (Figs. 2-4).

In Fig.2, profiles with constant length single and multiple prismatic patterns are considered. Simulations weredone for two different pads: stiff (with stiffness of 1000 1/kPa) and soft (with stiffness of 30 1/kPa). For the profile with a stiff pad and constant length single prismatic pattern(Fig.2a),atotal pressure calculation error of 0.08 % is achieved. For the same pad,but with aprofile of multiple constant length prismatic pattern(Fig.2b), the total pressure calculation error isas smallas 0.04 %. For the soft pad and constant length single prismatic patterned profile (Fig.2c), the total pressure calculation error is decreased to 0.03%. For the same soft pad, but with a constant length multiple prismatic patterned profile (Fig.2d), a total pressure calculation error of 0.07 % is achieved.

When using a stiff pad, the pressure is distributed only on profile bumps over the prismatic patterns for both the structures containing single and multiple prisms (Fig.2 (e, f)). When using a soft pad, the pad arches, resulting in some pressure dissemination on the bottom of the profile Fig. 2 (g, h)). However, as with the stiff pad, the pressure distribution’s maximum values are concentrated on the edges of the profile bumps over the prismatic patterns for both the structures containing single and multiple prisms

(Fig.2 (g, h)). In both cases, the pressure distribution reaches its maximum values on the edges of these rectangular bumps.

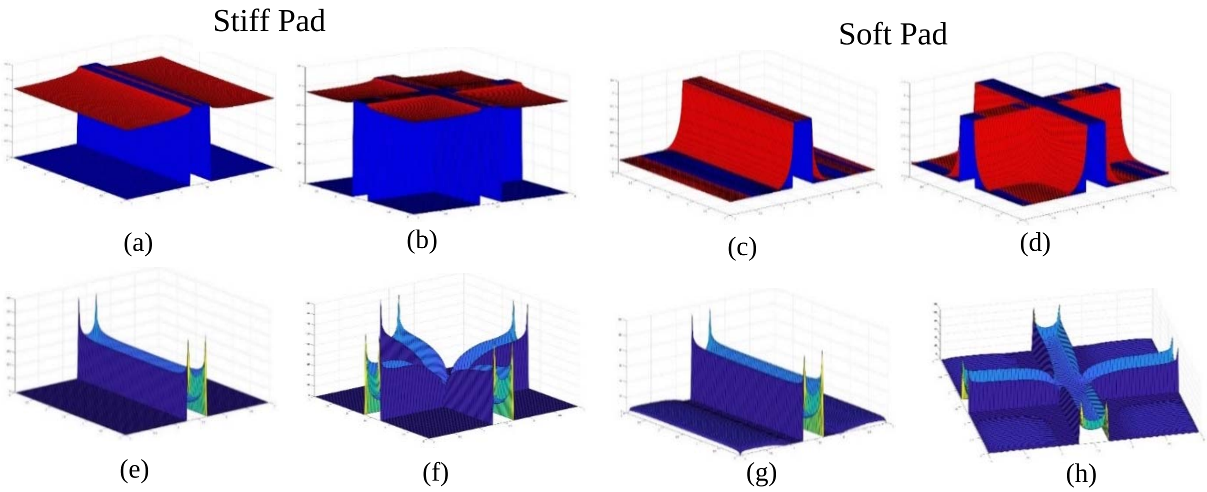



**Figure 2.** Pad surface profiles and pressure distributions vary depending on the pad type and prismatic pattern.

Fig.3 demonstrates the results for structures with varying size prismatic patterns. Fig.3a shows that the maximum pressure distribution values are achieved on the corners of the short prisms, whileFig. 3b shows that the pressure on the edges of the prisms are higher than at the middle parts. Figure 3c presents a 2D plot of the pad pressure distribution.

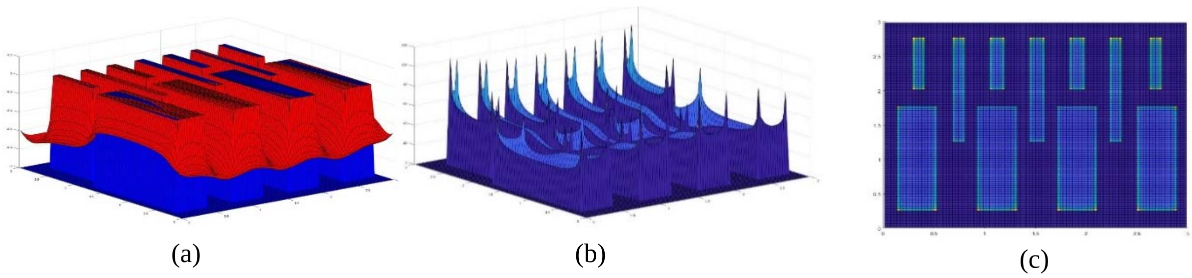



**Figure 3.** (a)Pad surface curvature on a wafer profile with multiple prismatic shapes of different lengths, (b) 3D plot of pad pressure distribution on wafer surface, (c) 2D plot of pad pressure distribution on wafer surface.

Finally, we considered a profile with evenly distributed sinusoidal shapes (Fig.4a). In Fig. 4b, the pressure distribution takes the maximum values on the peaks of the profile bumps, which is expected for the considered surface pattern, while Fig.4c provides a 2D plot of the pressure distribution. The described behavior of the contact pressure profile is in agreement with expectations.

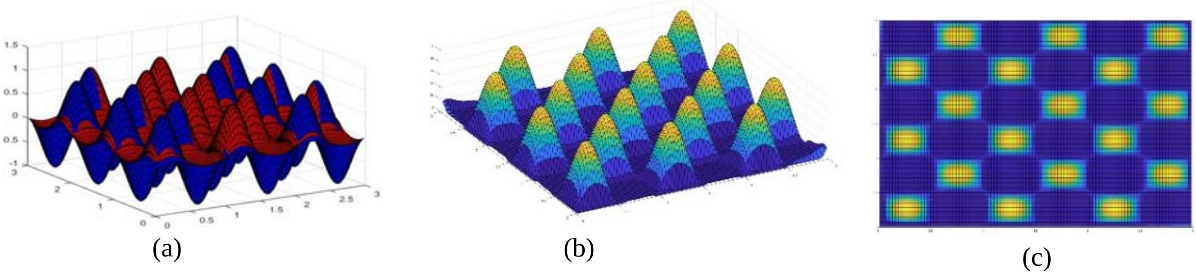



**Figure 4.** (a) Pad surface on a wafer profile with sinusoidal shapes, (b) 3D plot of pad pressure distribution on wafer surface,(c) 2D plot of pad pressure distribution on wafer surface.

Theseresults confirm that the proposed method predicts a correct pressure distribution and may be used for accurate CMP modeling.

## 5. CONCLUSION

Accurate CMP modeling is crucial for the detection of potential planarity defects in chips before manufacturing. Pad pressure distribution over chip area plays a critical role during polishing. Namely, pressure distribution is responsible for long-range pattern interactions or long-range effects in CMP. CMP long-range effects stronglyaffect erosion of dielectrics and dishing of wide metal lines after polishing. Contact mechanics methods are typically used to calculate the pressure distribution, which involve computations of FFT and IFFT of the kernel function with singularities. Due to technology innovationand the increase inthe number of patterns printed on wafers, the size of wafers are increasing, requiring new, more accurate approaches for pressure distribution calculation for CMP modeling.
In this paper, we formulated the Chekina model problem as an obstacle problem, and solved it numerically using the Gauss-Seidel algorithm. Numerical testing done by the proposed method showsthat the model demonstratescorrect physical behavior. In the proposedmethod, computations of FFT and IFFTs and recalculations of the pad displacements are avoided. This results in a more accurate pressure model thatis independent ofthe pad displacement updating method.

**ACKNOWLEDGMENTS**

The authors would like to express their appreciation to Shelly Stalnaker for her editorial assistance in the preparation of this paper.

## REFERENCE

1. Ghulghazaryan, R., Wilson, J. & Takeshita, N. CMP Model Building and Hotspot Detection by Simulation. Proceedings of 158th Meeting of Planarization CMP Committee, 55, Japan, 2017.
2. Ghulghazaryan, R., Wilson, J. & Takeshita, N. Building CMP Models for CMP Simulation and Hotspot Detection.July, 2017. Mentor, a Siemens Business.
3. ChekinaO., KeerL. Wear-Contact Problems and Modeling of Chemical Mechanical Polishing, Journal of The Electrochemical Society, vol. 145, no. 6, pp. 2100-2106, 1998.
4. Ros-Oton X. Obstacle problems and free boundaries: an overview, SeMA Journal, vol. 75, pp. 399-419, 2018.

**Information about authors:**
**Davit Piliposyan,** – Senior R&D Engineer at Mentor Graphics Development Services, 16 Halabyan, Yerevan 0038, Armenia. **E-mail:** Davit_Piliposyan@mentor.com

**Ruben Ghulghazaryan,** – Lead R&D Engineer at Mentor Graphics Development Services, 16 Halabyan, Yerevan 0038, Armenia. **E-mail:** Ruben_Ghulghazaryan@mentor.com

**Michael Poghosyan,** – Associate Professor, Yerevan State University,1 Alek Manukyan St, Yerevan 0025, Armenia. He is also Adjunct Associate Professor at American University of Armenia, 40 Baghramyan, Yerevan 0019, Armenia. **E-mail:** Mpoghosyan@aua.am

**Hayk Nersisyan,** – Program Chair, Assistant Professor at American University of Armenia, 40 Baghramyan, Yerevan 0019, Armenia. **E-mail:** Hnersisyan@aua.am

**PHONON POLARITON DEFECT MODES IN A PERIODICALLY STRATIFIED PIEZOELECTRIC SUPERLATTICE**

**Piliposyan D., Piliposyan G., Aznaurov D.**

Phonon polariton defect modes are studied in a superlattice with identical piezoelectric materials in a unit cell. Due to the electro-mechanical coupling in piezoelectric materials the structure exhibits defect modes in the superlattice with clear transmission peaks. In the long wavelength region where coupling between electro-magnetic and elastic waves creates frequency band gaps the defect layer introduces one or two defect modes transmitting both electro-magnetic and elastic energies. The results of the paper may be useful in the design of narrow band filters or multi-channel piezoelectric filters.

## Introduction

In periodic structures the piezoelectric, piezomagnetic and magneto-electric effects can significantly affect the frequency band gap structures appearing due to the periodic modulation of the physical parameters and the Bragg reflection [1-3]. Phononic bandgaps can be achieved in a piezoelectric structure which is homogeneous but is formed by simply periodically reversing the sign of the piezoelectric tensor [4]. This gives advantages over other types of tunable materials in terms of applications in smart materials and structures.

Other mechanisms such as acousto-optic coupling can also create band gaps in periodic structures made from materials with coupled response effects. A piezoelectric or piezomagnetic superlattice made of a periodically domain-inverted dielectric crystal with periodically modulated piezoelectric or piezomagnetic coefficients but a homogeneous refractive index, can be considered as a one dimensional diatom ionic crystal with positive and negative ions arranged periodically [4-5]. Coupling between transverse lattice vibrations and electro-magnetic waves in an ionic crystal leads to phonon polariton coupling with stop bands in the infrared region [6-7].

In order to control frequency band structures, including the location and bandwidth of stop bands, tunable periodic structures can be designed by introducing defect layers into the structure, changing the geometry and altering the elastic characteristics of these inclusions [8]. If the periodicity is broken by introducing defect layers, localized defect modes will appear within band gaps leading to the selective transmission of acoustic and electromagnetic waves [9]. A number of interesting results include a new type of omnidirectional gap that is found in one-dimensional photonic crystals composed of permittivity or permeability-negative materials [10-11]. The polaritonic band structures and transmission spectra of piezoelectric-modulated superlattices are investigated in [6]. The properties of band gap materials have been already used in designing various devices such as band filters, perfect mirrors and microcavity lasers. Due to the magneto-elastic coupling the piezoelectric periodic structures demonstrate new and exciting features. This makes even the one dimensional problem diverse, including situations such as defect modes in a periodic structure with cells composed of identical but oppositely polarized piezoelectric material, commonly referred to as superlattice. Bragg resonances, the presence of trapped modes and slow waves and the defect mode in a piezoelectric finite width waveguide consisting of layers separated by electrically shorted interfaces is considered in [12].

The problem is more interesting in a periodic superlattice with full contact interfaces. The system in this case is described by two coupled electro-acoustic waves and exhibits acousto-optic resonance (phonon-polariton) at high acoustic frequencies. A question arises how phonon-polariton band gaps caused by this coupling will be affected by a defect layer and whether a defect mode can be observed in the long wavelength region. To the best of our knowledge very little work is done on the defect modes for phonon- polariton resonances.

## Problem Statement

We consider a finite stack of periodically stratified transversely isotropic hexagonal piezoelectric crystal (6mm) with the crystallographic axes directed along the Oz direction (Fig.1). The defect layer with width $a_0$ is introduced in such a way that on each side of it the periodic structure consists of a stack of $n$ cells each containing a pair of layers (j=1,2) made of oppositely polarised identical piezoelectric material with lengths $a_1$ and $a_2$ ($\beta = a_1 + a_2$) and one additional layer $a_1$ (Fig.1).

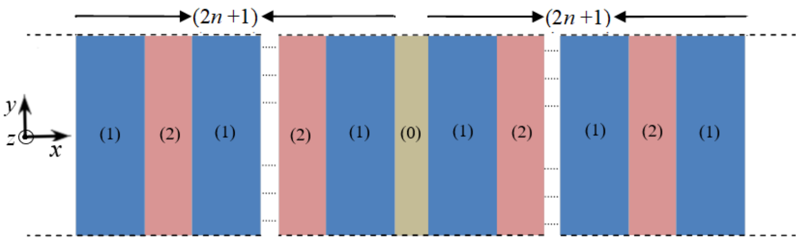


Figure 1. Piezoelectric superlattice with a defect layer.

Due to the piezoelectric effect the equations of motion, Maxwell's equations and constitutive relations couple through the constitutive equations as follows.

$$\mathrm{div}\,(\boldsymbol{\sigma}) = \rho\,\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad \mathrm{curl}(\mathbf{E}) = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \mathrm{curl}(\mathbf{H}) = \frac{\partial D}{\partial t} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c} : \mathbf{S} - \mathbf{e}\cdot\mathbf{E}, \mathbf{D} = \mathbf{e}:\mathbf{S} + \boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{E}, \mathbf{B} = \boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{H} \tag{2}$$

Where $\boldsymbol{\sigma}$ , $\mathbf{S}$ , $\boldsymbol{\varepsilon}$ and $\boldsymbol{\mu}$ are the stress, strain, dielectric permittivity and magnetic permeability second rank tensors, **e** is the piezoelectric third rank tensor, **c** is the fourth rank elasticity tensor, $\rho$ is the density **D, E, B** and **H** are electric displacement, electric field, magnetic induction and magnetic field vectors and **u** is the displacement vector, dot corresponds to the tensor contraction operation, double dot corresponds to the tensor double contraction operation. For perfectly bonded interfaces $x = n\beta + a_1$ and $x = (n+1)\beta$ between the layers $(n,1)$ / $(n,2)$ and $(n,2)/(n+1,1)$ (with continuous displacement $u_z(x,y)$ , stress $\sigma_{xz}(x,y)$, electric and magnetic fields $E_y(x,y)$ and $H_z(x,y)$ a propagator matrix couples the forward and backward travelling wave amplitudes. Due to the symmetry of the problem the propagator matrix is unimodular [13]. For an elasto-electromagnetic wave propogation in a piezoelectric superlattice the characteristic equation of the matrix gives the dispersion equation which for $(a_1 = a_2 = a)$ can be written as[14-15]:

$$\cos(k_{1,2}\,\beta) = \frac{cos\,(q\beta) + \cos(s\beta)}{2} - 2\,\gamma^2\,\theta^2 \sin(aq)\sin(sa)$$
$$\pm\left(\cos^2(qa) - \cos^2(sa)\right)\sqrt{1 - \frac{4\,\gamma^2\,\theta^2 \sin(aq)\sin(sa)\}}{(\cos(qa) + \cos(sa))^2}}, \tag{3}$$

where $k_{1,2}$ are the Block-Floquet numbers, $\gamma = p^2/qs$, $\theta = e_{15}^2/G\varepsilon_{11}^2$ is the electro-mechanical coupling coefficient, $G = c_{44} + e_{15}^2\varepsilon_{11}$ and wave numbers $q$, $p$ and $s$ in (3) are

$$q = \frac{\omega}{c_0}\cos(\phi), p = \frac{\omega}{c_0}\sin(\phi)\,, s = \frac{\omega}{c_0}\sqrt{\frac{c_0^2}{c^2} - \sin^2(\phi)}, \tag{4}$$

$c_0 = G/\rho$ , and $c = \sqrt{1/\varepsilon_{11}\,\mu}$ are the velocities of the transverse wave in the medium and the s peed of the electromagnetic wave, $\phi$ is the angle of incidence, $\omega$ as a wave angular frequency.

The dispersion equation (3) describes coupled elastic and electro-magnetic waves with two dispersion curves. For given values of $p$, $\omega$ and $\phi$ it gives two values of $k$. When none of the values is a real number there exists a region with no dispersion curves, i.e. forbidden band gaps. It follows from formula (3) that forbidden band gaps are possible in the superlattice with oppositely polarised identical piezoelectric elements in the unit cell. In order words the superlattice allows propagation of the Bloch-Floquet waves at acoustic frequencies. At optical frequencies the opposite polarization does not generate band gaps since the effect of piezoelectricity diminishes at such frequencies, and the structure behaves as a homogeneous stricture with identical optical refractive indexes [14].

For piezoelectric crystals the energy flux

$$P = \frac{1}{2}\Re[-i\,\omega\,\sigma_{xz}\,u^* + E_y H_z^*], \tag{5}$$

where (*) indicates the complex conjugate, for angles smaller than grazing ($\sin(\phi) < c_0^2/c^2$) is

$$P = -\frac{1}{2}(|A|^2 - |B|^2 + |C|^2 - |D|^2), \tag{6}$$

where $A$, $B$, $C$, $D$ are the amplitudes of incident and reflected waves. For the angles greater than grazing ($\sin(\phi) > c_0^2/c^2$) it can be written as

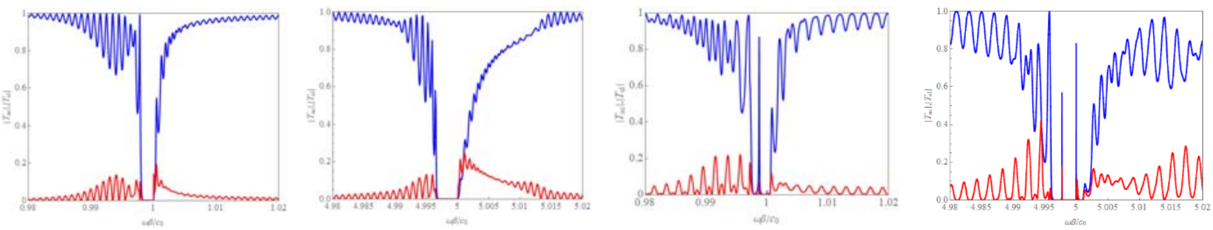
$$P = \frac{1}{2}\Re\big(|A|^2 - |B|^2 + i(|C|^2 - |D|^2)\big) = \frac{1}{2}\Re(|A|^2 - |B|^2). \tag{7}$$

This means that for an incident acoustic wave at an angle smaller than grazing both elastic and electromagnetic waves propagate and electromagnetic reflected and transmitted waves should also be counted. In the general case, for angles greater than grazing the electromagnetic wave is inhomogeneous and localised near the interfaces. In this case there is only a propagating elastic wave affected by inhomogeneity.

When the angle of incidence is larger than grazing ($s = i\, s_0$ is always a complex number), for the Bragg reflection problem with the period of the structure comparable with the wavelength of the propagating wave, the short wave approximation $\exp(-s_0\, a) << 1$ is applicable. It can fail only around the first Bragg resonance where $\omega$ can be a small number. The defect mode in this case is investigated in [12].
We consider the case when the angle of incidence is smaller than grazing and $s$ is always a real number. In this case the dispersion equation (3) describes not only the band structure due to the Bragg scattering but also resonance band gaps due to acousto-optic phonon-polariton coupling which occurs in the long wavelength region.

**Discussion**

Numerical calculations have been carried out for a piezoelectric superlattice made from PZT-4 with material parameters $c_{44} = 2.56 \cdot 10^{10}\ N/m^2, e_{15} = 12.7 C/m^2$, $\varepsilon_{11} = 646 \cdot 10^{-11}\ F/m$ and $\rho = 7.6 \cdot 10^3 kg/m^3$. The material parameters of the defect layer are the same as for the piezoelectric material but without the piezoelectric effect.
Due to the electro-mechanical coupling in a piezoelectric superlattice an incident acoustic wave generates a propagating electromagnetic wave. At specific frequencies in the long wavelength region the elastic and generated electromagnetic waves resonate with each other creating new form of a sub-wavelength band gap which is not associated with Bragg reflection.



(a) (b) (c) (d)

Figure 2. Acoustic (blue) and electromagnetic (red) energy transmission curves at the first (a,c) and second (b,d) resonance frequencies for a superlattice with n=1000 layers with (c,d) and without (a,b) a defect layer.

A superlattice consisting of 1000 cells is considered in Fig. 2 where there is complete reflectance near the resonant frequencies for both elastic and electromagnetic waves in the cases of defect layer absence (Fig 2(a,b)). The inclusion of the defect layer of width $\beta_d = 2\,\beta$ into the piezoelectric superlattice results in a propagating mode inside the gap with an 80 % acoustic transmittance peak (blue solid line) at the first resonant frequency Fig. 2(c).
At the third resonance frequency $\omega\,\beta/(c_0\,\pi) = 5$ for the superlattice without the defect layer the polariton band gap is wider than at the first resonance frequency (Fig. 2(a,b)). The defect layer introduces two localised modes the first of which is exactly at the resonance frequency with 80% elastic and 10% electromagnetic energy transmission and the second at slightly lower than resonant frequency with just under 80% elastic and 18% electromagnetic energy transmission Fig. 2(d).

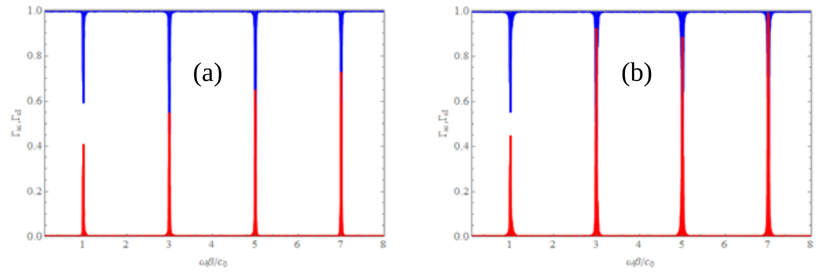



Figure 3. Energy distribution for a piezoelectric superlattice without (b) and with (a) defect layer. Total elastic (blue) and electromagnetic (red) energies.

The total acoustic and converted electromagnetic energies around the resonance frequencies for a piezoelectric superlattice without the defect layer are shown in Fig.3. Without the defect layer the contribution of the converted electromagnetic field into the total energy (solid red lines in Fig. 3 ) at resonant frequencies grows linearly with frequency reaching about 70 % at $\omega\beta/2\pi = 7$. For the superlattice containing a defect layer this contribution is much higher and reaches 90% of the total energy already at $\omega\beta/(c_0\pi) = 3$.

**Conclusion**

One of the unique reflection/transmission properties that the piezoelectric superlattice exhibits due to the electro-mechanical coupling is a coupling effect between the electro-magnetic wave and the superlattice vibration.

The dispersion (3) contains information about this coupling which in the long wavelength region results in phonon-polariton gaps, in which the resonance frequency is determined by the period of the superlattice. A defect layer in the superlattice introduces a clear defect mode with 89% transmission peak in this gap. At higher resonance frequencies where the polariton gap is wider the second transmission peak appears which carries more electro-magnetic energy.

In general without a defect layer the contribution of the converted electromagnetic energy into the total energy at resonant frequencies grows linearly with frequency reaching about 70% at the fourth resonance frequency. With the introduction of a defect layer this contribution increases significantly reaching 90% of the total energy already at the second resonance frequency.

Thus controlling wave propagation properties including creating passbands inside the phonon polariton band is possible in a periodic piezoelectric superlattice. This result can have applications in designing tunable waveguides which can be made of layers of identical piezoelectric crystals.

**REFERENCE**


1. F. Li, C. Zhang, and C. Liu, «Active tuning of vibration and wave propagation in elastic beams with periodically placed piezoelectric actuator/sensor pairs». //Journal of Sound and Vibration 393, 14 – 29, 2017.
2. D. Tallarico, N. Movchan, A. Movchan, and M. Camposaragna, «Propagation and filtering of elastic and electromagnetic waves in piezoelectric composite structures». Mathematical Methods in the Applied Sciences 40, 3202–3220, 2017.
3. F. Li, C. Zhang, and C. Liu, «Active tuning of vibration and wave propagation in elastic beams with periodically placed piezoelectric actuator/sensor pairs». //Journal of Sound and Vibration 393, 14 – 29, 2017.
4. Shuvalov and A. Gorkunova, «Transverse acoustic waves in piezoelectric and ferroelectric antiphase superlattices». Physical Review B 59, 9070– 9077, 1999.
5. Huang and Y. Zhu, «Piezoelectric superlattice: From piezoelectric to huang-kun-like equations». AIP Advances 2, 042117(1–8), 2012.
6. Z. Liu and W. Zhang, «Study of the phonon-polaritons in piezomagnetic superlattices using a generalized transfer matrix method». //Journal of Physics: Condensed Matter 18, 9083, 2006.
7. D. Piliposyan, K. Ghazaryan, and G. Piliposian, «Magneto-electro–elastic polariton coupling in a periodic structure». //J. Phys. D: Appl. Phys. 48, 17550, 2015.

8. C. Goffaux and J. P. Vigneron, «Theoretical study of a tunable phononic band gap system». Phys. Rev. B 64, 075118, 2001.
9. L. Qi, Z. Yang, and T. Fu, «Defect modes in one-dimensional magnetized plasma photonic crystals with a dielectric defect layer». Physics of Plasmas 19, 012509, 2012.
10. L. Wang, H. Chen, and S. Zhu, «Omnidirectional gap and defect mode of one-dimensional photonic crystals with single-negative materials». Physical Review B 70, 245102(1–8), 2004.
11. R. Ozaki, T. Matsui, M. Ozaki, and K. Yoshino, «Electro-tunable defect mode in one-dimensional periodic structure containing nematic liquid crystal as a defect layer». //Japanese journal of applied physics 41, 1482–1484, 2002.
12. D. Piliposyan, G. Piliposian, and K. Ghazaryan, «Propagation and control of shear waves in piezoelectric composite waveguides with metallized interfaces». //International Journal of Solids and Structures 106–107, 119 – 128 , 2017.
13. D. Piliposyan, K. Ghazaryan, and G. Piliposian, «Shear bloch waves and coupled phonon–polariton in periodic piezoelectric waveguides». Ultrasonics 54, 644–654, 2014.
14. G. Piliposian, A. Avetisyan, and K. Ghazaryan, «Shear wave propagation in periodic phononic/photonic piezoelectric medium». Wave Motion 49, 125– 134, 2012.
15. D. Piliposyan, K. Ghazaryan, and G. Piliposian, «Internal resonances in a periodic magneto-electro-elastic structure». //Journal of Applied Physics 116, 044107, 2014

**Information about authors**

**Davit Piliposyan** – Researcher at Institute of Mechanics of National Academy of Sciences of Armenia.
**E-mail:** piliposyan@mechins.sci.am

**Gor Piliposayn** – Master student at Yerevan State University, Alek Manukyan 1, 0025 Yerevan,
**Email:** piliposyan.gor@gmail.com

**David Aznaurov** – Master student at Moscow Institute of Physics and Technology, 9 Institutskiy Pereulok, Dolgoprudny, Moscow region, Russia.
**E-mail:** david.aznaurov@phystech.edu

**STABILITY AND DEFORMATION BEHAVIOR OF THREE-DIMENSIONAL DIAMOND-LIKE CARBON PHASES**

**Rysaeva L.Kh.**

This work presents the results of numerical simulation on the deformation behavior of carbon structures containing carbon atoms with $sp^3$ hybridization but having different morphology and, consequently, various electronic configurations and properties. Namely, the method of molecular dynamics is used to study the deformation behavior of carbon diamond-like phases based on fullerene-like molecule and nanotube under hydrostatic compression. Stress-strain curves and corresponding structural changes are obtained. It is shown that structural features considerably affect the mechanical properties of three-dimensional carbon diamond-like phases.

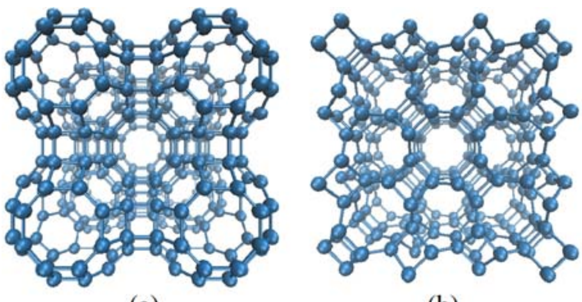
## 1. Introduction

Carbon exists in a variety of modifications with very diverse physical properties. This diversity is due to the ability of carbon to form chemical bonds of various types. One of the well-known carbon allotropes is diamond, which is widely used in practice. In addition to diamond, with the development of chemical synthesis methods, other diamond-like phases were also found. Diamond-like carbon does not have a uniform composition, but consists of a mixture of amorphous and crystalline phases. [1-3]. Its properties vary considerably depending on the application conditions. Diamond-like structures (films) are produced by various methods, including ion-beam coating, simultaneous sputtering, and chemical vapor deposition (CVD), as well as by the magnetron sputtering method. Diamond-like structures contain carbon atoms in various coordinates. In pure diamond, there are tetragonal coordinated $sp^3$ carbon atoms, as well as sp2 trigonal coordination found in graphite, and possibly some *sp*-coordinated atoms. They may also contain microcrystalline diamond and graphite, and a disordered structure containing a mixture of configurations. For the last decade, diamond-like phases has also been extensively studied. Diamond-like carbon phases (DLP) are structures containing $sp^3$-coordinated carbon atoms [4-8]. DLPs have already been obtained experimentally, for example, lonsdaleite, cubic fullerite $C_{24}$, and the number of theoretically predicted diamond-like phases continues to grow, which can be obtained with the development of synthesis methods.

In this paper, the mechanical properties of carbon diamond-like phases (DLP) based on fullerene-like molecules (fulleranes) and nanotubes (tubulanes) by means of hydrostatic pressure compression are studied. Basic mechanisms of deformation of such phases are found.

## 2. Simulation details

The study is carried out using the molecular dynamics (MD) method in freely distributed modeling package LAMMPS, where the interaction of atoms is described by the AIREBO interatomic potential. This potential is based on the Tersoff potential with the special additions, allowing to take into account more structural features. Simulation cells are created by a specially developed program for combining unit cells into a three-dimensional structure. All studies are performed at two temperatures 1 K and 300 K. The constancy of temperature was maintained using a Nose-Hoover thermostat. At the initial moment, the structure of the DLP relaxed until it reached a state with minimal energy. After that, the calculation of compliance $s_{ij}$ and stiffness $c_{ij}$ moduli is carried out [9-11]. To study the mechanical properties, stable configurations are selected based on three criteria: relaxation stability, deformation stability, and thermodynamic (Born) criteria. Thus, six stable fullerans, six stable tubulans, and two DLPs based on graphene sheets are found. Figure 1 shows an example of studied stable DLP configurations.



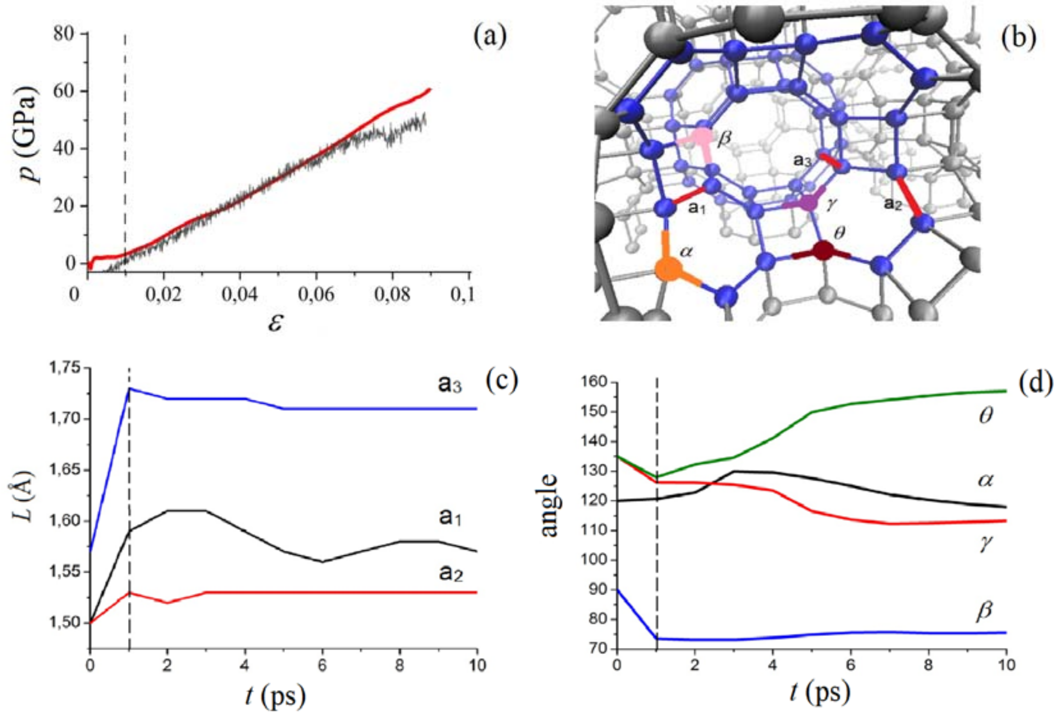
(a) (b)

**Fugure 1.** For examples on stable DLPs: (a) fullerane CA7 and (b) tubulane TA5.

To study mechanical properties, hydrostatic compression $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon$, is applied to the computational cells at the temperature close to 0 K with the strain rate $\dot{\varepsilon} = 0.01$ ps$^{-1}$. To characterize the response of DLPs to strain-controlled hydrostatic compression, the corresponding hydrostatic pressure $p = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})/3$, energies and other characteristics are calculated.
For simplicity, here results only for fullerane CA7 and tubulan TA5 is presented.

**3. Results and discussion**

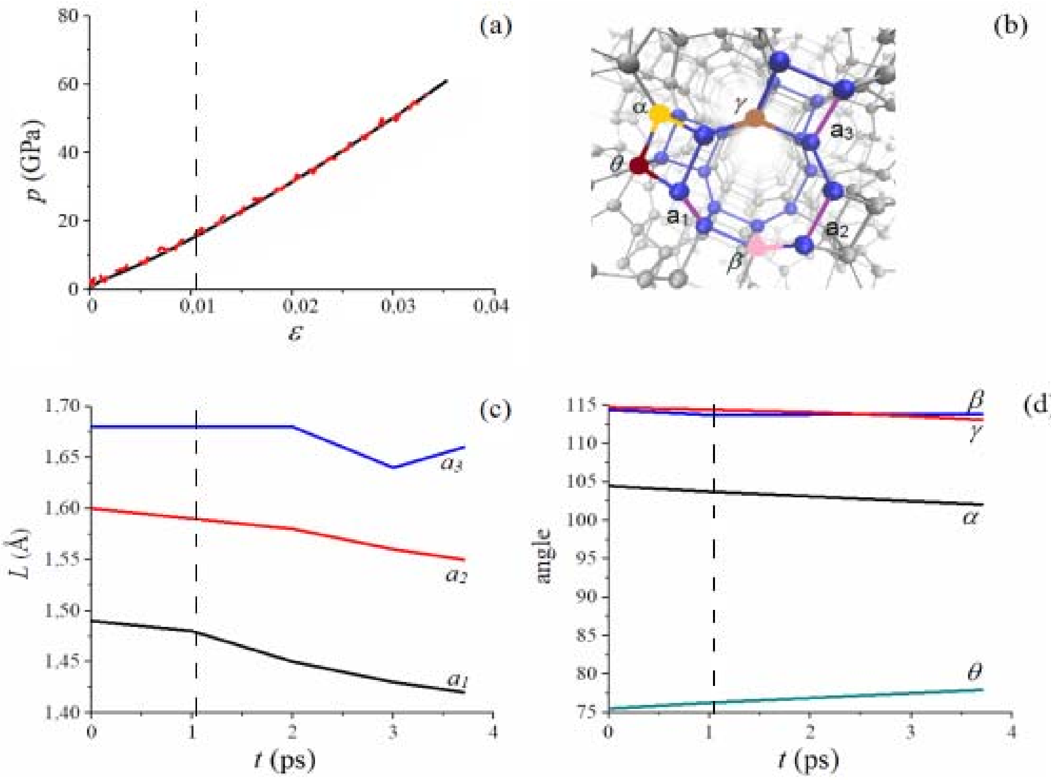
Figs. 2 and 3 show the analysis of deformation behavior, namely pressure-strain curves, structural elemen and changes of the structural characteristics, such as valent bonds and angles, for fullerane CA7 and tubulane TA5 correspondingly.
Fig. 2a shows hydrostatic pressure as the function of strain for fullerane CA7. It can be seen, that the deformation proceeds evenly; temperature does not introduce strong changes in the course of the pressure-strain curve. Critical strain value is $\varepsilon = \sim 0.09$ and critical stress is $p$ =61 GPa [10].




**Fugure 2.** Phase CA7 at hydrostatic compression: (a) pressure-strain curves at $T = 1$ K (red curve) and $T = 300$ K (gray curve); (b) structural element with the analyzed angles and bonds; (c,d) change of the values of valent bonds (c) and valent angles (d) in course of deformation at $T = 1$ K.

In Figs. 2c, 2d show changes in the angles and length of the bonds as a function of time during compression at $T = 1$ K. Structural element with bonds and angles is presented in Fig. 2b. Time of relaxation is separated from simulation time of compression by dashed line. Considerable changes of all values took place at the relaxation stage. The angles γ and θ at the initial moment of time have the same values 135º and during the deformation they are simultaneously changing: one angle increases to $\theta = 157$º and the other decreases to γ = 113º. These angles are mostly contributing to the mechanisms of compression of CA7. Angles α changing from 120º to 117º and $\gamma$ - from 90º to 75º. The change in the bond lengths $a_1$, $a_2$ and $a_3$ in the CA7 phase under hydrostatic compression showed that the bonds $a_2$, $a_3$ are not changing, while $a_1$ significantly changes during the deformation. At the final moment, the bonds are 1.57, 1.53, and 1.71 Å, respectively. Analysis of the radial distribution function at different levels of deformation showed that fullerans have a crystalline structure in the whole process of deformation and do not pass into an amorphous state.

Diamond-like phase TA5 reaches a critical stress ($p$ =62 GPa) at $\varepsilon = \sim 0.036$ as it can be seen from Fig. 3a. Temperature smooths the pressure-strain curves slightly. Basically, the temperature affects the value of the critical phase deformation, reducing it by ~0.5%. Figures 3c and 3d shows the change in angles and bond lengths during hydrostatic compression. Angles α and θ change reversely: $\alpha$ decreases and $\theta$ increases in comparison with the initial values. The angles β and γ change in the same way during relaxation. In the process of deformation, all angles change slightly: α – from 104º to 102º, β – from 114º to 113º, $\gamma$ – from 114º to 113º and θ – from 75º to 77º. The lengths of all bonds are reduced almost equally, by 2 %: in initial moment $a_1$ = 1.49 Å, $a_2$ = 1.6 Å and $a_3$ = 1.68 Å and at the final moment of compression $a_1$ = 1.42 Å, $a_2$ = 1.55 Å and $a_3$ = 1.66 Å. Again, the deformation behavior during compression of the structure is determined by the change in both bond lengths and bond angles. As in the case of fulleranes, tubulanes do not lose their crystalline order and do not become amorphous to high densities.




**Fugure 3.** The same as in Fig. 2, but for TA5.

**Conclusion.**

The molecular dynamics simulation is used to study the deformation behavior of carbon diamond-like phases based on fullerene-like molecules and nanotubes. Stable configurations are identified, and the main mechanisms of phase deformation are found. In the field of elastic deformation, stiffness and compliance constants can be calculated, and the mechanisms of elastic deformation can be investigated. A numerical experiment showed that some stable DLPs can be hydrostatically compressed to densities close to the density of diamond. It was found that the phases are deformed in a similar way due to changes in bond lengths and angles depending on the morphological features of a particular phase. Hydrostatic compression occurs mainly because of the changes of the valent angles and bonds for all DLPs.


**Acknowledgements**

This work was supported by the Grant of the President of the Russian Federation for state support of young Russian scientists - doctors of sciences MD-1651.2018.2.


**REFERENCE**


1. Esser M., Esser A.A., Proserpio D.M., Dronskowski R.// Carbon. 2017. Vol.121. P.154–162.
2. Krylova K.A., Baimova Yu.A., Dmitriev S.V., Mulyukov R.R. // Phys.Solid State. 2016. Vol.58. P. 394–401.

3. Bewilogua K., Hofmann D. // Surf. Coat. Technol. 2014. Vol. 242. P. 214–225.
4. Greshnyakov V. A., Belenkov E. A., Berezin V.M. // Crystal structure and properties of diamond-like carbon phase. P. South-Ural State University, 2012. 150c.
5. Greshnyakov V.A., Belenkov E.A. // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering 2018. Vol. 447(1). P. 012018.
6. Belenkov E.A., Greshnyakov V.A. // Physics of the Solid State. 2018. Vol. 60(7). P. 1294-1302.
7. Belenkov E.A., Greshnyakov V.A. // Physics of the Solid State. 2016. 58(10). P. 2145-2154.
8. Greshnyakov V., Belenkov E. // Materials Science Forum. 2016. 845. P. 231-234.
9. Lisovenko D.S., Baimova Yu.A., Rysaeva L.Kh., Gorodtsov V.A., Dmitriev S.V. // Phys. Solid State. 2017.Vol. 59. P. 820–828.
10. Rysaeva L.Kh. // Journal of Physics: Conference Series. 2017. Vol. 938(1). P. 012071.
11. Baimova J.A., Rysaeva L.Kh., Dmitriev S.V., Lisovenko D.S., Gorodtsov V.A., Indeitsev D.A. // Materials Physics and Mechanics. 2017. Vol. 33. P. 1-11.
12. Baimova J. A., Rysaeva L. Kh. Journal of Structural Chemistry. 2018. Vol.59(4). P. 884.

**Information about authors:**

**Rysaeva Leysan** – postgraduate student, Institute for Metals Superplasticity Problems RAS, Laboratory «Nonlinear physics and mechanics of materials» (347) 223-64-07
**E-mail:** lesya813rys@gmail.com

# NICKEL-GRAPHENE COMPOSITES OBTAINED BY HYDROSTATIC COMPRESSION WITH SUBSEQUENT ANNEALING AT ELEVATED TEMPERATURE

**Safina L.R., Baimova J.A.**

**Annotation** Fabrication of Ni-graphene composite by hydrostatic pressure with the subsequent annealing is studied by molecular dynamics simulation. Crumpled graphene – the network of folded and crumpled graphene flakes connected by van-der-Waals bonds – is chosen as the matrix for Ni nanoclusters with the size from 21 to 78 atoms. It is found that simple hydrostatic compression at zero or room temperature cannot lead to the formation of composite structure. Even strongly compressed crumpled graphene after unloading returned to the state of separated graphene flakes. However, annealing of the compressed structure leads to appearance of the valent bonds between neighboring flakes. It is found, that size of the nanocluster considerably affects the formation of the composite.

## 1. Introduction

Carbon nanomaterials have exceptionally large aspect ratios, for example crumpled graphene - system of crumpled and folded graphene flakes connected by van-der-Waals interactions which was obtained recently [1-3]. Mechanical properties of this structure was previously studied by molecular dynamics simulation [4-6]. Recent studies have shown that the combination of graphene with metals can enhance mechanical properties of the resulting structure [7]. Among other metals, nickel (Ni) is one of the most applicable in fabrication of the composites with the improved mechanical, physical and electronic properties. One of the important advantages is that nickel exhibits outstanding wettability for graphite powders and does not form an equilibrium carbide phase. Wrinkles present in crumpled graphene may affect interfacial shear stress by changing the degree of contact between graphene and the metal. Such hybrid structures can be used as lubricants, energy storage devices or for hydrogen storage and transportation, in catalysis, etc. A well-known vapor deposition method is based on the fact that metal nanoparticles, for example, Ni, Co, or Fe, activates the growth of nanotubes and graphene. Thus, investigation of such systems is of high importance nowadays, especially, fabrication techniques and resulting mechanical properties.

In the present work, crumpled graphene with Ni nanoparticles inside pores is studied by molecular dynamics simulation under hydrostatic compression and after annealing at high temperatures. First, the effect of hydrostatic compression at 0 K on the formation of the composite is discussed. Then, effect of annealing on the formation of the composite structure is presented.

## 2. Simulation details

Initial structural unit is presented in Fig. 1a. As it can be seen it is a cut carbon nanotube with the metal nanoparticle in the central part. Three sizes of Ni nanoclusters are considered – 21, 47 and 78 atoms. This structural unit randomly rotated and translated as 4×4×4 along *x*, *y* and *z* axis to obtain 3D initial structure shown in Fig. 1b. Periodic boundary conditions are applied along all directions.

All the simulations are conducted using LAMMPS package with the AIREBO interatomic potential for the description of interaction between carbon atoms. For Ni-Ni and Ni-C interaction, simple pair Morse interatomic potential is used with the parameters for Ni-Ni proposed in [8] and for Ni-C proposed in [9, 10]. Parameters are presented in Tab. 1. Equations of motion for the atoms were integrated numerically using the fourth-order Verlet method with the time step of 0.1~fs. The Nose-Hoover thermostat is used to control the system temperature.

The strain-controlled hydrostatic compression, $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon$, is applied to the computational cells at the temperature close to 0 K with the strain rate $\dot{\varepsilon} = 0.01$ ps$^{-1}$. To characterize the response of CG to strain-controlled hydrostatic compression, the corresponding hydrostatic pressure $p = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})/3$, energies and other characteristics are calculated. After hydrostatic compression, obtained structure is annealed at 1000 K. To study the mechanical properties of the obtained composite, hydrostatic tension is applied with the $\dot{\varepsilon} = 0.005$ ps$^{-1}$.

Table 1. Morse parameters for Ni-Ni and Ni-C

| | $D_e$, eV | $R_e$, Å | β, 1/Å | Ref. |
|---|---|---|---|---|
| Ni-Ni | 0.4205 | 2.78 | 1.4199 | [] |
| C-Ni | 0.433 | 2.316 | 3.244 | [] |

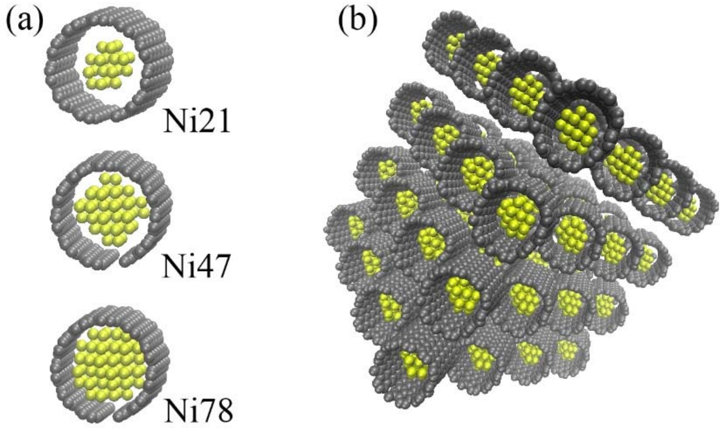



**Fig. 1.** (a) Initial structural unit – graphene flake filled with Ni nanocluster. (b) Initial structure of crumpled graphene filled with Ni nanoparticles. Graphene flake is shown by gray and Ni atoms – by yellow.

## 3. Results and discussion

### 3.1. Stretching after hydrostatic compression at 0 K

In Fig. 2, pressure-strain curves for Ni-graphene composite under hydrostatic tension at 0 K are presented as well as the snapshots of structure with Ni21 and Ni78 at corresponding strain. As it can be seen, pressure-strain curves are not typical for composite structure which means that simple compression at zero temperature cannot be used for the fabrication of the composite material based on the combination of crumpled graphene flakes and Ni nanoparticles. As it can be seen from Fig. 3b, pores in the structure appear at low strain: for structure with Ni21 at $\varepsilon = 0.015$, for structure with Ni78 at $\varepsilon = 0.005$. Moreover, after unloading structure retuned to the initial state where all the graphene flakes are separated from each other and connected just by van-der-Waals bonds.

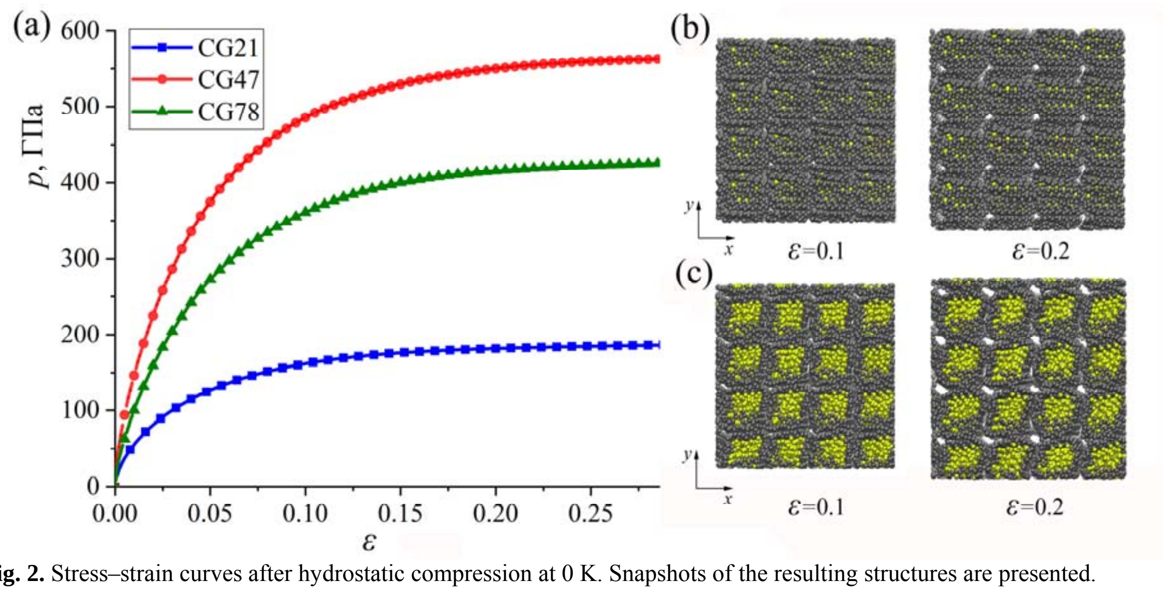



**Fig. 2.** Stress–strain curves after hydrostatic compression at 0 K. Snapshots of the resulting structures are presented.

The other important factor is the size of Ni nanoclusters. For structure with big nanoclusters, graphene flakes fully cover the metal nanoparticle which involves much more difficulties in the formation of chemical bonds between neighboring flakes than for structure with Ni21. Analysis of the initial structural unit shows that graphene flakes preserve almost ideal structure without defects and even edge atoms at 0 K does not interact with the neighbors.

### 3.2. Effect of annealing

In Fig. 3 the stress-strain curves for hydrostatically compressed at 0 K and structures, annealed at 1000 K after compression are presented. Increase of the temperature leads to much better results. At elevated annealing temperatures, a single composite structure is formed, which is especially pronounced for the Ni21 and Ni47 composite, where the mixing of carbon and nickel atoms is easier due to the small size of the nanoparticles. The deformation of the Ni21 structure proceeded more evenly, the structural elements were basically mixed, although stretching led to a fairly rapid appearance of pores in the structure. For structures with Ni78, the behavior is similar before and after annealing and the course of the curves actually the same. In these composites, graphene flake fits closely with the nickel nanoparticle, preventing the formation of a mixed nickel-carbon structure. The temperature of 1000 K is not enough to even to melt a nickel particle [11], and not enough to mix carbon atoms and to form chemical bonds between carbon atoms. At the same time, such a temperature is sufficient to cause the melting of a nanoparticle of 21 atoms and the spread of nickel atoms in the structure.

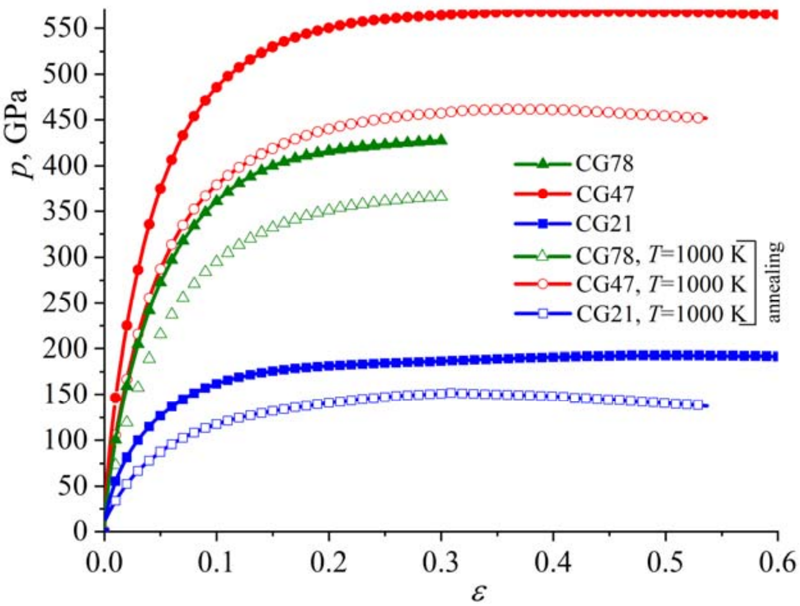



**Fig. 3.** Stress–strain curves after hydrostatic compression at 0 K and after annealing at 1000 K.

Fig. 4 shows single structural element with Ni21 and Ni78, selected in the center of the structure during the stretching process after annealing at 1000 K. It can be seen, that at 1000 K nanocluster Ni21 melts and breaks up into individual Ni atoms which can easily spread on graphene. In this case, Ni78 nanocluster of 78 nickel atoms remains intact, however, at high degrees of deformation, it can be destroyed. In addition, it can be seen that at elevated temperatures the hexagonal structure of graphene flake is destroyed: the atoms of one flake are connected by covalent bonds with the atoms of the neighboring flakes. In the absence of annealing or at low temperatures this does not occur, the hexagons remain flat, chemical bonds in the basal plane do not break.

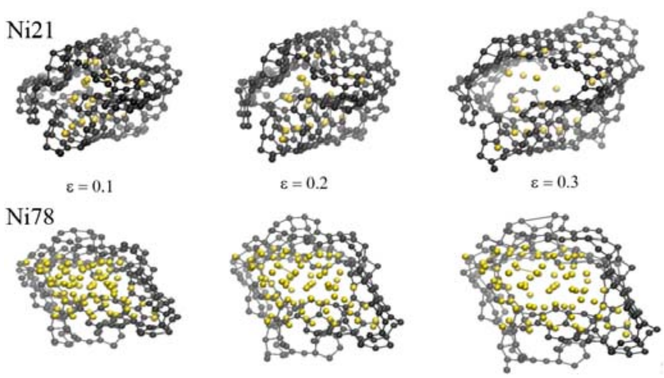



**Fig. 4.** Snapshots of one structural element at 1000 K for nanocluster Ni21 and Ni78.

## Conclusions

In the present work, the process of fabrication of Ni-graphene composite is studied by molecular dynamics. Annealing of the composite at 1000 K after preliminary hydrostatic compression, which does not lead to the formation of a single composite structure, was chosen as the main factor. The size of nanoparticles also has a great influence - small nanoparticles Ni21 easily melt at 1000 K; however, at this temperature, covalent bonds between individual flakes does not appear. If small nickel nanoclusters are considered, a more uniform composite structure is obtained even after annealing at 1000 K, while large particles Ni78 are wrapped by graphene flakes, making it difficult for neighboring structural units to interact with each other.

## Aknowlegements

Calculation of the hydrostatic compression of CG done by J.A.B. and supported by the program of fundamental researches of Governement Academy of Sciences of IMSP RAS. Investigation of hydrogenated CG is made by L.R.S. and supported by the Grant of the President of the Russian Federation for state support of young Russian scientists - doctors of sciences MD-1651.2018.2.

## REFERENCE

1. Zhang L., Zhang F., Yang X., et al. Porous 3d graphene-based bulk materials with exceptional high surface area and excellent conductivity for supercapacitors. Scientific Reports, vol.3, №1, 2013, p. 1408.
2. Tang Z., Li X., Sun T., et al. Porous crumpled graphene with hierarchical pore structure and high surface utilization efficiency for supercapacitor. Microporous and Mesoporous Materials, vol.272, 2018, p.40.
3. Tang C., Wang H.-F., Huang J.-Q., et al. 3d hierarchical porous graphene-based energy materials: Synthesis, functionalization, and application in energy storage and conversion. Electrochemical Energy Reviews, vol.2, №2, 2019. p.332.
4. Baimova J.A., Korznikova E.A., Dmitriev S.V., Liu B., Zhou K. Review on crumpled graphene: Unique mechanical properties. Rev. Adv. Mater. Sci., vol.39, №1, 2014, p.69.
5. Baimova J. A., Liu B., Dmitriev S. V., Srikanth N., Zhou K. Mechanical properties of bulk carbon nanostructures: effect of loading and temperature. Physical Chemistry Chemical Physics, vol.16, №36, 2014, p.19505.
6. Baimova J. A., Liu B., Dmitriev S.V., Zhou K. Mechanical properties of crumpled graphene under hydrostatic and uniaxial compression. J. Phys. D: Appl. Phys., vol. 48, N 9, 2015. p. 095302.
7. Chu K., Jia C. Enhanced strength in bulk graphene–copper composites. Phys Status Solidi, vol. 211, 2014, p.184-190.
8. Girifalco L. A., Weizer V. G. Application of the morse potential function to cubic metals. Physical Review, vol.114, № 3, 1959, p.687.
9. Katin K.P., Prudkovskiy V.S., Maslov M M. Molecular dynamics simulation of nickel-coated graphene bending. Micro & Nano Letters, vol.13, №2, 2018, p.160.
10. Galashev A.Y., Katin K.P., Maslov M.M. Morse parameters for the interaction of metals with graphene and silicone. Physics Letters A, vol.383, №2-3, 2019, p.252.
11. Safna L.R., Baimova J.A., Mulyukov R.R. Nickel nanoparticles inside carbon nanostructures: atomistic simulation. Mechanics of Advanced Materials and Modern Processes, vol.5, 2019, p.1.

**Information about authors:**

**Liliya R. Safina** – student, Bashkir State University, **E-mail:** saflia@mail.ru

**Julia A. Baimova** – Dr. Sci. Prof. RAS, Institute for Metals Superplasticity Problems of RAS
**E-mail:** julia.a.baimova@gmail.com

# UNI-AXIAL TENSILE RESPONSE OF TITANIUM BASED FIBER METAL LAMINATES

**Sharma A. P., Velmurugan R.**

Fiber metal laminates (FMLs) consist of thin layers of metal bonded together with layers of composite based on fiber reinforcement. In the present study, titanium sheets (Ti-6Al-4V) having thickness of 0.4 mm and 0.6 mm and glass-fiber reinforced composite layers having uni-directional layup are considered to fabricate FMLs and response of these laminates are evaluated under tension. The consideration for two discrete sequence of stacks is made for FMLs preserving thickness of total layer of metal same and these laminates are fabricated using method of hand layup. The layup's sequence does not affect initial modulus of FMLs subjected to tension. Whereas, the ultimate strength and FMLs' behaviour succeeding ultimate strength are significantly affected by layup's sequence.

## 1. Introduction

Metal and fiber polymer composite with their alternating layers are used to constitute a group of materials that are hybrid and known as Fiber metal laminates (FMLs) [1]. The skin elements of Airbus A380 extensively considers currently used GLARE (glass fiber reinforced aluminium laminates) [2]. FMLs based on aluminium alloy are the series which is most common and broadly applied. This includes GLARE, ARALL (aramid fiber reinforced aluminium laminates), CARALL (carbon fiber reinforced aluminium laminates) and BARALL (basalt fiber reinforced aluminium laminates). However, temperature in operation and tolerance to damage are limited for FMLs of such types. For these purposes, the necessities of a fighter plane with high speed and temperature that is high (177 $^0$C) are met by developing FMLs based on titanium known as hybrid titanium composite laminate (HTCL) [3]. The study of mechanical properties of FMLs based on titanium are then carried out by various researches, e.g. tension under quasi-static loading.

The findings reported by Miller et al. [3] can also be found in a study led by Li and Johnson [4]. Veazie et al. [5] reported that improvement is shown by systems consisting of titanium with many thinner layers to titanium with fewer thicker layers. In this case, higher strength-to-weight ratios are considered as key concern for applications to aircraft which is high-speed and to be developed in future. Overall, presented systems of HTCL provide stronger substitute to equivalent metals which are monolithic. Papakonstantinou and Katakalos [6] stated that the strengths and stiffnesses of FMLs based on titanium and high modulus carbon fiber are stronger and stiffer to their constituent materials with sum of their discrete strengths and stiffnesses. Reiner et al. [7] stated that in case of $[Ti/0/90]_s$, debonding and coalescence of matrix crack are major modes of failure detected with layers of composite having unidirectional layup.

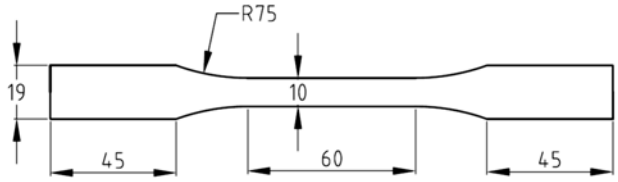
In present study, FMLs are prepared by arranging layers of metal at different places across the thickness of FML maintaining total thickness of metal layers same and their behaviour is studied when subjected to tensile loading. Digital imaging and digital image correlation (DIC) technique are used to record real progression of damage and to measure deformation by performing correlation of images, respectively.

## 2. Experimental procedure

### 2.1 Specimen configurations

Titanium (Ti) alloy sheets (Ti-6Al-4V) having 0.4 mm and 0.6 mm thicknesses are considered as the layers of metal in FML. Strength-to-weight properties are higher for Ti and at temperatures that are higher, Ti is much durable than aluminium [8]. The layers of composite used are uni-directional (UD) E-glass fiber reinforced epoxy (GFRP). FMLs with two dissimilar sequence of stacks are prepared through technique of hand layup followed by compression molding maintaining same thickness of total layers of metal. The considered sequence of stacks are [T6/0/90/90/0/T6] and [T4/0/90/T4/90/0/T4] referring by 2/1-0.6 and 3/2-0.4, respectively and are having thickness of 3.05 mm. In above descriptions of layup, T6 and T4 denote layers of titanium having thickness of 0.6 mm and 0.4 mm, respectively and 0 and 90 specify layers of UDGFRP. Layups of FML with details of their terminology can be found in

Ref. [9]. Volume fraction of fiber for composite laminate is found to be about 50 % using burn test. Specimen of dog-bone shape is considered for testing of FML as shown in Fig.1 [10].

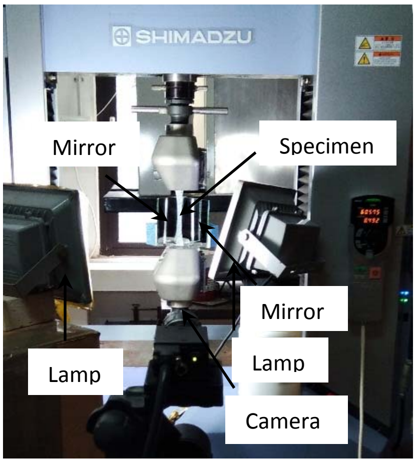



(All dimension are in mm)

Fig.1. Geometry of specimen for FML

2.2 Testing

Universal testing machine is used to conduct quasi-static tensile tests of FMLs at a cross-head speed of 1 mm/min at room temperature. During testing, events of failure are recorded by visualizing FMLs' edges using two mirrors as can be seen in Fig. 2a. A pattern of random nature (speckle of black on background of white) is applied on specimen using paint in spray form as presented in Fig. 2b. Uniform illumination is obtained on specimen's surface by using a pair of lamps placed each on camera's either side (Edmund optics).




(a)

(b)

Fig. 2(a). Experimental setup (b) FML 3/2-0.4 specimen having pattern of DIC

**3. Results**

3.1 FML 2/1-0.6

An experimental stress-strain behavior which is typical of FML 2/1-0.6 having lay-up [T6/0/90]s is shown in Fig. 3. Initially, stress-strain curve of FML shows a linear behaviour followed by a hardening behaviour which seems non-linear till attaining of maximum stress. The layer of titanium yields when FML's stress reaches 415 MPa. Therefore, the deviation from region which is linear is equivalent to yielding for layer of titanium as can be seen in experiment. The slope continuously decreases up to about 457 MPa followed by a response which seems linear up to about 524 MPa and further constantly decreases till reaching level of stress which is maximum of 530 MPa. The photographs of specimen equivalent to levels of stress shown by open circles indicating with points A-D are presented in Fig. 4 in same sequence. The specimen's view at its edge in Fig. 4a corresponding to stress level of 530 MPa does not exhibit any noticeable damage of significant extent. The specimen's photograph corresponding to stress level of 530 MPa is shown in Fig. 4b. Splitting and failure of fiber for composite layer with fibers along $0^0$ direction (0C) are observed causing delamination between T6 and 0C designating by white arrow. Therefore, sudden dropping of stress is resulted by failure of 0C. With further deformation of specimen, more amount of splitting and fracture of fiber for 0C are occurred corresponding to a level of stress of 385 MPa as shown in Fig. 4c. Sheets of titanium share majority of load and stress which increases gradually is evident (Fig. 3). This sharing of load is exhibited by sheets of titanium until both layers of titanium fail. Strain which is being localized for sheets of titanium just before achieving failure is shown in Fig. 4d.

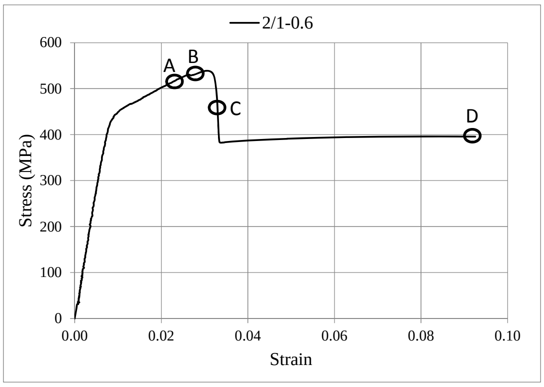
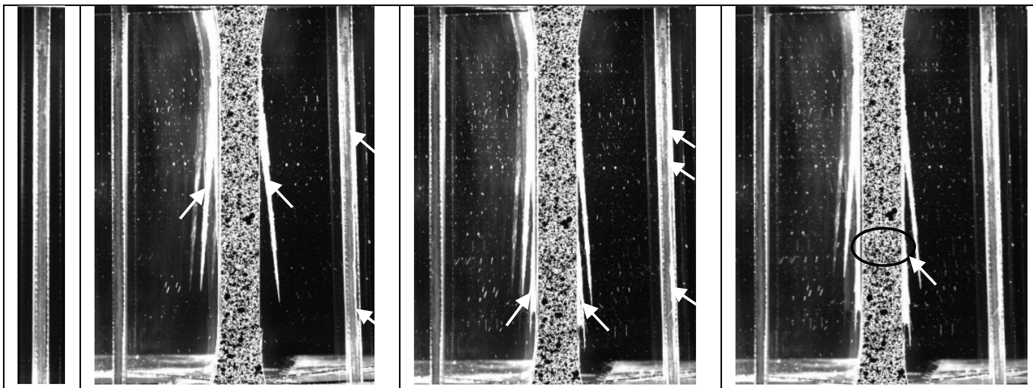



Fig. 3. Behavior of FML 2/1-0.6 under tensile loading



| (a) | (b) | (c) | (d) |
|---|---|---|---|

Fig. 4. Photographs showing damage evolution for FML 2/1-0.6

3.2 FML 3/2-0.4

A typical stress-strain behavior of FML 3/2-0.4 with layup [T4/0/90/T4/90/0/T4] is shown in Fig.5. The specimen's photograph analogous to points A-H indicating by open circles in Fig.5 are presented in Fig. 6 in same order. Akin to FML 2/1-0.6, stress-strain curve shows a response which is linear initially up to about 401 MPa till stress for FML's titanium layer reaches yield stress of titanium following a behaviour which seems non-linear. Dropping of stress is happened after a level of stress that attains maximum value. Fig. 6a shows specimen's edge view before reaching stress level that is maximum and exhibits no visible damage. Fig. 6b shows photograph of specimen equivalent to a level of stress of 488 MPa before maximum stress. In this case, initiation of delamination is taken place between composite layers with fibers along $90^0$ direction (90C) and middle T4 indicating by white arrow (Fig. 6b). This is followed by more amount of delamination between 90C and middle T4 as can be seen in Fig. 6c. With continuous deformation of specimen, splitting and failure of fiber for one layer of 0C are observed causing delamination between 0C and T4 (Fig. 6d). Following this, the level of stress drops to 429 MPa with increasing strain where splitting and failure of fiber for another layer of 0C are observed causing delamination between 0C and T4 (Fig. 6e). Afterwards, the stress further drops to 412 MPa and rises gradually to 415 MPa with increasing strain at which cracking is initiated for middle T4 corresponding to point F as shown in Fig. 5 (Fig. 6f). This is continued with stress which gradually decreases further to 410 MPa following dropping of stress to 263 MPa at which fracture of middle T4 is happened (Fig. 6g). The stress level again drops to 259 MPa where localization of strain is observed for T4 which is about to fail (Fig. 6h). Following stress level which is maximum for FML, failure of progressive nature is observed for FML 3/2-0.4 to FML 2/1-0.6. Layers of composite are not failed at single time for FML 3/2-0.4, as substitute, stepwise failure is observed for them causing dipping of stress levels in two steps.

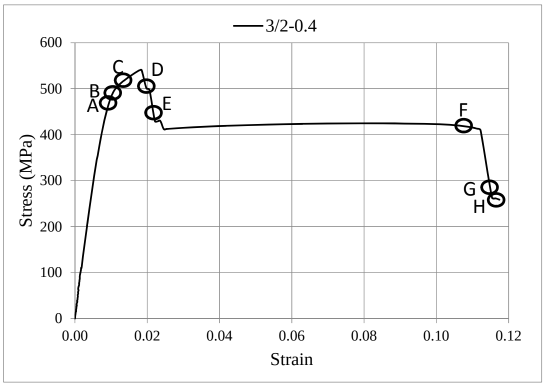



Fig. 5. Response of FML 3/2-0.4 under tensile loading

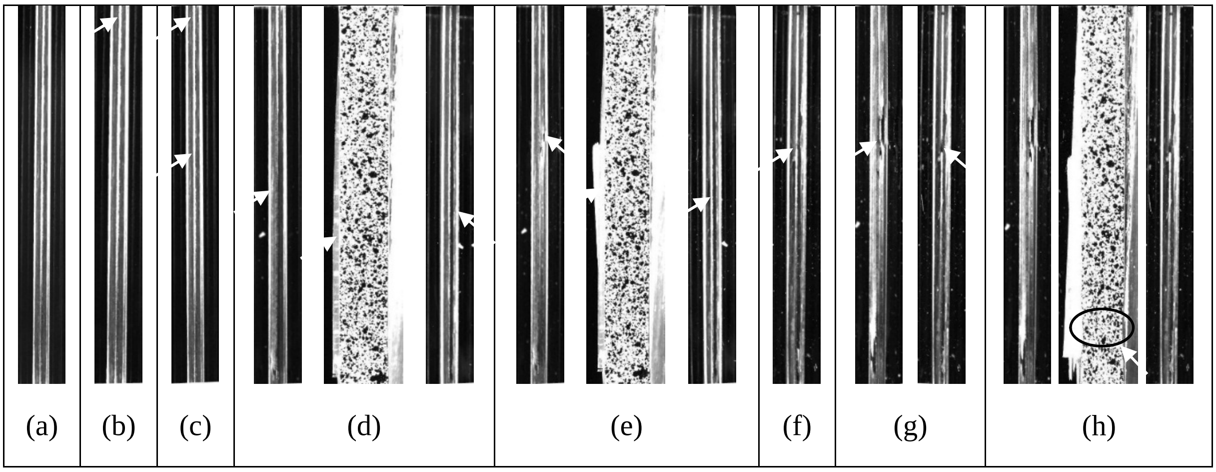



Fig. 6. Photographs showing damage development for FML 3/2-0.4

## 4. Conclusions

The stress-strain behaviour of two discrete layups of FMLs are presented along with their real time damage evolution. The effect of layers of metal dispersing through the thickness on behaviour of FMLs is brought out under tension preserving total thickness for layer of metal same. The present study shows following.

- The strength of FML having placement of layers of composite together (FML 2/1-0.6) is similar to FML in which layers of metal are used to discrete layers of composite (FML 3/2-0.4).

- After attaining maximum stress, FML 3/2-0.4 displays a more progressive type of failure in which layers of composite are isolated by layers of metal. This seems to increase tolerance to damage for this FML.

## REFERENCES


1. Vlot A., Gunnink J. W. Fiber metal laminates-an introduction. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2001.

2. Vogelesang L.B., Vlot A. Development of fiber metal laminates for advanced aerospace structures. //J Mater Process Technol, vol. 103, 2000.

3. Miller J.L., Progar D.J., Johnson W.S., Clair T.L. Preliminary evaluation of hybrid titanium composite laminates. //J Adhes, vol. 54, 1995.

4. Li E. and Johnson W.S. An Investigation into the Fatigue of a Hybrid Titanium Composite Laminate. //J. Compos. Tech. Res., vol. 20, 1998.

5. Veazie D., Badir A., and Grover Jr. R. Titanium ply effects on the behavior of a hybrid thermoplastic composite laminate. // Journal of Thermoplastic Composite Materials, vol. 11, 1998.

6. Papakonstantinou C.G. and Katakalos K. Mechanical behavior of high temperature hybrid carbon fiber/titanium laminates. //Journal of Engineering Materials and Technology, Transactions of the ASME, vol. 131, 2009.

7. Reiner J., Veidt M., Dargusch M. Failure Modes in Hybrid Titanium Composite Laminates. // Journal of Engineering Materials and Technology, Transactions of the ASME, vol. 140, 2017.

8. Niu W., Bermingham M., Baburamani P., Palanisamy S., Dargusch M., Turk S., Grigson B., and Sharp P. The effect of cutting speed and heat treatment on the fatigue life of grade 5 and grade 23 ti–6al–4v alloys. Materials & Design, vol. 46, 2013.

9. Sharma A.P., Khan S.H., Kitey R., Parameswaran V. Effect of through thickness metal layer distribution on the low velocity impact response of fiber metal laminates. Polym. Test., vol. 65, 2017.

10. Sharma A.P., Khan S.H., Parameswaran V. Experimental and numerical investigation on the uni--axial tensile response and failure of fiber metal laminates. Compos. Part B Eng., vol. 125, 2017.


**Information about authors:**


**Sharma A.P.** – Institute Post Doctoral Fellow, Indian Institute of Technology Madras, Department of Aerospace Engineering
**E-mail:** ankushsharma1000@gmail.com

Velmurugan R. – Professor, Indian Institute of Technology Madras, Department of Aerospace Engineering
**E-mail:** ramanv@iitm.ac.in

# A COMPARATIVE ANALYSIS OF WAVE PROPERTIES OF THE FINITE AND INFINITE DOUBLY PERIODIC ARRAYS OF VOLUMETRIC AND THIN DEFECTS

**Sumbatyan M.A., Remizov M.Y.**

We study a two-dimensional problem on wave propagation through doubly periodic arrays of defects located in an elastic material. The incident wave is longitudinal, and the defects may be thin (cracks) or volumetric (voids). For both the types of defects we compare wave properties of the structure whose geometry may be either finite or infinite in the transversal periodic direction, with respect to the direction of the incident wave. The physical parameters under consideration are the reflection and the transmission coefficients, which are studied versus frequency parameter in the one-mode regime.

**1. Thin defects problem.** To study the filtration properties, let us consider the normal incidence of a plane longitudinal wave, propagating in an unbounded elastic medium $p^{inc} = e^{ikx_1}$, on a doubly-periodic system of finite number $M(>2)$ of identical vertical arrays, which are finite or infinite along $x_2$ and infinite in the direction $x_1$. Each of them is an ordinary periodic system of coplanar linear cracks located at $x_1 = 0, d, 2d, ...(M-1)d$. In the infinite case, under the natural symmetry, the problem is reduced to the consideration of a plane waveguide of the width $2a$, which includes $M$ cracks (Fig.1). For the finite case, for $M$ vertical arrays with $N$ cracks in each vertical one, it is necessary to solve the corresponding boundary integral equation over all available contours of the crack system. It is assumed that with the normal wave incidence $e^{i(k_1 x_1 - \omega t)}$ there is a regime of one-mode propagation with $k_1 a < \pi$, where $k_1$ – the wave number of the longitudinal wave, $2a$ - the period of the system in the vertical direction, $d$ - in the horizontal one. The semi-analytical method is used when the distance between the adjacent parallel arrays $d$ and the incident wave length $\lambda = 2\pi / k_1$ are such that the condition $d / a >> 1$ is satisfied. The analysis of the properties of the scattering coefficients depending on the physical parameters for the three diffraction problems: a finite periodic system of thin defects in a scalar formulation, an infinite periodic system in a scalar formulation, an infinite periodic system in a plane problem of the elasticity theory, was carried out in [1-5]. Let us cite here only the main properties of numerical analysis of the solutions for the periodic systems by the developed semi-analytical method [5].

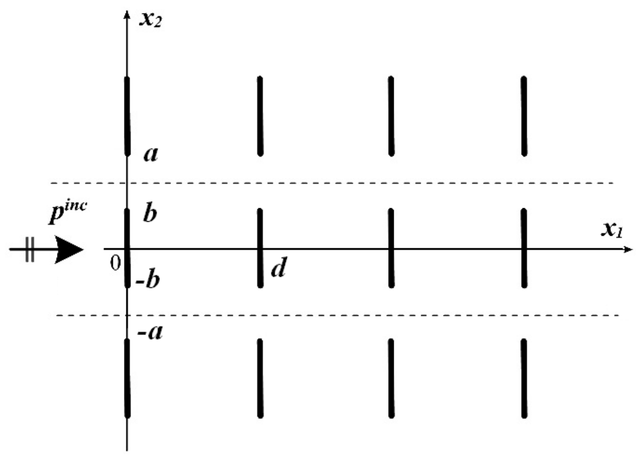



**Fig. 1.** Incidence of a plane wave on a periodic array of linear obstacles

Let us perform a numerical analysis of the problems considered, on example of the medium with the longitudinal wave speed $c_1 = 6000$ m/s (steel) and the ratio of the longitudinal and the transverse wave speeds is $c_1 / c_2 = 1.87$. To begin with, let us compare the moduli of reflection and transmission coefficients versus frequency parameter between the three studied cases for a single vertical array (Figs. 2 and 3). So, we assume, that the longitudinal wave speed in the problem 2 is equal to the transverse wave speed of the problems 1 and 3.

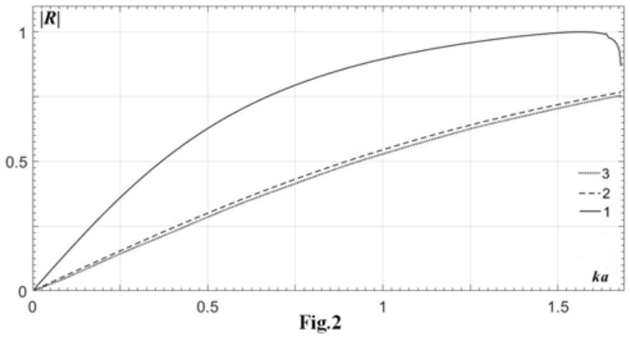


Fig.2

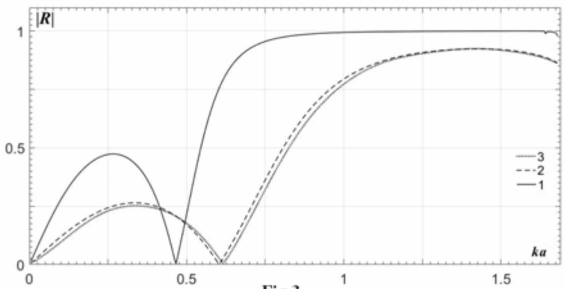


Fig.3

**Fig. 2.** Comparison of three different periodic models: one vertical row ($M = 1$), period of the lattice is 0.02 m, size of each crack is $2b = 0.015$ m; line 1 – infinite array, elastic theory; line2 – infinite array, scalar theory; line 3 – finite array with $M_1 = 7$ vertical cracks, scalar theory.

**Fig. 3.** Comparison of three different periodic models: two vertical rows ($M = 2$), period of the lattice is 0.02 m, size of each crack is $2b = 0.015$ m, distance between the rows is $d = 0.02$ m; line 1 – infinite array, elastic theory; line2 – infinite array, scalar theory; line 3 – finite array with $M_1 = 7$ vertical cracks, scalar theory.

This condition shortens the one-mode frequency interval, whose limit from the right becomes $\pi / 1.87 = 1.680$, (Figs. 2 and 3). In Figures 4 and 5 the comparative numerical analysis of the scalar problems 1 and 3 has been performed for the transverse incident wave. Let us notice, that for all cases the filtration interval can be seen in the upper part of the one-mode frequency range. It is shown, that lines 2 and 3 in Figs. 2 and 3, related to the scalar problems, are practically coinciding that takes place even for $N = 10$ cracks in each vertical array. It should also be noted, that line 1 related to the elastic problem, shows a significant domination of the filtration property, when compared with both infinite and finite scalar problems. Let us also notice, that for two vertical arrays in the elastic problem a perfect filtration takes place for $ak \geq 0.7$, but for one vertical row this property is valid only for $ak \geq 1.5$; this also confirms the evident property, that with the growth of the vertical rows the filtration becomes stronger.

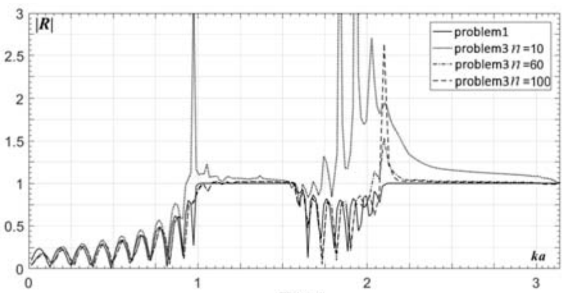


Fig.4

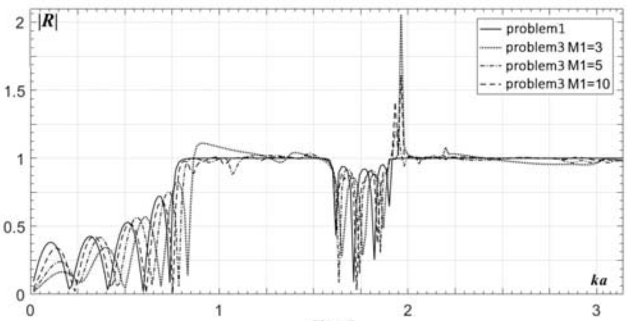


Fig.5

**Fig. 4.** Comparison of two scalar models: ten vertical rows ($M = 10$), period of the lattice is 0.02 m, size of each crack is $2b = 0.015$ m, distance between the rows is $d = 0.02$ m; problem 1 – infinite array; problem 3 – finite array with $M_1 = 10$ vertical cracks; $n$ is the number of the numerical grid nodes on each crack.

**Fig. 5.** Comparison of two scalar models: five vertical rows ($M=5$), period of the lattice is 0.02 m, size of each crack is $2b=0.018$ m, distance between the rows is $d=0.02$ m; problem1 – infinite array; problem 3 – finite array with various number $M_1$ of vertical cracks.

Let us pass to the analysis of the grid size to the precision of the obtained results. It is stated, that in the case of a single obstacle it is sufficient to take 10 grid nodes per each wavelength, to provide reliable results. Thus, for the frequency 0.16 MHz in this formulation the wavelength is 0.0375 m, hence on the obstacle of the length 0.015 m it is sufficient to take only 5 nodes. However, the complex geometry of the diffraction lattice requires greater number of nodes. It can be seen from Fig.4, which represents the results for the array of 10 vertical rows ($M=10$), each containing 10 obstacles ($M_1=10$), that with 10 nodes ($n=10$) over each obstacle the calculations are correct only in the low-frequency case (for $ka<1$). The analysis shows, that for 5 vertical arrays ($M=5$) with the obstacles of the length 1.8cm, 10 obstacles in each vertical row ($M_1=10$) are sufficient to get finite case quite close to the infinite one (see Fig.5). It is stated that with the growing number of obstacles in a single vertical row, so with the growth of parameter $M_1$, keeping all other parameters unchanged, the interval of the frequency cutoff varies insignificantly. The reflection inside this frequency interval is almost constant, being equal to unit value. This property takes place also for infinite arrays, where $M_1$ is a number of such arrays.

**2. Volumetric defects problem.** Here the normal incidence of the same plane wave $p^{inc}=e^{ikx_1}$ in an unbounded acoustic medium on a doubly periodic array of cylindrical obstacles, which is strictly finite in $x_1$ direction, being either infinite or finite in $x_2$ direction, is considered. Here $k=\omega/c$ is the wave number, $c$ is the wave speed, $M$ and $N$ also designate respectively the number of vertical arrays and the number of obstacles in each array of the doubly periodic system, Fig.6. If the structure is infinite along $x_2$, then by the evident symmetry, the problem may be reduced to a single-layer problem ($0<x_2<d$), where in Fig. 6 $M=4$.

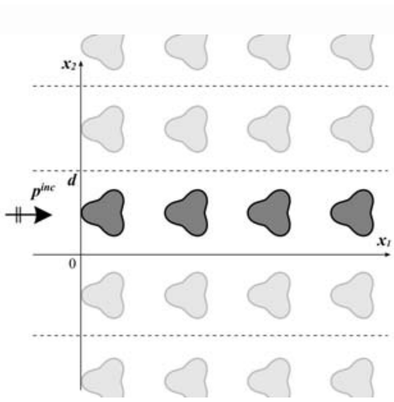



**Fig. 6.** Incidence of a plane wave on a periodic array of volumetric obstacles

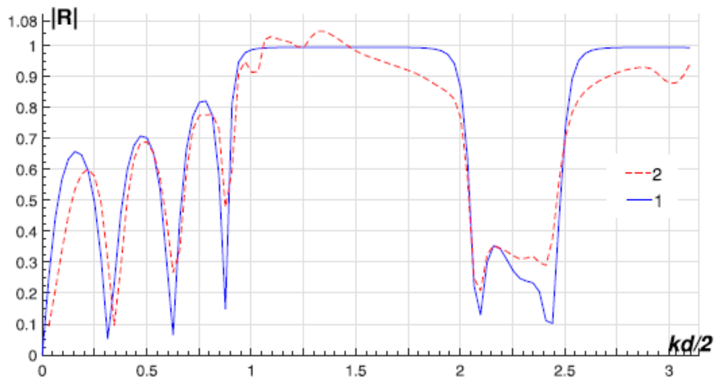



**Fig. 7.** The reflection coefficients for infinite (line 1) and finite ($N=7$ – line 2) structures: $M=4$

The analysis of the properties of the scattering coefficients for volumetric defects diffraction problems for finite and infinite periodic systems in a scalar formulation was carried out in [6-12]. Let us also cite only the main properties of numerical analysis of the solutions [6]. In all cases a standard BEM numerical technique [13] was used to solve respective integral equation. At least 20–30 nodes should be chosen per each wavelength, which taking into account very regular shape of the obstacles can guarantee sufficient precision. Since some methods were used with the discretization [14,15] and since the maximal size of each obstacle in our examples is equal to the wavelength, we chose 64 grid nodes per each cylindrical obstacle, to provide three right significant digits. The precision was checked by calculation with 128 nodes. Only round shape of the obstacles, with diameter 0.015 m was considered for the numerical experiments. The distance between two neighbor obstacles is taken the same in the both directions, and it is equal to the thickness of the strip $d = 0.02$ m, which simultaneously is the period of the grating. The steel material with the longitudinal wave velocity $c = 6000$ m/s is used as the modeled medium. It is easily seen that the one-mode range $kd / \pi$ makes it possible to compare the infinite and finite structures in the LF one-mode ultrasonic regime up to the frequency $f = 300$ KHz. Note, that quantities $R$ and $T$ can be defined only in the infinite case. For a finite number of obstacles, as an analogue of the reflection coefficient $R$, the average value of the reflected wave field calculated on the vertical interval just before the first vertical row to the left, i.e. a certain small $x_1 < 0$, is used. The size of the interval along axis $x_2$ is equal to $Md$. In the same way, the average value of the transmission coefficient $T$ is calculated for the total wave field just immediately after the last right obstacle.

An example of such a comparison between the arrays with four vertical rows ($M = 4$) is presented in Fig. 7. It is evident, that even with a small number of obstacles in the vertical direction ($N = 7$), both the methods are close to each other. For all the cases the filtering takes place over the frequency range $1.0 \le kd/2 \le 2.0$, which is however more pronounced in the case of infinite array. The influence of the number of vertical rows $M$ on the above-mentioned filtration property is displayed in Fig. 8 . The analysis of the curves shows, that for the infinite array the increase in the number of rows $M$ leads to the clear filtration properties of the periodic structure. Qualitatively the finite structure possesses the same properties, however in the latter case this behavior is less pronounced and has a smoother character, see Fig. 9. For both the geometries one can see the two opposite types of filtration, with a rapid passage from the cut off frequency interval $1.0 \le kd/2 \le 2.0$ to the almost full transmission frequency interval $2.0 \le kd/2 \le 2.5$, in both the cases.

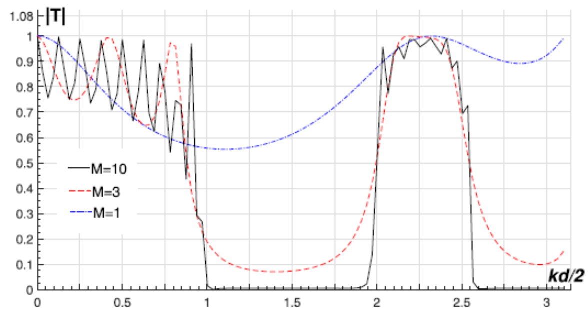



**Fig.8.** The transmission coefficients for different number of vertical columns $M$ in the infinite array

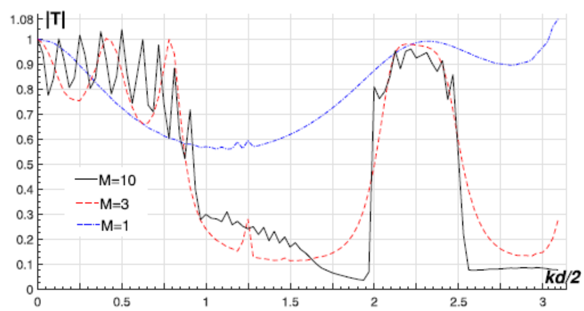



**Fig.9.** The transmission coefficients for different number of vertical columns $M$ in the finite array: $N = 31$

**3. Conclusions.**

1) Virtually, any frequency interval with the wave channel locking can be created by controlling the relative crack size or diameter of the round obstacle, the number of vertical arrays and the lattice period in the horizontal direction.
2) Numerical analysis of the proposed approach for the doubly-periodic array of thin and volumetric obstacles infinite in one direction can precisely predict the scattering parameters property of the finite in both direction array. Thus, increasing the number of the cracks and the holes in the array in the direction, where the number of holes is infinite, increases the accuracy of the prediction of the method.
3) The figures illustrate the difference in the properties of the scattering coefficients between thin and volumetric defects. Doubly periodic array of round holes works well as an acoustic filter in the central part of

the single-mode frequency range, while the doubly periodic structure of thin screens is more efficient in this sense, for higher frequencies of the considered frequency interval.
4) If the number of defects in vertical row increases, the locking interval changes slightly. Even 7-10 obstacles sufficiently well approximate the case of the infinite system. The increasing number of vertical rows in the doubly-periodic array emphasize the filtering property of the considered structure.
5) The enhancement of the filtering property occurs when considering infinite doubly-periodic systems of thin defects in the context of the elastic model in comparison with the infinite and finite scalar analogue.

**Acknowledgments.** The authors are thankful to the Russian Science Foundation (RSCF), for the support by Project 15-19-10008-P.

## REFERENCES

1. Achenbach J.D., Li Z.L.: Reflection and transmission of scalar waves by a periodic array of screens, Wave Motion, 1986, v.8, p.225–234.
2. Scarpetta E.: In-plane problem for wave propagation through elastic solids with a periodic array of cracks, Acta Mechanica, 2002, v.154, p.179–187.
3 Scarpetta E., Sumbatyan M.A. On the oblique wave penetration in elastic solids with a doubly periodic array of cracks, Quart. Appl. Math., 2000, v.58, p.239–250.
4. Remizov M.Y. Low-frequency penetration of elastic waves through a periodic array of cracks, Vestnik of Don State Technical University, 2017, No.1(88), p.18-27 (in Russian).
5. Popuzin V.V., Remizov M.Y., Sumbatyan M. A., Brigante M.A comparative analysis of wave properties of finite and infinite cascading arrays of cracks, Springer series: Advanced Structured Materials, 2019, v.109, p.97-112.
6. Popuzin V.V., Remizov M.Y., Sumbatyan M. A. Low-frequency ultrasonic filters of finite and infinite periodic structure, Mech. Res. Comm., 2019, v.98, p.16-21.
7. Popuzin V.V., Zotov V. M., Sumbatyan M. A. Theoretical and experimental study of an acoustically active material containing a doubly-periodic system of cylindrical holes, Springer Proceedings in Physics, 2017, v.193, p.293-308.
8. Nemat-Nasser S. , Sadeghi H., Amirkhizi A.V. , Srivastava A. Phononic layered composites for stress-wave attenuation, Mech. Res. Comm., 2015, v.68, 65–69.
9. Li Y., Zhu L., Chen T. Plate-type elastic metamaterials for low-frequency broad-band elastic wave attenuation, Ultrasonics, 2017, v.73, p.34–42.
10. Montiel F., Chung H. , Karimi M., Kessissoglou N. An analytical and numerical investigation of acoustic attenuation by a finite sonic crystal, Wave Motion, 2017, v.70, p.135–151.
11. Mykhas'kiv V.V., Zhbadynskyi I.Y., Zhang C. On propagation of time-harmonic elastic waves through a double-periodic array of penny-shaped cracks, Eur. J. Mech. A Solids, 2019, v.73, p.306–317.
12. Scarpetta E., Sumbatyan M.A. Wave propagation through elastic solids with a periodic array of arbitrarily shaped defects, Math. Comput. Model., 2003, v.37, p.19–28.
13. Banerjee P.K., Butterfield R. Boundary Element Methods in Engineering Science, McGraww-Hill: London, 1981.
14. Sumbatyan M.A., Scalia A. Equations of mathematical diffraction theory, CRC Press: Boca Raton, Florida, 2005.
15. Belotserkovsky S.M., Lifanov I.K. Method of Discrete Vortices, CRC Press: Boca Raton, Florida, 1992.

**Information about authors:**

**Mezhlum A. Sumbatyan** – Professor, Department of Theoretical and Computer Hydroaerodynamics, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science, Southern Federal University, Milchakova Street 8a, Rostov-on-Don, Russia
**E-mail:** sumbat@math.rsu.ru

**Mikhail Y. Remizov** – Senior researcher, Ph.D., Associate Professor, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science, Southern Federal University, Milchakova Street 8a, Rostov-on-Don, Russia. **E-mail:** remizov72@mail.ru

# PENETRATION OF A SPHERICAL CONDUCTIVE PUNCH INTO A PIEZOELECTRIC INHOMOGENEOUS HALF-SPACE

**Andrey S. Vasiliev, Sergei S. Volkov, Sergei M. Aizikovich***

Contact problems of theory of elasticity and electroelasticityare usually reduced to the singular integral equations by means of integral transformation technique. For homogeneous piezoelectric materialsthese integral equations can be solved in an exact analytical form. Melkumyan and Ulitko (1988) obtained the exact solution for contact problems on indentation of an electroelastic half-space by conductive and insulating circular punches with flat foundation. Wang *et al.*(2008) provided the exact solution for similar problem for circular flat, spherical and conical punches.Chen and Ding (1999) obtained the exact expressions for electroelastic fields arising in indentation of piezoelectric half-space by a rigid sphere. Piezoelectric indentation of spherical, conical and flat circular punches with frictional sliding and its applications to scanning probe microscopy were discussed in (Makagon*et al.*2007, 2009). Action of a flat charged punch on a piezoelectric half-space with symmetry of class 6 was studied in (Berndt and Sevostianov 2016a).

Explicit exact solutions for a point electric charge and an arbitrarily oriented point force acting inside an infinite or on the boundary of semi-infinite transversely isotropic piezoelectric material were obtained by Karapetian*et al.*(2000). Recently, similar problem was solved for piezoelectric 622 hexagonal crystals (Sevostianov*et al.* 2014)they used methods of the potential theory (Fabrikant 1989).

Functionally graded (FG) materials are the materials with continuous variation of properties over volume. They are widely used to avoid corrosion, reduce fatigue, fracture and wear. Many aspects of contact mechanics of FG materials were studied (Altenbach and Eremeyev 2008;Tokovyy and Ma 2015; Wang and Noda 2001). Analytical solution for normal point force and point electric charge problem was obtained in a form of infinite series for a half-space with FG coating in (Vasiliev*et al.* 2016).Contact interaction of a rigid punch and a solid with FG coating is considered in (Chen and Chen 2013a, 2013b; Guler and Erdogan 2004; Ke and Wang 2006; Liu *et al.* 2008). Usually contact problems for coated elastic solids are reduced to the solution of singular integral equations requiring special methods to solve. Contact problems for electroelastic coated solids in the case of mixed mechanical and electrical boundary conditions are reduced to a system of singular integral equations over two unknown functions. Plane and axisymmetric indentation of piezoelectric semi-infinite solid with FG coatingby conductive and insulating puncheswere studied in (Ma *et al.* 2014, 2015, 2016; Su *et al.* 2016a, 2016b). Authors consider only exponential variation of electromechanical properties in the coating. System of integral equations was solved numerically by the collocation method (Kalandia 1973).This method is effective only for intermediate values of relative thickness of the coating and not suitable for very thin or thick coatings. Wang*et al.*(2008) has investigated frictionless indentation of an electroelasticpiezoelectric film on a rigid substrate by insulated and conductive circular cylindrical, conical and spherical punches.Wu *et al.* (2013)has investigated similar problem for a piezoelectric layered half-space for a cases of perfect and imperfect coupling between the layers. They also used numerical scheme to solve the integral equations. Results obtained by direct numerical methods such as finite element method should also be mentioned. They provide huge opportunities for modeling of real complex devices (Eremeyev and Nasedkin 2017; Nasedkin*et al.* 2015; Soloviev*et al.* 2016) but are not convenient for multi-parameter theoretical analysis.

In contrary to the mentioned above, the results presented in the paper are obtained for arbitrary variation of electromechanical properties in depth of the coating. Generalization of the bilateral asymptotic method (Aizikovich 1990) is used to solve system of integral equations of the problem of indentation of a piezoelectric half-space with FG piezoelectric coating by a rigid spherical punch. Previously this method was used only for single integral equations arising in contact problems for elastic isotropic (Kudish*et al.* 2017b) and transversely isotropic solids(Vasiliev*et al.* 2017a, 2017b). Approximated solution of the problem is obtained in analytical form. Constructed solution is asymptotically exact both for small and large values and of high accuracy for intermediate values of relative coating thickness.

The value of singularity coefficient is studied and it was shown that the singularity affects only the small vicinity of the contact boundary.

Using previously obtained results (Kudish*et. al.* 2017b) the results of the paper can be easily generalized to the case of normal contact of two electroelasticpiezoelectric solids with FG coatings. Using the method described in the paper together with results of (Volkov*et al.* 2016), the problem on bending of Kirchhoff's plate lying on an electroelastic piezoelectric half-space with FG coating can be solved.

**Acknowledgments**

Authors acknowledge the support of the Russian Science Foundation (RSF) through grant no. 15-19-10056.

## REFERENCES

Aizikovich S.M. (1990). An asymptotic solution of a class of coupled equations. //Journal of Applied Mathematics and Mechanics, **54**(5), 719–724.

Altenbach H. and Eremeyev V.A. (2008) Direct approach-based analysis of plates composed of functionally graded materials. //Arch. Appl. Mech., **78**, 775–794.

Berndt E.A. and Sevostianov I. (2016a). Action of a smooth flat charged punch on the piezoelectric half-space possessing symmetry of class 6. //Int. J. Eng. Sci., **103**, 77–96.

Berndt E.A. and Sevostianov I. (2016b). Green's function for unbounded piezoelectric material of class 6. //Int. J. Solids Struct. **83**, 81–89.

Chen W.Q. and Ding H. (1999). Indentation of a transversely isotropic piezoelectric half-space by a rigid sphere. //Acta Mech. SolidaSinica, **12**, 114–120.

Chen P.J. and Chen S.H. (2013a). Thermo-mechanical contact behavior of a finite graded layer under a sliding punch with heat generation. //Int. J. Solids Struct. **50**, 1108–1119.

Chen P.J. and Chen S.H. (2013b). Partial slip contact between a rigid punch with an arbitrary tip-shape and an elastic graded solid with a finite thickness. //Mech. Mater., **59**, 24–35.

Eremeyev V.A. and Nasedkin A.V. (2017). Mathematical models and finite element approaches for nanosized piezoelectric bodies with uncoulped and coupled surface effects. //Advanced Struct. Mater. **59**, 1–18.

Fabrikant V. I. (1989). Applications of potential theory in mechanics: selection of new results. Dordrecht: Kluwer.

Giannakopoulos A.E. and Suresh S. (1999). Theory of indentation of piezoelectric materials. //Acta Mater. **47** (7), 2153–2164.

Guler M.A. and Erdogan F., (2004) Contact mechanics of graded coatings. //Int. J. Solids Struct., **41**, 3865–3889.

Kalandia A.I. (1973) Mathematical methods of two-dimensional elasticity. M.: Nauka, (in Russian).

Karapetian E., Sevostianov I. and Kachanov M. (2000). Point force and point electric charge in infinite and semi-infinite transversely isotropic piezoelectric solids. //Philosophical Magazine, **80**, 331–359.

Ke L.-L. and Wang Y.-S. (2006). Two-dimensional contact mechanics of functionally graded materials with arbitrary spatial variations of material properties. //Int. J. Solids Struct., **43**, 5779–5798.

Ke L.-L., Wang Y.-S., Yang J. and Kitipornchai S. (2010). Sliding frictional contact analysis of functionally graded piezoelectric layered half-plane. //Acta Mech., **209**, 249–268.

Kovalev Yu.D. and Stativka E.N. (2011), Electroelastic state of an inhomogeneous piezoceramic layer under symmetric loading. //Mech. Compos. Mater., **47** (5), 561–569.

Kudish I.I., Volkov S.S., Vasiliev A.S. and Aizikovich S.M. (2016). Some criteria for coating effectiveness in heavily loaded line elastohydrodynamically lubricated contacts-Part II: Lubricated contacts. //J. Tribol., **138**, doi: 10.1115/1.4030958.

Kudish I.I., Volkov S.S., Vasiliev A.S. and Aizikovich S.M. (2017a). Effectiveness of coatings with constant, linearly, and exponentially varying elastic parameters in heavily loaded line elastohydrodynamically lubricated contacts. //J. Tribology, **139**, doi: 10.1115/1.4033360.

Kudish I.I., Volkov S.S., Vasiliev A.S. and Aizikovich S.M. (2017b). Lubricated Point Heavily Loaded Contacts of Functionally Graded Materials.Part 1.Dry Contacts. //Math. Mech. Solids, doi: 10.1177/1081286517704689.

Kudish I.I, Volkov S.S, Vasiliev A.S and Aizikovich S.M. (2017c). Lubricated point heavily loaded contacts of functionally graded materials.Part 2.Lubricated contacts. //Math. Mech. Solids, **doi**: 10.1177/1081286517704690

Liu T.-J., Wang Y.-S. and Zhang C. (2008). Axisymmetric frictionless contact of functionally graded

materials. //Arch Appl. Mech., **78**, 267–282.
Ma J., Ke L.-L. and Wang Y.-S. (2014) Frictionless contact of a functionally graded magneto-electro-elastic layered half-plane under a conducting punch. //Int. J. Solids Struct., **51**, 2791–2806.
Ma J., Ke L.-L.and Wang Y.-S. (2015). Sliding frictional contact of functionally graded magneto-electro-elastic materials under a conducting flat punch. //J. Appl. Mech., **82**, 011009.
Ma J., El-Borgi S., Ke L.-L. and Wang Y.-S. (2016). Frictional contact problem between a functionally graded magnetoelectroelastic layer and a rigid conducting flat punch with frictional heat generation. //J. Thermal Stresses, **39**, 245–277.
Makagon A., Kachanov M., Kalinin S.V. and Karapetian E. (2007). Indentation of spherical and conical punches into piezoelectric half-space with frictional sliding: Applications to scanning probe microscopy. //Phys. Rev.B, **76**, 064115.
Makagon A., Kachanov M., Karapetian E., Kalinin S.V. (2009). Piezoelectric indentation of a flat circular punch accompanied by frictional sliding and applications to scanning probe microscopy. //Int. J. Eng. Sci., **47**, 221–239.
Melkumyan S.A. and Ulitko A.F. (1987). Axissymmetric contact problem of electroelasticity for a half-space. //Soviet Appl. Mech., **23** (9), 836–843.
Nasedkin A.V., Shevtsova M.S., Zhilyaev I.V., Shevtsov S.N. and Chang S.-H. (2015). Optimization of the new generation hydroacoustic devices based on porous piezoelectric ceramics or perforated nanoscale PZT-films. //Piezoelectrics and Nanomaterials: Fundamentals, Developments and Applications, New York: Nova Science Publishers, 191–224.
Sevostianov I., Silva U.P. and Aguiar A.R. (2014). Green’s function for piezoelectric 622 hexagonal crystals. //Int. J. Eng. Sci,. **84**, 18–28.
Soloviev A.N., Oganesyan P.A., Lupeiko T.G. and Kirillova E.V. (2016). Modeling of non-uniform polarization for multi-layered piezoelectric transducer for energy harvesting devices. //Springer Proc. Phys., **175**, 651–658.
Su J., Ke L.-L. and Wang Y.-S.(2016a). Axisymmetric frictionless contact of a functionally graded piezoelectric layered half-space under a conducting punch. //Int. J. Solids Struct., **90**, 45–59.
Su J., Ke L.-L. and Wang Y.-S. (2016b). Fretting contact of a functionally graded piezoelectric layered half-plane under a conducting punch. //Smart Mater. Struct., **25**, 025014.
Tokovyy Y. and Ma C.-C. (2015). Analytical solutions to the axisymmetric elasticity and thermoelasticity problems for an arbitrarily inhomogeneous layer. //Int. J. Eng. Sci., **92**, 1–17.
Vasiliev A.S., Volkov S.S. and Aizikovich S.M. (2016). Normal point force and point electric charge in a piezoelectric transversely isotropic functionally graded half-space. //Acta Mech., **227**(1), 263–273.
Vasiliev A.S., Volkov S.S., Aizikovich S.M. and Mitrin B.I. (2017a). Plane contact problem on indentation of a flat punch into a transversely-isotropic half-plane with functionally graded transversely-isotropic coating. //Z. Angew. Math. Phys., **68**, doi: 10.1007/s00033-016-0746-8.
Vasiliev A.S., Volkov S.S., Belov A.A., Litvinchuk S.Yu. and Aizikovich S.M. (2017b). Indentation of a hard transversely isotropic functionally graded coating by a conical indenter. //Int. J. Eng. Sci., **112**, 63–75.
Volkov S.S., Litvinenko A.N., Aizikovich S.M., Wang Y.-C. and Vasiliev A.S. (2016). Axisymmetric bending of a circular plate with stiff edge on a soft FGM layer. //Struct. Eng. Mech., **59**, 227–241.
Volkov S.S., Vasiliev A.S., Aizikovich S.M. and Mitrin B.I. (2017). Axissymmetric indentation of an electroelastic piezoelectric half-space with functionally graded piezoelectric coating by a circular punch.// Acta Mech., doi: 10.1007/s00707-017-2026-x.
Wang J.H, Chen C.Q. and Lu T.J. (2008). Indentation responses of piezoelectric films. //J. Mech. Phys. Solids, **56**, 3331–3351.
Wang B.L. and Noda N. (2001). Thermally induced fracture of a smart functionally graded composite structure. //Theor.Appl. Fract. Mech., **35**, 93–109.
Wu Y.F., Yu H.Y. and Chen W.Q. (2013). Indentation responses of piezoelectric layered half-space. //Smart Mater.Struct., **22**, 015007.

[1]*Research and Education Center "Materials", Don State Technical University,*
*1 Gagarin sq., Rostov-on-Don 344000, Russia*
∗Corresponding author, Prof., D.Sc., Head of Laboratory,
E-mail: saizikovich@gmail.com

**CONTENTS AND ABSTRACTS**

**Dudarev V.V., Mnukhin R.M.** ***On the identification problem of variable parameters Lame of a inhomogeneous cylinder.*** Using the general relations of the linear theory of elasticity, the problem of steady axisymmetric vibrations of an inhomogeneous hollow cylinder is considered. Elastic properties are considered variable along the radial coordinate. Using the method of separation of variables, the direct problem of determining the field of displacements is solved. The influence of the laws of the change of Lame parameters on the amplitude-frequency characteristics is analyzed. A new inverse coefficient problem is formulated to determine these parameters. The numerical solution is constructed using an iterative process. Based on a general weak formulation for an elastic inhomogeneous body, after linearization, a system of Fredholm integral equations of the first kind with respect to two unknown corrections is obtained. Examples of reconstruction are presented. ....................................................146

**Dudin D.S., Keller I.E.** ***Asymptotic forms of coupled processes of interdiffusion, viscoelastic deformation, chemical reaction and microstructure evolution***. A model of coupled quasistatic processes of mutual diffusion, viscoelastic deformation, chemical reactions and microstructure evolution in a three-component medium under isothermal conditions is considered. A one-dimensional model problem admitting a homogeneous stationary solution is stated. The small perturbations of this solution lead to a system of coupled linear differential equations and the eigenvalue problem. It allows us to study the relaxation time spectrum of the perturbed process depending on the perturbation wavelength. The asymptotic forms of the dependencies that related to the simplest coupled processes were studied. ..............................................................................................................151

**Erofeev V.I., Leontieva A.V., Shekoyan A.V.** ***Nonlinear waves in a semiconductor with charged dislocations.*** To describe a nonlinear ultrasonic wave in a semiconductor with charged dislocations, an evolution equation is obtained that generalizes the well-known equations of wave dynamics: Burgers and Korteweg-de Vries. By the method of truncated decompositions, an exact analytical solution of the evolution equation with a kink profile has been found. The kind of kink (increasing, decreasing) and its polarity depend on the values of the parameters and their signs. .......................................................156

**Zhamakochyan K. A., Sargsyan S. H.** ***Circle thin plate model by the micropolar theory of elasticity with independent fields of displacements and rotations and the development of the finite element method.*** In the present paper, on the basis of the previously constructed models of statics and dynamics of micropolar elastic circle thin plates with independent fields of displacements and rotations, the application of the finite element method is developed. Two specific problems are studied: 1) the static axisymmetric problem of a circle plate, when the edge of the plate is hinged-supported, and the load is evenly distributed, 2) the axisymmetric free vibrations of the circle plate, when the edge of the plate is hinged-supported. Numerical results are presented, based on the analysis of which some certain properties of the micropolar materials are established. .......................................................................160

**Zarubin V.S., Zimin V.N., Kuvyrkin G.N.** ***Modeling the shape deviation of the spherical shell of the calibration-adjustment spacecraft.*** The spherical shell made with high accuracy is one of the geometric shapes of passive orbital signal transponders and calibration-adjustment spacecraft used to determine the energy potential of the radar channel of the ground-based spacecraft motion control complex. Under the action of solar radiation, a temperature distribution non-uniform over the surface of such a shell arises and causes its shape to deviate from spherical. The stable distribution of the shell temperature with a fixed orientation relative to the Sun obtained by solving the Fredholm integral equation of the second kind was used to determine the indicated deviations. A quantitative analysis of the possible alignment of the quasistationary temperature distribution of the shell in the case of its rotation with a constant angular velocity around an axis perpendicular to the direction to the Sun is carried out.......165

**Zarubin V.S., Zimin V.N., Savelyeva I.Yu.** ***Modeling the temperature state of the spacecraft shell in the shadow orbit area.*** A thermal model that describes the steady-state temperature of an aluminized polymer spherical shell of a calibration spacecraft located in a shaded area of the Earth orbit is constructed. This model takes into account the transfer of thermal energy by radiation in the shell cavity and allows you to establish the dependence of the temperature distribution on the shell surface on the height of the spacecraft above the Earth's surface and the radiation coefficients of the outer and inner shell surfaces. A quantitative analysis of the obtained dependence showed that with an increase in the indicated radiation coefficients, the temperature distribution is equalized over the shell surface while maintaining its isothermal portion with the lowest temperature value located on the opposite side of the shell to the Earth. With an increase in the height of the spacecraft above the Earth's surface, the area of

## ОГЛАВЛЕНИЕ